Analisi II

VR443470

ottobre 2022

Indice

1 Lezione 01

1.1 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni differenziali a **variabili separabili** hanno due forme:

- **Forma canonica.** $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$
- **Forma alternativa.** $y' = f(x) \cdot g(y)$

Dove f e g sono funzioni continue "in un intervallo reale", più formalmente:

$$
\begin{gathered}
f \text{ continua in } I \subseteq R \\
g \text{ continua in } J \subseteq R
\end{gathered}
$$

Le **soluzioni** di un'equazione differenziale possono essere:

✓ **Costanti.** Quando $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è uno zero di $g(y)$ e dunque vale:

$$y(x) = \bar{y} \quad \forall x \in I$$

Quindi, quando un valore annulla $g(y)$, vuol dire che è stata trovata una soluzione costante dell'equazione differenziale.

✓ **<u>Non</u> costanti.** Quando $g(y)$ non si annulla e quindi ci sarà la relazione:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \longrightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Tuttavia, supponendo che $G(y)$ sia una primitiva di $\dfrac{1}{g(y)}$, allora:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(y(x)) = f(x) \qquad \text{con} \qquad G(x) = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Dove $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$. Ma dato che G è invertibile, si scrive:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c) \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{1}$$

L'equazione 1 rappresenta l'**insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale** e viene chiamato anche **integrale generale**.

Esempio equazione differenziale a variabili separabili

Equazione differenziale: $y' = xy$ in cui la x rappresenta $f(x)$ e la y rappresenta la $g(y)$. Una **nuova notazione** utilizzata negli esercizi è la seguente:

$$f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

Che indica che le **funzioni f e g sono continue nell'intervallo** $\mathbb{R}$.

L'esercizio si svolge *cercando* inizialmente le <u>soluzioni costanti</u>. Il modo più semplice per farlo è porre $y = 0$ e verificare se $g(y)$ si annulla: in caso affermativo esiste una soluzione costante. In questo esercizio si annulla, quindi *ha soluzione costante*.

Al contrario, le <u>soluzioni *non* costanti</u> si trovano quando $y \neq 0$. Quindi:

$$y' = xy \rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy \rightarrow \frac{1}{y}\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x \rightarrow \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Esplicitando il risultato:

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \quad c \in \mathbb{R} \longrightarrow y(x) = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad c \in \mathbb{R}$$

Dato che e^c può essere positivo o negativo escluso lo zero (soluzione costante!), si riscrive più precisamente l'**integrale generale dell'equazione**:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

È possibile **verificare la soluzione** dell'equazione differenziale effettuando una derivazione:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$
$$y'(x) = k \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \checkmark\text{Verificata}$$

1.2 Problema di Cauchy

Nel caso in cui si è interessati ad una soluzione particolare, è necessaria una condizione. In questo caso, si è di fronte al **problema di Cauchy**, il quale è caratterizzato dalla presenza di un'equazione differenziale e da almeno una condizione.
L'**obbiettivo** è verificare la/le condizione/i tramite una soluzione (o più soluzioni).
La **struttura** è la seguente:

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \qquad x_0 \in I \end{cases} \tag{2}$$

Esempio problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = -3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La risoluzione:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3y \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -3\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -3x + c \longrightarrow ...$$
$$... \longrightarrow y(x) = ke^{-3x} \quad k \in \mathbb{R} \text{ [\textbf{Integrale generale}]}$$

Adesso si esegue la **verifica della condizione** sostituendo quest'ultima nella soluzione:

$$\text{Condizione: } y(0) = 2$$
$$\text{Eq. diff.: } y(0) = ke^{-3\cdot(0)} \longrightarrow 2 = k \cdot e^0 \longrightarrow k = 2$$

Quindi, la **soluzione del problema di Cauchy**:

$$y(x) = 2e^{-3x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

Un altro esempio del problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)x \quad f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Cercando la **soluzione costante** sostituendo $y = 0$, si osserva che la funzione non si annulla, quindi $1 + y^2 \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, ovvero nessun numero reale annulla $g(y)$.
Cercando eventuali **soluzioni costanti**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y^2)x \longrightarrow \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \textbf{Integrale generale}\text{: } \arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Verificando la condizione sostituendo, si ottiene:

$$\text{Condizione: } y(0) = 1$$

$$\text{Eq. diff.: } \arctan(1) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + c \longrightarrow \arctan(1) = 0 + c \longrightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

È possibile **esplicitare** la funzione $y(x)$ dall'integrale generale, ottenendo la seguente forma:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Inoltre, dato che arctan è sicuramente compreso, per definizione, nell'intervallo:

$$\pm\frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + c < \frac{\pi}{2}$$

Allora è possibile sostituire la c con il valore trovato durante l'esplicitazione:s

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

Per controllare che la soluzione sia effettivamente all'**interno dell'intervallo**, avviene nel seguente modo:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2}$$

Sicuramente $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}$ è verificata per $x \in \mathbb{R}$. La parte di destra è possibile verificarla effettuando qualche manipolazione sulla disuguaglianza:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{4} \longrightarrow x^2 < \frac{\pi}{2}$$

Quindi, la soluzione è corretta quando x è nell'intervallo (esplicitando):

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < +\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Quindi, l'**intervallo massimale delle soluzioni**, ovvero il più grande intervallo in cui è definita la soluzione del problema di Cauchy, è così definita:

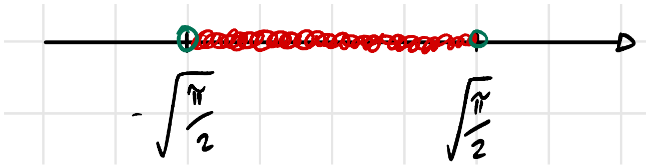

Figura 1: Intervallo massimale delle soluzioni.