

# Guida agli Esami di Analisi II

VR443470

luglio 2023

## Indice

<b>1</b>	<b>Esercizio 1 - Problema di Cauchy</b>	<b>4</b>
1.1	Problema di Cauchy - Soluzione . . . . .	4
1.2	Alcuni esercizi d'esame svolti . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Esercizio 2 - Problema di Cauchy con variabile <math>t</math> e <math>y''</math></b>	<b>7</b>
2.1	Risoluzione del problema di cauchy con $y''$ . . . . .	7
2.2	Alcuni esercizi d'esame svolti . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Esercizio 3 - Studio di funzione</b>	<b>11</b>
3.1	Tipologie di esercizio . . . . .	11
3.1.1	Rappresentare la funzione nel piano cartesiano . . . . .	11
3.1.2	Dimostrazione che un punto sia interno al dominio . . . . .	15
3.1.3	Direzione della funzione affinché essa sia di massima crescita	16
3.1.4	Specificare se un dominio è aperto/chiuso, limitato/illimitato, connesso/sconnesso, compatto . . . . .	19
3.1.5	Trovare l'equazione al piano tangente . . . . .	21
3.1.6	Calcolare il gradiente della funzione ( $\nabla f$ ) . . . . .	24
3.1.7	Calcolare la derivata direzionale . . . . .	26
3.2	Alcuni esercizi d'esame svolti . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Esercizio 4 - Stabilire se una funzione è continua e parametriz- zazioni</b>	<b>29</b>
4.1	Tipologie di esercizio 1 . . . . .	29
4.1.1	Stabilire se una funzione è continua . . . . .	29
4.1.2	Variante (rara) - Stabilire se una funzione è continua . . . . .	31
4.1.3	Dimostrazione di una disuguaglianza e di un limite (Teo- rema del confronto) . . . . .	32
4.1.4	Verificare l'esistenza di un limite in un punto . . . . .	34
4.2	Tipologie di esercizio 2 . . . . .	36
4.2.1	Parametrizzazione retta tangente in un punto all'arco di ellisse . . . . .	36
4.2.2	Trovare l'equazione al piano tangente . . . . .	39
4.2.3	Determinare le equazioni parametriche della retta tangen- te all'arco di curva nel punto $P$ . . . . .	40
4.2.4	Calcolare la pendenza della retta tangente (teorema di Dini)	44
4.3	Alcuni esercizi d'esame svolti . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Esercizio 5 - Studio dei massimi, minimi, punti critici e di sella di una funzione</b>	<b>46</b>
5.1	Tipologie di esercizio . . . . .	46
5.1.1	Verificare infinità dei punti stazionari di una funzione e trovare il punto di sella . . . . .	46
5.1.2	Determinare valore di un parametro così da trovare un punto critico . . . . .	47
5.1.3	Determinare <u>tutti</u> i punti critici di una funzione (con ana- lisi della loro natura) . . . . .	49
5.1.4	Trovare il massimo/minimo assoluto della funzione nel caso sia soggetta ad un vincolo . . . . .	51

5.1.5	Trovare massimo/minimo assoluto di una funzione definita su insieme $E$ . . . . .	52
-------	---	----

# 1 Esercizio 1 - Problema di Cauchy

## 1.1 Problema di Cauchy - Soluzione

Il primo esercizio è sempre uguale e riguarda il problema di Cauchy. Un esempio di testo tratto dal tema d'esame del 25/06/2021: *Si trovi una soluzione locale del seguente problema di Cauchy e si determini l'intervallo massimale in cui tale soluzione è definita.*

$$\begin{cases} y' + \frac{y^3}{x^2 + 1} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il **primo passo** è esplicitare la derivata, per cui:

$$\begin{cases} y' + \frac{y^3}{x^2 + 1} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y' = -\frac{y^3}{x^2 + 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il **secondo passo** è risolvere l'integrale per ciascuna parte:

$$\rightarrow \int -\frac{y^3}{x^2 + 1} dx$$

↓  $y^3$  è costante, quindi si porta fuori dall'integrale

$$\rightarrow -y^3 \cdot \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

↓ l'integrale corrisponde all'arcotangente:  $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

$$-\int \frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{1} \cdot \arctan\left(\frac{x}{1}\right)$$

↓ risoluzione dell'integrale a sinistra

$$\frac{1}{2y^2} = \arctan(x)$$

↓ si somma la costante  $c$

$$\frac{1}{2y^2} = \arctan(x) + c$$

Il risultato rappresenta la famiglia delle soluzioni delle funzioni  $y$ , chiamata anche *soluzione generale*.

Il **terzo passo** è sostituire la condizione iniziale all'interno della soluzione e calcolare il valore della costante  $c$ :

$$\text{Condizione iniziale} \longrightarrow y(0) = 1$$

$$\text{Sostituzione nella soluzione generale} \longrightarrow \frac{1}{2 \cdot 1^2} = \arctan(0) + c$$

Quindi il valore di  $c = \frac{1}{2}$ .

Il **quarto e ultimo passo** riguarda l'intervallo massimale. Per trovarlo, è necessario prendere in considerazione la soluzione generale trovata al punto 2:

$$\frac{1}{2y^2} = \arctan(x) + c$$

Sostituire il valore  $c$  con la soluzione trovata, nel nostro caso  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2y^2} = \arctan(x) + \frac{1}{2}$$

Esplicitando la  $y$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2} &= 2 \cdot \arctan(x) + 1 \\ y^{-2} &= \frac{1}{2 \arctan(x) + 1} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2 \arctan(x) + 1}} \end{aligned}$$

A questo punto, si afferma che il problema ha soluzione solo se:

$$\arctan(x) + \frac{1}{2} > 0$$

Si esplicita la  $x$  ricordando che  $\tan^{-1}(x) = y$  è l'inversa di  $x = \tan(y)$ :

$$\begin{aligned} \arctan(x) + \frac{1}{2} &> 0 \\ \arctan(x) &> -\frac{1}{2} \\ x &> \tan\left(-\frac{1}{2}\right) \\ x &> -\tan\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

## 1.2 Alcuni esercizi d'esame svolti

## 2 Esercizio 2 - Problema di Cauchy con variabile $t$ e $y''$

### 2.1 Risoluzione del problema di cauchy con $y''$

Il secondo esercizio è un problema di Cauchy un po' più complesso poiché utilizza il metodo di somiglianza<sup>1</sup>. Un esempio di testo estratto dal tema d'esame del 25/06/2021: *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{cases} y'' - y' = 1 - 2t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Il **primo passo** è scrivere l'equazione caratteristica che corrisponde sempre alla prima equazione:

$$y'' - y' = 1 - 2t \longrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$$

L'equazione caratteristica deve essere posta uguale a zero.

Il **secondo passo** è risolvere l'equazione caratteristica così da avere le soluzioni reali distinte:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

Il **terzo passo** è scrivere l'integrale generale  $y(t)$  indicando con  $y_P(t)$  una soluzione particolare dell'equazione completa:

$$y(t) = y_P(t) + c_1 e^{0t} + c_2 e^{1t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Escludendo questo esercizio, in generale l'integrale generale è sempre così. Gli unici termini che cambiano sono le  $e$  che hanno come esponente la soluzione dell'equazione moltiplicata per  $t$ .

Dato che una soluzione dell'equazione caratteristica è 0 e  $1 - 2t$  è un polinomio di primo grado,  $y_P(t)$  sarà:

$$y_P(t) = (at + b)t^1 = at^2 + bt$$

Dove l'esponente 1 indica quante volte si ripete il valore zero.

**N.B.** Esistono diverse casistiche e ciascuno cambia l'equazione della soluzione particolare:

- **Polinomio di secondo grado.** In questo caso si scrive un'equazione di secondo grado generale

$$\text{Esercizio di esempio:} \longrightarrow y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 1$$

$$\text{Soluzione particolare:} \longrightarrow y_P(x) = ax^2 + bx + c$$

---

<sup>1</sup>[Link utile](#)

- **Polinomio con un esponenziale.** In questo caso si scrive un'equazione contenente l'esponenziale per un valore generico:

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + y' - 2y = 3e^{-x}$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = ae^{-x}$$

- **Polinomio di primo grado.** In questo caso si scrive un'equazione di primo grado generale:

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + y' - 2y = x + 2$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = ax + b$$

- **Soluzione dell'equazione caratteristica che compare nel polinomio.** In questo caso, è necessario aggiungere la  $x$  elevandola al numero di ripetizioni nel polinomio:

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + 3y' + 2y = 3e^x$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = a \cdot x^1 \cdot e^x$$

- **Soluzione dell'equazione caratteristica uguale a zero ( $\lambda = 0$ ).** In questo caso, è necessario aggiungere una  $x$  elevandola al numero di volte in cui  $\lambda = 0$  annulla l'equazione (molteplicità algebrica):

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + y' = x + 2$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = (ax + b)x^1$$

- **Coseno o seno.** In questo caso, è necessario scrivere entrambe le funzioni trigonometriche:

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + y' = \cos(2x)$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$$

Il **quarto passo** è eseguire la derivata prima e seconda della soluzione particolare:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= at^2 + bt \\ y'_P(t) &= 2at + b \\ y''_P(t) &= 2a \end{aligned}$$



Il **quinto passo** è sostituire le derivate trovate nel problema iniziale, ovvero in  $y'' - y'$ , e risolvere il sistema equivalente:

$$\begin{aligned} y'' - y' &= 1 - 2t \\ (2a) - (2at + b) &= 1 - 2t \\ 2a - 2at - b &= 1 - 2t \\ (-2a)t + (2a - b) &= (-2)t + (1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Il **sesto passo** è sostituire i valori trovati nella soluzione particolare:

$$y_P(t) = at^2 + bt \rightarrow y_P(t) = 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t = t^2 + t$$

