

# Elaborazione di segnali e immagini

VR443470

ottobre 2022

# Indice

<b>1 Fondamenti</b>	<b>3</b>
1.1 Matematica preliminare . . . . .	3
1.1.1 Numeri complessi . . . . .	3
1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale . . . . .	4
1.1.3 Funzioni pari e dispari . . . . .	5
1.1.4 Segnali periodici . . . . .	6
1.2 Operazioni fondamentali . . . . .	7
1.2.1 Somma . . . . .	7
1.2.2 Shift (o traslazione) . . . . .	8
1.2.3 Funzione box $\Pi$ e impulso di Dirac . . . . .	9
1.2.4 Funzione sinc . . . . .	10
1.2.5 Funzione triangolo $\Lambda$ . . . . .	10
1.2.6 Funzione segno ( $sgn$ ) . . . . .	10
1.2.7 Funzione gradino . . . . .	10
1.2.8 Treno di impulsi . . . . .	11
1.2.9 Energia di un segnale . . . . .	11
1.2.10 Potenza media di un segnale . . . . .	12
1.3 Altre operazioni fondamentali . . . . .	13
1.3.1 Rescaling (o riscalatura) . . . . .	13
1.3.2 Cross-Correlazione . . . . .	14
1.3.3 Esercizi d'esame . . . . .	15
1.3.4 Cross-Correlazione Normalizzata . . . . .	21
1.3.5 Convoluzione . . . . .	27
<b>2 Analisi di Fourier</b>	<b>28</b>
2.1 Serie di Fourier . . . . .	28
2.2 Proprietà della serie di Fourier . . . . .	34

# 1 Fondamenti

## 1.1 Matematica preliminare

### 1.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso  $c$  appartiene all'insieme dei complessi  $\mathbb{C}$  e la sua forma è del tipo:

$$c = \Re + j\Im$$

con  $\Re, \Im$  variabili  $\in \mathbb{R}$  e  $j$  chiamata *unità immaginaria* rappresentata come  $j = \sqrt{-1}$ . Inoltre,  $\Re$  rappresenta la *parte reale* e  $\Im$  la *parte immaginaria*. Il coniugato di  $c$  è

$$\tilde{c} = \Re - j\Im$$

I numeri complessi, dal punto di vista geometrico, possono essere visti come punti su un piano (chiamato *piano complesso*) e descritti da coordinate  $(R, I)$ . Nel piano complesso, le ascisse ( $x$ ) sono rappresentate dalla parte reale, mentre le ordinate ( $y$ ) dalla parte immaginaria.

Spesso è utile rappresentare i numeri complessi in coordinate polari formate nel seguente modo (*modulo, angolo*). Questa forma viene denominata *forma polare* di un numero complesso:

$$c = \Re + j\Im = |c|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

dove:

$$|c| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \longrightarrow \text{chiamato } \textit{modulo} \text{ o } \textit{magnitudo}$$

invece, *theta* rappresenta:

$$\theta \cong \arctan \left( \frac{\Im}{\Re} \right) \longrightarrow \text{chiamato } \textit{angolo}, \textit{fase} \text{ o } \textit{argomento in radianti}$$

Grazie alla formula di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

è possibile riscrivere la forma polare di un numero complesso in maniera alternativa, ossia:

$$c = \Re + j\Im = |c| (\cos \theta + j \sin \theta) = |c| e^{j\theta}$$

La **somma** e la **moltiplicazione** di due numeri complessi diventa:

$$c_1 = R_1 + jI_1 \quad c_2 = R_2 + jI_2$$

$$\text{Somma: } c_1 + c_2 = (R_1 + R_2) + j(I_1 + I_2)$$

$$\text{Moltiplicazione con Eulero: } c_1 \cdot c_2 = (R_1 R_2 - I_1 I_2) + j(R_1 I_2 + I_1 R_2) \longrightarrow = |c_1||c_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

### 1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale

Dato  $t \in \mathbb{R}$ , una funzione  $f$  complessa di variabile reale è  $f : D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D_2 \subseteq \mathbb{C}$ . Viene introdotto questo concetto poiché il **fasore** è un eSEMPIO fondamentALE. Le **caratteristiche** di questa funzione:

- È una funzione complessa che modella la posizione di un punto che ruota attorno all'origine con raggio determinato  $|c|$  e velocità angolare costante  $\theta(t)$ .
- Se la funzione fosse nei numeri reali, sarebbe più dispendioso in termini di numero di funzioni da utilizzare.

L'**obiettivo** dei fasori è quello di *passare dal dominio del tempo* (o spazio) a *quello dell'analisi frequenziale*.

La particolarità è che nel tempo il fasore riesce a variare un numero complesso (in forma polare) mantenendo il modulo  $|c|$  fisso:

$$|c|e^{j\theta} \rightarrow |c|e^{j\theta(t)}$$

dove  $\theta(t)$  indica la **velocità angolare**. Quest'ultima può essere calcolata tramite:

$$\theta(t) \longrightarrow \frac{2\pi}{T_0}t + \phi$$

dove  $T_0$  indica il *tempo* impiegato per eseguire  $2\pi$  radianti.

Soltamente si utilizza il fasore con le seguenti supposizioni:

- Coordinate rappresentate con  $(R, I)$
- Impostata una distanza unitaria fissa dall'origine  $|c| = 1$
- Velocità angolare costante pari a  $2\pi/\text{sec.}$ , ossia  $\theta(t) = 2\pi t, T_0 = 1\text{sec.}$
- Con  $t = 0$  si ha  $\theta = 0$
- Viene mantenuto  $\phi = 0$

### 1.1.3 Funzioni pari e dispari

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **pari** se e solo se:

$$f(t) = f(-t)$$

Invece, una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **dispari** se e solo se:

$$f(t) = -f(-t)$$

#### 1.1.4 Segnali periodici

Un segnale  $f$  è **periodico** di periodo  $T$  o  $T$ -periodico se:

$$\exists T_0 \in R^+ : f(t + T_0) = f(t), \quad \forall t \in D_1$$

e  $T_0$  è il minor numero per cui la condizione di ripetizione si verifica.

