

# Schemi Analisi II

VR443470

ottobre 2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Prerequisiti</b>	<b>3</b>
1.1	Geometria analitica . . . . .	4
1.1.1	Circonferenza . . . . .	4
1.1.2	Ellisse . . . . .	5
1.1.3	Iperbole . . . . .	6
1.1.4	Completamento dei quadrati . . . . .	7
1.1.5	Esercizi . . . . .	8
1.2	Algebra . . . . .	11
1.2.1	Esercizi . . . . .	11
1.3	Calcolo differenziale e integrale . . . . .	16
1.3.1	Decomposizione in frazioni parziali . . . . .	16
1.3.2	Esercizi . . . . .	18

# 1 Prerequisiti

Il corso di Analisi II si articola in due macro sezioni: primo e secondo parziale. All'esame gli esercizi da svolgere saranno 10, suddivisi 5 per la prima parte e 5 per la seconda.

Nonostante vengano date 3 ore per svolgere l'esame totale, dunque 1 ora e mezza per ciascuna prova parziale, il tempo è una risorsa fondamentale. Difatti, se un calcolo matematico dovesse richiedere una quantità eccessiva di risorse/tempo, si rischierebbe di non passare l'esame con esito positivo.

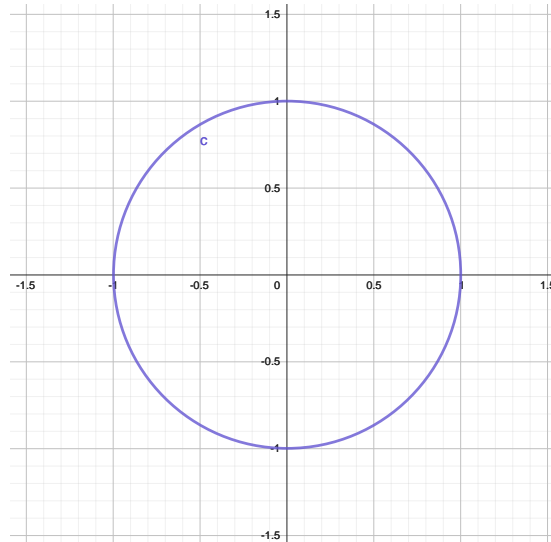
Risulta dunque fondamentale, per ciascun studente, giungere con dei prerequisiti solidi e non banali. In questo capitolo si provvederà a fornire alcuni prerequisiti necessari per affrontare il percorso senza eccessive difficoltà.

Ogni paragrafo presenterà degli esercizi e ognuno di essi sarà risolto nel seguente modo: il primo in modo approfondito per illustrare il *modus operandi*, gli altri facendo vedere i calcoli e risparmiando le spiegazioni prolisse. Chiaramente, nel caso in cui ci dovesse essere un caso particolare, esso verrà affrontato e spiegato passo passo.

## 1.1 Geometria analitica

### 1.1.1 Circonferenza

La circonferenza è graficamente rappresentata nel seguente modo:



Chiamando con  $C = (x_C, y_C)$  le coordinate del centro della circonferenza e con  $r$  il raggio, la sua equazione generale è espressa nel seguente modo:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Nel caso in cui la circonferenza fosse centrata nell'origine degli assi, ovvero  $C = (0, 0)$ , allora l'equazione generale sarebbe ridotta a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Per essere più precisi, l'**equazione canonica** corrispondente alla circonferenza è la seguente:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Le formule più importanti per ricavare il centro della circonferenza  $C$  e il raggio  $r$ :

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) \quad ; \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

Per ottenere l'equazione generale partendo dall'equazione canonica, si utilizza il metodo dei completamento dei quadrati (paragrafo 1.1.4).

