

Schemi Analisi II

VR443470

novembre 2023

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Prerequisiti | 4 |
| 1.1 | Geometria analitica | 5 |
| 1.1.1 | Circonferenza | 5 |
| 1.1.2 | Ellisse | 6 |
| 1.1.3 | Iperbole | 7 |
| 1.1.4 | Completamento dei quadrati | 9 |
| 1.1.5 | Esercizi | 10 |
| 1.2 | Algebra | 13 |
| 1.2.1 | Esercizi | 13 |
| 1.3 | Calcolo differenziale e integrale | 18 |
| 1.3.1 | Integrali fondamentali (o notevoli) | 18 |
| 1.3.2 | Integrare per sostituzione | 19 |
| 1.3.3 | Integrare per parti | 19 |
| 1.3.4 | Decomposizione in frazioni parziali | 20 |
| 1.3.5 | Esercizi | 22 |
| 2 | Equazioni differenziali ordinarie | 29 |
| 2.1 | Concetti e teoremi fondamentali | 29 |
| 2.2 | Equazioni lineari | 31 |
| 2.3 | Equazioni a variabili separabili | 33 |
| 2.4 | Problema di Cauchy | 35 |
| 2.4.1 | Intervallo massimale | 37 |
| 2.4.2 | Equazioni differenziali lineari del secondo ordine | 42 |
| 2.5 | Metodo di somiglianza o dei coefficienti indeterminati | 43 |
| 2.6 | Metodo di variazione delle costanti | 45 |
| 2.7 | Sistemi di equazioni differenziali | 47 |
| 2.8 | Esercizi | 50 |
| 2.8.1 | Variabili separabili e problema di Cauchy | 50 |
| 2.8.2 | Metodo di somiglianza e problema di Cauchy | 56 |
| 2.8.3 | Casi particolari | 58 |
| 3 | Spazi funzionali | 61 |
| 3.1 | Lo spazio \mathbb{R}^n | 61 |
| 3.2 | Spazio metrico e distanza (euclidea) | 64 |
| 3.3 | Topologia in \mathbb{R}^n | 65 |
| 3.3.1 | Palla aperta | 65 |
| 3.3.2 | Intorno di un punto | 67 |
| 3.3.3 | Punti interni, esterni e di frontiera | 68 |
| 3.3.4 | Insiemi aperti, chiusi e limitati | 69 |
| 3.4 | Funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} (funzioni scalari) | 74 |
| 3.4.1 | Rappresentazione grafica del dominio di funzioni ($n = 2$) | 74 |
| 3.4.2 | Grafico di una funzione scalare in n variabili | 83 |
| 3.4.3 | Esempio di grafico di funzioni a due variabili | 83 |
| 3.5 | Insiemi (curve) di livello | 85 |
| 3.5.1 | Alcuni esempi | 86 |
| 3.6 | Continuità | 92 |
| 3.7 | Limiti | 94 |
| 3.7.1 | Definizione | 94 |

| | | |
|--------|--|------------|
| 3.7.2 | Manipolazioni algebriche | 97 |
| 3.7.3 | Maggiorazioni utili per risolvere limiti e Teorema del confronto (dei due carabinieri) | 98 |
| 3.7.4 | Calcolo limiti in coordinate polari | 104 |
| 3.8 | Curve in \mathbb{R}^n | 108 |
| 3.8.1 | Parametrizzazioni notevoli | 110 |
| 3.8.2 | Retta tangente a una curva | 112 |
| 3.8.3 | Esercizio parametrizzazione retta tangente | 112 |
| 3.8.4 | Esercizio parametrizzazione arco di ellisse | 113 |
| 3.8.5 | Insiemi connessi per archi e teorema degli zeri | 116 |
| 3.8.6 | Lunghezza di una curva | 117 |
| 3.8.7 | Derivate parziali | 119 |
| 3.8.8 | Gradiente | 121 |
| 3.8.9 | Derivate direzionali | 123 |
| 3.8.10 | Teorema della funzione implicita (Ulisse Dini) | 123 |
| 3.8.11 | Differenziabilità | 124 |
| 3.9 | Esercizi | 125 |
| 3.9.1 | Dominio, insieme aperto/chiuso, limitato/illimitato, connesso/sconnesso | 125 |
| 3.9.2 | Derivata direzionale con valore massimo | 127 |
| 3.9.3 | Limiti e continuità | 128 |
| 3.9.4 | Parametrizzazione | 131 |
| 4 | Temì d'esame | 132 |

1 Prerequisiti

Il corso di Analisi II si articola in due macro sezioni: primo e secondo parziale. All'esame gli esercizi da svolgere saranno 10, suddivisi 5 per la prima parte e 5 per la seconda.

Nonostante vengano date 3 ore per svolgere l'esame totale, dunque 1 ora e mezza per ciascuna prova parziale, il tempo è una risorsa fondamentale. Difatti, se un calcolo matematico dovesse richiedere una quantità eccessiva di risorse/tempo, si rischierebbe di non passare l'esame con esito positivo.

Risulta dunque fondamentale, per ciascun studente, giungere con dei prerequisiti solidi e non banali. In questo capitolo si provvederà a fornire alcuni prerequisiti necessari per affrontare il percorso senza eccessive difficoltà.

Ogni paragrafo presenterà degli esercizi e ognuno di essi sarà risolto nel seguente modo: il primo in modo approfondito per illustrare il *modus operandi*, gli altri facendo vedere i calcoli e risparmiando le spiegazioni prolisse. Chiaramente, nel caso in cui ci dovesse essere un caso particolare, esso verrà affrontato e spiegato passo passo.

1.1 Geometria analitica

1.1.1 Circonferenza

La circonferenza è graficamente rappresentata nel seguente modo:



Chiamando con $C = (x_C, y_C)$ le coordinate del centro della circonferenza e con r il raggio, la sua equazione generale è espressa nel seguente modo:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Nel caso in cui la circonferenza fosse centrata nell'origine degli assi, ovvero $C = (0, 0)$, allora l'equazione generale sarebbe ridotta a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Per essere più precisi, l'**equazione canonica** corrispondente alla circonferenza è la seguente:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Le formule più importanti per ricavare il centro della circonferenza C e il raggio r :

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) \quad ; \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

Per ottenere l'equazione generale partendo dall'equazione canonica, si utilizza il metodo dei completamento dei quadrati (paragrafo 1.1.4).

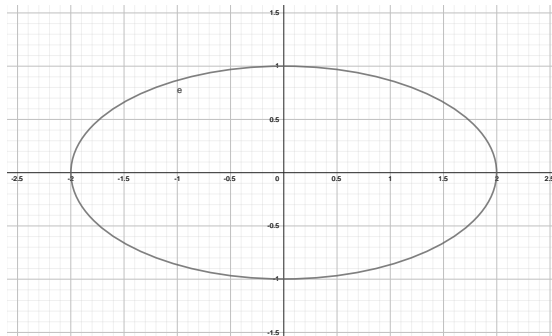
Per ottenere il raggio nel caso in cui sia noto il centro C e un punto $P = (x_P, y_P)$ appartenente alla circonferenza, si utilizza la seguente formula:

$$r = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$$

Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

1.1.2 Ellisse

Non esiste un'unica rappresentazione dell'ellisse, ma solitamente può essere facilmente riconoscibile perché di forma allungata:



Attenzione, che data l'**equazione canonica** dell'ellisse **centrata nell'origine**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

Il grafico corrisponde esattamente ad una circonferenza.

Un'ellisse presenta quattro vertici nel caso in cui abbia centro nell'origine. Le relative coordinate sono:

$$V_{1,2} = (\pm a, 0) \quad V_{3,4} = (0, \pm b)$$

Per calcolare l'eccentricità di un'ellisse ("quanto l'ellisse è schiacciata") si devono confrontare i due valori a^2 e b^2 :

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{se } a^2 > b^2 \quad \text{e quindi } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$e = \frac{c}{b} \quad \text{se } b^2 > a^2 \quad \text{e quindi } c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Il valore è compreso tra: $0 \leq e < 1$.

Nel caso in cui non fosse centrata nell'origine, l'**equazione canonica** di un'ellisse **traslata**, con $C = (x_C, y_C)$ come coordinate del centro:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

I relativi vertici hanno le seguenti coordinate:

$$V_1 = (x_C - a, y_C) \quad ; \quad V_2 = (x_C + a, y_C)$$
$$V_3 = (x_C, y_C - b) \quad ; \quad V_4 = (x_C, y_C + b)$$

L'**importanza dei vertici** è dovuta al fatto che se fosse necessario rappresentare l'ellisse su un piano cartesiano, grazie alle precedenti formule. È possibile ricordarsi facilmente le formule ricordando che le coordinate dei vertici sono ottenute eseguendo la somma/differenza prima sulla coordinata x e poi sulla coordinata y .

Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

1.1.3 Iperbole

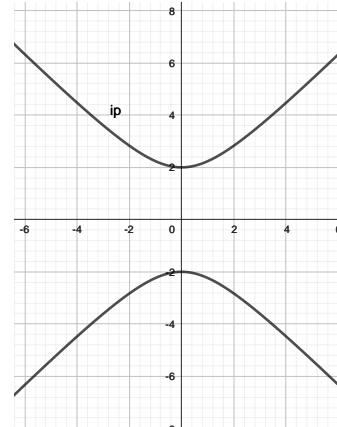
Un'iperbole con centro nell'origine ha un'equazione del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{con } a \neq 0, b \neq 0$$

Il segno $+$ accanto all'1 rappresenta l'intersezione con l'asse delle ascisse (x), mentre il segno $-$ rappresenta l'intersezione con l'asse delle ordinate (y). Graficamente viene rappresentata nel seguente modo:



Con $+1$.



Con -1 .

Nel caso di una iperbole con gli assi paralleli agli assi cartesiani e quindi con centro in un punto $C = (x_C, y_C)$, essa è data da:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{con } a \neq 0, b \neq 0$$

Dove il segno \pm accanto all'1 indica la stessa cosa detta in precedenza.

Il calcolo dei vertici, utile per rappresentare l'iperbole, ricorda molto quello utilizzato per l'ellisse. Tuttavia, dato che in questo caso i vertici sono solo 2 e non 4 (ellisse), tale calcolo cambia a seconda dell'intersezione con l'asse delle x o delle y (determinato dal segno \pm dell'1 a sinistra dell'uguale):

$$\begin{aligned} \text{Intersezione asse } x, \text{ caso } +1 &\rightarrow V_1 = (x_C - a, y_C) \\ &V_2 = (x_C + a, y_C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Intersezione asse } y, \text{ caso } -1 &\rightarrow V_1 = (x_C, y_C - b) \\ &V_2 = (x_C, y_C + b) \end{aligned}$$

Purtroppo tutto questo non basta per rappresentare un'iperbole, è necessario calcolare anche gli asintoti di un'iperbole per capire l'andamento dell'iperbole. Gli asintoti sono due punti dai quali passa una retta, la quale non viene mai toccata dall'iperbole:

$$\text{Intersezione asse } x, \text{ caso } +1 \rightarrow \text{asintoto} = \left(V_x, \pm \frac{b}{a} + V_y \right)$$

$$\text{Intersezione asse } y, \text{ caso } -1 \rightarrow \text{asintoto} = \left(\pm \frac{b}{a} + V_x, V_y \right)$$

Con V_x, V_y si intendono le coordinate x, y dei vertici.

Ricapitolando, i passi per disegnare un'iperbole partendo dall'equazione canonica sono:

1. Posizionarsi sulle coordinate di centro x_C, y_C
2. Calcolare i vertici, aumentando/diminuendo la x_C se l'1 nell'equazione canonica ha segno $+$, altrimenti aumentando/diminuendo la y_C se l'1 nell'equazione canonica ha segno $-$
3. Individuare i punti del fuoco e far passare una retta, per ciascun punto, passante per il centro x_C, y_C
4. Disegnare l'iperbole evitando di toccare le assi

Un esempio si può vedere nel seguente grafico:



Iperbole di equazione: $x^2 - y^2 = -1$

Ovviamente le rette non vanno disegnate, ma in questo grafico sono state rappresentate per mostrare come disegnare un'iperbole.

Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

1.1.4 Completamento dei quadrati

Il completamento dei quadrati è un'operazione molto potente che può essere applicata sempre (a discapito dello studente se ha senso o no applicarla!). In questo caso viene applicata ad un'ellisse.

Innanzitutto, la **prima operazione** dell'applicazione del completamento dei quadrati è il raggruppamento dei valori simili, ovverosia:

$$\begin{aligned}9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 &= 0 \\(9x^2 + 36x) + (4y^2 - 24y) + 36 &= 0\end{aligned}$$

La **seconda operazione** è prendere in considerazione i termini con le x , e poi quelli con le y , e cercare un quadrato. Ovvero sia un valore c tale per cui il Δ (nella formula del calcolo di un'equazione di secondo grado $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$) sia uguale a zero:

$$\begin{aligned}9x^2 + 36x &\longrightarrow 36^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\36^2 - 36c &= 0 \\c &= 36 \\4y^2 - 24y &\longrightarrow 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\24^2 - 16c &= 0 \\c &= 36\end{aligned}$$

Suggerimento: per trovare tale valore, basta risolvere la banale equazione $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ con c incognita e a, b termini noti.

La **terza operazione** è riscrivere l'equazione con i nuovi valori c , ma per lasciare invariata l'equazione è necessario annullarli, ovvero scrivere $c - c$ (nessun problema, con manipolazioni algebriche si riuscirà ad evitare di ritornare al punto di inizio):

$$(9x^2 + 36x + 36 - 36) + (4y^2 - 24y + 36 - 36) + 36 = 0$$

Le manipolazioni algebriche riguardano $9x^2 + 36x + 36$ e $4y^2 - 24y + 36$. Ovvero, si riscrivono le due espressioni come quadrati!

$$\begin{aligned}9x^2 + 36x + 36 &\longrightarrow 9(x+2)^2 \\4y^2 - 24y + 36 &\longrightarrow 4(y-3)^2\end{aligned}$$

E si riscrive l'equazione generale:

$$9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 = 0$$

Banali semplificazioni algebriche:

$$\begin{aligned}9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 &= 0 \\ \frac{1}{36} \cdot 9(x+2)^2 + \frac{1}{4} \cdot 4(y-3)^2 &= \frac{36}{36} \cdot \frac{1}{36} \\ \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} &= 1\end{aligned}$$

Quest'ultima equazione corrisponde all'equazione canonica dell'ellisse.

1.1.5 Esercizi

Si rappresenti analiticamente le seguenti equazioni canoniche:

1. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$
2. $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$
4. $x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$
5. $2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$

Esercizio 1

Data l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$$

Prima di rappresentare analiticamente l'equazione, è necessario guardare immediatamente i termini x^2 e y^2 per vedere se si è di fronte ad una circonferenza. Infatti, ricordando l'equazione canonica della circonferenza (pagina 5):

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Si può notare una grande assomiglianza. Quindi, si procede con il calcolo delle coordinate del centro della circonferenza:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = \left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (2, -1)$$

Si procede con il calcolo del raggio:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma} = \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(2)^2}{4} - (-6)} = \sqrt{4 + 1 + 6} = \sqrt{11}$$

Infine, si scrive l'equazione canonica sostituendo i valori trovati:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 11$$

Esercizio 2

Data l'equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si può subito vedere che si è di fronte ad un'ellisse centrata nell'origine:

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Si procede con un po' di intuito così da ricavare la forma canonica:

$$\frac{(x - 0)^2}{1^2} + \frac{(y - 0)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

E il risultato (forma canonica) eliminando i termini inutili:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \xrightarrow{\text{equivalente a}} \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si ottiene l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 = 1$$

Si tratta di un'iperbole che interseca l'asse delle ascisse (x) perché il segno dell'1 è + ed è centrata nell'origine perché x e y “non esistono”. Quindi:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Esercizio 4

Data l'equazione:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

Ci si accorge immediatamente che è un'iperbole a causa dei segni x^2 e y^2 discordi. Eseguendo alcune operazioni algebriche:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

$$x^2 - y^2 + x + 4y = 4$$

$$(x^2 + x) - (y^2 - 4y) = 4$$

Si utilizza il completamento dei quadrati per ottenere la forma canonica:

$$x^2 + x \longrightarrow 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$$

$$c = \frac{1}{4}$$

$$y^2 - 4y \longrightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$$

$$c = 4$$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - (y^2 - 4y + 4 - 4) = 4$$

$$\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - [(y - 2)^2 - 4] = 4$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - (y - 2)^2 + 4 = 4$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 2)^2 = 4 - 4 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 2)^2 = \frac{1}{4}$$

$$4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4(y - 2)^2 = 1$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y - 2)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Esercizio 5

Data l'equazione:

$$2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$$

Si utilizza il completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 4x - y &= 0 \\ (2x^2 + 4x) + (y^2 - y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &\longrightarrow 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 - y &\longrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\ c &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(2x^2 + 4x + 2 - 2) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left[2(x+1)^2 - 2\right] + \left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = 0$$

$$2(x+1)^2 - 2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$2(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4}$$

$$2(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{4}{9} \cdot 2 \cdot (x+1)^2 + \frac{4}{9} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{9}{8}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

L'equazione canonica si tratta di un'ellisse.

1.2 Algebra

1.2.1 Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni e i seguenti sistemi di equazioni algebriche:

$$1. \begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$3. \frac{y}{y+2} = mx^2 \text{ (risolvere rispetto a } y\text{)}$$

$$4. \frac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1 \text{ (risolvere rispetto a } y\text{)}$$

$$5. \log \frac{2-y}{1-y} = x+3 \text{ (risolvere rispetto a } y\text{)}$$

Esercizio 1

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Per trovare tutti i valori che annullano il sistema, si inizia con qualche manipolazione algebrica:

$$\begin{cases} 3y(x^2 - 2x) = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Quale valore annulla $x^2 - 2x$? Si calcola:

$$x^2 - 2x \longrightarrow x(x - 2)$$

Quindi le soluzioni sono 0 e 2. Per cui i valori che annullano il sistema per adesso sono:

$$y = 0 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^3 - 3x^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^2(x - 3) = 0 \end{cases} \longrightarrow x = 0; x = 3$$

Con $x = 0$ si è già trovata una soluzione ($y = 0$), quindi si prova $x = 2$:

$$x = 2 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2^3 + 4y^3 - 3 \cdot 2^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y^3 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, quindi i possibili valori sono:

- $(x = 0, y = 0)$
- $(x = 3, y = 0)$
- $(x = 2, y = 1)$

Esercizio 2

Dato il sistema:

$$\begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{cases} x^2 - \lambda x = 0 \\ y^2 - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(x - \lambda) = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

I primi valori che si provano sono i soliti $x = 0$ e $y = 0$. Si inizia con $x = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ 0 + 2y^2 = 1 \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\lambda \right) = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{4\lambda}{\sqrt{2}} = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{8} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Si prosegue con $y = 0$:

$$\begin{cases} x(x - \lambda) = 0 \\ 0 = 0 \\ x^2 + 0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(x - \lambda) = 0 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 1 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Per concludere l'esercizio, si deve riscrivere il sistema utilizzando operazioni permesse dall'algebra:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \cdot x^2 = \lambda x \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \cdot y^2 = 4\lambda y \cdot \frac{1}{y} \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ (\lambda)^2 + 2(4\lambda)^2 = 1 \end{cases}$$

È evidente che con questa piccola manipolazione algebrica, i calcoli risultano più semplici. Adesso si calcola il quadrato di lambda e si trovano le sue soluzioni per concludere l'esercizio:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 + 32\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ 33\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 = \frac{1}{33} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Si sostituisce λ all'interno di x e y :

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \\ y = \pm \frac{4}{\sqrt{33}} \\ \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, sono state valutate tutte le linee del sistema. Quindi, i valori possibili sono:

- $\left(x = 0, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $\left(x = 0, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $(x = 1, y = 0, \lambda = 1)$
- $(x = -1, y = 0, \lambda = -1)$
- $\left(x = \frac{1}{\sqrt{33}}, y = \frac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = \frac{1}{\sqrt{33}}\right)$
- $\left(x = -\frac{1}{\sqrt{33}}, y = -\frac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = -\frac{1}{\sqrt{33}}\right)$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$\frac{y}{y+2} = mx^2$$

Si deve risolvere rispetto a y :

$$\begin{aligned}\frac{y}{y+2} &= mx^2 \\ \frac{y+2}{1} \cdot \frac{y}{y+2} &= mx^2 \cdot \frac{y+2}{1} \\ y &= mx^2y + 2mx^2 \\ y - mx^2y &= 2mx^2 \\ y(1 - mx^2) &= 2mx^2 \\ \frac{1}{1 - mx^2} \cdot y(1 - mx^2) &= 2mx^2 \cdot \frac{1}{1 - mx^2} \\ y &= \frac{2mx^2}{1 - mx^2}\end{aligned}$$

Esercizio 4

Data l'equazione:

$$\frac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1$$

Si deve risolvere rispetto a y :

$$\begin{aligned}\frac{1}{y+1} &= \sqrt{x+2} - 1 \\ (y+1) \cdot \frac{1}{y+1} &= (\sqrt{x+2} - 1) \cdot (y+1) \\ 1 &= y\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} - y - 1 \\ -y\sqrt{x+2} + y &= -2 + \sqrt{x+2} \\ y(-\sqrt{x+2} + 1) &= \sqrt{x+2} - 2 \\ \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \cdot y(-\sqrt{x+2} + 1) &= (\sqrt{x+2} - 2) \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \\ y &= \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{x+2}}\end{aligned}$$

Esercizio 5

Data l'equazione:

$$\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$$

Si deve risolvere rispetto a y :

$$\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$$

$$\frac{2-y}{1-y} = 10^{x+3}$$

$$(1-y) \cdot \frac{2-y}{1-y} = 10^{x+3} \cdot (1-y)$$

$$2-y = 10^{x+3} - 10^{x+3}y$$

$$-y = 10^{x+3} - 10^{x+3}y - 2$$

$$-y + 10^{x+3}y = 10^{x+3} - 2$$

$$y(-1 + 10^{x+3}) = 10^{x+3} - 2$$

$$\frac{1}{-1 + 10^{x+3}} \cdot y(-1 + 10^{x+3}) = (10^{x+3} - 2) \cdot \frac{1}{-1 + 10^{x+3}}$$

$$y = \frac{10^{x+3} - 2}{10^{x+3} - 1}$$

1.3 Calcolo differenziale e integrale

1.3.1 Integrali fondamentali (o notevoli)

Qua di seguito si presenta una lista di integrali fondamentali (o notevoli), che consentono di calcolare qualsiasi integrale basilare. Non devono essere imparati tutti a memoria poiché la maggior parte possono essere risolti ragionando:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{con } n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}} + c \quad \text{con } n \neq 1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c \quad \text{ma} \quad \int \sin(n \cdot x) dx = -(n \cdot \cos(n \cdot x)) + c$
- $\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c \quad \text{ma} \quad \int \cos(n \cdot x) dx = n \cdot \sin(n \cdot x) + c$
- $\int \cos^2(x) dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$
- $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$
- $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + c$

Per altri integrali, visita il sito: [YouMath](#).

1.3.2 Integrare per sostituzione

Questa tecnica risolutiva è molto potente e può essere sempre applicata. Tuttavia, si tende a non utilizzarla talvolta poiché gli integrali notevoli (cap. 1.3.1) sono più immediati.

Il **primo passo** è prendere in considerazione l'integrale e sostituire il valore dx con:

$$dx = \frac{1}{t'} dt$$

E cercare un valore t comodo così da effettuare sostituzioni intelligenti. Per esempio, dato l'integrale:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

Si può sostituire dx scegliendo come t la x^2 , infatti:

$$t = x^2 \quad t' = 2x \quad dx = \frac{1}{2x} dt$$

$$\int x^3 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2x} dt \longrightarrow \int x^2 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2} dt \longrightarrow \frac{1}{2} \int x^2 \cdot e^{-x^2} dt \longrightarrow \frac{1}{2} \int t \cdot e^{-t} dt$$

Una volta risolto l'integrale, si ritorna alla forma con x andando a risostituire.

1.3.3 Integrare per parti

L'integrazione per parti è un metodo che viene applicato quando:

- Se l'integranda è il prodotto di due funzioni;
- Se l'integranda è il prodotto di due funzioni, e una di queste è la derivata di una primitiva immediata (come esponenziali, trigonometriche, potenze, etc).

L'applicazione è la seguente a seconda dell'integrale definito o indefinito:

- $\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$
- $\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$

Un esempio valido è il seguente integrale:

$$\int t \cdot e^{-t} dt$$

Si prosegue per parti:

$$f(t) = t \quad f'(t) = 1 \quad g'(t) = e^{-t} \quad g(t) = -e^{-t}$$

E si va alla sostituzione:

$$\int t \cdot e^{-t} dt = t \cdot (-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t})$$

1.3.4 Decomposizione in frazioni parziali

La decomposizione in frazioni parziali è un metodo per trasformare il rapporto tra due polinomi in una somma di frazioni più semplici.

Questa tecnica viene inserita nel paragrafo degli integrali poiché spesso viene utilizzata per calcolare integrali che presentano frazioni apparentemente complesse.

