

# Relatório de Exercício Programa 2 de Numérico

## – 1º sem 2017



## Sumário

Método Runge-Kutta Fehlberg e contextualização .....	4
Implementação e alguns testes .....	5
Implementação .....	5
Testes .....	5
Teste 1 .....	5
Teste 2 .....	5
Teste 3 .....	7
Tarefa .....	11
Explicação da implementação em python e interpretação dos dados em MATLAB .....	11
Item a) $\theta_1(0) = 20^\circ, \theta_2(0) = 0^\circ$ .....	11
$\theta_1 \times t$ .....	12
$\theta_2 \times t$ .....	13
$\omega_1 \times t$ .....	13
$\omega_2 \times t$ .....	13
Item b) $\theta_1(0) = 20^\circ, \theta_2(0) = 20^\circ$ .....	16
Energia .....	16
$\theta_1 \times t$ .....	16
$\theta_2 \times t$ .....	17
$\omega_1 \times t$ .....	17
$\omega_2 \times t$ .....	18
Item b. 1) $\theta_1(0) = 20.5^\circ, \theta_2(0) = 20.5^\circ$ .....	20
Item c) $\theta_1(0) = 130^\circ, \theta_2(0) = 130^\circ$ .....	20
Energia .....	21
$\theta_1 \times t$ .....	21
$\theta_2 \times t$ .....	22
$\omega_1 \times t$ .....	22
$\omega_2 \times t$ .....	22
Item c. 1) $\theta_1(0) = 130.5^\circ, \theta_2(0) = 130.5^\circ$ .....	24
teste sugerido: $\theta_1(0) = 180^\circ, \theta_2(0) = 180^\circ$ .....	25
Energia .....	26
$\theta_1 \times t$ .....	26
$\theta_2 \times t$ .....	27
$\omega_1 \times t$ .....	27
$\omega_2 \times t$ .....	28
Apendice 1 – Código MATLAB para análise do teste 1 .....	30
Apendice 2 – Código MATLAB para análise do teste 2 .....	31
Apendice 3 - Código MATLAB para análise do teste 3 .....	32



## Método Runge-Kutta Fehlberg e contextualização

Neste exercício devemos implementar o método Runge-Kutta de resolução de equações diferenciais com controle de passo. Dada uma equação diferencial do tipo  $x'(t) = f(t, x)$ , temos que é possível obter os pontos que estimam localmente a função solução da equação diferencial dada usando  $x_{i+1} = x_i + h * f(t_i, x_i)$ . Note que  $h * f(t_i, x_i)$  corresponde a variação no contra-domínio da função  $x(t)$  para um acréscimo de  $h$  em um dado  $t_i$ . Entretanto, este valor corresponde também a integração de  $x'(t)$  no intervalo. Com isso, o método Runge-Kutta Fehlberg realiza a integração numérica de  $f(t, x)$  de  $t_i$  até  $t_i + h$ , fazendo controle do passo  $h$ . Assim, substitui  $h * f(t_i, x_i)$  pelo valor desta integração e obtém  $x_{i+1}$  refinando este processo (diminuindo  $h$ ) caso não haja precisão pré-definida ou aumentando  $h$ , caso haja folga na precisão.

Após a implementação deste método e de alguns testes preliminares, objetivamos realizar a simulação do movimento de um pêndulo duplo ilustrado a seguir:

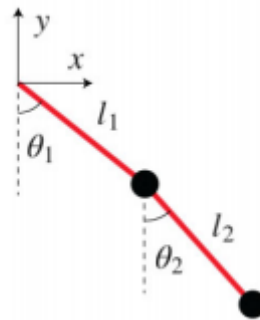


Figura 1 - Representação de um pêndulo duplo

Das equações de movimento, é possível deduzir o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \\ \dot{\omega}_1 &= f_1(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \\ \dot{\omega}_2 &= f_2(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2)\end{aligned}$$

Onde  $f_1$  e  $f_2$  são dadas por:

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin\theta_2 - 2\sin\theta_1 - \sin(\theta_1 - \theta_2) [\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2]}{1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ f_2 &= \frac{2 [\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin\theta_1 - \sin\theta_2] + \sin(\theta_1 - \theta_2) [2\dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2]}{1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}\end{aligned}$$

Por fim, iremos visualizar graficamente os resultados de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e das posições de  $x_1$  e  $x_2$  através destes resultados. Também, será analisada a energia total do sistema na solução de  $x(t)$ . Para isso, usamos:

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin\theta_1, & y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 & T &= \dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2}, \\ x_2 &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2, & y_2 &= -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 & V &= 2(1 - \cos\theta_1) + (1 - \cos\theta_2),\end{aligned}$$

Onde  $E = T + V$ , sendo  $T$  a energia cinética e  $V$  a energia potencial do sistema.

# Implementação e alguns testes

## Implementação

O programa implementado divide o exercício em 2 casos:

- Verificação de testes para o método Runge-Kutta Fehlberg.
- Resolução da contextualização proposta.

Para a verificação de testes, é apresentado qual teste o usuário deseja escolher. No caso da resolução da contextualização, basta que o usuário digite as condições iniciais de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (note que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são sempre supostos iguais a zero).

Também é interessante notar que em ambos os casos são gerados arquivos .txt para posterior verificação dos resultados por métodos gráficos com auxílio do MATLAB (os códigos usados para estes testes estão apresentados nos apêndices deste documento). Em todos os casos, é gerado um arquivo que contém todos pontos  $x(t_i)$  e outro arquivo contendo os valores destes  $t_i$ . Além disto, no caso da resolução da contextualização, também é gerado um arquivo da energia total calculada no sistema a partir das soluções obtidas, a fim de verificar a consistência das soluções.

## Testes

O programa gera arquivos .txt com os valores de X e de t para os testes. Com estes arquivos geramos os gráficos a seguir fazendo uso dos códigos MATLAB descritos nos apêndices.

### Teste 1

A implementação em MATLAB que possibilitou estas visualizações está descrita no apêndice 1. Veja as figuras a seguir dos resultados:

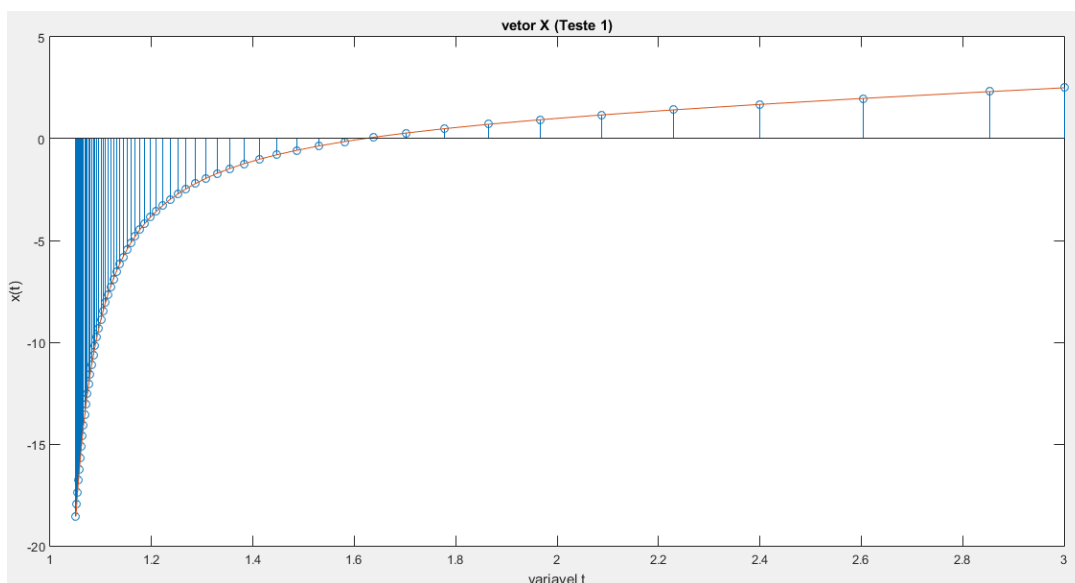


Figura 2 - Gráficos de valores estimados por método RKF45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 1).

### Teste 2

A implementação em MATLAB que possibilitou estas visualizações está descrita no apêndice 2. Veja as figuras a seguir dos resultados:

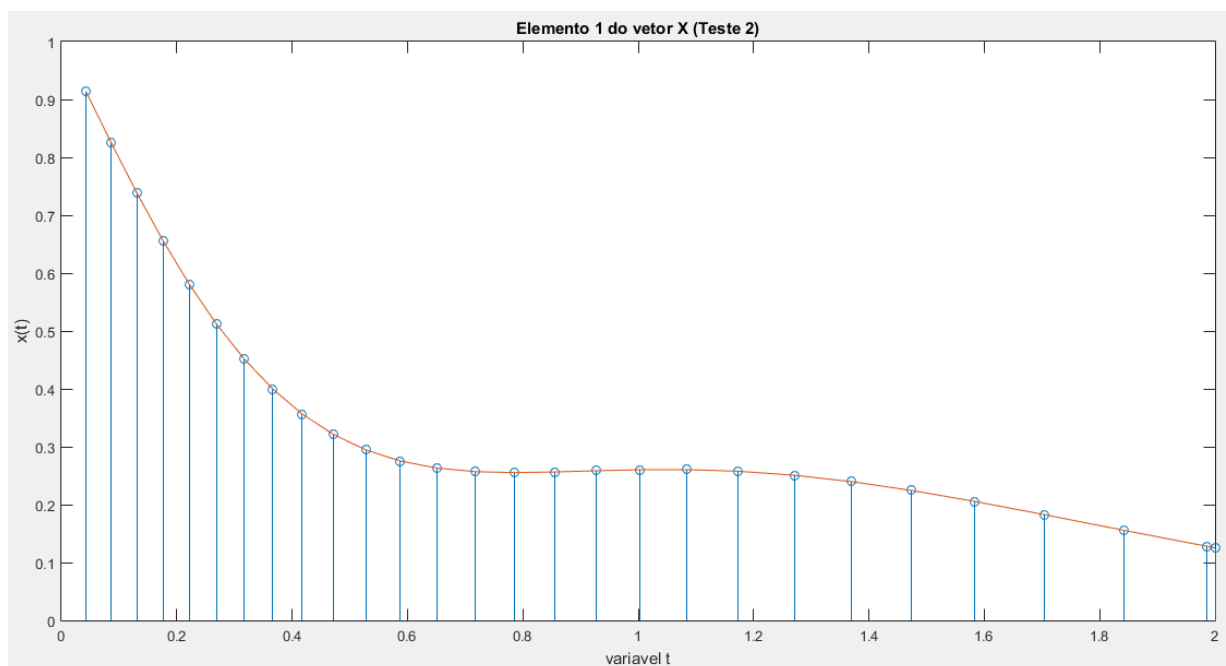


Figura 3 - Gráficos de valores estimados por método RKF45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 2 –  $X[1]$ ).

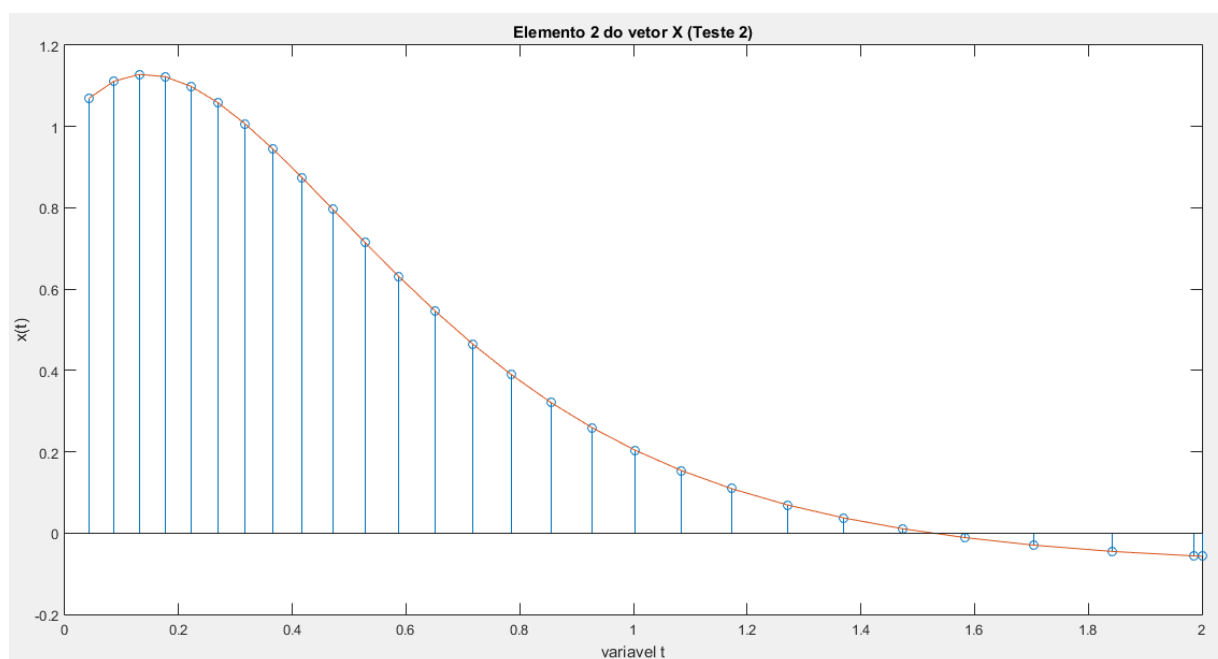


Figura 4 - Gráficos de valores estimados por método RKF45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 2 –  $X[2]$ ).

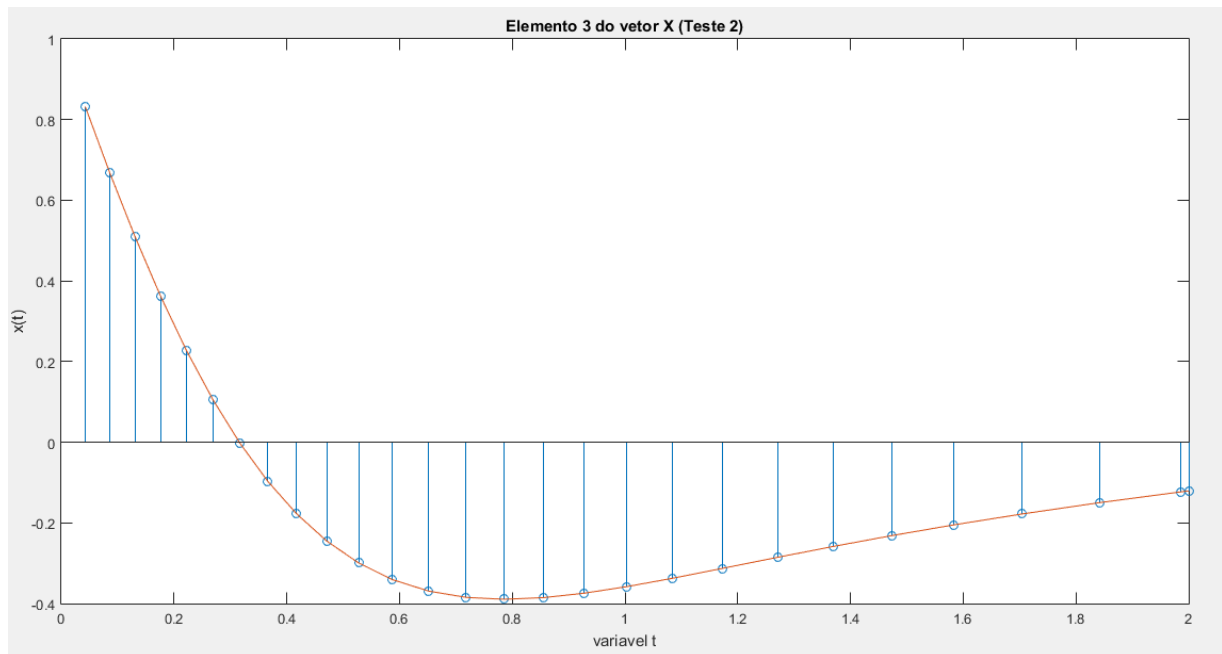


Figura 5 - Gráficos de valores estimados por método RKF45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 2 –  $X[3]$ ).

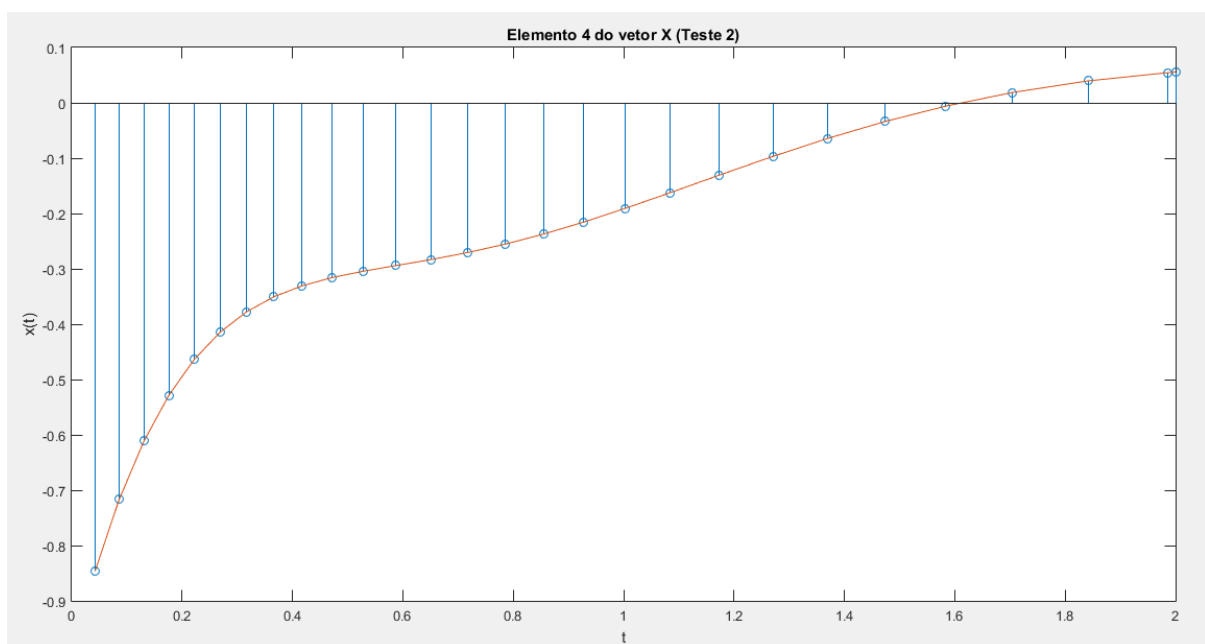


Figura 6 - Gráficos de valores estimados por método RKF45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 2 –  $X[4]$ ).

