Università degli studi di Verona

Soluzioni scheda 1

VR455961 Davide Bragantini
VR443470 Andrea Valentini

marzo 2023

Indice

1 Soluzione esercizio 1

Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

1.1 Soluzione *a*

Si determini la matrice risultante ottenibile eseguendo l'operazione $(CD)\,A$:

$$\begin{aligned} (CD)\,A &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+4i & 5 \\ -2-2i & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+9i & -\frac{3}{2}-4i \\ -2-4i & 1+2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2 Soluzione *b*

Si determini la matrice risultante ottenibile eseguendo l'operazione $A^T B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 3i \\ -\frac{1}{2} & -3i \end{pmatrix}$$

1.3 Soluzione *c*

Si determini la matrice risultante ottenibile eseguendo l'operazione $3A\left(B - D^T\right)$:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow D^T = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow -D^T = \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3A\left(B - D^T\right) &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 3i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right] \\ &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1+2i \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3i & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1+2i \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3+6i \\ 0 & -9-3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.4 Soluzione *d*

Si determini la matrice risultante ottenibile eseguendo l'operazione $(4B-C)^T - DC$:

$$\begin{aligned}
(4B-C)^T - DC &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 12i \\ -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\right]^T - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} -3 & -4+12i \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right]^T - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+3i & 4i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4+12i & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+3i & 4i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -3+9i & 2-4i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2 Soluzione esercizio 2

Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1 Soluzione *a*

Si utilizza l'algoritmo di Eliminazione di Gauss per determinare una forma ridotta di ognuna delle matrici elencate.

La forma ridotta della **matrice *A*** è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2,3}(3)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_1\left(\frac{1}{2}\right)]{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_4\left(\frac{1}{5}\right)]{E_3\left(\frac{1}{12}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{3,2}(4)]{E_{4,3}\left(-\frac{1}{4}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma ridotta della **matrice *B*** è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,2}]{E_{4,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{4,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma ridotta della **matrice $\boldsymbol{C}$** è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,4}]{E_{5,2}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,5}(-1)]{E_{2,4}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{1,5}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,3}\left(\frac{2}{3}\right)]{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{E_{3}\left(\frac{3}{10}\right)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3,2}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2}\left(\frac{1}{3}\right)]{E_{1}\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma ridotta della **matrice $\boldsymbol{D}$** è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{E_{3,2}\left(-\frac{5}{2}\right)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2}\left(\frac{1}{2}\right)]{E_{1}\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Soluzione b

Date le forme ridotte A', B', C', D' delle rispettive matrici A, B, C e D, il loro rango corrisponde al numero delle colonne dominanti, quindi:

$$
\begin{aligned}
A' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \longrightarrow \quad \mathrm{rk}\,(A) = 4 \\
B' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \longrightarrow \quad \mathrm{rk}\,(B) = 4 \\
C' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \longrightarrow \quad \mathrm{rk}\,(C) = 3 \\
D' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \longrightarrow \quad \mathrm{rk}\,(D) = 3
\end{aligned}
$$

2.3 Soluzione c

Si scrivano i sistemi lineari per cui le matrici indicate sopra sono le corrispondenti matrici aumentate, e si usi il Teorema di Rouché-Capelli per decidere se ognuno di questi sistemi ha o non ha soluzioni.

I sistemi lineari delle corrispondenti matrici aumentate sono:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_3 = 3 \\ 0 = 5 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ -4x_1 = -2 \\ 3x_2 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 = 2 \end{cases}$$

Si applica il teorema di Rouché-Capelli per decidere se ogni sistema ha o non ha soluzioni.

Dimostrazione soluzioni matrice A. Considerando la matrice aumentata $(A|b)$ con il rango pari a 4:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Si esegue lo studio del rango della matrice incompleta A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si procede con l'Eliminazione di Gauss per ottenere la forma ridotta e infine si calcola il rango tramite le colonne dominanti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,3}]{E_{1,2}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2,3}\left(\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3\left(\frac{1}{4}\right)]{E_1\left(\frac{1}{2}\right), E_2\left(\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono 3, quindi il rango della matrice incompleta A è 3 ($\text{rk}\,(A) = 3$). Il teorema di Rouché-Capelli afferma che se:

$$\text{rk}\,(A) < \text{rk}\,(A|b)$$

Ovvero se il rango della matrice incompleta è minore del rango della matrice completa, allora il sistema è impossibile da risolvere, cioè non ammette soluzioni.

