Ejercicio 4 y 5 de la sección 4.1.6

Andrés Felipe Vargas
Andrés Felipe Rubio
Carlos Andrés Laguado

September 24th, 2021

1 Ejercicio 4

Suponga:

$$AB = BA$$

Demostrar:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$$

$$AA + BA + AB + BB = A^2 + 2AB + B^2$$

$$A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\boxed{A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2}$$

Demostrar:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A+B)(A+B)^2 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A+B)(A^2 + 2AB + B^2) = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$AA^2 + BA^2 + 2AAB + 2BAB + AB^2 + BB^2 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$A^3 + BA^2 + 2A^2B + 2AB^2 + 2ABB + AB^2 + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$\boxed{A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3}$$

¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $AB \neq BA$?

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$
$$(A+B)^2 = AA + AB + BA + BB$$
$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B)$$
$$(A+B)^3 = (A^2 + AB + BA + B^2)(A+B)$$
$$(A+B)^3 = A^2A + A^2B + ABA + ABB + BAA + BAB + B^2A + B^2B$$
$$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$$
$$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + A^B2 + ABA + BAB + BA^2 + B^2A + B^3$$

2 Ejercicio 5

Suponga que un operador $\mathbb{L}$ puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $\mathbb{L} = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+$ con $[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I}$. Demostrar que:

A. Si $\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle$ y $|y\rangle = \mathbb{L}_+|x\rangle$ entonces $\mathbb{L}|y\rangle = (\lambda+1)|y\rangle$

y, del mismo modo, demuestre que:

B. Si $\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle$ y $|z\rangle = \mathbb{L}_-|x\rangle$ entonces $\mathbb{L}|z\rangle = (\lambda-1)|y\rangle$

3 Solución parte A.

Condiciones:

$$\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \tag{1}$$

$$|y\rangle = \mathbb{L}_+|x\rangle \tag{2}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+ \tag{3}$$

$$[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I} \tag{4}$$

Aplicando conmutación en (4):

$$\mathbb{L}_-\mathbb{L}_+ - \mathbb{L}_+\mathbb{L}_- = \mathbb{I} \tag{5}$$

Reemplazando (3) en (1):

$$\mathbb{L}_-\mathbb{L}_+|x\rangle = \lambda|x\rangle \tag{6}$$

Reemplazando (2) en (6):

$$\mathbb{L}_-|y\rangle = \lambda|x\rangle \tag{7}$$

Aplicando a $|y\rangle$ la identidad (3):

$$[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+]|y\rangle = \mathbb{I}|y\rangle \tag{8}$$

Desarrollando:

$$\mathbb{L}_-\mathbb{L}_+|y\rangle - \mathbb{L}_+\mathbb{L}_-|y\rangle = |y\rangle \tag{9}$$

Reemplazando (3) en (9) y despejando:

$$\mathbb{L}|y\rangle = |y\rangle + \mathbb{L}_+\mathbb{L}_-|y\rangle \tag{10}$$

Reemplazando (7) en (10) se tiene:

$$\mathbb{L}|y\rangle = |y\rangle + \lambda\mathbb{L}_+|x\rangle \tag{11}$$

Reemplazando la condición incial (2) en (11) se deja la igualdad en función de $|y\rangle$:

$$\mathbb{L}|y\rangle = |y\rangle + \lambda|y\rangle \tag{12}$$

Reagrupando (11):

$$\boxed{\mathbb{L}|y\rangle = (1 + \lambda)|y\rangle}$$

4 Solución parte B.

Condiciones:

$$\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \tag{1}$$

$$|z\rangle = \mathbb{L}_-|x\rangle \tag{2}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+ \tag{3}$$

$$[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I} \tag{4}$$

Aplicando conmutación en (4) y reordenando:

$$\mathbb{L}_-\mathbb{L}_+ = \mathbb{I} + \mathbb{L}_+\mathbb{L}_- = \mathbb{L} \tag{5}$$

Reemplazando (5) en (1):

$$(\mathbb{I} + \mathbb{L}_+\mathbb{L}_-)|x\rangle = \lambda|x\rangle \tag{6}$$

Desarrollando (6):

$$\mathbb{L}_+\mathbb{L}_-|x\rangle = (\lambda - 1)|x\rangle \tag{7}$$

Reemplazando (2) en (7):

$$\mathbb{L}_+|z\rangle = (\lambda - 1)|x\rangle \tag{8}$$

Aplicando (1) a $|z\rangle$ se tiene:

$$\mathbb{L}|z\rangle = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+|z\rangle \tag{9}$$

Reemplazando (8) en (9) y reordenando:

$$\mathbb{L}|z\rangle = (\lambda - 1)\mathbb{L}_-|x\rangle \tag{10}$$

Reemplazando (2) en (10) y reordenando:

$$\mathbb{L}|z\rangle = (\lambda - 1)|z\rangle \tag{11}$$

Finalmente se obtiene:

$$\boxed{\mathbb{L}|z\rangle = (\lambda - 1)|z\rangle}$$