

# Elaborazione di segnali e immagini

VR443470

dicembre 2022

# Indice

<b>1 Fondamenti</b>	<b>4</b>
1.1 Matematica preliminare . . . . .	4
1.1.1 Numeri complessi . . . . .	4
1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale . . . . .	5
1.1.3 Funzioni pari e dispari . . . . .	6
1.1.4 Segnali periodici . . . . .	7
1.2 Operazioni fondamentali . . . . .	8
1.2.1 Somma . . . . .	8
1.2.2 Shift (o traslazione) . . . . .	9
1.2.3 Funzione box $\Pi$ e impulso di Dirac . . . . .	10
1.2.4 Funzione sinc . . . . .	11
1.2.5 Funzione triangolo $\Lambda$ . . . . .	11
1.2.6 Funzione segno ( $sgn$ ) . . . . .	11
1.2.7 Funzione gradino . . . . .	11
1.2.8 Treno di impulsi . . . . .	12
1.2.9 Energia di un segnale . . . . .	12
1.2.10 Potenza media di un segnale . . . . .	13
1.3 Altre operazioni fondamentali . . . . .	14
1.3.1 Rescaling (o riscalatura) . . . . .	14
1.3.2 Cross-Correlazione . . . . .	15
1.3.3 Esercizi d'esame . . . . .	16
1.3.4 Cross-Correlazione Normalizzata . . . . .	22
1.3.5 Convoluzione . . . . .	28
<b>2 Analisi di Fourier</b>	<b>29</b>
2.1 Serie di Fourier . . . . .	29
2.1.1 Proprietà della serie di Fourier . . . . .	35
2.2 Trasformata di Fourier continua . . . . .	36
2.2.1 Trasformata di Fourier . . . . .	36
2.2.2 Trasformata di Fourier inversa . . . . .	36
2.2.3 Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	38
2.2.4 Trasformata di Fourier di una box . . . . .	39
2.2.5 Trasformata di Fourier di un sinc . . . . .	40
2.2.6 Trasformata di Fourier di un impulso . . . . .	41
2.2.7 Trasformata di Fourier di un treno di impulsi . . . . .	42
2.2.8 Sintesi . . . . .	43
2.3 Trasformata di Fourier a tempo discreto . . . . .	44
2.3.1 Campionamento . . . . .	44
2.3.2 Trasformata di Fourier a tempo discreto . . . . .	45
2.3.3 Teorema del campionamento . . . . .	46
2.3.4 Considerazioni . . . . .	46
2.4 Trasformata di Fourier discreta . . . . .	47
2.5 Riassunto Trasformate . . . . .	49
2.6 Domanda da esame . . . . .	50

<b>3 Elaborazione di immagini - Dominio spaziale</b>	<b>51</b>
3.1 Strumento per l'elaborazione: istogramma . . . . .	52
3.2 Domini . . . . .	54
3.3 Operazioni puntuali . . . . .	55
3.3.1 Identità . . . . .	56
3.3.2 Negativo . . . . .	56
3.3.3 Clamping . . . . .	56
3.3.4 Stretching/Shrinking . . . . .	56
3.3.5 Trasformazione logaritmica . . . . .	57
3.3.6 Trasformazione esponenziale . . . . .	57
3.3.7 Trasformazione di potenza . . . . .	58
3.3.8 Binarizzazione . . . . .	58
3.3.9 Binarizzazione attraverso il metodo di Otsu . . . . .	59
3.3.10 Equalizzazione . . . . .	60
3.4 Operazioni locali . . . . .	64
3.4.1 Filtraggi spaziali: lineari e non lineari . . . . .	65
3.5 Rumore nelle immagini . . . . .	67
3.5.1 Rumore gaussiano additivo bianco . . . . .	68
3.5.2 Rumore impulsivo . . . . .	69
3.6 Altre operazioni locali: tipologie di filtraggio . . . . .	70
3.6.1 Smoothing - Filtro media . . . . .	71
3.6.2 Smoothing - Filtro mediano . . . . .	72
3.6.3 Smoothing - Filtro gaussiano . . . . .	73
3.6.4 Domanda da esame . . . . .	74
3.6.5 Filtraggi di sharpening . . . . .	75
3.6.6 Sharpening - Basic Highpass Spatial Filtering . . . . .	77
3.6.7 Sharpening - Filtro Laplaciano . . . . .	78
3.6.8 Sharpening - High Boost Filtering . . . . .	78

# 1 Fondamenti

## 1.1 Matematica preliminare

### 1.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso  $c$  appartiene all'insieme dei complessi  $\mathbb{C}$  e la sua forma è del tipo:

$$c = \Re + j\Im$$

con  $\Re, \Im$  variabili  $\in \mathbb{R}$  e  $j$  chiamata *unità immaginaria* rappresentata come  $j = \sqrt{-1}$ . Inoltre,  $\Re$  rappresenta la *parte reale* e  $\Im$  la *parte immaginaria*. Il coniugato di  $c$  è

$$\tilde{c} = \Re - j\Im$$

I numeri complessi, dal punto di vista geometrico, possono essere visti come punti su un piano (chiamato *piano complesso*) e descritti da coordinate  $(R, I)$ . Nel piano complesso, le ascisse ( $x$ ) sono rappresentate dalla parte reale, mentre le ordinate ( $y$ ) dalla parte immaginaria.

Spesso è utile rappresentare i numeri complessi in coordinate polari formate nel seguente modo (*modulo, angolo*). Questa forma viene denominata *forma polare* di un numero complesso:

$$c = \Re + j\Im = |c|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

dove:

$$|c| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \longrightarrow \text{chiamato } \textit{modulo} \text{ o } \textit{magnitudo}$$

invece, *theta* rappresenta:

$$\theta \cong \arctan \left( \frac{\Im}{\Re} \right) \longrightarrow \text{chiamato } \textit{angolo}, \textit{fase} \text{ o } \textit{argomento in radianti}$$

Grazie alla formula di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

è possibile riscrivere la forma polare di un numero complesso in maniera alternativa, ossia:

$$c = \Re + j\Im = |c| (\cos \theta + j \sin \theta) = |c| e^{j\theta}$$

La **somma** e la **moltiplicazione** di due numeri complessi diventa:

$$c_1 = R_1 + jI_1 \quad c_2 = R_2 + jI_2$$

$$\text{Somma: } c_1 + c_2 = (R_1 + R_2) + j(I_1 + I_2)$$

$$\text{Moltiplicazione con Eulero: } c_1 \cdot c_2 = (R_1 R_2 - I_1 I_2) + j(R_1 I_2 + I_1 R_2) \longrightarrow = |c_1||c_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

### 1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale

Dato  $t \in \mathbb{R}$ , una funzione  $f$  complessa di variabile reale è  $f : D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D_2 \subseteq \mathbb{C}$ . Viene introdotto questo concetto poiché il **fasore** è un eSEMPIO fondamentALE. Le **caratteristiche** di questa funzione:

- È una funzione complessa che modella la posizione di un punto che ruota attorno all'origine con raggio determinato  $|c|$  e velocità angolare costante  $\theta(t)$ .
- Se la funzione fosse nei numeri reali, sarebbe più dispendioso in termini di numero di funzioni da utilizzare.

L'**obiettivo** dei fasori è quello di *passare dal dominio del tempo* (o spazio) a *quello dell'analisi frequenziale*.

La particolarità è che nel tempo il fasore riesce a variare un numero complesso (in forma polare) mantenendo il modulo  $|c|$  fisso:

$$|c|e^{j\theta} \rightarrow |c|e^{j\theta(t)}$$

dove  $\theta(t)$  indica la **velocità angolare**. Quest'ultima può essere calcolata tramite:

$$\theta(t) \longrightarrow \frac{2\pi}{T_0}t + \phi$$

dove  $T_0$  indica il *tempo* impiegato per eseguire  $2\pi$  radianti.

Soltamente si utilizza il fasore con le seguenti supposizioni:

- Coordinate rappresentate con  $(R, I)$
- Impostata una distanza unitaria fissa dall'origine  $|c| = 1$
- Velocità angolare costante pari a  $2\pi/\text{sec.}$ , ossia  $\theta(t) = 2\pi t, T_0 = 1\text{sec.}$
- Con  $t = 0$  si ha  $\theta = 0$
- Viene mantenuto  $\phi = 0$

### 1.1.3 Funzioni pari e dispari

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **pari** se e solo se:

$$f(t) = f(-t)$$

Invece, una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **dispari** se e solo se:

$$f(t) = -f(-t)$$

#### 1.1.4 Segnali periodici

Un segnale  $f$  è **periodico** di periodo  $T$  o  $T$ -periodico se:

$$\exists T_0 \in R^+ : f(t + T_0) = f(t), \quad \forall t \in D_1$$

e  $T_0$  è il minor numero per cui la condizione di ripetizione si verifica.

Dato un periodo  $T_0$  con la lettera  $\mu_0$  si indica la **frequenza fondamentale**:

$$\mu_0 = \frac{1}{T_0}$$

Fissato  $T_0 > 0$  i **segnali trigonometrici** di minimo periodo  $T_0$  sono:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t)$$

dove  $\mu$  è una frequenza generale, mentre  $\mu_0 = \frac{1}{T_0}$  è la **frequenza fondamentale**. Invece, spesso la **velocità angolare** o **pulsazione** viene rappresentata come:

$$2\pi\mu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

Inoltre, fissato un  $\theta \in \mathbb{R}$  chiamato **fase** si osserva che anche le funzioni:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t + \theta) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t + \theta)$$

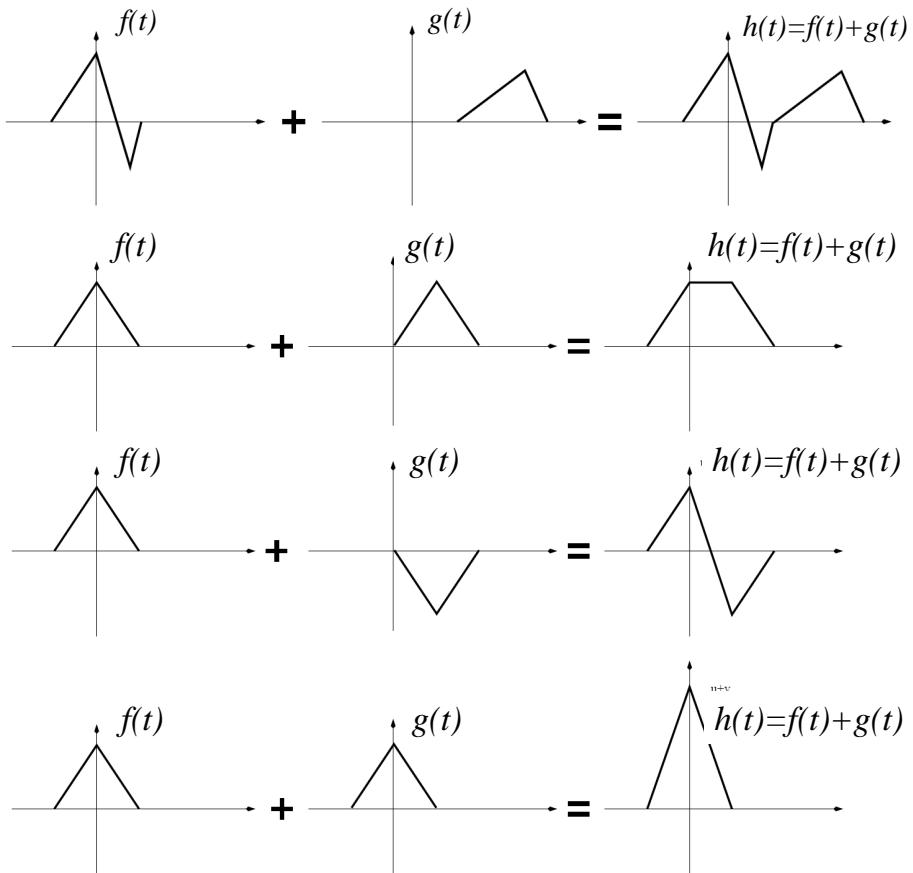
hanno il medesimo periodo  $T$ .

Infine, la fase  $\theta$  permette di eseguire operazione di *shift*.

## 1.2 Operazioni fondamentali

### 1.2.1 Somma

La *somma* di due segnali è facile quando essi non interferiscono, ovvero quando **non** sono contemporaneamente  $\neq 0$ . Alcuni esempi qui di seguito.



### 1.2.2 Shift (o traslazione)

Lo **shift** (o traslazione) è il cambio di posizione di un segnale. Può essere effettuato:

- **Traslazione a destra** con la funzione  $f(t - \tau)$
- **Traslazione a sinistra** con la funzione  $f(t + \tau)$

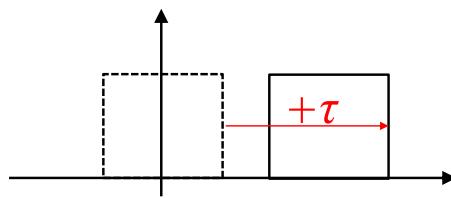


Figura 1: Shift a destra

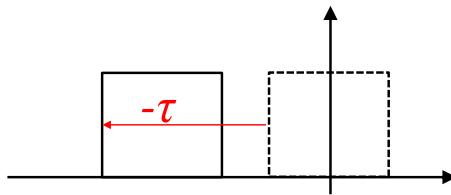


Figura 2: Shift a sinistra

### 1.2.3 Funzione box II e impulso di Dirac

La funzione ***box*** è definita nel seguente modo:

$$A\Pi\left(\frac{x}{b}\right) \quad x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

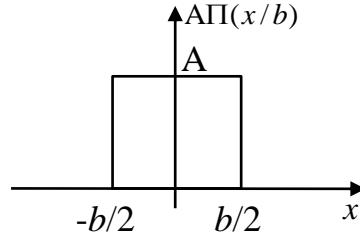


Figura 3: Box generica

La funzione  $\delta(x)$  è chiamata ***impulso unitario*** o ***impulso di Dirac*** perché è definita nel seguente modo:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Quindi è un impulso che tende all'infinito solamente quando la  $x$  è nell'origine, ma il suo integrale è uguale a 1. Alcune **proprietà** dell'impulso:

1.  $\delta(x - x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0$
2. Data una funzione generica  $f$  (**setacciamento**):  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dt = f(x_0)$
3.  $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
4.  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ fissato } a \in \mathbb{R} - \{0\}$

#### 1.2.4 Funzione sinc

La funzione **sinc** è definita nel seguente modo:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Ha due **caratteristiche** importanti: (1) l'intersezione con l'asse delle  $x$  avviene sempre nei numeri interi positivi e negativi (quindi 1 e -1, 2 e -2, ecc.); (2) il limite  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{sinc}(t) = 0$ .

