Tensores y autovalores

Andrés Felipe Rubio*
Andres Felipe Vargas**
Carlos Andrés Laguado***
Universidad Industrial de Santander
Carrera 27 calle 9

Versión 1 05/10/2021

Índice

Resumen

En el presente informe se presenta el desarrollo de la aplicación de tensores y autovectores a dos diferentes problemas. El primero consta de una distribución de 1533 partículas, cada una de ellas con un valor de masa. El objetivo es encontrar una base en la cual se obtenga la menor dispersión de los datos y posteriormente transformar las coordenadas cartesianas a esta nueva base. El problema descrito anteriormente se desarrolla en 2 dimensiones (sección 2.1) y 3 dimensiones (sección 2.2), $\mathcal{R}^2$ y $\mathcal{R}^3$ respectivamente. En la sección 2.3 se analiza el porcentaje del producto interno bruto que se destina para la educación, salud, defensa y ciencia y tecnología entre los años 2004 y 2018 a través del cálculo de las matrices de correlación y de covariancia, además se encuentra la matriz de covectores, la matriz de transformación de la base original a la base de covectores y los autovalores.

*e-mail: `andres2218426@correo.uis.edu.co`
**e-mail: `andres2218420@correo.uis.edu.co`
***e-mail: `carlos2047095@correo.uis.edu.co`

1. Introducción

Los tensores son objetos algebraicos que describen relaciones multilineales entre conjuntos de objetos algebraicos relacionados a un espacio vectorial. Los tensores proporcionan un marco matemático conciso para formular y resolver problemas de Física. En términos simples, un tensor es una estructura de datos n-dimensional. Los vectores son estructuras de una dimensión (tensores de una dimensión), mientras las matrices son estructuras de dos dimensiones (tensores de dos dimensiones).

Usando transformaciones lineales se pueden estudiar dichos tensores y extraer información relevante con una menor cantidad de datos. Una de las transformaciones que se puede aplicar es la matriz de autovectores para encontrar una base diferente que se adapte mejor al caso de estudio.

Como ejemplo, encontramos en el presente trabajo, el cambio de espacio, de coordenadas cartesianas a unas nuevas coordenadas dadas por los autovectores. Dicho cambio se lleva a cabo debido a que las nuevas coordenadas representan de mejor manera la distribución de los datos. Dichos datos corresponden a la distribución de partículas de masa m en el espacio, primero bidimensional y después tridimensional.

Como segundo caso de estudio se analiza la matriz de covarianza y correlación de los datos de salud, ciencia y tecnología, militar y educación del país en los últimos quince años. Se obtiene la matriz de autovectores que permite obtener y recoger la mayor varianza en un nuevo espacio. Este nuevo espacio, conformado por componentes principales recoge la mayor varianza de los datos y permite reducir la cantidad de datos a procesar.

2. Desarrollo del taller

2.1. Problema de un sistema conformado por n partículas caso bidimensional.

Consideremos un sistema conformado por n partículas de masas distintas dispersas en dos dimensiones, tal como se muestra en el archivo de datos[1] (columnas x, y), graficados en la figura 1. Resolver:

- *Momento de orden cero, masa total del sistema.*

  El sistema consta de 1533 partículas de masa m_i y coordenadas x_i, y_i, como se ve en la tabla 1.

  El momento de orden cero (μ_0) (correspondiente a la masa total del sistema) viene dado por:

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

[1] https://github.com/nunezluis/MisCursos/blob/main/MisMateriales/Asignaciones/TallerTensores/DatosTensores/datosmasas.csv

