

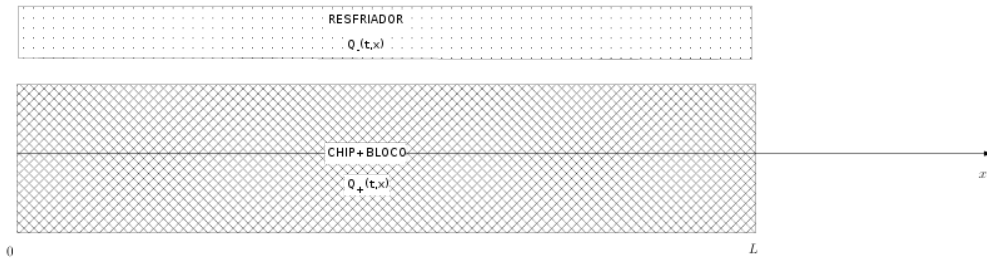
Modelagem de um sistema de resfriamento de chips

Projeto - MAP3121

Entrega: 12/06

1 Equação do calor

Queremos modelar o comportamento da difusão térmica que ocorre em um processador ou chip de computador de tamanho $L \times L$ e altura h ao usarmos um resfriador (“cooler” ou placa fria) colado na parte superior do bloco do chip (conforme figura 1). Vamos considerar o caso unidimensional analisando apenas a seção transversal do chip para cada x , de 0 a L . Assumiremos que a espessura do chip (h) é suficientemente fina para que a variação de temperatura na vertical seja desprezível. Assumiremos também que a troca de calor no topo do chip com o resfriador é perfeita e que não há troca de calor na parte inferior do chip com o ambiente (a base é termicamente isolada), portanto a análise a ser feita leva em conta apenas as variações de temperatura na direção x .



A distribuição de calor no interior do conjunto chip+bloco pode ser modelada pela equação do calor, obtida a partir da lei de Fourier e da propriedade de conservação de energia, sendo matematicamente escrita neste caso unidimensional como

$$\rho C \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} \right) + Q(t, x), \quad (1)$$

onde

- $T(t, x)$ é a temperatura do chip na posição x e instante de tempo t ,
- ρ é a densidade do material do chip (exemplo: o silício tem densidade $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$),
- C é o calor específico do material (exemplo: o calor específico do silício é $C = 750 \text{ J/Kg/K}$),
- k é o parâmetro de condutividade térmica do material (exemplo: o silício tem condutividade de $k = 3,6 \text{ W/(mK)}$).
- Q é uma fonte de calor. É a soma do calor gerado pelo chip (Q_+) com o calor retirado do sistema pelo resfriador (Q_-), tal que $Q = Q_+ - Q_-$.

O calor gerado pelo chip (Q_+) pode ser obtido em função de sua potência (P), tal que $Q_+ = P/V$, onde V é o volume do chip. Por exemplo, podemos ter um chip com potência $P = 30 \text{ W}$, e dimensões $L = 20 \text{ mm}$ e $h = 2 \text{ mm}$.

Para resolvermos essa equação precisamos do estado inicial de distribuição de temperatura do chip $T(0, x)$ e também saber o que ocorre nas fronteiras $x = 0$ e $x = L$ do chip. Adotaremos como modelo simplificado que a temperatura nos extremos será exatamente a temperatura do ambiente externo (exemplo: 20°C).

2 Estado estacionário

Considerando um processador que trabalhe em regime constante, supondo que trabalhe gerando sempre a mesma quantidade de calor e que o resfriador sempre consiga extrair a mesma quantidade de calor, a distribuição de temperatura no chip tenderá a um estado de equilíbrio.

Neste caso,

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

e obtemos que

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) = Q(x), \quad (3)$$

Se a quantidade de calor gerada e retirada do sistema for conhecida, assim como a temperatura nos extremos ($x = 0$ e $x = L$), podemos obter soluções de equilíbrio resolvendo numericamente esta equação. Neste trabalho vamos fazer uso do método de elementos finitos.

