Esercitazioni Algebra Lineare

VR443470

febbraio 2023

Indice

1 Basi **3**
1.1 Somma e trasposte 3
1.2 (Anti-)Hermitiane e (anti-)simmetriche 5

1 Basi

1.1 Somma e trasposte

I classici esercizi di Algebra Lineare prevedono varie operazioni sulle matrici. Partendo dalle basi, si introducono le operazioni di somma e trasposizione.

Date 3 matrici A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 3 \\ -2+i & 5 & i2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3i & 2 \\ 4 & -i \\ 2-i & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 3i & 2-i \\ 4i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La prima operazione da eseguire è la classificazione delle matrici. In questo caso, le matrici hanno le seguenti dimensioni:

$$A \in \mathbb{M}_{2\times 3} \qquad B \in \mathbb{M}_{3\times 2} \qquad C \in \mathbb{M}_{2\times 3}$$

La seconda operazione da eseguire è controllare se è possibile eseguire l'operazione richiesta dall'esercizio. In questo caso, viene chiesta la somma. Per eseguire quest'ultima (vale lo stesso per la sottrazione), le dimensioni delle matrici devono essere tutte **identiche**. Dato che in questo caso la matrice B (3×2) differisce di dimensione rispetto alle due matrici A, C (2×3), è necessario fare qualcosa per eseguire l'operazione di somma.

Dato che è ancora l'inizio, non verranno effettuate manipolazioni complesse. Quindi, si supponga di eseguire questa operazione di somma/sottrazione:

$$2A^T - 4\overline{B} + 3C^T$$

Prima di eseguire l'operazione, si ottengono le relative matrici coniugate e trasposte. L'operazione di **coniugazione** è eseguibile cambiando i segni ai valori complessi (quindi alle i). Invece, l'operazione di **trasposizione** (T) inverte le colonne e le righe di una matrice. I risultati sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 3 \\ -2+i & 5 & i2 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2+i \\ -i & 5 \\ 3 & i2 \end{bmatrix} \quad 2A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4+2i \\ -2i & 10 \\ 6 & 4i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3i & 2 \\ 4 & -i \\ 2-i & -1 \end{bmatrix} \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} -3i & 2 \\ 4 & i \\ 2+i & -1 \end{bmatrix} \quad 4\overline{B} = \begin{bmatrix} -12i & 8 \\ 16 & 4i \\ 8+4i & -4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3i & 2-i \\ 4i & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} -2 & 4i \\ 3i & 1 \\ 2-i & 0 \end{bmatrix} \quad 3C^T = \begin{bmatrix} -6 & 12i \\ 9i & 3 \\ 6-3i & 0 \end{bmatrix}$$

Adesso è possibile eseguire la sottrazione tra $\alpha = 2A^T - 4\overline{B}$ e successivamente la somma tra $\alpha + 3C^T$:

$$\alpha = 2A^T - 4\overline{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4+2i \\ -2i & 10 \\ 6 & 4i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12i & 8 \\ 16 & 4i \\ 8+4i & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12i & 12+2i \\ -16-2i & 10-4i \\ 1-4i & 4+4i \end{bmatrix}$$

Si esegue la somma:

$$\alpha + 3C^T = \begin{bmatrix} 2+12i & 12+2i \\ -16-2i & 10-4i \\ 1-4i & 4+4i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 12i \\ 9i & 3 \\ 6-3i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+12i & -12+14i \\ -16+7i & 13-4i \\ 7-7i & 4+4i \end{bmatrix}$$

1.2 (Anti-)Hermitiane e (anti-)simmetriche

Diamo alcune definizioni per capire come fare gli esercizi:

- È possibile abbreviare letteralmente le operazioni di trasposizione e coniugazione scrivendo **trasposta-coniugata**;
- Una matrice viene detta **hermitiana** quando la matrice originaria è uguale alla sua trasposta-coniugata:

$$\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T = A \Longrightarrow A^H$$

- Una matrice viene detta **anti-hermitiana** quando la matrice trasposta-coniugata corrisponde alla matrice originaria ma cambiata di segno:

$$\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T = -A \Longrightarrow \text{ anti-hermitiana}$$

- Una matrice viene detta **simmetrica** quando la matrice originaria è uguale alla sua trasposta:

$$A = A^T \Longrightarrow \text{ simmetrica}$$

- Una matrice viene detta **anti-simmetrica** quando la sua trasposta corrisponde alla matrice originaria ma cambiata di segno:

$$-A = A^T \Longrightarrow \text{ anti-simmetrica}$$

Prendendo come esempio le tre matrici A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 3 \\ -3 & i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & i3 \\ -i3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si eseguono le rispettive operazioni di trasposizione e coniugazione:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2i & 3 \\ -3 & i \end{bmatrix} & A^T &= \begin{bmatrix} 2i & -3 \\ 3 & i \end{bmatrix} & \overline{A^T} &= \begin{bmatrix} -2i & -3 \\ 3 & -i \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix} & B^T &= \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix} & \overline{B^T} &= \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 2 & -i \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} -1 & i3 \\ -i3 & 1 \end{bmatrix} & C^T &= \begin{bmatrix} -1 & -i3 \\ i3 & 1 \end{bmatrix} & \overline{C^T} &= \begin{bmatrix} -1 & i3 \\ -i3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da questi risultati è possibile notare come A, B <u>non</u> siano hermitiane, mentre C lo sia. Inoltre, dalle trasposte è possibile osservare come A, C <u>non</u> siano simmetriche, mentre B lo sia. Invece, per verificare l'anti-hermitiana e l'anti-simmetrica, è necessario negare le matrici originarie:

$$-A = \begin{bmatrix} -2i & -3 \\ 3 & -i \end{bmatrix} \qquad -B = \begin{bmatrix} -i & -2 \\ -2 & -i \end{bmatrix} \qquad -C = \begin{bmatrix} 1 & -i3 \\ i3 & -1 \end{bmatrix}$$

Da questi risultati è possibile notare come B, C <u>non</u> siano anti-hermitiane, mentre A lo sia. Inoltre, osservando nuovamente le trasposte, è possibile osservare come A, B e C <u>non</u> siano anti-simmetriche