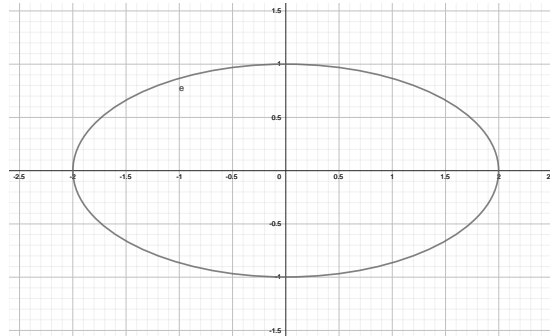
Per ottenere il raggio nel caso in cui sia noto il centro  $C$  e un punto  $P = (x_P, y_P)$  appartenente alla circonferenza, si utilizza la seguente formula:

$$r = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$$

Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

### 1.1.2 Ellisse

Non esiste un'unica rappresentazione dell'ellisse, ma solitamente può essere facilmente riconoscibile perché di forma allungata:



Attenzione, che data l'**equazione canonica** dell'ellisse **centrata nell'origine**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

Il grafico corrisponde esattamente ad una circonferenza.

Un'ellisse presenta quattro vertici nel caso in cui abbia centro nell'origine. Le relative coordinate sono:

$$V_{1,2} = (\pm a, 0) \quad V_{3,4} = (0, \pm b)$$

Per calcolare l'eccentricità di un'ellisse ("quanto l'ellisse è schiacciata") si devono confrontare i due valori  $a^2$  e  $b^2$ :

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{se } a^2 > b^2 \quad \text{e quindi } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e = \frac{c}{b} \quad \text{se } b^2 > a^2 \quad \text{e quindi } c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Il valore è compreso tra:  $0 \leq e < 1$ .

Nel caso in cui non fosse centrata nell'origine, l'**equazione canonica** di un'ellisse **traslata**, con  $C = (x_C, y_C)$  come coordinate del centro:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

I relativi vertici hanno le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned} V_1 &= (x_C - a, y_C) & ; & & V_2 &= (x_C + a, y_C) \\ V_3 &= (x_C, y_C - b) & ; & & V_4 &= (x_C, y_C + b) \end{aligned}$$

L'**importanza dei vertici** è dovuta al fatto che se fosse necessario rappresentare l'ellisse su un piano cartesiano, grazie alle precedenti formule. È possibile ricordarsi facilmente le formule ricordando che le coordinate dei vertici sono ottenute eseguendo la somma/differenza prima sulla coordinata  $x$  e poi sulla coordinata  $y$ .

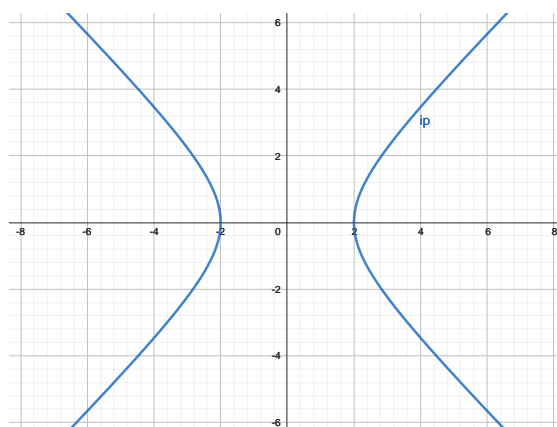
Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

### 1.1.3 Iperbole

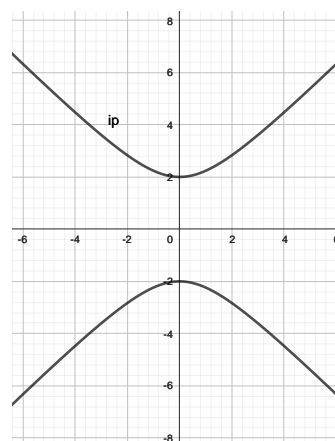
Un'iperbole con centro nell'origine ha un'equazione del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{con } a \neq 0, b \neq 0$$

Il segno  $+$  accanto all'1 rappresenta l'intersezione con l'asse delle ascisse ( $x$ ), mentre il segno  $-$  rappresenta l'intersezione con l'asse delle ordinate ( $y$ ). Graficamente viene rappresentata nel seguente modo:



Con  $+1$ .



