

# Guida agli Esami di Analisi II

VR443470

luglio 2023

## Indice

<b>1</b>	<b>Esercizio 1 - Problema di Cauchy</b>	<b>3</b>
1.1	Problema di Cauchy - Soluzione . . . . .	3
1.2	Alcuni esercizi d'esame svolti . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Esercizio 2 - Problema di Cauchy con variabile <math>t</math> e <math>y''</math></b>	<b>6</b>
2.1	Risoluzione del problema di cauchy con $y''$ . . . . .	6
2.2	Alcuni esercizi d'esame svolti . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Esercizio 3 - Studio di funzione</b>	<b>10</b>
3.1	Tipologie di esercizio . . . . .	10
3.1.1	Rappresentare la funzione nel piano cartesiano . . . . .	10
3.1.2	Dimostrazione che un punto sia interno al dominio . . . . .	14
3.1.3	Direzione della funzione affinché essa sia di massima crescita	15
3.1.4	Specificare se un dominio è aperto/chiuso, limitato/illimitato, connesso/sconnesso, compatto . . . . .	18
3.1.5	Trovare l'equazione al piano tangente . . . . .	20
3.1.6	Calcolare il gradiente della funzione ( $\nabla f$ ) . . . . .	23
3.1.7	Calcolare la derivata direzionale . . . . .	25
3.2	Alcuni esercizi d'esame svolti . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Esercizio 4 - Stabilire se una funzione è continua e parametriz- zazioni</b>	<b>28</b>
4.1	Tipologie di esercizio . . . . .	28
4.1.1	Stabilire se una funzione è continua . . . . .	28

# 1 Esercizio 1 - Problema di Cauchy

## 1.1 Problema di Cauchy - Soluzione

Il primo esercizio è sempre uguale e riguarda il problema di Cauchy. Un esempio di testo tratto dal tema d'esame del 25/06/2021: *Si trovi una soluzione locale del seguente problema di Cauchy e si determini l'intervallo massimale in cui tale soluzione è definita.*

$$\begin{cases} y' + \frac{y^3}{x^2 + 1} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il **primo passo** è esplicitare la derivata, per cui:

$$\begin{cases} y' + \frac{y^3}{x^2 + 1} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y' = -\frac{y^3}{x^2 + 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il **secondo passo** è risolvere l'integrale per ciascuna parte:

$$\rightarrow \int -\frac{y^3}{x^2 + 1} dx$$

↓  $y^3$  è costante, quindi si porta fuori dall'integrale

$$\rightarrow -y^3 \cdot \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

↓ l'integrale corrisponde all'arcotangente:  $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

$$-\int \frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{1} \cdot \arctan\left(\frac{x}{1}\right)$$

↓ risoluzione dell'integrale a sinistra

$$\frac{1}{2y^2} = \arctan(x)$$

↓ si somma la costante  $c$

$$\frac{1}{2y^2} = \arctan(x) + c$$

Il risultato rappresenta la famiglia delle soluzioni delle funzioni  $y$ , chiamata anche *soluzione generale*.

Il **terzo passo** è sostituire la condizione iniziale all'interno della soluzione e calcolare il valore della costante  $c$ :

$$\text{Condizione iniziale} \longrightarrow y(0) = 1$$

$$\text{Sostituzione nella soluzione generale} \longrightarrow \frac{1}{2 \cdot 1^2} = \arctan(0) + c$$

Quindi il valore di  $c = \frac{1}{2}$ .

Il **quarto e ultimo passo** riguarda l'intervallo massimale. Per trovarlo, è necessario prendere in considerazione la soluzione generale trovata al punto 2:

$$\frac{1}{2y^2} = \arctan(x) + c$$

Sostituire il valore  $c$  con la soluzione trovata, nel nostro caso  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2y^2} = \arctan(x) + \frac{1}{2}$$

Esplicitando la  $y$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2} &= 2 \cdot \arctan(x) + 1 \\ y^{-2} &= \frac{1}{2 \arctan(x) + 1} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2 \arctan(x) + 1}} \end{aligned}$$

A questo punto, si afferma che il problema ha soluzione solo se:

$$\arctan(x) + \frac{1}{2} > 0$$

Si esplicita la  $x$  ricordando che  $\tan^{-1}(x) = y$  è l'inversa di  $x = \tan(y)$ :

$$\begin{aligned} \arctan(x) + \frac{1}{2} &> 0 \\ \arctan(x) &> -\frac{1}{2} \\ x &> \tan\left(-\frac{1}{2}\right) \\ x &> -\tan\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

## 1.2 Alcuni esercizi d'esame svolti

## 2 Esercizio 2 - Problema di Cauchy con variabile $t$ e $y''$

### 2.1 Risoluzione del problema di cauchy con $y''$

Il secondo esercizio è un problema di Cauchy un po' più complesso poiché utilizza il metodo di somiglianza<sup>1</sup>. Un esempio di testo estratto dal tema d'esame del 25/06/2021: *Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ :*

$$\begin{cases} y'' - y' = 1 - 2t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Il **primo passo** è scrivere l'equazione caratteristica che corrisponde sempre alla prima equazione:

$$y'' - y' = 1 - 2t \longrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$$

L'equazione caratteristica deve essere posta uguale a zero.

