Schemi Analisi II

VR443470

ottobre 2023

Indice

1 Prerequisiti

Il corso di Analisi II si articola in due macro sezioni: primo e secondo parziale. All'esame gli esercizi da svolgere saranno 10, suddivisi 5 per la prima parte e 5 per la seconda.

Nonostante vengano date 3 ore per svolgere l'esame totale, dunque 1 ora e mezza per ciascuna prova parziale, il tempo è una risorsa fondamentale. Difatti, se un calcolo matematico dovesse richiedere una quantità eccessiva di risorse/tempo, si rischierebbe di non passare l'esame con esito positivo.

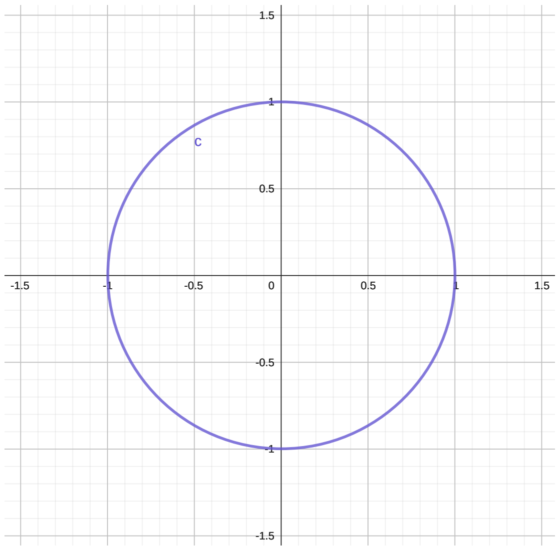
Risulta dunque fondamentale, per ciascun studente, giungere con dei prerequisiti solidi e non banali. In questo capitolo si provvederà a fornire alcuni prerequisiti necessari per affrontare il percorso senza eccessive difficoltà.

Ogni paragrafo presenterà degli esercizi e ognuno di essi sarà risolto nel seguente modo: il primo in modo approfondito per illustrare il modus operandi, gli altri facendo vedere i calcoli e risparmiando le spiegazioni prolisse. Chiaramente, nel caso in cui ci dovesse essere un caso particolare, esso verrà affrontato e spiegato passo passo.

1.1 Geometria analitica

1.1.1 Circonferenza

La circonferenza è graficamente rappresentata nel seguente modo:



Chiamando con $C = (x_C, y_C)$ le coordinate del centro della circonferenza e con r il raggio, la sua equazione generale è espressa nel seguente modo:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Nel caso in cui la circonferenza fosse centrata nell'origine degli assi, ovvero $C = (0, 0)$, allora l'equazione generale sarebbe ridotta a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Per essere più precisi, l'**equazione canonica** corrispondente alla circonferenza è la seguente:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Le formule più importanti per ricavare il centro della circonferenza C e il raggio r:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) \quad ; \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

Per ottenere l'equazione generale partendo dall'equazione canonica, si utilizza il metodo dei completamento dei quadrati (paragrafo 1.1.4).

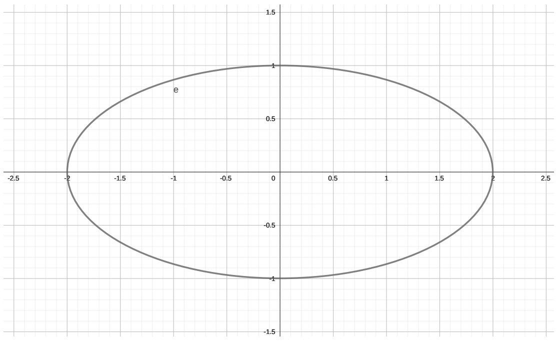
Per ottenere il raggio nel caso in cui sia noto il centro C e un punto $P = (x_P, y_P)$ appartenente alla circonferenza, si utilizza la seguente formula:

$$r = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$$

Per altri approfondimenti: YouMath.

