Dr. Rosanna Laking, Dr. Margherita Zorzi
Università degli Studi di Verona, A.A. 2021/2022
Corso di Laurea in Informatica

Esame per il Corso di ALGEBRA LINEARE

02/09/2022

1. **(8 punti)**
   (a) Calcolare z^4 dove $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.
   (b) Considerare la seguente matrice:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8k & 0 \end{pmatrix}$$
   Calcolare il rango rk$A$ di A e il determinante det$A$ di A al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

2. **(8 punti)** Considerare la seguente matrice:
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$
   (a) Trovare una forma ridotta e una decomposizione LU di B.
   (b) Determinare se B è invertibile e motivare la risposta. Se sì, calcolare l'inversa di B.

3. **(8 punti)** Considerare la seguente matrice:
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Trovare una base del sottospazio $C(D)$ di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne to D e una base dello spazio nullo $N(D^T)$ della trasposta D^T di D.
   (b) Mostrare che l'insieme $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   (c) Considerare la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Calcolare la matrice $N = A_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}}$, cioè l'unica matrice N tale che $c_{\mathcal{B}}(v) = Nc_{\mathcal{C}}(v)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

4. **(6 punti)** Considerare la seguente matrice: $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vero o falso? Si motivi la risposta!
   (a) Gli autovalori di M sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.
   (b) La matrice M è diagonalizzabile.
   (c) Le colonne di M sono ortogonali.

5. **(1 punti)** Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dimostrare la seguente affermazione: Se A possiede un'inversa destra R e un'inversa sinistra L, allora $L = R$.