TALLER DE PROBLEMAS (Clase #1)

Sección 2.1.8, ejercicios 3 y 10

Nombre: Carlos Andrés Laguado Hernández - 2047095

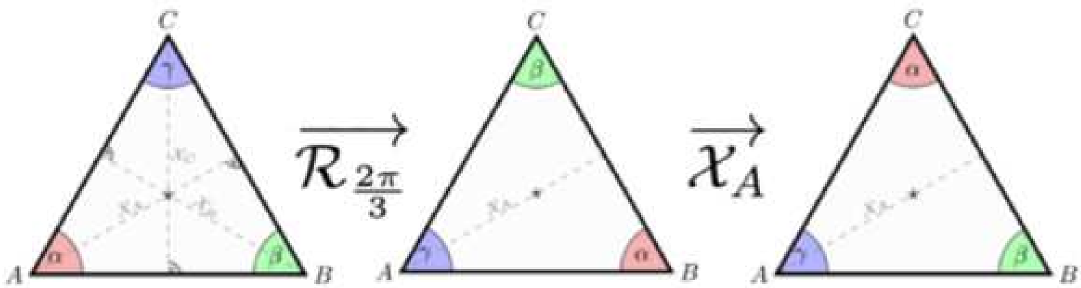
Nombre: Andrés Felipe Rubio Toloza - 2218426

Nombre: Andrés Felipe Vargas Molano - 2218420

Ejercicio 3

Considere un triángulo equilátero que se muestra en la figura 2.1. Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro y, reflexiones respecto a planos, XA, XB y XC – que dejan invariante la figura del triángulo. Adicionalmente, se puede definir la operación concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triangulo, tal y como mostramos en la mencionada figura 2.1. Note que lo ilustrado en la figura, puede esquematizarse como:

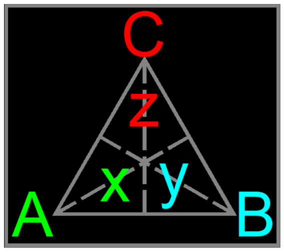
$$(A\,\alpha, B\,\beta, C\,\gamma) \quad \overrightarrow{\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{3}}} \quad (A\,\gamma, B\,\alpha, C\,\beta) \quad \overrightarrow{\mathcal{X}_A} \quad (A\,\gamma, B\,\beta, C\,\alpha).$$



a) Construya la tabla de multiplicación para G, y la operación es concatenación. Donde I es la operación identidad, {Ri} es un conjunto de rotaciones en sentido horario, mientras que {rj} es un conjunto de rotaciones en el sentido antihorario, y {Xk} el conjunto de las reflexiones que dejan invariante el triángulo.

G = { I, {Ri}, {rj}, {Xk} }

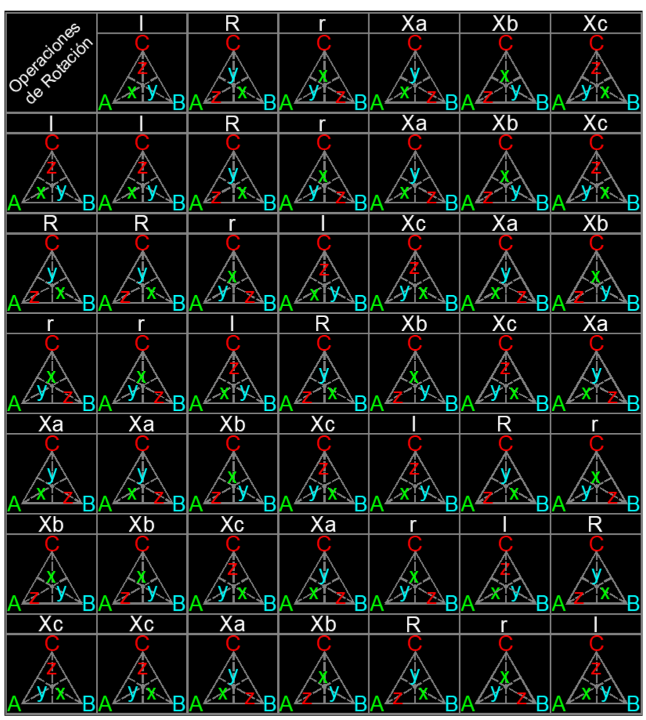
- Primero definimos las operaciones de los conjuntos Ri, rj, Xk:
  Ri = {R (120)} → rotación de 120° sentido horario.
  rj = {r (120)} → rotación de 120° sentido antihorario.
  Xk = {XA, XB, XC} → reflexión con respecto a la recta del que pasa por el vértice (‘x’, ‘y’ o ‘z’, respectivamente).
- Definimos las matrices para las operaciones como producto matricial:



