

# Esercitazioni Algebra Lineare

VR443470

febbraio 2023

## Indice

<b>1</b>	<b>Basi</b>	<b>3</b>
1.1	Somma e trasposte . . . . .	3
1.2	(Anti-)Hermitiane e (anti-)simmetriche . . . . .	5
1.3	Prodotto tra matrici righe per colonne . . . . .	6
1.4	Prodotto tra matrici - Casi particolari . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Eliminazione di Gauss</b>	<b>9</b>
2.1	Le 3 operazioni . . . . .	9
2.2	Tipi di soluzione . . . . .	9
2.3	Esercizi . . . . .	10
2.3.1	Tipo uno - Una soluzione . . . . .	10
2.3.2	Tipo zero . . . . .	12
2.3.3	Infinito . . . . .	13
2.3.4	Infinito - Caso particolare . . . . .	15

# 1 Basi

## 1.1 Somma e trasposte

I classici esercizi di Algebra Lineare prevedono varie operazioni sulle matrici. Partendo dalle basi, si introducono le operazioni di somma e trasposizione.

Date 3 matrici  $A, B, C$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 3 \\ -2+i & 5 & i2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3i & 2 \\ 4 & -i \\ 2-i & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 3i & 2-i \\ 4i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La **prima operazione** da eseguire è la classificazione delle matrici. In questo caso, le matrici hanno le seguenti dimensioni:

$$A \in \mathbb{M}_{2 \times 3} \quad B \in \mathbb{M}_{3 \times 2} \quad C \in \mathbb{M}_{2 \times 3}$$

La **seconda operazione** da eseguire è controllare se è possibile eseguire l'operazione richiesta dall'esercizio. In questo caso, viene chiesta la somma. Per eseguire quest'ultima (vale lo stesso per la sottrazione), le dimensioni delle matrici devono essere tutte **identiche**. Dato che in questo caso la matrice  $B$  ( $3 \times 2$ ) differisce di dimensione rispetto alle due matrici  $A, C$  ( $2 \times 3$ ), è necessario fare qualcosa per eseguire l'operazione di somma.

Dato che è ancora l'inizio, non verranno effettuate manipolazioni complesse. Quindi, si supponga di eseguire questa operazione di somma/sottrazione:

$$2A^T - 4\bar{B} + 3C^T$$

Prima di eseguire l'operazione, si ottengono le relative matrici coniugate e trasposte. L'operazione di **coniugazione** è eseguibile cambiando i segni ai valori complessi (quindi alle  $i$ ). Invece, l'operazione di **trasposizione** ( $T$ ) inverte le colonne e le righe di una matrice. I risultati sono:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & -i & 3 \\ -2+i & 5 & i2 \end{bmatrix} & A^T &= \begin{bmatrix} 1 & -2+i \\ -i & 5 \\ 3 & i2 \end{bmatrix} & 2A^T &= \begin{bmatrix} 2 & -4+2i \\ -2i & 10 \\ 6 & 4i \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 3i & 2 \\ 4 & -i \\ 2-i & -1 \end{bmatrix} & \bar{B} &= \begin{bmatrix} -3i & 2 \\ 4 & i \\ 2+i & -1 \end{bmatrix} & 4\bar{B} &= \begin{bmatrix} -12i & 8 \\ 16 & 4i \\ 8+4i & -4 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} -2 & 3i & 2-i \\ 4i & 1 & 0 \end{bmatrix} & C^T &= \begin{bmatrix} -2 & 4i \\ 3i & 1 \\ 2-i & 0 \end{bmatrix} & 3C^T &= \begin{bmatrix} -6 & 12i \\ 9i & 3 \\ 6-3i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Adesso è possibile eseguire la sottrazione tra  $\alpha = 2A^T - 4\overline{B}$  e successivamente la somma tra  $\alpha + 3C^T$ :

$$\alpha = 2A^T - 4\overline{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4 + 2i \\ -2i & 10 \\ 6 & 4i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12i & 8 \\ 16 & 4i \\ 8 + 4i & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 12i & 12 + 2i \\ -16 - 2i & 10 - 4i \\ 1 - 4i & 4 + 4i \end{bmatrix}$$