Questa funzione è **importante per l'analisi nel dominio del tempo (o frequenza)**.

#### 1.2.5 Funzione triangolo $\Lambda$

La funzione **triangolo** è definita nel seguente modo:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è **importante per l'analisi spettrale e per le operazioni di convoluzione**.

#### 1.2.6 Funzione segno ( $\text{sgn}$ )

La funzione **segno** è definita nel seguente modo:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione ribalta segnali sopra o sotto l'asse delle  $x$ .

#### 1.2.7 Funzione gradino

La funzione **gradino** è definita nel seguente modo:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Questa funzione rappresenta un **segnale** che si attiva a partire dal tempo specificato e rimane attivo indefinitamente. Attenzione! Non si confonda questo segnale con il segno.

### 1.2.8 Treno di impulsi

Il **treno di impulsi**  $S_{\Delta T}(x)$  è la somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità  $\Delta T$ :

$$S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

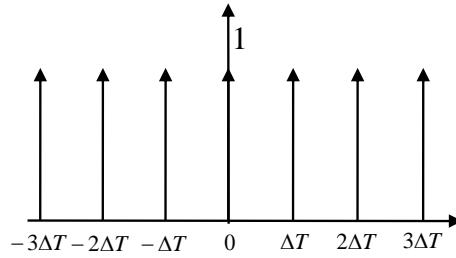


Figura 4: Treno di impulsi

### 1.2.9 Energia di un segnale

L'**energia di un segnale** è definita nel seguente modo:

$$E_f = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt & \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), \quad f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **ad energia finita** (o **di energia**) se l'integrale che rappresenta l'energia converge ed è diverso da 0. Quindi:

- ☞ **Condizione sufficiente** all'esistenza della sua trasformata di Fourier. Le funzioni trigonometriche non sono di energia ma hanno comunque la Trasformata di Fourier.
- ☞ **Condizione necessaria** per essere un segnale ad energia finita, all'infinito ( $+\infty$  e  $-\infty$ ) l'**ampiezza** va a zero.

Alcuni esempi:

- ★ **Segnali di energia.** Impulsi rettangolari, oscillazioni smorzate (sinc);
- ★ **Segnali non di energia.** Funzioni trigonometriche sin e cos.

L'**unità di misura** è il *joule*.

### 1.2.10 Potenza media di un segnale

La *potenza media di un segnale* è definita nel seguente modo:

$$P_f = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \quad \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), & f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **a potenza finita** (o **di potenza**) se l'integrale che rappresenta la potenza converge ed è diverso da 0. L'**unità di misura** è il *watt*.

Infine, un segnale ad energia finita ha la potenza che tende a zero (per cui un segnale non può appartenere ad entrambe le categorie). Invece, esistono segnali che non sono né di energia, né di potenza finita.

## 1.3 Altre operazioni fondamentali

### 1.3.1 Rescaling (o riscalatura)

La funzione di *rescaling* è definita nel seguente modo:

$$\forall f(t) : D_1 \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0$$

Simile allo *shift*, il *rescaling* ha una definizione generica e due varianti:

- **Definizione generica** con la funzione semplice  $f(t)$  (immagine 5).
- **Ritardo lineare del segnale di un fattore  $\omega$**  con la funzione  $f(\omega t)$ ,  $0 < \omega < 1$  (immagine 6).
- **Accelero lineare del segnale di un fattore  $\omega$**  con la funzione  $f(\omega t)$ ,  $\omega > 1$  (immagine 7).

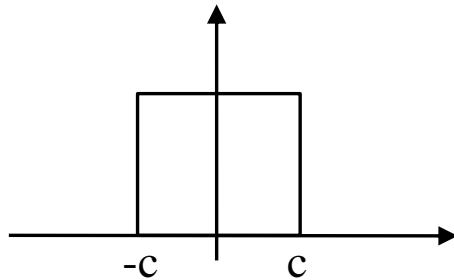


Figura 5: Definizione generica

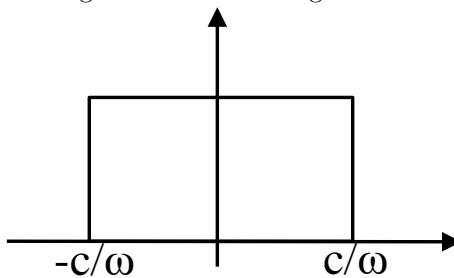


Figura 6: Ritardo lineare del segnale di un fattore  $\omega$

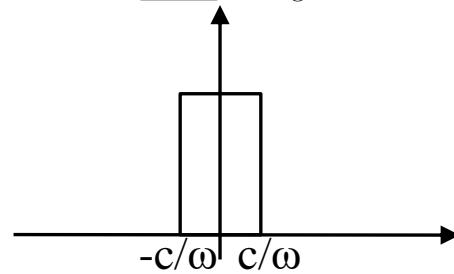


Figura 7: Accelero lineare del segnale di un fattore  $\omega$

### 1.3.2 Cross-Correlazione

Dati  $f_1(\tau), f_2(\tau)$  segnali continui,  $\tau \in \mathbb{R}$  il segnale di ***cross-correlazione*** viene definito come:

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

In cui  $\tilde{f}_1(\tau)$  rappresenta un *complesso coniugato*. Nel caso in cui  $f_1$  è reale, allora  $\tilde{f}_1(\tau) \rightarrow f_1(\tau)$ .

Infine, con  $t = 0$  si ha l'***integrale di cross-correlazione***, il quale è definito se l'integrale converge (ovviamente se il segnale non è né di energia, né di potenza, la convergenza non esiste!).

### 1.3.3 Esercizi d'esame

**Esercizio.**

Il primo esercizio fornisce una funzione  $f(t)$ :

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$$

Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

- I Rappresentare graficamente il segnale;
- II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se  $f(t)$  è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida. Infine, calcolare l'energia o la potenza nel caso in cui  $f(t)$  sia solo composta da  $e^{-2t}$ ;
- III Scrivere l'espressione analitica rispetto  $z(t) = -f(-t)$  e  $v(t) = f(t+4)$

**Risoluzione I.**

Il **primo passo** è quello di scomporre la funzione così da avere una visione più chiara sulle operazioni da effettuare:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t} \longrightarrow f(t) = \Pi\left(\frac{1}{4} \cdot (t-2)\right)$$

Come si può osservare, ci sono due operazioni da eseguire. Quindi, dopo l'esplicitazione si esegue la rappresentazione del segnale base  $\Pi(t)$ :

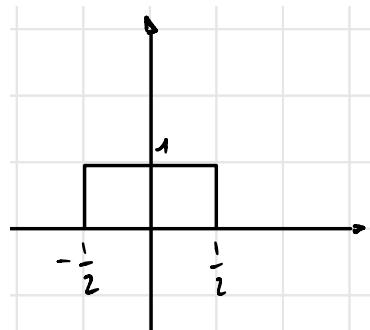


Figura 8: Rappresentazione della funzione  $f(t)$ , ovvero un box.

Adesso si esegue l'operazione di moltiplicazione per un fattore che in questo caso è  $\frac{1}{4}$ . Quindi si rappresenta la box  $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$ :

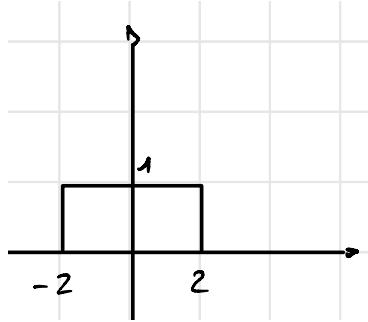


Figura 9: Box  $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$  allargata.

L'operazione che è stata effettuata è stata semplicemente considerare la box del tipo  $\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$ . Ricordandosi le nozioni del corso di Sistemi, per definizione quindi la box è definita nell'intervallo  $-2, +2$ .

Infine, viene applicata l'ultima operazione, ovvero il  $-2$  all'incognita  $t$ . Quindi, la funzione box diventerà  $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$  e la sua rappresentazione grafica sarà uno shift a destra (ritardo):

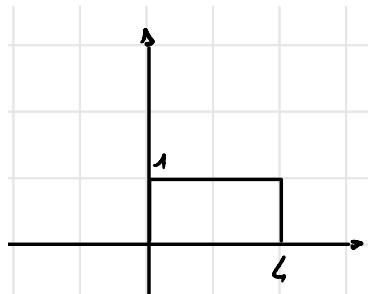


Figura 10: Box  $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$  dopo lo shift a destra.

Il **primo punto si conclude** con la rappresentazione del segnale  $e^{-2t}$  e la sua combinazione con la box. Quindi:

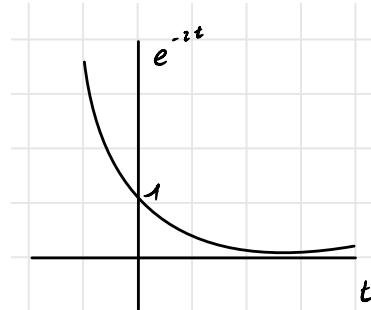


Figura 11: Rappresentazione della funzione  $e^{-2t}$

E infine la sua concatenazione con la box, quindi una sorta di applicazione di un filtro:

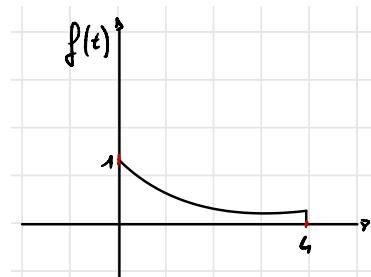


Figura 12: Rappresentazione finale della funzione  $f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$

### Risoluzione II.

Guardando la figura 12 si può già intuire che tipo di segnale sia. Infatti, dato che è limitato e non si estende all'infinito, per definizione è un **segnale finito**, quindi **di energia e non di potenza**. Per dimostrare questa affermazione, si eseguono i calcoli:

$$\text{Definizione di energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt$$

$$\text{Definizione di potenza: } P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$$

Dopo le definizioni, si esegue l'effettivo calcolo con i valori numerici:

#### Energia finita

$$E_f = \int_0^4 e^{-4t} dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_0^4 = \frac{-e^{-16} + 1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$$

#### Potenza finita

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^4 e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Come si osserva dai risultati, è un segnale di energia finita poiché è un valore noto, invece non è un segnale di potenza poiché il risultato è zero e non rispetta la definizione.

Al contrario, se la funzione fosse composta solamente dall'esponenziale, il calcolo dell'energia e della potenza sarebbe:

$$\text{Energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-4t} - e^{4t}}{-4} = \infty$$

$$\text{Potenza: } P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-4t}}{-4} \cdot \frac{1}{T} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-2T} - e^{2T}}{-4T} = \infty$$

Come si evince dai calcoli, il segnale non è né di energia né di potenza perché entrambi i risultati sono uguali a infinito.

### Risoluzione III.

Considerando la funzione  $z(t)$ , si osserva che è la copia simmetrica rispetto all'origine di  $f(t)$ . Invece, la funzione  $v(t)$  è identica alla funzione  $f(t)$  ma "shiftata" a sinistra di 4:

$$f(t) = -f(-t) \quad v(t) = f(t+4)$$

**Esercizio 2.**

Il secondo esercizio fornisce una funzione  $f(t)$ :

$$f(t) = \operatorname{sgn} \left( a \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right)$$

Con  $T_0 = 2$ . Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

- I Rappresentare graficamente il segnale;
- II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se  $f(t)$  è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida.

**Risoluzione I.**

Viene rappresentato il segnale della funzione segno sng:

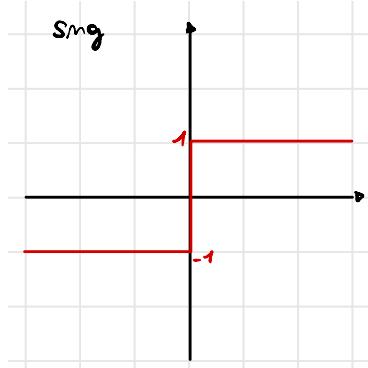


Figura 13: Funzione segno sng.

Si esplicitando le operazioni della funzione:

$$f(t) = \operatorname{sgn} \left( a \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right) = \cos \left( \frac{1}{T_0} \cdot 2\pi t \right)$$

E si rappresenta inizialmente la funzione  $\cos(2\pi)$  con  $T_0 = 1$ :

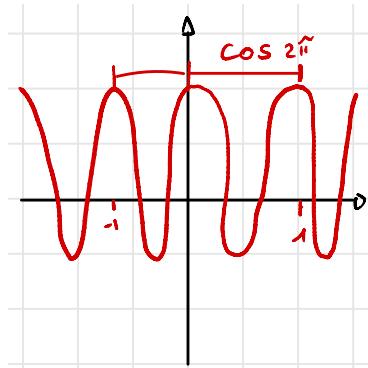


Figura 14: Funzione coseno  $\cos(2\pi)$ .

Si conclude la rappresentazione grafica aumentando  $T_0$  in maniera molto semplice:

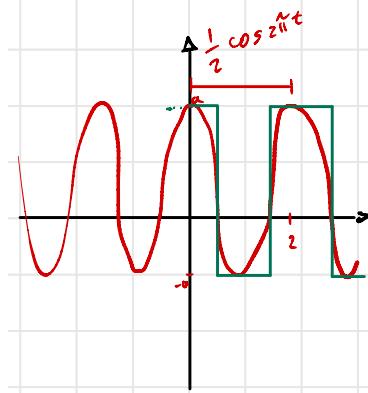


Figura 15: Funzione coseno  $\cos(2\pi)$  moltiplicata per  $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$ .

