MAP3121 - Exercício programa 1 - 2018

GPS e o Método de Newton

Contextualização

Nesta tarefa, devemos encontrar uma solução para a posição de um receptor GPS dada uma lista de informações de satélites. Esta lista é lida de um arquivo .txt que em sua primeira linha contém o número de satélite, que corresponde à quantidade de linhas na matriz de informações deste arquivo. As colunas desta matriz correspondem a x_i, y_i, z_i e w_i.

As coordenadas x_i, y_i, z_i são as componentes de o sistema de coordenadas tem sua origem O no centro da Terra, o eixo Oz positivo aponta na direção do Pólo Norte, o plano Oxy e o plano do equador com o eixo Ox positivo cortando o meridiano de Greenwich e o eixo Oy positivo corta o meridiano de longitude 90 E. A componente w_i se refere ao lapso temporal provocado por um erro T do receptor de forma que $\frac{w_i}{c}$ corresponda ao erro de sincronização T.

A solução destas equações será feita calculando os resíduos quadráticos e definindo uma função:

$$g(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x, y, z, w)$$

Tomamos então o gradiente nulo, de forma encontrar, portanto, a solução da posição através da minimização da soma desta $g(x)$. Devemos portanto resolver o seguinte sistema:

$$\nabla g(\bar{x}) = (0, 0, 0, 0)$$

O método numérico utilizado para obter esta solução é o método de newton multivariável, utilizando como aproximação inicial a solução aproximada de um sistema sobredeterminado com os resíduos linearizados $n - 1 \times 4$:

$$r_i - r_n = 0, \qquad 1 \leq i \leq n - 1$$

Se o sistema obtido é:

$$A * x = b$$

A matriz A obtida deste sistema não é quadrada. Então calculamos a solução no sentido de mínimos quadrados na solução do sistema:

$$A^T * A * x = A^T * b$$

Descrição das técnicas numéricas

Decomposição LU

A decomposição LU tem por objetivo principal diminuir a complexidade numérica na obtenção de um sistema linear. Para tanto, fatora-se uma matriz de forma a obter outras duas triangular L e U. A matriz L é triangular inferior e a matriz U é triangular superior. Podemos resolver o sistema:

$$L * U * x = b$$

Portanto, fazendo primeiramente

$$U * x = y$$

e com isto, resolvemos por eliminação de Gauss pois o sistema é escalonado:

$$L * y = b$$

Da mesma forma resolvemos o sistema $U * x = y$, que também é escalonado. Obtemos assim a incógnita x que resolve o sistema $A * x = b$.

Método de Newton

O método de newton é uma técnica numérica e iterativa que fornece a raiz de uma função. Neste problema, estamos usando o método de Newton multivariável. Dessa forma, o algoritmo irá fornecer a raiz de um sistema de equações:

$$A * x = \vec{0}$$

Para tanto, faremos a solução do seguinte sistema, iterativamente, através da solução de sistemas por LU:

$$\mathrm{J}_F\left(x^{(k)}\right) * c^{(k)} = -\mathrm{F}\left(x^{(k)}\right)$$

Com J_F a matriz jacobiana de $\mathrm{F}\left(x^{(k)}\right)$. Obtemos a atualização de x na iteração com:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + c^{(k)}$$

O sistema a ser obtido irá ser um sistema quadrado e, portanto, a cada passo do método de Newton, iremos obter $c^{(k)}$ resolvendo o sistema através da decomposição LU.

Testes iniciais

Teste 1

Temos a seguinte equação:

$$\mathrm{F(x,y)} = (\mathrm{x} - 2)^2 + (\mathrm{y} - 3)^2$$

Esperamos, portanto que o método de newton retorne o vetor $(2\ ,3)$ como solução para raiz desta função.

De fato, obtemos:

Chute inicial: [0, 0]

eps = 1e-7

maximo de iterações: 50

Número de iterações: 1

x:

=========

 2.0000 3.0000

=========

F(x):

=========

 0.0000 0.0000

=========

Teste 2

Temos a seguinte equação:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4) = \begin{cases} 4 * \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_1 * \mathrm{x}_4 \\ -\mathrm{x}_1 + 3 * \mathrm{x}_2 - 2\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_2 * \mathrm{x}_4 \\ \mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2 + 3\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_3\mathrm{x}_4 \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - 1 \end{cases}$$

Obtemos a seguinte solução, que se verifica correta conforme mostra a substituição do vetor solução $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)$ em $\mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)$.