Dato un periodo  $T_0$  con la lettera  $\mu_0$  si indica la **frequenza fondamentale**:

$$\mu_0 = \frac{1}{T_0}$$

Fissato  $T_0 > 0$  i **segnali trigonometrici** di minimo periodo  $T_0$  sono:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t)$$

dove  $\mu$  è una frequenza generale, mentre  $\mu_0 = \frac{1}{T_0}$  è la **frequenza fondamentale**. Invece, spesso la **velocità angolare** o **pulsazione** viene rappresentata come:

$$2\pi\mu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

Inoltre, fissato un  $\theta \in \mathbb{R}$  chiamato **fase** si osserva che anche le funzioni:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t + \theta) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t + \theta)$$

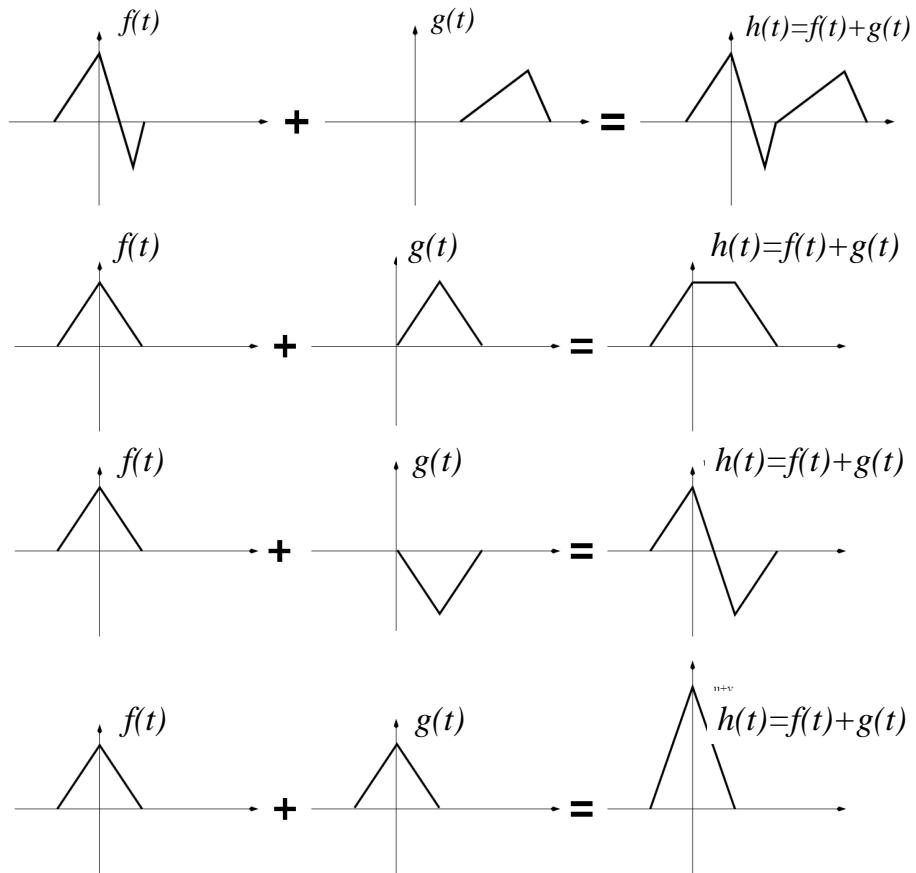
hanno il medesimo periodo  $T$ .

Infine, la fase  $\theta$  permette di eseguire operazione di *shift*.

## 1.2 Operazioni fondamentali

### 1.2.1 Somma

La *somma* di due segnali è facile quando essi non interferiscono, ovvero quando **non** sono contemporaneamente  $\neq 0$ . Alcuni esempi qui di seguito.



### 1.2.2 Shift (o traslazione)

Lo **shift** (o traslazione) è il cambio di posizione di un segnale. Può essere effettuato:

- **Traslazione a destra** con la funzione  $f(t - \tau)$
- **Traslazione a sinistra** con la funzione  $f(t + \tau)$

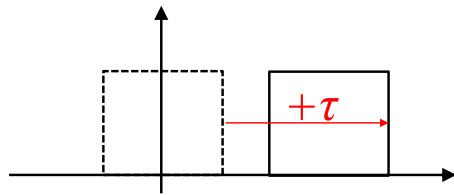


Figura 1: Shift a destra

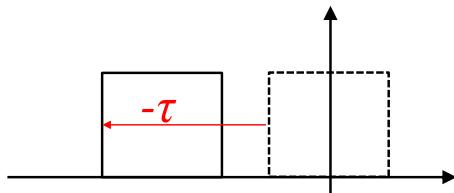


Figura 2: Shift a sinistra

### 1.2.3 Funzione box II e impulso di Dirac

La funzione ***box*** è definita nel seguente modo:

$$A\Pi\left(\frac{x}{b}\right) \quad x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

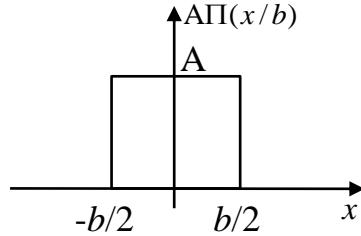


Figura 3: Box generica

La funzione  $\delta(x)$  è chiamata ***impulso unitario*** o ***impulso di Dirac*** perché è definita nel seguente modo:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Quindi è un impulso che tende all'infinito solamente quando la  $x$  è nell'origine, ma il suo integrale è uguale a 1. Alcune **proprietà** dell'impulso:

1.  $\delta(x - x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0$
2. Data una funzione generica  $f$  (**setacciamento**):  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dt = f(x_0)$
3.  $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
4.  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ fissato } a \in \mathbb{R} - \{0\}$

#### 1.2.4 Funzione sinc

La funzione **sinc** è definita nel seguente modo:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Ha due **caratteristiche** importanti: (1) l'intersezione con l'asse delle  $x$  avviene sempre nei numeri interi positivi e negativi (quindi 1 e -1, 2 e -2, ecc.); (2) il limite  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{sinc}(t) = 0$ .

Questa funzione è **importante per l'analisi nel dominio del tempo (o frequenza)**.

