

Schemi Analisi II

VR443470

ottobre 2023

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Prerequisiti | 3 |
| 1.1 | Geometria analitica | 4 |
| 1.1.1 | Circonferenza | 4 |
| 1.1.2 | Ellisse | 5 |
| 1.1.3 | Iperbole | 6 |
| 1.1.4 | Completamento dei quadrati | 7 |
| 1.1.5 | Esercizi | 8 |
| 1.2 | Algebra | 11 |
| 1.2.1 | Esercizi | 11 |
| 1.3 | Calcolo differenziale e integrale | 16 |
| 1.3.1 | Integrali fondamentali (o notevoli) | 16 |
| 1.3.2 | Integrare per sostituzione | 17 |
| 1.3.3 | Integrare per parti | 17 |
| 1.3.4 | Decomposizione in frazioni parziali | 18 |
| 1.3.5 | Esercizi | 20 |
| 2 | Equazioni differenziali ordinarie | 27 |
| 2.1 | Concetti e teoremi fondamentali | 27 |
| 2.2 | Equazioni a variabili separabili | 29 |
| 2.3 | Problema di Cauchy | 31 |
| 2.3.1 | Intervallo massimale | 32 |

1 Prerequisiti

Il corso di Analisi II si articola in due macro sezioni: primo e secondo parziale. All'esame gli esercizi da svolgere saranno 10, suddivisi 5 per la prima parte e 5 per la seconda.

Nonostante vengano date 3 ore per svolgere l'esame totale, dunque 1 ora e mezza per ciascuna prova parziale, il tempo è una risorsa fondamentale. Difatti, se un calcolo matematico dovesse richiedere una quantità eccessiva di risorse/tempo, si rischierebbe di non passare l'esame con esito positivo.

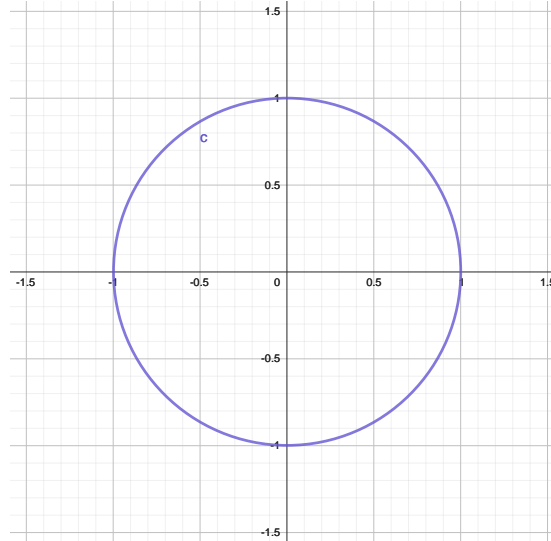
Risulta dunque fondamentale, per ciascun studente, giungere con dei prerequisiti solidi e non banali. In questo capitolo si provvederà a fornire alcuni prerequisiti necessari per affrontare il percorso senza eccessive difficoltà.

Ogni paragrafo presenterà degli esercizi e ognuno di essi sarà risolto nel seguente modo: il primo in modo approfondito per illustrare il *modus operandi*, gli altri facendo vedere i calcoli e risparmiando le spiegazioni prolisse. Chiaramente, nel caso in cui ci dovesse essere un caso particolare, esso verrà affrontato e spiegato passo passo.

1.1 Geometria analitica

1.1.1 Circonferenza

La circonferenza è graficamente rappresentata nel seguente modo:



Chiamando con $C = (x_C, y_C)$ le coordinate del centro della circonferenza e con r il raggio, la sua equazione generale è espressa nel seguente modo:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Nel caso in cui la circonferenza fosse centrata nell'origine degli assi, ovvero $C = (0, 0)$, allora l'equazione generale sarebbe ridotta a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Per essere più precisi, l'**equazione canonica** corrispondente alla circonferenza è la seguente:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Le formule più importanti per ricavare il centro della circonferenza C e il raggio r :

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) \quad ; \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

Per ottenere l'equazione generale partendo dall'equazione canonica, si utilizza il metodo dei completamento dei quadrati (paragrafo 1.1.4).

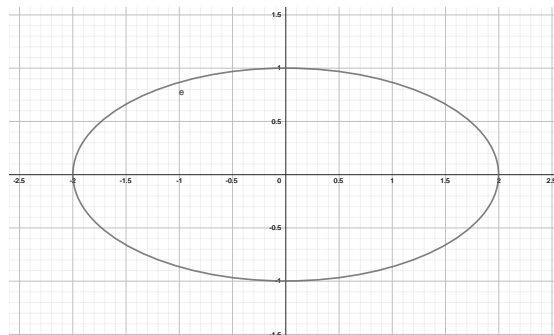
Per ottenere il raggio nel caso in cui sia noto il centro C e un punto $P = (x_P, y_P)$ appartenente alla circonferenza, si utilizza la seguente formula:

$$r = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$$

Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

1.1.2 Ellisse

Non esiste un'unica rappresentazione dell'ellisse, ma solitamente può essere facilmente riconoscibile perché di forma allungata:



Attenzione, che data l'**equazione canonica** dell'ellisse **centrata nell'origine**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

Il grafico corrisponde esattamente ad una circonferenza.

Un'ellisse presenta quattro vertici nel caso in cui abbia centro nell'origine. Le relative coordinate sono:

$$V_{1,2} = (\pm a, 0) \quad V_{3,4} = (0, \pm b)$$

Per calcolare l'eccentricità di un'ellisse ("quanto l'ellisse è schiacciata") si devono confrontare i due valori a^2 e b^2 :

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{se } a^2 > b^2 \quad \text{e quindi } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$e = \frac{c}{b} \quad \text{se } b^2 > a^2 \quad \text{e quindi } c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Il valore è compreso tra: $0 \leq e < 1$.