### Teste 3

A implementação em MATLAB que possibilitou estas visualizações está descrita no apêndice 3. Veja as figuras a seguir dos resultados:

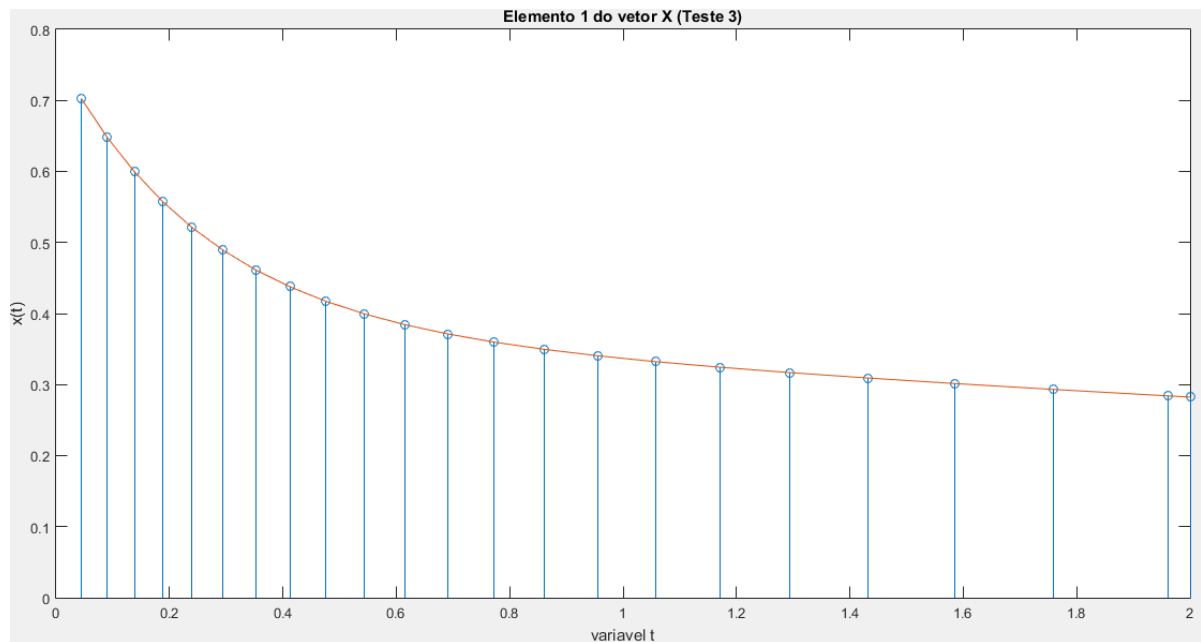


Figura 7 - Gráficos de valores estimados por método RKF45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 3 –  $X[1]$ ).

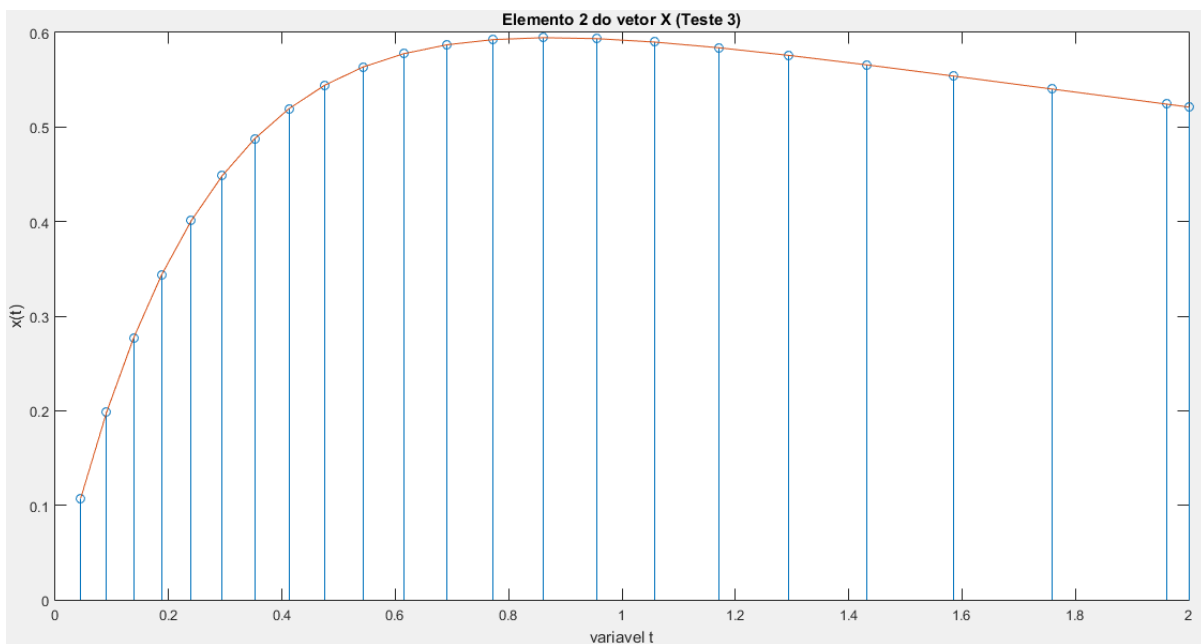


Figura 8 - Gráficos de valores estimados por método RKF45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 3 –  $X[2]$ ).



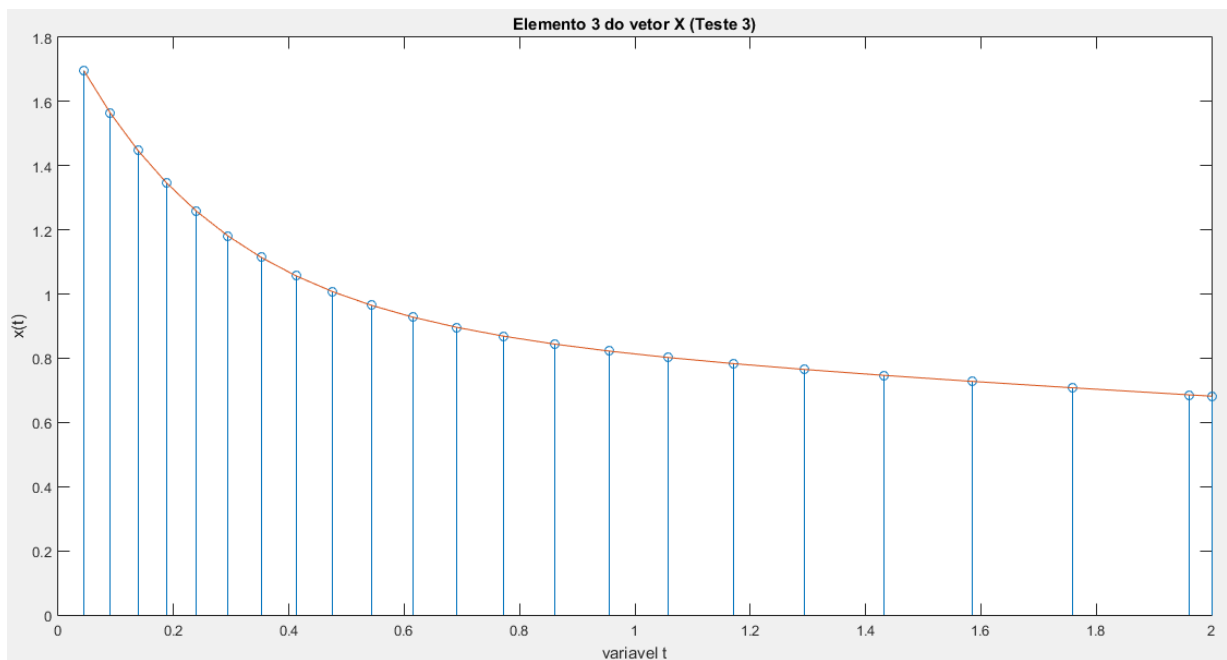


Figura 9 - Gráficos de valores estimados por método RFK45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 3 –  $X[3]$ ).

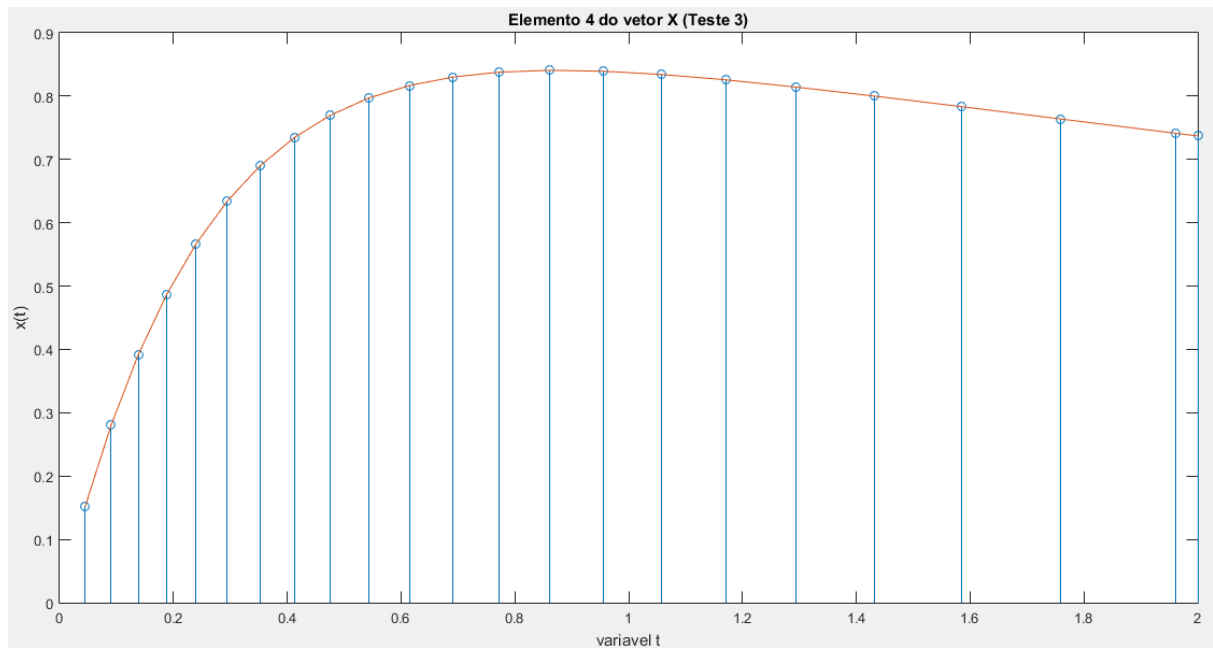


Figura 10 - Gráficos de valores estimados por método RFK45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 3 –  $X[4]$ ).

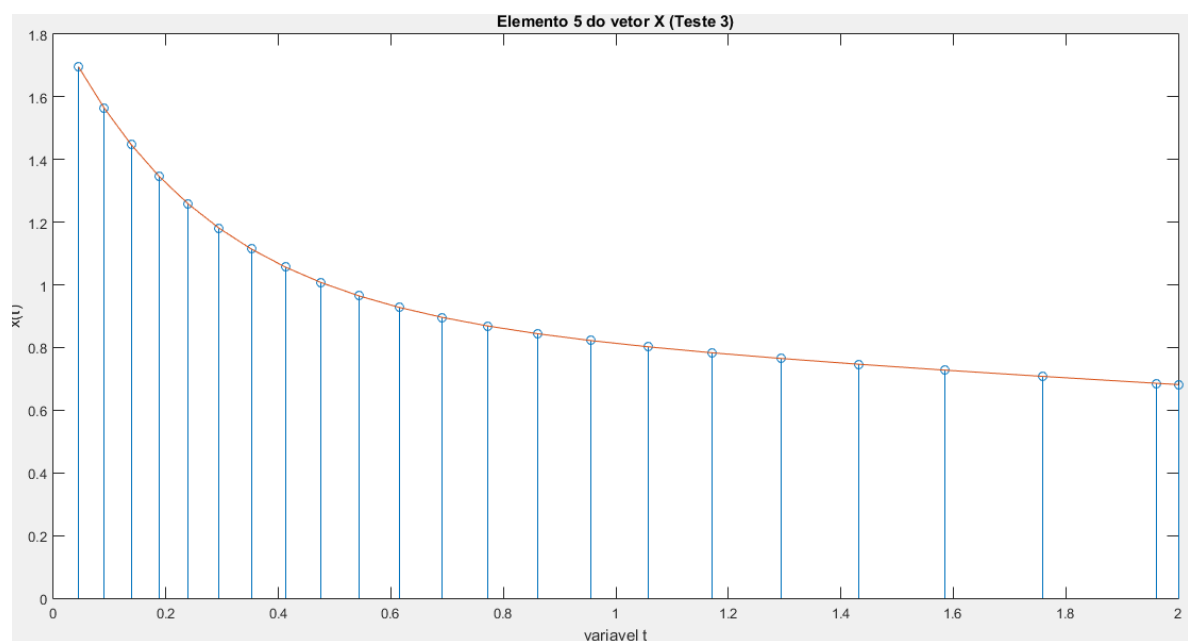


Figura 11 - Gráficos de valores estimados por método RFK45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 3 –  $X[5]$ ).

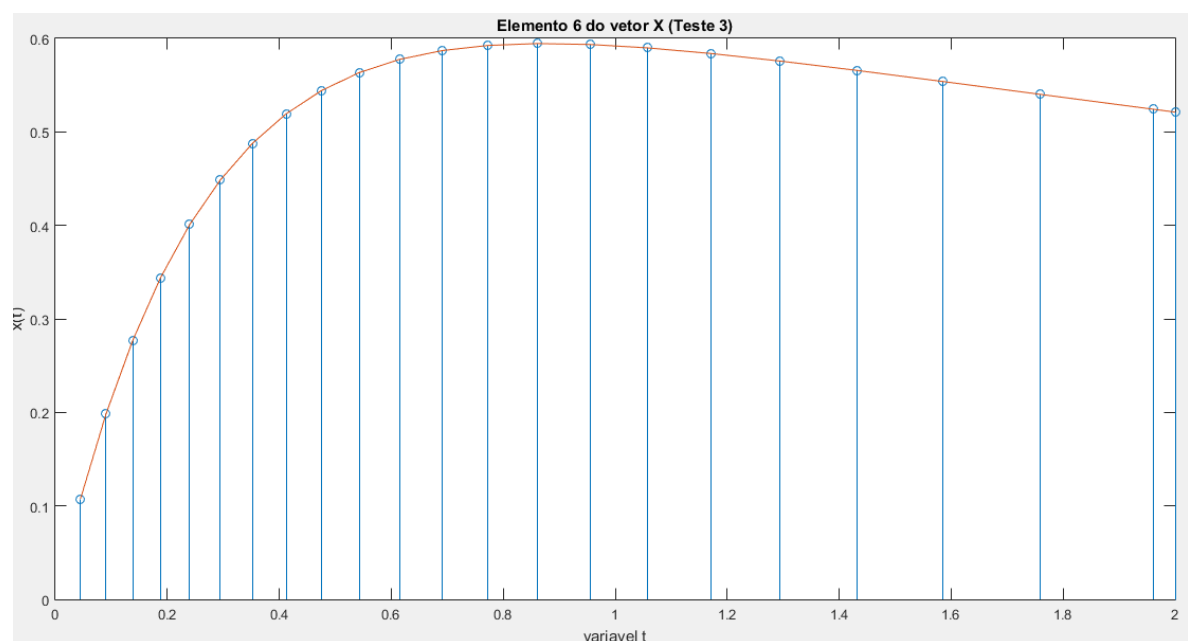


Figura 12 - Gráficos de valores estimados por método RFK45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 3 –  $X[6]$ ).

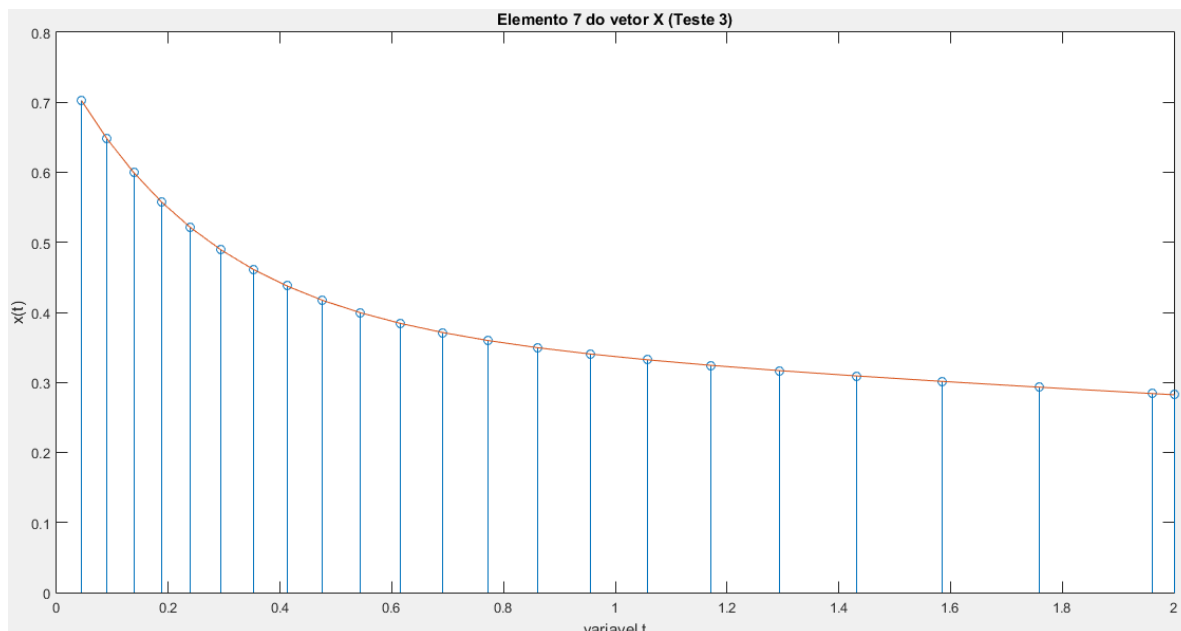


Figura 13 - Gráficos de valores estimados por método RKF45 sobrepostos com traço da solução exata (Para teste 3 –  $X[7]$ ).