Si presenta un integrale complesso:

$$\int \frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} dx$$

Innanzitutto, si eseguono alcune **operazioni preliminari**, ovverossia si prepara la frazione scomponendola il più possibile. In questo caso, al denominatore è possibile scomporre $x^2 - 1$ (ricordando $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$):

$$\int \frac{x^2}{[(x - 1)(x + 1)]^2} dx$$

E inoltre, dato che vi è una potenza e una moltiplicazione all'interno, è possibile scomporre ancora di più:

$$\int \frac{x^2}{(x - 1)^2 (x + 1)^2} dx$$

Adesso si parte con il vero algoritmo. Il **primo passo** è prendere ciascun fattore del denominatore e creare la sua corrispondenza con le lettere:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 &\longrightarrow \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} \\ (x + 1)^2 &\longrightarrow \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Come si può notare, si parte dal grado minimo del fattore preso in considerazione, e lo si aumenta di grado fino a che non si trova il grado originario. Nel caso in cui ci fosse stato:

$$\int \frac{1}{x(x - 3)} dx$$

Sarebbe bastato banalmente:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \frac{A}{x} \\ x - 3 &\longrightarrow \frac{B}{x - 3} \end{aligned}$$

Ovviamente le lettere sono numeri reali da determinare (lo scopo dell'algoritmo). Quindi, il **secondo passo** è riscrivere i termini appena notati come un'uguaglianza:

$$\frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2}$$

Il **terzo passo** è mettere tutti i termini a denominatore comune:

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

Il **quarto passo** è eliminare il denominatore:

$$x^2 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2$$

Il **quinto passo** è eseguire i calcoli e cercare di raggruppare i termini in comune:

$$x^2 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2$$

$$x^2 = Ax^3 + Cx^3 + Ax^2 - Cx^2 + Dx^2 - Ax + 2Bx - Cx - A + B + C + D$$

$$x^2 = (A+C)x^3 + (A+B-C+D)x^2 + (-A+2B-C-2D)x - A+B+C+D$$

Il **sesto passo** è costruire un sistema che avrà come incognite le lettere e come valori noti 1 se vi è una corrispondenza con le x , 0 altrimenti. Quindi, in questo caso solo il fattore $(A+B-C+D)$ avrà 1 nel sistema:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=1 \\ -A+2B-C-2D=0 \\ -A+B+C+D=0 \end{cases}$$

Usando il metodo di sostituzione si ottengono i valori:

$$A = \frac{1}{4}; \quad B = \frac{1}{4}; \quad C = -\frac{1}{4}; \quad D = \frac{1}{4};$$

Il **settimo passo** è sostituire i valori trovati all'interno dell'uguaglianza scritta con le lettere:

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}$$

L'**ottavo** e ultimo **passo** è riscrivere l'integrale con i termini appena trovati. Adesso è evidente che il calcolo risulta molto più semplice:

$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} \right) dx$$

Fonte: [YouMath](#).

1.3.5 Esercizi

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{\cos(3x+1)}$
2. $f(x) = (2x+1) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

Calcolare i seguenti integrali:

3. $\int \frac{1}{x^2-3x} dx$
4. $\int x^3 e^{-x^2} dx$
5. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}-1} dt$
6. $\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt$
7. $\int \frac{1}{4+y^2} dy$
8. $\int x \sqrt{1+x^2} dx$

Esercizio 1

Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt{\cos(3x+1)}$$

La sua derivata è la seguente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(\cos(3x+1))^1}} \cdot (-\sin(3x+1) \cdot 3) \\ f'(x) &= -\frac{3 \sin(3x+1)}{2 \sqrt{\cos(3x+1)}} \end{aligned}$$

Esercizio 2

Data la funzione:

$$f(x) = (2x+1) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

La sua derivata è la seguente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + (2x+1) \cdot (-x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \\ f'(x) &= 2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - 2x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \end{aligned}$$

Esercizio 3

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x} dx$$

Si procede con la risoluzione:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x^2 - 3x} dx \\ &= \int \frac{1}{x(x-3)} dx \end{aligned}$$

↓ si utilizza la decomposizione in frazioni parziali (pag. 20)

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{A(x-3) + B(x)}{x(x-3)}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{Ax - 3A + Bx}{x(x-3)}$$

$$x(x-3) \cdot \frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{(A+B)x - 3A}{x(x-3)} \cdot x(x-3)$$

$$1 = (A+B)x - 3A$$

$$= \begin{cases} A+B=0 \\ -3A=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{-\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3(x-3)}$$

↓ si torna a risolvere l'integrale sostituendo il valore trovato

$$= \int -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3(x-3)} dx$$

$$= -\int \frac{1}{3x} dx + \int \frac{1}{3(x-3)} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-3} dx$$

Per risolvere questo integrale, si sfrutta uno degli integrali notevoli (pagina 18):

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-3} dx \\
 &= -\frac{1}{3} \ln(x) + \frac{1}{3} \ln(x-3) + c \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Questo è vero perché si ricorda che:

$$f(x) = \ln(x-3) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x-3} \cdot \frac{d}{dx}(x-3) = \frac{1}{x-3} \cdot 1$$

Esercizio 4

Dato l'integrale:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

Si procede con la risoluzione usando inizialmente il metodo di sostituzione:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

$$\downarrow \text{ si imposta } t = x^2; \quad t' = 2x; \quad dx = \frac{1}{t'} dt$$

$$= \int x^3 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2x} dt$$

$$= \int \cancel{x^3}^2 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}} dt \longrightarrow \int x^2 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$\downarrow \text{ si termina la sostituzione}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int t \cdot e^{-t} dt$$

$$\downarrow \text{ data la moltiplicazione, adesso si cambia manovra e si utilizza il metodo per parti}$$

$$\downarrow \quad f(t) = t \quad f'(t) = 1 \quad g'(t) = e^{-t} \quad g(t) = -e^{-t}$$

$$= \frac{1}{2} \left[t \cdot (-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t}) dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} [t \cdot (-e^{-t}) - e^{-t}]$$

$$\downarrow \text{ si ritorna alla } x$$

$$= \frac{1}{2} \left(-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} \right) \longrightarrow -\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} \longrightarrow -\frac{x^2 + 1}{2e^{x^2}}$$

Esercizio 5

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}} dt$$

Si inizia con il metodo di sostituzione:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}} dt$$

$$\downarrow \quad u = t - 1; \quad u' = 1; \quad dt = \frac{1}{u'} du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt[3]{u}} \cdot \frac{1}{1} du$$

$$= \int \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} du$$

$$\downarrow \quad \text{si applica l'integrale notevole: } \int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}}$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot u^{\frac{1}{3}-1}}$$

$$\downarrow \quad \text{si ritorna alla } t$$

$$= -\frac{1}{-\frac{2}{3} \cdot (t-1)^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{(t-1)^2}}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}{2}$$

Esercizio 6

Dato l'integrale:

$$\int \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt$$

Si procede con la risoluzione:

$$\begin{aligned} & \int \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \\ = & \int t \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \end{aligned}$$

$$\downarrow \quad \text{si applica il metodo di sostituzione } u = t^2 - 1; \quad u' = 2t; \quad dt = \frac{1}{u'} du$$

$$= \int t \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2t} du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du$$

$$\downarrow \quad \text{si applica l'integrale notevole: } \int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot u^{\frac{1}{2}-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{-\frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{u})$$

$$= \sqrt{u}$$

$$\downarrow \quad \text{si ritorna alla } t$$

$$= \sqrt{t^2 - 1}$$

Esercizio 7

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{4+y^2} dy$$

Si risolve con il metodo di sostituzione e utilizzando una grossa fetta di trigonometria:

$$\int \frac{1}{4+y^2} dy$$

$$\downarrow \quad \text{metodo di sostituzione } y = 2 \tan(t); \quad y' = 2 \sec(t)^2; \quad dy = y' dt$$

$$= \int \frac{1}{4 + (2 \tan(t))^2} \cdot 2 \sec(t)^2 dt$$

$$= \int \frac{2 \sec(t)^2}{4 + 4 \tan(t)^2}$$

$$= \int \frac{2 \sec(t)^2}{4 (1 + \tan(t)^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\sec(t)^2}{1 + \tan(t)^2}$$

$$\downarrow \quad \text{si utilizza la proprietà } \tan(t)^2 = \sec(t)^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\sec(t)^2}{1 + \sec(t)^2 - 1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int 1 dt$$

$$= \frac{1}{2} t$$

$$\downarrow \quad \text{si sostituisce la } t$$

$$\rightarrow y = 2 \tan(t) \rightarrow t = \arctan\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$= \frac{\arctan\left(\frac{y}{2}\right)}{2}$$

Esercizio 8

Dato l'integrale:

$$\int x\sqrt{1+x^2} \, dx$$

Si procede con la risoluzione partendo dal metodo di sostituzione:

$$\int x\sqrt{1+x^2} \, dx$$

$$\downarrow \text{ metodo di sostituzione } t = 1 + x^2; \quad t' = 2x; \quad dx = \frac{1}{t'} dt$$

$$= \int x \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2x} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\downarrow \text{ si utilizza l'integrale notevole } \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{(t)^3}}{3}$$

$$\downarrow \text{ si ritorna alla } x$$

$$= \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}$$

2 Equazioni differenziali ordinarie

Le equazioni differenziali sono il primo argomento trattato durante il corso di Analisi II. È un argomento importante dal punto di vista teorico, ma soprattutto dal punto di vista pratico poiché ricopre $\frac{1}{4}$ dell'esame.

Si presenta una prima parte di teoria per capire il suo funzionamento e successivamente una parte pratica con degli esercizi.

2.1 Concetti e teoremi fondamentali

Si chiama **equazione differenziale ordinaria di ordine n** una relazione della forma:

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad (1)$$

con $F : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione incognita $y = y(t)$ insieme alle sue derivate fino all'ordine n incluso, calcolate nello stesso punto, in questo caso t .

L'**ordine** di un'equazione è l'ordine massimo di derivazione che vi compare. Con **ordinaria** si riferisce al fatto che l'incognita è una funzione di una variabile. È importante dire ordinaria, anche se talvolta viene omissso, poiché esistono anche equazioni a **derivate parziali** quando l'incognita è una funzione di più variabili.

Esplicitando la derivata di ordine massimo nell'equazione 1, si ottiene:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \quad (2)$$

con $f : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$. Questa forma viene chiamata **normale**. Inoltre, se nell'equazione 1 F è un polinomio di primo grado, l'equazione viene definita **lineare**. Per cui, la forma generale è la seguente:

$$a_0(t) y^{(n)}(t) + a_1(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t) y'(t) + a_n(t) y(t) = b(t) \quad (3)$$

Nonostante la forma generale possa sembrare alquanto complessa, si presenta qua di seguito un **esempio** per dimostrare il contrario:

- Equazione del 1° ordine lineare:

$$N(t) = ce^{\varepsilon t}$$

Primo grado poiché vi è solo $N(t)$ e non altre derivate (e.g. $N'(t), N''(t), \dots$).
Lineare poiché $N(t)$ è un polinomio di primo grado.

Definizione 1

Si dice **soluzione** (o integrale) dell'equazione 2 una funzione $\varphi = \varphi(t)$, definita e differenziabile n -volte in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ e:

$$\varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\right) \quad \forall t \in I \quad (4)$$

Il seguente modello, che modella il moto dei pianeti, è un **esempio** di tre equazioni differenziali del secondo ordine:

$$x'' = -MG \cdot \frac{x}{r^3} \quad y'' = -MG \cdot \frac{y}{r^3} \quad z'' = -MG \cdot \frac{z}{r^3}$$

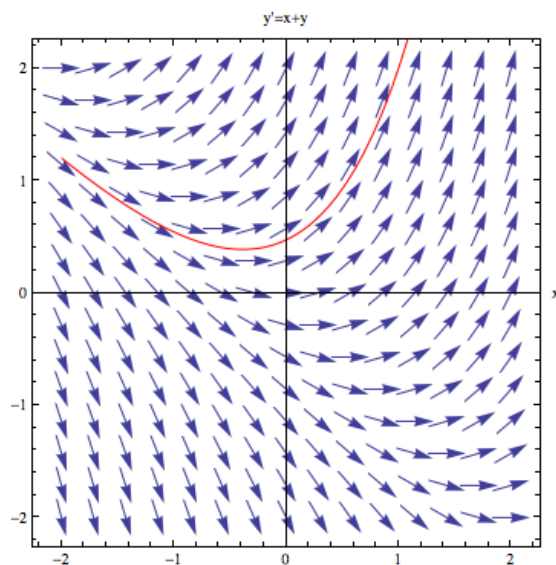
Da un **punto di vista geometrico**, un'equazione differenziale prescrive in ogni punto la **pendenza della tangente alla curva di soluzione che passa per quel punto**. Un **esempio**:

$$y' = x + y$$

se $x = 1$ e $y = 2$, allora si avrà:

$$y'(1) = 1 + 2$$

Risultato sensato vedendo il grafico:



La ricerca delle primitive di una data funzione f , continua su un intervallo, equivale a risolvere l'equazione differenziale:

$$y' = f(t)$$

che ha infinite soluzioni del tipo $y(t) = \int f(t) dt + c, c \in \mathbb{R}$.

Più in generale, l'**insieme delle soluzioni** di un'equazione differenziale di ordine n o di un sistema di n equazioni del primo ordine sia rappresentato da una famiglia di funzioni, **dipendente da n parametri**. Tale famiglia prende il nome di **integrale generale**.

2.2 Equazioni lineari

Le **equazioni lineari** sono della forma:

$$y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t) \quad (5)$$

Con a_0 e g funzioni reali di una variabile reale continue nel loro insieme di definizione, ossia:

$$a_0, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_0, g \in C^0(I)$$

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale lineare è data dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} \left[c_1 + \int \left(g(t) e^{A(t)} \right) dt \right]$$

In cui:

$$A(t) = \int (a_0(t)) dt$$

Attenzione, prima di applicare la formula, è importante avere la forma dell'equazione 5.

Esempio

Data l'equazione:

$$y' = y + x$$

Si porta nella forma dell'equazione 5:

$$y' - y = x$$

Si calcola l'integrale:

$$e^{\int -1 dx} \rightarrow - \int 1 dx = -x \rightarrow e^{-x}$$

Si moltiplica il termine per entrambi i lati:

$$(e^{-x}) y' + (-1 \cdot e^{-x}) y = x e^{-x}$$

E risulta evidente che adesso è possibile applicare la proprietà delle moltiplicazioni delle derivate:

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ (-1 \cdot e^{-x}) y + (e^{-x}) y' &= [e^{-x} \cdot y]' \end{aligned}$$

Sostituendo il risultato, ottenuto eseguendo manipolazioni algebriche, all'interno dell'equazione:

$$[(e^{-x}) y]' = x e^{-x}$$

A questo punto si esegue l'integrale:

$$\int [(e^{-x}) y]' dx = \int x e^{-x} dx$$

A sinistra si può sempre semplificare la derivata con l'integrale, per cui non ci sono problemi:

$$(e^{-x}) y = \int x e^{-x} dx$$

A destra, si esegue il metodo per parti (par. 1.3.3):

$$\begin{aligned} f = x \quad g' = e^{-x} \quad f' = 1 \quad g = -e^{-x} \\ x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx \\ x \cdot (-e^{-x}) - (e^{-x}) \end{aligned}$$

Dunque il risultato finale è:

$$\begin{aligned} (e^{-x}) y &= -x e^{-x} - e^{-x} + c \\ (e^{-x}) y &= e^{-x} (-x - 1) + c \\ y &= -x - 1 + c \cdot \frac{1}{e^{-x}} \\ y &= -x - 1 + c \cdot e^x \end{aligned}$$

2.3 Equazioni a variabili separabili

Le **equazioni a variabili separabili** sono della forma:

$$y' = f(t) g(y) \quad (6)$$

Con la funzione f continua nell'intervallo I ($f \in C(I)$) e la funzione g continua nell'intervallo J ($g \in C(J)$). Gli intervalli I, J sono contenuti in \mathbb{R} .

Nota bene: se la funzione \bar{y} è soluzione dell'equazione $g(y) = 0$, la retta $y = \bar{y}$ è una curva integrale (si veda l'esempio sottostante per convincersi di ciò).

Se $g(y) \neq 0$ in $J' \subseteq J$, l'integrale generale dell'equazione 6 è:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + c \quad (7)$$

Esempio

Data l'equazione:

$$y' = 2t\sqrt{1-y^2}$$

Si può effettuare immediatamente un'osservazione importante. Come detto precedentemente, se $g(y) = 0$ e \bar{y} è soluzione dell'equazione, allora $y = \bar{y}$ è una curva integrale. Si può facilmente trovare due valori di y tali per cui l'equazione sia uguale a zero:

$$\begin{aligned} y = 1 & \longrightarrow y' = 2t\sqrt{1-1^2} \\ & y' = 2t \cdot 0 \\ & y' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = -1 & \longrightarrow y' = 2t\sqrt{1-(-1)^2} \\ & y' = 2t \cdot 0 \\ & y' = 0 \end{aligned}$$

Dato che:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t \\ g(y) &= \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

E con $y = \pm 1$ la funzione g si annulla, allora ± 1 sono soluzioni dell'equazione.

Adesso si cercano le soluzioni tali che $g(y) \neq 0$, quindi con $y \neq \pm 1$. Per farlo, si applica semplicemente la "formula" 7:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = 2 \int t dt + c$$

Si procede con la risoluzione degli integrali:

$$2 \cdot \int t dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2} = t^2 + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \arcsin(y)$$

Si riaggregano i risultati:

$$\arcsin(y) = t^2 + c$$

Si esplicita la y ricordando le proprietà della trigonometria $\arcsin(y) = x \rightarrow \sin(x) = y$:

$$y = \sin(t^2 + c)$$

2.4 Problema di Cauchy

Il **problema di Cauchy (o dei valori iniziali)** ha due forme:

- Equazioni scalari di ordine n , con l'obiettivo di trovare y di classe¹ C^n tale che:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(\tau) = \xi_0 \\ y'(\tau) = \xi_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \end{cases}$$

essendo $\tau, \xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ costanti assegnate;

- Sistemi, con l'obiettivo di trovare y di classe C^1 tale che:

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$$

essendo $\tau \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ assegnati.

Le equazioni $y^{(j)}(\tau) = \xi_j$ con $j = 0, \dots, j = n-1$, e $y(\tau) = \xi$, prendono il nome di **condizioni iniziali**. Le soluzioni si intendono definite localmente, ovvero in un intorno dell'istante iniziale τ .

Un **esempio** di problema di Cauchy:

$$\begin{cases} z''(t) + 4z'(t) + 4z(t) = (t+1)^2 \\ z(0) = \frac{1}{8} \\ z'(0) = -3 \end{cases}$$

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$(P) \begin{cases} y'(x) = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema 1 (Teorema di esistenza e unicità locale per equazioni differenziabili a variabili separabili). *Sia $a(x)$ una funzione continua in un intervallo aperto I che contiene x_0 e $b(y)$ una funzione continua in un intervallo aperto J che contiene y_0 . Allora esiste $\delta > 0$ e una funzione definita per ogni $x \in I' [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I$ e ivi derivabile che risolve il problema di Cauchy. Se $b(y) \in C^1(J)$, allora tale soluzione è unica.*

Considerando il teorema 1 enunciato poco fa, si intende dire che esiste almeno una funzione $(\bar{y}(x))$ tale che la sua derivata è uguale alla funzione continua $(a(x))$ moltiplicata per un'altra funzione continua $(b(y))$ che ha come parametro la primitiva:

$$\begin{array}{ll} \text{Primitiva} & \longrightarrow \bar{y}(x) \\ \text{Derivata} & \longrightarrow \bar{y}'(x) = a(x) \cdot b(\bar{y}(x)) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \end{array}$$

¹Con questa notazione si indica che una funzione ha una derivata continua di grado n . Quindi dicendo che y è di classe C^4 , vuol dire che y, y', y'', y''', y'''' sono tutte funzioni continue.

Ovviamente la derivata $\bar{y}(x)$ deve valere per qualsiasi x che appartiene all'intorno x_0 aggiungendo/rimuovendo δ . Inoltre la primitiva nel punto x_0 deve essere uguale a y_0 ($\bar{y}(x_0) = y_0$). Allora, la primitiva ($\bar{y}(x)$) è derivabile e la sua derivata è continua. L'unicità è possibile affermarla se la funzione $b(y)$ ha una proprietà più forte della continuità, ovvero la continuità nella derivata in J .

Definizione 2

Teorema di esistenza e unicità globale per equazioni differenziali lineari.

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$$

Con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue su un intervallo I della retta reale. Se $x_0 \in I$, allora il problema:

$$\begin{cases} y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ammette un'unica soluzione in I .

Definizione 3

Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione omogenea del primo ordine.

L'insieme V delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$y' + a(x)y = 0$$

È uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione 1.

Indicando con $y_P(x)$ una soluzione particolare dell'equazione completa

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Allora il suo integrale generale è

$$y(x) = y_P(x) + y_{om}(x) \quad y_{om}(x) \in V$$

2.4.1 Intervallo massimale

Si parte subito con il dire che determinare l'intervallo massimale non è un'operazione banale. Questo perché non esistono algoritmi (semplici) certi che consentono di ottenere un intervallo massimale. Tuttavia, lo studente può utilizzare il ragionamento ed eventuali intuizioni per capire quando una soluzione ha intervallo estendibile e quando esso è massimale.

Definizione 4

Il più ampio intervallo su cui la soluzione è definita si chiama **intervallo massimale**.

L'intervallo massimale è possibile determinarlo una volta che si è giunti al termine del problema di Cauchy (par. 2.4). Una volta concluso l'esercizio, avendo trovato l'integrale generale e la costante c , è necessario eseguire alcuni passaggi:

- Nell'integrale generale, sostituire la costante c trovata al termine dell'esercizio;
- Esplicitare la y tramite passaggi algebrici;
- Porre la condizione di esistenza;
- Studiare l'intervallo massimale con appositi ragionamenti.

Si procede presentando due esempi e ricordando che un intervallo, può essere esteso se rispetta certe condizioni.

Esempio 1

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare l'intervallo massimale.

Il problema è risolvibile con il metodo delle variabili separabili (par. 2.3):

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x)g(y) \\ f(x) &= e^{-x} \\ g(y) &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int e^{-x} dx + c$$

Si potrebbe tentare di calcolare una soluzione costante, ma risulterebbe evidente che l'unica soluzione costante, cioè $y = 0$, non è ammessa come soluzione del problema (condizione iniziale $y(0) = 1$). Per questo motivo, si procede con il metodo delle variabili separabili.

Si risolve l'integrale:

$$\begin{aligned}\int y^{-\frac{1}{2}} dy &= -e^{-x} + c \\ \downarrow \text{ si utilizza l'integrale notevole } \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1 \\ \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} &= -e^{-x} + c \\ 2\sqrt{y} &= -e^{-x} + c\end{aligned}$$

La soluzione trovata è l'integrale generale. Si conclude il problema di Cauchy trovando la costante c , quindi applicando la condizione iniziale $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned}2\sqrt{1} &= -e^{-0} + c \\ 2 + 1 &= c \\ 3 &= c\end{aligned}$$

Adesso si calcola l'intervallo massimale:

- Si sostituisce nell'integrale generale la costante c :

$$2\sqrt{y} = -e^{-x} + 3$$

Si esplicita la y :

$$\begin{aligned}\sqrt{y} &= -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2} \\ y &= \left(-\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2}\right)^2\end{aligned}$$

- Le condizioni d'esistenza del problema di Cauchy sono le seguenti:

$$\sqrt{y}e^{-x} \longrightarrow \underbrace{]-\infty, +\infty[}_{def.x} \times \overbrace{[0, +\infty[}^{def.y}$$

La y deve essere maggiore/uguale a zero, mentre la x non ha grosse restrizioni. L'intervallo massimale per definizione può essere identico o un sottoinsieme. Per trovarlo è necessario studiare il valore della y esplicitata al passaggio precedente. In questo caso, essa in zero ($y = 0$) non ha soluzione, per cui si cercano le soluzioni per $y > 0$.

- Andando a cercare una soluzione costante dell'equazione differenziale, ci si accorge che $g(y) = \sqrt{y}$ è uguale a zero solo se $y = 0$, e quindi essa sarebbe una soluzione costante del problema (ricordandosi quanto detto nel par. 2.3) poiché $g(y) = 0$ con $y = \bar{y}$. Tuttavia, $y = 0$ non è ammesso dal problema a causa della condizione iniziale $y(0) = 1$.

Per questo motivo, si cerca una soluzione tale che $y > 0$. E per farlo, si prende in considerazione la y trovata al passaggio precedente e si impone

una condizione:

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2} &> 0 \\ -e^{-x} &> -3 \\ e^{-x} &< 3 \\ -x &< \ln(3) \\ x &> -\ln(3) \end{aligned}$$

- Per ciascun valore di x che è maggiore di $-\ln(3)$, la y deve valere:

$$y = \left(-\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2} \right)^2$$

E per tutti gli altri casi? Nei casi in cui la x sia minore o uguale a $-\ln(3)$, la y dovrà valere 0, come confermato nel caso della soluzione costante $y = 0$.

Da queste considerazioni, è possibile rappresentare la soluzione del problema di Cauchy \bar{y} come:

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \left(-\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3}{2} \right)^2 & \text{se } x > -\ln(3) \\ 0 & \text{se } x \leq -\ln(3) \end{cases}$$

Per cui l'intervallo massimale è $-\infty, +\infty$ e difatti si può estendere a destra e sinistra.

