TALLER DE PROBLEMAS (Clase #3)

Sección 2.1.8, ejercicios 3 y 10

Nombre: Andres Felipe Vargas Molano - 2218420

Nombre: Carlos Laguado - 2047095

Nombre: Andres Felipe Rubio Toloza - 2218426

Ejercicio 1 – sección 4.2.10

4.2.10 Ejercicios

1. Considere los siguientes operadores: $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ hermítico, $\mathbb{K} = -\mathbb{K}^\dagger$ antihermítico; $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger$ unitario, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos operadores genéricos. Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a). En general:

I. $(\mathbb{P}^\dagger)^{-1} = (\mathbb{P}^{-1})^\dagger$.

248

4.3 Representación matricial de operadores

II. $(\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$

III. Si $[\mathbb{P}, \mathbb{Q}] = 0$, entonces $\mathbb{P}(\mathbb{Q})^{-1} = (\mathbb{Q})^{-1}\mathbb{P}$

IV. $\left(e^{\mathbb{P}}\right)^\dagger = e^{\mathbb{P}^\dagger}$

V. $\mathbb{P}e^{\mathbb{Q}}\mathbb{P}^{-1} = e^{\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}}$

(b). Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ también será un operador hermítico.

(c). Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $e^{i\mathbb{A}}$ es unitario.

(d). Si $\mathbb{K}$ es antihermítico entonces $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{U}$ es también lo será. En particular eso se cumple para $\tilde{\mathbb{K}} = i\mathbb{A}$. Es decir, podemos construir un operador antihermítico a partir de uno hermítico.

(e). Dados dos operadores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, hermíticos, su composición $\mathbb{A}\mathbb{B}$, será hermítica *si y sólo si* $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan.

(f). Si $\mathbb{S}$ es un operador real y antisimétrico[7] y $\mathbb{I}$ el operador unidad, pruebe:

I. Los operadores $(\mathbb{I} - \mathbb{S})$ y $(\mathbb{I} + \mathbb{S})$ conmutan.

II. El operador $(\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})$ es simétrico, mientras que $(\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}$ es ortogonal.[8]

(g). Considere una matriz ortogonal de la forma $\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, encuentre la expresión para $\mathbb{S}$ que reproduce $\mathbb{R} = (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}$.

1

a $(P^+)^{-1} = (P^{-1})^+$

$$P^{-1} = \frac{(P^+)^+}{|P|} = \frac{(P^+)^T}{|P|}$$

$P^T \to$ Traspuesta

$$\frac{\left((P^+)^T\right)^+}{|P^+|} = \frac{\left((P^+)^T\right)^+}{|P|} \quad ; \quad |P^+| = |P|$$

$$\left((P^+)^T\right)^+ = \left((P^+)^T\right)^+ \;//$$

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$$

$$\frac{((PQ)^T)^+}{|PQ|} = \frac{(Q^T)^+}{|Q|}\cdot\frac{(P^T)^+}{|P|} = \frac{(Q^T P^T)^+}{|Q|\,|P|} = \frac{((PQ)^T)^+}{|QP|} = \frac{((PQ)^T)^+}{|PQ|}$$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \langle a^1_j | b^i_1 \rangle & \langle a^1_j | b^i_2 \rangle & \cdots & \langle a^1_j | b^i_n \rangle \\ \langle a^2_j | b^i_1 \rangle & \langle a^2_j | b^i_2 \rangle & \cdots & \langle a^2_j | b^i_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle a^n_j | b^i_1 \rangle & \langle a^n_j | b^i_n \rangle & \cdots & \langle a^n_j | b^i_n \rangle \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 & \cdots & b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 & \cdots & b^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^n_1 & b^n_2 & \cdots & b^n_n \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} \langle a^1_j | b^i_1 \rangle & \langle a^2_j | b^i_1 \rangle & \langle a^n_j | b^i_1 \rangle \\ \langle a^1_j | b^i_2 \rangle & \langle a^2_j \, b^i_2 \rangle & \langle a^n_j | b^i_n \rangle \\ & & \\ \langle a^1_j | b^i_n \rangle & \langle a^2_j | b^i_n \rangle & \langle a^n_j | b^i_n \rangle \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \cdots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \cdots & a^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^1_n & a^2_n & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} \langle b^i_1 | a^1_j \rangle & \langle b^i_1 | a^2_j \rangle & \cdots & \langle b^i_1 | a^n_j \rangle \\ \langle b^i_2 | a^1_j \rangle & \langle b^i_2 | a^2_j \rangle & \cdots & \langle b^i_n | a^n_j \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle b^i_n | a^1_j \rangle & \langle b^i_n | a^2_j \rangle & \cdots & \langle b^i_n | a^n_j \rangle \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} b^1_1 & b^2_1 & \cdots & b^n_1 \\ b^1_2 & b^2_2 & \cdots & b^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^1_n & b^2_n & \cdots & b^n_n \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Si $[P, Q] = 0$, entonces $P(Q)^{-1} = (Q)^{-1}P$