Il **secondo passo** è risolvere l'equazione caratteristica così da avere le soluzioni reali distinte:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

Il **terzo passo** è scrivere l'integrale generale  $y(t)$  indicando con  $y_P(t)$  una soluzione particolare dell'equazione completa:

$$y(t) = y_P(t) + c_1 e^{0t} + c_2 e^{1t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Escludendo questo esercizio, in generale l'integrale generale è sempre così. Gli unici termini che cambiano sono le  $e$  che hanno come esponente la soluzione dell'equazione moltiplicata per  $t$ .

Dato che una soluzione dell'equazione caratteristica è 0 e  $1 - 2t$  è un polinomio di primo grado,  $y_P(t)$  sarà:

$$y_P(t) = (at + b)t^1 = at^2 + bt$$

Dove l'esponente 1 indica quante volte si ripete il valore zero.

**N.B.** Esistono diverse casistiche e ciascuno cambia l'equazione della soluzione particolare:

- **Polinomio di secondo grado.** In questo caso si scrive un'equazione di secondo grado generale

$$\text{Esercizio di esempio:} \longrightarrow y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 1$$

$$\text{Soluzione particolare:} \longrightarrow y_P(x) = ax^2 + bx + c$$

---

<sup>1</sup>[Link utile](#)

- **Polinomio con un esponenziale.** In questo caso si scrive un'equazione contenente l'esponenziale per un valore generico:

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + y' - 2y = 3e^{-x}$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = ae^{-x}$$

- **Polinomio di primo grado.** In questo caso si scrive un'equazione di primo grado generale:

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + y' - 2y = x + 2$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = ax + b$$

- **Soluzione dell'equazione caratteristica che compare nel polinomio.** In questo caso, è necessario aggiungere la  $x$  elevandola al numero di ripetizioni nel polinomio:

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + 3y' + 2y = 3e^x$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = a \cdot x^1 \cdot e^x$$

- **Soluzione dell'equazione caratteristica uguale a zero ( $\lambda = 0$ ).** In questo caso, è necessario aggiungere una  $x$  elevandola al numero di volte in cui  $\lambda = 0$  annulla l'equazione (molteplicità algebrica):

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + y' = x + 2$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = (ax + b)x^1$$

- **Coseno o seno.** In questo caso, è necessario scrivere entrambe le funzioni trigonometriche:

$$\text{Esercizio di esempio: } \longrightarrow y'' + y' = \cos(2x)$$

$$\text{Soluzione particolare: } \longrightarrow y_P(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$$

Il **quarto passo** è eseguire la derivata prima e seconda della soluzione particolare:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= at^2 + bt \\ y'_P(t) &= 2at + b \\ y''_P(t) &= 2a \end{aligned}$$

Il **quinto passo** è sostituire le derivate trovate nel problema iniziale, ovvero in  $y'' - y'$ , e risolvere il sistema equivalente:

$$\begin{aligned} y'' - y' &= 1 - 2t \\ (2a) - (2at + b) &= 1 - 2t \\ 2a - 2at - b &= 1 - 2t \\ (-2a)t + (2a - b) &= (-2)t + (1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Il **sesto passo** è sostituire i valori trovati nella soluzione particolare:

$$y_P(t) = at^2 + bt \rightarrow y_P(t) = 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t = t^2 + t$$

Il **settimo passo** è riscrivere l'integrale generale  $y(t)$  con la soluzione particolare:

$$y(t) = t^2 + t + c_1 + c_2 e^{1t}$$

Ed eseguire la derivata prima di tale equazione:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt} t^2 + t + c_1 + c_2 e^t \\ y'(t) &= 2t + 1 + c_2 e^t \end{aligned}$$

L'**ottavo passo** conclude l'esercizio. Si esegue una sostituzione delle condizioni del problema nell'integrale generale e nella sua derivata così da trovare le costanti  $c_1$  e  $c_2$ :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0^2 + 0 + c_1 + c_2 e^0 = 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 + c_2 e^0 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Infine, si scrive la soluzione del problema di Cauchy sostituendo le costanti nell'integrale generale:

$$y(t) = t^2 + t - 1 + e^t$$



## 2.2 Alcuni esercizi d'esame svolti

### 3 Esercizio 3 - Studio di funzione

#### 3.1 Tipologie di esercizio

##### 3.1.1 Rappresentare la funzione nel piano cartesiano

Un esercizio semplice che ad oggi viene fuso con altri esercizi, è quello della rappresentazione della funzione nel piano cartesiano. Si prenda in considerazione l'esame del 25/06/2021: *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  il dominio naturale della funzione:*