Esempio 2

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y^2 \cos(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

Calcolare l'intervallo massimale.

Il problema è risolvibile con il metodo delle variabili separabili (par. 2.3):

$$\begin{aligned} y'(x) - f(x)g(y) &= 0 \longrightarrow y'(x) = f(x)g(y) \\ f(x) &= \cos(x) \\ g(y) &= y^2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \cos(x) dx + c$$

Si potrebbe tentare di calcolare una soluzione costante, ma risulterebbe evidente che l'unica soluzione costante, cioè $y = 0$, non è ammessa come soluzione del problema (condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$). Per questo motivo, si procede con

il metodo delle variabili separabili.

Si risolve l'integrale:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \cos(x) dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int \cos(x) dx$$

$$\downarrow \text{ si utilizza l'integrale notevole } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \sin(x)$$

$$-y^{-1} = \sin(x)$$

$$y = -\frac{1}{\sin(x)} + c$$

La soluzione trovata è l'integrale generale. Si conclude il problema di Cauchy trovando la costante c , quindi applicando la condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$:

$$-1 = -\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + c$$

$$-1 = -\frac{1}{1} + c$$

$$0 = c$$

Adesso si calcola l'intervallo massimale:

- Si sostituisce nell'integrale generale la costante c :

$$y = -\frac{1}{\sin(x)} + 0$$

- La condizione d'esistenza del problema di Cauchy sono le seguenti:

$$y^2 \cos(x) \longrightarrow \underbrace{]-\infty, +\infty[}_{def.x} \times \underbrace{]-\infty, +\infty[}_{def.y}$$

- A differenza dell'esempio precedente, in questo caso la x non può essere qualsiasi valore poiché c'è un \sin al denominatore che potrebbe causare una divisione per zero (impossibile). Per cui, la condizione d'esistenza è:

$$\sin(x) > 0$$

Calcolando il arcsin di 0, si ottiene:

$$x > \arcsin(0) \longrightarrow x > 0$$

Ma attenzione! Perché il valore \sin si può annullare anche con altri valori di x , come per esempio π , per cui:

$$0 < x < \pi$$

Questo risulta l'intervallo massimale, ovviamente estremi esclusi.

2.4.2 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Le **equazioni differenziali lineari del secondo ordine** nella forma standard sono composte nel seguente modo:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

Con $a(x), b(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I)$.

Il problema di Cauchy per una equazione lineare del secondo ordine è composto nel seguente modo:

$$\begin{cases} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Definizione 5

Teorema di esistenza e unicità globale per equazioni lineari del secondo ordine.

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = f(x)$$

Con $a(x), b(x)$ e $f(x)$ funzioni continue su un intervallo I detta retta reale. Se $x_0 \in I$, allora il problema:

$$\begin{cases} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Ammette un'unica soluzione in I .

Definizione 6

Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione omogenea del secondo ordine

L'insieme V delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione 2.

L'insieme S delle soluzioni dell'equazione completa è una varietà lineare:

$$S = \{y_P(x) + y_{om}(x) : y_{om}(x) \in V\}$$

In cui $y_P(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Per risolvere questo tipo di equazioni, si utilizza il **metodo di somiglianza o dei coefficienti indeterminati** (par. 2.5).

2.5 Metodo di somiglianza o dei coefficienti indeterminati

Il metodo di somiglianza o dei coefficienti indeterminati è una tecnica che consente di risolvere le equazioni differenziali lineari del secondo ordine rapidamente.

Non esiste un'unica tecnica risolutiva, ma è necessario avere a disposizione una serie di **pattern risolutivi**. Il motivo è dovuto al fatto che ogniqualvolta si presenti un'equazione differenziale lineare del secondo grado, si eseguirà un *matching* tra i *pattern risolutivi* che si hanno a disposizione e l'equazione risultante (in parole povere, l'espressione a destra dell'uguale).

| Tipo | Equazione differenziale | Soluzione particolare |
|--|------------------------------------|--|
| Monomio | $y'' + y' - 2y = 5$ | $y_P(x) = a$ |
| Primo grado | $y'' + y' - 2y = x + 2$ | $y_P(x) = ax + b$ |
| Secondo grado | $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 1$ | $y_P(x) = ax^2 + bx + c$ |
| Esponenziale | $y'' + 3y' - 2y = 3e^{-x}$ | $y_P(x) = ae^{-x}$ |
| | $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} \cdot x$ | $y_P(x) = (ax + b)e^{-x}$ |
| | $y'' + 3y' + 2y = 3e^x$ | $y_P(x) = ae^x$ |
| | $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} \cdot x$ | $y_P(x) = (ax + b)e^{2x} \cdot x$ |
| N.B. nell'ultima equazione viene aggiunta una x in y_P a causa delle soluzioni dell'equazione caratteristica (vedi la tab. 2), le quali sono 1 e 2. Quindi, la seconda soluzione, cioè 2, corrisponde al valore nell'esponenziale (non considerando la variabile ovviamente). | | |
| Coseno/Seno | $y'' + y' = \cos(2x)$ | $y_P(x) = a \cdot \cos(2x) + b \cdot \sin(2x)$ |

Tabella 1: Pattern risolutivi del metodo di somiglianza.

A questi pattern è necessario aggiungere alcuni casi che modificano la soluzione particolare. **Attenzione:** questi casi modificano la soluzione particolare scelta! Nella tabella 2, si indicano con λ le soluzioni dell'equazione caratteristica (in parole povere l'equazione a sinistra dell'uguale).

Un altro caso particolare è il **principio di sovrapposizione**. In questo caso, basta risolvere ogni fattore come un'equazione a sé stante. Per cui la soluzione particolare si compone nel seguente modo:

$$y_P(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x)$$

Per esempio, data l'equazione:

$$y'' + 6y' + 8y = e^{2x} + \sqrt{\pi}x^2$$

Si risolve:

$$y'' + 6y' + 8y = e^{2x}$$

E successivamente:

$$y'' + 6y' + 8y = \sqrt{\pi}x^2$$

| λ | Equazione differenziale | Che cosa viene modificato |
|---|--|---|
| <p>Nel caso in cui la soluzione dell'equazione caratteristica è uguale a zero, si moltiplica la soluzione particolare per x. Quest'ultima viene elevata ad un valore pari al numero di volte che essa annulla l'equazione caratteristica.</p> <p>Nell'esempio sottostante, la x viene elevata ad 1 poiché le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Dunque, λ_1 annulla soltanto una volta l'equazione caratteristica (chiamata formalmente molteplicità algebrica).</p> <p><u>Attenzione:</u> la regola viene applicata solo ai monomi (a), polinomi di primo e secondo grado, ovvero nella forma $ax + b$ o $ax^2 + bx + c$.</p> | | |
| $\lambda = 0$ | $y'' + y' = x + 2$ | $y_P(x) = (ax + b)x^1$ |
| <p>Nel caso in cui le soluzioni dell'equazione caratteristica siano uguali tra di loro, si modifica la soluzione generale aggiungendo una x.</p> <p>Nell'esempio sottostante, le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ per cui viene aggiunta una x nella soluzione generale.</p> | | |
| $\lambda_1 = \lambda_2$ | $y'' - 2y' + y = (x - 1)^2$ | $y(x) = y_P(x) + c_1 e^x + c_2 x e^x$ |
| <p>Nel caso in cui le soluzioni dell'equazione caratteristica siano uguali al termine dell'esponenziale ($e^{\alpha x}$) presente a destra dell'uguale dell'equazione caratteristica, alla soluzione particolare viene moltiplicata una x elevata ad un valore pari alla sua molteplicità algebrica.</p> <p>Nell'esempio sottostante, le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$. E dato che il valore di λ_n compare nell'esponenziale dell'equazione caratteristica, viene aggiunta una x.</p> <p><u>Attenzione:</u> la regola vale solo se l'esponenziale ha una x tra i suoi termini, quindi non è valida per esempio con e^2. In generale deve essere: $e^{\alpha x}$</p> | | |
| $\lambda_1 = \alpha$ | $y'' - 5y' + 6y = 3xe^{2x}$ | $y_P(x) = x \cdot [e^{2x}(ax + b)]$ |
| <p>Nel caso in cui le soluzioni dell'equazione caratteristica siano numeri immaginari e uguali: al termine dell'esponenziale ($e^{\alpha x}$) e al termine del seno/coseno ($\cos(\beta x)/\sin(\beta x)$); allora viene aggiunta una x alla soluzione particolare.</p> | | |
| $\lambda = \alpha \pm \beta i$ | $y'' \dots = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ $y'' \dots = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ | $y_P(x) = x \cdot e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + \sin(\beta x))$ |

Tabella 2: Casi particolari della λ nel metodo di somiglianza.

2.6 Metodo di variazione delle costanti

Il **metodo di variazione** delle costanti è una tecnica più generale che consente di ricavare una soluzione particolare dell'equazione completa, qualunque sia la forma del termine forzante (cioè quello a destra dell'uguale).

Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Dopo aver ottenuto la soluzione particolare con il metodo di somiglianza (par. 2.5):

$$y_P(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

Si possono ottenere le due costanti grazie a queste operazioni tra matrici:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}}_{\text{Wronskiana}} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

Attenzione, in questo caso le costanti sono derivate, per cui è necessario integrarle per ottenere la soluzione finale.

Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' + y = \sin(x)$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono:

$$\frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$$

La soluzione generale dunque è:

$$y(x) = y_P(x) + c_1 e^{i \cdot x} + c_2 e^{-i \cdot x}$$

Per ottenere la soluzione particolare viene utilizzato il metodo di somiglianza:

$$y_P(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$$

Adesso viene utilizzato il metodo di variazione per ottenere le costanti. Quindi si costruiscono le matrici:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'(x) \\ b'(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(x) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(x) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sin^2(x) \\ \cos(x) \sin(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per ottenere le costanti a e b è necessario integrare le derivate appena trovare, per cui:

$$\begin{aligned}
 a &= \int -\sin^2(x) \, dx \\
 &\downarrow \text{ si utilizza l'integrale fondamentale } \int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx \\
 &= - \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx \\
 &= - \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx \\
 &= - \left(\int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos(2x)}{2} \, dx \right) \\
 &= - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \int \cos(2x) \, dx \right) \\
 &\downarrow \text{ si ricorda il risultato della seguente derivata } \frac{d}{dx} \sin(5x) = 5 \cos(5x) \\
 &= -\frac{1}{2}x - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \int \cos(x) \sin(x) \, dx \\
 &\downarrow \text{ si utilizza il metodo di sostituzione } t = \sin(x) \quad dx = \frac{1}{t'} \, dt \\
 &= \int \cos(x) \cdot t \cdot \frac{1}{\cos(x)} \, dt \\
 &= \int \cancel{\cos(x)} \cdot t \cdot \frac{1}{\cancel{\cos(x)}} \, dt \\
 &= \int t \, dt \\
 &= \frac{t^2}{2} \\
 &\downarrow \text{ si conclude il metodo di sostituzione} \\
 &= \frac{\sin^2(x)}{2} + c
 \end{aligned}$$

Per cui, andando a sostituire i due risultati nella soluzione particolare, è possibile ottenere anche la soluzione generale:

$$\begin{aligned}
 y_P(x) &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} \right) \cos(x) + \left(\frac{\sin^2(x)}{2} \right) \sin(x) \\
 y(x) &= y_P(x) + c_1 e^{i \cdot x} + c_2 e^{-i \cdot x}
 \end{aligned}$$

2.7 Sistemi di equazioni differenziali

Nel corso di Analisi II vengono affrontati sistemi lineari del primo ordine a coefficienti costanti, quindi nella forma del tipo:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) + f_1(x) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + f_2(x) \end{cases}$$

Dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $x \in I$.

La **risoluzione** dei **sistemi di equazioni differenziali** prevede di risolvere la seguente equazione matriciale:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= A\mathbf{X} + \mathbf{F} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Nel caso i valori $f_1(x)$ e $f_2(x)$ siano nulli, cioè uguali a zero, il sistema viene detto **omogeneo**:

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$$

In questo caso, calcolando gli autovalori (vedere esempio a fine paragrafo se non si ricorda come calcolare gli autovalori) della matrice A :

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

è possibile trovare una forma dell'integrale generale particolare. Si ricorda che il determinante di una matrice quadrata 2×2 è possibile calcolarlo eseguendo una somma tra la moltiplicazione dei valori della diagonale principale e tra la moltiplicazione dei valori della diagonale secondaria.

Definizione 7

Siano λ_1 e λ_2 due autovalori distinti della matrice A del sistema omogeneo e siano \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 i corrispondenti autovettori. Dunque, l'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$ è dato da:

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Esempio

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$$

Innanzitutto, si può osservare immediatamente che è un sistema omogeneo poiché mancano i termini $f_{1,2}(x)$ (vedi l'eq. 8). Si procede con la costruzione della matrice A e il calcolo dei suoi autovalori:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \det \left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ (2-\lambda) \cdot (1-\lambda) - 3 \cdot 2 &= 0 \\ 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\ \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} &= \lambda_1 = 4; \quad \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

Si conclude l'esercizio calcolando i rispettivi autovalori, ovvero sostituendo le due λ all'interno delle matrici precedenti:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 4 &\longrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per ottenere la soluzione generale si applica rapidamente l'eliminazione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Risolvendo la seguente equazione ottenuta grazie alla EG:

$$-2k_1 + 3k_2 = 0 \longrightarrow 2k_1 = 3k_2 \longrightarrow k_1 = \frac{3}{2}k_2$$

Si ottiene la soluzione generale:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \left\{ k_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dove $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovalore di $\lambda_1 = 4$.

$$\begin{aligned} \lambda_2 = -1 \quad \longrightarrow \quad & \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Adesso EG:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[E_2(-\frac{1}{2})]{E_1(\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La soluzione generale è:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 = 0 \quad \rightarrow \quad k_1 = -k_2 \\ \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \left\{ k_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Dove $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovalore di $\lambda_2 = -1$.

L'esercizio si conclude scrivendo l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Si noti bene che l'integrale generale non è unico, infatti è possibile che gli autovalori siano diversi. Per esempio, anche il seguente integrale generale è ammesso:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

2.8 Esercizi

2.8.1 Variabili separabili e problema di Cauchy

Esame 21 giugno 2023 - Gruppo A

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 6x + 6xy^2 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

e indicare il più ampio intervallo su cui tale soluzione è definita.

Data l'equazione differenziale, non è possibile risolverla direttamente utilizzando le variabili separabili poiché dovrebbe essere nella forma del tipo $y' = f(t)g(y)$ (vedi eq. 6). Per cui, si raccoglie a fattore comune:

$$\begin{cases} y' = 6x(1 + y^2) \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

E a questo punto è possibile applicare le variabili separabili. Si scrive l'integrale (vedi eq. 7):

$$\int \frac{1}{1 + y^2} dy = \int 6x dx$$

E si risolvono entrambe le parti utilizzando gli integrali immediati (par. 1.3.1):

$$\arctan(y) = 3x^2 + c$$

Per trovare l'integrale generale, si trova c applicando la condizione iniziale del problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} \arctan(0) &= 3 \cdot 2^2 + c \\ 0 &= 12 + c \\ -12 &= c \end{aligned}$$

E si esplicita la y :

$$\begin{aligned} \arctan(y) &= 3x^2 - 12 \\ \tan(3x^2 - 12) &= y \end{aligned}$$

La prima parte dell'esercizio è conclusa. Si procede adesso con il calcolo dell'intervallo massimale.

La funzione \tan , in generale, è definita tra $\pm \frac{\pi}{2}$ (vedi figura 1), quindi l'argomento della funzione deve essere compreso tra:

$$-\frac{\pi}{2} < 3x^2 - 12 < \frac{\pi}{2}$$

Adesso il ragionamento da fare per capire l'intervallo massimale non è banale. Inizialmente, magari presi dalla furia in sede d'esame, si potrebbe cadere nella



Figura 1: Grafico della funzione \tan ([fonte](#)).

tentazione di procedere immediatamente con l'esplicitazione della x :

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 12 &< \frac{\pi}{2} \\
 3x^2 &< \frac{\pi}{2} + 12 \\
 x^2 &< \frac{\pi}{6} + 4 \\
 x &< \sqrt{\frac{\pi}{6} + 4}
 \end{aligned}$$

E a specchio anche l'altra parte (non si riportano i calcoli perché basta cambiare il segno...). Lo studente potrebbe erroneamente concludere dicendo che questo è l'intervallo massimale:

$$\sqrt{-\frac{\pi}{6} + 4} < x < \sqrt{\frac{\pi}{6} + 4}$$

E in parte è vero, perché nei pressi di $x = 2$, dove l'equazione $3x^2 - 12$ si annulla, la precedente disuguaglianza è sensata. Ma *attenzione* all'argomento della funzione \tan ! L'equazione $3x^2 - 12$ si annulla con i valori di $x = \pm 2$. Questo significa che vicino ai valori in cui si annulla, la x potrebbe avere dei valori che interessano le condizioni dell'intervallo massimale che si sta prendendo in considerazione.

Nel dettaglio, con $x = 2$ la seguente disuguaglianza è sensata:

$$\sqrt{-\frac{\pi}{6} + 4} < x < \sqrt{\frac{\pi}{6} + 4}$$

Per convincersi di ciò, si prenda come esempio $x = 2.1$, la disuguaglianza è vera:

$$1.8645 \dots < 2.1 < 2.1268 \dots$$

Con $x = -2$ non è più sensata, poiché prendendo come valore $x = -2.1$ e sostituendola nell'intervallo trovato inizialmente:

$$-\frac{\pi}{2} < 3(-2.1)^2 - 12 < \frac{\pi}{2}$$

$$-1.57 \dots < 1.23 < 1.57$$

La disuguaglianza è vera, mentre con quella trovata esplicitando la x no:

$$1.8645 \dots < -2.1 < 2.1268 \dots$$

Per renderla vera, basta semplicemente affermare che l'intervallo massimale dipende dalla condizione iniziale:

$$-\sqrt{\frac{\pi}{6} + 4} < x < -\sqrt{-\frac{\pi}{6} + 4} \quad \vee \quad \sqrt{-\frac{\pi}{6} + 4} < x < \sqrt{\frac{\pi}{6} + 4}$$

Si riportano qui i grafici della funzione $3x^2 - 12$ e dell'intervallo massimale. Ed è interessante notare come il “buco” tra i due intervalli sia causato dalla funzione che con quei valori di x decresce a tal punto da non rispettare più la disuguaglianza.

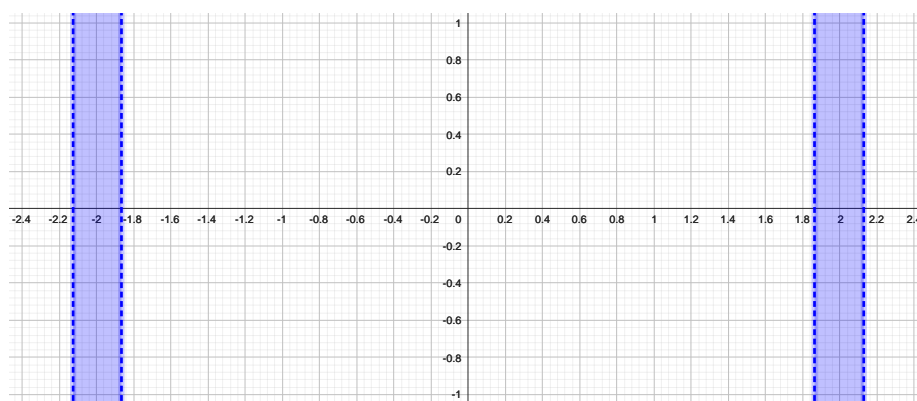


Figura 2: Grafico dell'intervallo massimale.



Figura 3: Grafico della funzione $3x^2 - 12$.

Esame 06 settembre 2023 - Gruppo A

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + x + y + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e indicare il più ampio intervallo su cui tale soluzione è definita.

Il problema può essere risolto in due modi: il primo, quello più immediato probabilmente, è risolverlo come un'equazione lineare; il secondo, quello più ragionato, è risolverlo con il metodo di separazione delle variabili eseguendo alcune manipolazioni algebriche.

Con il **metodo delle variabili separabili** è necessario raccogliere i termini usando un po' di intuizione:

$$1 + x + y + xy = (x + 1)(y + 1)$$

La soluzione costante dell'equazione è $y = -1$, ma non è concessa dal problema di Cauchy dato che la condizione iniziale impone $y(0) = 1$. Adesso si applica la definizione:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y+1} dy &= \int x+1 dx \\ \int \frac{1}{y+1} dy &= \int x dx + \int 1 dx \\ \int \frac{1}{y+1} dy &= \frac{x^2}{2} + x + c \\ \int \frac{1}{y+1} dy &= \frac{x^2}{2} + x + c \\ &\downarrow \text{ si risolve per sostituzione } t = y+1 \quad dt = \frac{1}{t'} dy \\ \int \frac{1}{t} \cdot 1 dt &= \frac{x^2}{2} + x + c \\ \ln(y+1) &= \frac{x^2}{2} + x + c \end{aligned}$$

Si esplicita la costante c imponendo la condizione iniziale:

$$\ln(1+1) = \frac{0^2}{2} + 0 + c \longrightarrow \ln(2) = c$$

Adesso si scrive l'integrale generale esplicitando la y :

$$\begin{aligned} \ln(y+1) &= \frac{x^2}{2} + x + \ln(2) \\ y+1 &= e^{\frac{x^2}{2} + x + \ln(2)} \\ y &= e^{\frac{x^2}{2} + x + \ln(2)} - 1 \\ y &= 2e^{\frac{x^2}{2} + x} - 1 \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione come un'equazione lineare, sono necessarie alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned}
 y' &= 1 + x + y + xy \\
 y' &= 1 + x + y(1 + x) \\
 y' - (1 + x)y &= 1 + x \\
 y' + (-1 - x)y &= 1 + x \\
 &\downarrow e^{\int -1-x} \rightarrow e^{-x-\frac{x^2}{2}} \\
 \left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) y' + \left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) (-1 - x)y &= (1 + x) \left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) \\
 \left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) y' + \left(-e^{-x-\frac{x^2}{2}} - xe^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) y &= (1 + x) \left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) \\
 &\downarrow \text{ si applica la proprietà delle derivate:} \\
 &\quad (f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g \\
 \int \left(e^{-x-\frac{x^2}{2}} \cdot y\right)' dx &= \int e^{-x-\frac{x^2}{2}} + xe^{-x-\frac{x^2}{2}} dx \\
 e^{-x-\frac{x^2}{2}} \cdot y &= \int (1 + x) \left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) dx \\
 &\downarrow \text{ si procede per sostituzione:} \\
 t = -x - \frac{x^2}{2} \quad dt &= \frac{1}{-1-x} dx \\
 e^{-x-\frac{x^2}{2}} \cdot y &= \int (1 + x) (e^t) \frac{1}{-1-x} dx \\
 e^{-x-\frac{x^2}{2}} \cdot y &= \int (e^t) \cdot \frac{1+x}{-1-x} dx \\
 e^{-x-\frac{x^2}{2}} \cdot y &= -e^{-x-\frac{x^2}{2}} + c \\
 y &= -e^{-x-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{e^{-x-\frac{x^2}{2}}} + c \cdot \frac{1}{e^{-x-\frac{x^2}{2}}} \\
 y &= -1 + \frac{c}{e^{-x-\frac{x^2}{2}}} \\
 y &= -1 + c \cdot e^{x+\frac{x^2}{2}}
 \end{aligned}$$

Applicando la condizione iniziale:

$$1 = -1 + c \cdot e^{0+\frac{0^2}{2}} \longrightarrow c = 2$$

Quindi l'integrale generale sarebbe di nuovo:

$$y = -1 + 2e^{\frac{x^2}{2}+x}$$

L'intervallo massimale è tutta la retta reale. Sia guardando l'integrale generale che l'equazione originale, ci si accorge che non c'è nessuna restrizione con i valori (e.g. una x al denominatore).