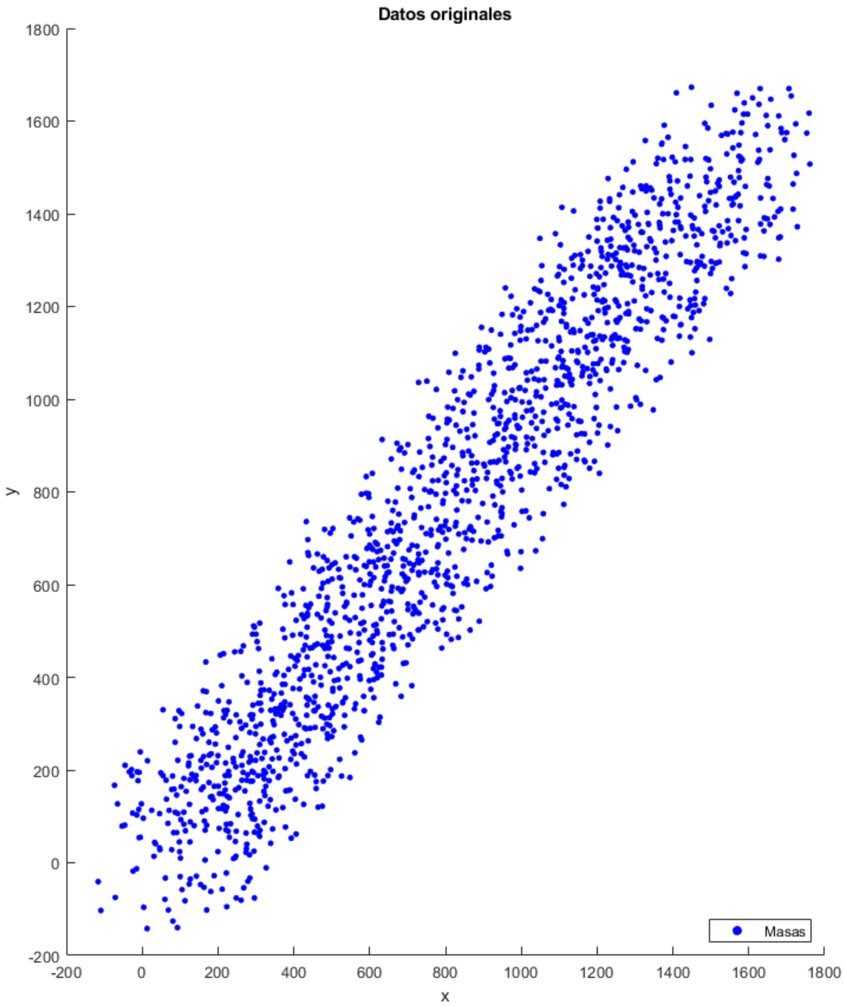

Figura 1: Distribución de masas en 2D

Desarrollando se tiene:

$$\mu_0 = 4627$$

- <u>*Momento de orden uno, promedio pesado del sistema.*</u>

  El momento de orden uno (μ_1) (correspondiente al promedio pesado del sistema) viene dado por:

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)$$

Partícula (i)	Masa (m_i)	X (x_i)	Y (y_i)
1	2	-53	79
2	2	13	-142
3	2	-109	-103
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1531	5	1626	1537
1532	2	1390	1480
1533	2	1717	1464

Tabla 1: Listado de Partículas 2D y sus propiedades (masa m_i, coordenadas x_i, y_i)

Siendo $|\bar{x}\rangle$ el promedio de las distancias en los ejes x, y (centro geométrico):

$$|\bar{x}\rangle = (821.9739, 775.8702)$$

Desarrollando se tiene:

$$\mu_1 = (17773.7306, 4850.6347)$$

Dividiento μ_1 por la masa total del sistema, se obtiene la desviación en x, y del centro de masa con respecto al centro geométrico del sistema (dado por $|\bar{x}\rangle$):

$$\textsc{Cm} = (3.8413, 1.0483)$$

Y con respecto al eje de coordenadas, sería:

$$\textsc{Cm}^* = (825.8152, 776.9185)$$

- *Momento de orden dos, tensor momento de inercia del sistema.*

  El momento de orden dos (μ_2) (correspondiente al tensor momento de inercia del sistema) viene dado por:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)^2$$

  Desarrollando la expresión, se tiene:

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)^2 & \sum_{i=1}^n m_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)(|y_i\rangle - |\bar{y}\rangle) \\ \sum_{i=1}^n m_i(|y_i\rangle - |\bar{y}\rangle)(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle) & \sum_{i=1}^n m_i(|y_i\rangle - |\bar{y}\rangle)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

El tensor momento de inercia es:

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} 958603863.3765 & 911766544.1164 \\ 911766544.1164 & 963665233.3609 \end{bmatrix}$$

- *Autovalores y autovectores del tensor momento de inercia*

Para encontrar los ejes principales de inercia, se procede a calcular los autovectores del tensor momento de inercia, esto con el fin de encontrar una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se hace de forma más simple.

- *Autovalores*

Los autovalores son las raíces del polinomio característico del tensor momento de inercia. Dichos autovalores, ubicados en la diagonal principal son comúnmente llamados λ_i y tienen un autovector asociado a ellos. Los autovalores son:

$$D = \begin{bmatrix} 49364492.1942 & 0 \\ 0 & 1872904604.5432 \end{bmatrix}$$

- *Autovectores*

Los autovectores son vectores no nulos que cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismo, es decir, no cambia su dirección. Estos múltiplos escalares son los autovalores asociados a cada autovector. Los autovectores son:

$$A_{\lambda 1} = (-0.7081, 0.7061)$$

$$A_{\lambda 2} = (-0.7061, -0.7081)$$

- *Matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores*

La matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores es la matriz inversa de la matriz de autovectores. La matriz de autovectores es:

$$M2d = \begin{bmatrix} -0.7081 & -0.7061 \\ 0.7061 & -0.7081 \end{bmatrix}$$

Y su inversa:

$$M2d^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7081 & 0.7061 \\ -0.7061 & -0.7081 \end{bmatrix}$$