## Tarefa

### Explicação da implementação em python e interpretação dos dados em MATLAB

Neste item fazemos também a determinação de outros dados além da solução direta da equação resolvida. Implementamos também o cálculo da energia total. Também, o algoritmo também calcula as posições, efetivamente dos pontos dos pontos  $x_1$  e  $x_2$  e armazena em um .txt. Iremos apresentar gráficos para  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ ,  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ ,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ .

Item a)  $\theta_1(0) = 20^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 0^\circ$

Na figura abaixo, mostramos um gráfico da energia total do sistema ao longo do tempo. Conforme explicitado no apêndice X, que contém o código utilizado para análise dos resultados da tarefa, a escala em y apresentada apenas nos arredores do valor médio da energia. Flutuações de pequena magnitude são esperadas devido a erros trazidos por imprecisões do método numérico. Verificou-se que a energia se conserva com precisão da ordem de  $10^{-8}$ .

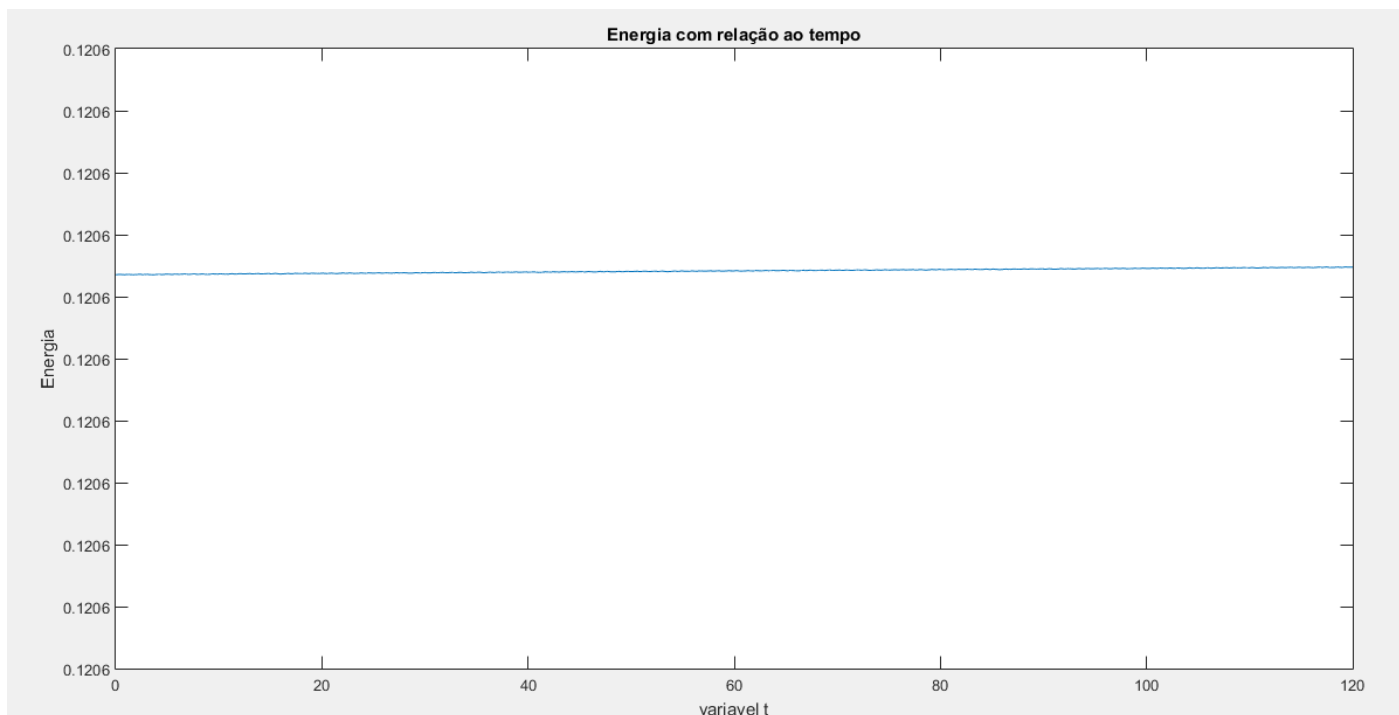


Figura 14 - Gráficos de a energia total do sistema simulado ao longo do tempo.

Também, obtivemos o gráfico de cada um dos elementos do vetor X, que contém  $[\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2]$ . Nas figuras a seguir mostramos o gráfico de cada um destes índices com relação ao tempo.

$$\theta_1 \times t$$

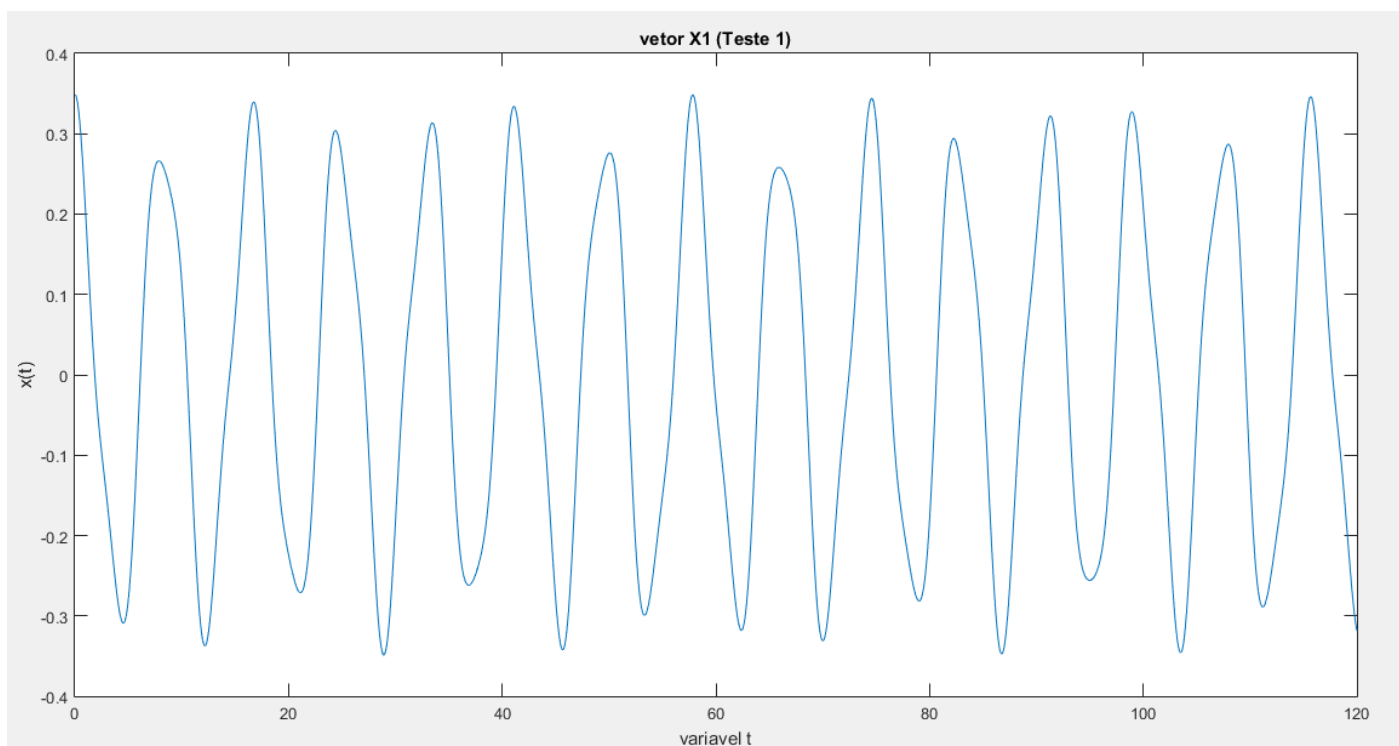


Figura 15 - Gráfico de  $\theta_1$  ao longo do tempo

$$\theta_2 \times t$$

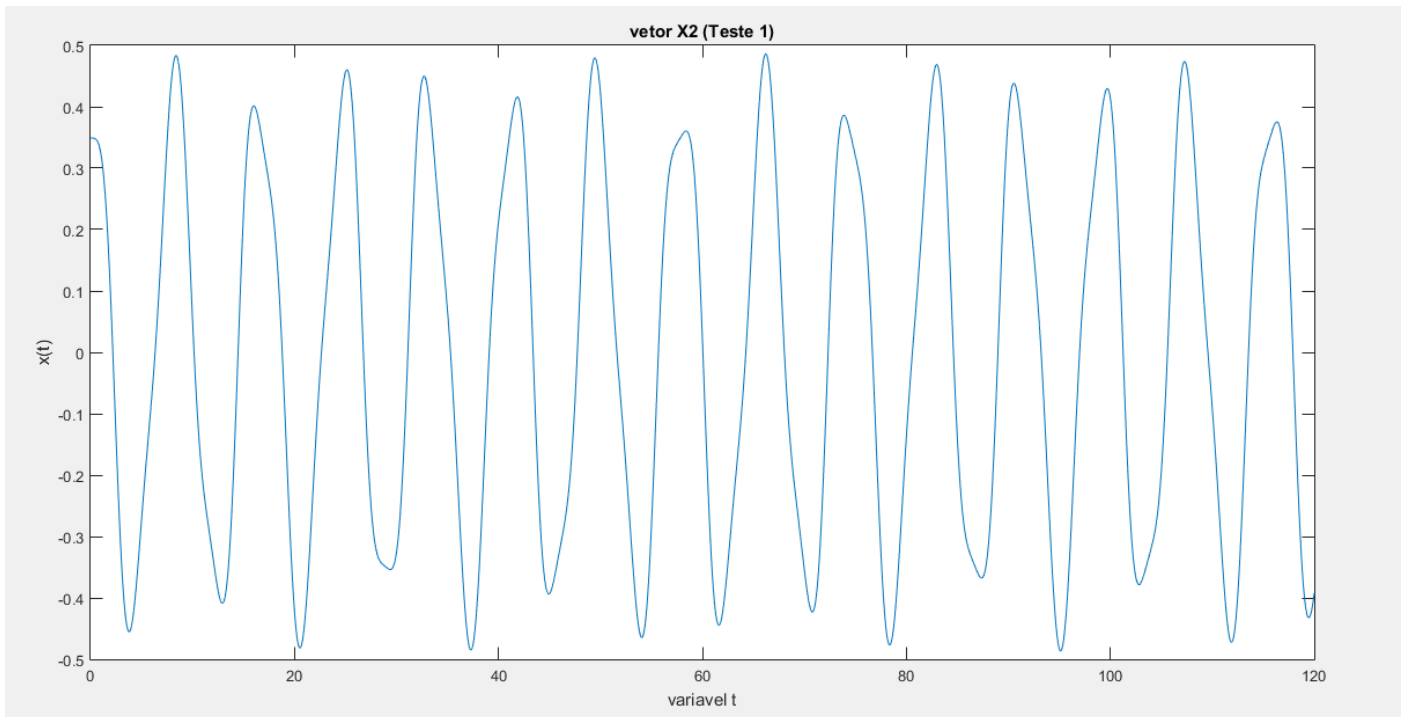


Figura 16 - Gráfico de  $\theta_2$  ao longo do tempo

$$\omega_1 \times t$$

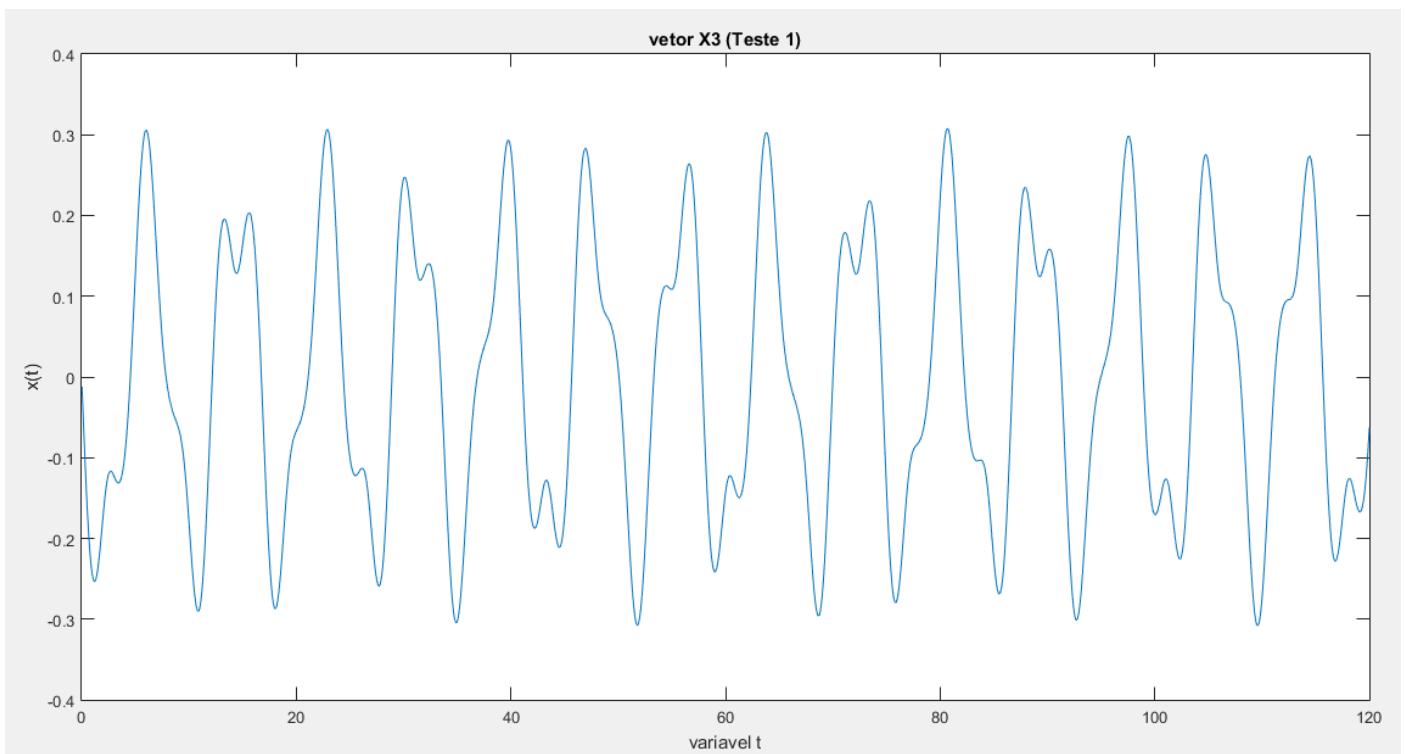


Figura 17 - Gráfico de  $\omega_1$  ao longo do tempo

$$\omega_2 \times t$$

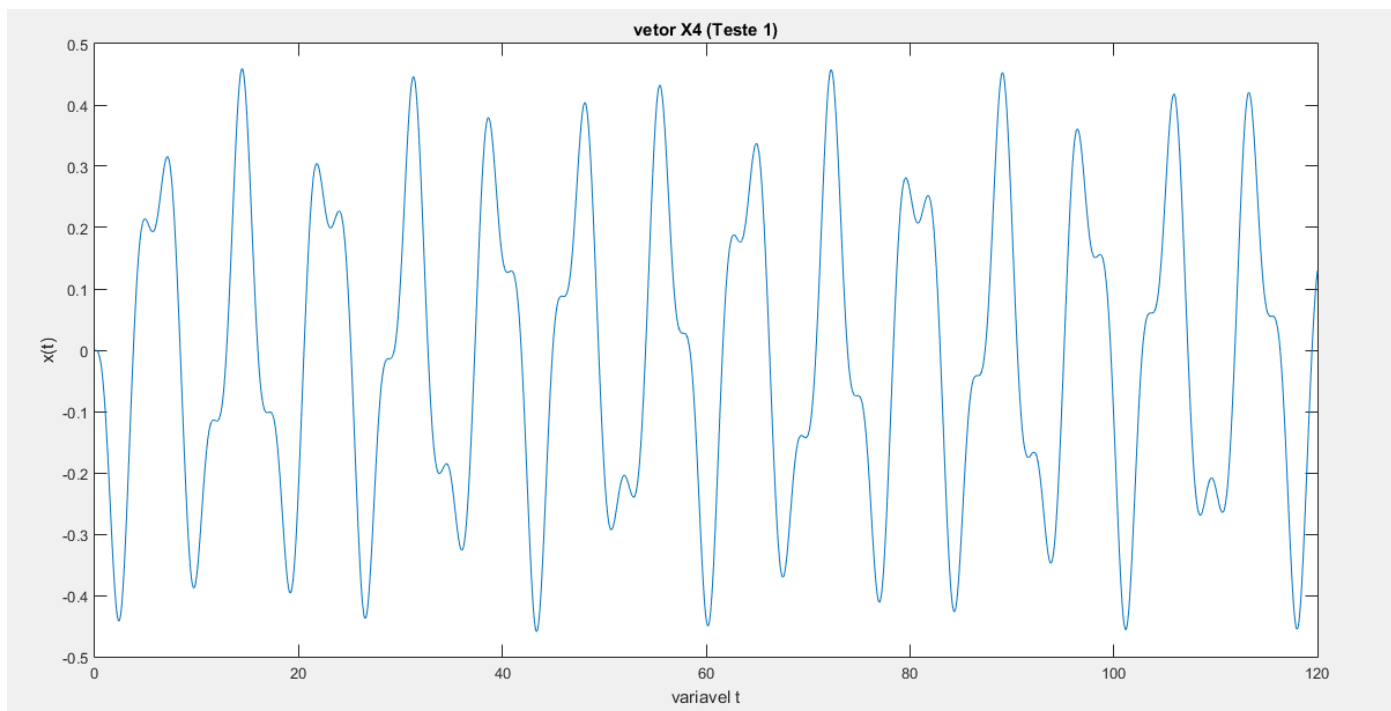


Figura 18 - Gráfico de  $\omega_2$  ao longo do tempo

Além destas visualizações, também obtivemos o gráfico que apresenta as curvas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  no plano XY.

