Soluzione - Simulazione di Elaborazione di segnali e immagini

Università degli Studi di Verona

14 Giugno 2021

1 Soluzione Esercizio (4 punti)

Prima di eseguire le operazioni è necessario comprendere che tipo di filtro è. Per farlo, si guarda la sua maschera, quindi la matrice, e si cerca di ricordare quale sia.

Si esclude a priori un filtro di *smoothing* di tipo media e mediana poiché la prima ha i coefficienti tutti uguali, mentre la seconda non utilizza una maschera di questo tipo (semplicemente viene presa le mediana).

Ricordandosi anche i vari operatori per estrarre l'edge:

- Gradiente discreto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}[x,y] \approx F[x+1,y] - F[x,y]$$

- Operatore di Roberts utilizza due tipi di maschere:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Operatore di Prewitt con maschere del tipo:

$$S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Operatore di Sobel che ha varie maschere ma le più famose:

$$S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Operatore di Kirsch che ha ben 8 maschere direzionali, qui di seguito se ne riportano solo quattro:

$$
\begin{aligned}
&\text{Horizontal line:} \quad & D_0 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\text{45 line:} \quad & D_{45} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\text{Vertical line:} \quad & D_{90} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&\text{135 line:} \quad & D_{135} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Operatore di Roberts che ha 8 maschere direzionali simili a quelle di Kirsch.

Si deduce che neanche l'estrazione dell'edge assomiglia al filtro proposto.

Dunque, andando ad approfondire i filtri di *sharpening* si trovano due categorie: *basic highpass spatial filtering* e *high boost filtering*. Si conclude che il filtraggio scelto è il filtro ***basic highpass spatial filtering*** che utilizza il **filtro laplaciano**. La scelta è stata determinata da due fattori:

1. Se fosse stato scelto un filtro *high boost filtering*, sarebbe stata necessaria sia l'immagine prima dello *smoothing*, sia l'immagine dopo aver applicato tale operazione. Questo perché, il filtro lavora eseguendo una differenza tra l'immagine filtrata e quella originale.

2. Si ricorda la forma generale della maschera del filtro laplaciano:

$$
h = \frac{1}{\alpha+1} \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha-1 & -\alpha \\ \alpha-1 & \alpha+5 & \alpha-1 \\ -\alpha & \alpha-1 & -\alpha \end{bmatrix}
$$

   E si ricorda anche una tipica maschera di filtraggio laplaciana utilizzata dal filtro *basic highpass spatial filtering*:

$$
\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Adesso si eseguono le operazioni di filtraggio usando il laplaciano. I passaggi sono: si va nelle coordinate richieste, per esempio $(2, 2)$; si estrae una matrice grande quanto il filtro e contenente i valori vicini alla coordinata, quindi in questo caso si estrae una matrice 3×3 centrata in $(2, 2)$; si moltiplica la matrice estratta con il filtro; si esegue una differenza tra il valore centrale della matrice e i valori circostanti; si moltiplica il risultato per l'eventuale frazione; infine si sostituiscono i valori nella matrice originaria.

Si estraggono le matrici dall'immagine originale e si moltiplica per la maschera:

$$(2,2) \xrightarrow{\text{estrazione}} \begin{bmatrix} 200 & 200 & 200 \\ 200 & 200 & 200 \\ 200 & 200 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -200 & 0 \\ -200 & 1600 & -200 \\ 0 & -200 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3,3) \xrightarrow{\text{estrazione}} \begin{bmatrix} 200 & 200 & 200 \\ 200 & 50 & 50 \\ 200 & 50 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -200 & 0 \\ -200 & 400 & -50 \\ 0 & -50 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4,4) \xrightarrow{\text{estrazione}} \begin{bmatrix} 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -50 & 0 \\ -50 & 400 & -50 \\ 0 & -50 & 0 \end{bmatrix}$$

Applicazione del filtro:

$$(2,2) \longrightarrow \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -200 & 0 \\ -200 & 1600 & -200 \\ 0 & -200 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot (1600 - 800) = 200$$

$$(3,3) \longrightarrow \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -200 & 0 \\ -200 & 400 & -50 \\ 0 & -50 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot (400 - 500) = -25$$

$$(4,4) \longrightarrow \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -50 & 0 \\ -50 & 400 & -50 \\ 0 & -50 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot (400 - 200) = 50$$

Matrice dell'immagine post-*sharpening*:

200	200	200	200	200	200	200
200	**200**	200	200	200	200	200
200	200	**−25**	50	50	200	200
200	200	50	**50**	50	200	200
200	200	50	50	50	200	200
200	200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200	200

2 Soluzione Esercizio (4 punti)

Il triangolo analiticamente viene descritta nel seguente modo:

$$\text{Dominio nel tempo} \quad \longrightarrow \quad s(t) = \text{sinc}^2(t)$$

$$\text{Dominio nelle frequenze} \quad \longrightarrow \quad S(\mu) = \Lambda\left(\frac{\mu}{1}\right)$$

Il dominio nel tempo si ottiene eseguendo la trasformata di Fourier dalla funzione triangolo nel dominio delle frequenze. Per calcolare i valori richiesti è necessario un richiamo teorico. Nel dominio del tempo, il triangolo è una funzione sinc^2 che corrisponde:

$$\text{sinc}^2(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Quindi, sostituendo i valori richiesti, si calcolano i risultati:

$$f = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{sinc}^2(0) = \frac{\sin(\pi \cdot 0)}{\pi \cdot 0} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot 0)}{\pi \cdot 0} = 0$$

$$f = 0.5 \quad \longrightarrow \quad \text{sinc}^2(0.5) = \frac{\sin(\pi \cdot 0.5)}{\pi \cdot 0.5} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot 0.5)}{\pi \cdot 0.5} = 0.405285$$

$$f = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{sinc}^2(1) = \frac{\sin(\pi \cdot 1)}{\pi \cdot 1} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot 1)}{\pi \cdot 1} = 0$$

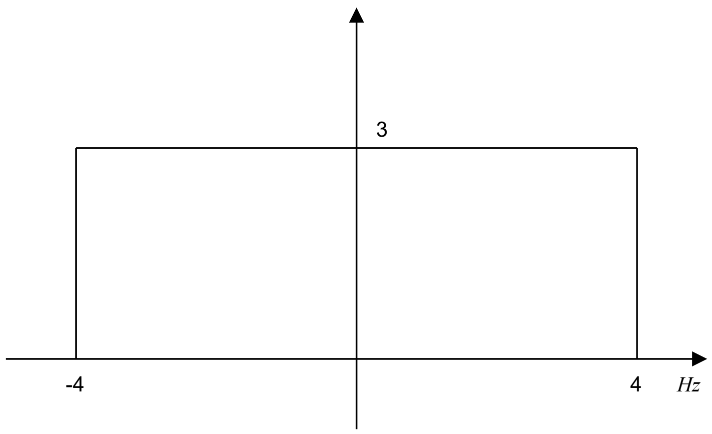
Operazione con $f = 0.5$ eseguita su WolframAlpha.

3 Soluzione Esercizio (7 punti)

Il segnale è molto particolare e prima di tutto si analizza la parte centrale. Osservando meglio il segnale, al centro si ha una box che ha subito una sottrazione di una box e di un triangolo.

Quindi, si costruisce il segnale box $F(\mu)$ che è così composto:

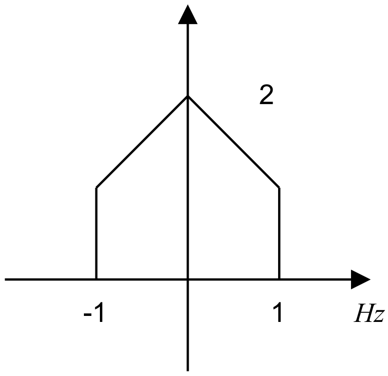
$$F(\mu) = 3 \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{8}\right)$$



Rappresentazione grafica del segnale $F(\mu)$.

Poi si costruisce il segnale da rimuovere. Quindi, una box con sopra un triangolo:

