Analisi II

VR443470

novembre 2022

Indice

1 Lezione 01

1.1 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni differenziali a **variabili separabili** hanno due forme:

- **Forma canonica.** $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$
- **Forma alternativa.** $y' = f(x) \cdot g(y)$

Dove f e g sono funzioni continue "in un intervallo reale", più formalmente:

$$\begin{gathered} f \text{ continua in } I \subseteq R \\ g \text{ continua in } J \subseteq R \end{gathered}$$

Le **soluzioni** di un'equazione differenziale possono essere:

✓ **Costanti.** Quando $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è uno zero di $g(y)$ e dunque vale:

$$y(x) = \bar{y} \quad \forall x \in I$$

Quindi, quando un valore annulla $g(y)$, vuol dire che è stata trovata una soluzione costante dell'equazione differenziale.

✓ **Non costanti.** Quando $g(y)$ non si annulla e quindi ci sarà la relazione:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \longrightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Tuttavia, supponendo che $G(y)$ sia una primitiva di $\dfrac{1}{g(y)}$, allora:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(y(x)) = f(x) \qquad \text{con} \qquad G(x) = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Dove $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$. Ma dato che G è invertibile, si scrive:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c) \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{1}$$

L'equazione 1 rappresenta l'**insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale** e viene chiamato anche **integrale generale**.

Esempio equazione differenziale a variabili separabili

Equazione differenziale: $y' = xy$ in cui la x rappresenta $f(x)$ e la y rappresenta la $g(y)$. Una **nuova notazione** utilizzata negli esercizi è la seguente:

$$f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

Che indica che le **funzioni f e g sono continue nell'intervallo** $\mathbb{R}$.

L'esercizio si svolge *cercando* inizialmente le soluzioni costanti. Il modo più semplice per farlo è porre $y = 0$ e verificare se $g(y)$ si annulla: in caso affermativo esiste una soluzione costante. In questo esercizio si annulla, quindi *ha soluzione costante*.

Al contrario, le soluzioni *non* costanti si trovano quando $y \neq 0$. Quindi:

$$y' = xy \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy \to \frac{1}{y}\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \to \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Esplicitando il risultato:

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \quad c \in \mathbb{R} \longrightarrow y(x) = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad c \in \mathbb{R}$$

Dato che e^c può essere positivo o negativo escluso lo zero (soluzione costante!), si riscrive più precisamente l'**integrale generale dell'equazione**:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

È possibile **verificare la soluzione** dell'equazione differenziale effettuando una derivazione:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$
$$y'(x) = k \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \checkmark\text{Verificata}$$

1.2 Problema di Cauchy

Nel caso in cui si è interessati ad una soluzione particolare, è necessaria una condizione. In questo caso, si è di fronte al **problema di Cauchy**, il quale è caratterizzato dalla presenza di un'equazione differenziale e da almeno una condizione.
L'**obbiettivo** è verificare la/le condizione/i tramite una soluzione (o più soluzioni).
La **struttura** è la seguente:

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \qquad\qquad x_0 \in I \end{cases} \tag{2}$$

Esempio problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = -3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La risoluzione:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3y \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -3\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -3x + c \longrightarrow ...$$
$$... \longrightarrow y(x) = ke^{-3x} \quad k \in \mathbb{R} \text{ [\textbf{Integrale generale}]}$$

Adesso si esegue la **verifica della condizione** sostituendo quest'ultima nella soluzione:

$$\text{Condizione: } y(0) = 2$$
$$\text{Eq. diff.: } y(0) = ke^{-3\cdot(0)} \longrightarrow 2 = k \cdot e^0 \longrightarrow k = 2$$