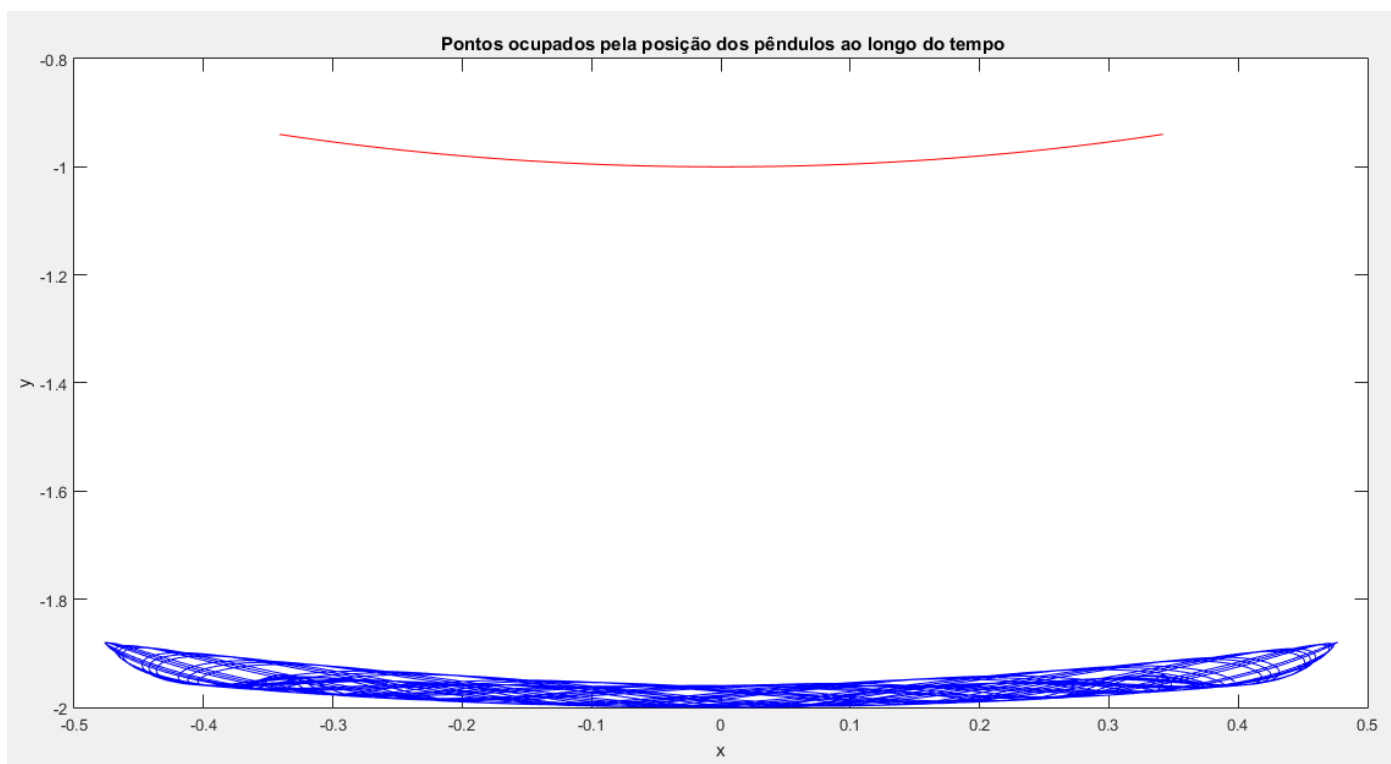


Figura 19 - Gráfico das curvas  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$

Vejamos  $(x_2, y_2)$  mais de perto. Nesta escala mais apropriada, podemos ver o movimento caótico do pêndulo com mais clareza.

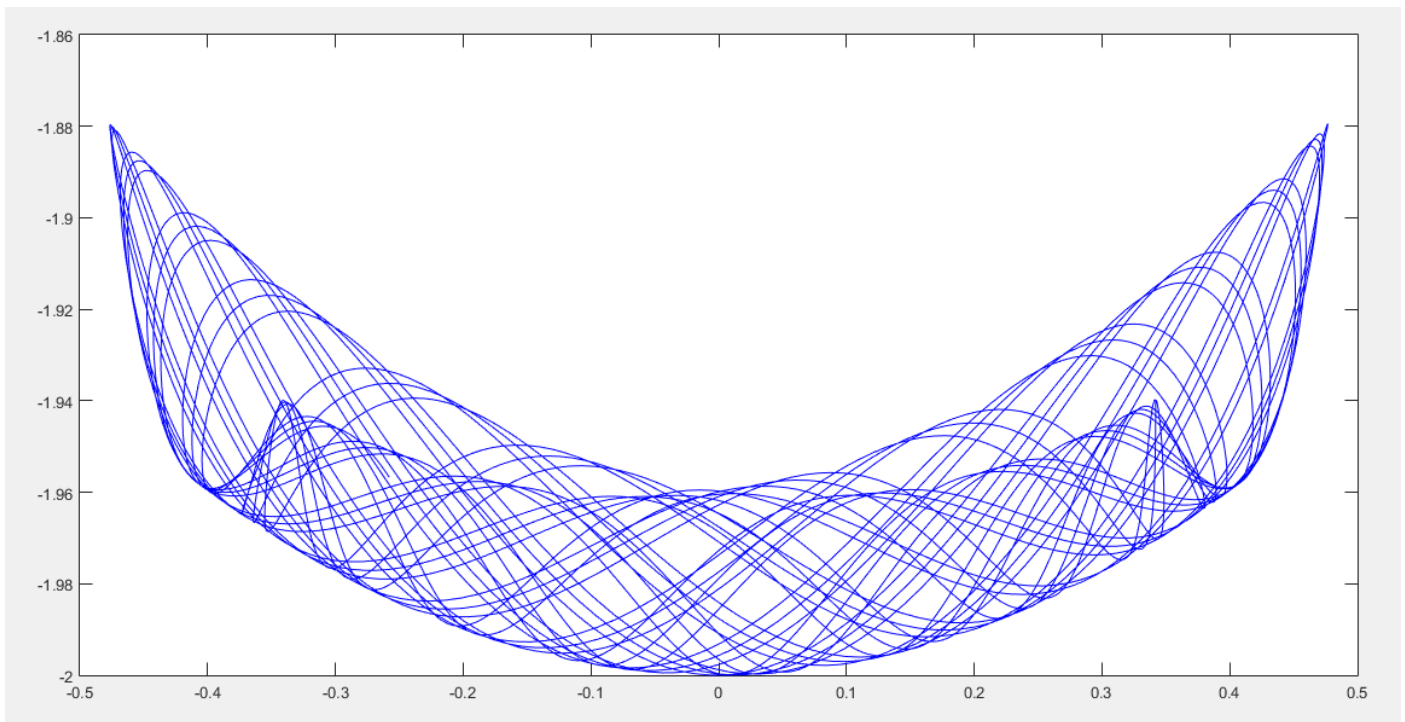


Figura 20 - Detalhe de  $(x_2(t), y_2(t))$

É interessante também observar a movimentação dos pêndulos ao longo do tempo. Para tanto, plotamos a posições  $x$  e  $y$  em um plano e o  $t$  correspondente em um terceiro eixo.

Na imagem a seguir, temos as posições correspondentes a  $(x_1(t), y_1(t))$ :

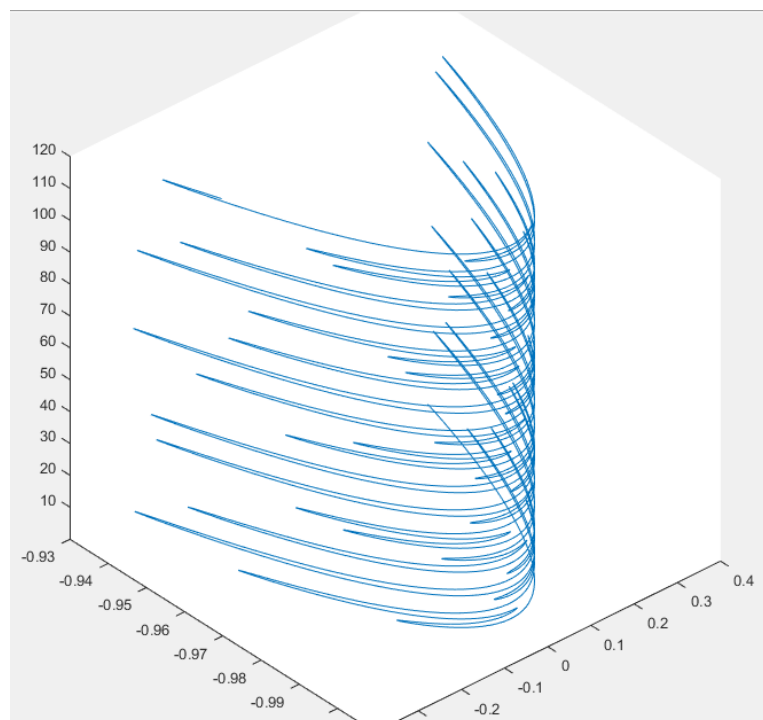


Figura 21 - Gráfico de  $(x_1(t), y_1(t), t)$

Na imagem a seguir, temos as posições correspondentes a  $(x_2(t), y_2(t))$

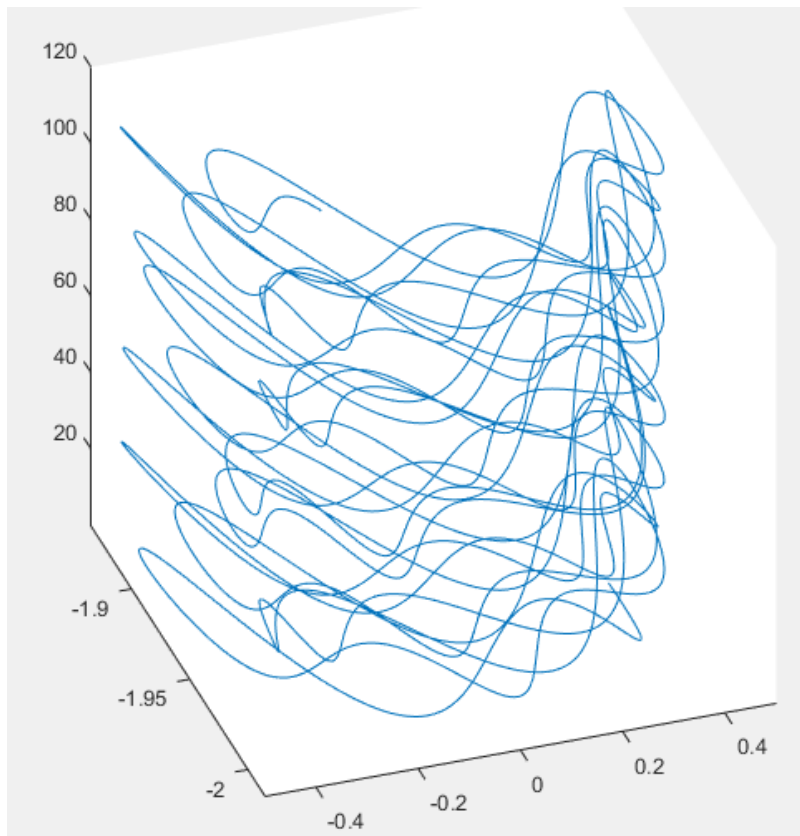


Figura 22 - Gráfico de  $(x_2(t), y_2(t), t)$

Item b)  $\theta_1(0) = 20^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 20^\circ$

Energia

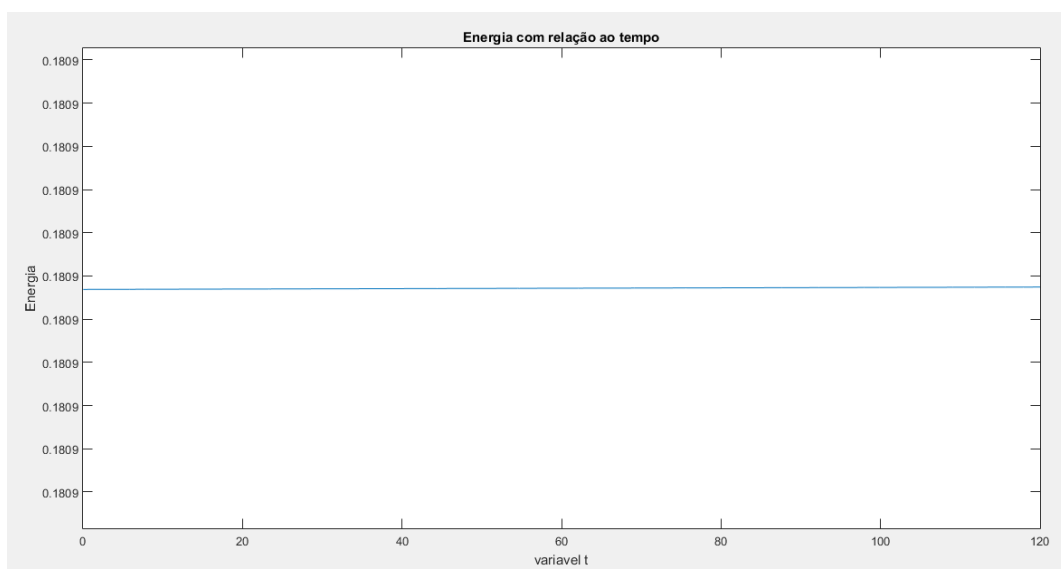


Figura 23 - Gráficos de a energia total do sistema simulado ao longo do tempo.

