

Modelado de objetos autogravitantes

Andrés Felipe Rubio^{*}
Andres Felipe Vargas^{**}
Carlos Andrés Laguado^{***}
Universidad Industrial de Santander
Carrera 27 calle 9

30 de noviembre de 2021

Índice

1. Introducción	2
2. Modelado de objetos autogravitantes	2
2.1. Concepto	2
2.2. Ecuación de estado para la anisotropía	3
2.3. Integración numérica y condiciones de aceptabilidad física	3
3. Modelado de objetos según Newton y Einstein	4
3.1. Modelado de objetos autogravitantes newtonianos anisótropos	4
3.2. Modelado de objetos autogravitantes relativistas anisótropos	4
3.3. Adimensionalización de los sistemas de ecuaciones diferenciales	5
3.4. Propuesta de anisotropía	5
4. Metodología	6
4.1. Sistemas de ecuaciones finales	6
4.1.1. Modelo Newtoniano	6
4.1.2. Modelo Relativista	7
4.1.3. Parámetros usados	7
5. Resultados	8

^{*} e-mail: andres2218426@correo.uis.edu.co

^{**} e-mail: andres2218420@correo.uis.edu.co

^{***} e-mail: carlos2047095@correo.uis.edu.co

6. Conclusiones

13

Resumen

En el presente informe se busca entender, o al menos intuir cuál es la incidencia de los fluidos no pascalianos en la estructura estelar newtoniana y relativista. Primero vamos a buscar el modelo que representa este fenómeno, el cual, como se verá más adelante es un sistema de ecuaciones diferenciales. Después vamos a suponer un perfil de densidad y una forma particular de la distribución de presiones radiales y tangenciales. A partir de dichas suposiciones se procede a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales y con los resultados obtenemos gráficas, que nos van a servir para comparar perfiles de presión para un espacio de parámetros.

Además con las gráficas obtenidas vamos a conocer el valor de la masa del cuerpo, esto resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales anteriormente mencionado hasta que la presión se haga cero.

Vamos a estudiar también las diferencias entre el modelado de objetos según Newton (newtoniano) y Einstein (relativista), los cuales se describen por diferentes sistemas de ecuaciones y los efectos de la anisotropía en cada uno de ellos.

1. Introducción

El modelado matemático nos permite expresar la realidad de manera que diversos problemas pueden ser resueltos en entornos de simulación por computadores. Imponiendo algunas condiciones físicas a las ecuaciones que modelan ciertos fenómenos se puede predecir o comparar comportamientos de dichos fenómenos. Dichas ecuaciones utilizadas para modelar fenómenos suelen ser ecuaciones diferenciales, pero también pueden ser sistemas de ecuaciones diferenciales. Así, para predecir el comportamiento de los fenómenos o comparar características, basta resolver las ecuaciones diferenciales que los describen y si es el caso obtener gráficas que permitan predecir el comportamiento o hacer comparaciones entre los fenómenos.

2. Modelado de objetos autogravitantes

2.1. Concepto

Consideraremos una configuración material auto-gravitante esférica. Esto es un cuerpo material donde la gravitación es la única fuerza que la cohesiona. Este esquema se utiliza para modelar (hiper-simplificadamente) planetas, estrellas o cualquier cuerpo que se conforme con el campo gravitacional generado por su propia masa. En general, un posible modelado para este tipo de objetos (esféricos) se construye a partir de la suposición que esos cuerpos están formados por un fluido donde esa única fuerza los mantiene en equilibrio. Surgen entonces las ecuaciones de estructura, dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

- una que relaciona el gradiente de presión radial con el resto de las variables de estado y se conoce como la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP(r)}{dr} = F(m(r), \rho(r), P(r), P_{\perp}(r), r) \quad (1)$$

donde $P(r)$ es presión radial; $P_{\perp}(r)$ representa a las presiones tangenciales; $\rho(r)$, la de densidad de masa y $m(r)$ la masa contenida en una esfera de radio r ;

- otra que vincula el gradiente de masa con su densidad:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2)$$

y dos ecuaciones de estado entre las variables físicas del sistema en este caso la presión radial y tangencial:

$$P(r) = W(\rho(r), r) \quad P_{\perp}(r) = V(\rho(r), P(r), r) \quad (3)$$

respectivamente.

Estas dos ecuaciones relacionan las variables de estado del sistema y describen las propiedades físicas de los fluidos. En general, siempre pensamos en fluidos pascalianos en los cuales todas las presiones son iguales: $P(r) = P_{\perp}(r)$. En el caso más general podemos imaginar fluidos con "algún tipo de estructura" que permita una descripción donde $P(r) \neq P_{\perp}(r)$. Como estamos en el caso de simetrías esféricas tendremos que las dos presiones tangenciales son iguales y a su vez distintas a la presión radial, que depende de la densidad. Este tipo de ecuaciones se conocen como ecuaciones de estado barótropas.

