# Soluzione - Simulazione di Elaborazione di segnali e immagini

Università degli Studi di Verona

22 Gennaio 2020

## 1 Soluzione Esercizio

Si rappresenta il segnale $G(\mu)$ nel dominio delle frequenze. Per farlo, si prende ogni segnale e si traduce nel corrispettivo dominio delle frequenze. In questo caso, ogni segnale è rappresentato da una box. Quindi, partendo dal primo a sinistra (lettera $a$) e andando verso destra, si elencano matematicamente i vari segnali. Si ricorda che la definizione di box è la seguente (dominio del tempo $\rightarrow$ dominio delle frequenze):

$$A \cdot T \cdot \operatorname{sinc}(T \cdot t) \xrightarrow{\mathscr{F}} A \cdot \Pi\left(\frac{\mu - \mu_0}{T}\right)$$

a) Il segnale ha le frequenze comprese tra $-30$ e $-60$, quindi il suo centro è:

$$(-30 + (-60)) \div 2 = -45$$

Inoltre, la sua ampiezza $(A)$ è pari a 2.
Sapendo che un segnale non centrato nell'origine e con segno negativo è *shiftato* a sinistra, allora si scrive la sua rappresentazione nel **dominio delle frequenze**:

$$2 \cdot \Pi\left(\frac{\mu + 45}{30}\right)$$

Dove 2 è l'ampiezza, 45 è lo *shift* effettuato e 30 la larghezza della box.

b) Il segnale ha le frequenze comprese tra $-5$ e $+5$, quindi il suo centro è:

$$(-5 + 5) \div 2 = 0$$

Inoltre, la sua ampiezza è pari a 1.
La rappresentazione nel **dominio delle frequenze** di un segnale centrato nell'origine è banale:

$$1 \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{10}\right)$$

Dove 1 è l'ampiezza (trascurabile) e 10 la larghezza della box.

c) Il segnale ha le frequenze comprese tra +30 e +60, quindi il suo centro è:

$$(30+60) \div 2 = +45$$

Inoltre, la sua ampiezza è pari a 2.
Sapendo che un segnale non centrato nell'origine e con segno positivo è *shiftato* a destra, allora si scrive la sua rappresentazione nel **dominio delle frequenze**:

$$2 \cdot \Pi\left(\frac{\mu-45}{30}\right)$$

Dove 2 è l'ampiezza, $-45$ è lo *shift* effettuato e 30 la larghezza della box.

Sommando tutti i segnali trovati, si ottiene la seguente funzione $G(\mu)$ nel **dominio delle frequenze**:

$$G(\mu) = \underbrace{\Pi\left(\frac{\mu}{10}\right)}_{b} + \underbrace{2\Pi\left(\frac{\mu-45}{30}\right)}_{c} + \underbrace{2\Pi\left(\frac{\mu+45}{30}\right)}_{a}$$

Per portare il segnale $G(\mu)$ dal dominio delle frequenze al dominio del tempo, è necessario eseguire l'antitrasformata di Fourier. Niente di impossibile, seguendo le seguenti formule, sarà chiaro e semplice.
Per descrivere il dominio duale (frequenze - tempo) si utilizzano le seguenti proprietà, con $x_1$ ed $x_2$ appartenenti ai due domini duali, rispettivamente:

- **Proprietà notevole**:

$$\Pi(x_1) \xrightarrow{\mathscr{F}\left(\text{oppure } \mathscr{F}^{-1}\right)} \operatorname{sinc}(x_2)$$

- **Proprietà di amplificazione**:

$$A\, f(x_1) \xrightarrow{\mathscr{F}\left(\text{oppure } \mathscr{F}^{-1}\right)} A\, F(x_2)$$

- **Scalatura temporale**:

$$f\left(\frac{x_1}{b}\right) \xrightarrow{\mathscr{F}\left(\text{oppure } \mathscr{F}^{-1}\right)} b \cdot F(x_2 \cdot b)$$

