

Schemi Analisi II

VR443470

ottobre 2023

Indice

1	Prerequisiti	3
1.1	Geometria analitica	4
1.1.1	Circonferenza	4
1.1.2	Ellisse	5
1.1.3	Iperbole	6
1.1.4	Completamento dei quadrati	7
1.1.5	Esercizi	8
1.2	Algebra	11
1.3	Calcolo differenziale e integrale	11

1 Prerequisiti

Il corso di Analisi II si articola in due macro sezioni: primo e secondo parziale. All'esame gli esercizi da svolgere saranno 10, suddivisi 5 per la prima parte e 5 per la seconda.

Nonostante vengano date 3 ore per svolgere l'esame totale, dunque 1 ora e mezza per ciascuna prova parziale, il tempo è una risorsa fondamentale. Difatti, se un calcolo matematico dovesse richiedere una quantità eccessiva di risorse/tempo, si rischierebbe di non passare l'esame con esito positivo.

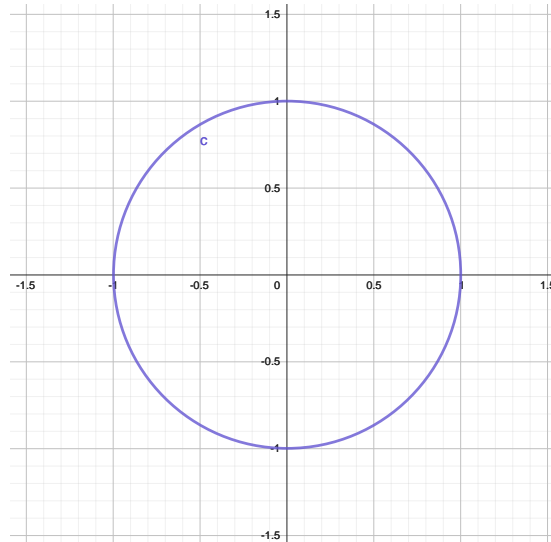
Risulta dunque fondamentale, per ciascun studente, giungere con dei prerequisiti solidi e non banali. In questo capitolo si provvederà a fornire alcuni prerequisiti necessari per affrontare il percorso senza eccessive difficoltà.

Ogni paragrafo presenterà degli esercizi e ognuno di essi sarà risolto nel seguente modo: il primo in modo approfondito per illustrare il *modus operandi*, gli altri facendo vedere i calcoli e risparmiando le spiegazioni prolisse. Chiaramente, nel caso in cui ci dovesse essere un caso particolare, esso verrà affrontato e spiegato passo passo.

1.1 Geometria analitica

1.1.1 Circonferenza

La circonferenza è graficamente rappresentata nel seguente modo:



Chiamando con $C = (x_C, y_C)$ le coordinate del centro della circonferenza e con r il raggio, la sua equazione generale è espressa nel seguente modo:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Nel caso in cui la circonferenza fosse centrata nell'origine degli assi, ovvero $C = (0, 0)$, allora l'equazione generale sarebbe ridotta a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Per essere più precisi, l'**equazione canonica** corrispondente alla circonferenza è la seguente:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Le formule più importanti per ricavare il centro della circonferenza C e il raggio r :

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) \quad ; \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

Per ottenere l'equazione generale partendo dall'equazione canonica, si utilizza il metodo dei completamento dei quadrati (paragrafo 1.1.4).

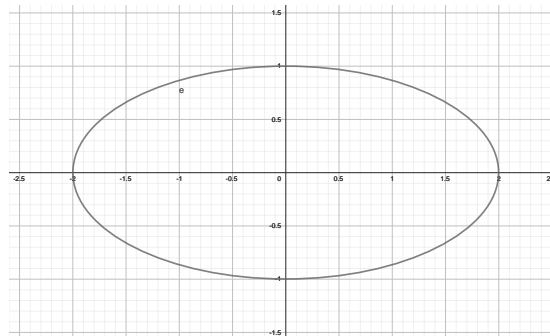
Per ottenere il raggio nel caso in cui sia noto il centro C e un punto $P = (x_P, y_P)$ appartenente alla circonferenza, si utilizza la seguente formula:

$$r = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$$

Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

1.1.2 Ellisse

Non esiste un'unica rappresentazione dell'ellisse, ma solitamente può essere facilmente riconoscibile perché di forma allungata:



Attenzione, che data l'**equazione canonica** dell'ellisse **centrata nell'origine**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

Il grafico corrisponde esattamente ad una circonferenza.

