Soluzioni Esami di Algebra Lineare

VR443470

giugno 2023

Indice

1 Esame del 20/06/2022

1.1 Esercizio 1

(**6 punti**) Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}$$

1.1.1 Punto a

Si calcoli, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il rango $\operatorname{rk} A$ di A.

Si applica l'eliminazione di Gauss per ottenere il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -a & 2+a & -a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,4}(-a-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -a & 2+a & -a \\ 0 & 0 & 2 & a^2-2a-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{2,3}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a^2-2a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3,4}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a-3 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è influenzato solo dall'espressione $a^2 - 2a - 3$. Quindi, nel caso di:

$$\operatorname{rk}(A) = \begin{cases} 3 & a^2 - 2a - 3 = 0 \\ 4 & a^2 - 2a - 3 \neq 0 \end{cases}$$

1.1.2 Punto b

Si calcoli il determinante $\det(A)$ ***di*** A**.**

Per velocizzare i calcoli, si utilizza il metodo di Gauss Jordan[1]. Per il calcolo del determinante, si ricordano le seguenti regole:

- Lo scambio di una riga cambia il segno del determinante (quindi lo moltiplica per -1);
- La moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo, provoca la moltiplicazione dell'inverso di esso al determinante della matrice. Quindi, data l'operazione $E_i(\alpha)$, il determinante viene moltiplicato per $\frac{1}{\alpha}$;
- La moltiplicazione di una riga per uno scalare e la successiva somma, non cambia il determinante.

Quindi, si ottiene il determinante della matrice ridotta A' moltiplicando la diagonale:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - a - 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \left(a^2 - 2a - 3\right) = -2a^2 + 4a + 6$$

E controllando le operazioni eseguite al punto precedente, è possibile notare che non è stato effettuato nessuno scambio di righe e nessuna moltplicazione + somma. Quindi il determinante è lo stesso:

$$\det(A) = \det(A') = -2a^2 + 4a + 6$$

[1]Approfondimento: YouMath

1.1.3 Punto c

Si determino i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che A possiede una inversa.

La matrice A possiede un'inversa se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Quindi, risolvendo l'equazione del determinante, si può capire per quali valori di a, la matrice A ammette inversa:

$$-2a^2 + 4a + 6 = 0 \longrightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longrightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot -2 \cdot 6}}{2 \cdot -2} = \frac{-4 \pm 8}{-4}$$

Le soluzioni che azzerano l'equazione sono:

$$a_0 = -1$$
$$a_1 = 3$$

Si conclude dicendo che:

$$\det(A) = \begin{cases} 0 & a = -1 \vee a = 3 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La matrice A possiede una inversa se e solo se il determinante è diverso da zero. Il determinante è diverso da zero se e solo se a è diverso da -1 e da 3. Quindi, A possiede una inversa per i valori $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

1.2 Esercizio 2

(**12 punti**) Si consideri la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2.1 Punto a

Si calcolino tutti gli autovalori di B su $\mathbb{R}$ e si trovino delle basi dei loro autospazi.

Si calcola il polinomio caratteristico associato alla matrice B:

$$\begin{aligned}
p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda \mathrm{Id}_4) \\
&= \det\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \det\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] \\
&= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si utilizzano gli sviluppi di Laplace per calcolare il determinante della matrice.

Si sceglie lo sviluppo per righe partendo dalla riga 4 e rimando sulla colonna 4:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
b_{4,4} = 2-\lambda \quad & \longrightarrow \quad (-1)^{4+4} \cdot (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
& \longrightarrow \quad 1 \cdot (2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \\
b_{3,4} = 0 \quad & \longrightarrow \quad (-1)^{3+4} \cdot (0) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 0 \\
b_{2,4} = 0 \quad & \longrightarrow \quad (-1)^{2+4} \cdot (0) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 0 \\
b_{1,4} = 0 \quad & \longrightarrow \quad (-1)^{1+4} \cdot (0) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Quindi, il determinante della matrice è:

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{Id}_4) = (-1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot (2-\lambda)$$

Per continuare il calcolo del polinomio caratteristico, si cercano gli zeri, ovvero tutti quei valori tale che $p_B(\lambda) = 0$. Banalmente, i valori sono:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = -1 \quad & \longrightarrow \quad (-1-(-1)) \cdot (2-(-1)) \cdot (-1-(-1)) \cdot (2-(-1)) = 0 \\
\lambda_2 = 2 \quad & \longrightarrow \quad (-1-(2)) \cdot (2-(2)) \cdot (-1-(2)) \cdot (2-(2)) = 0
\end{aligned}$$

Si conclude affermando che gli autovalori di B sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$.