Quindi, la **soluzione del problema di Cauchy**:

$$y(x) = 2e^{-3x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

Un altro esempio del problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)x \quad f, g \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}\right) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Cercando la **soluzione costante** sostituendo $y = 0$, si osserva che la funzione non si annulla, quindi $1 + y^2 \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, ovvero nessun numero reale annulla $g(y)$.
Cercando eventuali **soluzioni costanti**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y^2)x \longrightarrow \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \textbf{Integrale generale}\text{: } \arctan\left(y\right) = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Verificando la condizione sostituendo, si ottiene:

$$\text{Condizione: } y(0) = 1$$

$$\text{Eq. diff.: } \arctan\left(1\right) = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + c \longrightarrow \arctan\left(1\right) = 0 + c \longrightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

È possibile **esplicitare** la funzione $y(x)$ dall'integrale generale, ottenendo la seguente forma:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Inoltre, dato che arctan è sicuramente compreso, per definizione, nell'intervallo:

$$\pm\frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + c < \frac{\pi}{2}$$

Allora è possibile sostituire la c con il valore trovato durante l'esplicitazione:s

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

Per controllare che la soluzione sia effettivamente all'**interno dell'intervallo**, avviene nel seguente modo:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2}$$

Sicuramente $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}$ è verificata per $x \in \mathbb{R}$. La parte di destra è possibile verificarla effettuando qualche manipolazione sulla disuguaglianza:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{4} \longrightarrow x^2 < \frac{\pi}{2}$$

Quindi, la soluzione è corretta quando x è nell'intervallo (esplicitando):

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < +\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Quindi, l'**intervallo massimale delle soluzioni**, ovvero il più grande intervallo in cui è definita la soluzione del problema di Cauchy, è così definita:

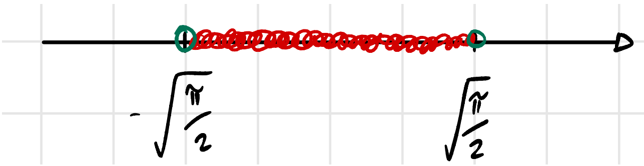

Figura 1: Intervallo massimale delle soluzioni.

2 Lezione 02

2.1 Problema di Cauchy per equazioni differenziali a variabili separabili

Per introdurre il problema di Cauchy con le equazioni differenziali a variabili separabili, è necessario introdurre il **teorema di esistenza e unicità**.

Si consideri il problema:

$$\begin{cases} y^{'} = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

In cui f è una funzione continua su $I = (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ e g è una funzione continua su un intervallo $J = (y_0 - r_2, y_0 + r_2)$.

Teorema 1 (Esistenza) *Esiste una soluzione al problema di Cauchy definita per ogni $x \in I^{'} = [x_0 - \delta, x + \delta] \subseteq I$. È dunque* ***garantita la soluzione locale*** *e non obbligatoriamente su tutto l'intervallo I.*

Teorema 2 (Unicità) *Se $g(y)$ è continua e derivabile con derivata continua (formalmente: $g(y) \in \mathcal{C}^1(J)$), allora la* ***soluzione è unica****.*

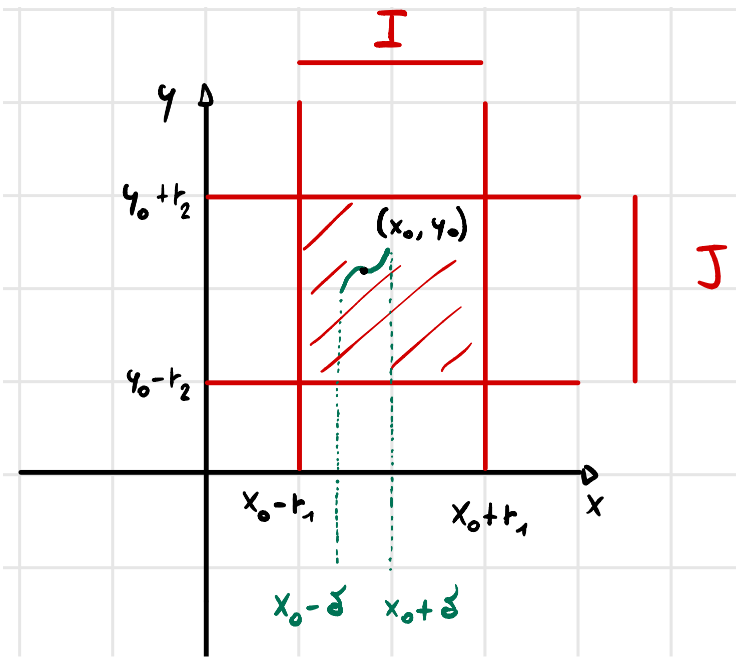

Figura 2: Rappresentazione grafica del problema di Cauchy con variabili separabili.

