Università degli studi di Verona

Soluzioni scheda 2

VR455961	Davide Bragantini
VR443470	Andrea Valentini

maggio 2023

Indice

1 Soluzione esercizio 1

Sia A_k la seguente matrice reale:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Soluzione *a*

Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette inversa.

Una matrice quadrata a coefficienti in un campo dell'insieme $\mathbb{K}$ è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Quindi, si procede con il calcolo del determinante della matrice A_k. Visto che si tratta di una matrice di ordine 3, si utilizza la regola di Sarrus per risolvere il determinante. Si duplica la matrice:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 2k & 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 & k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 & -k & -k & 0 \end{array}$$

Si sommano i prodotti lungo le prime tre diagonali principali:

$$\begin{aligned} 1° \text{ diag} &: (2 \cdot k \cdot 0) = 0 \\ 2° \text{ diag} &: \left(2 \cdot k^2 \cdot -k\right) = 2k^2 \cdot -k = -2k^3 \\ 3° \text{ diag} &: [2k \cdot (k-1) \cdot -k] = 2k \cdot \left(-k^2 + k\right) = -2k^3 + 2k^2 \\ \text{Somma} &: 0 + \left(-2k^3\right) + \left(-2k^3 + 2k^2\right) = -4k^3 + 2k^2 \end{aligned}$$

E si esegue lo stesso calcolo considerando le tre diagonali opposte:

$$\begin{aligned} 1° \text{ diag opp} &: (2k \cdot k \cdot -k) = -2k^3 \\ 2° \text{ diag opp} &: [2 \cdot (k-1) \cdot 0] = 0 \\ 3° \text{ diag opp} &: \left(2 \cdot k^2 \cdot -k\right) = -2k^3 \\ \text{Somma} &: -2k^3 + 0 + \left(-2k^3\right) = -4k^3 \end{aligned}$$

Si esegue la sottrazione dei due risultati ottenuti mantenendo a sinistra quello della diagonale principale:

$$\left(-4k^3 + 2k^2\right) - \left(-4k^3\right) = 2k^2$$

Quindi il determinante è:

$$\det\left(A_k\right) = 2k^2$$

La matrice A_k ammette inversa per qualsiasi valore reale di k, poiché non esiste nessun valore (in $\mathbb{R}$) in grado di annullare l'espressione $2k^2$.

1.2 Soluzione b

Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che A_k ammette inversa. Si calcoli A_k^{-1} usando la formula $A_k^{-1} = \frac{1}{\det(A_k)} A_k^*$.

Per calcolare la matrice inversa si calcolano prima i complementi algebrici Com:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Com}\,(A_{11}) = &\quad (-1)^{1+1} \cdot C_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} k & k^2 \\ -k & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \left[0 - \left(-k^3\right)\right] = k^3 \\
\mathrm{Com}\,(A_{21}) = &\quad (-1)^{2+1} \cdot C_{21} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \left[0 - \left(-2k^2\right)\right] = -2k^2 \\
\mathrm{Com}\,(A_{31}) = &\quad (-1)^{3+1} \cdot C_{31} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ k & k^2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \left(2k^2 - 2k^2\right) = 0 \\
\mathrm{Com}\,(A_{12}) = &\quad (-1)^{1+2} \cdot C_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & k^2 \\ -k & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \left[0 - \left(-k^3\right)\right] = -k^3 \\
\mathrm{Com}\,(A_{22}) = &\quad (-1)^{2+2} \cdot C_{22} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \left[0 - \left(-2k^2\right)\right] = 2k^2 \\
\mathrm{Com}\,(A_{32}) = &\quad (-1)^{3+2} \cdot C_{32} = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ k-1 & k^2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \left[2k^2 - \left(2k^2 - 2k\right)\right] = -2k \\
\mathrm{Com}\,(A_{13}) = &\quad (-1)^{1+3} \cdot C_{13} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & k \\ -k & -k \end{pmatrix} = 1 \cdot \left[-k^2 + k - \left(-k^2\right)\right] = k \\
\mathrm{Com}\,(A_{23}) = &\quad (-1)^{2+3} \cdot C_{23} = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -k & -k \end{pmatrix} = -1 \cdot [-2k - (-2k)] = 0 \\
\mathrm{Com}\,(A_{33}) = &\quad (-1)^{3+3} \cdot C_{33} = (-1)^6 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ k-1 & k \end{pmatrix} = 1 \cdot [2k - (2k-2)] = -2
\end{aligned}$$

