# Guida agli Esami di Analisi II

VR443470

luglio 2023

# Indice

# 1 Esercizio 1 - Problema di Cauchy

## 1.1 Problema di Cauchy - Soluzione

Il primo esercizio è sempre uguale e riguarda il problema di Cauchy. Un esempio di testo tratto dal tema d'esame del 25/06/2021: ***Si trovi una soluzione locale del seguente problema di Cauchy e si determini l'intervallo massimale in cui tale soluzione è definita.***

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y^3}{x^2+1} = 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il **primo passo** è esplicitare la derivata, per cui:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y^3}{x^2+1} = 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y' = -\dfrac{y^3}{x^2+1} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il **secondo passo** è risolvere l'integrale per ciascuna parte:

$$\begin{aligned}
& \rightarrow && \int -\frac{y^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
& \downarrow && y^3 \text{ è costante, quindi si porta fuori dall'integrale} \\
& \rightarrow && -y^3 \cdot \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
& \downarrow && \text{l'integrale corrisponde all'arcotangente: } \textstyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \\
-\int \frac{1}{y^3}\,\mathrm{d}y & = && \frac{1}{1}\cdot\arctan\left(\frac{x}{1}\right) \\
& \downarrow && \text{risoluzione dell'integrale a sinistra} \\
\frac{1}{2y^2} & = && \arctan(x) \\
& \downarrow && \text{si somma la costante } c \\
\frac{1}{2y^2} & = && \arctan(x) + c
\end{aligned}$$

Il risultato rappresenta la famiglia delle soluzioni delle funzioni $y$, chiamata anche *soluzione generale*.

Il **terzo passo** è sostituire la condizione iniziale all'interno della soluzione e calcolare il valore della costante $c$:

$$\begin{aligned}\text{Condizione iniziale} &\longrightarrow y(0)=1\\ \text{Sostituzione nella soluzione generale} &\longrightarrow \frac{1}{2\cdot 1^2}=\arctan(0)+c\end{aligned}$$

Quindi il valore di $c=\dfrac{1}{2}$.

Il **quarto e ultimo passo** riguarda l'intervallo massimale. Per trovarlo, è necessario prendere in considerazione la soluzione generale trovata al punto 2:

$$\frac{1}{2y^2}=\arctan(x)+c$$

Sostituire il valore $c$ con la soluzione trovata, nel nostro caso $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2y^2}=\arctan(x)+\frac{1}{2}$$

Esplicitando la $y$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2} &= 2\cdot\arctan(x)+1\\ y^{-2} &= \frac{1}{2\arctan(x)+1}\\ y &= \frac{1}{\sqrt{2\arctan(x)+1}}\end{aligned}$$

A questo punto, si afferma che il problema ha soluzione solo se:

$$\arctan(x)+\frac{1}{2}>0$$

Si esplicita la $x$ ricordando che $\tan^{-1}(x)=y$ è l'inversa di $x=\tan(y)$:

$$\begin{aligned}\arctan(x)+\frac{1}{2} &> 0\\ \arctan(x) &> -\frac{1}{2}\\ x &> \tan\left(-\frac{1}{2}\right)\\ x &> -\tan\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

## 1.2 Alcuni esercizi d'esame svolti

# 2 Esercizio 2 - Problema di Cauchy con variabile $t$ e $y''$

## 2.1 Risoluzione del problema di cauchy con $y''$

Il secondo esercizio è un problema di Cauchy un po' più complesso poiché utilizza il metodo di somiglianza[1]. Un esempio di testo estratto dal tema d'esame del 25/06/2021: ***Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:***

$$\begin{cases} y'' - y' = 1 - 2t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Il **primo passo** è scrivere l'equazione caratteristica che corrisponde sempre alla prima equazione:

$$y'' - y' = 1 - 2t \longrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$$

L'equazione caratteristica deve essere posta uguale a zero.

Il **secondo passo** è risolvere l'equazione caratteristica così da avere le soluzioni reali distinte:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

Il **terzo passo** è scrivere l'integrale generale $y(t)$ indicando con $y_P(t)$ una soluzione particolare dell'equazione completa:

$$y(t) = y_P(t) + c_1 e^{0t} + c_2 e^{1t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Escludendo questo esercizio, in generale l'integrale generale è sempre così. Gli unici termini che cambiano sono le $e$ che hanno come esponente la soluzione dell'equazione moltiplicata per $t$.

Dato che una soluzione dell'equazione caratteristica è 0 e $1 - 2t$ è un polinomio di primo grado, $y_P(t)$ sarà:

$$y_P(t) = (at + b)\, t^1 = at^2 + bt$$

Dove l'esponente 1 indica quante volte si ripete il valore zero.

<u>**N.B.**</u> Esistono diverse casistiche e ciascuno cambia l'equazione della soluzione particolare:

- **Polinomio di secondo grado**. In questo caso si scrive un'equazione di secondo grado generale

$$\begin{aligned} \text{Esercizio di esempio:} \quad &\longrightarrow \quad y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 1 \\ \text{Soluzione particolare:} \quad &\longrightarrow \quad y_P(x) = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

[1] Link utile

- **Polinomio con un esponenziale**. In questo caso si scrive un'equazione contenente l'esponenziale per un valore generico:

$$\text{Esercizio di esempio:} \quad \longrightarrow \quad y'' + y' - 2y = 3e^{-x}$$

$$\text{Soluzione particolare:} \quad \longrightarrow \quad y_P(x) = ae^{-x}$$

- **Polinomio di primo grado**. In questo caso si scrive un'equazione di primo grado generale:

$$\text{Esercizio di esempio:} \quad \longrightarrow \quad y'' + y' - 2y = x + 2$$

$$\text{Soluzione particolare:} \quad \longrightarrow \quad y_P(x) = ax + b$$

- **Soluzione dell'equazione caratteristica che compare nel polinomio**. In questo caso, è necessario aggiungere la $x$ elevandola al numero di ripetizioni nel polinomio:

$$\text{Esercizio di esempio:} \quad \longrightarrow \quad y'' + 3y' + 2y = 3e^{x}$$

$$\text{Soluzione particolare:} \quad \longrightarrow \quad y_P(x) = a \cdot x^1 \cdot e^x$$

- **Soluzione dell'equazione caratteristica uguale a zero** ($\lambda = 0$). In questo caso, è necessario aggiungere una $x$ elevandola al numero di volte in cui $\lambda = 0$ annulla l'equazione (molteplicità algebrica):

$$\text{Esercizio di esempio:} \quad \longrightarrow \quad y'' + y' = x + 2$$

$$\text{Soluzione particolare:} \quad \longrightarrow \quad y_P(x) = (ax + b)\, x^1$$

- **Coseno o seno**. In questo caso, è necessario scrivere entrambe le funzioni trigonometriche:

$$\text{Esercizio di esempio:} \quad \longrightarrow \quad y'' + y' = \cos(2x)$$

$$\text{Soluzione particolare:} \quad \longrightarrow \quad y_P(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

Il **quarto passo** è eseguire la derivata prima e seconda della soluzione particolare:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= at^2 + bt \\ y'_P(t) &= 2at + b \\ y''_P(t) &= 2a \end{aligned}$$

Il **quinto passo** è sostituire le derivate trovate nel problema iniziale, ovvero in $y'' - y'$, e risolvere il sistema equivalente:

$$\begin{aligned} y'' - y' &= 1 - 2t \\ (2a) - (2at + b) &= 1 - 2t \\ 2a - 2at - b &= 1 - 2t \\ (-2a)\,t + (2a - b) &= (-2)\,t + (1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Il **sesto passo** è sostituire i valori trovati nella soluzione particolare:

$$y_P\,(t) = at^2 + bt \to y_P\,(t) = 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t = t^2 + t$$

Il **settimo passo** è riscrivere l'integrale generale $y\,(t)$ con la soluzione particolare:

$$y\,(t) = t^2 + t + c_1 + c_2 e^{1t}$$

Ed eseguire la derivata prima di tale equazione:

$$\begin{aligned} y'\,(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^2 + t + c_1 + c_2 e^t \\ y'\,(t) &= 2t + 1 + c_2 e^t \end{aligned}$$