- **Proprietà di shift nel tempo**:

$$F(\mu-\mu_0) = f(t) \cdot e^{j2\pi t\mu_0}$$

Il segnale nel dominio continuo del tempo:

$$\begin{aligned}
g(t) &= 10\operatorname{sinc}(10t) + 2 \cdot 30\operatorname{sinc}(30t) \cdot e^{j2\pi t45} + 2 \cdot 30\operatorname{sinc}(30t) \cdot e^{-j2\pi t45} \\
&| \\
&= 10\operatorname{sinc}(10t) + 60\operatorname{sinc}(30t) \cdot \left(e^{j2\pi t45} + e^{-j2\pi t45}\right) \\
&| \\
&= 10\operatorname{sinc}(10t) + 60\operatorname{sinc}(30t) \cdot 2\cos(2\pi 45t)
\end{aligned}$$

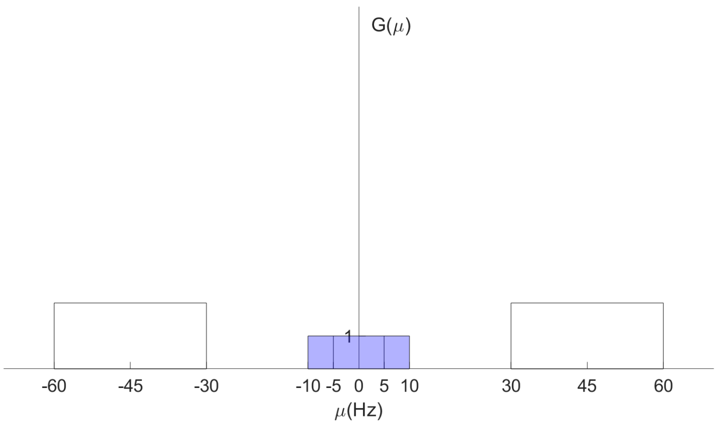
$$\text{dato che } \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

## 2 Soluzione Esercizio

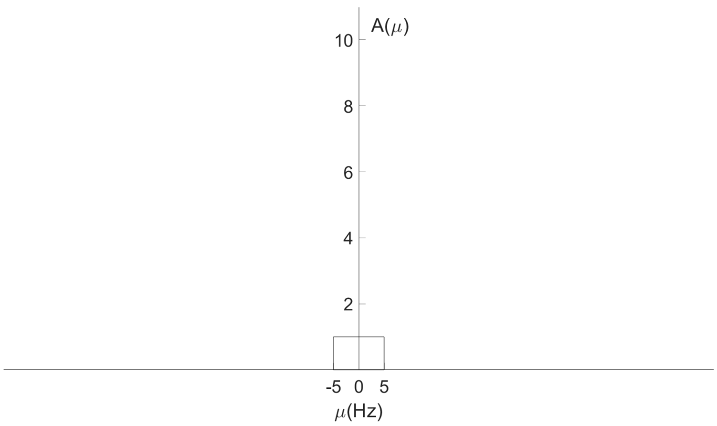
Adesso si eseguono le elaborazioni a cui è sottoposto il segnale $g(t)$. La prima operazione da applicare è il **passo basso ideale** con frequenza di taglio 10 Hz:

$$\text{Dominio del tempo} \longrightarrow a(t) = g(t) * 20\text{sinc}(20t)$$

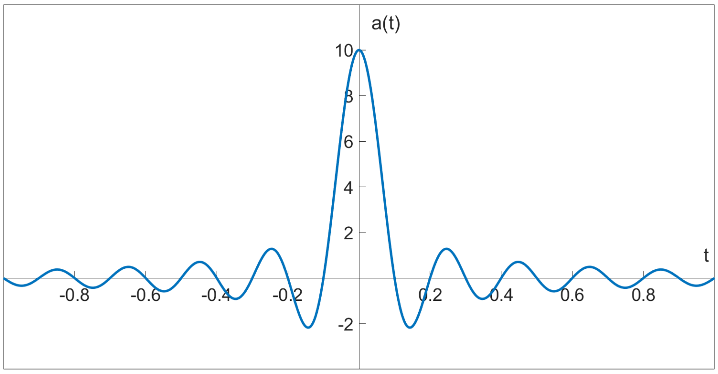
$$\text{Dominio delle frequenze} \longrightarrow A(\mu) = G(\mu) \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{20}\right)$$




Segnale $G(\mu)$.