1.1.2 Ellisse

Non esiste un'unica rappresentazione dell'ellisse, ma solitamente può essere facilmente riconoscibile perché di forma allungata:



Attenzione, che data l'**equazione canonica** dell'ellisse **centrata nell'origine**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \neq 0, \;\; b \neq 0$$

Il grafico corrisponde esattamente ad una circonferenza.

Un'ellisse presenta quattro vertici nel caso in cui abbia centro nell'origine. Le relative coordinate sono:

$$V_{1,2} = (\pm a, 0) \quad V_{3,4} = (0, \pm b)$$

Per calcolare l'eccentricità di un'ellisse ("quanto l'ellisse è schiacciata") si devono confrontare i due valori a^2 e b^2:

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{se} \quad a^2 > b^2 \quad \text{e quindi} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$e = \frac{c}{b} \quad \text{se} \quad b^2 > a^2 \quad \text{e quindi} \quad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Il valore è compreso tra: $0 \leq e < 1$.

Nel caso in cui non fosse centrata nell'origine, l'**equazione canonica** di un'**ellisse traslata**, con $C = (x_C, y_C)$ come coordinate del centro:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

I relativi vertici hanno le seguenti coordinate:

$$\begin{array}{lcl} V_1 = (x_C - a, y_C) & ; & V_2 = (x_C + a, y_C) \\ V_3 = (x_C, y_C - b) & ; & V_4 = (x_C, y_C + b) \end{array}$$

L'**importanza dei vertici** è dovuta al fatto che se fosse necessario rappresentare l'ellisse su un piano cartesiano, grazie alle precedenti formule. È possibile ricordarsi facilmente le formule ricordando che le coordinate dei vertici sono ottenute eseguendo la somma/differenza prima sulla coordinata x e poi sulla coordinata y.

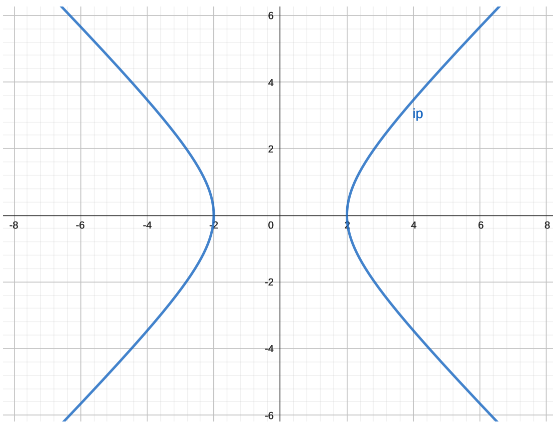
Per altri approfondimenti: YouMath.

1.1.3 Iperbole

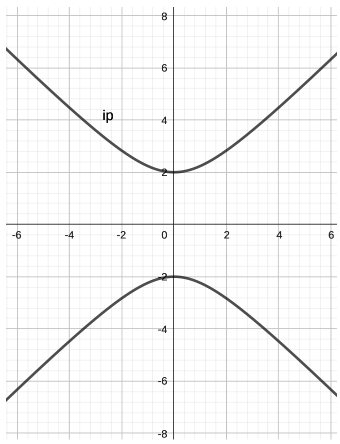
Un iperbole con centro nell'origine ha un'equazione del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \qquad \text{con } a \neq 0,\ b \neq 0$$

Il segno + accanto all'1 rappresenta l'intersezione con l'asse delle ascisse (x), mentre il segno − rappresenta l'intersezione con l'asse delle ordinate (y). Graficamente viene rappresentata nel seguente modo:



Con +1.



Con −1.

Nel caso di una iperbole con gli assi paralleli agli assi cartesiani e quindi con centro in un punto $C = (x_C, y_C)$, essa è data da:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = \pm 1 \qquad \text{con } a \neq 0,\ b \neq 0$$

Dove il segno ± accanto all'1 indica la stessa cosa detta in precedenza.

Per altri approfondimenti: YouMath.