Il **settimo passo** è riscrivere l'integrale generale  $y(t)$  con la soluzione particolare:

$$y(t) = t^2 + t + c_1 + c_2 e^{1t}$$

Ed eseguire la derivata prima di tale equazione:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt} t^2 + t + c_1 + c_2 e^t \\ y'(t) &= 2t + 1 + c_2 e^t \end{aligned}$$

L'**ottavo passo** conclude l'esercizio. Si esegue una sostituzione delle condizioni del problema nell'integrale generale e nella sua derivata così da trovare le costanti  $c_1$  e  $c_2$ :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0^2 + 0 + c_1 + c_2 e^0 = 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 + c_2 e^0 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Infine, si scrive la soluzione del problema di Cauchy sostituendo le costanti nell'integrale generale:

$$y(t) = t^2 + t - 1 + e^t$$

## 2.2 Alcuni esercizi d'esame svolti

### 3 Esercizio 3 - Studio di funzione

#### 3.1 Tipologie di esercizio

##### 3.1.1 Rappresentare la funzione nel piano cartesiano

Un esercizio semplice che ad oggi viene fuso con altri esercizi, è quello della rappresentazione della funzione nel piano cartesiano. Si prenda in considerazione l'esame del 25/06/2021: *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  il dominio naturale della funzione:*

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

*Si rappresenti  $D$  nel piano cartesiano.*

Il **primo passo** è rappresentare il dominio della funzione. In questo caso, è necessario affermare che l'espressione sotto radice sia maggiore/uguale di zero (per rimanere nei reali) e l'espressione del logaritmo sia strettamente maggiore di zero (con zero il logaritmo non ha soluzione):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - x^2 \geq 0) \wedge (4x - x^2 - 4y^2 > 0)\}$$

**N.B.** Esistono diverse casistiche:

- **Frazione:**

$$f(x, y) = \frac{\log(x + 1)}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}}$$

Nonostante ci sia una radice quadrata, al denominatore non può esserci uno zero! Per cui, il dominio deve essere:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1 > 0) \wedge (x^2 + 4y^2 - 1 > 0)\}$$

- **Radice quadrata e logaritmo annidato:**

$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x)$$

In cui il suo dominio è:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y > x^2) \wedge (y < x^2)\}$$

Il **secondo passo** è calcolare i punti appartenenti al dominio, così da poter rappresentare il grafico sul piano cartesiano. Per farlo, si prende ogni condizione presente nel dominio e si calcolano un po' di punti:

$x$	$y$
0	0
$\pm 1$	1
$\pm 2$	4

Punti di  $y - x^2$

$x$	$y$
0	0
1	$\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$
2	$\pm 1$

Punti di  $4x - x^2 - 4y^2$

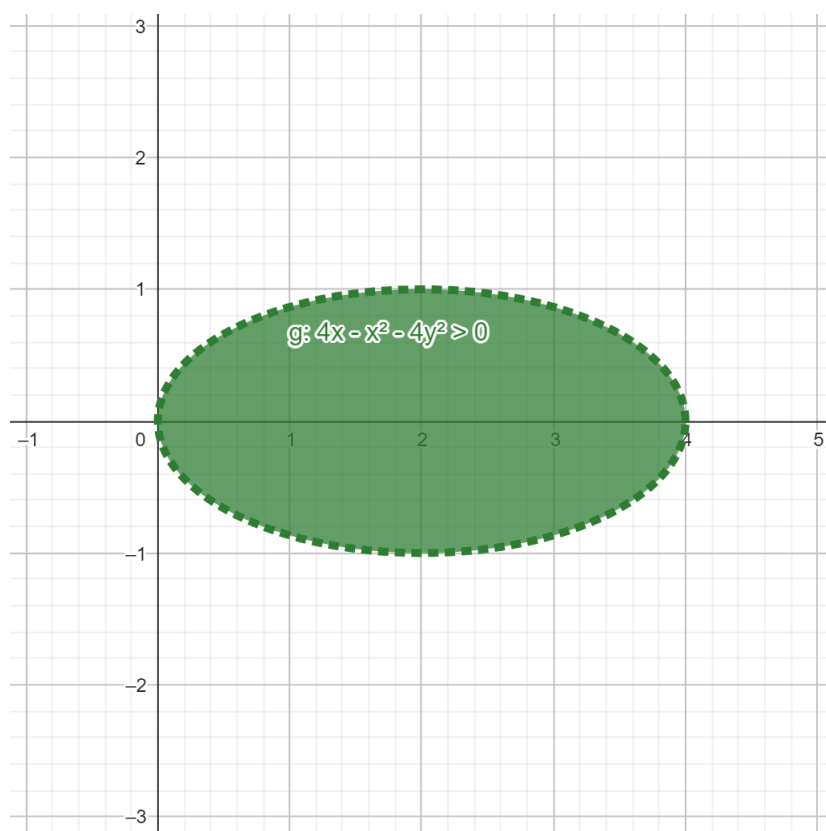


Grafico  $4x - x^2 - 4y^2 > 0$ .

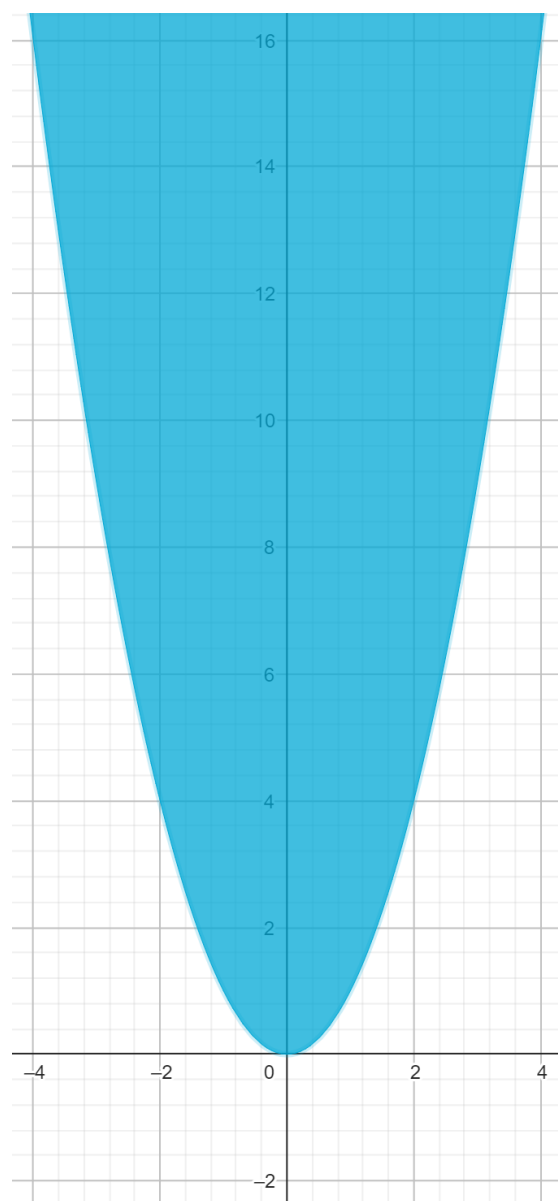


Grafico  $y - x^2 \geq 0$ .

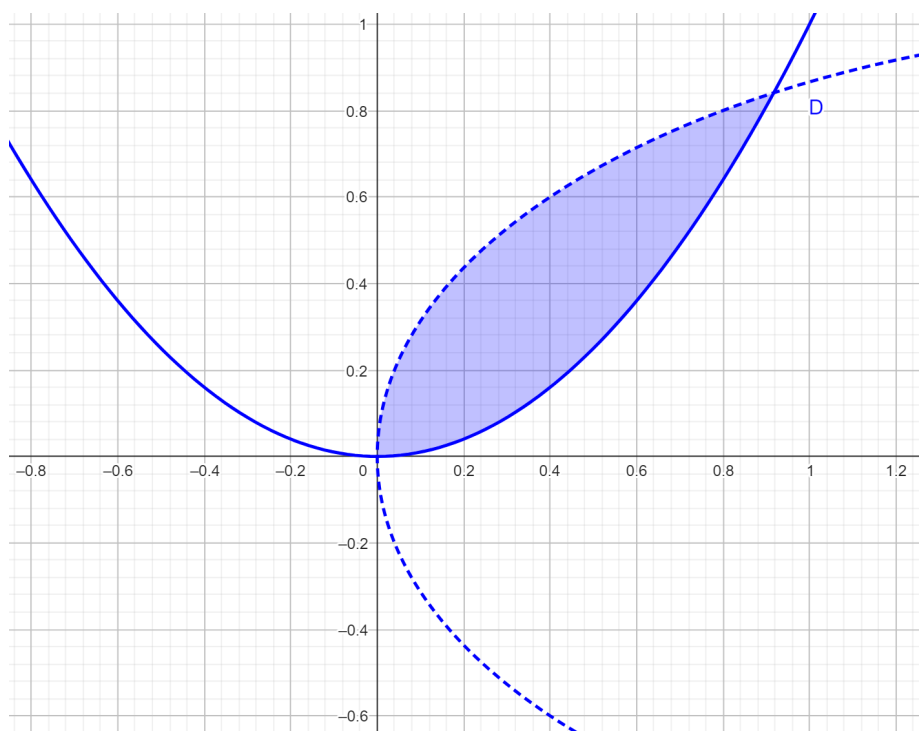


Grafico del dominio completo.

