Soluzione - Simulazione di Elaborazione di segnali e immagini

Università degli Studi di Verona

15 Gennaio 2021

1 Soluzione Esercizio

Prima di tutto si descrive analiticamente sia il segnale $X(\mu)$ che $Y(\mu)$. Il primo segnale è una box con ampiezza (altezza) 2 e larga 4 centrata nell'origine:

$$\begin{array}{llcl} \text{Segnale nelle frequenze} & \longrightarrow \quad X(\mu) & = & 2 \cdot \Pi\left(\dfrac{\mu}{4}\right) \\ \text{Segnale nel tempo} & \longrightarrow \quad x(t) & = & 2 \cdot 4\mathrm{sinc}(4t) = 8\mathrm{sinc}(4t) \end{array}$$

Il secondo segnale è un triangolo con ampiezza 1 e larga 2 centrata nell'origine:

$$\begin{array}{llcl} \text{Segnale nelle frequenze} & \longrightarrow \quad Y(\mu) & = & \Lambda\left(\dfrac{\mu}{1}\right) = \Lambda(\mu) \\ \text{Segnale nel tempo} & \longrightarrow \quad y(t) & = & 1 \cdot \mathrm{sinc}^2(1t) = \mathrm{sinc}^2(t) \end{array}$$

Adesso è possibile eseguire le operazioni richieste dall'esercizio.

Segnale $a(t)$

Il segnale $a(t)$ si ottiene moltiplicando (nel tempo) il segnale $x(t)$ con il segnale $\cos(2\pi 5t)$. Per definizione, la moltiplicazione nel dominio del tempo corrisponde alla convoluzione nel dominio delle frequenze. Quindi, si sviluppa analiticamente l'operazione e infine si rappresenta graficamente:

Dominio del tempo $\longrightarrow$ $a(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi 5t)$

Dominio delle frequenze $\longrightarrow$ $A(\mu) = X(\mu) * \frac{1}{2}(\delta(\mu+5) + \delta(\mu-5))$

***Richiamo della teoria*:** Il coseno cos è la somma di due impulsi shiftati. Infatti, data la sua forma generica:

$$\cos(2\pi f_0 t)$$

La corrispettiva nel dominio delle frequenze:

$$\frac{1}{2} \cdot (\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0))$$

Dove f_0 rappresenta la posizione dell'impulso.

Analogamente, il seno sin è la differenza di due impulsi shiftati. Infatti, data la sua forma generica:

$$\sin(2\pi f_0 t)$$

La corrispettiva nel dominio delle frequenze:

$$\frac{1}{2}j \cdot (\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0))$$

Dove f_0 rappresenta la posizione dell'impulso e la j è la parte immaginaria.

Si sviluppa la convoluzione[1] sfruttando la proprietà di setacciamento[2] per rimuovere elegantemente l'integrale:

$$
\begin{aligned}
A(\mu) &= X(\mu) * \frac{1}{2}\left(\delta(\mu+5) + \delta(\mu-5)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \cdot \frac{1}{2}\left(\delta(\mu+5-\tau) + \delta(\mu-5-\tau)\right) \, \mathrm{d}\tau \\
&\downarrow \text{ Porto fuori } \tfrac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \cdot \left(\delta(\mu+5-\tau) + \delta(\mu-5-\tau)\right) \, \mathrm{d}\tau \\
&\downarrow \text{ Moltiplico i due impulsi per il segnale } X(\tau) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[X(\tau) \cdot \delta(\mu+5-\tau)\right] + \left[X(\mu) \cdot \delta(\mu-5-\tau)\right] \, \mathrm{d}\tau \\
&\downarrow \text{ Proprietà della somma degli integrali e divido i termini} \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \cdot \delta(\mu+5-\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \cdot \delta(\mu-5-\tau) \, \mathrm{d}\tau\right) \\
&\downarrow \text{ Proprietà di setacciamento} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(X(\mu+5) + X(\mu-5)\right) \\
&\downarrow \text{ Riunisco i termini per comodità} \\
&= \frac{1}{2} X(\mu+5) + \frac{1}{2} X(\mu-5) \\
&\downarrow \text{ Sostituisco il segnale } X(\mu) \text{ con quello calcolato: } 2 \cdot \Pi\left(\tfrac{\mu}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2\Pi\left(\frac{\mu+5}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2\Pi\left(\frac{\mu-5}{4}\right) \\
&\downarrow \text{ Eseguo i calcoli} \\
&= \Pi\left(\frac{\mu+5}{4}\right) + \Pi\left(\frac{\mu-5}{4}\right)
\end{aligned}
$$