3 Orientações

3.1 Observações gerais

- O objetivo desse projeto é analítico e exploratório. Você deve usar o roteiro abaixo apenas como guia, mas recomendamos tentar explorar além do sugerido e discutir as análises no relatório.
- Tente buscar valores reais de parâmetros além dos aqui fornecidos, e discuta no relatório a influência de cada parâmetro no relatório com exemplos reais ou simulados.
- O projeto pode ser feito em duplas, mas sempre com alguém da mesma área de engenharia que a sua.
- Apenas um aluno deve entregar o projeto, definido por ordem alfabética, destacando no relatório e código o nome de ambos os alunos.
- A entrega deve constar de relatório (em pdf), contendo a análise do problema estudado e resultados, e do programa fonte do código usado para as simulações computacionais (em c ou python). O relatório e o programa podem ser entregues em um arquivo compactado único.

3.2 Validação

No primeiro passo do projeto você deve implementar o método de elementos finitos (veja seção 4) para resolver a equação (3) com as condições dadas na parte de descrição de métodos numéricos do projeto. Analise o efeito de termos diferentes números de pontos de discretização, verifique a ordem de convergência e confira se o seu código está produzindo soluções coerentes (conforme a seção 4.4). Descreva essas análises no relatório.

3.3 Equilíbrio com forçantes de calor

Vamos considerar que o chip seja formado apenas de silício ($k(x) = k = 3,6W/(mK)$), considerando que há produção de calor pelo chip e que exista resfriamento. Vamos assumir que o chip esquenta mais em sua parte central que nas bordas, o que pode ser modelado por uma Gaussiana da seguinte forma,

$$Q_+(x) = Q_+^0 e^{-(x-L/2)^2/\sigma^2} \quad (4)$$

com Q_+^0 uma constante indicando o máximo de calor gerado no centro do chip e σ controlando a variação de geração de calor em torno do ponto central do chip. Se σ for muito pequeno, podemos ter um calor gerado praticamente somente no centro do chip.

Quanto ao resfriamento, podemos modelar de forma análoga, ou, por exemplo, assumir que o resfriamento se dá de forma uniforme ($Q_-(x) = Q_-^0$ constante), ou ainda que o resfriamento seja mais intenso próximo dos extremos, usando

$$Q_-(x) = Q_-^0 \left(e^{-(x)^2/\theta^2} + e^{-(x-L)^2/\theta^2} \right). \quad (5)$$

Use o seu código de elementos finitos para simular algumas situações de equilíbrio variando parâmetros do modelo conforme considere adequado à aplicação real. Comece pelo caso mais simples, com calor gerado e retirado constantes, e vá acrescentando complexidade. Relate o que observou no relatório.

3.4 Equilíbrio com variação de material

Suponha agora que no bloco do processador tenhamos o chip, formado de silício, envolto por outro material. Isso faz com que k dependa de x , por exemplo como

$$k(x) = \begin{cases} k_s, & \text{se } x \in (L/2 - d, L/2 + d), \\ k_a, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6)$$

sendo k_s a condutividade térmica do silício e k_a a do material que envolve o chip e forma o bloco.

Usando o seu código de elementos finitos você pode verificar, por exemplo, o que acontece se o material que envolve o chip for alumínio ($k_a = 60W/mK$), ou outros materiais.

3.5 EXTRA: O caso transiente

Em muitas situações pode ser mais interessante acompanhar todo o processo de resfriamento, a partir de uma distribuição de temperatura inicial, verificando por exemplo se a temperatura fica dentro de certos limites aceitáveis. Suponha, por exemplo, que a temperatura no início seja

$$T(0, x) = T_0 \sin(\pi x/L) + T_{ext}, \quad (7)$$

onde T_{ext} é a temperatura do ambiente externo (e portanto dos extremos) e T_0 define a temperatura inicial no meio do chip.

Tomando $Q = 0$, analise usando o método de elementos finitos (combinado com a discretização temporal por trapézios, conforme descrito na seção 4.6) como a temperatura evolui no tempo. Experimente também colocar Q não nulo e analise o que acontece ao longo do tempo.

A entrega deste caso não é obrigatória, mas certamente enriqueceria muito seu trabalho e o consequente aprendizado.