#### 1.2.5 Funzione triangolo $\Lambda$

La funzione **triangolo** è definita nel seguente modo:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è **importante per l'analisi spettrale e per le operazioni di convoluzione**.

#### 1.2.6 Funzione segno ( $\text{sgn}$ )

La funzione **segno** è definita nel seguente modo:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione ribalta segnali sopra o sotto l'asse delle  $x$ .

#### 1.2.7 Funzione gradino

La funzione **gradino** è definita nel seguente modo:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Questa funzione rappresenta un **segnale** che si attiva a partire dal tempo specificato e rimane attivo indefinitamente. Attenzione! Non si confonda questo segnale con il segno.

### 1.2.8 Treno di impulsi

Il **treno di impulsi**  $S_{\Delta T}(x)$  è la somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità  $\Delta T$ :

$$S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

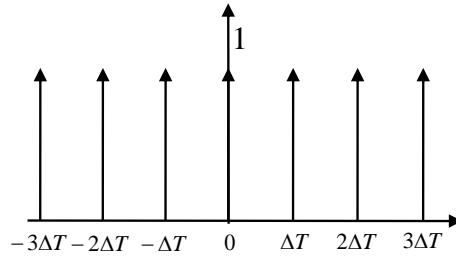


Figura 4: Treno di impulsi

### 1.2.9 Energia di un segnale

L'**energia di un segnale** è definita nel seguente modo:

$$E_f = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt & \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), \quad f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **ad energia finita** (o **di energia**) se l'integrale che rappresenta l'energia converge ed è diverso da 0. Quindi:

- ☞ **Condizione sufficiente** all'esistenza della sua trasformata di Fourier. Le funzioni trigonometriche non sono di energia ma hanno comunque la Trasformata di Fourier.
- ☞ **Condizione necessaria** per essere un segnale ad energia finita, all'infinito ( $+\infty$  e  $-\infty$ ) l'**ampiezza** va a zero.

Alcuni esempi:

- ★ **Segnali di energia.** Impulsi rettangolari, oscillazioni smorzate (sinc);
- ★ **Segnali non di energia.** Funzioni trigonometriche sin e cos.

L'**unità di misura** è il *joule*.

### 1.2.10 Potenza media di un segnale

La *potenza media di un segnale* è definita nel seguente modo:

$$P_f = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \quad \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), & f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **a potenza finita** (o **di potenza**) se l'integrale che rappresenta la potenza converge ed è diverso da 0. L'**unità di misura** è il *watt*.

Infine, un segnale ad energia finita ha la potenza che tende a zero (per cui un segnale non può appartenere ad entrambe le categorie). Invece, esistono segnali che non sono né di energia, né di potenza finita.

## 1.3 Altre operazioni fondamentali

### 1.3.1 Rescaling (o riscalatura)

La funzione di *rescaling* è definita nel seguente modo:

$$\forall f(t) : D_1 \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0$$

Simile allo *shift*, il *rescaling* ha una definizione generica e due varianti:

- **Definizione generica** con la funzione semplice  $f(t)$  (immagine 5).
- **Ritardo lineare del segnale di un fattore  $\omega$**  con la funzione  $f(\omega t)$ ,  $0 < \omega < 1$  (immagine 6).
- **Accelero lineare del segnale di un fattore  $\omega$**  con la funzione  $f(\omega t)$ ,  $\omega > 1$  (immagine 7).

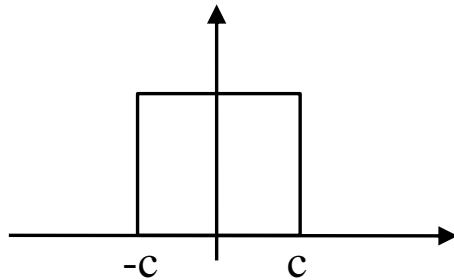


Figura 5: Definizione generica

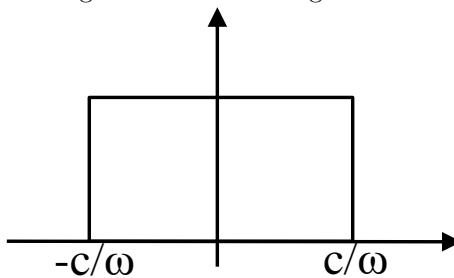


Figura 6: Ritardo lineare del segnale di un fattore  $\omega$

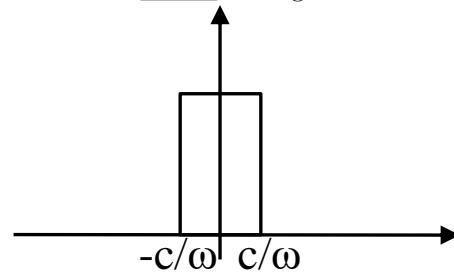


Figura 7: Accelero lineare del segnale di un fattore  $\omega$

### 1.3.2 Cross-Correlazione

Dati  $f_1(\tau), f_2(\tau)$  segnali continui,  $\tau \in \mathbb{R}$  il segnale di ***cross-correlazione*** viene definito come:

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

In cui  $\tilde{f}_1(\tau)$  rappresenta un *complesso coniugato*. Nel caso in cui  $f_1$  è reale, allora  $\tilde{f}_1(\tau) \rightarrow f_1(\tau)$ .

Infine, con  $t = 0$  si ha l'***integrale di cross-correlazione***, il quale è definito se l'integrale converge (ovviamente se il segnale non è né di energia, né di potenza, la convergenza non esiste!).