Definimos las matrices de operación, realizamos las operaciones, y creamos la tabla de multiplicación:

ANEXO 1: documento de máxima en el que se desarrollan las operaciones de concatenación (Ejercicio_3a_Clase_1.wxmx)

Concatenación	I	R	r	XA	XB	XC
I	I	R	r	XA	XB	XC
R	R	r	I	XC	XA	XB
r	r	I	R	XB	XC	XA
XA	XA	XB	XC	I	R	r
XB	XB	XC	XA	r	I	R
XC	XC	XA	XB	R	r	I



b) Muestre que el conjunto de estas operaciones forma el grupo G:

- En la tabla de multiplicación presentada anteriormente se observa que el conjunto es cerrado con respecto a la concatenación, ya que, al realizar operaciones entre elementos del conjunto, siempre se obtiene como resultado un elemento del mismo conjunto.

*b) Para mostrar que el conjunto de operaciones forman el grupo G_Δ se verifica que:

1. $\{ g_i \in G, g_j \in g_j \} \rightarrow \exists\ g_k = g_i \odot g_j \in G$

Para dos operaciones que $\in G_\Delta$ se cumple que el resultado también $\in G_\Delta$.

- El conjunto cumple con la propiedad asociativa, se puede comprobar con la tabla de multiplicación.

2. $g_k \odot (g_i \odot g_j) = (g_k \odot g_i) \odot g_j$

Vamos a tomar como ejemplo $\chi_A \odot (R_i \odot \chi_B) = (\chi_A \odot R_i) \odot \chi_B$

$\chi_A \odot (R_i \odot \chi_B) = \cdots$
$\cdots = \chi_A \odot (\chi_A) = I$

$(\chi_A \odot R_i) \odot \chi_B =$
$(\chi_B) \odot \chi_B = I$

Entonces $\chi_A \odot (R_i \odot \chi_B) = (\chi_A \odot R_i) \odot \chi_B$
Esta propiedad se cumple para todos los elementos del grupo

- Existe un único elemento neutro (I),

3. $\exists\ \hat{g} \in G \rightarrow g_i \odot \hat{g} = \hat{g} \odot g_i = g_i$

$\exists$ un elemento neutro único

$\chi_A \odot I = I \odot \chi_A = \chi_A$ $\boxed{\hat{g} = I}$

- Existe un único elemento inverso para cada elemento del conjunto, esto se puede observar al ver que se obtiene como resultado la operación identidad (I) en cada columna o cada fila de la tabla de multiplicación.

4. $g_i \in G \rightarrow \exists\ g_i^{-1} \in G \rightarrow g_i \odot g_i^{-1} = g_i^{-1} \odot g_i = \hat{g}$

$\exists$ un elemento inverso (En rotaciones y reflexiones)

$R_i \odot R_j = I$ $\chi_A \odot \chi_A = I$

- El conjunto no cumple la propiedad conmutativa, por lo cual se puede afirmar que G es un grupo no abeliano.

De la tabla de multiplicación se observa:

$X_A \odot R_i \neq R_i \odot X_A$

$X_A \odot R_i = X_B$

$R_i \odot X_A = X_C$

c) Identifique cada una de las 'R' y 'r', y muestre, además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad, {I, Xk}, forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2.

