

# Transformada de Fourier

**Andrés Felipe Rubio**<sup>\*</sup>  
**Andres Felipe Vargas**<sup>\*\*</sup>  
**Carlos Andrés Laguado**<sup>\*\*\*</sup>  
*Universidad Industrial de Santander*  
*Carrera 27 calle 9*

28 de octubre de 2021

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Desarrollo del taller</b>	<b>2</b>
2.1. Calentamiento . . . . .	2
2.1.1. Ejercicio 1 . . . . .	2
2.1.2. Ejercicio 2 . . . . .	12
2.2. Trabajo de campo . . . . .	22
<b>3. Conclusiones</b>	<b>27</b>

## Resumen

En el presente informe se presenta el desarrollo de la aplicación de los conceptos de la transformada de Fourier en dos etapas. En la primera etapa se pone en práctica los conceptos teóricos del uso de la transformada de Fourier para el procesamiento de señales, en esta primera etapa se practica la aplicación de la transformada de Fourier analítica y la transformada discreta de Fourier en señales y el uso de la función de autocorrelación para la reducción de ruido y su eficacia. La segunda etapa de este taller consiste en la aplicación de los conceptos de la transformada de Fourier en un problema de campo, el cual consiste en investigar si un evento, visto desde varias antenas, conserva su identidad espectral. Vale decir, algunas características del espectro de potencia de Fourier puede ser identificado desde distintas antenas.

---

<sup>\*</sup> e-mail: andres2218426@correo.uis.edu.co

<sup>\*\*</sup> e-mail: andres2218420@correo.uis.edu.co

<sup>\*\*\*</sup> e-mail: carlos2047095@correo.uis.edu.co

## 1. Introducción

La transformada de Fourier es una transformada matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia.<sup>1</sup>

La expresión matemática de esta transformada es:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\Omega t} dt$$

Debido a que la aplicación de la transformada de Fourier en tiempo continuo es muy compleja se hace uso de la transformada discreta de Fourier que se es más sencilla de implementar en software (Matlab, usado en este trabajo). La definición de la transformada discreta de Fourier es:

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{j\omega k}$$

## 2. Desarrollo del taller

El presente taller se divide en dos partes. La primera parte consta de un calentamiento que busca comprobar los conceptos adquiridos en clase acerca de la transformada de Fourier analítica, y la transformada de Fourier discreta (sección 2.1). En la segunda parte se se aplican los conceptos practicados en la parte uno para la aplicación a un problema de campo (sección 2.2).

### 2.1. Calentamiento

El calentamiento se divide en dos ejercicios:

#### 2.1.1. Ejercicio 1

Considere las siguiente señal:

$$y(t) = 3 \cos(\Omega_0 t) + 5 \cos(3\Omega_0 t) + 8 \cos(7\Omega_0 t)$$

definimos para este caso:

$$\Omega_0 = 200\pi$$

- Implementar la transformada analítica y discreta de Fourier.

aprovechando la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier

$$F\{y(n)\} = 3F\{\cos(\Omega_0 t)\} + 5F\{\cos(3\Omega_0 t)\} + 8F\{\cos(7\Omega_0 t)\}$$

resolviendo:

$$F\{y(n)\} = 3\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] + 5\pi[\delta(\Omega - 3\Omega_0) + \delta(\Omega + 3\Omega_0)] + 8\pi[\delta(\Omega - 7\Omega_0) + \delta(\Omega + 7\Omega_0)]$$

<sup>1</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada\\_de\\_Fourier](https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier)

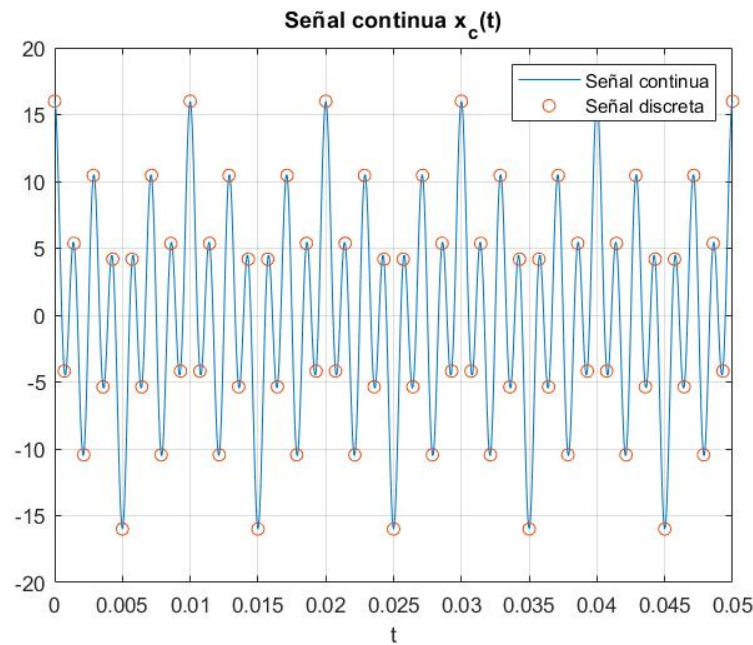


Figura 1: Señal continua y discreta ( $T = 625\mu s$ )

Reemplazando  $\Omega_0$ :

$$Y(\Omega) = 3\pi[\delta(\Omega - 200\pi) + \delta(\Omega + 200\pi)] + \dots \\ \dots 5\pi[\delta(\Omega - 600\pi) + \delta(\Omega + 600\pi)] + 8\pi[\delta(\Omega - 1400\pi) + \delta(\Omega + 1400\pi)] \quad (1)$$

En la Figura 2, Se presenta la grafica de la transformada de Fourier de la señal continua (ecuación 1).

Para el caso de la transformada de fourier discreta, realizamos muestreo de la señal continua, para este caso usamos la frecuencia Nyquist como frecuencia de muestreo:

$$f_{Nyquist} = 1400[Hz] \quad (2)$$

obteniendo de esta manera la señal discreta, en la figura 1 se muestra la señal continua y la señal muestreada. y en la figura 3 se presenta la transformada discreta de Fourier.

- ¿La transformada que se recupera es real o imaginaria?

En la ecuación 1 se observa que el resultado de la transformada de Fourier es **Real**.

- Encuentre las distintas componentes para el espectro de potencias y muestre que las frecuencias tienen los valores esperados

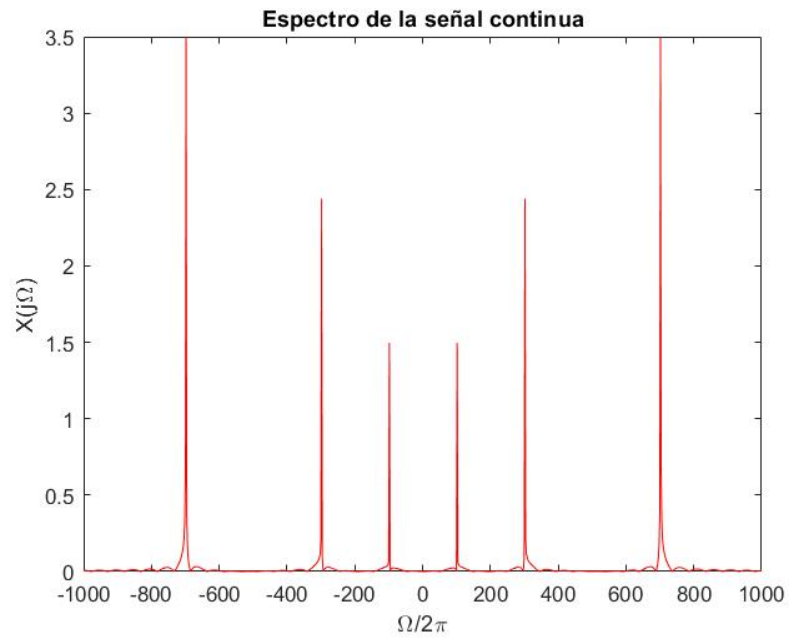
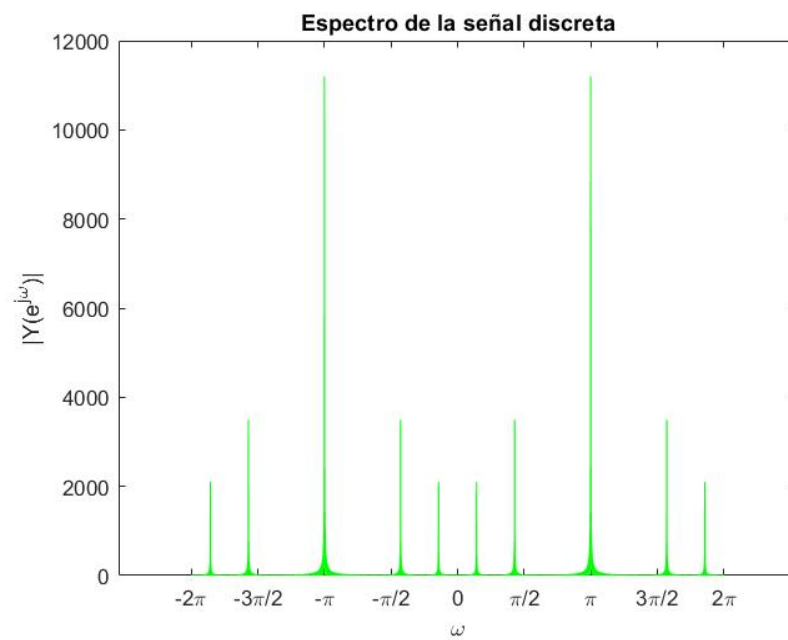


Figura 2: Espectro de la señal continua

Figura 3: Espectro de la señal discreta ( $T = 1/1400$ )

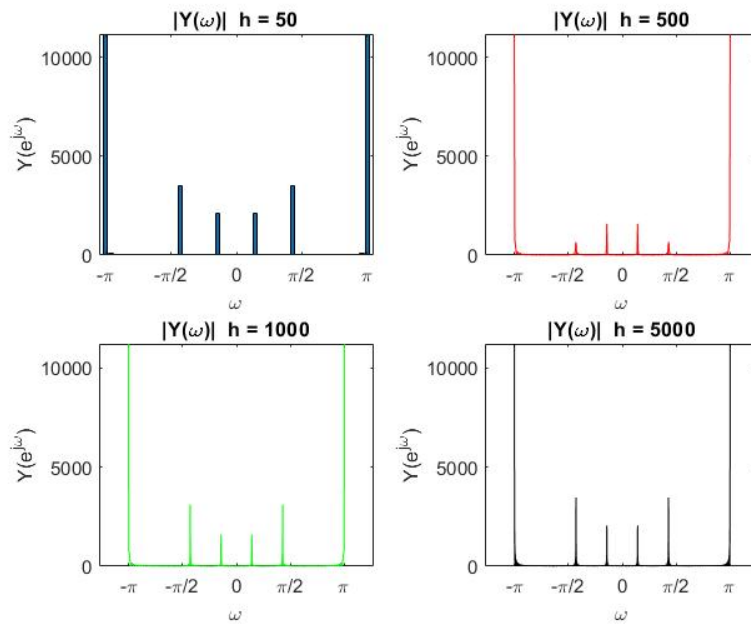


Figura 4: Espectros usando diferentes valores de paso ( $h$ )

En la figura 2 se observan las componentes principales en frecuencia en:

$$\Omega = \{200\pi, 600\pi, 1400\pi\}$$

Y por otro lado, en la figura 3 se observan las componentes principales en frecuencia en:

$$\omega = \left\{ \pi, \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10} \right\}$$

correspondientes a las frecuencias fundamentales de las señales cosenoidales.

- Experimente los efectos de elegir diferentes valores del tamaño de paso  $h$  y de ampliar el período de medición  $T = Nh$ .