### 1.3.3 Esercizi d'esame

**Esercizio.**

Il primo esercizio fornisce una funzione  $f(t)$ :

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$$

Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

- I Rappresentare graficamente il segnale;
- II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se  $f(t)$  è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida. Infine, calcolare l'energia o la potenza nel caso in cui  $f(t)$  sia solo composta da  $e^{-2t}$ ;
- III Scrivere l'espressione analitica rispetto  $z(t) = -f(-t)$  e  $v(t) = f(t+4)$

**Risoluzione I.**

Il **primo passo** è quello di scomporre la funzione così da avere una visione più chiara sulle operazioni da effettuare:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t} \longrightarrow f(t) = \Pi\left(\frac{1}{4} \cdot (t-2)\right)$$

Come si può osservare, ci sono due operazioni da eseguire. Quindi, dopo l'esplicitazione si esegue la rappresentazione del segnale base  $\Pi(t)$ :

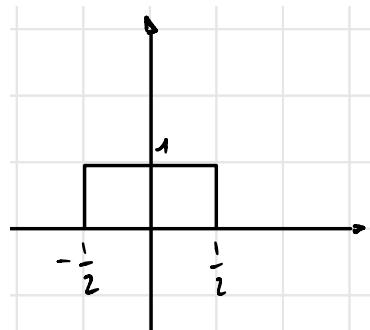


Figura 8: Rappresentazione della funzione  $f(t)$ , ovvero un box.

Adesso si esegue l'operazione di moltiplicazione per un fattore che in questo caso è  $\frac{1}{4}$ . Quindi si rappresenta la box  $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$ :

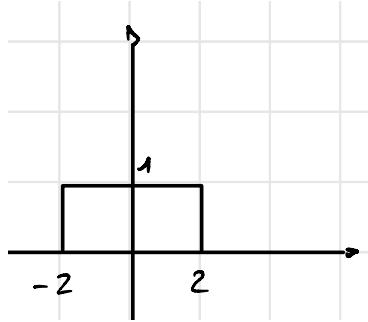


Figura 9: Box  $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$  allargata.

L'operazione che è stata effettuata è stata semplicemente considerare la box del tipo  $\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$ . Ricordandosi le nozioni del corso di Sistemi, per definizione quindi la box è definita nell'intervallo  $-2, +2$ .

Infine, viene applicata l'ultima operazione, ovvero il  $-2$  all'incognita  $t$ . Quindi, la funzione box diventerà  $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$  e la sua rappresentazione grafica sarà uno shift a destra (ritardo):

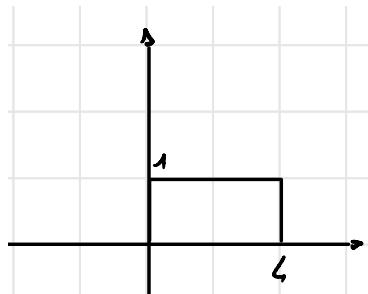


Figura 10: Box  $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$  dopo lo shift a destra.

Il **primo punto si conclude** con la rappresentazione del segnale  $e^{-2t}$  e la sua combinazione con la box. Quindi:

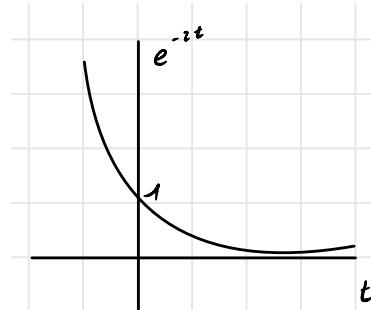


Figura 11: Rappresentazione della funzione  $e^{-2t}$

E infine la sua concatenazione con la box, quindi una sorta di applicazione di un filtro:

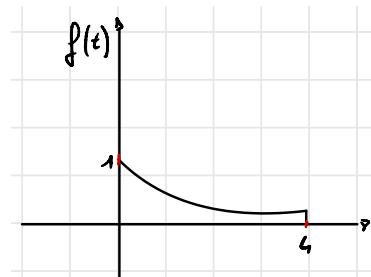


Figura 12: Rappresentazione finale della funzione  $f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$

### Risoluzione II.

Guardando la figura 12 si può già intuire che tipo di segnale sia. Infatti, dato che è limitato e non si estende all'infinito, per definizione è un **segnale finito**, quindi **di energia e non di potenza**. Per dimostrare questa affermazione, si eseguono i calcoli:

$$\text{Definizione di energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt$$

$$\text{Definizione di potenza: } P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$$

Dopo le definizioni, si esegue l'effettivo calcolo con i valori numerici:

#### Energia finita

$$E_f = \int_0^4 e^{-4t} dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_0^4 = \frac{-e^{-16} + 1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$$

#### Potenza finita

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^4 e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Come si osserva dai risultati, è un segnale di energia finita poiché è un valore noto, invece non è un segnale di potenza poiché il risultato è zero e non rispetta la definizione.

Al contrario, se la funzione fosse composta solamente dall'esponenziale, il calcolo dell'energia e della potenza sarebbe:

$$\text{Energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-4t} - e^{4t}}{-4} = \infty$$

$$\text{Potenza: } P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-4t}}{-4} \cdot \frac{1}{T} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-2T} - e^{2T}}{-4T} = \infty$$

Come si evince dai calcoli, il segnale non è né di energia né di potenza perché entrambi i risultati sono uguali a infinito.

### Risoluzione III.

Considerando la funzione  $z(t)$ , si osserva che è la copia simmetrica rispetto all'origine di  $f(t)$ . Invece, la funzione  $v(t)$  è identica alla funzione  $f(t)$  ma "shiftata" a sinistra di 4:

$$f(t) = -f(-t) \quad v(t) = f(t+4)$$

### Esercizio 2.

Il secondo esercizio fornisce una funzione  $f(t)$ :

$$f(t) = \operatorname{sgn} \left( a \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right)$$

Con  $T_0 = 2$ . Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

- I Rappresentare graficamente il segnale;
- II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se  $f(t)$  è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida.

### Risoluzione I.

Viene rappresentato il segnale della funzione segno sng:

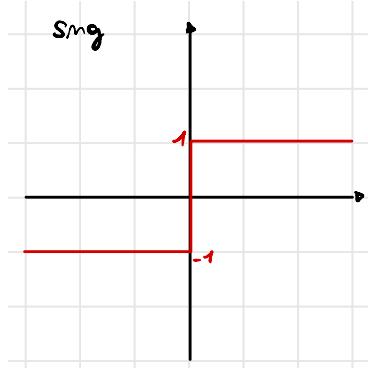


Figura 13: Funzione segno sng.