De esta manera las ecuaciones (1) (2) (3) conforman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

2.2. Ecuación de estado para la anisotropía

A partir de las ecuaciones de estructura (1) y (2) y de las ecuaciones de estado (3) podemos idear una estrategia para resolver el sistema. La expresión para la presión tangencial $P_{\perp} = P_{\perp}(\rho(r), P(r), r)$, la sustituimos en las ecuaciones (1) y (2). Luego despejamos $\rho = Z(P(r), r)$ y la sustituimos en ambas ecuaciones. Entonces tendremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (posiblemente no lineales) con dos incógnitas: $P(r)$ y $m(r)$:

$$\frac{dP(r)}{dr} = G(m(r), P(r), r, P_0, M, R) \quad (4)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 Z(P(r), r) \quad (5)$$

Este sistema es integrable para un conjunto de condiciones iniciales $P(r=0) = P_0$ y $m(r=0) = 0$. De esta forma tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales que puede ser resuelto como un problema de valores iniciales.

2.3. Integración numérica y condiciones de aceptabilidad física

La integración se realiza considerando como condiciones iniciales los valores en el centro $P(0) = P_{\perp}(0) = P_0$ y $\rho(0) = \rho_0$ y se integra hasta que la presión radial se anule $P(R) = 0$. El valor del $r = R$ donde la presión radial se anula, se considera el borde de la distribución y

define su masa total $m(R) = M$. Por lo tanto, los modelos quedan parametrizados por las presiones, densidades centrales, masas totales M y los radios R de las distribuciones materiales.

Para que los modelos sean físicamente razonables se imponen condiciones adicionales como: que las presiones y densidades sean positivas para todo r dentro de la distribución, $P(r) > 0$ y $\rho(r) > 0$; sus gradientes sean negativos

$$\frac{dP(r)}{dr} \leq 0 \quad \frac{d\rho(r)}{dr} \leq 0 \quad (6)$$

Esto quiere decir que las presiones y densidades decrecen a medida que nos acercamos a la superficie. Para el caso de las configuraciones relativistas se exige adicionalmente que las velocidades del sonido, radiales y tangenciales,

$$v^2 = \frac{dP(r)}{d\rho} \leq c^2 \quad v_{\perp}^2 = \frac{dP_{\perp}(r)}{d\rho} \leq c^2 \quad (7)$$

sean menores que la velocidad de la luz c .

3. Modelado de objetos según Newton y Einstein

Vamos a analizar dos casos para distintas intensidades de campo gravitatorio y consideramos los casos newtonianos y relativistas.

3.1. Modelado de objetos autogravitantes newtonianos anisótropos

Las ecuaciones diferenciales que describen el equilibrio hidrostático para esferas autogravitantes newtonianas son

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} + 2\frac{P_{\perp}(r) - P(r)}{r} \quad y \quad (8)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (9)$$

Donde G es la constante de gravitación universal. Las ecuaciones (8) y (9), conjuntamente con las ecuaciones de estado (3) que proveen las características físicas de los fluidos cierran el sistema de ecuaciones de equilibrio para este tipo de objetos.

3.2. Modelado de objetos autogravitantes relativistas anisótropos

Para el caso de fluidos relativistas anisótropos, las ecuaciones diferenciales para el equilibrio hidrostático serán:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2}\right) \left(1 - 2\frac{Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} + 2\frac{P_{\perp}(r) - P(r)}{r} \quad (10)$$

y

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (11)$$

Al igual que en el caso anterior la ecuación (3) que describe las características físicas del fluido completa el sistema de ecuaciones.

Al comparar (10) con (8) son claras las diferencias que incluyen las tres correcciones relativistas a la ecuación de equilibrio newtoniana.

Las definiciones de masa (ecuaciones (9) y (11)) son iguales en ambos casos. Igualmente la anisotropía (diferencia de presiones) es equivalente para ambas ecuaciones de equilibrio.

3.3. Adimensionalización de los sistemas de ecuaciones diferenciales

Para integrar numéricamente las ecuaciones diferenciales es necesario adimensionalizarlas. Para ello se realizan los siguientes cambios de variables con los parámetros característicos del sistema:

$$\frac{P}{P_0} \rightarrow \tilde{P}, \quad \frac{P_\perp}{P_0} \rightarrow \tilde{P}_\perp, \quad \frac{\rho}{\rho_0} \rightarrow \tilde{\rho}, \quad \frac{m}{M} \rightarrow \tilde{m}, \quad \frac{r}{R} \rightarrow \tilde{r}, \quad (12)$$

Donde identificamos las siguientes cantidades como

- M y R como la masa total y el radio de la configuración material, respectivamente,
- P_0 y ρ_0 como la presión y la densidad central, respectivamente.