Caso in cui il teorema dell'unicità viene violato! È facilmente riconoscibile poiché ci sono due soluzioni che passano per la condizione imposta (il punto x_0, y_0).

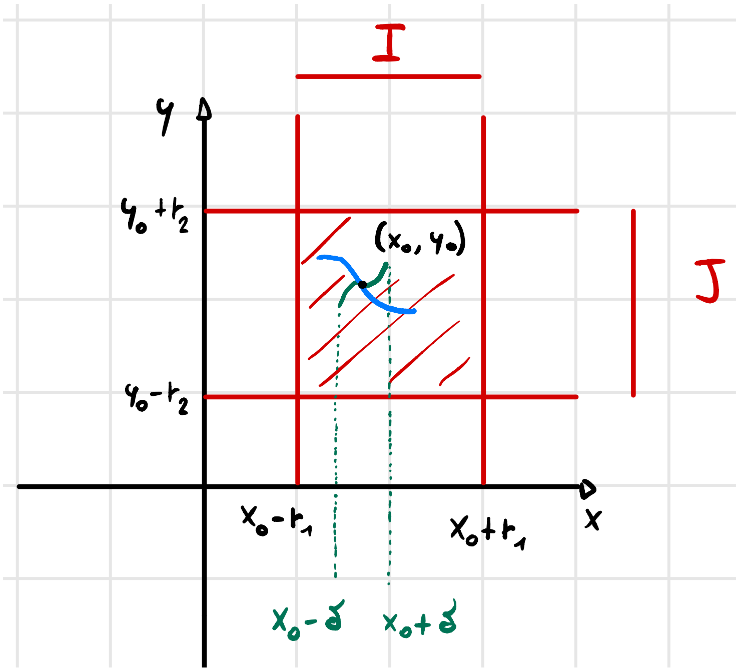

Figura 3: Teorema dell'esistenza garantito, ma teorema dell'unicità violato.

2.2 Esempi di problemi di Cauchy

2.2.1 Esempio semplice

Il problema:

$$\begin{cases} y' \cdot y = 1 \\ y\left(1\right) = 0 \end{cases}$$

In questo caso **non esiste una soluzione** poiché $y^{'}\left(1\right) \cdot y\left(1\right)$ deve essere uguale a 1. Se nell'espressione $y^{'}\left(1\right) \cdot y\left(1\right) = 1$ vengono sostituite le funzioni con il valore zero, risulta impossibile l'uguaglianza: $y^{'}\left(1\right) \cdot 0 = 1$.

2.2.2 Esempio medio

Il problema:

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

Esiste sicuramente **una soluzione costante** con $y = 0$.

Inoltre, andando a studiare le **soluzioni non costanti**, quindi con $y \neq 0$, si evince chiaramente che:

$$y^{'} = y^{\frac{2}{3}} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{2}{3}}} = \mathrm{d}x \longrightarrow y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\textbf{Integrando...} \longrightarrow 3y^{\frac{1}{3}} = x + c$$

Dato che utilizzando la condizione del problema $y\left(0\right) = 0$ la c è zero:

$$3\left(y\left(0\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 0 + c$$

Esplicitando la y, si ottiene la **soluzione al problema di Cauchy**:

$$y = \frac{1}{27}x^3 \qquad \text{con } x \geq 0$$

È interessante notare che la soluzione può essere prolungata a tutto l'insieme dei reali $\mathbb{R}$:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{27}x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre, è possibile anche traslare funzioni di questo tipo:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ \dfrac{1}{27}(x-\alpha)^3 & x \geq \alpha \end{cases}$$

Questo dimostra che la funzione ha una derivata non limitata nell'intervallo.

