

# Indice

<b>1 Fondamenti</b>	<b>2</b>
1.1 Matematica preliminare . . . . .	2
1.1.1 Numeri complessi . . . . .	2
1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale . . . . .	3
1.1.3 Funzioni pari e dispari . . . . .	4
1.1.4 Segnali periodici . . . . .	5
1.2 Operazioni fondamentali . . . . .	6
1.2.1 Somma . . . . .	6
1.2.2 Shift (o traslazione) . . . . .	7
1.2.3 Funzione box $\Pi$ e impulso di Dirac . . . . .	8
1.2.4 Funzione sinc . . . . .	9
1.2.5 Funzione triangolo $\Lambda$ . . . . .	9
1.2.6 Funzione segno ( $sgn$ ) . . . . .	9
1.2.7 Funzione gradino . . . . .	9
1.2.8 Treno di impulsi . . . . .	10
1.2.9 Energia di un segnale . . . . .	10
1.2.10 Potenza media di un segnale . . . . .	11
1.3 Altre operazioni fondamentali . . . . .	12
1.3.1 Rescaling (o riscalatura) . . . . .	12
1.3.2 Cross-Correlazione . . . . .	13
1.3.3 Esercizi d'esame . . . . .	14

# 1 Fondamenti

## 1.1 Matematica preliminare

### 1.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso  $c$  appartiene all'insieme dei complessi  $\mathbb{C}$  e la sua forma è del tipo:

$$c = \Re + j\Im$$

con  $\Re, \Im$  variabili  $\in \mathbb{R}$  e  $j$  chiamata *unità immaginaria* rappresentata come  $j = \sqrt{-1}$ . Inoltre,  $\Re$  rappresenta la *parte reale* e  $\Im$  la *parte immaginaria*. Il coniugato di  $c$  è

$$\tilde{c} = \Re - j\Im$$

I numeri complessi, dal punto di vista geometrico, possono essere visti come punti su un piano (chiamato *piano complesso*) e descritti da coordinate  $(R, I)$ . Nel piano complesso, le ascisse ( $x$ ) sono rappresentate dalla parte reale, mentre le ordinate ( $y$ ) dalla parte immaginaria.

Spesso è utile rappresentare i numeri complessi in coordinate polari formate nel seguente modo (*modulo, angolo*). Questa forma viene denominata *forma polare* di un numero complesso:

$$c = \Re + j\Im = |c|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

dove:

$$|c| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \longrightarrow \text{chiamato } \textit{modulo} \text{ o } \textit{magnitudo}$$

invece, *theta* rappresenta:

$$\theta \cong \arctan \left( \frac{\Im}{\Re} \right) \longrightarrow \text{chiamato } \textit{angolo}, \textit{fase} \text{ o } \textit{argomento in radianti}$$

Grazie alla formula di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

è possibile riscrivere la forma polare di un numero complesso in maniera alternativa, ossia:

$$c = \Re + j\Im = |c| (\cos \theta + j \sin \theta) = |c| e^{j\theta}$$

La **somma** e la **moltiplicazione** di due numeri complessi diventa:

$$c_1 = R_1 + jI_1 \quad c_2 = R_2 + jI_2$$

$$\text{Somma: } c_1 + c_2 = (R_1 + R_2) + j(I_1 + I_2)$$

$$\text{Moltiplicazione con Eulero: } c_1 \cdot c_2 = (R_1 R_2 - I_1 I_2) + j(R_1 I_2 + I_1 R_2) \longrightarrow = |c_1||c_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

### 1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale

Dato  $t \in \mathbb{R}$ , una funzione  $f$  complessa di variabile reale è  $f : D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D_2 \subseteq \mathbb{C}$ . Viene introdotto questo concetto poiché il **fasore** è un eSEMPIO fondamentALE. Le **caratteristiche** di questa funzione:

- È una funzione complessa che modella la posizione di un punto che ruota attorno all'origine con raggio determinato  $|c|$  e velocità angolare costante  $\theta(t)$ .
- Se la funzione fosse nei numeri reali, sarebbe più dispendioso in termini di numero di funzioni da utilizzare.

L'**obiettivo** dei fasori è quello di *passare dal dominio del tempo* (o spazio) a *quello dell'analisi frequenziale*.

