Soluzioni apello 1.

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}$,

(a) $\det A \underset{\substack{\text{Laplace} \\ 1^\circ \text{ riga}}}{=} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -a & 2+a & 2-a \\ 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}$

$+ (-1)^{1+4} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2+a \\ 1+a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \underset{\substack{E_{21}(-a) \\ \text{non cambia} \\ \det}}{\det} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2+4a \\ 0 & 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}$

$- 2 \underset{\substack{E_{21}(-a) \\ \text{non cambia} \\ \det}}{\det} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1+2a & 0 & 2 \\ 1+a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \underset{\substack{\text{Laplace } 1^\circ \\ \text{colonna}}}{(-1)^{1+1}(-1)} \det \begin{pmatrix} 2 & 2+4a \\ 2 & (1+a)(-1+a) \end{pmatrix}$

$- 2 \left(\underset{\substack{\text{Laplace} \\ 2^\circ \text{ colonna}}}{(-1)^{1+2}(-1)} \det \begin{pmatrix} 1+2a & 2 \\ 1+a & 2 \end{pmatrix} \right)$

$= -\left(2(1+a)(-1+a) - 2(2+4a)\right) - 2\left(2(1+2a) - 2(1+a)\right)$

$= -\left(2(-1 \cancel{+a} \cancel{-a} + a^2) - 4 - 8a\right) - 2(\cancel{2} + 4a \cancel{-2} - 2a)$

$= -(-2 + 2a^2 - 4 - 8a) - 4a$

$= 2 - 2a^2 + 4 + 8a - 4a$

$= 6 + 4a - 2a^2$

$= -2(a^2 - 2a - 3) = -2(a-3)(a+1)$

(b) Per calcolare una forma ridotta di A, calcoliamo una forma ridotta di A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -a & 2+a & 2-a \\ 1+a & 0 & 2 & \underbrace{(1+a)(-1+a)}_{= a^2-1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{E_{21}(2)\\E_{31}(-1)\\E_{31}(-1-a)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -a & 2+a & -a \\ 0 & 0 & 2 & a^2-2a-3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{E_2(-1)\\E_{32}(a)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a^2-2a-3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{E_3(\frac{1}{2})\\E_{43}(-2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{a^2-2a-3}_{=(a-3)(a+1)} \end{pmatrix} = U$$

Matrice a scala con ~~era~~ prima entrata non nulla di ogni riga $= 1$ $\Rightarrow$ forma ridotta di A

$$\begin{aligned} rk A = rk U &= \#\text{ colonne dominanti di } U \\ &= \#\text{ righe non nulle di } U \\ &= \begin{cases} 4 & \text{se } a \neq 3 \text{ e } a \neq -1 \\ 3 & \text{se } a = 3 \text{ o } a = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) A possiede un'inversa se e solo se $rk A = \#\text{ righe} = \#\text{ colonne} = 4$ se e solo se $\det A \neq 0$ se e solo se $a \neq 3$ e $a \neq -1$.

2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(a) $\lambda \in K$ è un autovalore di B se e solo se λ è una radice di $p_B = \det(B - xI_4)$

$$\det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{2+2}(2-x) \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 5 & 2-x \end{pmatrix}$$

Laplace 2° colonna

siccome triangolare $= (2-x)(-1-x)(-1-x)(2-x) = (2-x)^2(-1-x)^2$

det = prodotto della diagonale se

Gli autovalori di B sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_1 = -1$.

$\boxed{E_B(\lambda_1)}$ $E_B(\lambda_1) = N(B - \lambda_1 I_4)$

$$= N\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

~~Lo spazio nullo~~

Quindi $E_B(\lambda_1)$ è ~~lo~~ il sottospazio delle soluzioni di

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{E_1(-\frac{1}{3}) \\ E_2(-\frac{1}{3}) \\ E_{32}(3) \\ E_{42}(-5)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

sistema lineare equivalente $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $x_2 = a$, $x_4 = b$ $\rightsquigarrow$ $E_B(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_B(\lambda_1)$

$\boxed{E_B(\lambda_2)}$

$$E_B(\lambda_2) = N(B - \lambda_2 I_4) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$E_B(\lambda_2)$ è il sottospazio delle soluzione del sistema lineare omogeneo $(B - \lambda_2 I_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{E_{12} \\ E_{24} \\ E_1(\frac{1}{3}) \\ E_2(\frac{1}{5})}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sistema lineare equivalente $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + \frac{3}{5} x_4 = 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $x_3 = b$, $x_1 = a$ $\rightsquigarrow$ $E_B(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ -\frac{5}{3} b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_B(\lambda_2)$

(b) Le molteplicità algebriche sono
$m_1 = 2$ e $m_2 = 2$.
Le molteplicità geometriche sono
$d_1 = \dim E_B(\lambda_1) = 2$ e $d_2 = \dim E_B(\lambda_2) = 2$.

La matrice è diagonalizzabile perché
$d_1 = m_1$ e $d_2 = m_2$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

(c) $B^5 = (SDS^{-1})^5 = SD^5S^{-1}$

$$D^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 32 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{160}{3} & 32 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{0}\,-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & -33 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 32 \end{pmatrix}$$

$\cancel{\frac{160}{3} + \frac{5}{3}}$

3. $M = \begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix}$

(a) $M^H = \begin{pmatrix} -i & -1 & i \\ 1-2i & 2 & -2i \end{pmatrix}$

(b) $C(M) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i+1 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix} \right\rangle$

~~Calcoliamo~~ $\dim C(M) = \operatorname{rk} M$. Calcoliamo una forma ridotta di M.

$$\begin{pmatrix} i & 2i+1 \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{i})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ -1 & 2 \\ -i & 2i \end{pmatrix} \underset{E_{31}(i)}{\overset{E_{21}(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 0 & 4-i \\ 0 & 4i+1 \end{pmatrix} \underset{E_{32}(-4i)}{\overset{E_2(\frac{1}{4-i})}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim C(M) = 2$. L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i+1 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$

è un insieme di generatori con $2 = \dim C(M)$ elementi, quindi è una base di $C(M)$.

$N(M^H) = \{ v \in \mathbb{C}^3 \mid M^H v = 0 \}$. Troviamo un sistema lineare omogeneo ridotto:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & i \\ 1-2i & 2 & -2i \end{pmatrix} \overset{E_1(\frac{-1}{i})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 1-2i & 2 & -2i \end{pmatrix} \overset{E_{21}(-1+2i)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & i+4 & 1-4i \end{pmatrix}$$

$-2i+1-2i \qquad -i(-1+2i) = i+2$

$$\underset{E_2(\frac{1}{i+4})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\frac{1-4i}{4+i} = \frac{(1-4i)(4-i)}{17} = \frac{4-i-16i-4}{17} = -i$$

sistema lineare equivalente $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} x - iy - z = 0 \\ y - iz = 0 \end{cases} \overset{z=t}{\rightsquigarrow} \begin{cases} x = t - t = 0 \\ y = it \\ z = t \end{cases}$

$N(M^H) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ it \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{C} \right\}$ e quindi

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(M^H)$.

(c) Siccome $\mathbb{C}^3 = C(M) \oplus N(M^H)$, l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i+1 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.

4. (a) Falso: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ è una soluzione

(b) Vero: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \cancel{2}\, 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.