Claramente, los nuevos parámetros son adimensionales. Ahora construimos parámetros auxiliares también adimensionales de la forma:

$$\mu = \frac{MG}{Rc^2}, \quad \kappa = \frac{P_0}{\rho_0 c^2}, \quad \eta = \frac{\rho_0}{\ll \rho \gg} \quad \text{con} \quad \ll \rho \gg = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} \quad (13)$$

El significado físico de cada uno de los parámetros es:

- μ representa la relación masa / radio de la configuración.
- κ representa la relación presión central / densidad central.
- η representa relación entre la densidad central y la densidad promedio calculada a partir de los valores del radio y la masa total de la distribución.

3.4. Propuesta de anisotropía

Primero, vamos a definir δ como la diferencia de presiones radiales y tangenciales, esto es $\Delta = P_\perp(r) - P(r)$. La idea es proponer una funcionalidad para Δ que permita integrar fácilmente la ecuación de equilibrio hidrostático. De esta forma para el caso newtoniano imponemos una forma de anisotropía

$$\Delta = C \frac{m(r)\rho(r)}{r} \Rightarrow P_\perp = P_\perp(\rho(r), P(r), r) \equiv P(r) + C \frac{m(r)\rho(r)}{r} \quad (14)$$

Donde C representa la intensidad de la anisotropía. Con esta suposición de anisotropía, la ecuación de equilibrio newtoniana (8) se convierte en

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{m(r)\rho(r)}{r^2} + 2\frac{P_\perp(r) - P(r)}{r} \Rightarrow \frac{dP(r)}{dr} = h \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \quad (15)$$

Con $h = 2C - 1$ una constante que también mide la diferencia de presiones (anisotropía). Del mismo modo propondremos para el caso relativista

$$\Delta = \frac{C}{r} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right) \left(1 - 2\frac{m(r)}{rc}\right)^{-1} \quad (16)$$

Con lo cual la ecuación (10) se convierte en

$$\frac{dP}{dr} = -h \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right) \left(1 - 2\frac{m(r)}{rc}\right)^{-1} \quad (17)$$

y otra vez $h = 2C - 1$ es una constante que mide la anisotropía. Las ecuaciones (9) o (11) completan cada sistema, respectivamente.

Vamos a suponer un perfil de densidades del tipo Gokhroo-Mehra

$$\rho = \rho_0(1 - B\tilde{r}^2) \quad (18)$$

Donde la constante B es

$$B = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{3}{\eta}\right)$$

4. Metodología

A partir de los conceptos teóricos presentados anteriormente se establecen los sistemas de ecuaciones diferenciales en función de las variables P, m, r .

4.1. Sistemas de ecuaciones finales

Para ambos casos (newtoniano y relativista) se construye el sistema de ecuaciones luego de adimensionalizar y parametrizar las ecuaciones con μ, κ, η, h :

4.1.1. Modelo Newtoniano

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{r}} = -\frac{\mu}{\kappa} h \frac{\tilde{m}(\tilde{r})\varphi(\tilde{r})}{\tilde{r}^2} \quad (19)$$

$$\frac{d\tilde{m}}{d\tilde{r}} = 3\eta\tilde{r}^2\varphi(\tilde{r}) \quad (20)$$

donde, $\varphi(\tilde{r}) = 1 - (\frac{\eta-15}{3\eta})\tilde{r}^2$ es el perfil de densidad utilizado.

4.1.2. Modelo Relativista

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{r}} = -\frac{\mu}{\kappa}h\frac{\tilde{m}(\tilde{r})\varphi(\tilde{r})}{\tilde{r}^2}\left(1 + \kappa\frac{\tilde{P}(\tilde{r})}{\varphi(\tilde{r})}\right)\left(1 + \frac{3\eta\kappa\tilde{P}(\tilde{r})\tilde{r}^3}{\tilde{m}(\tilde{r})}\right)\left(1 - \frac{2\mu\tilde{m}(\tilde{r})}{\tilde{r}C}\right) \quad (21)$$

$$\frac{d\tilde{m}}{d\tilde{r}} = 3\eta\tilde{r}^2\varphi(\tilde{r}) \quad (22)$$

donde, $\varphi(\tilde{r}) = 1 - (\frac{\eta-15}{3\eta})\tilde{r}^2$ es el perfil de densidad utilizado.

4.1.3. Parámetros usados

Los parámetros que se usaron para la integración numérica fueron:

- $\mu = 0.25$
- $\kappa = 0.15$
- $\eta = 0.8$
- $h = -0.5$

Los dos sistemas de ecuaciones diferenciales se introdujeron a la función **solve-ivp** de la librería spicy para python, con un intervalo de integración de $[0.0001 \ 1]$, luego se realiza un análisis de sensibilidad para los parámetros μ, κ, η y h . Las graficas resultantes de la integración numérica se presentan en la sección de resultados 5.