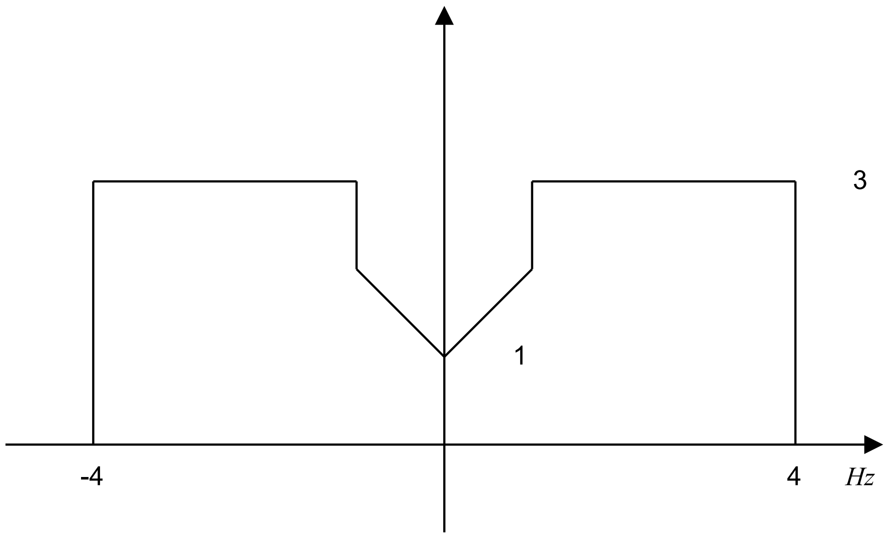
$$G(\mu) = \Pi\left(\frac{\mu}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{\mu}{1}\right)$$



Rappresentazione grafica del segnale $G(\mu)$.

Infine, si rimuove il segnale. Per farlo, si capovolge il segnale $G(\mu)$ e poi si somma al segnale $F(\mu)$:

$$L(\mu) = F(\mu) - G(\mu) = 3\Pi\left(\frac{\mu}{8}\right) - \Pi\left(\frac{\mu}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{\mu}{1}\right)$$

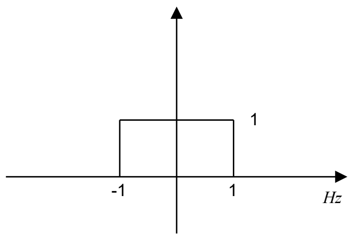


Rappresentazione grafica del segnale $L(\mu)$.

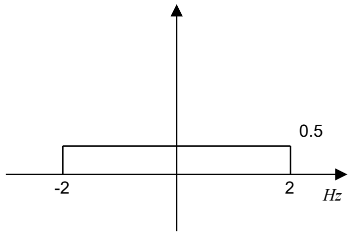
Per creare i due trapezoidi, è necessario fare una convoluzione tra due box. Successivamente, si esegue la convoluzione con due impulsi unitari così da shiftare i segnali. I due box devono essere di larghezza 2 e 4, così che la lunghezza del trapezoide sia di 6. Inoltre, per avere un'ampiezza pari a 1 è necessario avere una box alta 1 e l'altra di 0.5 poiché la moltiplicazione delle due ampiezze per la larghezza più piccolo (in questo caso 2), consente di ottenere 1. L'algoritmo utilizzato per determinare questa convoluzione è derivato da questo video e dalla teoria della convoluzione ovviamente.

Quindi, si creano le due box:

$$\begin{aligned} A(\mu) &= \Pi\left(\frac{\mu}{2}\right) \\ B(\mu) &= \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\mu}{4}\right) \end{aligned}$$



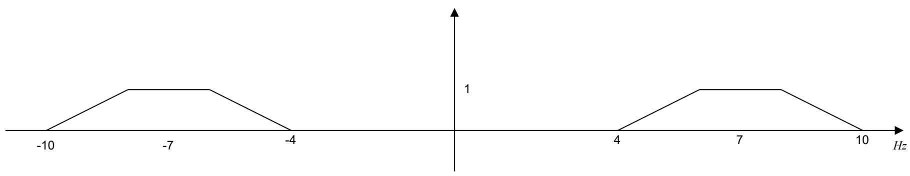
Rappresentazione grafica del segnale $A(\mu)$.



Rappresentazione grafica del segnale $B(\mu)$.

Adesso si effettua la convoluzione dei due segnali così da ottenere un romboide e successivamente si esegue due convoluzioni distinte: una con un impulso shiftato nella parte dei positivi e una sempre con un impulso shiftato nella parte dei negativi.

