Soluzione - Esame di Elaborazione di segnali e immagini

Università degli Studi di Verona

01 Febbraio 2023

1 Soluzione Esercizio (10 punti)

Fonte: Simulazione 22/01/2020

Si rappresenta il segnale $G(\mu)$ nel dominio delle frequenze:

$$G(\mu) = \underbrace{\Pi\left(\frac{\mu}{10}\right)}_{a} + \underbrace{2\Pi\left(\frac{\mu-45}{30}\right)}_{b} + \underbrace{2\Pi\left(\frac{\mu+45}{30}\right)}_{c}$$

Le lettere rappresentano:

a) Una box larga 10 centrata rispetto l'asse y e alta 1;

b) Una box larga 30 traslata a destra di 45 e alta 2;

c) Una box larga 30 traslata a sinistra di 45 e alta 2.

Per descrivere il dominio duale si utilizzano le seguenti proprietà, con x_1 ed x_2 appartenenti ai due domini duali, rispettivamente:

- **Proprietà notevole**:

$$\Pi(x_1) \xrightarrow{\mathscr{F}\left(\text{oppure } \mathscr{F}^{-1}\right)} \text{sinc}(x_2)$$

- **Proprietà di amplificazione**:

$$A\, f(x_1) \xrightarrow{\mathscr{F}\left(\text{oppure } \mathscr{F}^{-1}\right)} A\, F(x_2)$$

- **Scalatura temporale**:

$$f\left(\frac{x_1}{b}\right) \xrightarrow{\mathscr{F}\left(\text{oppure } \mathscr{F}^{-1}\right)} b \cdot F(x_2 \cdot b)$$

- **Proprietà di shift nel tempo**:

$$F(\mu - \mu_0) = f(t) \cdot e^{j2\pi t\mu_0}$$

Il segnale nel dominio continuo del tempo:

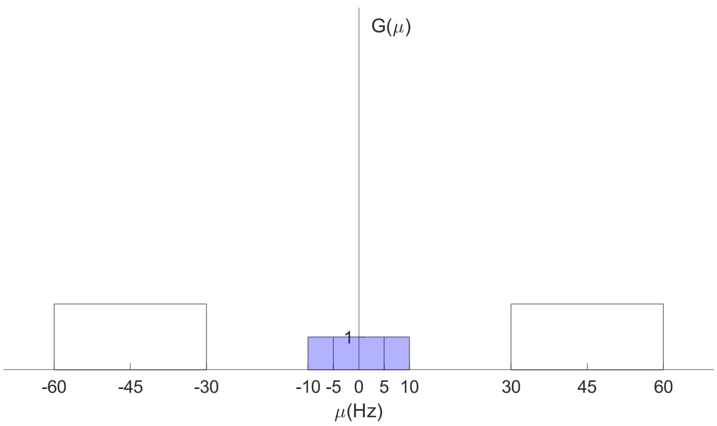
$$\begin{aligned} g(t) &= 10\text{sinc}(10t) + 2 \cdot 30\text{sinc}(30t) \cdot e^{j2\pi t45} + 2 \cdot 30\text{sinc}(30t) \cdot e^{-j2\pi t45} \\ &= 10\text{sinc}(10t) + 60\text{sinc}(30t) \cdot \left(e^{j2\pi t45} + e^{-j2\pi t45}\right) \\ &= 10\text{sinc}(10t) + 60\text{sinc}(30t) \cdot 2\cos(2\pi 45t) \end{aligned}$$