2.8.2 Metodo di somiglianza e problema di Cauchy

Esame 06 settembre 2023 - Gruppo A

Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 7 + 2t + e^{-t} \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Il primo passo per risolvere questo genere di esercizi è risolvere l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \longrightarrow \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 1$$

Per risolvere questo problema è necessario utilizzare il metodo di somiglianza. Si può identificare un esponenziale e un polinomio di primo grado. Quindi, l'integrale generale è formato dalla soluzione particolare e la somma delle soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$y(t) = y_P + c_1 e^{2t} + c_2 e^t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

La soluzione particolare è possibile vederla come la somma tra il metodo di somiglianza applicato sul polinomio di primo grado e l'esponenziale. Inoltre, per calcolare le costanti, è necessario calcolare le derivate fino al secondo livello:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t) \\ y_{P_1}(t) &= at + b & y'_{P_1}(t) &= a & y''_{P_1}(t) &= 0 \\ y_{P_2}(t) &= ae^{-t} & y'_{P_2}(t) &= -ae^{-t} & y''_{P_2}(t) &= ae^{-t} \end{aligned}$$

Si sostituiscono i valori di ciascuna soluzione particolare all'interno dell'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \text{Polinomio di primo grado:} \quad 0 - 3(a) + 2(at + b) &= 7 + 2t + e^{-t} \\ -3a + 2at + 2b &= 7 + 2t + e^{-t} \\ (2a)t + (-3a + 2b) &= (2)t + 7 + e^{-t} \\ \begin{cases} 2a = 2 \\ -3a + 2b = 7 \end{cases} &= \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Esponenziale:} \quad ae^{-t} - 3(-ae^{-t}) + 2(ae^{-t}) &= 7 + 2t + e^{-t} \\ (a + 3a + 2a)e^{-t} &= 7 + 2t + (1)e^{-t} \\ 6a &= 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Si riscrive la soluzione particolare:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t) \\ &= (at + b) + (ae^{-t}) \\ &= t + 5 + \frac{1}{6}e^{-t} \end{aligned}$$

E l'integrale generale diventa:

$$y(t) = t + 5 + \frac{1}{6}e^{-t} + c_1e^{2t} + c_2e^t$$

Per applicare le condizioni iniziali è necessario prima fare la derivata prima dell'integrale generale:

$$y'(t) = 1 - \frac{1}{6}e^{-t} + 2c_1e^{2t} + c_2e^t$$

Si mettono a sistema le due equazioni applicando le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 5 = 0 + 5 + \frac{1}{6}e^{-0} + c_1e^{2 \cdot 0} + c_2e^0 \\ 1 = 1 - \frac{1}{6}e^{-0} + 2c_1e^{2 \cdot 0} + c_2e^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 = 5 + \frac{1}{6} + c_1 + c_2 \\ 1 = 1 - \frac{1}{6} + 2c_1 + c_2 \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 - \frac{1}{6} \\ 1 = 1 - \frac{1}{6} + 2c_1 - c_1 - \frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 - \frac{1}{6} \\ 0 = -\frac{1}{6} + c_1 - \frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 - \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} = c_1 \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \\ c_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

L'integrale generale, sostituendo le costanti, sono:

$$y(t) = t + 5 + \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t$$

2.8.3 Casi particolari

E se non posso applicare le variabili separabili? Niente panico...

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Non è possibile applicare direttamente la tecnica delle variabili separabili perché non è nella forma classica, sono necessarie prima alcune manipolazioni algebriche.

Si tenta di applicare la regola del prodotto (Reverse Product Rule) tra derivate ma all'inverso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot \left(y' - \frac{y}{x} \right) &= 1 \cdot \frac{1}{x} \\ \left(\frac{1}{x} \cdot y' \right) + \left(-\frac{1}{x^2} \cdot y \right) &= \frac{1}{x} \\ \downarrow \text{ricordando l'integrale fondamentale:} \\ \int \frac{1}{x^n} dx &= -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}} \quad n \neq -1 \\ \downarrow \int -\frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x} \\ \left(\frac{1}{x} \cdot y' \right) + \left(\left(\frac{1}{x} \right)' \cdot y \right) &= \frac{1}{x} \\ \downarrow \text{ricordando la regola del prodotto tra derivate:} \\ [f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \downarrow \left(\frac{1}{x} \right)' \cdot y + \frac{1}{x} \cdot y' &= \left[\frac{1}{x} \cdot y \right]' \\ \left[\frac{1}{x} \cdot y \right]' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Giunti a questo punto, non è possibile andare avanti cercando la disperata strada delle variabili separabili! Tuttavia, vi è un'opzione più semplice: risolverla come un'equazione lineare. Per cui, nella prossima pagina si presentano i calcoli.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{x} \cdot y\right]' &= \frac{1}{x} \\
\int \left[\frac{1}{x} \cdot y\right]' dx &= \int \frac{1}{x} dx \\
\frac{1}{x} \cdot y &= \ln(x) + c \\
\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot y &= (\ln(x) + c) \cdot x \\
y &= x(\ln(x) + c)
\end{aligned}$$

Applicando la condizione iniziale $y(1) = 2$:

$$\begin{aligned}
2 &= 1 \cdot (\ln(1) + c) \\
2 &= c
\end{aligned}$$

Quindi la soluzione finale del problema:

$$y = x(\ln(x) + 2)$$

Altro esempio di risoluzione lineare

Equazione differenziale:

$$y' = e^x + 3y$$

La risolvo come un'equazione lineare. Cerco di sfruttare la regola del prodotto tra derivate:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned} y' &= e^x + 3y \\ y' - 3y &= e^x \end{aligned}$$

↓ utilizzo l'esponenziale per cercare una forma accettabile
 $e^{\int -3 \, dx} = e^{-3x}$

$$\begin{aligned} e^{-3x} \cdot (y' - 3y) &= e^{-3x} \cdot e^x \\ (e^{-3x}) y' + (-3e^{-3x}) y &= e^{-2x} \end{aligned}$$

↓ ora è possibile applicare la regola del prodotto tra derivate
 $(-3e^{-3x}) y + (e^{-3x}) y' = y' \cdot y + y \cdot y' = (e^{-3x} \cdot y)'$

$$(e^{-3x} \cdot y)' = e^{-2x}$$

↓ integrando ambo i lati

$$\begin{aligned} \int (e^{-3x} \cdot y)' \, dx &= \int e^{-2x} \, dx \\ e^{-3x} \cdot y &= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + c \\ y &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-2x}}{e^{-3x}} + c \cdot \frac{1}{e^{-3x}} \\ y &= -\frac{1}{2} \cdot e^x + c \cdot e^{3x} \end{aligned}$$

3 Spazi funzionali

Gli spazi funzionali sono il secondo argomento trattato durante il corso di Analisi II. È un argomento importante dal punto di vista teorico poiché ha stretto contatto con l'esercizio d'esame.

3.1 Lo spazio \mathbb{R}^n

Lo spazio \mathbb{R}^n viene identificato nel seguente modo:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

Per comodità, quando $n = 2, 3$, verrà utilizzata la notazione:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Lo spazio \mathbb{R}^n è uno **spazio vettoriale normato**. Si approfondisce il significato di questi termini. Con *spazio vettoriale* si intende che vi sono alcune operazioni definite:

$$\begin{aligned} \text{Dato:} \quad x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{Dato:} \quad y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \text{Somma:} \quad x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \text{Prodotto per uno scalare:} \quad \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{Prodotto scalare:} \quad x \cdot y &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{aligned}$$

Invece, con *normato* si intende che è possibile definire all'interno dello spazio \mathbb{R}^n una **norma**, ovvero una funzione del tipo:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

Che possiede le seguenti proprietà:

- $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$; $\|x\| = 0$ se e solo se il vettore x è tutto nullo, cioè $x = (0, 0, \dots, 0)$.

In “matematiche”:

$$\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \quad \|x\| = 0 \iff x = (0, 0, \dots, 0)$$

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

In “matematiche”:

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, per ogni x e y appartenente a \mathbb{R}^n .

In “matematiche”:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Nella pratica, una p -esima norma in \mathbb{R}^n è rappresentata come:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad (9)$$

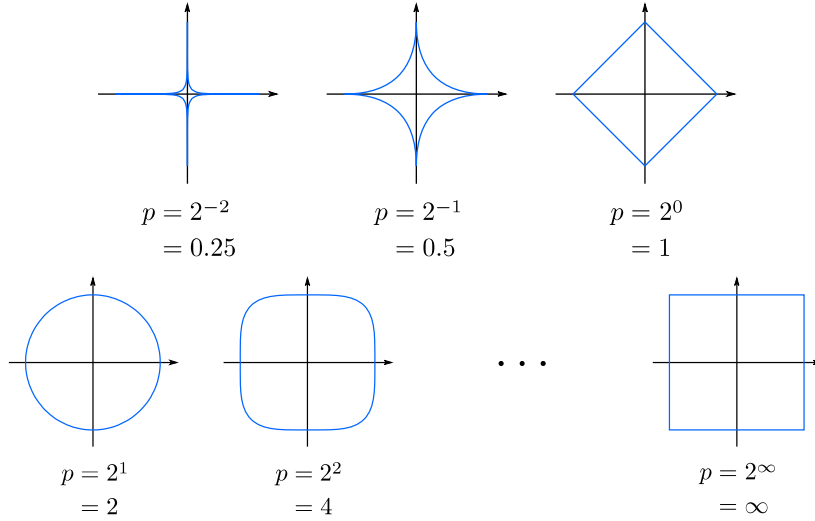


Figura 4: Alcune rappresentazioni di norme in due dimensioni (\mathbb{R}^2).

Il concetto di norma consente di mettere a fuoco che cosa si intende per “**lunghezza**” di un vettore o “**distanza**” di un punto dall’origine. **Per esempio**, nella seguente figura, ipotizzando che sia possibile muoversi solo lungo le linee del reticolo, la “distanza” tra i due punti è 7 e non $\sqrt{29}$ (teorema di pitagora, $\sqrt{5^2 + 2^2}$). Questo perché banalmente viene sommata l’ascissa con l’ordinata, ovvero 5 (x) e 2 (y).

$$(x_1, x_2) = (5, 2) \longrightarrow \|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^2 |x_i|^1 \right)^{\frac{1}{1}} = 5 + 2 = 7$$

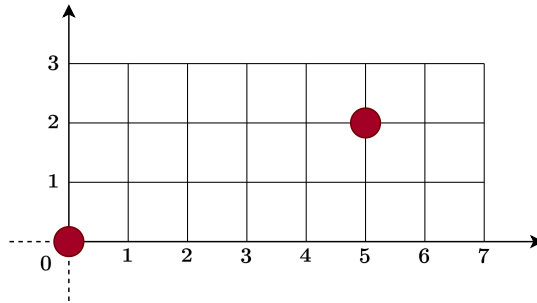


Figura 5: Esempio di norma.

E tra tutte le norme esistenti, la **norma euclidea** è la più interessante:

$$||x||_2 = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (10)$$

Un'altra disuguaglianza interessante è la **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$|x \cdot y| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (11)$$

Il motivo per cui sono stati introdotti questi concetti è evidente con il prossimo paragrafo.

3.2 Spazio metrico e distanza (euclidea)

Definizione 1

Un insieme X si dice **spazio metrico** se è definita un'applicazione, chiamata **distanza** o **metrica**

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

Tale che per ogni $x, y, z \in X$ valgono le seguenti proprietà:

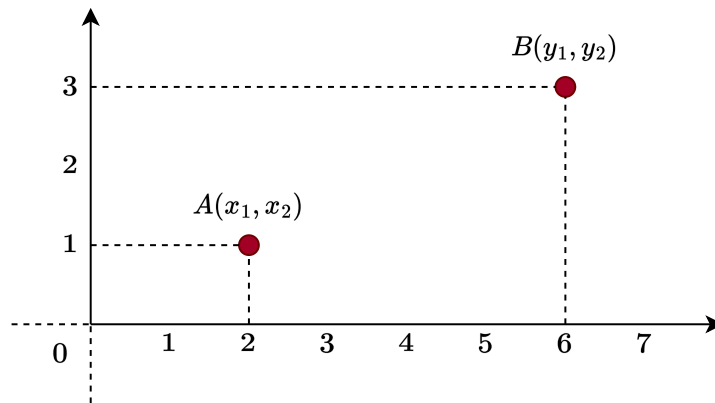
- $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si sottolinea che uno spazio metrico è una coppia insieme-distanza o metrica, ovverosia $d(X, d)$. Questo perché su uno stesso insieme X potrebbero definirsi più metriche diverse (d_1, d_2, d_3, \dots) .

Particolarmente interessante è la **distanza euclidea** che viene indotta dalla norma euclidea (equazione 10):

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (12)$$

Un **esempio** chiarificatore può essere la distanza euclidea tra i due punti presenti nella seguente figura:



La distanza dunque viene calcolata come (ricordando che $n = 2$ intuibile dal pedice massimo delle variabili nel grafico):

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Nonostante le notazioni classiche utilizzino (x, y) per rappresentare i punti, in questo caso è necessario utilizzare la notazione in figura poiché in caso di dimensioni più grandi (quindi di n maggiori) risulta poco efficiente.

3.3 Topologia in \mathbb{R}^n

3.3.1 Palla aperta

Definizione 2

Se (X, d) è uno spazio metrico e $x \in X$, si chiama **intorno sferico di x** (o **palla di centro x**) di raggio r l'insieme:

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad (13)$$

È possibile esprimere una **palla aperta** di centro \bar{x} e raggio $r > 0$ più chiaramente come:

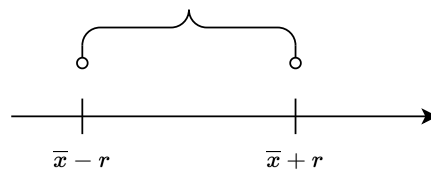
$$B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < r\} \quad (14)$$

Per **esempio**:

- Una palla aperta di centro x con $n = 1$ è:

$$B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \bar{x}| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : \bar{x} - r < x < \bar{x} + r\}$$

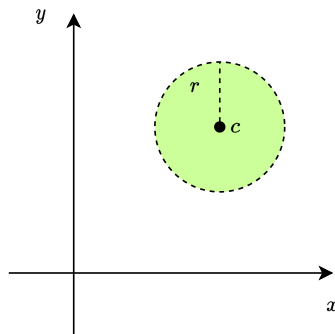
Che graficamente è:



- Una palla aperta di centro x con $n = 2$ (con (x_0, y_0) si indica il centro, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$) è:

$$\begin{aligned} B_r(c) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2 \right\} \end{aligned}$$

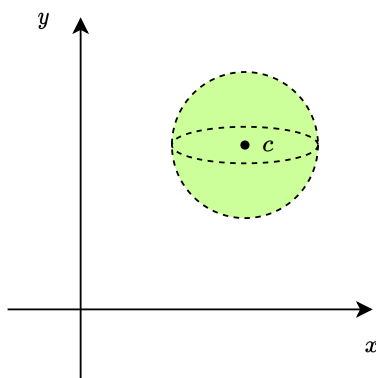
Che graficamente è:



- Una palla aperta di centro x con $n = 3$ (con (x_0, y_0, z_0) si indica il centro, $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$) è:

$$\begin{aligned} B_r(c) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2 \right\} \end{aligned}$$

Che graficamente è:



Si presenta anche un esercizio.

Esercizio

Rappresentare graficamente:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$$

Dalla definizione di palla aperta (equazione 13, ma più evidente nell'equazione informale 14) si ricava che il raggio è uguale a $r = 1$. Inoltre, il termine \bar{x} , che rappresenta le coordinate del centro della palla, non è presente, dunque si deduce che sia uguale a zero ($\|x - \bar{x}\| = \|x - 0\| = \|x\|$).

Dall'esempio in figura a pagina 62, la norma, ovvero $\|x\|$, si rappresenta sommando le sue coordinate (come nell'equazione 9). Per cui, per rappresentare $\|x\| < 1$, si deve affermare che:

$$\|x\| < 1 \longrightarrow |x_1| + |x_2| < 1$$

Con x_1 che rappresenta l'asse delle x e x_2 che rappresenta l'asse delle y .

La rappresentazione grafica è possibile vederla chiaramente a pagina 62 in cui è possibile osservare alcune rappresentazioni di norma in due dimensioni.

3.3.2 Intorno di un punto

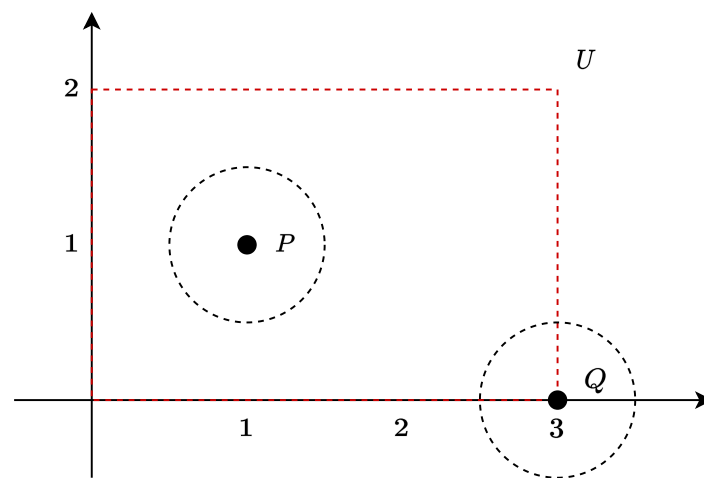
L'**intorno di un punto** \bar{x} si definisce come:

$$U \subseteq \mathbb{R}^n$$

Se esiste $r > 0$ (cioè un raggio maggiore di zero) tale per cui una palla aperta di centro \bar{x} è contenuta in U :

$$B_r(\bar{x}) \subseteq U$$

Esempio



Dato l'insieme:

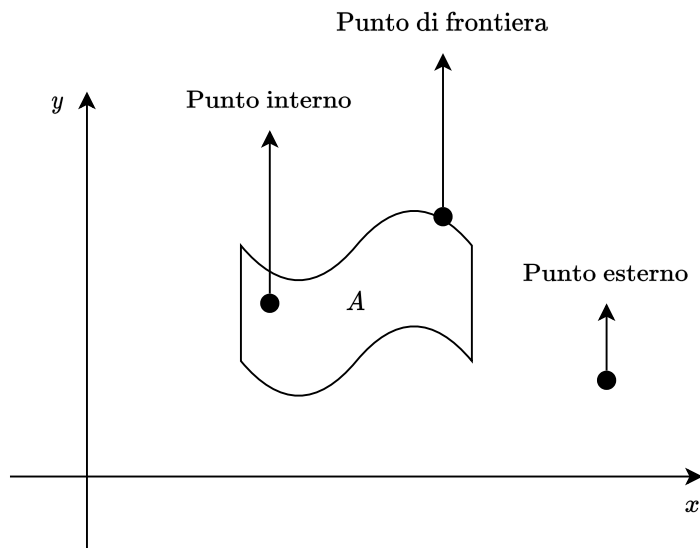
$$U = (0, 3) \times (0, 2)$$

Esso è un intorno di P poiché $B_{\frac{1}{2}}(P) \subseteq U$. Al contempo, U non è un intorno di Q poiché non esiste un raggio appartenente a \mathbb{R}^+ tale che una palla con quel raggio sia contenuta dentro U :

$$\nexists r \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } B_r(Q) \subseteq U$$

Infatti con $\left(3 + \frac{r}{2}, 0\right) \in B_r(Q)$ per ogni $r > 0$, viene di conseguenza che $\left(3 + \frac{r}{2}, 0\right) \notin U$.

3.3.3 Punti interni, esterni e di frontiera



- Un punto P è **interno** ad A se esiste un raggio $r > 0$ tale che la sua palla sia contenuta in A .

$$r > 0 \text{ t.c. } B_r(P) \subseteq A \implies P \text{ è interno ad } A$$

L'**insieme** dei punti interni all'insieme A è rappresentato con il simbolo $\overset{\circ}{A}$ o con la scritta $\text{int}(A)$.

- Un punto P è **esterno** ad A se è un punto interno a \mathbb{R}^n ma non ad A :

$$P \text{ interno a } \mathbb{R}^n \setminus A \implies P \text{ esterno a } A$$

L'**insieme** dei punti esterni si indica con $\text{ext}(A)$. E questo tipo di insieme viene chiamato anche **complementare** di A in \mathbb{R}^n .

- Un punto P è **frontiera** di A se non è né interno né esterno ad A . L'**insieme** dei punti di frontiera si indica con ∂A .

Infine, si esprime come **chiusura** di A (\overline{A}), l'unione tra l'insieme stesso e i punti di frontiera, ovvero:

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

Per vedere alcuni esempi, andare alla fine del prossimo paragrafo.

3.3.4 Insiemi aperti, chiusi e limitati

- Un insieme A è **aperto** se è intorno di ogni suo punto.

Quindi l'insieme è aperto **se e solo se** $A = \overset{\circ}{A}$, ovvero se l'**insieme è uguale all'insieme dei punti interni**.

- Un insieme è **chiuso** se il suo complementare (insieme dei punti esterni) è aperto.

Quindi l'insieme è chiuso **se e solo se** $A = \overline{A}$, ovvero se l'**insieme è uguale all'insieme dei punti esterni**.

- Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **limitato** se esiste un raggio maggiore di zero $r > 0$ tale che una palla nel punto zero con quel raggio contenga l'insieme A ($A \subseteq B_r(0)$).

In altre parole, l'**insieme A è limitato se esiste un raggio maggiore di zero tale per cui la norma x (somma delle sue coordinate in parole poverissime) è minore del raggio per ogni x appartenente ad A :**

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } \|x\| < r, \forall x \in A \implies A \text{ è limitato}$$

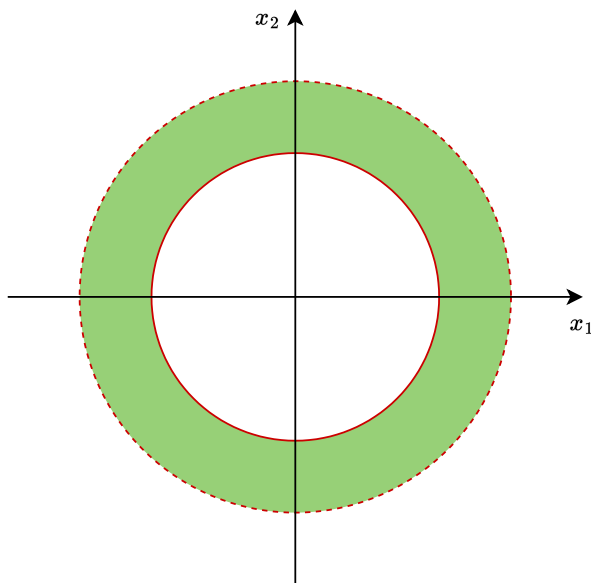
Gli insiemi \mathbb{R}^n e \emptyset sono gli unici insiemi aperti e chiusi in \mathbb{R}^n .

Esempio 1

Dato l'insieme A :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \|x\| < 3\}$$

La sua rappresentazione grafica:



Si calcolano i vari insiemi per capire se è aperto, chiuso, limitato (e di conseguenza quali sono i punti interni, esterni e di frontiera).

L'insieme dei punti interni ad A sono tutte quelle x che si trovano nell'intervallo ammesso da A e non sono di frontiera:

$$\text{int}(A) = \mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2 < \|x\| < 3\}$$

L'insieme dei punti di frontiera di A è rappresentabile come l'unione di due insiemi:

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 3\}$$

Infine, si calcola la chiusura di A (complementare), per controllare se l'insieme è chiuso:

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \|x\| \leq 3\}$$

- L'insieme è aperto? No, perché $A \neq \mathring{A}$;
- L'insieme è chiuso? No, perché $A \neq \overline{A}$.

Esempio 2

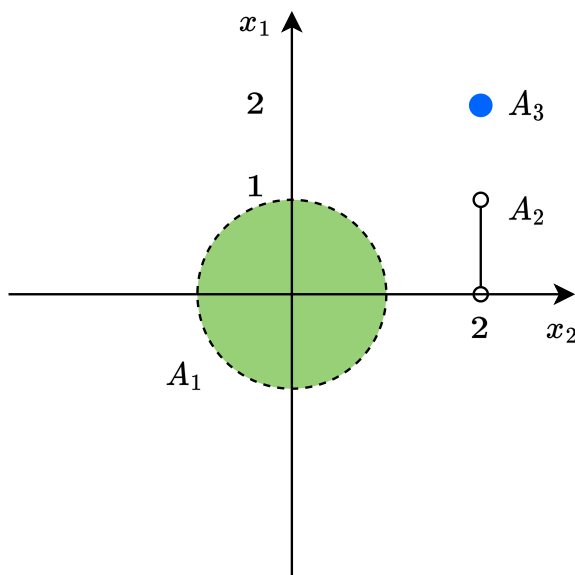
Dato l'insieme A :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\} \cup \{(2, t) : 0 < t < 1\} \cup \{(2, 2)\}$$

E frammentandolo in piccoli insiemi:

- $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$
- $A_2 = \{(2, t) : 0 < t < 1\}$
- $A_3 = \{(2, 2)\}$

Si ottiene facilmente la sua rappresentazione grafica:



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(A) = \overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$$

Riguardo A_2 e A_3 , non hanno punti interni poiché non avendo “area”, prendendo dei punti essi sarebbero punti di frontiera.

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} \cup \{(2, t) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(2, 2)\}$$

Al contrario del precedente insieme, con i punti di frontiera si sceglie la frontiera di A_1 , l'intero segmento A_2 , inclusi gli estremi, e il punto A_3 .

- La chiusura:

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\} \cup \{(2, t) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(2, 2)\}$$

L'insieme non è né aperto ($A \neq \overset{\circ}{A}$) né chiuso ($A \neq \overline{A}$).