Per trovare delle basi dei loro autospazi, è necessario sostituire ogni λ trovato, nella matrice calcolata precedentemente. Quindi, il primo autospazio con il primo autovalore $\lambda_1 = -1$:

$$B - \lambda_1 \mathrm{Id}_4 = B - (-1)\,\mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Si cerca la forma ridotta della matrice, eseguendo l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{4,2}]{E_{2,1}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 \\ x_4 = -\frac{5}{3}x_2 \end{cases}$$

Quindi, il sistema generale è:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_2 \\ x_4 = -\frac{5}{3}x_2 \end{cases}$$

L'autospazio generale è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ -\frac{5}{3}x_2 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

Dove il seguente insieme è una base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

Il secondo autospazio con il secondo autovalore $\lambda = 2$:

$$B - \lambda_2 \mathrm{Id}_4 = B - (2)\,\mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Si cerca la forma ridotta della matrice, eseguendo l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{4,2}\left(\frac{3}{5}\right)]{E_{2,3}(-1)} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1\left(-\frac{1}{3}\right)]{E_{4,2},\, E_2\left(\frac{1}{5}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi, il sistema generale è:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

L'autospazio generale è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dove il seguente insieme è una base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1.2.2 Punto b

Si verifichi che la matrice B è diagonalizzabile e si scrivano la matrice diagonale D e la matrice invertibile S tali che $B = SDS^{-1}$.

Una matrice B è diagonalizzabile se rispetta due condizioni:

1. La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori della matrice è uguale all'ordine della matrice;

2. La molteplicità geometrica di ciascun autovalore coincide con la relativa molteplicità algebrica.

Gli autovalori di B sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Ma dato che le soluzioni derivano da:

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{Id}_4) = (-1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot (2-\lambda)$$

È immediato vedere come ogni soluzione trovata annulli due volte il polinomio caratteristico. Quindi le molteplicità algebriche sono:

$$m_1 = 2$$
$$m_2 = 2$$

La prima condizione è soddisfatta. La seconda è la verifica della molteplicità geometrica. Quest'ultima è possibile verificarla con la seguente formula:

$$m_g(\lambda) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$$

Dunque, si calcola il rango di tutte le matrici trovate sostituendo gli autovalori ottenuti:

$$\begin{array}{rcl} m_1(-1) & = & 4 - \mathrm{rk}(A - (-1)\mathrm{Id}_4) = 4 - 2 = 2 \\ m_2(2) & = & 4 - \mathrm{rk}(A - 2\mathrm{Id}_4) = 4 - 2 = 2 \end{array}$$

Ciascuna molteplicità geometrica corrisponde con la relativa molteplicità algebrica. Questo conferma che la matrice B è diagonalizzabile.

La matrice diagonale D ha gli autovalori di B nella diagonale principale:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice S invece è composta dalle basi trovate, ovvero:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice inversa si trova affiancando a destra la matrice identità ed eseguendo EG:

$$(S \mid \mathrm{Id}_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{2,3}(-1)]{E_{3,2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{2,4}\left(\frac{5}{3}\right)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifica la correttezza:

$$\begin{aligned} B = SDS^{-1} \quad &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2.3 Punto c

Utilizzando la diagonalizzazione, si calcoli il prodotto B^5.

Si calcola:

$$B^5 = \left(SDS^{-1}\right)^5 = SD^5S^{-1}$$

Quindi, le matrici mutano in:

$$\begin{aligned}
B = \left(SDS^{-1}\right)^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{160}{3} & 32 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -33 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 32 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.3 Esercizio 3

(**8 punti**) Si consideri la seguente matrice:

$$M = \begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix}$$

1.3.1 Punto a

Si calcoli la H-trasposta M^H di M.

