

Indice

1	Fondamenti	2
1.1	Matematica preliminare	2
1.1.1	Numeri complessi	2
1.1.2	Funzioni complesse di variabile reale	3
1.1.3	Funzioni pari e dispari	4
1.1.4	Segnali periodici	5
1.2	Operazioni fondamentali	6
1.2.1	Somma	6
1.2.2	Shift (o traslazione)	7
1.2.3	Funzione box Π e impulso di Dirac	8
1.2.4	Funzione sinc	9
1.2.5	Funzione triangolo Λ	9
1.2.6	Funzione segno (sgn)	9
1.2.7	Funzione gradino	9
1.2.8	Treno di impulsi	10
1.2.9	Energia di un segnale	10
1.2.10	Potenza media di un segnale	11
1.3	Altre operazioni fondamentali	12
1.3.1	Rescaling (o riscalatura)	12
1.3.2	Cross-Correlazione	13

1 Fondamenti

1.1 Matematica preliminare

1.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso c appartiene all'insieme dei complessi \mathbb{C} e la sua forma è del tipo:

$$c = \Re + j\Im$$

con \Re, \Im variabili $\in \mathbb{R}$ e j chiamata *unità immaginaria* rappresentata come $j = \sqrt{-1}$. Inoltre, \Re rappresenta la *parte reale* e \Im la *parte immaginaria*. Il coniugato di c è

$$\tilde{c} = \Re - j\Im$$

I numeri complessi, dal punto di vista geometrico, possono essere visti come punti su un piano (chiamato *piano complesso*) e descritti da coordinate (R, I) . Nel piano complesso, le ascisse (x) sono rappresentate dalla parte reale, mentre le ordinate (y) dalla parte immaginaria.

Spesso è utile rappresentare i numeri complessi in coordinate polari formate nel seguente modo (*modulo, angolo*). Questa forma viene denominata *forma polare* di un numero complesso:

$$c = \Re + j\Im = |c|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

dove:

$$|c| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \longrightarrow \text{chiamato } \textit{modulo} \text{ o } \textit{magnitudo}$$

invece, *theta* rappresenta:

$$\theta \cong \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right) \longrightarrow \text{chiamato } \textit{angolo, fase o argomento} \text{ in radianti}$$

Grazie alla formula di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

è possibile riscrivere la forma polare di un numero complesso in maniera alternativa, ossia:

$$c = \Re + j\Im = |c|(\cos \theta + j \sin \theta) = |c|e^{j\theta}$$

La **somma** e la **moltiplicazione** di due numeri complessi diventa:

$$c_1 = R_1 + jI_1 \quad c_2 = R_2 + jI_2$$

$$\text{Somma: } c_1 + c_2 = (R_1 + R_2) + j(I_1 + I_2)$$

$$\text{Moltiplicazione con Eulero: } c_1 \cdot c_2 = (R_1 R_2 - I_1 I_2) + j(R_1 I_2 + I_1 R_2) \longrightarrow = |c_1||c_2|e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale

Dato $t \in \mathbb{R}$, una funzione f complessa di variabile reale è $f : D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D_2 \subseteq \mathbb{C}$. Viene introdotto questo concetto poiché il **fasore** è un esempio fondamentale. Le **caratteristiche** di questa funzione:

- È una funzione complessa che modella la posizione di un punto che ruota attorno all'origine con raggio determinato $|c|$ e velocità angolare costante $\theta(t)$.
- Se la funzione fosse nei numeri reali, sarebbe più dispendioso in termini di numero di funzioni da utilizzare.

L'**obbiettivo** dei fasori è quello di *passare dal dominio del tempo (o spazio) a quello dell'analisi frequenziale*.

La particolarità è che nel tempo il fasore riesce a variare un numero complesso (in forma polare) mantenendo il modulo $|c|$ fisso:

$$|c|e^{j\theta} \rightarrow |c|e^{j\theta(t)}$$

dove $\theta(t)$ indica la **velocità angolare**. Quest'ultima può essere calcolata tramite:

$$\theta(t) \rightarrow \frac{2\pi}{T_0}t + \phi$$

dove T_0 indica il *tempo* impiegato per eseguire 2π radianti.