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

*Si rappresenti  $D$  nel piano cartesiano.*

Il **primo passo** è rappresentare il dominio della funzione. In questo caso, è necessario affermare che l'espressione sotto radice sia maggiore/uguale di zero (per rimanere nei reali) e l'espressione del logaritmo sia strettamente maggiore di zero (con zero il logaritmo non ha soluzione):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - x^2 \geq 0) \wedge (4x - x^2 - 4y^2 > 0)\}$$

**N.B.** Esistono diverse casistiche:

- **Frazione:**

$$f(x, y) = \frac{\log(x + 1)}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}}$$

Nonostante ci sia una radice quadrata, al denominatore non può esserci uno zero! Per cui, il dominio deve essere:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1 > 0) \wedge (x^2 + 4y^2 - 1 > 0)\}$$

- **Radice quadrata e logaritmo annidato:**

$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x)$$

In cui il suo dominio è:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y > x^2) \wedge (y < x^2)\}$$

Il **secondo passo** è calcolare i punti appartenenti al dominio, così da poter rappresentare il grafico sul piano cartesiano. Per farlo, si prende ogni condizione presente nel dominio e si calcolano un po' di punti:

$x$	$y$
0	0
$\pm 1$	1
$\pm 2$	4

Punti di  $y - x^2$

$x$	$y$
0	0
1	$\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$
2	$\pm 1$

Punti di  $4x - x^2 - 4y^2$

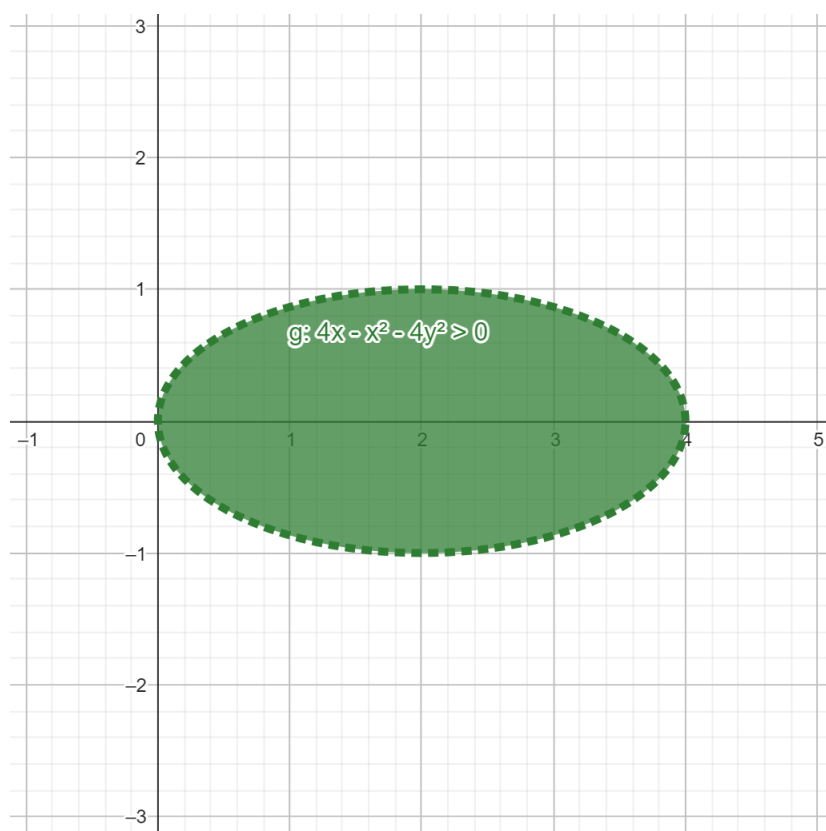


Grafico  $4x - x^2 - 4y^2 > 0$ .