### Risoluzione II.

Si conclude l'esercizio calcolando l'energia o la potenza del segnale. Per farlo, dato che non è definito in un intervallo ma continua all'infinito, si calcolano i rispettivi integrali in un intervallo arbitrario  $n$  e poi lo si estende all'infinito:

$$\begin{aligned} E_f &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n \cdot \frac{T_0}{2}}^{n \cdot \frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \infty \\ P_f &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-n \cdot \frac{T_0}{2}}^{n \cdot \frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \cdot n \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot T_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \longrightarrow \neq 0 \end{aligned}$$

È evidente che il segnale è di potenza. Come si evince dalla figura 15, i tratti di colore verde indicano il rettangolo formato dal segnale. Calcolando l'area del rettangolo, si ottiene esattamente il valore di  $T_0$ . Infatti, la base del rettangolo (verticale) è 2, mentre l'altezza (orizzontale) è 1.

#### 1.3.4 Cross-Correlazione Normalizzata

Ha l'**obiettivo** di trattare segnali con range di valori diversi e consente di eseguire **confronti uno-a-molti** (*one-to-many*):

$$f_1 \bar{\otimes} f_2 (t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1 (\tau) f_2 (\tau - t) d\tau}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}}$$

In cui  $E_f$  indica l'**energia** del segnale  $f$ . Ci sono due caratteristiche importanti:

- $f_1 \bar{\otimes} f_2 (t) \in [-1, 1]$
- $|f_1 \bar{\otimes} f_2 (t)| = 1 \iff f_1 (\tau) = \alpha f_2 (\tau - t)$

Inoltre, si parla di **autocorrelazione** (normalizzata e non) quando  $f_1 = f_2$ . Utile per i segnali stocastici.

Nel **caso di segnali discreti**, dati  $x_1(k), x_2(k)$ :

$$x_1 \otimes x_2 (n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1 (k) x_2 (k - n) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sotto l'ipotesi di convergenza della serie, cioè la serie deve convergere.

Nel caso in cui  $x_1(k)$  e  $x_2(k)$  sono limitati di lunghezza M ed N rispettivamente, allora la **cross correlazione è di lunghezza  $M + N - 1$** .

## Cross-Correlazione 1D

Data la definizione:

$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) x_2(k-n)$$

Esistono diverse casistiche:

- $n = 0$  si confronta tra  $x_1$  e  $x_2$  nei loro domini temporali originali.
- $n > 0$  sposta  $x_2$  a destra poiché c'è l'anticipo di  $x_2$
- $n < 0$  sposta  $x_2$  a sinistra poiché c'è ritardo di  $x_2$

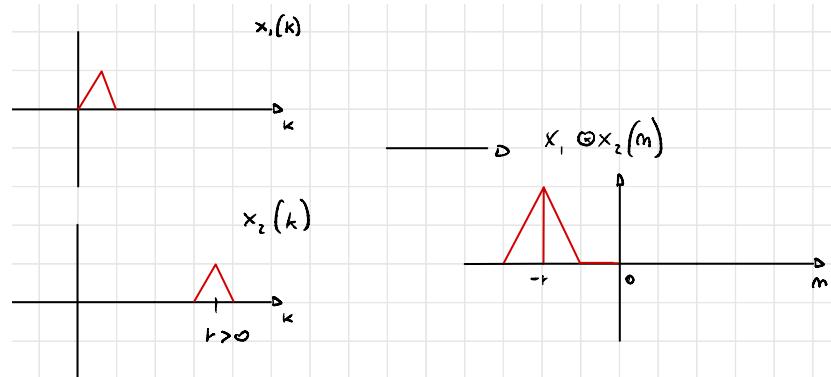


Figura 16: Esempio di cross-correlazione normalizzata 1D.

Il triangolo  $x_2$  va verso sinistra e il lasso di tempo che  $x_2$  non combacia con  $x_1$ , viene rappresentato come una linea orizzontale sull'asse delle  $n$  nel piano cartesiano di destra.

## Cross-Correlazione 2D

Data la definizione:

$$x_1 \otimes x_2 (m, n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(u - m, v - n) \quad u, v, m, n \in \mathbb{Z}$$

Nel 2D  $x_1$  e  $x_2$  possono essere pensate come **immagini infinite**.

Di solito  $x_1$  e  $x_2$  sono **immagini finite** (segnali digitali ad intervallo limitato), e gli estremi di sommatoria sono quindi finiti.

Il primo segnale  $x_1$  viene chiamato **template**, o **matrice kernel**, mentre  $x_2$  genericamente **immagine** (di solito, la matrice kernel  $x_1$  ha una dimensionalità minore di quella dell'immagine).

Nel caso  $x_1 = x_2$  si ha **autocorrelazione 2D**.

## Cross-Correlazione normalizzata 2D

Si definisce come:

$$x_1 \otimes x_2 (m, n) = \frac{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_1(u, v)] [x_2(u - m, v - n)]}{\sqrt{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_1(u, v)]^2 \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_2(u, v)]^2}}$$

In altre parole, fissato il punto di applicazione  $n, m$ , si sottrae la media ad ogni punto nell'interno di applicazione dalla matrice kernel. Successivamente, si divide per il prodotto della varianza dei due segnali, estraendo a radice alla fine.

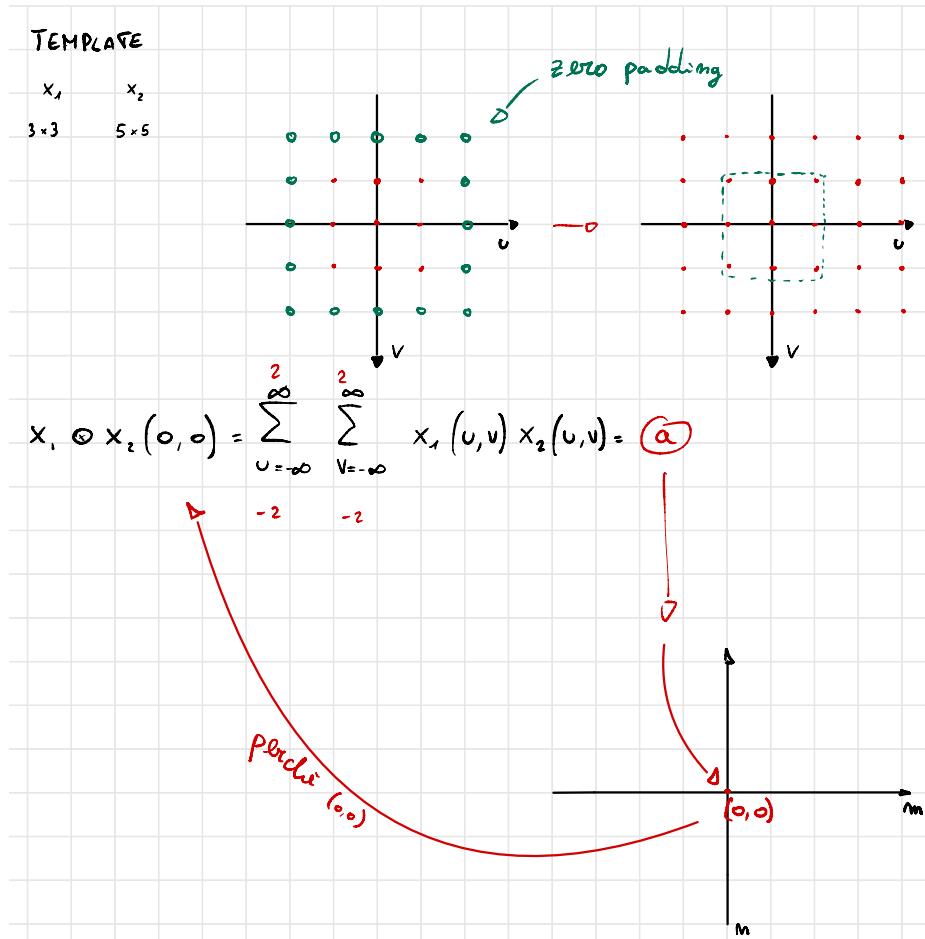


Figura 17: Esempio di Cross-Correlazione normalizzata 2D.

### Esercizio Cross-Correlazione 2D

Dati le due immagini  $x_1$  di dimensione  $5 \times 5$  e  $x_2$  di dimensione  $3 \times 3$ , si calcola la cross-correlazione 2D. Quindi, si effettua la rappresentazione grafica.

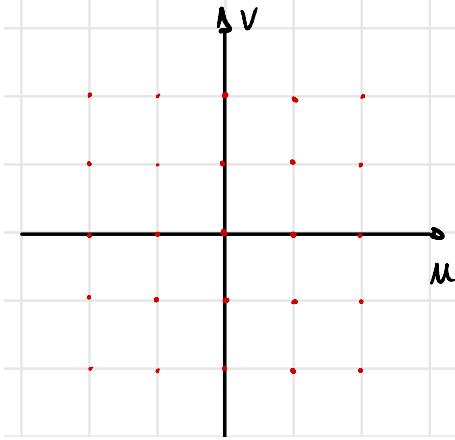


Figura 18: Piano cartesiano di  $x_2$  di dimensione  $5 \times 5$ .

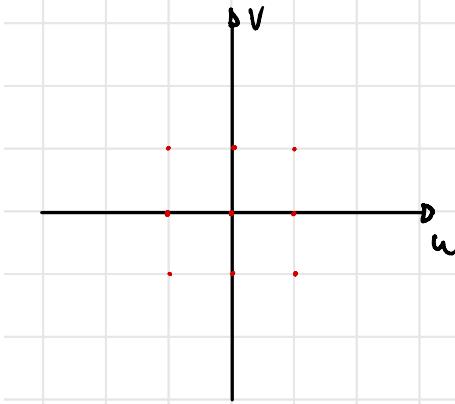


Figura 19: Piano cartesiano di  $x_1$  di dimensione  $3 \times 3$ .

E vengono fornite dall'esercizio le due matrici:

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esse indicano i valori nei punti corrispondenti. L'**obiettivo dell'esercizio** è trovare:

- L'argomento massimo della cross-correlazione ( $\arg \max x_1 \otimes x_2 (m, n)$ );
- Il massimo della cross-correlazione ( $\max x_1 \otimes x_2 (m, n)$ ).

L'argomento massimo è con i valori  $m = 1$  e  $n = -1$  poiché così facendo la diagonale incontra tutti i valori positivi e che formano il massimo. Infatti, prendendo in considerazione la matrice  $x_2$   $5 \times 5$  e osservando l'operazione di cross-correlazione 2D:

$$\sum_u \sum_v x_1(u, v) \cdot x_2(u - m, v - n)$$

$$\xrightarrow{\text{sostituzione termini noti } (m,n)} \sum_u \sum_v x_1(u, v) \cdot x_2(u - 1, v - (-1))$$

Risulta evidente come si debba spostare a destra, rispetto l'origine, la matrice  $x_2$  di un solo valore<sup>1</sup> e sotto, rispetto sempre l'origine, di un valore negativo<sup>2</sup>. Così facendo, la diagonale della matrice  $x_2$  corrisponderà esattamente a tutti i valori 1 della matrice  $x_1$ .

---

<sup>1</sup>Shift a destra poiché  $u - 1$  nell'equazione rappresenta un ritardo.

<sup>2</sup>Spostamento sotto l'asse delle ascisse poiché è un valore positivo  $v + 1$ .

### 1.3.5 Convoluzione

La **convoluzione** è un parente stretto della cross-correlazione, ma è leggermente diverso. È definito nel seguente modo:

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Con  $t \in \mathbb{R}$ . Si ricordi che se i **segnali** non sono né di **energia** né di **potenza**, l'integrale converge.

Nel caso in cui i **segnali** siano **discreti**, dati  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ :

$$x_1 * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) x_2(n - k)$$

Con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Nel caso in cui  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  sono limitati di lunghezza  $M$  ed  $N$  rispettivamente, allora la **convoluzione** è di lunghezza  $M + N - 1$ .

### Convoluzione 2D

Nel caso delle immagini, quindi del 2D,  $x_1$  ed  $x_2$  sono solitamente **segnali digitali ad intervallo limitato**, e la convoluzione diventa dunque:

$$x_1 * x_2(m, n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(m - u, n - v) \quad u, v, m, n \in \mathbb{Z}$$

Solitamente il primo segnale  $x_1$  viene chiamato **filtro**, o **matrice kernel**, mentre  $x_2$  genericamente **immagine** (solitamente la matrice kernel ha una dimensione inferiore di quella dell'immagine).

## 2 Analisi di Fourier

### 2.1 Serie di Fourier

Una funzione, chiamata **funzione di sintesi**,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di variabile continua  $t$ , periodica di periodo  $T$ , si esprime come:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{e^{j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dove  $c_n$  è un numero complesso. Invece, una **funzione di analisi** è espressa come:

$$c_n \in \mathbb{C} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \underbrace{e^{-j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

**N.B.** si ricorda che  $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$  è un **fasore rotante** di velocità angolare  $\frac{2\pi n}{T} t$ .

La **funzione di sintesi** quindi non è altro che una somma di infiniti termini. Ciascuno è composto dalla moltiplicazione tra un numero complesso ed un fasore, il quale *produce un altro fasore*. Esprimendo  $c_n$  come numero complesso in forma polare:

$$c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j \theta_n} e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j(\frac{2\pi n}{T} t + \theta_n)}$$

Si può notare come questa conversione corrisponda ad **estendere** il fasore  $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$  ad una lunghezza  $|c_n|$  facendolo partire con un **angolo di partenza** uguale a  $\theta_n$  (chiamato **angolo di fase**).