$\theta_1 \times t$



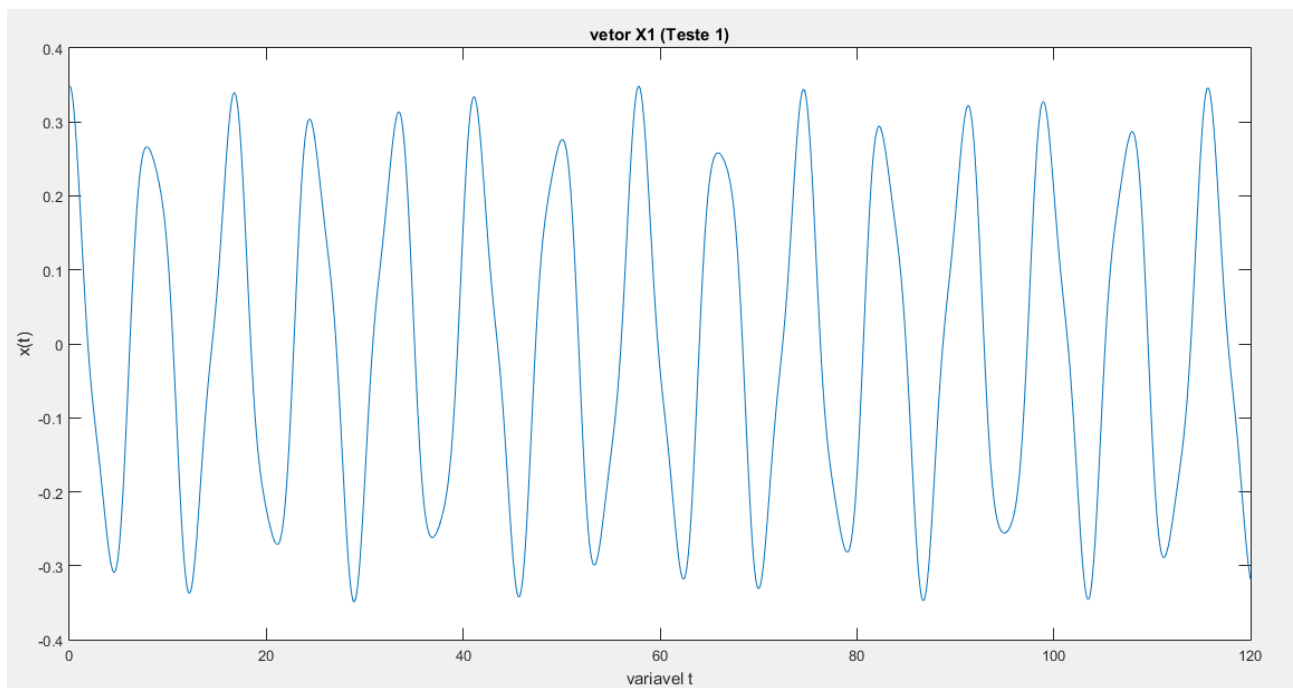


Figura 24 - Gráfico de  $\theta_1$  ao longo do tempo

$$\theta_2 \times t$$

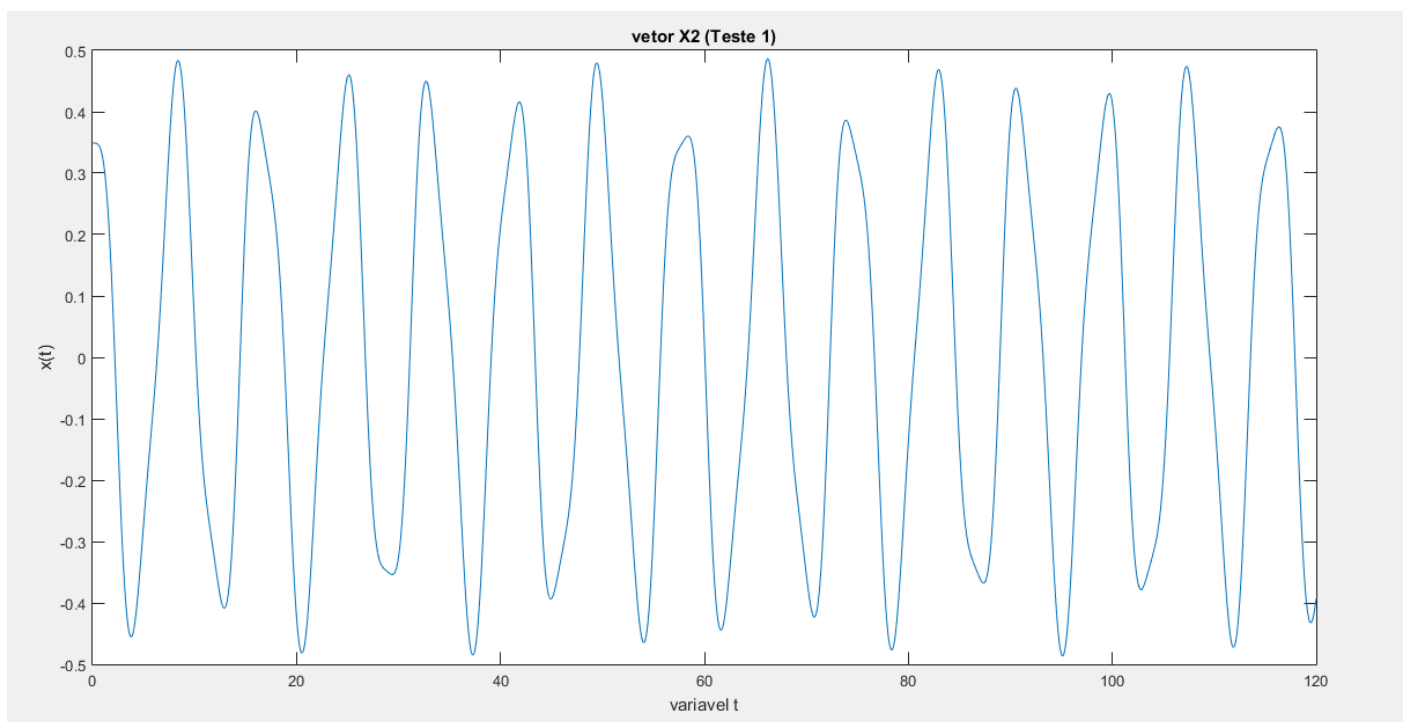


Figura 25 - Gráfico de  $\theta_2$  ao longo do tempo

$$\omega_1 \times t$$

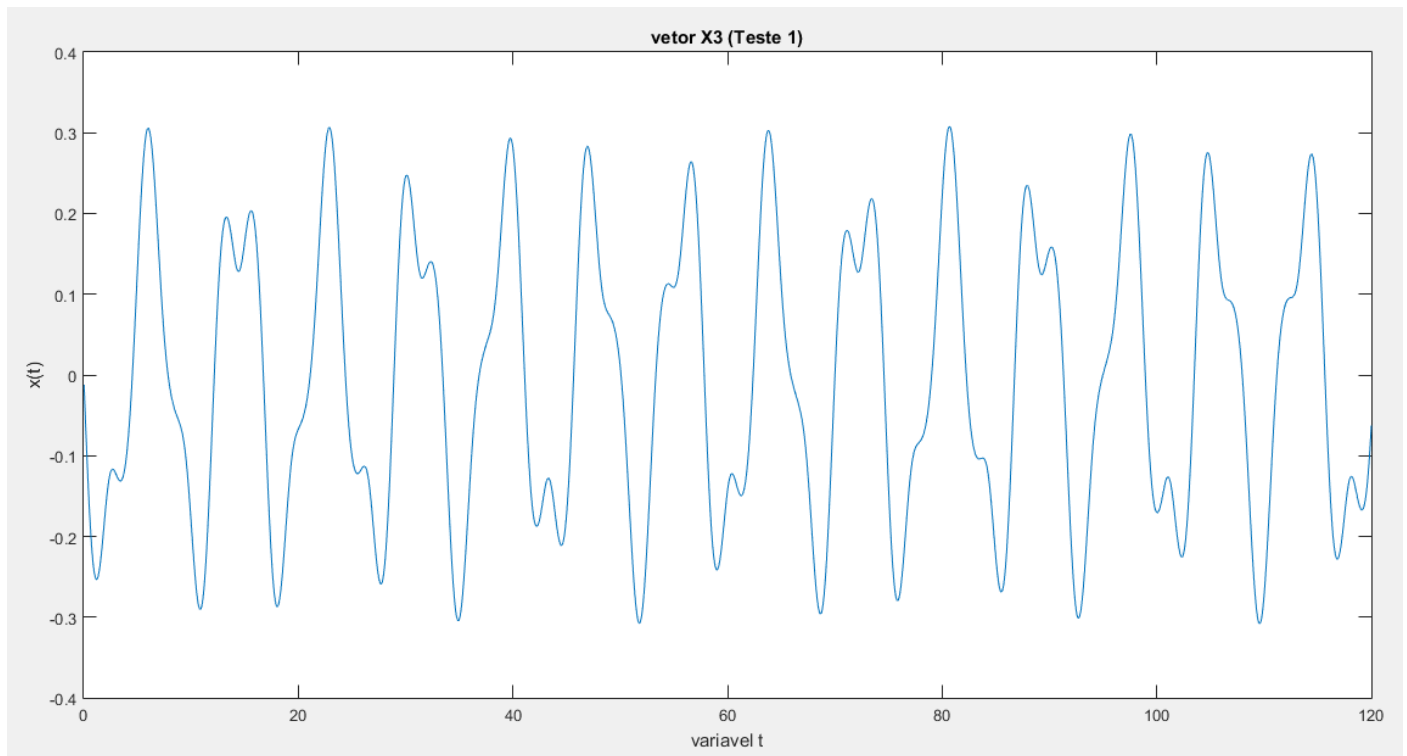


Figura 26 - Gráfico de  $\omega_1$  ao longo do tempo

$$\omega_2 x t$$

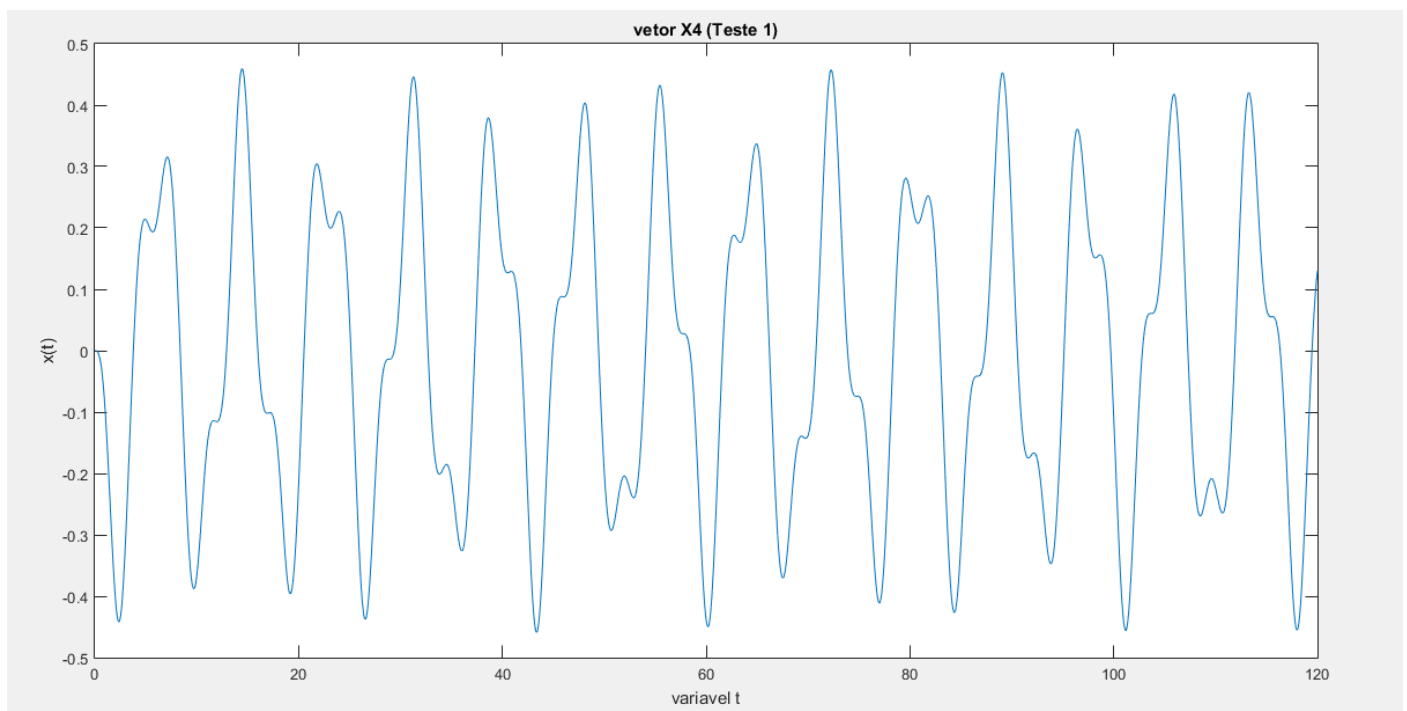


Figura 26 - Gráfico de  $\omega_2$  ao longo do tempo

Além destas visualizações, também obtivemos o gráfico que apresenta as curvas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  no plano XY.

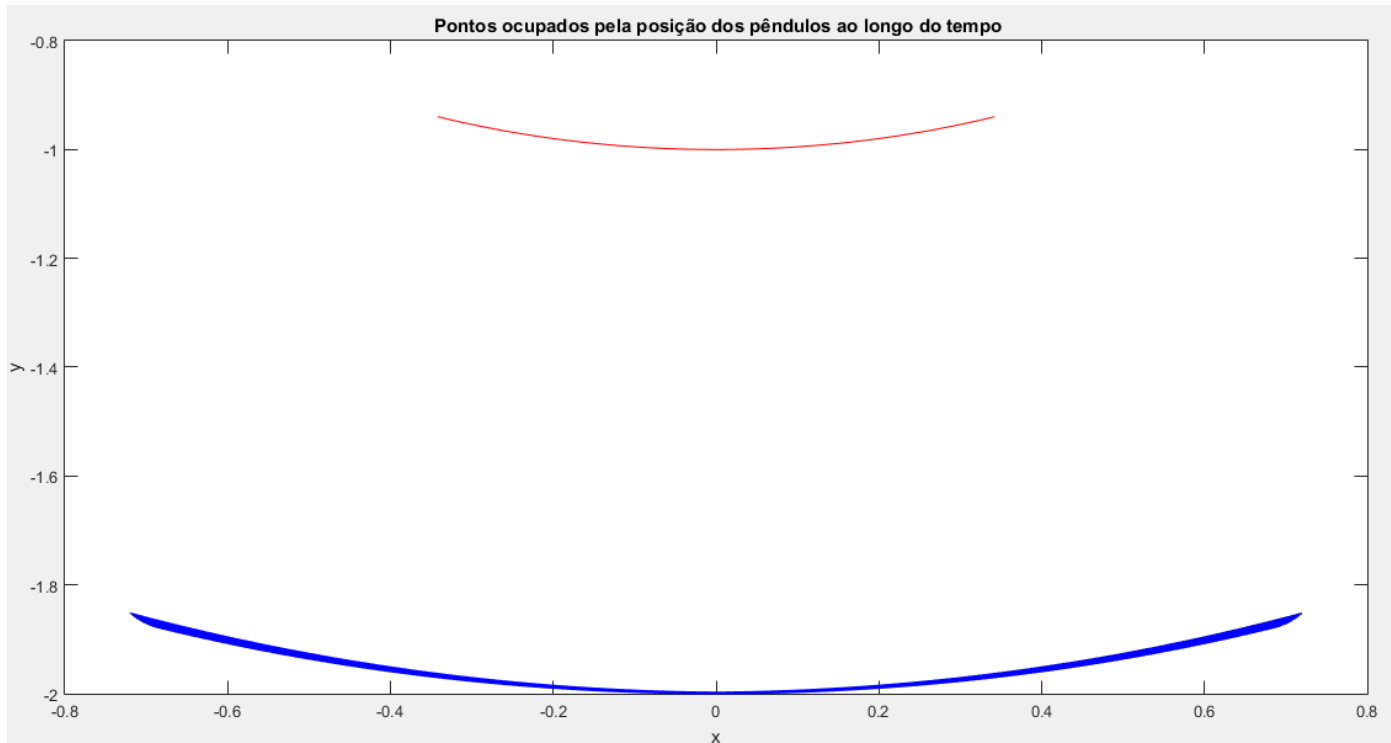


Figura 27 - Gráfico das curvas  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$

É interessante também observar a movimentação dos pêndulos ao longo do tempo. Para tanto, plotamos as posições  $x$  e  $y$  em um plano e o  $t$  correspondente em um terceiro eixo.

Na imagem a seguir, temos as posições correspondentes a  $(x_1(t), y_1(t))$ .

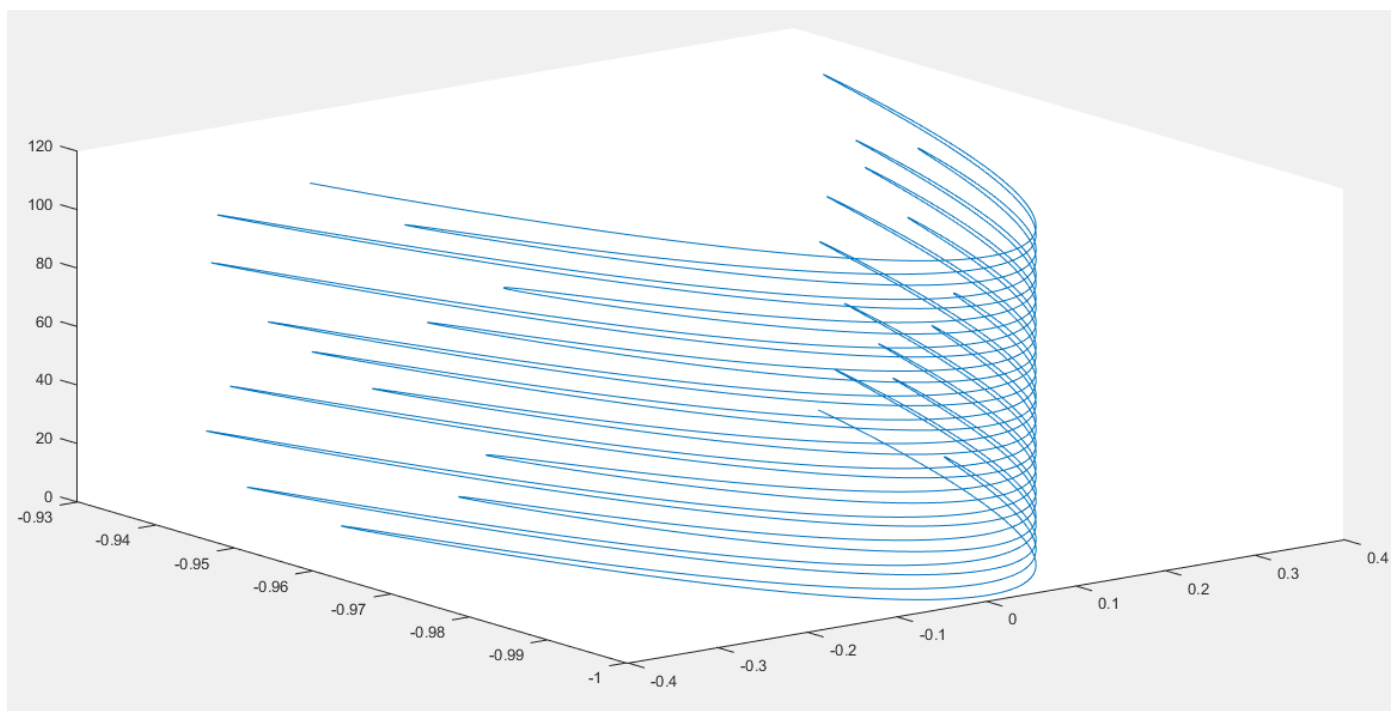


Figura 28 - Gráfico de  $(x_1(t), y_1(t), t)$

Na imagem a seguir, temos as posições correspondentes a  $(x_2(t), y_2(t))$ :

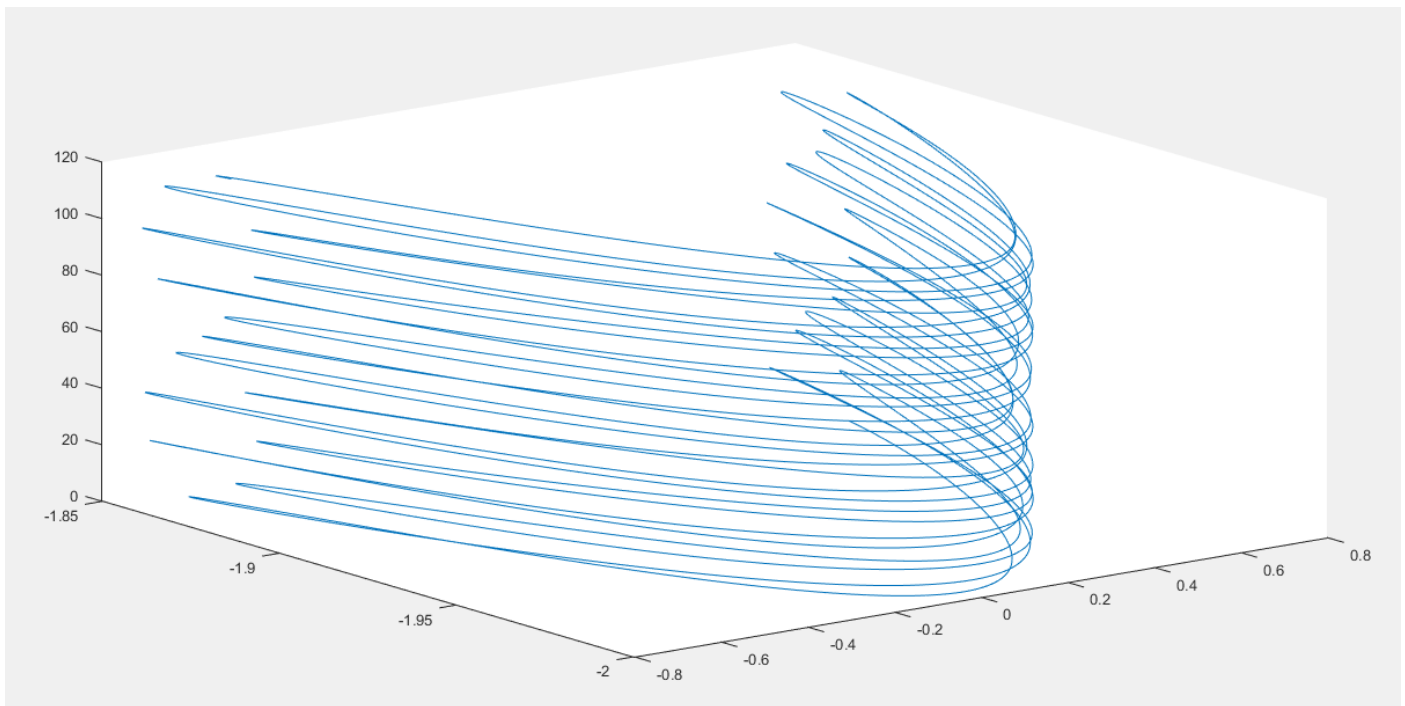


Figura 29 - Gráfico de  $(x_2(t), y_2(t), t)$

Item b. 1)  $\theta_1(0) = 20.5^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 20.5^\circ$

É interessante observar o efeito de uma pequena mudança no estado inicial e como pode mudar o circuito dos pêndulos. Entretanto, observamos que nestes sistemas de baixa energia, é mais difícil a visualizações de diferenças nos percursos pois os pêndulos são menos agitados. Veja que o gráfico de  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$  não é muito diferente do anterior.