Esempio 3

Dato l'insieme A :

$$A = \left(B_2 \left(\vec{0} \right) \setminus ([-1, 1] \times \{0\}) \right) \cup ((-1, 1) \times \{3\})$$

Con la notazione $B_2 \left(\vec{0} \right)$ si intende una palla aperta centrata in $(0, 0)$ e di raggio 2. Inoltre, è possibile riscrivere due parti dell'insieme:

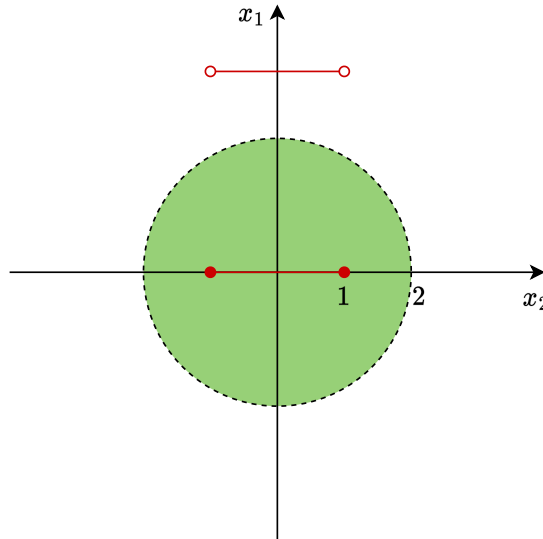
- $([-1, 1] \times \{0\})$ è una linea tratteggiata da -1 a 1 (entrambi inclusi) ad altezza 0 , per cui:

$$\{(t, 0) : -1 \leq t \leq 1\}$$

- $((-1, 1) \times \{3\})$ è una linea tratteggiata da -1 a 1 (entrambi esclusi) ad altezza 3 , per cui:

$$\{(t, 3) : -1 < t < 1\}$$

La relativa rappresentazione grafica è:



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(A) = \mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 2\} \setminus \{(t, 0) : -1 \leq t \leq 1\}$$

Tutti quei punti interni alla palla ma escludendo la linea all'interno.

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 2\} \cup \{(t, 0) : -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t, 3) : -1 \leq t \leq 1\}$$

Tutti quei punti sulla frontiera della palla e tutte le linee fino agli estremi compresi.

- La chiusura, uguale a $A \cup \partial A$:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 2\} \cup \{(t, 0) : -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t, 3) : -1 \leq t \leq 1\}$$

L'insieme non è aperto né chiuso ($A \neq \mathring{A}$), né chiuso ($A \neq \overline{A}$).

Esempio 4

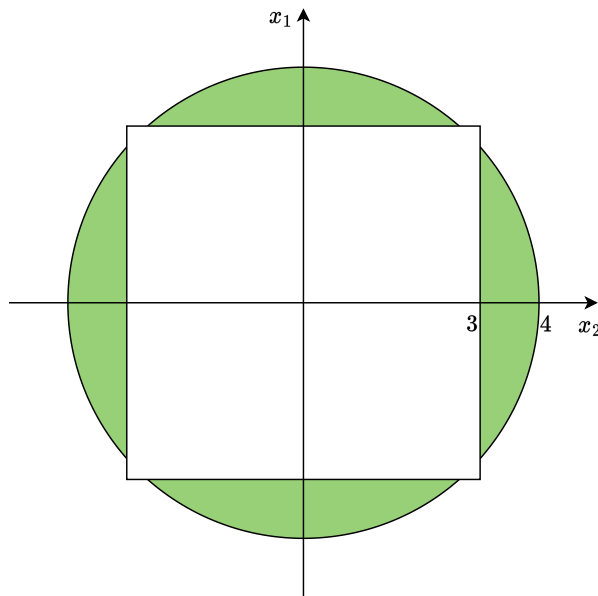
Dato l'insieme A :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \geq 3, x^2 + y^2 \leq 16\}$$

In questo caso è possibile osservare delle cose interessanti. La funzione \max sceglie il valore massimo tra i due proposti e tale valore deve essere maggiore o uguale a 3. Questo significa che è necessario disegnare un quadrato dato che potenzialmente il valore potrebbe andare all'infinito (vedi la figura a pagina 62 in cui si mostrano alcune norme a due dimensioni).

Negli esempi precedenti, è sempre stato chiesto di rappresentare delle norme ben definite. In questo caso, viene fornita un'equazione di una circonferenza (le formule si trovano nel paragrafo 1.1.1), che rappresenta una palla chiusa (\leq) di raggio $r = 4$ ($\sqrt{16}$) e centro $(0, 0)$ (mancano gli altri valori rispetto l'equazione canonica).

Quindi, la sua rappresentazione grafica:



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(A) = \mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} > 3, x^2 + y^2 < 16\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 3, x^2 + y^2 = 16\}$$

- La chiusura, uguale a $A \cup \partial A$, è identica ad A poiché è già presente l'uguale nelle condizioni.

L'insieme non è aperto perché $A \neq \mathring{A}$, ma è chiuso poiché $A = \overline{A}$.

3.4 Funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} (funzioni scalari)

Le funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} , vengono chiamate **funzioni scalari**. Associando ad ogni n -upla di numeri reali in un insieme D un unico numero reale in base a una specifica regola, si definisce una funzione da D a \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad (15)$$

In particolare, con $n = 2$, si può ridurre alla seguente forma:

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned} \quad (16)$$

In cui le variabili x e y sono indipendenti, mentre la variabile z è dipendente.

3.4.1 Rappresentazione grafica del dominio di funzioni ($n = 2$)

Determinare e rappresentare il dominio delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = x \ln(x - y)$
2. $f(x, y) = \sqrt{x - 3} + \sqrt{y + 1} - \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 4}$
4. $f(x, y) = \sqrt{x + y + 1} - \ln(x^2 - y)$
5. $f(x, y) = \arccos(xy)$
6. $f(x, y) = \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x}}$
7. $f(x, y, z) = \frac{1}{y^2 + z^2 - 4}$

Esempio 1

Data la funzione:

$$f(x, y) = x \ln(x - y)$$

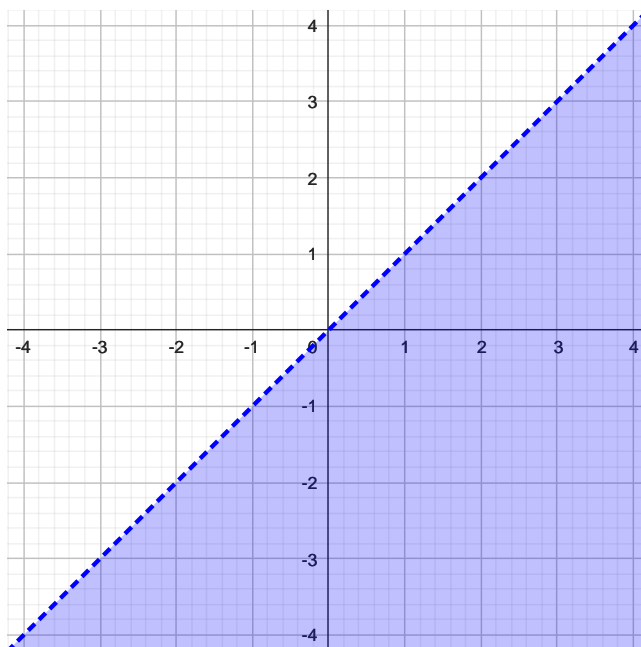
L'unica condizione d'esistenza è data dal logaritmo, il quale deve avere l'argomento maggiore di zero. Per cui, il dominio della funzione è:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$$

Per rappresentarlo, si può manipolare velocemente la disuguaglianza:

$$x - y > 0 \rightarrow x > y$$

Nel caso in cui fosse $x = y$, il grafico sarebbe una retta, ma in questo caso c'è il maggiore. Di conseguenza, la retta deve essere tratteggiata e il dominio di interesse è quello sotto la retta:



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(D) = \overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq 0\}$$

L'insieme D è aperto poiché $D = \overset{\circ}{D}$ e non è chiuso poiché $D \neq \overline{D}$.

Esempio 2

Data la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x-3} + \sqrt{y+1} - \sqrt{x^2+y^2}$$

Le condizioni d'esistenza sono i valori sotto le radici, i quali devono essere maggiori uguali a zero per evitare di entrare nell'insieme dei numeri immaginari. Per cui, il dominio della funzione è:

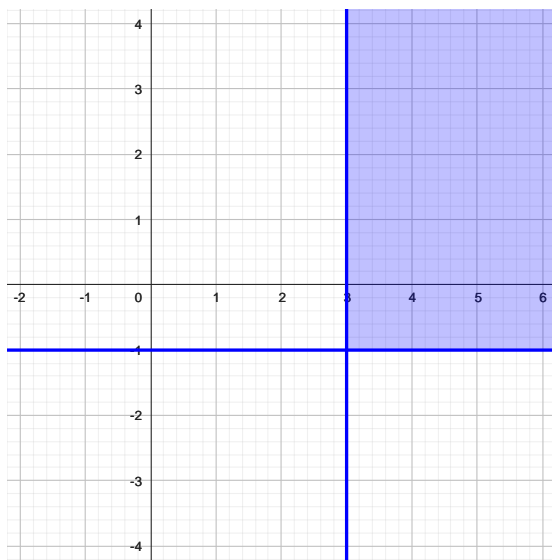
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x-3 \geq 0 \wedge y+1 \geq 0 \wedge x^2+y^2 \geq 0\}$$

Per rappresentarlo, si possono manipolare velocemente le disuguaglianze:

- $x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

- $y+1 \geq 0 \rightarrow y \geq -1$

La rappresentazione delle due rette è immediato. Si prende in considerazione il piano da x maggiore/uguale di 3 in poi e da y maggiore uguale di -1 in poi. Per quanto riguarda x^2+y^2 , non si prende in considerazione poiché la disuguaglianza è sempre verificata dato che un numero reale elevato al quadrato non potrà mai essere negativo (figuriamoci una somma tra due numeri reali al quadrato).



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(D) = \overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 3 \wedge y > -1\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3 \wedge y \geq -1\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3 \wedge y \geq -1\}$$

L'insieme D non è aperto poiché $D \neq \overset{\circ}{D}$ ma è chiuso poiché $D = \overline{D}$.

Esempio 3

Data la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 4}$$

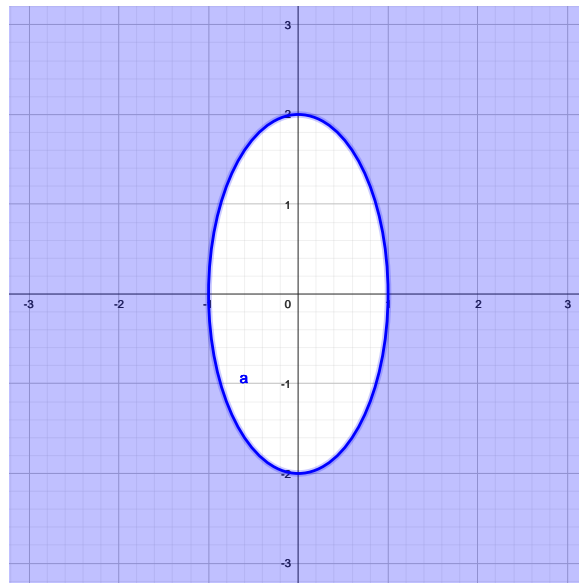
La condizione d'esistenza è il valore sotto radice, quindi il dominio è:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 \geq 0\}$$

In questo caso, dato che la disuguaglianza non è sempre vera come nell'esempio precedente, è necessario rappresentare l'ellisse (paragrafo 1.1.2) utilizzando l'equazione canonica che si ricava:

$$4x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \rightarrow 4x^2 + y^2 \geq 4 \rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

La rappresentazione dell'ellisse non è complessa. Sapendo che è centrata nell'origine, i vertici vengono calcolati nel seguente modo. Riguardo l'asse x , l'ellisse intersecherà su ± 1 , mentre sull'asse delle y intersecherà su ± 2 ($\sqrt{4}$, si ricorda che i valori al denominatore vengono considerati al quadrato secondo la forma canonica). Infine, dopo aver disegnato l'ellisse, si considera l'esterno e il bordo poiché la condizione è maggiore o uguale.



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(D) = \mathring{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 > 0\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 = 0\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 \geq 0\}$$

L'insieme D non è aperto poiché $D \neq \mathring{D}$ ma è chiuso poiché $D = \overline{D}$.

Esempio 4

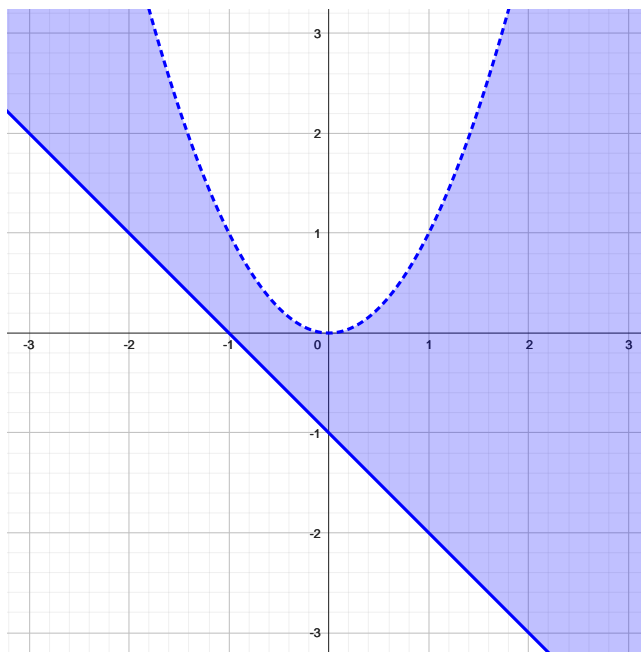
Data la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x + y + 1} - \ln(x^2 - y)$$

La condizione d'esistenza è il valore sotto radice e il logaritmo:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 \geq 0 \wedge x^2 - y > 0\}$$

In questo caso, la prima disuguaglianza è semplice. Sarebbe come dire x deve essere l'opposto di y ($x = -y$), ma con y che poi viene incrementata di 1. Per cui, se $x = 1$, la $y = -1 + 1$, cioè 0. Invece, per la seconda dovrebbe essere immediato il fatto che sia un'iperbole. Difatti, se $x = \pm 1^2$, allora $y = 1$, se $x = \pm 2^2 = 4$ allora $y = 4$ e così via.



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(D) = \mathring{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 > 0 \wedge x^2 - y > 0\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 = 0 \wedge x^2 - y = 0\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 \geq 0 \wedge x^2 - y \geq 0\}$$

L'insieme D non è aperto poiché $D \neq \mathring{D}$ ma neanche chiuso poiché $D \neq \overline{D}$.

Esempio 5

Data la funzione:

$$f(x, y) = \arccos(xy)$$

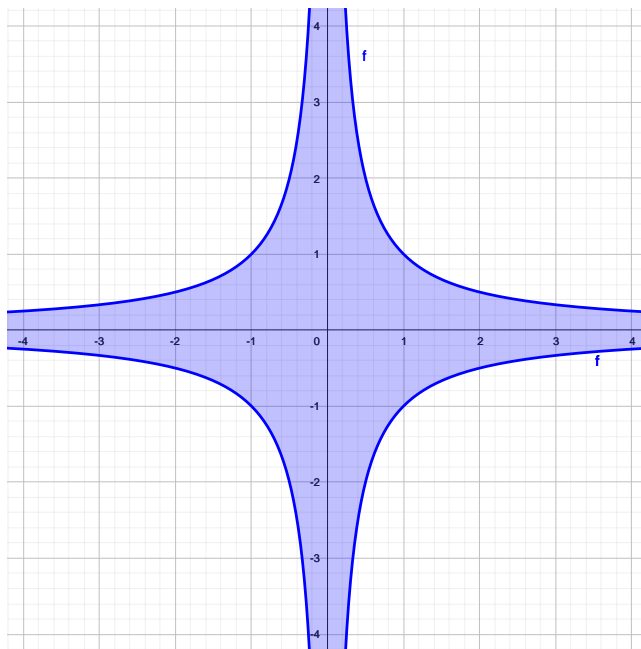
La funzione \arccos corrisponde a $\alpha = \arccos(xy)$ ovvero $\cos(\alpha) = xy$. Ricordando ([approfondimento](#)) che la funzione \arccos ha il suo argomento, in questo caso xy , definito nell'intervallo $[-1, 1]$ e il valore α sarà definito nell'intervallo $[0, \pi]$:

$$\arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos(x)$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$$

Il dominio è rappresentabile banalmente sapendo che $xy = \pm 1 \rightarrow x = \pm \frac{1}{y}$.



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(D) = \overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy < 1\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 = xy \vee xy = 1\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$$

L'insieme D non è aperto poiché $D \neq \overset{\circ}{D}$ ma è chiuso poiché $D = \overline{D}$.

Esempio 6

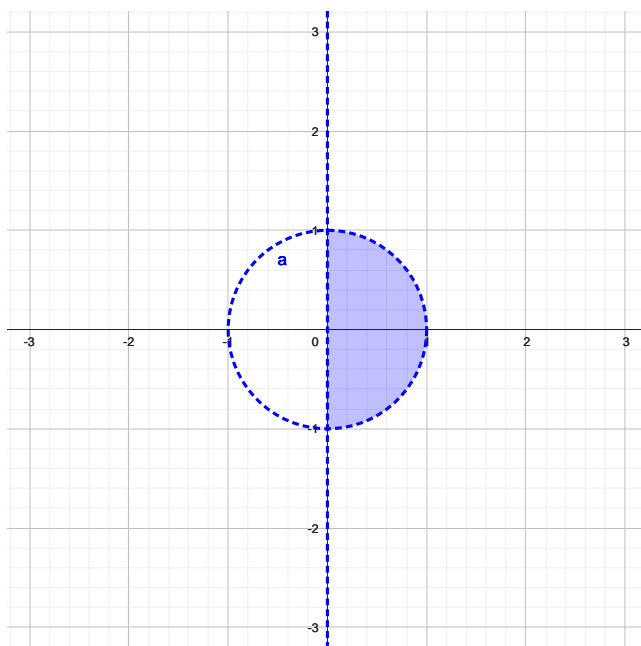
Data la funzione:

$$f(x, y) = \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x}}$$

Le condizioni d'esistenza sono sulla radice (maggiore di zero) e sul logaritmo (maggiore di zero):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 > 0 \wedge x > 0\}$$

Il dominio è rappresentabile accorgendosi che $1 - x^2 - y^2$ è una circonferenza con un'equazione canonica del tipo $x^2 + y^2 = 1$.



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(D) = \mathring{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 > 0 \wedge x > 0\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 = 0 \wedge x = 0\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge x \geq 0\}$$

L'insieme D è aperto poiché $D = \mathring{D}$ ma non è chiuso poiché $D \neq \overline{D}$.

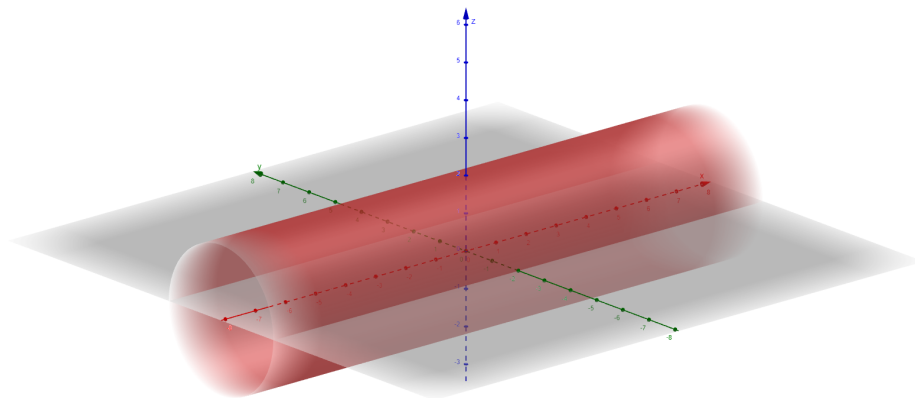
Esempio 7

Data la funzione:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{y^2 + z^2 - 4}$$

Sotto radice il valore deve essere diverso da zero, per cui $y^2 + z^2 - 4 \neq 0$. È possibile fare alcune manipolazioni $y^2 + z^2 \neq 4$ e scrivere il dominio come:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \neq 4\}$$



La linea blu è l'asse z (intersecata in ± 2), la linea verde è l'asse y (intersecata in ± 2), la linea rossa è l'asse x (all'interno del cilindro).

- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(D) = \mathring{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \neq 4\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \text{non possibile}$$

L'insieme D è aperto poiché $D = \mathring{D}$ ma non è chiuso poiché $D \neq \overline{D}$.

Esempio bonus

Data la funzione:

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y^2 + 1) - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Il dominio è influenzato dal logaritmo e dalla radice al denominatore (combinazione di condizioni):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 1 > 0 \wedge x > 0\}$$

L'equazione $x^2 - y^2 + 1 = 0$ è un'iperbole (par. 1.1.3). Infatti basta ricordare che se x^2 e y^2 hanno segno concorde, allora si tratta di un'ellisse o di una circonferenza, mentre nel caso di segno discorde, si tratta di un'iperbole. Per rappresentarla, si eseguono alcune operazioni algebriche:

$$x^2 - y^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 - y^2 = -1$$

Si scrive l'equazione canonica:

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} &= \pm 1 \quad \text{con } a \neq 0, b \neq 0 \\ \frac{(x - 0)^2}{1^2} - \frac{(y - 0)^2}{1^2} &= -1 \end{aligned}$$

Per cui, l'iperbole ha centro nell'origine (lo si capisce dai $-0!$), il segno dell'1 è negativo, per cui l'iperbole ha un'intersezione nell'asse delle ordinate (y).

3.4.2 Grafico di una funzione scalare in n variabili

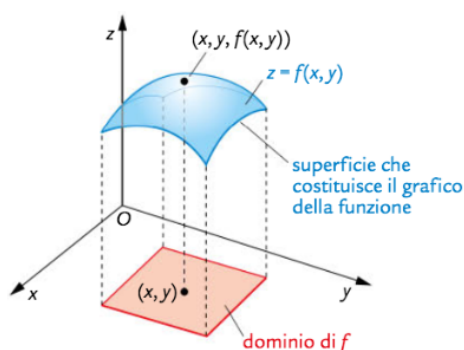
Definizione 3

Se f è una funzione reale di due variabili reali con dominio D , il **grafico** della funzione f è l'insieme di tutti i punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in D$.

La definizione si può estendere per $n > 2$. In altre parole, il grafico di una funzione è:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Nel caso di $n = 2$, il grafico della funzione f risulta:



3.4.3 Esempio di grafico di funzioni a due variabili

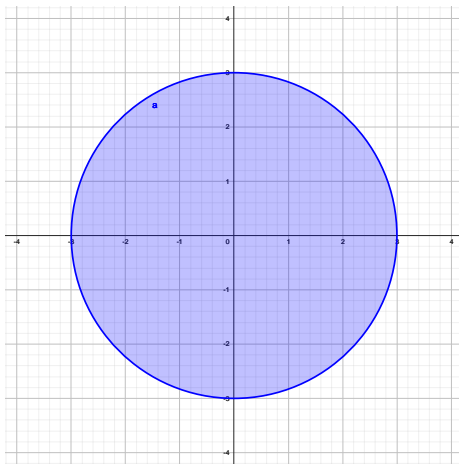
Data la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

La sua condizione d'esistenza è determinata dalla radice quadrata:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

Il dominio è una circonferenza di raggio 3 ($\sqrt{9}$):



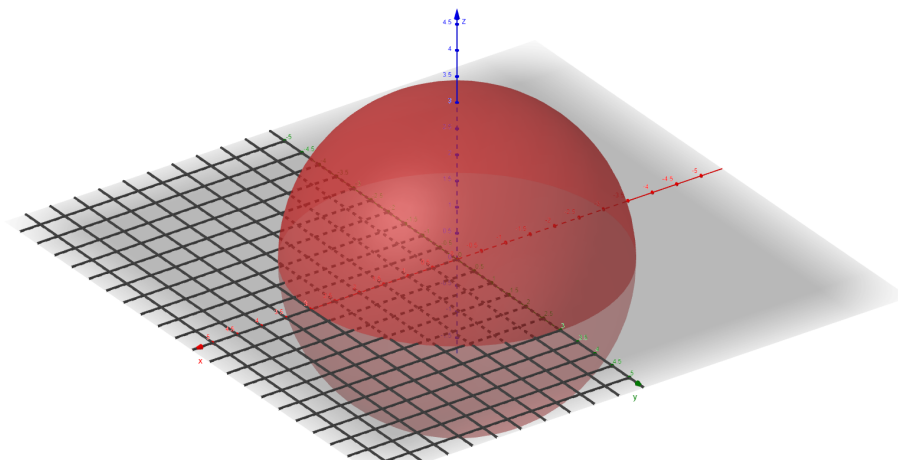
Invece, per quanto riguarda il grafico della funzione, si applica la formula. Per cui, il grafico avrà il seguente dominio:

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$$

Per rappresentare la figura, si deve avere un po' di intuito poiché è noto che una sfera abbia i termini x, y, z al quadrato. Di conseguenza, la z può essere anche vista come $x^2 = 9 - x^2 - y^2$. E con alcuni aggiustamenti aritmetici, si giunge all'equazione canonica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Il dominio del grafico può essere riscritto ricordandosi di aggiungere la condizione d'esistenza sulla z , cioè il maggiore uguale dovuto alla radice quadrata.

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

Il grafico è una sfera tagliata a metà a causa della $z \geq 0$:



3.5 Insiemi (curve) di livello

L'insieme dei punti nel dominio di una funzione f che hanno la stessa immagine $k \in \mathbb{R}$ si chiama **insieme di livello** k (o curve di livello):

$$L_k(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = k\} \quad (17)$$

Nel caso in cui $n = 2$, la funzione $L_k(f)$ è la proiezione sul piano xy della curva che si ottiene intersecando il grafico della funzione f con il piano $z = k$.

