

Università degli studi di Verona

Soluzioni scheda 2

VR455961 Davide Bragantini

VR443470 Andrea Valentini

maggio 2023

Indice

| | | |
|----------|------------------------------|-----------|
| 1 | Soluzione esercizio 1 | 3 |
| 1.1 | Soluzione a | 3 |
| 1.2 | Soluzione b | 4 |
| 2 | Soluzione esercizio 2 | 5 |
| 2.1 | Soluzione a | 5 |
| 2.2 | Soluzione b | 6 |
| 3 | Soluzione esercizio 3 | 8 |
| 3.1 | Soluzione a | 8 |
| 3.2 | Soluzione b | 10 |
| 3.3 | Soluzione c | 11 |
| 3.4 | Soluzione d | 12 |
| 3.5 | Soluzione e | 14 |
| 3.6 | Soluzione f | 16 |
| 4 | Soluzione esercizio 4 | 16 |

1 Soluzione esercizio 1

Sia A_k la seguente matrice reale:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Soluzione a

Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette inversa.

Una matrice quadrata a coefficienti in un campo dell'insieme \mathbb{K} è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Quindi, si procede con il calcolo del determinante della matrice A_k . Visto che si tratta di una matrice di ordine 3, si utilizza la regola di Sarrus per risolvere il determinante. Si duplica la matrice:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 2k & 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 & k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 & -k & -k & 0 \end{array}$$

Si sommano i prodotti lungo le prime tre diagonal principali:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ diag} & : (2 \cdot k \cdot 0) = 0 \\ 2^\circ \text{ diag} & : (2 \cdot k^2 \cdot -k) = 2k^2 \cdot -k = -2k^3 \\ 3^\circ \text{ diag} & : [2k \cdot (k-1) \cdot -k] = 2k \cdot (-k^2 + k) = -2k^3 + 2k^2 \\ \text{Somma} & : 0 + (-2k^3) + (-2k^3 + 2k^2) = -4k^3 + 2k^2 \end{aligned}$$

E si esegue lo stesso calcolo considerando le tre diagonal opposte:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ diag opp} & : (2k \cdot k \cdot -k) = -2k^3 \\ 2^\circ \text{ diag opp} & : [2 \cdot (k-1) \cdot 0] = 0 \\ 3^\circ \text{ diag opp} & : (2 \cdot k^2 \cdot -k) = -2k^3 \\ \text{Somma} & : -2k^3 + 0 + (-2k^3) = -4k^3 \end{aligned}$$

Si esegue la sottrazione dei due risultati ottenuti mantenendo a sinistra quello della diagonale principale:

$$(-4k^3 + 2k^2) - (-4k^3) = 2k^2$$

Quindi il determinante è:

$$\det(A_k) = 2k^2$$

La matrice A_k ammette inversa per qualsiasi valore reale di k , poiché non esiste nessun valore (in \mathbb{R}) in grado di annullare l'espressione $2k^2$.

1.2 Soluzione b

Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che A_k ammette inversa. Si calcoli A_k^{-1} usando la formula $A_k^{-1} = \frac{1}{\det(A_k)} A_k^*$.

Per calcolare la matrice inversa si calcolano prima i complementi algebrici Com:

$$\text{Com}(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot C_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} k & k^2 \\ -k & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot [0 - (-k^3)] = k^3$$

$$\text{Com}(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot C_{21} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot [0 - (-2k^2)] = -2k^2$$

$$\text{Com}(A_{31}) = (-1)^{3+1} \cdot C_{31} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ k & k^2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (2k^2 - 2k^2) = 0$$

$$\text{Com}(A_{12}) = (-1)^{1+2} \cdot C_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & k^2 \\ -k & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot [0 - (-k^3)] = -k^3$$

$$\text{Com}(A_{22}) = (-1)^{2+2} \cdot C_{22} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot [0 - (-2k^2)] = 2k^2$$

$$\text{Com}(A_{32}) = (-1)^{3+2} \cdot C_{32} = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ k-1 & k^2 \end{pmatrix} = -1 \cdot [2k^2 - (2k^2 - 2k)] = -2k$$

$$\text{Com}(A_{13}) = (-1)^{1+3} \cdot C_{13} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & k \\ -k & -k \end{pmatrix} = 1 \cdot [-k^2 + k - (-k^2)] = k$$

$$\text{Com}(A_{23}) = (-1)^{2+3} \cdot C_{23} = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -k & -k \end{pmatrix} = -1 \cdot [-2k - (-2k)] = 0$$

$$\text{Com}(A_{33}) = (-1)^{3+3} \cdot C_{33} = (-1)^6 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ k-1 & k \end{pmatrix} = 1 \cdot [2k - (2k - 2)] = -2$$