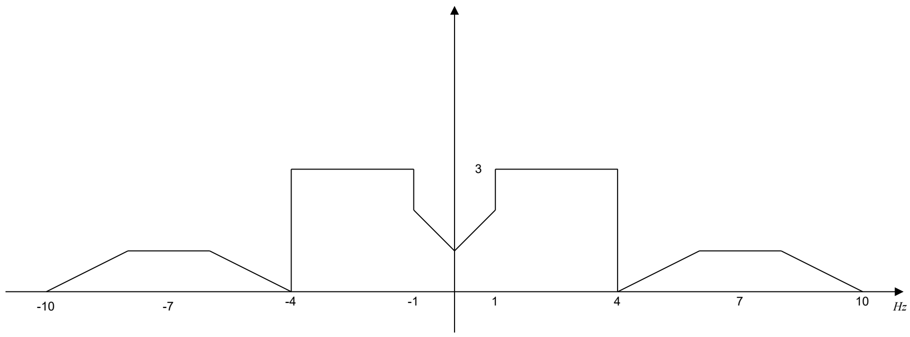
$$C(\mu) = [A(\mu) * B(\mu)] * [\delta(\mu - 7) + \delta(\mu + 7)] = \left[\Pi\left(\frac{\mu}{2}\right) * \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\mu}{4}\right)\right] * [\delta(\mu - 7) + \delta(\mu + 7)]$$



Rappresentazione grafica del segnale $C(\mu)$.

Quindi il grafico finale avrà la seguente forma analitica:

$$R(\mu) = L(\mu) + C(\mu) = 3\Pi\left(\frac{\mu}{8}\right) - \Pi\left(\frac{\mu}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{\mu}{1}\right) + \left[\Pi\left(\frac{\mu}{2}\right) * \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\mu}{4}\right)\right] * [\delta(\mu - 7) + \delta(\mu + 7)]$$



Rappresentazione grafica del segnale finale.

4 Soluzione Esercizio (5 punti)

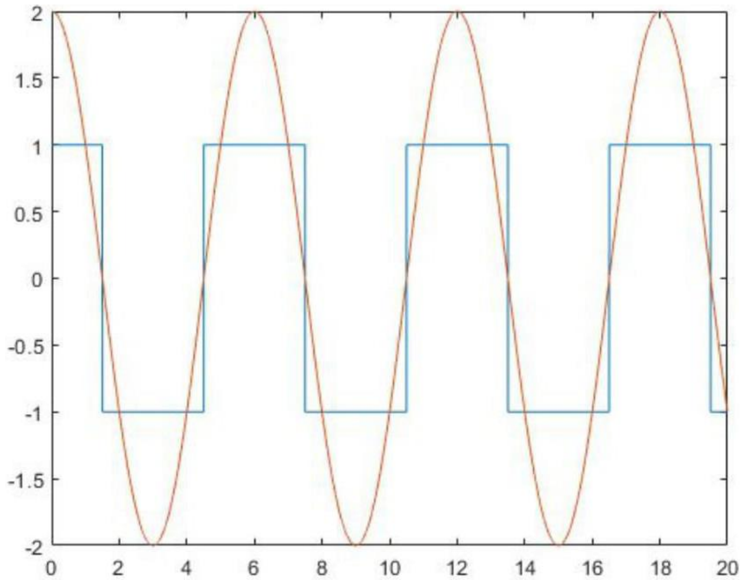
La funzione segno sgn è definita nel seguente modo:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dato il segnale:

$$s(t) = \operatorname{sgn}\left(a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)\right)$$

Per rappresentarlo graficamente è necessario dare un certo periodo. Per esempio, si prenda il valore 6:



L'energia di un segnale è definita nel seguente modo:

$$E_f = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \quad \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)\,f(t) & \text{se } f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

E la sua unità di misura è il *joule*.

Quindi, dato che la funzione cos, pensando alla forma di Eulero, è appartenente al dominio dei complessi, si sceglie il secondo integrale:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \mathrm{sgn}\left(a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \, \mathrm{d}t$$

Data la definizione della funzione segno, essa ritorna sempre 1 o -1 con un valore diverso da zero. Per cui, dato che il coseno nella peggiore delle ipotesi può essere 1 (con $\cos(0) = 1$), se a è sempre diverso da zero, il risultato ottenuto dalla funzione segno e elevato alla seconda sarà sempre positivo e pari a uno. Svolgendo l'integrale si ha dunque:

$$[s]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty + \infty = +\infty$$

Risulta evidente che il segnale non ha energia finita poiché per esserlo il risultato deve essere un numero finito. Tuttavia, è possibile affermare che il segnale sia un segnale d'energia.

La potenza media di un segnale è definita nel seguente modo:

$$P_f = \begin{cases} \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t) \, \mathrm{d}t & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \\ \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \qquad \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t) f(t) & \text{se } f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

L'unità di misura è il *watt*. Analogo all'integrale dell'energia si ha lo stesso risultato:

$$P_s = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |s(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left| \mathrm{sgn}\left(a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)\right)\right|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \mathrm{d}t$$

Il risultato è di nuovo banale e si sostituiscono gli estremi dell'integrale:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} [x]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} = \lim_{T \to \infty} \frac{\frac{T}{2} + \frac{T}{2}}{T} = 1$$

La potenzia media è 1, di conseguenza l'integrale converge e il segnale ha una potenza finita.