La matrice H-trasposta di M, si ottiene invertendo le righe con le colonne ed eseguendo l'operazione di coniugazione (cambiare di segno), la quale influisce solo sui numeri immaginari:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix} \\ M^T &= \begin{pmatrix} i & -1 & -i \\ 2i+1 & 2 & 2i \end{pmatrix} \\ M^H &= \begin{pmatrix} -i & -1 & i \\ -2i+1 & 2 & -2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3.2 Punto b

Si determinino una base di $C(M)$ e una base di $N\left(M^H\right)$ su $\mathbb{C}$.

Si applica l'eliminazione di Gauss per ottenere una forma ridotta:

$$M' = \begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{1,2}\left(\frac{1}{i}\right)]{E_{1,3}(1)} \begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ 0 & 4+\frac{1}{i} \\ 0 & 4i+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2,3}(-i)} \begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ 0 & 4+\frac{1}{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il numero di *pivot*, in questo caso 2, rappresenta il rango della matrice ($\mathrm{rk}\,(M) = 2$), ovvero il numero di vettori colonna linearmente indipendenti. In altre parole, rappresenta la dimensione dello spazio generato dai vettori considerati inizialmente.

Quindi, è possibile affermare che i vettori colonna della matrice non ridotta M, i quali corrispondono ai vettori colonna della matrice ridotta M' (soprastante) che contengono i pivot, costituiscono una base dello spazio generato del sistema di generatori. Per cui, una base di $C(M)$:

$$\dim(M) = \mathrm{rk}\,(M) \longrightarrow 2 = 2 \Longrightarrow C(M) = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i+1 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$$

Si prosegue l'esercizio calcolando una base della nullità di M^H. Quindi, si esegue l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & i \\ -2i+1 & 2 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(-2-i)} \begin{pmatrix} -i & -1 & i \\ 0 & 4+i & 1-4i \end{pmatrix}$$

Si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -ix - y + iz = 0 \\ (4+i)\,y + (1-4i)\,z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -ix - y + iz = 0 \\ \\ y = -\dfrac{(1-4i)}{(4+i)}z \end{cases}$$

$$\frac{(1-4i)}{(4+i)} = \frac{(1-4i)\,(4-i)}{(4+i)\,(4-i)} = \frac{4 - i - 16i + 4i^2}{16 - 4i + 4i - i^2} = \frac{-17i}{17} = -i$$

$$\begin{cases} -ix - y + iz = 0 \\ y = -(-i)\,z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -ix - iz + iz = 0 \\ y = iz \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = iz \end{cases}$$

Dopo alcune semplificazioni, il risultato generale è:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = iz \\ z = z \end{cases}$$

Dunque $N\left(M^H\right)$ è:

$$N\left(M^H\right) = \left\{ z \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \right\}$$

Per cui, si ha una base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1.3.3 Punto c

Si scriva una base di $\mathbb{C}^3$ che contiene le colonne di M.

Dato che per definizione:

$$\mathbb{C}^3 = C\,(M) + N\left(M^H\right)$$

Allora una base di $\mathbb{C}^3$ è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i+1 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1.4 Esercizio 4

(**4 punti**) Vero o falso? Si motivi la risposta!

1.4.1 Punto a

Il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette soltanto la soluzione banale $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Il sistema omogeneo $Ax = 0$ non ammette soltanto la soluzione banale. Per dimostrare ciò, si utilizza il teorema di Rouché-Capelli. Quindi, si calcola il rango delle matrici ridotte e aumentate:

$$\begin{aligned} A \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad &\longrightarrow \quad \operatorname{rk}(A) = 2 \\ (A \mid \mathbf{0}) \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad &\longrightarrow \quad \operatorname{rk}(A \mid \mathbf{0}) = 2 \end{aligned}$$

