Dr. Rosanna Laking, Dr. Margherita Zorzi
Università degli Studi di Verona, A.A. 2021/2022
Corso di Laurea in Informatica

Esame per il Corso di ALGEBRA LINEARE

20/02/2023

1. **(8 punti)**

   (a) Si consideri la seguente matrice:

   $$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha+2 & 3\alpha \\ 2\alpha & \alpha+7 & 4\alpha \end{pmatrix}$$

   Si studi $det(A)$, $rk(A)$ e invertibilità di A al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Si calcoli z^6 dove $z = \frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i}$.

2. **(8 punti)** Si consideri la seguente matrice:

   $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Si calcolino tutti gli autovalori di B su $\mathbb{R}$ e si trovino delle basi dei loro autospazi.

   (b) Si verifichi che la matrice B è diagonalizzabile e si trovino la matrice diagonale D e le matrici S, S^{-1} tali che $B = SDS^{-1}$.

3. **(8 punti)** Si considerino le seguenti matrici:

   $$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 13 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Si trova una base di ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

      i. Il sottospazio $C(C)$ generato dalle colonne di C.

      ii. Lo spazio nullo $N(D)$ di D.

      iii. La somma $C(C) + N(D)$ dei sottospazi $C(C)$ e $N(D)$.

   (b) Si calcoli la dimensione dell'intersezione $C(C) \cap N(D)$ dei sottospazi $C(C)$ e $N(D)$.

4. **(6 punti)** Si considerino la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Vero o falso? Si giustifichi la risposta!

   (a) La matrice P è hermitiana, ovvero $P = P^H$.

   (b) La matrice P è invertibile.

   (c) Il vettore $c_{\mathcal{B}}(Pv)$ è uguale a $\begin{pmatrix} -1 \\ 4+i \end{pmatrix}$ dove $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. **(1 punti)** Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e sia $b \in \mathbb{C}^m$. Si dimostri che, se $p \in \mathbb{C}^n$ è una soluzione particolare di $Ax = b$, allora ogni soluzione è della forma $p + u$ per qualche $u \in N(A)$.