TALLER DE PROBLEMAS (Clase #3)

Sección 2.1.8, ejercicios 3 y 10

Nombre: Andres Felipe Vargas Molano - 2218420
Nombre: Carlos Laguado - 2047095
Nombre: Andres Felipe Rubio Toloza - 2218426

Ejercicio 5

5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2 y lo detallamos en la sección 4.4.9, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)^i_j \to (A^*)^j_i \equiv A^j_i$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real} \\ z_4^* = z_4 & \text{real} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos} \end{cases} .$$

Entonces

a) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.6 forman una base para ese espacio vectorial.

b) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a | b \rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

c) Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

Solución:

a) Para comprobar si es una base, comprobamos que el conjunto de matrices sea linealmente independiente, en el anexo1 “Ejercicio5_Clase3.wxmx” se encuentra la comprobación de la independencia lineal.

b) Adicionalmente, para comprobar que el conjunto de matrices conforma una base ortogonal, se realiza el producto interno de cada matriz con el resto de las matrices de la base. En el anexo1 “Ejercicio5_Clase3.wxmx” se comprueban estos resultados, dando como conclusión que el conjunto de matrices dado si conforman una base ortogonal para el espacio vectorial de matrices complejas 2x2 hermíticas.

c)

Subespacios vectoriales de matrices reales puras:

De la base original, eliminamos la matriz con componentes imaginarios, y nos quedamos con las 3 matrices restantes, luego buscamos una matriz 2x2 real que pertenezca al espacio vectorial de las matrices complejas 2x2 hermíticas y comprobamos que este conjunto de matrices sea una base de un espacio vectorial de matrices reales (comprobando independencia lineal):

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ $\in$ espacio vectorial de matrices complejas 2x2 hermíticas.

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + C = 0$$
$$B - D = 0$$
$$B + D = 0$$
$$A - C = 0$$

$$A = -C \qquad B = D$$
$$-C - C = 0 \qquad 2B = 0$$
$$-2C = 0 \qquad B = 0$$

$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = 0 \qquad D = 0$$

El nuevo conjunto de matrices $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ conforma una base de un espacio vectorial de matrices reales. puras.

Subespacios vectoriales de matrices imaginarias puras:

No se puede construir un subespacio vectorial de matrices imaginarias puras, ya que en las posiciones “z1” y “z4” deben ser número reales.

Ejercicio 6

6. Utilizando **Maxima** reproduzca el ejemplo 3 que expusimos en la página 130. Es decir, suponga el espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Este espacio vectorial tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{|\pi_i\rangle\} = \{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\}$, pero en este caso con el producto interno definido por: $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; f(x) \; g(x) \sqrt{1 - x^2}$. Encuentre la base ortogonal correspondiente. A esta nueva base se le conoce como polinomios de Chebyshev de segunda especie[23].

Desarrollo en el anexo 2 “Ejercicio6_Clase3.wxmx”

ANEXOS

a) Muestre que las matrices de Pauli forman una base.

```
σ1: matrix([0,1],[1,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
σ2: matrix([0,−%i],[%i,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -\%i \\ \%i & 0 \end{pmatrix}$$

```
σ3: matrix([1,0],[0,−1]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
σ4: matrix([1,0],[0,1]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
c1·σ1+c2·σ2+c3·σ3+c4·σ4 = matrix([0,0],[0,0]);
```

$$\begin{pmatrix} c4+c3 & c1-\%i\ c2 \\ \%i\ c2+c1 & c4-c3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
solve([c4+c3=0,c4−c3=0], [c4,c3]);
```

$$[[c4=0, c3=0]]$$

```
solve([c1−%i·c2=0,c1+%i·c2=0],[c1,c2]);
```

$$[[c1=0, c2=0]]$$

Como las constantes c1, c2, c3 y c4 son iguales a cero queda demostrado que las matrices de Pauli son linealmente independientes y forman una base.

b) Compruebe que la base es ortogonal bajo el producto interno.

```
g1:transpose(σ1); g2:transpose(σ2); g3:transpose(σ3); g4:transpose(σ4);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \%i \\ -\%i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
g1.σ2;
```

$$\begin{pmatrix} \%i & 0 \\ 0 & -\%i \end{pmatrix}$$

Tr(g1.σ2) = %i − %i;

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \%i & 0 \\ 0 & -\%i \end{pmatrix}\right)=0$$

El producto interno entre σ1 y σ2 es cero, por tanto se concluye que los dos vectores son ortogonales.

g1.σ3;

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tr(g1.σ3) = 0 + 0;

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=0$$

El producto interno entre σ1 y σ3 es cero, por tanto se concluye que los dos vectores son ortogonales.

g1.σ4;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tr(g1.σ4) = 0 + 0;