Solitamente si utilizza il fasore con le seguenti supposizioni:

- ⌚ Coordinate rappresentate con (R, I)
- ⌚ Impostata una distanza unitaria fissa dall'origine $|c| = 1$
- ⌚ Velocità angolare costante pari a $2\pi/sec.$, ossia $\theta(t) = 2\pi t, T_0 = 1sec.$
- ⌚ Con $t = 0$ si ha $\theta = 0$
- ⌚ Viene mantenuto $\phi = 0$

1.1.3 Funzioni pari e dispari

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è ***pari*** se e solo se:

$$f(t) = f(-t)$$

Invece, una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è ***dispari*** se e solo se:

$$f(t) = -f(-t)$$

1.1.4 Segnali periodici

Un segnale f è **periodico** di periodo T o T -periodico se:

$$\exists T_0 \in \mathbb{R}^+ : f(t + T_0) = f(t), \quad \forall t \in D_1$$

e T_0 è il minor numero per cui la condizione di ripetizione si verifica.

Dato un periodo T_0 con la lettera μ_0 si indica la **frequenza fondamentale**:

$$\mu_0 = \frac{1}{T_0}$$

Fissato $T_0 > 0$ i **segnali trigonometrici** di minimo periodo T_0 sono:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t)$$

dove μ è una frequenza generale, mentre $\mu_0 = \frac{1}{T_0}$ è la **frequenza fondamentale**. Invece, spesso la **velocità angolare** o **pulsazione** viene rappresentata come:

$$2\pi\mu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

Inoltre, fissato un $\theta \in \mathbb{R}$ chiamato **fase** si osserva che anche le funzioni:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t + \theta) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t + \theta)$$

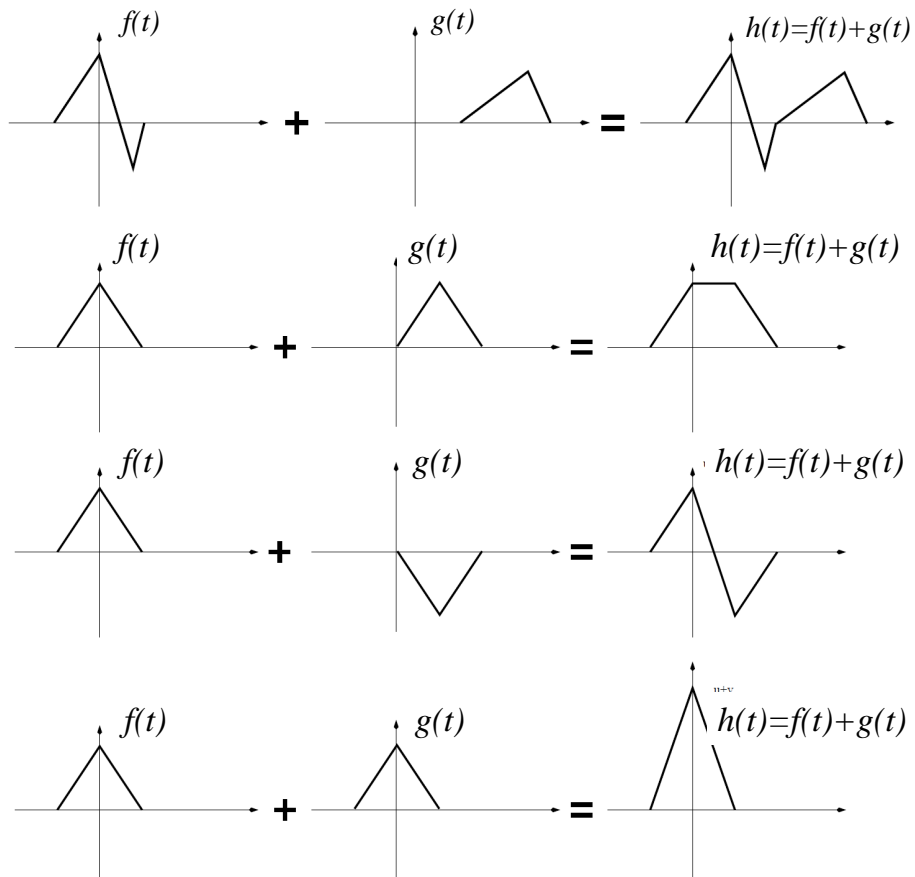
hanno il medesimo periodo T .