Concatenación	I	R	R^2
I	I	R	R^2
R	R	R^2	I
R^2	R^2	I	R

- R^2 = R concatenado con R. Cada rotación de 120° en sentido horario

Concatenación	I	r	r^2
I	I	r	r^2
r	r	r^2	I
r^2	r^2	I	r

- r^2 = r concatenado con r. Cada rotación de 120° en sentido anti-horario.

Concatenación	I	XA
I	I	XA
XA	XA	I

Concatenación	I	XB
I	I	XB
XB	XB	I

Concatenación	I	XC
I	I	XC
XC	XC	I

Viendo las tablas de multiplicación de los subgrupos, se puede observar que cada grupo de las operaciones de rotación cumple con las propiedades de un grupo cíclico de orden. De igual manera se puede observar con las tablas de multiplicación de cada una de las reflexiones que se comporta como un grupo cíclico de orden 2.

d) Considere las siguientes matrices:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- ANEXO 2: Creación de matrices y operaciones de multiplicación entre matrices (Clase1_ejercicio3d.wxmx).

Realizando las operaciones matriciales en el software "Maxima" obtenemos la tabla de multiplicación.

multiplicación Matricial	I	B	A	C	E	D
I	I	B	A	C	E	D
B	B	A	I	D	C	E
A	A	I	B	E	D	C
C	C	E	D	I	B	A
E	E	D	C	A	I	B
D	D	C	E	B	A	I

Concatenación	I	R	r	XA	XB	XC
I	I	R	r	XA	XB	XC
R	R	r	I	XC	XA	XB
r	r	I	R	XB	XC	XA
XA	XA	XB	XC	I	R	r
XB	XB	XC	XA	r	I	R
XC	XC	XA	XB	R	r	I

Como se puede ver en las tablas de multiplicación los dos grupos son isomorfos, ya que los resultados en ambas tablas tienen la misma distribución (identificadas con colores).

e) Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones que discutimos como ejemplo en la sección 2.1.6. ¿ Es ese grupo isomorfo a G? Justifique su respuesta.

Teniendo la tabla de multiplicación del grupo mostrado en el ejemplo de la sección 2.1.6 intercambiamos algunas columna y filas de la tabla:

$\odot$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_2$
$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3$
$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_1$
$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_0$
$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_4$

Multiplicación Matricial	P0	P5	P4	P1	P2	P3
P0	P0	P5	P4	P1	P2	P3
P5	P5	P4	P0	P3	P1	P2
P4	P4	P0	P5	P2	P3	P1
P1	P1	P2	P3	P0	P5	P4
P2	P2	P3	P1	P4	P0	P5
P3	P3	P1	P2	P5	P4	P0

Concatenación	I	R	r	XA	XB	XC
I	I	R	r	XA	XB	XC
R	R	r	I	XC	XA	XB
r	r	I	R	XB	XC	XA
XA	XA	XB	XC	I	R	r
XB	XB	XC	XA	r	I	R
XC	XC	XA	XB	R	r	I

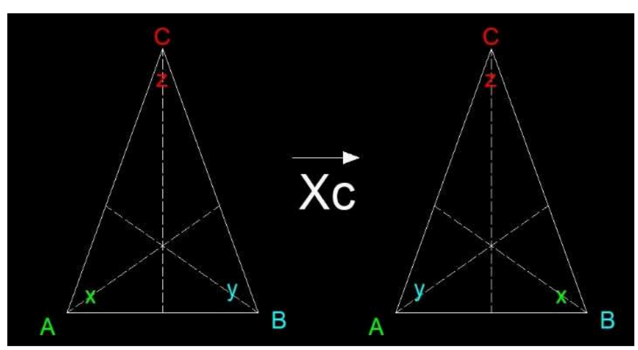
Composición de permutaciones	P0	P5	P4	P1	P2	P3
P0	P0	P5	P4	P1	P2	P3
P5	P5	P4	P0	P3	P1	P2
P4	P4	P0	P5	P2	P3	P1
P1	P1	P2	P3	P0	P5	P4
P2	P2	P3	P1	P4	P0	P5
P3	P3	P1	P2	P5	P4	P0

Como se puede ver en las tablas de multiplicación los dos grupos son isomorfos, ya que los resultados en ambas tablas tienen la misma distribución (identificadas con colores).

f) ¿Qué puede decir de las operaciones simetrías que dejan invariante un triángulo isósceles? ¿formarán grupo? ¿y si el triángulo es escaleno, cuáles son las operaciones de simetría que lo dejan invariante?