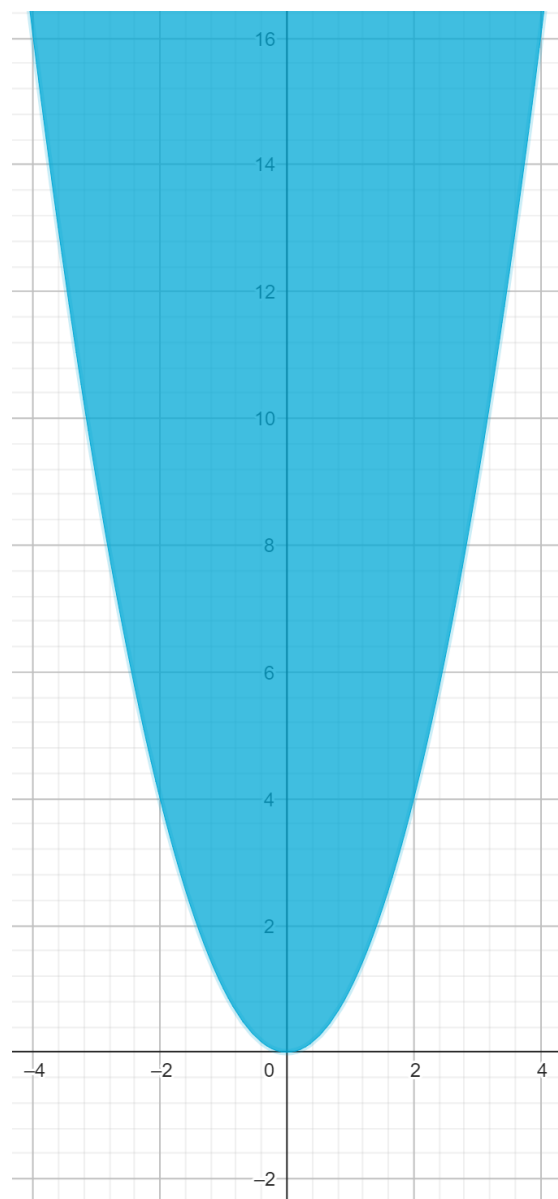


Grafico  $y - x^2 \geq 0$ .

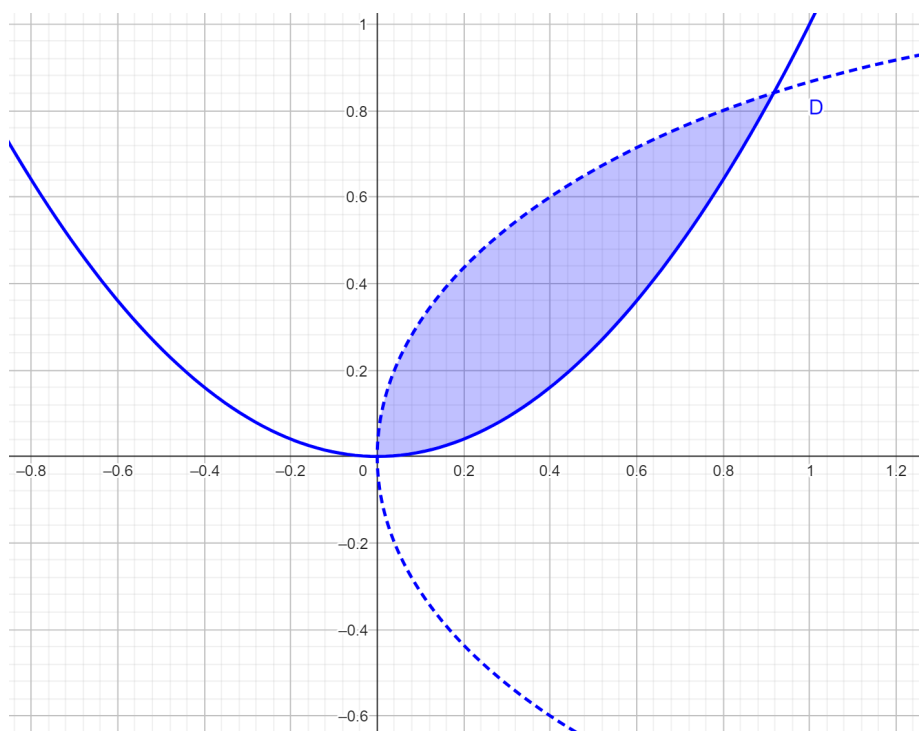


Grafico del dominio completo.

### 3.1.2 Dimostrazione che un punto sia interno al dominio

Una richiesta banale ma che potrebbe capitare, nonostante sia molto raro, è la seguente (estratta dall'esame del 25/06/2021): *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  il dominio naturale della funzione:*

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

*Si dimostri che il punto  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  è interno all'insieme  $D$ .*

Il **primo passo** è prendere le disuguaglianze del dominio e considerarle in modo stretto, ovvero:

$$\begin{array}{ll} y - x^2 \geq 0 & \longrightarrow y - x^2 > 0 \\ 4x - x^2 - 4y^2 > 0 & \longrightarrow 4x - x^2 - 4y^2 > 0 \end{array}$$

Il **secondo passo** è sostituire i valori del punto dato dall'esercizio e verificare la veridicità delle disuguaglianze. In questo caso, si sostituisce il punto  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  all'interno delle due disuguaglianze:

$$\begin{array}{ll} y - x^2 > 0 & \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} > 0 \implies \frac{1}{4} > 0 \quad \checkmark \\ 4x - x^2 - 4y^2 > 0 & \longrightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} - 4 \cdot \frac{1^2}{2^2} > 0 \implies \frac{3}{4} > 0 \quad \checkmark \end{array}$$

Il punto  $P$  rispetta entrambe le disuguaglianze, quindi è un punto interno al dominio.