Con  $-1$ .

Nel caso di una iperbole con gli assi paralleli agli assi cartesiani e quindi con centro in un punto  $C = (x_C, y_C)$ , essa è data da:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{con } a \neq 0, b \neq 0$$

Dove il segno  $\pm$  accanto all'1 indica la stessa cosa detta in precedenza.

Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

#### 1.1.4 Completamento dei quadrati

Il completamento dei quadrati è un'operazione molto potente che può essere applicata sempre (a discapito dello studente se ha senso o no applicarla!). In questo caso viene applicata ad un'ellisse.

Innanzitutto, la **prima operazione** dell'applicazione del completamento dei quadrati è il raggruppamento dei valori simili, ovverosia:

$$\begin{aligned}9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 &= 0 \\(9x^2 + 36x) + (4y^2 - 24y) + 36 &= 0\end{aligned}$$

La **seconda operazione** è prendere in considerazione i termini con le  $x$ , e poi quelli con le  $y$ , e cercare un quadrato. Ovvero sia un valore  $c$  tale per cui il  $\Delta$  (nella formula del calcolo di un'equazione di secondo grado  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ ) sia uguale a zero:

$$\begin{aligned}9x^2 + 36x &\longrightarrow 36^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\36^2 - 36c &= 0 \\c &= 36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4y^2 - 24y &\longrightarrow 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\24^2 - 16c &= 0 \\c &= 36\end{aligned}$$

Suggerimento: per trovare tale valore, basta risolvere la banale equazione  $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$  con  $c$  incognita e  $a, b$  termini noti.

La **terza operazione** è riscrivere l'equazione con i nuovi valori  $c$ , ma per lasciare invariata l'equazione è necessario annullarli, ovvero scrivere  $c - c$  (nessun problema, con manipolazioni algebriche si riuscirà ad evitare di ritornare al punto di inizio):

$$(9x^2 + 36x + 36 - 36) + (4y^2 - 24y + 36 - 36) + 36 = 0$$

Le manipolazioni algebriche riguardano  $9x^2 + 36x + 36$  e  $4y^2 - 24y + 36$ . Ovvero, si riscrivono le due espressioni come quadrati!

$$\begin{aligned}9x^2 + 36x + 36 &\longrightarrow 9(x+2)^2 \\4y^2 - 24y + 36 &\longrightarrow 4(y-3)^2\end{aligned}$$

E si riscrive l'equazione generale:

$$9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 = 0$$

Banali semplificazioni algebriche:

$$\begin{aligned}9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 &= 0 \\ \frac{1}{36} \cdot 9(x+2)^2 + 4(y-3)^2 &= 36 \cdot \frac{1}{36} \\ \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} &= 1\end{aligned}$$

Quest'ultima equazione corrisponde all'equazione canonica dell'ellisse.

### 1.1.5 Esercizi

Si rappresenti analiticamente le seguenti equazioni canoniche:

1.  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$
2.  $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$
3.  $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$
4.  $x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$
5.  $2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$

#### Esercizio 1

Data l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$$

Prima di rappresentare analiticamente l'equazione, è necessario guardare immediatamente i termini  $x^2$  e  $y^2$  per vedere se si è di fronte ad una circonferenza. Infatti, ricordando l'equazione canonica della circonferenza (pagina 4):

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Si può notare una grande assomiglianza. Quindi, si procede con il calcolo delle coordinate del centro della circonferenza:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = \left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (2, -1)$$

Si procede con il calcolo del raggio:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma} = \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(2)^2}{4} - (-6)} = \sqrt{4 + 1 + 6} = \sqrt{11}$$

Infine, si scrive l'equazione canonica sostituendo i valori trovati:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 11$$

#### Esercizio 2

Data l'equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si può subito vedere che si è di fronte ad un'ellisse centrata nell'origine:

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Si procede con un po' di intuito così da ricavare la forma canonica:

$$\frac{(x - 0)^2}{1^2} + \frac{(y - 0)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