### 3.1.2 Dimostrazione che un punto sia interno al dominio

Una richiesta banale ma che potrebbe capitare, nonostante sia molto raro, è la seguente (estratta dall'esame del 25/06/2021): *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  il dominio naturale della funzione:*

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

*Si dimostri che il punto  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  è interno all'insieme  $D$ .*

Il **primo passo** è prendere le disuguaglianze del dominio e considerarle in modo stretto, ovvero:

$$\begin{array}{ll} y - x^2 \geq 0 & \longrightarrow y - x^2 > 0 \\ 4x - x^2 - 4y^2 > 0 & \longrightarrow 4x - x^2 - 4y^2 > 0 \end{array}$$

Il **secondo passo** è sostituire i valori del punto dato dall'esercizio e verificare la veridicità delle disuguaglianze. In questo caso, si sostituisce il punto  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  all'interno delle due disuguaglianze:

$$\begin{array}{ll} y - x^2 > 0 & \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} > 0 \implies \frac{1}{4} > 0 \quad \checkmark \\ 4x - x^2 - 4y^2 > 0 & \longrightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} - 4 \cdot \frac{1^2}{2^2} > 0 \implies \frac{3}{4} > 0 \quad \checkmark \end{array}$$

Il punto  $P$  rispetta entrambe le disuguaglianze, quindi è un punto interno al dominio.

### 3.1.3 Direzione della funzione affinché essa sia di massima crescita

Una richiesta che si può trovare negli esami ma non è tra le più richieste, è la seguente: *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  il dominio naturale della funzione:*

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

*In quale direzione ci si deve muovere da  $P$  per garantire a  $f$  la massima crescita?*

La direzione  $\vec{v}$  di massima crescita è quella del gradiente di  $f$  nel punto  $P$ . Per cui, per calcolare il gradiente sono necessari due passaggi fondamentali. Il **primo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a  $x$ :

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial x} (f + g) = \frac{\partial}{\partial x} (f) + \frac{\partial}{\partial x} (g)$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{y - x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ derivata della radice quadrata per la derivata dell'argomento}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} \cdot (-2x) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ derivata del logaritmo per la derivata dell'argomento}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} \cdot (-2x) - \frac{1}{4x - x^2 - 4y^2} \cdot (4 - 2x)$$

$$\downarrow \text{ semplificazioni}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{y - x^2}} - \frac{4 - 2x}{4x - x^2 - 4y^2}$$



Il **secondo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a  $y$ :

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial y} (f + g) = \frac{\partial}{\partial y} (f) + \frac{\partial}{\partial y} (g)$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{y - x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\ln(4x - x^2 - 4y^2))$$

$$\downarrow \text{ derivata della radice quadrata per la derivata dell'argomento}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} \cdot (1) - \frac{\partial}{\partial y} (\ln(4x - x^2 - 4y^2))$$

$$\downarrow \text{ derivata del logaritmo per la derivata dell'argomento}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} - \frac{1}{4x - x^2 - 4y^2} \cdot (-8y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} + \frac{8y}{4x - x^2 - 4y^2}$$

Il **terzo passo** è quello di andare a sostituire i valori del punto  $P$  all'interno delle derivate parziali. Così facendo, si troverà la direzione di massima crescita, ovvero il gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{y-x^2}} - \frac{4-2x}{4x-x^2-4y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}}} - \frac{4-2 \cdot \frac{1}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} - 4 \cdot \frac{1^2}{2^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -1 - \frac{3}{2 - \frac{1}{4} - 1} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} + \frac{8y}{4x-x^2-4y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}}} + \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} - 4 \cdot \frac{1^2}{2^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{4}{2 - \frac{1}{4} - 1} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{19}{3}\end{aligned}$$

Si conclude l'esercizio:

$$\vec{v} = \nabla f(P) = \left(-5, \frac{19}{3}\right)$$

### 3.1.4 Specificare se un dominio è aperto/chiuso, limitato/illimitato, connesso/sconnesso, compatto

Questa richiesta è molto probabile che ci sia all'esame. Solitamente, viene accoppiata con la scrittura del dominio e della sua rappresentazione (pagina 11). Un esempio di tema d'esame (03/03/2023): *Data la funzione:*

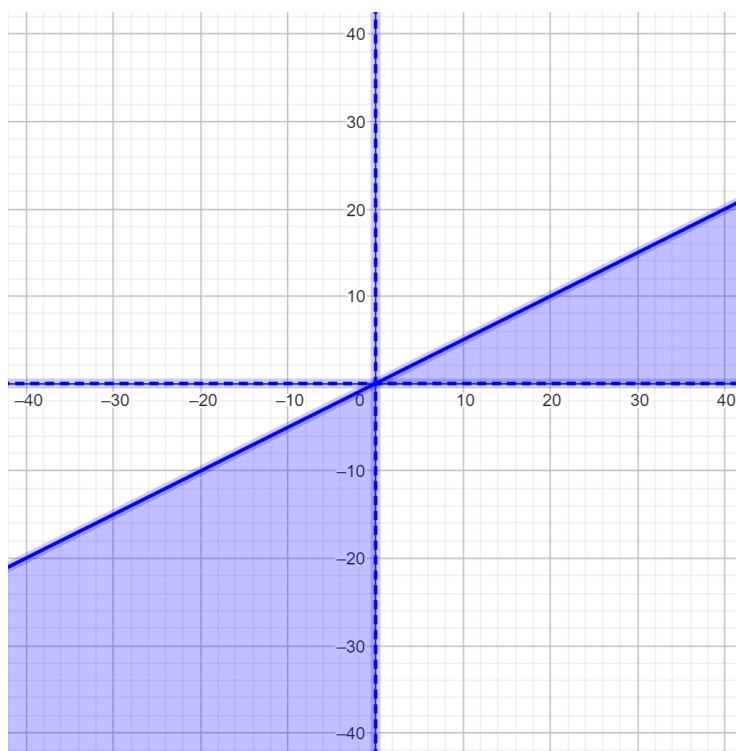
$$f(x, y) = ye^{\sqrt{x-2y}} - \ln(xy)$$

*Determinare analiticamente il suo dominio naturale  $D$  e poi rappresentarlo nel piano cartesiano. Stabilire se  $D$  è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!).*

Prima di tutto si stabilisce il dominio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2y \geq 0) \wedge (xy > 0)\}$$

Ovvero si impone le condizioni di esistenza sulla radice quadrata e il logaritmo. La sua rappresentazione grafica:



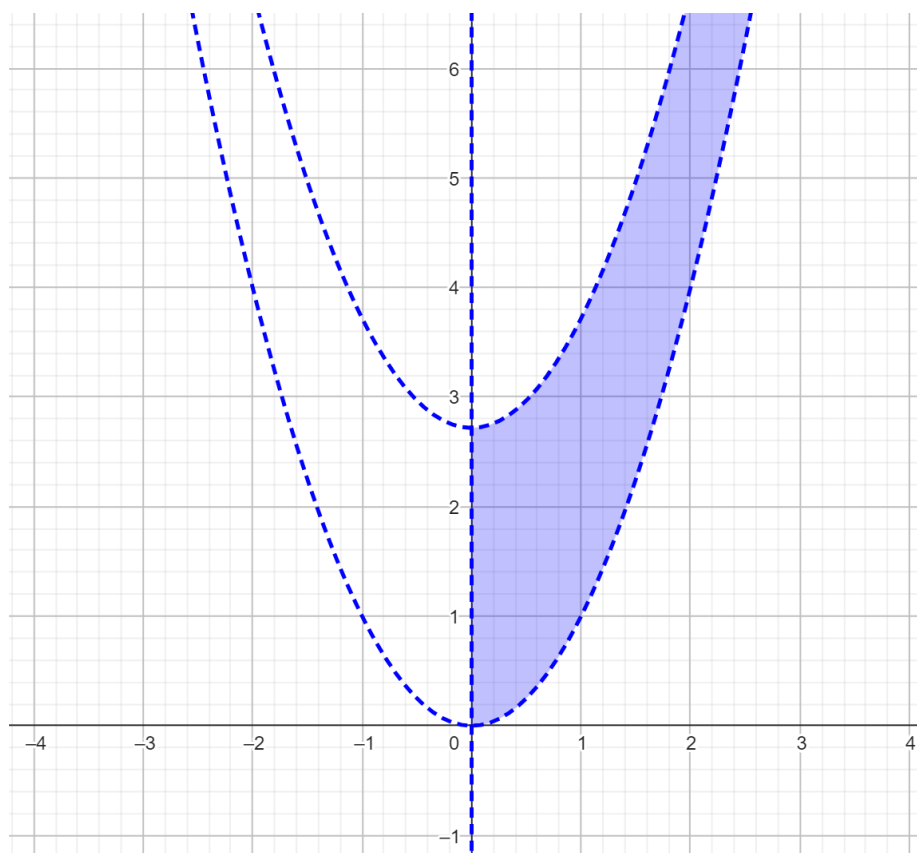
- **Limitato o illimitato?** Il dominio è illimitato, dato che continua all'infinito, ovvero non esiste una palla con centro l'origine e raggio  $r \in \mathbb{R}$  che contiene  $D$ .
- **Aperto o chiuso?** Il dominio non è né chiuso né aperto poiché contiene alcuni punti della sua frontiera ma non tutti.

- **Connesso o sconnesso?** Il dominio è sconnesso poiché non è connesso per archi. Infatti, come si può vedere dal grafico del dominio, quest'ultimo è l'unione di due insiemi.

Nell'esame del 07/02/2023, la funzione di riferimento e il dominio erano:

$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x)$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y > x^2) \wedge (y < x^2 + e) \wedge (x > 0)\}$$



Dominio della funzione.

In questo caso, il dominio è illimitato per lo stesso motivo dell'esercizio precedente; il dominio è aperto poiché tutti i punti sono interni e inoltre è connesso per archi.