4 Método de Elementos Finitos

Apresentamos aqui uma breve introdução ao método de elementos finitos para solução da equação:

$$L(u(x)) := (-k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \text{ em } (0, 1), u(0) = u(1) = 0 \quad (8)$$

onde $k(x) > 0, q(x) \geq 0, k(x) \in C^1[0, 1], q(x), f(x) \in C[0, 1]$. Uma solução clássica desta equação é uma função

$$u(x) \in V_0 = \{v \in C^2[0, 1] : v(0) = v(1) = 0\}$$

satisfazendo (8). Por outro lado se $u(x) \in V_0$ é solução de (8) e $v(x) \in V_0$ temos que:

$$\int_0^1 L(u(x))v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad .$$

Integrando por partes o primeiro termo de $L(u(x))$ e usando que u e v se anulam nos extremos do intervalo, obtemos:

$$\int_0^1 k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad , \forall v \in V_0 \quad . \quad (9)$$

Por outro lado, se $u(x) \in V_0$ satisfaz (9), então $u(x)$ é solução de (8), ou seja as formulações (8) e (9) são equivalentes para $u(x) \in V_0$. Agora, ao passo que na equação (8) uma solução necessariamente tem que ser duas vezes continuamente diferenciável, a equação (9) pode ser formulada para funções mais gerais. Podemos escolher $u(x)$ e $v(x)$ no espaço U_0 das funções contínuas, continuamente diferenciáveis por partes (com derivadas limitadas) e que se anulam nos extremos de $[0, 1]$. O problema de determinar $u \in U_0$ tal que

$$\int_0^1 k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad , \forall v \in U_0 \quad (10)$$

é a chamada versão fraca da equação (8) (onde a função f também pode ser admitida como sendo contínua por partes e limitada). Vamos observar que

$$\langle u, v \rangle_L = \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) dx$$

define um produto interno no espaço U_0 . As propriedades $\langle u, v \rangle_L = \langle v, u \rangle_L$, $\langle \alpha u, v \rangle_L = \alpha \langle u, v \rangle_L$, $\langle u_1 + u_2, v \rangle_L = \langle u_1, v \rangle_L + \langle u_2, v \rangle_L$ e $\langle u, u \rangle_L \geq 0$ são de verificação imediata. Para concluir que $\langle u, u \rangle_L = 0$ implica que $u = 0$ no caso em que $q(x) = 0$, observe que necessariamente $u'(x) = 0$ em $[0, 1]$ e portanto u deve ser constante. Como vale 0 nos extremos do intervalo, u é a função nula.

Vamos agora introduzir o método de Ritz-Raleigh para a aproximação da solução do problema (10) (veja também a seção 11.5 do livro texto do Burden / Faires). A aproximação será determinada por um método de mínimos quadrados em um subespaço de dimensão finita U_n de U_0 , através da projeção ortogonal da solução $u(x)$ de (10) em U_n . O problema é que desconhecemos $u(x)$ (que é quem gostaríamos de determinar ...). Como projetá-la em U_n ? Isto se torna viável ao substituirmos o produto interno usual $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x) dx$ pelo produto interno $\langle u, v \rangle_L$ oriundo do problema (10). Neste caso a projeção ortogonal \bar{u}_n de $u(x)$ (solução de (10)) em U_n é tal que $\langle u - \bar{u}_n, v_n \rangle_L = 0 \forall v_n \in U_n$, ou seja, $\langle \bar{u}_n, v_n \rangle_L = \langle u, v_n \rangle_L$. Usando o fato de que u é solução de (10) e que $U_n \subset U_0$ temos que para todo $v_n \in U_n$, $\langle u, v_n \rangle_L = \langle f, v_n \rangle$. Assim, podemos obter a projeção ortogonal de u em U_n obtendo a função \bar{u}_n tal que:

$$\langle \bar{u}_n, v_n \rangle_L = \langle f, v_n \rangle, \forall v_n \in U_n. \quad (11)$$