[1] La formula della convoluzione è: $f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau$

[2] Il setacciamento può essere applicato nel caso in cui l'impulso sia coinvolto nella convoluzione e dunque $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-x_0) \, \mathrm{d}t = f(x_0)$

Il segnale è nel dominio delle frequenze. Si traduce anche nel dominio del tempo. Sapendo che:

$$\Pi\left(\frac{\mu}{4}\right) \longrightarrow 4\mathrm{sinc}\left(4t\right)$$

Lo shift nel tempo è possibile scriverlo utilizzando l'esponenziale:

$$\Pi\left(\frac{\mu+5}{4}\right) + \Pi\left(\frac{\mu-5}{4}\right) \longrightarrow 4\mathrm{sinc}\left(4t\right) e^{j2\pi 5t} + 4\mathrm{sinc}\left(4t\right) e^{-j2\pi 5t}$$

Raggruppando i termini comuni:

$$4\mathrm{sinc}\left(4t\right) + 4\mathrm{sinc}\left(4t\right) \longrightarrow 4\mathrm{sinc}\left(4t\right)\left(e^{j2\pi 5t} + e^{-j2\pi 5t}\right)$$

Grazie alla formula di Eulero del coseno, è noto che esso è possibile riscriverlo:

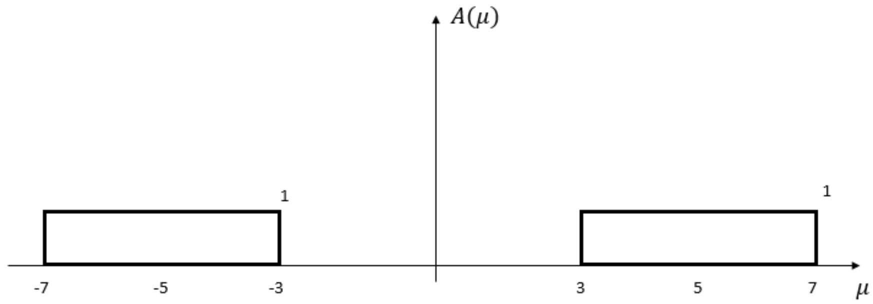
$$\cos\left(x\right) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

La forma che si ha è simile, ma manca la divisione. Tuttavia, è possibile scrivere il coseno, inserendo una moltiplicazione per due così da fare una manipolazione algebrica. Quindi:

$$4\mathrm{sinc}\left(4t\right)\left(e^{j2\pi 5t} + e^{-j2\pi 5t}\right) \xrightarrow{\text{Eulero}} 4\mathrm{sinc}\left(4t\right) \cdot 2\cos\left(2\pi 5t\right)$$

Quindi, nel dominio del tempo, il segnale $a\left(t\right)$ è il seguente:

$$a\left(t\right) = 4\mathrm{sinc}\left(4t\right) \cdot 2\cos\left(2\pi 5t\right)$$



Rappresentazione grafica del segnale $A\left(\mu\right)$ nel dominio delle frequenze.

Segnale $b(t)$

Come per il segnale $a(t)$, anche il segnale $b(t)$ si ottiene tramite una convoluzione nel dominio delle frequenze poiché si ha una moltiplicazione nel dominio del tempo. In questo caso, si saltano alcune spiegazioni, i passaggi specifici sono identici al segnale precedente.

$$\text{Dominio del tempo} \quad \longrightarrow \quad b(t) = y(t) \cdot \cos(2\pi 4t)$$

$$\text{Dominio delle frequenze} \quad \longrightarrow \quad B(\mu) = Y(\mu) * \frac{1}{2}(\delta(\mu+4) + \delta(\mu-4))$$

Si sviluppa la convoluzione sfruttando la proprietà di setacciamento per rimuovere elegantemente l'integrale:

$$\begin{aligned}
B(\mu) &= Y(\mu) * \frac{1}{2}(\delta(\mu+4) + \delta(\mu-4)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} Y(\tau) \cdot \frac{1}{2}(\delta(\mu+4-\tau) + \delta(\mu-4-\tau))\ \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} Y(\tau) \cdot (\delta(\mu+4-\tau) + \delta(\mu-4-\tau))\ \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [Y(\tau) \cdot \delta(\mu+4-\tau)] + [Y(\mu) \cdot \delta(\mu-4-\tau)]\ \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} Y(\tau) \cdot \delta(\mu+4-\tau)\ \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} Y(\tau) \cdot \delta(\mu-4-\tau)\ \mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (Y(\mu+4) + Y(\mu-4)) \\
&= \frac{1}{2}Y(\mu+4) + \frac{1}{2}Y(\mu-4) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \Lambda(\mu+4) + \frac{1}{2} \cdot \Lambda(\mu-4)
\end{aligned}$$