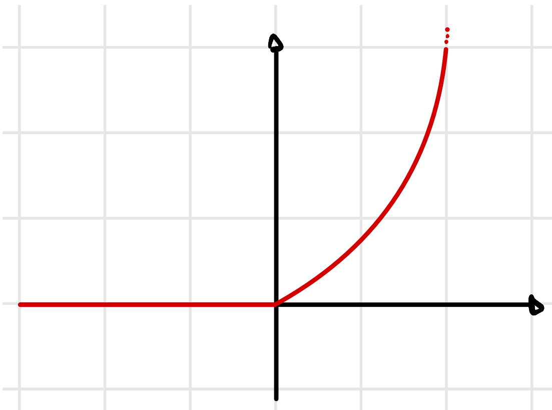

Figura 4: Grafico dell'osservazione estesa a $\mathbb{R}$.

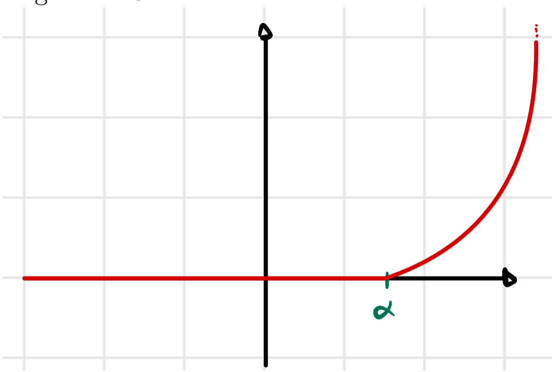

Figura 5: Grafico dell'osservazione estesa a $\mathbb{R}$ e traslata di α.

2.2.3 Esempio difficile

Il problema:

$$\begin{cases} e^{x+y} \cdot y + x = 0 \\ y\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

Tuttavia, la funzione non è in forma canonica, quindi si eseguono alcune operazioni algebriche:

$$e^{x+y} \cdot y + x = 0 \longrightarrow e^{x+y} \cdot y = -x \longrightarrow y^{'} = -\frac{x}{e^{x+y}}$$

Quindi:

$$\begin{cases} y^{'} = -\dfrac{x}{e^{x+y}} \\ y\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

Il problema si risolve tramite la **tecnica delle variabili separabili**. Infatti:

$$y^{'} = -\frac{x}{e^{x+y}}; \quad y^{'} = -\frac{x}{e^{x} \cdot e^{y}}; \quad y^{'} = -\frac{x}{e^{x}} \cdot \frac{1}{e^{y}}; \quad y^{'} = -\underbrace{x \cdot e^{-x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-y}}_{g(y)}$$

Con gli intervalli definiti in tutto $\mathbb{R}$ cioè $I = J = \mathbb{R}$.
La risoluzione si svolge separando le variabili e integrando (N.B. la funzione $g\left(y\right)$ non ha zeri e quindi **non esistono soluzioni costanti**):

$$e^{y}\mathrm{d}y = -xe^{-x}\mathrm{d}x; \quad \int e^{y}\mathrm{d}y = \int -xe{-}x\mathrm{d}x; \quad e^{y} = xe^{-x} - \int 1 \cdot e^{-x}\mathrm{d}x;$$

$$\textbf{Soluzione: } e^{y} = xe^{-x} + e^{-x} + c$$

Dunque, l'**integrale generale**:

$$y\left(x\right) = \ln\left(xe^{-x} + e^{-x} + c\right)$$

Imponendo la **condizione iniziale**:

$$y\left(0\right) = \ln\left(1 + c\right) \qquad \text{con } c = 0$$

Per cui, la **soluzione al problema di Cauchy** è:

$$y\left(x\right) = \ln\left(xe^{-x} + e^{-x}\right) \qquad \text{con } x > -1$$

L'**intervallo massimale** è:

$$(-1; +\infty)$$

2.3 Modello di crescita logaritmica

Creato dal matematico belga Verhulst, riguarda le equazioni differenziali. Infatti, la forma generale trovata nei problemi di Cauchy è del tipo $y^{'} = ay\left(1 - by\right)$, ma in questo modello è importante una forma alternativa della funzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \text{Funzione:} & y^{'} = ky\left(1-y\right) \\ \text{Condizione:} & y\left(0\right) = y_0 \end{cases}$$

In modo più formale, nel modello di crescita logaritmica l'equazione differenziale rappresenta una frazione di popolazione. Dunque, è possibile riscriverla come:

$$\begin{cases} y^{'} = ky\left(1-y\right) & 0 \leq y \leq 1 \\ y\left(0\right) = y_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso, le **<u>soluzioni costanti</u> (o stabili, o d'equilibrio)** sono $y = 0$ e $y = 1$. Invece, le **<u>soluzioni *non* costanti</u>** sono:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-y\right)} = k\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{Integrando...}} \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-y\right)} = \int k\mathrm{d}x;$$

$$\ln\left(y\right) - \ln\left(1-y\right) = kx + c;$$

$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = kx + c$$

Nonostante la forma sia corretta, è utile avere la y esplicitata, quindi:

$$\frac{y}{1-y} = e^{kx} \cdot e^{c}; \qquad y = e^{c} \cdot e^{kx} \cdot \left(1-y\right);$$

$$y = e^{c} \cdot e^{kx} - e^{c} \cdot e^{kx}y; \quad y\left(1 + e^{c} \cdot e^{kx}\right) = e^{c} \cdot e^{kx};$$

$$y\left(x\right) = \frac{e^{c} \cdot e^{kx}}{1 + e^{c} \cdot e^{kx}}$$

Il modello si conclude **<u>applicando</u>** la **<u>condizione iniziale</u>**:

$$\underbrace{y\left(0\right)}_{=y_0} = \frac{e^{c}}{1+e^{c}} \xrightarrow{\text{Esplicitando } e^{c}} \left(1+e^{c}\right)y_0 = e^{c}; \qquad e^{c}\left(y_0 + 1\right) = y_0;$$

$$e^{c} = \frac{y_0}{1-y_0}$$

Quindi, andando a sostituire il valore trovato con la condizione iniziale, si trova la **soluzione**:

$$y(t) = \frac{\dfrac{y_0}{1-y_0} \cdot e^{kx}}{1 + \dfrac{y_0}{1-y_0} \cdot e^{kx}} = \frac{y_0 \cdot e^{kx}}{1 - y_0 + y_0 \cdot e^{kx}}$$

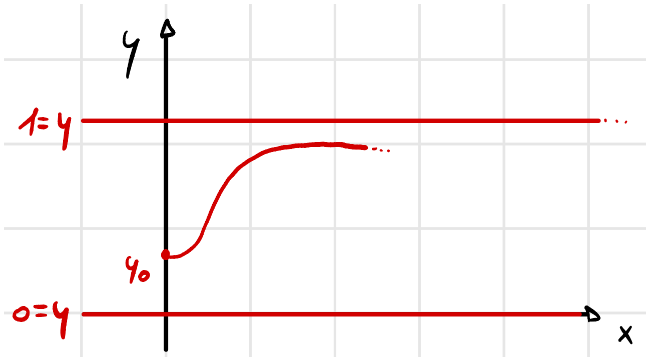

Figura 6: Esempio di grafico con un certo y_0.

2.4 Esercizio con domande da esame

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^x + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si **risponda alle seguenti <u>domande</u>**:

I Scrivere l'equazione della tangente al grafico della curva con soluzione nel punto di coordinate $(0, 1)$.

II Vicino (o intorno) al punto $x = 0$, la funzione è concava o convessa?