Si esplicitando le operazioni della funzione:

$$f(t) = \operatorname{sgn} \left( a \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right) = \cos \left( \frac{1}{T_0} \cdot 2\pi t \right)$$

E si rappresenta inizialmente la funzione  $\cos(2\pi)$  con  $T_0 = 1$ :

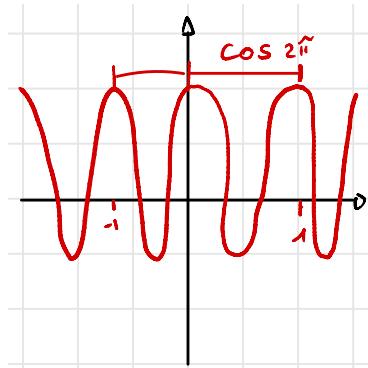


Figura 14: Funzione coseno  $\cos(2\pi)$ .

Si conclude la rappresentazione grafica aumentando  $T_0$  in maniera molto semplice:

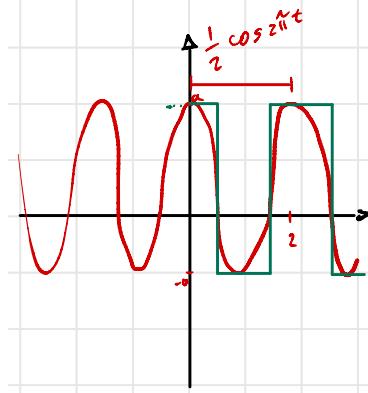


Figura 15: Funzione coseno  $\cos(2\pi)$  moltiplicata per  $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$ .

### Risoluzione II.

Si conclude l'esercizio calcolando l'energia o la potenza del segnale. Per farlo, dato che non è definito in un intervallo ma continua all'infinito, si calcolano i rispettivi integrali in un intervallo arbitrario  $n$  e poi lo si estende all'infinito:

$$\begin{aligned} E_f &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n \cdot \frac{T_0}{2}}^{n \cdot \frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \infty \\ P_f &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-n \cdot \frac{T_0}{2}}^{n \cdot \frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \cdot n \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot T_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \longrightarrow \neq 0 \end{aligned}$$

È evidente che il segnale è di potenza. Come si evince dalla figura 15, i tratti di colore verde indicano il rettangolo formato dal segnale. Calcolando l'area del rettangolo, si ottiene esattamente il valore di  $T_0$ . Infatti, la base del rettangolo (verticale) è 2, mentre l'altezza (orizzontale) è 1.

#### 1.3.4 Cross-Correlazione Normalizzata

Ha l'**obiettivo** di trattare segnali con range di valori diversi e consente di eseguire **confronti uno-a-molti** (*one-to-many*):

$$f_1 \bar{\otimes} f_2 (t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1 (\tau) f_2 (\tau - t) d\tau}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}}$$

In cui  $E_f$  indica l'**energia** del segnale  $f$ . Ci sono due caratteristiche importanti:

- $f_1 \bar{\otimes} f_2 (t) \in [-1, 1]$
- $|f_1 \bar{\otimes} f_2 (t)| = 1 \iff f_1 (\tau) = \alpha f_2 (\tau - t)$

Inoltre, si parla di **autocorrelazione** (normalizzata e non) quando  $f_1 = f_2$ . Utile per i segnali stocastici.

Nel **caso di segnali discreti**, dati  $x_1(k), x_2(k)$ :

$$x_1 \otimes x_2 (n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1 (k) x_2 (k - n) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sotto l'ipotesi di convergenza della serie, cioè la serie deve convergere.

Nel caso in cui  $x_1(k)$  e  $x_2(k)$  sono limitati di lunghezza M ed N rispettivamente, allora la **cross correlazione è di lunghezza  $M + N - 1$** .

## Cross-Correlazione 1D

Data la definizione:

$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) x_2(k-n)$$

Esistono diverse casistiche:

- $n = 0$  si confronta tra  $x_1$  e  $x_2$  nei loro domini temporali originali.
- $n > 0$  sposta  $x_2$  a destra poiché c'è l'anticipo di  $x_2$
- $n < 0$  sposta  $x_2$  a sinistra poiché c'è ritardo di  $x_2$

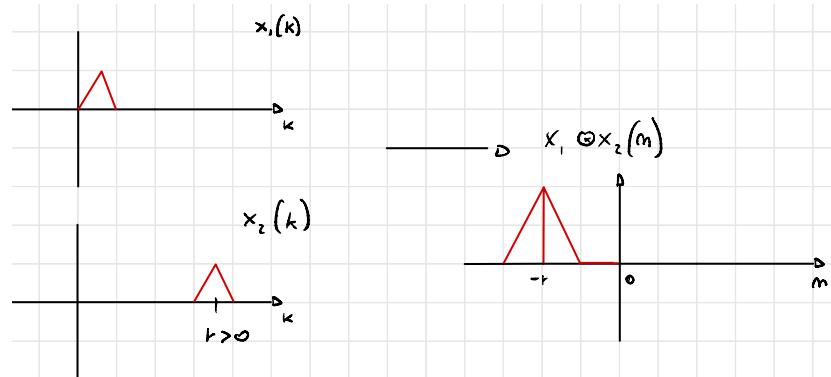


Figura 16: Esempio di cross-correlazione normalizzata 1D.

Il triangolo  $x_2$  va verso sinistra e il lasso di tempo che  $x_2$  non combacia con  $x_1$ , viene rappresentato come una linea orizzontale sull'asse delle  $n$  nel piano cartesiano di destra.

## Cross-Correlazione 2D

Data la definizione:

$$x_1 \otimes x_2 (m, n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(u - m, v - n) \quad u, v, m, n \in \mathbb{Z}$$

Nel 2D  $x_1$  e  $x_2$  possono essere pensate come **immagini infinite**.

Di solito  $x_1$  e  $x_2$  sono **immagini finite** (segnali digitali ad intervallo limitato), e gli estremi di sommatoria sono quindi finiti.

Il primo segnale  $x_1$  viene chiamato **template**, o **matrice kernel**, mentre  $x_2$  genericamente **immagine** (di solito, la matrice kernel  $x_1$  ha una dimensionalità minore di quella dell'immagine).

Nel caso  $x_1 = x_2$  si ha **autocorrelazione 2D**.