Si scrive il segnale nel dominio del tempo ricordando che il triangolo è un sinc^2:

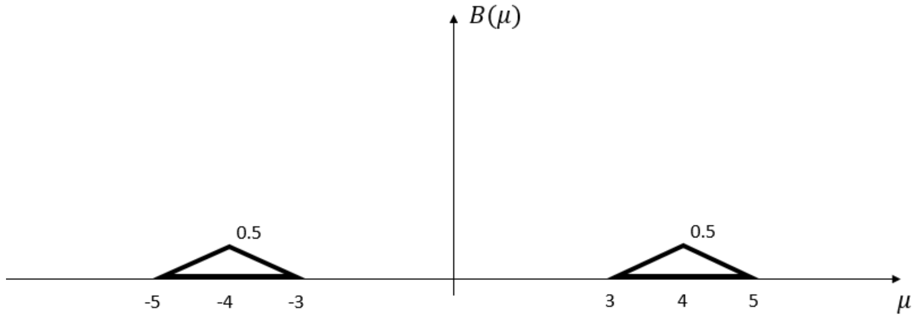
$$b(t) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{sinc}^2(t)\, e^{j2\pi 4t} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{sinc}^2(t)\, e^{-j2\pi 4t}$$

Come per il segnale precedente, si raccoglie l'esponenziale e si applica Eulero:

$$\frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(t)\left(e^{j2\pi 4t} + e^{-j2\pi 4t}\right) \xrightarrow{\text{Eulero}} \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(t) \cdot 2\cos(j2\pi 4t)$$

Quindi il segnale è:

$$b(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(t) \cdot 2\cos(2\pi 4t)$$



Rappresentazione grafica del segnale $B(\mu)$ nel dominio delle frequenze.

Segnale $c(t)$

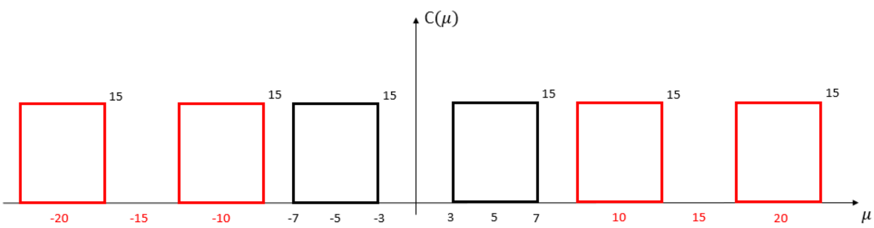
Campionare un segnale significa moltiplicarlo per un treno di impulsi. Quest'ultimi sono posti ad una distanza specifica. In questo esercizio la frequenza è pari a 15 Hz, dunque ogni 15 il segnale viene ripetuto. Le operazioni sono banali e prevedono una moltiplicazione del segnale per il treno di impulsi nel dominio del tempo e una convoluzione del segnale con un treno di impulsi.

Il segnale nel dominio del tempo è dunque la sommatoria degli impulsi per il segnale:

$$c(t) = a(t) \cdot \sum_{n} \delta\left(\frac{t-n}{15}\right)$$

Nel dominio delle frequenze è necessario fare la convoluzione, quindi:

$$\begin{aligned}
C(\mu) &= A(\mu) * 15 \sum_{n} \delta(\mu - 15n) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \cdot 15 \sum_{n} \delta(\mu - 15n - \tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&\downarrow \text{ Porto fuori il 15} \\
&= 15 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \cdot \sum_{n} \delta(\mu - 15n - \tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&\downarrow \text{ Proprietà di setacciamento} \\
&= 15 \cdot \sum A(\mu - 15n)
\end{aligned}$$



Rappresentazione grafica del segnale $C(\mu)$ nel dominio delle frequenze.

Segnale $d\left(t\right)$

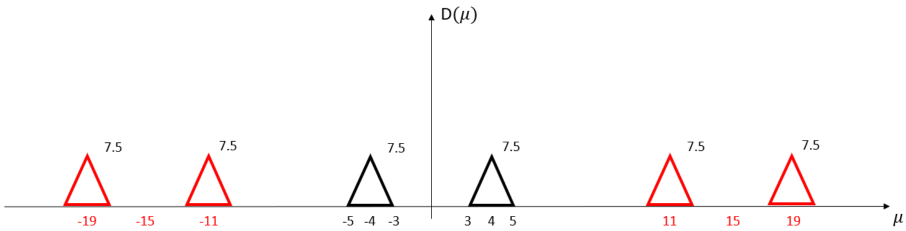
Come per il segnale precedente, anche in questo caso si applica il campionamento. La frequenza è identica e ancora una volta si esegue la moltiplicazione nel dominio del tempo e la convoluzione nel dominio delle frequenze.

