1. [7 punti] Si consideri il numero complesso $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

(a) Si calcolino i seguenti numeri:

(i) Il modulo $|z|$ di z

$z = a + bi$ dove $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

(ii) Il coniugato $\bar{z}$ di z

$\bar{z} = a - bi$ quindi $\bar{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

(iii) Il numero complesso $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

(b) Si calcoli il prodotto zw dove $w = 5(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4}$

La forma trigonometrica di z:

$$z = |z|(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$$

dove $\cos(\alpha) = \frac{a}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e ~~b=~~ $\cos(\alpha) = \frac{b}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cioè $z = \cos(\frac{5\pi}{4}) + i \sin(\frac{5\pi}{4})$.

Il prodotto:
$$\begin{aligned} zw &= 5|z|(\cos(\tfrac{3\pi}{4} + \alpha) + i \sin(\tfrac{3\pi}{4} + \alpha)) \\ &= 5(\cos(\tfrac{8\pi}{4}) + i \sin(\tfrac{8\pi}{4})) \\ &= 5(\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + i \underbrace{\sin(2\pi)}_{0} \\ &= 5 \end{aligned}$$

(c) Si calcolino le radici quadrate di z.

$$z_0 = \sqrt{|z|}\left(\cos(\tfrac{\alpha}{2}) + i \sin(\tfrac{\alpha}{2})\right) = \cos(\tfrac{5\pi}{8}) + i \sin(\tfrac{5\pi}{8})$$

$$z_1 = \sqrt{|z|}\left(\cos(\tfrac{\alpha+2\pi}{2}) + i \sin(\tfrac{\alpha+2\pi}{2})\right) = \cos(\tfrac{7\pi}{8}) + i \sin(\tfrac{7\pi}{8})$$

2 (6a) [7 punti] Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli una forma ridotta U di A e si determini il rango di A.

$$A \overset{E_1(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{21}(-1) \\ \sim \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-2) \end{matrix} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$\text{rk}A = \text{rk}U = \#\text{pivot di } U = 2.$

$$*A \overset{E_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{21}(-2) \\ \sim \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_2(-\frac{1}{2}) \\ \sim \\ E_{32}(1) \\ E_{42}(2) \end{matrix} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$*A \overset{E_{13}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{21}(-1) \\ \sim \\ E_{31}(-2) \\ E_{41}(-2) \end{matrix} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Metodo alternativo

(b) Si trovi una matrice E tale che $A = EU$.

