Soluzione - Simulazione di Elaborazione di segnali e immagini

Università degli Studi di Verona

22 Gennaio 2020

1 Soluzione Esercizio

Si rappresenta il segnale $G(\mu)$ nel dominio delle frequenze. Per farlo, si prende ogni segnale e si traduce nel corrispettivo dominio delle frequenze. In questo caso, ogni segnale è rappresentato da una box. Quindi, partendo dal primo a sinistra (lettera a) e andando verso destra, si elencano matematicamente i vari segnali. Si ricorda che la definizione di box è la seguente (dominio del tempo $\rightarrow$ dominio delle frequenze):

$$A \cdot T \cdot \text{sinc}\left(T \cdot t\right) \xrightarrow{\mathscr{F}} A \cdot \Pi\left(\frac{\mu - \mu_0}{T}\right)$$

a) Il segnale ha le frequenze comprese tra -30 e -60, quindi il suo centro è:

$$\left(-30 + \left(-60\right)\right) \div 2 = -45$$

Inoltre, la sua ampiezza (A) è pari a 2.
Sapendo che un segnale non centrato nell'origine e con segno negativo è *shiftato* a sinistra, allora si scrive la sua rappresentazione nel **dominio delle frequenze**:

$$2 \cdot \Pi\left(\frac{\mu + 45}{30}\right)$$

Dove 2 è l'ampiezza, 45 è lo *shift* effettuato e 30 la larghezza della box.

b) Il segnale ha le frequenze comprese tra -5 e $+5$, quindi il suo centro è:

$$\left(-5 + 5\right) \div 2 = 0$$

Inoltre, la sua ampiezza è pari a 1.
La rappresentazione nel **dominio delle frequenze** di un segnale centrato nell'origine è banale:

$$1 \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{10}\right)$$

Dove 1 è l'ampiezza (trascurabile) e 10 la larghezza della box.

c) Il segnale ha le frequenze comprese tra +30 e +60, quindi il suo centro è:

$$(30 + 60) \div 2 = +45$$

Inoltre, la sua ampiezza è pari a 2.
Sapendo che un segnale non centrato nell'origine e con segno positivo è *shiftato* a destra, allora si scrive la sua rappresentazione nel **dominio delle frequenze**:

$$2 \cdot \Pi\left(\frac{\mu - 45}{30}\right)$$

Dove 2 è l'ampiezza, -45 è lo *shift* effettuato e 30 la larghezza della box.

Sommando tutti i segnali trovati, si ottiene la seguente funzione $G(\mu)$ nel **dominio delle frequenze**:

$$G(\mu) = \underbrace{\Pi\left(\frac{\mu}{10}\right)}_{b} + \underbrace{2\Pi\left(\frac{\mu - 45}{30}\right)}_{c} + \underbrace{2\Pi\left(\frac{\mu + 45}{30}\right)}_{a}$$

Per portare il segnale $G(\mu)$ dal dominio delle frequenze al dominio del tempo, è necessario eseguire l'antitrasformata di Fourier. Niente di impossibile, seguendo le seguenti formule, sarà chiaro e semplice.
Per descrivere il dominio duale (frequenze - tempo) si utilizzano le seguenti proprietà, con x_1 ed x_2 appartenenti ai due domini duali, rispettivamente:

- **Proprietà notevole**:

$$\Pi(x_1) \xrightarrow{\mathscr{F}\left(\text{oppure } \mathscr{F}^{-1}\right)} \operatorname{sinc}(x_2)$$

- **Proprietà di amplificazione**:

$$A\, f(x_1) \xrightarrow{\mathscr{F}\left(\text{oppure } \mathscr{F}^{-1}\right)} A\, F(x_2)$$

- **Scalatura temporale**:

$$f\left(\frac{x_1}{b}\right) \xrightarrow{\mathscr{F}\left(\text{oppure } \mathscr{F}^{-1}\right)} b \cdot F(x_2 \cdot b)$$