Nel caso in cui non fosse centrata nell'origine, l'**equazione canonica** di un'ellisse **traslata**, con $C = (x_C, y_C)$ come coordinate del centro:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

I relativi vertici hanno le seguenti coordinate:

$$V_1 = (x_C - a, y_C) \quad ; \quad V_2 = (x_C + a, y_C)$$
$$V_3 = (x_C, y_C - b) \quad ; \quad V_4 = (x_C, y_C + b)$$

L'**importanza dei vertici** è dovuta al fatto che se fosse necessario rappresentare l'ellisse su un piano cartesiano, grazie alle precedenti formule. È possibile ricordarsi facilmente le formule ricordando che le coordinate dei vertici sono ottenute eseguendo la somma/differenza prima sulla coordinata x e poi sulla coordinata y .

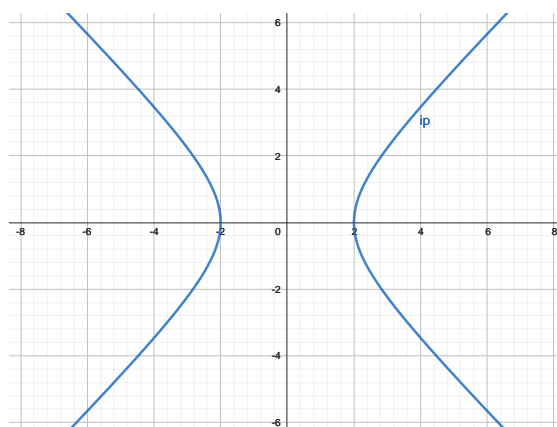
Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

1.1.3 Iperbole

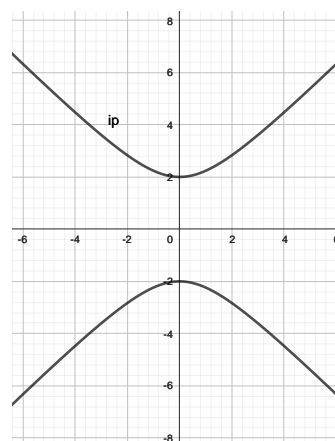
Un'iperbole con centro nell'origine ha un'equazione del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{con } a \neq 0, b \neq 0$$

Il segno $+$ accanto all'1 rappresenta l'intersezione con l'asse delle ascisse (x), mentre il segno $-$ rappresenta l'intersezione con l'asse delle ordinate (y). Graficamente viene rappresentata nel seguente modo:



Con $+$ 1.



Con $-$ 1.

Nel caso di una iperbole con gli assi paralleli agli assi cartesiani e quindi con centro in un punto $C = (x_C, y_C)$, essa è data da:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{con } a \neq 0, b \neq 0$$

Dove il segno \pm accanto all'1 indica la stessa cosa detta in precedenza.

Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

1.1.4 Completamento dei quadrati

Il completamento dei quadrati è un'operazione molto potente che può essere applicata sempre (a discapito dello studente se ha senso o no applicarla!). In questo caso viene applicata ad un'ellisse.

Innanzitutto, la **prima operazione** dell'applicazione del completamento dei quadrati è il raggruppamento dei valori simili, ovverosia:

$$\begin{aligned}9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 &= 0 \\(9x^2 + 36x) + (4y^2 - 24y) + 36 &= 0\end{aligned}$$

La **seconda operazione** è prendere in considerazione i termini con le x , e poi quelli con le y , e cercare un quadrato. Ovvero sia un valore c tale per cui il Δ (nella formula del calcolo di un'equazione di secondo grado $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$) sia uguale a zero:

$$\begin{aligned}9x^2 + 36x &\longrightarrow 36^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\36^2 - 36c &= 0 \\c &= 36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4y^2 - 24y &\longrightarrow 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\24^2 - 16c &= 0 \\c &= 36\end{aligned}$$

Suggerimento: per trovare tale valore, basta risolvere la banale equazione $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ con c incognita e a, b termini noti.

La **terza operazione** è riscrivere l'equazione con i nuovi valori c , ma per lasciare invariata l'equazione è necessario annullarli, ovvero scrivere $c - c$ (nessun problema, con manipolazioni algebriche si riuscirà ad evitare di ritornare al punto di inizio):

$$(9x^2 + 36x + 36 - 36) + (4y^2 - 24y + 36 - 36) + 36 = 0$$

Le manipolazioni algebriche riguardano $9x^2 + 36x + 36$ e $4y^2 - 24y + 36$. Ovvero, si riscrivono le due espressioni come quadrati!

$$\begin{aligned}9x^2 + 36x + 36 &\longrightarrow 9(x+2)^2 \\4y^2 - 24y + 36 &\longrightarrow 4(y-3)^2\end{aligned}$$

E si riscrive l'equazione generale:

$$9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 = 0$$

Banali semplificazioni algebriche:

$$\begin{aligned}9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 &= 0 \\ \frac{1}{36} \cdot 9(x+2)^2 + 4(y-3)^2 &= 36 \cdot \frac{1}{36} \\ \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} &= 1\end{aligned}$$

Quest'ultima equazione corrisponde all'equazione canonica dell'ellisse.