## Cross-Correlazione normalizzata 2D

Si definisce come:

$$x_1 \otimes x_2 (m, n) = \frac{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_1(u, v)] [x_2(u - m, v - n)]}{\sqrt{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_1(u, v)]^2 \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_2(u, v)]^2}}$$

In altre parole, fissato il punto di applicazione  $n, m$ , si sottrae la media ad ogni punto nell'interno di applicazione dalla matrice kernel. Successivamente, si divide per il prodotto della varianza dei due segnali, estraendo a radice alla fine.

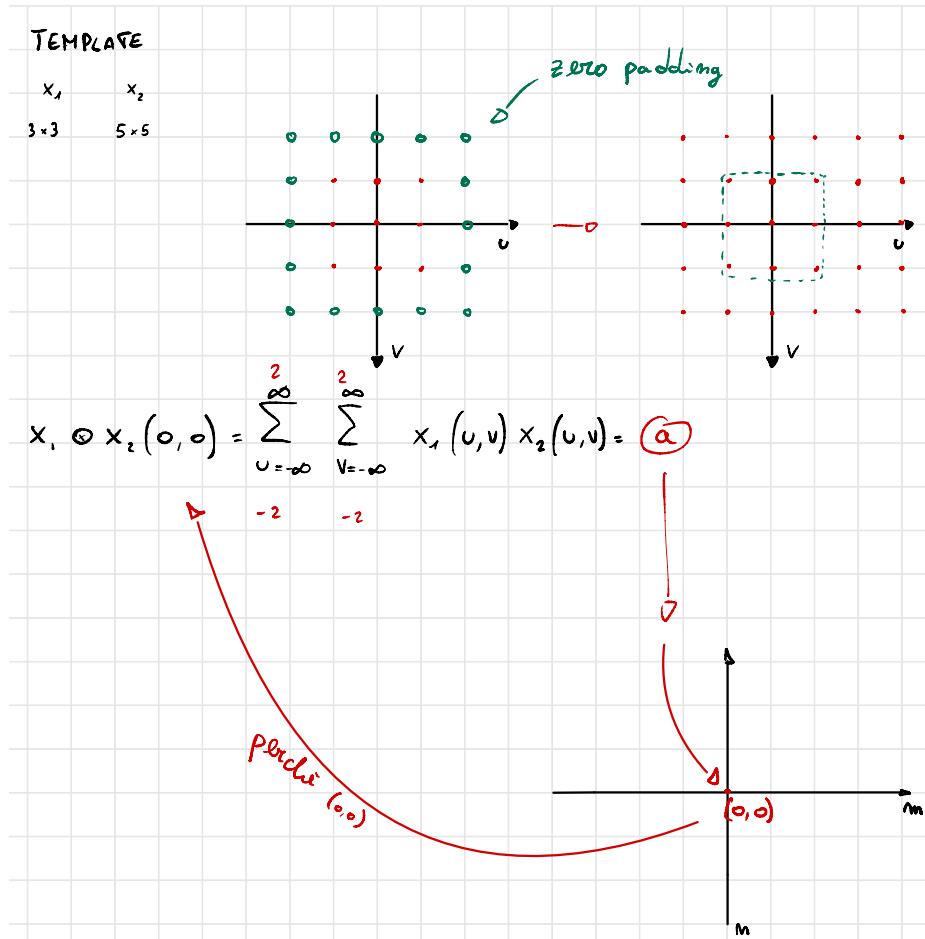


Figura 17: Esempio di Cross-Correlazione normalizzata 2D.

### Esercizio Cross-Correlazione 2D

Dati le due immagini  $x_1$  di dimensione  $5 \times 5$  e  $x_2$  di dimensione  $3 \times 3$ , si calcola la cross-correlazione 2D. Quindi, si effettua la rappresentazione grafica.

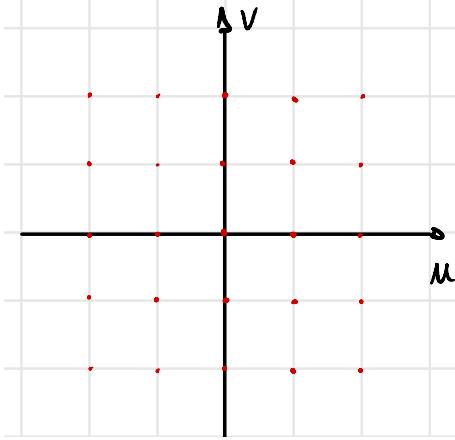


Figura 18: Piano cartesiano di  $x_2$  di dimensione  $5 \times 5$ .

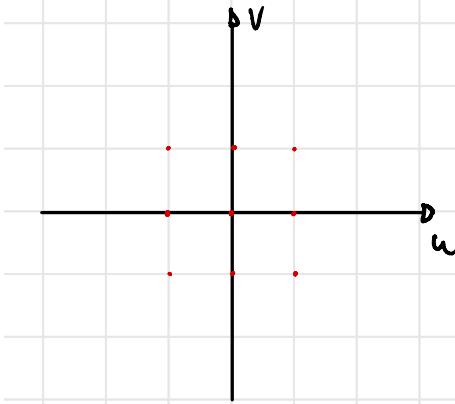


Figura 19: Piano cartesiano di  $x_1$  di dimensione  $3 \times 3$ .

E vengono fornite dall'esercizio le due matrici:

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esse indicano i valori nei punti corrispondenti. L'**obiettivo dell'esercizio** è trovare:

- L'argomento massimo della cross-correlazione ( $\arg \max x_1 \otimes x_2 (m, n)$ );
- Il massimo della cross-correlazione ( $\max x_1 \otimes x_2 (m, n)$ ).

L'argomento massimo è con i valori  $m = 1$  e  $n = -1$  poiché così facendo la diagonale incontra tutti i valori positivi e che formano il massimo. Infatti, prendendo in considerazione la matrice  $x_2$   $5 \times 5$  e osservando l'operazione di cross-correlazione 2D:

$$\sum_u \sum_v x_1(u, v) \cdot x_2(u - m, v - n)$$

$$\xrightarrow{\text{sostituzione termini noti } (m,n)} \sum_u \sum_v x_1(u, v) \cdot x_2(u - 1, v - (-1))$$

Risulta evidente come si debba spostare a destra, rispetto l'origine, la matrice  $x_2$  di un solo valore<sup>1</sup> e sotto, rispetto sempre l'origine, di un valore negativo<sup>2</sup>. Così facendo, la diagonale della matrice  $x_2$  corrisponderà esattamente a tutti i valori 1 della matrice  $x_1$ .