- **Proprietà di shift nel tempo**:

$$F(\mu - \mu_0) = f(t) \cdot e^{j2\pi t\mu_0}$$

Il segnale nel dominio continuo del tempo:

$$\begin{aligned} g(t) &= 10\operatorname{sinc}(10t) + 2 \cdot 30\operatorname{sinc}(30t) \cdot e^{j2\pi t45} + 2 \cdot 30\operatorname{sinc}(30t) \cdot e^{-j2\pi t45} \\ &= 10\operatorname{sinc}(10t) + 60\operatorname{sinc}(30t) \cdot \left(e^{j2\pi t45} + e^{-j2\pi t45}\right) \\ &= 10\operatorname{sinc}(10t) + 60\operatorname{sinc}(30t) \cdot 2\cos(2\pi 45t) \end{aligned}$$

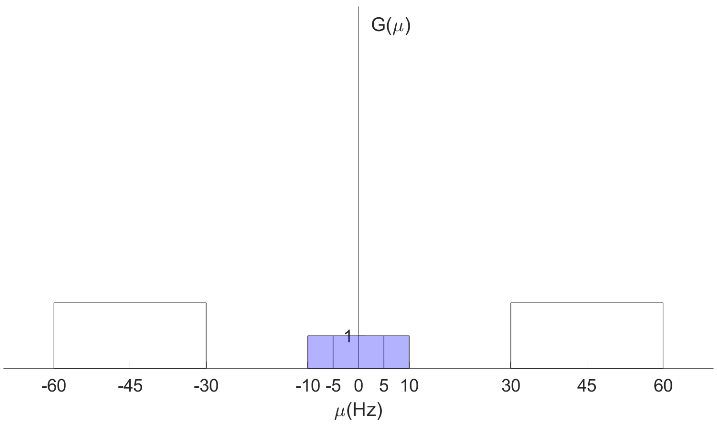
$$\text{dato che } \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

2 Soluzione Esercizio

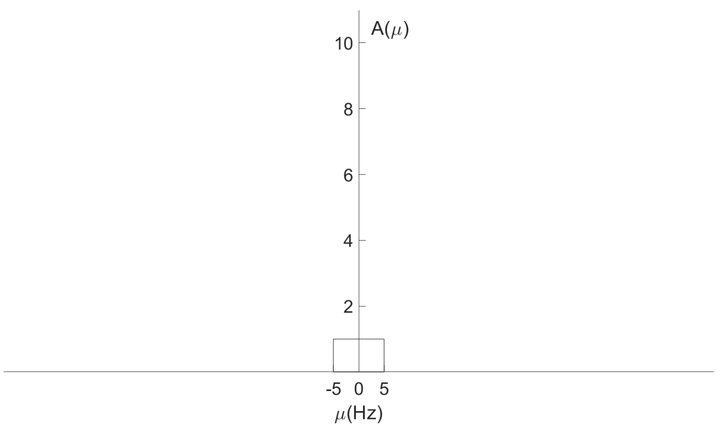
Adesso si eseguono le elaborazioni a cui è sottoposto il segnale $g(t)$. La prima operazione da applicare è il **passo basso ideale** con frequenza di taglio 10 Hz:

$$\text{Dominio del tempo} \quad \longrightarrow \quad a(t) = g(t) * 20\text{sinc}(20t)$$

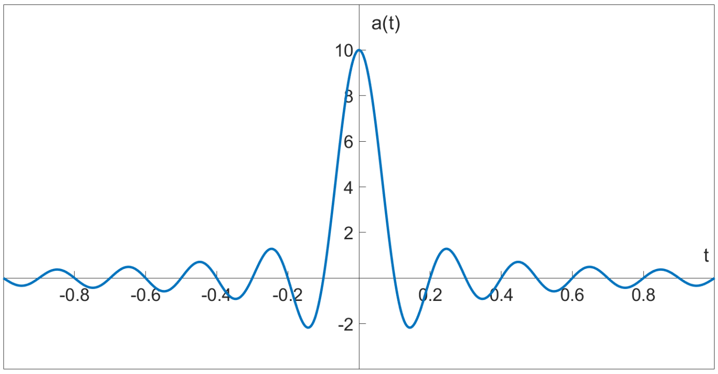
$$\text{Dominio delle frequenze} \quad \longrightarrow \quad A(\mu) = G(\mu) \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{20}\right)$$



Segnale $G(\mu)$.



