Dr. Rosanna Laking
Università degli Studi di Verona, A.A. 2022/2023
Corso di Laurea in Informatica

Esame per il Corso di ALGEBRA LINEARE

28/06/2023

1. **(7 punti)** Si consideri il numero complesso $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
   (a) Si calcolino i seguenti numeri:
      i. Il modulo $|z|$ di z.
      ii. Il coniugato $\bar{z}$ di z.
      iii. Il numero complesso $\frac{1}{z}$.
   (b) Si calcoli il prodotto zw dove $w = 5(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$.
   (c) Si calcolino tutte le radici quadrate di z.

2. **(7 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Si calcoli una forma ridotta U di A e si determini il rango di A.
   (b) Si trovi una matrice invertibile E tale che $A = EU$.
   (c) Si risolva il sistema lineare per cui la matrice A è la matrice aumentata corrispondente.
   (d) Si dica se il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ammette una sola soluzione.

3. **(10 punti)** Si consideri la seguente matrice con $t \in \mathbb{C}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ t & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Si calcolino gli autovalori di A_t.
   (b) Si determini i valori di $t \in \mathbb{C}$ per cui la matrice A_t è diagonalizzabile.
   (c) Si trovino basi per ognuno degli autospazi di A_0.

4. **(6 punti)** Si consideri la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

   Vero o falso? Si giustifichi la risposta!

   (a) La matrice B è la matrice associata all'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3x \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbb{R}^2$ e la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   (b) Lo spazio delle colonne $C(B)$ di B ha dimensione 3.
   (c) Lo spazio nullo $N(B)$ di B possiede una base ortonormale.

5. **(1 punti)** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Si dimostri che l'applicazione delle coordinate $c_{\mathcal{B}}\colon V \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo.

Angolo α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
0	1	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	-1	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$