TALLER DE PROBLEMAS (Clase #5)

Sección 2.1.8, ejercicios 3 y 10

Nombre: Andres Felipe Vargas Molano - 2218420
Nombre: Carlos Laguado - 2047095
Nombre: Andres Felipe Rubio Toloza - 2218426

3. Considere el espacio vectorial, $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$, de funciones reales, continuas y continuamente diferenciables definidas en el intervalo $[-1,1]$. Es claro que una posible base de este espacio de funciones la constituye el conjunto de monomios $\left\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\right\}$ por cuanto estas funciones son linealmente independientes.

   a) Si suponemos que este espacio vectorial está equipado con un producto interno definido por $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)g(x)$, muestre que esa base de funciones no es ortogonal.

   b) Utilizando la definición de producto interno $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)g(x)$ ortogonalize la base $\left\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\right\}$ y encuentre los 10 primeros vectores ortogonales, base para $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$. Esta nueva base de polinomios ortogonales se conoce como los polinomios de Legendre.

   c) Modifique un poco la definición de producto interno $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)g(x)\sqrt{(1-x^2)}$ y ortogonalize la base $\left\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\right\}$ y encuentre otros 10 primeros vectores ortogonales base para el mismo $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$. Esta nueva base de polinomios ortogonales se conoce como los polinomios de Chebyshev.

El ejercicio se desarrolla en Maxima (Ver anexo).

ANEXOS

```
b0:1; b1:x; b2:x^2; b3:x^3; b4:x^4;
```

$$1$$
$$x$$
$$x^2$$
$$x^3$$
$$x^4$$

a) Demuestre que la base de funciones no es ortogonal.

Para demostrar que la base no es ortogonal se calcula el producto interno de los polinomios de la base.

```
'integrate(b0·b1,x,−1,1)=integrate(b0·b1,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

```
'integrate(b0·b2,x,−1,1)=integrate(b0·b2,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

```
'integrate(b0·b3,x,−1,1)=integrate(b0·b3,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

```
'integrate(b0·b4,x,−1,1)=integrate(b0·b4,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$$

```
'integrate(b1·b2,x,−1,1)=integrate(b1·b2,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

```
'integrate(b1·b3,x,−1,1)=integrate(b1·b3,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$$

```
'integrate(b1·b4,x,−1,1)=integrate(b1·b4,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^5\,dx = 0$$

```
'integrate(b2·b3,x,−1,1)=integrate(b2·b3,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^{5}\, dx = 0$$

```
'integrate(b2·b4,x,−1,1)=integrate(b2·b4,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^{6}\, dx = \frac{2}{7}$$

```
'integrate(b3·b4,x,−1,1)=integrate(b3·b4,x,−1,1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^{7}\, dx = 0$$

```
'integrate(x^l·x^m,x,−1,1)=((−1)^(l+m)+1)/(l+m+1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^{m+l}\, dx = \frac{(-1)^{m+l}+1}{m+l+1}$$

Como el producto interno no fue igual a cero en todos los casos, se concluye que la base no es ortogonal, sin embargo sí hay algunos polinomios ortogonales a otros en la base (cuando m+l es par el resultado es diferente de cero, y es cero si m+l es impar).

b) Utilizando la definición de producto interno ortogonalice la base y encuentre los 10 primeros vectores ortogonales.

Para ortogonalizar la base aplicamos el procedimiento de Gram-Schmidt.

```
base : [1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^7,x^8,x^9];
```

$$[1, x, x^{2}, x^{3}, x^{4}, x^{5}, x^{6}, x^{7}, x^{8}, x^{9}]$$

```
baseOrtog[1]:base[1];
```

$$1$$

```
for i:2 while i<=10 do
baseOrtog[i]:base[i]−sum((integrate(base[i]·baseOrtog[n−1],x,−1,1)·baseOrtog[n−1]/integrate
```

done

```
baseOrtog1=ratsimp(baseOrtog[1]);
baseOrtog1:ratsimp(baseOrtog[1])$
```

$$baseOrtog1 = 1$$

```
baseOrtog2=ratsimp(baseOrtog[2]);
baseOrtog2:ratsimp(baseOrtog[2])$
```

$$baseOrtog2 = x$$

```
baseOrtog3=ratsimp(baseOrtog[3]);
baseOrtog3:ratsimp(baseOrtog[3])$
```

$$baseOrtog3 = \frac{3x^{2}-1}{3}$$