5. Resultados

En la Figura 1 se muestra una comparación de la integración numérica para los dos modelos (Newtoniano y Relativista). La masa para ambos modelos se comporta de la misma manera creciendo a medida que aumenta el valor de r . Por otro lado, la presión del modelo Relativista decrece mas rapido que la presión según el modelo newtoniano.

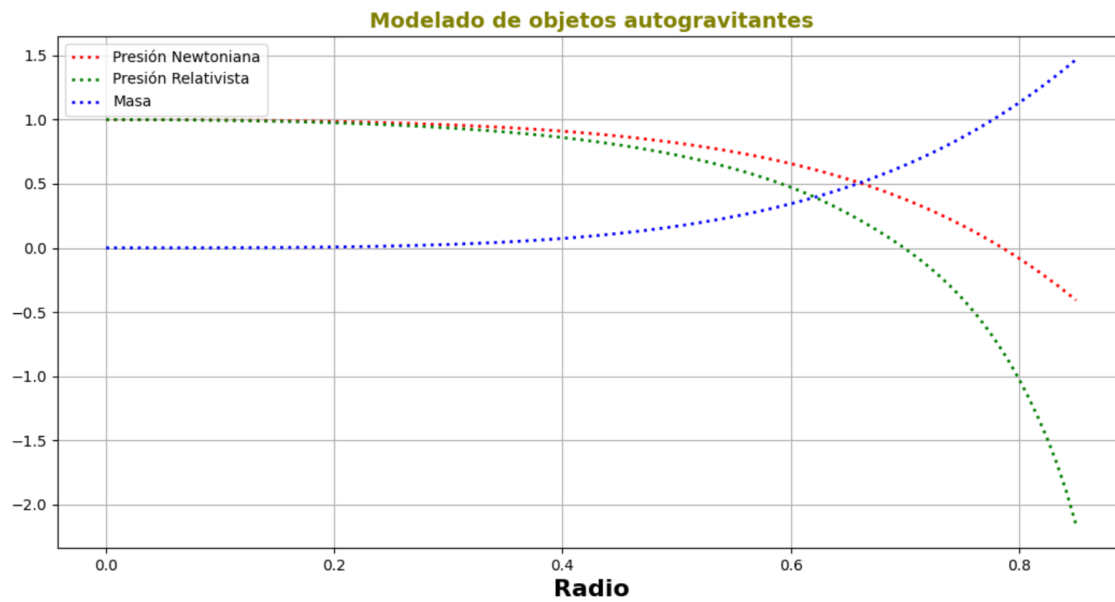


Figura 1: Comparativa entre los modelos newtoniano y relativista para la configuración de parámetros dada en 4.1.3

Ahora se presenta un analisis de sensibilidad para el modelo Newtoniano usando diferentes valores de los parámetros μ, κ, η y h en las figuras 2, 3, 4 y 5, respectivamente. Para el caso de μ la presión decrece menos en función del radio mientras el valor de μ disminuye. mientras que para el caso de κ y η la presión decrece más en función del radio (r) mientras el valor de dichos parámetros aumenta. Por otro lado, la masa no se ve afectada con la variación de estos parámetros, excepto para el parámetro η que se presentan algunas diferencias, pero graficamente no son muy significativas (ver figura 4).