En la figura 4 se presentan los resultados de usar diferentes tamaños de paso. Por otro lado la figuras 567 presenta la transformada discreta de Fourier usando diferentes periodos de muestreo (1/1400, 1/2000, 1/3000) respectivamente.

Ahora, Considere las siguiente señal:

$$y(t) = 3 \sin(\Omega_0 t) + 2 \sin(3\Omega_0 t) + 3 \sin(8\Omega_0 t)$$

definimos para este caso:

$$\Omega_0 = 200\pi$$

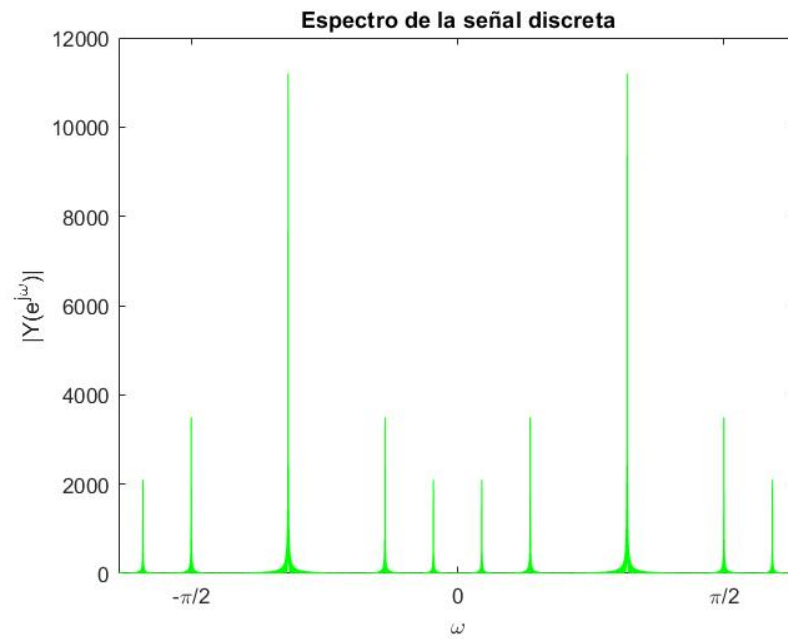


Figura 5: Espectro de la señal discreta ( $T = 1/1400$ )

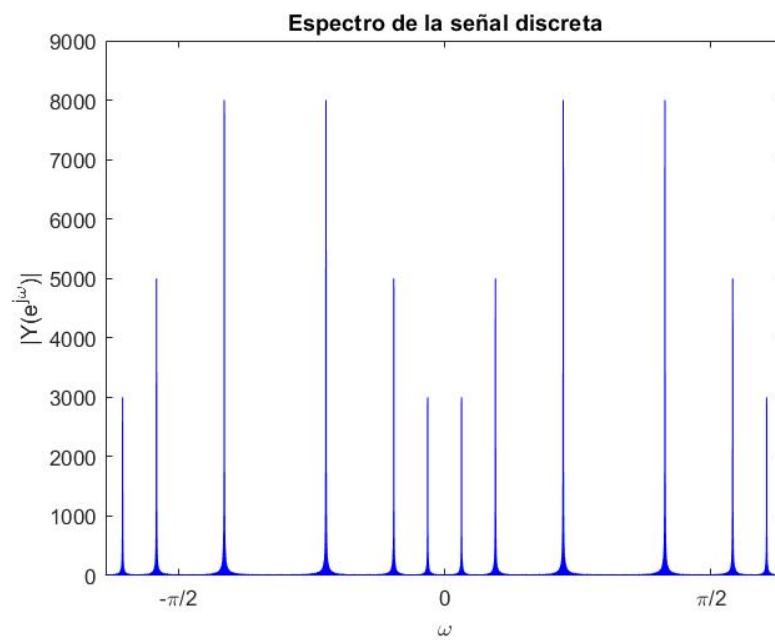


Figura 6: Espectro de la señal discreta ( $T = 1/2000$ )

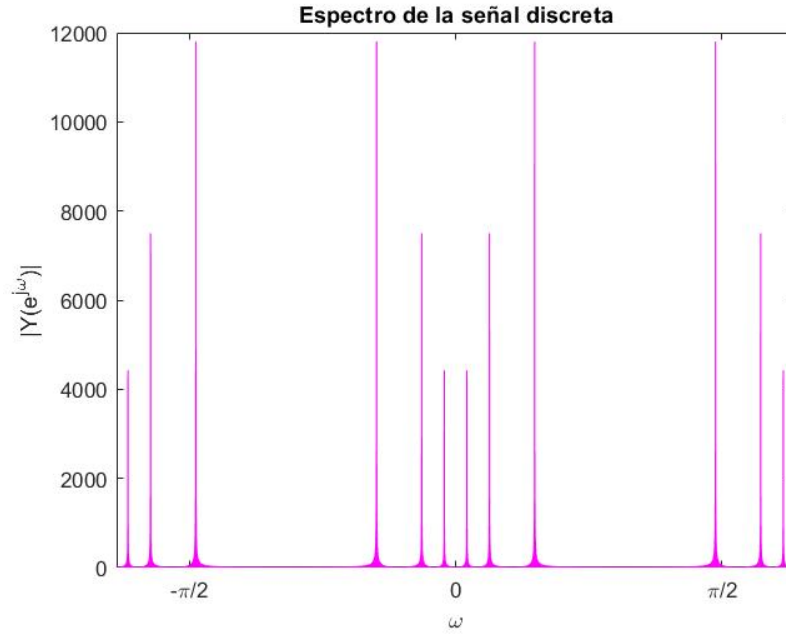


Figura 7: Espectro de la señal discreta ( $T = 1/3000$ )

- Implementar la transformada analítica y discreta de Fourier.

aprovechando la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier

$$F\{y(n)\} = 3F\{\sin(\Omega_0 t)\} + 2F\{\sin(3\Omega_0 t)\} + 3F\{\sin(8\Omega_0 t)\}$$

resolviendo:

$$F\{y(n)\} = \frac{3\pi}{j}[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)] + \frac{2\pi}{j}[\delta(\Omega - 3\Omega_0) - \delta(\Omega + 3\Omega_0)] + \frac{3\pi}{j}[\delta(\Omega - 8\Omega_0) + \delta(\Omega + 8\Omega_0)]$$

Reemplazando  $\Omega_0$ :

$$Y(\Omega) = \frac{3\pi}{j}[\delta(\Omega - 200\pi) - \delta(\Omega + 200\pi)] + \dots$$

$$\dots \frac{2\pi}{j}[\delta(\Omega - 600\pi) - \delta(\Omega + 600\pi)] + \frac{8\pi}{j}[\delta(\Omega - 1600\pi) - \delta(\Omega + 1600\pi)] \quad (3)$$

En la Figura 9, Se presenta la grafica de la transformada de Fourier de la señal continua (ecuación 3).

Para el caso de la transformada de fourier discreta, realizamos muestreo de la señal continua, para este caso usamos la frecuencia Nyquist como frecuencia de muestreo:

$$f_{Nyquist} = 1600[Hz] \quad (4)$$

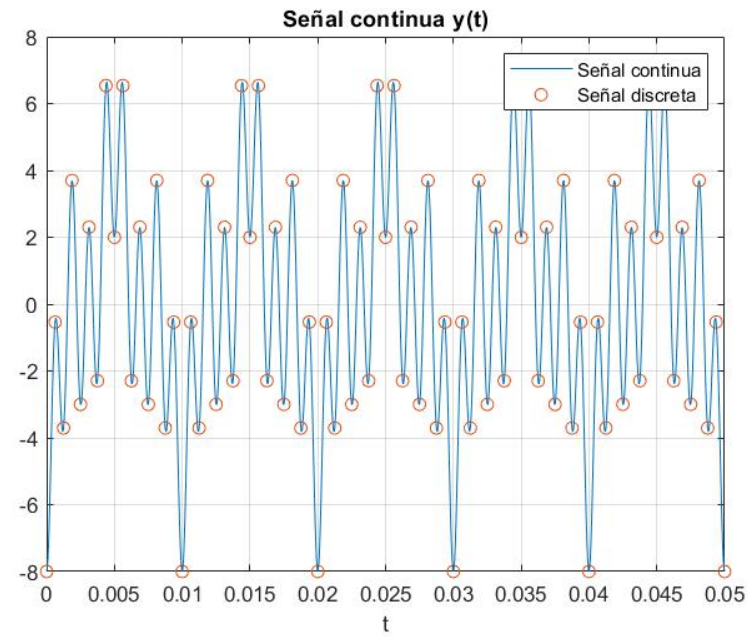


Figura 8: Señal continua y discreta ( $T = 625\mu s$ )

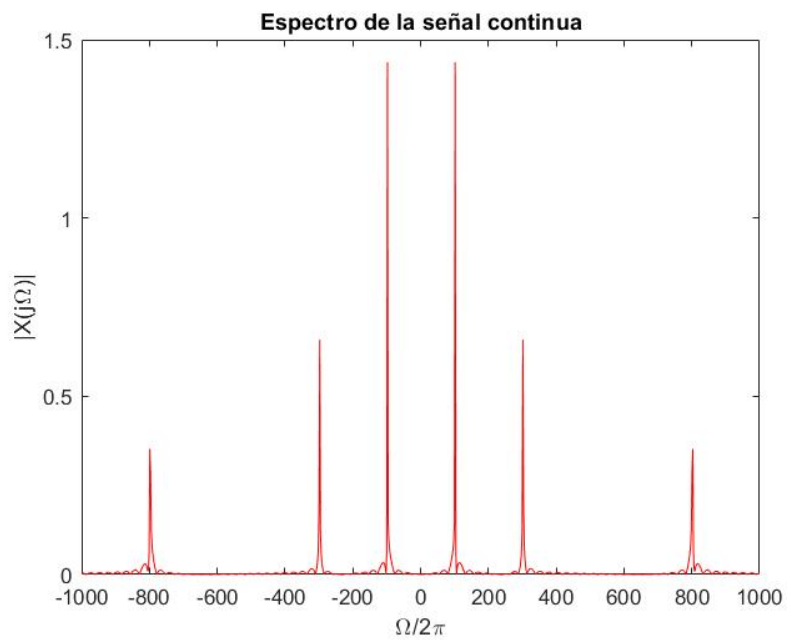


Figura 9: Espectro de la señal continua



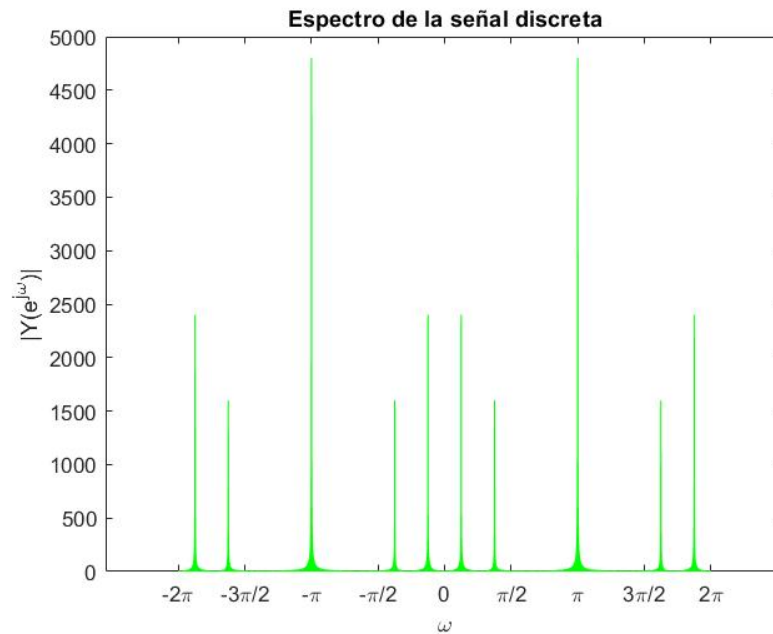


Figura 10: Espectro de la señal discreta ( $T = 1/1600$ )

obteniendo de esta manera la señal discreta, en la figura 8 se muestra la señal continua y la señal muestreada. y en la figura 10 se presenta la transformada discreta de Fourier.