L'**ottavo passo** conclude l'esercizio. Si esegue una sostituzione delle condizioni del problema nell'integrale generale e nella sua derivata così da trovare le costanti $c_1$ e $c_2$:

$$\begin{cases} y\,(0) = 0 & \longrightarrow 0^2 + 0 + c_1 + c_2 e^0 = 0 \\ y'\,(0) = 2 & \longrightarrow 2 \cdot 0 + 1 + c_2 e^0 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Infine, si scrive la soluzione del problema di Cauchy sostituendo le costanti nell'integrale generale:

$$y\,(t) = t^2 + t - 1 + e^t$$

## 2.2 Alcuni esercizi d'esame svolti

# 3 Esercizio 3 - Studio di funzione

## 3.1 Tipologie di esercizio

### 3.1.1 Rappresentare la funzione nel piano cartesiano

Un esercizio semplice che ad oggi viene fuso con altri esercizi, è quello della rappresentazione della funzione nel piano cartesiano. Si prenda in considerazione l'esame del 25/06/2021: ***Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio naturale della funzione:***

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln\left(4x - x^2 - 4y^2\right)$$

***Si rappresenti $D$ nel piano cartesiano.***

Il **primo passo** è rappresentare il dominio della funzione. In questo caso, è necessario affermare che l'espressione sotto radice sia maggiore/uguale di zero (per rimanere nei reali) e l'espressione del logaritmo sia strettamente maggiore di zero (con zero il logaritmo non ha soluzione):

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \left(y - x^2 \geq 0\right) \wedge \left(4x - x^2 - 4y^2 > 0\right)\right\}$$

**N.B.** Esistono diverse casistiche:

- **Frazione**:
$$f(x, y) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}}$$
Nonostante ci sia una radice quadrata, al denominatore non può esserci uno zero! Per cui, il dominio deve essere:
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x + 1 > 0) \wedge \left(x^2 + 4y^2 - 1 > 0\right)\right\}$$

- **Radice quadrata e logaritmo annidato**:
$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x)$$
In cui il suo dominio è:
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \left(y > x^2\right) \wedge \left(y < x^2\right)\right\}$$

Il **secondo passo** è calcolare i punti appartenenti al dominio, così da poter rappresentare il grafico sul piano cartesiano. Per farlo, si prende ogni condizione presente nel dominio e si calcolano un po' di punti:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $\pm 1$ | $1$ |
| $\pm 2$ | $4$ |

Punti di $y - x^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$ |
| $2$ | $\pm 1$ |

Punti di $4x - x^2 - 4y^2$

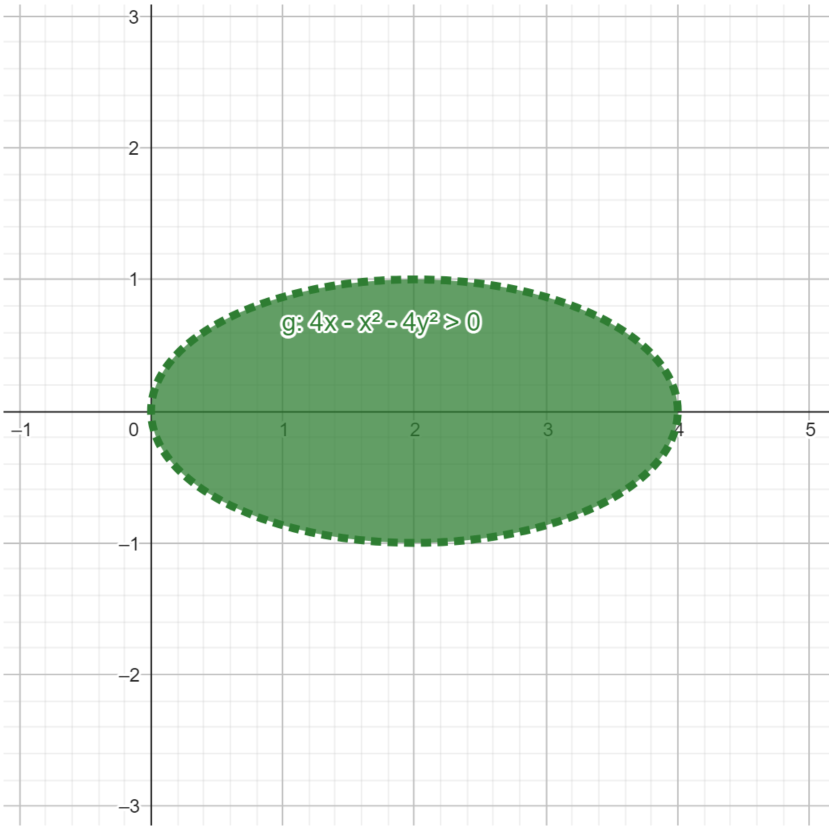



Grafico $4x - x^2 - 4y^2 > 0$.

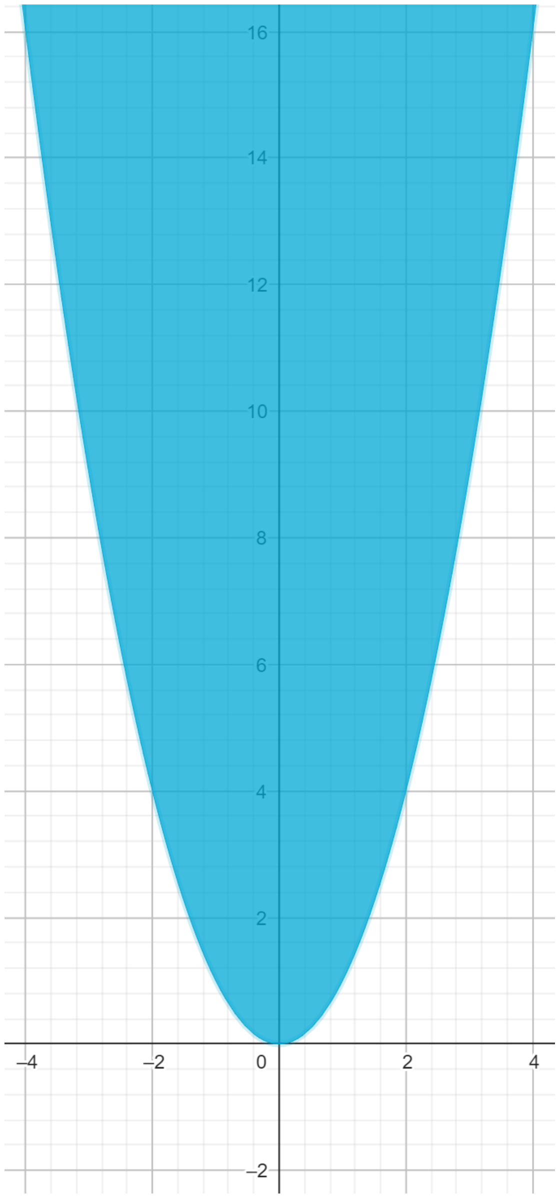



Grafico $y - x^2 \geq 0$.