A função \bar{u}_n minimiza o valor de $\|u - v_n\|_L = \langle u - v_n, u - v_n \rangle_L^{1/2}$, para $v_n \in U_n$ (ou seja, \bar{u}_n é a melhor aproximação da solução u no espaço U_n , que conseguiremos determinar, mesmo desconhecendo u !). Para obter a solução de (11), precisamos de uma base $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ de U_n . Obtemos então as equações $\langle \bar{u}_n, \phi_i \rangle_L = \langle f, \phi_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Escrevendo $\bar{u}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$, chegamos ao sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle_L & \langle \phi_2, \phi_1 \rangle_L & \dots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle_L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \phi_1, \phi_n \rangle_L & \langle \phi_2, \phi_n \rangle_L & \dots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_1 \rangle \\ \dots \\ \langle f, \phi_n \rangle \end{bmatrix} \quad (12)$$

4.1 Escolha do espaço U_n e sua base: Elementos Finitos

Iremos escolher U_n como o espaço de Splines Lineares $S_{2,n}^0[0, 1]$ com nós uniformemente espaçados em $[0, 1]$. Tomando $h = 1/(n+1)$ e $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n+1$ teremos:

$$S_{2,n}^0[0, 1] = \{s(x) \in C[0, 1] : s(0) = s(1) = 0 \text{ e } s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1\},$$

ou seja, cada spline em $S_{2,n}^0[0, 1]$ é uma função contínua em $[0, 1]$, se anulando nos extremos e coincidindo com uma reta entre cada dois nós. Cada spline em $S_{2,n}^0[0, 1]$ fica unicamente determinado através de seus valores nos nós x_1, x_2, \dots, x_n . (Verifique que $S_{2,n}^0[0, 1]$ é um espaço vetorial de dimensão n .) Uma base para este espaço de Splines é dada pelas funções “chapéu” $\phi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ que valem 0 fora de $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, $\phi_i(x) = (x - x_{i-1})/h$ em $[x_{i-1}, x_i]$ e $\phi_i(x) = (x_{i+1} - x)/h$ em $[x_i, x_{i+1}]$. O intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ é chamado o suporte da função ϕ_i , fora dele a função se anula. No método de elementos finitos procura-se utilizar bases cujos elementos tenham suportes “pequenos”. Note que a intersecção entre os interiores dos suportes de ϕ_i e ϕ_j será não vazia apenas se $|i - j| \leq 1$. Decorre que, $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_L = 0$ se $|i - j| > 1$. Isto faz com que a matriz do sistema linear (12) seja tridiagonal. Além disso temos que:

$$\langle f, \phi_i \rangle = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x) dx.$$

Observe ainda que $\phi_i'(x)$ é nula fora de $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, vale $1/h$ em (x_{i-1}, x_i) e $-1/h$ em (x_i, x_{i+1}) . No caso em que $k(x) = 1$ e $q(x) = 0$ (veja (8)) a matriz do sistema (12) é tridiagonal com valores $2/h$ na diagonal principal e $-1/h$ nas diagonais vizinhas a esta.

4.2 Montagem da matriz e solução do sistema

Para montar o sistema (12) e resolvê-lo você deverá utilizar as rotinas que desenvolveu nas tarefas computacionais 2 e 3 do curso. A montagem da matriz requer a avaliação dos produtos internos $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_L$, para $|i - j| \leq 1$ e $\langle f, \phi_i \rangle$. Para tanto você deve aproximar os valores das integrais correspondentes através do método de Romberg desenvolvido na tarefa 3 (use precisão $\epsilon = 10^{-6}$). Note que a integral deve ser calculada no intervalo de nós em que ϕ_i é não nula. Uma vez montado o sistema tridiagonal, este deve ser resolvido pelo algoritmo LU desenvolvido na tarefa 2.

4.3 Solução do método de elementos finitos

Uma vez resolvido o sistema (12) obtemos a função $\bar{u}_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x)$ solução de (10), que melhor aproxima a solução $u(x)$ de (9) (e portanto de (8) caso $u(x) \in C^2[0, 1]$). Refinando-se o problema (ou seja, aumentando o valor de n e consequentemente reduzindo h) melhora-se a aproximação. Se a solução $u(x)$ for suficientemente diferenciável teremos que $\|\bar{u}_n(x) - u(x)\| = O(h^2)$.