- ¿La transformada que se recupera es real o imaginaria?

En la ecuación 3 se observa que el resultado de la transformada de Fourier es **Imaginaria**.

- Encuentre las distintas componentes para el espectro de potencias y muestre que las frecuencias tienen los valores esperados.

En la figura 9 se observan las componentes principales en frecuencia en:

$$\Omega = \{200\pi, 600\pi, 1600\pi\}$$

Y por otro lado, en la figura 3 se observan las componentes principales en frecuencia en:

$$\omega = \left\{\pi, \frac{3\pi}{10}, \frac{8\pi}{10}\right\}$$

correspondientes a las frecuencias fundamentales de las señales cosenoidales.

- Experimente los efectos de elegir diferentes valores del tamaño de paso  $h$  y de ampliar el período de medición  $T = Nh$ .

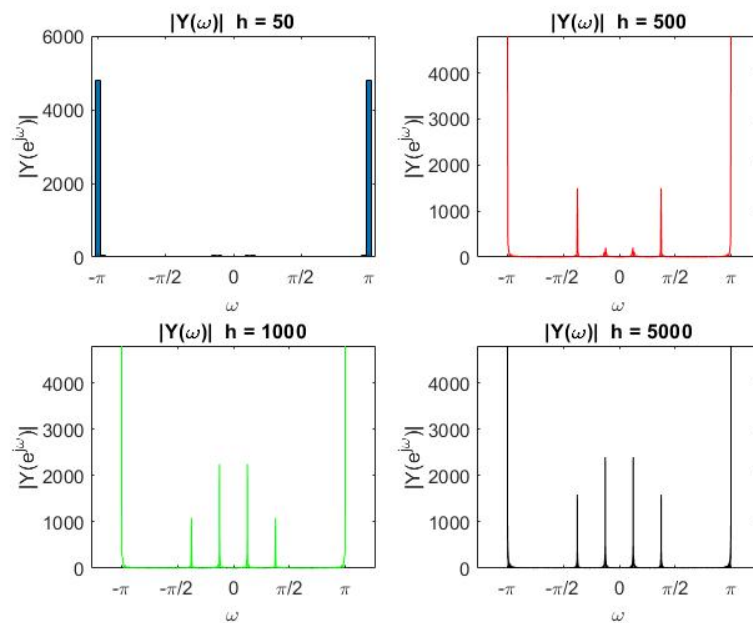


Figura 11: Espectros usando diferentes valores de paso ( $h$ )

En la figura 11 se presentan los resultados de usar diferentes tamaños de paso. Por otro lado la figuras 121314 presenta la transformada discreta de Fourier usando diferentes periodos de muestreo ( $1/1400$ ,  $1/2000$ ,  $1/3000$ ) respectivamente.

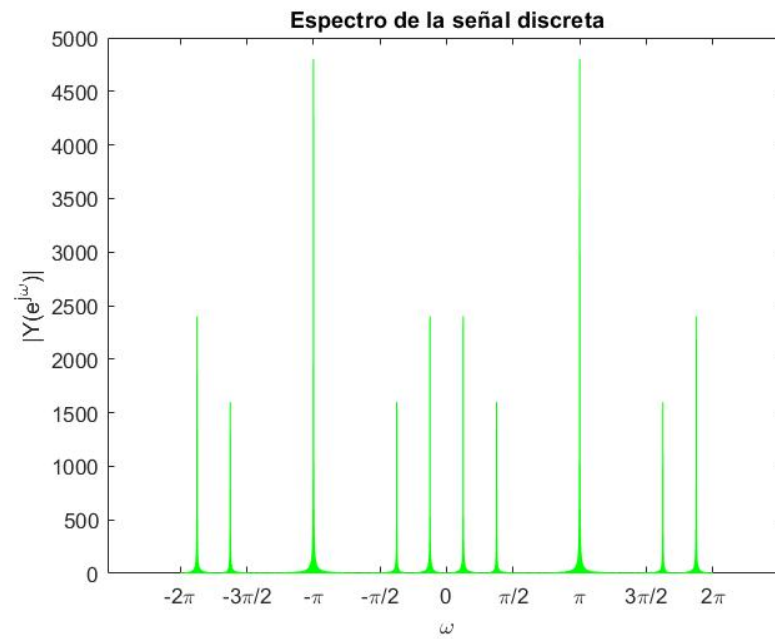


Figura 12: Espectro de la señal discreta ( $T = 1/1600$ )

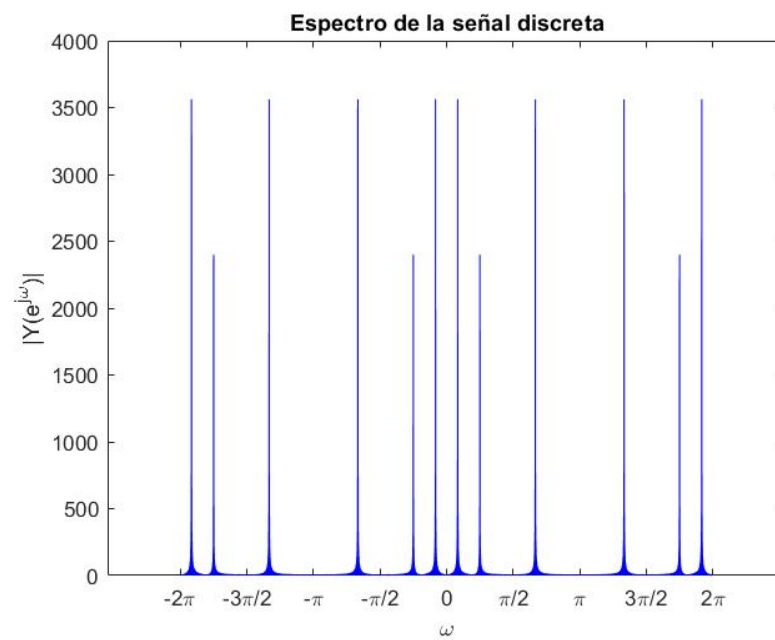


Figura 13: Espectro de la señal discreta ( $T = 1/2400$ )

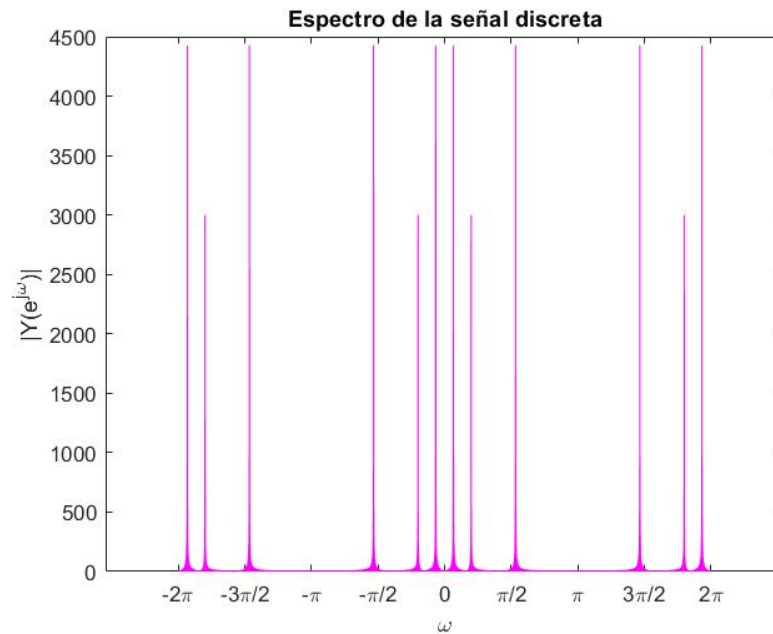


Figura 14: Espectro de la señal discreta ( $T = 1/3000$ )

### 2.1.2. Ejercicio 2

Considere ahora la siguiente señal:

$$y(t_i) = \frac{10}{10 - 9 \sin(t_i)} + \alpha(3\Re_i - 1)$$

con,

$$0 \leq \Re_i \leq 1$$

donde  $\Re_i$  es un número aleatorio y  $\alpha$  un parámetro de control. Use este parámetro  $\alpha$  para simular tres tipos de ruido: alto, medio y bajo. En el caso del ruido alto, la señal se pierde. En los otros dos casos puede ser identificada.

#### 1. Sin ruido - $\alpha = 0$

- Grafique su señal, su transformada de Fourier (analítica) y su espectro de potencia.

En la figura 15, se presenta la señal continua y la señal discreta sin ruido ( $\alpha = 0$ ). En la figura 16 se presenta la transformada de Fourier de la señal continua y discreta.

- Calcule la función de autocorrelación  $A(\tau)$  y su transformada de Fourier  $A(\omega)$ .

La figura 17 muestra la función de autocorrelación de la señal sin ruido y en la figura 18 se compara la transformada de Fourier de la función de autocorrelación y el espectro en potencia.

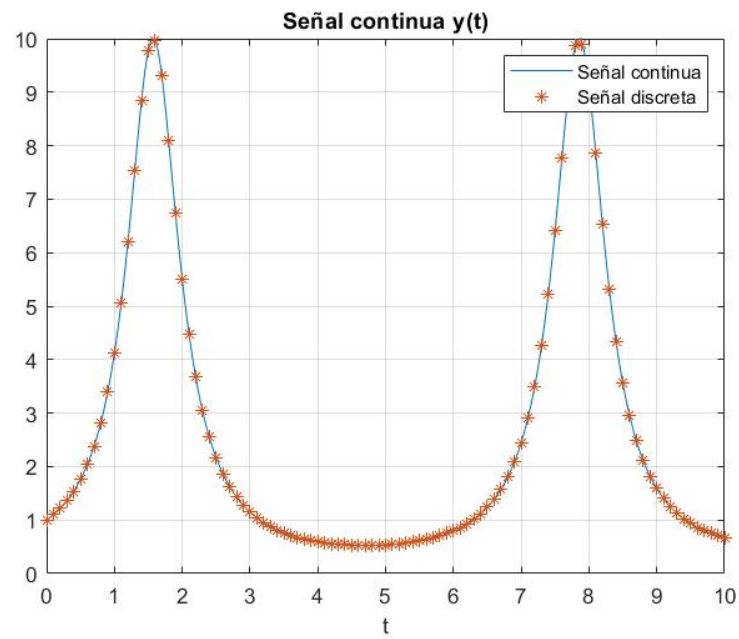


Figura 15: Señal continua y discreta ( $T = 1/10$ )

