Soluzione - Simulazione di Elaborazione di segnali e immagini

Università degli Studi di Verona

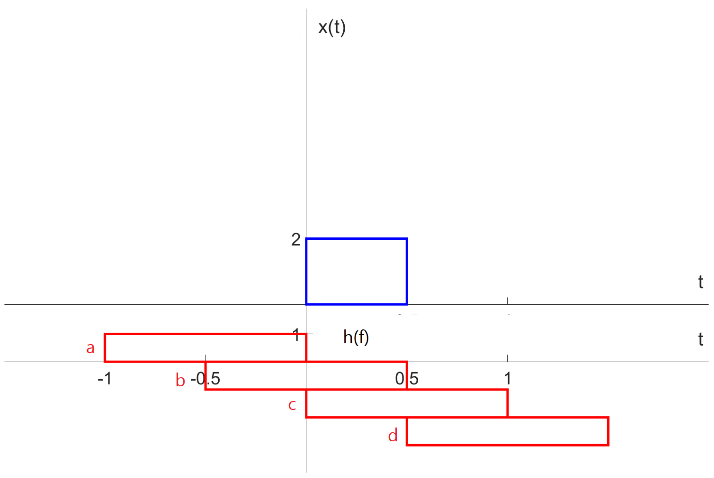
29 Gennaio 2020

1 Soluzione Esercizio

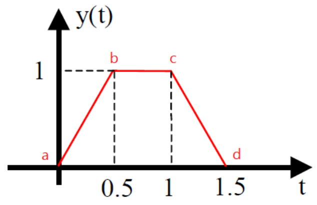
La convoluzione può essere riscritta come il prodotto tra i due segnali:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Assumendo che il segnale $h(t)$, che per convenzione scriveremo $h(f)$, negli estremi sia uguale a zero, si esegue una convoluzione grafica. Quindi, si evidenziano con le lettere a, b, c e d i vari spostamenti:



Ad ogni spostamento del segnale $h(f)$, si costruisce graficamente l'area del segnale risultante, ovvero $y(t)$:

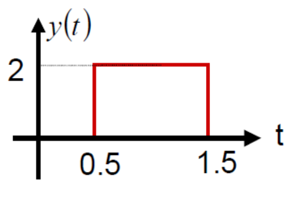


2 Soluzione Esercizio

Assumendo che i segnali siano rappresentati nel dominio del tempo discreto, allora la loro convoluzione corrisponde come il prodotto tra i due segnali:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{\tau} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \\
& \mid \\
&= \sum_{\tau} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \\
& \mid \\
&= \sum_{\tau} h(\tau) \cdot 2\delta(t-0.5) \\
& \downarrow \quad \text{Proprietà di setacciamento} \\
&= 2 \cdot h(t-0.5)
\end{aligned}
$$

Graficamente il segnale $y(t)$ risulta uguale a zero fino al valore 0.5, ovvero finché il segnale $h(t)$ interseca il segnale $x(t)$. Dopodiché, rimane di ampiezza pari a 2 fino al valore 1.5, ovvero l'ultima intersezione registrata durante la convoluzione (per la convoluzione grafica si guardi la soluzione precedente):



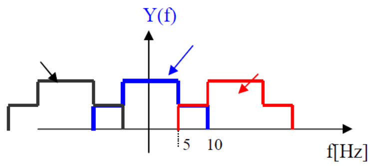
Nota: il valore $x(t-\tau)$ è pari a $2\delta(t-0.5)$ poiché è stato fornito dal testo dell'esercizio.

3 Soluzione Esercizio

La soluzione dell'esercizio prevede 3 casi per 3 valori di campionamento diverso. Nel primo caso (a) si determina anche il risultato (output) grafico del campionamento nel dominio del tempo continuo e nel dominio delle frequenze.

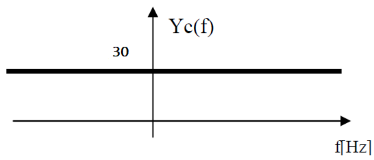
Caso a

Il campionamento è ogni 15 Hz, quindi il grafico è:

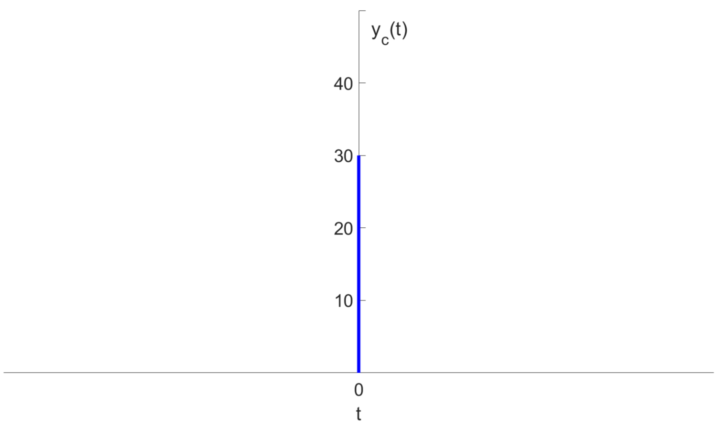


L'ampiezza del segnale diventa 30 (2×15). Anche senza il teorema di Nyquist[1] è possibile notare l'aliasing.