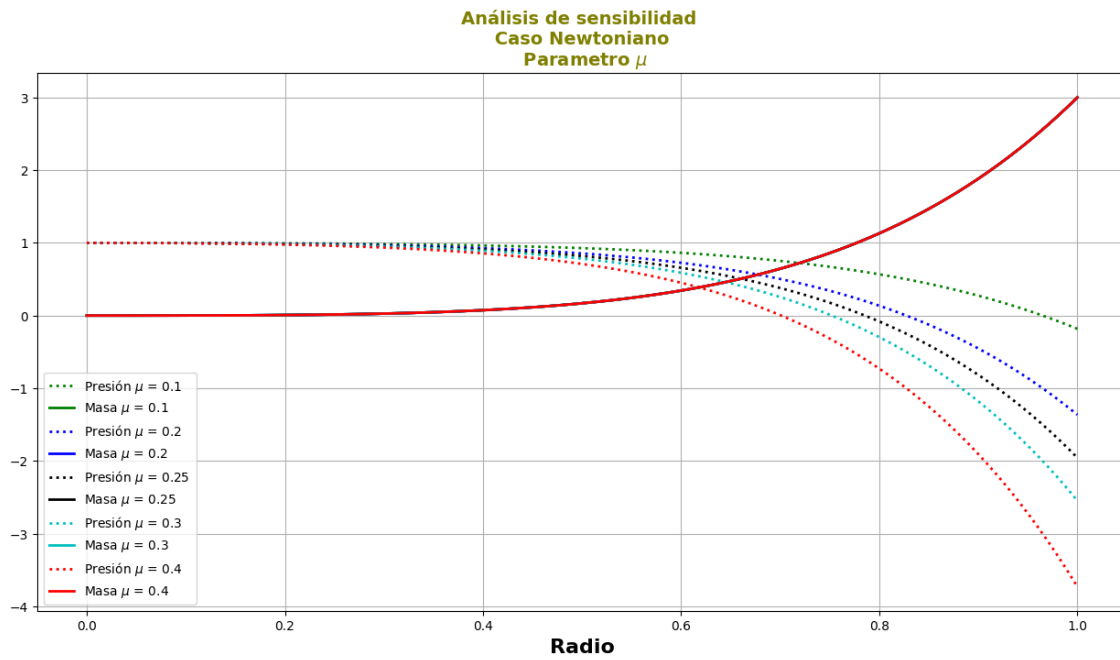


Figura 2: Modelado de objetos autogravitantes newtonianos para diferentes valores de μ .

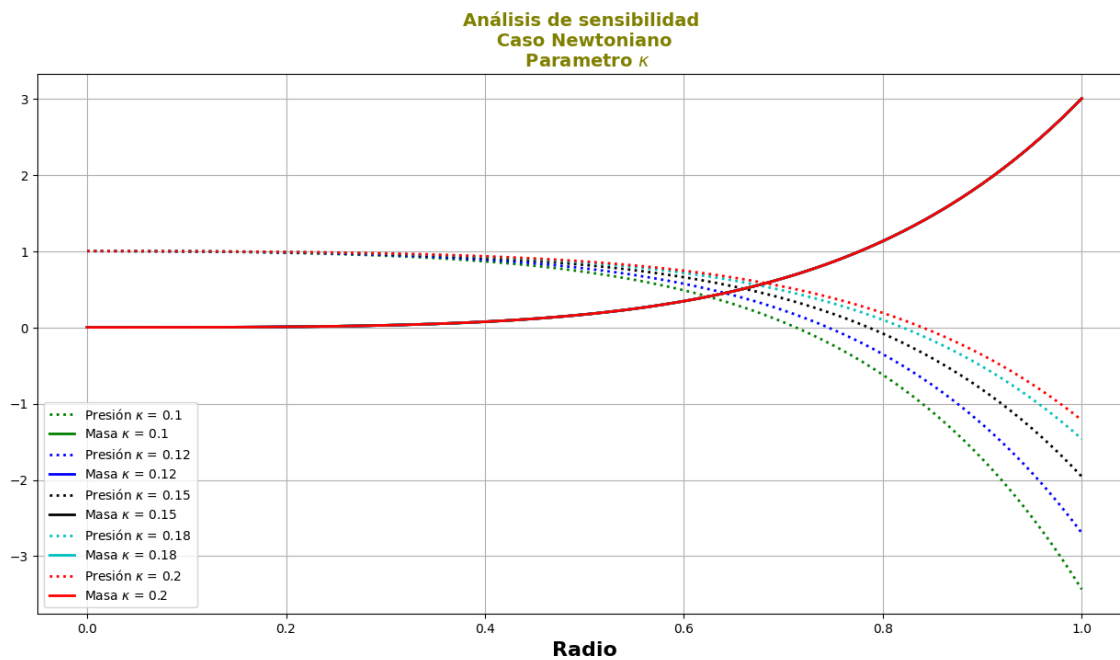


Figura 3: Modelado de objetos autogravitantes newtonianos para diferentes valores de κ .