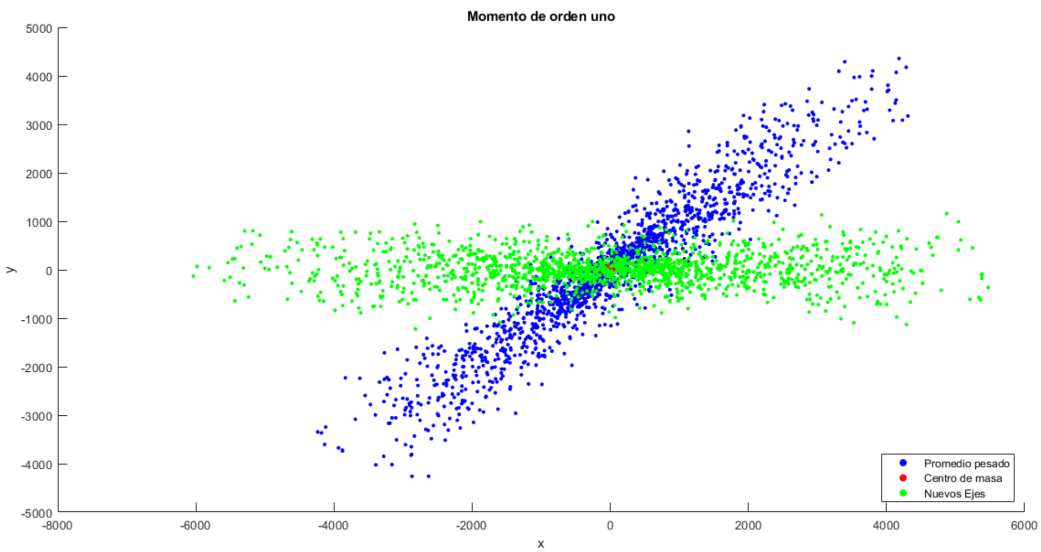

Figura 2: Momento de orden uno en 2D

Para ilustrar mejor la resolución del problema vamos a incluir algunas gráficas.

En la figura 2 se observa, en azul los datos originales con media cero, es decir, el momento de orden uno, donde a cada posición x, y se le restó la media. En verde se observa la rotación de los ejes, obtenido al multiplicar la matriz de transformación (inversa de la matriz de autovectores) por cada componente x, y donde se encontraban ubicadas las partículas con respecto al momento de orden uno, es decir, con media cero.

En la figura 3 se observan los datos originales (azul), los datos centrados en las coordenadas cartesianas x, y restándole la media y el centro de masa, es decir, con media diferente de cero (rojo) y la matriz de transformación aplicada a cada punto x, y de las partículas.

2.2. Problema de un sistema conformado por n partículas caso tridimensional.

Consideremos un sistema conformado por n partículas de masas distintas dispersas en tres dimensiones, tal como se muestra en el archivo de datos[2] (datos de x, y, z), graficados en la figura 4, resolver:

- *Momento de orden cero, masa total del sistema.*

  El sistema consta de 1533 partículas de masa m_i y coordenadas x_i, y_i, z_i como se ve en la tabla 2.

  El momento de orden cero (μ_0) (correspondiente a la masa total del sistema) viene dado por:

[2] https://github.com/nunezluis/MisCursos/blob/main/MisMateriales/Asignaciones/TallerTensores/DatosTensores/datosmasas.csv

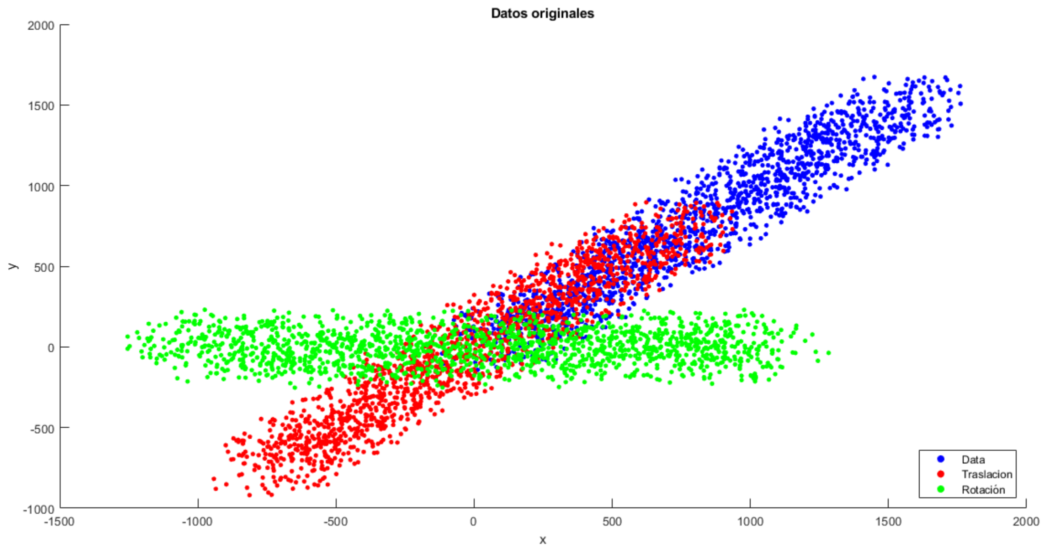

Figura 3: Nuevo eje de coordenadas para los datos originales. En azul se muestran los datos originales, en rojo los datos trasladados al origen de coordenadas x,y (media diferente de cero) y en verde la transformación aplicada a cada punto x,y de las posiciones originales de las partículas.

