MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Escola Politécnica – 1° Semestre de 2017

EPREC - Entrega em 27 de julho de 2017

A decomposição de Cholesky aplicada a Finanças

1 Preliminares

O exercício-programa deverá ser feito individualmente. Não serão admitidos programas feitos em grupo. O exercício-programa deverá ser implementado em PYTHON, *exceto para as turmas da engenharia elétrica*, cuja implementação deverá ser na linguagem C. O programa-fonte do exercício-programa deverá ser caprichado porque a apresentação também contará pontos.

2 Objetivo

O objetivo deste exercício-programa é implementar a Decomposição de Cholesky e resolver um problema da formação de portfólios de ações que maximizam o retorno ou que minimizam o risco do investimento.

3 Decomposição de Cholesky

3.1 Introdução

Em muitas aplicações importantes, tais como mínimos quadrados e resolução numérica de equações diferenciais parciais, é preciso resolver sistemas lineares cuja matriz A é simétrica definida positiva. *Simétrica* significa $a_{ij} = a_{ji}$ para $i,j = 1, \ldots, n$ e *positiva definida* significa $x^T A\, x > 0$ para todo vetor x diferente de zero. Para estas matrizes, existe uma forma especial de decomposição triangular chamada *decomposição de Cholesky*.

Se A é uma matriz simétrica definida positiva, então ela pode ser representada unicamente por um produto

$$A = L\, L^T \tag{1}$$

onde L é uma matriz triangular inferior

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \ldots & l_{n-1,n-1} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

cujos elementos diagonais são positivos, $l_{ii} > 0$, para $1 \leq i \leq n$, e a matriz triangular superior L^T é a transposta de L.

Uma vez obtida a decomposição (1), podemos resolver o sistema linear $Ax = b$ resolvendo primeiro por substituição progressiva o sistema triangular inferior $Ly = b$, e posteriormente resolvendo o sistema triangular superior $L^T x = y$ usando substituição regressiva. Detalhes serão mostrados a seguir.

3.2 Cálculo dos coeficientes de L

Se escrevermos a equação (1) em componentes, obtemos as equações (verifique!)

$$\begin{cases} l_{kk} &= \left(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2 \right)^{1/2} \\ l_{ik} &= \dfrac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} \right) \qquad i = k+1, k+2, \cdots, n. \end{cases}$$

Podemos descrever as relações acima no seguinte algoritmo:

para $k = 1, 2, \cdots, n$ **faça**
  se $a_{kk} \leq 0$ **PARE: falha no algoritmo**
  $l_{kk} = \sqrt{a_{kk}}$
  para $i = k+1, k+2, \ldots, n$ **faça**
    $l_{ik} = a_{ik}/l_{kk}$
    para $j = k+1, k+2, \ldots, i$ **faça**
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} l_{jk}$

Note que a matriz original A está sendo modificada. Se for preciso preservá-la, ela deve ser copiada para uma outra matriz.

3.3 Resolução dos sistemas triangulares

O sistema triangular inferior $Ly = b$ é resolvido por substituição progressiva da seguinte forma:

$$\begin{cases} y_1 &= b_1/l_{11} \\ y_i &= \dfrac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right) \qquad i = 2, \cdots, n. \end{cases}$$

O sistema triangular superior $L^T x = y$ é resolvido por:

$$\begin{cases} x_n &= y_n/l_{nn} \\ x_i &= \dfrac{1}{l_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j \right) \qquad i = n-1, \cdots, 1. \end{cases}$$

O valor armazenado em x é a solução do sistema $Ax = b$. A decomposição de Cholesky é razoavelmente estável do ponto de vista numérico. O algoritmo falha quando a matriz A não é positiva definida.

4 Aplicação da Decomposição de Cholesky a Finanças

Como aplicação da decomposição de Cholesky vamos considerar um problema fundamental em finanças. Desejamos investir uma certa quantidade de capital em ativos de renda variável negociados na BOVESPA. Os ativos A_1, A_2, ..., A_N têm preços que flutuam diariamente durante o pregão da bolsa. Vamos considerar os preços de fechamento e denotar por $P_{i,t}$ o preço do ativo A_i no fechamento do dia t. Uma medida adequada para se calcular investimentos é a de retorno de um ativo. O retorno do ativo A_i no tempo t é definido como sendo:

$$R_{i,t} = \ln \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

O problema é que na data de abertura t o preço de fechamento $P_{i,t}$ na data t é ainda desconhecido e portanto seu retorno também é desconhecido. Vamos considerar um caso bastante simples e utilizar séries históricas para modelarmos estatisticamente os retornos dos ativos. Consideramos uma seqüência de observações dos preços dos ativos em n datas consecutivas $t = 1, 2, \ldots, n$. Definimos os retornos esperados, variâncias e covariâncias históricas como sendo respectivamente:

$$\mu_i = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_{i,t} \tag{2}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(R_{i,t} - \mu_i)^2 \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(R_{i,t} - \mu_i).(R_{j,t} - \mu_j) \tag{4}$$

Denotamos por $\mathbf{R} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$ o vetor de retornos esperados dos N ativos e por $Q = (\sigma_{ij})$ a matriz $(N \times N)$ de covariâncias dos ativos. Note que Q é uma matriz não-negativa, isto é, $w^T Q w \geq 0$, para todo vetor $w \neq 0$ em R^N.