Si esegue la somma:

$$\alpha + 3C^T = \begin{bmatrix} 2 + 12i & 12 + 2i \\ -16 - 2i & 10 - 4i \\ 1 - 4i & 4 + 4i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 12i \\ 9i & 3 \\ 6 - 3i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 12i & -12 + 14i \\ -16 + 7i & 13 - 4i \\ 7 - 7i & 4 + 4i \end{bmatrix}$$

## 1.2 (Anti-)Hermitiane e (anti-)simmetriche

Diamo alcune definizioni per capire come fare gli esercizi:

- È possibile abbreviare letteralmente le operazioni di trasposizione e coniugazione scrivendo **trasposta-coniugata**;
- Una matrice viene detta **hermitiana** quando la matrice originaria è uguale alla sua trasposta-coniugata:

$$\overline{(A^T)} = (\overline{A})^T = A \implies A^H$$

- Una matrice viene detta **anti-hermitiana** quando la matrice trasposta-coniugata corrisponde alla matrice originaria ma cambiata di segno:

$$\overline{(A^T)} = (\overline{A})^T = -A \implies \text{anti-hermitiana}$$

- Una matrice viene detta **simmetrica** quando la matrice originaria è uguale alla sua trasposta:

$$A = A^T \implies \text{simmetrica}$$

- Una matrice viene detta **anti-simmetrica** quando la sua trasposta corrisponde alla matrice originaria ma cambiata di segno:

$$-A = A^T \implies \text{anti-simmetrica}$$

Prendendo come **esempio** le tre matrici  $A, B, C$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 3 \\ -3 & i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & i3 \\ -i3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si eseguono le rispettive operazioni di trasposizione e coniugazione:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2i & 3 \\ -3 & i \end{bmatrix} & A^T &= \begin{bmatrix} 2i & -3 \\ 3 & i \end{bmatrix} & \overline{A^T} &= \begin{bmatrix} -2i & -3 \\ 3 & -i \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix} & B^T &= \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix} & \overline{B^T} &= \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 2 & -i \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} -1 & i3 \\ -i3 & 1 \end{bmatrix} & C^T &= \begin{bmatrix} -1 & -i3 \\ i3 & 1 \end{bmatrix} & \overline{C^T} &= \begin{bmatrix} -1 & i3 \\ -i3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da questi risultati è possibile notare come  $A, B$  non siano hermitiane, mentre  $C$  lo sia. Inoltre, dalle trasposte è possibile osservare come  $A, C$  non siano simmetriche, mentre  $B$  lo sia. Invece, per verificare l'anti-hermitiana e l'anti-simmetrica, è necessario negare le matrici originarie:

$$-A = \begin{bmatrix} -2i & -3 \\ 3 & -i \end{bmatrix} \quad -B = \begin{bmatrix} -i & -2 \\ -2 & -i \end{bmatrix} \quad -C = \begin{bmatrix} 1 & -i3 \\ i3 & -1 \end{bmatrix}$$

Da questi risultati è possibile notare come  $B, C$  non siano anti-hermitiane, mentre  $A$  lo sia. Inoltre, osservando nuovamente le trasposte, è possibile osservare come  $A, B$  e  $C$  non siano anti-simmetriche.

### 1.3 Prodotto tra matrici righe per colonne

La **prima operazione** da eseguire per la moltiplicazione tra matrici righe per colonne è la verifica delle righe e delle colonne. Il prodotto tra matrici è ammesso solo se il numero delle colonne del primo operando è uguale al numero delle righe del secondo operando. Per esempio, la seguente operazione è ammessa:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times l}$$

Inoltre, la matrice risultante avrà come dimensione le righe del primo operando e le colonne del secondo. Quindi:

$$C_{m \times l} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times l}$$

La **seconda operazione** è la moltiplicazione vera e propria. Per farla, si prende ogni riga del primo operando e si moltiplica per ogni colonna del secondo operando. Dopo la moltiplicazione di una riga per una colonna, si sommano i risultati. Quindi:

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} 1,1 & \cdots & 1,n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m,1 & \cdots & m,n \end{bmatrix} \times B_{n,l} = \begin{bmatrix} 1,1 & \cdots & 1,l \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n,1 & \cdots & n,l \end{bmatrix}$$

$$C_{1,1} = A_{1,1} \cdot B_{1,1} + \cdots + A_{1,n} \cdot B_{n,1} \\ \dots$$

Si presenta un **esempio**. Date due matrici  $A, B$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