### 3.1.3 Direzione della funzione affinché essa sia di massima crescita

Una richiesta che si può trovare negli esami ma non è tra le più richieste, è la seguente: *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  il dominio naturale della funzione:*

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

*In quale direzione ci si deve muovere da  $P$  per garantire a  $f$  la massima crescita?*

La direzione  $\vec{v}$  di massima crescita è quella del gradiente di  $f$  nel punto  $P$ . Per cui, per calcolare il gradiente sono necessari due passaggi fondamentali. Il **primo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a  $x$ :

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial x} (f + g) = \frac{\partial}{\partial x} (f) + \frac{\partial}{\partial x} (g)$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{y - x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ derivata della radice quadrata per la derivata dell'argomento}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} \cdot (-2x) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ derivata del logaritmo per la derivata dell'argomento}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} \cdot (-2x) - \frac{1}{4x - x^2 - 4y^2} \cdot (4 - 2x)$$

$$\downarrow \text{ semplificazioni}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{y - x^2}} - \frac{4 - 2x}{4x - x^2 - 4y^2}$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a  $y$ :

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2)$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{y - x^2} - \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial y} (f + g) = \frac{\partial}{\partial y} (f) + \frac{\partial}{\partial y} (g)$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{y - x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ derivata della radice quadrata per la derivata dell'argomento}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} \cdot (1) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln(4x - x^2 - 4y^2) \right)$$

$$\downarrow \text{ derivata del logaritmo per la derivata dell'argomento}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} - \frac{1}{4x - x^2 - 4y^2} \cdot (-8y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} + \frac{8y}{4x - x^2 - 4y^2}$$



Il **terzo passo** è quello di andare a sostituire i valori del punto  $P$  all'interno delle derivate parziali. Così facendo, si troverà la direzione di massima crescita, ovvero il gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{y-x^2}} - \frac{4-2x}{4x-x^2-4y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}}} - \frac{4-2 \cdot \frac{1}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} - 4 \cdot \frac{1^2}{2^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -1 - \frac{3}{2 - \frac{1}{4} - 1} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} + \frac{8y}{4x-x^2-4y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}}} + \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2} - 4 \cdot \frac{1^2}{2^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{4}{2 - \frac{1}{4} - 1} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{19}{3}\end{aligned}$$

Si conclude l'esercizio:

$$\vec{v} = \nabla f(P) = \left(-5, \frac{19}{3}\right)$$

### 3.1.4 Specificare se un dominio è aperto/chiuso, limitato/illimitato, connesso/sconnesso, compatto

Questa richiesta è molto probabile che ci sia all'esame. Solitamente, viene accoppiata con la scrittura del dominio e della sua rappresentazione (pagina 10). Un esempio di tema d'esame (03/03/2023): *Data la funzione:*

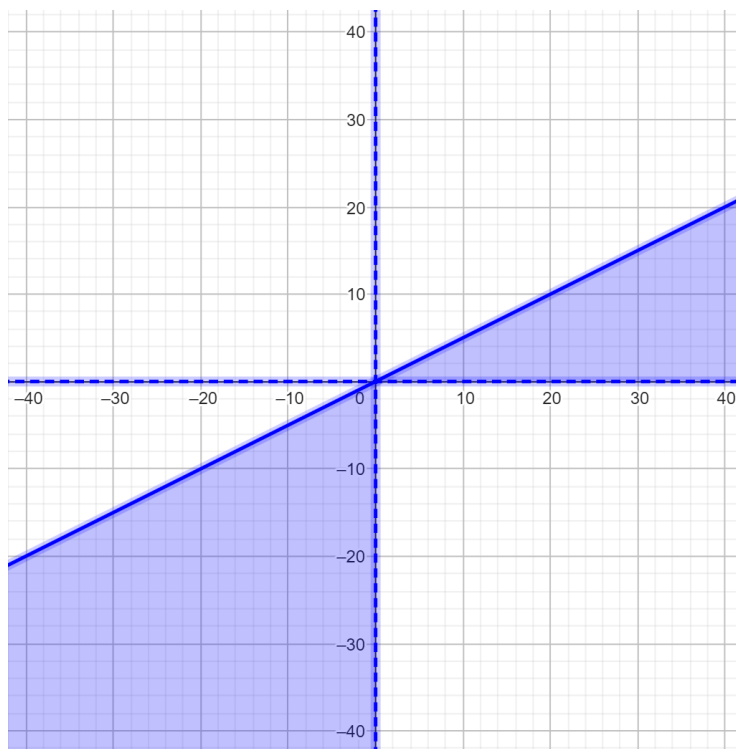
$$f(x, y) = ye^{\sqrt{x-2y}} - \ln(xy)$$

*Determinare analiticamente il suo dominio naturale  $D$  e poi rappresentarlo nel piano cartesiano. Stabilire se  $D$  è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!).*