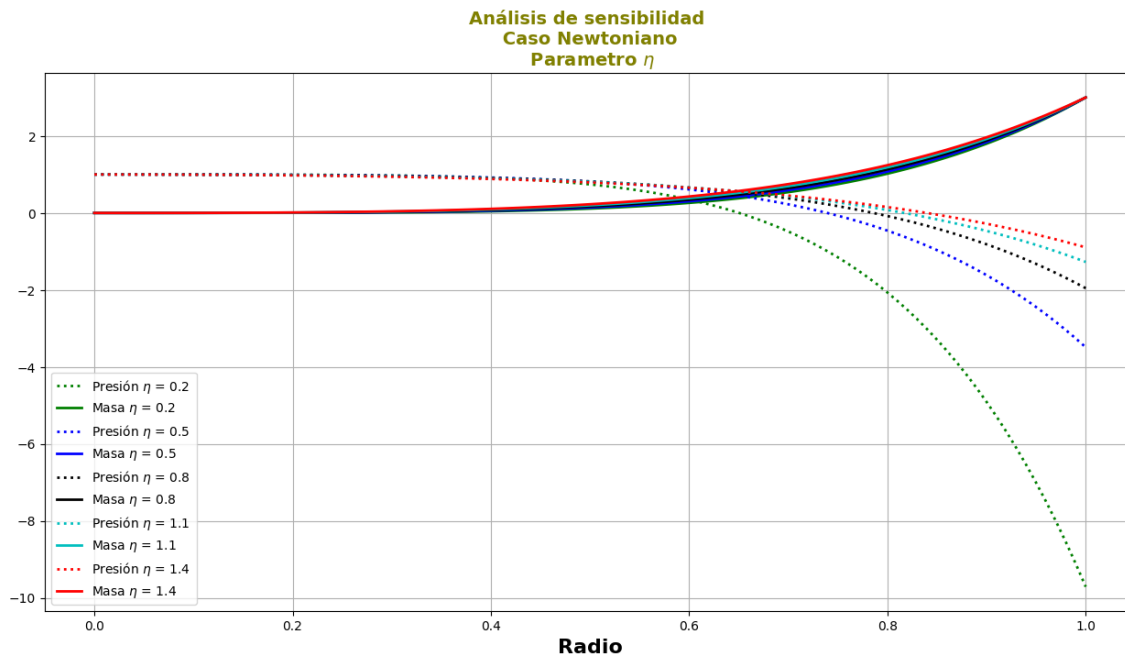


Figura 4: Modelado de objetos autogravitantes newtonianos para diferentes valores de η .

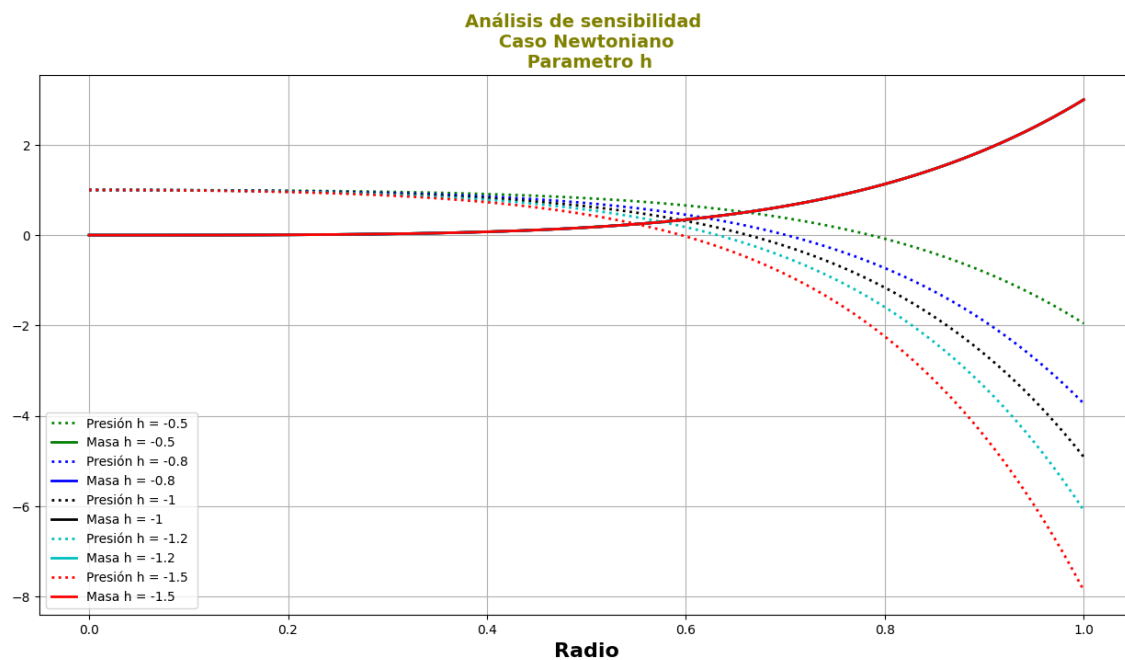


Figura 5: Modelado de objetos autogravitantes newtonianos para diferentes valores de h .