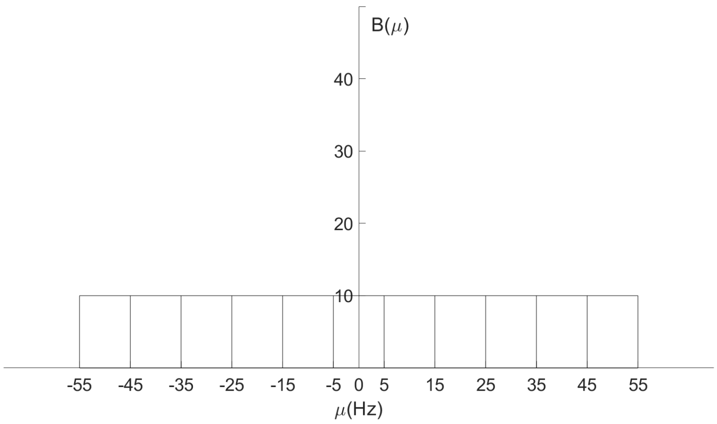
Segnale $A(\mu)$ risultante.



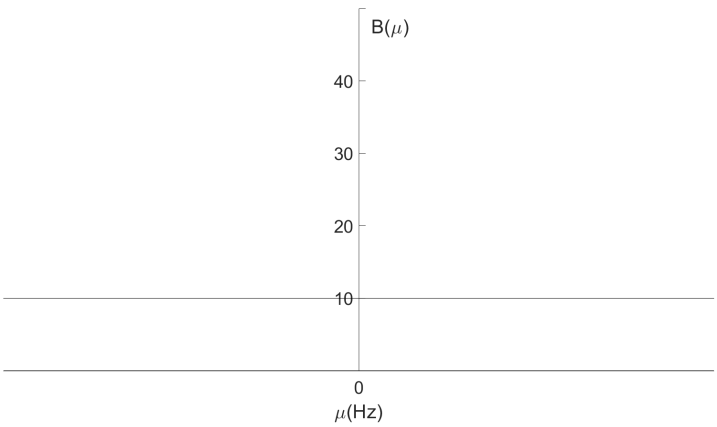
Segnale nel dominio del tempo $a(t)$.

Adesso si esegue il **campionatore** a 10 Hz. Attenzione: matematicamente parlando, campionare un segnale nel tempo significa moltiplicarlo per un treno di impulsi:

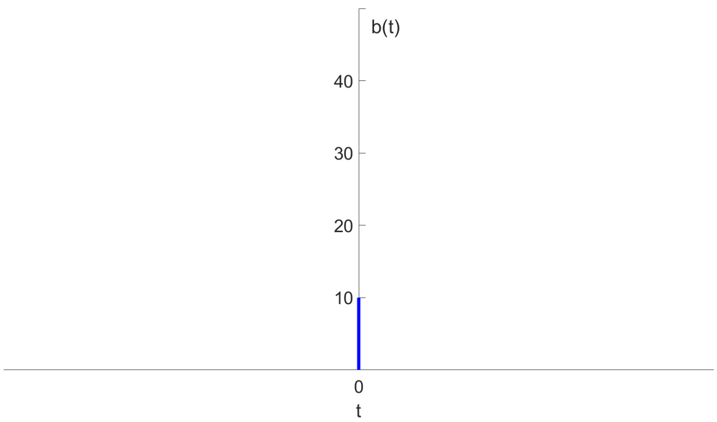
$$\begin{aligned}
&\text{Dominio del tempo} && \longrightarrow && b(t) &&= a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{10}\right) \\
&\text{Dominio delle frequenze} && \longrightarrow && B(\mu) &&= A(\mu) * 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mu - 10n) \\
&&&&&&& \mid \\
&&&&&&&= \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \cdot 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mu - 10n - \tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&&&&&&& \downarrow \ \text{Proprietà di setacciamento} \\
&&&&&&&= 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\mu - 10n) \\
&&&&&&& \mid \\
&&&&&&&= 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\mu - 10n) \cdot \Pi\left(\frac{\mu - 10n}{20}\right)
\end{aligned}$$