Il rango di entrambe le matrici è uguale a due, quindi, secondo il teorema, esistono una o infinite soluzioni. Precisamente:

$$\operatorname{rk}(A) = (\mathrm{A} \mid \mathbf{0}) < n$$

Dove n indica il numero di incognite, in questo caso 3 (x, y, z). Andando a sostituire i valori:

$$2 = 2 < 3$$

La condizione è rispettata, quindi secondo il teorema di Rouché-Capelli, il sistema $Ax = 0$ ammette infinite soluzioni, precisamente $\infty^{n-\operatorname{rk}(A)} \to \infty^{3-2} = \infty$.
In generale, la forma generale della soluzione deve essere:

$$Ax = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

1.4.2 Punto b

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ***è linearmente dipendente.***

Per verificarlo, si prendono tre generici scalari $a, b, c \in \mathbb{R}$ e si moltiplicano per i vettori:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \mathbf{0}$$

Sostituendo i valori:

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eseguendo i calcoli:

$$\begin{pmatrix} -a + 2b + c \\ b + 2c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -a + 2\left(-2c\right) + c = 0 \\ b = -2c \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c = -\frac{a}{3} \\ b = -2c \end{cases}$$

È evidente che i tre vettori sono linearmente dipendenti. b dipende da c e c dipende da a.

1.5 Esercizio 5

(**1 punto**) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si dimostri la seguente affermazione: se almeno uno dei vettori $v_1, \cdots, v_2$ è combinazione lineare dei rimanenti, allora $\{v_1, \cdots, v_2\}$ non è linearmente indipendente.

Dimostrazione lasciata al lettore.

2 Esame del 15/07/2022

2.1 Esercizio 1

(**6 punti**) Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{pmatrix}$$

2.1.1 Parte a

Si studi $\det(A)$ ***al variare di*** k**.**

Si procede con l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-k & -k \\ 1 & 1 & k & k \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & k & k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{4,3}(-1)]{E_{4,2}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-k & -k \\ 0 & -k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & -k \\ 1 & k-1 & k & k \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{4,3}(-1)]{E_{4,1}} \begin{pmatrix} 1 & k-1 & k & k \\ 0 & -k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & -k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{3,4}(-k)]{E_{3,4}(1)} \begin{pmatrix} 1 & k-1 & k & k \\ 0 & -k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & k-1 & k & k \\ 0 & -k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice ridotta è:

$$\det(A) = 1 \cdot (-k+2) \cdot 1 \cdot (-k) = k^2 - 2k = k(k-2)$$

2.1.2 Parte b

Si studi $\operatorname{rk}(A)$ ***al variare di*** k**.**

Il rango corrisponde al numero di *pivot* della matrice ridotta, in questo caso, dipende da k, ovvero:

$$\operatorname{rk}(A) = \begin{cases} 3 & k = 0 \vee k = 2 \\ 4 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2.1.3 Parte c

Si determini se A è invertibile. Se sì, per quali valori di k?

La matrice A è invertibile se e solo se il determinante è diverso da zero. Dato che il determinante è $\det(A) = k(k-2)$, la matrice A possiede inversa se e solo se $k \neq 0 \wedge k \neq 2$. In questo modo, il determinante non sarà mai nullo.

2.2 Esercizio 2

Si consideri la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.2.1 Parte a

Si calcolino tutti gli autovalori di B su $\mathbb{R}$ e si trovino delle basi dei loro autospazi.

Si calcola il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda \mathrm{Id}_2) \\ &= \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\left[\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 4 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

Si esegue l'eliminazione di Gauss per calcolare il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 4 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}\left(-\frac{4}{1-\lambda}\right)} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix}$$

Il determinante dunque è:

$$\det(B - \lambda \mathrm{Id}_2) = (1-\lambda) \cdot \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)$$

Adesso si cercano gli zeri, ovvero quei valori per cui il polinomio caratteristico è uguale a zero:

$$\lambda_1 = 1 \quad \longrightarrow \quad (1-1) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Adesso che sono stati trovati gli autovalori, si trovano le basi degli autospazi.

