

Soluzioni scheda 1

VR443470 - Andrea Valentini

marzo 2023

Indice

1	Soluzione esercizio 1	3
1.1	Soluzione a	3
1.2	Soluzione b	3
1.3	Soluzione c	3
1.4	Soluzione d	4
2	Soluzione esercizio 2	5
2.1	Soluzione a	5
2.2	Soluzione b	7
2.3	Soluzione c	8
2.4	Soluzione d	13
3	Soluzione esercizio 3	14
3.1	Soluzione a	14
3.2	Soluzione b	14
3.3	Soluzione c	15
4	Soluzione esercizio 4	17
5	Soluzione esercizio 5	18

1 Soluzione esercizio 1

Si considerino le seguenti matrici su \mathbb{C} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

1.1 Soluzione a

Si determini la matrice risultante ottenibile eseguendo l'operazione $(CD)A$:

$$\begin{aligned} (CD)A &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+4i & 5 \\ -2-2i & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+9i & -\frac{3}{2}-4i \\ -2-4i & 1+2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2 Soluzione b

Si determini la matrice risultante ottenibile eseguendo l'operazione $A^T B$:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ A^T B &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 3i \\ -\frac{1}{2} & -3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Soluzione c

Si determini la matrice risultante ottenibile eseguendo l'operazione $3A(B - D^T)$:

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow D^T = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow -D^T = \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ 3A(B - D^T) &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 3i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1-i \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] \\ &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1+2i \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3i & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1+2i \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3+6i \\ 0 & -9-3i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.4 Soluzione *d*

Si determini la matrice risultante ottenibile eseguendo l'operazione $(4B - C)^T - DC$:

$$\begin{aligned}(4B - C)^T - DC &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 12i \\ -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right]^T - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\&= \left[\begin{pmatrix} -3 & -4+12i \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right]^T - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+3i & 4i \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4+12i & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+3i & 4i \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -3+9i & 2-4i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2 Soluzione esercizio 2

Si considerino le seguenti matrici su \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1 Soluzione a

Si utilizza l'algoritmo di Eliminazione di Gauss per determinare una forma ridotta di ognuna delle matrici elencate.

La forma ridotta della **matrice A** è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2,3}(3)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{E_2(-1) \\ E_1(\frac{1}{2})}]{\substack{E_3(\frac{1}{12}) \\ E_4(\frac{1}{5})}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_3(\frac{1}{12}) \\ E_4(\frac{1}{5})}]{\substack{E_2(-1) \\ E_1(\frac{1}{2})}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{E_{4,3}(-4) \\ E_{3,2}(4)}]{\substack{E_{4,1}(-1) \\ E_{3,1}(1)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_{4,3}(-4) \\ E_{3,2}(4)}]{\substack{E_{4,1}(-1) \\ E_{3,1}(1)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma ridotta della **matrice B** è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_{4,1} \\ E_{3,2}}]{\substack{E_{4,1} \\ E_{3,2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{4,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma ridotta della **matrice** \mathbf{C} è la seguente:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,4}]{E_{5,2}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,5}(-1)]{E_{2,4}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{E_{1,5}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,3}(\frac{2}{3})]{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{E_3(\frac{3}{10})} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{E_{3,2}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{3})]{E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La forma ridotta della **matrice** \mathbf{D} è la seguente:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{E_{3,2}(-\frac{5}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{2})]{E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.2 Soluzione b

Date le forme ridotte A' , B' , C' , D' delle rispettive matrici A , B , C e D , il loro rango corrisponde al numero delle colonne dominanti, quindi:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{rk}(A) = 4$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{rk}(B) = 4$$

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{rk}(C) = 3$$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{rk}(D) = 3$$

2.3 Soluzione c

Si scrivano i sistemi lineari per cui le matrici indicate sopra sono le corrispondenti matrici aumentate, e si usi il Teorema di Rouché-Capelli per decidere se ognuno di questi sistemi ha o non ha soluzioni.

I sistemi lineari delle corrispondenti matrici aumentate sono:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_3 = 3 \\ 0 = 5 \end{cases} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 1 \end{cases} \\ C &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ -4x_1 = -2 \\ 3x_2 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases} \\ D &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Si applica il teorema di Rouché-Capelli per decidere se ogni sistema ha o non ha soluzioni.

Dimostrazione soluzioni matrice A . Considerando la matrice aumentata $(A|b)$ con il rango pari a 4:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Si esegue lo studio del rango della matrice incompleta A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si procede con l'Eliminazione di Gauss per ottenere la forma ridotta e infine si calcola il rango tramite le colonne dominanti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,3}]{} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2,3}(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{3,1}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,4}(\frac{1}{4})]{E_1(\frac{1}{2}), E_2(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono 3, quindi il rango della matrice incompleta A è 3 ($\text{rk}(A) = 3$). Il teorema di Rouché-Capelli afferma che se:

$$\text{rk}(A) < \text{rk}(A|b)$$

Ovvero se il rango della matrice incompleta è minore del rango della matrice completa, allora il sistema è impossibile da risolvere, cioè non ammette soluzioni.