La particolarità è che nel tempo il fasore riesce a variare un numero complesso (in forma polare) mantenendo il modulo  $|c|$  fisso:

$$|c|e^{j\theta} \rightarrow |c|e^{j\theta(t)}$$

dove  $\theta(t)$  indica la **velocità angolare**. Quest'ultima può essere calcolata tramite:

$$\theta(t) \longrightarrow \frac{2\pi}{T_0}t + \phi$$

dove  $T_0$  indica il *tempo* impiegato per eseguire  $2\pi$  radianti.

Soltamente si utilizza il fasore con le seguenti supposizioni:

- Coordinate rappresentate con  $(R, I)$
- Impostata una distanza unitaria fissa dall'origine  $|c| = 1$
- Velocità angolare costante pari a  $2\pi/\text{sec.}$ , ossia  $\theta(t) = 2\pi t, T_0 = 1\text{sec.}$
- Con  $t = 0$  si ha  $\theta = 0$
- Viene mantenuto  $\phi = 0$

### 1.1.3 Funzioni pari e dispari

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **pari** se e solo se:

$$f(t) = f(-t)$$

Invece, una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **dispari** se e solo se:

$$f(t) = -f(-t)$$

#### 1.1.4 Segnali periodici

Un segnale  $f$  è **periodico** di periodo  $T$  o  $T$ -periodico se:

$$\exists T_0 \in R^+ : f(t + T_0) = f(t), \quad \forall t \in D_1$$

e  $T_0$  è il minor numero per cui la condizione di ripetizione si verifica.

Dato un periodo  $T_0$  con la lettera  $\mu_0$  si indica la **frequenza fondamentale**:

$$\mu_0 = \frac{1}{T_0}$$

Fissato  $T_0 > 0$  i **segnali trigonometrici** di minimo periodo  $T_0$  sono:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t)$$

dove  $\mu$  è una frequenza generale, mentre  $\mu_0 = \frac{1}{T_0}$  è la **frequenza fondamentale**. Invece, spesso la **velocità angolare** o **pulsazione** viene rappresentata come:

$$2\pi\mu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

Inoltre, fissato un  $\theta \in \mathbb{R}$  chiamato **fase** si osserva che anche le funzioni:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t + \theta) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t + \theta)$$

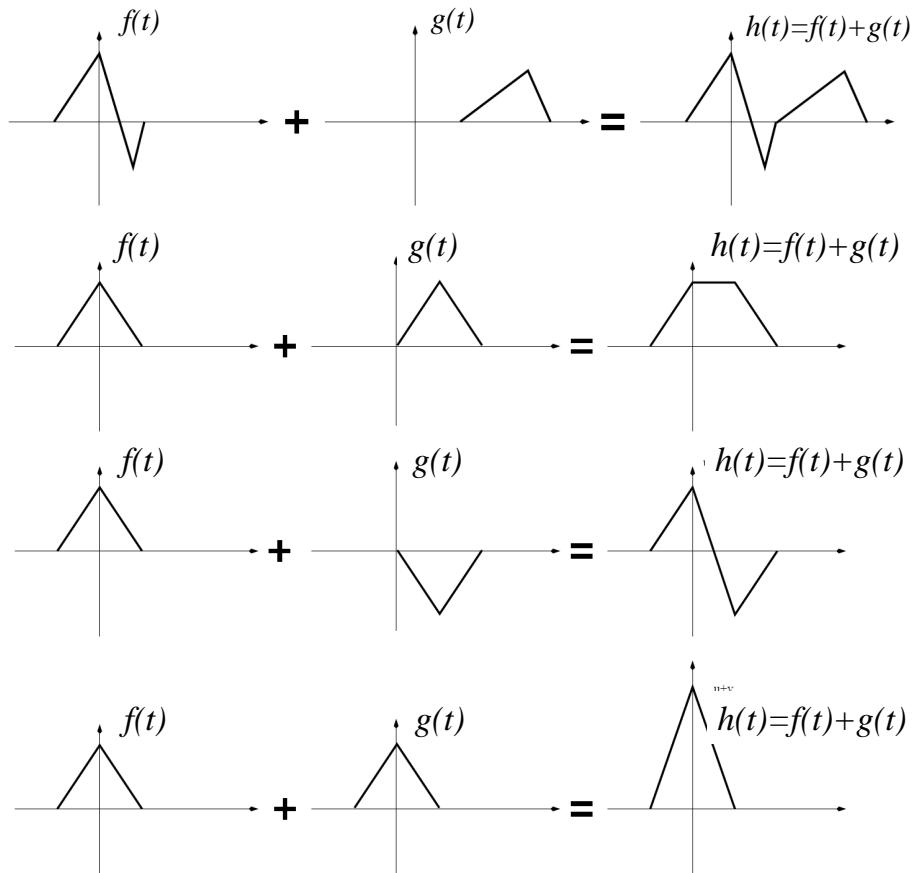
hanno il medesimo periodo  $T$ .