Partícula (i)	Masa (m_i)	X (x_i)	Y (y_i)	Z (z_i)
1	2	-53	79	-91
2	2	13	-142	-177
3	2	-109	-103	-120
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1531	5	1626	1537	96
1532	2	1390	1480	160
1533	2	1717	1464	-59

Tabla 2: Listado de Partículas 3D y sus propiedades (masa m_i, coordenadas (x_i, y_i, z_i))

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Desarrollando se tiene:

$$\mu_0 = 4627$$

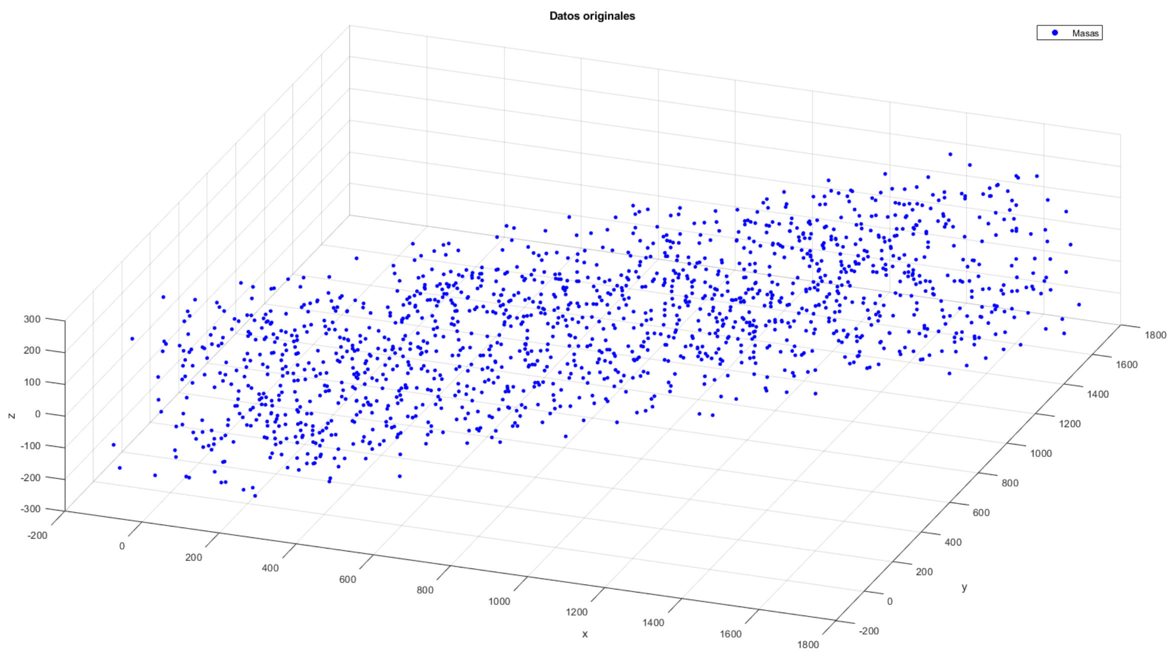

Figura 4: Distribución de masas en 3D

- *Momento de orden uno, promedio pesado del sistema.*

  El momento de orden uno (μ_1) (correspondiente alpromedio pesado del sistema) viene dado por:

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)$$

  Siendo $|\bar{x}\rangle$ el promedio de las distancias en los ejes x, y, z (centro geométrico):

$$|\bar{x}\rangle = (821.9739, 775.8702, 15.0633)$$

  Desarrollando se tiene:

$$\mu_1 = (17773.7306, 4850.6347, 2036.2283)$$

  Dividiento μ_1 por la masa total del sistema, se obtiene la desviación en x, y, z del centro de masa con respecto al centro geométrico del sistema (dado por $|\bar{x}\rangle$):

$$\text{CM} = (3.8413, 1.0483, 0.4401)$$

Y con respecto al eje de coordenadas, sería:

$$\textsc{Cm}^* = (825.8152, 776.9185, 15.5034)$$

- *Momento de orden dos, tensor momento de inercia del sistema.*

El momento de orden dos (μ_2) (correspondiente al tensor momento de inercia del sistema) viene dado por:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)^2$$

Desarrollando la expresión, se tiene:

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)^2 & \sum_{i=1}^{n} m_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)(|y_i\rangle - |\bar{y}\rangle) & \sum_{i=1}^{n} m_i(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle)(|z_i\rangle - |\bar{z}\rangle) \\ \sum_{i=1}^{n} m_i(|y_i\rangle - |\bar{y}\rangle)(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle) & \sum_{i=1}^{n} m_i(|y_i\rangle - |\bar{y}\rangle)^2 & \sum_{i=1}^{n} m_i(|y_i\rangle - |\bar{y}\rangle)(|z_i\rangle - |\bar{z}\rangle) \\ \sum_{i=1}^{n} m_i(|z_i\rangle - |\bar{z}\rangle)(|x_i\rangle - |\bar{x}\rangle) & \sum_{i=1}^{n} m_i(|z_i\rangle - |\bar{z}\rangle)(|y_i\rangle - |\bar{y}\rangle) & \sum_{i=1}^{n} m_i(|z_i\rangle - |\bar{z}\rangle)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