L'operazione di moltiplicazione di righe per colonne è ammessa poiché le righe di  $A$  (2) sono lo stesso numero delle colonne di  $B$  (2):

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

I calcoli sono banali. Si lasciano qua di seguito i passaggi:

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= 1 \cdot 4 + 0 \cdot -2 + 2 \cdot 0 = 4 \\ C_{1,2} &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 7 \\ C_{2,1} &= 0 \cdot 4 + 3 \cdot -2 + -1 \cdot 0 = -6 \\ C_{2,2} &= 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + -1 \cdot 3 = 3 \end{aligned}$$

Si presenta un altro **esempio** ma con i numeri complessi. Date le due matrici  $A, B$ :

$$A_{2,4} = \begin{bmatrix} 1+i & i & 0 & \overline{3+2i} \\ -i & -1-3i & 7i & 6i \end{bmatrix} \times B_{4,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4i \\ -3i & 0 \\ \overline{1-i} & -2i \\ 5-i & \overline{2+i} \end{bmatrix}$$

Prima di eseguire la moltiplicazione tra righe e colonne si risolvono i coniugati, due nella matrice  $A$  e due nella matrice  $B$ :

$$A_{2,4} = \begin{bmatrix} 1+i & i & 0 & 3-2i \\ -i & -1+3i & 7i & 6i \end{bmatrix} \times B_{4,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4i \\ -3i & 0 \\ 1+i & -2i \\ 5-i & 2-i \end{bmatrix}$$

L'operazione di moltiplicazione di righe per colonne è ammessa. Quindi si presenta qui di seguito i calcoli eseguiti (attenzione alle parti immaginarie, si ricorda che  $i^2 = -1$ ):

$$\begin{array}{llllllll} C_{1,1} & = & (1+i) \cdot 2 & + & i \cdot (-3i) & + & 0 \cdot (1+i) & + & (3-2i) \cdot (5-i) & = & 18-11i \\ C_{1,2} & = & (1+i) \cdot 4i & + & i \cdot 0 & + & 0 \cdot -2i & + & (3-2i) \cdot (2-i) & = & -3i \\ C_{2,1} & = & -i \cdot 2 & + & (-1+3i) \cdot -3i & + & 7i \cdot (1+i) & + & 6i \cdot (5-i) & = & 8+38i \\ C_{2,2} & = & -i \cdot 4i & + & (-1+3i) \cdot 0 & + & 7i \cdot -2i & + & 6i \cdot (2-i) & = & 24+12i \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18-11i & -3i \\ 8+38i & 24+12i \end{bmatrix}$$

## 1.4 Prodotto tra matrici - Casi particolari

Esistono alcuni casi particolari quando vengono eseguite le moltiplicazioni tra matrici:

1. La **moltiplicazione tra un vettore riga e un vettore colonna** (non viceversa) restituisce solamente un valore, chiamato **prodotto scalare**. Ovviamente, il numero delle colonne del vettore riga e il numero di righe del vettore colonna devono essere identici:

$$A_{1,n} = [\cdots \quad \cdots \quad \cdots] \times B_{n,1} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \rightarrow C$$

2. La **moltiplicazione tra un vettore colonna e un vettore riga** restituisce una matrice avente il numero di righe pari al vettore colonna e il numero di colonne pari al vettore riga:

$$B_{n,1} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \times A_{1,n} = [\cdots \quad \cdots \quad \cdots] \rightarrow C_{n,n}$$

3. La **moltiplicazione tra una matrice e un vettore colonna** restituisce un vettore colonna. Ovviamente, per applicare questa operazione è necessario che il numero delle colonne della matrice sia uguale al numero di righe del vettore:

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \times B_{n,1} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \rightarrow C_{m,1}$$



## 2 Eliminazione di Gauss

### 2.1 Le 3 operazioni

L'eliminazione di Gauss prevede 3 operazioni principali da applicare per ottenere la forma ridotta (forma finale):

1. Un'equazione può essere moltiplicata per uno scalare non nullo;
2. Un'equazione viene sostituita con la somma tra lei e un'altra equazione, in cui quest'ultima è stata prima moltiplicata per uno scalare non nullo. Quindi, viene scelta un'equazione da moltiplicare per uno scalare non nullo e successivamente viene effettuata la somma tra il risultato della moltiplicazione e l'equazione interessata;
3. Scambio di due equazioni.