Il segnale nel dominio del tempo è dunque la sommatoria degli impulsi per il segnale:

$$d\left(t\right) = b\left(t\right) \cdot \sum_{n} \delta\left(\frac{t-n}{15}\right)$$

Nel dominio delle frequenze è necessario fare la convoluzione, quindi:

$$\begin{aligned}
D\left(\mu\right) &= B\left(\mu\right) * 15 \sum_{n} \delta\left(\mu - 15n\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} B\left(\tau\right) \cdot 15 \sum_{n} \delta\left(\mu - 15n - \tau\right)\, \mathrm{d}\tau \\
&\downarrow \quad \text{Porto fuori il 15} \\
&= 15 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} B\left(\tau\right) \cdot \sum_{n} \delta\left(\mu - 15n - \tau\right)\, \mathrm{d}\tau \\
&\downarrow \quad \text{Proprietà di setacciamento} \\
&= 15 \cdot \sum B\left(\mu - 15n\right)
\end{aligned}$$



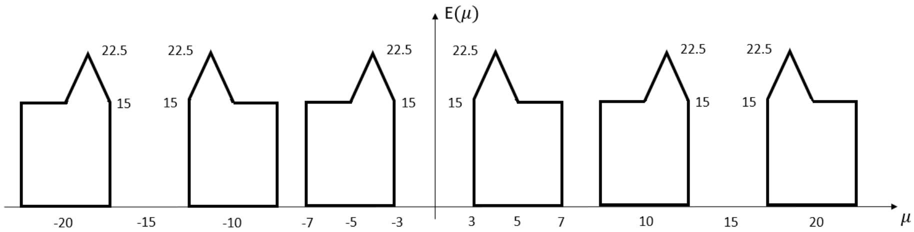
Rappresentazione grafica del segnale $D\left(\mu\right)$ nel dominio delle frequenze.

Segnale $e(t)$

Il segnale finale si ottiene tramite la somma dei segnali. La somma è banale poiché analiticamente è immediato e graficamente basta rappresentare una somma dei valori dei segnali:

$$\text{Dominio nel tempo} \quad \longrightarrow \quad e(t) = c(t) + d(t)$$

$$\text{Dominio nelle frequenze} \quad \longrightarrow \quad E(\mu) = C(\mu) + D(\mu)$$



Rappresentazione grafica del segnale $E(\mu)$ nel dominio delle frequenze.

2 Soluzione Esercizio

Dato il segnale nel dominio del tempo:

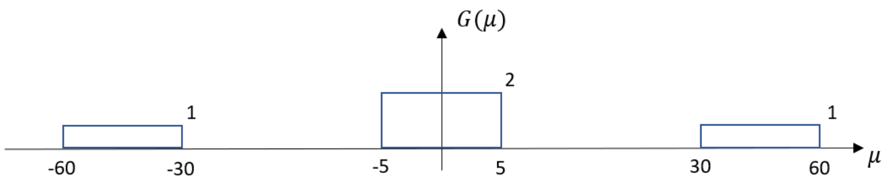
$$g(t) = 20\text{sinc}(10t) + 30\text{sinc}(30t)\, e^{-j2\pi 45t} + 30\text{sinc}(30t)\, e^{j2\pi 45t}$$

Si rappresenta analiticamente nel dominio delle frequenze sapendo che il sinc corrisponde ad una box rettangolare e l'esponenziale ad uno shift nel tempo:

$$\begin{aligned}
&20\text{sinc}(10t) && \xrightarrow{\mathscr{F}.} \quad 2\Pi\left(\frac{\mu}{10}\right) \\
&30\text{sinc}(30t)\, e^{-j2\pi 45t} && \xrightarrow{\mathscr{F}.} \quad \Pi\left(\frac{\mu-45}{30}\right) \\
&30\text{sinc}(30t)\, e^{j2\pi 45t} && \xrightarrow{\mathscr{F}.} \quad \Pi\left(\frac{\mu+45}{45}\right)
\end{aligned}$$

