Esercitazioni Algebra Lineare

VR443470

febbraio 2023

Indice

1 Basi

1.1 Somma e trasposte

I classici esercizi di Algebra Lineare prevedono varie operazioni sulle matrici. Partendo dalle basi, si introducono le operazioni di somma e trasposizione.

Date 3 matrici A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 3 \\ -2+i & 5 & i2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3i & 2 \\ 4 & -i \\ 2-i & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 3i & 2-i \\ 4i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La prima operazione da eseguire è la classificazione delle matrici. In questo caso, le matrici hanno le seguenti dimensioni:

$$A \in \mathbb{M}_{2\times 3} \qquad B \in \mathbb{M}_{3\times 2} \qquad C \in \mathbb{M}_{2\times 3}$$

La seconda operazione da eseguire è controllare se è possibile eseguire l'operazione richiesta dall'esercizio. In questo caso, viene chiesta la somma. Per eseguire quest'ultima (vale lo stesso per la sottrazione), le dimensioni delle matrici devono essere tutte **identiche**. Dato che in questo caso la matrice B (3×2) differisce di dimensione rispetto alle due matrici A, C (2×3), è necessario fare qualcosa per eseguire l'operazione di somma.

Dato che è ancora l'inizio, non verranno effettuate manipolazioni complesse. Quindi, si supponga di eseguire questa operazione di somma/sottrazione:

$$2A^T - 4\overline{B} + 3C^T$$

Prima di eseguire l'operazione, si ottengono le relative matrici coniugate e trasposte. L'operazione di **coniugazione** è eseguibile cambiando i segni ai valori complessi (quindi alle i). Invece, l'operazione di **trasposizione** (T) inverte le colonne e le righe di una matrice. I risultati sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 3 \\ -2+i & 5 & i2 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2+i \\ -i & 5 \\ 3 & i2 \end{bmatrix} \quad 2A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4+2i \\ -2i & 10 \\ 6 & 4i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3i & 2 \\ 4 & -i \\ 2-i & -1 \end{bmatrix} \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} -3i & 2 \\ 4 & i \\ 2+i & -1 \end{bmatrix} \quad 4\overline{B} = \begin{bmatrix} -12i & 8 \\ 16 & 4i \\ 8+4i & -4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3i & 2-i \\ 4i & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} -2 & 4i \\ 3i & 1 \\ 2-i & 0 \end{bmatrix} \quad 3C^T = \begin{bmatrix} -6 & 12i \\ 9i & 3 \\ 6-3i & 0 \end{bmatrix}$$

Adesso è possibile eseguire la sottrazione tra $\alpha = 2A^T - 4\overline{B}$ e successivamente la somma tra $\alpha + 3C^T$:

$$\alpha = 2A^T - 4\overline{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4+2i \\ -2i & 10 \\ 6 & 4i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12i & 8 \\ 16 & 4i \\ 8+4i & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12i & 12+2i \\ -16-2i & 10-4i \\ 1-4i & 4+4i \end{bmatrix}$$

Si esegue la somma:

$$\alpha + 3C^T = \begin{bmatrix} 2+12i & 12+2i \\ -16-2i & 10-4i \\ 1-4i & 4+4i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 12i \\ 9i & 3 \\ 6-3i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+12i & -12+14i \\ -16+7i & 13-4i \\ 7-7i & 4+4i \end{bmatrix}$$

1.2 (Anti-)Hermitiane e (anti-)simmetriche

Diamo alcune definizioni per capire come fare gli esercizi:

- È possibile abbreviare letteralmente le operazioni di trasposizione e coniugazione scrivendo **trasposta-coniugata**;
- Una matrice viene detta **hermitiana** quando la matrice originaria è uguale alla sua trasposta-coniugata:

$$\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T = A \Longrightarrow A^H$$

- Una matrice viene detta **anti-hermitiana** quando la matrice trasposta-coniugata corrisponde alla matrice originaria ma cambiata di segno:

$$\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T = -A \Longrightarrow \text{ anti-hermitiana}$$

- Una matrice viene detta **simmetrica** quando la matrice originaria è uguale alla sua trasposta:

$$A = A^T \Longrightarrow \text{ simmetrica}$$

- Una matrice viene detta **anti-simmetrica** quando la sua trasposta corrisponde alla matrice originaria ma cambiata di segno:

$$-A = A^T \Longrightarrow \text{ anti-simmetrica}$$

Prendendo come **esempio** le tre matrici A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 3 \\ -3 & i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & i3 \\ -i3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si eseguono le rispettive operazioni di trasposizione e coniugazione:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2i & 3 \\ -3 & i \end{bmatrix} & A^T &= \begin{bmatrix} 2i & -3 \\ 3 & i \end{bmatrix} & \overline{A^T} &= \begin{bmatrix} -2i & -3 \\ 3 & -i \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix} & B^T &= \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix} & \overline{B^T} &= \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 2 & -i \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} -1 & i3 \\ -i3 & 1 \end{bmatrix} & C^T &= \begin{bmatrix} -1 & -i3 \\ i3 & 1 \end{bmatrix} & \overline{C^T} &= \begin{bmatrix} -1 & i3 \\ -i3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da questi risultati è possibile notare come A, B <u>non</u> siano hermitiane, mentre C lo sia. Inoltre, dalle trasposte è possibile osservare come A, C <u>non</u> siano simmetriche, mentre B lo sia. Invece, per verificare l'anti-hermitiana e l'anti-simmetrica, è necessario negare le matrici originarie:

$$-A = \begin{bmatrix} -2i & -3 \\ 3 & -i \end{bmatrix} \qquad -B = \begin{bmatrix} -i & -2 \\ -2 & -i \end{bmatrix} \qquad -C = \begin{bmatrix} 1 & -i3 \\ i3 & -1 \end{bmatrix}$$

Da questi risultati è possibile notare come B, C <u>non</u> siano anti-hermitiane, mentre A lo sia. Inoltre, osservando nuovamente le trasposte, è possibile osservare come A, B e C <u>non</u> siano anti-simmetriche.

1.3 Prodotto tra matrici righe per colonne

La prima operazione da eseguire per la moltiplicazione tra matrici righe per colonne è la verifica delle righe e delle colonne. Il prodotto tra matrici è ammesso solo se il numero delle colonne del primo operando è uguale al numero delle righe del secondo operando. Per esempio, la seguente operazione è ammessa:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times l}$$

Inoltre, la matrice risultante avrà come dimensione le righe del primo operando e le colonne del secondo. Quindi:

$$C_{m \times l} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times l}$$

La seconda operazione è la moltiplicazione vera e propria. Per farla, si prende ogni riga del primo operando e si moltiplica per ogni colonna del secondo operando. Dopo la moltiplicazione di una riga per una colonna, si sommano i risultati. Quindi:

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} 1,1 & \cdots & 1,n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m,1 & \cdots & m,n \end{bmatrix} \times B_{n,l} = \begin{bmatrix} 1,1 & \cdots & 1,l \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n,1 & \cdots & n,l \end{bmatrix}$$

$$C_{1,1} = A_{1,1} \cdot B_{1,1} + \cdots + A_{1,n} \cdot B_{n,1}$$
$$\cdots$$

Si presenta un **esempio**. Date due matrici A, B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

L'operazione di moltiplicazione di righe per colonne è ammessa poiché le righe di A (2) sono lo stesso numero delle colonne di B (2):

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

I calcoli sono banali. Si lasciano qua di seguito i passaggi:

$$\begin{array}{lcccccccl} C_{1,1} & = & 1 \cdot 4 & + & 0 \cdot -2 & + & 2 \cdot 0 & = & 4 \\ C_{1,2} & = & 1 \cdot 1 & + & 0 \cdot 2 & + & 2 \cdot 3 & = & 7 \\ C_{2,1} & = & 0 \cdot 4 & + & 3 \cdot -2 & + & -1 \cdot 0 & = & -6 \\ C_{2,2} & = & 0 \cdot 1 & + & 3 \cdot 2 & + & -1 \cdot 3 & = & 3 \end{array}$$

Si presenta un altro **esempio** ma con i numeri complessi. Date le due matrici A, B:

$$A_{2,4} = \begin{bmatrix} 1+i & i & 0 & \overline{3+2i} \\ -i & \overline{-1-3i} & 7i & 6i \end{bmatrix} \times B_{4,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4i \\ -3i & 0 \\ \overline{1-i} & -2i \\ 5-i & \overline{2+i} \end{bmatrix}$$

Prima di eseguire la moltiplicazione tra righe e colonne si risolvono i coniugati, due nella matrice A e due nella matrice B:

$$A_{2,4} = \begin{bmatrix} 1+i & i & 0 & 3-2i \\ -i & -1+3i & 7i & 6i \end{bmatrix} \times B_{4,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4i \\ -3i & 0 \\ 1+i & -2i \\ 5-i & 2-i \end{bmatrix}$$