1.1.4 Completamento dei quadrati

Il completamento dei quadrati è un'operazione molto potente che può essere applicata sempre (a discapito dello studente se ha senso o no applicarla!). In questo caso viene applicata ad un'ellisse.

Innanzitutto, la **prima operazione** dell'applicazione del completamento dei quadrati è il raggruppamento dei valori simili, ovverosia:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 &= 0 \\ \left(9x^2 + 36x\right) + \left(4y^2 - 24y\right) + 36 &= 0 \end{aligned}$$

La **seconda operazione** è prendere in considerazione i termini con le x, e poi quelli con le y, e cercare un quadrato. Ovvero sia un valore c tale per cui il Δ (nella formula del calcolo di un'equazione di secondo grado $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$) sia uguale a zero:

$$\begin{array}{lll} 9x^2 + 36x & \longrightarrow & 36^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\ & & 36^2 - 36c = 0 \\ & & c = 36 \\ & & \\ 4y^2 - 24y & \longrightarrow & 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\ & & 24^2 - 16c = 0 \\ & & c = 36 \end{array}$$

Suggerimento: per trovare tale valore, basta risolvere la banale equazione $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ con c incognita e a, b termini noti.

La **terza operazione** è riscrivere l'equazione con i nuovi valori c, ma per lasciare invariata l'equazione è necessario annullarli, ovvero scrivere $c - c$ (nessun problema, con manipolazioni algebriche si riuscirà ad evitare di ritornare al punto di inizio):

$$\left(9x^2 + 36x + 36 - 36\right) + \left(4y^2 - 24y + 36 - 36\right) + 36 = 0$$

Le manipolazioni algebriche riguardano $9x^2 + 36x + 36$ e $4y^2 - 24y + 36$. Ovvero, si riscrivono le due espressioni come quadrati!

$$\begin{array}{lll} 9x^2 + 36x + 36 & \longrightarrow & 9\left(x+2\right)^2 \\ 4y^2 - 24y + 36 & \longrightarrow & 4\left(y-3\right)^2 \end{array}$$

E si riscrive l'equazione generale:

$$9\left(x+2\right)^2 - 36 + 4\left(y-3\right)^2 - 36 + 36 = 0$$

Banali semplificazioni algebriche:

$$\begin{aligned} 9\left(x+2\right)^2 \cancel{-36} + 4\left(y-3\right)^2 - 36 \cancel{+36} &= 0 \\ \frac{1}{36} \cdot \cancel{9}\left(x+2\right)^2 + \cancel{4}\left(y-3\right)^2 &= \cancel{36} \cdot \frac{1}{\cancel{36}} \\ \frac{\left(x+2\right)^2}{4} + \frac{\left(y-3\right)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione corrisponde all'equazione canonica dell'ellisse.

1.1.5 Esercizi

Si rappresenti analiticamente le seguenti equazioni canoniche:

1. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$
2. $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$
4. $x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$
5. $2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$

Esercizio 1

Data l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$$

Prima di rappresentare analiticamente l'equazione, è necessario guardare immediatamente i termini x^2 e y^2 per vedere se si è di fronte ad una circonferenza. Infatti, ricordando l'equazione canonica della circonferenza (pagina 4):

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Si può notare una grande assomiglianza. Quindi, si procede con il calcolo delle coordinate del centro della circonferenza:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = \left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (2, -1)$$

Si procede con il calcolo del raggio:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma} = \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(2)^2}{4} - (-6)} = \sqrt{4+1+6} = \sqrt{11}$$

Infine, si scrive l'equazione canonica sostituendo i valori trovati:

$$\begin{aligned} (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &= r^2 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 11 \end{aligned}$$

Esercizio 2

Data l'equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si può subito vedere che si è di fronte ad un'ellisse centrata nell'origine:

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Si procede con un po' di intuito così da ricavare la forma canonica:

$$\frac{(x-0)^2}{1^2} + \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

E il risultato (forma canonica) eliminando i termini inutili:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \xrightarrow{\text{equivale a}} \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si ottiene l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 = 1$$