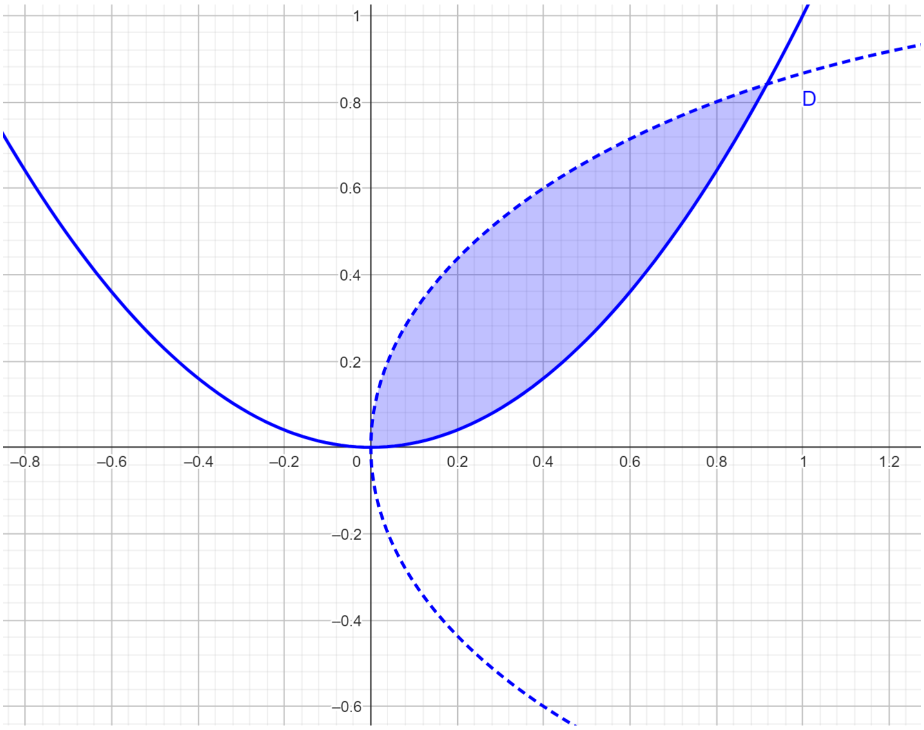



Grafico del dominio completo.

### 3.1.2 Dimostrazione che un punto sia interno al dominio

Una richiesta banale ma che potrebbe capitare, nonostante sia molto raro, è la seguente (estratta dall'esame del 25/06/2021): ***Sia*** $D \subset \mathbb{R}^2$ ***il dominio naturale della funzione:***

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} - \ln\left(4x - x^2 - 4y^2\right)$$

***Si dimostri che il punto*** $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ***è interno all'insieme*** $D$***.***

Il **primo passo** è prendere le disuguaglianze del dominio e considerarle in modo stretto, ovvero:

$$\begin{array}{lll} y - x^2 \geq 0 & \longrightarrow & y - x^2 > 0 \\ 4x - x^2 - 4y^2 > 0 & \longrightarrow & 4x - x^2 - 4y^2 > 0 \end{array}$$

Il **secondo passo** è sostituire i valori del punto dato dall'esercizio e verificare la veridicità delle disuguaglianze. In questo caso, si sostituisce il punto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ all'interno delle due disuguaglianze:

$$\begin{array}{lll} y - x^2 > 0 & \longrightarrow & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1^2}{2^2} > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{4} > 0 \quad \checkmark \\ 4x - x^2 - 4y^2 > 0 & \longrightarrow & 4 \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{1^2}{2^2} - 4 \cdot \dfrac{1^2}{2^2} > 0 \Longrightarrow \dfrac{3}{4} > 0 \quad \checkmark \end{array}$$

Il punto $P$ rispetta entrambe le disuguaglianze, quindi è un punto interno al dominio.

### 3.1.3 Direzione della funzione affinché essa sia di massima crescita

Una richiesta che si può trovare negli esami ma non è tra le più richieste, è la seguente: ***Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio naturale della funzione:***

$$f(x,y) = \sqrt{y-x^2} - \ln\left(4x - x^2 - 4y^2\right)$$

***In quale direzione ci si deve muovere da $P$ per garantire a $f$ la massima crescita?***

La direzione $\overrightarrow{v}$ di massima crescita è quella del gradiente di $f$ nel punto $P$. Per cui, per calcolare il gradiente sono necessari due passaggi fondamentali. Il **primo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a $x$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{y-x^2} - \ln\left(4x-x^2-4y^2\right) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{y-x^2} - \ln\left(4x-x^2-4y^2\right)\right) \\
&\downarrow \text{ si utilizza la regola } \tfrac{\partial}{\partial x}(f+g) = \tfrac{\partial}{\partial x}(f) + \tfrac{\partial}{\partial x}(g) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{y-x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(4x-x^2-4y^2\right)\right) \\
&\downarrow \text{ derivata della radice quadrata per la derivata dell'argomento} \\
f(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} \cdot (-2x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(4x-x^2-4y^2\right)\right) \\
&\downarrow \text{ derivata del logaritmo per la derivata dell'argomento} \\
f(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} \cdot (-2x) - \frac{1}{4x-x^2-4y^2} \cdot (4-2x) \\
&\downarrow \text{ semplificazioni} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{x}{\sqrt{y-x^2}} - \frac{4-2x}{4x-x^2-4y^2}
\end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a $y$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{y-x^2}-\ln\left(4x-x^2-4y^2\right)\\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y-x^2}-\ln\left(4x-x^2-4y^2\right)\right)\\
&\downarrow \text{ si utilizza la regola } \tfrac{\partial}{\partial y}(f+g)=\tfrac{\partial}{\partial y}(f)+\tfrac{\partial}{\partial y}(g)\\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y-x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(4x-x^2-4y^2\right)\right)\\
&\downarrow \text{ derivata della radice quadrata per la derivata dell'argomento}\\
f(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}}\cdot(1)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(4x-x^2-4y^2\right)\right)\\
&\downarrow \text{ derivata del logaritmo per la derivata dell'argomento}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}}-\frac{1}{4x-x^2-4y^2}\cdot(-8y)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}}+\frac{8y}{4x-x^2-4y^2}
\end{aligned}
$$

Il **terzo passo** è quello di andare a sostituire i valori del punto $P$ all'interno delle derivate parziali. Così facendo, si troverà la direzione di massima crescita, ovvero il gradiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{x}{\sqrt{y-x^2}} - \frac{4-2x}{4x-x^2-4y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}}} - \frac{4-2\cdot\frac{1}{2}}{4\cdot\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}-4\cdot\frac{1^2}{2^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= -1-\frac{3}{2-\frac{1}{4}-1} \\
\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= -5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} + \frac{8y}{4x-x^2-4y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}}} + \frac{8\cdot\frac{1}{2}}{4\cdot\frac{1}{2}-\frac{1^2}{2^2}-4\cdot\frac{1^2}{2^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= 1+\frac{4}{2-\frac{1}{4}-1} \\
\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

Si conclude l'esercizio:

$$\overrightarrow{v} = \nabla f(P) = \left(-5, \frac{19}{3}\right)$$

### 3.1.4 Specificare se un dominio è aperto/chiuso, limitato/illimitato, connesso/sconnesso, compatto

Questa richiesta è molto probabile che ci sia all'esame. Solitamente, viene accoppiata con la scrittura del dominio e della sua rappresentazione (pagina 10). Un esempio di tema d'esame (03/03/2023): ***Data la funzione:***

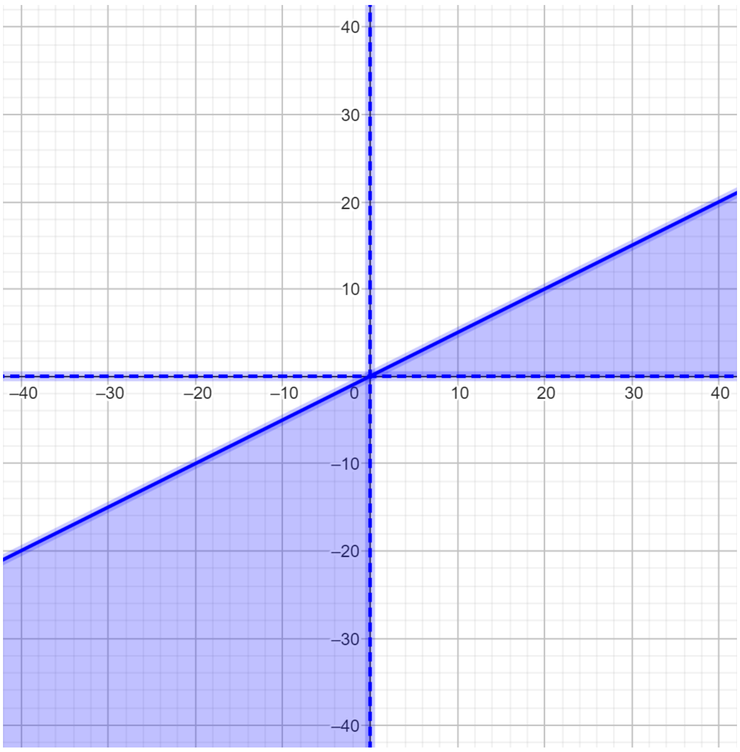
$$f(x,y) = ye^{\sqrt{x-2y}} - \ln(xy)$$

***Determinare analiticamente il suo dominio naturale $D$ e poi rappresentarlo nel piano cartesiano. Stabilire se $D$ è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!).***