Il segnale $A(\mu)$ viene ripetuto ogni 10 Hz.
<u>**Attenzione**</u>: non c'è aliasing poiché non c'è sovrapposizione ma appaiamento.



Il segnale $B(\mu)$ risultante è costante a 10.

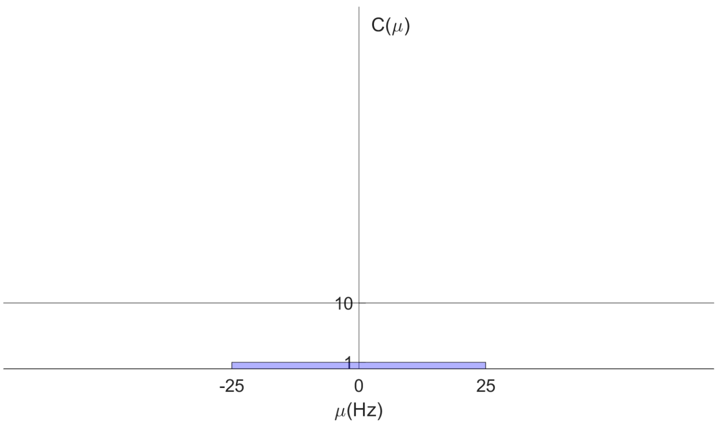


Segnale nel dominio del tempo $b\left(t\right)$.

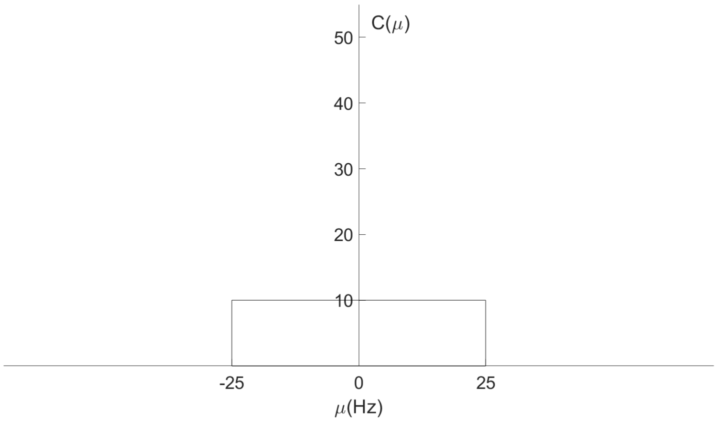
Infine, si applica l'ultimo filtro **passa basso ideale** con frequenza di taglio 25 Hz:

$$\text{Dominio del tempo} \quad \longrightarrow \quad c\left(t\right) = b\left(t\right) * 50\text{sinc}\left(50t\right)$$

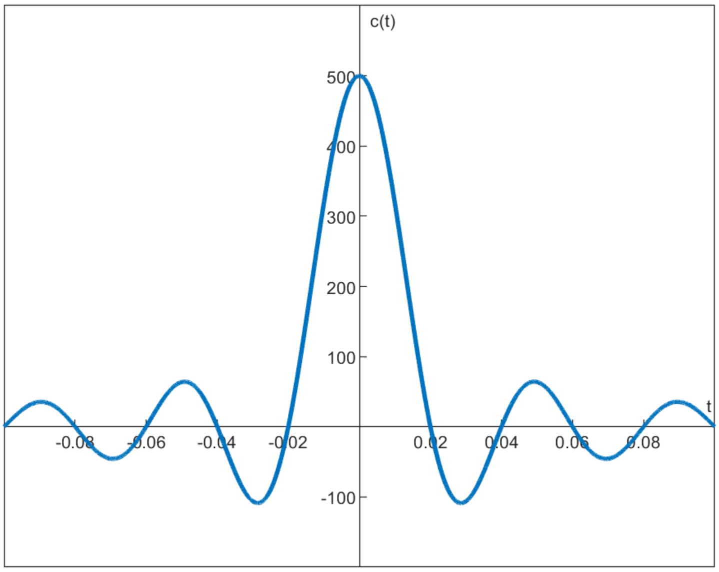
$$\text{Dominio delle frequenze} \quad \longrightarrow \quad C\left(\mu\right) = B\left(\mu\right) \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{50}\right)$$