$$PQ = QP$$

$$P(Q)^{-1} = (Q)^{-1}P$$

$$P\,\frac{(Q^T)^+}{|Q|} = \frac{(Q^T)^+}{|Q|}\cdot P$$

$$P\,(Q^T)^+ = (Q^T)^+\cdot P$$

$$(e^P)^+ = e^{P^+}$$

$$P = \begin{pmatrix} p^1_1 & p^1_2 & \cdots & p^1_n \\ p^2_1 & p^2_2 & \cdots & p^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p^n_1 & p^n_2 & \cdots & p^n_n \end{pmatrix}$$

$$P^+ = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} p^2_2 & \cdots & p^2_n \\ \vdots & & \vdots \\ p^n_2 & \cdots & p^n_n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p^2_1 & p^2_3 & \cdots & p^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p^n_1 & p^n_3 & \cdots & p^n_n \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} p^2_1 & \cdots & p^2_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p^n_1 & \cdots & p^n_{n-1} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p^1_2 & \cdots & p^1_n \\ p^3_2 & \cdots & p^3_n \\ \vdots & & \vdots \\ p^n_2 & \cdots & p^n_n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p^1_1 & p^1_3 & \cdots & p^1_n \\ p^3_1 & p^3_3 & \cdots & p^3_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p^n_1 & p^n_3 & \cdots & p^n_n \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} p^1_1 & \cdots & p^1_{n-1} \\ p^3_1 & \cdots & p^3_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p^n_1 & \cdots & p^n_{n-1} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \\ \begin{vmatrix} p^1_2 & \cdots & p^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ p^{n-1}_2 & \cdots & p^{n-1}_n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p^1_1 & p^1_3 & \cdots & p^1_n \\ \vdots & & & \vdots \\ p^{n-1}_1 & p^{n-1}_3 & \cdots & p^{n-1}_n \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} p^1_1 & \cdots & p^1_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p^{n-1}_1 & \cdots & p^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$P^+ = \begin{pmatrix} D^1_1 & D^1_2 & \cdots & D^1_n \\ D^2_1 & D^2_2 & \cdots & D^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^n_1 & D^n_2 & \cdots & D^n_n \end{pmatrix}$$

$$e^{P^+} = e^{\begin{pmatrix} D^1_1 & D^1_2 & \cdots & D^1_n \\ D^2_1 & D^2_2 & \cdots & D^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^n_1 & D^n_2 & \cdots & D^n_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{D^1_1} & e^{D^1_2} & \cdots & e^{D^1_n} \\ e^{D^2_1} & e^{D^2_2} & \cdots & e^{D^2_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{D^n_1} & e^{D^n_2} & \cdots & e^{D^n_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{p^1_1} & e^{p^1_2} & \cdots & e^{p^1_n} \\ e^{p^2_1} & e^{p^2_2} & \cdots & e^{p^2_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{p^n_1} & e^{p^n_2} & \cdots & e^{p^n_n} \end{pmatrix}^+ = (e^P)^+$$

$$Pe^QP^{-1} = e^{PQP^{-1}}$$

$$Pe^QP^{-1} = P\left(I + Q + \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^3}{3!} + \cdots\right)P^{-1}$$