Sostituzione del valore $\lambda_1 = 1$:

$$p_B\left(1\right) = \det\left(B - 1\mathrm{Id}_2\right) = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'eliminazione di Gauss non è necessaria, al massimo uno scambio di righe:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{8}x_2 \end{cases}$$

Quindi, il sistema generale:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{8}x_2 \\ \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

L'autospazio generale è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{8}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una base dell'autospazio dell'autovalore $\lambda = 1$ è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sostituzione del valore $\lambda = \dfrac{1}{2}$:

$$p_B\left(\frac{1}{2}\right) = \det\left(B - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_2\right) = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

L'eliminazione di Gauss è inutile, infatti, il sistema lineare equivalente è:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = 0 4x_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 x_1 = 0 \end{cases}$$

Per cui, il sistema generale:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

Quindi, l'autospazio generale:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una base dell'autospazio dell'autovalore $\lambda = \frac{1}{2}$ è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2.2.2 Parte b

Si verifichi che la matrice B è diagonalizzabile e si trovino la matrice diagonale D e le matrici S, S^{-1} tali che $B = SDS^{-1}$.

Si verifica che la matrice B è diagonalizzabile guardando le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori:

$$\text{Molteplicità algebrica} \quad \longrightarrow \quad m_1(1) = 1, m_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\text{Molteplicità geometrica} \quad \longrightarrow \quad m_1(1) = 2 - \mathrm{rk}\left(B - 1\mathrm{Id}_2\right) = 2 - 1 = 1$$

$$m_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 1 = 1$$

La matrice è diagonalizzabile perché ogni molteplicità geometrica corrisponde alla rispettiva molteplicità algebrica.

La matrice diagonale D si trova inserendo nella diagonale principale gli autovalori:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice S è composta dalle basi trovate:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inversa di S, cioè S^{-1}, si ottiene affiancando la matrice identità a destra e ottenendo una forma ridotta a sinistra:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{8} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[sub]{E_{1,2}(-8)} \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{8} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi la matrice S^{-1} è composta nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Esercizio 3

Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ***l'applicazione lineare tale che*** $f(v)=\begin{pmatrix}x+2y-z\\2x+4y-2z\\-3x-6y+3z\end{pmatrix}$ ***per ogni*** $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$***.***

2.3.1 Parte a

Si calcoli la matrice M ***associata a*** f ***rispetto alla base canonica.***

La base canonica:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}^3}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Si calcola la rispettiva matrice associata:

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1+2\cdot 0-0\\2\cdot 1+4\cdot 0-2\cdot 0\\-3\cdot 1-6\cdot 0+3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0+2\cdot 1-0\\2\cdot 0+4\cdot 1-2\cdot 0\\-3\cdot 0-6\cdot 1+3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0+2\cdot 0-1\\2\cdot 0+4\cdot 0-2\cdot 1\\-3\cdot 0-6\cdot 0+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}\\
M &= \begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-3&-6&3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.3.2 Parte b

Si determinino la dimensione e una base dell'immagine $Im(f) = C(M)$ di f e dello spazio nullo $N(f) = N(M)$ di f.

Si utilizza l'eliminazione di Gauss per ottenere una forma ridotta, così da trovare una base e la dimensione di $C(M)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{1,3}(3)]{E_{1,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice risulta essere $\text{rk}(M) = 1$. Esso corrisponde alla dimensione dello spazio generato dai vettori considerati inizialmente, ovvero:

$$\dim(M) = \text{rk}(M) \longrightarrow 1 = 1$$

Quindi, una base di $C(M)$ è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Per trovare la dimensione della nullità di f, è necessario calcolare la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare:

$$Mv = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si cerca la forma ridotta della matrice aumentata:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{1,3}(3)]{E_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Anche in questo caso il rango è pari ad 1. Quindi, grazie al teorema di Rouché Capelli, la dimensione del nucleo di f, ovvero della nullità di f è:

$$\dim(\ker(f)) = \dim(N(M)) = n - \text{rk}(M) = 3 - 1 = 2$$

La dimensione è corretta, confermato dal teorema della somma delle dimensioni dell'applicazioni lineari f:

$$\dim(f) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

Una base dipende dal sistema lineare equivalente:

$$\left\{ x + 2y - z = 0 \right. \longrightarrow \left\{ x = -2y + z \right.$$

In generale:

$$\begin{cases} x = -2y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Quindi, le basi sono:

$$N(M) = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2.3.3 Parte c

Si dica se l'applicazione lineare f è un isomorfismo.

