

Università degli studi di Verona

Soluzioni scheda 2

VR455961 Davide Bragantini

VR443470 Andrea Valentini

maggio 2023

Indice

1	Soluzione esercizio 1	3
1.1	Soluzione a	3
1.2	Soluzione b	4
2	Soluzione esercizio 2	5
2.1	Soluzione a	5
2.2	Soluzione b	6
3	Soluzione esercizio 3	8
3.1	Soluzione a	8
3.2	Soluzione b	10
3.3	Soluzione c	10
3.4	Soluzione d	10
3.5	Soluzione e	10
3.6	Soluzione f	11
4	Soluzione esercizio 4	11

1 Soluzione esercizio 1

Sia A_k la seguente matrice reale:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Soluzione a

Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette inversa.

Una matrice quadrata a coefficienti in un campo dell'insieme \mathbb{K} è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Quindi, si procede con il calcolo del determinante della matrice A_k . Visto che si tratta di una matrice di ordine 3, si utilizza la regola di Sarrus per risolvere il determinante. Si duplica la matrice:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 2k & 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 & k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 & -k & -k & 0 \end{array}$$

Si sommano i prodotti lungo le prime tre diagonal principali:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ diag} & : (2 \cdot k \cdot 0) = 0 \\ 2^\circ \text{ diag} & : (2 \cdot k^2 \cdot -k) = 2k^2 \cdot -k = -2k^3 \\ 3^\circ \text{ diag} & : [2k \cdot (k-1) \cdot -k] = 2k \cdot (-k^2 + k) = -2k^3 + 2k^2 \\ \text{Somma} & : 0 + (-2k^3) + (-2k^3 + 2k^2) = -4k^3 + 2k^2 \end{aligned}$$

E si esegue lo stesso calcolo considerando le tre diagonal opposte:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ diag opp} & : (2k \cdot k \cdot -k) = -2k^3 \\ 2^\circ \text{ diag opp} & : [2 \cdot (k-1) \cdot 0] = 0 \\ 3^\circ \text{ diag opp} & : (2 \cdot k^2 \cdot -k) = -2k^3 \\ \text{Somma} & : -2k^3 + 0 + (-2k^3) = -4k^3 \end{aligned}$$

Si esegue la sottrazione dei due risultati ottenuti mantenendo a sinistra quello della diagonale principale:

$$(-4k^3 + 2k^2) - (-4k^3) = 2k^2$$

Quindi il determinante è:

$$\det(A_k) = 2k^2$$

La matrice A_k ammette inversa per qualsiasi valore reale di k , poiché non esiste nessun valore (in \mathbb{R}) in grado di annullare l'espressione $2k^2$.

1.2 Soluzione b

Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che A_k ammette inversa. Si calcoli A_k^{-1} usando la formula $A_k^{-1} = \frac{1}{\det(A_k)} A_k^*$.

Per calcolare la matrice inversa si calcolano prima i complementi algebrici Com:

$$\text{Com}(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot C_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} k & k^2 \\ -k & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot [0 - (-k^3)] = k^3$$

$$\text{Com}(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot C_{21} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot [0 - (-2k^2)] = -2k^2$$

$$\text{Com}(A_{31}) = (-1)^{3+1} \cdot C_{31} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ k & k^2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (2k^2 - 2k^2) = 0$$

$$\text{Com}(A_{12}) = (-1)^{1+2} \cdot C_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & k^2 \\ -k & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot [0 - (-k^3)] = -k^3$$

$$\text{Com}(A_{22}) = (-1)^{2+2} \cdot C_{22} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot [0 - (-2k^2)] = 2k^2$$

$$\text{Com}(A_{32}) = (-1)^{3+2} \cdot C_{32} = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ k-1 & k^2 \end{pmatrix} = -1 \cdot [2k^2 - (2k^2 - 2k)] = -2k$$

$$\text{Com}(A_{13}) = (-1)^{1+3} \cdot C_{13} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & k \\ -k & -k \end{pmatrix} = 1 \cdot [-k^2 + k - (-k^2)] = k$$

$$\text{Com}(A_{23}) = (-1)^{2+3} \cdot C_{23} = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -k & -k \end{pmatrix} = -1 \cdot [-2k - (-2k)] = 0$$

$$\text{Com}(A_{33}) = (-1)^{3+3} \cdot C_{33} = (-1)^6 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ k-1 & k \end{pmatrix} = 1 \cdot [2k - (2k - 2)] = -2$$

Con i complementi algebrici si costruisce la matrice e si esegue la trasposta per ottenere A_k^* :

$$A_k^* = \begin{pmatrix} k^3 & -k^3 & k \\ -2k^2 & 2k^2 & 0 \\ 0 & -2k & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Infine, si applica la formula:

$$A_k^{-1} = \frac{1}{\det(A_k)} A_k^* = \frac{1}{2k^2} \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 1 & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{2k} & 0 & -\frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$$