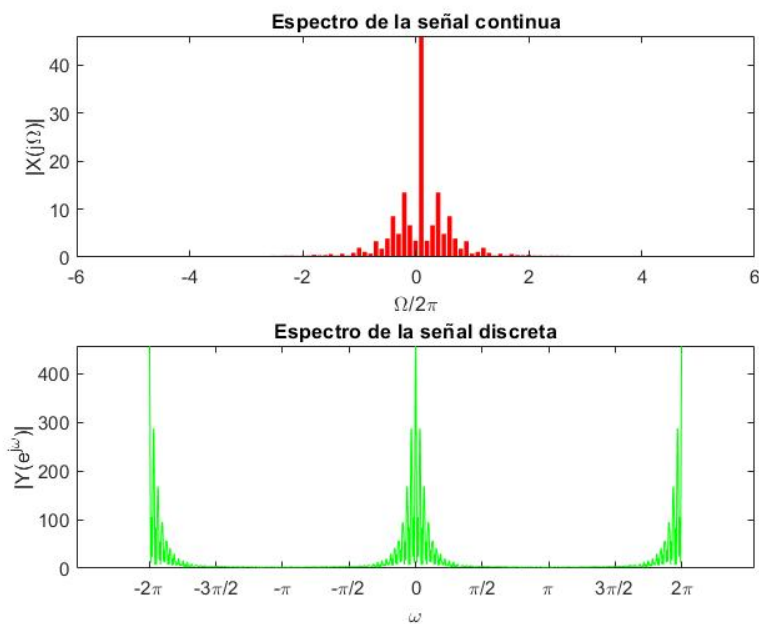


Figura 16: Espectro de la señal continua y discreta

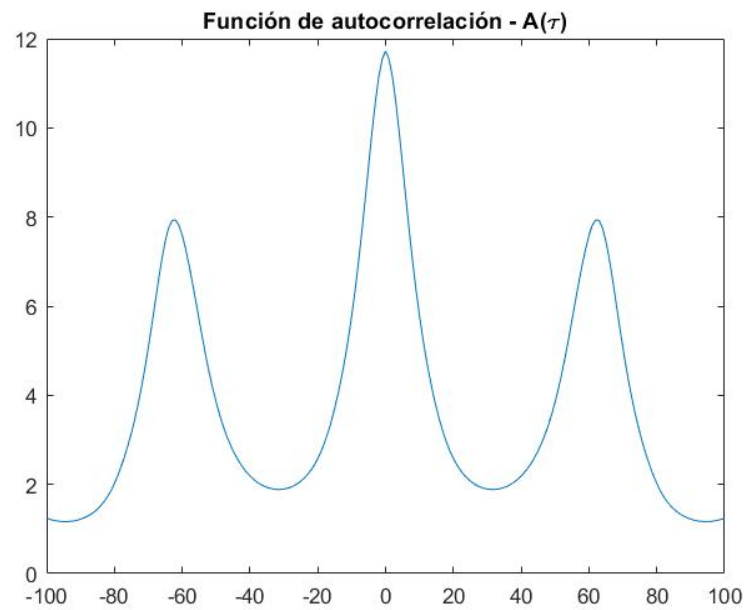
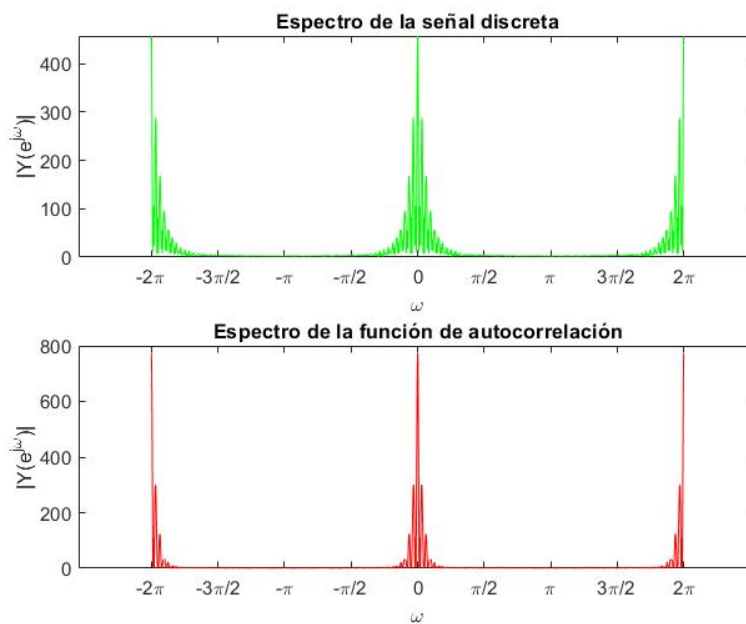
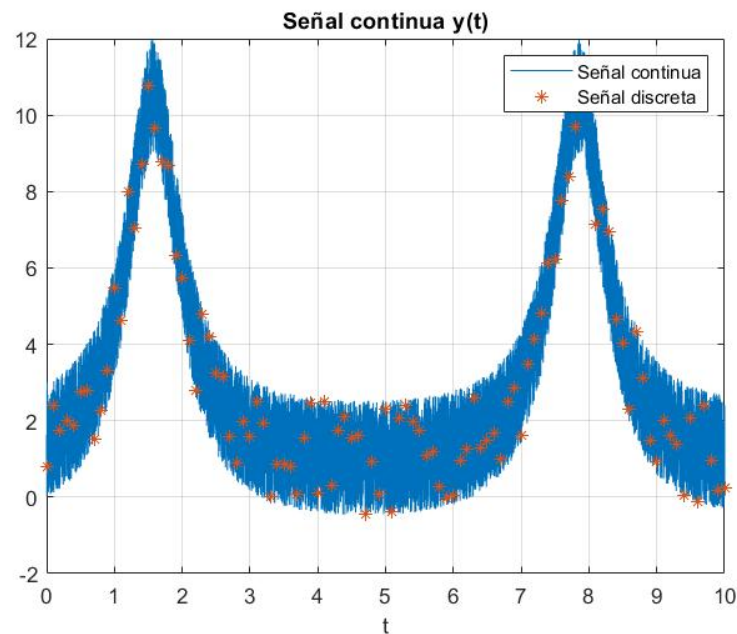
Figura 17: Función de autocorrelación ( $\alpha = 0$ )

Figura 18: Espectro de la señal discreta vs la transformada de la función de autocorrelación

Figura 19: Señal continua y discreta ( $T = 1/10$ )

### 1. Con ruido bajo - $\alpha = 1$

- Grafique su señal, su transformada de Fourier (analítica) y su espectro de potencia.

En la figura 19, se presenta la señal continua y la señal discreta con ruido bajo ( $\alpha = 1$ ). En la figura 20 se presenta la transformada de Fourier de la señal continua y discreta.

- Calcule la función de autocorrelación  $A(\tau)$  y su transformada de Fourier  $A(\omega)$ .

La figura 21 muestra la función de autocorrelación de la señal con ruido bajo y en la figura 22 se compara la transformada de Fourier de la función de autocorrelación y el espectro en potencia.

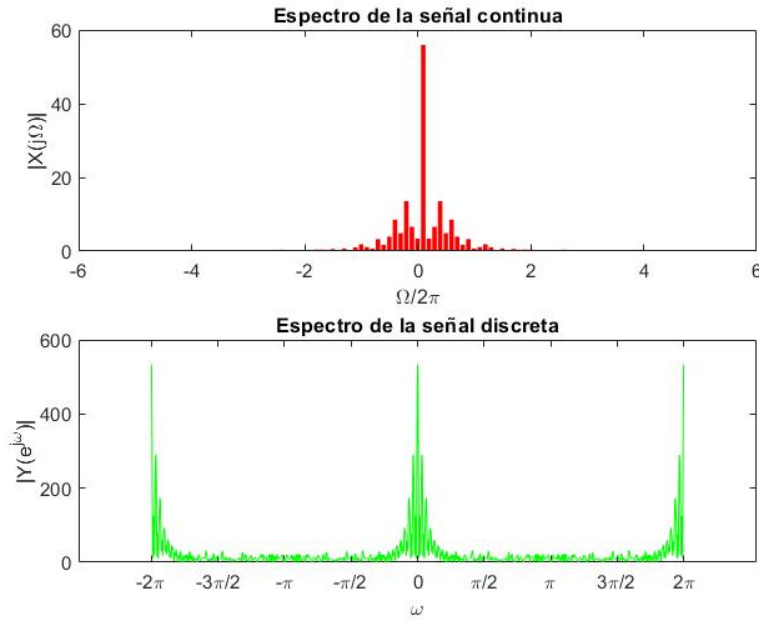
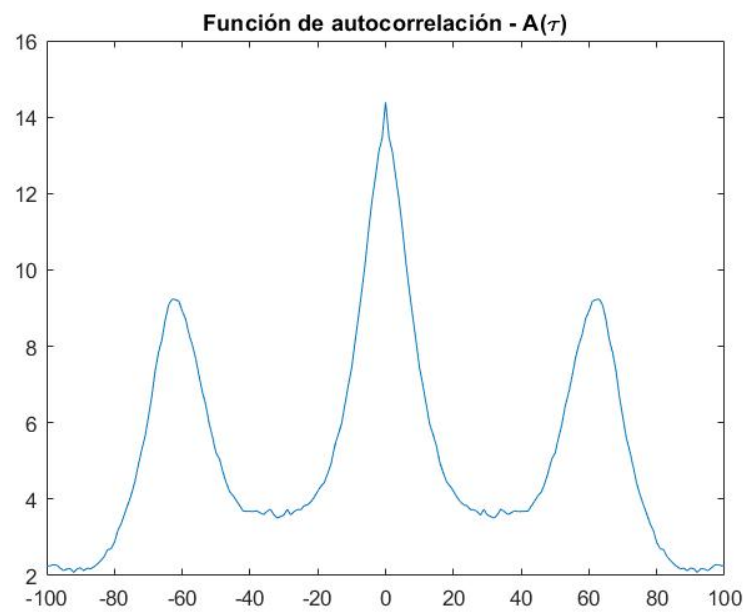


Figura 20: Espectro de la señal continua y discreta

Figura 21: Función de autocorrelación ( $\alpha = 1$ )



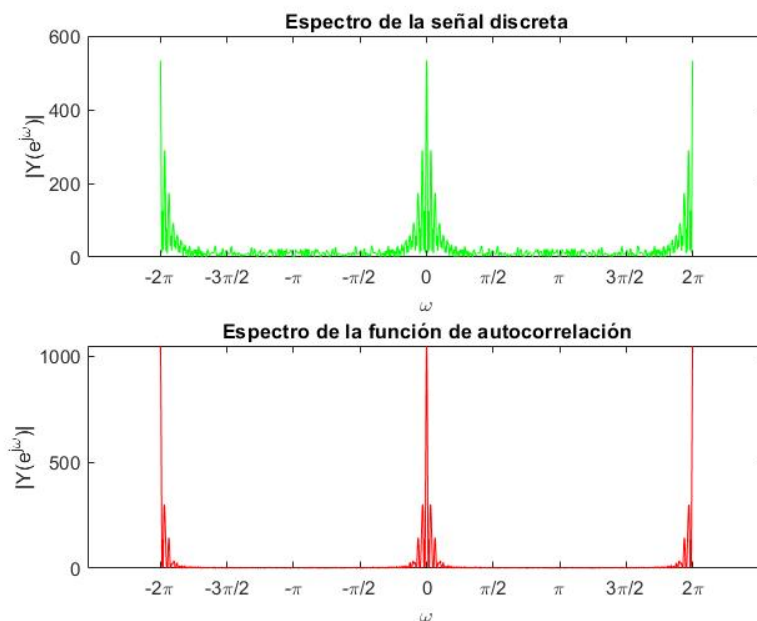


Figura 22: Espectro de la señal discreta vs la transformada de la función de autocorrelación

### 1. Con ruido medio - $\alpha = 5$

- Grafique su señal, su transformada de Fourier (analítica) y su espectro de potencia.

En la figura 23, se presenta la señal continua y la señal discreta con ruido medio ( $\alpha = 5$ ). En la figura 24 se presenta la transformada de Fourier de la señal continua y discreta.

- Calcule la función de autocorrelación  $A(\tau)$  y su transformada de Fourier  $A(\omega)$ .

La figura 25 muestra la función de autocorrelación de la señal con ruido medio y en la figura 26 se compara la transformada de Fourier de la función de autocorrelación y el espectro en potencia.