5 Soluzione Esercizio (5 punti)

L'operazione di equalizzazione di un'immagine è un calcolo piuttosto semplice.

Il **primo passo** è numerare i livelli di grigio presenti all'interno dell'immagine. L'insieme dei livelli di grigio sarà denotato con la lettera r_k e con la lettera k si indicherà il k-esimo livello di grigio. Quindi, si riporta per comodità la matrice e si elencano i livelli di grigio:

3	1	1
1	7	6
0	2	1

$$r_k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad \text{con } r_1 = 0, r_2 = 1, ..., r_8 = 7$$

In altre parole, l'insieme indica tutti i possibili valori che ci sono all'interno della matrice in ordine crescente.

Il **secondo passo** è contare le occorrenze di ogni elemento di r_k. L'insieme delle occorrenze sarà indicato con $H(r_k)$:

$$\begin{array}{rcl} r_k & = & 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7 \\ H(r_k) & = & 1, \quad 4, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1 \end{array}$$

Quindi, lo zero si ripete 1 volta all'interno della matrice, l'uno si ripete 4 volte, il due si ripete una volta e così via fino al valore 7 che si ripete 1 volta.

Il **terzo passo** è applicare la seguente formula, che rappresenta una sorta di probabilità:

$$p_r(r_k) = \frac{H(r_k)}{M \cdot N}$$

In cui M, N sono il numero di righe e colonne della matrice, quindi $3 \times 3 = 9$. Si applica a ciascun elemento dell'insieme r_k:

$$\begin{array}{rcl} r_k & = & 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7 \\ H(r_k) & = & 1, \quad 4, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1 \\ p_r(r_k) & = & \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{0}{9}, \frac{0}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \end{array}$$

Il **quarto passo** è la normalizzazione, indicata con S dei valori. Essa è una somma cumulativa dei valori $p_r(r_k)$ e ciascun valore, della somma, si moltiplica per il valore massimo di grigio (in questo caso 7):

$$\begin{aligned}
r_k &= 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5, \; 6, \; 7 \\
H(r_k) &= 1, \; 4, \; 1, \; 1, \; 0, \; 0, \; 1, \; 1 \\
p_r(r_k) &= \frac{1}{9}, \; \frac{4}{9}, \; \frac{1}{9}, \; \frac{1}{9}, \; \frac{0}{9}, \; \frac{0}{9}, \; \frac{1}{9}, \; \frac{1}{9} \\
\sum p_r(r_k) &= \frac{1}{9}, \; \frac{5}{9}, \; \frac{6}{9}, \; \frac{7}{9}, \; \frac{7}{9}, \; \frac{7}{9}, \; \frac{8}{9}, \; \frac{9}{9}
\end{aligned}$$

Adesso che è stata esplicitata la somma cumulativa, si moltiplica ogni frazione per il valore massimo di grigio (7) e poi si esegue un arrotondamento per eccesso da 0.5 a 0.9, altrimenti per difetto:

$$\begin{aligned}
r_k = 0 &\longrightarrow \frac{1}{9} \cdot 7 = 0.777 \longrightarrow 1 \\
r_k = 1 &\longrightarrow \frac{5}{9} \cdot 7 = 3.885 \longrightarrow 4 \\
r_k = 2 &\longrightarrow \frac{6}{9} \cdot 7 = 4.662 \longrightarrow 5 \\
r_k = 3 &\longrightarrow \frac{7}{9} \cdot 7 = 5.439 \longrightarrow 5 \\
r_k = 4 &\longrightarrow \frac{7}{9} \cdot 7 = 5.439 \longrightarrow 5 \\
r_k = 5 &\longrightarrow \frac{7}{9} \cdot 7 = 5.439 \longrightarrow 5 \\
r_k = 6 &\longrightarrow \frac{8}{9} \cdot 7 = 6.216 \longrightarrow 6 \\
r_k = 7 &\longrightarrow \frac{9}{9} \cdot 7 = 7 \longrightarrow 7
\end{aligned}$$

Il **quinto e ultimo passo** è riscrivere la matrice equalizzata andando a sostituire i valori r_k con la rispettiva normalizzazione (quindo gli zero con 1, gli uni con 4, e così via):

5	4	4
4	7	6
1	5	4