---

<sup>1</sup>Shift a destra poiché  $u - 1$  nell'equazione rappresenta un ritardo.

<sup>2</sup>Spostamento sotto l'asse delle ascisse poiché è un valore positivo  $v + 1$ .

### 1.3.5 Convoluzione

La **convoluzione** è un parente stretto della cross-correlazione, ma è leggermente diverso. È definito nel seguente modo:

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Con  $t \in \mathbb{R}$ . Si ricordi che se i **segnali** non sono né di **energia** né di **potenza**, l'integrale converge.

Nel caso in cui i **segnali** siano **discreti**, dati  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ :

$$x_1 * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) x_2(n - k)$$

Con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Nel caso in cui  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  sono limitati di lunghezza  $M$  ed  $N$  rispettivamente, allora la **convoluzione** è di lunghezza  $M + N - 1$ .

### Convoluzione 2D

Nel caso delle immagini, quindi del 2D,  $x_1$  ed  $x_2$  sono solitamente **segnali digitali ad intervallo limitato**, e la convoluzione diventa dunque:

$$x_1 * x_2(m, n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(m - u, n - v) \quad u, v, m, n \in \mathbb{Z}$$

Solitamente il primo segnale  $x_1$  viene chiamato **filtro**, o **matrice kernel**, mentre  $x_2$  genericamente **immagine** (solitamente la matrice kernel ha una dimensione inferiore di quella dell'immagine).

## 2 Analisi di Fourier

### 2.1 Serie di Fourier

Una funzione, chiamata **funzione di sintesi**,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di variabile continua  $t$ , periodica di periodo  $T$ , si esprime come:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{e^{j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dove  $c_n$  è un numero complesso. Invece, una **funzione di analisi** è espressa come:

$$c_n \in \mathbb{C} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \underbrace{e^{-j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

**N.B.** si ricorda che  $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$  è un **fasore rotante** di velocità angolare  $\frac{2\pi n}{T} t$ .

La **funzione di sintesi** quindi non è altro che una somma di infiniti termini. Ciascuno è composto dalla moltiplicazione tra un numero complesso ed un fasore, il quale *produce un altro fasore*. Esprimendo  $c_n$  come numero complesso in forma polare:

$$c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j \theta_n} e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j(\frac{2\pi n}{T} t + \theta_n)}$$

Si può notare come questa conversione corrisponda ad **estendere** il fasore  $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$  ad una lunghezza  $|c_n|$  facendolo partire con un **angolo di partenza** uguale a  $\theta_n$  (chiamato **angolo di fase**).

**Altra osservazione:** se  $c_n$  appartiene all'insieme  $\mathbb{R}$ , significa che  $\theta_n$  non compare. Questo comporta un cambiamento nella lunghezza dell' $n$ -esimo fasore pari a  $|c_n|$ :

$$c_n = |c_n| e^{j \theta_n}$$

### Esempio 1

Il primo esempio di serie di Fourier si applica per il segnale trigonometrico:

$$f(t) = \cos(2\pi t) \quad \text{con } T = 1$$

Applicando la **funzione di analisi** e saltando i passaggi perché complessi, si ottengono i seguenti valori:

$$c_{-1} = \frac{1}{2} \quad c_0 = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2} \quad c_{i \leq -2, i \geq 2} = 0$$

E sostituendo nella **funzione di sintesi**:

$$\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} = \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}$$

Ci sono **tre osservazioni** da fare:

I.  $\frac{2\pi}{T} = f_0$ ;

II.  $c_n = |c_n|e^{j\theta_n}$ ;

III. In questo caso,  $c_n \in \mathbb{R}$  quindi l'angolo di fase non è presente.

**Le parti** dell'equazione sono le seguenti:

$$\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t}$$

☞  $\cos(2\pi t)$  → La funzione trigonometrica da studiare

☞  $\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}$  → Fasore di modulo 0.5 e velocità angolare  $-2\pi t$

☞  $\frac{1}{2}e^{j2\pi t}$  → Fasore di modulo 0.5 e velocità angolare  $2\pi t$

I coefficienti  $c_{n=-1}$  e  $c_{n=1}$  sono relativi ai **moduli o ampiezze dei fasori** complessi di frequenza  $f_0 \cdot n$  con  $n = -1, 1$  e ricordando che:

$$\exp\left(j\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right) = \exp(j(f_0 nt))$$

Che si possono annotare con le variabili  $f_{-1}$  e  $f_1$  per  $f_0 \cdot n$  con  $n = -1, 1$  e analogamente per gli altri  $n \in \mathbb{Z}$ .

Inoltre, è possibile disegnare lo **spettro di ampiezza** che **mostra i moduli dei fasori costruiti con la trasformata di Fourier**, in particolare la funzione di sintesi.

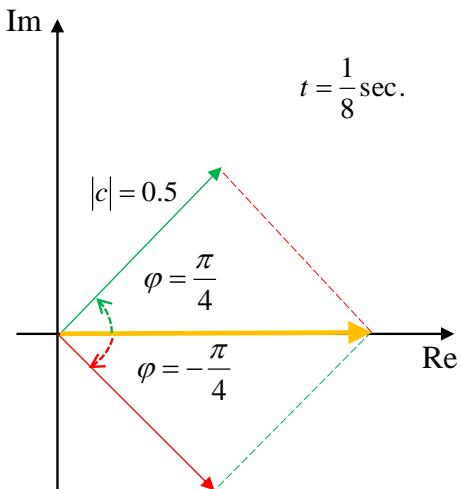


Figura 20: Grafico rappresentante i due fasori. La freccia verde rappresenta il valore assunto da  $\cos(2\pi t)$  per  $t = \frac{1}{8}$ .