**Altra osservazione:** se  $c_n$  appartiene all'insieme  $\mathbb{R}$ , significa che  $\theta_n$  non compare. Questo comporta un cambiamento nella lunghezza dell' $n$ -esimo fasore pari a  $|c_n|$ :

$$c_n = |c_n| e^{j \theta_n}$$

### Esempio 1

Il primo esempio di serie di Fourier si applica per il segnale trigonometrico:

$$f(t) = \cos(2\pi t) \quad \text{con } T = 1$$

Applicando la **funzione di analisi** e saltando i passaggi perché complessi, si ottengono i seguenti valori:

$$c_{-1} = \frac{1}{2} \quad c_0 = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2} \quad c_{i \leq -2, i \geq 2} = 0$$

E sostituendo nella **funzione di sintesi**:

$$\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} = \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}$$

Ci sono **tre osservazioni** da fare:

I.  $\frac{2\pi}{T} = f_0$ ;

II.  $c_n = |c_n|e^{j\theta_n}$ ;

III. In questo caso,  $c_n \in \mathbb{R}$  quindi l'angolo di fase non è presente.

**Le parti** dell'equazione sono le seguenti:

$$\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t}$$

☞  $\cos(2\pi t)$  → La funzione trigonometrica da studiare

☞  $\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}$  → Fasore di modulo 0.5 e velocità angolare  $-2\pi t$

☞  $\frac{1}{2}e^{j2\pi t}$  → Fasore di modulo 0.5 e velocità angolare  $2\pi t$

I coefficienti  $c_{n=-1}$  e  $c_{n=1}$  sono relativi ai **moduli o ampiezze dei fasori** complessi di frequenza  $f_0 \cdot n$  con  $n = -1, 1$  e ricordando che:

$$\exp\left(j\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right) = \exp(j(f_0 nt))$$

Che si possono annotare con le variabili  $f_{-1}$  e  $f_1$  per  $f_0 \cdot n$  con  $n = -1, 1$  e analogamente per gli altri  $n \in \mathbb{Z}$ .

Inoltre, è possibile disegnare lo **spettro di ampiezza** che **mostra i moduli dei fasori costruiti con la trasformata di Fourier**, in particolare la funzione di sintesi.

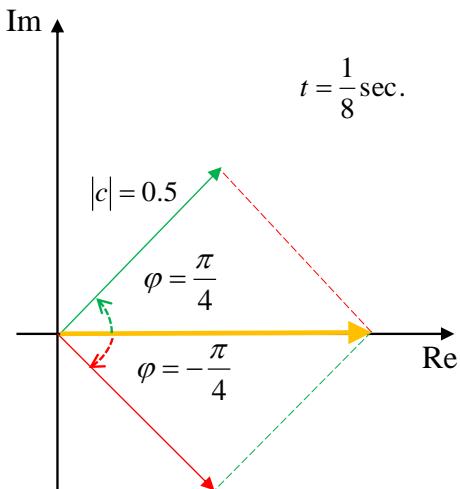


Figura 20: Grafico rappresentante i due fasori. La freccia verde rappresenta il valore assunto da  $\cos(2\pi t)$  per  $t = \frac{1}{8}$ .

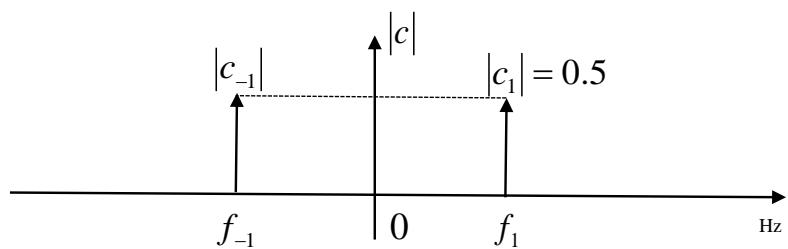


Figura 21: Grafico che rappresenta lo spettro di ampiezza.

## Esempio 2

Il secondo esempio di serie di Fourier è il segnale trigonometrico:

$$f(t) = \sin(2\pi t) \quad \text{con } T = 1$$

Applicando la **funzione di analisi** e saltando i passaggi perché complessi, si ottengono i seguenti valori:

$$c_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad c_0 = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2j} \quad c_{i \leq -2, i \geq 2} = 0$$

Dove questa volta  $c_n \in \mathbb{C}$  ed in particolare:

$$\pm \frac{1}{2j} = \pm \frac{1}{2j} \cdot \frac{j}{j} = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{j}{j^2} = j \cdot \mp \frac{1}{2}$$

Si passa alla forma di esponenziale complesso:

$$\begin{aligned} j \cdot \frac{1}{2} &= 0 + j \cdot \frac{1}{2} \\ |c| &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{0.5}{0}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} &= c_{-1} \end{aligned}$$

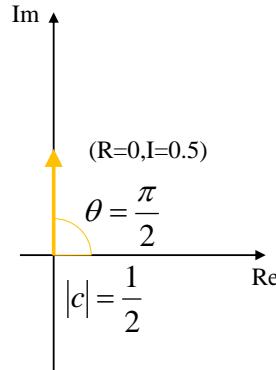


Figura 22: Grafico di  $c_{-1}$ .

Analogamente:

$$\begin{aligned}j \cdot -\frac{1}{2} &= 0 + j \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\|c| &= \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\\theta &= \arctan\left(-\frac{0.5}{0}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\\frac{1}{2}e^{j \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} &= c_1\end{aligned}$$

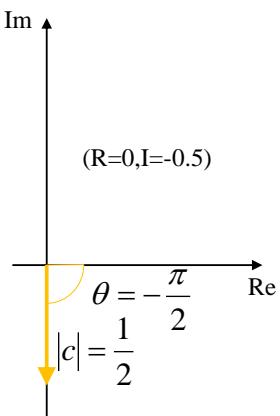


Figura 23: Grafico di  $c_1$ .

Applicando l'**equazione di sintesi** e sostituendo i termini noti:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = c_{-1} e^{j -2\pi t} + c_1 e^{j 2\pi t} \\ \text{sostituzione dei termini noti } c_{-1}, c_1 &\Rightarrow \frac{1}{2} e^{j \frac{\pi}{2}} e^{j \cdot (-2\pi t)} + \frac{1}{2} e^{j -\frac{\pi}{2}} e^{j 2\pi t} \\ \text{forma finale} &\Rightarrow \frac{1}{2} \exp\left(j\left(-2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \exp\left(j\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

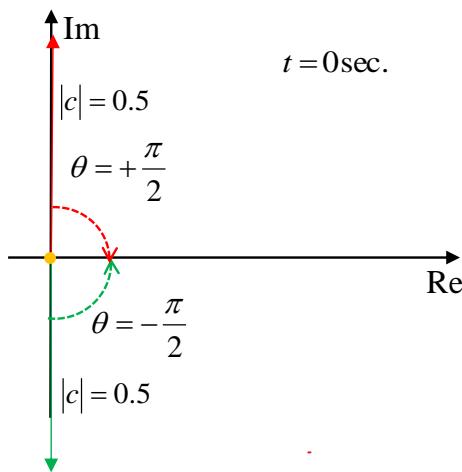


Figura 24: Grafico finale.

Infine, si disegna lo **spettro di ampiezza** e lo **spettro di fase**, quest'ultimo è un **grafico in cui si riportano gli angoli di fase della funzione**.

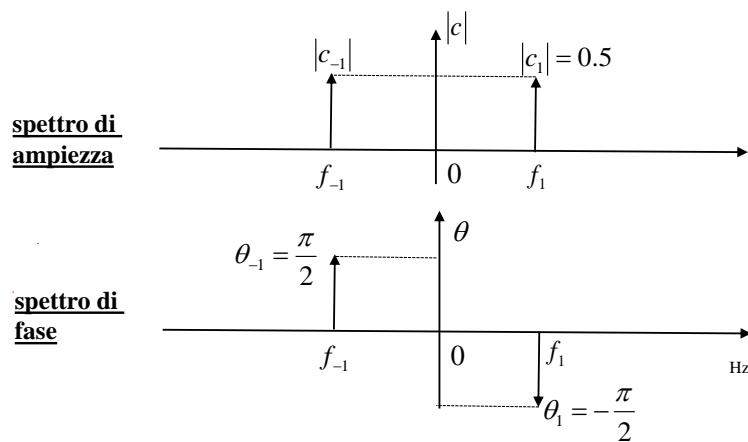


Figura 25: Spettro di ampiezza e di fase della funzione  $\sin(2\pi t)$ .

### 2.1.1 Proprietà della serie di Fourier

Lo **spettro di ampiezza e di fase** sono funzioni nel dominio delle frequenze che formano lo **spettro di Fourier**. Lo spettro di Fourier per i segnali periodici gode delle **seguenti proprietà**:

- Lo **spettro di ampiezza** è *simmetrico* rispetto all'asse  $y$ ;
- Lo **spettro di fase** è *antisimmetrico* rispetto all'asse  $y$ ;
- Se i coefficienti  $c_n$  sono reali, **non esiste lo spettro di fase**;
- Entrambe gli spettri sono funzioni a pettine, definite su frequenze multiple rispetto a quella fondamentale:

$$\left\{ \frac{2\pi n}{T} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{f_0 \cdot n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

## 2.2 Trasformata di Fourier continua

### 2.2.1 Trasformata di Fourier

Sia  $f(t)$  un **segnale reale continuo**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodico o non, si definisce la **Trasformata di Fourier** (TdF)  $\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu)$  il segnale  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

L'**unità frequenziale**  $\mu$  è l'angolo di  $\frac{n}{T}$  della serie di Fourier (per esempio, con  $n = 1$ ,  $T = 1$  sec.  $\rightarrow \mu = 1$  sec. $^{-1}$  = 1 Hz).

La Trasformata di Fourier esiste se  $f(t)$  è un **segnale di energia**. Condizione sufficiente e non necessaria perché altri segnali ammettono la TdF.

### 2.2.2 Trasformata di Fourier inversa

Sia  $F(\mu)$  la trasformata di Fourier di un segnale  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si definisce la **trasformata di Fourier inversa** il segnale  $\mathcal{F}^{-1}(F(\mu)) = f(t)$ :

$$\mathcal{F}^{-1} = (F(\mu)) = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

La trasformata di Fourier restituisce, per una data frequenza  $\mu$ , un coefficiente di “presenza”  $F(\mu)$ . Infatti, la sua inversa permette di ricostruire  $f$  a partire da  $F$ .

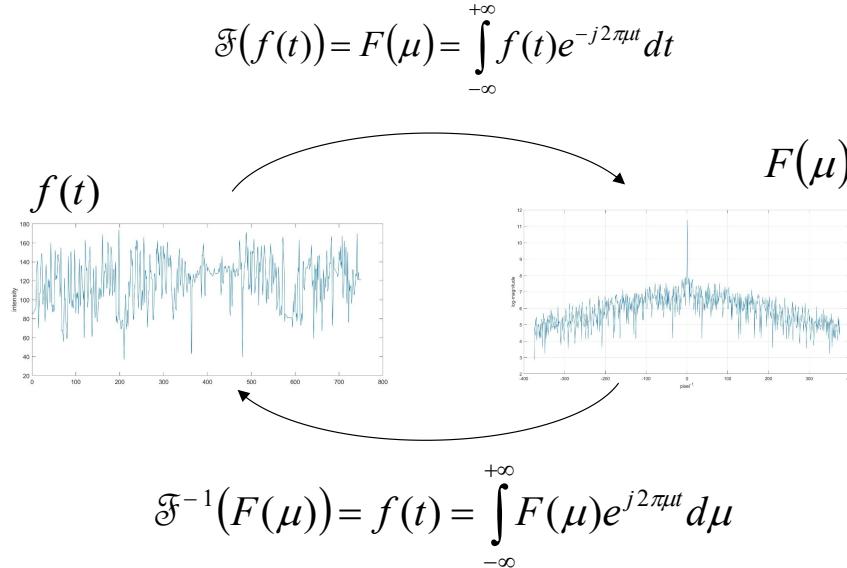


Figura 26: (Anti)Trasformata di Fourier su un segnale  $f(t)$ .

Nel caso in cui il segnale  $f(t)$  non è reale, la trasformata è complessa:

- $t$  rappresenta il **tempo** (in secondi), allora  $\mu$  rappresenta gli **Hertz**, cioè  $\frac{\text{numero cicli}}{\text{secondi}}$ ;
- $t$  rappresenta lo **spazio** (in metri), allora  $\mu$  rappresenta la **frequenza spaziale**, cioè  $\frac{\text{numero cicli}}{\text{metri}}$

Mentre nella serie di Fourier le funzioni rappresentate negli spettri di ampiezza e di fase erano a “pettine” (paragrafo 2.1.1), in questo caso le funzioni sono solitamente continue, nello spettro di ampiezza, o continue a tratti:

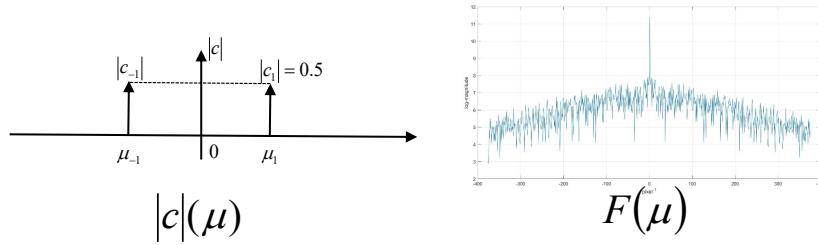


Figura 27: Esempio di spettro di ampiezza.

### 2.2.3 Proprietà della trasformata di Fourier

#### ☞ Linearità

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_1 F_1(\mu) + a_2 F_2(\mu)$$

#### ☞ Scalatura temporale

$$z(t) = f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(\mu) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\mu}{a}\right)$$

#### ☞ Dualità

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\mu) \\ F(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(-\mu) \end{aligned}$$

N.B. derivando la forma analitica per una trasformata, la sua antitrasformata ne produce un'altra con segno opposto.