$$= \left(PI + PQ + P\frac{Q^2}{2} + P\frac{Q^3}{3!} + \cdots\right)P^{-1} = PIP^{-1} + P\frac{Q^2}{2}P^{-1} + P\frac{Q^3}{3!}P^{-1}$$

$$= I + PQP^{-1} + \frac{(PQP)^2}{2} + \frac{(PQP)^3}{3!} + \cdots$$

$$= e^{PQP^{-1}}$$

(b) $A = A^+ \quad U^{-1} = U^+ \quad U^+U = I$

$\tilde{A} = U^{-1} A U$

$(\tilde{A})^+ = (U^{-1}AU)^+ = (U^+ A^+ U)^+ = (U^+)^+ (A^+)^+ U^+ = U A U^{-1} = U^{-1} A U$

$$(\tilde{A})^+ = \tilde{A}$$

(c) $A = A^+ \quad e^{iA} \rightarrow$ Es Unitario

$(e^{iA})^+ = \left(iI + iA + i\frac{A^2}{2} + i\frac{A^3}{3!} + \dots\right)^+ = \left(-iI^+ - iA^+ - i\frac{(A^+)^2}{2} - i\frac{(A^+)^3}{3!} + \dots\right)$

$= -iI - iA - i\frac{A^2}{2} - i\frac{A^3}{3!} + \dots = (e^{iA})^{-1}$

$$(e^{iA})^+ = (e^{iA})^{-1}$$

(d) $K = -K^+ \quad \tilde{K} = U^{-1} K U$

$\tilde{K} = -\tilde{K}^+$

$-\tilde{K}^+ = -(U^{-1}KU)^+ = -(U^+(-K^+)U)^+ = (U^+)^+(K^+)^+ U^+ = U K U^{-1} = U^{-1} K U$

$= \tilde{K}$

(e) $A = A^+ \quad B = B^+ \quad AB = BA$

$(AB)^+ = A^+B^+ = AB \qquad (AB)^+ = (BA)^+$

$(BA)^+ = B^+A^+ = BA$

(f) $S^{+} \equiv S^{T} = -S$

$$(I-S)(I+S) = (I+S)(I-S)$$

$$(I-S)I + (I-S)S = (I+S)I - (I+S)S$$

$$I^2 - SI + IS - \cancel{S^2} = I^2 + SI - IS - \cancel{S^2}$$

$$IS - SI = SI - IS$$

$S^T = -S$

$$\left((I-S)(I+S)\right)^T = \left((I-S)(I+S)\right)$$

$$(I-S)^T(I+S)^T = (I-S^T)(I+S^T) = (I+S)(I-S) = (I-S)(I+S)$$

$$\left((I-S)(I+S)^{-1}\right)^T = \left((I-S)(I+S)^{-1}\right)^{-1}$$

$$(I-S)^T\left((I+S)^{-1}\right)^T = (I-S)^{-1}(I+S)$$

$$(I-S^T)(I+S^T)^{-1} = (I-S)^{-1}(I+S)$$

$$(I+S)(I-S)^{-1} = (I-S)^{-1}(I+S)$$

(g)

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{Sen}\theta \\ -\operatorname{Sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$R = (I-S)(I+S)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{Sen}\theta \\ -\operatorname{Sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ b & 1-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+a & b \\ b & 1-c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ b & 1-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-c & -b \\ -b & 1-a \end{pmatrix}\frac{1}{(1-c)(1-a)-b^2}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{Sen}\theta \\ -\operatorname{Sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-c)(1-a)-b^2}\begin{pmatrix} (1-a)(1-c)-b^2 & -b(1-a)+b(1-a) \\ (1-c)b-(1-c)b & -b^2+(1-c)(1-a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{Sen}\theta \\ -\operatorname{Sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2- 4.3.9

