Dr. Rosanna Laking, Dr. Margherita Zorzi
Università degli Studi di Verona, A.A. 2021/2022
Corso di Laurea in Informatica

Esame per il Corso di ALGEBRA LINEARE

15/07/2022

1. **(6 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{pmatrix}.$$

   (a) Si studi $det(A)$ al variare di k.
   (b) Si studi $rk(A)$ al variare di k.
   (c) Si determini se A è invertibile. Se sì, per quali valori di k?

2. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   (a) Si calcolino tutti gli autovalori di B su $\mathbb{R}$ e si trovino delle basi dei loro autospazi.
   (b) Si verifichi che la matrice B è diagonalizzabile e si trovino la matrice diagonale D e le matrici S, S^{-1} tali che $B = SDS^{-1}$.

3. **(12 punti)** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(v) = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+4y-2z \\ -3x-6y+3z \end{pmatrix}$ per ogni $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

   (a) Si calcoli la matrice M associata a f rispetto alla base canonica.
   (b) Si determinino la dimensione e una base dell'immagine $Im(f) = C(M)$ di f e dello spazio nullo $N(f) = N(M)$ di f.
   (c) Si dica se l'applicazione lineare f è un isomorfismo.
   (d) Si calcoli la matrice N associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel dominio e rispetto alla base canonica nel codominio.

4. **(4 punti)** Vero o falso? Si motivi la risposta!

   (a) Il numero complesso $\frac{-3+6i}{2+i}$ in forma algebrica è $3i$.
   (b) L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$.

5. **(1 punti)** Sia $M \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matrice. Si dimostri la seguente affermazione: se M ammette un'inversa destra $R \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, allora il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione per qualsiasi $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$.