### 2.2 Tipi di soluzione

Possono esistere tre tipi di soluzione:

- Tipo uno (una sola soluzione). Intuibile dalla forma ridotta (finale) di Gauss poiché l'ultima riga ha solo una variabile con valore positivo;
- Tipo zero (non esistono soluzioni per il sistema). Intuibile dalla forma ridotta (finale) di Gauss poiché l'ultima riga ha solo variabili nulle;
- Infinito (le soluzioni del sistema sono infinite). Intuibile dalla forma ridotta (finale) di Gauss poiché l'ultima riga presenta più di una variabile con valore positivo.

I prossimi paragrafi mostreranno tutte e tre le casistiche.

## 2.3 Esercizi

### 2.3.1 Tipo uno - Una soluzione

Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Si calcola la matrice risultante dopo l'eliminazione di Gauss.

Il **primo passo** è scrivere la matrice aumentata. Essa è banale da comporre, consiste nello scrivere i coefficienti di ogni variabile  $(x, y, z)$  in una matrice e aggiungere una colonna sulla destra in cui ci sono i valori risultanti. Si passa all'atto pratico:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

Il **secondo passo** è eseguire alcune considerazioni sulla forma che si vuole ottenere e procedere con le varie operazioni. L'obiettivo è quello di ottenere una matrice uni-triangolare superiore<sup>1</sup>. In questo caso, si inizia con lo **scambio della prima riga con la seconda**:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,2}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

Si moltiplica la seconda riga per lo scalare  $\frac{1}{2}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

Si moltiplica la prima riga per -1 e successivamente si somma la prima riga con la seconda:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2,1}(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

Si moltiplica la prima riga per 1 e successivamente si somma la prima riga con la terza:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

Si moltiplica la seconda riga per lo scalare  $\frac{1}{2}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

---

<sup>1</sup>Una matrice uni-triangolare superiore è una forma particolare in cui i valori sotto alla diagonale principale sono nulli, cioè uguale a zero

Si moltiplica la seconda riga per  $-3$  e successivamente si somma la terza riga con la seconda:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(-3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right]$$

Si moltiplica la terza riga per lo scalare  $-\frac{2}{3}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(-3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Si ottiene così la forma ridotta di Gauss.

Il **terzo passo** è classificare la forma ottenuta. Dalla forma ridotta è possibile dedurre che si è di fronte al tipo uno, ovvero esiste una sola soluzione per il sistema.

Adesso è possibile ricostruire il vettore delle soluzioni andando al contrario. Quindi, si parte dall'ultima riga e sostituendo si va fino all'inizio:

$$z = -1$$

$$y + \frac{3}{2}(-1) = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2$$

$$x + -1(-1) = 1 \rightarrow x = 0$$

### 2.3.2 Tipo zero

Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 1 \\ x + 3y + z = 4 \\ 2x + 4y - 2z = -1 \end{cases}$$

Si calcola la matrice risultante dopo l'eliminazione di Gauss.

Il **primo passo** è scrivere la matrice aumentata. Essa è banale da comporre, consiste nello scrivere i coefficienti di ogni variabile  $(x, y, z)$  in una matrice e aggiungere una colonna sulla destra in cui ci sono i valori risultanti. Si passa all'atto pratico:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Il **secondo passo** è eseguire alcune considerazioni sulla forma che si vuole ottenere e procedere con le varie operazioni. L'obiettivo è quello di ottenere una matrice uni-triagonale superiore<sup>2</sup>. In questo caso, si inizia **moltiplicando la prima riga per 1 e successivamente si somma la prima riga con la seconda**:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Per rapidità, si eseguono in ordine le due operazioni seguenti. Si **moltiplica la prima riga per -1 e successivamente si somma la prima riga con la terza**, e poi si **moltiplica la prima riga per -2 e successivamente si somma la prima riga con la quarta**:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{4,1}(-2)]{E_{3,1}(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

Si ottiene così la forma ridotta di Gauss.

Il **terzo passo** è classificare la forma ottenuta. Dalla forma ridotta è possibile dedurre che si è di fronte al tipo zero, ovvero non esiste nessuna soluzione per il sistema. L'esercizio è concluso:

$$\nexists z : 0 \cdot z = -3$$

---

<sup>2</sup>Una matrice uni-triagonale superiore è una forma particolare in cui i valori sotto alla diagonale principale sono nulli, cioè uguale a zero

### 2.3.3 Infinito

Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0 \end{cases}$$

Si calcola la matrice risultante dopo l'eliminazione di Gauss.