```
baseOrtog4=ratsimp(baseOrtog[4]);
baseOrtog4:ratsimp(baseOrtog[4])$
```

$$baseOrtog4=\frac{5\,x^{3}-3\,x}{5}$$

```
baseOrtog5=ratsimp(baseOrtog[5]);
baseOrtog5:ratsimp(baseOrtog[5])$
```

$$baseOrtog5=\frac{35\,x^{4}-30\,x^{2}+3}{35}$$

```
baseOrtog6=ratsimp(baseOrtog[6]);
baseOrtog6:ratsimp(baseOrtog[6])$
```

$$baseOrtog6=\frac{63\,x^{5}-70\,x^{3}+15\,x}{63}$$

```
baseOrtog7=ratsimp(baseOrtog[7]);
```

$$baseOrtog7=\frac{231\,x^{6}-315\,x^{4}+105\,x^{2}-5}{231}$$

```
baseOrtog8=ratsimp(baseOrtog[8]);
```

$$baseOrtog8=\frac{429\,x^{7}-693\,x^{5}+315\,x^{3}-35\,x}{429}$$

```
baseOrtog9=ratsimp(baseOrtog[9]);
```

$$baseOrtog9=\frac{6435\,x^{8}-12012\,x^{6}+6930\,x^{4}-1260\,x^{2}+35}{6435}$$

```
baseOrtog10=ratsimp(baseOrtog[10]);
```

$$baseOrtog10=\frac{12155\,x^{9}-25740\,x^{7}+18018\,x^{5}-4620\,x^{3}+315\,x}{12155}$$

Se encontraron los 10 primeros vectores de una base ortogonal (Polinomios de Legendre).

c) Modifique la definición de producto interno, ortogonalice la base y encuentre otros 10 vectores ortogonales.

```
bOrt[1]:base[1];
```

$$1$$

```
for i:2 while i<=10 do
bOrt[i]:base[i]−sum((integrate(base[i]·bOrt[n−1]·sqrt(1−x^2),x,−1,1)·bOrt[n−1]/integrate(bOrt[r
```

done

```
bOrt1=ratsimp(bOrt[1]);
bOrt1:ratsimp(bOrt[1])$
```

$$bOrt1=1$$

```
bOrt2=ratsimp(bOrt[2]);
bOrt2:ratsimp(bOrt[2])$
```

$$bOrt2=x$$

```
bOrt3=ratsimp(bOrt[3]);
bOrt3:ratsimp(bOrt[3])$
```

$$bOrt3=\frac{4\,x^2-1}{4}$$

```
bOrt4=ratsimp(bOrt[4]);
bOrt4:ratsimp(bOrt[4])$
```

$$bOrt4=\frac{2\,x^3-x}{2}$$

```
bOrt5=ratsimp(bOrt[5]);
bOrt5:ratsimp(bOrt[5])$
```

$$bOrt5=\frac{16\,x^4-12\,x^2+1}{16}$$

```
bOrt6=ratsimp(bOrt[6]);
bOrt6:ratsimp(bOrt[6])$
```

$$bOrt6=\frac{16\,x^5-16\,x^3+3\,x}{16}$$

```
bOrt7=ratsimp(bOrt[7]);
```

$$bOrt7=\frac{64\,x^6-80\,x^4+24\,x^2-1}{64}$$

```
bOrt8=ratsimp(bOrt[8]);
```

$$bOrt8=\frac{16\,x^7-24\,x^5+10\,x^3-x}{16}$$

```
bOrt9=ratsimp(bOrt[9]);
```

$$bOrt9=\frac{256\,x^8-448\,x^6+240\,x^4-40\,x^2+1}{256}$$

```
bOrt10=ratsimp(bOrt[10]);
```

$$bOrt10=\frac{256\,x^9-512\,x^7+336\,x^5-80\,x^3+5\,x}{256}$$

Se encontraron los 10 primeros vectores de otra base ortogonal (Polinomios de Chebyshev).

d) Suponga la función h(x) = sen(3x)(1-x^2)
1. Expanda la función en términos de los polinomios de Legendre, grafique y calcule el error.