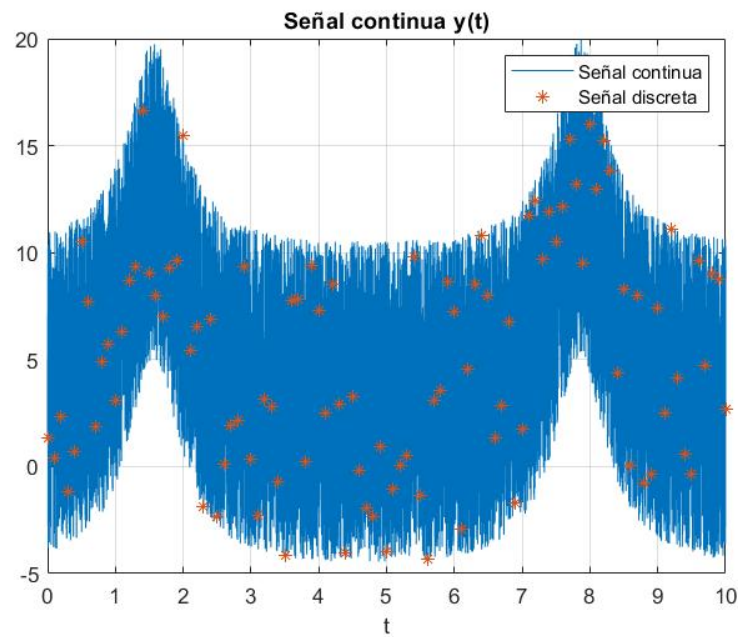


Figura 23: Señal continua y discreta ( $T = 1/10$ )

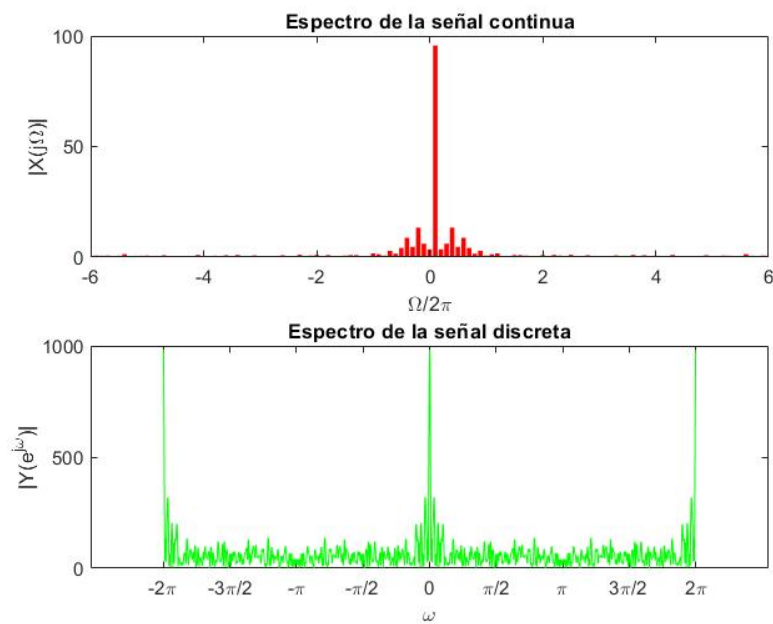


Figura 24: Espectro de la señal continua y discreta

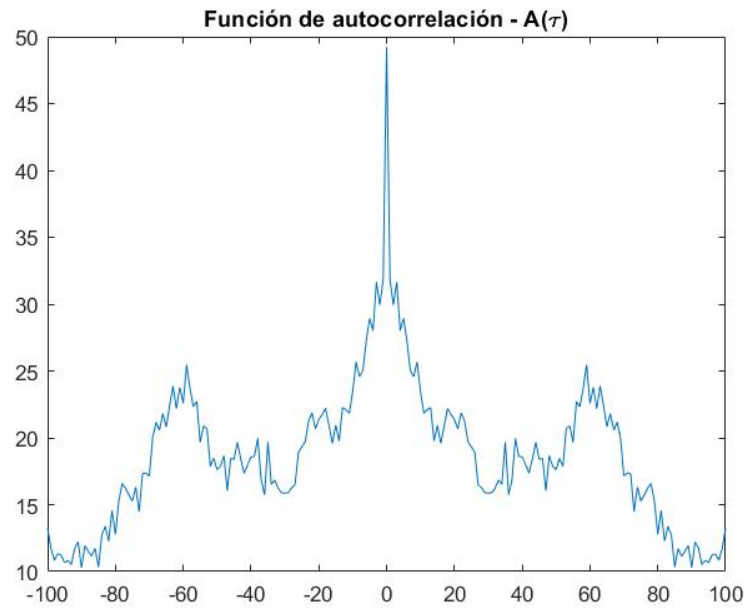


Figura 25: Función de autocorrelación ( $\alpha = 5$ )

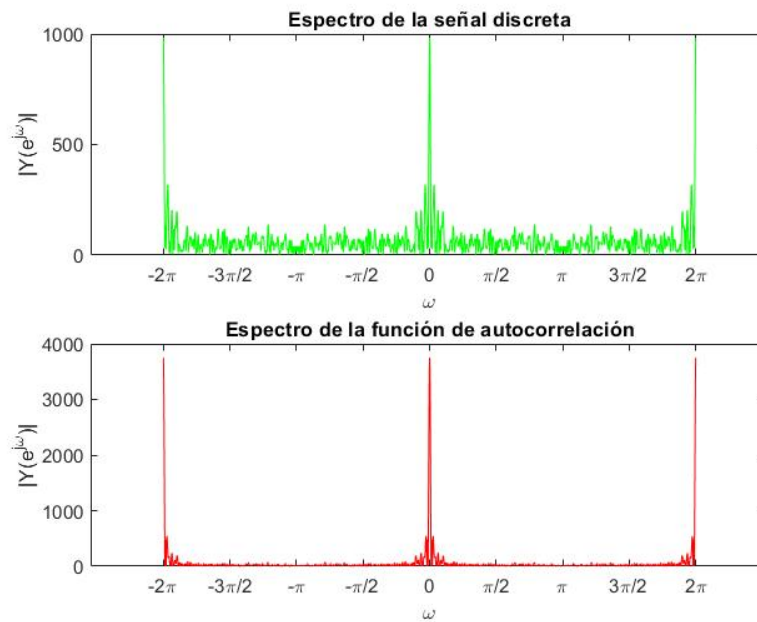


Figura 26: Espectro de la señal discreta vs la transformada de la función de autocorrelación

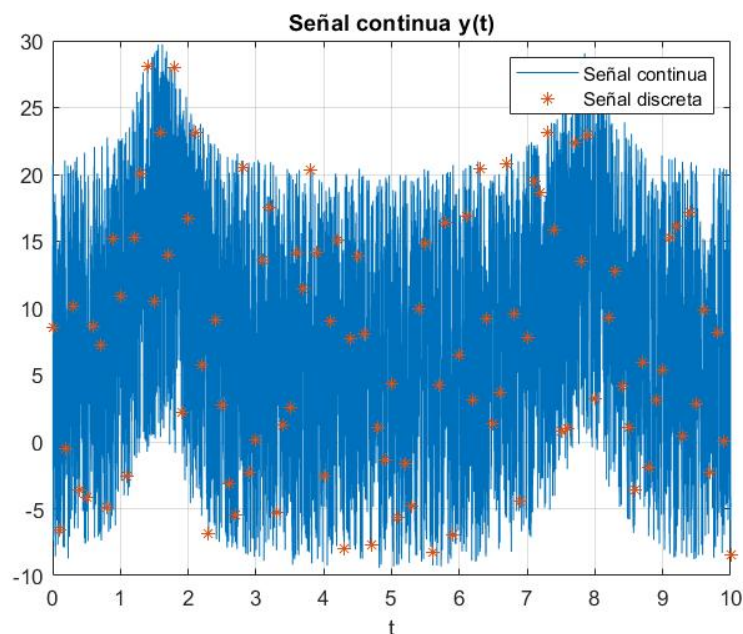


Figura 27: Señal continua y discreta ( $T = 1/10$ )

1. **Con ruido alto** -  $\alpha = 10$

- Grafique su señal, su transformada de Fourier (analítica) y su espectro de potencia.

En la figura 27, se presenta la señal continua y la señal discreta con ruido alto ( $\alpha = 10$ ). En la figura 28 se presenta la transformada de Fourier de la señal continua y discreta.

- Calcule la función de autocorrelación  $A(\tau)$  y su transformada de Fourier  $A(\omega)$ .

La figura 29 muestra la función de autocorrelación de la señal con ruido alto y en la figura 30 se compara la transformada de Fourier de la función de autocorrelación y el espectro en potencia.

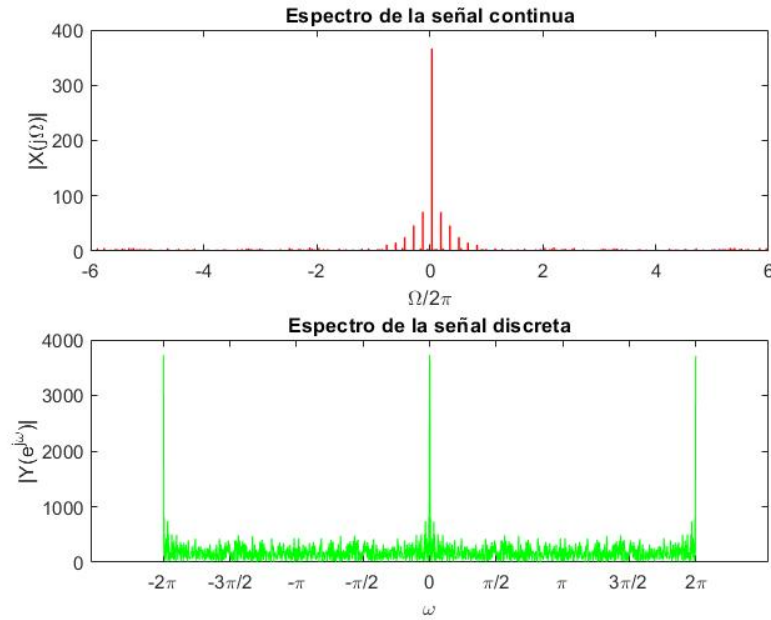
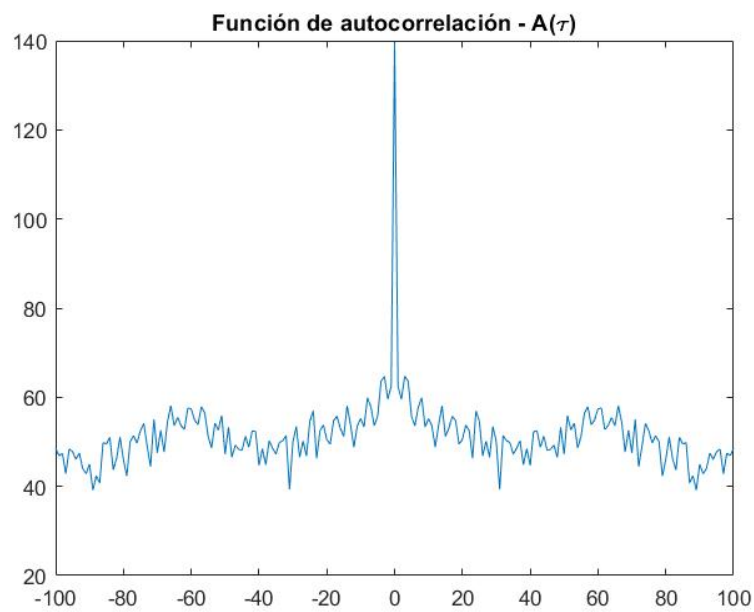


Figura 28: Espectro de la señal continua y discreta

Figura 29: Función de autocorrelación ( $\alpha = 10$ )

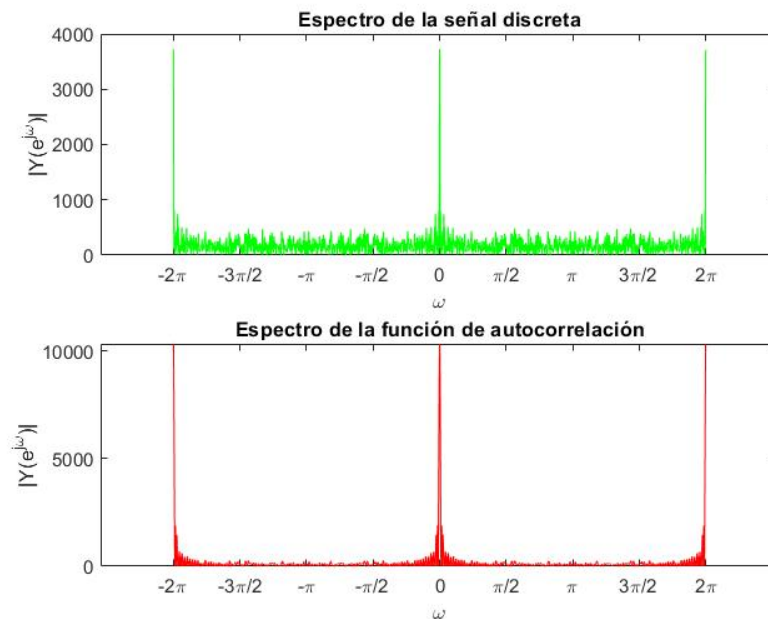


Figura 30: Espectro de la señal discreta vs la transformada de la función de autocorrelación

- Compare la transformada discreta de Fourier de  $A(\omega)$  con el verdadero espectro de potencia y discuta la eficacia de la reducción del ruido mediante el uso de la función de autocorrelación.

