Università degli studi di Verona

Soluzioni scheda 2

VR455961 Davide Bragantini
VR443470 Andrea Valentini

maggio 2023

Indice

1 Soluzione esercizio 1

Sia A_k la seguente matrice reale:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Soluzione *a*

Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette inversa.

Una matrice quadrata a coefficienti in un campo dell'insieme $\mathbb{K}$ è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Quindi, si procede con il calcolo del determinante della matrice A_k. Visto che si tratta di una matrice di ordine 3, si utilizza la regola di Sarrus per risolvere il determinante. Si duplica la matrice:

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 2k & 2 & 2 & 2k \\ k-1 & k & k^2 & k-1 & k & k^2 \\ -k & -k & 0 & -k & -k & 0 \end{matrix}$$

Si sommano i prodotti lungo le prime tre diagonali principali:

$$\begin{aligned} 1° \text{ diag} \quad &: \quad (2 \cdot k \cdot 0) = 0 \\ 2° \text{ diag} \quad &: \quad \left(2 \cdot k^2 \cdot -k\right) = 2k^2 \cdot -k = -2k^3 \\ 3° \text{ diag} \quad &: \quad [2k \cdot (k-1) \cdot -k] = 2k \cdot \left(-k^2 + k\right) = -2k^3 + 2k^2 \\ \text{Somma} \quad &: \quad 0 + \left(-2k^3\right) + \left(-2k^3 + 2k^2\right) = -4k^3 + 2k^2 \end{aligned}$$

E si esegue lo stesso calcolo considerando le tre diagonali opposte:

$$\begin{aligned} 1° \text{ diag opp} \quad &: \quad (2k \cdot k \cdot -k) = -2k^3 \\ 2° \text{ diag opp} \quad &: \quad [2 \cdot (k-1) \cdot 0] = 0 \\ 3° \text{ diag opp} \quad &: \quad \left(2 \cdot k^2 \cdot -k\right) = -2k^3 \\ \text{Somma} \quad &: \quad -2k^3 + 0 + \left(-2k^3\right) = -4k^3 \end{aligned}$$

Si esegue la sottrazione dei due risultati ottenuti mantenendo a sinistra quello della diagonale principale:

$$\left(-4k^3 + 2k^2\right) - \left(-4k^3\right) = 2k^2$$

Quindi il determinante è:

$$\det\left(A_k\right) = 2k^2$$

La matrice A_k ammette inversa per qualsiasi valore reale di k, poiché non esiste nessun valore (in $\mathbb{R}$) in grado di annullare l'espressione $2k^2$.

1.2 Soluzione b

Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che A_k ammette inversa. Si calcoli A_k^{-1} usando la formula $A_k^{-1} = \frac{1}{\det(A_k)} A_k^*$.

Per calcolare la matrice inversa si calcolano prima i complementi algebrici Com:

$$\begin{aligned}
\text{Com}\,(A_{11}) = &\quad (-1)^{1+1} \cdot C_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} k & k^2 \\ -k & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \left[0 - \left(-k^3\right)\right] = k^3 \\
\text{Com}\,(A_{21}) = &\quad (-1)^{2+1} \cdot C_{21} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \left[0 - \left(-2k^2\right)\right] = -2k^2 \\
\text{Com}\,(A_{31}) = &\quad (-1)^{3+1} \cdot C_{31} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ k & k^2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \left(2k^2 - 2k^2\right) = 0 \\
\text{Com}\,(A_{12}) = &\quad (-1)^{1+2} \cdot C_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & k^2 \\ -k & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \left[0 - \left(-k^3\right)\right] = -k^3 \\
\text{Com}\,(A_{22}) = &\quad (-1)^{2+2} \cdot C_{22} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \left[0 - \left(-2k^2\right)\right] = 2k^2 \\
\text{Com}\,(A_{32}) = &\quad (-1)^{3+2} \cdot C_{32} = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ k-1 & k^2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \left[2k^2 - \left(2k^2 - 2k\right)\right] = -2k \\
\text{Com}\,(A_{13}) = &\quad (-1)^{1+3} \cdot C_{13} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & k \\ -k & -k \end{pmatrix} = 1 \cdot \left[-k^2 + k - \left(-k^2\right)\right] = k \\
\text{Com}\,(A_{23}) = &\quad (-1)^{2+3} \cdot C_{23} = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -k & -k \end{pmatrix} = -1 \cdot [-2k - (-2k)] = 0 \\
\text{Com}\,(A_{33}) = &\quad (-1)^{3+3} \cdot C_{33} = (-1)^6 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ k-1 & k \end{pmatrix} = 1 \cdot [2k - (2k-2)] = -2
\end{aligned}$$

Con i complementi algebrici si costruisce la matrice e si esegue la trasposta per ottenere A_k^*:

$$A_k^* = \begin{pmatrix} k^3 & -k^3 & k \\ -2k^2 & 2k^2 & 0 \\ 0 & -2k & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Infine, si applica la formula:

$$A_k^{-1} = \frac{1}{\det\left(A_k\right)} A_k^* = \frac{1}{2k^2} \begin{pmatrix} k^3 & -2k^2 & 0 \\ -k^3 & 2k^2 & -2k \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 1 & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{2k} & 0 & -\frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$$

2 Soluzione esercizio 2

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definito nell'Esempio 5.2(2), si consideri il seguente sottoinsieme per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{S}_t = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = t \right\}$$

2.1 Soluzione *a*

Si trovino i valori di t per cui l'insieme $\mathscr{S}_t$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2.2 Soluzione *b*

3 Soluzione esercizio 3

Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione data da:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x - 3y + 3z \end{pmatrix}$$

Per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

3.1 Soluzione *a*

3.2 Soluzione *b*

3.3 Soluzione *c*

3.4 Soluzione *d*

3.5 Soluzione *e*

3.6 Soluzione *f*

4 Soluzione esercizio 4

Sia $\mathscr{C}$ la base di $\mathbb{C}^3$ dell'esercizio 3(d) e sia $\mathscr{D} = \{u_1, u_2, u_3\}$ dove $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si verifichi che $\mathscr{D}$ è una base di $\mathbb{C}^3$ e si calcoli la matrice del cambio di base $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$.