#### ☞ Time shift

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t - t_0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi\mu(u+t_0)} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi\mu u} e^{-j2\pi\mu t_0} du \\ &= e^{-j2\pi\mu t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi\mu u} du \\ &= F(\mu) \underbrace{e^{-j2\pi\mu t_0}}_{\text{fase}} \end{aligned}$$

## 2.2.4 Trasformata di Fourier di una box

La trasformata di Fourier di una box (paragrafo 1.2.3) è la seguente:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\Pi\left(\frac{t}{w}\right) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

Il risultato corrisponde alla funzione sinc:

$$f(\mu) = Aw \cdot \text{sinc}(\mu w)$$

Dove la funzione sinc è uguale a:

$$\text{sinc} = \frac{\sin(\pi\mu w)}{\pi\mu w}$$

Per ripassare la funzione sinc, si rimanda al paragrafo 1.2.4. Tuttavia, si ricorda che la sua forma generale è del tipo:

$$\text{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{\pi m}$$

E risultata uguale a:

- $\text{sinc}(0) = 1$
- $\text{sinc}(m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

Prima di concludere, si ricorda che:

- ☞ All'aumentare della larghezza della box, la funzione sinc tenderà a stringersi;
- ☞ La box è **limita**, invece la sinc è **infinita** a destra e sinistra, anche se il termine al denominatore attenua il valore della funzione comportando un limite a 0.
- ☞ In sintesi, la TdF di una box è:

$$\Pi\left(\frac{t}{w}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} w \cdot \text{sinc}(\mu w)$$

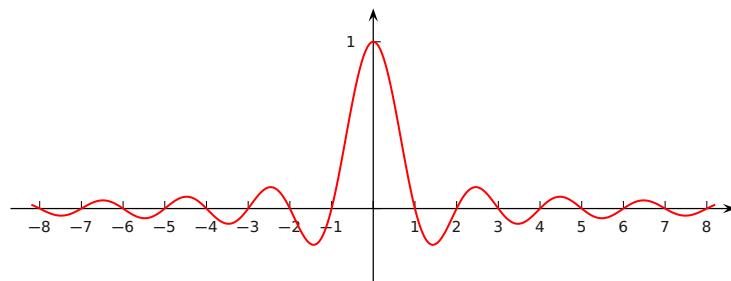


Figura 28: Grafico della funzione sinc.

### 2.2.5 Trasformata di Fourier di un sinc

La trasformata di Fourier di un segnale sinc (segnale rappresentato in figura 28) è la seguente:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(tw) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

Dato che la TdF di una box è:

$$\Pi\left(\frac{t}{w}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} w \cdot \text{sinc}(\mu w)$$

Al contrario, si ottiene la trasformata di Fourier di un sinc:

$$\text{sinc}(tw) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{w} \Pi\left(-\frac{\mu}{w}\right) = \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{w}\right)$$

### 2.2.6 Trasformata di Fourier di un impulso

La trasformata di Fourier di un impulso<sup>3</sup> è la seguente:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

Il risultato della trasformata di Fourier di un impulso è molto semplice grazie alle sue proprietà. Infatti, il risultato è uguale a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(0) e^{-j2\pi\mu 0} dt = 1$$

La proprietà che consente di ottenere il risultato uguale a 1 è la seguente:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

**N.B. In questo caso è rappresentabile solo lo spettro di ampiezza!**

Analogamente, con un impulso centrato in  $t_0$ , quindi non nell'origine:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt = e^{-j2\pi\mu t_0}$$

Il risultato è stato ottenuto grazie alla proprietà di setacciamento (definita a pagina 10). Tuttavia, in questo caso i valori non sono più reali ma complessi.

---

<sup>3</sup>Definizione di impulso al paragrafo 1.2.3.

### 2.2.7 Trasformata di Fourier di un treno di impulsi

Data la definizione di treno di impulsi (funzione definita nel paragrafo 1.2.8):

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si ottiene la sua relativa trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}(S_{\Delta T}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\Delta T}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

Tralasciando i vari calcoli numerici per arrivare al risultato, si può scrivere la trasformata di Fourier in maniera più semplice:

$$S_{\Delta T}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

### 2.2.8 Sintesi

Qui di seguito si lascia un riassunto rapido delle trasformate di Fourier continue dei segnali più importanti.

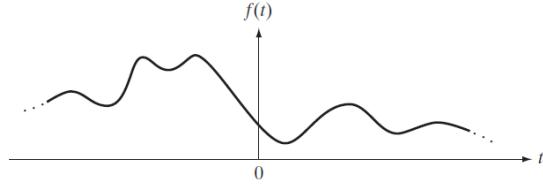
Segnale	Trasformata di Fourier	
Box:	$A\Pi\left(\frac{t}{w}\right)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $Aw \cdot \text{sinc}(\mu w)$
Sinc:	$\text{sinc}(tw)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\frac{1}{w} \cdot \Pi\left(-\frac{\mu}{w}\right) = \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{w}\right)$
Impulso:	$\delta(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\begin{cases} 1 & \text{se valori reali} \\ e^{-j2\pi\mu t_0} & \text{se valori complessi} \end{cases}$
Treno di impulsi:	$S_{\Delta T}(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$

Tabella 1: Trasformate di Fourier continue.

## 2.3 Trasformata di Fourier a tempo discreto

### 2.3.1 Campionamento

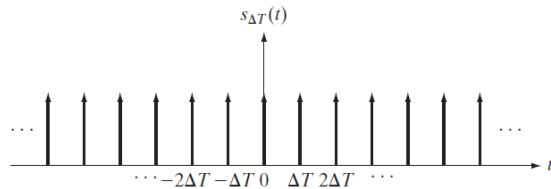
Sia  $f(t)$  un segnale reale continuo definito  $f : ]-\infty, +\infty[ \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (attenzione al dominio non limitato), anche non periodico:



Questo tipo di segnale, per essere elaborato al computer deve essere **campionato** ad intervalli discreti. Per farlo, si prenda in considerazione il treno di impulsi:

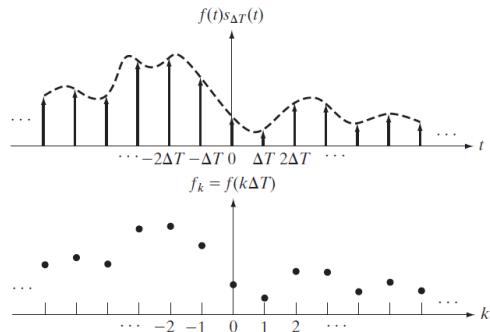
$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

Con periodo  $\Delta T$ , ossia con **frequenza di campionamento** pari a:  $\mu_S = \frac{1}{\Delta T}$



Si assume che il treno di impulsi sia un **segnale discreto**. Matematicamente parlando, **campionare un segnale** significa moltiplicarlo per un treno di impulsi:

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot S_{\Delta T}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



### 2.3.2 Trasformata di Fourier a tempo discreto

Sia  $F(\mu)$  la trasformata di Fourier di un segnale  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si considera  $\tilde{f}(t)$  e si calcola la trasformata di Fourier  $\tilde{F}(\mu)$  (entrambi sono a tempo discreto). Grazie alla convoluzione si ottiene:

$$\tilde{F}(\mu) = \mathcal{F}\left\{\tilde{f}(t)\right\} = F(\mu) * S_{\Delta T}(\mu)$$

Si ricorda che:

$$S_{\Delta T}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

E risolvendo la convoluzione, si ottiene che la **trasformata di Fourier a tempo discreto** corrisponde a:

$$F(\mu) * S_{\Delta T}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cdot S_{\Delta T}(\mu - \tau) d\tau = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

Analizzando la formula si evidenziano alcuni termini:

- $F(\mu)$  è la trasformata di Fourier della funzione originale  $f(t)$ ;
- $F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$  è la trasformata di Fourier della funzione originale  $f(t)$  shiftato a destra di una quantità pari a  $\frac{n}{\Delta T}$ ;
- $\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$  sono infinite copie dello spettro  $F(\mu)$ , ripetute ovviamente ogni  $\frac{1}{\Delta T}$ .

Inoltre, è un **segnale periodico** (nelle frequenze) di periodo  $\frac{1}{\Delta T}$ , ovvero si ripete ogni  $\frac{1}{\Delta T}$  Hz.

La sua scalatura nell'ampiezza è pari a  $\frac{1}{\Delta T}$  e rappresenta la T.d.F. a tempo discreto.

### 2.3.3 Teorema del campionamento

Un segna~~le reale continuo  $f(t)$~~ , limitato in banda, può essere ricostruito senza errori completamente dai suoi campioni se essi sono acquisiti con un tempo di campionamento  $\Delta T$  tale per cui:

$$\frac{1}{\Delta T} = \mu_S \geq 2\mu_{\max}$$

Ovvero se nel tempo si adotta una frequenza di campionamento  $\frac{1}{\Delta T}$  almeno doppia rispetto alla frequenza massima del segnale  $\mu_{\max}$ .

In altre parole, il teorema del campionamento afferma che tutte le proprietà di un segnale possono essere espresse usando dei campioni.

**Attenzione!** L'espressione  $\frac{1}{\Delta T}$  viene chiamata *frequenza di Nyquist* e per frequenze minori si crea aliasing, fenomeno che impedisce la ricostruzione senza errori.

### 2.3.4 Considerazioni

Dal punto di vista teorico la trasformata di Fourier a tempo discreto consente di ricostruire il segnale. Tuttavia, è impossibile implementarla in un computer poiché tende, come limiti, all'infinito e ci vorrebbe un numero infinito di campioni e di segnali di tipo sinc.

## 2.4 Trasformata di Fourier discreta

La trasformata di Fourier di un segnale reale continuo  $f(t)$  di dominio illimitato e non periodico, campionato nel tempo con periodo di campionamento  $\Delta T$ , è una funzione continua, periodica (di periodo  $\frac{1}{\Delta T}$ ) anch'essa di dominio illimitato:

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \xrightarrow{\text{F}} \tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

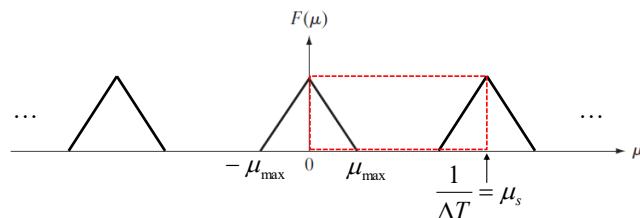
Il **problema** di questa formulazione è data l'espressione analitica dello spettro, la quale suppone che si è a **conoscenza della T.d.F. teorica  $F$  del segnale di partenza**. Questo, spesso, è molto difficile.

Si ricava dunque una *forma più semplice* da manipolare. Essa consente di **costruire una rappresentazione spettrale a partire dai campioni della funzione originale  $f(t)$** :

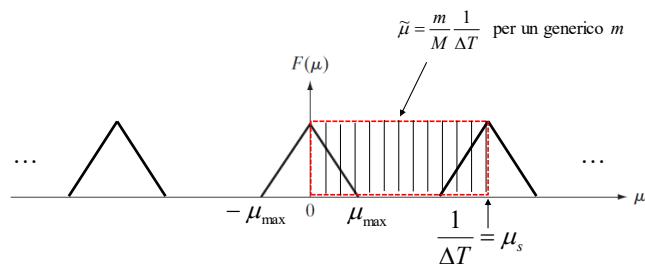
$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n \Delta T}$$

Al contrario, la prima formulazione era più chiara per comprendere il fatto che la T.d.F. di una funzione campionata genera delle repliche dello spettro originale  $F(\mu)$ .

L'equazione alternativa deve essere modificata, eseguendo un campionamento per il dominio spettrale, per poterla implementare su un computer. Per farlo, si prende in considerazione solo l'intervallo frequenziale da 0 a  $\frac{1}{\Delta T} = \mu_s$ .



Inoltre, si prendono in considerazione  $M$  campioni tramite l'operazione di campionamento.



In cui:

$$\tilde{\mu} = \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{\Delta T} \quad \text{con } m = 0, \dots, M - 1 \text{ e dove } \frac{m}{M} \in \left[0, 1 - \frac{1}{M}\right]$$

La  $m$  indica il **range di variazione** degli indici dei campioni frequenziali. Calcolando la trasformata di Fourier a tempo discreto sui campioni  $M$ , si giunge alla **forma finale della trasformata di Fourier discreta**:

$$\tilde{F}(\tilde{\mu}) = \tilde{F}\left(\frac{m}{M} \cdot \frac{1}{\Delta T}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi \frac{m}{M} n} \quad \text{con } m = 0, \dots, M - 1$$

La **trasformata di Fourier discreta inversa**, ovvero l'antitrasformata:

$$\tilde{f}(n\Delta T) = f(n\Delta T) = f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi \frac{m}{M} n}$$

## 2.5 Riassunto Trasformate

Qui di seguito vengono rappresentate le trasformate più importanti.

Funzione	Serie di Fourier	
Funzione di sintesi:	$f(t)$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{e^{j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}}$ $n \in \mathbb{Z}$
Funzione di analisi:	$c_n \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \underbrace{e^{-j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} dt$ $n \in \mathbb{Z}$
Segnale	Trasformata di Fourier continua	
Box:	$A\Pi\left(\frac{t}{w}\right)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}} Aw \cdot \text{sinc}(\mu w)$
Sinc:	$\text{sinc}(tw)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(-\frac{\mu}{w}\right) = \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{w}\right)$
Impulso:	$\delta(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{cases} 1 & \text{se valori reali} \\ e^{-j2\pi\mu t_0} & \text{se valori complessi} \end{cases}$
Treno di impulsi:	$S_{\Delta T}(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$
Funzione	Trasformata di Fourier a tempo discreto	
$F(\mu) * S_{\Delta T}(\mu)$	$\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$	
Funzione	Trasformata di Fourier discreta	
$\tilde{F}(\tilde{\mu})$	$\tilde{F}\left(\frac{m}{M} \cdot \frac{1}{\Delta T}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi \frac{m}{M} n}$	
	$m = 0, \dots, M-1$	
Funzione	Trasformata di Fourier discreta inversa	
$\tilde{f}(n\Delta T) = f(n\Delta T) = f_n$	$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi \frac{m}{M} n}$	

Tabella 2: Trasformate di Fourier.

## **2.6 Domanda da esame**

All'esame è possibile che sia richiesto come domanda: "quali sono le trasformate di Fourier studiate durante il corso?"