En las figuras 18, 22, 26 y 30, se comparan los espectros de la señal y la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. Se observa que las componentes espectrales de altas frecuencias (correspondientes al ruido) se atenúan al usar la función de autocorrelación.

- ¿Para cuáles valores de  $\alpha$  se pierde toda la información en la entrada?

Para valores superiores a 5 del parametro de control  $\alpha$  ( $\alpha \geq 5$ ) las componentes principales de baja frecuencia (componentes espectrales de la señal sin ruido), no se distinguen muy claramente con las componentes de alta frecuencia (Componentes espectrales del ruido).

## 2.2. Trabajo de campo

En esta etapa vamos a investigar si un evento, visto desde varias antenas, conserva su identidad espectral. Vale decir, algunas características del espectro de potencia de Fourier puede ser identificado desde distintas antenas. Para ello se utilizan los datos suministrados.<sup>2</sup>

Los datos utilizados son los de la carpeta 'Trace\_EVT1272070496.820081490\_820.1.txt', los cuales contienen la siguiente información:

<sup>2</sup>Enlace a los datos <https://github.com/nunezluis/MisCursos/tree/main/MisMateriales/Asignaciones/TareaDiscretaFourier/Datos>

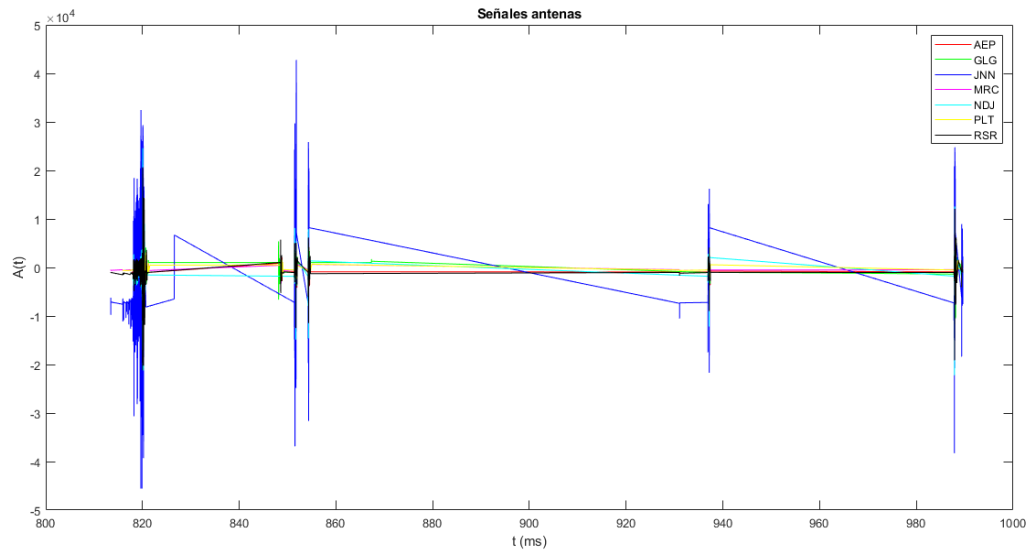


Figura 31: Gráfica del evento visto desde diferentes antenas

- La señal registrada por cada antena, indicada por R9PLT LON, LAT, size: -57.89565324783325 -34.96598482131958 1500
- Cinco columnas: tiempo, tiempo\_corregido, señal, señal2, señal3.  
Las dos últimas columnas corresponden a:

$$senal2 = senal/amplitudeNormalization + azimuth$$

$$senal3 = senal/amplitudeNormalization + distance/1000$$

distance = distancia en km del rayo a la antena

Las antenas están nombradas como sigue: AEP, GLG, JNN, MRC, NDJ, PLT y RSR.

Para determinar si el evento conserva su identidad espectral, vamos a hacer un análisis en el dominio de la frecuencia usando la transformada de Fourier.

Nuestro primer paso es graficar el evento captados por las diferentes antenas en el dominio del tiempo para tener una idea del comportamiento de las señales. Esto es mostrado en la figura 31.

El siguiente paso es sacar la transformada de Fourier a cada una de las señales y determinar si se conserva su identidad espectral, esto es, identificar frecuencias que se repitan para poder establecer la identidad del evento. Las figuras 32 a 38 muestran dichas transformadas de Fourier.

En estas figuras se observan la frecuencia de mayor amplitud y la máxima amplitud. Dichos datos se recogen en la tabla 1.

En la tabla 1 se observa que las amplitudes varían en gran medida, sin embargo, ésta no va a ser la característica que vamos a utilizar para determinar la identidad de las señales. Para determinar la