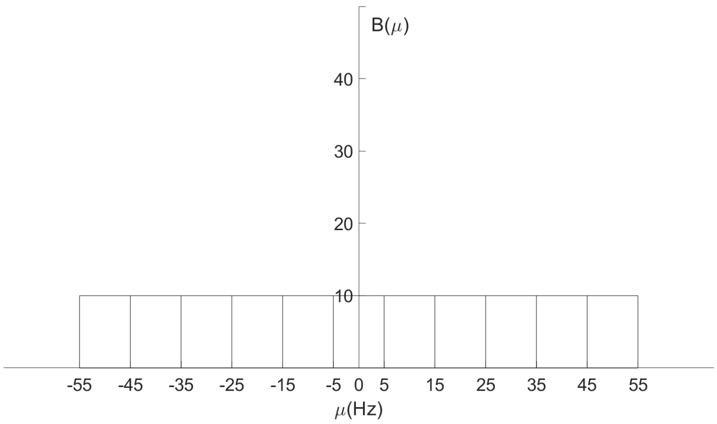

Segnale $A(\mu)$ risultante.



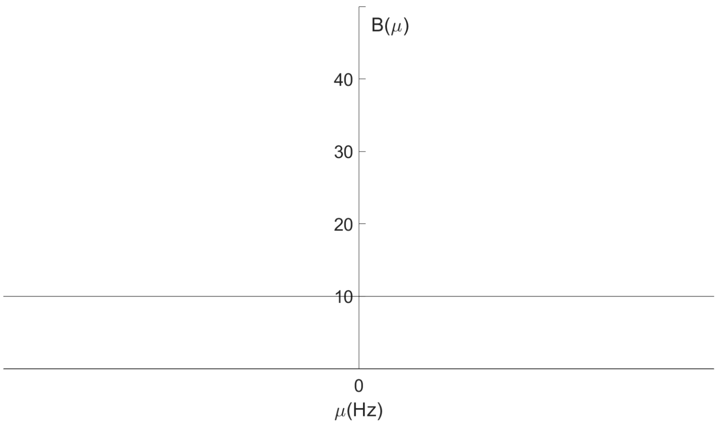

Segnale nel dominio del tempo $a\left(t\right)$.

Adesso si esegue il **campionatore** a 10 Hz. Attenzione: matematicamente parlando, campionare un segnale nel tempo significa moltiplicarlo per un treno di impulsi:

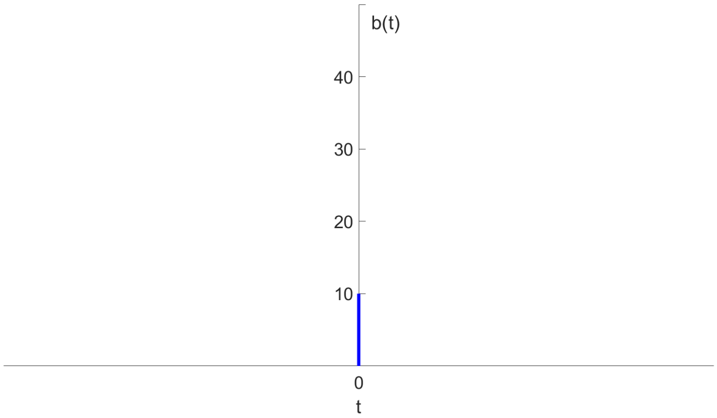
$$
\begin{aligned}
\text{Dominio del tempo} \quad &\longrightarrow \quad b\left(t\right) &&= a\left(t\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{10}\right) \\
\text{Dominio delle frequenze} \quad &\longrightarrow \quad B\left(\mu\right) &&= A\left(\mu\right) * 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - 10n\right) \\
& && | \\
& &&= \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\tau\right) \cdot 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - 10n - \tau\right) \mathrm{d}\tau \\
& && \downarrow \quad \text{Proprietà di setacciamento} \\
& &&= 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\left(\mu - 10n\right) \\
& && | \\
& &&= 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\mu - 10n\right) \cdot \Pi\left(\frac{\mu - 10n}{20}\right)
\end{aligned}
$$




Il segnale $A(\mu)$ viene ripetuto ogni 10 Hz.
**Attenzione**: non c'è aliasing poiché non c'è sovrapposizione ma appaiamento.




Il segnale $B(\mu)$ risultante è costante a 10.