La risposta, anche se banale, è la seguente: le trasformate di Fourier studiate durante il corso sono 4:

- I. Serie di Fourier (paragrafo 2.1)
- II. Trasformata di Fourier continua (paragrafo 2.2)
- III. Trasformata di Fourier a tempo discreto (paragrafo 2.3)
- IV. Trasformata di Fourier discreta (paragrafo 2.4)

### 3 Elaborazione di immagini - Dominio spaziale

L'**elaborazione delle immagini** consiste nel prendere come input un'immagine (segnalet) e restituirne un'altra (sempre segnalet) come output.

Il **rinforzo (enhancement) di immagini** è un tipo di elaborazione delle immagini. Il suo **obbiettivo** è elaborare un'immagine in modo che il risultato sia più adatto alle esigenze soggettive dell'utente. La definizione è *problem-oriented* poiché, per esempio, per visualizzare lo spettro di ampiezza di un'immagine, è necessario eseguire un'operazione di rinforzo (*log-transformation*); oppure, per migliorare la visibilità dei dettagli di un'immagine, si effettua un'altra operazione di rinforzo (*sharpening*).

La **qualità di un'immagine** è la combinazione pesata di tutti gli attributi significativi di un'immagine. Infatti, *non* esiste una ricetta univoca per determinare quando un'immagine sia di qualità poiché è un'opinione soggettiva. Tuttavia, è più facile dire quando un'immagine *non* è di qualità. In genere, un'**immagine non è di qualità** quando non viene interpretata facilmente da un operatore umano.

A differenza del rinforzo, il **restauro (restoration)** è un processo di ricostruzione dell'immagine a partire da un modello di degradazione noto.

### 3.1 Strumento per l'elaborazione: istogramma

I pixel di un'immagine sono una “popolazione” sulla quale è possibile calcolare tutte le quantità statistiche descrittive che vengono usate normalmente come media, mediana, varianza, deviazione standard, quartili, percentili, etc. Uno **strumento fondamentale** per l'elaborazione delle immagini è l'**istogramma**, il quale può essere visto come una funzione continua o discreta.

Infatti, per ogni livello di grigio (in un'immagine solo a livelli di grigi) vengono riportati il numero di pixel. Per un'immagine  $I [M, N]$  si identifica con  $M, N$  il **numero di pixel righe per colonne** e con la funzione  $H(r)$  il **numero di pixel di valore  $r$** , quest'ultimo è definito nell'intervallo  $0 \leq r \leq L - 1$  con  $r, L \in \mathbb{N}$  dove  $L$  indica i livelli di grigio. Inoltre:

$$\sum_{r=0}^{L-1} H(r) = M \cdot N$$

Grazie all'istogramma, è possibile comprendere immediatamente le caratteristiche dell'immagine (come in figura).



Figura 29: Esempio di istogramma.

Un istogramma può essere anche visto come una distribuzione di probabilità:

$$p_h(r) = \frac{H(r)}{M \cdot N} \quad \sum_r p_h(r) = 1$$

Uno **svantaggio** di questo strumento è che immagini diverse potrebbero avere istogrammi simili, questo perché l'istogramma non tiene conto della distribuzione spaziale dei pixel. Dunque, **utilizzando solo questo metodo è impossibile ricostruire un'immagine**.

Al contrario, un **vantaggio** dell'istogramma è la possibilità di identificare facilmente il **contrasto**: rapporto o differenza tra il valore più alto (punto più luminoso) e il valore più basso (punto più scuro) della luminosità (che corrisponde al livello di grigio per le immagini a livello di grigio).

Un'immagine viene definita:

- Valori più alti sulla destra:
  - **chiara**, caratteristica dell'immagine;

- **sovraesposta**, caratteristica di come è stata acquisita l'immagine.
- Valori più alti sulla sinistra:
  - **scura**, caratteristica dell'immagine;
  - **sottoesposta**, caratteristica di come è stata acquisita l'immagine.

### 3.2 Domini

L'elaborazione delle immagini può avvenire nel **dominio spaziale** o nel **dominio frequenziale** (dopo aver applicato la T.d.F. discreta 2D). Nel **dominio spaziale**, l'elaborazione delle immagine può essere espressa come:

$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

In cui:

- $f$  è l'immagine di ingresso (input) da elaborare;
- $g$  è l'immagine d'uscita (output) elaborata;
- $T$  è un operatore su  $f$  definito in un intorno di  $(x, y)$ .

L'**operatore** definito in un intorno di  $(x, y)$  può essere di tre tipi:

- **Puntuale:**  $[f(x, y)] = f(x, y)$ , l'intorno coincide con il pixel stesso;
- **Locale:**  $[f(x, y)]$  rappresenta una regione, per esempio quadrata, attorno al pixel di locazione  $(x, y)$ ;
- **Globale:**  $[f(x, y)]$  rappresenta l'intera immagine  $f$ .

### 3.3 Operazioni puntuale

Si dice **operatore puntuale**, un operatore che ha preso in input il valore di un pixel e ne restituisce uno cambiato, il quale dipende esclusivamente dal valore del pixel in ingresso.

L'**obbiettivo** è quello di variare il contrasto. Infatti, eseguendo questa operazione, si evidenziano le differenze strutturali dell'oggetto rappresentato. Per farlo, basta cambiare il valore di un pixel per renderlo più scuro o più chiaro.

Un operatore puntuale può essere rappresentato tramite una **funzione** che prende in input un valore  $r$  e lo modifica in un valore  $s = T(r)$  con  $s, r$  appartenenti allo stesso campo di definizione (esempio tra 0 e 255). Più in generale viene definita come:

$$T : [0, L - 1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, L - 1] \subset \mathbb{R}$$

Dato che un operatore puntuale dipende solo dal singolo valore del pixel, esso è dunque descritto da una tabella di questo tipo:

r	0	1	2	3	4	5	6	...
s	$T(0)$	$T(1)$	$T(2)$	$T(3)$	$T(4)$	$T(5)$	$T(6)$	...

### 3.3.1 Identità

È l'operazione più semplice e non fa nulla:

$$s = r$$

### 3.3.2 Negativo

Rende l'immagine più scura:

$$s = L - 1 - r$$

Nel caso dei livelli di grigio:

$$s = 255 - r$$

Viene **utilizzata** quando si hanno dettagli grigi immersi in zone nere che si vogliono evidenziare.

### 3.3.3 Clamping

Limita l'intensità ad un range definito  $[a, b]$ :

$$T(r) = \begin{cases} a & \text{se } r < a \\ r & \text{se } a \leq r \leq b \\ b & \text{se } r > b \end{cases}$$

Viene **utilizzata** nel caso in cui ci siano dei pixel di rumore molto chiari o molto scuri che *mascherano* l'immagine. Quindi, si pensi per esempio ad un'immagine con dei puntini bianchi al quale si applica il *clamping* per rimuoverli.

### 3.3.4 Stretching/Shrinking

Stira/comprime le intensità di un range  $[r_{\min}, r_{\max}]$  ad un range definito  $[a, b]$ :

$$s = \left[ \frac{r - r_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}} \right] [b - a] + a$$

In cui:

- $r_{\min}$  /  $r_{\max}$  sono il più piccolo/grande livello di grigio del range che si vuole trattare;
- $a, b$  sono il minimo e il massimo “stretchati”.

**Nota bene:** l'operazione è seguita da *rounging* (arrotondamento) nel caso di dominio di valori nei naturali (come in 0-255). Inoltre, lo **stretching** non risolve il problema del rumore impulsivo (puntini neri o bianchi), neanche se mascherato con il clamping.

### 3.3.5 Trasformazione logaritmica

La forma generale è:

$$s = c \cdot \log(1 + r) \quad r \in [0, L - 1]$$

Con  $c$  che rappresenta la **costante di normalizzazione**:

$$c = \frac{L - 1}{\log(L)}$$

La quale assicura la mappatura in  $[0, L - 1]$ . Inoltre, l'aggiunta di 1 permette di evitare il calcolo di quantità  $\in [0, 1]$  che generano valori minori di zero ed in particolare il calcolo di  $\log(0) = -\infty$ .

Viene **utilizzata** quando si vuole mappare fasce strette di valori dell'immagine originale in fasce più ampie, aumentandone così il range del contrasto, rendendo inoltre l'interpretazione umana più informativa.

### 3.3.6 Trasformazione esponenziale

Al contrario della trasformazione logaritmica, la trasformazione esponenziale consente di aumentare il range di una fascia determinata di livelli di grigi chiari:

$$s = (e^r)^{\frac{1}{c}} - 1 \quad r \in [0, L - 1]$$

Con la **costante di normalizzazione**:

$$c = \frac{L - 1}{\log(L)}$$

### 3.3.7 Trasformazione di potenza

La trasformazione di potenza può essere espressa come:

$$s = cr^\gamma \quad c, \gamma > 0 \in \mathbb{R}$$

La costante  $c$  è scelta **in dipendenza da**  $\gamma$  in modo da normalizzare i valori di  $s$  nell'intervallo  $[0, 255]$ .

- $\gamma < 1$ , la trasformazione ha effetti analoghi alla trasformazione logaritmica (3.3.5), cioè espansione della dinamica per bassi valori di  $r$ , mentre compressione della dinamica per alti valori di  $r$ ;
- $\gamma > 1$ , la trasformazione ha effetti opposti ai valori negativi di gamma.

Nella pratica, il termine di normalizzazione  $c$  è complicato da definire analiticamente, quindi si preferiscono due versioni di  $s$ :

- **Non normalizzata:**  $\tilde{s} = r^\gamma$ ;
- **Normalizzata**  $s = cr^\gamma$

Per passare dalla versione **non normalizzata** alla **versione normalizzata** si esegue lo *stretching*:

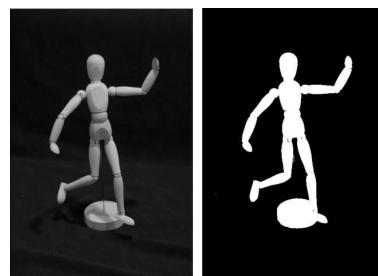
$$s = \left[ \frac{\tilde{s} - \tilde{s}_{\min}}{\tilde{s}_{\max} - \tilde{s}_{\min}} - \tilde{s}_{\min} \right] [\max - \min]$$

Dove  $\tilde{s}_{\min/\max}$  sono il più piccolo/grande livello di grigio e  $\max$  e  $\min$  sono il massimo e il minimo livello di grigio possibile (255, 0).

### 3.3.8 Binarizzazione

Produce un'immagine che ha solo due livelli: nero e bianco. Si **ottiene** scegliendo una soglia  $T$ , si imposta a colore nero tutti i pixel il cui valore è minore a  $T$  e si imposta a colore bianco tutti gli altri.

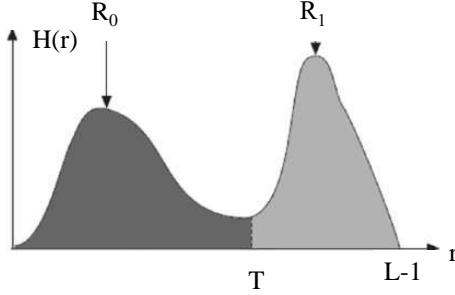
Si **utilizza** la binarizzazione per discriminare un oggetto dalla scena.



Soltanamente il suo utilizzo è prevalente nell'ambito delle immagini biomedicali e di videosorveglianza. La difficoltà maggiore di questa tecnica è il saper scegliere la soglia  $T$  più ragionevole.

### 3.3.9 Binarizzazione attraverso il metodo di Otsu

Questo metodo assume che ci siano due regioni da scegliere, come nella seguente figura:



Se l'immagine ha un **istogramma bimodale** la binarizzazione è efficace, altrimenti no. Le due regioni sono definite come:

$$\begin{aligned} p_{0 \rightarrow T}(r) &= \frac{H(r)}{\sum_{r=0}^T H(r)} \\ \sigma_{0 \rightarrow T}^2 &= \sum_{r=0}^T p_{0 \rightarrow T}(r) (r - \mu_{0 \rightarrow T})^2 \\ \mu_{0 \rightarrow T} &= \sum_{r=0}^T r \cdot p_{0 \rightarrow T}(r) \end{aligned}$$

La formula da minimizzare su  $T$  è la seguente:

$$\sigma_w^2(T) = W_0(T) \sigma_0^2(T) + W_1(T) \sigma_1^2(T)$$

Dove si considera la versione probabilistica dell'istogramma, ovvero la sua versione normalizzata, e si ha:

$$\begin{aligned} W_0(T) &= \sum_{r=0}^{T-1} p(r) \\ W_1(T) &= \sum_{r=T}^{L-1} p(r) \\ p(r) &= \frac{1}{M \cdot N} \sum_{r=0}^{L-1} H(r) \end{aligned}$$

Dove  $W_0, W_1$  sono le probabilità che le due classi siano separate da  $T$  e  $\sigma_0^2$  e  $\sigma_1^2$  sono le varianze sui valori di istogramma assunti dalle due classi. **L'approccio "cicla" su tutti i possibili valori di  $T$  e restituisce:**

$$T_{best} = \arg_T \min (\sigma_w^2(T))$$

### 3.3.10 Equalizzazione

Un’immagine si dice **equalizzata** quando il contributo di ogni differente tonalità di grigio è simile. L’istogramma tende ad essere uniforme o appiattito.

L’**obbiettivo** è vedere l’istogramma come una distribuzione e di renderla il più simile a quella uniforme. Una **distribuzione uniforme** ha un’**entropia massima**<sup>4</sup>. Nelle immagini, ogni valore della distribuzione è un valore di grigio, per cui ogni valore di grigio appartiene all’entropia massima.

Si **utilizza** questo operatore poiché un istogramma piatto assicura a livello percettivo una risposta del cervello migliore (in termini di numero di dettagli che si riesce a riconoscere), per cui l’immagine diventa più “informativa” da osservare.