Il **primo passo** è scrivere la matrice aumentata. Essa è banale da comporre, consiste nello scrivere i coefficienti di ogni variabile  $(x, y, z, w)$  in una matrice e aggiungere una colonna sulla destra in cui ci sono i valori risultanti. Si passa all'atto pratico:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Il **secondo passo** è eseguire alcune considerazioni sulla forma che si vuole ottenere e procedere con le varie operazioni. L'obiettivo è quello di ottenere una matrice uni-triangolare superiore<sup>3</sup>. In questo caso, si inizia con due operazioni per velocizzare i calcoli. Si **moltiplica la prima riga per -2 e successivamente si somma la prima riga con la seconda**, e poi si **moltiplica la prima riga per -3 e successivamente si somma la prima riga con la terza**:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{3,1}(-3)]{E_{2,1}(-2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Si **moltiplica la seconda riga per 1 e successivamente si somma la seconda riga con la terza**:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Si **moltiplica la terza riga per uno scalare  $\frac{1}{2}$** :

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_3(-\frac{1}{2})} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right]$$

Si ottiene così la forma ridotta di Gauss.

---

<sup>3</sup>Una matrice uni-triangolare superiore è una forma particolare in cui i valori sotto alla diagonale principale sono nulli, cioè uguale a zero

Il **terzo passo** è classificare la forma ottenuta. Dalla forma ridotta è possibile dedurre che si è di fronte all'infinito, ovvero esistono un'infinità di soluzioni che dipendono da, in questo caso, un parametro:

$$z - \frac{3}{2}w = 0 \quad \longrightarrow \quad z = \frac{3}{2}w$$

$$y + 4\left(\frac{3}{2}w\right) + 2w = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -8w$$

$$x + 2(-8w) + 1w = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 15w$$

Quindi il vettore soluzione sarà composto in questo modo:

$$\text{soluzione} = \begin{bmatrix} 15w \\ -8w \\ \frac{3}{2}w \\ w \end{bmatrix} = w \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ -8 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 2.3.4 Infinito - Caso particolare

Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + w = -1 \\ x + 2y + z + 2w = -1 \\ 2x + 3y + 2z + 3w = -2 \end{cases}$$

Si calcola la matrice risultante dopo l'eliminazione di Gauss.

Il **primo passo** è scrivere la matrice aumentata. Essa è banale da comporre, consiste nello scrivere i coefficienti di ogni variabile  $(x, y, z, w)$  in una matrice e aggiungere una colonna sulla destra in cui ci sono i valori risultanti. Si passa all'atto pratico:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right]$$

Il **secondo passo** è eseguire alcune considerazioni sulla forma che si vuole ottenere e procedere con le varie operazioni. L'obiettivo è quello di ottenere una matrice uni-triangolare superiore<sup>4</sup>. In questo caso, si inizia con due operazioni per velocizzare i calcoli. Si **moltiplica la prima riga per -1 e successivamente si somma la prima riga con la seconda**, e poi si **moltiplica la prima riga per -2 e successivamente si somma la prima riga con la terza**:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{2,1}(-1)]{E_{3,1}(-2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Si **moltiplica la seconda riga per -1 e successivamente si somma la seconda riga con la terza**:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3,2}(-1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Si ottiene così la forma ridotta di Gauss.

Il **terzo passo** è classificare la forma ottenuta. Dalla forma ridotta è possibile dedurre che si è di fronte all'infinito, ovvero esistono un'infinità di soluzioni che dipendono da, in questo caso, due parametri. Le variabili  $z$  e  $w$  sono libere:

$$1y + 1w = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -w$$

$$x - w = -1 \quad \longrightarrow \quad x = w - 1$$

Quindi il vettore soluzione sarà composto in questo modo:

$$\text{soluzione} = \begin{bmatrix} w - 1 \\ -w \\ w \\ z \end{bmatrix}$$

---

<sup>4</sup>Una matrice uni-triangolare superiore è una forma particolare in cui i valori sotto alla diagonale principale sono nulli, cioè uguale a zero