

Modelagem de um sistema de resfriamento de chips

Projeto - MAP3121



Nome:

NUSP

André Angelo Taveira

8586749

Fernando Tramarin Trovões

7991642

1) Introdução

Deseja-se modelar a difusão térmica que ocorre em um processador ou chip de computador ao usarmos um resfriador (“cooler” ou placa fria) colado na parte superior do bloco do chip. Esta modelagem será feita utilizando Equações Diferenciais e sua resolução será obtida a partir do Método de Elementos Finitos. A partir de valores reais de parâmetros, foram realizados testes para analisar a influência de cada um deles no resfriamento, além da análise do efeito de calcular a temperatura com diferentes pontos de discretização e da constatação da ordem de convergência do método ser $O(h^2)$.

2) Hipóteses

Neste item, serão especificadas as hipóteses adotadas para modelar o resfriamento do chip. Para um primeiro contato com o problema, será considerado o caso unidimensional, analisando-se apenas a seção transversal do chip para cada x , de 0 a L , conforme a figura 1. Esse chip possui tamanho $L \times L$.

Para isso, a espessura do chip (h) é suficientemente fina para que a variação de temperatura na vertical seja desprezível. Ademais, também será assumido que a troca de calor no topo do chip com o resfriador é perfeita e que não há troca de calor na parte inferior do chip com o ambiente (a base é termicamente isolada). Logo, a análise leva em consideração apenas a difusão no eixo x .

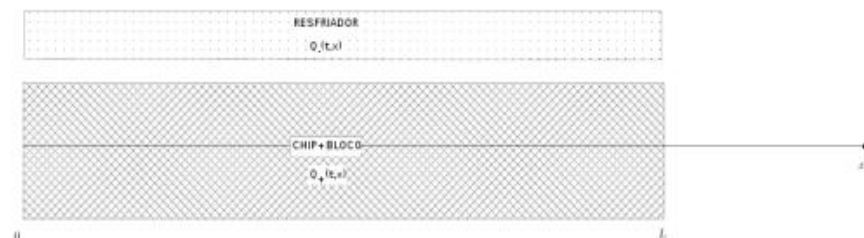


Figura 1 - esquema do conjunto chip + resfriador analisado

A distribuição do calor no interior do conjunto chip + bloco pode ser modelada pela equação do calor, obtida a partir da lei de Fourier e da propriedade de conservação de energia. Será analisado, entretanto, o caso estacionário, ou seja, será admitido que o processador trabalhe em regime constante, supondo que gere sempre a mesma quantidade de calor e que o resfriador sempre consiga extrair a mesma quantidade de calor. Assim, a variação da temperatura no tempo, após o transiente, é zero, isto é, $\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = 0$ e o problema se reduz à resolução da seguinte equação diferencial:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right) = Q(x) \quad (1)$$

Onde:

- $T(x)$ é a temperatura do chip na posição x para qualquer instante de tempo após o transiente, medida em Kelvin.
- $k(x)$ é o parâmetro de condutividade térmica do material, medido em Watt/metro*Kelvin. Observe que pode depender da posição x . No projeto, essa dependência se dá da seguinte forma: o chip é constituído de um material e possui um envoltório de outro. Contudo, há testes em que o chip é constituído de um único material.
- $Q(x)$ é uma fonte de calor. É a soma do calor gerado pelo chip ($Q_+(x)$) com o calor retirado do sistema pelo resfriador ($Q_-(x)$), tal que $Q(x) = Q_+(x) - Q_-(x)$. O calor gerado pelo chip (Q_+) pode ser obtido em função de sua potência (P), tal que $Q_+ = P/V$, onde V é o volume do chip.

Se a quantidade de calor gerada e retirada do sistema for conhecida, assim como a temperatura nos extremos ($x = 0$ e $x = L$), podem-se obter soluções de equilíbrio resolvendo numericamente esta equação. Adotaremos como modelo simplificado que a temperatura nos extremos será exatamente a temperatura do ambiente externo. Neste trabalho vamos fazer uso do método de elementos finitos.