Un'ellisse presenta quattro vertici nel caso in cui abbia centro nell'origine. Le relative coordinate sono:

$$V_{1,2} = (\pm a, 0) \quad V_{3,4} = (0, \pm b)$$

Per calcolare l'eccentricità di un'ellisse ("quanto l'ellisse è schiacciata") si devono confrontare i due valori a^2 e b^2 :

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{se } a^2 > b^2 \quad \text{e quindi } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$e = \frac{c}{b} \quad \text{se } b^2 > a^2 \quad \text{e quindi } c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Il valore è compreso tra: $0 \leq e < 1$.

Nel caso in cui non fosse centrata nell'origine, l'**equazione canonica** di un'ellisse **traslata**, con $C = (x_C, y_C)$ come coordinate del centro:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

I relativi vertici hanno le seguenti coordinate:

$$V_1 = (x_C - a, y_C) \quad ; \quad V_2 = (x_C + a, y_C)$$
$$V_3 = (x_C, y_C - b) \quad ; \quad V_4 = (x_C, y_C + b)$$

L'**importanza dei vertici** è dovuta al fatto che se fosse necessario rappresentare l'ellisse su un piano cartesiano, grazie alle precedenti formule. È possibile ricordarsi facilmente le formule ricordando che le coordinate dei vertici sono ottenute eseguendo la somma/differenza prima sulla coordinata x e poi sulla coordinata y .

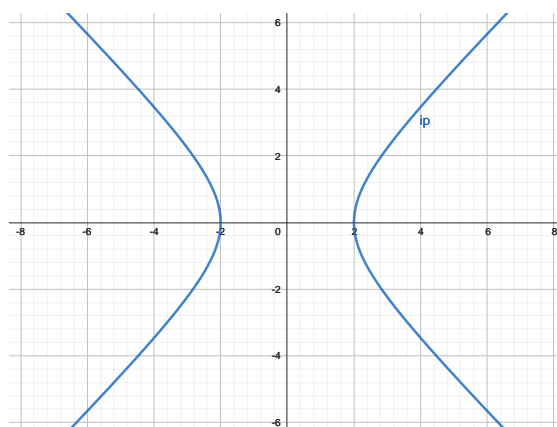
Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

1.1.3 Iperbole

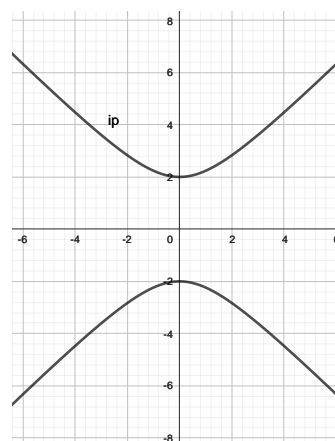
Un'iperbole con centro nell'origine ha un'equazione del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{con } a \neq 0, b \neq 0$$

Il segno $+$ accanto all'1 rappresenta l'intersezione con l'asse delle ascisse (x), mentre il segno $-$ rappresenta l'intersezione con l'asse delle ordinate (y). Graficamente viene rappresentata nel seguente modo:



Con $+1$.



Con -1 .

Nel caso di una iperbole con gli assi paralleli agli assi cartesiani e quindi con centro in un punto $C = (x_C, y_C)$, essa è data da:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{con } a \neq 0, b \neq 0$$

Dove il segno \pm accanto all'1 indica la stessa cosa detta in precedenza.

Per altri approfondimenti: [YouMath](#).

1.1.4 Completamento dei quadrati

Il completamento dei quadrati è un'operazione molto potente che può essere applicata sempre (a discapito dello studente se ha senso o no applicarla!). In questo caso viene applicata ad un'ellisse.

Innanzitutto, la **prima operazione** dell'applicazione del completamento dei quadrati è il raggruppamento dei valori simili, ovverosia:

$$\begin{aligned}9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 &= 0 \\(9x^2 + 36x) + (4y^2 - 24y) + 36 &= 0\end{aligned}$$

La **seconda operazione** è prendere in considerazione i termini con le x , e poi quelli con le y , e cercare un quadrato. Ovvero sia un valore c tale per cui il Δ (nella formula del calcolo di un'equazione di secondo grado $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$) sia uguale a zero:

$$\begin{aligned}9x^2 + 36x &\longrightarrow 36^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\&36^2 - 36c = 0 \\&c = 36 \\4y^2 - 24y &\longrightarrow 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\&24^2 - 16c = 0 \\&c = 36\end{aligned}$$

Suggerimento: per trovare tale valore, basta risolvere la banale equazione $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ con c incognita e a, b termini noti.