El tensor momento de inercia es:

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} 958603863.3765 & 911766544.1164 & -7134226.8564 \\ 911766544.1164 & 963665233.3609 & -1927462.5927 \\ -7134226.8564 & -1927462.5927 & 101844216.7918 \end{bmatrix}$$

- Autovalores del tensor momento de inercia

Los autovalores del tensor momento de inercia en 3 dimensiones son:

$$D = \begin{bmatrix} 1872927749.5549 & 0 & 0 \\ 0 & 49106110.9756 & 0 \\ 0 & 0 & 102079452.9987 \end{bmatrix}$$

- Autovectores del tensor momento de inercia

Los autovectores del tensor momento de inercia en 3 dimensiones son:

$$A_{\lambda 1} = (0.7061, 0.7081, -0.0036)$$

$$A_{\lambda 2} = (0.7065, -0.7042, 0.0698)$$

$$A_{\lambda 3} = (-0.0469, 0.0519, 0.9976)$$

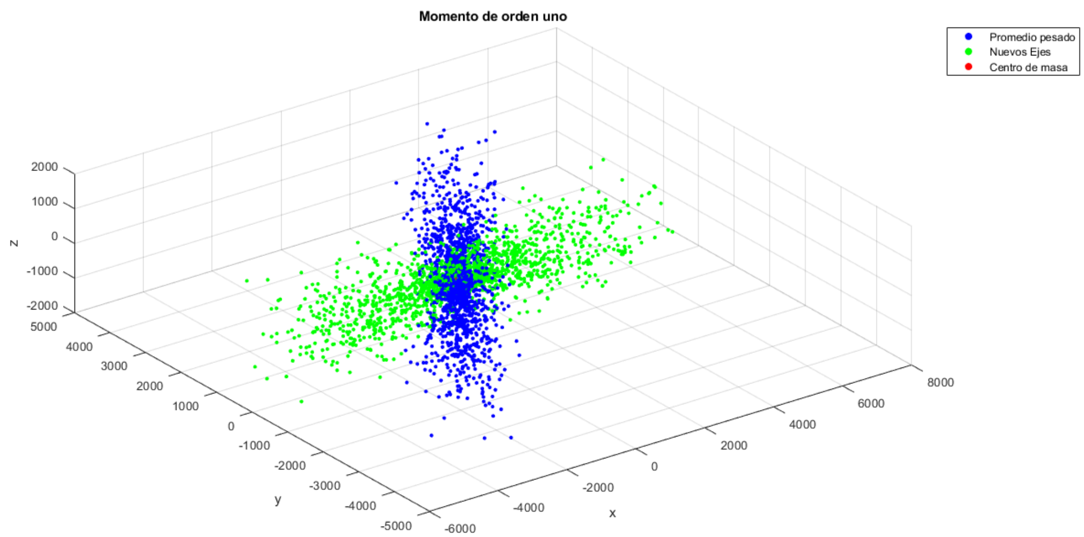

Figura 5: Momento de orden uno en 3d

- *Matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores*

  La matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores es la matriz inversa de la matriz de autovectores. La matriz de autovectores es:

$$M3d = \begin{bmatrix} 0.7061 & 0.7065 & -0.0469 \\ 0.7081 & -0.7042 & 0.0519 \\ -0.0036 & 0.0698 & 0.9976 \end{bmatrix}$$

  Y su inversa:

$$M3d^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7061 & 0.7081 & -0.0036 \\ 0.7065 & -0.7042 & 0.0698 \\ -0.0469 & 0.0519 & 0.9976 \end{bmatrix}$$

Vamos a ver las gráficas, esta vez en 3D.

En la figura 5 se observa, en azul los datos originales con media cero, es decir, el momento de orden uno, donde a cada posición x, y, z se le restó la media. En verde se observa la rotación de los ejes, obtenido al multiplicar la matriz de transformación (inversa de la matriz de autovectores) por cada componente x, y, z donde se encontraban ubicadas las partículas con respecto al momento de orden uno, es decir, con media cero.

En la figura 6 se observan los datos originales (azul), los datos centrados en las coordenadas cartesianas x, y, z restándole la media y el centro de masa, es decir, con media diferente de cero (rojo) y la matriz de transformación aplicada a cada punto x, y, z de las partículas.