Prima di tutto si stabilisce il dominio:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - 2y \geq 0) \wedge (xy > 0)\right\}$$

Ovvero si impone le condizioni di esistenza sulla radice quadrata e il logaritmo. La sua rappresentazione grafica:

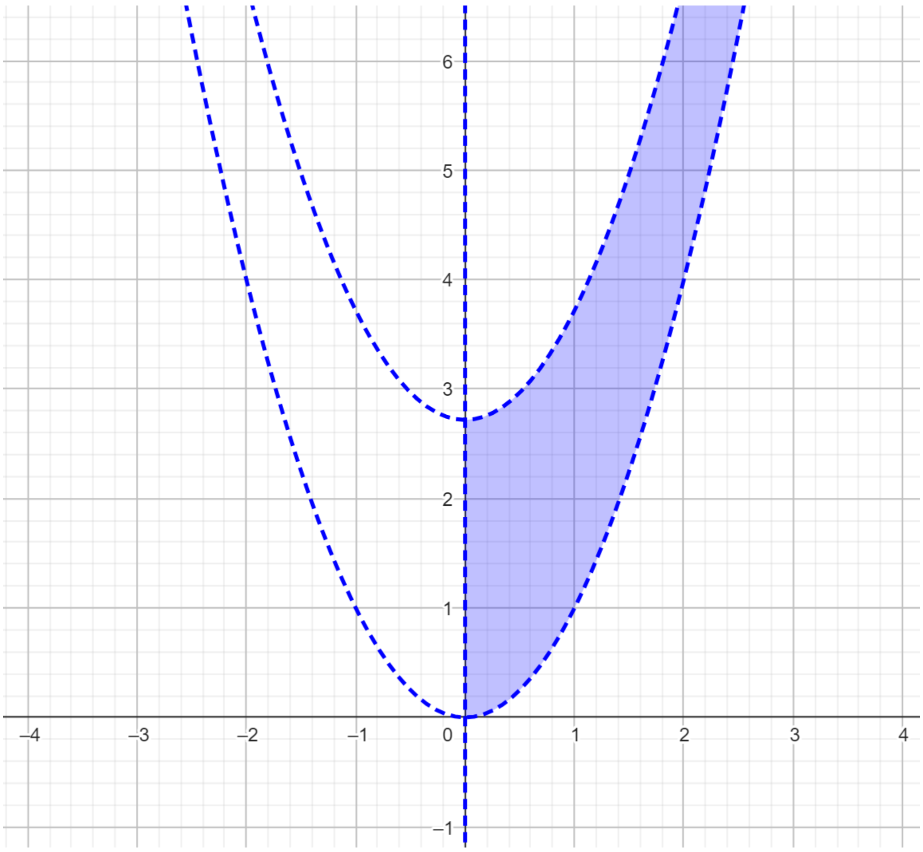



- **Limitato o illimitato?** Il dominio è illimitato, dato che continua all'infinito, ovvero non esiste una palla con centro l'origine e raggio $r \in \mathbb{R}$ che contiene $D$.
- **Aperto o chiuso?** Il dominio non è né chiuso né aperto poiché contiene alcuni punti della sua frontiera ma non tutti.

- **Connesso o sconnesso?** Il dominio è sconnesso poiché non è connesso per archi. Infatti, come si può vedere dal grafico del dominio, quest'ultimo è l'unione di due insiemi.

Nell'esame del 07/02/2023, la funzione di riferimento e il dominio erano:

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \\
D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \left(y > x^2\right) \wedge \left(y < x^2 + e\right) \wedge (x > 0) \right\}
\end{aligned}
$$




Dominio della funzione.

In questo caso, il dominio è illimitato per lo stesso motivo dell'esercizio precedente; il dominio è aperto poiché tutti i punti sono interni e inoltre è connesso per archi.

### 3.1.5 Trovare l'equazione al piano tangente

Uno degli esercizi più richiesti insieme alla derivata direzionale, è quello di trovare l'equazione al piano tangente. Si prenda in considerazione il tema d'esame del 07/02/2023 in cui veniva chiesto: ***Data la funzione:***

$$f(x,y) = y + \frac{1}{\sqrt{1-\ln(y-x^2)}} - \ln(x)$$

***Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f$ nel punto $(1, 2, f(1, 2))$.***

Anche in questo caso, come accadeva nel caso in cui si doveva trovare la direzione della funzione affinché essa sia di massima crescita (pagina 15), è necessario calcolare le derivate parziali di $f(x, y)$. Quindi, il **primo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a $x$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= y + \frac{1}{\sqrt{1-\ln(y-x^2)}} - \ln(x) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{1}{\sqrt{1-\ln(y-x^2)}} - \ln(x)\right) \\
&\downarrow \text{ si utilizza la regola } \tfrac{\partial}{\partial x}(f+g) = \tfrac{\partial}{\partial x}(f) + \tfrac{\partial}{\partial x}(g) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\ln(y-x^2)}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x)) \\
&\downarrow \text{ si utilizza la regola } \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{f}\right) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(f)}{f^2} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-\ln(y-x^2)}} \cdot \left(-\frac{1}{y-x^2} \cdot (-2x)\right)}{\sqrt{1-\ln(y-x^2)}^2} - \left(\frac{1}{x} \cdot (1)\right) \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-\ln(y-x^2)}} \cdot \left(\frac{2x}{y-x^2}\right)}{1-\ln(y-x^2)} - \frac{1}{x} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\frac{x}{\sqrt{1-\ln(y-x^2)} \cdot (y-x^2)}}{1-\ln(y-x^2)} - \frac{1}{x} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{x}{\sqrt{1-\ln(y-x^2)} \cdot (y-x^2) \cdot (1-\ln(y-x^2))} - \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto a $y$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= y + \frac{1}{\sqrt{1-\ln\left(y-x^2\right)}} - \ln(x) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{1}{\sqrt{1-\ln\left(y-x^2\right)}} - \ln(x)\right) \\
&\downarrow \text{ si utilizza la regola } \tfrac{\partial}{\partial y}(f+g) = \tfrac{\partial}{\partial y}(f) + \tfrac{\partial}{\partial y}(g) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\ln\left(y-x^2\right)}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(\ln(x)) \\
&\downarrow \text{ si utilizza la regola } \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1}{f}\right) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(f)}{f^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 1 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-\ln\left(y-x^2\right)}} \cdot \left(-\frac{1}{y-x^2}\cdot 1\right)}{\sqrt{1-\ln\left(y-x^2\right)}^2} - 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-\ln\left(y-x^2\right)}\cdot\left(y-x^2\right)\cdot\left(1-\ln\left(y-x^2\right)\right)}
\end{aligned}
$$

Il **terzo passo** è scrivere il gradiente valutato nel punto dato, ovvero in $P(1,2)$. Quindi, si prendono le derivate parziali trovate, si sostituiscono i valori e si utilizzano nel gradiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{x}{\sqrt{1-\ln\left(y-x^2\right)}\cdot\left(y-x^2\right)\cdot\left(1-\ln\left(y-x^2\right)\right)} - \frac{1}{x} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\ln\left(2-1^2\right)}\cdot\left(2-1^2\right)\cdot\left(1-\ln\left(2-1^2\right)\right)} - \frac{1}{1} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\ln(1)}\cdot 1\cdot(1-\ln(1))} - 1 \\
\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= -\frac{1}{1\cdot 1\cdot 1} - 1 \\
\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-\ln\left(y-x^2\right)}\cdot\left(y-x^2\right)\cdot\left(1-\ln\left(y-x^2\right)\right)} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-\ln\left(2-1^2\right)}\cdot\left(2-1^2\right)\cdot\left(1-\ln\left(2-1^2\right)\right)} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= 1 + \frac{1}{2\cdot 1\cdot 1\cdot 1} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Per cui il gradiente corrisponde al valore:

$$\nabla f(P) = \nabla f(1,2) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

Il **quarto e ultimo passo** è scrivere l'equazione del piano tangente. Il piano tangente nel punto $(x, y, (x_0, y_0))$ è rappresentato dall'equazione:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Dove $f(x, y)$ è la funzione e $(x_0, y_0)$ è il punto in cui è differenziabile.