Prima di tutto si stabilisce il dominio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2y \geq 0) \wedge (xy > 0)\}$$

Ovvero si impone le condizioni di esistenza sulla radice quadrata e il logaritmo. La sua rappresentazione grafica:



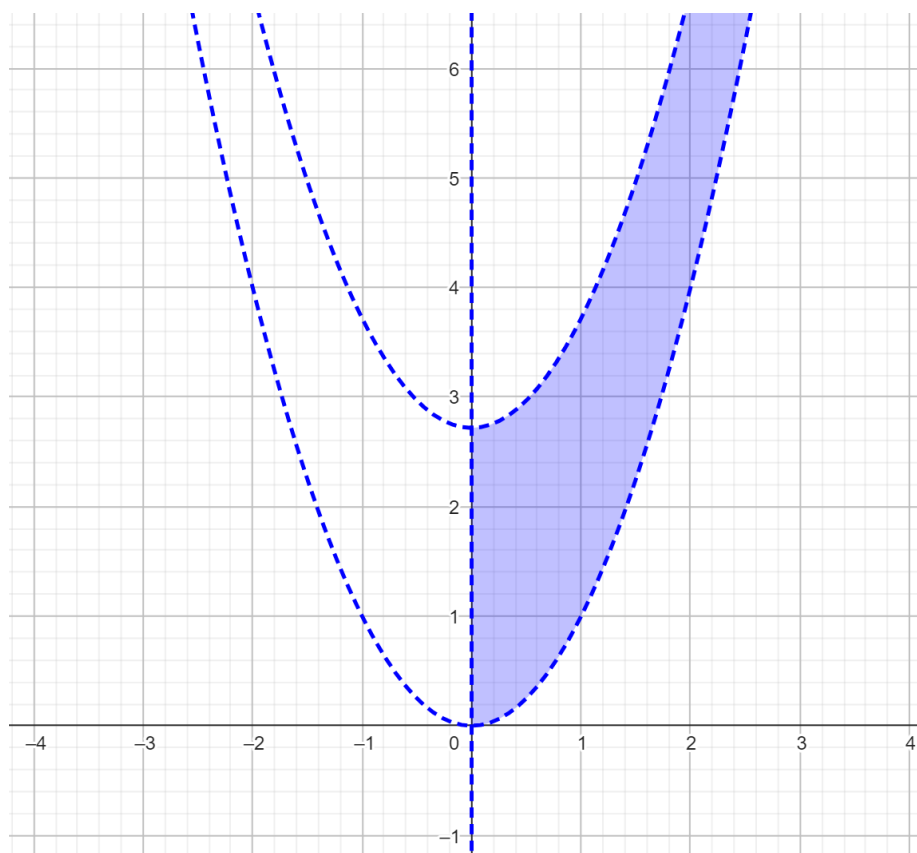
- **Limitato o illimitato?** Il dominio è illimitato, dato che continua all'infinito, ovvero non esiste una palla con centro l'origine e raggio  $r \in \mathbb{R}$  che contiene  $D$ .
- **Aperto o chiuso?** Il dominio non è né chiuso né aperto poiché contiene alcuni punti della sua frontiera ma non tutti.

- **Connesso o sconnesso?** Il dominio è sconnesso poiché non è connesso per archi. Infatti, come si può vedere dal grafico del dominio, quest'ultimo è l'unione di due insiemi.

Nell'esame del 07/02/2023, la funzione di riferimento e il dominio erano:

$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x)$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y > x^2) \wedge (y < x^2 + e) \wedge (x > 0)\}$$



Dominio della funzione.

In questo caso, il dominio è illimitato per lo stesso motivo dell'esercizio precedente; il dominio è aperto poiché tutti i punti sono interni e inoltre è connesso per archi.

### 3.1.5 Trovare l'equazione al piano tangente

Uno degli esercizi più richiesti insieme alla derivata direzionale, è quello di trovare l'equazione al piano tangente. Si prenda in considerazione il tema d'esame del 07/02/2023 in cui veniva chiesto: **Data la funzione:**

$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x)$$

**Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(1, 2, f(1, 2))$ .**

Anche in questo caso, come accadeva nel caso in cui si doveva trovare la direzione della funzione affinché essa sia di massima crescita (pagina 15), è necessario calcolare le derivate parziali di  $f(x, y)$ . Quindi, il **primo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a  $x$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \right) \\ &\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial x} (f + g) = \frac{\partial}{\partial x} (f) + \frac{\partial}{\partial x} (g) \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (y) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\ln(x)) \\ &\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f} \right) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(f)}{f^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 0 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \cdot \left( -\frac{1}{y - x^2} \cdot (-2x) \right)}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}^2} - \left( \frac{1}{x} \cdot (1) \right) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \cdot \left( \frac{2x}{y - x^2} \right)}{1 - \ln(y - x^2)} - \frac{1}{x} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\frac{x}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2)}}{1 - \ln(y - x^2)} - \frac{1}{x} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2) \cdot (1 - \ln(y - x^2))} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a  $y$ :