Con i complementi algebrici si costruisce la matrice e si esegue la trasposta per ottenere A_k^* :

$$A_k^* = \begin{pmatrix} k^3 & -k^3 & k \\ -2k^2 & 2k^2 & 0 \\ 0 & -2k & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Infine, si applica la formula:

$$A_k^{-1} = \frac{1}{\det(A_k)} A_k^* = \frac{1}{2k^2} \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 1 & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{2k} & 0 & -\frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$$

2 Soluzione esercizio 2

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definito nell'Esempio 5.2(2), si consideri il seguente sottoinsieme per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{S}_t = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = t\}$$

2.1 Soluzione a

Si trovino i valori di t per cui l'insieme \mathcal{S}_t è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Per verificare quali valori di t rispettano il teorema di caratterizzazione dei sottospazi vettoriali, si possono effettuare alcune prove banali:

- Assumendo che $t = 1$:

$$\mathcal{S}_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 1\}$$

E trovando due funzioni che appartengano all'insieme:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 4 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 5 & x \neq 0 \end{cases}$$

Si esegue la verifica delle due proprietà:

$$\text{Proprietà } a : (f + g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\text{Proprietà } b : \lambda f(x) = \lambda f(0) = \lambda 1 \neq 0$$

Le proprietà non sono rispettate, quindi con il valore $t = 1$ l'insieme \mathcal{S}_1 non è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Assumendo che $t = -1$:

$$\mathcal{S}_{-1} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = -1\}$$

E trovando due funzioni che appartengano all'insieme:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 8 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 10 & x \neq 0 \end{cases}$$

Si esegue la verifica delle due proprietà:

$$\text{Proprietà } a : (f + g)(0) = f(0) + g(0) = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$\text{Proprietà } b : \lambda f(x) = \lambda f(0) = \lambda - 1 \neq 0$$

Le proprietà non sono rispettate, quindi con il valore $t = -1$ l'insieme \mathcal{S}_{-1} non è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Assumendo che $t = 0$:

$$\mathcal{S}_0 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0\}$$

E trovando due funzioni che appartengano all'insieme:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2 & x \neq 0 \end{cases}$$

Si esegue la verifica delle due proprietà:

$$\text{Proprietà } a : (f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 = 0$$

$$\text{Proprietà } b : \lambda f(x) = \lambda f(0) = \lambda 0 = 0$$

Le proprietà sono rispettate, quindi con il valore $t = 0$ l'insieme \mathcal{S}_0 è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

È possibile concludere le prove con i valori t e giungere ad una conclusione. L'insieme \mathcal{S}_t è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se e solo se t ha valore 0. Negli altri casi l'insieme non rispetta il teorema di caratterizzazione dei sottospazi vettoriali. Infatti, andando ad aumentare positivamente o negativamente la t , la proprietà a avrà come risultato un valore sempre diverso da zero.

2.2 Soluzione b

Sia \mathcal{U} il sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ generato da f e g dove $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si trovi una base dell'intersezione $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}_0$.

L'insieme \mathcal{S}_0 è così definito:

$$\mathcal{S}_0 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0\}$$

Per evitare errori, una funzione che appartiene a questo insieme verrà indicata con l'apice, quindi $f' \in \mathcal{S}_0$. Si prende una qualsiasi funzione dall'insieme \mathcal{S}_0 così definita:

$$f' \in \mathcal{S}_0 \quad f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 4 & x \neq 0 \end{cases}$$

Le funzioni generatori del sottospazio \mathcal{U} sono:

$$f \in \mathcal{U} \quad f(x) = \sin(x)$$

$$g \in \mathcal{U} \quad g(x) = \cos(x)$$

Si sceglie un valore comodo e si formano due insiemi:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \{f'(0), f(0), g(0)\} = \{0, 0, 1\}$$

$$x = 90 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \{f'(90), f(90), g(90)\} = \{4, 1, 0\}$$