3) Equilíbrio com forçantes de calor

Foi feito um programa em python 3.5.1 para implementar o Método dos Elementos Finitos para resolver (1) e analisar o comportamento da difusão térmica no conjunto chip + resfriador. Aqui, será considerado que o chip seja formado apenas por um material, no caso silício ($k_s = 148 \text{ W/(mK)}$) e os testes serão feitos para diferentes $Q_+(x)$ e $Q_-(x)$. Considerou-se em todos os testes um chip com dimensão $L = 20 \text{ mm}$ e $h = 2 \text{ mm}$ e temperatura ambiente de 293K .

Para o primeiro teste utilizou-se tanto Q_+ quanto Q_- constantes. $Q_+ = 3,75 \cdot 10^8$, pois admitiu-se $P = 60\text{W}$ e o volume do chip foi calculado como $V = L^2h$. $Q_- = 3,125$, pois a potência da ventoinha de resfriamento foi considerada de 5W e calculou-se Q_- do mesmo modo que Q_+ . Obteve-se o seguinte gráfico da temperatura no chip em função da posição x .

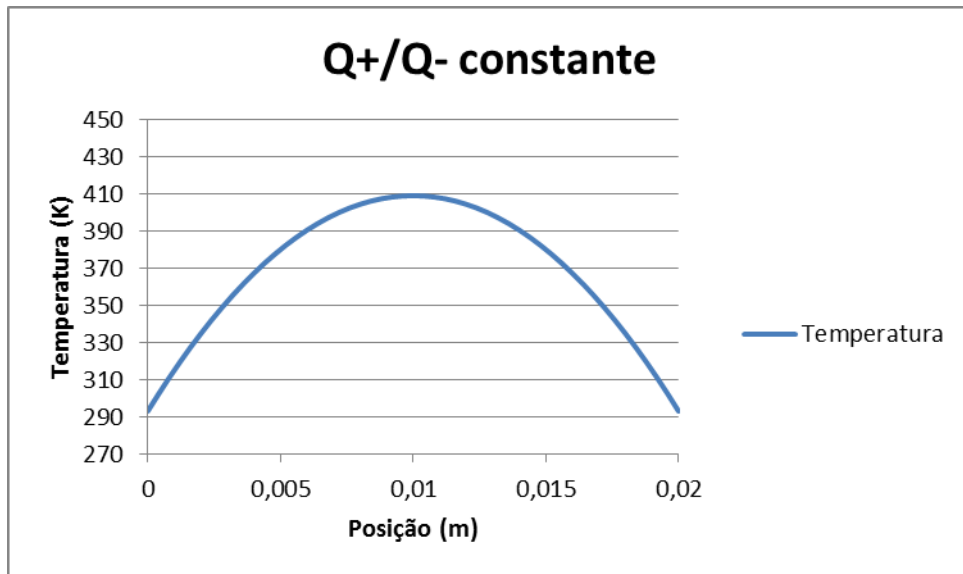


Figura 2- Gráfico da temperatura no chip em função da posição para Q_+ e Q_- constantes

É fácil perceber que essa solução está correta, pois no caso em que tanto k quanto Q não dependem de x , a equação (1) tem solução na forma de uma parábola. E se aplicarmos as condições de contorno, concluímos que é uma parábola da forma:

$$T(x) = \frac{-Q}{2k}x^2 + \frac{Q}{2k}Lx + T_{amb}$$

o que justifica a concavidade para baixo.