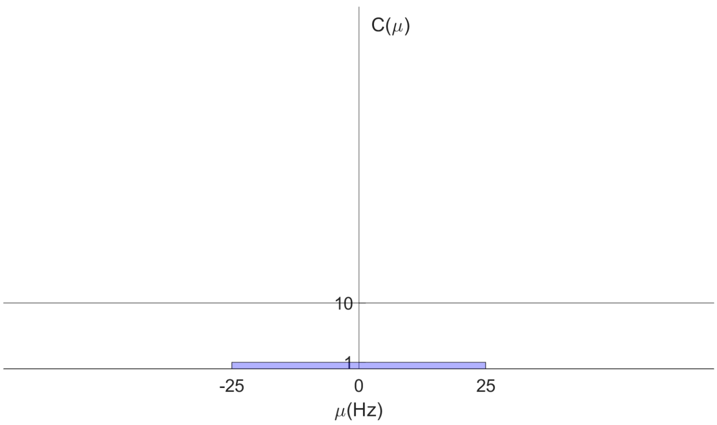



Segnale nel dominio del tempo $b\left(t\right)$.

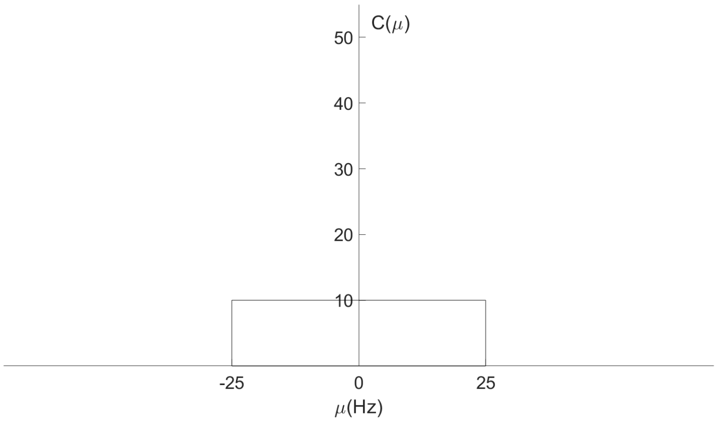
Infine, si applica l'ultimo filtro **passa basso ideale** con frequenza di taglio 25 Hz:

$$\text{Dominio del tempo} \quad \longrightarrow \quad c\left(t\right) = b\left(t\right) * 50\text{sinc}\left(50t\right)$$

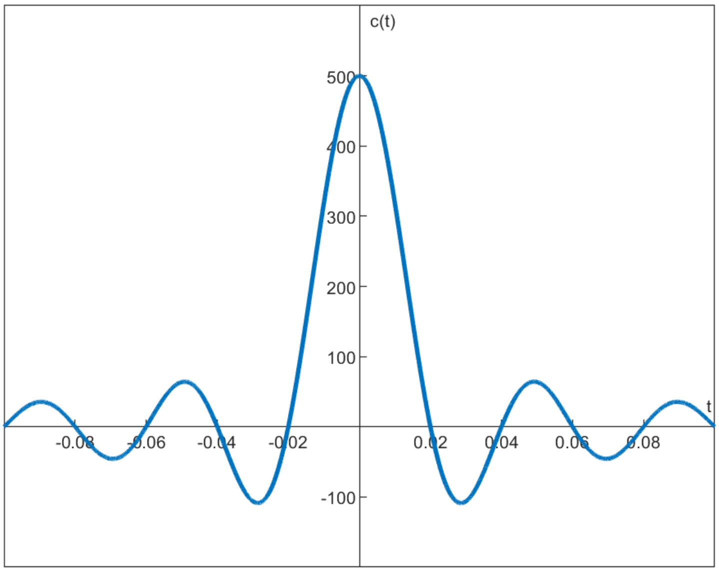
$$\text{Dominio delle frequenze} \quad \longrightarrow \quad C\left(\mu\right) = B\left(\mu\right) \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{50}\right)$$




Segnale $B\left(\mu\right)$ con il filtro passa basso ideale.




Segnale $C(\mu)$ risultante.




Segnale nel dominio del tempo $c(t)$.

# 3 Soluzione Esercizio

Le risposte alle domande:

1.
2.
3.