Soluzioni Esami di Algebra Lineare

VR443470

giugno 2023

Indice

1 Esame del 20/06/2022

1.1 Esercizio 1

(**6 punti**) Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}$$

1.1.1 Punto a

Si calcoli, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il rango $\operatorname{rk} A$ di A.

Si applica l'eliminazione di Gauss per ottenere il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -a & 2+a & -a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,4}(-a-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -a & 2+a & -a \\ 0 & 0 & 2 & a^2-2a-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{2,3}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a^2-2a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3,4}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a-3 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è influenzato solo dall'espressione $a^2 - 2a - 3$. Quindi, nel caso di:

$$\operatorname{rk}(A) = \begin{cases} 3 & a^2-2a-3 = 0 \\ 4 & a^2-2a-3 \neq 0 \end{cases}$$

1.1.2 Punto b

Si calcoli il determinante $\det(A)$ ***di*** A***.***

Per velocizzare i calcoli, si utilizza il metodo di Gauss Jordan[1]. Per il calcolo del determinante, si ricordano le seguenti regole:

- Lo scambio di una riga cambia il segno del determinante (quindi lo moltiplica per -1);
- La moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo, provoca la moltiplicazione dell'inverso di esso al determinante della matrice. Quindi, data l'operazione $E_i(\alpha)$, il determinante viene moltiplicato per $\frac{1}{\alpha}$;
- La moltiplicazione di una riga per uno scalare e la successiva somma, non cambia il determinante.

Quindi, si ottiene il determinante della matrice ridotta A' moltiplicando la diagonale:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - a - 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \left(a^2 - 2a - 3\right) = -2a^2 + 4a + 6$$

E controllando le operazioni eseguite al punto precedente, è possibile notare che non è stato effettuato nessuno scambio di righe e nessuna moltplicazione + somma. Quindi il determinante è lo stesso:

$$\det(A) = \det(A') = -2a^2 + 4a + 6$$

[1]Approfondimento: YouMath

1.1.3 Punto c

Si determino i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che A possiede una inversa.

La matrice A possiede un'inversa se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Quindi, risolvendo l'equazione del determinante, si può capire per quali valori di a, la matrice A ammette inversa:

$$-2a^2 + 4a + 6 = 0 \longrightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longrightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot -2 \cdot 6}}{2 \cdot -2} = \frac{-4 \pm 8}{-4}$$

Le soluzioni che azzerano l'equazione sono:

$$a_0 = -1$$
$$a_1 = 3$$

Si conclude dicendo che:

$$\det(A) = \begin{cases} 0 & a = -1 \lor a = 3 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La matrice A possiede una inversa se e solo se il determinante è diverso da zero. Il determinante è diverso da zero se e solo se a è diverso da -1 e da 3. Quindi, A possiede una inversa per i valori $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

2 Esame del 15/07/2022

3 Esame del 02/09/2022

4 Esame del 20/02/2023