Quindi il segnale è:

$$G(\mu) = 2\Pi\left(\frac{\mu}{10}\right) + \Pi\left(\frac{\mu-45}{30}\right) + \Pi\left(\frac{\mu+45}{30}\right)$$



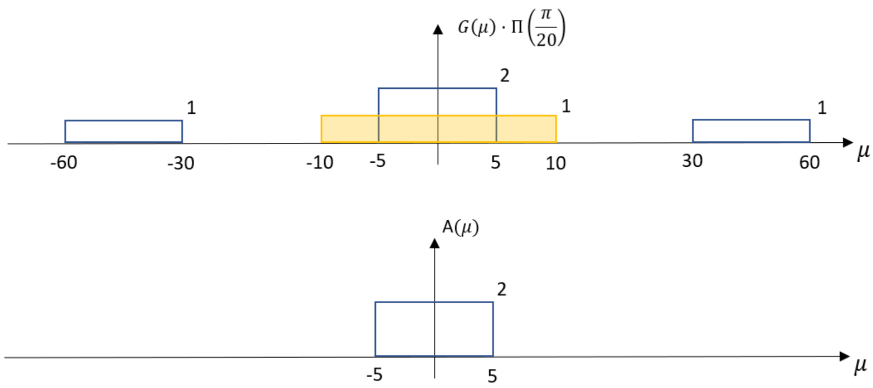
Rappresentazione grafica del segnale $G(\mu)$ nel dominio delle frequenze.

Passa basso ideale $a(t)$

Il filtro passa basso ideale taglia le frequenze alte. Dato che per definizione è una box, la frequenza data rappresenta la metà della larghezza. Nel dominio del tempo viene rappresentato come una convoluzione, mentre nel dominio delle frequenze come una moltiplicazione. Quindi:

$$\text{Dominio nel tempo} \longrightarrow a(t) = g(t) * 20\text{sinc}(20t)$$

$$\text{Dominio nelle frequenze} \longrightarrow A(\mu) = G(\mu) \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{20}\right)$$

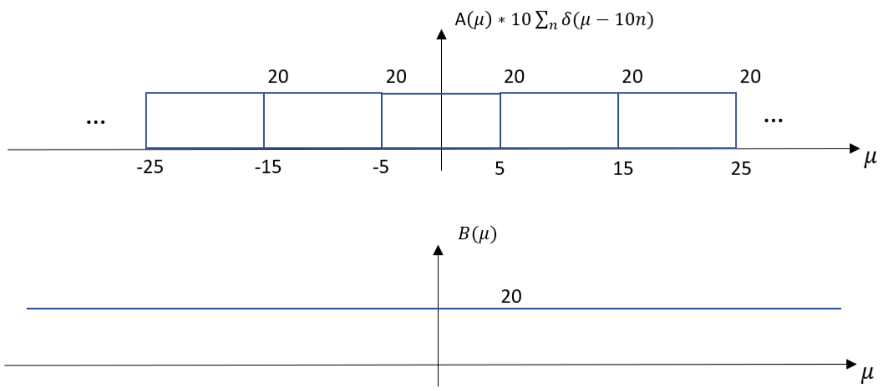


Rappresentazione grafica del segnale $A(\mu)$ nel dominio delle frequenze. Il grafico mostra la rappresentazione anche del filtro prima di applicarlo.

Campionatore $b(t)$

Il campionamento non è altro che la moltiplicazione del segnale per un treno di impulsi. Quindi, la rappresentazione analitica del segnale è:

$$
\begin{aligned}
\text{Dominio nel tempo} \quad &\longrightarrow \quad b(t) &&= a(t) \cdot \sum_n \delta\left(\frac{t-n}{10}\right) \\
\text{Dominio nelle frequenze} \quad &\longrightarrow \quad B(\mu) &&= A(\mu) * 10 \sum_n \delta(\mu - 10n) \\
& && = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \cdot 10 \displaystyle\sum_n \delta(\mu - 10n - \tau) \, \mathrm{d}\tau \\
& && \downarrow \ \text{Porto fuori il 10} \\
& && = 10 \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \cdot \displaystyle\sum_n \delta(\mu - 10n - \tau) \, \mathrm{d}\tau \\
& && \downarrow \ \text{Proprietà di setacciamento} \\
& && = 10 \cdot \sum_n A(\mu - 10n)
\end{aligned}
$$