- Para un triángulo isósceles solo se tendría una operación de simetría (Xc) con respecto al vértice donde se encuentra el ángulo diferente a los otros dos (z). Junto con la operación Identidad conformaría un grupo cíclico de orden 2, con respecto a la operación concatenación.

Concatenación	I	Xc
I	I	Xc
Xc	Xc	I



- Si el triángulo escaleno no habría operaciones de simetría que dejen invariante el triángulo.

Ejercicio 10

Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i .$$

a) Demostrar que Pn es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

$$\mathbf{1.}\ \forall\ |\boldsymbol{P_i}>, |\boldsymbol{P_j}> \in\ \boldsymbol{P_n}\ \rightarrow |\boldsymbol{P_k}> =\ |\boldsymbol{P_i}>\ + |\boldsymbol{P_j}> \in\ \boldsymbol{P_n}$$

$$P_a(x) =\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\ \in\ P_n$$

$$P_b(x) =\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \in\ P_n$$

$$P_a(x) + P_b(x) =\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$$

$$\boldsymbol{P_c(x) =\ a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} \in\ P_n}$$

$$\mathbf{2.}\ \forall\ |\boldsymbol{P_i}>, |\boldsymbol{P_j}> \in\ \boldsymbol{P_n}\ \rightarrow\ |\boldsymbol{P_i}>\ + |\boldsymbol{P_j}> = |\boldsymbol{P_j}> + |\boldsymbol{P_i}>$$

$$P_a(x) =\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\ \in\ P_n$$

$$P_b(x) =\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \in\ P_n$$

$$P_a(x) + P_b(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}$$

$$P_b(x) + P_a(x) = b_0 + a_0 + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \cdots + (b_{n-1} + a_{n-1})x^{n-1}$$

$$\boldsymbol{P_a(x) + P_b(x) = P_b(x) + P_a(x)}$$

$$\mathbf{3.}\ \forall\ |\boldsymbol{P_i}>, |\boldsymbol{P_j}>, |\boldsymbol{P_k}> \in\ \boldsymbol{P_n}\ \rightarrow (|\boldsymbol{P_i}>\ + |\boldsymbol{P_j}>) +\ |\boldsymbol{P_k}> = |\boldsymbol{P_i}> + (|\boldsymbol{P_j}>\ + |\boldsymbol{P_k}>)$$

$$P_a(x) =\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\ \in\ P_n$$

$$P_b(x) =\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \in\ P_n$$

$$P_c(x) =\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} \in\ P_n$$

$$P_a(x) + P_b(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}$$

$$(P_a(x) + P_b(x)) + P_c(x) = a_0 + b_0 + c_0 + (a_1 + b_1 + c_1)x + (a_2 + b_2 + c_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1})x^{n-1}$$

$$P_b(x) + P_c(x) = b_0 + c_0 + (b_1 + c_1)x + (b_2 + c_2)x^2 + \cdots + (b_{n-1} + c_{n-1})x^{n-1}$$

$$P_a(x) + (P_b(x) + P_c(x)) = a_0 + b_0 + c_0 + (a_1 + b_1 + c_1)x + (a_2 + b_2 + c_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1})x^{n-1}$$

$$\boldsymbol{(P_a(x) + P_b(x)) + P_c(x) = P_a(x) + (P_b(x) + P_c(x))}$$

$$\mathbf{4.}\ |\mathbf{0}> + |\boldsymbol{P_i}> = |\boldsymbol{P_i}> + |\mathbf{0}> = |\boldsymbol{P_i}>\ \forall\ |\boldsymbol{P_i}> \in\ \boldsymbol{P_n}$$