$$\text{dato che } \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

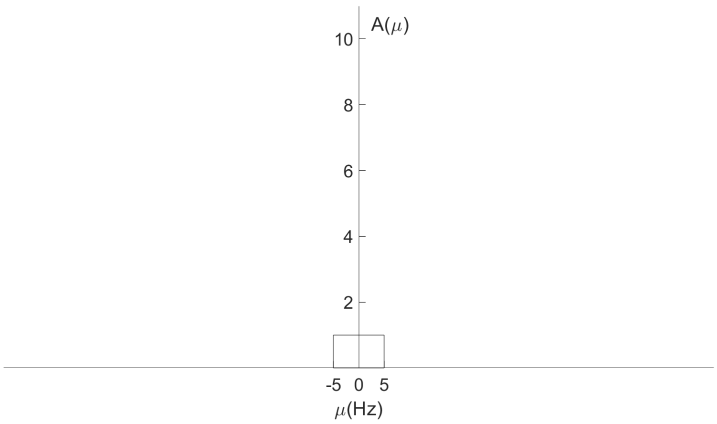
Adesso si eseguono le elaborazioni a cui è sottoposto il segnale $g(t)$. La prima operazione da applicare è il **passo basso ideale** con frequenza di taglio 10 Hz:

$$\text{Dominio del tempo} \quad \longrightarrow \quad a(t) = g(t) * 20\text{sinc}(20t)$$

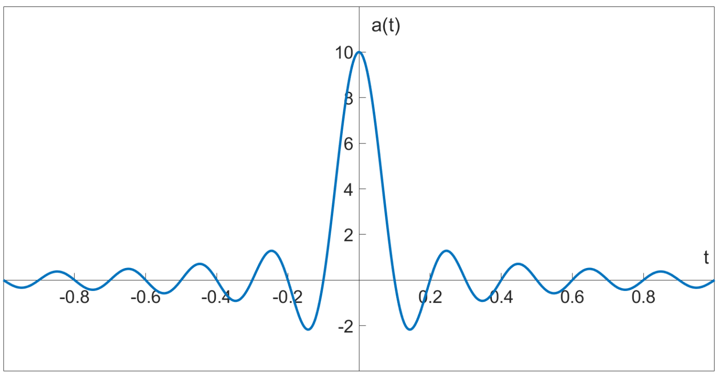
$$\text{Dominio delle frequenze} \quad \longrightarrow \quad A(\mu) = G(\mu) \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{20}\right)$$



Segnale $G(\mu)$.



Segnale $A\left(\mu\right)$ risultante.

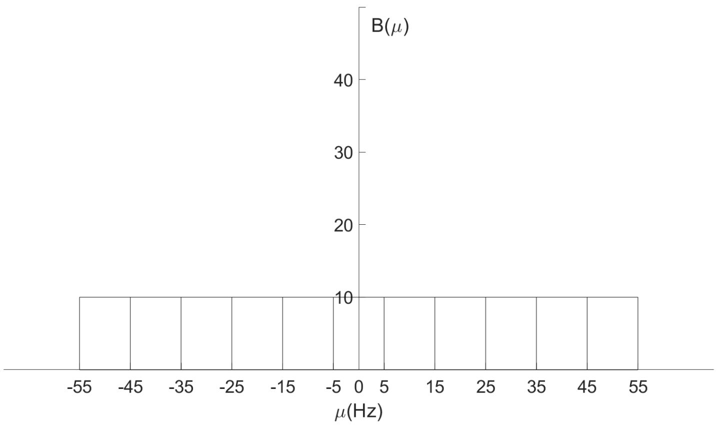


Segnale nel dominio del tempo $a\left(t\right)$.

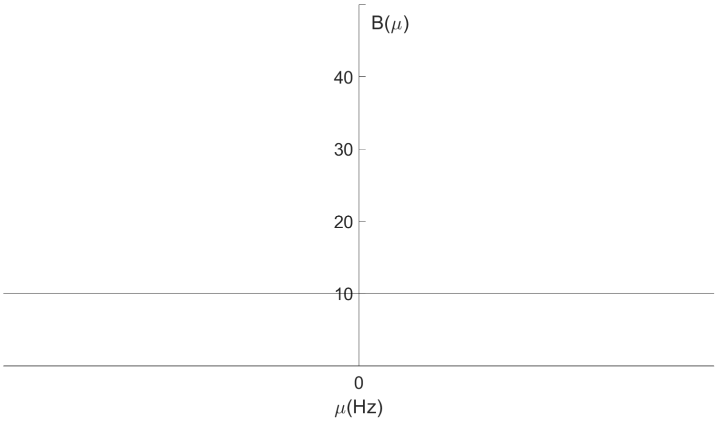
Adesso si esegue il **campionatore** a 10 Hz. Attenzione: matematicamente parlando, campionare un segnale nel tempo significa moltiplicarlo per un treno di impulsi:

$$\text{Dominio del tempo} \longrightarrow b(t) = a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{10}\right)$$