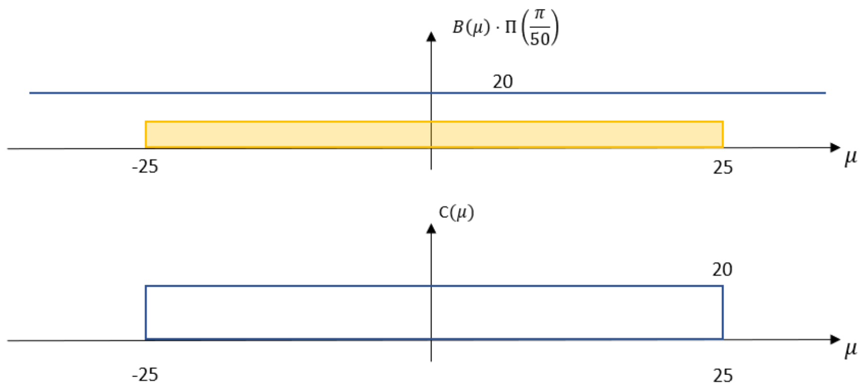
Rappresentazione grafica del segnale $B(\mu)$ nel dominio delle frequenze. Il grafico mostra la rappresentazione anche del campionamento dopo averlo applicato, ovvero non si manifesta aliasing ma appaiamento.

Passa basso ideale c (t)

Ancora una volta, si applica un filtro passa basso ideale. A differenza di prima, adesso la frequenza di taglio (*cutoff*) è pari a 25 Hz, quindi la larghezza è pari a 50:

$$\text{Dominio nel tempo} \quad \longrightarrow \quad c(t) = b(t) * 50\text{sinc}(50t)$$

$$\text{Dominio nelle frequenze} \quad \longrightarrow \quad C(\mu) = B(\mu) \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{50}\right)$$



Rappresentazione grafica del segnale $C(\mu)$ nel dominio delle frequenze. Il grafico mostra la rappresentazione anche del filtro prima di applicarlo.

3 Soluzione Esercizio

Prima di eseguire la convoluzione è necessario ottenere analiticamente i due segnali. Il segnale $x(t)$:

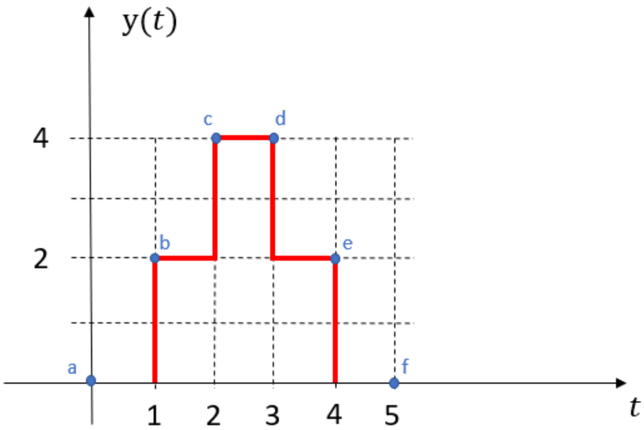
$$\begin{array}{lcl} \text{Dominio nelle frequenze} & \longrightarrow & X(\mu) = 2\Pi\left(\dfrac{\mu-1}{2}\right) \\ \\ \text{Dominio nel tempo} & \longrightarrow & x(t) = 4\text{sinc}(2t) \cdot e^{-j2\pi 1t} \end{array}$$

Il segnale $h(t)$:

$$\begin{array}{lcl} \text{Dominio nelle frequenze} & \longrightarrow & H(\mu) = \delta(\mu-1) + \delta(\mu-2) \\ \\ \text{Dominio nel tempo} & \longrightarrow & h(t) = 1 \cdot e^{-j2\pi 1t} + 1 \cdot e^{-j2\pi 2t} \end{array}$$

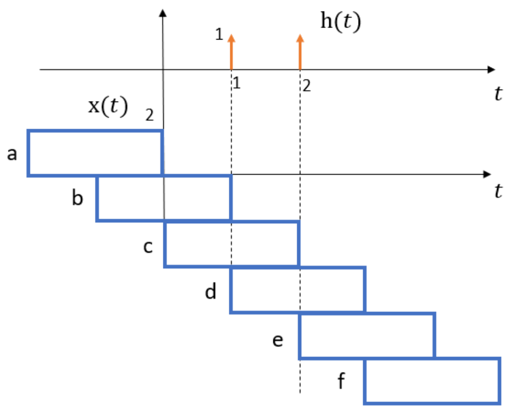
Adesso è possibile eseguire la convoluzione. Per semplicità si esegue nel dominio delle frequenze, quindi:

$$\begin{aligned} Y(\mu) &= X(\mu) * H(\mu) \\ &= X(\mu) * \delta(\mu-1) + \delta(\mu-2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \cdot [\delta(\mu-1-\tau) + \delta(\mu-2-\tau)]\ \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \cdot \delta(\mu-1-\tau)\ \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \cdot \delta(\mu-2-\tau)\ \mathrm{d}\tau \\ &\downarrow \ \text{Proprietà di setacciamento} \\ &= X(\mu-1) + X(\mu-2) \\ &= 2\Pi\left(\frac{\mu-1-1}{2}\right) + 2\Pi\left(\frac{\mu-1-2}{2}\right) \\ &= 2\Pi\left(\frac{\mu-2}{2}\right) + 2\Pi\left(\frac{\mu-3}{2}\right) \end{aligned}$$