### 3.1.5 Trovare l'equazione al piano tangente

Uno degli esercizi più richiesti insieme alla derivata direzionale, è quello di trovare l'equazione al piano tangente. Si prenda in considerazione il tema d'esame del 07/02/2023 in cui veniva chiesto: **Data la funzione:**

$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x)$$

**Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(1, 2, f(1, 2))$ .**

Anche in questo caso, come accadeva nel caso in cui si doveva trovare la direzione della funzione affinché essa sia di massima crescita (pagina 16), è necessario calcolare le derivate parziali di  $f(x, y)$ . Quindi, il **primo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a  $x$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \right) \\ &\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial x} (f + g) = \frac{\partial}{\partial x} (f) + \frac{\partial}{\partial x} (g) \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (y) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\ln(x)) \\ &\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f} \right) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(f)}{f^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 0 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \cdot \left( -\frac{1}{y - x^2} \cdot (-2x) \right)}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}^2} - \left( \frac{1}{x} \cdot (1) \right) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \cdot \left( \frac{2x}{y - x^2} \right)}{1 - \ln(y - x^2)} - \frac{1}{x} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\frac{x}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2)}}{1 - \ln(y - x^2)} - \frac{1}{x} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2) \cdot (1 - \ln(y - x^2))} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a  $y$ :

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \\
 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \right) \\
 &\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial y} (f + g) = \frac{\partial}{\partial y} (f) + \frac{\partial}{\partial y} (g) \\
 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\ln(x)) \\
 &\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{f} \right) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(f)}{f^2} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 1 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \cdot \left( -\frac{1}{y - x^2} \cdot 1 \right)}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}^2} - 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2) \cdot (1 - \ln(y - x^2))}
 \end{aligned}$$

Il **terzo passo** è scrivere il gradiente valutato nel punto dato, ovvero in  $P(1, 2)$ . Quindi, si prendono le derivate parziali trovate, si sostituiscono i valori e si utilizzano nel gradiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2) \cdot (1 - \ln(y - x^2))} - \frac{1}{x} \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \ln(2 - 1^2)} \cdot (2 - 1^2) \cdot (1 - \ln(2 - 1^2))} - \frac{1}{1} \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \ln(1)} \cdot 1 \cdot (1 - \ln(1))} - 1 \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -\frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 1} - 1 \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -2 \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2) \cdot (1 - \ln(y - x^2))} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(2 - 1^2)} \cdot (2 - 1^2) \cdot (1 - \ln(2 - 1^2))} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Per cui il gradiente corrisponde al valore:

$$\nabla f(P) = \nabla f(1, 2) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

Il **quarto e ultimo passo** è scrivere l'equazione del piano tangente. Il piano tangente nel punto  $(x, y, (x_0, y_0))$  è rappresentato dall'equazione:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Dove  $f(x, y)$  è la funzione e  $(x_0, y_0)$  è il punto in cui è differenziabile.

Grazie a questo richiamo di teoria, adesso è possibile scrivere l'equazione del piano tangente. Quindi, si prende il punto differenziabile, cioè  $P(1, 2)$ , e si sostituisce nell'equazione iniziale:

$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x)$$

$$f(1, 2) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(2 - 1^2)}} - \ln(1)$$

$$f(1, 2) = 2 + \frac{1}{1} - 0$$

$$f(1, 2) = 3$$

E infine si sostituiscono i valori calcolati nell'equazione del piano tangente:

$$z = 3 - 2(x - 1) + \frac{3}{2}(y - 2) = 3 - 2x + 2 + \frac{3}{2}y - 3 = -2x + \frac{3}{2}y + 2$$

### 3.1.6 Calcolare il gradiente della funzione ( $\nabla f$ )

Esercizio difficile che venga richiesto, ma una volta è capitato, è la richiesta esplicita di calcolare il gradiente. Solitamente viene richiesto di trovare la massima crescita della funzione, cioè il gradiente, o la derivata direzionale. In questo caso, si calcola direttamente il gradiente come è stato fatto nei precedenti capitoli. Si riporta comunque i passaggi da eseguire. Si faccia riferimento al testo d'esame del 15/09/2021, gruppo A: *Data la funzione:*

$$f(x, y) = \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}$$

*Calcolare  $\nabla f(P)$ , dove  $P$  è il punto di coordinate  $(1, 2)$ .*

Il **primo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto  $x$ :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2} \\f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}) \\f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\log(x^2 - 4x + 4y^2)) - \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{2x - x^2}) \\\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (2x - 4) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) \\\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}\end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto  $y$ :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2} \\f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}) \\f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\log(x^2 - 4x + 4y^2)) - \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{2x - x^2}) \\\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (8y) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (0) \\\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2}\end{aligned}$$

Il **terzo passo** è sostituire il punto di coordinate  $P(1, 2)$  all'interno delle derivate parziali e calcolare il gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} \\\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \frac{2 \cdot 1 - 4}{1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2} - \frac{2 - 2 \cdot 1}{2\sqrt{2 \cdot 1 - 1^2}} \\\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -\frac{2}{13} - \frac{0}{2} = -\frac{2}{13}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \frac{8 \cdot 2}{1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \frac{16}{13}\end{aligned}$$

Il gradiente dunque corrisponde a:

$$\nabla f(P) = \nabla f(1, 2) = \left(-\frac{2}{13}, \frac{16}{13}\right)$$

### 3.1.7 Calcolare la derivata direzionale

Un esercizio richiestissimo, è il calcolo della derivata direzionale. Un esercizio tipo è il seguente, estratto dall'esame del 15/09/2021, gruppo A: **Data la funzione:**

$$f(x, y) = \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}$$

**Calcolare la derivata direzionale di  $f$  in  $P$  rispetto al vettore  $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .**

La derivata direzionale di una funzione in un punto rispetto ad un vettore, non è altro che la moltiplicazione del gradiente della funzione in quel punto per il vettore, ovvero:

$$\nabla f(P) \cdot \vec{v}$$

Viene da sé che è necessario prima calcolare il gradiente e poi calcolare il vettore. Come **primo passo** si calcolano le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2} \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}) \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\log(x^2 - 4x + 4y^2)) - \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{2x - x^2}) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (2x - 4) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} \\ f(x, y) &= \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2} \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}) \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\log(x^2 - 4x + 4y^2)) - \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{2x - x^2}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (8y) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2} \end{aligned}$$

(calcoli già eseguiti nel paragrafo precedente, li riportiamo per convenienza)

Il **secondo passo** è sostituire il punto fornito  $P(1, 2)$  all'interno delle derivate parziali così da ottenere il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{2 \cdot 1 - 4}{1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2} - \frac{2 - 2 \cdot 1}{2\sqrt{2 \cdot 1 - 1^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{2}{13} - \frac{0}{2} = -\frac{2}{13}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{8 \cdot 2}{1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{16}{13}$$

Il gradiente dunque corrisponde a:

$$\nabla f(P) = \nabla f(1, 2) = \left(-\frac{2}{13}, \frac{16}{13}\right)$$

Fin qua l'esercizio è identico al calcolo del gradiente della funzione (pagina 24). Il **terzo passo** è eseguire la moltiplicazione tra il versore fornito dall'esercizio  $\vec{v}$  e il gradiente calcolato:

$$\nabla f(P) \cdot \vec{v} = \left(-\frac{2}{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{16}{13} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{13}, \frac{8}{13}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{13} + \frac{8}{13} = \frac{-\sqrt{3} + 8}{13}$$

### **3.2    Alcuni esercizi d'esame svolti**

## 4 Esercizio 4 - Stabilire se una funzione è continua e parametrizzazioni

### 4.1 Tipologie di esercizio 1

#### 4.1.1 Stabilire se una funzione è continua

Un *evergreen* nell'esercizio 4 è la richiesta di stabilire se la funzione data è continua in un certo insieme. Il procedimento è il seguente; si estrae un esercizio dal tema d'esame del 15/09/2021, gruppo A: **Stabilire se la funzione:**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**è continua in  $\mathbb{R}^2$ .**

La soluzione di questo esercizio, il più delle volte, è affermare che la funzione non è continua nell'insieme dato. Tuttavia, talvolta non è così scontato ed è necessario dimostrare il motivo della risposta.

Il **primo passo**, banale e al 90% verificabile visivamente, è verificare che la funzione sia definita nel punto  $(0, 0)$ . Infatti, per stabilire se la funzione è continua in  $\mathbb{R}^2$ , è necessario che sia continua nel punto  $(0, 0)$ .

In questo caso, l'esercizio afferma che nel caso in cui  $x$  e  $y$  siano zero  $(x, y) = (0, 0)$ , la funzione abbia risultato 0. Per cui, la funzione è definita.

Il **secondo passo** è verificare che esista il limite con  $x$  che tende a zero e con  $y$  che tende a zero. Nel caso in cui sia  $\infty$ , è possibile affermare che la funzione non è continua facendo vedere i calcoli del limite. In questo caso:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) &= \frac{0^4}{x^2 + 0^4} = \frac{0}{x^2} = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) &= \frac{y^4}{0^2 + y^4} = \frac{y^4}{y^4} = 1 \end{aligned}$$

I limiti non coincidono, per cui è possibile affermare che la funzione non è continua nell'origine  $(0, 0)$ , ovvero i limite di  $f$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  non esiste. Quindi,  $f$  non è continua in  $\mathbb{R}^2$ .

Per completezza, si presenta un esercizio in cui una funzione è continua per capire come comportarsi. Si estrae un esercizio dal tema d'esame del 01/03/2022: **Stabilire se la funzione:**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

**è continua in  $\mathbb{R}^2$ .**

Il **primo passo** è verificare che la funzione sia definita in  $(1, 2)$ . In questo caso lo è, quindi si passa avanti.