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \\
 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \right) \\
 &\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial y} (f + g) = \frac{\partial}{\partial y} (f) + \frac{\partial}{\partial y} (g) \\
 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\ln(x)) \\
 &\downarrow \text{ si utilizza la regola } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{f} \right) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(f)}{f^2} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 1 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} \cdot \left( -\frac{1}{y - x^2} \cdot 1 \right)}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}^2} - 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2) \cdot (1 - \ln(y - x^2))}
 \end{aligned}$$

Il **terzo passo** è scrivere il gradiente valutato nel punto dato, ovvero in  $P(1, 2)$ . Quindi, si prendono le derivate parziali trovate, si sostituiscono i valori e si utilizzano nel gradiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2) \cdot (1 - \ln(y - x^2))} - \frac{1}{x} \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \ln(2 - 1^2)} \cdot (2 - 1^2) \cdot (1 - \ln(2 - 1^2))} - \frac{1}{1} \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \ln(1)} \cdot 1 \cdot (1 - \ln(1))} - 1 \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -\frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 1} - 1 \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -2 \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(y - x^2)} \cdot (y - x^2) \cdot (1 - \ln(y - x^2))} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1 - \ln(2 - 1^2)} \cdot (2 - 1^2) \cdot (1 - \ln(2 - 1^2))} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Per cui il gradiente corrisponde al valore:

$$\nabla f(P) = \nabla f(1, 2) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

Il **quarto e ultimo passo** è scrivere l'equazione del piano tangente. Il piano tangente nel punto  $(x, y, (x_0, y_0))$  è rappresentato dall'equazione:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Dove  $f(x, y)$  è la funzione e  $(x_0, y_0)$  è il punto in cui è differenziabile.

Grazie a questo richiamo di teoria, adesso è possibile scrivere l'equazione del piano tangente. Quindi, si prende il punto differenziabile, cioè  $P(1, 2)$ , e si sostituisce nell'equazione iniziale:

$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x)$$

$$f(1, 2) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(2 - 1^2)}} - \ln(1)$$

$$f(1, 2) = 2 + \frac{1}{1} - 0$$

$$f(1, 2) = 3$$

E infine si sostituiscono i valori calcolati nell'equazione del piano tangente:

$$z = 3 - 2(x - 1) + \frac{3}{2}(y - 2) = 3 - 2x + 2 + \frac{3}{2}y - 3 = -2x + \frac{3}{2}y + 2$$

### 3.1.6 Calcolare il gradiente della funzione ( $\nabla f$ )

Esercizio difficile che venga richiesto, ma una volta è capitato, è la richiesta esplicita di calcolare il gradiente. Solitamente viene richiesto di trovare la massima crescita della funzione, cioè il gradiente, o la derivata direzionale. In questo caso, si calcola direttamente il gradiente come è stato fatto nei precedenti capitoli. Si riporta comunque i passaggi da eseguire. Si faccia riferimento al testo d'esame del 15/09/2021, gruppo A: **Data la funzione:**

$$f(x, y) = \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}$$

**Calcolare  $\nabla f(P)$ , dove  $P$  è il punto di coordinate  $(1, 2)$ .**

Il **primo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto  $x$ :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2} \\f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}) \\f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\log(x^2 - 4x + 4y^2)) - \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{2x - x^2}) \\\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (2x - 4) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) \\\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}\end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto  $y$ :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2} \\f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}) \\f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\log(x^2 - 4x + 4y^2)) - \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{2x - x^2}) \\\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (8y) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (0) \\\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2}\end{aligned}$$

Il **terzo passo** è sostituire il punto di coordinate  $P(1, 2)$  all'interno delle derivate parziali e calcolare il gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} \\\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \frac{2 \cdot 1 - 4}{1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2} - \frac{2 - 2 \cdot 1}{2\sqrt{2 \cdot 1 - 1^2}} \\\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -\frac{2}{13} - \frac{0}{2} = -\frac{2}{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \frac{8 \cdot 2}{1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \frac{16}{13}\end{aligned}$$

Il gradiente dunque corrisponde a:

$$\nabla f(P) = \nabla f(1, 2) = \left(-\frac{2}{13}, \frac{16}{13}\right)$$



### 3.1.7 Calcolare la derivata direzionale

Un esercizio richiestissimo, è il calcolo della derivata direzionale. Un esercizio tipo è il seguente, estratto dall'esame del 15/09/2021, gruppo A: **Data la funzione:**

$$f(x, y) = \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}$$

**Calcolare la derivata direzionale di  $f$  in  $P$  rispetto al vettore  $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .**