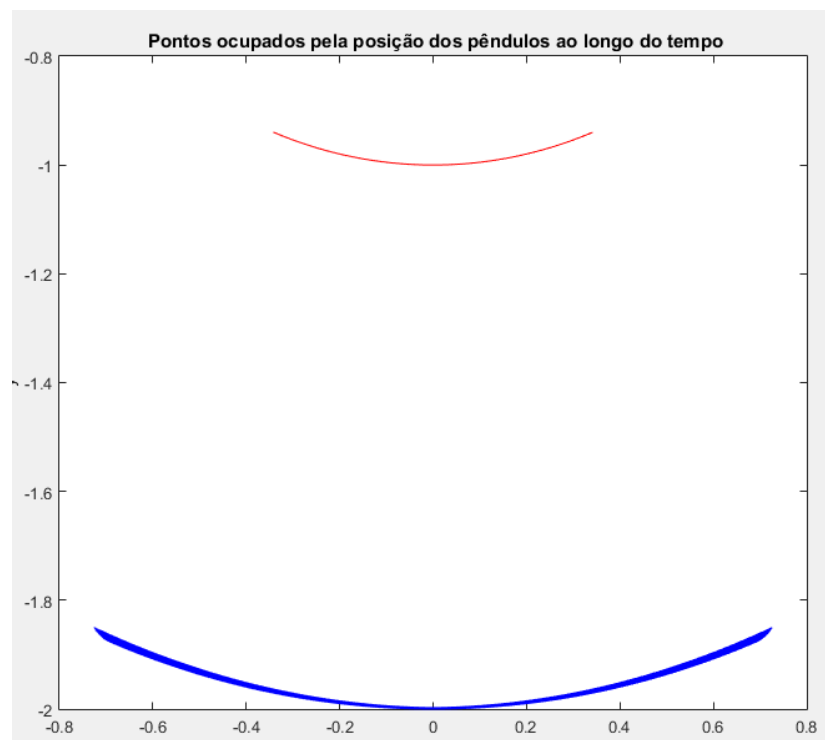


Figura 30 - Gráfico das curvas  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$

Item c)  $\theta_1(0) = 130^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 130^\circ$

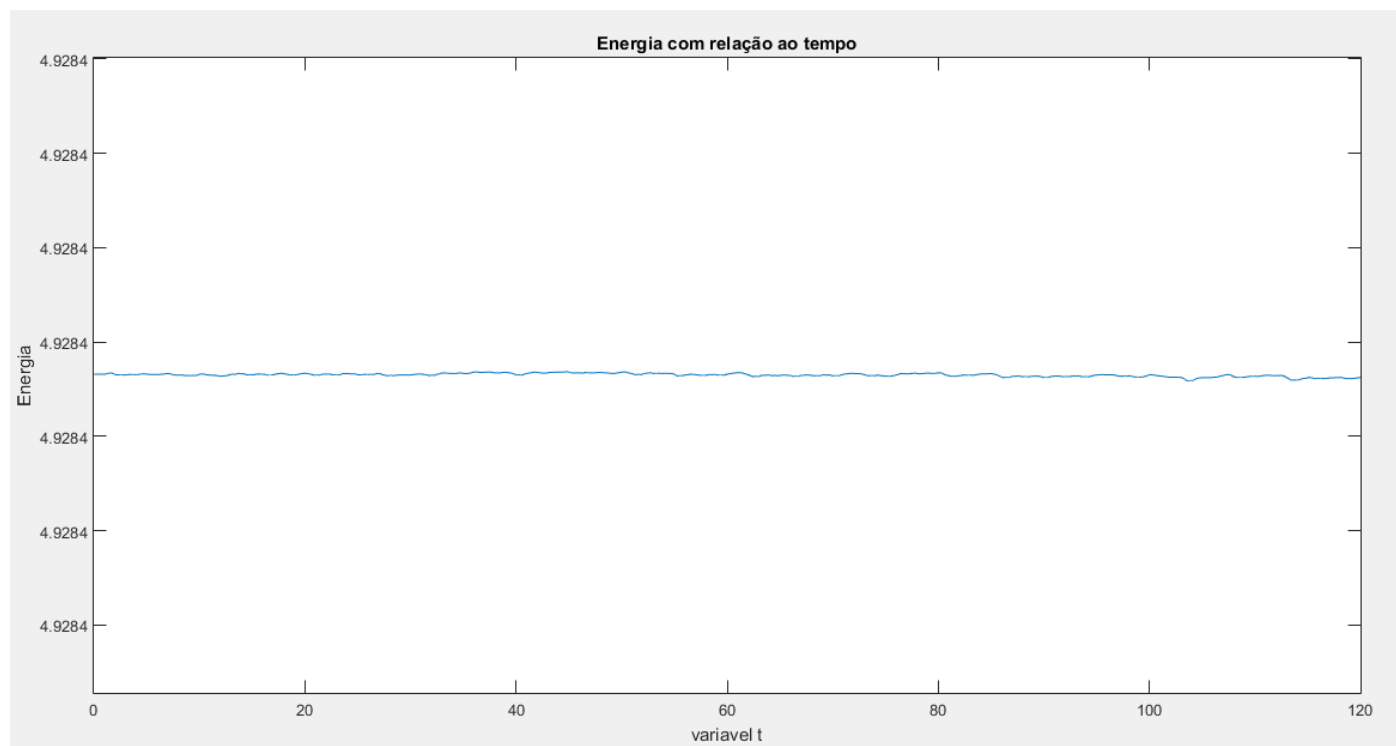


Figura 30 - Gráficos de a energia total do sistema simulado ao longo do tempo.

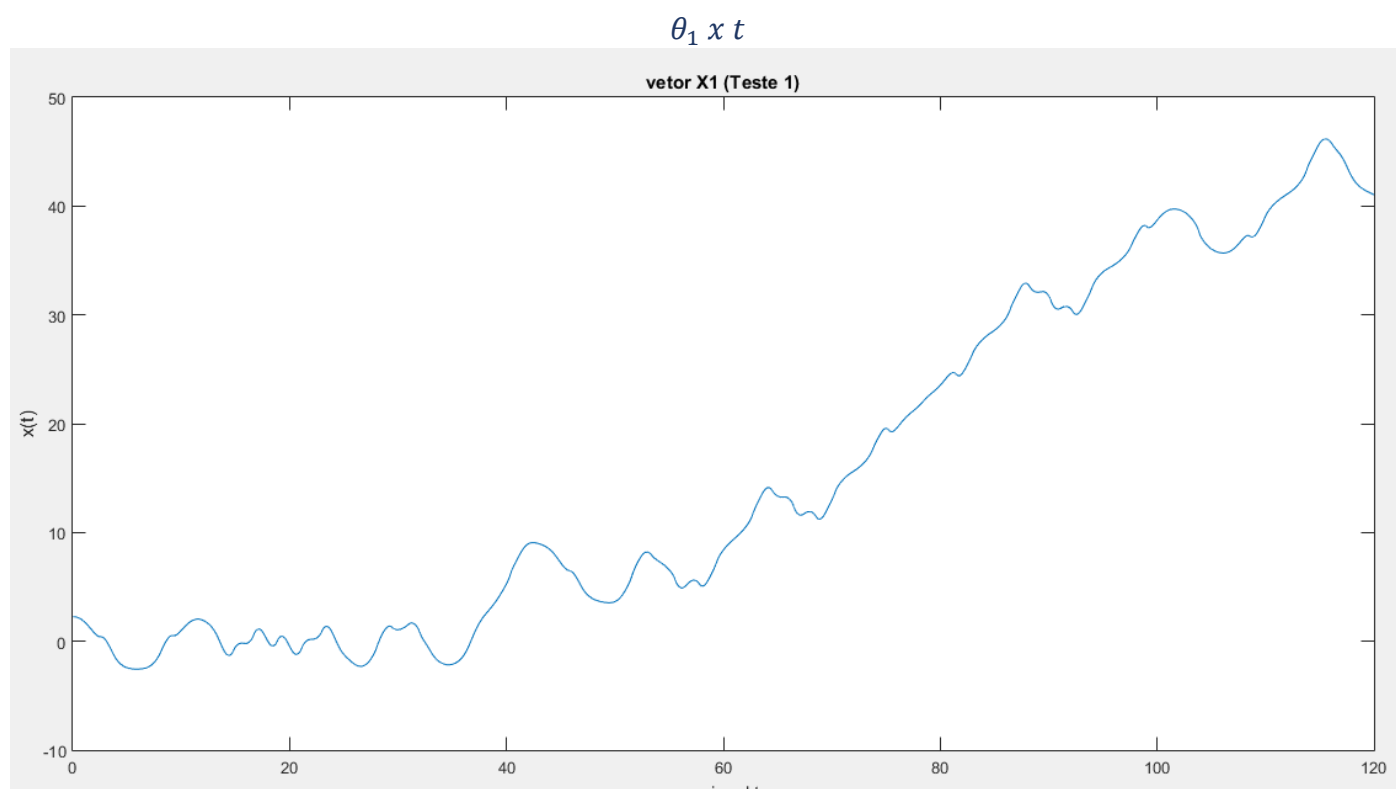


Figura 31 - Gráfico de  $\theta_1$  ao longo do tempo

$$\theta_2 \times t$$

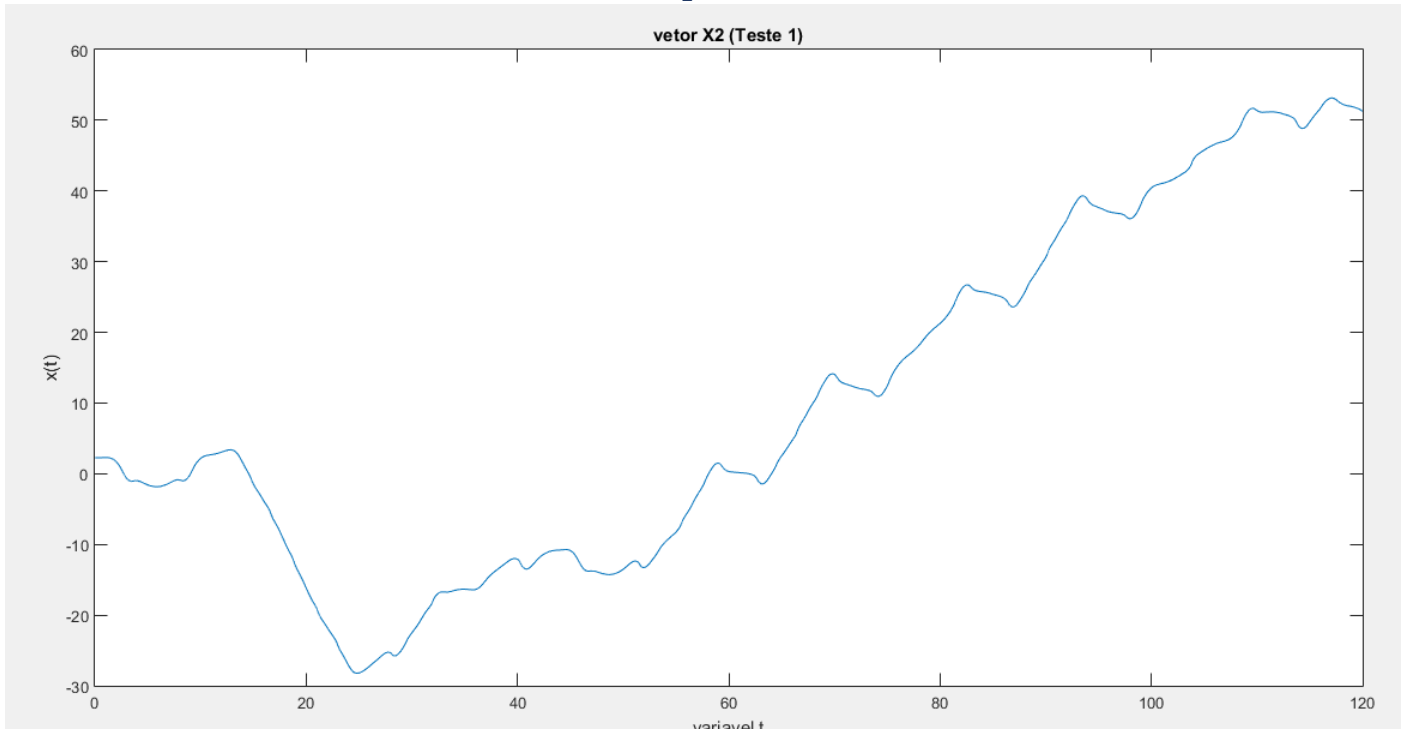


Figura 32 - Gráfico de  $\theta_2$  ao longo do tempo

$$\omega_1 \times t$$

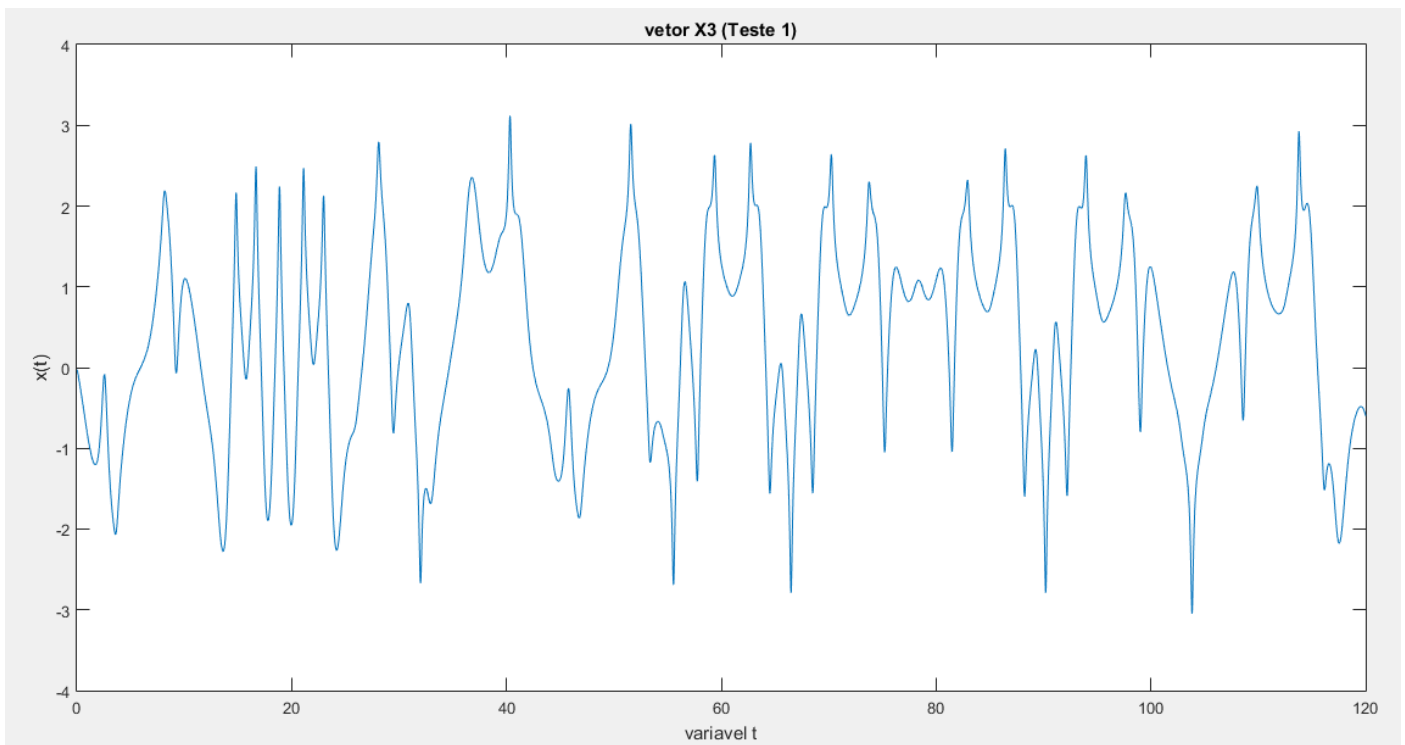


Figura 33 - Gráfico de  $\omega_1$  ao longo do tempo

$$\omega_2 \times t$$

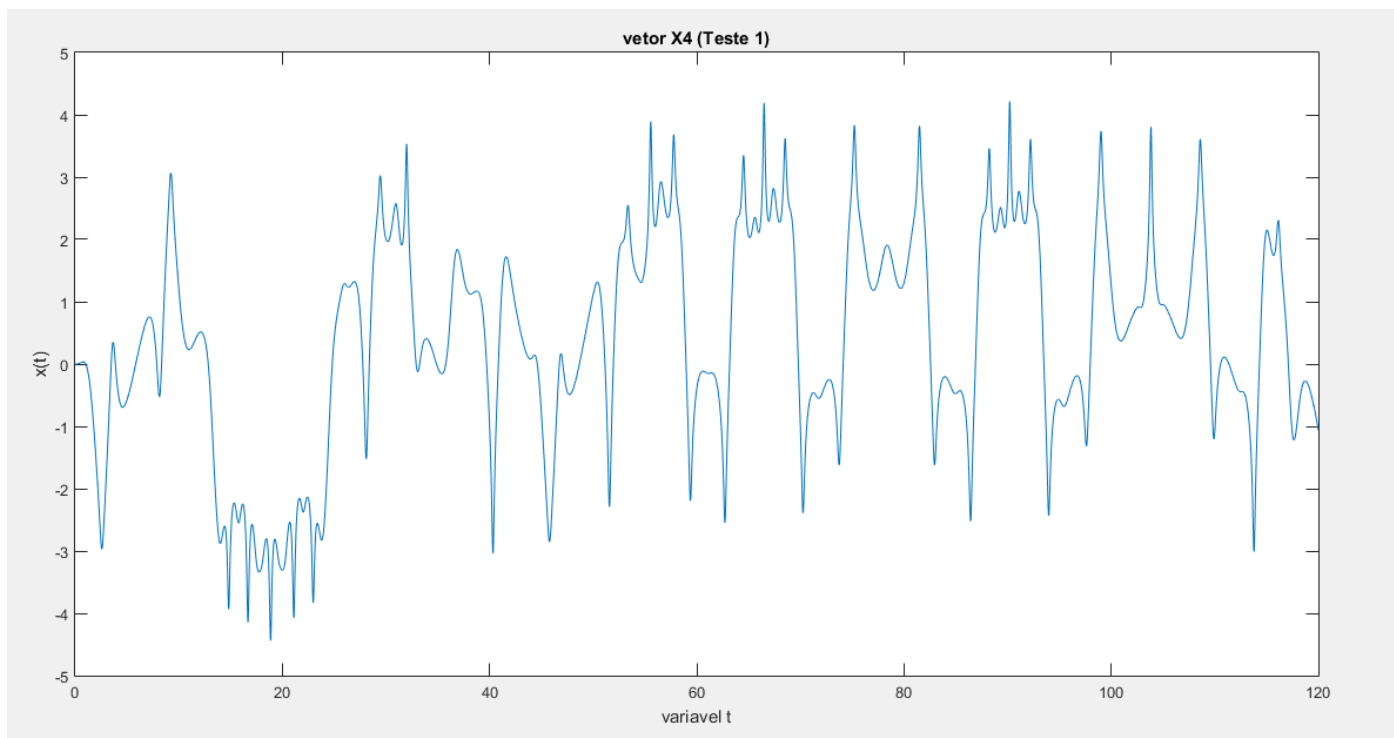


Figura 34 - Gráfico de  $\omega_2$  ao longo do tempo

A solução para a posição de  $(x_1(t), y_1(t))$  – *traçado vermelho* – e  $(x_2(t), y_2(t))$  – *traçado azul*