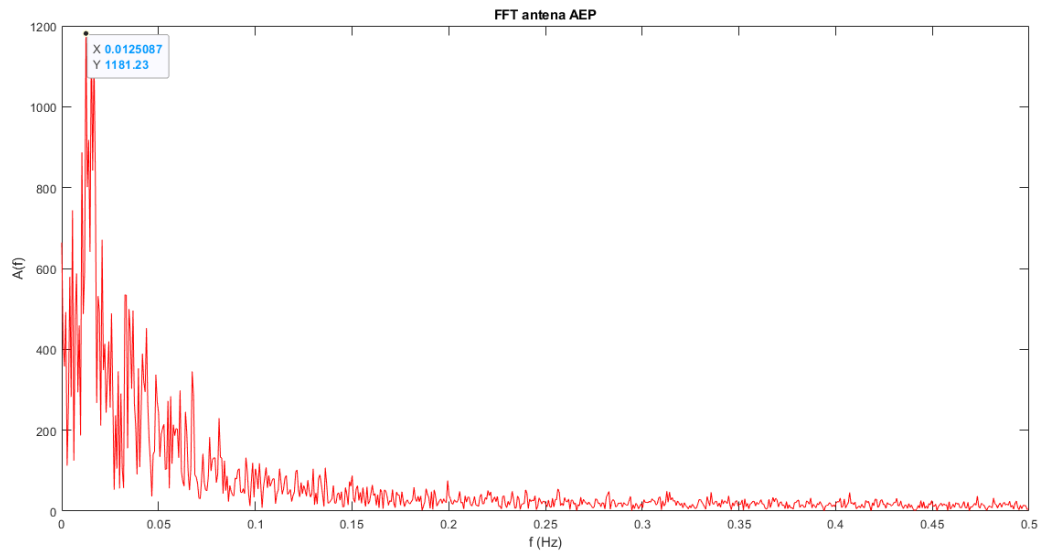


Figura 32: Transformada de Fourier para la señal captada por la antena AEP

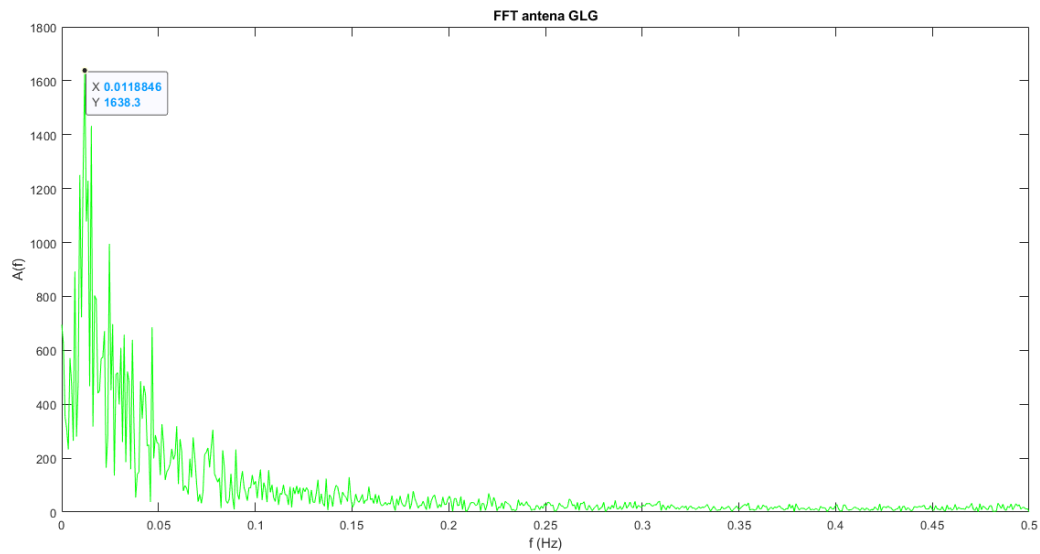


Figura 33: Transformada de Fourier para la señal captada por la antena GLG



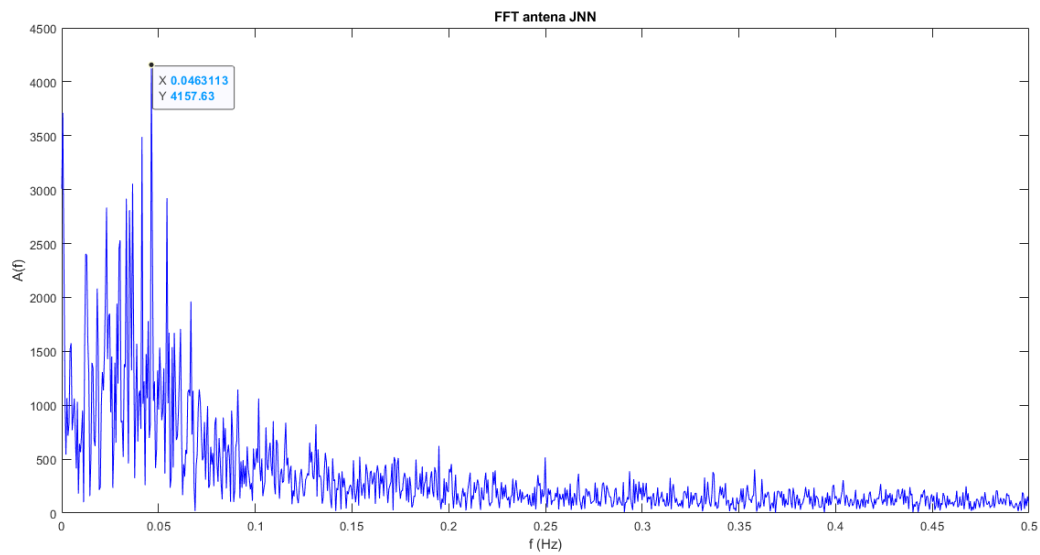


Figura 34: Transformada de Fourier para la señal captada por la antenna JNN

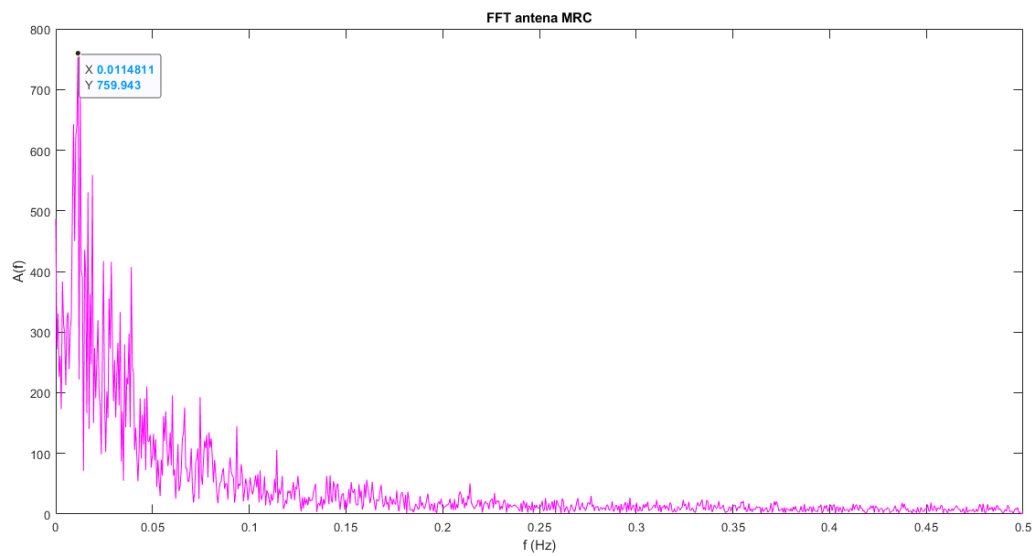


Figura 35: Transformada de Fourier para la señal captada por la antenna MRC

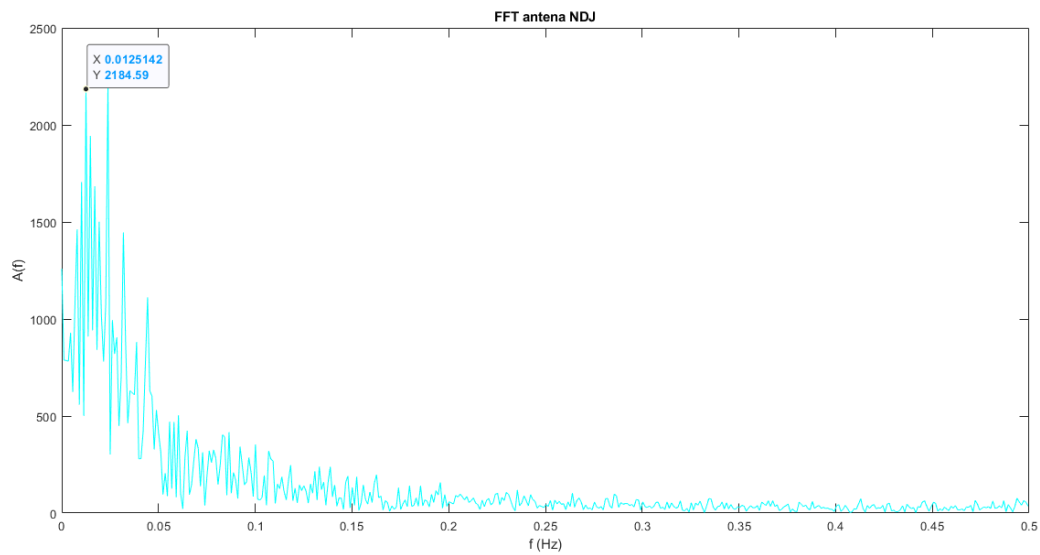


Figura 36: Transformada de Fourier para la señal captada por la antenna NDJ

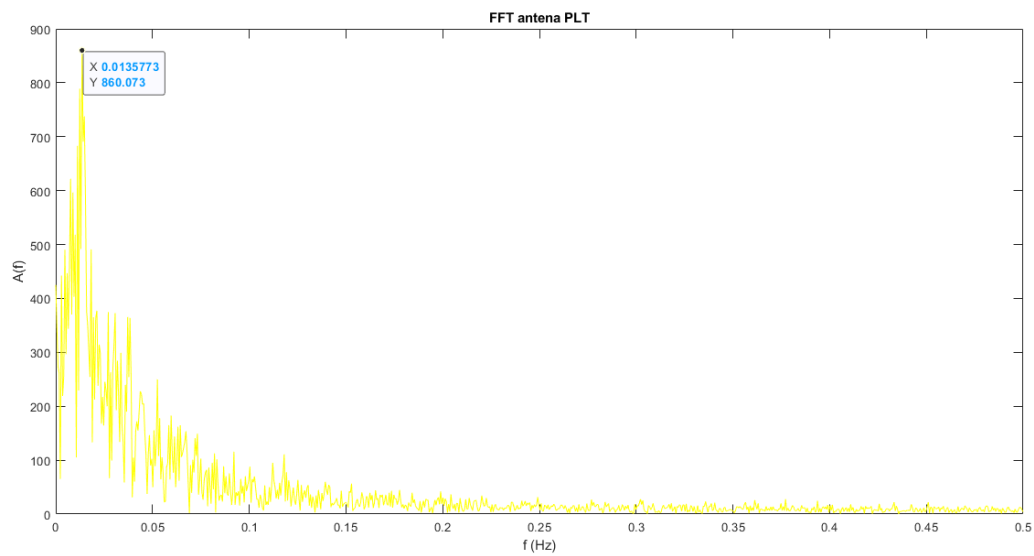


Figura 37: Transformada de Fourier para la señal captada por la antenna PLT

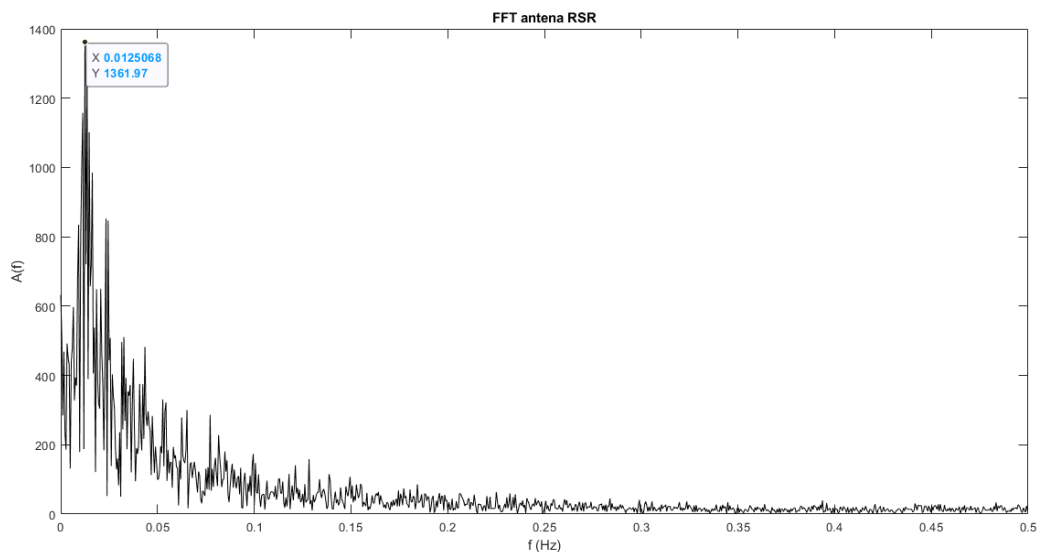


Figura 38: Transformada de Fourier para la señal captada por la antenna RSR

identidad de las señales vamos a tener en cuenta las frecuencias a las cuales la amplitud es máxima. En este caso nos damos cuenta de que la señal tiene una componente de  $0.0125 \pm 0.001[Hz]$ , de lo cual podemos concluir que esa frecuencia representa la identidad espectral de la señal. Cabe resaltar que la antenna JNN tiene un valor de frecuencia bastante lejano a los demás, sin embargo, esto se debe a que, como se observa en la figura 31, la señal captada por esta antenna es diferente a las demás, por esta razón se podría pensar que la antenna está defectuosa y requiere algún tipo de ajuste. De esta forma se encuentra la identidad en la frecuencia de este evento, sin embargo vamos a revisar otra herramienta que puede ser de gran ayuda como lo son los espectrogramas. Los espectrogramas muestran información del tiempo (eje x) y la frecuencia (eje y) (muestran cómo cambia la frecuencia en función del tiempo). Vamos a ver el espectrograma del evento captado por las diferentes señales en las figuras 39 a 45. Vale resaltar que en el eje x tenemos el número de muestra en lugar del tiempo.

En los espectrogramas se puede observar la distribución de las frecuencias dependiendo de la muestra, por ejemplo donde se ve más amarillo es donde hay mayor concentración de energía, y con las muestras más amarillas, podemos obtener el tiempo.

### 3. Conclusiones

Basándonos en los conceptos teóricos de la transformada analítica y discreta de Fourier se ponen en práctica en dos etapas. En la primera etapa se practica la implementación de la transformada de Fourier tanto analítica como discreta de señales periódicas y el uso de la función de autocorrelación para la reducción de ruido en señales continuas. Por otro lado en la segunda etapa se caracterizan un

