1. **(6 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{pmatrix}.$$

(a) Si studi $det(A)$ al variare di k.

(b) Si studi $rk(A)$ al variare di k.

(c) Si determini se A è invertibile. Se sì, per quali valori di k?

(a) Usiamo (EG) per trovare una forma ridotta di A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{pmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & k-2 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & k-1 & k \end{pmatrix}$$

$$\underset{E_{23}}{\sim} (-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & k-2 & k-1 & k \end{pmatrix} \underset{E_{42}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{E_{43}\left(\frac{-k}{k-1}\right) \\ \text{se } k \neq 1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & 0 & 0 & k-\frac{k^2}{k-1} \end{pmatrix} = U$$

$$k - \frac{k^2}{k-1} = \frac{k(k-1) - k^2}{k-1} = \frac{k(k-1-k)}{k-1} = \frac{-k}{k-1}$$

Se $k \neq 1$, $\det A = \overset{E_{23}}{(-1)}(1)(k-2)(k-1)\left(\frac{-k}{k-1}\right)$

$$= k(k-2)$$

Se $k=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{-1 \\ E_{34}}}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= U'}$$

$$\rightsquigarrow \quad \det A = \underset{E_{23}}{(-1)}\underset{E_{34}}{(-1)}(1)(-1)(1)(1) = -1$$

[Si può usare anche Laplace!]

(b) Se $k \neq 1$, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} U = \begin{cases} 3 & k = 2, 0 \\ 4 & k \neq 2, 0 \end{cases}$

Se $k = 1$, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} U' = 4$

(c) A invertibile $\iff \mathrm{rk}A = 4 \iff \det A \neq 0$

$\iff k \neq 0, 2.$

2. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcolino tutti gli autovalori di B su $\mathbb{R}$ e si trovino delle basi dei loro autospazi.

(b) Si verifichi che la matrice B è diagonalizzabile e si trovino la matrice diagonale D e le matrici S, S^{-1} tali che $B = SDS^{-1}$.

Il polinomio caratteristico di B:

$$\begin{aligned} P_B &= \det(B - x I_2) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 4 & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)\left(\tfrac{1}{2}-x\right) \end{aligned}$$

Gli autovalori sono gli zeri di P_B:

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

le moltiplicità algebrica sono $m_1 = 1 = m_2$.

Gli autospazi sono i sottospazi

$$E_B(\lambda_i) = N(B - \lambda_i I_2)$$

per $i = 1, 2$.

$$E_B(\lambda_1) = E_B(1) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\rightsquigarrow \quad 4x - \frac{1}{2}y = 0 \quad \underset{y=t}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix} x = \frac{t}{8} \\ y = t \end{matrix}$$

Una base di $E_B(\lambda_1)$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

$d_1 = \dim E_B(\lambda_1) = 1$

[Si può scegliere qualsiasi $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$]

$$E_B(\lambda_2) = E_B\left(\tfrac{1}{2}\right) = N\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 0 \\ 4x = 0 \end{cases} \underset{y=t}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = t \end{matrix}$$

Una base di $E_B(\lambda_2)$: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$d_2 = \dim E_B(\lambda_2) = 1$

(b) La matrice è diagonalizzabile se e solo se $m_1 = d_1$ e $m_2 = d_2$ se e solo se $d_1 + d_2 = 2$

la dimensione delle matrice

Abbiamo $m_1 = 1 = d_1$ e $m_2 = 1 = d_2$ e quindi la matrice è diagonalizzabile.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

Troviamo S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **(12 punti)** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(v) = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+4y-2z \\ -3x-6y+3z \end{pmatrix}$ per ogni $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Si calcoli la matrice M associata a f rispetto alla base canonica.

(b) Si determinino la dimensione e una base dell'immagine $Im(f) = C(M)$ di f e dello spazio nullo $N(f) = N(M)$ di f.

(c) Si dica se l'applicazione lineare f è un isomorfismo.

(d) Si calcoli la matrice N associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel dominio e rispetto alla base canonica nel codominio.

(a) Le colonne di M sono

$f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$

$$M = \left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) $$C(M) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ \boxed{2} & 4 & -2 \\ \boxed{-3} & -6 & 3 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(3)}{\overset{E_{21}(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

colonna dominante

$\rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $C(M)$

$$\dim C(M) = rk M = 1$$

$$N(M) = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Mv = 0 \}$$

$\xrightarrow[\text{lineare equivalente}]{\text{sistema}}$ $Uv = 0 \rightsquigarrow x + 2y - z = 0$

$$\begin{matrix} z = t \\ \rightsquigarrow \\ y = s \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = t - 2s \\ y = s \\ z = t \end{matrix}$$

Dunque $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(M)$

$$\dim N(M) = \dim \mathbb{R}^3 - rk M = 3 - 1 = 2$$

(c) $f = f_M$ è un isomorfismo se e solo se M è invertibile se e solo se $\mathrm{rk} M = 3$. Dunque f non è un isomorfismo

(d) $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Le colonne di N sono

$$\underset{\displaystyle f(v_1)}{\underset{\shortparallel}{C_{can}(f(v_1))}},\quad \underset{\displaystyle f(v_2)}{\underset{\shortparallel}{C_{can}(f(v_2))}},\quad \underset{\displaystyle f(v_3)}{\underset{\shortparallel}{C_{can}(f(v_3))}}$$

Quindi $N = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. **(4 punti)** Vero o falso? Si motivi la risposta!

   (a) Il numero complesso $\frac{-3+6i}{2+i}$ in forma algebrica è $3i$.

   (b) L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$.

(a) Vero! $\frac{-3+6i}{2+i} = \frac{(-3+6i)(2-i)}{(2-i)} = \frac{15i}{5} = 3i$

(b) Falso! L'insieme non è ortogonale

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}} i \neq 0$$

5. **(1 punti)** Sia $M \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matrice. Si dimostri la seguente affermazione: se M ammette un'inversa destra $R \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, allora il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione per qualsiasi $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$.

Sia R un'inversa destra di M.
Allora $v = Rb$ è una soluzione. Infatti
$Mv = M(Rb) = (MR)b = I_{m\times m}b = b$.