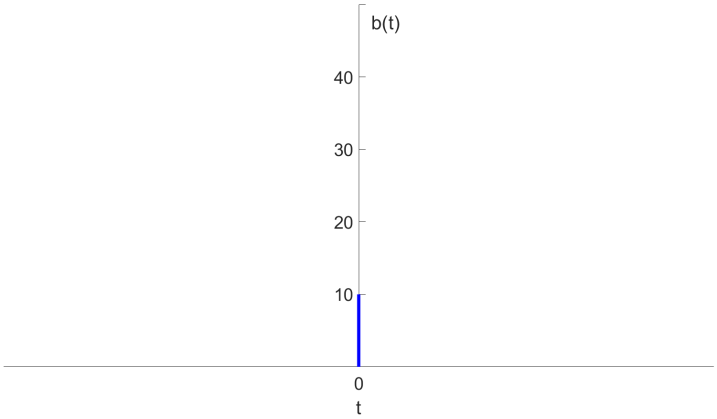
$$\begin{aligned}
\text{Dominio delle frequenze} \longrightarrow B(\mu) &= A(\mu) * 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mu - 10n) \\
&| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \cdot 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mu - 10n - \tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&\downarrow \text{ Proprietà di setacciamento} \\
&= 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\mu - 10n) \\
&| \\
&= 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\mu - 10n) \cdot \Pi\left(\frac{\mu - 10n}{20}\right)
\end{aligned}$$



Il segnale $A(\mu)$ viene ripetuto ogni 10 Hz.
Attenzione: non c'è aliasing poiché non c'è sovrapposizione ma appaiamento.



Il segnale $B(\mu)$ risultante è costante a 10.

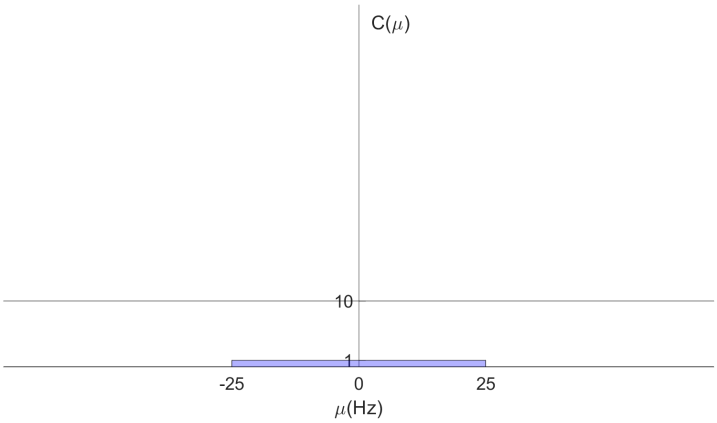


Segnale nel dominio del tempo $b(t)$.

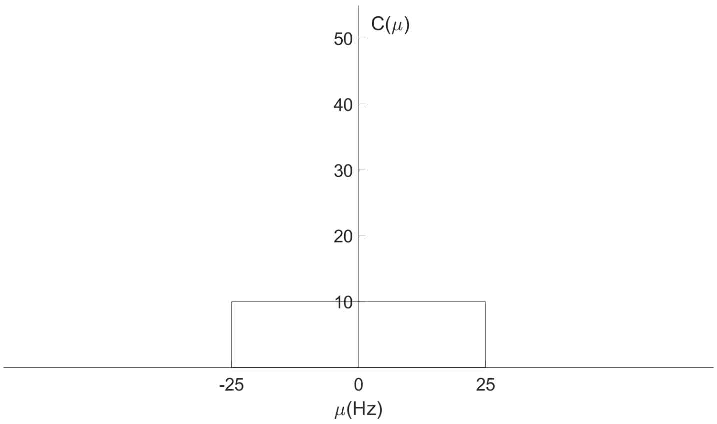
Infine, si applica l'ultimo filtro **passa basso ideale** con frequenza di taglio 25 Hz:

$$\text{Dominio del tempo} \quad \longrightarrow \quad c(t) = b(t) * 50\mathrm{sinc}(50t)$$

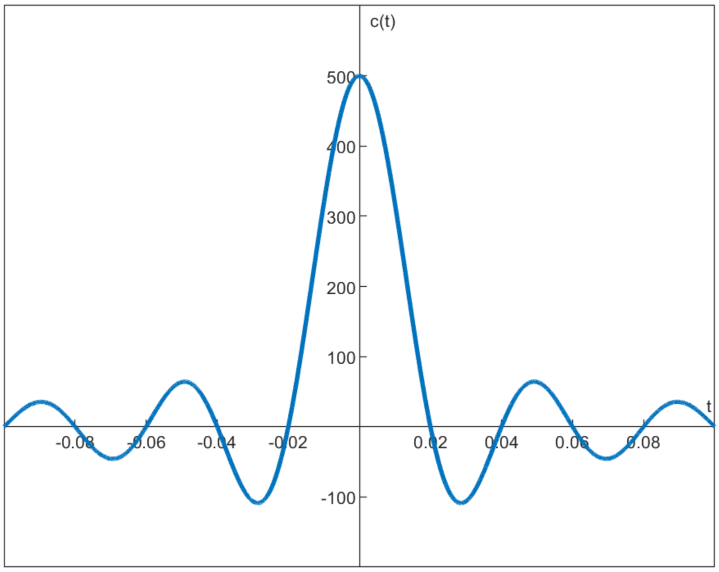
$$\text{Dominio delle frequenze} \quad \longrightarrow \quad C(\mu) = B(\mu) \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{50}\right)$$



Segnale $B(\mu)$ con il filtro passa basso ideale.



Segnale $C(\mu)$ risultante.



Segnale nel dominio del tempo $c(t)$.

2 Soluzione Esercizio (7 punti)

Fonte: Simulazione 15/01/2021

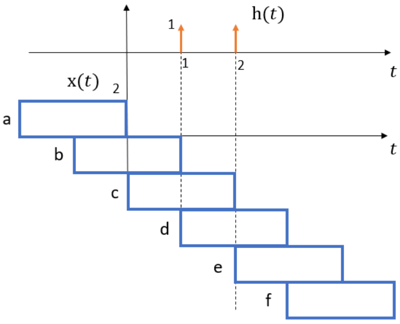
Si traducono i segnali rappresentati graficamente in funzioni nel dominio continuo del tempo:

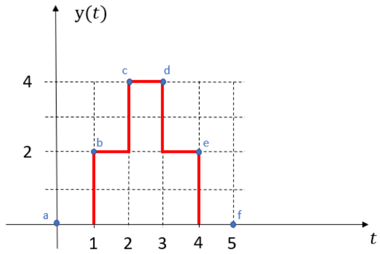
$$\begin{aligned} x(t) &= 2\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) \\ h(t) &= \delta(t-1)+\delta(t-2) \end{aligned}$$

Si calcola il segnale $y(t)$ eseguendo la convoluzione tra i due segnali:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ & \quad | \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot[\delta(t-1-\tau)+\delta(t-2-\tau)]\,\mathrm{d}\tau \\ & \quad | \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-1-\tau)+x(\tau)\,\delta(t-2-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ & \downarrow \ \text{Proprietà di setacciamento} \\ &= x(t-2)+x(t-1) \\ & \quad | \\ &= 2\Pi\left(\frac{t-1-1}{2}\right)+2\Pi\left(\frac{t-2-1}{2}\right) \\ & \quad | \\ &= 2\Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)+2\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right) \end{aligned}$$