2. Considere ahora el espacio vectorial $\mathbf{P}_{(t)\,4}$ de polinomios en t de grado 4, definidos en el intervalo $[-1,1]$. Esto es $|f\rangle_t \leftrightarrow \sum_{n=0}^{4} a_n t^n$ y este espacio está equipado con un producto interno de la forma $\langle f|\, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Considere además para este espacio vectorial un operador lineal representado por $\mathbb{T} = \mathrm{e}^{\mathbb{D}} \equiv \exp(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Claramente, podemos encontrar dos bases para ese espacio vectorial: $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ y la base de polinomios de Legendre $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$
   - (a). Considere el polinomio $|f\rangle_t \leftrightarrow f(t) = 5t + 3t^2 + 4t^3$. Encuentre la expresión de este polinomio en término de las bases arriba mencionadas. ¿Cuál es la matriz de transformación de las componentes de ese vector entre ambas bases?
   - (b). Construya un proyector sobre el subespacio $\mathbf{P}_{(t)\,2}$, de polinomios de grado 2 y encuentre la proyección de $|f\rangle_t$ en ese subespacio. Discuta las diferencias y semejanzas entre las proyecciones de $|f\rangle_t$ en ese subespacio expresado en las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{P_0, P_1, P_2\}$.
   - (c). Para $\mathbf{P}_{(t)\,4}$, construya el operador inverso $\mathbb{T}^{-1}$, el adjunto del operador $\mathbb{T}^{\dagger}$ y precise si $\mathbb{T}$, es Hermítico o unitario.
   - (d). ¿Cuáles son las representaciones matriciales de $\mathbb{T}$ en $\mathbf{P}_{(t)\,4}$, para cada una de las bases mencionadas? ¿Cómo transforman las representaciones? Compruebe que la traza y el determinante de ambas representaciones matriciales coinciden.
   - (e). ¿Cuáles son las representaciones matriciales de $\mathbb{T}^{-1}$ y $\mathbb{T}^{\dagger}$ en $\mathbf{P}_{(t)\,4}$ para cada una de las bases mencionadas ? ¿Cómo transforman esas representaciones?

(267)

$f(t) = 5t + 3t^2 + 4t^3$

$f(t) = 0(1) + 5(t) + 3(t^2) + 4(t^3) + 0(t^4)$

$P_0 = 1$
$P_1 = t$
$P_2 = 3/2\, t^2 - 1/2$
$P_3 = 5/2\, t^3 - 3/2\, t$
$P_4 = 35/8\, t^4 - 15/4\, t^2 + 3/8$

$0 = A + \frac{1}{2} C + \frac{3}{8} E$ $\qquad A = -\frac{1}{2} C = 1$

$\boxed{C = 2}$ $\qquad \boxed{A = 1}$

$5 = B - \frac{3}{2} D$ $\qquad \boxed{D = \frac{8}{5}}$

$3 = \frac{3}{2} C - \frac{15}{4} E$

$4 = \frac{5}{2} D$ $\qquad 0 = \frac{35}{8} E$ $\qquad B = 5 + \frac{3}{2}\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{37}{5}$

$\boxed{E = 0}$ $\qquad \boxed{B = \frac{37}{5}}$

SWISSLUB
Soluciones Integrales

$$f(t) = 1\,P_0 + \frac{37}{5}\,P_1 + 2\,P_2 + \frac{8}{5}\,P_3 + (0)\,P_4 \quad //$$

$$A = \{1, t, t^2, t^3, t^4\} \qquad B = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

$$P_0 = 1(1) + 0(t) + 0(t^2) + 0(t^3) + 0(t^4)$$
$$P_1 = 0(1) + 1(t) + 0(t^2) + 0(t^3) + 0(t^4)$$
$$P_2 = -\tfrac{1}{2}(1) + 0(t) + \tfrac{3}{2}(t^2) + 0(t^3) + 0(t^4)$$
$$P_3 = 0(1) - \tfrac{3}{2}(t) + 0(t^2) + 5/2(t^3) + 0(t^4)$$
$$P_4 = 3/8 + 0(t) - \tfrac{15}{4}(t^2) + 0(t^3) + \tfrac{35}{8}(t^4)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35/8 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0.5714 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2286 \end{pmatrix}$$

$$\{\underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{t}, \underset{e_3}{t^2}\} \qquad U_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W_2 = e_2 - \langle e_2, U_1\rangle U_1 = t - 0 \qquad U_2 = \frac{W_2}{\|W_2\|} = \frac{t \cdot 3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}t$$

$$\langle e_2, U_1\rangle = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0 \qquad \|W_2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$W_3 = e_3 - \langle e_3, U_2 \rangle U_2 = t^2$