Per verificare l'isomorfismo, è necessario controllare che l'applicazione lineare sia invertibile. La matrice M associata ad f, è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero e di rango massimo.

Purtroppo, in questo caso, il determinante è uguale a 0 e dunque l'applicazione lineare f non è isomorfa.

2.3.4 Parte d

Si calcoli la matrice N associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel dominio e rispetto alla base canonica nel codominio.

La matrice N associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$
\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 0 - 0 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \\ -3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 1 - 0 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \\ -3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \\
f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 1 - 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ -3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \\
N &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -9 & -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2.4 Esercizio 4

(**4 punti**) Vero o falso? Si motivi la risposta!

2.4.1 Parte a

Il numero complesso $\frac{-3+6i}{2+i}$ ***in forma algebrica è*** $3i$.

Dato il rapporto tra i numeri complessi, si moltiplica la frazione per il complesso coniugato al denominatore:

$$\frac{-3+6i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{-6+12i+3i-6i^2}{4-2i+2i-i^2} = \frac{15i}{5} = 3i$$

Quindi la forma algebrica è $3i$ e la risposta all'esercizio è: vero!

2.4.2 Parte b

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ***è una base ortonormale di*** $\mathbb{C}^2$.

Per verificare che sia una base ortonormale, i vettori devono essere linearmente indipendenti. Quindi, la moltiplicazione dei due vettori, dovrebbe avere come risultato zero. Si verifica:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^H \times \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot i + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 \neq 0$$

È stata effettuata una H-trasposta per consentire la moltiplicazione. La risposta all'esercizio è: falso! L'insieme non è una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$.

2.5 Esercizio 5

(**1 punto**) Sia $M \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matrice. Si dimostri la seguente affermazione: se M ammette un'inversa destra $R \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, allora il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione per qualsiasi $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$.

Dimostrazione lasciata al lettore.

3 Esame del 02/09/2022

3.1 Esercizio 1

(**8 punti**)

3.1.1 Punto a

Calcolare z^4 ***dove*** $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$**.**

Per calcolare l'elevazione a potenza, si scrive la radice quadrata:

$$z = \sqrt[4]{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

E si calcolata la n-esima radice quadrata di un numero complesso con $k = 0, ...n-1$ e la seguente formula:

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)\\
&\downarrow \quad \text{sostituzione}\\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\right)\\
&\downarrow \quad \text{sostituzione dei valori } k\\
z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)\\
z_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right)\\
z_3 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{16}\right)\right)\\
z_4 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{25\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{25\pi}{16}\right)\right)
\end{aligned}$$

3.1.2 Parte b

Considerare la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8k & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare il rango $\operatorname{rk}(A)$ ***di*** A ***e il determinante*** $\det(A)$ ***di*** A ***al variare di*** $k \in \mathbb{R}$***. Determinare per quali*** $k \in \mathbb{R}$ ***la matrice*** A ***è invertibile.***

Si esegue l'eliminazione di Gauss per calcolare il rango e il determinante:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8k & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,3}\left(-\frac{16k}{8+8k}\right)]{E_{1,2}(-3k)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 0 & \frac{-2k^2+2k}{1+k} \end{pmatrix}$$

Il rango dipende dal valore di k, quindi:

$$\operatorname{rk}(A) = \begin{cases} 2 & k=-1 \vee k=0 \vee k=1 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Invece, il determinante corrisponde a:

$$\det(A) = 1 \cdot (8+8k) \cdot \left(\frac{-2k^2+2k}{1+k}\right) = 8(1+k) \cdot \left(\frac{-2k^2+2k}{1+k}\right) = -16k^2 + 16k$$

La matrice A è invertibile se e solo se il determinante è diverso da zero e ha rango massimo, quindi essa è invertibile se e solo se $k \neq -1 \wedge k \neq 0 \wedge k \neq 1$.

3.2 Esercizio 2

(**8 punti**) Considerare la seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

3.2.1 Punto a

Trovare una forma ridotta e una decomposizione LU di B.