E il risultato (forma canonica) eliminando i termini inutili:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \xrightarrow{\text{equivalente a}} \quad x^2 + 4y^2 = 1$$



### Esercizio 3

Data l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si ottiene l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 = 1$$

Si tratta di un'iperbole che interseca l'asse delle ascisse ( $x$ ) perché il segno dell'1 è + ed è centrata nell'origine perché  $x$  e  $y$  “non esistono”. Quindi:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

### Esercizio 4

Data l'equazione:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

Ci si accorge immediatamente che è un'iperbole a causa dei segni  $x^2$  e  $y^2$  discordi. Eseguendo alcune operazioni algebriche:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

$$x^2 - y^2 + x + 4y = 4$$

$$(x^2 + x) - (y^2 - 4y) = 4$$

Si utilizza il completamento dei quadrati per ottenere la forma canonica:

$$x^2 + x \longrightarrow 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$$

$$c = \frac{1}{4}$$

$$y^2 - 4y \longrightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$$

$$c = 4$$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - (y^2 - 4y + 4 - 4) = 4$$

$$\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - [(y - 2)^2 - 4] = 4$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - (y - 2)^2 + 4 = 4$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 2)^2 = 4 - 4 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y - 2)^2 = \frac{1}{4}$$

$$4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4(y - 2)^2 = 1$$

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y - 2)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

### Esercizio 5

Data l'equazione:

$$2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$$

Si utilizza il completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 4x - y &= 0 \\ (2x^2 + 4x) + (y^2 - y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &\longrightarrow 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 - y &\longrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\ c &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(2x^2 + 4x + 2 - 2) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left[2(x+1)^2 - 2\right] + \left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = 0$$

$$2(x+1)^2 - 2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$2(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4}$$

$$2(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{4}{9} \cdot 2 \cdot (x+1)^2 + \frac{4}{9} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{9}{8}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

L'equazione canonica si tratta di un'ellisse.

## 1.2 Algebra

### 1.2.1 Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni e i seguenti sistemi di equazioni algebriche:

1. 
$$\begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$
2. 
$$\begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$
3.  $\frac{y}{y+2} = mx^2$  (risolvere rispetto a  $y$ )
4.  $\frac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1$  (risolvere rispetto a  $y$ )
5.  $\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$  (risolvere rispetto a  $y$ )

#### Esercizio 1

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Per trovare tutti i valori che annullano il sistema, si inizia con qualche manipolazione algebrica:

$$\begin{cases} 3y(x^2 - 2x) = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Quale valore annulla  $x^2 - 2x$ ? Si calcola:

$$x^2 - 2x \longrightarrow x(x - 2)$$

Quindi le soluzioni sono 0 e 2. Per cui i valori che annullano il sistema per adesso sono:

$$y = 0 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^3 - 3x^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^2(x - 3) = 0 \end{cases} \longrightarrow x = 0; x = 3$$

Con  $x = 0$  si è già trovata una soluzione ( $y = 0$ ), quindi si prova  $x = 2$ :

$$x = 2 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2^3 + 4y^3 - 3 \cdot 2^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y^3 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, quindi i possibili valori sono:

- $(x = 0, y = 0)$
- $(x = 3, y = 0)$
- $(x = 2, y = 1)$

## Esercizio 2

Dato il sistema:

$$\begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{cases} x^2 - \lambda x = 0 \\ y^2 - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(x - \lambda) = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

I primi valori che si provano sono i soliti  $x = 0$  e  $y = 0$ . Si inizia con  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ 0 + 2y^2 = 1 \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y(y - 4\lambda) = 0 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\lambda \right) = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{4\lambda}{\sqrt{2}} = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{8} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Si prosegue con  $y = 0$ :

$$\begin{cases} x(x - \lambda) = 0 \\ 0 = 0 \\ x^2 + 0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(x - \lambda) = 0 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 1 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Per concludere l'esercizio, si deve riscrivere il sistema utilizzando operazioni permesse dall'algebra:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \cdot x^2 = \lambda x \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \cdot y^2 = 4\lambda y \cdot \frac{1}{y} \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ (\lambda)^2 + 2(4\lambda)^2 = 1 \end{cases}$$