Il **secondo passo** è verificare i limiti con il punto  $(1, 2)$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x, 2) &= \frac{(x-1)(2-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (2-2)^2}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{(x-1)^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 2} f(1, y) &= \frac{(1-1)(y-2)}{\sqrt{(1-1)^2 + (y-2)^2}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{(y-2)^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

I due limiti esistono e hanno lo stesso risultato. Per essere certi che la funzione sia continua, è necessario un **terzo passo**, ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dato che il limite esiste ed è uguale a zero per  $(1, 2)$ , nel caso di  $f(1, 2)$ , si continua ad avere il valore 0. Quindi, la funzione è continua.

#### 4.1.2 Variante (rara) - Stabilire se una funzione è continua

Nell'esame del 03/03/2023 è stata fatta una richiesta diversa dal solito. È stato chiesto di stabilire un valore  $k$  tale che la funzione risulti continua nell'origine:

*Si consideri la funzione:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ k & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Esiste un valore di  $k \in \mathbb{R}$  tale che  $f$  risulti continua nell'origine?*

Ipotizzando di muoversi lungo la retta per l'origine con  $x \neq 0$ , la funzione verrebbe riscritta come:

$$f(x, mx) = \frac{x^2 + m^2 x^2}{x^2 + mx^2 + m^2 x^2} = \frac{x^2 (1 + m^2)}{x^2 (1 + m + m^2)} = \frac{1 + m^2}{1 + m + m^2}$$

Si vede anche ad occhio, che il limite della funzione  $f(x, mx)$  con  $x$  che tende a zero ( $x \rightarrow 0$ ) dipende dal fattore  $m$ . Dunque è possibile concludere che tale limite non esiste:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

Per cui, è possibile concludere che per nessun valore di  $k$  la funzione  $f$  è continua in  $(0, 0)$ .

#### 4.1.3 Dimostrazione di una disuguaglianza e di un limite (Teorema del confronto)

Nell'esame del 22/07/2021 è stato richiesto di eseguire dei calcoli insoliti rispetto alle classiche richieste degli esercizi: *Dimostrare che:*

$$x^2|y| \leq \frac{1}{2}(x^4 + y^2) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

*e utilizzare la precedente disuguaglianza per verificare che:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} = 0$$

Il **primo passo** è dimostrare che vale la disuguaglianza mostrata. Per farlo, è necessario verificare che tutte le espressioni siano maggiore o uguale a zero, ovvero:

$$\begin{aligned} x^2|y| &\leq \frac{1}{2}(x^4 + y^2) \\ 2 \cdot x^2|y| &\leq \frac{1}{2}(x^4 + y^2) \cdot 2 \\ 2x^2|y| &\leq (x^4 + y^2) \\ -x^4 + 2x^2|y| &\leq y^2 \\ -x^4 + 2x^2|y| - y^2 &\leq 0 \\ x^4 - 2x^2|y| + y^2 &\geq 0 \\ (x^2 - |y|)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Disuguaglianza verificata. Infatti, anche se ci fosse un numero negativo, l'elevazione al quadrato la farebbe tornare positiva. Al massimo l'espressione può essere zero, ma anche in tal caso l'espressione è ammessa. Quindi, è possibile concludere affermando che l'espressione risulta non negativa per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Il **secondo passo** è utilizzare la disuguaglianza per verificare il limite. Si utilizza il teorema del confronto<sup>2</sup>, che afferma: se  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  sono tre successioni di numeri tali che:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

e se si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$$

allora anche:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$$

---

<sup>2</sup>[Link alla fonte di YouMath in cui ci sono esempi](#)



Per applicarlo, si prende in considerazione l'argomento del limite, cioè  $\frac{x^3y}{x^4+y^2}$ , e si afferma che deve essere maggiore o uguale a zero:

$$0 \leq \left| \frac{x^3y}{x^4+y^2} \right|$$

Dato che l'esercizio chiede di utilizzare anche la disuguaglianza precedente, lo studente dovrebbe avere l'intuizione di notare che:

$$x^2|y| \leq \frac{1}{2} (x^4 + y^2)$$

Corrisponde a:

$$\begin{aligned} x^2|y| &\leq \frac{1}{2} (x^4 + y^2) \\ \frac{1}{x^4 + y^2} \cdot x^2|y| &\leq \frac{1}{2} \cdot \cancel{(x^4 + y^2)} \cdot \frac{1}{\cancel{x^4 + y^2}} \\ \frac{x^2|y|}{x^4 + y^2} &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Di nuovo, se lo studente riesce ad avere l'intuizione, noterà che aggiungendo una  $|x|$ , è possibile ottenere  $\frac{x^3y}{x^4+y^2}$ :

$$0 \leq \frac{x^3y}{x^4+y^2} = |x| \cdot \frac{x^2|y|}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2} \cdot |x|$$

Quindi, grazie al teorema del confronto:

$$0 \leq |x| \cdot \frac{x^2|y|}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2} \cdot |x|$$

Basta verificare che i limiti esterni siano uguali per affermare che anche quello al centro sia uguale:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 &= 0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} \cdot |x| &= 0 \end{aligned}$$

Quindi, grazie al teorema del confronto, si afferma che:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0$$

#### 4.1.4 Verificare l'esistenza di un limite in un punto

Un esercizio che è stato richiesto qualche volta, è la verifica dell'esistenza di un certo limite. Ovvero, viene fornita una funzione e un punto su cui verificare l'esistenza di tale limite. Si prenda d'esempio l'esame del 08/02/2022, gruppo A: *Stabilire se la funzione:*

$$f(x, y) = \frac{y^3 + |x - 1|}{(x - 1)^2 + y^2}$$

*ammette limite per  $(x, y) \rightarrow (1, 0)$ .*

Il primo passo è verificare con  $x$  fissato:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x, 0) &= \frac{0^3 + |x - 1|}{(x - 1)^2 + 0^2} \\ &= \frac{|x - 1|}{(x - 1)^2} \\ &\rightarrow \text{Forma indeterminata } \frac{0}{0} \text{ quindi si usa Hopital} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}|x - 1|}{\frac{d}{dx}(x - 1)^2} \\ &\rightarrow \text{Sapendo che } |x| = \sqrt{x^2} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(x - 1)^2}\right)}{\frac{d}{dx}(x - 1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{(x - 1)^2}} \cdot (2x - 2)}{\frac{d}{dx}(x - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2(x - 1) \cdot 1} \\ &= \frac{1}{2x - 2} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Il **secondo passo** è verificare con  $y$  fissato:

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0} f(1, y) &= \frac{y^3 + |1 - 1|}{(1 - 1)^2 + y^2} \\ &= \frac{y^3}{y^2} \\ &= y \\ &= 0\end{aligned}$$

Dato che il risultato dei due limiti è diverso, il limite nel punto  $(1, 0)$  non esiste.

## 4.2 Tipologie di esercizio 2

### 4.2.1 Parametrizzazione retta tangente in un punto all'arco di ellisse

Questa tipologia di esercizio si è presentata soltanto una volta, anche perché l'ellisse non è una figura semplice da trattare (parole testuali del professore). L'esame del 25/06/2021, gruppo A, chiedeva: *Si trovi una parametrizzazione della retta tangente in  $P(-2 - \sqrt{3}, \frac{9}{2})$  all'arco di ellisse di equazione:*

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$$

*che congiunge (nell'ordine) i punti  $A(-2, 6)$  e  $B(-4, 3)$ .*

Quando ci si trova davanti ad un'ellisse o un'iperbole, è sempre conveniente utilizzare la tecnica del completamento dei quadrati. Questo perché la sua applicazione consente di ottenere direttamente la forma canonica dell'equazione cercata e di determinare i valori senza calcoli complessi<sup>3</sup>.

Quindi, il **primo passo** è applicare il completamento dei quadrati:

Innanzitutto, la **prima operazione** dell'applicazione del completamento dei quadrati è il raggruppamento dei valori simili, ovvero sia:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 &= 0 \\ (9x^2 + 36x) + (4y^2 - 24y) + 36 &= 0 \end{aligned}$$

La **seconda operazione** è prendere in considerazione i termini con le  $x$ , e poi quelli con le  $y$ , e cercare un quadrato. Ovvero sia un valore  $c$  tale per cui il  $\Delta$  (nella formula del calcolo di un'equazione di secondo grado  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ ) sia uguale a zero:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 36x &\longrightarrow 36^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\ 36^2 - 36c &= 0 \\ c &= 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4y^2 - 24y &\longrightarrow 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\ 24^2 - 16c &= 0 \\ c &= 36 \end{aligned}$$

Suggerimento: per trovare tale valore, basta risolvere la banale equazione  $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$  con  $c$  incognita e  $a, b$  termini noti.

---

<sup>3</sup>[Video tutorial di approfondimento](#)

La **terza operazione** è riscrivere l'equazione con i nuovi valori  $c$ , ma per lasciare invariata l'equazione è necessario annullarli, ovvero scrivere  $c - c$  (nessun problema, con manipolazioni algebriche si riuscirà ad evitare di ritornare al punto di inizio):

$$(9x^2 + 36x + 36 - 36) + (4y^2 - 24y + 36 - 36) + 36 = 0$$

Le manipolazioni algebriche riguardano  $9x^2 + 36x + 36$  e  $4y^2 - 24y + 36$ . Ovvero, si riscrivono le due espressioni come quadrati!

$$\begin{aligned} 9x^2 + 36x + 36 &\longrightarrow 9(x+2)^2 \\ 4y^2 - 24y + 36 &\longrightarrow 4(y-3)^2 \end{aligned}$$

E si riscrive l'equazione generale:

$$9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 = 0$$

Banali semplificazioni algebriche:

$$\begin{aligned} 9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 &= 0 \\ \frac{1}{36} \cdot 9(x+2)^2 + \frac{1}{4} \cdot 4(y-3)^2 &= \frac{36}{36} \cdot \frac{1}{36} \\ \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione corrisponde all'equazione canonica dell'ellisse.