No próximo teste utilizou-se uma gaussiana da forma:

$$Q_+(x) = Q_+^0 e^{-\frac{(x-\frac{L}{2})^2}{\sigma^2}}$$

para modelar o aquecimento do chip, onde $Q_+^0 = Q_+$ do exemplo anterior e $\sigma = 0,001$. Obteve-se o seguinte gráfico:

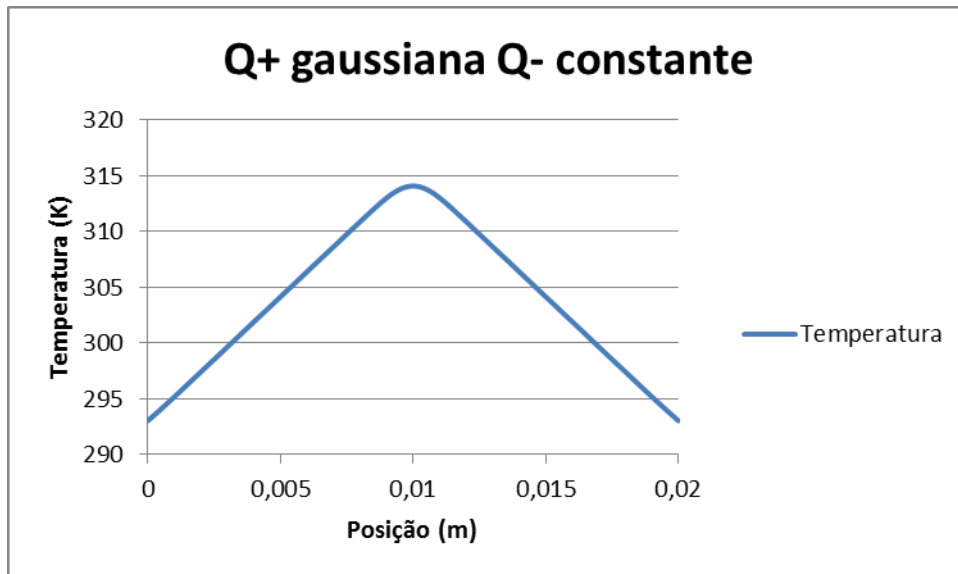


Figura 3- Gráfico da temperatura no chip em função da posição para Q+ gaussiano e Q- constante

Um último teste foi realizado tanto para o aquecimento quanto para o resfriamento com forma gaussiana. O aquecimento foi idêntico ao do exemplo anterior, porém o resfriamento foi da forma:

$$Q_{-}(x) = Q_{-}^0 \left(e^{-\frac{(x)^2}{\theta^2}} + e^{-\frac{(x-L)^2}{\theta^2}} \right)$$

onde $Q_{-}^0 = Q_{-}$ do primeiro exemplo e $\theta = 0,001$. Obteve-se o seguinte gráfico:

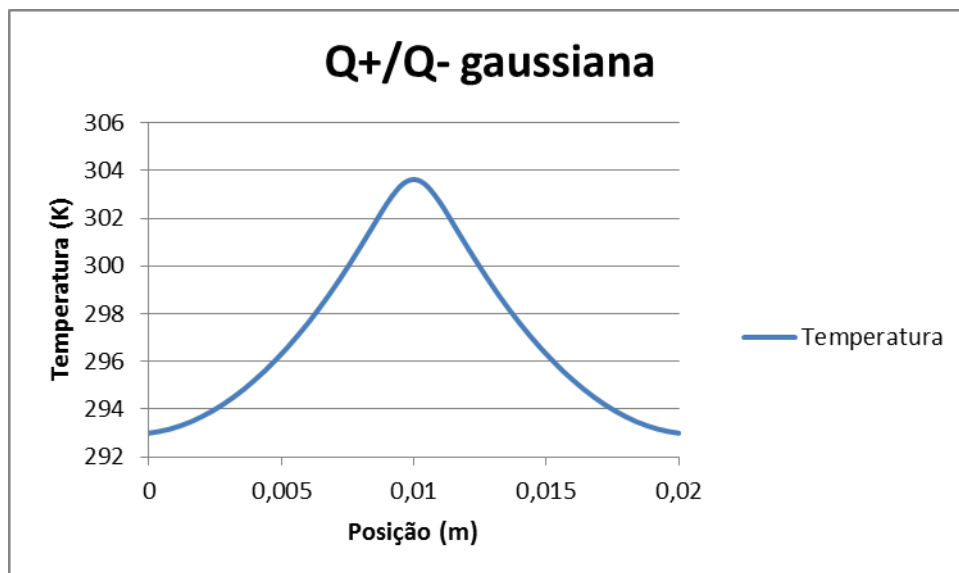


Figura 4- Gráfico da temperatura no chip em função da posição para Q+ e Q- gaussianos

