Dr. Rosanna Laking, Dr. Margherita Zorzi
Università degli Studi di Verona, A.A. 2021/2022
Corso di Laurea in Informatica

Esame per il Corso di ALGEBRA LINEARE

20/06/2022

1. **(6 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}.$$

   (a) Si calcoli, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il rango rk$A$ di A.
   (b) Si calcoli il determinante det$A$ di A.
   (c) Si determinino i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che A possiede una inversa.

2. **(12 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Si calcolino tutti gli autovalori di B su $\mathbb{R}$ e si trovino delle basi dei loro autospazi.
   (b) Si verfichi che la matrice B è diagonalizzabile e si scrivano la matrice diagonale D e la matrice invertibile S tali che $B = SDS^{-1}$.
   (c) Utilizzando la diagonalizzazione, si calcoli il prodotto B^5.

3. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice:

$$M = \begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix}.$$

   (a) Si calcoli la H-trasposta M^H di M.
   (b) Si determinino una base di $C(M)$ e una base di $N(M^H)$ su $\mathbb{C}$.
   (c) Si scriva una base di $\mathbb{C}^3$ che contiene le colonne di M.

4. **(4 punti)** Vero o falso? Si motivi la risposta!

   (a) Il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ammette soltanto la soluzione banale $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è linearemente dipendente.

5. **(1 punti)** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si dimostri la seguente affermazione: Se almeno uno dei vettori $v_1, \ldots, v_2$ è combinazione lineare dei rimanenti, allora $\{v_1, \ldots, v_2\}$ non è linearmente indipendente.