Il **secondo passo** è la parametrizzazione<sup>4</sup> vera e propria. La parametrizzazione di un'ellisse prevede l'utilizzo delle coordinate ellittiche<sup>5</sup>. Tali coordinate, che non fanno riferimento solo all'ellisse, sono ottenibili nel seguente modo:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = x_0 + a\rho \cos(\theta) \\ y = y_0 + b\rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Quindi, nel nostro caso si ha:

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\cos(t) \\ y = 3 + 3\sin(t) \end{cases}$$

<sup>4</sup>[Approfondimento teorico - Parametrizzazione di un'ellisse](#)

<sup>5</sup>[Approfondimento teorico - Coordinate ellittiche](#)

Il **terzo passo** è descrivere la congiunzione tra i punti  $A$  e  $B$  (in questo ordine). Per farlo, basta semplicemente sostituire nel sistema prima il punto  $A$  e successivamente il punto  $B$ :

$$A = \begin{cases} -2 = -2 + 2 \cos(t) \\ 6 = 3 + 3 \sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 2 \cos(t) \\ 3 = 3 \sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = \cos(t) \\ 1 = \sin(t) \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} t = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \\ t = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} -4 = -2 + 2 \cos(t) \\ 3 = 3 + 3 \sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = 2 \cos(t) \\ 0 = 3 \sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = \cos(t) \\ 0 = \sin(t) \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} t = \arccos(-1) = \pi \\ t = \arcsin(0) = 0 = \pi \end{cases}$$

Quindi, la parametrizzazione finale è:

$$\gamma : \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (-2 + 2 \cos(t), 3 + 3 \sin(t))$$

Il **quarto passo** è trovare la parametrizzazione della retta tangente passante nel punto  $P(-2 - \sqrt{3}, \frac{9}{2})$ . Per farlo, è necessario sostituire il punto  $P$  nella parametrizzazione dell'ellisse, e successivamente fare la derivata per trovare la tangente:

$$\begin{cases} -2 - \sqrt{3} = -2 + 2 \cos(t) \\ \frac{9}{2} = 3 + 3 \sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} = 2 \cos(t) \\ \frac{3}{2} = 3 \sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(t) \\ \frac{1}{2} = \sin(t) \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} t = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} \\ t = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \gamma\left(\frac{5\pi}{6}\right) = (P) = \left(-2 - \sqrt{3}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\gamma'\left(\frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{d}{dx} -2 + 2 \cos(t) \\ y' = \frac{d}{dy} 3 + 3 \sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -2 \sin(t) = -2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -1 \\ y' = 3 \cos(t) = 3 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Il **quinto passo** è scrivere la retta finale tangente al punto  $P$ . Per farlo, basta scrivere il sistema (parametrizzazione) con le due coordinate  $x$  e  $y$  in funzione di  $t$ , e come valori si hanno: i punti di  $P$  + i punti trovati grazie alla derivata  $\times t$ .

$$\begin{aligned} \text{Punto } P &\longrightarrow P\left(-2 - \sqrt{3}, \frac{9}{2}\right) \\ \text{Soluzioni derivata } \gamma'\left(\frac{5\pi}{6}\right) &\longrightarrow \gamma'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-1, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \\ \begin{cases} x(t) = -2 - \sqrt{3} + (-1) \cdot t \\ y(t) = \frac{9}{2} + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} x(t) = -2 - \sqrt{3} - t \\ y(t) = \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Trovare l'equazione al piano tangente

Negli esami del 15/09/2021 e del 22/07/2021 è stato chiesto questo esercizio. La risoluzione si può trovare a pagina: 21.

#### 4.2.3 Determinare le equazioni parametriche della retta tangente all'arco di curva nel punto $P$

Questa tipologia di esercizio è molto richiesta. La sua risoluzione non è complessa se è chiaro lo svolgimento dell'esercizio sulla parametrizzazione della retta tangente di un punto all'arco di ellisse (pagina 36). Si prenda in considerazione l'esame del 23/11/2021: **Si consideri l'arco di curva:**

$$\gamma: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t))$$

**Determinare le equazioni parametriche della retta tangente a  $\gamma$  nel punto  $P\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right)$ .**

Il **primo passo** è sostituire il valore del punto dato, ovvero  $P\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right)$ , all'interno della parametrizzazione dell'arco di curva al posto di  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{8} = \cos^3(t) \\ \frac{1}{8} = \sin^3(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}} = \sqrt[3]{\cos^3(t)} \\ \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\sin^3(t)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(t) \\ \frac{1}{2} = \sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Il **secondo passo** è eseguire la derivata dell'arco di curva, ovvero della sua parametrizzazione, con argomento  $\frac{\pi}{6}$ :

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right) \\ \gamma'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= (-3\cos^2(t) \cdot \sin(t), 3\sin^2(t) \cos(t)) \\ &= \left(-3\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \left(-3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}, 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{9}{8}, -\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \end{aligned}$$

Il risultato della derivata rappresenta la direzione della retta tangente in  $P$  alla curva  $\gamma'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ .

Il **terzo e ultimo passo** è scrivere le equazioni parametriche della retta, ricordando la formula utilizzata nel paragrafo 4.2.1, ovvero sia: *scrivere il sistema (parametrizzazione) con le due coordinate  $x$  e  $y$  in funzione di  $t$ , e come valori si hanno: i punti di  $P$  + i punti trovati grazie alla derivata  $\times t$ .*

$$\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{9}{8} \cdot t \\ y = \frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



Negli ultimi anni, in particolare nel 2023, in due esami si è presentata anche una nuova richiesta: calcolare la lunghezza dell'arco. Questo esercizio si risolve tramite una formula e l'utilizzo di un integrale. Si estrae dall'esame del 03/03/2023 l'esercizio: *Si consideri l'arco di curva parametrizzato da:*

$$\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

*Calcolare la lunghezza dell'arco e scrivere le equazioni parametriche della retta tangente alla curva nel punto  $P(\frac{\pi}{2} - 1, 1)$ .*

Il **primo passo**, utile anche al calcolo delle equazioni parametriche della retta, è calcolare la derivata della parametrizzazione della curva:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \\ \gamma'(t) &= (1 - \cos(t), \sin(t)) \\ &= \begin{cases} x'(t) = 1 - \cos(t) \\ y'(t) = \sin(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare la lunghezza<sup>6</sup> dell'arco tramite la seguente formula:

$$L(\mathcal{L}) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Ovvero, si deve calcolare l'integrale dal punto di partenza  $a$  al punto di destinazione  $b$ , della derivata al quadrato dell'equazione  $x$  e  $y$  della parametrizzazione, tutto sotto radice (più facile a farsi che a dirsi). Quindi, si vanno a sostituire i valori trovati, ricordando che il punto  $a, b$  è il punto in cui è definito  $t$ , ovvero  $t \in [0, 2\pi]$ :

$$\begin{aligned} L(\mathcal{L}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t) - \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + 1} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt \\ &= 8 \end{aligned}$$

La lunghezza dunque è stata trovata. Il risultato dell'integrale è possibile calcolarlo con una calcolatrice scientifica. L'esercizio continuerebbe calcolando le equazioni della retta tangente: si sostituisce il punto  $P$  nel sistema così da ottenere l'angolo  $t$ ; si sostituisce l'angolo  $t$  trovato nella derivata  $\gamma'$ ; si conclude scrivendo le equazioni della retta tangente utilizzando la formula  $P + \gamma'(\text{angolo } \pi) \cdot t$ .

---

<sup>6</sup>[Link di approfondimento](#)

Si conclude questa tipologia di esercizio (tra i più gettonati) presentando due richieste particolari:

- Esame del 15/07/2022: *Si consideri l'arco di curva  $\mathcal{L}$  parametrizzato da:*

$$\gamma(t) = (13 \sin(2t), 12 \cos(2t), 5 \cos(2t)), \quad t \in [0, \pi]$$

*Calcolare la lunghezza di  $\mathcal{L}$  e verificare che in ogni punto  $P \in \mathcal{L}$  la retta tangente alla curva è perpendicolare alla retta  $OP$  ( $O$  è l'origine del sistema di riferimento).*

Tralasciando il metodo per il calcolo della lunghezza, che banalmente corrisponde al calcolo delle derivate di  $\gamma(t)$  e alla formula con l'integrale (pagina precedente), in questo esame è richiesto di verificare che la retta tangente in ogni punto  $P$  della curva è perpendicolare alla retta  $OP$ . Il **primo e unico passo** è dimostrare che  $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$  per ogni  $t \in [0, \pi]$ . Quindi, si va a sostituire:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (13 \sin(2t), 12 \cos(2t), 5 \cos(2t)) \\ \gamma'(t) &= (26 \cos(2t), -24 \sin(2t), -10 \sin(2t)) \\ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) &= 338 \sin(2t) \cos(2t) - 288 \sin(2t) \cos(2t) - 50 \sin(2t) \cos(2t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ed è immediato il risultato. Ovvero, che la moltiplicazione dia risultato zero  $\forall t \in [0, \pi]$ .