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=0$$

El producto interno entre σ1 y σ4 es cero, por tanto se concluye que los dos vectores son ortogonales.

g2.σ3;

$$\begin{pmatrix} 0 & -\%i \\ -\%i & 0 \end{pmatrix}$$

Tr(g2.σ3) = 0 + 0;

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\%i \\ -\%i & 0 \end{pmatrix}\right)=0$$

El producto interno entre σ2 y σ3 es cero, por tanto se concluye que los dos vectores son ortogonales.

g2.σ4;

$$\begin{pmatrix} 0 & \%i \\ -\%i & 0 \end{pmatrix}$$

Tr(g2.σ4) = 0 + 0;

$$Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & \%i \\ -\%i & 0 \end{pmatrix}\right)=0$$

El producto interno entre σ2 y σ4 es cero, por tanto se concluye que los dos vectores son ortogonales.

g3.σ4;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tr(g3.σ4) = 0 + 0;

$$Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)=0$$

El producto interno entre σ3 y σ4 es cero, por tanto se concluye que los dos vectores son ortogonales.

Se comprueba que esta es una es base ortogonal al ser cero todos los resultados del producto interno entre los vectores que forman la base.

```
x0:1; x1:t; x2:t^2; x3:t^3;
```

$$1$$
$$t$$
$$t^2$$
$$t^3$$

p0 --> Primer componente de la base ortogonal

```
p0:1;
```

$$1$$

Producto interno entre x1 y p0

```
('integrate(x1·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(x1·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt = 0$$

Producto interno de p0

```
('integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

p1 --> Segundo componente de la base ortogonal

```
x1−('integrate(x1·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))·p0/('integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1)) =
x1−(integrate(x1·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))·p0/(integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$t - \frac{\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt}{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt} = t$$

```
p1:t;
```

$$t$$

Producto interno entre x2 y p1

```
('integrate(x2·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(x2·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{1-t^2}\,dt = 0$$

Producto interno de p1

```
('integrate(p1·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(p1·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{8}$$

Producto interno entre x2 y p0

```
('integrate(x2·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(x2·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{\pi}{8}$$

Producto interno de p0

```
('integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

p2 --> Tercer componente de la base ortogonal

```
x2−('integrate(x2·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1))·p1/('integrate(p1·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1))−('integrate(x2
('integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=x2−(integrate(x2·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1))·p1/(integrate(p1
(integrate(x2·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))·p0/(integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$-\frac{t\int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{1-t^2}\, dt}{\int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{1-t^2}\, dt} - \frac{\int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{1-t^2}\, dt}{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt} + t^2 = t^2 - \frac{1}{4}$$

```
p2:t^2−1/4;
```

$$t^2 - \frac{1}{4}$$

Producto entre x3 y p2

```
('integrate(x3·p2·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(x3·p2·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{1-t^2}\left(t^2 - \frac{1}{4}\right) dt = 0$$

Producto interno de p2

```
('integrate(p2·p2·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(p2·p2·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2 dt = \frac{\pi}{32}$$

Producto entre x3 y p1

```
('integrate(x3·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(x3·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} t^4 \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{\pi}{16}$$

Producto interno de p1

```
('integrate(p1·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(p1·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{8}$$

Producto entre x3 y p0

```
('integrate(x3·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(x3·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{1-t^2}\,dt = 0$$

Producto interno de p0

```
('integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))=(integrate(p0·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1));
```

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

p3 --> Cuarto componente de la base ortogonal

```
x3−('integrate(x3·p2·sqrt(1−t^2),t,−1,1))·p2/('integrate(p2·p2·sqrt(1−t^2),t,−1,1))−('integrate(x3
('integrate(p1·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1))−('integrate(x3·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))·p0/('integrate(p0·p0
x3−(integrate(x3·p2·sqrt(1−t^2),t,−1,1))·p2/(integrate(p2·p2·sqrt(1−t^2),t,−1,1))−(integrate(x3·
(integrate(p1·p1·sqrt(1−t^2),t,−1,1))−(integrate(x3·p0·sqrt(1−t^2),t,−1,1))·p0/(integrate(p0·p0·
```

$$-\frac{\left(t^2-\frac{1}{4}\right)\int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{1-t^2}\left(t^2-\frac{1}{4}\right)dt}{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\left(t^2-\frac{1}{4}\right)^2 dt} - \frac{t\int_{-1}^{1} t^4 \sqrt{1-t^2}\,dt}{\int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{1-t^2}\,dt} - \frac{\int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{1-t^2}\,dt}{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt} + t^3 = t^3 - \frac{t}{2}$$

```
p3:t^3−t/2;
```

$$t^3 - \frac{t}{2}$$