```
h(x):=sin(3·x)·(1−x^2);
```

$$h(x):=\sin(3\,x)\,(1-x^2)$$

```
for i:1 while i<=6 do
c[i]:integrate(baseOrtog[i]·h(x),x,−1,1)/integrate(baseOrtog[i]^2,x,−1,1);
```

done

```
c1 : float(c[1]);
```

0.0

```
c2 : float(c[2]);
```

0.5972749941514671

```
c3 : float(c[3]);
```

0.0

```
c4 : float(c[4]);
```

−2.42901605752607

```
c5 : float(c[5]);
```

0.0

```
c6 : float(c[6]);
```

3.386035673971901

```
f2:c1·baseOrtog1+c2·baseOrtog2;
f4:c1·baseOrtog1+c2·baseOrtog2+c3·baseOrtog3+c4·baseOrtog4;
f6:c1·baseOrtog1+c2·baseOrtog2+c3·baseOrtog3+
c4·baseOrtog4+c5·baseOrtog5+c6·baseOrtog6;
```

$$0.5972749941514671\,x$$

$$0.5972749941514671\,x-0.4858032115052139\,(5\,x^3-3\,x)$$

$$0.05374659799955398\,(63\,x^5-70\,x^3+15\,x)-0.4858032115052139\,(5\,x^3-3\,x)+0.5972749941514671\,x$$

```
fAprox2(x):=f2$;
fAprox4(x):=f4$;
fAprox6(x):=f6$;
plot2d([h(x),fAprox2(x),fAprox4(x),fAprox6(x)],[x, −1, 1]);
```

[*C:/Users/Yazmin/AppData/Local/Temp/maxout13148.gnuplot*]

```
n = 6$;
ErrorOrtog1=float(sqrt(integrate((h(x)−fAprox6(x))^2,x,−1,1)))$;
%o69; %o70;
```

$n=6$

$ErrorOrtog1=0.02166420409815363$

Error en la base ortogonalizada de los polinomios de Legendre.

2. Expanda la función en términos de los polinomios de Chebyshev, grafique y calcule el error.

```
for j:1 while j<=6 do
c_C[j]:integrate(bOrt[j]·h(x)·(1−x^2),x,−1,1)/integrate(bOrt[j]^2,x,−1,1);
```

done

```
c_C1 : float(c_C[1]);
```

0.0

```
c_C2 : float(c_C[2]);
```

0.4054710987480888

```
c_C3 : float(c_C[3]);
```

0.0

```
c_C4 : float(c_C[4]);
```

−1.231103919985219

```
c_C5 : float(c_C[5]);
```

0.0

```
c_C6 : float(c_C[6]);
```

1.775407737496127

```
f2_C:c_C1·bOrt1+c_C2·bOrt2;
f4_C:c_C1·bOrt1+c_C2·bOrt2+c_C3·bOrt3+c_C4·bOrt4;
f6_C:c_C1·bOrt1+c_C2·bOrt2+c_C3·bOrt3+
c_C4·bOrt4+c_C5·bOrt5+c_C6·bOrt6;
```

$$0.4054710987480888\ x$$

$$0.4054710987480888\ x - 0.6155519599926094\ (2\ x^3 - x)$$

$$0.110962983593508\ (16\ x^5 - 16\ x^3 + 3\ x) - 0.6155519599926094\ (2\ x^3 - x) + 0.4054710987480888\ x$$

```
fAprox2_C(x):=f2_C$;
fAprox4_C(x):=f4_C$;
fAprox6_C(x):=f6_C$;
```

```
plot2d([h(x),fAprox2_C(x),fAprox4_C(x),fAprox6_C(x)],[x, −1, 1]);
```

[C:/Users/Yazmin/AppData/Local/Temp/maxout13148.gnuplot]

```
n = 6$;
```

```
ErrorOrtog2=float(sqrt(integrate((h(x)−fAprox6(x))^2·(1−x^2),x,−1,1)))$;
```

```
%i87; %o88;
```

$$n = 6$$

$$ErrorOrtog2 = 0.01570826361041808$$

```
n5:5$;
```

```
taylor(h(x), x, 0, n5 );
Taylor5(x):=taylor(h(x), x, 0, n5 )$;
```

$$3\ x - \frac{15\ x^3}{2} + \frac{261\ x^5}{40} + ...$$