Grazie a questo richiamo di teoria, adesso è possibile scrivere l'equazione del piano tangente. Quindi, si prende il punto differenziabile, cioè $P(1,2)$, e si sostituisce nell'equazione iniziale:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= y + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(y - x^2)}} - \ln(x) \\
f(1,2) &= 2 + \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(2 - 1^2)}} - \ln(1) \\
f(1,2) &= 2 + \frac{1}{1} - 0 \\
f(1,2) &= 3
\end{aligned}$$

E infine si sostituiscono i valori calcolati nell'equazione del piano tangente:

$$z = 3 - 2(x - 1) + \frac{3}{2}(y - 2) = 3 - 2x + 2 + \frac{3}{2}y - 3 = -2x + \frac{3}{2}y + 2$$

### 3.1.6 Calcolare il gradiente della funzione ($\nabla f$)

Esercizio difficile che venga richiesto, ma una volta è capitato, è la richiesta esplicita di calcolare il gradiente. Solitamente viene richiesto di trovare la massima crescita della funzione, cioè il gradiente, o la derivata direzionale. In questo caso, si calcola direttamente il gradiente come è stato fatto nei precedenti capitoli. Si riporta comunque i passaggi da eseguire. Si faccia riferimento al testo d'esame del 15/09/2021, gruppo A: ***Data la funzione:***

$$f(x,y) = \log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2}$$

***Calcolare $\nabla f(P)$, dove $P$ è il punto di coordinate $(1,2)$.***

Il **primo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto $x$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2} \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2}\right) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{2x - x^2}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (2x - 4) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}
\end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata parziale rispetto $y$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2} \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2}\right) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{2x - x^2}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (8y) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (0) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2}
\end{aligned}$$

Il **terzo passo** è sostituire il punto di coordinate $P(1,2)$ all'interno delle derivate parziali e calcolare il gradiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= \frac{2 \cdot 1 - 4}{1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2} - \frac{2 - 2 \cdot 1}{2\sqrt{2 \cdot 1 - 1^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= -\frac{2}{13} - \frac{0}{2} = -\frac{2}{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{8y}{x^2-4x+4y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= \frac{8\cdot 2}{1^2-4\cdot 1+4\cdot 2^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= \frac{16}{13}
\end{aligned}$$

Il gradiente dunque corrisponde a:

$$\nabla f(P) = \nabla f(1,2) = \left(-\frac{2}{13}, \frac{16}{13}\right)$$

### 3.1.7 Calcolare la derivata direzionale

Un esercizio richiestissimo, è il calcolo della derivata direzionale. Un esercizio tipo è il seguente, estratto dall'esame del 15/09/2021, gruppo A: ***Data la funzione:***

$$f(x,y) = \log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2}$$

***Calcolare la derivata direzionale di $f$ in $P$ rispetto al versore $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.***

La derivata direzionale di una funzione in un punto rispetto ad un versore, non è altro che la moltiplicazione del gradiente della funzione in quel punto per il versore, ovvero:

$$\nabla f(P) \cdot \overrightarrow{v}$$

Viene da sé che è necessario prima calcolare il gradiente e poi calcolare il versore. Come **primo passo** si calcolano le derivate parziali:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2} \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2}\right) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{2x - x^2}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (2x - 4) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4y^2} - \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2} \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right) - \sqrt{2x - x^2}\right) \\
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\log\left(x^2 - 4x + 4y^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{2x - x^2}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 4y^2} \cdot (8y) - \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (0) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{8y}{x^2 - 4x + 4y^2}
\end{aligned}$$

(calcoli già eseguiti nel paragrafo precedente, li riportiamo per convenienza)

Il **secondo passo** è sostituire il punto fornito $P\,(1,2)$ all'interno delle derivate parziali così da ottenere il gradiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) &= \frac{2x-4}{x^2-4x+4y^2} - \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial x}\,(1,2) &= \frac{2\cdot 1-4}{1^2-4\cdot 1+4\cdot 2^2} - \frac{2-2\cdot 1}{2\sqrt{2\cdot 1-1^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial x}\,(1,2) &= -\frac{2}{13} - \frac{0}{2} = -\frac{2}{13}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) &= \frac{8y}{x^2-4x+4y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}\,(1,2) &= \frac{8\cdot 2}{1^2-4\cdot 1+4\cdot 2^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}\,(1,2) &= \frac{16}{13}
\end{aligned}
$$

Il gradiente dunque corrisponde a:

$$\nabla f\,(P) = \nabla f\,(1,2) = \left(-\frac{2}{13}, \frac{16}{13}\right)$$

Fin qua l'esercizio è identico al calcolo del gradiente della funzione (pagina 23). Il **terzo passo** è eseguire la moltiplicazione tra il versore fornito dall'esercizio $\overrightarrow{v}$ e il gradiente calcolato:

$$\nabla f\,(P)\cdot\overrightarrow{v} = \left(-\frac{2}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{16}{13}\cdot\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{13}, \frac{8}{13}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{13} + \frac{8}{13} = \frac{-\sqrt{3}+8}{13}$$

## 3.2 Alcuni esercizi d'esame svolti

# 4 Esercizio 4 - Stabilire se una funzione è continua e parametrizzazioni

## 4.1 Tipologie di esercizio 1

### 4.1.1 Stabilire se una funzione è continua

Un *evergreen* nell'esercizio 4 è la richiesta di stabilire se la funzione data è continua in un certo insieme. Il procedimento è il seguente; si estrae un esercizio dal tema d'esame del 15/09/2021, gruppo A: ***Stabilire se la funzione:***

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

***è continua in*** $\mathbb{R}^2$***.***

La soluzione di questo esercizio, il più delle volte, è affermare che la funzione non è continua nell'insieme dato. Tuttavia, talvolta non è così scontato ed è necessario dimostrare il motivo della risposta.

Il **primo passo**, banale e al 90% verificabile visivamente, è verificare che la funzione sia definita nel punto $(0,0)$. Infatti, per stabilire se la funzione è continua in $\mathbb{R}^2$, è <u>necessario</u> che sia continua nel punto $(0,0)$.

In questo caso, l'esercizio afferma che nel caso in cui $x$ e $y$ siano zero $(x,y) = (0,0)$, la funzione abbia risultato 0. Per cui, la funzione è definita.

Il **secondo passo** è verificare che esista il limite con $x$ che tende a zero e con $y$ che tende a zero. Nel caso in cui sia $\infty$, è possibile affermare che la funzione non è continua facendo vedere i calcoli del limite. In questo caso:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x,0) &= \frac{0^4}{x^2+0^4} = \frac{0}{x^2} = 0 \\ \lim_{y\to 0} f(0,y) &= \frac{y^4}{0^2+y^4} = \frac{y^4}{y^4} = 1 \end{aligned}$$

I limiti non coincidono, per cui è possibile affermare che la funzione non è continua nell'origine $(0,0)$, ovvero i limite di $f$ per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste. Quindi, $f$ non è continua in $\mathbb{R}^2$.