Rappresentazione grafica del segnale $Y(\mu)$ nel dominio delle frequenze dopo una convoluzione.

Tuttavia, l'esercizio richiede anche una descrizione grafica della convoluzione. Quindi, il grafico è il seguente:



a) Non vi è intersezione tra i segnali, quindi la risultante y non esiste;

b) Vi è intersezione con il primo impulso, il prodotto tra i segnali è un impulso di ampiezza 2, quindi $y(1) = 2$;

c) Vi è una doppia intersezione con i due impulsi, il prodotto tra i segnali sono esattamente due impulsi di ampiezza (altezza) 2 ciascuno, l'integrale del prodotto vale 4, $y(2) = 4$;

d) Vi è una doppia intersezione con i due impulsi, il prodotto tra i segnali sono esattamente due impulsi di ampiezza (altezza) 2 ciascuno, l'integrale del prodotto vale 4, $y(3) = 4$;

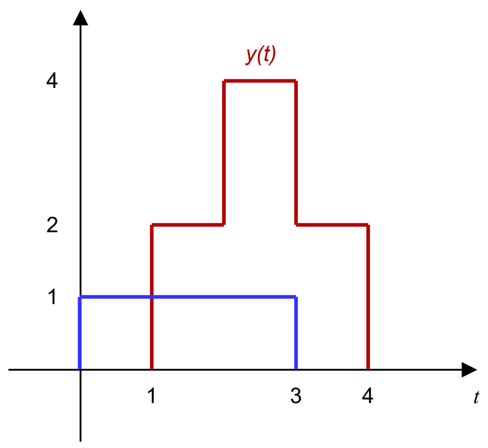
e) Vi è intersezione con il secondo impulso, il prodotto tra i segnali è un impulso di ampiezza 2, quindi $y(4) = 2$;

f) Non vi è intersezione tra i segnali, quindi la risultante y non esiste.

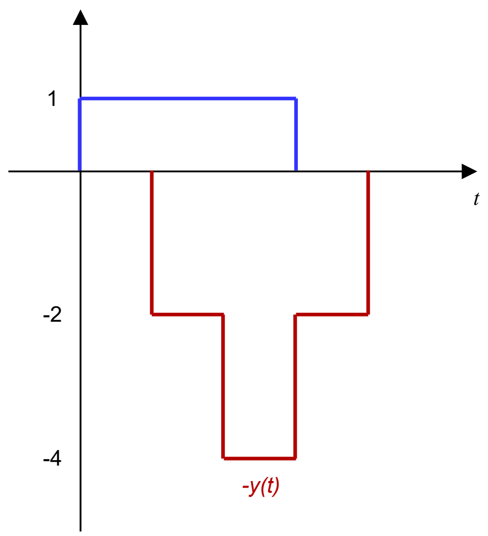
Adesso, si rappresenta graficamente il segnale $w(t)$:

$$\begin{aligned} W(\mu) &= \Pi\left(\frac{\mu-1.5}{3}\right) - Y(\mu) \\ &= \Pi\left(\frac{\mu-1.5}{3}\right) - 2\Pi\left(\frac{\mu-2}{2}\right) + 2\Pi\left(\frac{\mu-3}{2}\right) \end{aligned}$$

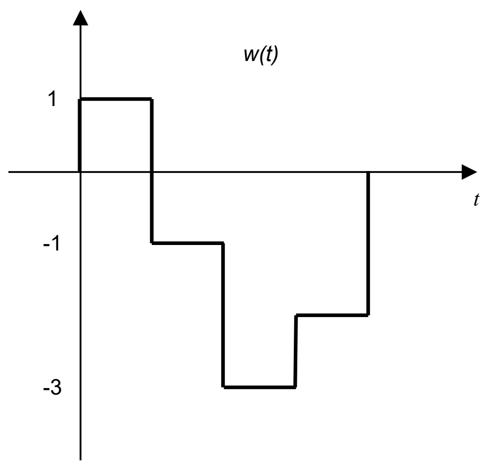
Il segno negativo ribalta il segnale $Y(\mu)$. Una volta ribaltato, si aumenta l'altezza applicando l'ampiezza del segnale $z(t)$:



Rappresentazione grafica dei due segnali prima della differenza.