QED

Dimostrazione soluzioni matrice B . Considerando la matrice aumentata $(B|b)$ con il rango pari a 4:

$$(B|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Si esegue lo studio del rango della matrice incompleta B :

$$B = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Si procede con l'Eliminazione di Gauss per ottenere la forma ridotta e infine si calcola il rango tramite le colonne dominanti:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{3,2}]{E_{4,1}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{E_{4,2}(-1)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Le colonne dominanti sono 4, quindi il rango della matrice incompleta B è 4 ($\text{rk}(B) = 4$). Il teorema di Rouché-Capelli afferma che se:

$$\text{rk}(B) = \text{rk}(B|b)$$

Ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa, allora il sistema è compatibile, cioè ammette una o infinite soluzioni. In particolare, dato n come il numero di incognite, cioè 6, allora:

$$\text{rk}(B) = \text{rk}(B|b) < n \implies 4 = 4 < 6 \quad \checkmark$$

Il sistema ammette infinite soluzioni.

QED

Dimostrazione soluzioni matrice C . Considerando la matrice aumentata $(C|b)$ con il rango pari a 3:

$$(C|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

Si esegue lo studio del rango della matrice incompleta C :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si procede con l'eliminazione di Gauss per ottenere la forma ridotta e infine si calcola il rango tramite le colonne dominanti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,5}(-1), E_{1,3}(2)]{E_{3,2}, E_{3,5}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,4}(\frac{2}{3})]{E_{1,4}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,3}(\frac{1}{3})]{E_{1,3}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono 2, quindi il rango della matrice incompleta C è 2 ($\text{rk}(C) = 2$). Il teorema di Rouché-Capelli afferma che se:

$$\text{rk}(C) < \text{rk}(C|b)$$

Ovvero se il rango della matrice incompleta è minore del rango della matrice completa, allora il sistema è impossibile da risolvere, cioè non ammette soluzioni.

QED

Dimostrazione soluzioni matrice D . Considerando la matrice aumentata $(D|b)$ con il rango pari a 3:

$$(D|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Si esegue lo studio del rango della matrice incompleta D :

$$D = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{array} \right)$$

Si procede con l'Eliminazione di Gauss per ottenere la forma ridotta e infine si calcola il rango tramite le colonne dominanti:

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{1,2}(\frac{1}{2})]{E_{1,3}(-1)} \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[E_2(\frac{1}{2})]{E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

Le colonne dominanti sono 2, quindi il rango della matrice incompleta D è 2 ($\text{rk}(D) = 2$). Il teorema di Rouché-Capelli afferma che se:

$$\text{rk}(D) < \text{rk}(D|b)$$

Ovvero se il rango della matrice incompleta è minore del rango della matrice completa, allora il sistema è impossibile da risolvere, cioè non ammette soluzioni.

QED

2.4 Soluzione d

Si trovino tutte le soluzioni del sistema di equazioni lineari:

$$(D|b) = D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si scrive la matrice aumentata:

$$(D|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

E si esegue l'Eliminazione di Gauss per ottenere una forma ridotta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{1,3}(-1)]{E_{3,2}(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{E_{3,2}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[E_2(\frac{1}{2})]{E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Il rango della matrice è pari al numero di colonne dominanti:

$$\text{rk}(D|b) = 3$$

Il rango della matrice incompleta D è pari a 3 (calcolato nel paragrafo 2.2). Quindi, grazie al Teorema di Rouché-Capelli si ha:

$$\text{rk}(D|b) = \text{rk}(D) = n \implies 3 = 3 = 3 \quad \checkmark$$

Dove n rappresenta il numero di incognite. Quindi, il sistema ammette un'unica soluzione che è quella trovata grazie all'Eliminazione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{11}{4} \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Il vettore soluzione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$$

3 Soluzione esercizio 3

Per ogni parametro t in \mathbb{R} si consideri la matrice:

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{pmatrix}$$

3.1 Soluzione a

Si calcola il rango di A_t con $t = -1$. La matrice A_{-1} è:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'Eliminazione di Gauss porta alla seguente forma ridotta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{1,2}(-2)]{E_{1,3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{2,1}(1)]{E_{2,3}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{3,1}(1)]{E_{1,3}(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di A_{-1} è pari a 3 (numero delle colonne dominanti):

$$\text{rk}(A_{-1}) = 3$$

3.2 Soluzione b

Si calcola il rango di A_t per ogni valore di t :

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{pmatrix}$$

Si applica l'Eliminazione di Gauss, che porta alla seguente forma ridotta:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{1,3}(-1)]{E_{1,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \\ 0 & -1-t & -t+1 & 2-t \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 0 & -1-t & -t+1 & 2-t \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2t+1 \\ 0 & -1-t & -t+1 & 2-t \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Il rango:

$$\text{rk}(A_t) = \begin{cases} 3 & t = -1 \\ 3 & t \neq -1 \end{cases}$$

Quindi il rango rimane a 3 per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$.