1.1.5 Esercizi

Si rappresenti analiticamente le seguenti equazioni canoniche:

1. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$
2. $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$
4. $x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$
5. $2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$

Esercizio 1

Data l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$$

Prima di rappresentare analiticamente l'equazione, è necessario guardare immediatamente i termini x^2 e y^2 per vedere se si è di fronte ad una circonferenza. Infatti, ricordando l'equazione canonica della circonferenza (pagina 4):

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Si può notare una grande assomiglianza. Quindi, si procede con il calcolo delle coordinate del centro della circonferenza:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = \left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (2, -1)$$

Si procede con il calcolo del raggio:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma} = \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(2)^2}{4} - (-6)} = \sqrt{4 + 1 + 6} = \sqrt{11}$$

Infine, si scrive l'equazione canonica sostituendo i valori trovati:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 11$$

Esercizio 2

Data l'equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si può subito vedere che si è di fronte ad un'ellisse centrata nell'origine:

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Si procede con un po' di intuito così da ricavare la forma canonica:

$$\frac{(x - 0)^2}{1^2} + \frac{(y - 0)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

E il risultato (forma canonica) eliminando i termini inutili:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \xrightarrow{\text{equivalente a}} \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si ottiene l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 = 1$$

Si tratta di un'iperbole che interseca l'asse delle ascisse (x) perché il segno dell'1 è + ed è centrata nell'origine perché x e y “non esistono”. Quindi:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Esercizio 4

Data l'equazione:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

Ci si accorge immediatamente che è un'iperbole a causa dei segni x^2 e y^2 discordi. Eseguendo alcune operazioni algebriche:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

$$x^2 - y^2 + x + 4y = 4$$

$$(x^2 + x) - (y^2 - 4y) = 4$$

Si utilizza il completamento dei quadrati per ottenere la forma canonica:

$$x^2 + x \longrightarrow 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$$

$$c = \frac{1}{4}$$

$$y^2 - 4y \longrightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$$

$$c = 4$$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - (y^2 - 4y + 4 - 4) = 4$$

$$\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - [(y - 2)^2 - 4] = 4$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - (y - 2)^2 + 4 = 4$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 2)^2 = 4 - 4 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 2)^2 = \frac{1}{4}$$

$$4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4(y - 2)^2 = 1$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y - 2)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Esercizio 5

Data l'equazione:

$$2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$$

Si utilizza il completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 4x - y &= 0 \\ (2x^2 + 4x) + (y^2 - y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &\longrightarrow 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 - y &\longrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\ c &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(2x^2 + 4x + 2 - 2) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left[2(x+1)^2 - 2\right] + \left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = 0$$

$$2(x+1)^2 - 2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$2(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4}$$

$$2(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{4}{9} \cdot 2 \cdot (x+1)^2 + \frac{4}{9} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{9}{8}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

L'equazione canonica si tratta di un'ellisse.

1.2 Algebra

1.2.1 Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni e i seguenti sistemi di equazioni algebriche:

1.
$$\begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$
3. $\frac{y}{y+2} = mx^2$ (risolvere rispetto a y)
4. $\frac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1$ (risolvere rispetto a y)
5. $\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$ (risolvere rispetto a y)

Esercizio 1

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Per trovare tutti i valori che annullano il sistema, si inizia con qualche manipolazione algebrica:

$$\begin{cases} 3y(x^2 - 2x) = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Quale valore annulla $x^2 - 2x$? Si calcola:

$$x^2 - 2x \longrightarrow x(x - 2)$$

Quindi le soluzioni sono 0 e 2. Per cui i valori che annullano il sistema per adesso sono:

$$y = 0 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^3 - 3x^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^2(x - 3) = 0 \end{cases} \longrightarrow x = 0; x = 3$$

Con $x = 0$ si è già trovata una soluzione ($y = 0$), quindi si prova $x = 2$:

$$x = 2 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2^3 + 4y^3 - 3 \cdot 2^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y^3 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, quindi i possibili valori sono:

- $(x = 0, y = 0)$
- $(x = 3, y = 0)$
- $(x = 2, y = 1)$

Esercizio 2

Dato il sistema:

$$\begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{cases} x^2 - \lambda x = 0 \\ y^2 - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(x - \lambda) = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

I primi valori che si provano sono i soliti $x = 0$ e $y = 0$. Si inizia con $x = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ 0 + 2y^2 = 1 \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\lambda \right) = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{4\lambda}{\sqrt{2}} = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{8} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Si prosegue con $y = 0$:

$$\begin{cases} x(x - \lambda) = 0 \\ 0 = 0 \\ x^2 + 0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(x - \lambda) = 0 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 1 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Per concludere l'esercizio, si deve riscrivere il sistema utilizzando operazioni permesse dall'algebra:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \cdot x^2 = \lambda x \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \cdot y^2 = 4\lambda y \cdot \frac{1}{y} \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ (\lambda)^2 + 2(4\lambda)^2 = 1 \end{cases}$$

È evidente che con questa piccola manipolazione algebrica, i calcoli risultano più semplici. Adesso si calcola il quadrato di λ e si trovano le sue soluzioni per concludere l'esercizio:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 + 32\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ 33\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 = \frac{1}{33} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Si sostituisce λ all'interno di x e y :

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \\ y = \pm \frac{4}{\sqrt{33}} \\ \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, sono state valutate tutte le linee del sistema. Quindi, i valori possibili sono:

- $\left(x = 0, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $\left(x = 0, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $(x = 1, y = 0, \lambda = 1)$
- $(x = -1, y = 0, \lambda = -1)$
- $\left(x = \frac{1}{\sqrt{33}}, y = \frac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = \frac{1}{\sqrt{33}}\right)$
- $\left(x = -\frac{1}{\sqrt{33}}, y = -\frac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = -\frac{1}{\sqrt{33}}\right)$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$\frac{y}{y+2} = mx^2$$

Si deve risolvere rispetto a y :

$$\begin{aligned}\frac{y}{y+2} &= mx^2 \\ \frac{y+2}{1} \cdot \frac{y}{y+2} &= mx^2 \cdot \frac{y+2}{1} \\ y &= mx^2y + 2mx^2 \\ y - mx^2y &= 2mx^2 \\ y(1 - mx^2) &= 2mx^2 \\ \frac{1}{1 - mx^2} \cdot y(1 - mx^2) &= 2mx^2 \cdot \frac{1}{1 - mx^2} \\ y &= \frac{2mx^2}{1 - mx^2}\end{aligned}$$