Adesso è necessario dimostrare che $\{v_1, v_2\}$ è un sistema di generatori, cioè è necessario stabilire se per ogni $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{S}_0$ esistono due scalari $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 = \mathbf{w} & \xrightarrow{\text{sostituzione}} a_1 (0, 0, 1) + a_2 (4, 1, 0) = (w_1, w_2, w_3) \\ & (0, 0, a_1) + (4a_2, a_2, 0) = (w_1, w_2, w_3) \\ & (4a_2, a_2, a_1) = (w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

Il relativo sistema lineare:

$$\begin{cases} 4a_2 = w_1 \\ a_2 = w_2 \\ a_1 = w_3 \end{cases}$$

I vettori v_1, v_2 sono un sistema di generatori se e solo se il sistema ammette soluzione. Per farlo, si utilizza il teorema di Rouché Capelli e per calcolare il rango, necessario per il teorema, si utilizza l'Eliminazione di Gauss così da ottenere una forma matriciale ridotta:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 1 & w_2 \\ 1 & w_3 \end{array} \right) & \xrightarrow{E_{1,3}(-\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 1 & w_2 \\ 0 & w_3 - \frac{w_1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{E_{1,2}(-\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 0 & w_2 - \frac{w_1}{4} \\ 0 & w_3 - \frac{w_1}{4} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 0 & \frac{4w_2 - w_1}{4} \\ 0 & \frac{4w_3 - w_1}{4} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{E_{2,3}\left(\frac{-w_1 + 4w_3}{w_1 - 4w_2}\right)} \left(\begin{array}{c|c} 4 & w_1 \\ 0 & \frac{4w_2 - w_1}{4} \\ 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Il rango della matrice aumentata è 2. Tuttavia, nel caso in cui w_2, w_1 siano pari a zero, il rango è 1. Dunque, esiste una e un'unica soluzione al sistema. Quindi è possibile concludere che v_1, v_2 sono un sistema di generatori. Per affermare che siano anche una base è necessario dimostrare che siano anche linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} b_1 v_1 + b_2 v_2 = 0 & \xrightarrow{\text{sostituzione}} b_1 (0, 0, 1) + b_2 (4, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ & (0, 0, b_1) + (4b_2, b_2, 0) = (0, 0, 0) \\ & (4b_2, b_2, b_1) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Il sistema relativo:

$$\begin{cases} 4b_2 = 0 \\ b_2 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

E con il metodo di sostituzione si trova subito che l'unica soluzione possibile è $b_1 = b_2 = 0$. Dunque i vettori sono linearmente indipendenti e l'insieme:

$$\{v_1, v_2\} = \{(f'(0), f(0), f(0)), (f'(90), f(90), g(90))\} = \{(0, 0, 1), (4, 1, 0)\}$$

È una base di $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}_0$.

3 Soluzione esercizio 3

Sia $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'applicazione data da:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x - 3y + 3z \end{pmatrix}$$

Per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

3.1 Soluzione a

Si verifichi che f è lineare.

Per verificare la linearità si prova rapidamente a “mandare lo zero nello zero”:

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 - 0 + 0 \\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La condizione necessaria di linearità è stata dimostrata. Adesso, si prosegue con la verifica della proprietà di condizione di linearità dividendola nella dimostrazione della condizione di additività e omogeneità.

Dimostrazione condizione di additività. Dati due vettori generici v_1, v_2 dello spazio vettoriale:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

Si dimostra che f è una funzione additiva:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

Si esegue prima il calcolo del blocco dell'unica funzione:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \\ 3(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$

E successivamente si esegue il calcolo delle due funzioni distinte:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x_1 - y_1 + z_1 \\ 3x_1 - 3y_1 + 3z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - y_2 + z_2 \\ 3x_2 - 3y_2 + 3z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \\ 3(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I due risultati coincidono, per cui la funzione f è additiva.