```
n7:7$;
```

```
taylor(h(x), x, 0, n7 );
Taylor7(x):=taylor(h(x), x, 0, n7 )$;
```

$$3\,x-\frac{15\,x^3}{2}+\frac{261\,x^5}{40}-\frac{1377\,x^7}{560}+...$$

```
n9:9$;
```

```
taylor(h(x), x, 0, n9 );
Taylor9(x):=taylor(h(x), x, 0, n9 )$;
```

$$3\,x-\frac{15\,x^3}{2}+\frac{261\,x^5}{40}-\frac{1377\,x^7}{560}+\frac{2187\,x^9}{4480}+...$$

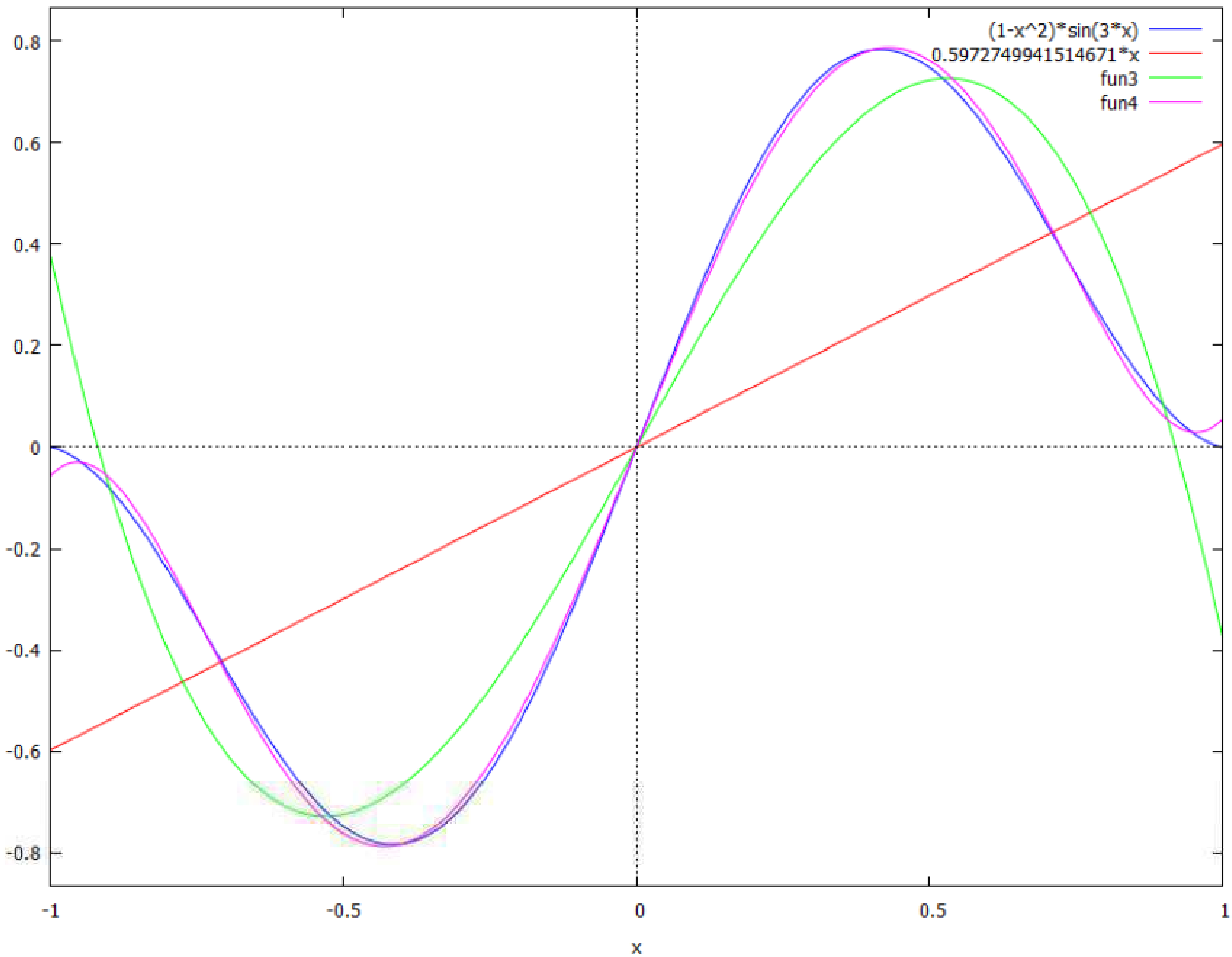
```
plot2d([h(x),Taylor5(x),Taylor7(x),Taylor9(x)],[x, −1, 1]);
```

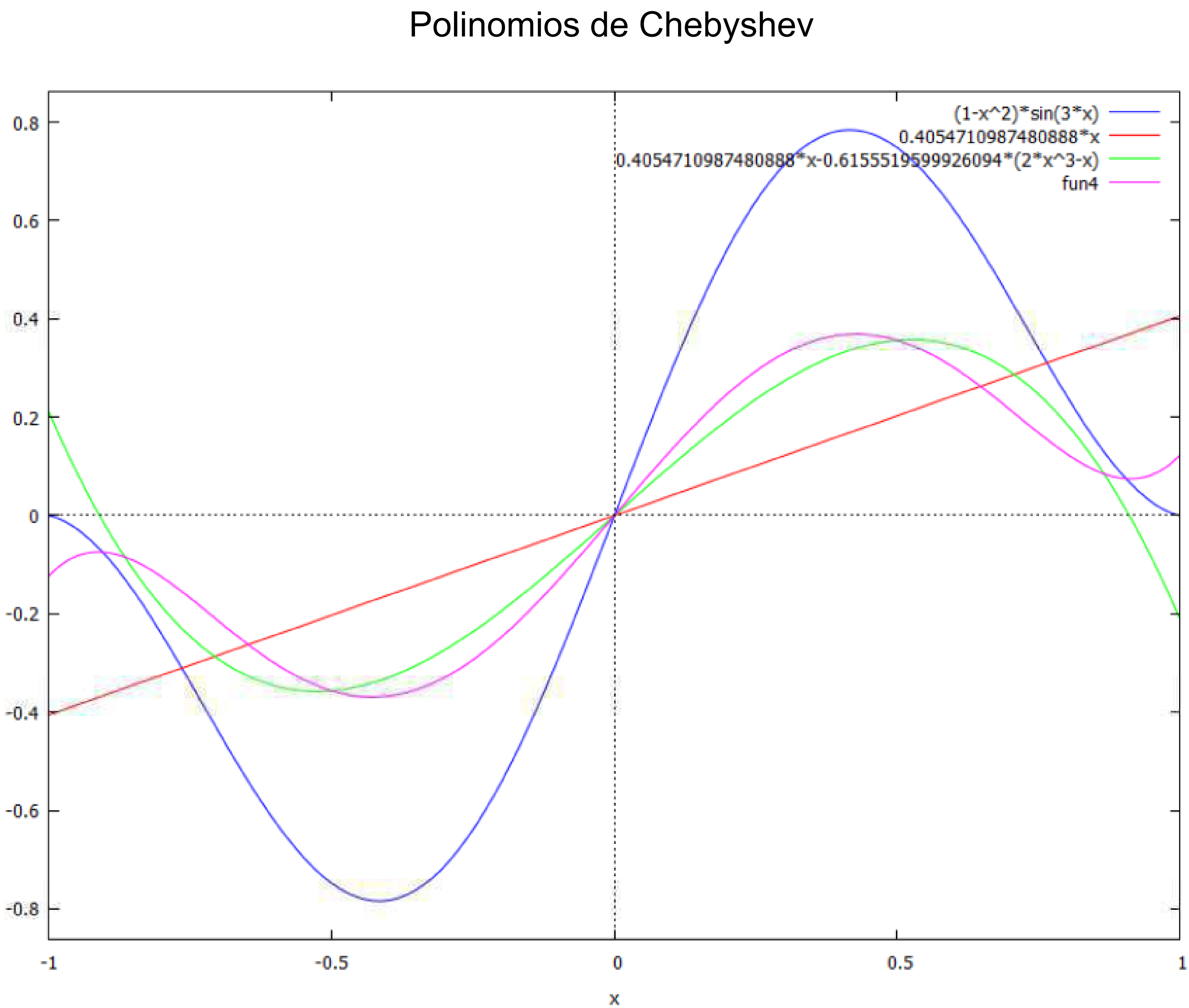
[*C:/Users/Yazmin/AppData/Local/Temp/maxout13148.gnuplot*]