Per completezza, si presenta un esercizio in cui una funzione è continua per capire come comportarsi. Si estrae un esercizio dal tema d'esame del 01/03/2022: ***Stabilire se la funzione:***

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} & (x,y) \neq (1,2) \\ \\ 0 & (x,y) = (1,2) \end{cases}$$

***è continua in*** $\mathbb{R}^2$***.***

Il **primo passo** è verificare che la funzione sia definita in $(1, 2)$. In questo caso lo è, quindi si passa avanti.

Il **secondo passo** è verificare i limiti con il punto $(1, 2)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x, 2) &= \frac{(x-1)(2-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (2-2)^2}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{(x-1)^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 2} f(1, y) &= \frac{(1-1)(y-2)}{\sqrt{(1-1)^2 + (y-2)^2}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{(y-2)^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

I due limiti esistono e hanno lo stesso risultato. Per essere certi che la funzione sia continua, è necessario un **terzo passo**, ovvero:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dato che il limite esiste ed è uguale a zero per $(1, 2)$, nel caso di $f(1, 2)$, si continua ad avere il valore 0. Quindi, la funzione è continua.

### 4.1.2 Variante (rara) - Stabilire se una funzione è continua

Nell'esame del 03/03/2023 è stata fatta una richiesta diversa dal solito. È stato chiesto di stabilire un valore $k$ tale che la funzione risulti continua nell'origine:
***Si consideri la funzione:***

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

***Esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che $f$ risulti continua nell'origine?***

Ipotizzando di muoversi lungo la retta per l'origine con $x \neq 0$, la funzione verrebbe riscritta come:

$$f(x,mx) = \frac{x^2+m^2x^2}{x^2+mx^2+m^2x^2} = \frac{x^2\left(1+m^2\right)}{x^2\left(1+m+m^2\right)} = \frac{1+m^2}{1+m+m^2}$$

Si vede anche ad occhio, che il limite della funzione $f(x,mx)$ con $x$ che tende a zero ($x \to 0$) dipende dal fattore $m$. Dunque è possibile concludere che tale limite non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Per cui, è possibile concludere che per nessun valore di $k$ la funzione $f$ è continua in $(0,0)$.

### 4.1.3 Dimostrazione di una disuguaglianza e di un limite (Teorema del confronto)

Nell'esame del 22/07/2021 è stato richiesto di eseguire dei calcoli insoliti rispetto alle classiche richieste degli esercizi: ***Dimostrare che:***

$$x^2|y| \leq \frac{1}{2}\left(x^4+y^2\right) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

***e utilizzare la precedente disuguaglianza per verificare che:***

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0$$

Il **primo passo** è dimostrare che vale la disuguaglianza mostrata. Per farlo, è necessario verificare che tutte le espressioni siano maggiore o uguale a zero, ovvero:

$$\begin{aligned}
x^2|y| &\leq \frac{1}{2}\left(x^4+y^2\right) \\
2\cdot x^2|y| &\leq \frac{1}{\cancel{2}}\left(x^4+y^2\right)\cdot \cancel{2} \\
2x^2|y| &\leq \left(x^4+y^2\right) \\
-x^4+2x^2|y| &\leq y^2 \\
-x^4+2x^2|y|-y^2 &\leq 0 \\
x^4-2x^2|y|+y^2 &\geq 0 \\
\left(x^2-|y|\right)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Disuguaglianza verificata. Infatti, anche se ci fosse un numero negativo, l'elevazione al quadrato la farebbe tornare positiva. Al massimo l'espressione può essere zero, ma anche in tal caso l'espressione è ammessa. Quindi, è possibile concludere affermando che l'espressione risulta non negativa per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Il **secondo passo** è utilizzare la disuguaglianza per verificare il limite. Si utilizza il teorema del confronto[2], che afferma: *se* $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ *sono tre successioni di numeri tali che:*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

*e se si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$$

*allora anche:*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = l$$

[2] Link alla fonte di YouMath in cui ci sono esempi

Per applicarlo, si prende in considerazione l'argomento del limite, cioè $\frac{x^3y}{x^4+y^2}$, e si afferma che deve essere maggiore o uguale a zero:

$$0 \leq \left| \frac{x^3y}{x^4+y^2} \right|$$

Dato che l'esercizio chiede di utilizzare anche la disuguaglianza precedente, lo studente dovrebbe avere l'intuizione di notare che:

$$x^2|y| \leq \frac{1}{2}\left(x^4+y^2\right)$$

Corrisponde a:

$$\begin{aligned} x^2|y| &\leq \frac{1}{2}\left(x^4+y^2\right) \\ \frac{1}{x^4+y^2} \cdot x^2|y| &\leq \frac{1}{2} \cdot \cancel{\left(x^4+y^2\right)} \cdot \frac{1}{\cancel{x^4+y^2}} \\ \frac{x^2|y|}{x^4+y^2} &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Di nuovo, se lo studente riesce ad avere l'intuizione, noterà che aggiungendo una $|x|$, è possibile ottenere $\frac{x^3y}{x^4+y^2}$:

$$0 \leq \frac{x^3y}{x^4+y^2} = |x| \cdot \frac{x^2|y|}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2} \cdot |x|$$

Quindi, grazie al teorema del confronto:

$$0 \leq |x| \cdot \frac{x^2|y|}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2} \cdot |x|$$

Basta verificare che i limiti esterni siano uguali per affermare che anche quello al centro sia uguale:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} & \quad 0 = 0 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} & \quad \frac{1}{2} \cdot |x| = 0 \end{aligned}$$

Quindi, grazie al teorema del confronto, si afferma che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0$$

### 4.1.4 Verificare l'esistenza di un limite in un punto

Un esercizio che è stato richiesto qualche volta, è la verifica dell'esistenza di un certo limite. Ovvero, viene fornita una funzione e un punto su cui verificare l'esistenza di tale limite. Si prenda d'esempio l'esame del 08/02/2022, gruppo A: ***Stabilire se la funzione:***

$$f(x,y) = \frac{y^3 + |x-1|}{(x-1)^2 + y^2}$$

***ammette limite per*** $(x,y) \to (1,0)$***.***

Il **primo passo** è verificare con $x$ fissato:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x,0) &= \frac{0^3 + |x-1|}{(x-1)^2 + 0^2} \\
&= \frac{|x-1|}{(x-1)^2} \\
&\to \text{Forma indeterminata } \tfrac{0}{0} \text{ quindi si usa Hopital} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}|x-1|}{\frac{d}{dx}(x-1)^2} \\
&\to \text{Sapendo che } |x| = \sqrt{x^2} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(x-1)^2}\right)}{\frac{d}{dx}(x-1)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^2}} \cdot (2x-2)}{\frac{d}{dx}(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{2(x-1)\cdot 1} \\
&= \frac{1}{2x-2} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Il **secondo passo** è verificare con $y$ fissato:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} f(1,y) &= \frac{y^3+|1-1|}{(1-1)^2+y^2} \\
&= \frac{y^3}{y^2} \\
&= y \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dato che il risultato dei due limiti è diverso, il limite nel punto $(1,0)$ non esiste.

## 4.2 Tipologie di esercizio 2

### 4.2.1 Parametrizzazione retta tangente in un punto all'arco di ellisse

Questa tipologia di esercizio si è presentata soltanto una volta, anche perché l'ellisse non è una figura semplice da trattare (parole testuali del professore). L'esame del 25/06/2021, gruppo A, chiedeva: ***Si trovi una parametrizzazione della retta tangente in*** $P\left(-2-\sqrt{3}, \frac{9}{2}\right)$ ***all'arco di ellisse di equazione:***

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$$

***che congiunge (nell'ordine) i punti*** $A(-2, 6)$ ***e*** $B(-4, 3)$***.***

Quando ci si trova davanti ad un'ellisse o un'iperbole, è sempre conveniente utilizzare la tecnica del completamento dei quadrati. Questo perché la sua applicazione consente di ottenere direttamente la forma canonica dell'equazione cercata e di determinare i valori senza calcoli complessi[3].