QED

Dimostrazione soluzioni matrice B. Considerando la matrice aumentata $(B|b)$ con il rango pari a 4:

$$(B|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si esegue lo studio del rango della matrice incompleta B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si procede con l'Eliminazione di Gauss per ottenere la forma ridotta e infine si calcola il rango tramite le colonne dominanti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,2}]{E_{4,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{E_{4,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono 4, quindi il rango della matrice incompleta B è 4 ($\mathrm{rk}\,(B) = 4$). Il teorema di Rouché-Capelli afferma che se:

$$\mathrm{rk}\,(B) = \mathrm{rk}\,(B|b)$$

Ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa, allora il sistema è compatibile, cioè ammette una o infinite soluzioni. In particolare, dato n come il numero di incognite, cioè 6, allora:

$$\mathrm{rk}\,(B) = \mathrm{rk}\,(B|b) < n \Longrightarrow 4 = 4 < 6 \checkmark$$

Il sistema ammette infinite soluzioni. QED

Dimostrazione soluzioni matrice C. Considerando la matrice aumentata $(C|b)$ con il rango pari a 3:

$$(C|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Si esegue lo studio del rango della matrice incompleta C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si procede con l'Eliminazione di Gauss per ottenere la forma ridotta e infine si calcola il rango tramite le colonne dominanti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,5}(-1), E_{1,3}(2)]{E_{3,2}, E_{3,5}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,4}\left(\frac{2}{3}\right)]{E_{1,4}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2\left(\frac{1}{3}\right)]{E_1\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono 2, quindi il rango della matrice incompleta C è 2 ($\operatorname{rk}(C) = 2$). Il teorema di Rouché-Capelli afferma che se:

$$\operatorname{rk}(C) < \operatorname{rk}(C|b)$$

Ovvero se il rango della matrice incompleta è minore del rango della matrice completa, allora il sistema è impossibile da risolvere, cioè non ammette soluzioni.
QED

Dimostrazione soluzioni matrice D. Considerando la matrice aumentata $(D|b)$ con il rango pari a 3:

$$(D|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Si esegue lo studio del rango della matrice incompleta D:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si procede con l'Eliminazione di Gauss per ottenere la forma ridotta e infine si calcola il rango tramite le colonne dominanti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right)]{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2}\left(\frac{1}{2}\right)]{E_{1}\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono 2, quindi il rango della matrice incompleta D è 2 ($\mathrm{rk}\,(D) = 2$). Il teorema di Rouché-Capelli afferma che se:

$$\mathrm{rk}\,(D) < \mathrm{rk}\,(D|b)$$

Ovvero se il rango della matrice incompleta è minore del rango della matrice completa, allora il sistema è impossibile da risolvere, cioè non ammette soluzioni.

QED

2.4 Soluzione *d*

Si trovino tutte le soluzioni del sistema di equazioni lineari:

$$(D|b) = D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si scrive la matrice aumentata:

$$(D|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

E si esegue l'Eliminazione di Gauss per ottenere una forma ridotta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{1,3}(-1)]{E_{3,2}\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{E_{3,2}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_2\left(\frac{1}{2}\right)]{E_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Il rango della matrice è pari al numero di colonne dominanti:

$$\mathrm{rk}\,(D|b) = 3$$

Il rango della matrice incompleta D è pari a 3 (calcolato nel paragrafo 2.2). Quindi, grazie al Teorema di Rouché-Capelli si ha:

$$\mathrm{rk}\,(D|b) = \mathrm{rk}\,(D) = n \Longrightarrow 3 = 3 = 3 \checkmark$$

Dove n rappresenta il numero di incognite. Quindi, il sistema ammette un'unica soluzione che è quella trovata grazie all'Eliminazione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{11}{4} \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Il vettore soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$$

3 Soluzione esercizio 3

Per ogni parametro t in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice:

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{pmatrix}$$

3.1 Soluzione *a*

Si calcola il rango di A_t con $t = -1$. La matrice A_{-1} è:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'Eliminazione di Gauss porta alla seguente forma ridotta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{1,2}(-2)]{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,1}(1)]{E_{2,3}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{3,1}(1)]{E_{1,3}(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di A_{-1} è pari a 3 (numero delle colonne dominanti):

$$\operatorname{rk}(A_{-1}) = 3$$

3.2 Soluzione *b*

Si calcola il rango di A_t per ogni valore di t:

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{pmatrix}$$

Si applica l'Eliminazione di Gauss, che porta alla seguente forma ridotta:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{1,3}(-1)]{E_{1,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \\ 0 & -1-t & -t+1 & 2-t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 0 & -1-t & -t+1 & 2-t \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2t+1 \\ 0 & -1-t & -t+1 & 2-t \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Il rango:

$$\operatorname{rk}(A_t) = \begin{cases} 3 & t = -1 \\ 3 & t \neq -1 \end{cases}$$

Quindi il rango rimane a 3 per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$.