$$U = E_{41}(-2)E_{31}(-1)E_{21}(-1)E_1(\tfrac{1}{2})A$$

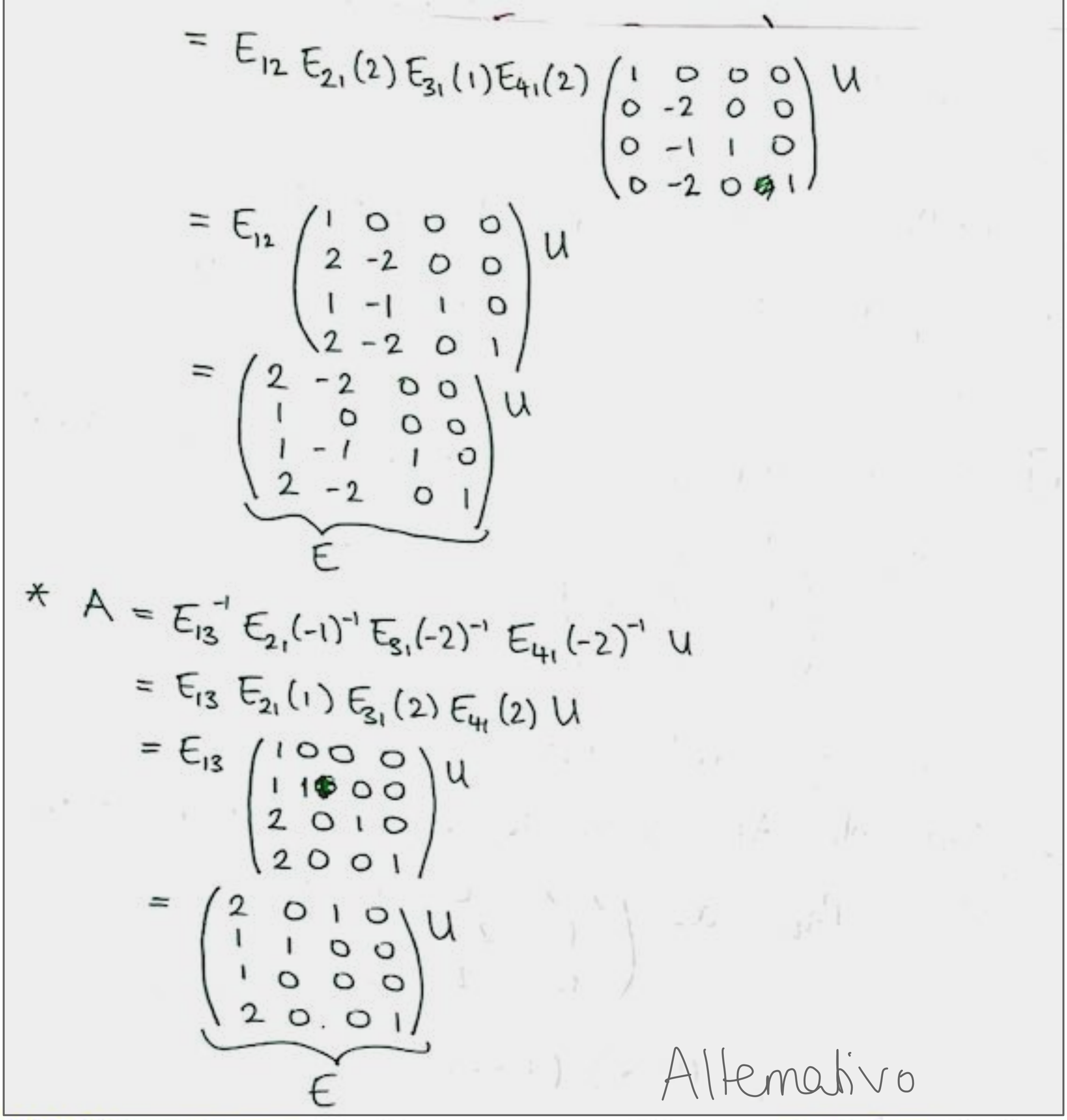
$$\Rightarrow A = E_1(\tfrac{1}{2})^{-1}E_{21}(-1)^{-1}E_{31}(-1)^{-1}E_{41}(-2)^{-1}U$$

$$= E_1(2)E_{21}(1)E_{31}(1)E_{41}(2)U$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$* A = E_{12}^{-1}E_{21}(-2)^{-1}E_{31}(-1)^{-1}E_{41}(-2)^{-1}E_2(-\tfrac{1}{2})^{-1}E_{32}(1)^{-1}E_{42}(2)^{-1}U$$

$$= E_{12}E_{21}(2)E_{31}(1)E_{41}(2)E_2(-2)E_{32}(-1)E_{42}(-2)U$$



$$= E_{12}\, E_{21}(2)\, E_{31}(1)\, E_{41}(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} U$$

$$= E_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} U$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} U$$

$$* \quad A = E_{13}^{-1}\, E_{21}(-1)^{-1}\, E_{31}(-2)^{-1}\, E_{41}(-2)^{-1}\, U$$

$$= E_{13}\, E_{21}(1)\, E_{31}(2)\, E_{41}(2)\, U$$

$$= E_{13} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} U$$

Alternativo

(c) Si risolva il sistema lineare per cui la matrice A è la matrice aumentata corrispondente.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{equivalente}]{\text{sistema lineare}} \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\phantom{\begin{matrix}1 & 0 & -2\end{matrix}}}_{U'}$$

Abbiamo che $\mathrm{rk}\, U' = \mathrm{rk}\, U < 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni.

$$\xrightarrow[\text{non dominante}]{t = x_3} \begin{cases} x_1 = 1 + 2x_3 = 2t + 1 \\ x_2 = -x_3 = -t \\ x_3 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(d) Si dica se il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ammette una sola soluzione

$\text{rk}\left(A \middle| \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}\right) = \text{rk}A = 2 < 4$ quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare ammette infinite soluzione.