In parole povere, le **curve di livello** forniscono una rappresentazione bidimensionale del grafico della funzione f . Questo rendere la rappresentazione, talvolta, più chiara e semplice da eseguire.

3.5.1 Alcuni esempi

Esempio 1

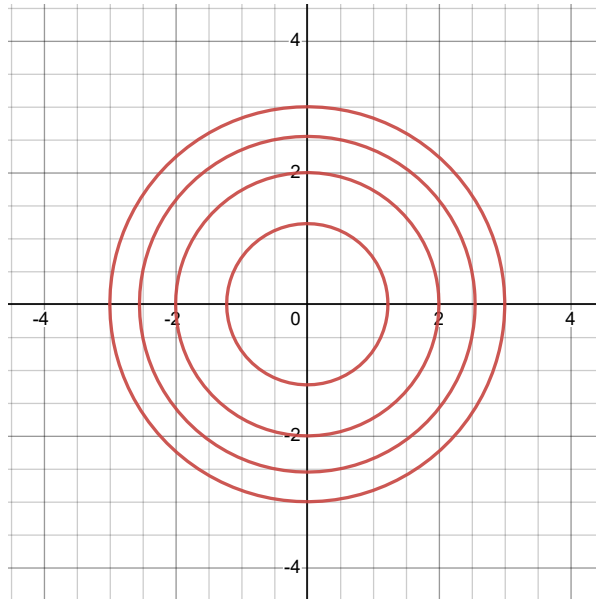
Data la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

E il dominio relativo (già calcolato nel par. 3.4.3):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

La funzione è una circonferenza di raggio 3. Di conseguenza, le curve di livello andranno da un massimo di raggio pari a 3 ad un minimo pari a 0:



In forma matematica (eq. 17):

$$L_k(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{9 - x^2 - y^2} = k\}$$

Per rappresentarla facilmente, si utilizzano alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned}\sqrt{9 - x^2 - y^2} &= k \\ 9 - x^2 - y^2 &= k^2 \\ -x^2 - y^2 &= k^2 - 9 \\ x^2 + y^2 &= 9 - k^2\end{aligned}$$

Risulta evidente adesso che modificando la k , si modifica il raggio della circonferenza $(x^2 + y^2)$. Per cui, è immediato il fatto che la k debba essere compresa tra 0 e 3:

$$0 \leq k \leq 3$$

Infatti, nel grafico delle curve di livello nella pagina precedente, la seconda curva di livello interseca il valore 2. Questo perché con $k = \sqrt{5}$ si ha:

$$L_{\sqrt{5}}(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9 - (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \right\}$$

Esempio 2

Data la funzione:

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

E il dominio risulta essere:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2\}$$

Si applicano le curve di livello, utilizzando sempre l'equazione 17:

$$L_k(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-x^2 - y^2} = k\}$$

L'espressione è possibile riscriverla come:

$$-x^2 - y^2 = \ln(k) \rightarrow x^2 + y^2 = -\ln(k)$$

Dalla quale si ricava la condizione d'esistenza $k > 0$. Si deduce che se $k \leq 0$, le curve di livello hanno valore 0:

$$\begin{cases} L_k = 0 & k \leq 0 \\ L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = -\ln(k)\} & k > 0 \end{cases}$$

Ma non solo, nel caso in cui $k > 0$, la condizione è rispettata finché il risultato del logaritmo è negativo o uguale a zero. Con $k = 1$ il logaritmo si annulla e la condizione $x^2 + y^2 = 0$ è rispettata. Ma con $k = 2$ il risultato è ≈ -0.69 e la condizione non viene rispettata. Di conseguenza, si aggiorna il sistema:

$$\begin{cases} L_k = 0 & k \leq 0 \\ L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = -\ln(k)\} & 0 < k \leq 1 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Esempio 3

Data la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{11 - 4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y}$$

Il dominio è semplicemente maggiore o uguale a zero:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 11 - 4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y \geq 0\}$$

Con qualche manipolazione algebrica, per ottenere l'equazione canonica, si ottiene:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 \leq 0$$

Prima di tracciare le curve di livello è necessario rappresentare il dominio. Quindi, si sceglie di rappresentarlo alla frontiera, ovvero sia:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11$$

Per convincersi che sia la frontiera, basta considerare la disuguaglianza del dominio:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 \leq 0 \rightarrow 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y \leq 11$$

Risulta evidente che i valori di sinistra devono essere minore o al massimo uguale a 11.

Per rappresentare l'ellisse, è necessario ottenere l'equazione canonica. Quindi, si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y &= 11 \\ 4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) &= 11 \end{aligned}$$

Dal paragrafo 1.1.2 si ricorda che l'equazione canonica è nella forma:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

Per cui come è possibile procedere? Ci viene in soccorso il completamento dei quadrati (par. 1.1.4):

- a. Si cerca un Δ per ogni equazione di secondo grado (per x e per y) tale che sia uguale a zero:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y &= 11 \\ 4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16x &\rightarrow (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\ -16c &= -(-16)^2 \\ c &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9y^2 + 18y &\rightarrow (18)^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\ -36c &= -324 \\ c &= 9 \end{aligned}$$

- b. Si riscrive l'equazione con i nuovi termini ma lasciandola invariata, per cui:

$$\begin{aligned}(4x^2 - 16x) + (9y^2 + 18y) &= 11 \\ (4x^2 - 16x + 16 - 16) + (9y^2 + 18y + 9 - 9) &= 11\end{aligned}$$

- c. Si resiste alla voglia di semplificare e si esegue un raggruppamento:

$$\begin{aligned}4x^2 - 16x + 16 &\rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) \\ &4(x - 2)^2 \\ 9y^2 + 18y + 9 &\rightarrow 9(y^2 + 2y + 1) \\ &9(y + 1)^2\end{aligned}$$

Per raggruppare in questo modo basta calcolare trovare le soluzioni dell'equazione di secondo grado e riscriverle come quadrato. Quindi, data l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c$:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \xrightarrow{\Delta=0} \frac{-b}{2a} = \lambda \rightarrow (x - \lambda)^2$$

E infatti sostituendo l'equazione $x^2 - 4x + 4$:

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \xrightarrow{\Delta=0} \frac{4}{2} = 2 \rightarrow (x - 2)^2$$

- d. Si riscrive l'equazione dopo il raggruppamento:

$$(4(x - 2)^2 - 16) + (9(y + 1)^2 - 9) = 11$$

A questo punto si possono portare a destra i termini non legati alle variabili x e y :

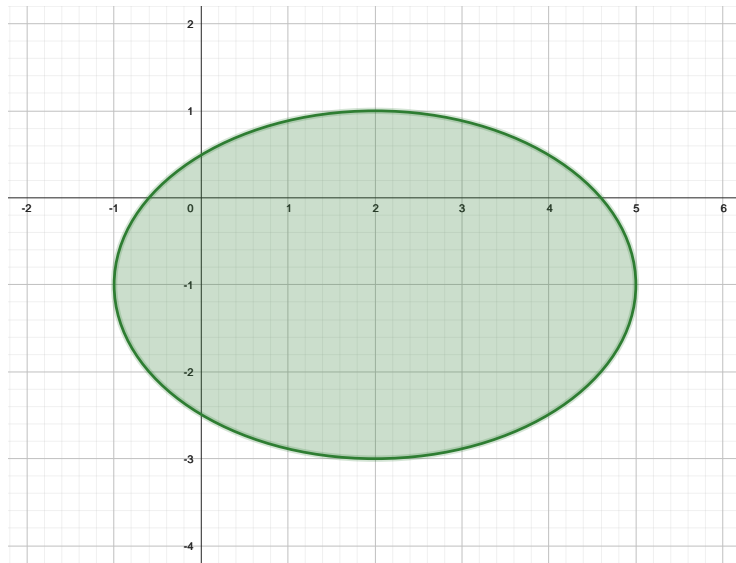
$$4(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 36$$

- e. A destra è necessario il valore 1 per l'equazione canonica, dunque viene in automatico dividere tutto per 36:

$$\begin{aligned}\frac{1}{36} \cdot 4(x - 2)^2 + \frac{1}{36} \cdot 9(y + 1)^2 &= 36 \cdot \frac{1}{36} \\ \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{4} &= 1\end{aligned}$$

Dato che il centro dell'ellisse è dato dai valori che vengono sottratti a x^2 ($x^2 - x_C$) e y^2 ($y^2 - y_C$), in questo caso le coordinate sono: $(2, -1)$. I vertici sono piuttosto immediati:

$$\begin{array}{llll}\text{Vertice sx} & \rightarrow & (2 - \sqrt{9}, -1) & \text{Vertice dx} & \rightarrow & (2 + \sqrt{9}, -1) \\ & & (-1, -1) & & & (5, -1) \\ \text{Vertice up} & \rightarrow & (2, -1 + \sqrt{4}) & \text{Vertice down} & \rightarrow & (2, -1 - \sqrt{4}) \\ & & (2, 1) & & & (2, -3)\end{array}$$



La figura dell'ellisse alla frontiera e rappresenta anche la curva di livello più bassa poiché è al limite.

Il motivo per cui si dice "è al limite" è dato dal fatto che con k sotto radice, la sua condizione d'esistenza è $k \geq 0$. Per cui, rappresentare:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$$

È identico a rappresentare:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = \sqrt{k} \quad \text{con } k = 0$$

Per completezza, si rappresenta una curva di livello utilizzando $k = \sqrt{11}$ e l'equazione 17 delle curve di livello:

$$L_{\sqrt{11}}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \sqrt{11}\}$$

Per cui l'equazione da rappresentare è:

$$\begin{aligned} \sqrt{11 - 4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y} &= \sqrt{11} \\ 11 - 4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y &= 11 \\ 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y &= 0 \end{aligned}$$

Come in precedenza, si procede con il completamento dei quadrati:

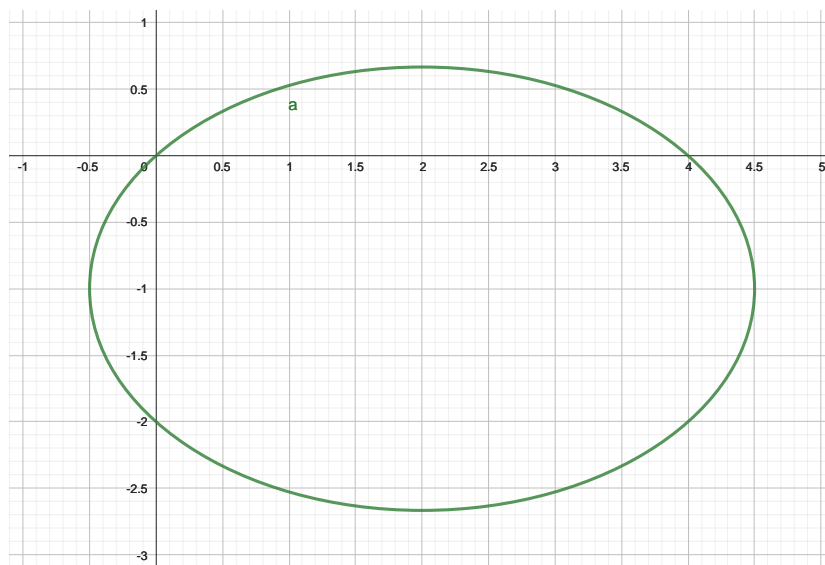
$$\begin{aligned} 4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y &= 0 \\ \downarrow \\ 4x^2 - 16x &\rightarrow (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\ -16c &= -(-16)^2 \\ c &= 16 \\ 9y^2 + 18y &\rightarrow (18)^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\ -36c &= -324 \\ c &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow \\
(4x^2 - 16x + 16 - 16) + (9y^2 + 18y + 9 - 9) &= 0 \\
& \downarrow \\
4x^2 - 16x + 16 &\rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) \\
& 4(x-2)^2 \\
9y^2 + 18y + 9 &\rightarrow 9(y^2 + 2y + 1) \\
& 9(y+1)^2 \\
& \downarrow \\
4(x-2)^2 - 16 + 9(y+1)^2 - 9 &= 0 \\
4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 &= 25 \\
& \downarrow \\
\frac{1}{25} \cdot 4(x-2)^2 + \frac{1}{25} \cdot 9(y+1)^2 &= 25 \cdot \frac{1}{25} \\
\frac{(x-2)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{9}} &= 1
\end{aligned}$$

Il centro dell'ellisse è $(2, -1)$ e i vertici sono:

$$\begin{aligned}
\text{Vertice sx} &\rightarrow \left(2 - \sqrt{\frac{25}{4}}, -1\right) & \text{Vertice dx} &\rightarrow \left(2 + \sqrt{\frac{25}{4}}, -1\right) \\
& \left(-\frac{1}{2}, -1\right) & & \left(\frac{9}{2}, -1\right) \\
\text{Vertice up} &\rightarrow \left(2, -1 + \sqrt{\frac{25}{9}}\right) & \text{Vertice down} &\rightarrow \left(2, -1 - \sqrt{\frac{25}{9}}\right) \\
& \left(2, \frac{2}{3}\right) & & \left(2, -\frac{8}{3}\right)
\end{aligned}$$

La figura dell'ellisse:



3.6 Continuità

Si mostra la definizione di continuità.

Definizione 4

Si consideri una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in D$. La funzione f è **continua** nel punto x_0 se per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che:

$$f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap D$$

Una **notazione** utilizzata talvolta per dimostrare la continuità, è $\varepsilon - \delta$: per ogni ε esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni x appartenente a D e dunque la distanza (par. 3.2, eq. 12) è minore di δ ($\|x - x_0\| < \delta$).

Esempio

Questo metodo è estendibile a qualsiasi altra funzione.

Dimostrare che la funzione $f(x, y) = \sin(x)$ è continua. Fissati un punto di coordinate $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ e un qualunque numero reale positivo ε , secondo la notazione $\varepsilon - \delta$ si ha:

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| = |\sin(x) - \sin(\bar{x})| < \varepsilon$$

Ovviamente tale affermazione è vera se:

$$\|x - \bar{x}\| < \delta$$

Perciò, si consideri una palla aperta U di centro (\bar{x}, \bar{y}) e raggio δ . Se $(x, y) \in U$ allora:

$$\|x - \bar{x}\| < \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$$

Dove $\|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\|$ corrisponde a $\sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}$.
Ma da questa affermazione, si deduce che:

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon = |\sin(x) - \sin(\bar{x})| < \varepsilon$$

QED

Nella dimostrazione:

- $\|x - \bar{x}\|$ rappresenta la distanza di x da \bar{x} (come spiegato nel paragrafo 3.2);
- $\|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}$ rappresenta la distanza dal punto di coordinate (x, y) al punto (\bar{x}, \bar{y})

Si elencano qua di seguito alcune proprietà delle funzioni continue:

- Se f e g sono funzioni continue su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $f \pm g$ e $f \times g$ sono continue su A , mentre $f \div g$ è continua sull'insieme identico ma con il risultato della funzione g diverso da zero. Quindi, la differenza tra insiemi:

$$A \setminus \{x \in A : g(x) = 0\}$$

- Se f è continua su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e g è continua su $I \subseteq \mathbb{R}$, allora $h = g \circ f$ è continua su $D = \{x \in A : f(x) \in I\}$.

In altre parole, componendo funzioni continue si ottengono funzioni continue.

Teorema 2. Teorema di Weierstrass Sia f una funzione continua su un insieme chiuso e limitato $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora f ha minimo e massimo assoluto, cioè esistono $x_{min}, x_{max} \in D$ tali per cui:

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \quad \forall x \in D$$

La tecnica utilizzata nel teorema è presente anche nel metodo del confronto (par 3.7.3)

3.7 Limiti

3.7.1 Definizione

Definizione 5

Sia f una funzione di due variabili e (a, b) un punto di accumulazione del dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ della funzione f .

Si afferma che:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \in \mathbb{R} \quad (18)$$

Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se:

- Per ogni x, y appartenenti al dominio D della funzione f , $(x, y) \in D$;
- La distanza tra il punto (x, y) e il punto di accumulazione (a, b) sia maggiore di zero ma minore di δ :

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

Allora la distanza tra la funzione e il risultato del limite (che parte da x, y e tende a a, b della funzione f nel punto x, y) è minore di ε :

$$||f(x, y) - L|| < \varepsilon$$

In generale, se la funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e \bar{x} è un punto di accumulazione del dominio D :

Definizione 6

Si dice che:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad (19)$$

Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se x appartiene al dominio D e $||x - \bar{x}|| < \delta$ allora $||f(x, y) - L|| < \varepsilon$.

Da queste definizioni si può affermare che la funzione f è **continua** in $\bar{x} \in D$ se e solo se:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

Mostrare che i seguenti limiti non esistono:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ con:

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{y}} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Esempio 1

Dato il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$$

Si considera la restrizione della funzione alla retta $y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \frac{x^3 + 0^2}{x^2 + 0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x = 0$$

Si considera la restrizione della funzione alla retta $x = 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \frac{0^3 + y^2}{0^2 + y^2} = \frac{y^2}{y^2} = 1$$

I limiti sono diversi, quindi essi non esistono.

Esempio 2

Dato il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \begin{cases} xe^{\frac{x}{y}} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Esso non può esistere dato che la y al denominatore non è ammessa.

Esempio 3

Dato il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Si considera la restrizione della funzione alla retta $y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

Si considera la restrizione della funzione alla retta $x = 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

I due limiti sono uguali. Questa condizione è necessaria ma non sufficiente per affermare che i limiti esistano. Difatti, andando a risolvere il limite con (x, x) si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Risulta evidente che il limite non esiste.

Esempio bonus

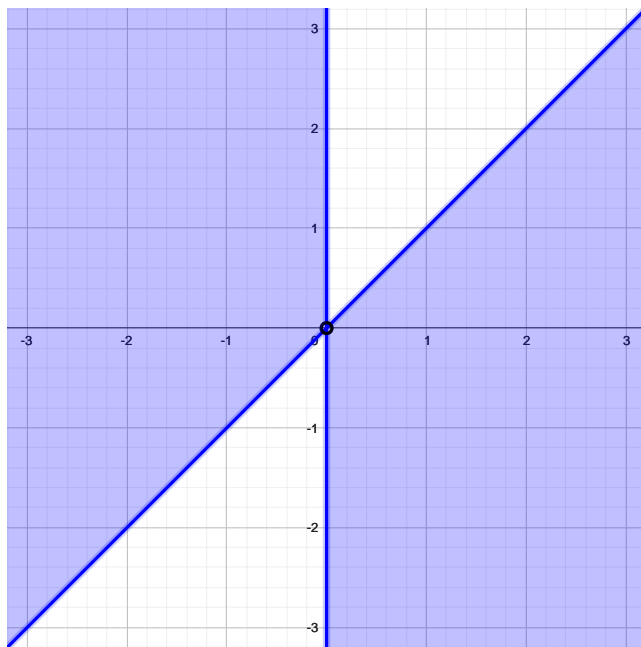
Determinare e rappresentare graficamente il dominio, ed eventualmente calcolare il limite (se esiste):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x(x-y)}}{x^2 + y^2}$$

Il dominio è:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(x-y) \geq 0 \wedge x^2 + y^2 > 0\}$$

Con la condizione $x^2 + y^2 > 0$, tutto il grafico viene incluso eccetto il punto $(0,0)$. Per rappresentare $x^2 - xy \geq 0$ è sufficiente rappresentare l'equazione $x^2 = xy$. Ovvero una retta che si espande in positivo e in negativo rispetto y . Quindi con i punti $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ e $x = \pm 3$ si ottiene:



Per verificare l'esistenza del limite, si può verificare andando a sostituire parzialmente con $y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \frac{\sqrt{x(x-0)}}{x^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Ricordando che 0^+ è un numero che corrisponde a $0,00 \dots 001$. Per cui, un numero diviso 0^+ risulta infinito. Per quanto riguarda $x = 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \frac{0}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

Il risultato dei due limiti è differente, per cui il limite non esiste.

3.7.2 Manipolazioni algebriche

Per verificare l'esistenza di limiti per funzioni di due variabili, spesso si utilizzano tecniche di manipolazione algebrica per ottenere forme più convenienti.

Esempio 1

Il seguente limite, se sostituito immediatamente si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 y^3 - x^3 y^2}{x^2 - y^2} = \frac{1^2 \cdot 1^3 - 1^3 \cdot 1^2}{1^2 - 1^2} = \frac{0}{0}$$

Con alcune manipolazioni algebriche si può ottenere la seguente forma:

$$\frac{x^2 y^3 - x^3 y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 y^2 (y - x)}{(x + y)(x - y)} = \frac{\cancel{x^2 y^2} (y - \cancel{x})}{-(x + y)(\cancel{x - y})} = -\frac{x^2 y^2}{x + y}$$

Andando a sostituire il limite si ottiene una forma determinata:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} -\frac{x^2 y^2}{x + y} = -\frac{1}{2}$$

Esempio 2

Il seguente limite ha forma indeterminata con una sostituzione immediata:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \frac{\pi}{2})} \frac{\cos(y) - \sin(2y)}{\cos(x) \cos(y)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2})}{\cos(\pi) \cos(\frac{\pi}{2})} = \frac{0 - 0}{-1 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\frac{\cos(y) - \sin(2y)}{\cos(x) \cos(y)} = \frac{\cos(y) - 2 \sin(y) \cos(y)}{\cos(x) \cos(y)} = \frac{\cos(y) (1 - 2 \sin(y))}{\cos(x) \cos(y)} = \frac{1 - 2 \sin(y)}{\cos(x)}$$

Andando a sostituire i valori del limite si ottiene una forma determinata:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \frac{\pi}{2})} \frac{1 - 2 \sin(y)}{\cos(x)} = +1$$

3.7.3 Maggiorazioni utili per risolvere limiti e Teorema del confronto (dei due carabinieri)

Purtroppo, le manipolazioni algebriche talvolta non sono abbastanza. Risulta dunque necessario introdurre una nuova tecnica utilizzata in combo con un teorema famoso: il teorema del confronto o dei due carabinieri.

Teorema 3 (Teorema del confronto). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per il dominio di tre funzioni: f, g, h . Le quali sono definite in un intorno di x_0 chiamato I . Ipotizzando che:*

- a) *Per ogni $x \in I$ la funzione $g(x)$ assuma valori non inferiori a $f(x)$ e non superiori a $h(x)$, ovvero:*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I$$

- b) *I due limiti per x tendente a x_0 di $f(x)$ e $h(x)$ esistano finiti e valgano entrambi l :*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \quad \text{con } l \in \mathbb{R}$$

Allora, sotto tali ipotesi, risulta che il limite per $x \rightarrow x_0$ di $g(x)$ vale l :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

Nel teorema vengono prese in considerazione tre funzioni definite in un intorno di x_0 , la quale può essere un valore finito o infinito. La condizione importante per cui tale teorema sia veritiero, è che la seguente ipotesi sia vera:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Ovvero che g **debba essere contenuta tra f e h** . Per questo motivo, la funzione f viene chiamata funzione **minorante**, mentre la funzione h viene chiamata funzione **maggiorante** (questo è anche il motivo per cui si cercano “maggiorazioni” per risolvere i limiti).

Il teorema si chiama “dei due carabinieri” poiché è possibile immaginare le funzioni esterne (f e h) come due carabinieri che accompagnano il detenuto (g) in prigione.

Alcune maggiorazioni utili da tenere a mente:

- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $|\sin(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Esempio 1

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si può applicare il teorema del confronto. La funzione minorante può essere tranquillamente zero, mentre la funzione maggiorante è necessario calcolarla.

$$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq ???$$

La funzione maggiorante può essere la funzione originale ma con alcune manipolazioni algebriche:

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$$

Per cui la base di partenza del teorema del confronto è:

$$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2$$

Adesso si può verificare il limite per gli estremi e se i risultati rispettano la disuguaglianza, allora si può affermare che esiste. Il limite di 0 è immediato, mentre il limite di $x^2 + y^2$ è:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$$

Per cui, grazie al teorema del confronto è possibile affermare che:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 \\ 0 &\leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Il limite esiste ed è uguale a zero:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

Inoltre la funzione è continua.

Esempio 2

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si può applicare il teorema del confronto. La funzione minorante può essere tranquillamente zero, mentre la funzione maggiorante è necessario calcolarla.

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq ???$$

La funzione maggiorante può essere ottenuta grazie alla maggiorazione $x^2 + y^2$, ovvero aggiungendo una y^2 :

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Il denominatore e il numeratore si possono semplificare:

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Adesso si può verificare il limite per gli estremi e se i risultati rispettano la disuguaglianza, allora si può affermare che esiste. Il limite di 0 è immediato, mentre il limite di $\sqrt{x^2+y^2}$ è:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+0^2} = 0$$

Per cui, grazie al teorema del confronto è possibile affermare che:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 &\leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 0 \end{aligned}$$

Il limite esiste ed è uguale a zero:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

E la funzione è continua. In questo esempio, la maggiorazione è stata applicata con l'intuito, ovvero con l'intento di riuscire a semplificare il denominatore così da non avere forme indeterminate nel caso di sostituzione.