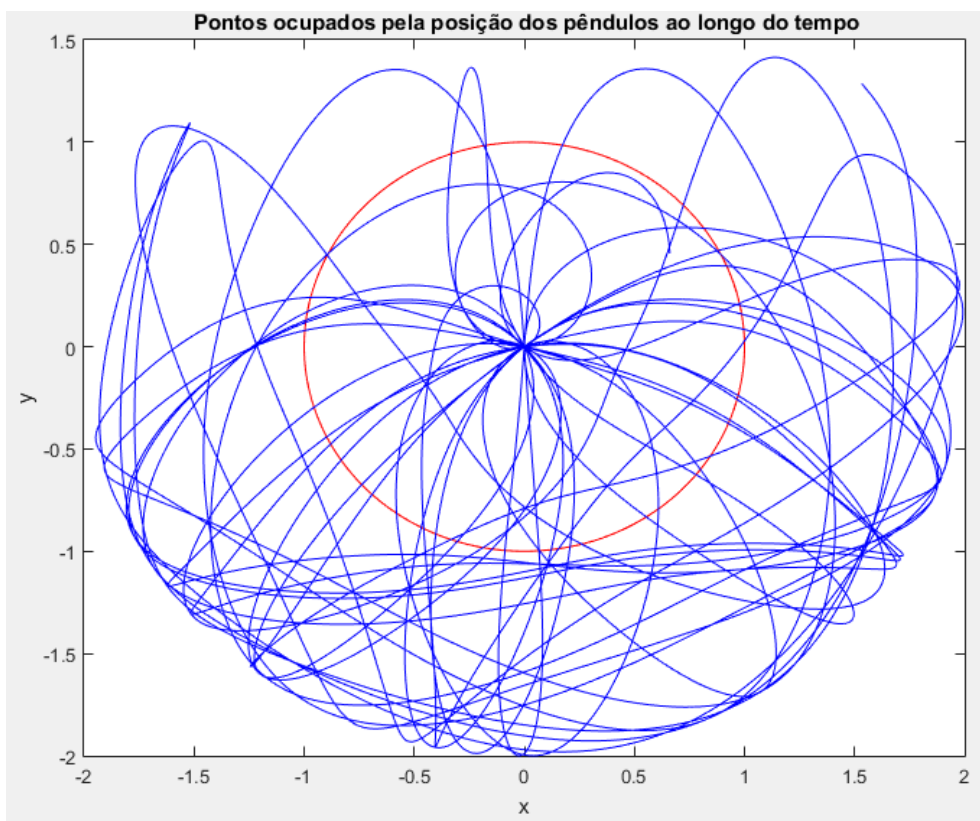


Figura 34 - Gráfico das curvas  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$

Note que como seria de se esperar, uma posição inicial  $(\theta_1(0) = 130^\circ, \theta_2(0) = 130^\circ)$  com maior energia total resultaria em uma movimentação maior dos pêndulos. Inclusive, neste caso, é possível observar que houve rotação completa do pêndulo 1.

É interessante também observar a movimentação dos pêndulos ao longo do tempo. Para tanto, plotamos a posições  $x$  e  $y$  em um plano e o  $t$  correspondente em um terceiro eixo.

Na imagem a seguir, temos as posições correspondentes a  $(x_1(t), y_1(t))$

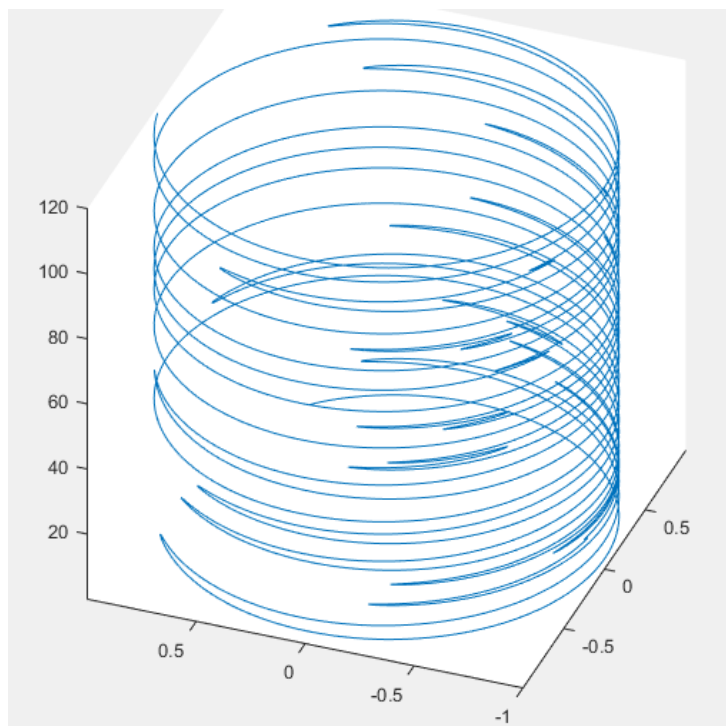


Figura 35 - Gráfico de  $(x_1(t), y_1(t), t)$

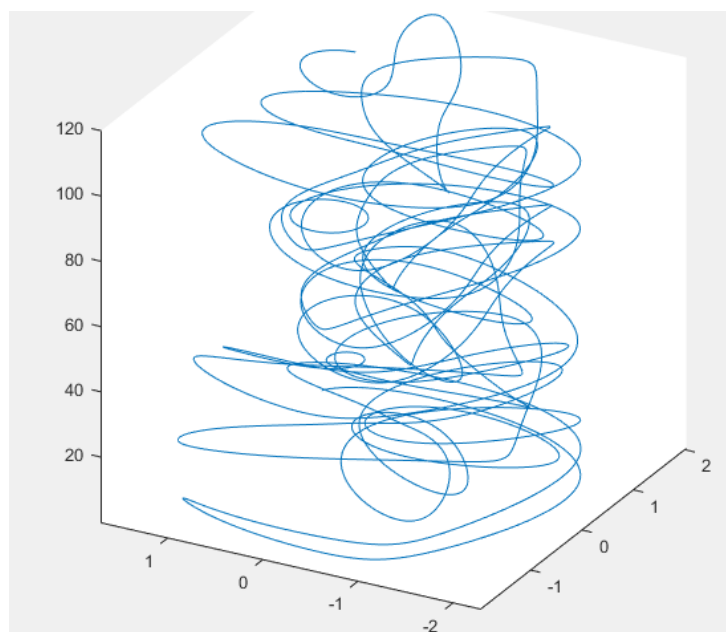


Figura 36 - Gráfico de  $(x_2(t), y_2(t), t)$

Item c.1)  $\theta_1(0) = 130.5^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 130.5^\circ$



Podemos observar que uma pequena mudança no estado inicial, pode mudar drasticamente o circuito dos pêndulos em sistemas com condições iniciais ais energéticas. Para tanto, podemos observar o gráfico de  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$ .

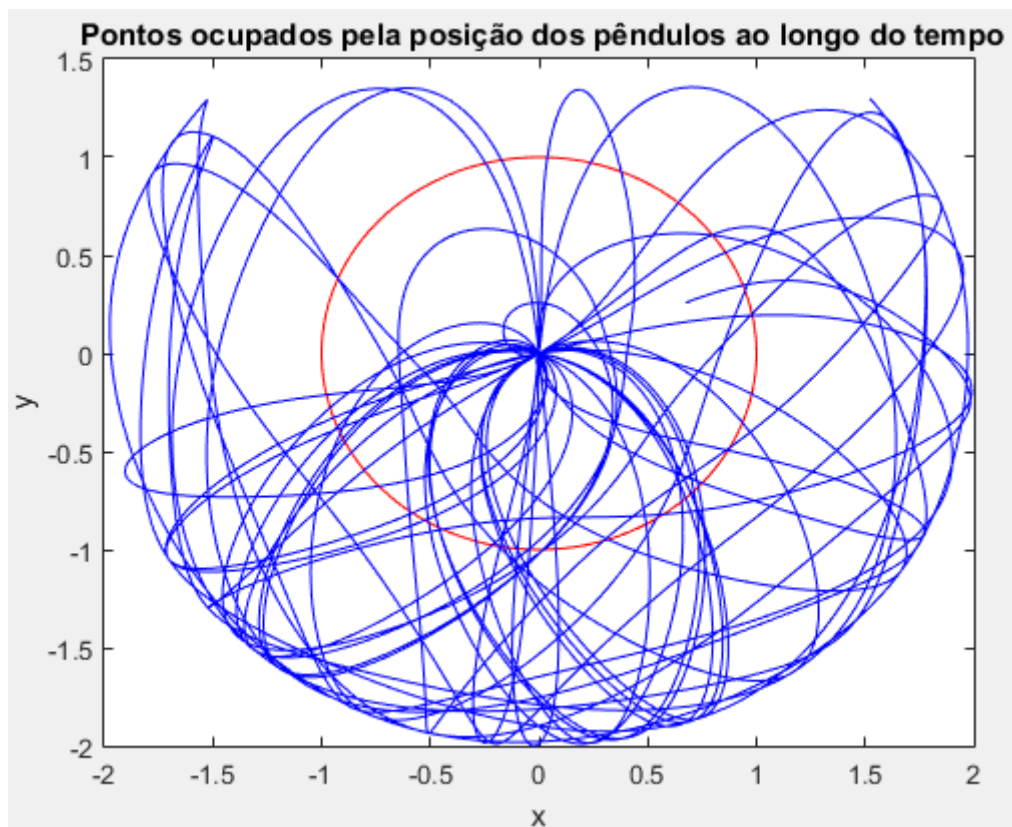


Figura 37 - Gráfico das curvas  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$  para ângulo inicial ligeiramente modificado

teste sugerido:  $\theta_1(0) = 180^\circ$ ,  $\theta_2(0) = 180^\circ$

Este teste é interessante pois deveria resultar em um sistema que não se mexesse. Entretanto, devido ao acúmulo de erros numéricos e ao sistema acaba saindo deste ponto de equilíbrio instável.

### Energia

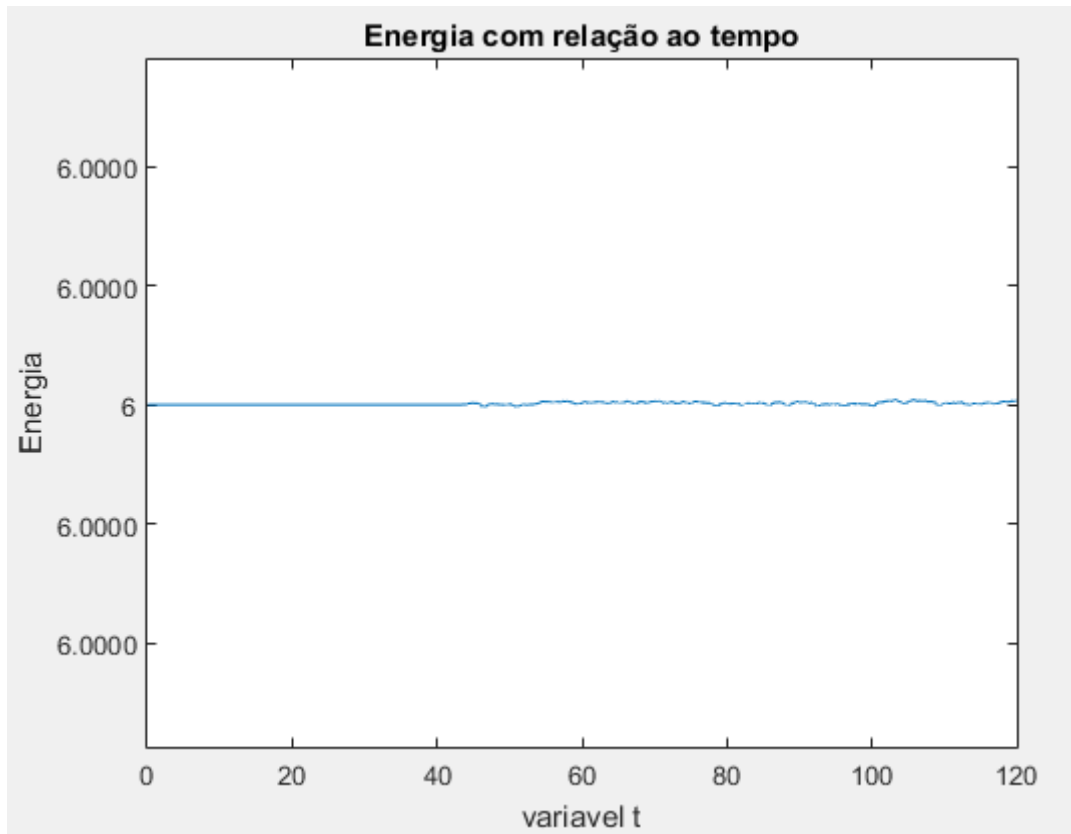


Figura 38 - Gráficos de a energia total do sistema simulado ao longo do tempo.