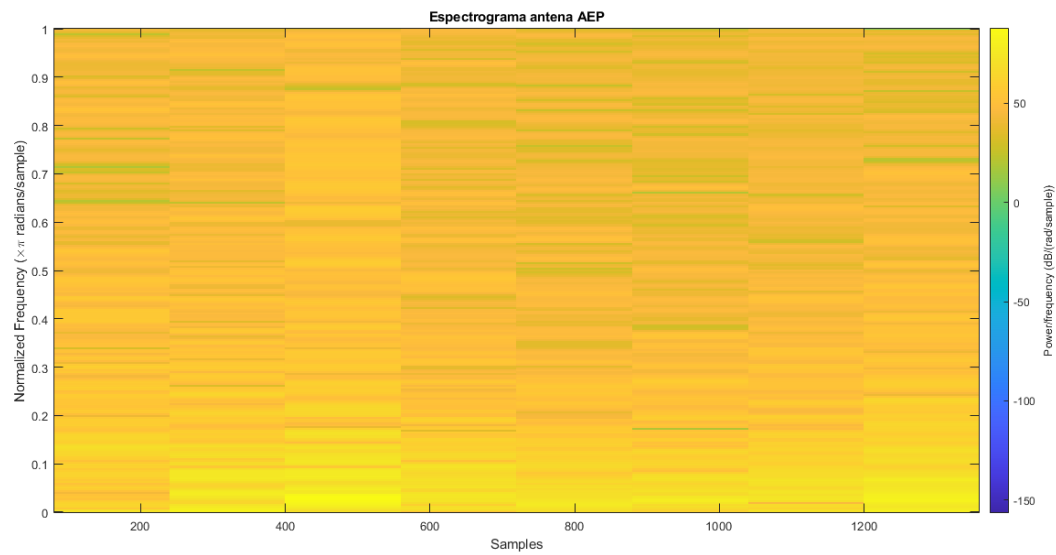


Figura 39: Espectrograma de la señal captada por la antena AEP

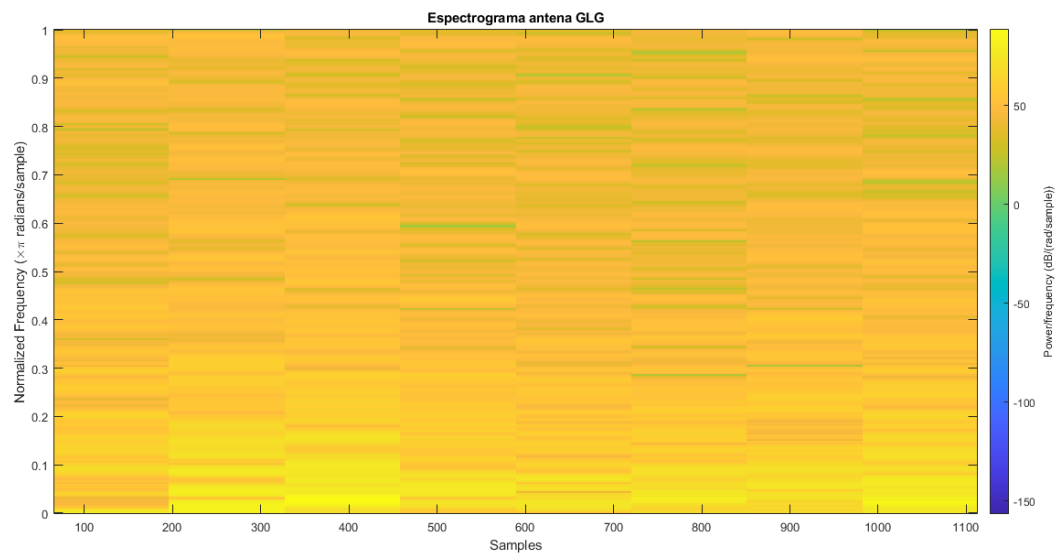


Figura 40: Espectrograma de la señal captada por la antena GLG

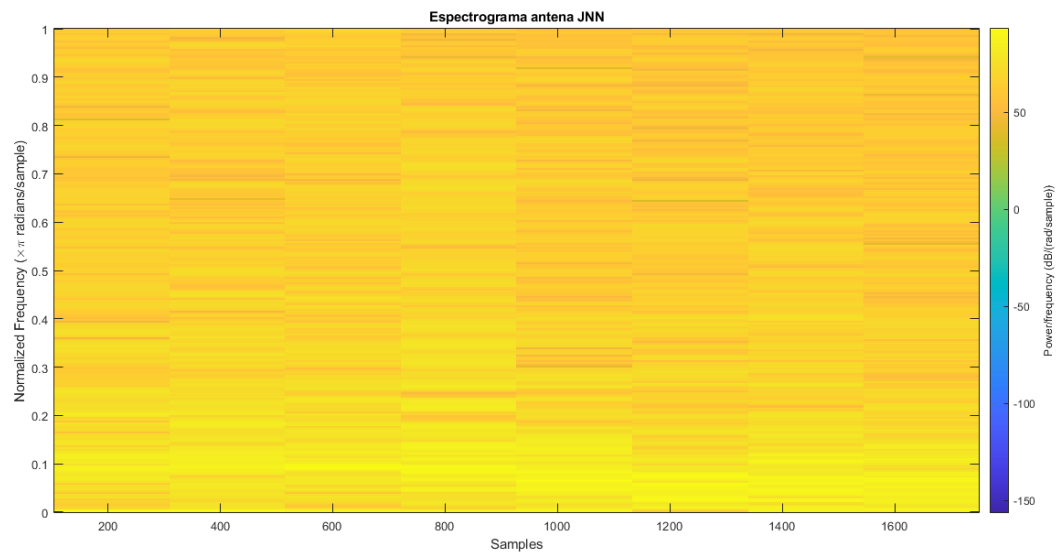


Figura 41: Espectrograma de la señal captada por la antena JNN

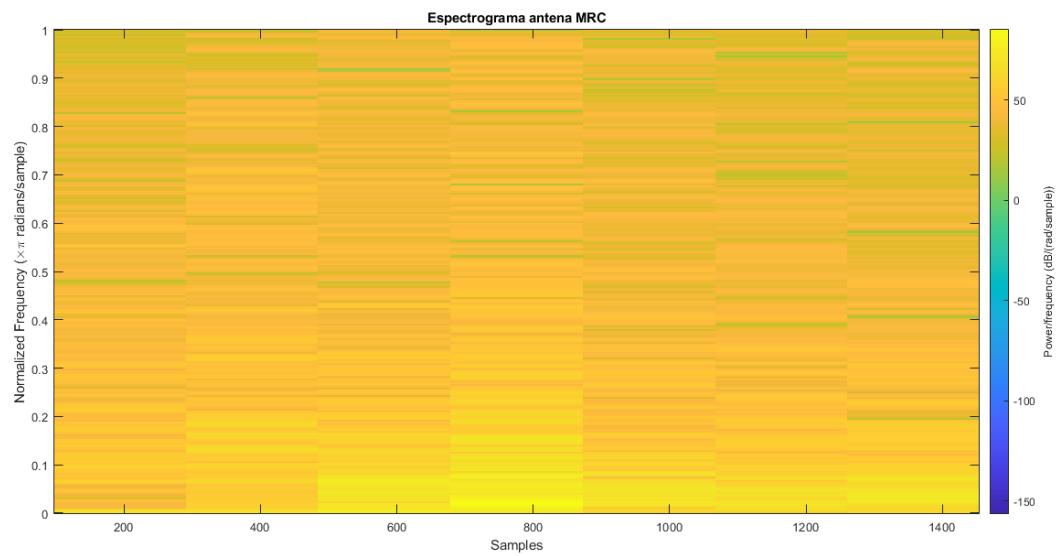


Figura 42: Espectrograma de la señal captada por la antena MRC

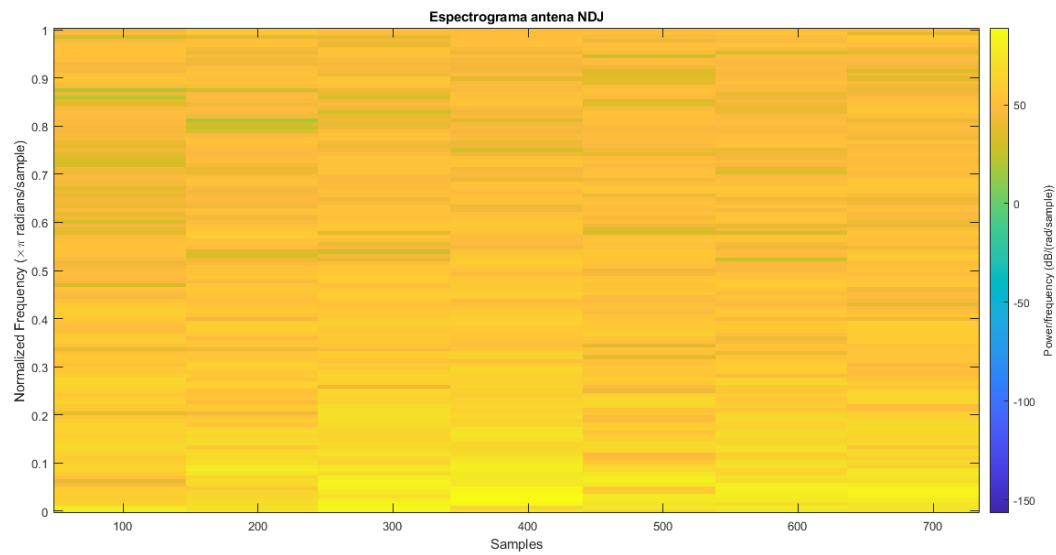


Figura 43: Espectrograma de la señal captada por la antena NDJ

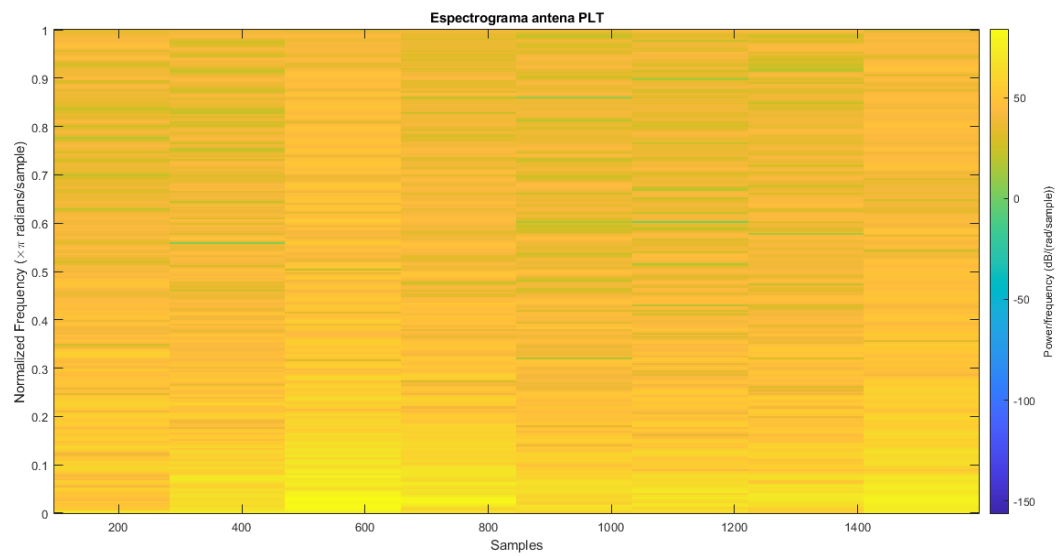


Figura 44: Espectrograma de la señal captada por la antena PLT

Tabla 1: Frecuencia de mayor amplitud y máxima amplitud captada por cada una de las antenas. Al comparar estos datos podemos saber si el evento conserva la identidad espectral.

Antena	Frecuencia (Hz)	Amplitud
AEP	0.0125	1181.23
GLG	0.0118	1638.3
JNN	0.0463	4157.63
MRC	0.0114	759.943
NDJ	0.0125	2184.59
PLT	0.0135	860.073
RSR	0.0125	1361.97

evento en diferentes antenas usando los conceptos de la transformada de Fourier y de esta manera establecer la identidad espectral un mismo evento visto desde diferentes antenas.

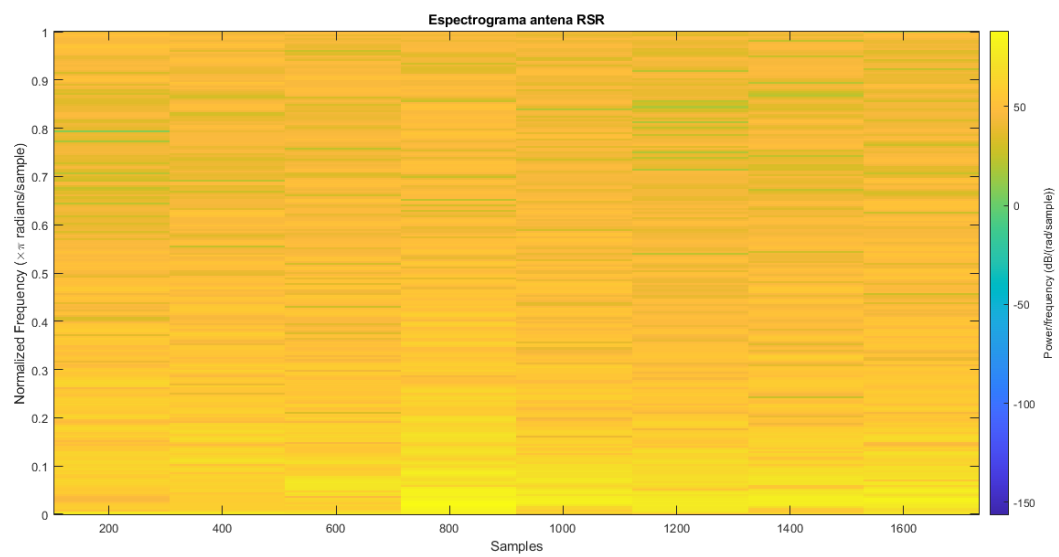


Figura 45: Espectrograma de la señal captada por la antena RSR