La convoluzione grafica tra i due segnali $x\left(t\right)$ e $h\left(t\right)$ è la seguente:





a. Non c'è intersezione tra i segnali, y in 0 non esiste;

b. C'è intersezione, il prodotto tra i segnali è un impulso di ampiezza 2, $y\left(1\right) = 2$;

c. C'è intersezione, il prodotto tra i segnali produce due impulsi di ampiezza 2 ciascuno, l'integrale del prodotto vale 4, $y\left(2\right) = 4$;

d. C'è intersezione, il prodotto tra i segnali produce due impulsi di ampiezza 2 ciascuno, l'integrale del prodotto vale 4, $y\left(3\right) = 4$;

e. C'è intersezione, il prodotto tra i segnali è un impulso di ampiezza 2, $y\left(4\right) = 2$.

f. Non ci può più essere intersezione tra i segnali poiché y in 0 non esiste.

3 Soluzione Esercizio (7 punti)

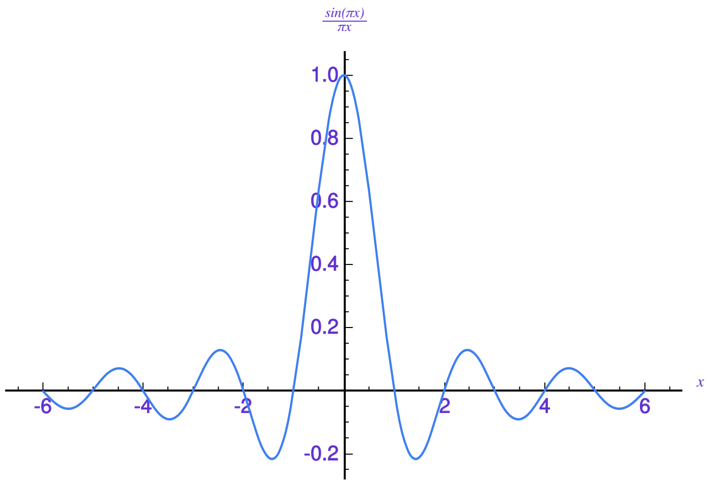
Fonte: Slide del corso

Le risposte alle domande sono elencate qua di seguito. La prima risposta cerca di coprire entrambe le risposte sul *ringing*:

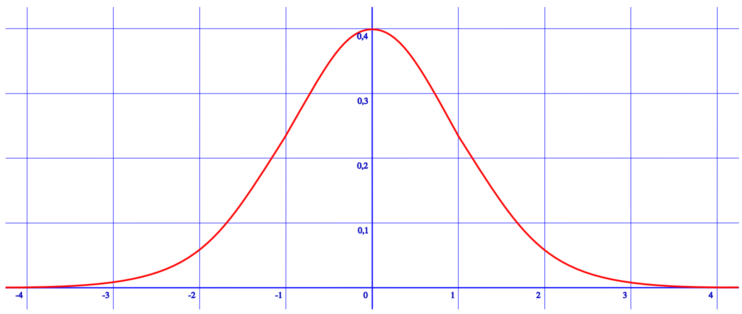
- Il ***ringing***, o effetto di Gibbs, è un effetto visivo causato dall'applicazione di un filtro passa basso ideale (in frequenza), ovvero dell'esecuzione di una convoluzione con l'operatore sinc (nello spazio). Quindi, la risposta all'impulso del filtro passa basso ideale è ancora un sinc e l'immagine visivamente risulta increspata vicino ai bordi taglienti (effetto ringing).

Effetto *ringing* su un'immagine.