Esercizio 4

Data l'equazione:

$$\frac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1$$

Si deve risolvere rispetto a y :

$$\begin{aligned}\frac{1}{y+1} &= \sqrt{x+2} - 1 \\ (y+1) \cdot \frac{1}{y+1} &= (\sqrt{x+2} - 1) \cdot (y+1) \\ 1 &= y\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} - y - 1 \\ -y\sqrt{x+2} + y &= -2 + \sqrt{x+2} \\ y(-\sqrt{x+2} + 1) &= \sqrt{x+2} - 2 \\ \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \cdot y(-\sqrt{x+2} + 1) &= (\sqrt{x+2} - 2) \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \\ y &= \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{x+2}}\end{aligned}$$

Esercizio 5

Data l'equazione:

$$\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$$

Si deve risolvere rispetto a y :

$$\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$$

$$\frac{2-y}{1-y} = 10^{x+3}$$

$$(1-y) \cdot \frac{2-y}{1-y} = 10^{x+3} \cdot (1-y)$$

$$2-y = 10^{x+3} - 10^{x+3}y$$

$$-y = 10^{x+3} - 10^{x+3}y - 2$$

$$-y + 10^{x+3}y = 10^{x+3} - 2$$

$$y(-1 + 10^{x+3}) = 10^{x+3} - 2$$

$$\frac{1}{-1 + 10^{x+3}} \cdot y(-1 + 10^{x+3}) = (10^{x+3} - 2) \cdot \frac{1}{-1 + 10^{x+3}}$$

$$y = \frac{10^{x+3} - 2}{10^{x+3} - 1}$$

1.3 Calcolo differenziale e integrale

1.3.1 Integrali fondamentali (o notevoli)

Qua di seguito si presenta una lista di integrali fondamentali (o notevoli), che consentono di calcolare qualsiasi integrale basilare. Non devono essere imparati tutti a memoria poiché la maggior parte possono essere risolti ragionando:

- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{con } n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x^n} \, dx = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}} \quad \text{con } n \neq 1$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + c$
- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx = -\cot(x) + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$
- $\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + c$
- $\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x) + c$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos(x) + c$

Per altri integrali, visita il sito: [YouMath](#).

1.3.2 Integrare per sostituzione

Questa tecnica risolutiva è molto potente e può essere sempre applicata. Tuttavia, si tende a non utilizzarla talvolta poiché gli integrali notevoli (cap. 1.3.1) sono più immediati.

Il **primo passo** è prendere in considerazione l'integrale e sostituire il valore dx con:

$$dx = \frac{1}{t'} dt$$

E cercare un valore t comodo così da effettuare sostituzioni intelligenti. Per esempio, dato l'integrale:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

Si può sostituire dx scegliendo come t la x^2 , infatti:

$$t = x^2 \quad t' = 2x \quad dx = \frac{1}{2x} dt$$

$$\int x^3 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2x} dt \longrightarrow \int x^2 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2} dt \longrightarrow \frac{1}{2} \int x^2 \cdot e^{-x^2} dt \longrightarrow \frac{1}{2} \int t \cdot e^{-t} dt$$

Una volta risolto l'integrale, si ritorna alla forma con x andando a risostituire.

1.3.3 Integrare per parti

L'integrazione per parti è un metodo che viene applicato quando:

- Se l'integranda è il prodotto di due funzioni;
- Se l'integranda è il prodotto di due funzioni, e una di queste è la derivata di una primitiva immediata (come esponenziali, trigonometriche, potenze, etc).

L'applicazione è la seguente a seconda dell'integrale definito o indefinito:

- $\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$
- $\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$

Un esempio valido è il seguente integrale:

$$\int t \cdot e^{-t} dt$$

Si prosegue per parti:

$$f(t) = t \quad f'(t) = 1 \quad g'(t) = e^{-t} \quad g(t) = -e^{-t}$$

E si va alla sostituzione:

$$\int t \cdot e^{-t} dt = t \cdot (-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t})$$

1.3.4 Decomposizione in frazioni parziali

La decomposizione in frazioni parziali è un metodo per trasformare il rapporto tra due polinomi in una somma di frazioni più semplici.

Questa tecnica viene inserita nel paragrafo degli integrali poiché spesso viene utilizzata per calcolare integrali che presentano frazioni apparentemente complesse.

Si presenta un integrale complesso:

$$\int \frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} dx$$

Innanzitutto, si eseguono alcune **operazioni preliminari**, ovverossia si prepara la frazione scomponendola il più possibile. In questo caso, al denominatore è possibile scomporre $x^2 - 1$ (ricordando $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$):

$$\int \frac{x^2}{[(x - 1)(x + 1)]^2} dx$$

E inoltre, dato che vi è una potenza e una moltiplicazione all'interno, è possibile scomporre ancora di più:

$$\int \frac{x^2}{(x - 1)^2 (x + 1)^2} dx$$

Adesso si parte con il vero algoritmo. Il **primo passo** è prendere ciascun fattore del denominatore e creare la sua corrispondenza con le lettere:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 &\longrightarrow \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} \\ (x + 1)^2 &\longrightarrow \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Come si può notare, si parte dal grado minimo del fattore preso in considerazione, e lo si aumenta di grado fino a che non si trova il grado originario. Nel caso in cui ci fosse stato:

$$\int \frac{1}{x(x - 3)} dx$$

Sarebbe bastato banalmente:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \frac{A}{x} \\ x - 3 &\longrightarrow \frac{B}{x - 3} \end{aligned}$$

Ovviamente le lettere sono numeri reali da determinare (lo scopo dell'algoritmo). Quindi, il **secondo passo** è riscrivere i termini appena notati come un'uguaglianza:

$$\frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2}$$

Il **terzo passo** è mettere tutti i termini a denominatore comune:

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

Il **quarto passo** è eliminare il denominatore:

$$x^2 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2$$

Il **quinto passo** è eseguire i calcoli e cercare di raggruppare i termini in comune:

$$x^2 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2$$

$$x^2 = Ax^3 + Cx^3 + Ax^2 - Cx^2 + Dx^2 - Ax + 2Bx - Cx - A + B + C + D$$

$$x^2 = (A+C)x^3 + (A+B-C+D)x^2 + (-A+2B-C-2D)x - A+B+C+D$$

Il **sesto passo** è costruire un sistema che avrà come incognite le lettere e come valori noti 1 se vi è una corrispondenza con le x , 0 altrimenti. Quindi, in questo caso solo il fattore $(A+B-C+D)$ avrà 1 nel sistema:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=1 \\ -A+2B-C-2D=0 \\ -A+B+C+D=0 \end{cases}$$

Usando il metodo di sostituzione si ottengono i valori:

$$A = \frac{1}{4}; \quad B = \frac{1}{4}; \quad C = -\frac{1}{4}; \quad D = \frac{1}{4};$$

Il **settimo passo** è sostituire i valori trovati all'interno dell'uguaglianza scritta con le lettere:

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}$$

L'**ottavo** e ultimo **passo** è riscrivere l'integrale con i termini appena trovati. Adesso è evidente che il calcolo risulta molto più semplice:

$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} \right) dx$$

Fonte: [YouMath](#).

1.3.5 Esercizi

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{\cos(3x+1)}$

2. $f(x) = (2x+1) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

Calcolare i seguenti integrali:

3. $\int \frac{1}{x^2-3x} dx$

4. $\int x^3 e^{-x^2} dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}-1} dt$

6. $\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt$

7. $\int \frac{1}{4+y^2} dy$

8. $\int x \sqrt{1+x^2} dx$

Esercizio 1

Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt{\cos(3x+1)}$$

La sua derivata è la seguente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(\cos(3x+1))^1}} \cdot (-\sin(3x+1) \cdot 3) \\ f'(x) &= -\frac{3 \sin(3x+1)}{2 \sqrt{\cos(3x+1)}} \end{aligned}$$

Esercizio 2

Data la funzione:

$$f(x) = (2x+1) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

La sua derivata è la seguente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + (2x+1) \cdot (-x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \\ f'(x) &= 2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - 2x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \end{aligned}$$

Esercizio 3

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x} dx$$

Si procede con la risoluzione:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x^2 - 3x} dx \\ &= \int \frac{1}{x(x-3)} dx \end{aligned}$$

↓ si utilizza la decomposizione in frazioni parziali (pag. 18)

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{A(x-3) + B(x)}{x(x-3)}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{Ax - 3A + Bx}{x(x-3)}$$

$$x(x-3) \cdot \frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{(A+B)x - 3A}{x(x-3)} \cdot x(x-3)$$

$$1 = (A+B)x - 3A$$

$$= \begin{cases} A+B=0 \\ -3A=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{-\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3(x-3)}$$

↓ si torna a risolvere l'integrale sostituendo il valore trovato

$$= \int -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3(x-3)} dx$$

$$= -\int \frac{1}{3x} dx + \int \frac{1}{3(x-3)} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-3} dx$$

Per risolvere questo integrale, si sfrutta uno degli integrali notevoli (pagina 16):

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-3} dx \\
 &= -\frac{1}{3} \ln(x) + \frac{1}{3} \ln(x-3) + c \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Questo è vero perché si ricorda che:

$$f(x) = \ln(x-3) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x-3} \cdot \frac{d}{dx}(x-3) = \frac{1}{x-3} \cdot 1$$

Esercizio 4

Dato l'integrale:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

Si procede con la risoluzione usando inizialmente il metodo di sostituzione:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

$$\downarrow \text{ si imposta } t = x^2; \quad t' = 2x; \quad dx = \frac{1}{t'} dt$$

$$= \int x^3 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2x} dt$$

$$= \int \cancel{x}^2 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}} dt \longrightarrow \int x^2 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$\downarrow \text{ si termina la sostituzione}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int t \cdot e^{-t} dt$$

$$\downarrow \text{ data la moltiplicazione, adesso si cambia manovra e si utilizza il metodo per parti}$$

$$\downarrow \quad f(t) = t \quad f'(t) = 1 \quad g'(t) = e^{-t} \quad g(t) = -e^{-t}$$

$$= \frac{1}{2} \left[t \cdot (-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t}) dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} [t \cdot (-e^{-t}) - e^{-t}]$$

$$\downarrow \text{ si ritorna alla } x$$

$$= \frac{1}{2} \left(-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} \right) \longrightarrow -\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} \longrightarrow -\frac{x^2 + 1}{2e^{x^2}}$$

Esercizio 5

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}} dt$$

Si inizia con il metodo di sostituzione:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}} dt$$

$$\downarrow \quad u = t - 1; \quad u' = 1; \quad dt = \frac{1}{u'} du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt[3]{u}} \cdot \frac{1}{1} du$$

$$= \int \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} du$$

$$\downarrow \quad \text{si applica l'integrale notevole: } \int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}}$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot u^{\frac{1}{3}-1}}$$

$$\downarrow \quad \text{si ritorna alla } t$$

$$= -\frac{1}{-\frac{2}{3} \cdot (t-1)^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{(t-1)^2}}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}{2}$$