$$|0> =\ 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1}$$

$$P_a(x) =\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$|0> +P_a(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$|0> +P_a(x) = 0 + a_0 + (0 + a_1)x + (0 + a_2)x^2 + \cdots + (0 + a_{n-1})x^{n-1}$$

$$P_a(x) + |0> = a_0 + 0 + (a_1 + 0)x + (a_2 + 0)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + 0)x^{n-1}$$

$$|0> +P_a(x) = \ P_a(x) + |0>$$

5. $\forall\, |\boldsymbol{P_i}> \in\ \boldsymbol{P_n} \ \exists\ |-\boldsymbol{P_i}> / \ |\boldsymbol{P_i}> + |-\boldsymbol{P_i}> = |\boldsymbol{0}>$

$$P_a(x) = \ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$-P_a(x) = -(\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$$

$$P_a(x) + \left(-P_a(x)\right) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + [-(\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})]$$

$$P_a(x) + \left(-P_a(x)\right) = a_0 - a_0 + (a_1 - a_1)x + (a_2 - a_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-1})x^{n-1}$$

$$\boldsymbol{P_a(x) + \left(-P_a(x)\right) = 0 + (0)x + (0)x^2 + \cdots + (0)x^{n-1} = |0>}$$

6. $\forall\ \boldsymbol{\alpha}\ \in \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{y\ cualquier}\ |\boldsymbol{P_i}> \in\ \boldsymbol{P_n} \rightarrow\ \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{P_i}> \in\ \boldsymbol{P_n} \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{K} \equiv \mathrm{R}$

$$P_a(x) = \ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$\alpha P_a(x) = \alpha(\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$$

$$\boldsymbol{\alpha P_a(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1}) \in\ P_n}$$

7. $\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}\ |\boldsymbol{P_i}>) = (\boldsymbol{\alpha\beta})|\boldsymbol{P_i}> \qquad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{K} \equiv \mathrm{R}$

$$P_a(x) = \ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$\beta P_a(x) = \beta(\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$$

$$\beta P_a(x) = \beta a_0 + \beta a_1x + \beta a_2x^2 + \cdots + \beta a_{n-1}x^{n-1})$$

$$\alpha(\beta P_a(x)) = \alpha(\beta a_0 + \beta a_1x + \beta a_2x^2 + \cdots + \beta a_{n-1}x^{n-1}))$$

$$\alpha(\beta P_a(x)) = \alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1x + \alpha\beta a_2x^2 + \cdots + \alpha\beta a_{n-1}x^{n-1}))$$

$$(\alpha\beta)P_a(x) = \alpha\beta(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}))$$

$$(\alpha\beta)P_a(x) = \alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1x + \alpha\beta a_2x^2 + \cdots + \alpha\beta a_{n-1}x^{n-1}))$$

$$\boldsymbol{\alpha(\beta P_a(x)) = (\alpha\beta)P_a(x)}$$

8. $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})|\boldsymbol{P_i}> = \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{P_i}> + \boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{P_i}> \qquad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{K} \equiv \mathrm{R}$

$$\alpha P_a(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1}$$

$$\beta P_a(x) = \beta a_0 + \beta a_1x + \beta a_2x^2 + \cdots + \beta a_{n-1}x^{n-1}$$

$$(\alpha + \beta)P_a(x) = (\alpha + \beta)a_0 + (\alpha + \beta)a_1x + (\alpha + \beta)a_2x^2 + \cdots + (\alpha + \beta)a_{n-1}x^{n-1})$$

$$\alpha P_a(x) + \beta P_a(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \beta a_0 + \beta a_1x + \beta a_2x^2 + \cdots + \beta a_{n-1}x^{n-1}$$

$$\alpha P_a(x) + \beta P_a(x) = (\alpha + \beta)a_0 + (\alpha + \beta)a_1x + (\alpha + \beta)a_2x^2 + \cdots + (\alpha + \beta)a_{n-1}x^{n-1})$$