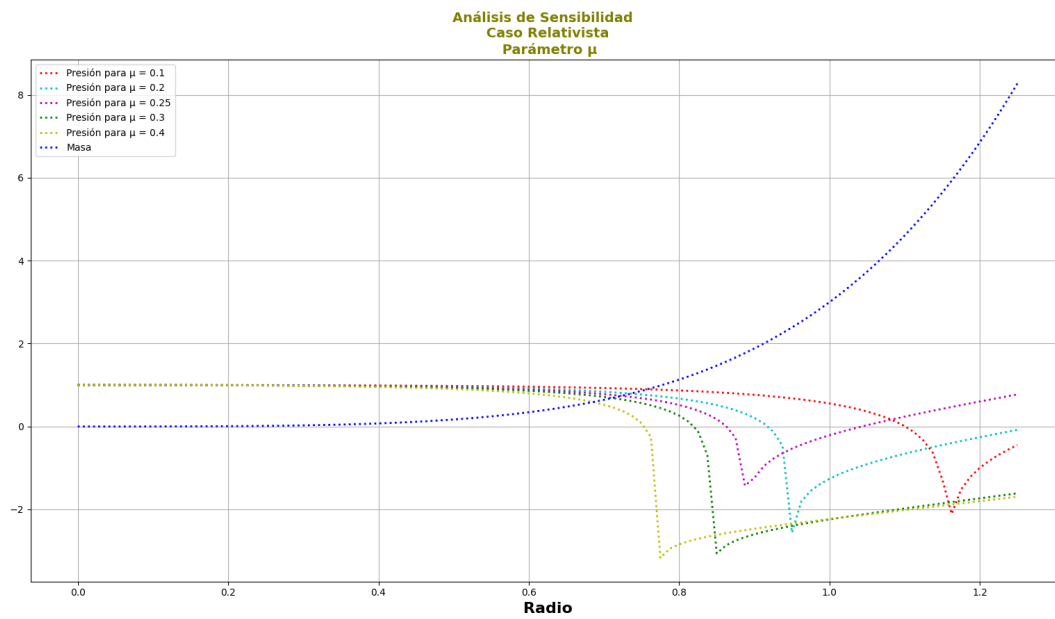


Figura 6: Modelado de objetos autogravitantes relativistas para diferentes valores de μ .

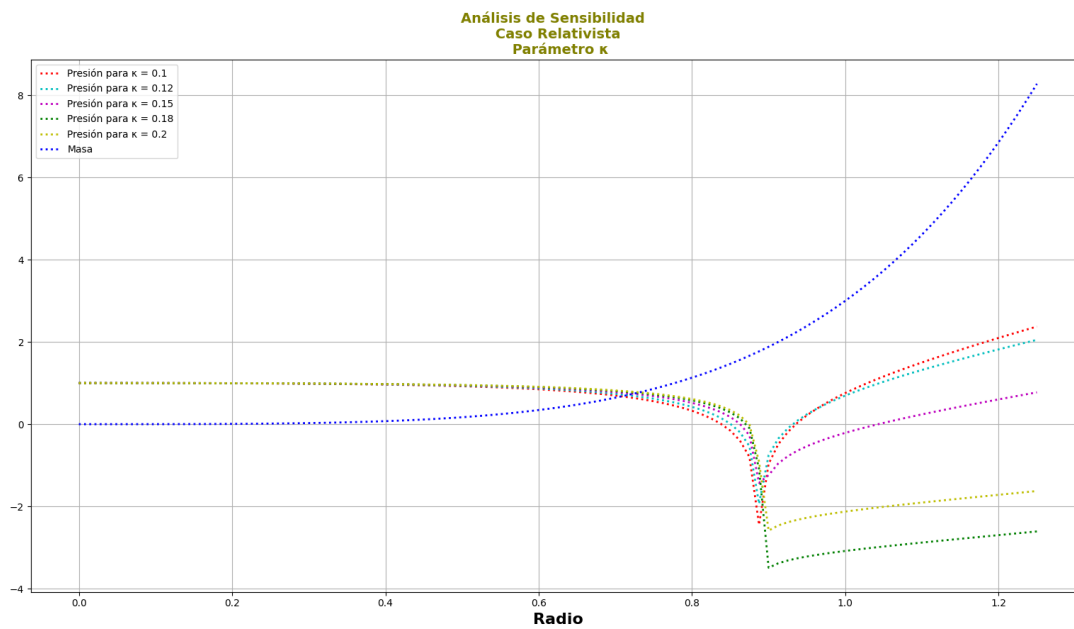


Figura 7: Modelado de objetos autogravitantes relativistas para diferentes valores de κ .