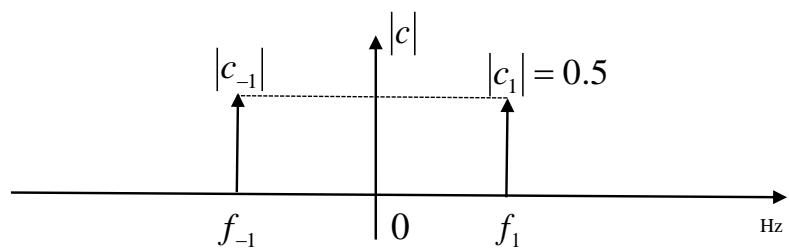


Figura 21: Grafico che rappresenta lo spettro di ampiezza.

## Esempio 2

Il secondo esempio di serie di Fourier è il segnale trigonometrico:

$$f(t) = \sin(2\pi t) \quad \text{con } T = 1$$

Applicando la **funzione di analisi** e saltando i passaggi perché complessi, si ottengono i seguenti valori:

$$c_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad c_0 = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2j} \quad c_{i \leq -2, i \geq 2} = 0$$

Dove questa volta  $c_n \in \mathbb{C}$  ed in particolare:

$$\pm \frac{1}{2j} = \pm \frac{1}{2j} \cdot \frac{j}{j} = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{j}{j^2} = j \cdot \mp \frac{1}{2}$$

Si passa alla forma di esponenziale complesso:

$$\begin{aligned} j \cdot \frac{1}{2} &= 0 + j \cdot \frac{1}{2} \\ |c| &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{0.5}{0}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} &= c_{-1} \end{aligned}$$

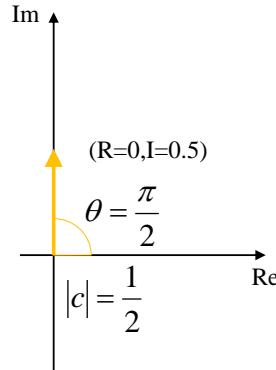


Figura 22: Grafico di  $c_{-1}$ .

Analogamente:

$$\begin{aligned}j \cdot -\frac{1}{2} &= 0 + j \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\|c| &= \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\\theta &= \arctan\left(-\frac{0.5}{0}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\\frac{1}{2}e^{j \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} &= c_1\end{aligned}$$

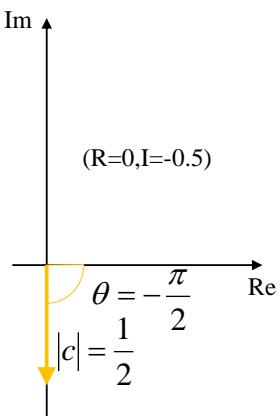


Figura 23: Grafico di  $c_1$ .

Applicando l'**equazione di sintesi** e sostituendo i termini noti:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = c_{-1} e^{j -2\pi t} + c_1 e^{j 2\pi t} \\ \text{sostituzione dei termini noti } c_{-1}, c_1 &\Rightarrow \frac{1}{2} e^{j \frac{\pi}{2}} e^{j \cdot (-2\pi t)} + \frac{1}{2} e^{j -\frac{\pi}{2}} e^{j 2\pi t} \\ \text{forma finale} &\Rightarrow \frac{1}{2} \exp\left(j\left(-2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \exp\left(j\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

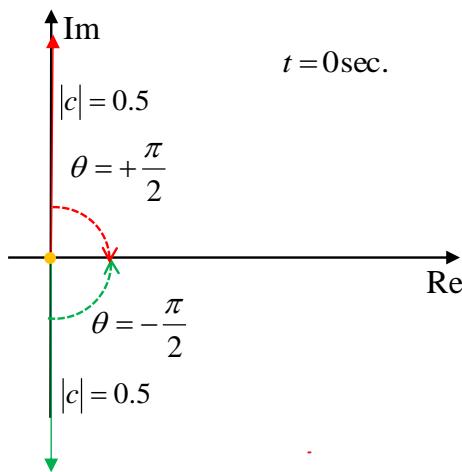


Figura 24: Grafico finale.

Infine, si disegna lo **spettro di ampiezza** e lo **spettro di fase**, quest'ultimo è un **grafico in cui si riportano gli angoli di fase della funzione**.

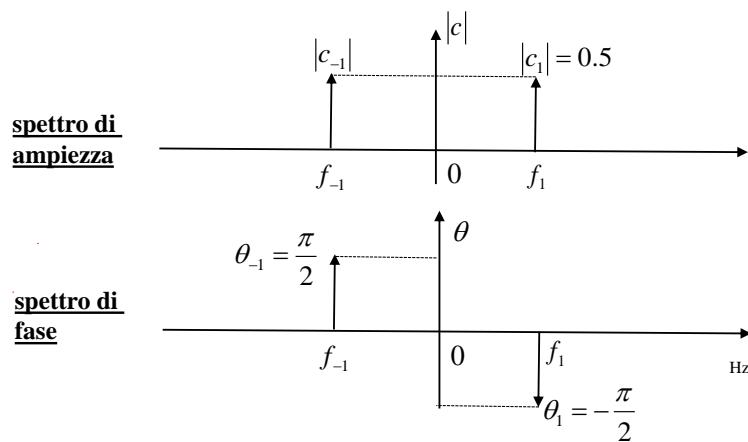


Figura 25: Spettro di ampiezza e di fase della funzione  $\sin(2\pi t)$ .

## 2.2 Proprietà della serie di Fourier

Lo **spettro di ampiezza e di fase** sono funzioni nel dominio delle frequenze che formano lo **spettro di Fourier**. Lo spettro di Fourier per i segnali periodici gode delle **seguenti proprietà**:

- Lo **spettro di ampiezza** è *simmetrico* rispetto all'asse  $y$ ;
- Lo **spettro di fase** è *antisimmetrico* rispetto all'asse  $y$ ;
- Se i coefficienti  $c_n$  sono reali, **non esiste lo spettro di fase**;
- Entrambe gli spettri sono funzioni a pettine, definite su frequenze multiple rispetto a quella fondamentale:

$$\left\{ \frac{2\pi n}{T} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{f_0 \cdot n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$