Esempio 3

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{x^2 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si può applicare il teorema del confronto. La funzione minorante può essere tranquillamente zero, mentre la funzione maggiorante è necessario calcolarla.

$$0 \leq \frac{x^4 y^4}{x^2 + y^4} \leq ???$$

La funzione maggiorante può essere ottenuta con un piccolo ragionamento. Osservando bene, si può scompartare la frazione e notare che un valore (y) diviso lo stesso valore ma aumentato di un'unità sempre positiva ($x^2 + y$), è sempre minore uguale a 1. Questo perché il numeratore sarà sempre minore o uguale al denominatore:

$$\frac{y^4}{x^2 + y^4} \leq 1$$

Quindi, un'unità che è 1 o minore, sarà sempre minore o uguale ad un valore elevato alla 4. Formalmente:

$$0 \leq \frac{x^4 y^4}{x^2 + y^4} = \underbrace{\frac{y^4}{x^2 + y^4}}_{\leq 1} \cdot x^4 \leq x^4$$

Adesso si può verificare il limite per gli estremi e se i risultati rispettano la disuguaglianza, allora si può affermare che esiste. Il limite di 0 è immediato, mentre il limite di x^4 è zero. Ne consegue che:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{y^4}{x^2 + y^4} \cdot x^4 \leq x^4 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4} \cdot x^4 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^4 \\ 0 &\leq \frac{y^4}{x^2 + y^4} \cdot x^4 \leq 0 \end{aligned}$$

Il limite esiste ed è uguale a zero:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

E la funzione è continua. Anche in questo esempio, la maggiorazione è stata applicata con l'intuito, ovvero con l'intento di riuscire a imporre una maggiorazione.

Esempio 4

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si può applicare il teorema del confronto. La funzione minorante può essere tranquillamente zero, mentre la funzione maggiorante è necessario calcolarla.

$$0 \leq \frac{x^4 y^4}{x^2 + y^4} \leq ???$$

La funzione maggiorante può essere ottenuta guardando le maggiorazioni ad inizio capitolo. Infatti, il seno è possibile riscriverlo come il valore assoluto del suo argomento:

$$\left| \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{|xy|}}$$

Semplificando il numeratore con il denominatore (perché un valore diviso per la sua radice quadrata restituisce il risultato della radice quadrata):

$$\sqrt{|xy|}$$

Adesso si può verificare il limite per gli estremi e se i risultati rispettano la disuguaglianza, allora si può affermare che esiste. Il limite di 0 è immediato, mentre il limite di $\sqrt{|xy|}$ è zero. Ne consegue che:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} \leq \sqrt{|xy|} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{|xy|} \\ 0 &\leq \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} \leq 0 \end{aligned}$$

Il limite esiste ed è uguale a zero:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

E la funzione è continua. A differenza degli altri esempi, qui la maggiorazione è stata applicata ricordandosi una maggiorazione nota.

Esempio 5

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \rightarrow f(x,y) = \frac{x^6 + 3y^3 - 3x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$$

Si può applicare il teorema del confronto. Ma prima di partire è necessario capire dove applicarlo. La funzione maggiorante può essere ottenuta notando che la frazione può essere riscritta in un altro modo:

$$\frac{x^6 + 3y^3 - 3x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^6 + 3y^3 - 3(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{x^6 + 3y^3}{x^2 + y^2} - \underbrace{\frac{3(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}}_3$$

Il valore -3 è una costante e non dipende da nessuna variabile! Per cui adesso si sposta l'attenzione sulla frazione. Essa può essere riscritta come:

$$\frac{x^6 + 3y^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^6}{x^2 + y^2} + \frac{3y^3}{x^2 + y^2} = x^4 \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot 3|y|$$

Come accadeva nell'esempio 3 a pagina 101, le due frazioni hanno un valore minore o uguale a 1 poiché il numeratore sarà sempre minore del denominatore. Quindi, si può considerare solo i valori moltiplicati, e applicare il teorema del confronto:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^6 + 3y^3}{x^2 + y^2} \leq x^4 + 3|y| \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 &\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + 3y^3}{x^2 + y^2} \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^4 + 3|y| \\ 0 &\leq \frac{x^6 + 3y^3}{x^2 + y^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Il limite di quella frazione è uguale a zero. Ma attenzione, il risultato finale è diverso. Si ricorda che era stato rimosso il valore -3 poiché era una costante. Quindi il risultato del limite della funzione è -3 :

$$\frac{x^6 + 3y^3 - 3x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^6 + 3y^3}{x^2 + y^2} - 3$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + 3y^3}{x^2 + y^2} - 3 = -3$$

E la funzione è continua. Come negli altri esempi, qui la maggiorazione è stata applicata facendo alcune considerazioni su una parte di funzione.

3.7.4 Calcolo limiti in coordinate polari

Per studiare il comportamento di una funzione f che da $(x, y) \rightarrow (a, b)$, si può vedere che cosa accade alla funzione:

$$F(\rho, \theta) = f(a + \rho \cos(\theta), b + \rho \sin(\theta)) \quad (20)$$

Quando ρ tende a 0^+ .

Teorema 4. *Se in un intorno di (a, b) si ha $|F(\rho, \theta) - L| \leq g(\rho)$ con $g(\rho) \rightarrow 0$ per ρ che tende a 0^+ , allora:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \quad (21)$$

Da notare che quello che il teorema esprime è:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho, \theta) = L$$

Uniformemente rispetto a θ .

In parole povere il teorema può essere riscritto come: se in un intorno di (a, b) si ha

$$|F(r, \theta) - L| \leq g(r) \quad \text{con} \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0$$

Allora:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

N.B.: si ricorda che per passare alle coordinate polari bisogna trasformare la x e la y in:

$$\begin{cases} x = a + \rho \cos(\theta) \\ y = b + \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Dove a e b sono le coordinate in cui viene definito il limite

Nelle seguenti pagine si riportano alcuni esempi di limiti risolti con le coordinate polari (il limite numero 4 è importante come esempio):

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{(x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 4(y+1)^2}{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 4$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0$

Esempio 1

Verificare il risultato del limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Si applica il teorema per i limiti in coordinate polari. Per cui, la funzione, ovvero la frazione, meno il suo risultato, in questo caso 0, deve essere minore o uguale alla funzione $g(r)$, in questo caso l'incognita da trovare. Ovviamente la funzione g deve avere il limite per 0^+ che è uguale a zero. Prima di tutto si riscrive l'espressione con le coordinate polari:

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow F(r, \theta) = \frac{r \cos(\theta) \cdot r \sin(\theta)}{\sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2}}$$

Poi si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)}} = \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 \cdot 1}}$$

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2}} \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) = \sqrt{r^2} \cdot \cos(\theta) \sin(\theta)$$

Per definizione del seno e del coseno, si è certi che la funzione $F(r, \theta)$ è sicuramente minore o uguale a $\sqrt{r^2}$:

$$0 \leq |F(r, \theta) - L| \leq \sqrt{r^2}$$

Il risultato del limite che tende a 0^+ su $\sqrt{r^2}$ è zero. Inoltre, dipende solo da r e non da θ , per cui è una condizione abbastanza forte per dire che il limite esiste ed è uguale a zero (in riferimento a $f(x, y)$).

Esempio 2

Verificare che il limite esista e valga zero:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$$

In questo caso le coordinate polari saranno $r \cos(\theta)$ e $1+r \sin(\theta)$. Questo perché il limite tende a $a=0$ e $b=1$:

$$0 \leq \left| \frac{r^2 \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + (1+r \sin(\theta) - 1)^2}} \right| \leq ???$$

Si semplifica la frazione:

$$\left| \frac{r^2 \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)}} \right| = \left| \frac{r^2 \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2}} \right| = \left| \frac{r^2 \cos^2(\theta)}{r} \right| = r \cos^2(\theta)$$

Il valore trovato è sicuramente sempre minore o uguale a r :

$$0 \leq r \cos^2(\theta) \leq r$$

Il limite in r di 0^+ è sempre 0^+ . Per cui, il limite della funzione esiste ed è uguale a zero.

Esempio 3

Verificare che il limite esista e valga 4:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{(x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 4(y+1)^2}{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

Si riscrive la funzione con le coordinate polari:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2 + r \cos(\theta) \\ y = -1 + r \sin(\theta) \end{cases} \\ \frac{r^3 \cos^3(\theta) + 4r^2 \cos^2(\theta) + 4r^2 \sin^2(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} &= \frac{r^3 \cos^3(\theta) + 4r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}{r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \frac{r^3 \cos^3(\theta) + 4r^2}{r^2} \\ &= \frac{r^3 \cos^3(\theta)}{r^2} + \frac{4r^2}{r^2} \\ &= r \cos^3(\theta) + 4 \end{aligned}$$

A questo punto, si può notare che la formula $|F(r, \theta) - L|$ prevede $-L$, che in questo esempio è identificato dal $+4$ ottenuto nell'ultimo passaggio. Per cui:

$$|F(r, \theta) - 4| = |r \cos^3(\theta)|$$

Quel valore è sicuramente minore o uguale a r (classico ragionamento fatto anche per gli esercizi precedenti):

$$|r \cos^3(\theta)| \leq r$$

E il limite di r in 0^+ è uguale a 0^+ , ovvero un'unità infinitesima. L'esercizio si conclude affermando che il limite esiste e ha risultato uguale a 4. Questo perché si considera $F - L$ e non solo la funzione F .

Esempio 4 (importante)

Questo limite, a differenza degli altri, può essere risolto in maniera differente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Nel caso in cui il limite esistesse, varrebbe zero. Questo perché la restrizione della funzione f a qualunque retta passante per l'origine, porta a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{1 + m^4 x^2} = 0$$

Qualunque sia $m \in \mathbb{R}$. Tuttavia, questo modo differente di dimostrare l'esistenza di un limite, non è una condizione sufficiente per concludere la dimostrazione. Infatti, nel caso in cui ci si muovesse lungo l'asse y con $y = \sqrt{x}$ accadrebbe:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

E questo dimostra che il limite originale non esiste.

3.8 Curve in \mathbb{R}^n

Definizione 7

Sia I un intervallo della retta reale. Si chiama **curva in \mathbb{R}^n** una funzione del tipo:

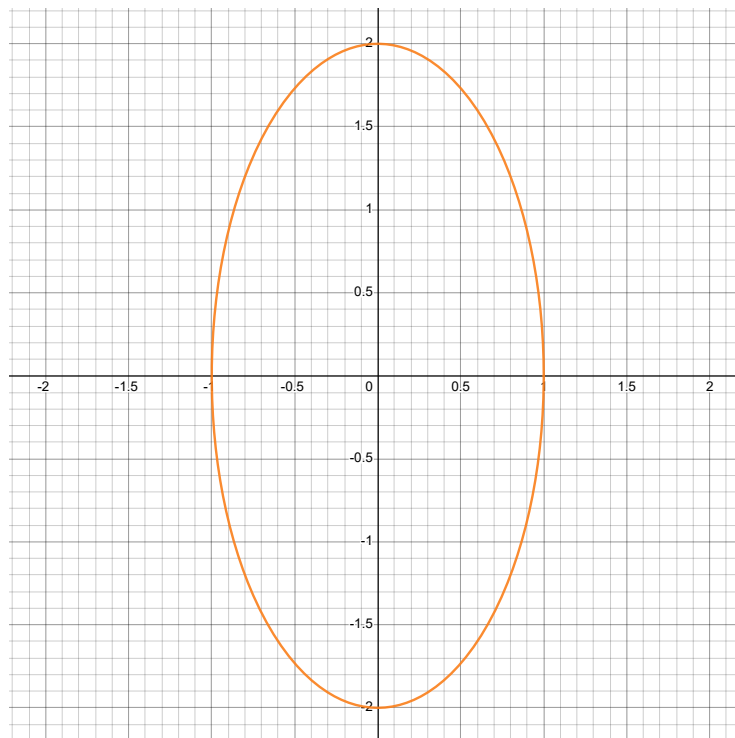
$$\begin{aligned}\gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))\end{aligned}\quad (22)$$

Che ha tutte le componenti $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue su I . Inoltre, viene detto **sostegno della curva** l'immagine di γ :

$$\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\} \quad (23)$$

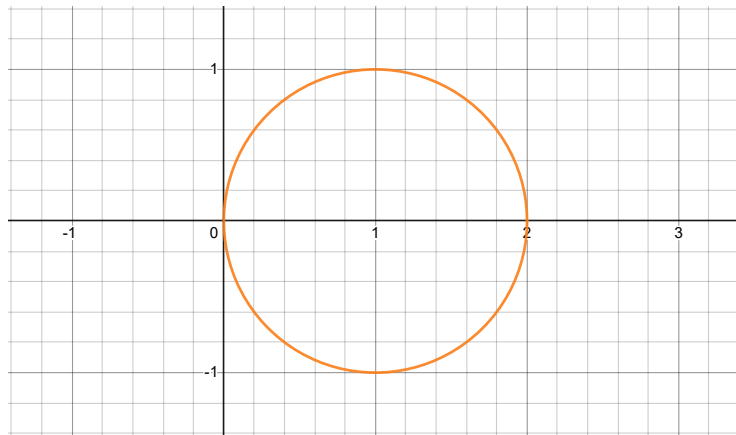
Con il termine “curva” si intende una funzione di variabile reale², con “sostegno di una curva” si intende un **insieme di punti** nello spazio euclideo.

Nel caso in cui l'insieme I è chiuso e limitato, cioè $I = [a, b]$, si dice che la curva γ è un **arco** o un **cammino continuo**. Inoltre, $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ sono estremi dell'arco (punto iniziale e punto finale). Alcuni esempi di parametrizzazione:

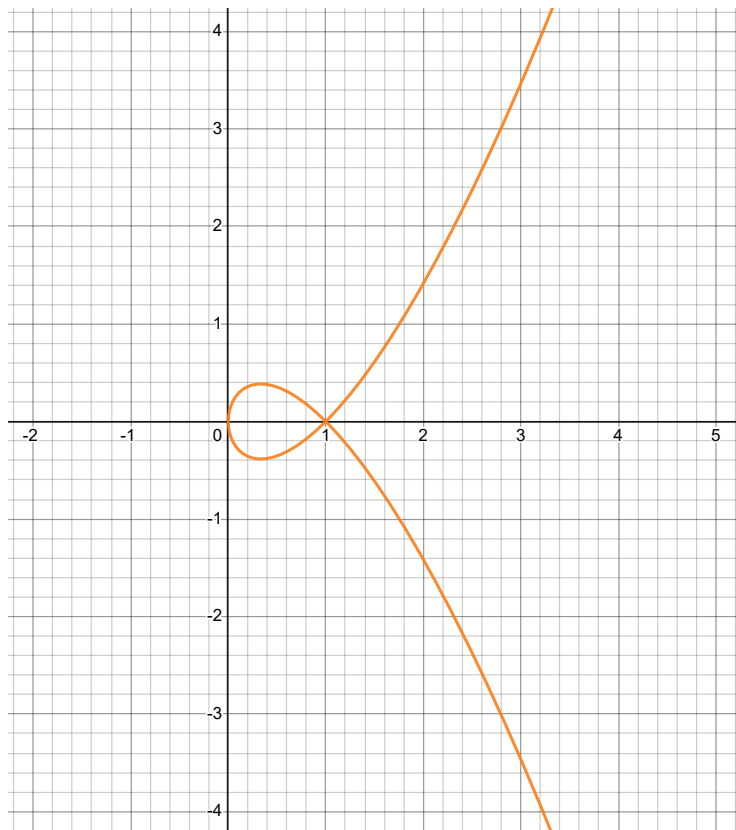


$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\cos(t), 2 \sin(t))$ è un cammino chiuso semplice.

²A ogni valore del parametro $t \in I$ è associato uno e un solo punto del sostegno.



$\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (1 + \cos(t), \sin(t))$ è un arco di circonferenza semplice,
ma non è chiuso.



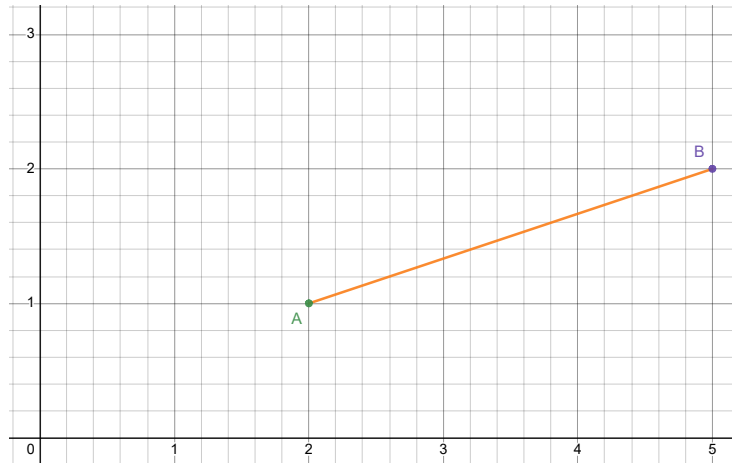
$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (t^2, t^3 - t)$ è una curva non semplice.

3.8.1 Parametrizzazioni notevoli

Esistono tre tipi di parametrizzazioni notevoli: per un segmento, per un grafico di una funzione e per le coniche.

Parametrizzazione notevole: segmento

Dato il seguente grafico:



Si definisce il vettore \vec{v} che parte dal punto B e finisce al punto A come:

$$\vec{v} = B - A = (5, 2) - (2, 1) = (3, 1)$$

La **parametrizzazione notevole** di una retta (segmento) è la seguente formula:

$$\gamma(t) = A + t \cdot \vec{v} \quad \text{con } t \in [0, 1] \quad (24)$$

Sostituendo i valori noti in questo esempio:

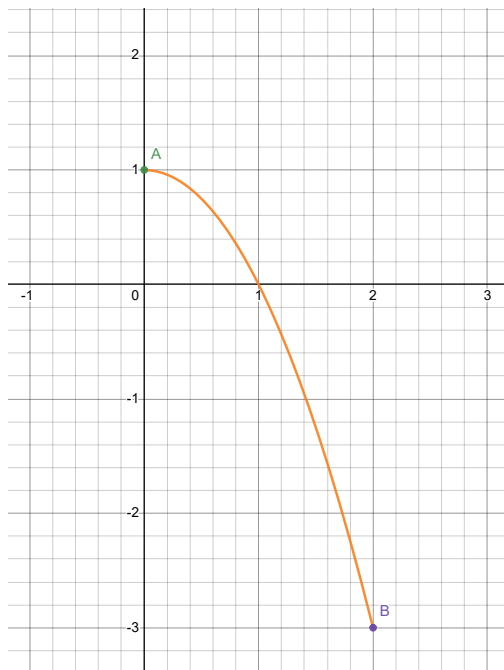
$$\gamma(t) = (2, 1) + t(3, 1) = (2 + 3t, 1 + t)$$

La parametrizzazione dunque è:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (2 + 3t, 1 + t) \end{array}$$

Parametrizzazione notevole: grafico di una funzione

Dato il seguente grafico come esempio:



Il grafico di una funzione:

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Ha una parametrizzazione del tipo:

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, f(t)) \end{aligned} \quad (25)$$

L'esempio ha i punti $A = (0, 1)$ e $B = (2, -3)$ e dunque la parametrizzazione è:

$$\begin{aligned} \gamma[0, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, 1 - t^2) \end{aligned}$$

Parametrizzazione notevole: conica

- La parametrizzazione di un'ellisse di centro (x_c, y_c) e semiassi a, b :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x_c + a \cos(t), y_c + b \sin(t)) \end{aligned}$$

- La parametrizzazione dell'iperbole equilatera $(x^2 - y^2 = 1, x > 0)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cosh(t), \sinh(t)) \end{aligned}$$

Ricordando che $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

3.8.2 Retta tangente a una curva

Una curva $\gamma(t)$, con $t \in I$, è derivabile in I se e solo se tutte le sue componenti sono derivabili in I e in tal caso:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

Si può interpretare la derivata della curva $\gamma'(t)$ come un vettore velocità di un punto, il quale descrive la traiettoria (sostegno della curva γ) secondo la parametrizzazione data.

Nel caso in cui la derivata è diversa dal vettore zero, $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$, allora una **parametrizzazione della retta tangente alla curva** in $\gamma(t_0)$ è:

$$r(t) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) \quad t \in \mathbb{R} \quad (26)$$

3.8.3 Esercizio parametrizzazione retta tangente

Trovare l'equazione della retta tangente al sostegno della curva:

$$\begin{aligned} \gamma : (-1, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (e^t, \ln(t+1), t) \end{aligned}$$

Nel suo punto di coordinate $(1, 0, 0)$. Il **primo passo** è trovare un punto t_0 appartenente alla curva $(-1, +\infty)$ tale che il risultato sia $\gamma(t_0) = (1, 0, 0)$. Per questo motivo, si inseriscono i valori nel sistema:

$$\begin{cases} e^t = 1 \\ \ln(t+1) = 0 \\ t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione immediata}} t_0 = 0$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata in quel punto:

$$\gamma'(t)|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(e^t) \\ \frac{d}{dt}(\ln(t+1)) \\ \frac{d}{dt}(t) \end{pmatrix} \bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{1}{t+1} \\ 1 \end{pmatrix} \bigg|_{t=0} = (1, 1, 1)$$

Il **terzo e ultimo passo** è scrivere l'equazione della tangente (eq. 26):

$$r(s) = \gamma(t_0) + s \cdot \gamma'(t_0) = (1, 0, 0) + s(1, 1, 1) = (1+s, s, s)$$

Questa risulta essere l'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = s \\ z = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

3.8.4 Esercizio parametrizzazione arco di ellisse

Trovare una parametrizzazione dell'arco di ellisse di equazione:

$$4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$$

E si scriva poi l'equazione della tangente alla curva in $P\left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, +1\right)$.

Il **primo passo** è verificare che l'equazione data sia in forma canonica e in caso contrario ottenerla con le varie tecniche introdotte nel capitolo dei Prerequisiti. Quindi, si esegue la tecnica del completamento dei quadrati (par. 1.1.4) per ottenere la forma canonica:

- Si raggruppano le variabili:

$$4(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$$

- Si cerca un $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x &\rightarrow 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\-4c &= -4 \\c &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^2 - 4y &\rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\-4c &= -16 \\c &= 4\end{aligned}$$

- Si riscrive l'equazione:

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 4 = 0$$

- Si raggruppano le equazioni di secondo grado con i nuovi termini e si ottiene l'equazione canonica:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &\rightarrow \frac{-2 \pm 0}{2 \cdot 1} = -1 \\y^2 - 4y + 4 &\rightarrow \frac{-(-4) \pm 0}{2 \cdot 1} = 2\end{aligned}$$

$$4((x+1)^2 - 1) + 9((y-2)^2 - 4) + 4 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 + 9(y-2)^2 - 36 + 4 = 0$$

$$4(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

$$\frac{1}{36} \cdot 4(x+1)^2 + \frac{1}{36} \cdot 9(y-2)^2 = 36 \cdot \frac{1}{36}$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

La parametrizzazione di un'ellisse di centro (x_c, y_c) e semiassi a, b è:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \begin{cases} x_c + a \cos(t) \\ y_c + b \sin(t) \end{cases}$$

Quindi, il **secondo passo** è trovare la parametrizzazione. In questo esempio, l'ellisse è centrata in $(-1, 2)$ mentre i semiassi sono $a = \sqrt{9} = 3$ e $b = \sqrt{4} = 2$. Per cui, la parametrizzazione di un'ellisse è:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \begin{cases} -1 + 3 \cos(t) \\ 2 + 2 \sin(t) \end{cases}$$

Il **terzo passo** è eguagliare la parametrizzazione al punto P questo perché è necessario trovare l'equazione della tangente alla curva. Per questo motivo, si procede il calcolo con il sistema:

$$\begin{cases} -1 + 3 \cos(t) = -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 2 + 2 \sin(t) = +1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos(t) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ \sin(t) = -1 \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(t) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

A questo punto il calcolo della t non è banale perché applicando la funzione arccos e arcsin, si otterrebbero due valori differenti di t . Quindi come è possibile ottenerla? Si utilizza la definizione di tangente che è seno fratto coseno:

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \rightarrow \tan(t) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \div -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Con l'arcotangente si ottiene il valore t :

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = t = \frac{\pi}{6}$$

Ma attenzione! Con $\frac{\pi}{6}$ il valore del coseno e seno sarebbero differenti (riguardo il segno). Questo perché, la funzione arcotangente restituisce il primo valore trovato, ovvero quello nel quadrante positivo (si veda la figura 6 nella pagina successiva).

Per risolvere questo problema, si disegna una circonferenza su un piano cartesiano, e partendo dal punto $(1, 0)$, si cerca, con i diversi livelli di gradi, di arrivare nel quadrante interessato. Quindi:

- Il primo quadrante (in alto a dx) avrà i valori del seno e coseno positivi. Il range dei gradi è: $(0^\circ, 90^\circ)$
- Il secondo quadrante (in alto a sx) avrà i valori del coseno negativi e del seno positivi. Il range dei gradi è: $(90^\circ, 180^\circ)$
- Il terzo quadrante (in basso a sx) avrà i valori del coseno e del seno negativi. Il range dei gradi è: $(180^\circ, 270^\circ)$
- Il quarto quadrante (in basso a dx) avrà i valori del coseno positivi e i valori del seno negativi. Il range dei gradi è: $(270^\circ, 0^\circ)$


$$\begin{array}{ll} 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 90^\circ & \rightarrow \text{primo quadrante passato} \\ 90^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ & \rightarrow \text{secondo quadrante passato} \\ 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ & \rightarrow \text{primo valore ammesso nel terzo quadrante} \end{array}$$
$$t = \frac{7\pi}{6}$$
$$\gamma'(t) = \begin{cases} -3 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{cases} \rightarrow \gamma'\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \begin{cases} -3 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ 2 \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\sqrt{3} \end{cases}$$

Il **quinto passo** è applicare l'equazione 26:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \gamma(t) + t \cdot \gamma'(t) \quad t \in \mathbb{R} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 + 3 \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ 2 + 2 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ 2 \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}t \\ 1 - \sqrt{3}t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

L'esercizio si conclude qua con l'equazione della retta tangente.