Rappresentazione grafica dopo il ribaltamento del segnale $Y(\mu)$.



Rappresentazione grafica finale del segnale $W(\mu)$.

4 Soluzione Esercizio

L'operazione di equalizzazione di un'immagine è un calcolo piuttosto semplice.

Il **primo passo** è numerare i livelli di grigio presenti all'interno dell'immagine. L'insieme dei livelli di grigio sarà denotato con la lettera r_k e con la lettera k si indicherà il k-esimo livello di grigio. Quindi, si riporta per comodità la matrice e si elencano i livelli di grigio:

0	0	1	3
1	0	4	5
7	2	0	6
7	4	7	7

$$r_k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad \text{con } r_1 = 0, r_2 = 1, ..., r_8 = 7$$

In altre parole, l'insieme indica tutti i possibili valori che ci sono all'interno della matrice in ordine crescente.

Il **secondo passo** è contare le occorrenze di ogni elemento di r_k. L'insieme delle occorrenze sarà indicato con $H(r_k)$:

$$\begin{aligned} r_k &= 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7 \\ H(r_k) &= 4, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 4 \end{aligned}$$

Quindi, lo zero si ripete 4 volte all'interno della matrice, l'uno si ripete 2 volte, il due si ripete una volta e così via fino al valore 7 che si ripete 4 volte.

Il **terzo passo** è applicare la seguente formula, che rappresenta una sorta di probabilità:

$$p_r(r_k) = \frac{H(r_k)}{M \cdot N}$$

In cui M, N sono il numero di righe e colonne della matrice, quindi $4 \times 4 = 16$. Si applica a ciascun elemento dell'insieme r_k:

$$\begin{aligned} r_k &= 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7 \\ H(r_k) &= 4, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 4 \\ p_r(r_k) &= \frac{4}{16}, \quad \frac{2}{16}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{2}{16}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{4}{16} \end{aligned}$$

Il **quarto passo** è la normalizzazione, indicata con S dei valori. Essa è una somma cumulativa dei valori $p_r(r_k)$ e ciascun valore, della somma, si moltiplica per il valore massimo di grigio (in questo caso 7):

$$\begin{aligned}
r_k &= 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7 \\
H(r_k) &= 4, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 1, \quad 4 \\
p_r(r_k) &= \frac{4}{16}, \quad \frac{2}{16}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{2}{16}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{4}{16} \\
\sum p_r(r_k) &= \frac{4}{16}, \quad \frac{6}{16}, \quad \frac{7}{16}, \quad \frac{8}{16}, \quad \frac{10}{16}, \quad \frac{11}{16}, \quad \frac{12}{16}, \quad \frac{16}{16}
\end{aligned}$$

Adesso che è stata esplicitata la somma cumulativa, si moltiplica ogni frazione per il valore massimo di grigio (7) e poi si esegue un arrotondamento per eccesso da 0.5 a 0.9, altrimenti per difetto:

$$\begin{aligned}
r_k = 0 &\longrightarrow \frac{4}{16} \cdot 7 = 1.75 \longrightarrow 2 \\
r_k = 1 &\longrightarrow \frac{6}{16} \cdot 7 = 2.625 \longrightarrow 3 \\
r_k = 2 &\longrightarrow \frac{7}{16} \cdot 7 = 3.0625 \longrightarrow 3 \\
r_k = 3 &\longrightarrow \frac{8}{16} \cdot 7 = 3.5 \longrightarrow 4 \\
r_k = 4 &\longrightarrow \frac{10}{16} \cdot 7 = 4.375 \longrightarrow 4 \\
r_k = 5 &\longrightarrow \frac{11}{16} \cdot 7 = 4.8125 \longrightarrow 5 \\
r_k = 6 &\longrightarrow \frac{12}{16} \cdot 7 = 5.25 \longrightarrow 5 \\
r_k = 7 &\longrightarrow \frac{16}{16} \cdot 7 = 7 \longrightarrow 7
\end{aligned}$$

Il **quinto e ultimo passo** è riscrivere la matrice equalizzata andando a sostituire i valori r_k con la rispettiva normalizzazione (quindo gli zero con 2, gli uni con 3, e così via):

2	2	3	4
3	2	4	5
7	3	2	5
7	4	7	7