Con i complementi algebrici si costruisce la matrice e si esegue la trasposta per ottenere A_k^*:

$$A_k^* = \begin{pmatrix} k^3 & -k^3 & k \\ -2k^2 & 2k^2 & 0 \\ 0 & -2k & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Infine, si applica la formula:

$$A_k^{-1} = \frac{1}{\det(A_k)} A_k^* = \frac{1}{2k^2} \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 1 & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{2k} & 0 & -\frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$$

2 Soluzione esercizio 2

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definito nell'Esempio 5.2(2), si consideri il seguente sottoinsieme per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{S}_t = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = t \right\}$$

2.1 Soluzione *a*

Si trovino i valori di t per cui l'insieme $\mathscr{S}_t$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Per verificare quali valori di t rispettano il teorema di caratterizzazione dei sottospazi vettoriali, si possono effettuare alcune prove banali:

- Assumendo che $t = 1$:

  $$\mathscr{S}_1 = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 1 \right\}$$

  E trovando due funzioni che appartengano all'insieme:

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 4 & x \neq 0 \end{cases}$$

  $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 5 & x \neq 0 \end{cases}$$

  Si esegue la verifica delle due proprietà:

  $$\begin{aligned} \text{Proprietà } a &: \quad (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2 \neq 0 \\ \text{Proprietà } b &: \quad \lambda f(x) = \lambda f(0) = \lambda 1 \neq 0 \end{aligned}$$

  Le proprietà non sono rispettate, quindi con il valore $t = 1$ l'insieme $\mathscr{S}_1$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Assumendo che $t = -1$:

  $$\mathscr{S}_{-1} = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = -1 \right\}$$

  E trovando due funzioni che appartengano all'insieme:

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 8 & x \neq 0 \end{cases}$$

  $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 10 & x \neq 0 \end{cases}$$

  Si esegue la verifica delle due proprietà:

  $$\begin{aligned} \text{Proprietà } a &: \quad (f+g)(0) = f(0) + g(0) = -1 - 1 = -2 \neq 0 \\ \text{Proprietà } b &: \quad \lambda f(x) = \lambda f(0) = \lambda - 1 \neq 0 \end{aligned}$$

  Le proprietà non sono rispettate, quindi con il valore $t = -1$ l'insieme $\mathscr{S}_{-1}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Assumendo che $t = 0$:

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0 \right\}$$

E trovando due funzioni che appartengano all'insieme:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2 & x \neq 0 \end{cases}$$

Si esegue la verifica delle due proprietà:

$$\begin{aligned} \text{Proprietà } a \quad &: \quad (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 = 0 \\ \text{Proprietà } b \quad &: \quad \lambda f(x) = \lambda f(0) = \lambda 0 = 0 \end{aligned}$$

Le proprietà sono rispettate, quindi con il valore $t = 0$ l'insieme $\mathscr{S}_0$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

È possibile concludere le prove con i valori t e giungere ad una conclusione. L'insieme $\mathscr{S}_t$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se e solo se t ha valore 0. Negli altri casi l'insieme non rispetta il teorema di caratterizzazione dei sottospazi vettoriali. Infatti, andando ad aumentare positivamente o negativamente la t, la proprietà a avrà come risultato un valore sempre diverso da zero.

2.2 Soluzione *b*

Sia $\mathscr{U}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ generato da f e g dove $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si trovi una base dell'intersezione $\mathscr{U} \cap \mathscr{S}_0$.