3.8.5 Insiemi connessi per archi e teorema degli zeri

Definizione 8

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **connesso per archi** se presi due punti qualunque $x, y \in A$ esiste un arco continuo in A che ha per estremi x e y .

Banalmente un insieme è connesso per archi se si riesce a disegnare una strada tra due punti appartenenti all'insieme stesso.

Teorema 5 (Teorema degli zeri). *Sia f una funzione continua su un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi. Se x e y sono due punti di D tali che $f(x) > 0$ e $f(y) < 0$, allora esiste $z \in D$ tale che $f(z) = 0$.*

3.8.6 Lunghezza di una curva

Dato l'arco di curva:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

E una partizione dell'intervallo $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, b = t_m\}$$

Alla partizione rimane associata una poligonale, di cui si può **calcolare la lunghezza** (di una curva):

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \quad (27)$$

Definizione 9

Si dice che un **arco di curva** è **rettificabile** se $\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}) < \infty$. In tal caso, per definizione:

$$L(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P})$$

Definizione 10

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un arco di curva regolare, ovvero la derivata prima è diverso al vettore nullo ed è continua, allora è rettificabile e la sua **lunghezza** è:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad (28)$$

Dove la lunghezza viene calcolata in questo modo:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + \dots + n^2} \quad (29)$$

In cui tutte le variabili sotto radice sono i valori della parametrizzazione. Ovviamente devono essere inseriti post derivata. Si veda gli esempi.

Esempio 1

Calcolare la lunghezza dell'arco di curva:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t), 3t) \end{aligned}$$

Il **primo passo** per calcolare la lunghezza è trovare la derivata:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 3 \end{cases}$$

Il **secondo passo** è calcolare l'integrale applicando l'equazione 29:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (3)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{10} dt = \left[\sqrt{10}t \right]_0^{2\pi} = \sqrt{10} \cdot 2\pi$$

Esempio 2

Calcolare la lunghezza dell'arco di curva parametrizzato da:

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 3] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{2}{3}t^3, 1 - t^2 \right)\end{aligned}$$

Il **primo passo** per calcolare la lunghezza è trovare la derivata:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 2t^2 \\ -2t \end{cases}$$

Il **secondo passo** è calcolare l'integrale applicando l'equazione 29:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \|\gamma'(t)\| &= \int_0^3 \sqrt{(2t^2)^2 + (-2t)^2} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{4t^4 + 4t^2} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{4t^2(t^2 + 1)} dt \\ &= \int_0^3 2t \cdot \sqrt{(t^2 + 1)} dt \\ &= 2 \cdot \int_0^3 t \cdot \sqrt{(t^2 + 1)} dt \\ &\downarrow \text{ si procede per sostituzione: } x = t^2 + 1; \quad dt = \frac{1}{t'} dx \\ &= 2 \cdot \int_0^3 t \cdot \sqrt{x} \frac{1}{2t} dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{x} dx \\ &\downarrow \text{ proprietà fondamentale della radice quadrata: } \sqrt[\beta]{(x)^\alpha} = x^{\frac{\alpha}{\beta}} \\ &= \int_0^3 x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^3 \\ &\downarrow \text{ si torna alla forma pre-sostituzione} \\ &= \left[\frac{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^3 \\ &= \frac{(3^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{(10)^3}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{(10)^3} - 2}{3}\end{aligned}$$

3.8.7 Derivate parziali

Sia f una funzione di due variabili, definita in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Se la restrizione della funzione f alla retta di equazione $y = y_0$ è derivabile in x_0 , si dice che f **ammette derivata parziale** rispetto a x nel punto (x_0, y_0) e si scrive:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}\end{aligned}\tag{30}$$

Le derivate parziali sono i **coefficienti angolari** delle rette tangenti alle curve ottenute selezionando il grafico di f con i piani $y = y_0$ e $x = x_0$.

Generalizzazione al caso n -dimensionale

Sia f definita in un intorno di $x \in \mathbb{R}^n$. Indicato con e_i il vettore:

$$(0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, 0)$$

Ovvero l'unico elemento non nullo nella i -esima posizione, allora si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}\tag{31}$$

Se questo limite esiste finito.

Esempi

a) Data $f(x, y) = x^2 + 3xy^4$ e calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y^4 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 12xy^3$$

b) Data $f(x, y) = ye^{xy}$ e calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1 \cdot y) \cdot ye^{xy} = y^2 e^{xy} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

c) Data $f(x, y, z) = y \cdot \tan(x + 2z)$ e calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y}{\cos^2(x + 2z)} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \tan(x + 2z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2y}{\cos^2(x + 2z)}$$

d) Sia $f(x, y) = y\sqrt[3]{x}$, calcolare, se esiste, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \frac{y}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} \\ &= 0\end{aligned}$$

La derivata della funzione f nell'origine vale 0.

e) Sia $f(x, y) = \exp(\sqrt{x^2 + y^2})$, calcolare, se esiste, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \exp(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y \\ &= \exp(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{h^2}} - 1}{h}\end{aligned}$$

In questo caso il limite non esiste poiché venendo da destra (0^+) o da sinistra (0^-), il limite assume diversi valori:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{h^2}} - 1}{h} &\longrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1^+ - 1}{0^+} \longrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0^+}{0^+} = +1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{\sqrt{h^2}} - 1}{h} &\longrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1^+ - 1}{0^-} \longrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0^+}{0^-} = -1\end{aligned}$$

Ovviamente esistono anche **derivate di ordine superiore** che si risolvono banalmente una dopo l'altra:

- $f(x, y)$:
 - $f_x(x, y)$
 - * $f_{xx}(x, y)$
 - * $f_{xy}(x, y)$
 - $f_y(x, y)$
 - * $f_{yy}(x, y)$
 - * $f_{yx}(x, y)$

Le variabili f_{xy} e f_{yx} sono dette **derivate miste**:

$$\begin{aligned}f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{h} \\ f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x + h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{h}\end{aligned} \tag{32}$$

3.8.8 Gradiente

Definizione 11

Se f ammette derivate parziali in un punto \bar{x} , si chiama **gradiente** di f in \bar{x} il vettore:

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right) \quad (33)$$

Per capire al meglio il gradiente, si introduce un esercizio dettagliato con anche l'introduzione della matrice Hessiana (utilizzata in futuro).

Esempio guidato

- Scrivere il gradiente della funzione:

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy$$

in un generico punto di \mathbb{R}^2 .

- Trovare i punti in cui il gradiente è nullo (punti stazionari di f).
- Calcolare il determinante della matrice:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \quad (34)$$

nel punto stazionario $(0, 0)$.

Il gradiente è facilmente calcolabile facendo la derivata parziale rispetto a x e un'altra rispetto a y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy - y^2 + y & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 - 2xy + x \\ \nabla f(x, y) &= (2xy - y^2 + y, x^2 - 2xy + x) \end{aligned}$$

Per trovare i punti in cui il gradiente è nullo, basta porre le condizioni uguali a zero e ottenere tutte le possibili soluzioni:

$$\begin{cases} 2xy - y^2 + y = 0 \\ x^2 - 2xy + x = 0 \end{cases}$$

Le derivate parziali miste e parziali seconde sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial xx}(x, y) &= 2y & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) &= 2x - 2y + 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yy}(x, y) &= -2x & \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y) &= 2x - 2y + 1 \end{aligned}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 2y + 1 \\ 2x - 2y + 1 & -2x \end{pmatrix} \rightarrow H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le derivate miste sono uguali! E questo non è un caso perché dichiarato nel Teorema di Schwarz (pag. 122).

Teorema 6 (Teorema di Schwarz). Sia f una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto. Se le due derivate miste:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

esistono in un intorno di $\bar{x} \in A$ e sono entrambe continue in \bar{x} , allora in tale punto esse coincidono.

Nota bene:

1. Se la funzione f ha tutte le derivate parziali fino all'ordine due continue in A si dice che f è di classe C^2 in A .
2. Il teorema si generalizza a funzioni di classe $C^k(A)$, cioè funzioni che hanno tutte le derivate parziali fino all'ordine k continue in A .

Per esempio, con A aperto di \mathbb{R}^3 , $f \in C^4(A)$, $\bar{x} \in A$:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^2}(\bar{x}) = \frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1 \partial x_3}(\bar{x}) = D^{(1,1,2)} f(\bar{x})$$

Qua di seguito, si fornisce una formula fondamentale. Sia D un insieme aperto in \mathbb{R}^n :

Teorema 7 (Formula del gradiente). Se f è differenziabile (par. 3.8.11) in $\bar{x} \in D$, allora f ammette in \bar{x} la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x})$ qualunque sia il vettore unitario \vec{v} e inoltre si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \vec{v} \quad (35)$$

Questa formula è fondamentale in alcuni esercizi. Il prodotto nell'equazione 35, è un prodotto vettoriale, per cui si moltiplicano le coordinate del gradiente per le coordinate del vettore (la x del gradiente con la x del vettore e la y del gradiente con la y del vettore) e si sommano i due valori.

Un altro aspetto **importante** che viene chiesto talvolta in sede d'esame è la **massima crescita**. Se f è differenziabile in $\bar{x} \in D$ e $\nabla f(\bar{x}) \neq \vec{0}$, cioè il gradiente non è nullo, allora:

- La **massima crescita** di f , a partire da \bar{x} , avviene nella **direzione del gradiente**
- La **massima decrescita** avviene nella **direzione opposta a quella del gradiente**

E ancora, si presenta qua di seguito un altro argomento richiesto spesso in sede d'esame: quando un gradiente è **ortogonale**.

Teorema 8 (Ortogonale). Sia f di classe C^1 in un intorno di \bar{x} e supponiamo che $\nabla f(\bar{x}) \neq \vec{0}$. Allora $\nabla f(\bar{x})$ è **ortogonale** alla curva di livello di f che passa per \bar{x} .

3.8.9 Derivate direzionali

Si consideri la restrizione della funzione f a una retta tipo $r(t) = P + t\vec{v}$, con $t \in \mathbb{R}$, dove \vec{v} è un **versore** (vettore unitario) che indica una particolare direzione e P è un punto interno al dominio di f .

Definizione 12

La funzione f ha una **derivata direzionale** in P nella direzione di \vec{v} se esiste finito il limite:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\vec{v}) - f(P)}{t} \quad (36)$$

3.8.10 Teorema della funzione implicita (Ulisse Dini)

Teorema 9 (Teorema di Dini). Sia f una funzione di classe \mathcal{C}^1 in un aperto A di \mathbb{R}^2 e supponiamo che esista un punto (\bar{x}, \bar{y}) tale che la funzione valutata in quel punto sia uguale a zero $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ e la sua derivata parziale rispetto a y non sia nulla $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$.

Allora esiste un intorno I di \bar{x} e un'unica funzione $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^1 in I tale che $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ e $f(x, \varphi(x)) = 0$ per ogni $x \in I$.

Inoltre:

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in I \quad (37)$$

In parole povere, la curva di livello $f(x, y) = 0$ è localmente il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$.

Nei temi d'esame, il Teorema di Dini viene richiesto quando si chiede di calcolare la pendenza di una retta tangente in un punto. Il procedimento è quello di calcolare le derivate parziali, l'equazione della retta tangente e infine di applicare la frazione, ovvero il teorema di Dini.

3.8.11 Differenziabilità

Definizione 13

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice differenziabile in un punto (a, b) interno a D se esistono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ e inoltre:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \quad (38)$$

dove:

$$T(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) \quad (39)$$

In altre parole, basta utilizzare l'equazione 39 per calcolare la differenziabilità.

Inoltre, quando si dice che una funzione è differenziabile? Sia f definita in un intorno di $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e si supponga che esistano tutte le derivate parziali di f in \bar{x} . Si dice che la funzione f è **differenziabile** in \bar{x} se:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - T(x)}{\|x - \bar{x}\|} = 0$$

In cui:

$$T(x) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

L'importanza di dire se una funzione è differenziabile o meno è una conseguenza del fatto che:

Teorema 10. *Se f è differenziabile in un punto P , allora f è continua in P .*

Senza dover fare calcoli pesanti, una funzione è **differenziabile** nel caso in cui le derivate parziali in un intorno di un punto sono continue:

Teorema 11. *Se f ammette derivate parziali in un intorno di \bar{x} , continue in \bar{x} , allora f è differenziabile in \bar{x} .*

In particolare, se le derivate parziali di f esistono e sono continue in un aperto A , allora f è differenziabile in tutti i punti di A .

Ricapitolando:

$$\begin{array}{ll} \text{Esistenza derivate in ogni direzione} & \Rightarrow \text{Continuità} \\ \text{Differenziabilità} & \Rightarrow \text{Esistenza derivate in ogni direzione} \\ & \text{e continuità} \end{array}$$

3.9 Esercizi

3.9.1 Dominio, insieme aperto/chiuso, limitato/illimitato, connesso/sconnesso

Esame 6 settembre 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (a)

Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} - \sqrt{2x + 1}$$

determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!).

Il dominio della funzione dipende dalle due radici quadrate:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \wedge 2x + 1 \geq 0\}$$

Per rappresentare il grafico si parte dalla retta $2x + 1$. Quindi, si manipola la disuguaglianza esplicitando la x :

$$2x + 1 \geq 0 \longrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Mentre per l'equazione di secondo grado, è evidente che sia un'ellisse centrata nell'origine (dato che mancano i termini che si sottraggono alle variabili di secondo grado):

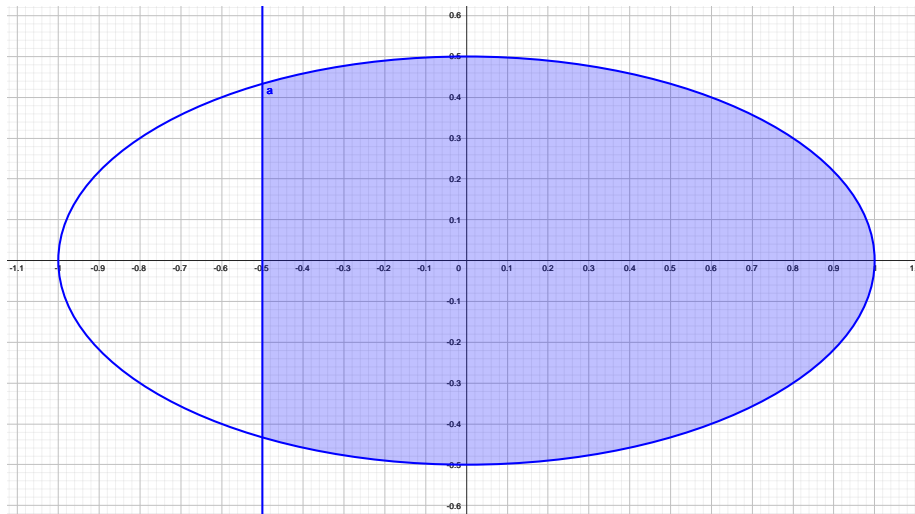
$$1 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \longrightarrow x^2 + 4y^2 \leq 1 \longrightarrow x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} \leq 1$$

Il centro dell'ellisse è nell'origine $(0, 0)$, mentre i vertici sono:

$$\begin{array}{ll} \text{Orizzontali:} & V_1 = (0 - 1, 0) \quad V_2 = (0 + 1, 0) \\ & V_1 = (-1, 0) \quad V_2 = (1, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Verticali:} & V_3 = \left(0, 0 - \sqrt{\frac{1}{4}}\right) \quad V_4 = \left(0, 0 + \sqrt{\frac{1}{4}}\right) \\ & V_3 = \left(0, -\frac{1}{2}\right) \quad V_4 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{array}$$

La disuguaglianza ha il minore uguale, quindi l'ellisse deve essere considerata solo al suo interno. La figura viene rappresentata nella pagina successiva.



Rappresentazione di $1 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \wedge 2x + 1 \geq 0$.

Si calcolano i punti interni e di frontiera per capire se è un insieme aperto o chiuso:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{D} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - 4y^2 > 0 \wedge 2x + 1 > 0\} \\ \partial D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - 4y^2 = 0 \wedge 2x + 1 = 0\} \\ \overline{D} &= D \cup \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \wedge 2x + 1 \geq 0\}\end{aligned}$$

Il dominio D è uguale alla chiusura \overline{D} , questo significa che l'insieme è chiuso e non aperto poiché $D \neq \overset{\circ}{D}$.

Inoltre, l'insieme è limitato poiché esiste una palla di centro $(0, 0)$ con un raggio maggiore di zero tale che essa racchiuda questo insieme.

Infine, l'insieme è anche connesso per aperti perché è possibile prendere due punti all'interno dell'insieme e disegnare una strada.

3.9.2 Derivata direzionale con valore massimo

Esame 6 settembre 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (b)

Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} - \sqrt{2x + 1}$$

calcolare la derivata direzionale f nel punto $P(0, \frac{1}{4})$ in direzione $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Qual è il valore massimo di $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P)$ al variare di \vec{v} ?

Si calcolano le derivate direzionali nel punto P :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}} \cdot (-2x) - \frac{1}{2\sqrt{2x + 1}} \cdot (2) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{1}{4}\right) &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}} \cdot (-8y) - \frac{1}{2\sqrt{2x + 1}} \cdot (0) \\ &= -\frac{4y}{\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, \frac{1}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \\ &= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{razionalizzazione}} -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Il gradiente è:

$$\nabla f\left(0, \frac{1}{4}\right) = \left(-1, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Per calcolare la derivata direzionale si utilizza la formula del gradiente (prodotto vettoriale):

$$\nabla f\left(0, \frac{1}{4}\right) \cdot \vec{v} = \left(-1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

Per calcolare il valore massimo al variare del vettore, si calcola con la norma del gradiente:

$$\|\nabla f(P)\| = \left\|\nabla f\left(0, \frac{1}{4}\right)\right\| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

3.9.3 Limiti e continuità

Esame 6 settembre 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (a)

Stabilire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|y|} \sin(xy)}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua in \mathbb{R}^2 ?

Suggerimento: prendere in considerazione la restrizione di f alla parabola di equazione $y = x^2$.

Si sfrutta il suggerimento a nostro favore. Per cui, si evita di applicare le coordinate polari. Si potrebbe procedere con la sostituzione parziale (spostarsi lungo una retta), ovvero si considera prima $y = 0$ e poi $x = 0$. Ma attenzione! Che cosa dice il suggerimento? $x^2 = y$. Per cui, si procede prima verificando cosa accade percorrendo lungo $y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

Adesso si studia cosa accade percorrendo lungo $y = x^2$:

$$f(x, x^2) = \frac{\sqrt{|x^2|} \sin(x^3)}{x^4 + (x^2)^2} = \frac{|x| \sin(x^3)}{2x^4}$$

Dato che la x dovrà essere sempre maggiore di zero, condizione imposta dal dominio poiché si trova al denominatore, si può togliere il valore assoluto e semplificare:

$$\frac{x \sin(x^3)}{2x^4} = \frac{\sin(x^3)}{2x^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x^3)}{x^3}$$

Adesso, applicando il limite che tende a 0^+ (non zero poiché non è ammesso!), si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(0^+)}{0^+} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0^+}{0^+} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

I due limiti hanno risultati diversi, per cui il limite che tende a $(0, 0)$ non esiste e la funzione non è continua in $(0, 0)$ (ma lo è in tutti gli altri punti, ovvero $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$).

Esame 1 marzo 2022 - Gruppo A - 4 esercizio (a)

Stabilire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

è continua in \mathbb{R}^2 .

Se sostituiamo l'espressione $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ con $(x-1)^2 + (y-2)^2$, la risposta cambia?

Vedendo i termini al denominatore (al quadrato) e i punti a, b , cioè $1, 2$, si può tentare di utilizzare le coordinate polari così da avere una semplificazione, non da poco, al denominatore. Quindi, le coordinate polari sono:

$$\begin{cases} x = 1 + r \cos(\theta) \\ y = 2 + r \sin(\theta) \end{cases}$$

Si sostituiscono le coordinate polari nell'espressione:

$$\frac{(x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \rightarrow \frac{(1+r\cos(\theta)-1)(2+r\sin(\theta)-2)}{\sqrt{(1+r\cos(\theta)-1)^2 + (2+r\sin(\theta)-2)^2}}$$

Si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned} \frac{(1+r\cos(\theta)-1)(2+r\sin(\theta)-2)}{\sqrt{(1+r\cos(\theta)-1)^2 + (2+r\sin(\theta)-2)^2}} &= \frac{(r\cos(\theta)) \cdot (r\sin(\theta))}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)}} \\ &= \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} \\ &= \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2 \cdot \cancel{1}}} \\ &= \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r} \\ &= r\cos(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

Adesso si può applicare il teorema del calcolo dei limiti con coordinate polari, ovvero se è vero che:

$$|F(r, \theta) - L| \leq g(r) \quad \text{con} \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0$$

Allora si può concludere che il limite della funzione è uguale a L :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

Applicando la teoria alla pratica, si ha che:

$$|F(r, \theta) - 0| \leq g(r) = |r \cos(\theta) \sin(\theta)| \leq r$$

La maggiorazione fatta in questo caso è sempre vera poiché il valore r , a sinistra, è influenzato dalle due funzioni trigonometriche le quali, si ricorda, non potranno mai essere maggiori di 1. Per cui r sarà sempre uguale a sé stessa o minore. Inoltre, la funzione $g(r)$, in questo caso r , ha come risultato del limite per $r \rightarrow 0^+$ un valore infinitesimo. Infine, la funzione $g(r)$ non dipende da θ , per cui rispetta il teorema (si dice che è uniformemente rispetto a θ).

Con queste osservazioni, si può affermare con certezza che la funzione è continua in \mathbb{R}^2 e che il limite in $(1, 2)$ ha risultato 0:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = 0$$

Se sostituiamo l'espressione $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ con $(x-1)^2 + (y-2)^2$, la risposta cambia?

La risposta è assolutamente sì! Il motivo è semplice. Riprendendo le manipolazioni algebriche effettuate nella pagina precedente, è facile notare che nel punto in cui al denominatore è presente solo r^2 sotto radice (si riportano qua i calcoli essenziali per comodità):

$$\frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sqrt{r^2}} \xrightarrow{\text{caso particolare}} \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r^2}$$

La mancanza della radice avrebbe portato a semplificare al numeratore e al denominatore r , causando così l'alterazione della funzione $F(r, \theta)$ nel teorema, la quale sarebbe stata:

$$|\cos(\theta) \sin(\theta)| \leq g(r)$$

E avrebbe impedito di trovare una maggiorazione (funzione g) uniformemente rispetto a θ . Ne consegue che la funzione non sarebbe stata continua in \mathbb{R}^2 .

3.9.4 Parametrizzazione

Esame 6 settembre 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (b)

Data la curva parametrizzata da:

$$\gamma(t) = (\cos^2(t), \cos(t) \sin(t)) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

scrivere le equazioni parametriche della retta tangente e della retta normale a γ nel suo punto T di coordinate $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Per trovare la retta tangente ad una curva è necessario applicare la formula nota:

$$r(t) = \gamma(t) + s\gamma'(t)$$

Per cui, prima è necessario trovare la t partendo dalla parametrizzazione nota, successivamente si ottiene la derivata e si applica il punto t , infine si esegue la somma. Ovviamente il tutto deve passare dal punto T :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \cos^2(t) = \frac{1}{4} \\ \cos(t) \sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\cos^2(t)} = \sqrt{\frac{1}{4}} \\ \cos(t) \sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} = \begin{cases} \cos(t) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4 Temi d'esame

In questo paragrafo viene presentata una lista di temi d'esame svolti durante la scrittura di questi appunti. Le risorse vengono raggruppate per appello, per cui nel caso in cui si fosse intenzionati a ripassare un solo argomento, si consiglia di andare alla fine del capitolo nella sezione "Esercizi". Infine, con "Ex." si intende il numero dell'esercizio nel testo d'esame.

- 2023
 - 21 giugno
 - * Gruppo A
 - (Ex. 1) Variabili separabili e problema di Cauchy: pag. 50
 - 06 settembre
 - * Gruppo A
 - (Ex. 1) Variabili separabili e problema di Cauchy: pag. 54
 - (Ex. 2) Metodo di somiglianza e problema di Cauchy: pag. 56
 - (Ex. 3 - *a*) Dominio, insieme aperto o chiuso, limitato o illimitato, connesso o sconnesso: pag. 125
 - (Ex. 3 - *b*) Derivata direzionale con valore massimo: pag. 127
 - (Ex. 4 - *a*) Limiti e continuità: pag. 128
 - (Ex. 4 - *b*) Parametrizzazione: pag. 131
- 2022
 - 01 marzo
 - * Gruppo A
 - (Ex. 4 - *a*) Limiti e continuità: pag. 129