Segnale $B\left(\mu\right)$ con il filtro passa basso ideale.



Segnale $C(\mu)$ risultante.



Segnale nel dominio del tempo $c(t)$.

3 Soluzione Esercizio

Risposta 1^a domanda

L'**istogramma** è una funzione continua o discreta che viene impiegata nell'elaborazione delle immagini per manipolare i valori dei pixel di un'immagine.
Esistono due versioni, la versione classica e probabilistica:

- La **versione classica** è la seguente.
  Data un'immagine, per semplicità solo a livelli di grigio, nell'istogramma vengono riportati i valori di intensità di grigio e il numero di pixel che hanno quel determinato valore. Quindi, un'immagine sarà identificata da $I[M, N]$, in cui M corrisponderà al numero di righe e N al numero di colonne.

  Inoltre, si definisce la funzione $H(r)$ come il numero di pixel di valore r. Chiaramente, quest'ultimo sarà definito nell'intervallo $0 \leq r \leq L-1$ con $r, L \in \mathbb{N}$ e L indicante il numero totale di livelli di grigio.

  Da queste definizioni, ne consegue che la sommatoria delle funzioni H per ogni valore di r, restituisce il numero di pixel dell'immagine:

  $$\sum_{r=0}^{L-1} H(r) = M \cdot N$$

H(r)	0	2	10	0	0	0	5	7	3	9	1	6	3	6	3	2
r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Esempio di istogramma nella sua versione classica.

- La **versione probabilistica** è prettamente matematica. Infatti, un istogramma è possibile vederlo come una distribuzione di probabilità definita in questo modo:

  $$p_h(r) = \frac{H(r)}{M \cdot N}$$

  Da questa distribuzione probabilistica risulta evidente che la sommatoria per ogni valore di r corrisponde a 1:

  $$\sum_r p_h(r) = 1$$

Risposta 2^a domanda

L'**equalizzazione** sfrutta la versione probabilistica dell'istogramma per visualizzare i valori dei pixel come una distribuzione uniforme. Per farlo, deve essere applicato un algoritmo che si divide in quattro passaggi:

1. Si calcolano le L (valori totali di grigio) somme cumulative $\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$ (versione probabilistica dell'istogramma, si veda la risposta precedente) dei valori dell'istogramma come distribuzione con $k = 0, ..., L-1$;
2. Moltiplicare i valori del passo precedente per il massimo di livelli di grigio $L-1$;
3. Normalizzazione dei valori calcolati al primo passo, dividendo per il numero totale di pixel $M \cdot N$ (righe per colonne) e arrotondamento;
4. Applicare il mapping T ottenuto.

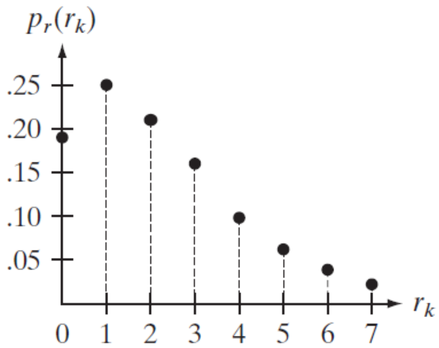
È molto semplice anche se potrebbe sembrare confusionario. Qui di seguito si presenta un esempio per descrivere i passaggi.
Data un'immagine con $L = 8, 64 \times 64$ pixel ($M \cdot N = 4096$), con la seguente distribuzione d'intensità:

r_k	$H(r_k)$	$p_r(r_k) = \frac{H(r_k)}{M \cdot N}$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