Quindi, il **primo passo** è applicare il completamento dei quadrati:

Innanzitutto, la **prima operazione** dell'applicazione del completamento dei quadrati è il raggruppamento dei valori simili, ovverosia:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 &= 0 \\ \left(9x^2 + 36x\right) + \left(4y^2 - 24y\right) + 36 &= 0 \end{aligned}$$

La **seconda operazione** è prendere in considerazione i termini con le $x$, e poi quelli con le $y$, e cercare un quadrato. Ovvero sia un valore $c$ tale per cui il $\Delta$ (nella formula del calcolo di un'equazione di secondo grado $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$) sia uguale a zero:

$$\begin{array}{lll} 9x^2 + 36x & \longrightarrow & 36^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\ & & 36^2 - 36c = 0 \\ & & c = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 4y^2 - 24y & \longrightarrow & 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\ & & 24^2 - 16c = 0 \\ & & c = 36 \end{array}$$

<u>Suggerimento</u>: per trovare tale valore, basta risolvere la banale equazione $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ con $c$ incognita e $a, b$ termini noti.

[3] Video tutorial di approfondimento

La **terza operazione** è riscrivere l'equazione con i nuovi valori $c$, ma per lasciare invariata l'equazione è necessario annullarli, ovvero scrivere $c - c$ (nessun problema, con manipolazioni algebriche si riuscirà ad evitare di ritornare al punto di inizio):

$$\left(9x^2 + 36x + 36 - 36\right) + \left(4y^2 - 24y + 36 - 36\right) + 36 = 0$$

Le manipolazioni algebriche riguardano $9x^2 + 36x + 36$ e $4y^2 - 24y + 36$. Ovvero, si riscrivono le due espressioni come quadrati!

$$\begin{array}{rcl} 9x^2 + 36x + 36 & \longrightarrow & 9\left(x+2\right)^2 \\ 4y^2 - 24y + 36 & \longrightarrow & 4\left(y-3\right)^2 \end{array}$$

E si riscrive l'equazione generale:

$$9\left(x+2\right)^2 - 36 + 4\left(y-3\right)^2 - 36 + 36 = 0$$

Banali semplificazioni algebriche:

$$\begin{aligned} 9\left(x+2\right)^2 \cancel{-36} + 4\left(y-3\right)^2 - 36 \cancel{+36} &= 0 \\ \frac{1}{36} \cdot \cancel{9}\left(x+2\right)^2 + \cancel{4}\left(y-3\right)^2 &= \cancel{36} \cdot \frac{1}{\cancel{36}} \\ \frac{\left(x+2\right)^2}{4} + \frac{\left(y-3\right)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione corrisponde all'equazione canonica dell'ellisse.

Il **secondo passo** è la parametrizzazione[4] vera e propria. La parametrizzazione di un'ellisse prevede l'utilizzo delle coordinate ellittiche[5]. Tali coordinate, che non fanno riferimento solo all'ellisse, sono ottenibili nel seguente modo:

$$\frac{\left(x - x_0\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - y_0\right)^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = x_0 + a\rho\cos\left(\theta\right) \\ y = y_0 + b\rho\sin\left(\theta\right) \end{cases}$$

Quindi, nel nostro caso si ha:

$$\frac{\left(x+2\right)^2}{4} + \frac{\left(y-3\right)^2}{9} = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\cos\left(t\right) \\ y = 3 + 3\sin\left(t\right) \end{cases}$$

[4] Approfondimento teorico - Parametrizzazione di un'ellisse
[5] Approfondimento teorico - Coordinate ellittiche

Il **terzo passo** è descrivere la congiunzione tra i punti $A$ e $B$ (in questo ordine). Per farlo, basta semplicemente sostituire nel sistema prima il punto $A$ e successivamente il punto $B$:

$$A = \begin{cases} -2 = -2 + 2\cos(t) \\ 6 = 3 + 3\sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 2\cos(t) \\ 3 = 3\sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = \cos(t) \\ 1 = \sin(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \\ t = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} -4 = -2 + 2\cos(t) \\ 3 = 3 + 3\sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = 2\cos(t) \\ 0 = 3\sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = \cos(t) \\ 0 = \sin(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = \arccos(-1) = \pi \\ t = \arcsin(0) = 0 = \pi \end{cases}$$

Quindi, la parametrizzazione finale è:

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (-2 + 2\cos(t)\,,\ 3 + 3\sin(t))$$

Il **quarto passo** è trovare la parametrizzazione della retta tangente passante nel punto $P\left(-2 - \sqrt{3}, \frac{9}{2}\right)$. Per farlo, è necessario sostituire il punto $P$ nella parametrizzazione dell'ellisse, e successivamente fare la derivata per trovare la tangente:

$$\begin{cases} -2 - \sqrt{3} = -2 + 2\cos(t) \\ \\ \dfrac{9}{2} = 3 + 3\sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} = 2\cos(t) \\ \\ \dfrac{3}{2} = 3\sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos(t) \\ \\ \dfrac{\cancelto{1}{3}}{\cancelto{2}{6}} = \sin(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6} \\ \\ t = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\gamma\left(\frac{5\pi}{6}\right) = (P) = \left(-2 - \sqrt{3}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\gamma'\left(\frac{5\pi}{5}\right) \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{d}{dx} - 2 + 2\cos(t) \\ y' = \frac{d}{dy}3 + 3\sin(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -2\sin(t) \quad = -2\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -1 \\ \\ y' = \quad 3\cos(t) \quad = \quad 3\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Il **quinto passo** è scrivere la retta finale tangente al punto $P$. Per farlo, basta scrivere il sistema (parametrizzazione) con le due coordinate $x$ e $y$ in funzione di $t$, e come valori si hanno: i punti di $P$ + i punti trovati grazie alla derivata $\times t$.

$$\text{Punto } P \quad \longrightarrow \quad P\left(-2-\sqrt{3},\ \frac{9}{2}\right)$$

$$\text{Soluzioni derivata } \gamma'\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \longrightarrow \quad \gamma'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-1,\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x\left(t\right) = -2-\sqrt{3}+\left(-1\right)\cdot t \\ \\ y\left(t\right) = \dfrac{9}{2}+\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot t \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x\left(t\right) = -2-\sqrt{3}-t \\ \\ y\left(t\right) = \dfrac{9}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

---

### 4.2.2 Trovare l'equazione al piano tangente

Negli esami del 15/09/2021 e del 22/07/2021 è stato chiesto questo esercizio. La risoluzione si può trovare a pagina: 20.

### 4.2.3 Determinare le equazioni parametriche della retta tangente all'arco di curva nel punto $P$

Questa tipologia di esercizio è molto richiesta. La sua risoluzione non è complessa se è chiaro lo svolgimento dell'esercizio sulla parametrizzazione della retta tangente di un punto all'arco di ellisse (pagina 35). Si prenda in considerazione l'esame del 23/11/2021: ***Si consideri l'arco di curva:***

$$\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \left(\cos^3(t), \sin^3(t)\right)$$

***Determinare le equazioni parametriche della retta tangente a $\gamma$ nel punto $P\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right)$.***

Il **primo passo** è sostituire il valore del punto dato, ovvero $P\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right)$, all'interno della parametrizzazione dell'arco di curva al posto di $x$ e $y$:

$$\begin{cases} \dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \cos^3(t) \\ \\ \dfrac{1}{8} = \sin^3(t) \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}} = \sqrt[3]{\cos^3(t)} \\ \\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \sqrt[3]{\sin^3(t)} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos(t) \\ \\ \dfrac{1}{2} = \sin(t) \end{cases} \to \begin{cases} t = \dfrac{\pi}{6} \\ \\ t = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Il **secondo passo** è eseguire la derivata dell'arco di curva, ovvero della sua parametrizzazione, con argomento $\frac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right) \\ \gamma'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left(-3\cos^2(t) \cdot \sin(t)\,,\ 3\sin^2(t)\cos(t)\right) \\ &= \left(-3\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right),\ 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \left(-3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2},\ 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{9}{8}, -\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \end{aligned}$$