- Esame del 23/06/2022 (A): *Si consideri l'arco di curva  $\mathcal{L}$  parametrizzato da:*

$$\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}), \quad t \in [0, \ln(5)]$$

*Calcolare la lunghezza di  $\mathcal{L}$  (tenere in conto che  $e^t \cdot e^{-t} = 1$ ) e stabilire se la retta tangente in  $P(3, \frac{1}{3}, \sqrt{2} \ln(3))$  all'arco  $\mathcal{L}$  passa anche per il punto  $Q(6, 0, \sqrt{2}(1 + \ln(3)))$ .*

Tralasciando anche qui il calcolo della lunghezza (si rimanda alla pagina precedente) e il calcolo per verificare se la retta è tangente in  $P$ , il calcolo per verificare se l'arco di curva parametrizzato passa per il punto  $Q$  è banale.

Il **primo e unico passo** è sostituire i valori del punto  $Q$  all'interno della parametrizzazione della retta tangente:

1. Calcolo parametrizzazione della retta tangente: sostituisco i punti di  $P$  nel sistema di  $\gamma(t)$  e ottengo la  $t$ ;
2. Calcolo la lunghezza: derivo  $\gamma(t)$ , applico l'integrale definito da 0 a  $\ln(5)$  ricordando di mettere sotto radice le derivate di  $x, y, z$  al quadrato;

3. Date le equazioni parametriche della retta tangente (trovata al punto 1):

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 3t \\ y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t \\ z(t) = \sqrt{2} \ln(3) + t\sqrt{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Si può affermare che la retta passa per il punto  $Q(6, 0, \sqrt{2}(1 + \ln(3)))$ , andando a sostituire i suoi punti nel sistema e calcolandosi  $t$  (in questo caso 1):

$$\begin{cases} 6 = 3 + 3t \\ 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t \\ \sqrt{2}(1 + \ln(3)) = \sqrt{2} \ln(3) + t\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

#### 4.2.4 Calcolare la pendenza della retta tangente (teorema di Dini)

Nell'esame del 22/07/2021 è stato richiesto di calcolare la pendenza di una retta. Questa richiesta insolita, è semplice da risolvere poiché basta applicare il teorema di Dini<sup>7</sup>. L'esercizio estratto dal tema d'esame è: *Sempre con  $f$  definita come nel punto precedente, calcolare la pendenza della retta tangente in  $(1, 0)$  alla curva di equazione  $f(x, y) = 0$ .*

Al punto precedente veniva chiesto di determinare l'equazione del piano tangente al grafico di  $f(x, y) = e^x y + \ln(x^2 + y^2)$  nel punto  $(1, 0, f(1, 0))$ . Si procede con la risoluzione del gradiente in modo rapido:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= e^x y + \ln(x^2 + y^2) \\f(1, 0) &= e^1 \cdot 0 + \ln(1^2 + 0^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= e^x y + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2x) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) &= e^1 \cdot 0 + \frac{1}{1^2 + 0^2} \cdot (2 \cdot 1) = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= e^x + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) &= e^1 + \frac{1}{1^2 + 0^2} \cdot (2 \cdot 0) = e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 0 + 2(x - 1) + ey \\ &= 2x - 2 + ey\end{aligned}$$

Il **primo e unico passo** per l'applicazione del teorema di Dini, così da trovare la pendenza della retta tangente in  $(1, 0)$ , è calcolare il rapporto tra le due derivate parziali valutate nel punto  $(1, 0)$ :

$$m = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)} = -\frac{2}{e}$$

Attenzione che il valore meno appartiene alla formula del teorema di Dini e non è messo lì per caso.

---

<sup>7</sup>[Link di approfondimento](#)

### 4.3 Alcuni esercizi d'esame svolti

## 5 Esercizio 5 - Studio dei massimi, minimi, punti critici e di sella di una funzione

### 5.1 Tipologie di esercizio

#### 5.1.1 Verificare infinità dei punti stazionari di una funzione e trovare il punto di sella

Questo esercizio è raro che venga chiesto dato che si presenta solo nell'esame del 25/06/2021(A). Tuttavia, il suo svolgimento non è complesso: *Verificare che in  $\mathbb{R}^2$  la funzione  $f$  ha infiniti punti stazionari. Dimostrare che tra questi c'è un unico punto di sella.*

$$f(x, y) = xy^2$$

Per verificare che i punti stazionari siano infiniti, basta semplicemente calcolare le derivate parziali rispetto  $f$  e valutare le soluzioni che risolvono il sistema. Quindi, il **primo passo** è calcolare le derivate parziali di  $f$ :

$$f(x, y) = xy^2 \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy \end{cases}$$

I punti che risolvono il sistema sono  $(x, 0)$ , poiché  $y$  deve essere uguale a zero, mentre  $x$  può essere qualsiasi valore ( $x \in \mathbb{R}$ ) poiché verrà annullato dallo zero della  $y$  ( $2x \cdot 0$ ). Dato che  $x$  può essere qualsiasi valore, è possibile affermare che i punti stazionari per  $f$  sono infiniti!

Il **secondo passo** è trovare l'unico punto di sella (per approfondire il punto di sella, guardare il prossimo paragrafo). Per farlo sono necessarie alcune considerazioni. Infatti, con  $x = 0$ , nel punto  $(0, 0)$  si ha punto di sella (questo perché nell'intorno di  $(0, 0)$  la funzione  $f(x, y)$  cambia di segno). Al contrario, nei casi in cui  $x$  fosse  $> 0$  o  $< 0$ , allora si avrebbe rispettivamente un minimo locale e un massimo locale (che non sono punti di sella). Quest'ultima affermazione è vera poiché prendendo un intorno di  $(0, y)$ , nel primo caso si avrebbe la funzione  $f(x, y) \geq 0$  e nel secondo caso si avrebbe la funzione  $f(x, y) \leq 0$ .

### 5.1.2 Determinare valore di un parametro così da trovare un punto critico

Nell'esame del 22/07/2021 viene data una funzione e viene richiesto di calcolare un parametro  $a$  così da ottenere un punto critico in un punto specifico. La sua risoluzione è semplice, infatti vale solo un punto.

*Determinare il valore del parametro reale  $a$  in modo che  $f(x, y) = x - y^2 + ax^2$  abbia un punto critico in  $(-1, 0)$ . Inoltre, classificare tale punto critico.*

Il **primo passo** è trovare tutti i punti critici della funzione così da poter affermare quale valore di  $a$  è necessario. Per farlo, si utilizzano le derivate parziali sulla funzione  $f(x, y)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2ax & \rightarrow x = -\frac{1}{2a} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y & \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è:  $(-\frac{1}{2a}, 0)$ .

Il **secondo passo** è prendere in considerazione il punto critico richiesto, in questo caso  $(-1, 0)$ , e metterlo a sistema per estrarre la  $a$ :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2a} = -1 & \rightarrow a = \frac{1}{2} \\ 0 = 0 & \rightarrow \text{condizione già verificata} \checkmark \end{cases}$$

Quindi, è possibile affermare che il punto critico  $(-1, 0) \iff a = \frac{1}{2}$ .

Il **terzo passo** è necessario per classificare il punto critico. Per farlo, si sfrutta la matrice Hessiana<sup>8</sup>, ovvero una matrice costruita con le derivate parziali seconde. Andando a sostituire i valori del punto critico all'interno della matrice e andando a calcolare il determinante, è possibile stabilire se si tratta di un punto di massimo/minimo o di sella.

$$\text{Definizione teorica: } \rightarrow H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\text{Calcolo dell'esercizio: } \rightarrow H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sostituzione valori: } \rightarrow H_f(-1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ovviamente si assume che la derivata parziale prima rispetto a  $x$  sia con  $a = \frac{1}{2}$ , quindi  $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + x$ . Si calcola il determinante:

$$\det(H_f(-1, 0)) = 1 \cdot (-2) = -2$$

---

<sup>8</sup>[Link approfondimento teorico](#)

È possibile dunque affermare immediatamente che si tratta di un punto di sella. Per capire con quale logica è stata presa questa scelta, si lascia un piccolo richiamo alla teoria del corso.

***Richiamo alla teoria del corso***

È possibile classificare i punti stazionari a seconda del risultato del determinante della matrice Hessiana e al valore della derivata parziale seconda:

Determinante	Derivata p. sec.	Definizione di $(x, y)$
$\det(H_f(x, y)) > 0$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$	Minimo locale
$\det(H_f(x, y)) > 0$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0$	Massimo locale
$\det(H_f(x, y)) < 0$	<b>X</b>	Punto di sella
$\det(H_f(x, y)) = 0$	<b>X</b>	Poche informazioni



### 5.1.3 Determinare tutti i punti critici di una funzione (con analisi della loro natura)

Determinare i vari punti critici, è una delle tipologie di esercizio più richiesto. Si estrae dall'esame del 23/11/2021 l'esercizio: *Determinare tutti i punti critici della funzione  $f(x, y) = x^2y + x^2 + y^2 - 6y$ , specificandone la natura.*

Come si è visto per gli esercizi precedenti, il **primo passo** è sempre calcolare le derivate parziali di  $f(x, y)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2x = 2x(y + 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y - 6 \end{cases}$$

Il **secondo passo** è risolvere il seguente sistema ottenuto ponendo uguale a zero le precedenti equazioni. Si trovano tutte le varie soluzioni:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x(y + 1) = 0 \\ x^2 + 2y - 6 = 0 \end{cases} \\ x = 0 & \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0^2 + 2y - 6 = 0; \quad 2y = 6; \quad y = 3 \end{cases} \rightarrow y = 3 \\ y = -1 & \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^2 + 2(-1) - 6 = 0; \quad x^2 = 8 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{8} \end{aligned}$$

Quindi i punti stazionari sono:  $A(0, 3)$ ,  $B(\sqrt{8}, -1)$ ,  $C(-\sqrt{8}, -1)$ .