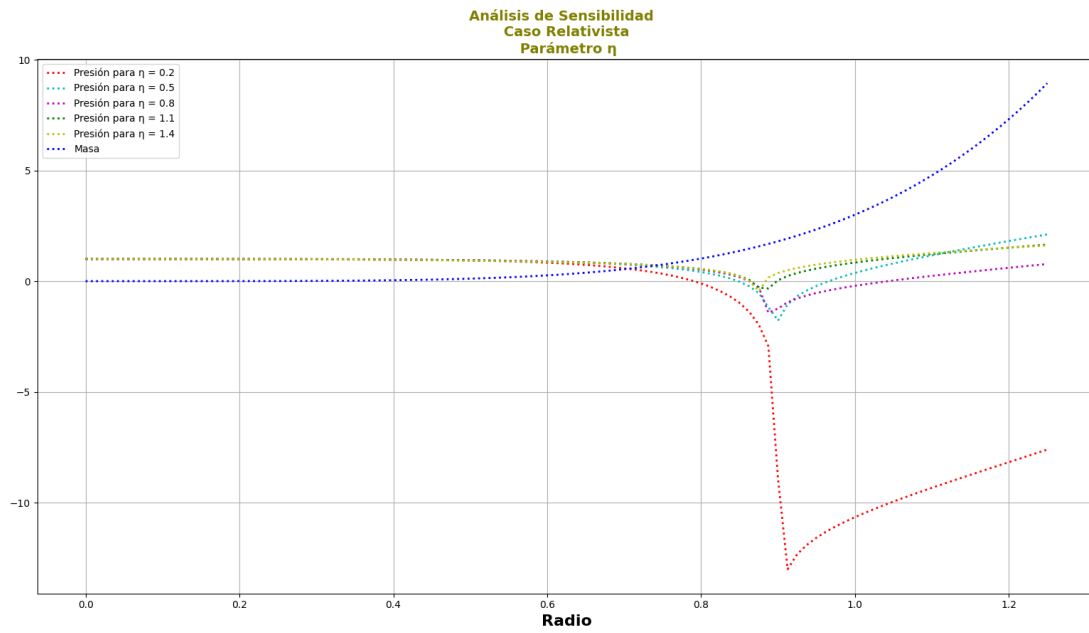


Figura 8: Modelado de objetos autogravitantes relativistas para diferentes valores de η .

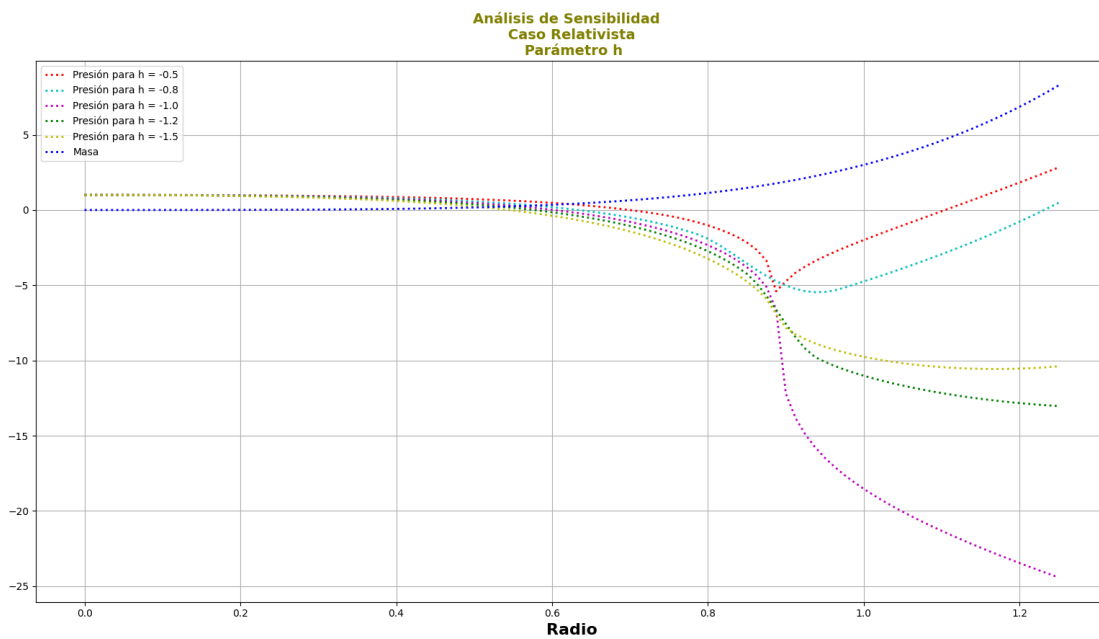


Figura 9: Modelado de objetos autogravitantes relativistas para diferentes valores de h .

En las figuras 6, 7, 8 y 9, se presenta el análisis de sensibilidad para el caso de modelo relativista.

6. Conclusiones

Partiendo de los conceptos teóricos de anisotropía y el comportamiento de objetos autogravitantes, se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales, para dos modelados diferentes (Modelado Newtoniano y modelado relativista). A partir de la ecuación de estado para la anisotropía se realiza la adimensionalización de las ecuaciones para finalmente dejarlas en términos de parámetros adimensionales. Finalmente con ayuda de la librería de python "spicy" se realizó la integración numérica de las ecuaciones diferenciales y se analizó el comportamiento de la masa y de la presión radial dependiendo de los parámetros adimensionales (μ , κ , η y h).