Esercizio 6

Dato l'integrale:

$$\int \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt$$

Si procede con la risoluzione:

$$\begin{aligned} & \int \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \\ = & \int t \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \end{aligned}$$

$$\downarrow \quad \text{si applica il metodo di sostituzione } u = t^2 - 1; \quad u' = 2t; \quad dt = \frac{1}{u'} du$$

$$= \int t \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2t} du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du$$

$$\downarrow \quad \text{si applica l'integrale notevole: } \int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot u^{\frac{1}{2}-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{-\frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{u})$$

$$= \sqrt{u}$$

$$\downarrow \quad \text{si ritorna alla } t$$

$$= \sqrt{t^2 - 1}$$

Esercizio 7

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{4+y^2} dy$$

Si risolve con il metodo di sostituzione e utilizzando una grossa fetta di trigonometria:

$$\int \frac{1}{4+y^2} dy$$

$$\downarrow \quad \text{metodo di sostituzione } y = 2 \tan(t); \quad y' = 2 \sec(t)^2; \quad dy = y' dt$$

$$= \int \frac{1}{4 + (2 \tan(t))^2} \cdot 2 \sec(t)^2 dt$$

$$= \int \frac{2 \sec(t)^2}{4 + 4 \tan(t)^2}$$

$$= \int \frac{2 \sec(t)^2}{4 (1 + \tan(t)^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\sec(t)^2}{1 + \tan(t)^2}$$

$$\downarrow \quad \text{si utilizza la proprietà } \tan(t)^2 = \sec(t)^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\sec(t)^2}{1 + \sec(t)^2 - 1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int 1 dt$$

$$= \frac{1}{2} t$$

$$\downarrow \quad \text{si sostituisce la } t$$

$$\rightarrow y = 2 \tan(t) \rightarrow t = \arctan\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$= \frac{\arctan\left(\frac{y}{2}\right)}{2}$$

Esercizio 8

Dato l'integrale:

$$\int x\sqrt{1+x^2} \, dx$$

Si procede con la risoluzione partendo dal metodo di sostituzione:

$$\int x\sqrt{1+x^2} \, dx$$

$$\downarrow \text{ metodo di sostituzione } t = 1 + x^2; \quad t' = 2x; \quad dx = \frac{1}{t'} dt$$

$$= \int x \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2x} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\downarrow \text{ si utilizza l'integrale notevole } \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{(t)^3}}{3}$$

$$\downarrow \text{ si ritorna alla } x$$

$$= \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}$$

2 Equazioni differenziali ordinarie

Le equazioni differenziali sono il primo argomento trattato durante il corso di Analisi II. È un argomento importante dal punto di vista teorico, ma soprattutto dal punto di vista pratico poiché ricopre $\frac{1}{4}$ dell'esame.

Si presenta una prima parte di teoria per capire il suo funzionamento e successivamente una parte pratica con degli esercizi.

2.1 Concetti e teoremi fondamentali

Si chiama **equazione differenziale ordinaria di ordine n** una relazione della forma:

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad (1)$$

con $F : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione incognita $y = y(t)$ insieme alle sue derivate fino all'ordine n incluso, calcolate nello stesso punto, in questo caso t .

L'**ordine** di un'equazione è l'ordine massimo di derivazione che vi compare. Con **ordinaria** si riferisce al fatto che l'incognita è una funzione di una variabile. È importante dire ordinaria, anche se talvolta viene omissso, poiché esistono anche equazioni a **derivate parziali** quando l'incognita è una funzione di più variabili.

Esplicitando la derivata di ordine massimo nell'equazione 1, si ottiene:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \quad (2)$$

con $f : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$. Questa forma viene chiamata **normale**. Inoltre, se nell'equazione 1 F è un polinomio di primo grado, l'equazione viene definita **lineare**. Per cui, la forma generale è la seguente:

$$a_0(t) y^{(n)}(t) + a_1(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t) y'(t) + a_n(t) y(t) = b(t) \quad (3)$$

Nonostante la forma generale possa sembrare alquanto complessa, si presenta qua di seguito un **esempio** per dimostrare il contrario:

- Equazione del 1° ordine lineare:

$$N(t) = ce^{\varepsilon t}$$

Primo grado poiché vi è solo $N(t)$ e non altre derivate (e.g. $N'(t), N''(t), \dots$).
Lineare poiché $N(t)$ è un polinomio di primo grado.

Definizione 1

Si dice **soluzione** (o integrale) dell'equazione 2 una funzione $\varphi = \varphi(t)$, definita e differenziabile n -volte in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ e:

$$\varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\right) \quad \forall t \in I \quad (4)$$

Il seguente modello, che modella il moto dei pianeti, è un **esempio** di tre equazioni differenziali del secondo ordine:

$$x'' = -MG \cdot \frac{x}{r^3} \quad y'' = -MG \cdot \frac{y}{r^3} \quad z'' = -MG \cdot \frac{z}{r^3}$$

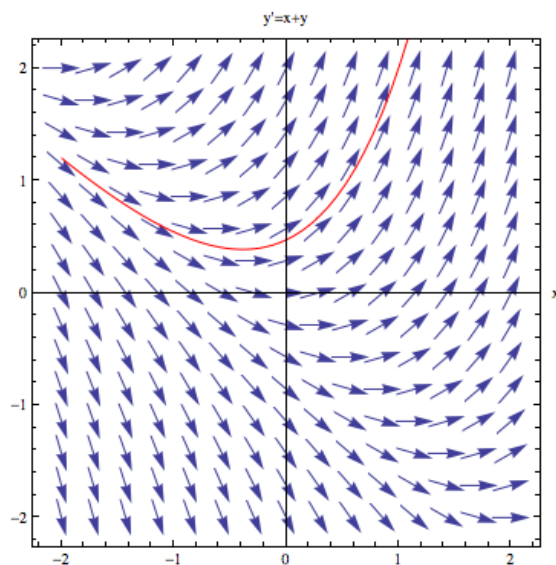
Da un **punto di vista geometrico**, un'equazione differenziale prescrive in ogni punto la **pendenza della tangente alla curva di soluzione che passa per quel punto**. Un **esempio**:

$$y' = x + y$$

se $x = 1$ e $y = 2$, allora si avrà:

$$y'(1) = 1 + 2$$

Risultato sensato vedendo il grafico:



La ricerca delle primitive di una data funzione f , continua su un intervallo, equivale a risolvere l'equazione differenziale:

$$y' = f(t)$$

che ha infinite soluzioni del tipo $y(t) = \int f(t) dt + c, c \in \mathbb{R}$.