Si tratta di un'iperbole che interseca l'asse delle ascisse (x) perché il segno dell'1 è + ed è centrata nell'origine perché x e y "non esistono". Quindi:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Esercizio 4

Data l'equazione:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

Ci si accorge immediatamente che è un iperbole a causa dei segni x^2 e y^2 discordi. Eseguendo alcune operazioni algebriche:

$$\begin{aligned}
x^2 - y^2 + x + 4y - 4 &= 0 \\
x^2 - y^2 + x + 4y &= 4 \\
\left(x^2 + x\right) - \left(y^2 - 4y\right) &= 4
\end{aligned}$$

Si utilizza il completamento dei quadrati per ottenere la forma canonica:

$$\begin{aligned}
x^2 + x \quad &\longrightarrow \quad 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\
& \quad c = \frac{1}{4} \\
y^2 - 4y \quad &\longrightarrow \quad (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\
& \quad c = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) &= 4 \\
\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - \left[(y-2)^2 - 4\right] &= 4 \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - (y-2)^2 + 4 &= 4 \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y-2)^2 &= 4 - 4 + \frac{1}{4} \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y-2)^2 &= \frac{1}{4} \\
4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4(y-2)^2 &= 1 \\
\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} &= 1
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Data l'equazione:

$$2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$$

Si utilizza il completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 4x - y &= 0 \\ \left(2x^2 + 4x\right) + \left(y^2 - y\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x \quad &\longrightarrow \quad 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0 \\ & \qquad\quad c = 2 \\ y^2 - y \quad &\longrightarrow \quad (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\ & \qquad\quad c = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(2x^2 + 4x + 2 - 2\right) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) &= 0 \\ \left[2\left(x+1\right)^2 - 2\right] + \left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] &= 0 \\ 2\left(x+1\right)^2 - 2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ 2\left(x+1\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 2 + \frac{1}{4} \\ 2\left(x+1\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\ \frac{4}{9} \cdot 2 \cdot \left(x+1\right)^2 + \frac{4}{9} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 1 \\ \frac{\left(x+1\right)^2}{\frac{9}{8}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} &= 1 \end{aligned}$$

L'equazione canonica si tratta di un'ellisse.

1.2 Algebra

1.2.1 Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni e i seguenti sistemi di equazioni algebriche:

1. $\begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

3. $\dfrac{y}{y+2} = mx^2$ (risolvere rispetto a y)

4. $\dfrac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1$ (risolvere rispetto a y)

5. $\log \dfrac{2-y}{1-y} = x + 3$ (risolvere rispetto a y)

Esercizio 1

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Per trovare tutti i valori che annullano il sistema, si inizia con qualche manipolazione algebrica:

$$\begin{cases} 3y\left(x^2 - 2x\right) = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Quale valore annulla $x^2 - 2x$? Si calcola:

$$x^2 - 2x \longrightarrow x\,(x-2)$$

Quindi le soluzioni sono 0 e 2. Per cui i valori che annullano il sistema per adesso sono:

$$y = 0 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^3 - 3x^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^2\,(x-3) = 0 \end{cases} \longrightarrow x = 0; x = 3$$

Con $x = 0$ si è già trovata una soluzione ($y = 0$), quindi si prova $x = 2$:

$$x = 2 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2^3 + 4y^3 - 3 \cdot 2^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y^3 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, quindi i possibili valori sono:

- $(x = 0, y = 0)$
- $(x = 3, y = 0)$
- $(x = 2, y = 1)$

Esercizio 2

Dato il sistema:

$$\begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{cases} x^2 - \lambda x = 0 \\ y^2 - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x\left(x - \lambda\right) = 0 \\ y\left(y - 4\lambda\right) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