Per quanto il filtro passa basso ideale sia una delle cause maggiori, anche il filtro passa basso di Butterworth ha la caratteristica di creare *ringing*. Ma questo avviene solamente per ordini elevati, dunque è evitabile talvolta.
Una **soluzione** adottabile, ma non sempre disponibile, è quella di applicare un filtro di passa basso diverso da quello ideale. Per esempio, un'ottima scelta sarebbe un filtro passa basso Gaussiano che non crea nessun fenomeno di *ringing*. Certo è che non sarà mai ottimo come un filtro passa basso ideale, questo perché esso provoca un altro effetto indesiderato chiamato *blur* (offuscamento).
Il filtro passa basso Gaussiano non presenta *ringing* poiché non è mai negativa e non presenta oscillazioni. Si lascia qua sotto un confronto tra il grafico nel dominio del tempo di un filtro passa basso ideale e Gaussiano per comprendere meglio questo concetto.

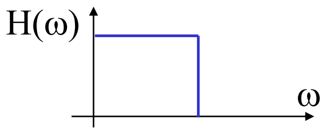


Rappresentazione grafica di un filtro passa basso ideale nel tempo. Si noti l'oscillazione e la presenza di valori negativi.

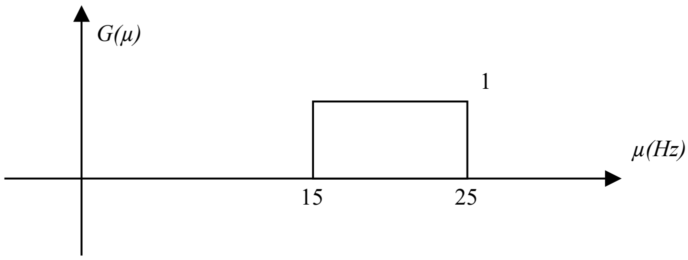


Rappresentazione grafica di un filtro passa basso Gaussiano nel tempo. Si noti l'oscillazione assente e valori solo positivi o nulli.

- Un **filtro passa basso ideale** viene utilizzato per ottenere: lo sfocamento e lo *smoothing*. Matematicamente parlando, esso è una funzione di trasferimento, uguale alla sua trasformata nel dominio delle frequenze, di una box.
  Il termine **ideale** è dovuto alla transizione rapida in corrispondenza alla frequenza di taglio. Come si vede dall'immagine, un cambio così repentino non è analogicamente realizzabile.
  In parole povere, è ideale poiché nell'elettronica non può fisicamente avvenire un cambio di energia così repentino.

  Si rappresenta graficamente un filtro passa basso ideale con frequenze 15 e 25 Hz:

  E analiticamente:

  Dominio delle frequenze $\longrightarrow$ $G(\mu) = \Pi\left(\dfrac{\mu - 20}{10}\right)$

  Dominio del tempo $\longrightarrow$ $g(t) = 10\text{sinc}(10t) \cdot e^{j2\pi t20}$

4 Soluzione Esercizio (6 punti)

Fonte: Lezione 6 di laboratorio

Il codice implementa l'operazione puntuale di clamping. Essa viene utilizzata nel caso in cui ci siano dei pixel di rumore molto chiari o molto scuri che mascherano l'immagine. Per esempio, un'immagine con dei puntini bianchi può essere migliorata utilizzando questa operazione puntuale.

Il codice MATLAB presenta degli errori con gli indici. Qui di seguito viene implementato il codice corretto:

```
%I: una matrice che rappresenta un'immagine a toni di grigio
%Inew: l'immagine dopo l'operazione di filtraggio puntuale

% Carico l'immagine di cameraman
I = imread('cameraman.tif');

% Creo una LUT per operazione di clamping
a = 110; % NO 100!
b = 190; % NO 200!
LUT = []
for i = 0:255
    r = i;
    if r<a
        % MATLAB inizia l'indicizzazione a 1,
        % mentre le intensita' iniziano da 0
        LUT(i+1) = a;
    elseif r<=b & r>=a
        LUT(i+1) = r;
    elseif r>b
        LUT(i+1) = b;
    end
end
% Applico la LUT e visualizzo l'immagine finale
Inew = uint8(LUT(I+1));
figure, imshow(Inew);
```