Università degli Studi di Verona, A.A. 2022/2023
Corso di Laurea in Informatica

Esercizi per il Corso di ALGEBRA LINEARE

Scheda 1

1. Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

Si determinino le seguenti matrici:

   (a) (CD)A
   (b) $A^T B$
   (c) $3A(B - D^T)$
   (d) $(4B - C)^T - DC$

2. Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Si usi l'algoritmo di Eliminazione di Gauss per determinare una forma ridotta di ognuna delle matrici elencate.
   (b) Si indichi il rango di ognuna delle matrici elencate.
   (c) Si scrivano i sistemi lineari per cui le matrici indicate sopra sono le corrispondenti matrici aumentate, e si usi il Teorema di Rouché-Capelli per decidere se ognuno di questi sistemi ha o non ha soluzioni.
   (d) Si trovino tutte le soluzioni del sistema di equazioni lineari

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Per ogni parametro t in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & t \\ 2 & 2t & -1 & 3t+1 \\ 1 & -1 & -t & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Si calcoli il rango di A_t quando $t = -1$.
   (b) Si calcoli il rango di A_t per ogni valore di t.
   (c) Supponiamo che la matrice A_t sia la matrice aumentata di un sistema lineare su $\mathbb{R}$. Per quali valori di t il sistema avrà soluzione?

4. Si risolva la seguente equazione nell'insieme di numeri complessi: $x^4 + 1 = 0$.

5. Si mostri che la trasposta A^T e l'inversa A^{-1} coincidono per $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ per ogni θ.