I primi valori che si provano sono i soliti $x = 0$ e $y = 0$. Si inizia con $x = 0$:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ y\left(y - 4\lambda\right) = 0 \\ 0 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y\left(y - 4\lambda\right) = 0 \\ y^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y\left(y - 4\lambda\right) = 0 \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 4\lambda\right) = 0 \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{4\lambda}{\sqrt{2}} = 0 \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{4\lambda}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{8} \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Si prosegue con $y = 0$:

$$\begin{cases} x\left(x - \lambda\right) = 0 \\ 0 = 0 \\ x^2 + 0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x\left(x - \lambda\right) = 0 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 1 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Per concludere l'esercizio, si deve riscrivere il sistema utilizzando operazioni permesse dall'algebra:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} \cdot x^2 = \lambda x \cdot \dfrac{1}{x} \\ \\ \dfrac{1}{y} \cdot y^2 = 4\lambda y \cdot \dfrac{1}{y} \\ \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \left(\lambda\right)^2 + 2\left(4\lambda\right)^2 = 1 \end{cases}$$

È evidente che con questa piccola manipolazione algebrica, i calcoli risultano più semplici. Adesso si calcola il quadrato di lambda e si trovano le sue soluzioni per concludere l'esercizio:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 + 32\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ 33\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{33} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Si sostituisce λ all'interno di x e y:

$$\begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{33}} \\ y = \pm\frac{4}{\sqrt{33}} \\ \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, sono state valutate tutte le linee del sistema. Quindi, i valori possibili sono:

- $\left(x = 0, y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $\left(x = 0, y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $(x = 1, y = 0, \lambda = 1)$
- $(x = -1, y = 0, \lambda = -1)$
- $\left(x = \dfrac{1}{\sqrt{33}}, y = \dfrac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{33}}\right)$
- $\left(x = -\dfrac{1}{\sqrt{33}}, y = -\dfrac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{33}}\right)$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$\frac{y}{y+2} = mx^2$$

Si deve risolvere rispetto a y:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{y+2} &= mx^2 \\
\frac{y+2}{1} \cdot \frac{y}{y+2} &= mx^2 \cdot \frac{y+2}{1} \\
y &= mx^2 y + 2mx^2 \\
y - mx^2 y &= 2mx^2 \\
y\left(1 - mx^2\right) &= 2mx^2 \\
\frac{1}{1-mx^2} \cdot y\left(1 - mx^2\right) &= 2mx^2 \cdot \frac{1}{1-mx^2} \\
y &= \frac{2mx^2}{1-mx^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Data l'equazione:

$$\frac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1$$

Si deve risolvere rispetto a y:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y+1} &= \sqrt{x+2} - 1 \\
(y+1) \cdot \frac{1}{y+1} &= \left(\sqrt{x+2} - 1\right) \cdot (y+1) \\
1 &= y\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} - y - 1 \\
-y\sqrt{x+2} + y &= -2 + \sqrt{x+2} \\
y\left(-\sqrt{x+2} + 1\right) &= \sqrt{x+2} - 2 \\
\frac{1}{1-\sqrt{x+2}} \cdot y\left(-\sqrt{x+2} + 1\right) &= \left(\sqrt{x+2} - 2\right) \cdot \frac{1}{1-\sqrt{x+2}} \\
y &= \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1-\sqrt{x+2}}
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Data l'equazione:

$$\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$$

Si deve risolvere rispetto a y:

$$\begin{aligned}
\log \frac{2-y}{1-y} &= x+3 \\
\frac{2-y}{1-y} &= 10^{x+3} \\
(1-y) \cdot \frac{2-y}{1-y} &= 10^{x+3} \cdot (1-y) \\
2-y &= 10^{x+3} - 10^{x+3}y \\
-y &= 10^{x+3} - 10^{x+3}y - 2 \\
-y + 10^{x+3}y &= 10^{x+3} - 2 \\
y\left(-1+10^{x+3}\right) &= 10^{x+3} - 2 \\
\frac{1}{-1+10^{x+3}} \cdot y\left(-1+10^{x+3}\right) &= \left(10^{x+3}-2\right) \cdot \frac{1}{-1+10^{x+3}} \\
y &= \frac{10^{x+3}-2}{10^{x+3}-1}
\end{aligned}$$

1.3 Calcolo differenziale e integrale