La **terza operazione** è riscrivere l'equazione con i nuovi valori c , ma per lasciare invariata l'equazione è necessario annullarli, ovvero scrivere $c - c$ (nessun problema, con manipolazioni algebriche si riuscirà ad evitare di ritornare al punto di inizio):

$$(9x^2 + 36x + 36 - 36) + (4y^2 - 24y + 36 - 36) + 36 = 0$$

Le manipolazioni algebriche riguardano $9x^2 + 36x + 36$ e $4y^2 - 24y + 36$. Ovvero, si riscrivono le due espressioni come quadrati!

$$\begin{aligned}9x^2 + 36x + 36 &\longrightarrow 9(x+2)^2 \\4y^2 - 24y + 36 &\longrightarrow 4(y-3)^2\end{aligned}$$

E si riscrive l'equazione generale:

$$9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 = 0$$

Banali semplificazioni algebriche:

$$\begin{aligned}9(x+2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 &= 0 \\ \frac{1}{36} \cdot 9(x+2)^2 + 4(y-3)^2 &= 36 \cdot \frac{1}{36} \\ \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} &= 1\end{aligned}$$

Quest'ultima equazione corrisponde all'equazione canonica dell'ellisse.

1.1.5 Esercizi

Si rappresenti analiticamente le seguenti equazioni canoniche:

1. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$
2. $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$
4. $x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$
5. $2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$

Esercizio 1

Data l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$$

Prima di rappresentare analiticamente l'equazione, è necessario guardare immediatamente i termini x^2 e y^2 per vedere se si è di fronte ad una circonferenza. Infatti, ricordando l'equazione canonica della circonferenza (pagina 4):

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Si può notare una grande assomiglianza. Quindi, si procede con il calcolo delle coordinate del centro della circonferenza:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = \left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (2, -1)$$

Si procede con il calcolo del raggio:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma} = \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(2)^2}{4} - (-6)} = \sqrt{4 + 1 + 6} = \sqrt{11}$$

Infine, si scrive l'equazione canonica sostituendo i valori trovati:

$$\begin{aligned}(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &= r^2 \\(x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 11\end{aligned}$$

Esercizio 2

Data l'equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si può subito vedere che si è di fronte ad un'ellisse centrata nell'origine:

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Si procede con un po' di intuito così da ricavare la forma canonica:

$$\frac{(x - 0)^2}{1^2} + \frac{(y - 0)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

E il risultato (forma canonica) eliminando i termini inutili:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \xrightarrow{\text{equivalente a}} \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si ottiene l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 = 1$$

Si tratta di un'iperbole che interseca l'asse delle ascisse (x) perché il segno dell'1 è + ed è centrata nell'origine perché x e y “non esistono”. Quindi:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Esercizio 4

Data l'equazione:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

Ci si accorge immediatamente che è un'iperbole a causa dei segni x^2 e y^2 discordi. Eseguendo alcune operazioni algebriche:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

$$x^2 - y^2 + x + 4y = 4$$

$$(x^2 + x) - (y^2 - 4y) = 4$$

Si utilizza il completamento dei quadrati per ottenere la forma canonica:

$$x^2 + x \longrightarrow 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$$

$$c = \frac{1}{4}$$

$$y^2 - 4y \longrightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$$

$$c = 4$$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - (y^2 - 4y + 4 - 4) = 4$$

$$\left[(x+1)^2 - \frac{1}{4}\right] - [(y-2)^2 - 4] = 4$$

$$(x+1)^2 - \frac{1}{4} - (y-2)^2 + 4 = 4$$

$$(x+1)^2 - (y-2)^2 = 4 - 4 + \frac{1}{4}$$

$$(x+1)^2 - (y-2)^2 = \frac{1}{4}$$

$$4(x+1)^2 - 4(y-2)^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Esercizio 5

Data l'equazione:

$$2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$$

Si utilizza il completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 4x - y &= 0 \\ (2x^2 + 4x) + (y^2 - y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &\longrightarrow 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 - y &\longrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\ c &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(2x^2 + 4x + 2 - 2) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left[2(x+1)^2 - 2\right] + \left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = 0$$

$$2(x+1)^2 - 2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$2(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4}$$

$$2(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{4}{9} \cdot 2 \cdot (x+1)^2 + \frac{4}{9} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{9}{8}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

L'equazione canonica si tratta di un'ellisse.

1.2 Algebra

1.3 Calcolo differenziale e integrale