MAP3121 - Segunda tarefa computacional - 2016

Matrizes pertencentes a certas classes oriundas de aplicações podem ser triangularizadas pelo Método de Eliminação de Gauss sem trocas de linhas e sem a necessidade de condensação pivotal para a estabilidade numérica. Por exemplo, matrizes diagonais dominantes, matrizes simétricas definidas positivas e algumas matrizes em problemas de aproximação por splines estão nesta situação.

Suponha que A é uma matriz triangularizável pelo Método de Eliminação de Gauss sem trocas de linhas. Se denotarmos por U a matriz triangular superior obtida da triangularização, e por L a matriz triangular inferior formada pelos multiplicadores L_{ij}, $i > j$, abaixo da diagonal e com elementos diagonais iguais a 1, então pode-se mostrar que

$$A = LU,$$

chamada de decomposição LU de A.

Podemos então resolver qualquer sistema linear $Ax = b$ resolvendo-se um sistema triangular inferior e outro triangular superior da seguinte forma (por que?):

$$\begin{cases} Ly = & b, \\ Ux = & y. \end{cases}$$

Esta metodologia pode ser usada para a resolução de vários sistemas lineares com a mesma matriz A e lados direitos diferentes.

Matrizes tridiagonais Matrizes tridiagonais possuem elementos diferentes de zero somente na diagonal principal e nas diagonais secundárias acima e abaixo da diagonal principal, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $|i-j| > 1$. Elas aparecem frequentemente em aplicações e por isso merecem um tratamento especial. A sua estrutura pode ser explorada para obtermos L e U de forma eficiente.

Se A é uma matriz tridiagonal triangulrizável pelo Método de Eliminação de Gauss sem trocas de linhas, os únicos elementos de U que podem ser não nulos são U_{ii} e $U_{i,i+1}$, e os únicos multiplicadores que podem ser não nulos são $L_{i+1,i}$. Além disso, $U_{i,i+1} = a_{i,i+1}$ (tente demonstrar estas afirmações). Consequentemente, o número de operações aritméticas é reduzido consideravelmente ao descartarmos contas cujos resultados sabemos que são nulos.

O armazenamento também pode ser feito de forma eficiente, sendo desnecessário guardar os valores que sabemos que são nulos. A matriz tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

pode ser armazenada em três vetores

$$a = (0, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n) \quad c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, 0)$$

e os coeficientes $u_i = U_{ii}$ e $l_{i+1} = L_{i+1,i}$ da decomposição LU podem ser calculados pelo algoritmo (exercício)

$u_1 = b_1$

para $i = 2, \cdots, n$ **faça**

$l_i = a_i/u_{i-1}$ (multiplicador)

$u_i = b_i - l_i c_{i-1}$

fim

sendo possível armazená-los também em vetores. Lembre-se que $U_{i,i+1} = c_i$.

Tendo L e U (armazenados como descrito acima), a solução de um sistema $Ax = d$ é então obtida de

$Ly = d$:

$y_1 = d_1$

para $i = 2, \cdots, n$ **faça**

$y_i = d_i - l_i y_{i-1}$

fim

$Ux = y$:

$x_n = y_n/u_n$

para $i = n-1, \cdots, 1$ **faça**

$x_i = (y_i - c_i\, x_{i+1})/u_i$

fim

Sistemas tridiagonais cíclicos No tratamento numérico de certos problemas envolvendo periodicidade, aparecem sistemas tridiagonais cíclicos $Ax = d$ onde a matriz tem a seguinte estrutura:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

É possível obter a decomposição LU de A de maneira eficiente, mas aqui estamos interessados na resolução do sistema linear aproveitando o algoritmo para matrizes tridiagonais. O sistema $Ax = d$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} T\tilde{x} + x_n v &= \tilde{d} \\ w^t \tilde{x} + x_n b_n &= d_n \end{aligned}$$

onde T é a submatriz principal $(n-1)\times(n-1)$, *que é tridiagonal*, v e w são os vetores de $\mathbb{R}^{n-1}$ definidos por $v=(a_1,0,\ldots,0,c_{n-1})^t$ e $w=(c_n,0,\ldots,0,a_n)^t$, respectivamente, $\tilde{x}=(x_1,\ldots,x_{n-1})^t$ e $\tilde{d}=(d_1,\ldots,d_{n-1})^t$. A solução é dada por

$$x_n=\frac{d_n-c_n\tilde{y}_1-a_n\tilde{y}_{n-1}}{b_n-c_n\tilde{z}_1-a_n\tilde{z}_{n-1}} \quad e \quad \tilde{x}=\tilde{y}-x_n\tilde{z}$$

onde $\tilde{y}$ é a solução do sistema linear $T\tilde{y}=\tilde{d}$ e $\tilde{z}$ é a solução do sistema linear $T\tilde{z}=v$, ambos com a mesma matriz tridiagonal T de ordem $n-1$.

Tarefa Implemente o algoritmo descrito acima para a decomposição LU de uma matriz tridiagonal A $n\times n$. As matrizes A, L e U devem ser armazenadas em vetores conforme descrito no texto. Implemente também o algoritmo para a resolução de um sistema linear tridiagonal usando a decomposição LU da matriz. *Faça as implementações de forma que elas possam ser usadas como partes de outros programas.*

Teste os algoritmos na resolução do sistema linear tridiagonal cíclico $Ax=d$, onde os coeficientes da matriz A são $a_i=c_i=0.5$ e $b_i=2$, e o lado direito é $d_i=\cos(i\pi/10)$, $1\leq i\leq 20$.

Entrega da tarefa

Sua tarefa deve ser entregue no sistema Moodle (grauna@ime.usp.br) até o dia 26/04. Você entregará o fonte do programa (escrito em C ou em Python). Pense em uma forma adequada para o programa apresentar os dados e as respostas. *Esta tarefa é individual.*