### $\theta_1 \times t$

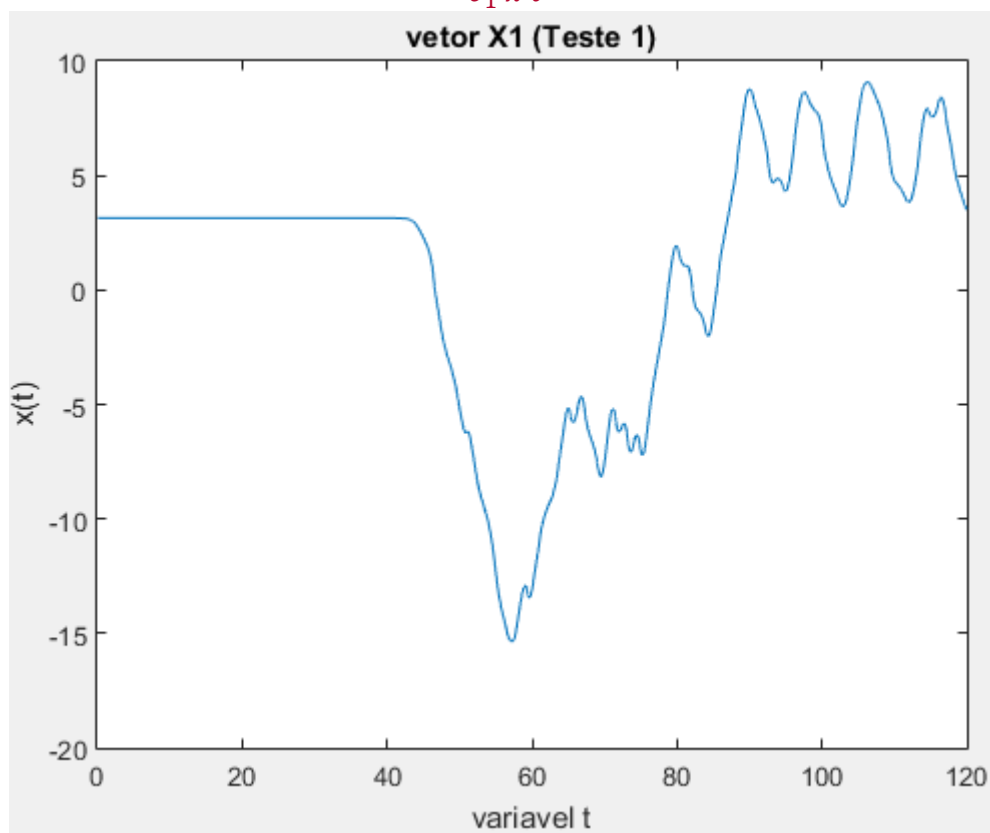


Figura 39 - Gráfico de  $\theta_1$  ao longo do tempo

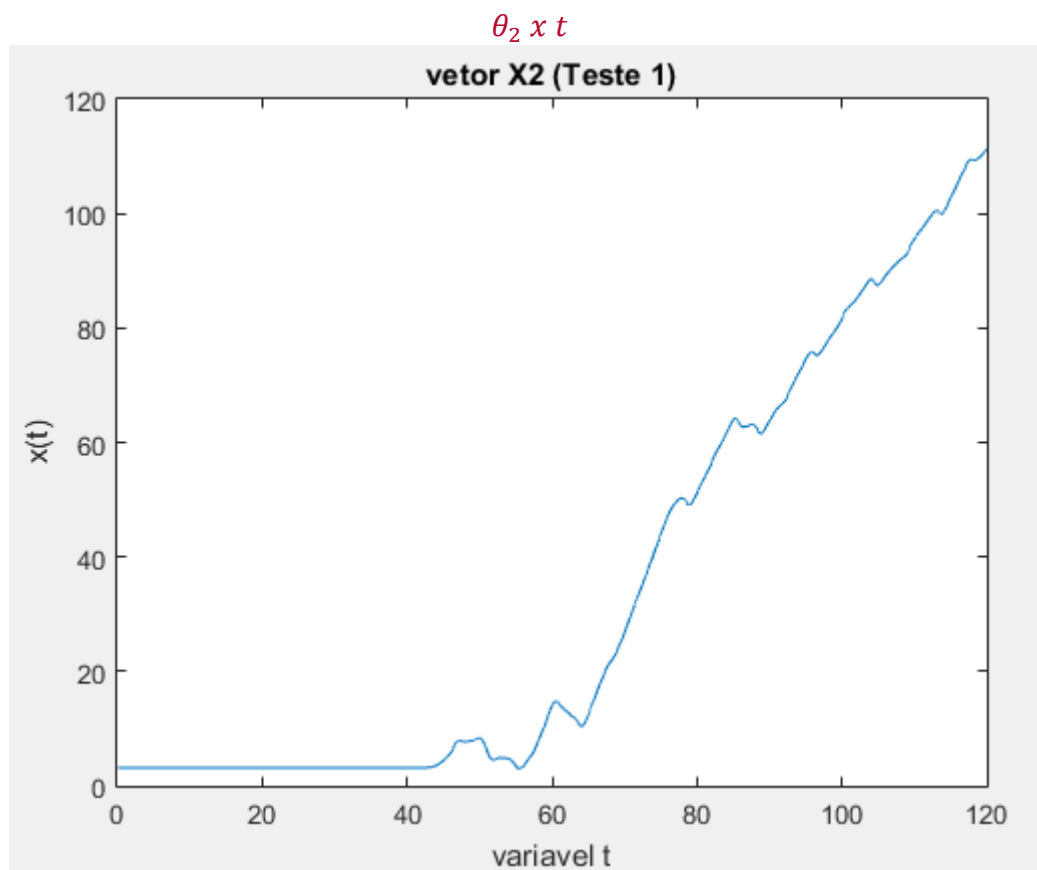


Figura 40 - Gráfico de  $\theta_2$  ao longo do tempo

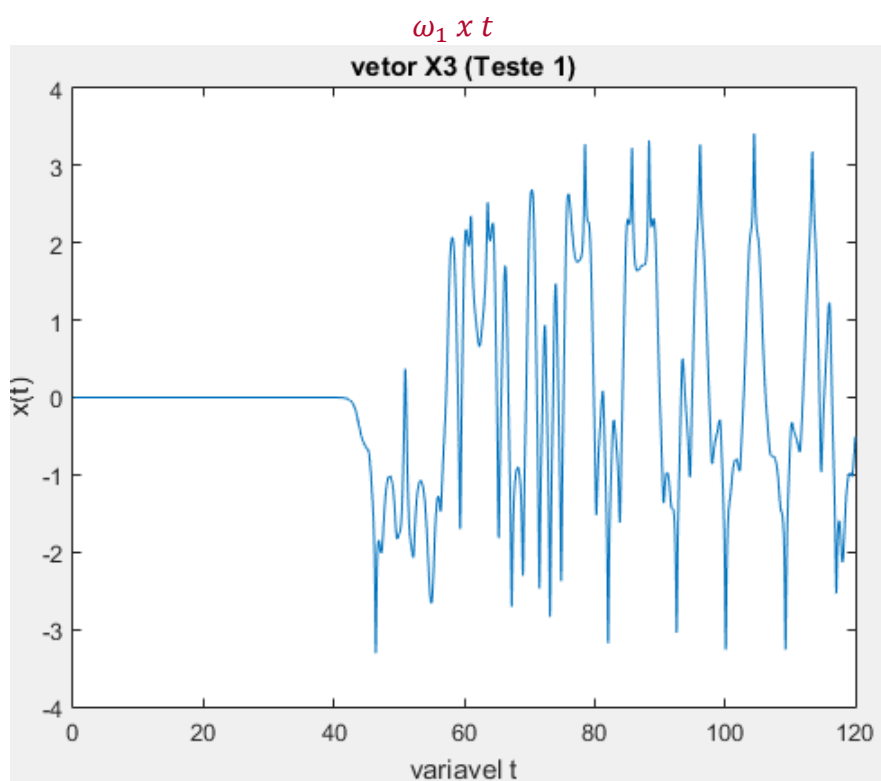


Figura 41 - Gráfico de  $\omega_1$  ao longo do tempo

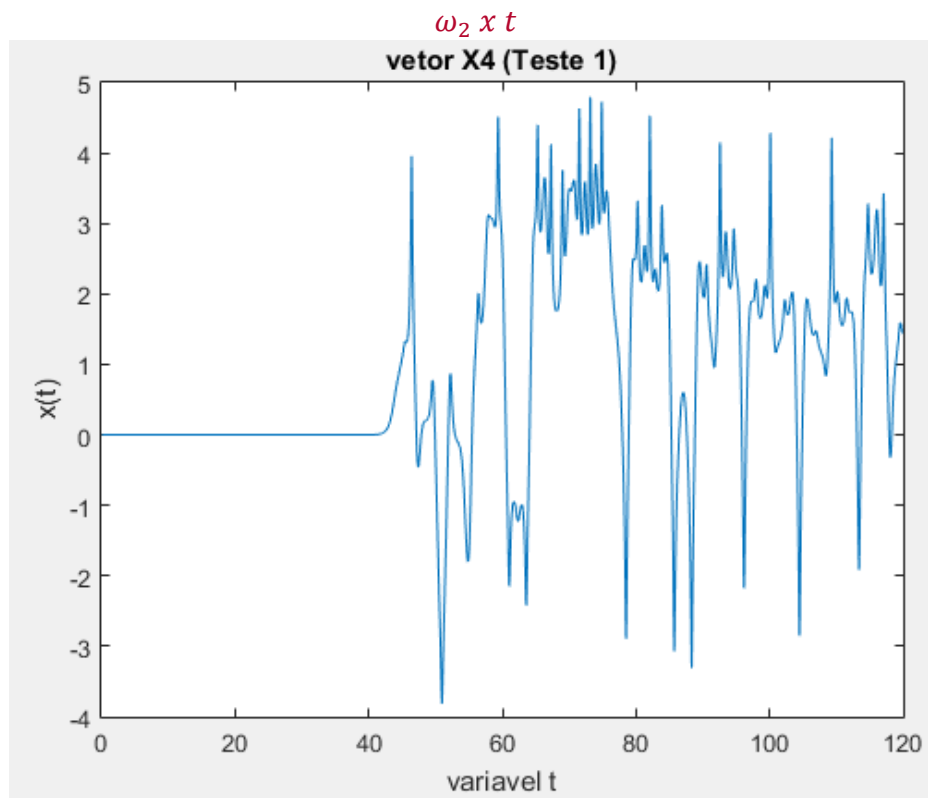


Figura 42 - Gráfico de  $\omega_2$  ao longo do tempo

A solução para a posição de  $(x_1(t), y_1(t))$  – traçado vermelho – e  $(x_2(t), y_2(t))$  – traçado azul

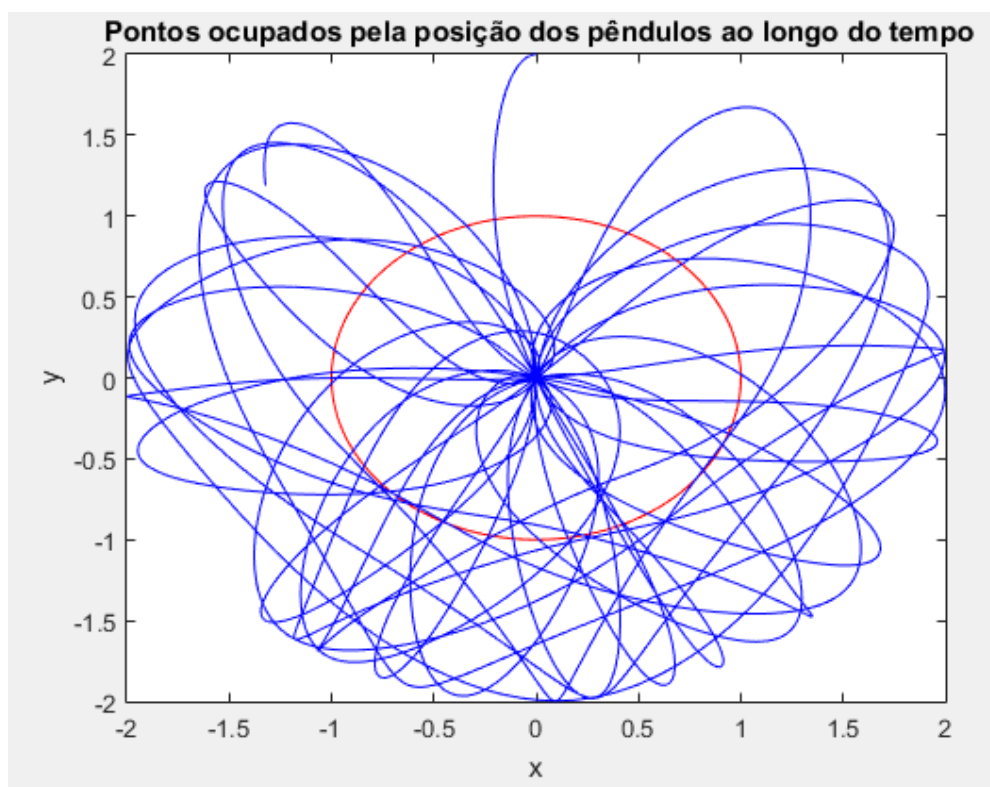


Figura 43 - Gráfico das curvas  $(x_1(t), y_1(t))$  e  $(x_2(t), y_2(t))$

Note nos gráficos a seguir que tanto ponto  $(x_1, y_1)$  ficam parados até um dado momento até que o acúmulo de erros numéricos eventualmente tira eles deste equilíbrio instável.

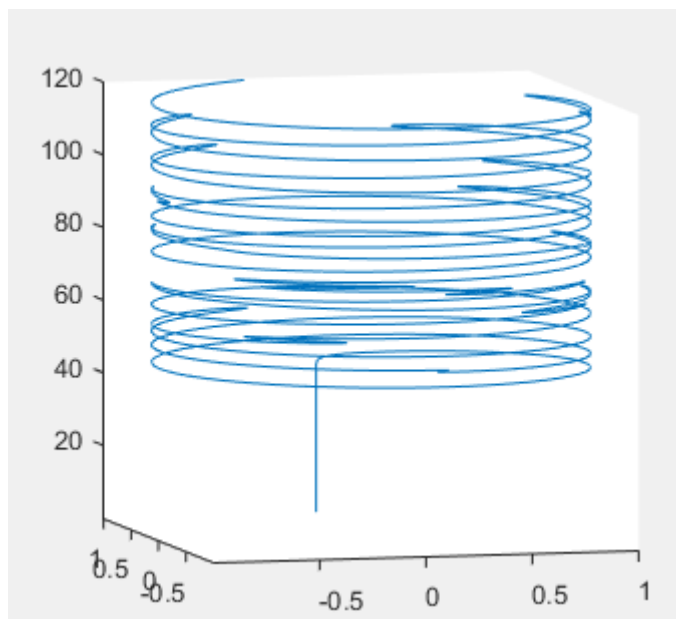


Figura 44 - Gráfico de  $(x_1(t), y_1(t), t)$

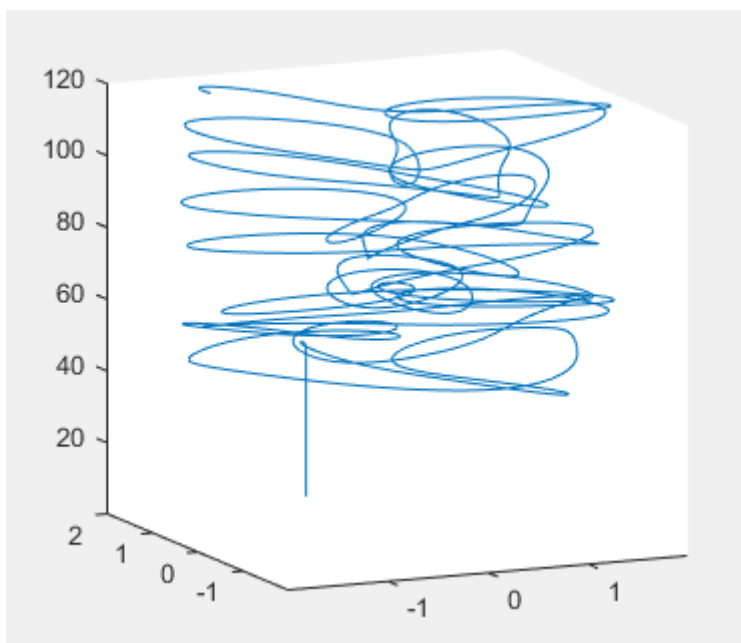


Figura 45 - Gráfico de  $(x_2(t), y_2(t), t)$

## Apendice 1 – Código MATLAB para análise do teste 1

```
val = csvread('valores.txt');
t = csvread('ts.txt');
t = t';
for i = 1:size(val)
    f(i) = t(i) + 1/(1 - t(i));
end
figure(1)
stem(t,val); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('vetor X (Teste 1)')
hold on
plot(t,f);
hold off
```

## Apêndice 2 – Código MATLAB para análise do teste 2

```
val = csvread('valores.txt');
t = csvread('ts.txt');
t = t';

for i = 1:size(val)
    f(i) = exp(-t(i))*sin(t(i))+exp(-3*t(i))*cos(3*t(i));
end
for i = 1:size(val)
    f2(i) = exp(-t(i))*cos(t(i))+exp(-3*t(i))*sin(3*t(i));
end
for i = 1:size(val)
    f3(i) = -exp(-t(i))*sin(t(i))+exp(-3*t(i))*cos(3*t(i));
end
for i = 1:size(val)
    f4(i) = -exp(-t(i))*cos(t(i))+exp(-3*t(i))*sin(3*t(i));
end

figure(1)
stem(t,val(:,1)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 1 do vetor X (Teste 2)');
hold on
plot(t,f);
hold off

figure(2)
stem(t,val(:,2)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 2 do vetor X (Teste 2)');
hold on
plot(t,f2);
hold off

figure(3)
stem(t,val(:,3)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 3 do vetor X (Teste 2)');
hold on
plot(t,f3);
hold off

figure(4)
stem(t,val(:,4)); xlabel('t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 4 do vetor X (Teste 2)');
hold on
plot(t,f4);
hold off
```

## Apêndice 3 - Código MATLAB para análise do teste 3

```
val = csvread('valores.txt');
t = csvread('ts.txt');
t = t';
m = size(val,2);
lamb1 = (2*( 1-cos(pi/(m+1))));
lamb2 = (2*( 1-cos((m*pi/((m+1))))));
for i = 1:size(val)
    for j = 1:m
        yj = j/(m+1).
        f(i,j) = exp(-lamb1*t(i))*sin(pi*(yj))+exp(-lamb2*t(i))*sin(m*pi*(yj));
    end
end
figure(1)
stem(t,val(:,1)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 1 do vetor X (Teste 3)')
hold on
plot(t,f(:,1));
hold off
figure(2)
stem(t,val(:,2)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 2 do vetor X (Teste 3)')
hold on
plot(t,f(:,2));
hold off
figure(3)
stem(t,val(:,3)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 3 do vetor X (Teste 3)')
hold on
plot(t,f(:,3));
hold off
figure(4)
stem(t,val(:,4)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 4 do vetor X (Teste 3)')
hold on
plot(t,f(:,4));
hold off
figure(5)
stem(t,val(:,5)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 5 do vetor X (Teste 3)')
hold on
plot(t,f(:,5));
hold off
figure(6)
stem(t,val(:,6)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 6 do vetor X (Teste 3)')
hold on
plot(t,f(:,6));
hold off
figure(7)
stem(t,val(:,7)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('Elemento 7 do vetor X (Teste 3)')
hold on
plot(t,f(:,7));
hold off
```



## Apêndice 4 - Código MATLAB para análise da Tarefa

```
val = csvread('valores.txt');
t = csvread('ts.txt');
E = csvread('energia.txt');
t = t';
figure(1)
plot(t, val(:,1)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('vetor X1 (Teste 1)')
figure(2)
plot(t, val(:,2)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('vetor X2 (Teste 1)')
figure(3)
plot(t, val(:,3)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('vetor X3 (Teste 1)')
figure(4)
plot(t, val(:,4)); xlabel('variavel t'); ylabel('x(t)'); title('vetor X4 (Teste 1)')

ym = abs((E(1) - E(size(E,1))))*100
m = mean(E)
figure(5)
plot(t,E); xlabel('variavel t'); ylabel('Energia'); title('Energia com relação ao tempo')
xlim([0 120])
ylim([(m-ym) (m+ym)])

pto = csvread('pontos.txt');
figure(6)
plot(pto(:,1),pto(:,2),'r'); xlabel('x'); ylabel('y'); title('Pontos ocupados pela posição dos pêndulos ao longo do tempo');
hold on
plot(pto(:,3),pto(:,4),'b');
hold off

figure(7)
plot3(pto(:,1),pto(:,2),t)
figure(8)
plot3(pto(:,3),pto(:,4),t)
```