```
plot2d([h(x),Taylor9(x),fAprox6_C(x),fAprox6(x)],[x, −1, 1]);
```

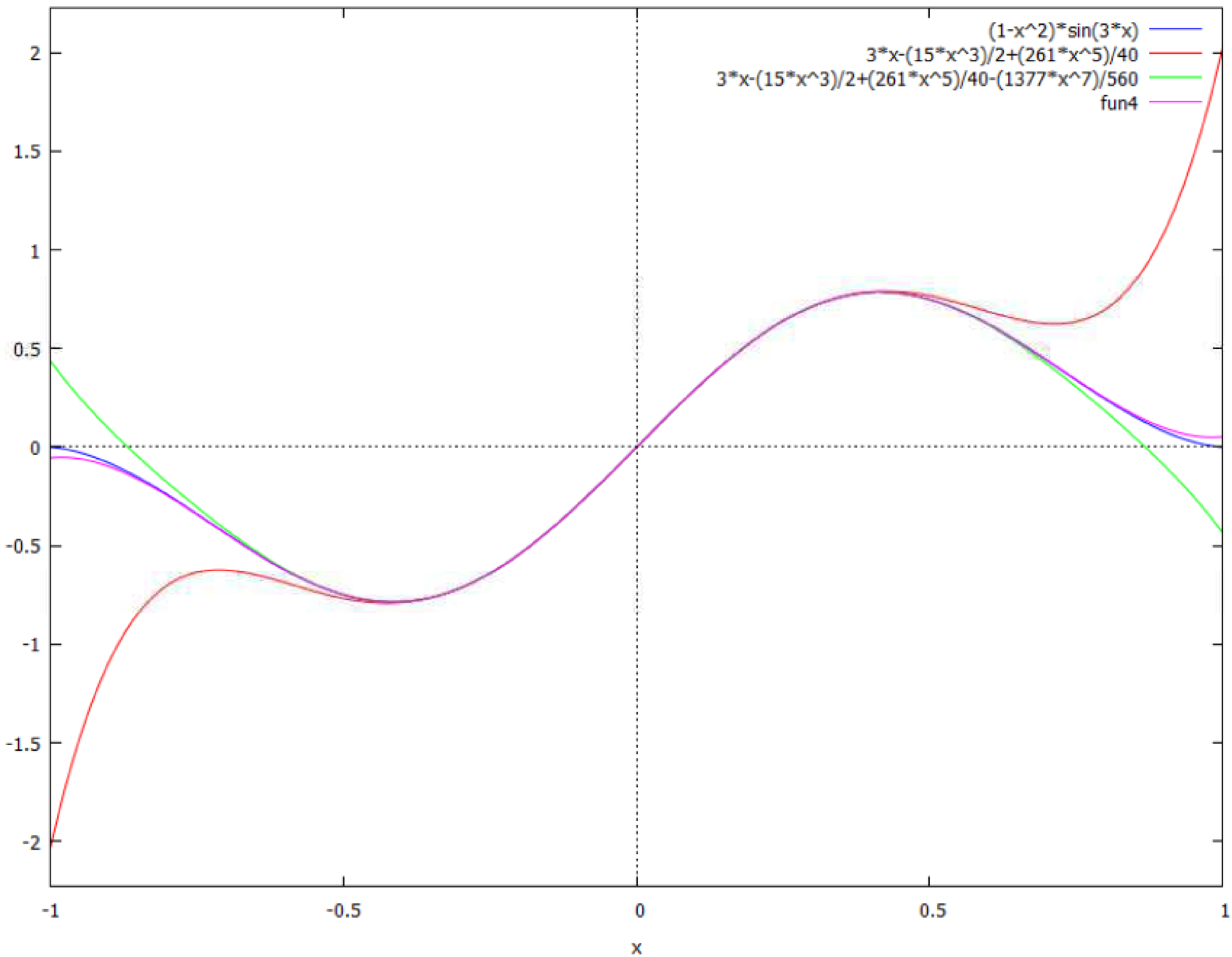
[*C:/Users/Yazmin/AppData/Local/Temp/maxout13148.gnuplot*]

Polinomios de Legendre




Polinomios de Chebyshev
(1-x^2)*sin(3*x)
0.4054710987480888*x
0.4054710987480888*x-0.6155519599926094*(2*x^3-x)
fun4
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.5
0
0.5
1
x

Polinomios de Taylor



Comparativa de la función con los polinomios de Legendre, Chebyshev y Taylor