È evidente che con questa piccola manipolazione algebrica, i calcoli risultano più semplici. Adesso si calcola il quadrato di lambda e si trovano le sue soluzioni per concludere l'esercizio:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 + 32\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ 33\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 = \frac{1}{33} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Si sostituisce  $\lambda$  all'interno di  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \\ y = \pm \frac{4}{\sqrt{33}} \\ \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, sono state valutate tutte le linee del sistema. Quindi, i valori possibili sono:

- $\left(x = 0, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $\left(x = 0, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $(x = 1, y = 0, \lambda = 1)$
- $(x = -1, y = 0, \lambda = -1)$
- $\left(x = \frac{1}{\sqrt{33}}, y = \frac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = \frac{1}{\sqrt{33}}\right)$
- $\left(x = -\frac{1}{\sqrt{33}}, y = -\frac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = -\frac{1}{\sqrt{33}}\right)$

### Esercizio 3

Data l'equazione:

$$\frac{y}{y+2} = mx^2$$

Si deve risolvere rispetto a  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{y}{y+2} &= mx^2 \\ \frac{y+2}{1} \cdot \frac{y}{y+2} &= mx^2 \cdot \frac{y+2}{1} \\ y &= mx^2y + 2mx^2 \\ y - mx^2y &= 2mx^2 \\ y(1 - mx^2) &= 2mx^2 \\ \frac{1}{1 - mx^2} \cdot y(1 - mx^2) &= 2mx^2 \cdot \frac{1}{1 - mx^2} \\ y &= \frac{2mx^2}{1 - mx^2}\end{aligned}$$

### Esercizio 4

Data l'equazione:

$$\frac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1$$

Si deve risolvere rispetto a  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{y+1} &= \sqrt{x+2} - 1 \\ (y+1) \cdot \frac{1}{y+1} &= (\sqrt{x+2} - 1) \cdot (y+1) \\ 1 &= y\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} - y - 1 \\ -y\sqrt{x+2} + y &= -2 + \sqrt{x+2} \\ y(-\sqrt{x+2} + 1) &= \sqrt{x+2} - 2 \\ \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \cdot y(-\sqrt{x+2} + 1) &= (\sqrt{x+2} - 2) \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \\ y &= \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{x+2}}\end{aligned}$$

### Esercizio 5

Data l'equazione:

$$\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$$

Si deve risolvere rispetto a  $y$ :

$$\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$$

$$\frac{2-y}{1-y} = 10^{x+3}$$

$$(1-y) \cdot \frac{2-y}{1-y} = 10^{x+3} \cdot (1-y)$$

$$2-y = 10^{x+3} - 10^{x+3}y$$

$$-y = 10^{x+3} - 10^{x+3}y - 2$$

$$-y + 10^{x+3}y = 10^{x+3} - 2$$

$$y(-1 + 10^{x+3}) = 10^{x+3} - 2$$

$$\frac{1}{-1 + 10^{x+3}} \cdot y(-1 + 10^{x+3}) = (10^{x+3} - 2) \cdot \frac{1}{-1 + 10^{x+3}}$$

$$y = \frac{10^{x+3} - 2}{10^{x+3} - 1}$$

## 1.3 Calcolo differenziale e integrale

### 1.3.1 Decomposizione in frazioni parziali

La decomposizione in frazioni parziali è un metodo per trasformare il rapporto tra due polinomi in una somma di frazioni più semplici.

Questa tecnica viene inserita nel paragrafo degli integrali poiché spesso viene utilizzata per calcolare integrali che presentano frazioni apparentemente complesse.

