Corso $\LaTeX$ 2022 - Elaborato finale

VR443470

settembre 2022

Indice

1 Campionamento e quantizzazione

1.1 Campionamento

Il **campionamento** è la tecnica che consente di effettuare la trasformazione da analogico (*segnale continuo*) a digitale (*segnale discreto*). In particolare, è il dominio che viene trasformato da continuo a discreto. La trasformazione avviene senza perdita di informazioni, se rispettate alcune condizioni (**teorema del campionamento ideale**), e il segnale sarà ricostruito perfettamente (**formula di interpolazione ideale di Shannon**). Graficamente, per eseguire il campionamento di un segnale continuo, sarà necessario campionare ad un certo intervallo T il segnale, come nel seguente esempio, ottenendo valori reali:

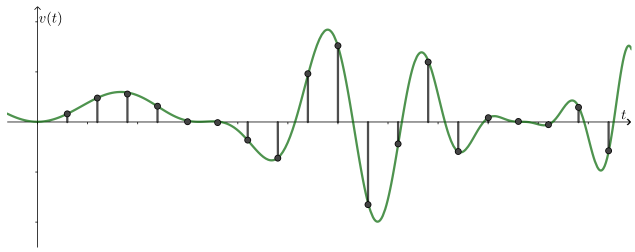

Figura 1: In verde il segnale originale, in grigio il segnale campionato nel tempo.

1.2 Quantizzazione

La la **quantizzazione** consente di effettuare la trasformazione del codominio entro certi intervalli. Per capire meglio, si prenda in considerazione il seguente grafico:

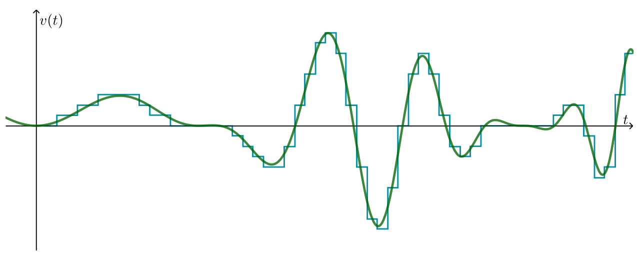

Figura 2: Segnale sinusoidale quantizzato nelle ampiezze e il suo segnale originale.

Gli scalini che sono visibili sulla linea del segnale, sono i vari campionamenti effettuati durante il tempo, ovvero lungo l'asse delle ascisse t. A differenza del campionamento in cui i valori campionati potevano essere acquisiti liberamente, nella quantizzazione i valori devono essere uguali a determinati valori presenti sull'asse delle ordinate $v(t)$. Quindi, ipotizzando che sull'asse $v(t)$ ci siano numeri interi $(0, 1, 2, 3, ...)$ la punta del primo scalino indicherà il valore 1, la seconda punta dello scalino, spostandosi lungo l'asse del tempo t, indicherà due e così via.

2 Replicazione e campionamento

In questo capitolo vengono introdotti i concetti di replicazione e campionamento.

2.1 Replicazione

Si definisce **treno campionatore** ideale di periodo$T$ la funzione:

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \tag{1}$$

Il treno campionatore è sostanzialmente una sequenza infinita di impulsi ideali, come in figura, di supporto $\{t = kT \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

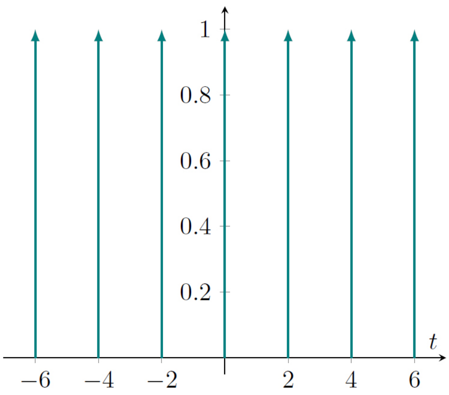

Figura 3: Treno campionatore $\tilde{\delta}_T(t)$.