Il **terzo passo** è specificare la natura dei punti stazionari trovati. Si utilizza la matrice Hessiana (spiegazione a pagina 47):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = 2x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = 2x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2y + 2 & 2x \\ 2x & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(0, 3) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(\sqrt{8}, -1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 2 & 2\sqrt{8} \\ 2\sqrt{8} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{8} \\ 2\sqrt{8} & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(-\sqrt{8}, -1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 2 & -2\sqrt{8} \\ -2\sqrt{8} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{8} \\ -2\sqrt{8} & 2 \end{bmatrix}$$

Si calcolano i vari determinanti:

$$\det(H_f(0, 3)) = 6 \cdot 2 = 12$$

$$\det(H_f(\sqrt{8}, -1)) = 0 \cdot 2 - 2\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{8} = -4 \cdot 8 = -32$$

$$\det(H_f(-\sqrt{8}, -1)) = 0 \cdot 2 - (-2\sqrt{8}) \cdot (-2\sqrt{8}) = -32$$

Quindi i punti:

$$A(0, 3) \longrightarrow \det(H_f(0, 3)) > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x x} > 0 \longrightarrow \text{Punto di minimo}$$

$$B(\sqrt{8}, -1) \longrightarrow \det(H_f(\sqrt{8}, -1)) < 0 \longrightarrow \text{Punto di sella}$$

$$C(-\sqrt{8}, -1) \longrightarrow \det(H_f(-\sqrt{8}, -1)) < 0 \longrightarrow \text{Punto di sella}$$

**Attenzione!** In un vecchio esame, precisamente quello del 25/06/2021, veniva richiesto di calcolare tutti i punti critici di una funzione, ma chiedendo una piccola dimostrazione. L'esercizio è stato svolto e spiegato nel primo paragrafo di questo capitolo 46.

#### 5.1.4 Trovare il massimo/minimo assoluto della funzione nel caso sia soggetta ad un vincolo

La ricerca di massimo e minimo assoluto è un esercizio richiestissimo in questo capitolo. Tuttavia, qua si presenta una variante che non farà utilizzo della funzione lagrangiana. Il testo dell'esame 23/11/2021 era il seguente: *Trovare il massimo e il minimo assoluto (se esistono!) della funzione  $f(x, y) = x^2y + x^2 + y^2 - 6y$  nel caso sia soggetta al vincolo  $g(x, y) = x - 2 = 0$ .*

Dato il vincolo, il **primo passo** è riuscire a trovare la funzione più semplice possibile. Ovvero, il vincolo è uguale a zero quando  $x = 2$ , per cui alla funzione  $f$  si applica  $(2, y)$ :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2y + x^2 + y^2 - 6y \\f(2, y) &= 4y + 4 + y^2 - 6y \\&= y^2 - 2y + 4\end{aligned}$$

Il **secondo passo** è trovare eventuali punti di massimo/minimo assoluto. Per il minimo assoluto:

$$\begin{aligned}f(2, y) &= y^2 - 2y + 4 \\f'(2, y) &= 2y - 2\end{aligned}$$

La derivata si annulla quando  $y = 1$ . Quindi si verifica che la derivata seconda, con tale valore, sia maggiore di zero:

$$f''(2, 1) = 2 > 0 \checkmark$$

Quindi il valore 3 ( $f(2, 1)$ ) è il minimo assoluto. Per il massimo assoluto sarebbe necessario valutare la funzione  $f(2, y)$  con  $y$  uguale agli estremi del dominio. Tuttavia, in questo caso, la funzione non ha estremi definiti e non esiste un massimo assoluto.

### 5.1.5 Trovare massimo/minimo assoluto di una funzione definita su insieme $E$

Uno degli esercizi più richiesti nell'anno 2022 è stato la ricerca del massimo/minimo assoluto. Dal tema d'esame del 08/02/2022 (A): **Trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di  $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$  su:**

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 9\}$$

Il **primo passo** è verificare che la funzione  $f$  sia continua, in tal caso si ha la certezza, grazie al teorema di Weierstrass, che esistano minimo e massimo assoluto. In questo caso, è immediato verificare la funzione  $f(x, y)$  con il limite che tende a zero.

Dato che la funzione è continua, allora anche  $E$  lo è. Il **secondo passo** è applicare la funzione Lagrangiana così da risolvere il problema di massimizzazione/minimizzazione della funzione  $f(x, y)$  soggetta al vincolo  $x^2 + 2y^2 = 9$  (uguale a 9 poiché si considerano solo i punti di frontiera per il momento, nel caso in cui non si trovassero max/min, allora si dovrebbero considerare i valori minori di 9). La funzione Lagrangiana è così definita:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Dove  $g$  rappresenta la funzione vincolo. Quindi, nel nostro caso:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, y, \lambda) &= (4x^2 + 9y^2 - x^2y^2) - \lambda(x^2 + 2y^2 - 9) \\ \mathcal{L}(x, y, \lambda) &= 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2 - \lambda x^2 - 2\lambda y^2 + 9\lambda\end{aligned}$$

Il **terzo passo** è risolvere la funzione Lagrangiana. Per farlo basta mettere a sistema le tre derivate parziali, ovvero rispetto a  $x, y$  e  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 8x - 2xy^2 - 2\lambda x \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 18y - 2x^2y - 4\lambda y \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -x^2 - 2y^2 + 9 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 8x - 2xy^2 - 2\lambda x = 0 \\ 18y - 2x^2y - 4\lambda y = 0 \\ -x^2 - 2y^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

Si analizzano le equazioni a disposizione per cercare le soluzioni. Per evitare di perdersi o di ragionare su soluzioni già prese in considerazione, si consiglia di fare una tabella in cui le colonne identificano le incognite e le righe il numero di possibili valori che possono prendere nello spazio delle soluzioni. Il numero di righe è dato dalla somma dei gradi massimi di ogni riga del sistema, per il grado di ogni riga ( $2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$  in questo caso).

	$x$	$y$	$\lambda$	N° Equazione
A	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{9}{2}$	1°
B	0	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{9}{2}$	
C	?	?	?	2°
D	?	?	?	
E	?	?	?	3°
F	?	?	?	
G	?	?	?	
H	?	?	?	

Tabella delle soluzioni.

$$\frac{1}{2} \cdot 8x - 2xy^2 - 2\lambda x = 0 \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow x(4 - y^2 - \lambda) = 0$$

Quindi, una soluzione di  $x$  può essere  $x = 0$ . Andando a modificare il sistema:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 18y - 2 \cdot 0^2 y - 4\lambda y = 0 \\ -0^2 - 2y^2 + 9 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 18y - 4\lambda y = 0 \\ -2y^2 = -9 \rightarrow y^2 = \frac{9}{2} \rightarrow y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Con il } + \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 18\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) - 4\lambda\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0 \rightarrow \frac{54}{\sqrt{2}} - \frac{12}{\sqrt{2}}\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{54}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{9}{2} \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Con il } - \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -\frac{54}{\sqrt{2}} + \frac{12}{\sqrt{2}}\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{54}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{9}{2} \\ y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

	$x$	$y$	$\lambda$	N° Equazione
A	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{9}{2}$	1°
B	0	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{9}{2}$	
C	3	0	4	2°
D	-3	0	4	
E	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	2	3°
F	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	2	
G	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	2	
H	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	2	

Tabella delle soluzioni.

Considerando la seconda equazione del sistema, una possibile soluzione è  $y = 0$ :

$$18y - 2x^2y - 4\lambda y = 0 \xrightarrow{\times \text{ per } \frac{1}{2}} 9y - x^2y - 2\lambda y = 0 \longrightarrow y(9 - x^2 - 2\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} 8x - 2\cancel{0^2} - 2\lambda x = 0 \\ 0 = 0 \\ -x^2 - 2\cancel{0^2} + 9 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 8x - 2\lambda x = 0 \\ 0 = 0 \\ x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$$\text{Con } + \longrightarrow \begin{cases} 8(3) - 2\lambda(3) = 0 \\ 0 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{24}{6} = 4 \\ 0 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Con } - \longrightarrow \begin{cases} 8(-3) - 2\lambda(-3) = 0 \\ 0 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{24}{6} = 4 \\ 0 = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Considerando la terza equazione del sistema, le soluzioni si trovano andando a tentativi:

$$-x^2 - 2y^2 + 9 = 0 \longrightarrow x^2 + 2y^2 = 9 \longrightarrow x = \pm\sqrt{-2y^2 + 9}$$

Con  $y = \sqrt{1}$ , la  $x$  diventerebbe  $\sqrt{7}$ . Tuttavia, andando a sostituire questi due valori nel sistema, la  $\lambda$  dovrebbe essere 1 e 3 allo stesso tempo (per garantire il risultato zero). Al contrario, con  $y = \pm\sqrt{2}$ , la  $x = \pm\sqrt{5}$  e il sistema ammette soluzione per  $\lambda = 2$ .

Il **quarto passo** è sostituire nella funzione  $f$  i punti trovati al passo precedente. Così facendo, è possibile scovare i punti di minimo e massimo assoluto. Ovviamente, si valuta anche il punto di coordinate  $(0, 0)$  che è l'origine e corrisponde al punto stazionario interno:

$$f(A \wedge B) = f\left(0, \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{81}{2}$$

$$f(C \wedge D) = f(\pm 3, 0) = 36$$

$$f(E \wedge F \wedge G \wedge H) = f(\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}) = 28$$

$$f(\text{origine}) = f(0, 0) = 0$$

Il massimo assoluto è ovviamente  $\frac{81}{2}$  e il valore di minimo assoluto è nell'origine e corrisponde a 0.