L'insieme $\mathscr{S}_0$ è così definito:

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0 \right\}$$

Per evitare errori, una funzione che appartiene a questo insieme verrà indicata con l'apice, quindi $f' \in \mathscr{S}_0$. Si prende una qualsiasi funzione dall'insieme $\mathscr{S}_0$ così definita:

$$f' \in \mathscr{S}_0 \qquad f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 4 & x \neq 0 \end{cases}$$

Le funzioni generatori del sottospazio $\mathscr{U}$ sono:

$$\begin{aligned} f \in \mathscr{U} \qquad & f(x) = \sin(x) \\ g \in \mathscr{U} \qquad & g(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

Si sceglie un valore comodo e si formano due insiemi:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \{f'(0), f(0), g(0)\} = \{0, 0, 1\}$$

$$x = 90 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \{f'(90), f(90), g(90)\} = \{4, 1, 0\}$$

Adesso è necessario dimostrare che $\{v_1, v_2\}$ è un sistema di generatori, cioè è necessario stabilire se per ogni $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathscr{U} \cap \mathscr{S}_0$ esistono due scalari $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 = \mathbf{w} \quad \xrightarrow{\text{sostituzione}} \quad a_1 (0,0,1) + a_2 (4,1,0) &= (w_1, w_2, w_3) \\ (0,0,a_1) + (4a_2, a_2, 0) &= (w_1, w_2, w_3) \\ (4a_2, a_2, a_1) &= (w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

Il relativo sistema lineare:

$$\begin{cases} 4a_2 = w_1 \\ a_2 = w_2 \\ a_1 = w_3 \end{cases}$$

I vettori v_1, v_2 sono un sistema di generatori se e solo se il sistema ammette soluzione. Per farlo, si utilizza il teorema di Rouché Capelli e per calcolare il rango, necessario per il teorema, si utilizza l'Eliminazione di Gauss così da ottenere una forma matriciale ridotta:

$$\left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 1 & w_2 \\ 1 & w_3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{1,3}\left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 1 & w_2 \\ 0 & w_3 - \frac{w_1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{1,2}\left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 0 & w_2 - \frac{w_1}{4} \\ 0 & w_3 - \frac{w_1}{4} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 0 & \frac{4w_2 - w_1}{4} \\ 0 & \frac{4w_3 - w_1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{2,3}\left(\frac{-w_1 + 4w_3}{w_1 - 4w_2}\right)} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 0 & \frac{4w_2 - w_1}{4} \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il rango della matrice aumentata è 2. Tuttavia, nel caso in cui w_2, w_1 siano pari a zero, il rango è 1. Dunque, esiste una e un'unica soluzione al sistema. Quindi è possibile concludere che v_1, v_2 sono un sistema di generatori. Per affermare che siano anche una base è necessario dimostrare che siano anche linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} b_1 v_1 + b_2 v_2 = 0 \quad \xrightarrow{\text{sostituzione}} \quad b_1 (0,0,1) + b_2 (4,1,0) &= (0,0,0) \\ (0,0,b_1) + (4b_2, b_2, 0) &= (0,0,0) \\ (4b_2, b_2, b_1) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Il sistema relativo:

$$\begin{cases} 4b_2 = 0 \\ b_2 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

E con il metodo di sostituzione si trova subito che l'unica soluzione possibile è $b_1 = b_2 = 0$. Dunque i vettori sono linearmente indipendenti e l'insieme:

$$\{v_1, v_2\} = \{(f'(0), f(0), f(0)), (f'(90), f(90), g(90))\} = \{(0,0,1), (4,1,0)\}$$

È una base di $\mathscr{U} \cap \mathscr{S}_0$.

3 Soluzione esercizio 3

Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione data da:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x - 3y + 3z \end{pmatrix}$$

Per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

3.1 Soluzione *a*

3.2 Soluzione *b*

3.3 Soluzione *c*

3.4 Soluzione *d*

3.5 Soluzione *e*

3.6 Soluzione *f*

4 Soluzione esercizio 4

Sia $\mathscr{C}$ la base di $\mathbb{C}^3$ dell'esercizio 3(d) e sia $\mathscr{D} = \{u_1, u_2, u_3\}$ dove $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{D}$ è una base di $\mathbb{C}^3$ e si calcoli la matrice del cambio di base $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$.