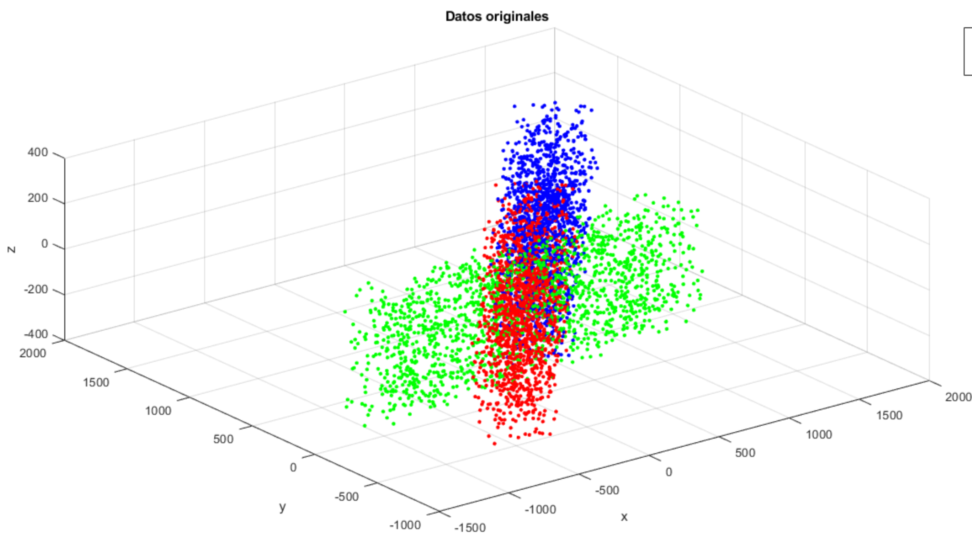

Figura 6: Nuevo eje de coordenadas para los datos originales. En azul se muestran los datos originales, en rojo los datos trasladados al origen de coordenadas x,y,z (media diferente de cero) y en verde la transformación aplicada a cada punto x,y,z de las posiciones originales de las partículas.

2.3. Estadísticas del gasto de producto interno bruto (GDP) que se ha empleado en el país en los últimos 15 años en defensa, salud, educación y ciencia y tecnología

El problema en particular, consiste en calcular la matriz de covariancia del porcentaje (%) del producto interno bruto (GDP) que se ha empleado en el país entre los años 2004 a 2018 destinados a la Defensa, Salud, Educación y Ciencia y tecnología. Estos datos se presentan en la figura 7 (Defensa), figura 8 (salud), figura 9 (Educación) y figura 10 (Ciencia y tecnología).

Para la comprensión de los datos mostrados anteriormente, se procede al cálculo de la matriz de correlación de los parámetros y la matriz de covariancia y sus autovalores y autovectores.

- *Matriz de covariancia y matriz de correlación*

En la figura 11 y la figura 12 se muestran la matriz de covariancia y la matriz de correlación respectivamente.

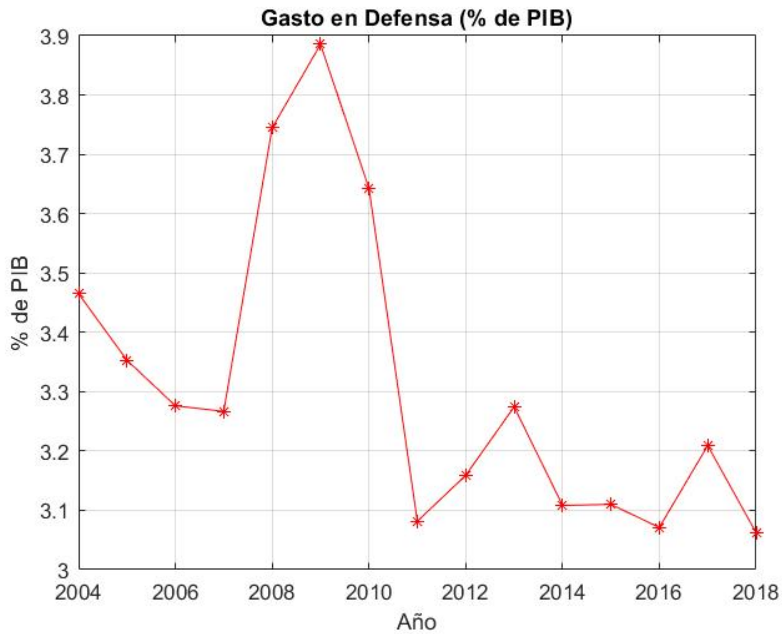

Figura 7: Porcentaje del producto interno bruto de Colombia destinado a la Defensa en el periodo de 2004 a 2018.

- *Autovalores y autovectores*

  Los autovalores son:

$$D = \begin{bmatrix} 0.00063 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04134 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06713 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.36237 \end{bmatrix}$$

Los autovectores son:

$$A_{\lambda 1} = (-0.0419, 0.0741, -0.0449, 0.9954)$$
$$A_{\lambda 2} = (0.3849, 0.4976, -0.7753, -0.0558)$$
$$A_{\lambda 3} = (0.1192, -0.8591, -0.4955, 0.0466)$$
$$A_{\lambda 4} = (0.9143, -0.0914, 0.389, 0.0631)$$

Los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza representan el ajuste de una línea recta, también llamada componente principal, que retiene la varianza máxima. Los autovectores representan la dirección de transformación y los autovalores el factor de escala. La suma de los autovalores representa la varianza total, y al ordenarlos de mayor a menor (así como sus autovectores