Si applica la formula di equalizzazione:

$$s_0 = T(r_0) = 7\sum_{j=0}^{0} p_r(r_j) = 7p_r(r_0) = 1.33$$

$$s_1 = T(r_1) = 7\sum_{j=0}^{1} p_r(r_j) = 7p_r(r_0) + 7p_r(r_1) = 3.08$$

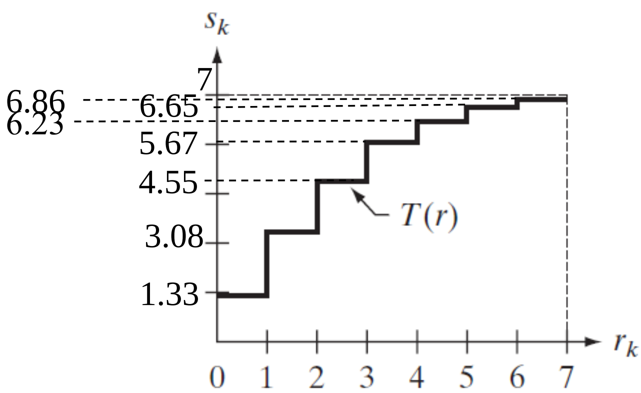


Rappresentazione della distribuzione di intensità.

Analogamente anche per gli altri valori si applica la formula e si trovano i seguenti valori:

$$
\begin{aligned}
s_2 &= 4.55 \\
s_3 &= 5.67 \\
s_4 &= 6.23 \\
s_5 &= 6.65 \\
s_6 &= 6.86 \\
s_7 &= 7.00
\end{aligned}
$$

Si crea la LUT[1]:

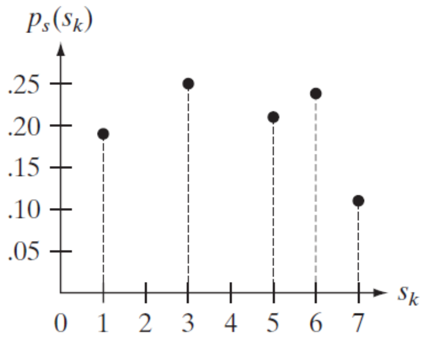


[1] **LUT** (*Lookup Table*) è un termine utilizzato per descrivere una predeterminata lista di numeri che offre una "scorciatoia" per una specifica computazione. Nel contesto dei colori, una LUT trasforma i colori, ricevuti come input (camera), in un output desiderato (final footage).

L'immagine è quantizzata, quindi si effettua l'arrotondamento dei valori ottenendo l'intero più vicino:

$$\begin{array}{lcccc} s_0 & = & 1.33 & \longrightarrow & 1 \\ s_1 & = & 3.08 & \longrightarrow & 3 \\ s_2 & = & 4.55 & \longrightarrow & 5 \\ s_3 & = & 5.67 & \longrightarrow & 6 \\ s_4 & = & 6.23 & \longrightarrow & 6 \\ s_5 & = & 6.65 & \longrightarrow & 7 \\ s_6 & = & 6.86 & \longrightarrow & 7 \\ s_7 & = & 7.00 & \longrightarrow & 7 \end{array}$$

Dopo l'arrotondamento, si ottiene una nuova immagine e il suo relativo istogramma.



Risposta 3^a domanda

Un **filtro passa alto** sopprime le basse frequenze e lascia passare quelle alte. La costruzione di un filtro passa alto può essere eseguita togliendo dal valore 1, il valore del filtro passa basso:

$$H_{PA} = 1 - H_{PB}$$

Come nel filtro passa basso, anche il filtro passa alto ha 3 tipi:

- Filtro passa alto ideale;
- Filtro passa alto di Butterworth;
- Filtro passa alto Gaussiano.