Chute inicial: [1, 1, 1, 1]
eps = 1e-7
maximo de iterações: 50
Número de iterações: 10
x:
===============
 -0.0000 0.7071 0.7071 1.0000
===============
F(x):
===============
 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
===============

Teste 3

Temos a seguinte função que devemos determinar a raiz:

$$\mathrm{F}(x_1, \cdots, x_{n-1}) = -x_{i-1} - 1 \, + \, 2 * x_i \, - \, x_{i+1} - \frac{e^{x_i}}{n^2} \,, \qquad \mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{n} - 1$$

com $x_0 = \; x_n = 0$, a partir da aproximação inicial nula. Testaremos para n = 20, 40 e 80.
Chute inicial: vetor nulo de 20, 40 e 80
eps = 1e-7
maximo de iterações: 50
n = 20
Número de iterações: 3
x:
===
 0.0250 0.0477 0.0680 0.0859 0.1013 0.1143 0.1246 0.1324 0.1376 0.1402 0.1402 0.1376 0.1324 0.1246 0.1143 0.1013 0.0859 0.0680 0.0477 0.0250
===
F(x):
===
 -0.0000
===

n = 40
Número de iterações: 3
x:
===
 0.0131 0.0256 0.0375 0.0488 0.0594 0.0694 0.0788 0.0875 0.0956 0.1030 0.1098 0.1159 0.1214 0.1261 0.1302 0.1336 0.1364 0.1384 0.1398 0.1405 0.1405 0.1398 0.1384 0.1364 0.1336 0.1302 0.1261 0.1214 0.1159 0.1098 0.1030 0.0956 0.0875 0.0788 0.0694 0.0594 0.0488 0.0375 0.0256 0.0131
===
F(x):
===

```
 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
================================================================================

n = 80
Número de iterações: 3
x:
================================================================================
 0.0067 0.0133 0.0197 0.0259 0.0320 0.0379 0.0437 0.0493 0.0547 0.0600 0.0652 0.0701
0.0749 0.0796 0.0840 0.0883 0.0925 0.0965 0.1003 0.1039 0.1074 0.1107 0.1138 0.1168
0.1195 0.1222 0.1246 0.1269 0.1290 0.1309 0.1326 0.1342 0.1356 0.1368 0.1379 0.1388
0.1395 0.1400 0.1403 0.1405 0.1405 0.1403 0.1400 0.1395 0.1388 0.1379 0.1368 0.1356
0.1342 0.1326 0.1309 0.1290 0.1269 0.1246 0.1222 0.1195 0.1168 0.1138 0.1107 0.1074
0.1039 0.1003 0.0965 0.0925 0.0883 0.0840 0.0796 0.0749 0.0701 0.0652 0.0600 0.0547
0.0493 0.0437 0.0379 0.0320 0.0259 0.0197 0.0133 0.0067
================================================================================
F(x):
================================================================================
 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -
0.0000 -0.0000 -0.0000
================================================================================
```

Resultados

Na aplicação do método descrito acima para o problema em questão observamos os seguintes resultados, para os respectivos dados de entrada:

```
Dados de entrada:
===============
 | 16577402.072| 5640460.750| 20151933.185| 20432524.000|
 | 11793840.229| -10611621.371| 21372809.480| 21434024.400|
 | 20141014.004| -17040472.264| 2512131.115| 24556171.000|
 | 22622494.101| -4288365.463| 13137555.567| 21315100.200|
 | 12867750.433| 15820032.908| 16952442.746| 21255217.000|
 | -3189257.131| -17447568.373| 20051400.790| 24441547.200|
 | -7437756.358| 13957664.984| 21692377.935| 23768678.300|
===============
Aproximação Inicial:
===============
| 3508022.41913| 780520.70476| 5251965.93219| 24693.13281|
===============
Número de iterações: 3
Critério de parada: Máximo do passo em módulo dos elementos de x ser menor que 10^(-5)
Coordenadas do receptor em termos de (x,y,z,w)
===============
| 3507889.31980| 780490.97418| 5251783.56185| 25510.99468|
===============
*Raio: 6363.673 Km
*Coordenadas esféricas: 55.61711º N, 12.54375º E
Erro de sincronização: 85.096 us
```

Análise qualitativa dos resultados

Alguns pontos percebidos durante a resolução deste problema são interessantes de notar. O primeiro deles é que a solução do sistema linear que resulta na aproximação inicial teve um resultado bem próximo daquele que o método de Newton chegou.

Notamos que este passo foi fundamental no sentido de convergência do método. Caso o ponto inicial estivesse distante desta raiz do gradiente, o método diverge facilmente.

Também é relevante pontuar que a solução obtida não zerou completamente os componentes da função gradiente, embora os tenha levados a valores baixos em comparação com a aplicação de outros vetores. Atribuímos este fato a ordem de grandeza dos números com que estamos lidando e as limitações dos cálculos.

Outro ponto a ser evidenciado é o de que as coordenadas esféricas calculadas introduzem um erro ao resultado obtido uma vez que o formato terrestre pode ser melhor aproximado por uma elipse, o que ajustaria também para um altitude mais coerente.

Considerando estas questões, obtemos o seguinte resultado, fazendo a conversão de coordenadas cartesianas para geodésicas, usando o elipsoide WGS 1984 (GPS) no endereço eletrônico http://www.ufrgs.br/engcart/Teste/transf_coord.php :

Latitude	55° 47' 46.48616"
Longitude	12° 32' 37.49728"
Altitude	73.2264 m