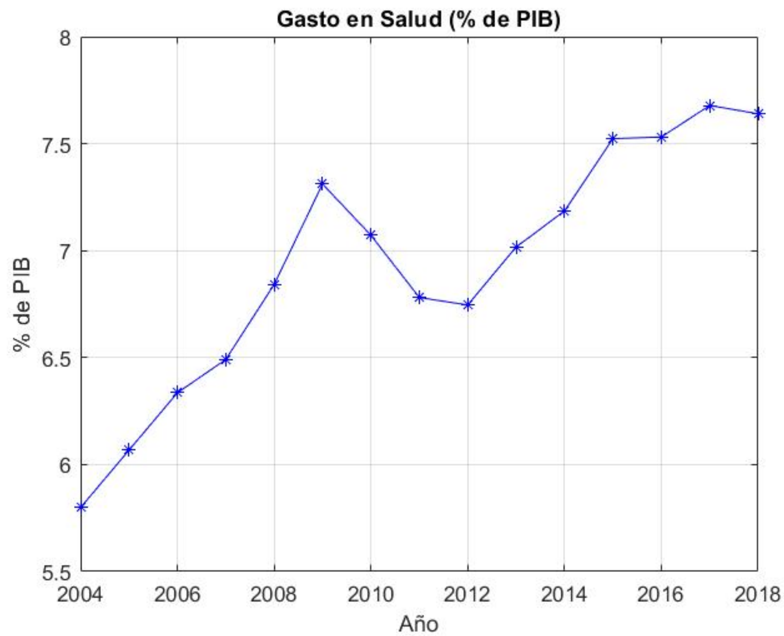

Figura 8: Porcentaje del producto interno bruto de Colombia destinado a la Salud en el periodo de 2004 a 2018.

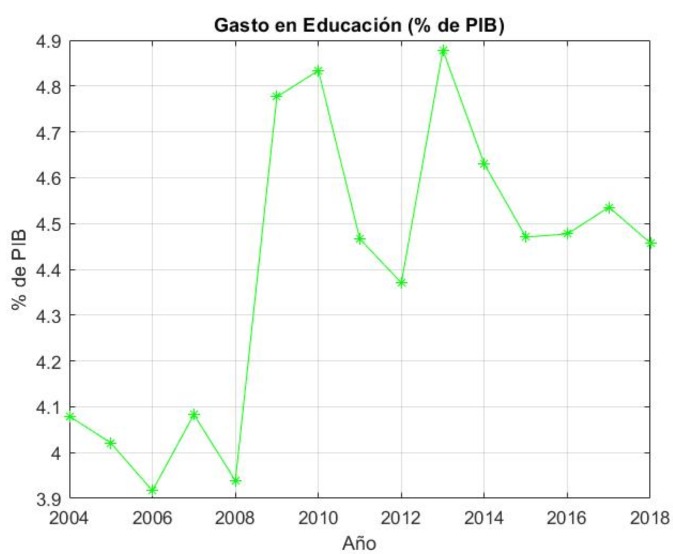

Figura 9: Porcentaje del producto interno bruto de Colombia destinado a la Educación en el periodo de 2004 a 2018.

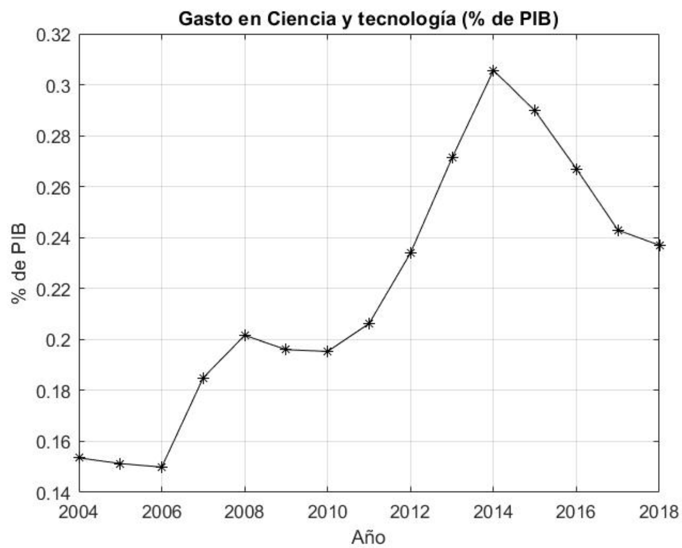

Figura 10: Porcentaje del producto interno bruto de Colombia destinado a la Ciencia y tecnología en el periodo de 2004 a 2018.