La derivata direzionale di una funzione in un punto rispetto ad un vettore, non è altro che la moltiplicazione del gradiente della funzione in quel punto per il vettore, ovvero:

$$\nabla f(P) \cdot \vec{v}$$

Viene da sé che è necessario prima calcolare il gradiente e poi calcolare il vettore. Come **primo passo** si calcolano le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2} \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}) \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\log(x^2 - 4x + 4y^2)) - \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{2x - x^2}) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (2x - 4) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} \\ f(x, y) &= \log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2} \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\log(x^2 - 4x + 4y^2) - \sqrt{2x - x^2}) \\ f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\log(x^2 - 4x + 4y^2)) - \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{2x - x^2}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (8y) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2} \end{aligned}$$

(calcoli già eseguiti nel paragrafo precedente, li riportiamo per convenienza)

Il **secondo passo** è sostituire il punto fornito  $P(1, 2)$  all'interno delle derivate parziali così da ottenere il gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \frac{2 \cdot 1 - 4}{1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2} - \frac{2 - 2 \cdot 1}{2\sqrt{2 \cdot 1 - 1^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= -\frac{2}{13} - \frac{0}{2} = -\frac{2}{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \frac{8 \cdot 2}{1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \frac{16}{13}\end{aligned}$$

Il gradiente dunque corrisponde a:

$$\nabla f(P) = \nabla f(1, 2) = \left(-\frac{2}{13}, \frac{16}{13}\right)$$

Fin qua l'esercizio è identico al calcolo del gradiente della funzione (pagina 23). Il **terzo passo** è eseguire la moltiplicazione tra il versore fornito dall'esercizio  $\vec{v}$  e il gradiente calcolato:

$$\nabla f(P) \cdot \vec{v} = \left(-\frac{2}{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{16}{13} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{13}, \frac{8}{13}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{13} + \frac{8}{13} = \frac{-\sqrt{3} + 8}{13}$$

### **3.2    Alcuni esercizi d'esame svolti**

## 4 Esercizio 4 - Stabilire se una funzione è continua e parametrizzazioni

### 4.1 Tipologie di esercizio

#### 4.1.1 Stabilire se una funzione è continua

Un *evergreen* nell'esercizio 4 è la richiesta di stabilire se la funzione data è continua in un certo insieme. Il procedimento è il seguente; si estrae un esercizio dal tema d'esame del 15/09/2021, gruppo A: **Stabilire se la funzione:**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**è continua in  $\mathbb{R}^2$ .**

La soluzione di questo esercizio, il più delle volte, è affermare che la funzione non è continua nell'insieme dato. Tuttavia, talvolta non è così scontato ed è necessario dimostrare il motivo della risposta.

Il **primo passo**, banale e al 90% verificabile visivamente, è verificare che la funzione sia definita nel punto  $(0, 0)$ . Infatti, per stabilire se la funzione è continua in  $\mathbb{R}^2$ , è necessario che sia continua nel punto  $(0, 0)$ .

In questo caso, l'esercizio afferma che nel caso in cui  $x$  e  $y$  siano zero  $(x, y) = (0, 0)$ , la funzione abbia risultato 0. Per cui, la funzione è definita.

Il **secondo passo** è verificare che esista il limite con  $x$  che tende a zero e con  $y$  che tende a zero. Nel caso in cui sia  $\infty$ , è possibile affermare che la funzione non è continua facendo vedere i calcoli del limite. In questo caso:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) &= \frac{0^4}{x^2 + 0^4} = \frac{0}{x^2} = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) &= \frac{y^4}{0^2 + y^4} = \frac{y^4}{y^4} = 1 \end{aligned}$$

I limiti non coincidono, per cui è possibile affermare che la funzione non è continua nell'origine  $(0, 0)$ , ovvero i limite di  $f$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  non esiste. Quindi,  $f$  non è continua in  $\mathbb{R}^2$ .

Per completezza, si presenta un esercizio in cui una funzione è continua per capire come comportarsi. Si estrae un esercizio dal tema d'esame del 01/03/2022: **Stabilire se la funzione:**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

**è continua in  $\mathbb{R}^2$ .**

Il **primo passo** è verificare che la funzione sia definita in  $(1, 2)$ . In questo caso lo è, quindi si passa avanti.

Il **secondo passo** è verificare i limiti con il punto  $(1, 2)$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x, 2) &= \frac{(x-1)(2-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (2-2)^2}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{(x-1)^2}} \\ &= \frac{0}{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 2} f(1, y) &= \frac{(1-1)(y-2)}{\sqrt{(1-1)^2 + (y-2)^2}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{(y-2)^2}} \\ &= \frac{0}{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

I due limiti esistono e hanno lo stesso risultato. Per essere certi che la funzione sia continua, è necessario un **terzo passo**, ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dato che il limite esiste ed è uguale a zero per  $(1, 2)$ , nel caso di  $f(1, 2)$ , si continua ad avere il valore 0. Quindi, la funzione è continua.