Inoltre, si ha che:

$$\tilde{\delta}_T(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Che equivale a:

$$\tilde{\delta}_T(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{T} \tilde{\delta}_{\frac{1}{T}}(f)$$

Infine, la trasformata di Fourier del treno campionatore ideale è un treno campionatore ideale (in frequenza) in cui gli impulsi hanno l'area $\frac{1}{T}$ e sono equispaziati alla frequenza $\frac{1}{T}$ (come in figura 4).

Dato un segnale $v(t), t \in \mathbb{R}, 0 < T \in \mathbb{R}$, si definisce **campionamento** del segnale v come:

$$[\mathrm{samp}_T\, v](t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT) \tag{2}$$

Allora, per la proprietà di campionamento dell'impulso, si ha:

$$[\mathrm{samp}_T\, v](t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t)\delta(t - kT) = v(t) \cdot \tilde{\delta}_T(t) \tag{3}$$

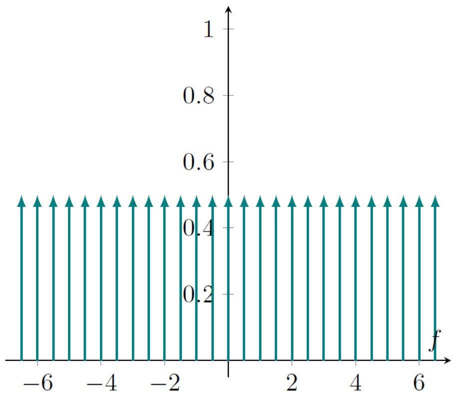

Figura 4: La Trasformata di Fourier del treno campionatore (1) con periodo $T = 2$.

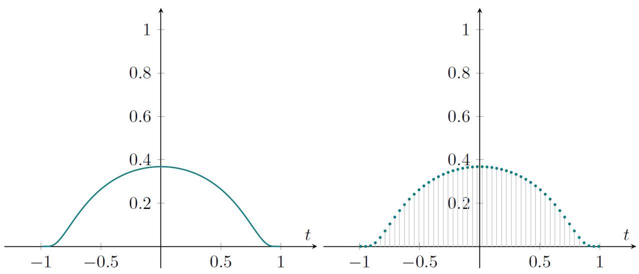

Figura 5: Campionamento di un segnale.

3 Sistemi a tempo discreto

Si definisce **sistema a tempo discreto** un sistema i cui elementi descrittivi, come funzioni di *ingresso* e *uscita*, sono successioni $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, cioè funzioni a variabile discreta.

3.1 Proprietà sistemi a tempo discreto

Le proprietà dei sistemi a tempo discreto sono le stesse di quelle dei sistemi a tempo continuo.

- Linearità
- Tempo invarianza
- Casualità
- Stabilità asintotica
- BIBO stabilità

4 Trasformata zeta

Sia $v(k)$ una successione a valori reali o complessi. Si definisce **trasformata zeta**:

$$\mathcal{Z}[v(k)](z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k) z^{-k} = V(z) \tag{4}$$

La funzione $V : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $z \in \mathbb{C}$. Essa è definita per tutti i numeri complessi z per cui la serie è convergente.

4.1 Proprietà della trasformata zeta

1. Linearità
2. Moltiplicazione per successione esponenziale
3. Moltiplicazione per un monomio
4. Ritardo temporale
5. Anticipo temporale

5 Tabella riassuntiva trasformate notevoli

Segnale	Trasformata $\mathcal{Z}$
A	$A \cdot \frac{z}{z-1}$
$A\delta(k)$	A
$A\delta(k-i)$	Az^{-i}
$A\delta_{-1}(k)$	$A \cdot \frac{z}{z-1}$
$\lambda^k\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{z-\lambda}$
$k\lambda^k\delta_{-1}(k)$	$\frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}$

Tabella 1: Trasformate notevoli