L'operazione di moltiplicazione di righe per colonne è ammessa. Quindi si presenta qui di seguito i calcoli eseguiti (attenzione alle parti immaginarie, si ricorda che $i^2 = -1$):

$$\begin{array}{lllllllllll}
C_{1,1} & = & (1+i)\cdot 2 & + & i\cdot(-3i) & + & 0\cdot(1+i) & + & (3-2i)\cdot(5-i) & = & 18-11i \\
C_{1,2} & = & (1+i)\cdot 4i & + & i\cdot 0 & + & 0\cdot -2i & + & (3-2i)\cdot(2-i) & = & -3i \\
C_{2,1} & = & -i\cdot 2 & + & (-1+3i)\cdot -3i & + & 7i\cdot(1+i) & + & 6i\cdot(5-i) & = & 8+38i \\
C_{2,2} & = & -i\cdot 4i & + & (-1+3i)\cdot 0 & + & 7i\cdot -2i & + & 6i\cdot(2-i) & = & 24+12i
\end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18-11i & -3i \\ 8+38i & 24+12i \end{bmatrix}$$

1.4 Prodotto tra matrici - Casi particolari

Esistono alcuni casi particolari quando vengono eseguite le moltiplicazioni tra matrici:

1. La **moltiplicazione tra un vettore riga e un vettore colonna** (<u>non</u> viceversa) restituisce solamente un valore, chiamato **prodotto scalare**. Ovviamente, il numero delle colonne del vettore riga e il numero di righe del vettore colonna devono essere identici:

$$A_{1,n} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \times B_{n,1} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \rightarrow C$$

2. La **moltiplicazione tra un vettore colonna e un vettore riga** restituisce una matrice avente il numero di righe pari al vettore colonna e il numero di colonne pari al vettore riga:

$$B_{n,1} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \times A_{1,n} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \rightarrow C_{n,n}$$

3. La **moltiplicazione tra una matrice e un vettore colonna** restituisce un vettore colonna. Ovviamente, per applicare questa operazione è necessario che il numero delle colonne della matrice sia uguale al numero di righe del vettore:

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \times B_{n,1} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \rightarrow C_{m,1}$$

2 Eliminazione di Gauss

2.1 Le 3 operazioni

L'eliminazione di Gauss prevede 3 operazioni principali da applicare per ottenere la forma ridotta (forma finale):

1. Un'equazione può essere moltiplicata per uno scalare non nullo;
2. Un'equazione viene sostituita con la somma tra lei e un'altra equazione, in cui quest'ultima è stata prima moltiplicata per uno scalare non nullo. Quindi, viene scelta un'equazione da moltiplicare per uno scalare non nullo e successivamente viene effettuata la somma tra il risultato della moltiplicazione e l'equazione interessata;
3. Scambio di due equazioni.

2.2 Esercizio tipo

Un esercizio classico d'esame è quello di applicare l'eliminazione di Gauss ad un sistema. Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Si calcola la matrice risultante dopo l'eliminazione di Gauss.

Il primo passo è scrivere la matrice aumentata. Essa è banale da comporre, consiste nello scrivere i coefficienti di ogni variabile (x, y, z) in una matrice e aggiungere una colonna sulla destra in cui ci sono i valori risultanti. Si passa all'atto pratico:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

Il secondo passo è eseguire alcune considerazioni sulla forma che si vuole ottenere e procedere con le varie operazioni. L'obbiettivo è quello di ottenere una matrice uni-triangolare superiore[1]. In questo caso, si inizia con lo **scambio della prima riga con la seconda**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

Si **moltiplica la seconda riga per lo scalare** $\frac{1}{2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

[1] Una matrice uni-triangolare superiore è una forma particolare in cui i valori sotto alla diagonale principale sono nulli, cioè uguale a zero

Si **moltiplica la prima riga per -1 e successivamente si somma la prima riga con la seconda**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

Si **moltiplica la prima riga per 1 e successivamente si somma la prima riga con la terza**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3,1}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Si **moltiplica la seconda riga per lo scalare** $\frac{1}{2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Si **moltiplica la seconda riga per** -3 **e successivamente si somma la terza riga con la seconda**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3,2}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Si **moltiplica la terza riga per lo scalare** $-\frac{2}{3}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3,2}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Si ottiene così la forma ridotta di Gauss.

Il terzo passo è classificare la forma ottenuta. Possono esistere tre casistiche: di tipo uno (una sola soluzione), di tipo zero (non esistono soluzioni per il sistema) oppure infinito (le soluzioni del sistema sono infinite). Dalla forma ridotta è possibile dedurre che si è di fronte al tipo uno, ovvero esiste una sola soluzione per il sistema. Questo è intuibile grazie al fatto che se la colonna dominante di ogni riga (primo valore non nullo della riga), non è l'ultimo, allora il sistema è di tipo uno.

Adesso è possibile ricostruire il vettore delle soluzioni andando al contrario. Quindi, si parte dall'ultima riga e sostituendo si va fino all'inizio:

$$\begin{aligned} z &= -1 \\ y + \frac{3}{2}(-1) = \frac{1}{2} \rightarrow y &= 2 \\ x + -1(-1) = 1 \rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$