Infine, la fase  $\theta$  permette di eseguire operazione di *shift*.

## 1.2 Operazioni fondamentali

### 1.2.1 Somma

La *somma* di due segnali è facile quando essi non interferiscono, ovvero quando **non** sono contemporaneamente  $\neq 0$ . Alcuni esempi qui di seguito.



### 1.2.2 Shift (o traslazione)

Lo **shift** (o traslazione) è il cambio di posizione di un segnale. Può essere effettuato:

- **Traslazione a destra** con la funzione  $f(t - \tau)$
- **Traslazione a sinistra** con la funzione  $f(t + \tau)$

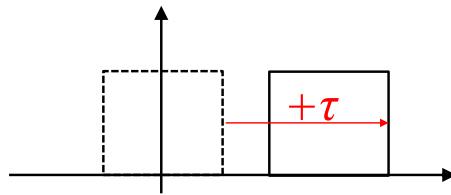


Figura 1: Shift a destra

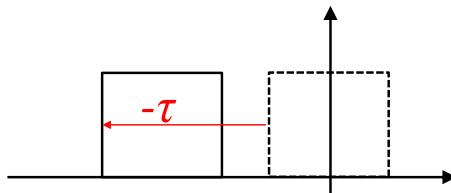


Figura 2: Shift a sinistra

### 1.2.3 Funzione box II e impulso di Dirac

La funzione ***box*** è definita nel seguente modo:

$$A\Pi\left(\frac{x}{b}\right) \quad x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

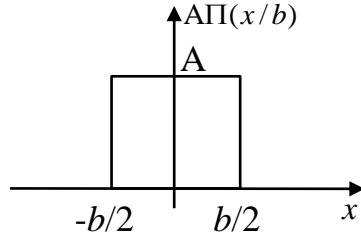


Figura 3: Box generica

La funzione  $\delta(x)$  è chiamata ***impulso unitario*** o ***impulso di Dirac*** perché è definita nel seguente modo:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Quindi è un impulso che tende all'infinito solamente quando la  $x$  è nell'origine, ma il suo integrale è uguale a 1. Alcune **proprietà** dell'impulso:

1.  $\delta(x - x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0$
2. Data una funzione generica  $f$  (**setacciamento**):  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dt = f(x_0)$
3.  $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
4.  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ fissato } a \in \mathbb{R} - \{0\}$

#### 1.2.4 Funzione sinc

La funzione **sinc** è definita nel seguente modo:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Ha due **caratteristiche** importanti: (1) l'intersezione con l'asse delle  $x$  avviene sempre nei numeri interi positivi e negativi (quindi 1 e -1, 2 e -2, ecc.); (2) il limite  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{sinc}(t) = 0$ .

Questa funzione è **importante per l'analisi nel dominio del tempo (o frequenza)**.

#### 1.2.5 Funzione triangolo $\Lambda$

La funzione **triangolo** è definita nel seguente modo:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è **importante per l'analisi spettrale e per le operazioni di convoluzione**.

#### 1.2.6 Funzione segno ( $\text{sgn}$ )

La funzione **segno** è definita nel seguente modo:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione ribalta segnali sopra o sotto l'asse delle  $x$ .

#### 1.2.7 Funzione gradino

La funzione **gradino** è definita nel seguente modo:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Questa funzione rappresenta un **segnale** che si attiva a partire dal tempo specificato e rimane attivo indefinitamente. Attenzione! Non si confonda questo segnale con il segno.