Una forma ridotta si può trovare eseguendo l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,3}(2)]{E_{1,3}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La forma ridotta corrisponde alla matrice U, questo è possibile affermarlo poiché non sono stati effettuati scambi di righe. Quindi, si compone anche la matrice L inserendo gli scalari invertiti di segno:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Riscrivendo il risultato:

$$B = LU \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2.2 Punto b

Determinare se B è invertibile e motivare la risposta. Se sì, calcolare l'inversa di B.

Per determinare se B è invertibile, è necessario verificare che il determinante sia diverso da zero e che il rango sia massimo. Data la forma ridotta della matrice, ovvero U, il determinante della matrice B e il rango sono:

$$\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$
$$\operatorname{rk}(B) = 3$$

Quindi, la matrice B è invertibile. Si procede con il calcolo di un'inversa. Si affianca la matrice identità a destra, si esegue l'eliminazione di Gauss e si ottiene una inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{2,3}(2)]{E_{1,3}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{3,2}(3)]{E_3\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

L'inversa di B corrisponde a:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 4 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3.3 Esercizio 3

(**8 punti**) Considerare la seguente matrice:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.1 Punto a

Trovare una base del sottospazio $C(D)$ di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di D e una base dello spazio nullo $N\left(D^T\right)$ della trasposta D^T di D.

Una base del sottospazio $C(D)$ è possibile trovarla applicando l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,3}(-1)]{E_{1,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice, ovvero la dimensione del sottospazio $C(D)$ è pari a 2, quindi una base è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per calcolare la base di uno spazio nullo, è necessario eseguire la trasposizione della matrice D:

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D^T &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per trovare una base dello spazio nullo, è necessario trovare una forma ridotta della matrice aumentata:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

In questo caso, la matrice aumentata è già nella sua forma ridotta, per cui, si procede a scrivere il sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - (-z) = 0 \\ y = -z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

La dimensione è dello spazio nullo corrisponde a:

$$\dim\left(N\left(D^T\right)\right) = n - \operatorname{rk}\left\{D^T\right\} = 3 - 2 = 1$$

Quindi, in generale:

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Quindi, una base è:

$$N\left(D^T\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

3.3.2 Punto b

Mostrare che l'insieme $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ***è una base di*** $\mathbb{R}^3$***.***

Si costruisce la matrice associata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcola il rango della matrice usando l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,3}(-1)]{E_{1,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è 3, quindi la dimensione della base è corretta. Inoltre, i *pivot* nelle colonne dominanti corrispondono ai rispettivi vettori nella base. Quindi, si conclude che $\mathcal{C}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

3.3.3 Punto c

Considerare la seguente base di $\mathbb{R}^3 : \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$***. Calcolare la matrice*** $N = A_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}}$***, cioè l'unica matrice*** N ***tale che*** $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(v) = N c_{\mathcal{C}}(v)$ ***per ogni*** $v \in \mathbb{R}^3$***.***

Per trovare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$, è necessario esprimere i vettori di $\mathcal{C}$ come combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{B}$:

- La prima combinazione lineare:

$$\mathcal{C}_1 = a_1\mathcal{B}_1 + b_1\mathcal{B}_2 + c_1\mathcal{B}_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Il relativo sistema:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 + c_1 = -1 \\ c_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = -1 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

  La soluzione dunque:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- La seconda combinazione lineare:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2 &= a_2\mathcal{B}_1 + b_2\mathcal{B}_2 + c_2\mathcal{B}_3 \\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} &= a_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Il relativo sistema:

$$\begin{cases}a_2 = 0\\ b_2 + c_1 = 1\\ c_2 = 1\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}a_2 = 0\\ b_2 = 0\\ c_2 = 1\end{cases}$$

  La soluzione dunque:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

- La terza combinazione lineare:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_3 &= a_3\mathcal{B}_1 + b_3\mathcal{B}_2 + c_3\mathcal{B}_3 \\ \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} &= a_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Il relativo sistema:

$$\begin{cases}a_3 = -1\\ b_3 + c_1 = -1\\ c_3 = 1\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}a_3 = -1\\ b_3 = -2\\ c_3 = 1\end{cases}$$

  La soluzione dunque:

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + -2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

La matrice del cambiamento di base $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ è:

$$N_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

3.4 Esercizio 4

QUA.

4 Esame del 20/02/2023