Se  $r_k$  è il  $k$ -esimo livello di grigio  $k = 0, \dots, L - 1$  e  $H(r_k)$  è il conteggio dato dall’istogramma dell’immagine di dimensione  $M \times N$ , allora si può definire:

$$p_r(r_k) = \frac{H(r_k)}{M \cdot N}$$

L’**equalizzazione dell’istogramma** si basa sulla seguente funzione  $T$ , con  $s_k$  che rappresenta il  $k$ -esimo valore di grigio in cui viene “mappato”  $r_k$ :

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \frac{\sum_{j=0}^k H(r_j)}{\frac{M \cdot N}{(L - 1)}}$$

#### Algoritmo

- I. Calcolare le  $L$  somme cumulative  $\sum_{j=0}^k p_r(r_j)$  dei valori dell’istogramma visto come distribuzione con  $k = 0, \dots, L - 1$ ;
- II. Moltiplicare i valori del passo precedente per il massimo di livelli di grigio  $L - 1$ ;
- III. Normalizzazione dei valori calcolati al primo passo, dividendo per il numero totale di pixel  $M \cdot N$  e arrotondamento;
- IV. Applicare il mapping  $T$  ottenuto.

---

<sup>4</sup>Secondo l’entropia, un sistema isolato si trasforma ed evolve nel tempo fino a raggiungere uno stato di equilibrio finale macroscopico in cui le differenze locali sono minime.

### Esempio

Sia data un'immagine con  $L = 8, 64 \times 64$  pixel ( $M \cdot N = 4096$ ), con la seguente distribuzione d'intensità:

$r_k$	$H(r_k)$	$p_r(r_k) = \frac{H(r_k)}{M \cdot N}$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

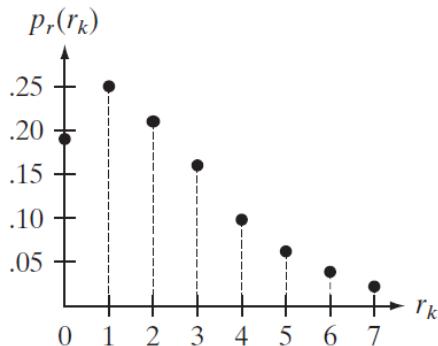


Figura 30: Rappresentazione della distribuzione di intensità.

Si applica la formula di equalizzazione:

$$\begin{aligned}
 s_0 &= T(r_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_r(r_j) = 7p_r(r_0) = 1.33 \\
 s_1 &= T(r_1) = 7 \sum_{j=0}^1 p_r(r_j) = 7p_r(r_0) + 7p_r(r_1) = 3.08
 \end{aligned}$$

Analogamente anche per gli altri valori si applica la formula e si trovano i seguenti valori:

$$\begin{aligned}s_2 &= 4.55 \\ s_3 &= 5.67 \\ s_4 &= 6.23 \\ s_5 &= 6.65 \\ s_6 &= 6.86 \\ s_7 &= 7.00\end{aligned}$$

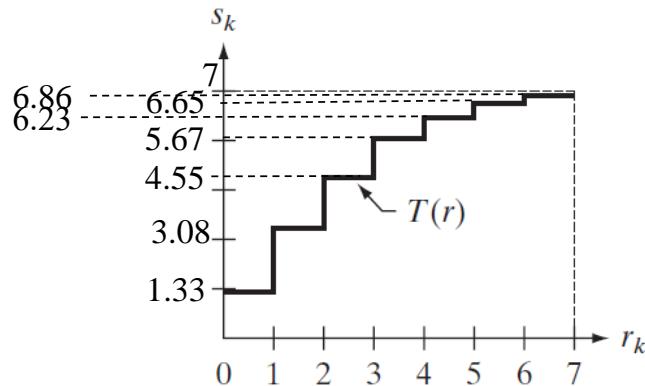


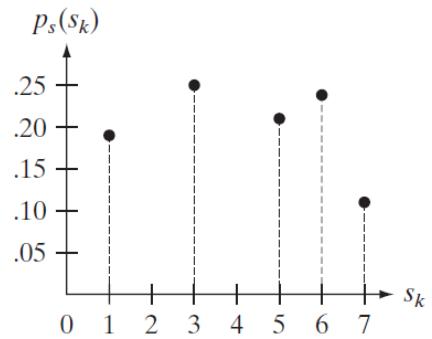
Figura 31: LUT (*Lookup Table*)

**LUT** (*Lookup Table*) è un termine utilizzato per descrivere una predeterminata lista di numeri che offre una “scorciatoia” per una specifica computazione. Nel contesto dei colori, una LUT trasforma i colori, ricevuti come input (camera), in un output desiderato (final footage).

L’immagine è quantizzata, quindi si effettua l’arrotondamento dei valori ottenendo l’intero più vicino:

$$\begin{aligned}s_0 &= 1.33 \longrightarrow 1 \\ s_1 &= 3.08 \longrightarrow 3 \\ s_2 &= 4.55 \longrightarrow 5 \\ s_3 &= 5.67 \longrightarrow 6 \\ s_4 &= 6.23 \longrightarrow 6 \\ s_5 &= 6.65 \longrightarrow 7 \\ s_6 &= 6.86 \longrightarrow 7 \\ s_7 &= 7.00 \longrightarrow 7\end{aligned}$$

Dopo l'arrotondamento, si ottiene una nuova immagine e il suo relativo istogramma.



### 3.4 Operazioni locali

Un'**operazione locale** restituisce un pixel che dipende da un limitato intorno del corrispondente punto in input. Tali operazioni vengono **utilizzati** per migliorare la qualità delle immagini o per estrarre delle informazioni dall'immagine.

Le operazioni locali sono come dei filtri spaziali dell'immagine. Il **filtraggio spaziale** è un'elaborazione  $T$  dell'immagine  $f$  dove un pixel di locazione  $(n, m)$ , di intensità  $f(n, m)$ , viene cambiato in  $g(n, m)$  da una funzione dei pixel in un intorno di  $(n, m)$ , ossia:

$$g(n, m) = T([f(n, m)])$$

Dove le parentesi quadrate indicano che viene preso in considerazione un intorno di  $n, m$ . Ovviamente, il risultato dell'operazione, se applicato a tutti i pixel dell'immagine  $f$ , è una nuova immagine  $g$ .

Gli intorni presi maggiormente in considerazione sono di grandezza  $K \times K$ , con  $K$  dispari (per fare in modo di considerare uniformemente i pixel attorno al punto  $(n, m)$  di applicazione), di solito  $3 \times 3, 5 \times 5, 7 \times 7$ . I pixel al di fuori dell'intorno non prendono parte alla funzione.

#### Pseudocodice

- **Input:**

- Immagine  $f$  definita con un suo valore di pixel generico  $f(n, m) \in [0 \dots L - 1] \subset \mathbb{N}$  con  $(n, m) \in [1 \dots N] \times [1 \dots M] \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ;
- Intorno di valori di pixel  $[f(n, m)]$  ossia  $f(n - u, m - v)$  definita come:

$$(u, v) \in \left[ -\frac{K-1}{2} \dots \frac{K-1}{2} \right] \times \left[ -\frac{K-1}{2} \dots \frac{K-1}{2} \right] \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad K \in \{3, 5, 7, \dots\}$$

- **Output:**

- Nuova immagine  $g(n, m) \in \mathbb{R}$  che attraverso operazioni puntuali può essere riportata in  $g(n, m) \in [0 \dots L - 1] \subset \mathbb{N}$

- **Procedimento:**

```
for n = 1 ... N
    for m = 1 ... M
        g(n, m) = T([f(n, m)])
```

### 3.4.1 Filtraggi spaziali: lineari e non lineari

Le due principali categorie di operazioni locali sono lineari e non lineari:

- **Filtraggio lineare** se  $T$  è una combinazione lineare dei valori di pixel nel vicinato. Quindi, la convoluzione di un'immagine con un kernel è una somma di fattori ognuno dei quali è una moltiplicazione di un valore dell'immagine per un coefficiente del filtro:

$$g(n, m) = T([f(n, m)]) = h * f(n, m) = \sum_{u=-k}^{+k} \sum_{v=-k}^{+k} h(u, v) f(n - u, m - v)$$

$$k = \frac{K - 1}{2}$$

Un esempio di operazione lineare è la convoluzione;

- **Filtraggio non lineare** se  $T$  contiene operazioni non lineari sulle variabili indipendenti. Un esempio di operazioni non lineari sono la mediana dei pixel nell'intorno e il valore massimo dei pixel nel vicinato.

I filtraggi lineari **non** presentano un **problema ai bordi** nel momento in cui l'intorno è definito all'interno dell'immagine (cioè non cade fuori dall'immagine). Alcuni filtri lineari:

- **Cropping** è un filtro dove solo l'intorno cade all'interno dell'immagine, quindi il filtro viene applicato ad un'area ristretta e non a tutta l'immagine. Un esempio:

$$\text{Input} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 1 \\ 9 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Output} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & 30 & 45 & 30 & * \\ * & 46 & 27 & 37 & * \\ * & 34 & 41 & 28 & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Le aree con un \* non verranno calcolate;

- **Zero Padding** utilizzato per inserire degli zero che creano degli artefatti così da consentire il filtraggio. Un esempio:

$$\text{Input} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Output} = \begin{bmatrix} 11 & 19 & 17 & 22 & 11 \\ 25 & 30 & 45 & 30 & 31 \\ 25 & 46 & 27 & 37 & 19 \\ 35 & 34 & 41 & 28 & 29 \\ 16 & 27 & 12 & 18 & 10 \end{bmatrix}$$

Le aree in grigio non vengono calcolate.

- **Replicazione** utilizzata per creare artefatti, infatti l'immagine risultante non è realistica. Un esempio:

$$\text{Input} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 7 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Output} = \begin{bmatrix} 25 & 27 & 29 & 31 & 33 \\ 34 & 30 & 45 & 30 & 39 \\ 51 & 46 & 27 & 37 & 32 \\ 54 & 34 & 41 & 28 & 35 \\ 48 & 32 & 24 & 34 & 26 \end{bmatrix}$$

Le aree in grigio non vengono calcolate.

### 3.5 Rumore nelle immagini

Il **rumore nelle immagini** è un disturbo dell'immagine introdotto dal sistema di acquisizione (e.g. fotocamera) o dal mezzo di propagazione che ne degrada la qualità (e.g. Whatsapp). Il rumore è tipicamente *modellato* come **additivo e casuale**:

$$\tilde{f}(n, m) = f(n, m) + \varepsilon(n, m)$$

Dove  $f$  è l'**immagine** priva di rumore e  $\varepsilon$  è un processo aleatorio che genera delle quantità che seguono una distribuzione particolare, indipendentemente da dove il processo è collocato nell'immagine, ovvero indipendentemente da  $n, m$ .

Esistono due **tipi di rumore**: gaussiano additivo bianco (rumore generato da una distribuzione gaussiana) e impulsivo (rumore generato da una distribuzione bernoulliana).

La **quantità di rumore** può essere stimata attraverso la misura di *SNR* (*signal to noise ratio*), di cui esistono varie versioni. La più utilizzata è la **mean square, SNR<sub>ms</sub>**:

$$SNR_{ms} = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \tilde{f}(n, m)^2}{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [\tilde{f}(n, m) - f(n, m)]^2}$$

Una forma alternativa della *SNR* può essere stimata grazie alla varianza  $\sigma_n^2$ , o alla deviazione standard  $\sigma_n$ :

$$SNR = \frac{\sigma_s}{\sigma_n}$$

Dove  $\sigma_s$  è la deviazione standard del segnale e  $\sigma_n$  è la deviazione standard dell'immagine affetta da rumore. Per questo motivo si utilizzano immagini ad alto contrasto, poiché  $\sigma_s$  risulta maggiore!

### 3.5.1 Rumore gaussiano additivo bianco

Il **rumore gaussiano additivo bianco** è un processo stocastico, ovvero una variabile aleatoria che emette valori casuali nel tempo  $\varepsilon(t)$  o nello spazio  $\varepsilon(n, m)$  con le seguenti caratteristiche:

- Si somma al segnale pulito;
- Non è periodico nel tempo o nello spazio;
- I valori vengono prodotti con la seguente probabilità:

$$P(\varepsilon(n, m) = l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(l - 0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

In cui 0 è uguale a  $\mu$ , ovvero indica la media del rumore. Inoltre, data una distribuzione gaussiana  $\mu, \sigma^2$  il 98% di valori  $l \in [\mu - 2.5\sigma, \mu + 2.5\sigma]$ .

- I valori seguono una distribuzione gaussiana di media pari a zero, ed una particolare varianza  $\sigma^2$  (o deviazione standard  $\sigma$ ) dove più è alta la varianza, più distanti da zero saranno i numeri prodotti e sommati all'immagine pulita, più rumorosa l'immagine finale.

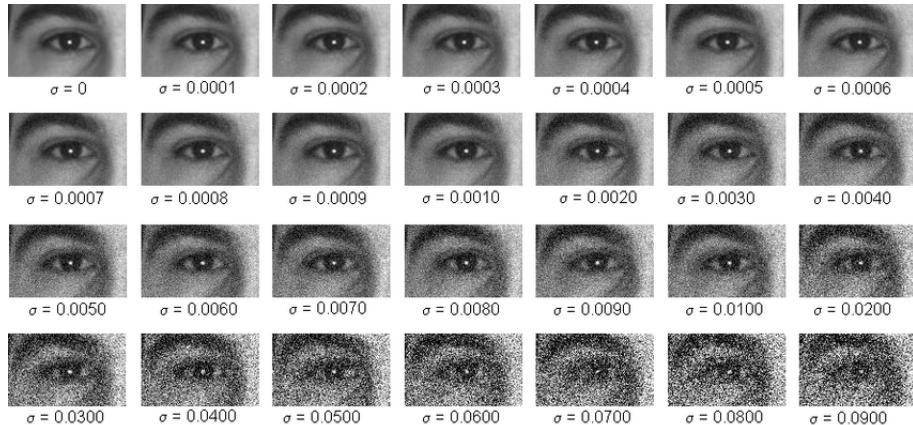


Figura 32: Esempio di rumore gaussiano a diversi valori di  $\sigma$ .

### 3.5.2 Rumore impulsivo

Il **rumore impulsivo** è causato da alterazione brusche nel segnale, viene parametrizzato da un fattore  $D$  (una percentuale) che è la densità con cui esso si localizza su pixel dell'immagine: maggiore il valore di intensità  $D$ , maggiore sarà il numero di pixel affetti.