Il risultato della derivata rappresenta la direzione della retta tangente in $P$ alla curva $\gamma'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Il **terzo e ultimo passo** è scrivere le equazioni parametriche della retta, ricordando la formula utilizzata nel paragrafo 4.2.1, ovverosia: *scrivere il sistema (parametrizzazione) con le due coordinate $x$ e $y$ in funzione di $t$, e come valori si hanno: i punti di $P$ + i punti trovati grazie alla derivata $\times t$.*

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} - \dfrac{9}{8} \cdot t \\ \\ y = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \cdot t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Negli ultimi anni, in particolare nel 2023, in due esami si è presentata anche una nuova richiesta: calcolare la lunghezza dell'arco. Questo esercizio si risolve tramite una formula e l'utilizzo di un integrale. Si estrae dall'esame del 03/03/2023 l'esercizio: ***Si consideri l'arco di curva parametrizzato da:***

$$\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

***Calcolare la lunghezza dell'arco e scrivere le equazioni parametriche della retta tangente alla curva nel punto $P\left(\frac{\pi}{2} - 1,\ 1\right)$.***

Il **primo passo**, utile anche al calcolo delle equazioni parametriche della retta, è calcolare la derivata della parametrizzazione della curva:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \\
\gamma'(t) &= (1 - \cos(t),\ \sin(t)) \\
&= \begin{cases} x'(t) = 1 - \cos(t) \\ y'(t) = \sin(t) \end{cases}
\end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare la lunghezza[6] dell'arco tramite la seguente formula:

$$L(\mathcal{L}) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t$$

Ovvero, si deve calcolare l'integrale dal punto di partenza $a$ al punto di destinazione $b$, della derivata al quadrato dell'equazione $x$ e $y$ della parametrizzazione, tutto sotto radice (più facile a farsi che a dirsi). Quindi, si vanno a sostituire i valori trovati, ricordando che il punto $a, b$ è il punto in cui è definito $t$, ovvero $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{L}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t) - \cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + 1}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}\, \mathrm{d}t \\
&= 8
\end{aligned}$$

La lunghezza dunque è stata trovata. Il risultato dell'integrale è possibile calcolarlo con una calcolatrice scientifica. L'esercizio continuerebbe calcolando le equazioni della retta tangente: si sostituisce il punto $P$ nel sistema così da ottenere l'angolo $t$; si sostituisce l'angolo $t$ trovato nella derivata $\gamma'$; si conclude scrivendo le equazioni della retta tangente utilizzando la formula $P + \gamma'(\text{angolo } \pi) \cdot t$.

[6] Link di approfondimento

Si conclude questa tipologia di esercizio (tra i più gettonati) presentando due richieste particolari:

- Esame del 15/07/2022: ***Si consideri l'arco di curva $\mathcal{L}$ parametrizzato da:***

  $$\gamma(t) = (13\sin(2t),\ 12\cos(2t),\ 5\cos(2t)), \quad t \in [0, \pi]$$

  ***Calcolare la lunghezza di $\mathcal{L}$ e verificare che in ogni punto $P \in \mathcal{L}$ la retta tangente alla curva è perpendicolare alla retta $OP$ ($O$ è l'origine del sistema di riferimento).***

  Tralasciando il metodo per il calcolo della lunghezza, che banalmente corrisponde al calcolo delle derivate di $\gamma(t)$ e alla formula con l'integrale (pagina precedente), in questo esame è richiesto di verificare che la retta tangente in ogni punto $P$ della curva è perpendicolare alla retta $OP$. Il **primo e unico passo** è dimostrare che $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ per ogni $t \in [0, \pi]$. Quindi, si va a sostituire:

  $$\begin{aligned} \gamma(t) &= (13\sin(2t),\ 12\cos(2t),\ 5\cos(2t)) \\ \gamma'(t) &= (26\cos(2t),\ -24\sin(2t),\ -10\sin(t)) \\ \gamma(t)\cdot\gamma'(t) &= 338\sin(2t)\cos(2t) - 288\sin(2t)\cos(2t) - 50\sin(2t)\cos(2t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Ed è immediato il risultato. Ovvero, che la moltiplicazione dia risultato zero $\forall t \in [0, \pi]$.

- Esame del 23/06/2022 (A): ***Si consideri l'arco di curva $\mathcal{L}$ parametrizzato da:***

  $$\gamma(t) = \left(e^t,\ e^{-t},\ t\sqrt{2}\right), \qquad t \in [0, \ln(5)]$$

  ***Calcolare la lunghezza di $\mathcal{L}$ (tenere in conto che $e^t \cdot e^{-t} = 1$) e stabilire se la retta tangente in $P\left(3, \frac{1}{3}, \sqrt{2}\ln(3)\right)$ all'arco $\mathcal{L}$ passa anche per il punto $Q\left(6, 0, \sqrt{2}(1 + \ln(3))\right)$.***

  Tralasciando anche qui il calcolo della lunghezza (si rimanda alla pagina precedente) e il calcolo per verificare se la retta è tangente in $P$, il calcolo per verificare se l'arco di curva parametrizzato passa per il punto $Q$ è banale.

  Il **primo e unico passo** è sostituire i valori del punto $Q$ all'interno della parametrizzazione della retta tangente:

  1. Calcolo parametrizzazione della retta tangente: sostituisco i punti di $P$ nel sistema di $\gamma(t)$ e ottengo la $t$;
  2. Calcolo la lunghezza: derivo $\gamma(t)$, applico l'integrale definito da 0 a $\ln(5)$ ricordando di mettere sotto radice le derivate di $x, y, z$ al quadrato;

3. Date le equazioni parametriche della retta tangente (trovata al punto 1):

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 3t \\ \\ y(t) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}t \\ \\ z(t) = \sqrt{2}\ln(3) + t\sqrt{2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Si può affermare che la retta passa per il punto $Q\left(6, 0, \sqrt{2}\left(1 + \ln(3)\right)\right)$, andando a sostituire i suoi punti nel sistema e calcolandosi $t$ (in questo caso 1):

$$\begin{cases} 6 = 3 + 3t \\ \\ 0 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}t \\ \\ \sqrt{2}\left(1 + \ln(3)\right) = \sqrt{2}\ln(3) + t\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

### 4.2.4 Calcolare la pendenza della retta tangente (teorema di Dini)

Nell'esame del 22/07/2021 è stato richiesto di calcolare la pendenza di una retta. Questa richiesta insolita, è semplice da risolvere poiché basta applicare il teorema di Dini[7]. L'esercizio estratto dal tema d'esame è: ***Sempre con $f$ definita come nel punto precedente, calcolare la pendenza della retta tangente in $(1, 0)$ alla curva di equazione $f(x, y) = 0$.***

Al punto precedente veniva chiesto di determinare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = e^x y + \ln\left(x^2 + y^2\right)$ nel punto $(1, 0, f(1, 0))$. Si procede con la risoluzione del gradiente in modo rapido:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= e^x y + \ln\left(x^2 + y^2\right) \\
f(1, 0) &= e^1 \cdot 0 + \ln\left(1^2 + 0^2\right) = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= e^x y + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2x) \\
\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) &= e^1 \cdot 0 + \frac{1}{1^2 + 0^2} \cdot (2 \cdot 1) = 2 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= e^x + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2y) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) &= e^1 + \frac{1}{1^2 + 0^2} \cdot (2 \cdot 0) = e \\
z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&= 0 + 2(x - 1) + ey \\
&= 2x - 2 + ey
\end{aligned}$$

Il **primo e unico passo** per l'applicazione del teorema di Dini, così da trovare la pendenza della retta tangente in $(1, 0)$, è calcolare il rapporto tra le due derivate parziali valutate nel punto $(1, 0)$:

$$m = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)} = -\frac{2}{e}$$

Attenzione che il valore meno appartiene alla formula del teorema di Dini e non è messo lì per caso.

[7] Link di approfondimento