Più in generale, l'**insieme delle soluzioni** di un'equazione differenziale di ordine n o di un sistema di n equazioni del primo ordine sia rappresentato da una famiglia di funzioni, **dipendente da n parametri**. Tale famiglia prende il nome di **integrale generale**.

2.2 Equazioni a variabili separabili

Le **equazioni a variabili separabili** sono della forma:

$$y' = f(t) g(y) \quad (5)$$

Con la funzione f continua nell'intervallo I ($f \in C(I)$) e la funzione g continua nell'intervallo J ($g \in C(J)$). Gli intervalli I, J sono contenuti in \mathbb{R} .

Nota bene: se la funzione \bar{y} è soluzione dell'equazione $g(y) = 0$, la retta $y = \bar{y}$ è una curva integrale (si veda l'esempio sottostante per convincersi di ciò).

Se $g(y) \neq 0$ in $J' \subseteq J$, l'integrale generale dell'equazione 5 è:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + c \quad (6)$$

Esempio

Data l'equazione:

$$y' = 2t\sqrt{1-y^2}$$

Si può effettuare immediatamente un'osservazione importante. Come detto precedentemente, se $g(y) = 0$ e \bar{y} è soluzione dell'equazione, allora $y = \bar{y}$ è una curva integrale. Si può facilmente trovare due valori di y tali per cui l'equazione sia uguale a zero:

$$\begin{aligned} y = 1 &\longrightarrow y' = 2t\sqrt{1-1^2} \\ &y' = 2t \cdot 0 \\ &y' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = -1 &\longrightarrow y' = 2t\sqrt{1-(-1)^2} \\ &y' = 2t \cdot 0 \\ &y' = 0 \end{aligned}$$

Dato che:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t \\ g(y) &= \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

E con $y = \pm 1$ la funzione g si annulla, allora ± 1 sono soluzioni dell'equazione.

Adesso si cercano le soluzioni tali che $g(y) \neq 0$, quindi con $y \neq \pm 1$. Per farlo, si applica semplicemente la "formula" 6:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = 2 \int t dt + c$$

Si procede con la risoluzione degli integrali:

$$2 \cdot \int t dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2} = t^2 + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \arcsin(y)$$

Si riaggregano i risultati:

$$\arcsin(y) = t^2 + c$$

Si esplicita la y ricordando le proprietà della trigonometria $\arcsin(y) = x \rightarrow \sin(x) = y$:

$$y = \sin(t^2 + c)$$

2.3 Problema di Cauchy

Il **problema di Cauchy (o dei valori iniziali)** ha due forme:

- Equazioni scalari di ordine n , con l'obiettivo di trovare y di classe¹ C^n tale che:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(\tau) = \xi_0 \\ y'(\tau) = \xi_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \end{cases}$$

essendo $\tau, \xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ costanti assegnate;

- Sistemi, con l'obiettivo di trovare y di classe C^1 tale che:

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$$

essendo $\tau \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ assegnati.

Le equazioni $y^{(j)}(\tau) = \xi_j$ con $j = 0, \dots, j = n-1$, e $y(\tau) = \xi$, prendono il nome di **condizioni iniziali**. Le soluzioni si intendono definite localmente, ovvero in un intorno dell'istante iniziale τ .

Un **esempio** di problema di Cauchy:

$$\begin{cases} z''(t) + 4z'(t) + 4z(t) = (t+1)^2 \\ z(0) = \frac{1}{8} \\ z'(0) = -3 \end{cases}$$

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$(P) \begin{cases} y'(x) = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema 1 (Teorema di esistenza e unicità locale per equazioni differenziabili a variabili separabili). *Sia $a(x)$ una funzione continua in un intervallo aperto I che contiene x_0 e $b(y)$ una funzione continua in un intervallo aperto J che contiene y_0 . Allora esiste $\delta > 0$ e una funzione definita per ogni $x \in I' [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I$ e ivi derivabile che risolve il problema di Cauchy. Se $b(y) \in C^1(J)$, allora tale soluzione è unica.*

Considerando il teorema 1 enunciato poco fa, si intende dire che esiste almeno una funzione $(\bar{y}(x))$ tale che la sua derivata è uguale alla funzione continua $(a(x))$ moltiplicata per un'altra funzione continua $(b(y))$ che ha come parametro la primitiva:

$$\begin{array}{ll} \text{Primitiva} & \longrightarrow \bar{y}(x) \\ \text{Derivata} & \longrightarrow \bar{y}'(x) = a(x) \cdot b(\bar{y}(x)) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \end{array}$$

¹Con questa notazione si indica che una funzione ha una derivata continua di grado n . Quindi dicendo che y è di classe C^4 , vuol dire che y, y', y'', y''', y'''' sono tutte funzioni continue.

Ovviamente la derivata $\bar{y}(x)$ deve valere per qualsiasi x che appartiene all'intorno x_0 aggiungendo/rimuovendo δ . Inoltre la primitiva nel punto x_0 deve essere uguale a y_0 ($\bar{y}(x_0) = y_0$). Allora, la primitiva ($\bar{y}(x)$) è derivabile e la sua derivata è continua. L'unicità è possibile affermarla se la funzione $b(y)$ ha una proprietà più forte della continuità, ovvero la continuità nella derivata in J .

2.3.1 Intervallo massimale

Si parte subito con il dire che determinare l'intervallo massimale non è un'operazione banale. Questo perché non esistono algoritmi (semplici) certi che consentono di ottenere un intervallo massimale. Tuttavia, lo studente può utilizzare il ragionamento ed eventuali intuizioni per capire quando una soluzione ha intervallo estendibile e quando esso è massimale.

Definizione 2

Il più ampio intervallo su cui la soluzione è definita si chiama **intervallo massimale**.