Infine, la fase θ permette di eseguire operazione di *shift*.

1.2 Operazioni fondamentali

1.2.1 Somma

La **somma** di due segnali è facile quando essi non interferiscono, ovvero quando **non** sono contemporaneamente $\neq 0$. Alcuni esempi qui di seguito.



1.2.2 Shift (o traslazione)

Lo *shift* (o traslazione) è il cambio di posizione di un segnale. Può essere effettuato:

- **Traslazione a destra** con la funzione $f(t - \tau)$
- **Traslazione a sinistra** con la funzione $f(t + \tau)$

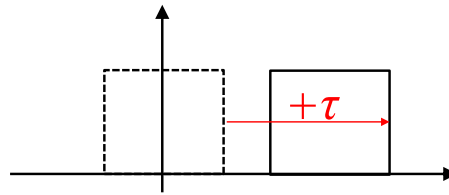


Figura 1: Shift a destra

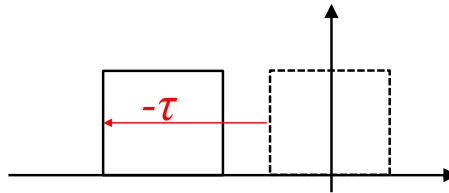


Figura 2: Shift a sinistra

1.2.3 Funzione box Π e impulso di Dirac

La funzione **box** è definita nel seguente modo:

$$A\Pi\left(\frac{x}{b}\right) \quad x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

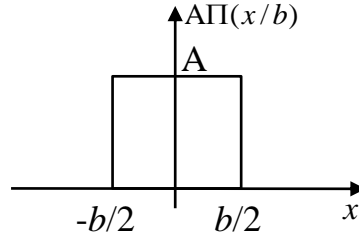


Figura 3: Box generica

La funzione $\delta(x)$ è chiamata **impulso unitario** o **impulso di Dirac** perché è definita nel seguente modo:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Quindi è un impulso che tende all'infinito solamente quando la x è nell'origine, ma il suo integrale è uguale a 1. Alcune **proprietà** dell'impulso:

1. $\delta(x - x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0$
2. Data una funzione generica f (**setacciamento**): $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dt = f(x_0)$
3. $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
4. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ fissato } a \in \mathbb{R} - \{0\}$

1.2.4 Funzione sinc

La funzione **sinc** è definita nel seguente modo:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Ha due **caratteristiche** importanti: (1) l'intersezione con l'asse delle x avviene sempre nei numeri interi positivi e negativi (quindi 1 e -1 , 2 e -2 , ecc.); (2) il limite $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{sinc}(t) = 0$.

Questa funzione è **importante per l'analisi nel dominio del tempo (o frequenza)**.

1.2.5 Funzione triangolo Λ

La funzione **triangolo** è definita nel seguente modo:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è **importante per l'analisi spettrale e per le operazioni di convoluzione**.

1.2.6 Funzione segno (sgn)

La funzione **segno** è definita nel seguente modo:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione ribalta segnali sopra o sotto l'asse delle x .

1.2.7 Funzione gradino

La funzione **gradino** è definita nel seguente modo:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Questa funzione rappresenta un **segnale** che si attiva a partire dal tempo specificato e rimane attivo indefinitamente. Attenzione! Non si confonda questo segnale con il segno.