3.3 Soluzione c

Supponiamo che la matrice A_t sia la matrice aumentata di un sistema lineare su \mathbb{R} . Per quali valori di t il sistema avrà soluzione?

Per rispondere a questa domanda, è possibile sfruttare il teorema di Rouché-Capelli. Quindi, data la matrice aumentata $(A_t|b)$ e il suo sistema corrispondente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + tx_2 - x_3 = t \\ 2x_1 + 2tx_2 - x_3 = 3t+1 \\ x_1 - x_2 - tx_3 = 2 \end{cases}$$

La corrispondente matrice incompleta A_t sarà composta da:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 2t & -1 \\ 1 & -1 & -t \end{pmatrix}$$

Si calcola il rango della matrice incompleta tramite l'Eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 2t & -1 \\ 1 & -1 & -t \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{1,3}(-1)]{E_{1,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1-t & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(1)]{E_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -1-t & 1-t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta:

$$\text{rk}(A_t) = \begin{cases} 2 & t = -1 \\ 3 & t \neq -1 \end{cases}$$

Quindi, grazie al teorema di Rouché-Capelli è possibile affermare che il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 - x_3 = t \\ 2x_1 + 2tx_2 - x_3 = 3t+1 \\ x_1 - x_2 - tx_3 = 2 \end{cases}$$

Avrà soluzione **solo** nel caso in cui t sia diverso da -1 , altrimenti il sistema non avrà soluzioni e sarà impossibile da risolvere.

$$\begin{aligned} t = -1 &\implies \text{rk}(A_t) = 2 \implies \text{rk}(A_t) < \text{rk}(A_t|b) \implies \nexists \text{ soluzioni} \\ t \neq -1 &\implies \text{rk}(A_t) = 3 \implies \text{rk}(A_t) = \text{rk}(A_t|b) \implies \exists \text{ soluzioni} \end{aligned}$$

In particolare, sempre utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, dato che il numero di incognite è pari a 3 e il rango della matrice è 3, esiste un'unica soluzione. Per esempio, prendendo $t = 0$ e sostituendo tale valore nella matrice $(A_t|b)$ con A_t ridotto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 0 & t \\ 0 & -1-t & 1-t & 3t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{sostituzione}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{sistema}} \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema sarà:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } t \neq -1$$

4 Soluzione esercizio 4

Si risolva la seguente equazione nell'insieme di numeri complessi $x^4 + 1 = 0$:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= 0 \\ x^4 &= -1 \\ x &= \sqrt[4]{-1} \end{aligned}$$

↓ utilizzando la forma polare $r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$= \sqrt[4]{1}(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$$

↓ calcolo della n -esima radice usando $\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}))$

$$= \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \right)$$

↓ sostituzione dei valori 0, 1, 2, 3 al posto di k

$$= \begin{cases} x_1 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4}\right) \right) \\ x_2 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}\right) \right) \\ x_3 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}\right) \right) \\ x_4 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4}\right) \right) \end{cases}$$

↓ qualche calcolo algebrico e fine dell'esercizio

$$= \begin{cases} x_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ x_2 = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\ x_3 = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) \\ x_4 = \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right) \end{cases}$$

5 Soluzione esercizio 5

Si mostri che la trasposta A^T e l'inversa A^{-1} coincidono per $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ per ogni θ .

La matrice trasposta:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

La matrice inversa si ottiene affiancando una matrice identità ed eseguendo l'Eliminazione di Gauss così da avere la matrice identità dalla parte opposta (ricordando che $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ e che $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$):

$$\begin{aligned} (A|I_2) &= \left(\begin{array}{cc|cc} \cos \theta & -\sin \theta & 1 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{1,2}(-\tan \theta)} \left(\begin{array}{cc|cc} \cos \theta & -\sin \theta & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos \theta} & -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{E_2(\cos \theta)} \left(\begin{array}{cc|cc} \cos \theta & -\sin \theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \theta & \cos \theta \end{array} \right) \xrightarrow{E_1(\frac{1}{\cos \theta})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \frac{1}{\cos \theta} & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \theta & \cos \theta \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{E_{2,1}(\frac{\sin \theta}{\cos \theta})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} & \sin \theta \\ 0 & 1 & -\sin \theta & \cos \theta \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 1 & -\sin \theta & \cos \theta \end{array} \right) \end{aligned}$$

E a destra si ha la matrice inversa, la quale è uguale alla matrice trasposta:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ A^T &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &\parallel \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$