Si presenta un integrale complesso:

$$\int \frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} dx$$

Innanzitutto, si eseguono alcune **operazioni preliminari**, ovverossia si prepara la frazione scomponendola il più possibile. In questo caso, al denominatore è possibile scomporre  $x^2 - 1$  (ricordando  $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$ ):

$$\int \frac{x^2}{[(x - 1)(x + 1)]^2} dx$$

E inoltre, dato che vi è una potenza e una moltiplicazione all'interno, è possibile scomporre ancora di più:

$$\int \frac{x^2}{(x - 1)^2 (x + 1)^2} dx$$

Adesso si parte con il vero algoritmo. Il **primo passo** è prendere ciascun fattore del denominatore e creare la sua corrispondenza con le lettere:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 &\longrightarrow \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} \\ (x + 1)^2 &\longrightarrow \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Come si può notare, si parte dal grado minimo del fattore preso in considerazione, e lo si aumenta di grado fino a che non si trova il grado originario. Nel caso in cui ci fosse stato:

$$\int \frac{1}{x(x - 3)} dx$$

Sarebbe bastato banalmente:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \frac{A}{x} \\ x - 3 &\longrightarrow \frac{B}{x - 3} \end{aligned}$$

Ovviamente le lettere sono numeri reali da determinare (lo scopo dell'algoritmo). Quindi, il **secondo passo** è riscrivere i termini appena notati come un'uguaglianza:

$$\frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2}$$



Il **terzo passo** è mettere tutti i termini a denominatore comune:

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

Il **quarto passo** è eliminare il denominatore:

$$x^2 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2$$

Il **quinto passo** è eseguire i calcoli e cercare di raggruppare i termini in comune:

$$x^2 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^2$$

$$x^2 = Ax^3 + Cx^3 + Ax^2 - Cx^2 + Dx^2 - Ax + 2Bx - Cx - A + B + C + D$$

$$x^2 = (A+C)x^3 + (A+B-C+D)x^2 + (-A+2B-C-2D)x - A+B+C+D$$

Il **sesto passo** è costruire un sistema che avrà come incognite le lettere e come valori noti 1 se vi è una corrispondenza con le  $x$ , 0 altrimenti. Quindi, in questo caso solo il fattore  $(A+B-C+D)$  avrà 1 nel sistema:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=1 \\ -A+2B-C-2D=0 \\ -A+B+C+D=0 \end{cases}$$

Usando il metodo di sostituzione si ottengono i valori:

$$A = \frac{1}{4}; \quad B = \frac{1}{4}; \quad C = -\frac{1}{4}; \quad D = \frac{1}{4};$$

Il **settimo passo** è sostituire i valori trovati all'interno dell'uguaglianza scritta con le lettere:

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}$$

L'**ottavo** e ultimo **passo** è riscrivere l'integrale con i termini appena trovati. Adesso è evidente che il calcolo risulta molto più semplice:

$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx = \int \left( \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} \right) dx$$

Fonte: [YouMath](#).

### 1.3.2 Esercizi

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1.  $f(x) = \sqrt{\cos(3x+1)}$

2.  $f(x) = (2x+1) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

Calcolare i seguenti integrali:

3.  $\int \frac{1}{x^2-3x} dx$

4.  $\int x^3 e^{-x^2} dx$

5.  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}-1} dt$

6.  $\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt$

7.  $\int \frac{1}{4+y^2} dy$

8.  $\int x \sqrt{1+x^2} dx$

#### Esercizio 1

Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt{\cos(3x+1)}$$

La sua derivata è la seguente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(\cos(3x+1))^1}} \cdot (-\sin(3x+1) \cdot 3) \\ f'(x) &= -\frac{3 \sin(3x+1)}{2 \sqrt{\cos(3x+1)}} \end{aligned}$$

#### Esercizio 2

Data la funzione:

$$f(x) = (2x+1) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

La sua derivata è la seguente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + (2x+1) \cdot (-x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \\ f'(x) &= 2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - 2x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \end{aligned}$$

### Esercizio 3

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x} \, dx$$

Si procede con la risoluzione:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x^2 - 3x} \, dx \\ = & \int \frac{1}{x(x-3)} \, dx \end{aligned}$$

↓ si utilizza la decomposizione in frazioni parziali (pag. 16)

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$$