Il risultato post campionamento è un segnale costante di ampiezza 30 (si ricorda che il campionamento è la moltiplicazione del segnale per un treno di impulsi):



Nel dominio delle frequenze, il segnale è un impulso centrato in 0 con ampiezza pari a 30:

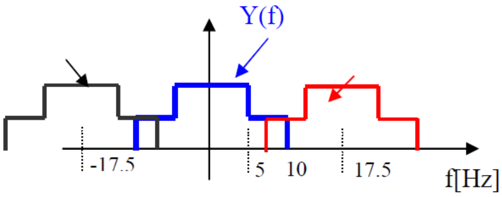


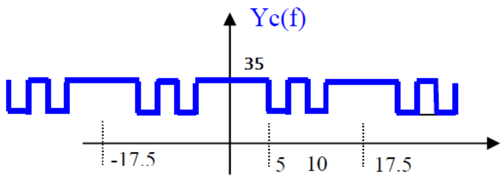
$$y_c(t) = 30\delta(t)$$

[1] Teorema di Nyquist

Caso *b*

Il campionamento è ogni 17.5 Hz, quindi il grafico è:

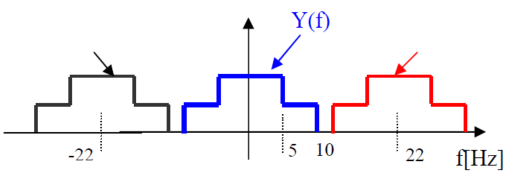


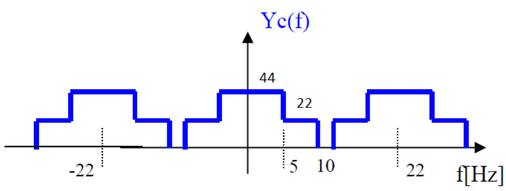


L'ampiezza del segnale diventa 35 (2×17.5). Si manifesta aliasing.

Caso *c*

Il campionamento è ogni 22 Hz, quindi il grafico è:





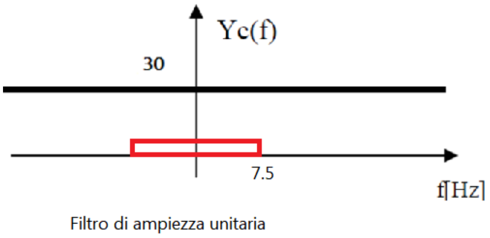
L'ampiezza del segnale diventa 44 (2×17.5). L'aliasing non si presenta.

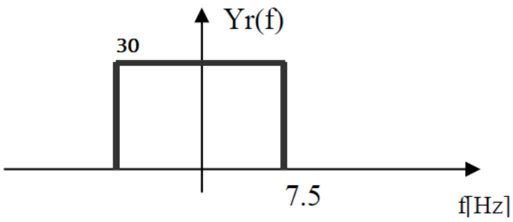
4 Soluzione Esercizio

Si applica il filtro di ricostruzione ideale con una frequenza che dipende a quanto è stato campionato ogni segnale.

Caso *a*

La frequenza del campionamento è stata con una frequenza di 15 Hz. Quindi, la frequenza di taglio del filtro di ricostruzione ideale è 7.5 Hz ($15 \div 2$).



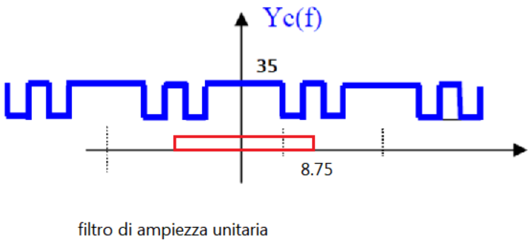


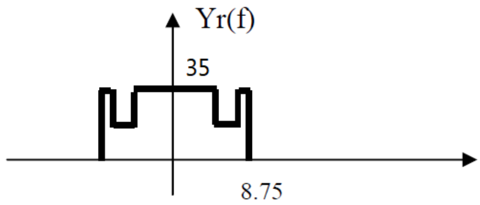
A sinistra in alto, la rappresentazione del segnale insieme al filtro e a destra in basso, la ricostruzione ideale che non corrisponde al segnale originario.

Il filtro, da definizione, taglia tutte le frequenze e si ottiene una box di base 15 e altezza 30. Dato che il segnale manifestava aliasing, il segnale non può essere ricostruito.

Caso *b*

La frequenza del campionamento è stata con una frequenza di 17.5 Hz. Quindi, la frequenza di taglio del filtro di ricostruzione ideale è 8.75 Hz ($17.5 \div 2$).



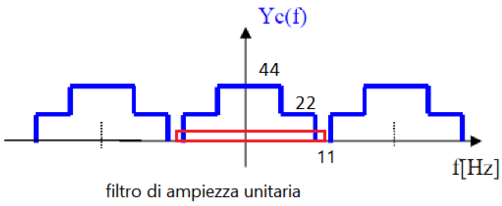


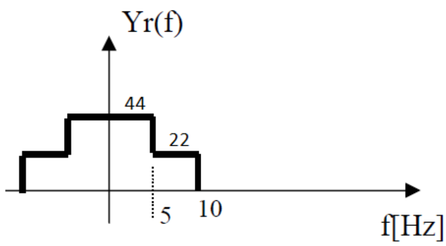
A sinistra in alto, la rappresentazione del segnale insieme al filtro e a destra in basso, la ricostruzione ideale che non corrisponde al segnale originario.

Il filtro, da definizione, taglia tutte le frequenze e si ottiene una box di base 17.5 e altezza 35. Dato che il segnale manifestava aliasing, il segnale <u>non</u> può essere ricostruito.

Caso *c*

La frequenza del campionamento è stata con una frequenza di 22 Hz. Quindi, la frequenza di taglio del filtro di ricostruzione ideale è 11 Hz ($22 \div 2$).





A sinistra in alto, la rappresentazione del segnale insieme al filtro e a destra in basso, la ricostruzione ideale che corrisponde al segnale originario.

Il filtro, da definizione, taglia tutte le frequenze e si ottiene una box di base 20 e altezza 44. Dato che il segnale <u>non</u> manifestava aliasing, **è stato ricostruito con successo**.