### 1.2.8 Treno di impulsi

Il **treno di impulsi**  $S_{\Delta T}(x)$  è la somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità  $\Delta T$ :

$$S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

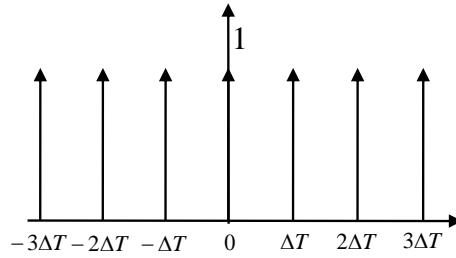


Figura 4: Treno di impulsi

### 1.2.9 Energia di un segnale

L'**energia di un segnale** è definita nel seguente modo:

$$E_f = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt & \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), \quad f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **ad energia finita** (o **di energia**) se l'integrale che rappresenta l'energia converge ed è diverso da 0. Quindi:

- ☞ **Condizione sufficiente** all'esistenza della sua trasformata di Fourier. Le funzioni trigonometriche non sono di energia ma hanno comunque la Trasformata di Fourier.
- ☞ **Condizione necessaria** per essere un segnale ad energia finita, all'infinito ( $+\infty$  e  $-\infty$ ) l'**ampiezza** va a zero.

Alcuni esempi:

- ★ **Segnali di energia.** Impulsi rettangolari, oscillazioni smorzate (sinc);
- ★ **Segnali non di energia.** Funzioni trigonometriche sin e cos.

L'**unità di misura** è il *joule*.

### 1.2.10 Potenza media di un segnale

La *potenza media di un segnale* è definita nel seguente modo:

$$P_f = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \quad \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), & f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **a potenza finita** (o **di potenza**) se l'integrale che rappresenta la potenza converge ed è diverso da 0. L'**unità di misura** è il *watt*.

Infine, un segnale ad energia finita ha la potenza che tende a zero (per cui un segnale non può appartenere ad entrambe le categorie). Invece, esistono segnali che non sono né di energia, né di potenza finita.

## 1.3 Altre operazioni fondamentali

### 1.3.1 Rescaling (o riscalatura)

La funzione di *rescaling* è definita nel seguente modo:

$$\forall f(t) : D_1 \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0$$

Simile allo *shift*, il *rescaling* ha una definizione generica e due varianti:

- **Definizione generica** con la funzione semplice  $f(t)$  (immagine 5).
- **Ritardo lineare del segnale di un fattore  $\omega$**  con la funzione  $f(\omega t)$ ,  $0 < \omega < 1$  (immagine 6).
- **Accelero lineare del segnale di un fattore  $\omega$**  con la funzione  $f(\omega t)$ ,  $\omega > 1$  (immagine 7).

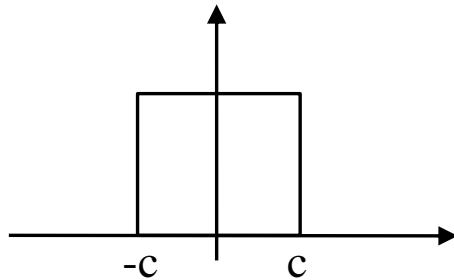


Figura 5: Definizione generica

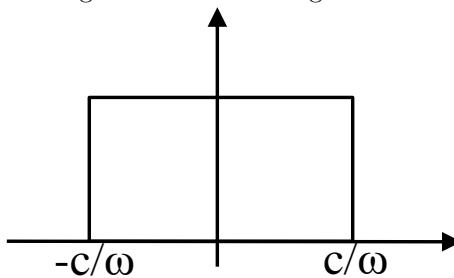


Figura 6: Ritardo lineare del segnale di un fattore  $\omega$

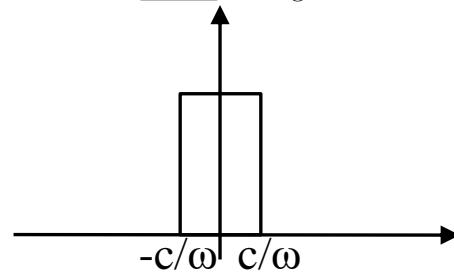


Figura 7: Accelero lineare del segnale di un fattore  $\omega$

### 1.3.2 Cross-Correlazione

Dati  $f_1(\tau), f_2(\tau)$  segnali continui,  $\tau \in \mathbb{R}$  il segnale di ***cross-correlazione*** viene definito come:

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

In cui  $\tilde{f}_1(\tau)$  rappresenta un *complesso coniugato*. Nel caso in cui  $f_1$  è reale, allora  $\tilde{f}_1(\tau) \rightarrow f_1(\tau)$ .