4.4 Teste da ordem de convergência

Teste a ordem de convergência do método com o exemplo onde $k(x) = 1, q(x) = 0, f(x) = 12x(1-x) - 2$. Neste caso a solução exata de (8) é a função $u(x) = x^2(x-1)^2$. Calcule a solução para os valores de $n = 15, 31, 63, 127$ e 255 e avalie em cada caso $\|\bar{u}_n(x) - u(x)\| = \max_{i=1,n} |\bar{u}_n(x_i) - u(x_i)|$ e constante a convergência de segunda ordem.

4.5 Condições de fronteira não homogêneas

O que fazer se na equação (8) as condições de fronteira forem $u(0) = a$ e $u(1) = b$? Pode-se reduzir este problema ao caso homogêneo resolvendo-se a equação

$$L(v(x)) = f(x) + (b-a)k'(x) - q(x)(a + (b-a)x) = \tilde{f}(x), \quad v(0) = v(1) = 0.$$

Mostre que neste caso $u(x) = v(x) + a + (b-a)x$ é a solução da equação (8) com condições de fronteira $u(0) = a$ e $u(1) = b$.

4.6 O problema transiente

Em muitas situações a solução de (8) é o estado estacionário da equação a derivadas parciais:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + L(u(t, x)) = f(t, x) \quad (13)$$

$$u(t, 0) = g_1(t), \quad u(t, 1) = g_2(t), \quad u(0, x) = u_0(x),$$

onde a condição inicial $u_0(x)$ e as condições de fronteira $g_1(t)$ e $g_2(t)$ são conhecidas. Em alguns casos não estamos apenas interessados no estado estacionário, mas sim na evolução temporal da solução. Para resolver aproximadamente este problema, podemos combinar o método de elementos finitos com algum método numérico para EDO's aplicado à parte temporal. Para esta equação, o uso de métodos explícitos é em geral pouco recomendado, uma vez que estes requerem passos de tempo relativamente muito pequenos para que os métodos não fiquem numericamente instáveis. Vamos portanto aqui combinar o método de elementos finitos com o método dos trapézios (também conhecido como método de Crank-Nicolson) para a parte temporal. Seja $[0, T]$ o intervalo de tempo em que vamos aproximar a solução. No método dos trapézios este intervalo será discretizado em instantes $t_k, k = 0, \dots, m$ com $t_k = k\Delta t$ e $\Delta t = T/m$. A solução será aproximada a cada instante t_k como $u(t_k, x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t_k) \phi_i(x)$, com os coeficientes da expansão de u no espaço de Splines dependendo do instante de tempo. A discretização temporal de (13) pelo método dos trapézios resulta em

$$\frac{u(t_{k+1}, x) - u(t_k, x)}{\Delta t} + \frac{L(u(t_k, x)) + L(u(t_{k+1}, x))}{2} = \frac{f(t_k, x) + f(t_{k+1}, x)}{2} \quad (14)$$

A aproximação no instante inicial t_0 fica definida pela condição inicial $u_0(x)$, resultando nos coeficientes iniciais $\alpha_i(t_0) = u_0(x_i)$. Conhecida a solução no instante t_k , a solução no instante t_{k+1} deverá ser calculada resolvendo-se a equação:

$$\frac{u(t_{k+1}, x)}{\Delta t} + \frac{L(u(t_{k+1}, x))}{2} = F^k(x) \quad (15)$$

onde

$$F^k(x) = \frac{u(t_k, x)}{\Delta t} - \frac{L(u(t_k, x))}{2} + \frac{f(t_k, x) + f(t_{k+1}, x)}{2},$$

pelo método de elementos finitos, com as condições de fronteira $u(t_{k+1}, 0) = g_1(t_{k+1})$ e $u(t_{k+1}, 1) = g_2(t_{k+1})$.

Note que a equação (15) é da mesma forma que (8) (adequando-se os valores de $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ e notando que podemos ter condições de fronteira não homogêneas, conforme a seção 4.5).