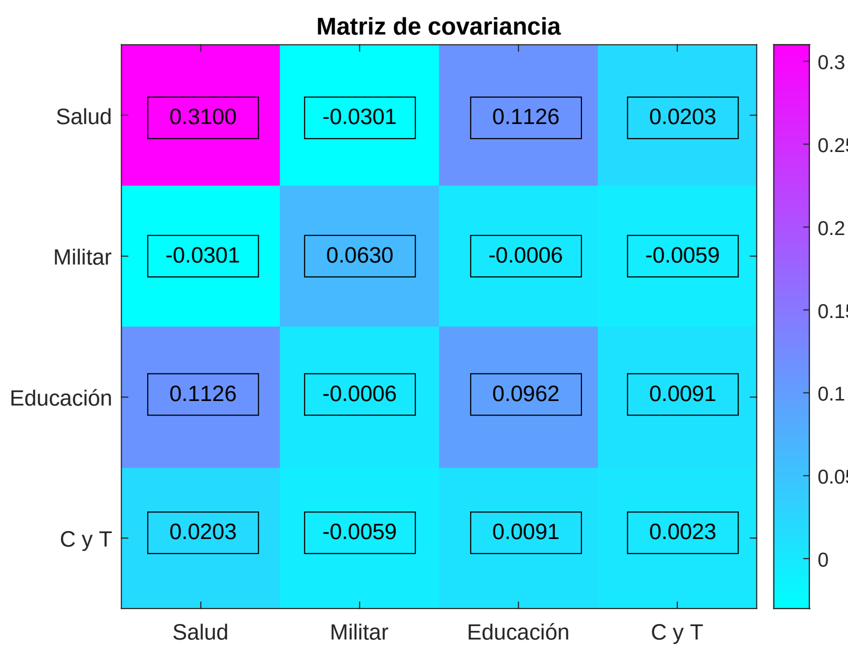

Figura 11: Matriz de covariancia entre parámetros (Salud, Defensa (Militar), Educación y Ciencia y tecnología(C y T))

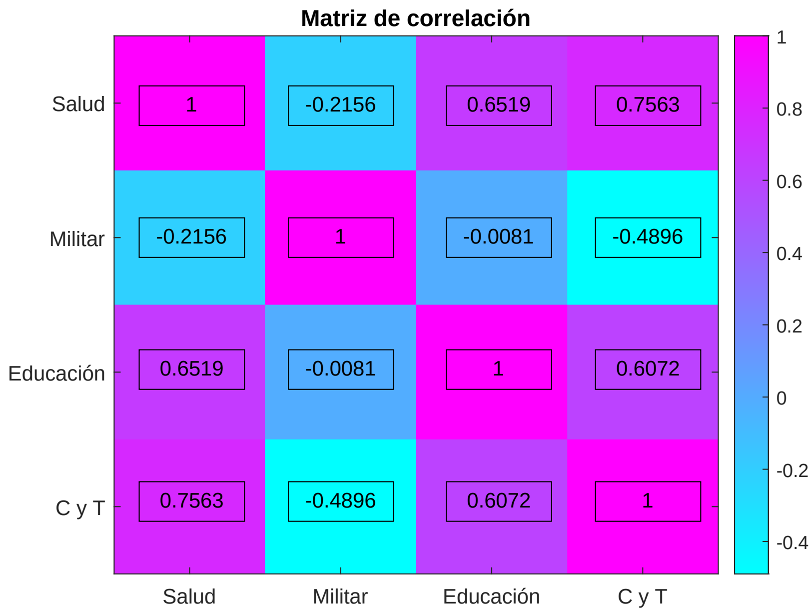

Figura 12: Matriz de correlación entre parámetros (Salud, Defensa (Militar), Educación y Ciencia y tecnologia(C y T))

asociados) permiten tomar las componentes que brindan información más relevante (toman la varianza máxima), y reducir la dimensión de las variables, para tener que analizar una menor cantidad de datos.

- *Matriz de transformación a la base de autovectores*

  La matriz de transformación que permite hacer un cambio de base a la base de autovectores es la inversa de la matriz de autovectores. La matriz de autovectores es:

$$M = \begin{bmatrix} -0.0419 & 0.3849 & 0.1192 & 0.9143 \\ 0.0741 & 0.4976 & -0.8591 & -0.0941 \\ -0.0449 & -0.7753 & -0.4955 & 0.389 \\ 0.9954 & -0.0558 & 0.0466 & 0.0631 \end{bmatrix}$$

  Y su inversa:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0419 & 0.0741 & -0.0449 & 0.9954 \\ 0.3849 & 0.4976 & -0.7753 & -0.0558 \\ 0.1192 & -0.8591 & -0.4955 & 0.0466 \\ 0.9143 & -0.0941 & 0.389 & 0.0631 \end{bmatrix}$$

3. Conclusiones

Basándonos en la teoría de tensores, autovalores y autovectores, se solucionaron dos problemas. En el primer problema se tiene un conjunto de partículas distribuidas en el espacio (2D y 3D), y se busca una transformación a una base de en la cual la dispersión de los datos sea la mínima, sin perder información. Esto se logró transformando las coordenadas de ubicación de cada una de las partículas a un eje conformado por los autovectores del tensor de inercia. En el segundo problema se calcula la matriz de covariancia y de correlación, del porcentaje del producto interno bruto del país en el periodo de 2004 a 2018 en salud, educación, defensa y ciencia y tecnología. Finalmente se discute el significado de estas matrices.