$U_3 = \dfrac{t^2}{\|W_3\|} = \dfrac{5t^2}{\sqrt{10}} \quad \|W_3\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^4 \, dt}$

$U_3 = \dfrac{\sqrt{10}}{2} t^2$

$U_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\Big/\; U_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} t \;\Big/\; U_3 = \dfrac{\sqrt{10}}{2} t^2$

$P(f(t)) = \langle f(t), U_1 \rangle U_1 + \langle f(t), U_2 \rangle U_2 + \langle f(t), U_3 \rangle U_3$

$\langle f(t), U_1 \rangle = \sqrt{2}$

$\langle f(t), U_2 \rangle = 6.042$

$\langle f(t), U_3 \rangle = 1.89$

$P(f(t)) = 1 + 7.4t + 3t^3 = 1e_1 + 7.4e_2 + 3e_3$

$\{1, t, \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\}$

$U_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad U_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} t \quad \|W_3\| = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

$W_3 = e_3 - \langle e_3, U_2 \rangle U_2$

$\langle e_3, U_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t\right) = 0$

$W_3 = e_3 \quad U_3 = \dfrac{W_3}{\|W_3\|} = \dfrac{\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{5}}$

SWISSLUB
Soluciones Integrales

$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $v_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} t$; $v_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}(3t^2 - 1)$

$v_3 = \frac{\sqrt{10}}{2} e_3$

$P(f(t)) = \langle f(t), v_1 \rangle v_1 + \langle f(t), v_2 \rangle v_2 + \langle f(t), v_3 \rangle v_3$

$\langle f(t), v_1 \rangle = \sqrt{2}$

$\langle f(t), v_2 \rangle = 6.042$

$\langle f(t), v_3 \rangle = 1.264$

$P(f(t)) = 1 e_1 + 7.4 e_2 + 2 e_3$

$P(f(t)) = 1 + 7.4 t + 3t^2 - 1$

$= 7.4 t + 3t^2$ //

Ejercicio 4-5 12- 4.6.6

4. Si un operador lineal $\mathbb{A}$ tiene un autovector $|v_0\rangle$ con autovalor λ_0. Demuestre que $|v_0\rangle$ es también un autovector del operador $\mathbb{A}^2$ con autovalor λ_0^2.
5. Aun si un operador lineal $\mathbb{A}$ no tiene autovectores el operador $\mathbb{A}^2$ puede llegar a tenerlos. Demuestre que si $\mathbb{A}^2$ tiene un autovector con un autovalor no degenerado $\lambda_0 = \mu^2$, entonces $\mathbb{A}$ tiene un autovector.

Ejercicio 4 de la sección 4.6.6

Andrés Felipe Vargas
Andrés Felipe Rubio
Carlos Andrés Laguado

october 8th, 2021

1 Ejercicio 4

Si un operador lineal $\mathbb{A}$ tiene un autovector $|v_0\rangle$ con autovalor λ_0, demuestre que $|v_0\rangle$ es también un autovector del operador $\mathbb{A}^2$ con autovalor λ_0^2.

Solución

$$\mathbb{A}^2(|v_0\rangle) = \mathbb{A}(\mathbb{A}(|v_0\rangle))$$

$$\mathbb{A}^2(|v_0\rangle) = \mathbb{A}(\lambda_0|v_0\rangle)$$

$$\boxed{\mathbb{A}^2(|v_0\rangle) = \lambda_0^2|v_0\rangle}$$

Generalizando se tiene:

$$\mathbb{A}^k(|v_0\rangle) = \mathbb{A}(\mathbb{A}^{k-1}(|v_0\rangle))$$

$$\mathbb{A}^k(|v_0\rangle) = \mathbb{A}(\lambda_0^{k-1}|v_0\rangle)$$

Reordenando:

$$\mathbb{A}^k(|v_0\rangle) = \lambda_0^{k-1}\mathbb{A}(|v_0\rangle)$$

$$\boxed{\mathbb{A}^k(|v_0\rangle) = \lambda_0^k|v_0\rangle}$$

Ejercicio 5 de la sección 4.6.6

Andrés Felipe Vargas
Andrés Felipe Rubio
Carlos Andrés Laguado

october 8th, 2021

1 Ejercicio 5

Aun si un operador lineal $\mathbb{A}$ no tiene autovectores, el operador $\mathbb{A}^2$ puede llegar a tenerlos. Demuestre que si $\mathbb{A}^2$ tiene un autovector con un autovalor no degenerado $\lambda_0 = \mu^2$, entonces $\mathbb{A}$ tiene un autovector.

Solución

$$\mathbb{A}^2(|v_0\rangle) = \lambda_0|v_0\rangle$$

$$\mathbb{A}^2(|v_0\rangle) = \mu^2|v_0\rangle$$

Entonces:

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}|v_0\rangle) = \mu(\mu|v_0\rangle)$$

$$\text{Si } \mathbb{A}(|v_0\rangle) \neq \mu(|v_0\rangle) \Rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{A}|v_0\rangle) = \mathbb{A}^2(|v_0\rangle) \neq \mu(\mu|v_0\rangle)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\mathbb{A}(|v_0\rangle) = \mu(|v_0\rangle) \text{ y } |v_0\rangle \text{ es autovector de } \mathbb{A}}$$

Ejercicio 4.6.6.

b) Muestre si las matrices de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, conjuntamente con la matriz identidad $\mathbb{I}$ son linealmente independientes

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los productos punto tienen que ser iguales a cero:

$$C_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando:

$C_3 + C_4 = 0$ (1)

$C_1 - C_2 i = 0$ (2)

$C_1 + C_2 i = 0$ (3)

$-C_3 + C_4 = 0$ (4)

Para que se cumpla la igualdad:

$C_1 = 0$; $C_2 = 0$; $C_3 = 0$; $C_4 = 0$

Por lo tanto las matrices son linealmente independientes

c) ¿Las matrices de Pauli forman base para un espacio vectorial de matrices complejas 2×2? ¿Por qué? Si forman una base exprese la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

en términos de esa base.

Ejercicio 4.6.6.

c) Si las matrices forman una base, estas tienen que ser linealmente independientes

$$C_1 \sigma_x + C_2 \sigma_y + C_3 \sigma_z + C_4 \mathbb{I} = 0$$

$$C_i = 0 \quad ; \quad i = 1,2,3,4$$

Para la matriz dada

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 = C_3 + C_4$$
$$i = C_1 - C_2 i$$
$$5 = C_1 + C_2 i$$
$$1 = -C_3 + C_4$$

Desarrollando:

$$C_1 = \frac{5+i}{2} ; \quad C_2 = \frac{-1-5i}{2} ; \quad C_3 = 1 ; \quad C_4 = 2$$

Expresando en términos de la base:

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (5+i_2)\sigma_x + \left(-\frac{1-5i}{2}\right)\sigma_y + \sigma_z + 2\mathbb{I}$$

f) Muestre que cualquier representación matricial de un operador genérico $\mathbb{M}$ puede ser expresado como combinación lineal de las matrices de Pauli.

f) $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} M^1_1 & M^1_2 \\ M^1_2 & M^2_2 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{M} = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$M^1_1 = \mu_0 + \mu_3$

$M^1_2 = \mu_1 - i\mu_3$

$M^2_1 = \mu_1 + i\mu_3$

$M^2_2 = \mu_0 - \mu_3$

$$\forall M \in SU(2)\ \exists\ \mu_i \in C \,/\, M = \sum_{i=0}^{3} \mu_i \sigma_i$$

Grupo unitario de orden 2

Ejercicio 6,8 sección 4.6.6

Visite: https://github.com/AndreSVargaS19/Mat.Avanzadas_2218420-2218426-2047095