$$\boldsymbol{(\alpha + \beta)P_a(x) = \alpha P_a(x) + \beta P_a(x)}$$

9. $\boldsymbol{\alpha}(|\boldsymbol{P_i}> + |\boldsymbol{P_j}>)\ = \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{P_i}> + \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{P_j}> \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{K} \equiv \mathbf{R}$

$$P_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$P_b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$$

$$P_a(x) + P_b(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}$$

$$\alpha(P_a(x) + P_b(x)) = \alpha(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1})$$

$$\alpha(P_a(x) + P_b(x)) = \alpha(a_0 + b_{0)} + \alpha(a_1 + b_1)x + \alpha(a_2 + b_2)x^2 + \cdots + \alpha(a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1})$$

$$\alpha P_a(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1}$$

$$\alpha P_b(x) = \alpha b_0 + \alpha b_1x + \alpha b_2x^2 + \cdots + \alpha b_{n-1}x^{n-1})$$

$$\alpha P_a(x) + \alpha P_b(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \alpha b_0 + \alpha b_1x + \alpha b_2x^2 + \cdots + \alpha b_{n-1}x^{n-1})$$

$$\alpha P_a(x) + \alpha P_b(x) = \alpha(a_0 + b_{0)} + \alpha(a_1 + b_1)x + \alpha(a_2 + b_2)x^2 + \cdots + \alpha(a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1})$$

$$\boldsymbol{\alpha(P_a(x) + P_b(x)) = \alpha P_a(x) + \alpha P_b(x)}$$

$$\mathbf{10.}\ \boldsymbol{1|P_i> = |P_i> \ \forall\, |P_i> \in P_n \ \ y\, 1 \ \in K}$$

$$P_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$1P_a(x) = 1(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$$

$$1P_a(x) = 1a_0 + 1a_1x + 1a_2x^2 + \cdots + 1a_{n-1}x^{n-1}$$

$$1P_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$\boldsymbol{1P_a(x) = P_a(x)}$$

b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿P_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?

- Sí, porque con el campo (números enteros), se puede generar P_n. Tendría las propiedades de espacio vectorial con respecto a la suma con elemento neutro para ($a_i = 0$), y con respecto a la multiplicación con ($a_0 = 1$ y $a_{i>0} = 0$).

c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de Pn es un subespacio vectorial?

1. El polinomio cero y todos los polinomios de grado n - 1.
2. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
3. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado n > 1).
4. Todos los polinomios que tienen a x - 1 como un factor.

No se cumple para el ítem 3, porque el elemento neutro para la suma sería un polinomio de grado mayor que 1.

Anexos

```
I:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
[x,y,z].I;
```

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

```
R:matrix([0,1,0],[0,0,1],[1,0,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
[x,y,z].R;
```

$$\begin{pmatrix} z & x & y \end{pmatrix}$$

```
r:matrix([0,0,1],[1,0,0],[0,1,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
[x,y,z].r;
```

$$\begin{pmatrix} y & z & x \end{pmatrix}$$

```
Xa:matrix([1,0,0],[0,0,1],[0,1,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
[x,y,z].Xa;
```

$$\begin{pmatrix} x & z & y \end{pmatrix}$$

```
Xb:matrix([0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
[x,y,z].Xb;
```