4) Equilíbrio com variação de material

Agora, será admitido que no bloco do processador tenhamos o chip, formado de silício, envolto por outro material, no caso alumínio ($K_{Al} = 234 \text{ W/(mK)}$). Isso faz com que k dependa de x da seguinte maneira:

$$k(x) = \begin{cases} K_s, & \text{se } x \in (L/2 - d, L/2 + d), \\ K_{Al}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $d = 0,05$ m. Obteve-se o seguinte gráfico quando utilizamos o aquecimento e o resfriamento do segundo teste do item anterior:

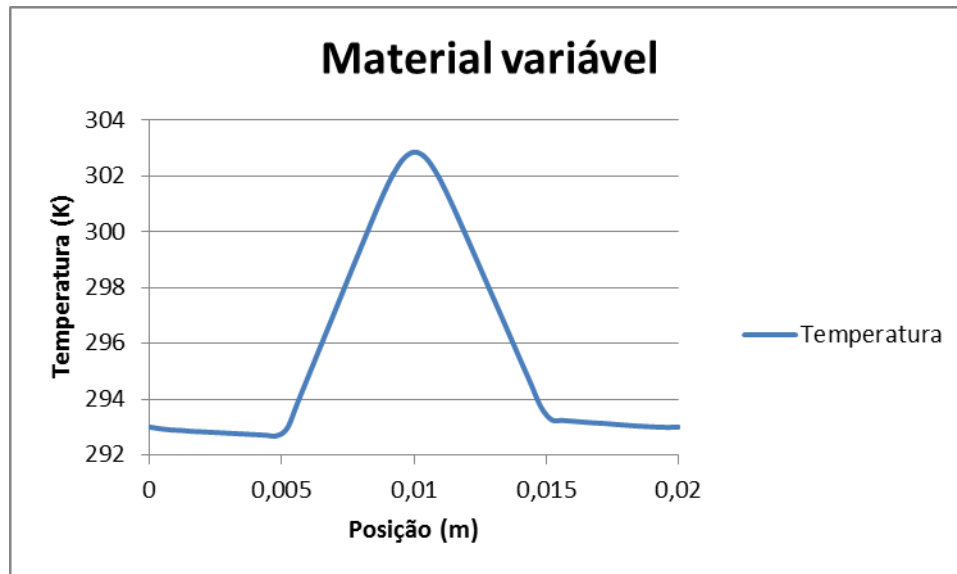


Figura 4- Gráfico da temperatura no chip em função da posição para material variável

5) Teste de convergência

Teste a ordem de convergência do método com o exemplo onde $k(x) = 1$, $Q(x) = 12x(1-x)-2$.

Neste caso a solução exata é a função $u(x) = x^2(x-1)^2$.

Calculou-se a aproximação $u_n(x)$.

A tabela é auto-explicativa.

N	h^2	$\ u - u_n\ _{\max}$	$h^2 / \ u - u_n\ _{\max}$
7	0,015625	0,002566	6,089340
15	0,003906	0,000793	4,927262
31	0,000977	0,000221	4,414822
63	0,000244	0,000058	4,196973
127	0,000061	0,000015	4,096062
255	0,000015	0,000004	4,047446

6) Conclusão

Como esperado, foi possível verificar que o teste com Gaussianas em Q0+ e Q0- com K variável é o que melhor distribui as temperaturas pelo corpo do chip. É interessante ver que devido à alta condutividade do alumínio e ao esfriamento estar concentrado nas regiões das pontas do chip, a temperatura fica muito próxima a temperatura ambiente. Também, foi possível observar que o erro máximo é da ordem de h^2 .