1.2.8 Treno di impulsi

Il *treno di impulsi* $S_{\Delta T}(x)$ è la somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità ΔT :

$$S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

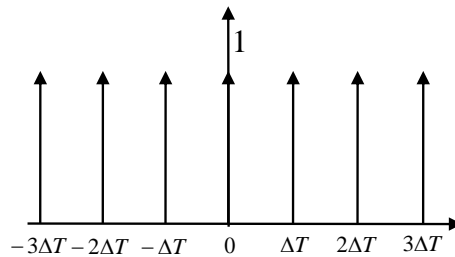


Figura 4: Treno di impulsi

1.2.9 Energia di un segnale

L'*energia di un segnale* è definita nel seguente modo:

$$E_f = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt & \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), \quad f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **ad energia finita** (o **di energia**) se l'integrale che rappresenta l'energia converge ed è diverso da 0. Quindi:

- ☞ **Condizione sufficiente** all'esistenza della sua trasformata di Fourier. Le funzioni trigonometriche non sono di energia ma hanno comunque la Trasformata di Fourier.
- ☛ **Condizione necessaria** per essere un segnale ad energia finita, all'infinito ($+\infty$ e $-\infty$) l'**ampiezza** va a zero.

Alcuni esempi:

- ☆ **Segnali di energia.** Impulsi rettangolari, oscillazioni smorzate (sinc);
- ☆ **Segnali non di energia.** Funzioni trigonometriche sin e cos.

L'**unità di misura** è il *joule*.

1.2.10 Potenza media di un segnale

La *potenza media di un segnale* è definita nel seguente modo:

$$P_f = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt & \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), \quad f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **a potenza finita** (o **di potenza**) se l'integrale che rappresenta la potenza converge ed è diverso da 0. L'**unità di misura** è il *watt*. Infine, un segnale ad energia finita ha la potenza che tende a zero (per cui un segnale non può appartenere ad entrambe le categorie). Invece, esistono segnali che non sono né di energia, né di potenza finita.

1.3 Altre operazioni fondamentali

1.3.1 Rescaling (o riscalatura)

La funzione di *rescaling* è definita nel seguente modo:

$$\forall f(t) : D_1 \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0$$

Simile allo *shift*, il *rescaling* ha una definizione generica e due varianti:

- **Definizione generica** con la funzione semplice $f(t)$ (immagine 1.3.1).
- **Ritardo lineare del segnale di un fattore ω** con la funzione $f(\omega t)$, $0 < \omega < 1$ (immagine 5).
- **Accelerazione lineare del segnale di un fattore ω** con la funzione $f(\omega t)$, $\omega > 1$ (immagine 6).

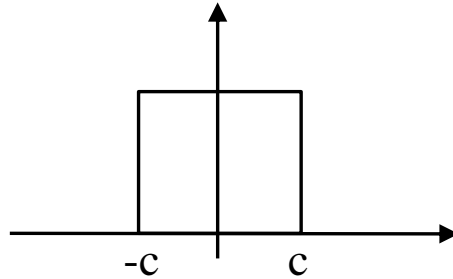


Figura 5: Definizione generica

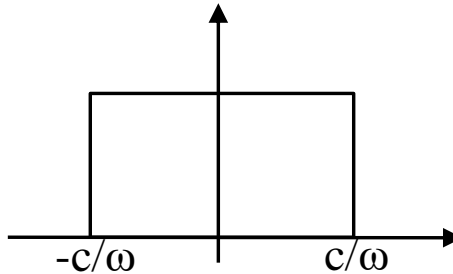


Figura 6: Ritardo lineare del segnale di un fattore ω

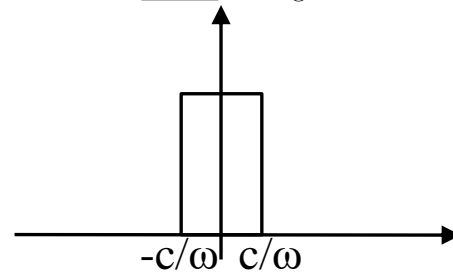


Figura 7: Accelerazione lineare del segnale di un fattore ω

1.3.2 Cross-Correlazione

Dati $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ segnali continui, $\tau \in \mathbb{R}$ il segnale di ***cross-correlazione*** viene definito come:

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

In cui $\tilde{f}_1(\tau)$ rappresenta un *complesso coniugato*. Nel caso in cui f_1 è reale, allora $\tilde{f}_1(\tau) \rightarrow f_1(\tau)$.

Infine, con $t = 0$ si ha l'***integrale di cross-correlazione***, il quale è definito se l'integrale converge (ovviamente se il segnale non è né di energia, né di potenza, la convergenza non esiste!).