L'intervallo massimale è possibile determinarlo una volta che si è giunti al termine del problema di Cauchy (par. 2.3). Una volta concluso l'esercizio, avendo trovato l'integrale generale e la costante c , è necessario eseguire alcuni passaggi:

- a) Nell'integrale generale, sostituire la costante c trovata al termine dell'esercizio;
- b) Esplicitare la y tramite passaggi algebrici;
- c) Porre la condizione di esistenza;
- d) Studiare l'intervallo massimale con appositi ragionamenti.

Si procede presentando due esempi e ricordando che un intervallo, può essere esteso se rispetta certe condizioni.

Esempio 1

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare l'intervallo massimale.

Il problema è risolvibile con il metodo delle variabili separabili (par. 2.2):

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x)g(y) \\ f(x) &= e^{-x} \\ g(y) &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int e^{-x} dx + c$$

Si potrebbe tentare di calcolare una soluzione costante, ma risulterebbe evidente che l'unica soluzione costante, cioè $y = 0$, non è ammessa come soluzione del problema (condizione iniziale $y(0) = 1$). Per questo motivo, si procede con il metodo delle variabili separabili.

Si risolve l'integrale:

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = -e^{-x} + c$$

$$\downarrow \text{ si utilizza l'integrale notevole } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -e^{-x} + c$$

$$2\sqrt{y} = -e^{-x} + c$$

La soluzione trovata è l'integrale generale. Si conclude il problema di Cauchy trovando la costante c , quindi applicando la condizione iniziale $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1} &= -e^{-0} + c \\ 2 + 1 &= c \\ 3 &= c \end{aligned}$$

Adesso si calcola l'intervallo massimale:

- Si sostituisce nell'integrale generale la costante c :

$$2\sqrt{y} = -e^{-x} + 3$$

Si esplicita la y :

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2} \\ y &= \left(-\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

- Le condizioni d'esistenza del problema di Cauchy sono le seguenti:

$$\sqrt{y}e^{-x} \longrightarrow \underbrace{]-\infty, +\infty[}_{def.x} \times \underbrace{[0, +\infty[}_{def.y}$$

La y deve essere maggiore/uguale a zero, mentre la x non ha grosse restrizioni. L'intervallo massimale per definizione può essere identico o un sottoinsieme. Per trovarlo è necessario studiare il valore della y esplicitata al passaggio precedente. In questo caso, essa in zero ($y = 0$) non ha soluzione, per cui si cercano le soluzioni per $y > 0$.

- Andando a cercare una soluzione costante dell'equazione differenziale, ci si accorge che $g(y) = \sqrt{y}$ è uguale a zero solo se $y = 0$, e quindi essa sarebbe una soluzione costante del problema (ricordandosi quanto detto nel par. 2.2) poiché $g(y) = 0$ con $y = \bar{y}$. Tuttavia, $y = 0$ non è ammesso dal problema a causa della condizione iniziale $y(0) = 1$.

Per questo motivo, si cerca una soluzione tale che $y > 0$. E per farlo, si prende in considerazione la y trovata al passaggio precedente e si impone una condizione:

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2} &> 0 \\ -e^{-x} &> -3 \\ e^{-x} &< 3 \\ -x &< \ln(3) \\ x &> -\ln(3) \end{aligned}$$

- Per ciascun valore di x che è maggiore di $-\ln(3)$, la y deve valere:

$$y = \left(-\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2} \right)^2$$

E per tutti gli altri casi? Nei casi in cui la x sia minore o uguale a $-\ln(3)$, la y dovrà valere 0, come confermato nel caso della soluzione costante $y = 0$.

Da queste considerazioni, è possibile rappresentare la soluzione del problema di Cauchy \bar{y} come:

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \left(-\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2} \right)^2 & \text{se } x > -\ln(3) \\ 0 & \text{se } x \leq -\ln(3) \end{cases}$$

Per cui l'intervallo massimale è $-\infty, +\infty$ e difatti si può estendere a destra e sinistra.

Esempio 2

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y^2 \cos(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

Calcolare l'intervallo massimale.

Il problema è risolvibile con il metodo delle variabili separabili (par. 2.2):

$$\begin{aligned} y'(x) - f(x)g(y) &= 0 \longrightarrow y'(x) = f(x)g(y) \\ f(x) &= \cos(x) \\ g(y) &= y^2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \cos(x) dx + c$$

Si potrebbe tentare di calcolare una soluzione costante, ma risulterebbe evidente che l'unica soluzione costante, cioè $y = 0$, non è ammessa come soluzione del problema (condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$!). Per questo motivo, si procede con il metodo delle variabili separabili.

Si risolve l'integrale:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \cos(x) dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int \cos(x) dx$$

$$\downarrow \text{ si utilizza l'integrale notevole } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \sin(x)$$

$$-y^{-1} = \sin(x)$$

$$y = -\frac{1}{\sin(x)} + c$$

La soluzione trovata è l'integrale generale. Si conclude il problema di Cauchy trovando la costante c , quindi applicando la condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$:

$$-1 = -\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + c$$

$$-1 = -\frac{1}{1} + c$$

$$0 = c$$

Adesso si calcola l'intervallo massimale:

- Si sostituisce nell'integrale generale la costante c :

$$y = -\frac{1}{\sin(x)} + 0$$

- La condizione d'esistenza del problema di Cauchy sono le seguenti:

$$y^2 \cos(x) \longrightarrow \underbrace{]-\infty, +\infty[}_{def.x} \times \underbrace{]-\infty, +\infty[}_{def.y}$$

- A differenza dell'esempio precedente, in questo caso la x non può essere qualsiasi valore poiché il \sin è al denominatore. Per cui, la condizione d'esistenza è:

$$\sin(x) > 0$$

Calcolando il arcsin di 0, si ottiene:

$$x > \arcsin(0) \longrightarrow x > 0$$

Ma attenzione! Perché il valore \sin si può annullare anche con altri valori di x , come per esempio π , per cui:

$$0 < x < \pi$$

Questo risulta l'intervallo massimale, ovviamente estremi esclusi.