Desejamos, em um certo instante de tempo, investir nos ativos de renda variável e montar uma carteira bem diversificada contendo w_1 ações do ativo A_1, w_2 ações do ativo A_2, ..., e w_N ações do ativo A_N. Dizemos que o vetor $\mathbf{w} = (w_i)$ é um portfólio ou carteira de renda variável. O retorno μ da carteira e sua variância σ^2 são definidos respectivamente por:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j = 1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

O problema de investimento é o de escolher os pesos w_i de forma a maximizar o retorno esperado e ao mesmo tempo minimizar o risco da carteira, expresso aqui por sua variância. Matematicamente, resolvemos um problema de otimização que procura maximizar o retorno esperado da carteira penalizando o aumento da variância. A solução deste problema de otimização fornece um conjunto de portfólios, ditos eficientes, que maximizam o retorno para um determinado nível de risco e que minimizam o risco para um determinado nível de rentabilidade (retorno). Quando representados no espaço de retorno e variâncias, estes portfólios eficientes se situam sobre uma curva chamada de **fronteira de Markowitz**, em referência a Harry Markowitz, que, em 1952, formulou e resolveu este problema. Pode-se mostrar que todos os portfólios eficientes são gerados a partir de dois portfólios especiais, obtidos resolvendo-se as equações:

$$Qu = \mathbf{R} \qquad\qquad Qv = \mathbf{1} \tag{5}$$

onde $\mathbf{1} = (1, 1, ...,)$ é um vetor formado de 1's. Mostra-se que todos os investimentos eficientes são dados por:

$$\mathbf{w} = \lambda Q^{-1}\mathbf{1} + \gamma Q^{-1}\mathbf{R} = \lambda v + \gamma u \tag{6}$$

onde $\lambda = \frac{C-\mu B}{\Delta}$, $\gamma = \frac{A\mu - B}{\Delta}$ com $A = \mathbf{1}^T Q^{-1}\mathbf{1}$, $B = \mathbf{1}^T Q^{-1}\mathbf{R}$,$C = \mathbf{R}^T Q^{-1}\mathbf{R}$ e $\Delta = AC - B^2$. Se $\mu = \mathbf{w} \cdot \mathbf{R}$ e $\sigma^2 = \mathbf{w} \cdot Q\mathbf{w}$ são, respectivamente, o retorno esperado e o risco do investimento eficiente, então pode-se ver que

$$\sigma^2 = \frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{\Delta} \tag{7}$$

5 Dados do problema

É dada uma série histórica com os preços de diversos ativos. Essa tabela está em um arquivo texto e tem o formato

```
número_de_ativos_N
"Nome_do_ativo_1"  "Nome_do_ativo_2"  ... "Nome_do_ativo_N"
data_1  preço_do_ativo_1 ... preço_do_ativo_N
data_2  preço_do_ativo_1 ... preço_do_ativo_N
data_3  preço_do_ativo_1 ... preço_do_ativo_N
etc.
```

Seu programa deve calcular:

1. A matriz de covariâncias Q utilizando (2), (3) e (4).
2. A decomposição de Cholesky $Q = L\,L^T$ (1).
3. A composição do portfólio (6) cujo retorno esperado é o máximo retorno dos ativos usados que formam o portfólio, isto é, $\mu_{\max} = \max_i \mu_i$.
4. A composição do portfólio de mínimo risco, calculado pela minimização de (7), e seu retorno ($\mu_{\min}$).
5. A composição do portfólio com retorno médio $\mu_{med} = \dfrac{\mu_{\min} + \mu_{\max}}{2}$.

6 Critério de correção e demais regras do jogo

- Exercícios-programa atrasados não serão recebidos. Não deixe para fazer seu programa na última hora.
- Todo aluno deverá submeter o programa-fonte e o relatório no sistema Graúna

Serão considerados os seguintes itens na correção:

- Organização e apresentação (indentação, comentários e saída).
- Implementação do Método de Cholesky.
- Cálculo da matriz de covariância a partir dos dados.
- Cálculo do portfólio de máximo retorno.
- Cálculo do portfólio de mínimo risco.
- Cálculo do portfólio de retorno médio.
- Entrada/Saída de dados (dados lidos devem ser impressos).