2 Soluzione esercizio 2

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definito nell'Esempio 5.2(2), si consideri il seguente sottoinsieme per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{S}_t = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = t\}$$

2.1 Soluzione a

Si trovino i valori di t per cui l'insieme \mathcal{S}_t è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Per verificare quali valori di t rispettano il teorema di caratterizzazione dei sottospazi vettoriali, si possono effettuare alcune prove banali:

- Assumendo che $t = 1$:

$$\mathcal{S}_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 1\}$$

E trovando due funzioni che appartengano all'insieme:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 4 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 5 & x \neq 0 \end{cases}$$

Si esegue la verifica delle due proprietà:

$$\text{Proprietà } a : (f + g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\text{Proprietà } b : \lambda f(x) = \lambda f(0) = \lambda 1 \neq 0$$

Le proprietà non sono rispettate, quindi con il valore $t = 1$ l'insieme \mathcal{S}_1 non è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Assumendo che $t = -1$:

$$\mathcal{S}_{-1} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = -1\}$$

E trovando due funzioni che appartengano all'insieme:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 8 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 10 & x \neq 0 \end{cases}$$

Si esegue la verifica delle due proprietà:

$$\text{Proprietà } a : (f + g)(0) = f(0) + g(0) = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$\text{Proprietà } b : \lambda f(x) = \lambda f(0) = \lambda - 1 \neq 0$$

Le proprietà non sono rispettate, quindi con il valore $t = -1$ l'insieme \mathcal{S}_{-1} non è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Assumendo che $t = 0$:

$$\mathcal{S}_0 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0\}$$

E trovando due funzioni che appartengano all'insieme:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2 & x \neq 0 \end{cases}$$

Si esegue la verifica delle due proprietà:

$$\text{Proprietà } a : (f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 = 0$$

$$\text{Proprietà } b : \lambda f(x) = \lambda f(0) = \lambda 0 = 0$$

Le proprietà sono rispettate, quindi con il valore $t = 0$ l'insieme \mathcal{S}_0 è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

È possibile concludere le prove con i valori t e giungere ad una conclusione. L'insieme \mathcal{S}_t è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se e solo se t ha valore 0. Negli altri casi l'insieme non rispetta il teorema di caratterizzazione dei sottospazi vettoriali. Infatti, andando ad aumentare positivamente o negativamente la t , la proprietà a avrà come risultato un valore sempre diverso da zero.

2.2 Soluzione b

Sia \mathcal{U} il sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ generato da f e g dove $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si trovi una base dell'intersezione $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}_0$.

L'insieme \mathcal{S}_0 è così definito:

$$\mathcal{S}_0 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0\}$$

Per evitare errori, una funzione che appartiene a questo insieme verrà indicata con l'apice, quindi $f' \in \mathcal{S}_0$. Si prende una qualsiasi funzione dall'insieme \mathcal{S}_0 così definita:

$$f' \in \mathcal{S}_0 \quad f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 4 & x \neq 0 \end{cases}$$

Le funzioni generatori del sottospazio \mathcal{U} sono:

$$f \in \mathcal{U} \quad f(x) = \sin(x)$$

$$g \in \mathcal{U} \quad g(x) = \cos(x)$$

Si sceglie un valore comodo e si formano due insiemi:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \{f'(0), f(0), g(0)\} = \{0, 0, 1\}$$

$$x = 90 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \{f'(90), f(90), g(90)\} = \{4, 1, 0\}$$

Adesso è necessario dimostrare che $\{v_1, v_2\}$ è un sistema di generatori, cioè è necessario stabilire se per ogni $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{S}_0$ esistono due scalari $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 = \mathbf{w} & \xrightarrow{\text{sostituzione}} a_1 (0, 0, 1) + a_2 (4, 1, 0) = (w_1, w_2, w_3) \\ & (0, 0, a_1) + (4a_2, a_2, 0) = (w_1, w_2, w_3) \\ & (4a_2, a_2, a_1) = (w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

Il relativo sistema lineare:

$$\begin{cases} 4a_2 = w_1 \\ a_2 = w_2 \\ a_1 = w_3 \end{cases}$$

I vettori v_1, v_2 sono un sistema di generatori se e solo se il sistema ammette soluzione. Per farlo, si utilizza il teorema di Rouché Capelli e per calcolare il rango, necessario per il teorema, si utilizza l'Eliminazione di Gauss così da ottenere una forma matriciale ridotta:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 1 & w_2 \\ 1 & w_3 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_{1,3}(-\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 1 & w_2 \\ 0 & w_3 - \frac{w_1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{E_{1,2}(-\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 0 & w_2 - \frac{w_1}{4} \\ 0 & w_3 - \frac{w_1}{4} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 0 & \frac{4w_2 - w_1}{4} \\ 0 & \frac{4w_3 - w_1}{4} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{E_{2,3}\left(\frac{-w_1 + 4w_3}{w_1 - 4w_2}\right)} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 0 & \frac{4w_2 - w_1}{4} \\ 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Il rango della matrice aumentata è 2. Tuttavia, nel caso in cui w_2, w_1 siano pari a zero, il rango è 1. Dunque, esiste una e un'unica soluzione al sistema. Quindi è possibile concludere che v_1, v_2 sono un sistema di generatori. Per affermare che siano anche una base è necessario dimostrare che siano anche linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} b_1 v_1 + b_2 v_2 = 0 & \xrightarrow{\text{sostituzione}} b_1 (0, 0, 1) + b_2 (4, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ & (0, 0, b_1) + (4b_2, b_2, 0) = (0, 0, 0) \\ & (4b_2, b_2, b_1) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Il sistema relativo:

$$\begin{cases} 4b_2 = 0 \\ b_2 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

E con il metodo di sostituzione si trova subito che l'unica soluzione possibile è $b_1 = b_2 = 0$. Dunque i vettori sono linearmente indipendenti e l'insieme:

$$\{v_1, v_2\} = \{(f'(0), f(0), f(0)), (f'(90), f(90), g(90))\} = \{(0, 0, 1), (4, 1, 0)\}$$

È una base di $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}_0$.

3 Soluzione esercizio 3

Sia $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'applicazione data da:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x - 3y + 3z \end{pmatrix}$$

Per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

3.1 Soluzione a

Si verifichi che f è lineare.

Per verificare la linearità si prova rapidamente a “mandare lo zero nello zero”:

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 - 0 + 0 \\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La condizione necessaria di linearità è stata dimostrata. Adesso, si prosegue con la verifica della proprietà di condizione di linearità dividendola nella dimostrazione della condizione di additività e omogeneità.

Dimostrazione condizione di additività. Dati due vettori generici v_1, v_2 dello spazio vettoriale:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

Si dimostra che f è una funzione additiva:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

Si esegue prima il calcolo del blocco dell'unica funzione:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \\ 3(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$

E successivamente si esegue il calcolo delle due funzioni distinte:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x_1 - y_1 + z_1 \\ 3x_1 - 3y_1 + 3z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - y_2 + z_2 \\ 3x_2 - 3y_2 + 3z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \\ 3(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I due risultati coincidono, per cui la funzione f è additiva.

QED

Dimostrazione condizione di omogeneità. Dato un vettore generico v_1 dello spazio vettoriale e dato uno scalare λ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

Si dimostra che f è una funzione omogenea:

$$f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1) = f \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot z_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot f \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Si esegue prima il calcolo della funzione con lo scalare internamente:

$$f \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x - \lambda y + \lambda z \\ 3\lambda x - 3\lambda y + 3\lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x - y + z) \\ \lambda(3x - 3y + 3z) \end{pmatrix}$$

E successivamente si esegue il calcolo della funzione con lo scalare esternamente:

$$\lambda \cdot f \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x - 3y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x - y + z) \\ \lambda(3x - 3y + 3z) \end{pmatrix}$$

I due risultati coincidono, per cui la funzione è anche omogenea.

QED

Entrambe le condizioni, additività e omogeneità, sono state dimostrate e confermate. Per cui, la funzione f è un'applicazione lineare.

3.2 Soluzione b

Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica e si dica se f è un isomorfismo.

La base canonica del dominio è:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

E i rispettivi vettori immagine mediante f sono:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - 0 + 0 \\ 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 - 1 + 0 \\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 - 0 + 1 \\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice associata A rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Per verificare se f è un isomorfismo, è possibile verificare se l'applicazione lineare è invertibile. In caso affermativo, allora la funzione è isomorfa. Purtroppo, l'applicazione lineare inversa si calcola eseguendo l'inversione della matrice associata A , che in questo caso non è quadrata. Per cui, è possibile già concludere che l'applicazione lineare f non è un isomorfismo.

3.3 Soluzione c

Si calcolino le dimensioni degli spazi vettoriali $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{C}^2$ e $\text{N}(f) \subseteq \mathbb{C}^3$.

3.4 Soluzione d

Si verifichi che l'insieme $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di \mathbb{C}^3 .

3.5 Soluzione e

Si verifichi che l'insieme $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ con $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una base di \mathbb{C}^2 .

3.6 Soluzione f

Si determini la matrice associata a f rispetto alla base \mathcal{C} di \mathbb{C}^3 e alla base \mathcal{B} di \mathbb{C}^2 .

4 Soluzione esercizio 4

Sia \mathcal{C} la base di \mathbb{C}^3 dell'esercizio 3(d) e sia $\mathcal{D} = \{u_1, u_2, u_3\}$ dove $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si verifichi che \mathcal{D} è una base di \mathbb{C}^3 e si calcoli la matrice del cambio di base $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.