Per esempio, il disturbo sale e pepe (*salt-and-pepper noise*) può essere utilizzato selezionando una percentuale  $D$  di pixel, ovvero  $D\%$ , in maniera uniforme nell'immagine e per ogni pixel si assegna un valore minimo o massimo con probabilità uniforme pari a  $p = 0.5$ .

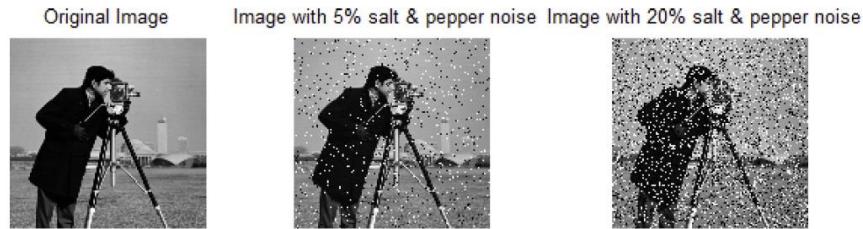


Figura 33: Esempio di applicazione dell'effetto *salt-and-pepper noise*.

### 3.6 Altre operazioni locali: tipologie di filtraggio

Esistono altre 3 tipologie principali di filtraggio:

- **Smoothing**, utilizzato per aumentare il *SNR* (pagina 67), ovvero per rimuovere il rumore.  
Per esempio, il filtro di media, mediano, gaussiano;
- **Sharpening**, utilizzato per aumentare il grado di dettaglio delle immagini.  
Per esempio, il filtro laplaciano;
- **Estrazione di caratteristiche**, utilizzato per estrarre rappresentazioni alternative alle immagini di partenza, che ne evidenzino aspetti particolari (edge, microstrutture, oggetti).  
Per esempio, il filtro prewitt, sobel, canny.

### 3.6.1 Smoothing - Filtro media

Il **filtro media** è utilizzato per **rimuovere il rumore gaussiano**. È un filtraggio  $T$  lineare, si attua attraverso la convoluzione dell'immagine con la maschera media la quale ha le seguenti caratteristiche:

- Dimensioni  $K \times K$  con  $K$  dispari;
- I suoi coefficienti sono tutti uguali e pari a  $\frac{1}{K^2}$ ;
- Il suo funzionamento è il seguente: dato un intorno di applicazione  $[(n, m)]$ , esso calcola la media dei valori vii compresi  $[\tilde{f}(n, m)]$ , e la sostituisce al posto del valore  $\tilde{f}(n, m)$ :

$$g(n, m) = T([\tilde{f}(n, m)]) = E([f(n, m)])$$

Dove  $E$  è l'operatore di media, perché  $T$  essenzialmente è l'operatore di media

Si osservi che la somma dei valori del kernel è 1:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Questo significa che il filtraggio in una locazione  $(x, y)$  è una **combinazione lineare convessa**. In altre parole, la somma dei livelli di grigio dell'immagine originale  $f$  e di quella processata  $g$  sono uguali (a meno di padding!).

**Maggiore è l'ampiezza  $K$**  della maschera, **più severo è l'effetto della media** sulla struttura dell'immagine.

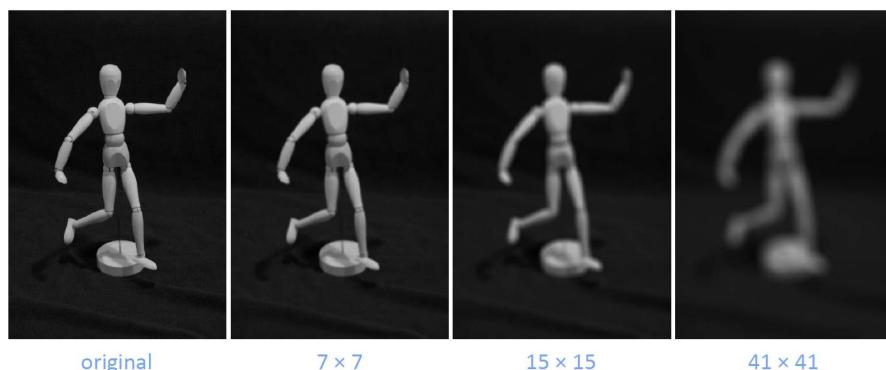


Figura 34: Esempio di filtro media all'aumentare di  $K$ , ovvero della grandezza.

### 3.6.2 Smoothing - Filtro mediano

Il **filtro mediano** è utilizzato per **rimuovere il rumore impulsivo**. È un filtraggio  $T$  non lineare, che si realizza attraverso un algoritmo. Data la matrice dell'immagine:

$$\begin{bmatrix} 240 & 245 & 0 \\ 247 & 0 & 244 \\ 251 & 246 & 250 \end{bmatrix}$$

1. Si calcola la media di tutti i valori della matrice:

$$\frac{240 + 245 + 0 + 247 + 0 + 244 + 251 + 246 + 250}{9} \approx 191$$

2. Si inseriscono in un vettore riga i valori in ordine crescente:

$$[0 \ 0 \ 240 \ 244 \ 245 \ 246 \ 247 \ 250 \ 251]$$

3. Si calcola la mediana del vettore:

$$9 \div 2 = 4.5 \longrightarrow [0 \ 0 \ 240 \ 244 \ \underline{245} \ 246 \ 247 \ 250 \ 251]$$



Figura 35: Esempio di applicazione di filtro mediano.

### 3.6.3 Smoothing - Filtro gaussiano

Il **filtro gaussiano** è quello di rendere più “lisica (*smooth*)” l’immagine, in modo simile al filtraggio di media, e come parametro l’operatore prende il valore  $\sigma$  che rappresenta la **forza** (maggiore è il valore, più è forte lo *smoothing*). La **differenza** sostanziale tra il filtraggio di media e il filtraggio gaussiano è che quest’ultimo è una media pesata, dove i pesi più vicini al centro della maschera hanno valori più alti. Così facendo si ha:

- **Vantaggio**

- Il filtraggio gaussiano effettua uno *smoothing* più lieve, **preservando i contorni meglio** di quanto faccia il filtraggio media. Quindi, la struttura viene preservata meglio.

- **Svantaggio**

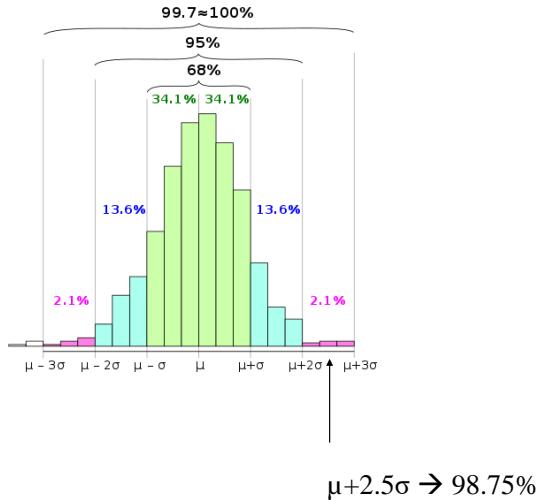
- Il rumore viene rimosso in maniera inferiore e questo provoca l'**impossibilità di applicare la formula di annullamento del rumore** visto per il filtro media.

Questo filtro può essere **implementato in maniera efficiente** in quanto la maschera è separabile, ovvero è possibile eseguirlo facendo un filtraggio prima su tutte le  $N$  righe dell’immagine come se fossero funzioni  $1D$ , e poi su tutte le  $M$  colonne:

$$\begin{aligned} I_G(i, j) &= \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} G(h, k) I(i + h, j + k) \\ &= \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{h^2 + k^2}{2\sigma^2}\right) I(i + h, j + k) \\ &= \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) I(i + h, j + k) \end{aligned}$$

Dove le variabili  $i, j, h, k, m$  sono indici per comprendere la **separabilità**. Quest’ultima consente di progettare manualmente un filtro gaussiano come segue nella prossima pagina.

Si definiscono i parametri  $\sigma$  e  $W$ . Quindi, si fissi  $\sigma$  e si trovi la dimensione della maschera  $W$  sapendo che  $W$  deve essere tale da contenere un'elevata percentuale di probabilità (uguale all'area della densità gaussiana, come in figura). In particolare, la statistica dice che con  $W = 5\sigma$  si copre il 98.75% dell'area della densità gaussiana. In altre parole, se si vuole  $\sigma = 1$  allora  $W = 5 \cdot 1 = 5$ ; se si vuole  $\sigma = 0.6$  allora  $W = 5 \cdot 0.6 = 3$ .



### 3.6.4 Domanda da esame

#### *Domanda*

Il livello di noise gaussiano presente in un'immagine, se esso noto (e.g.  $\sigma_1 = 0.01$ ) può guidare la scelta del parametro  $\sigma_2$  della maschera di filtro gaussiano?

#### *Risposta*

No, perché il rumore gaussiano lavora su tutti i valori di grigio, mentre il filtro gaussiano sulle coordinate e non c'è correlazione. Invece, il filtro media è quello ideale.

### 3.6.5 Filtraggi di sharpening

I **filtraggi di sharpening** servono per evidenziare i dettagli o come post processing dopo filtraggi di *smoothing* (questo perché i filtraggi di *smoothing* eliminano i dettagli). Per lo stesso motivo, i filtraggi di sharpening possono incrementare il rumore (un'immagine di rumore è un'immagine ad alta frequenza). Esistono due categorie: ***basic highpass spatial filtering*** e ***high boost filtering***.

I filtri di sharpening sono detti anche **filtri di derivata**, poiché calcolano numericamente nell'intorno in cui sono definiti la derivata locale (prima o seconda) dell'immagine.

#### Rispetto a x

##### Derivata asimmetrica

$$\begin{aligned} I_x(x, y) &= \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h, y) - I(x, y)}{h} \\ I_x[x, y] &= \frac{\partial I}{\partial x}[x, y] = I[x+1, y] - I[x, y] \end{aligned}$$

##### Derivata simmetrica

$$\begin{aligned} I_x(x, y) &= \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h, y) - I(x-h, y)}{2h} \\ I_x[x, y] &= \frac{\partial I}{\partial x}[x, y] = \frac{1}{2}(I[x+1, y] - I[x-1, y]) \end{aligned}$$

##### Filtro differenziale asimmetrico

$$\partial_x = [-1 \quad 1]$$

##### Filtro differenziale simmetrico

$$\partial_x = \frac{1}{2} [-1 \quad 0 \quad 1]$$

## Rispetto a $y$

### Derivata asimmetrica

$$I_y(x, y) = \frac{\partial I}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x, y + h) - I(x, y)}{h}$$

$$I_y[x, y] = \frac{\partial I}{\partial y}[x, y] = I[x, y + 1] - I[x, y]$$

### Derivata simmetrica

$$I_y(x, y) = \frac{\partial I}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x, y + h) - I(x, y - h)}{2h}$$

$$I_y[x, y] = \frac{\partial I}{\partial y}[x, y] = \frac{1}{2} (I[x, y + 1] - I[x, y - 1])$$

### Filtro differenziale asimmetrico

$$\partial_y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Filtro differenziale simmetrico

$$\partial_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Proprietà della derivata prima:

- Nulla in regioni di intensità costante;
- Non nulla in presenza di variazioni di intensità.

### Proprietà della derivata seconda:

- Nulla in regioni di intensità costante;
- Nulla in presenza di variazioni costanti di intensità (rampe);
- Non nulla in presenza di variazioni non costanti (all'inizio e alla fine di rampe).

### 3.6.6 Sharpening - Basic Highpass Spatial Filtering

Il filtraggio di sharpening chiamato **basic highpass spatial filtering** è un **filtraggio lineare** con il laplaciano, con la maschera  $H$  caratterizzata da coefficienti di un segno (e.g. positivo) vicino al centro e di segno opposto (e.g. negativo) nella periferia esterna.

Una tipica maschera di filtraggio, chiamata laplaciana:

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Altre maschere laplaciane:

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Alcune caratteristiche:

- La **somma dei coefficienti è zero**. Questo indica che quando il filtro passa su regioni con livelli di grigio quasi stabili, l'output della maschera è zero o molto piccolo;
- L'**uscita è alta** quando il valore centrale differisce dai valori periferici;
- L'**immagine di output non assomiglierà** a quella originale;
- L'**immagine di output mostra tutti i dettagli**;
- Sono inclusi alcuni **ridimensionamenti e/o clipping**, necessari per compensare eventuali livelli di grigio negativi dopo il filtraggio.

Il filtraggio lineare utilizza il *basic highpass spatial filtering* per **creare un'immagine realistica**, simile a quella di partenza, con gli edge amplificati:

$$g(n, m) = T([f(n, m)]) = f(n, m) + c \cdot h * f(n, m)$$

In cui  $h$  indica la **maschera laplaciana**,  $c$  è una **costante** pari a uno nel caso in cui il pixel centrale della maschera laplaciana sia positivo, altrimenti  $-1$ .

### 3.6.7 Sharpening - Filtro Laplaciano

La funzione **laplaciana** prende in ingresso un parametro  $\alpha$  il cui significato è legato all'importanza che si vuole dare agli edge verticali e orizzontali ( $\alpha = 0$ ), diagonali ( $\alpha = 1$ ), tutti gli edge ( $\alpha = 0.5$ ), attraverso questa formula:

$$h = \frac{1}{\alpha + 1} \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & -\alpha \\ \alpha - 1 & \alpha + 5 & \alpha - 1 \\ -\alpha & \alpha - 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

### 3.6.8 Sharpening - High Boost Filtering

L'immagine filtrata dallo *sharpening* si ottiene sottraendo l'immagine filtrata con *smoothing* dall'immagine originale:

**Immagine filtrata dallo sharpening** = Originale – Im. filtrata con smoothing

Se la costante  $A$  rappresenta un **fattore di amplificazione degli edge**, allora il filtro **high boost filtering** è definito come:

$$\text{High-boost} = A \cdot \text{Originale} + \text{Im. filt. dallo sharpening}$$

A differenza degli altri filtri, questo dà maggiore libertà al progettista. Infatti, il blur può avvenire attraverso una maschera di supporto arbitrariamente grande.