3. [10 punti] Si consideri la seguente matrice con $t \in \mathbb{C}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ t & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino gli autovalori di A_t.

Gli autovalori di A_t sono le radici del polinomio caratteristico: $p_{A_t} = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ t & 2-x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{matrice triang.}}{=} (2-x)^2 (1-x)$$

$\Rightarrow$ Gli autovalori: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

(b) Si determini i valori di t per cui la matrice A_t è diagonalizzabile.

A_t è diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_1 = d_1$ e $m_2 = d_2$

dove m_i molt. algebrica e

d_i molt. geometrica

$\Leftrightarrow d_1 + d_2 = 3$

$d_1 = \dim E_{A_t}(\lambda_1) = \dim N(A_t - 2I_3) = -\text{rk}(A_t - 2I_3) + 3.$

$d_2 = \dim_{A_t}(\lambda_2) = \dim N(A_t - I_3) = 3 - \text{rk}(A_t - I_3).$

Dunque

A_t è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \text{rk}(A_t - 2I_3) = 1$ e $\text{rk}(A_t - I_3) = 2$

$$A_t - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{E_1\left(\frac{1}{t}\right)}{\overset{E_{12}}{\underset{E_{32}}{\sim}}} \begin{pmatrix} ① & 0 & 0 \\ 0 & ① & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$t \neq 0$

$$A_0 - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{E_{13}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & ① & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi
$$\operatorname{rk}(A_t - 2I_3) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

$$A_t - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{21}(-t)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{32}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} ① & 0 & 0 \\ 0 & ① & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\operatorname{rk}(A_t - I_3) = 2$.

Dunque A_t è diagonalizzabile se e solo se $t = 0$

(c) Si trova una base di ogni autospazio di A_0.

$\boxed{E_{A_0}(\lambda_1)} = N(A_0 - 2I_3)$

Gli elementi di $N(A_0 - 2I_3)$ sono le soluzioni del sistema lineare $\{x_2 - x_3 = 0$.

3°+1° colonne $\rightsquigarrow$ non è dominanti
$x_1 = t$
$x_3 = s$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = x_3 = s \\ x_3 = s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{C}.$$

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{A_0}(\lambda_1)$.

$\boxed{E_{A_0}(\lambda_2)} = N(A_0 - I_3)$

Gli elementi di $N(A_0 - I_3)$ sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

3° colonna $\rightsquigarrow$ non dominante
$x_3 = t$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{C}$. Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_{A_0}(\lambda_2)$.

per ogni $w \in \mathbb{R}^m$ Quindi $BA = I_n$ e

4. [6 punti] Si consideri la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Vero o falso?

(a) La matrice B è la matrice associata all'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3x \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{ \underset{b_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \}$ di $\mathbb{R}^2$ e la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

La matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$ e can è la matrice $([f(b_1)]_{can} \ [f(b_2)]_{can}) = (f(b_1) \ f(b_2))$

$f(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $f(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dunque $\boxed{\text{VERO}}$.

(b) Il sottospazio $C(B)$ di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3.

$\dim C(B) = \mathrm{rk} B = \#$ colonne dominante in una forma ridotta $\leq \#$ colonne di B $= 2$

Dunque $\dim C(B) < 3$, quindi $\boxed{\text{FALSO}}$

(c) Il sottospazio $N(B)$ di $\mathbb{R}^2$ possiede una base ortonormale.

$N(B) = \{0\}$ quindi non possiede una base.

$\boxed{\text{FALSO}}$

5. Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = \{b_1, .., b_n\}$. Si dimostri che l'applicazione delle coordianate $c_\mathcal{B}$ è un isomorfismo.

L'applicazione lineare $g_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) := \alpha_1 b_1 + .. + \alpha_n b_n$ è l'inversa di $c_\mathcal{B}$. Infatti $c_\mathcal{B} g_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) = c_\mathcal{B}(\alpha_1 b_1 + .. + \alpha_n b_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ e

$g_\mathcal{B} c_\mathcal{B}(\alpha_1 b_1 + .. + \alpha_n b_n) = g_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) = \alpha_1 b_1 + .. + \alpha_n b_n.$