3.3 Soluzione *c*

Supponiamo che la matrice A_t sia la matrice aumentata di un sistema lineare su $\mathbb{R}$. Per quali valori di t il sistema avrà soluzione?

Per rispondere a questa domanda, è possibile sfruttare il teorema di Rouché-Capelli. Quindi, data la matrice aumentata $(A_t|b)$ e il suo sistema corrispondente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{array}\right) \implies \begin{cases} x_1 + tx_2 - x_3 = t \\ 2x_1 + 2tx_2 - x_3 = 3t+1 \\ x_1 - x_2 - tx_3 = 2 \end{cases}$$

La corrispondente matrice incompleta A_t sarà composta da:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 2t & -1 \\ 1 & -1 & -t \end{pmatrix}$$

Si calcola il rango della matrice incompleta tramite l'Eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 2t & -1 \\ 1 & -1 & -t \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{1,3}(-1)]{E_{1,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1-t & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(1)]{E_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1-t & 1-t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta:

$$\mathrm{rk}\,(A_t) = \begin{cases} 2 & t = -1 \\ 3 & t \neq -1 \end{cases}$$

Quindi, grazie al teorema di Rouché-Capelli è possibile affermare che il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 - x_3 = t \\ 2x_1 + 2tx_2 - x_3 = 3t+1 \\ x_1 - x_2 - tx_3 = 2 \end{cases}$$

Avrà soluzione **solo** nel caso in cui t sia diverso da -1, altrimenti il sistema non avrà soluzioni e sarà impossibile da risolvere.

$$\begin{array}{ccccccc} t = -1 & \implies & \mathrm{rk}\,(A_t) = 2 & \implies & \mathrm{rk}\,(A_t) < \mathrm{rk}\,(A_t|b) & \implies & \nexists \text{ soluzioni} \\ t \neq -1 & \implies & \mathrm{rk}\,(A_t) = 3 & \implies & \mathrm{rk}\,(A_t) = \mathrm{rk}\,(A_t|b) & \implies & \exists \text{ soluzioni} \end{array}$$

In particolare, sempre utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, dato che il numero di incognite è pari a 3 e il rango della matrice è 3, esiste un'unica soluzione. Per esempio, prendendo $t = 0$ e sostituendo tale valore nella matrice $(A_t|b)$ con A_t ridotto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 0 & t \\ 0 & -1-t & 1-t & 3t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{sostituzione}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{sistema}} \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema sarà:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } t \neq -1$$

4 Soluzione esercizio 4

Si risolva la seguente equazione nell'insieme di numeri complessi $x^4 + 1 = 0$:

$$
\begin{aligned}
x^4 + 1 &= 0 \\
x^4 &= -1 \\
x &= \sqrt[4]{-1} \\
&\downarrow \quad \text{utilizzando la forma polare } r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\
&= \sqrt[4]{1\left(\cos\left(\pi\right) + i\sin\left(\pi\right)\right)} \\
&\downarrow \quad \text{calcolo della } n\text{-esima radice usando } \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right) \\
&\downarrow \quad \text{sostituzione dei valori 0, 1, 2, 3 al posto di } k \\
&= \begin{cases}
x_1 = \cancelto{1}{\sqrt[4]{1}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right)\right) \\[2ex]
x_2 = \cancelto{1}{\sqrt[4]{1}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right)\right) \\[2ex]
x_3 = \cancelto{1}{\sqrt[4]{1}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right)\right) \\[2ex]
x_4 = \cancelto{1}{\sqrt[4]{1}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right)\right)
\end{cases} \\
&\downarrow \quad \text{qualche calcolo algebrico e fine dell'esercizio} \\
&= \begin{cases}
x_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\[2ex]
x_2 = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\[2ex]
x_3 = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \\[2ex]
x_4 = \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

5 Soluzione esercizio 5

Si mostri che la trasposta A^T e l'inversa A^{-1} coincidono per $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ per ogni θ.

La matrice trasposta:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La matrice inversa si ottiene affiancando una matrice identità ed eseguendo l'Eliminazione di Gauss così da avere la matrice identità dalla parte opposta (ricordando che $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ e che $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$):

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{1,2}(-\tan\theta)} \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos\theta} & -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2(\cos\theta)} \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right) \xrightarrow{E_1\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} & \frac{1}{\cos\theta} & 0 \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{2,1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} & \sin\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right)$$

E a destra si ha la matrice inversa, la quale è uguale alla matrice trasposta:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ A^T &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \| \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$