Infine, con  $t = 0$  si ha l'***integrale di cross-correlazione***, il quale è definito se l'integrale converge (ovviamente se il segnale non è né di energia, né di potenza, la convergenza non esiste!).

### 1.3.3 Esercizi d'esame

**Esercizio.**

Il primo esercizio fornisce una funzione  $f(t)$ :

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$$

Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

- I Rappresentare graficamente il segnale;
- II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se  $f(t)$  è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida;
- III Scrivere l'espressione analitica rispetto  $z(t) = -f(-t)$  e  $v(t) = f(t+4)$

**Risoluzione.**

Il **primo passo** è quello di scomporre la funzione così da avere una visione più chiara sulle operazioni da effettuare:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t} \longrightarrow f(t) = \Pi\left(\frac{1}{4} \cdot (t-2)\right)$$

Come si può osservare, ci sono due operazioni da eseguire. Quindi, dopo l'esplicitazione si esegue la rappresentazione del segnale base  $\Pi(t)$ :

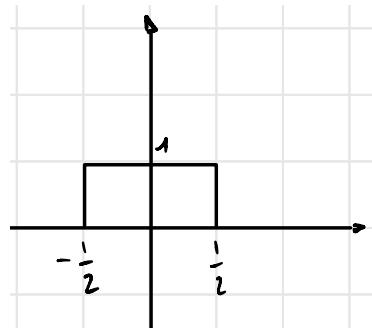


Figura 8: Rappresentazione della funzione  $f(t)$ , ovvero un box.

Adesso si esegue l'operazione di moltiplicazione per un fattore che in questo caso è  $\frac{1}{4}$ . Quindi si rappresenta la box  $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$ :

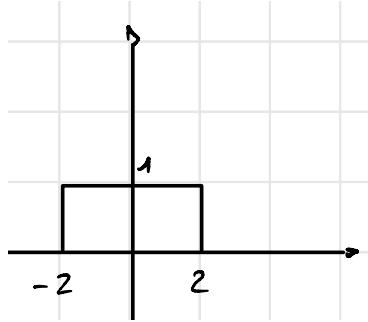


Figura 9: Box  $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$  allargata.

L'operazione che è stata effettuata è stata semplicemente considerare la box del tipo  $\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$ . Ricordandosi le nozioni del corso di Sistemi, per definizione quindi la box è definita nell'intervallo  $-2, +2$ .

Infine, viene applicata l'ultima operazione, ovvero il  $-2$  all'incognita  $t$ . Quindi, la funzione box diventerà  $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$  e la sua rappresentazione grafica sarà uno shift a destra (ritardo):

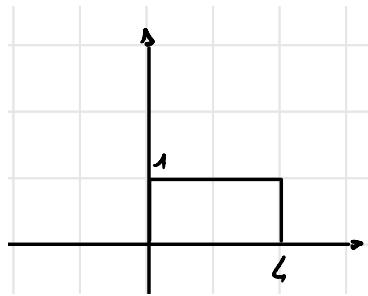


Figura 10: Box  $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$  dopo lo shift a destra.

Il **primo punto si conclude** con la rappresentazione del segnale  $e^{-2t}$  e la sua combinazione con la box. Quindi:

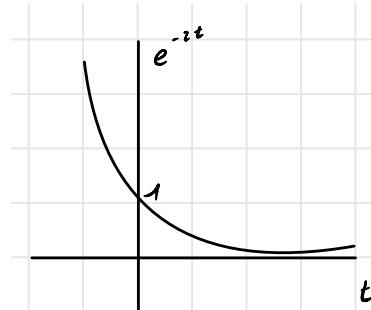


Figura 11: Rappresentazione della funzione  $e^{-2t}$

E infine la sua concatenazione con la box, quindi una sorta di applicazione di un filtro:

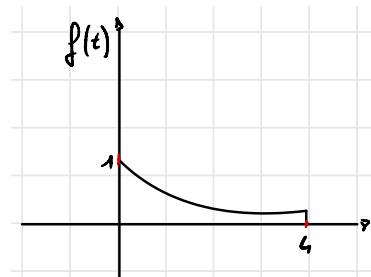


Figura 12: Rappresentazione finale della funzione  $f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$