QED

Dimostrazione condizione di omogeneità. Dato un vettore generico v_1 dello spazio vettoriale e dato uno scalare λ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

Si dimostra che f è una funzione omogenea:

$$f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1) = f \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot z_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot f \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Si esegue prima il calcolo della funzione con lo scalare internamente:

$$f \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x - \lambda y + \lambda z \\ 3\lambda x - 3\lambda y + 3\lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x - y + z) \\ \lambda(3x - 3y + 3z) \end{pmatrix}$$

E successivamente si esegue il calcolo della funzione con lo scalare esternamente:

$$\lambda \cdot f \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x - 3y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x - y + z) \\ \lambda(3x - 3y + 3z) \end{pmatrix}$$

I due risultati coincidono, per cui la funzione è anche omogenea.

QED

Entrambe le condizioni, additività e omogeneità, sono state dimostrate e confermate. Per cui, la funzione f è un'applicazione lineare.

3.2 Soluzione b

Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica e si dica se f è un isomorfismo.

La base canonica del dominio è:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

E i rispettivi vettori immagine mediante f sono:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - 0 + 0 \\ 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 - 1 + 0 \\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 - 0 + 1 \\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice associata A rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Per verificare se f è un isomorfismo, è possibile verificare se l'applicazione lineare è invertibile. In caso affermativo, allora la funzione è isomorfa. Purtroppo, l'applicazione lineare inversa si calcola eseguendo l'inversione della matrice associata A , che in questo caso non è quadrata. Per cui, è possibile già concludere che l'applicazione lineare f non è un isomorfismo.

3.3 Soluzione c

Si calcolino le dimensioni degli spazi vettoriali $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{C}^2$ e $N(f) \subseteq \mathbb{C}^3$.

La dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare corrisponde alla dimensione della matrice associata nel caso in cui quest'ultima sia stata costruita utilizzando le basi canoniche. Inoltre, la dimensione della matrice associata corrisponde al rango di essa:

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(A) = \text{rk}(A)$$

Si procede con il calcolo applicando l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango corrisponde a 1, quindi anche la sua dimensione è 1:

$$\text{rk}(A) = 1 = \dim(A)$$

Come viene enunciato nella lezione 17, la dimensione $\dim(f)$ viene chiamata nullità di f . Essa è possibile calcolarla trovando la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare f :

$$N(f) = \dim(\ker(f))$$

Sia $v \in \mathbb{C}^3$ e siano (α, β, γ) le sue coordinate riferite alla base $\mathcal{C}_{\mathbb{C}^3}$. Si imposta l'uguaglianza e il sistema relativo:

$$Av = 0_{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Il rango della matrice è pari 1. Per applicare il teorema di Rouché Capelli, è necessario calcolare il rango anche della matrice aumentata tramite EG:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{1,2}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Anche nella matrice aumentata il rango è 1, quindi per il teorema di Rouché Capelli:

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) < n \longrightarrow 1 = 1 < 3$$

Dove n indica il numero di incognite, allora il sistema ammette $\infty^{n-\text{rk}(A)}$ soluzioni. In questo caso $\infty^{3-1} = \infty^2$. Per cui la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare f è pari a 2:

$$N(f) = \dim(\ker(f)) = 2$$

Infine, il teorema delle dimensioni o teorema della nullità più rango (forse non è stato fatto a lezione!) conferma il calcolo poiché:

$$\dim(f) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \longrightarrow \dim(\mathbb{C}^3) = 2 + 1$$

3.4 Soluzione d

Si verifichi che l'insieme $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di \mathbb{C}^3 .

L'insieme \mathcal{C} è una base di \mathbb{C}^3 se i vettori che lo compongono sono un sistema di generatori e vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione che i vettori sono un sistema di generatori. Per dimostrare che $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è un sistema di generatori, è necessario stabilire se per ogni $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{C}$ esistono tre scalari $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ tali che:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = w$$

Si sostituiscono i dati:

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Si costruisce il sistema relativo:

$$\begin{cases} 2a_1 + a_3 = w_1 \\ a_1 + a_2 = w_2 \\ a_3 = w_3 \end{cases}$$

Se il sistema ammette soluzione, allora i vettori v_1, v_2, v_3 sono un sistema di generatori. Quindi, viene calcolato il rango della matrice incompleta A e completa $(A|b)$, così da applicare il teorema di Rouché Capelli:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rk}(A) = 3 \\ (A|b) &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} \right. \right) \xrightarrow{E_{1,2}(-\frac{1}{2})} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} w_1 \\ \frac{2w_2 - w_1}{2} \\ w_3 \end{matrix} \right. \right) \rightarrow \text{rk}(A|b) = 3 \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Rouché Capelli, il sistema ammette una e una sola soluzione poiché:

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = n \xrightarrow{\text{sostituzione}} 3 = 3 = 3$$

Con n che corrisponde al numero di incognite. Quindi, si può concludere la dimostrazione affermando che i tre vettori sono un insieme di generatori. QED

Dimostrazione che i vettori sono linearmente indipendenti. Se i vettori sono linearmente indipendenti, allora l'insieme è una base. Si procede con la dimostrazione. Siano $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$ e si verifichi che:

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 = 0$$

Quindi, si procede con la sostituzione:

$$b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2b_1 + b_3 \\ b_1 + b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si costruisce il sistema relativo:

$$\begin{cases} 2b_1 + b_3 = 0 \\ b_1 + b_2 = 0 \\ b_3 = 0 \end{cases}$$

Applicando banalmente il metodo di sostituzione, si arriva alla conclusione che l'unica soluzione del sistema è $b_1 = b_2 = 0$. Per cui, i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. QED

L'esercizio si conclude affermando che l'insieme \mathcal{C} è una base di \mathbb{C}^3 grazie alla dimostrazione delle due condizioni: sistema di generatori e linearmente indipendenti.

3.5 Soluzione e

Si verifichi che l'insieme $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ con $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una base di \mathbb{C}^2 .

L'insieme \mathcal{B} è una base di \mathbb{C}^2 se i vettori che lo compongono sono un sistema di generatori e vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione che i vettori sono un sistema di generatori. Per dimostrare che $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ è un sistema di generatori, è necessario stabilire se per ogni $v = (v_1, v_2) \in \mathcal{B}$ esistono due scalari $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tali che:

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 = v$$

Si sostituiscono i dati:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Si costruisce il sistema relativo:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = v_1 \\ a_1 = v_2 \end{cases}$$

Se il sistema ammette soluzione, allora i vettori w_1, w_2 sono un sistema di generatori. Quindi, viene calcolato il rango della matrice incompleta A e completa $(A|b)$, così da applicare il teorema di Rouché Capelli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rk}(A) = 2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \end{array} \right) \longrightarrow \text{rk}(A|b) = 2$$

Per fortuna le matrici erano già in forma ridotta. Adesso, applicando il teorema di Rouché Capelli, si può osservare che il sistema ammette una e una sola soluzione:

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = n \xrightarrow{\text{sostituzione}} 2 = 2 = 2$$

Con n che corrisponde al numero di incognite. Quindi, si conclude la dimostrazione affermando che i due vettori sono un insieme di generatori. QED

Dimostrazione che i vettori sono linearmente indipendenti. Se i vettori sono linearmente indipendenti, allora l'insieme è una base. Si procede con la dimostrazione. Siano $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ e si verifichi che:

$$b_1 w_1 + b_2 w_2 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 = 0$$

Si procede con la sostituzione:

$$b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si costruisce il sistema relativo:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

Applicando banalmente il metodo di sostituzione, si arriva alla conclusione che l'unica soluzione del sistema è $b_1 = b_2 = 0$. Per cui, i vettori w_1, w_2 sono linearmente indipendenti. QED

L'esercizio si conclude affermando che l'insieme \mathcal{B} è una base di \mathbb{C}^2 grazie alla dimostrazione delle due condizioni: sistema di generatori e linearmente indipendenti.

3.6 Soluzione f

Si determini la matrice associata a f rispetto alla base \mathcal{C} di \mathbb{C}^3 e alla base \mathcal{B} di \mathbb{C}^2 .

4 Soluzione esercizio 4

Sia \mathcal{C} la base di \mathbb{C}^3 dell'esercizio 3(d) e sia $\mathcal{D} = \{u_1, u_2, u_3\}$ dove $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si verifichi che \mathcal{D} è una base di \mathbb{C}^3 e si calcoli la matrice del cambio di base $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.