$$\begin{pmatrix} z & y & x \end{pmatrix}$$

```
Xc:matrix([0,1,0],[1,0,0],[0,0,1]);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[x,y,z].Xc;

$$\begin{pmatrix} y & x & z \end{pmatrix}$$

[x,y,z].I.I;

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

[x,y,z].I.R;

$$\begin{pmatrix} z & x & y \end{pmatrix}$$

[x,y,z].I.r;

$$\begin{pmatrix} y & z & x \end{pmatrix}$$

[x,y,z].I.Xa;

$$\begin{pmatrix} x & z & y \end{pmatrix}$$

[x,y,z].I.Xb;

$$\begin{pmatrix} z & y & x \end{pmatrix}$$

[x,y,z].I.Xc;

$$\begin{pmatrix} y & x & z \end{pmatrix}$$

[x,y,z].R.I;

$$\begin{pmatrix} z & x & y \end{pmatrix}$$

[x,y,z].R.R;

$$\begin{pmatrix} y & z & x \end{pmatrix}$$

[x,y,z].R.r;

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

[x,y,z].R.Xa;

$$\begin{pmatrix} z & y & x \end{pmatrix}$$

[x,y,z].R.Xb;

$$\begin{pmatrix} y & x & z \end{pmatrix}$$

[x,y,z].R.Xc;

$$\begin{pmatrix} x & z & y \end{pmatrix}$$

[x,y,z].r.I;

$$\begin{pmatrix} y & z & x \end{pmatrix}$$

[x,y,z].r.R;

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

[x,y,z].r.r;

$$\begin{pmatrix} z & x & y \end{pmatrix}$$

[x,y,z].r.Xa;

$$\begin{pmatrix} y & x & z \end{pmatrix}$$

```
[x,y,z].r.Xb;
```
$$\begin{pmatrix} x & z & y \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].r.Xc;
```
$$\begin{pmatrix} z & y & x \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xa.I;
```
$$\begin{pmatrix} x & z & y \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xa.R;
```
$$\begin{pmatrix} y & x & z \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xa.r;
```
$$\begin{pmatrix} z & y & x \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xa.Xa;
```
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xa.Xb;
```
$$\begin{pmatrix} y & z & x \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xa.Xc;
```
$$\begin{pmatrix} z & x & y \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xb.I;
```
$$\begin{pmatrix} z & y & x \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xb.R;
```
$$\begin{pmatrix} x & z & y \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xb.r;
```
$$\begin{pmatrix} y & x & z \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xb.Xa;
```
$$\begin{pmatrix} z & x & y \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xb.Xb;
```
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xb.Xc;
```
$$\begin{pmatrix} y & z & x \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xc.I;
```
$$\begin{pmatrix} y & x & z \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xc.R;
```
$$\begin{pmatrix} z & y & x \end{pmatrix}$$
```
[x,y,z].Xc.r;
```
$$\begin{pmatrix} x & z & y \end{pmatrix}$$

```
[x,y,z].Xc.Xa;
```

$$\begin{pmatrix} y & z & x \end{pmatrix}$$

```
[x,y,z].Xc.Xb;
```

$$\begin{pmatrix} z & x & y \end{pmatrix}$$

```
[x,y,z].Xc.Xc;
```

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

```
I: matrix(
 [1,0],
 [0,1]
);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A: matrix(
 [-1/2,sqrt(3)/2],
 [-sqrt(3)/2,-1/2]
);
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
B: matrix(
 [-1/2,-sqrt(3)/2],
 [sqrt(3)/2,-1/2]
);
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
C: matrix(
 [-1,0],
 [0,1]
);
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
D: matrix(
 [1/2,-sqrt(3)/2],
 [-sqrt(3)/2,-1/2]
);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
E: matrix(
 [1/2,sqrt(3)/2],
 [sqrt(3)/2,-1/2]
);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

AA = A.A;

$$AA=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

AB = A.B;

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AC = A.C;

$$AC=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

AD = A.D;

$$AD=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AE = A.E;

$$AE=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

BA = B.A;

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BB = B.B;

$$BB=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

BC = B.C;

$$BC=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

BD = B.D;

$$BD=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

BE = B.E;

$$BE=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

CA = C.A;

$$CA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

CB = C.B;

$$CB=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

CC = C.C;

$$CC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

CD = C.D;

$$CD=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

CE = C.E;

$$CE=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

DA = D.A;

$$DA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

DB = D.B;

$$DB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DC = D.C;

$$DC = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

DD = D.D;

$$DD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DE = D.E;

$$DE = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EA = E.A;

$$EA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EB = E.B;

$$EB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EC = E.C;

$$EC = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ED = E.D;

$$ED = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EE = E.E;

$$EE = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$