Risposta domanda I.

L'equazione generale (o definizione) della retta tangente è:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Con x_0, y_0 che sono coordinate del punto m, ovvero la *pendenza*. Quindi, andando a sostituire le coordinate fornite dall'esercizio nella definizione di retta tangente:

$$\textbf{Sostituzione}\ \ (0, 1) \to y - 1 = m(x - 0)$$

Sapendo che la pendenza m è la derivata della funzione calcolata nel punto zero, si eseguono questi calcoli usando la funzione fornita dall'esercizio:

$$m \longrightarrow y'(0) = e^0 + [y(0)]^2 ; \qquad y'(0) = 1 + 1^2 = 2$$

Il valore noto viene sostituito nella definizione di retta tangente, quindi l'equazione di quest'ultima diventa:

$$y - 1 = 2(x - 0) \longrightarrow y = 2x - 1$$

Risposta domanda II.

Per la concavità o convessità si studia la derivata seconda:

$$y''(x) = e^x + 2y(x) \cdot y'(x)$$

Dalla derivata seconda ottenuta si inserisce la condizione del problema:

$$y''(0) = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 5$$

Il 2 è il risultato della $y'(0)$ trovato prima.

Dato che il **<u>risultato è positivo, allora la funzione è convessa</u>**. Più formalmente, in un intorno di $x = 0$, se la $y''(0) > 0$, la funzione si dice che è convessa.

3 Lezione 03

3.1 Equazioni differenziali del primo ordine

La forma generale di un'equazione differenziale lineare del **primo ordine** è la seguente:

$$y' + a(x)\,y = f(x) \qquad \text{con } a(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I)$$

Si ricorda che la I indica l'intervallo nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{R}$. Inoltre, l'**equazione** si dice:

- **Omogenea**, se $f(x) \equiv 0$, cioè è nulla;
- **Non omogenea**, se $f(x) \not\equiv 0$, cioè non nulla;

La **risoluzione** di queste equazioni prevede due passaggi:

1. Determinare una primitiva $A(x)$ di $a(x)$ sull'intervallo dei reali I e considerare la funzione $e^{A(x)}$;
2. Moltiplicare entrambi i membri dell'equazione differenziale per $e^{A(x)}$, chiamato anche **fattore integrante**.

L'**obbiettivo** finale, ovvero successivamente alla risoluzione, è avere al primo membro la derivata di un prodotto tra funzioni.

Più esplicitamente, in maniera **generalistica**, si eseguono i seguenti passaggi:

1. $\overbrace{e^{A(x)} \cdot y'(x) + e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot y(x)}^{\text{Derivata di un prodotto tra due funzioni}} = e^{A(x)} \cdot f(x) \qquad \forall x \in I$
2. $e^{A(x)} \cdot y(x) = \int e^{A(x)} f(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$

Per derivata di un prodotto tra due funzioni ovviamente si intende:

$$\left(e^{A(x)} \cdot y(x)\right)'$$

La **forma risolutiva generale** è la seguente:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} f(x)\, \mathrm{d}x + c \right)$$

Ovviamente, per determinare la costante c si utilizzano le condizioni iniziali.

Combinando l'equazione differenziale lineare del primo ordine con le condizioni iniziali, il sistema da risolvere è il di nuovo il **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y^{'}(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x) & a(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I) \\ y(x_0) = y_0 & x_0, y_0 \in I \end{cases}$$

E per definizione del teorema dell'esistenza e dell'unicità (teoremi 1 e 2 a pagina 8), l'equazione differenziale lineare del primo ordine **ammette un'unica soluzione di classe** $\mathcal{C}^1(I)$. Si osservi che la soluzione è definita su *tutto* l'intervallo e di conseguenza è una **soluzione globale**!

Nei prossimi paragrafi vengono presentati degli esempi guidati.

3.1.1 Esempio 1

L'equazione differenziale è la seguente:

$$y^{'} + 2xy = x$$

Si osservi che l'equazione differenziale, oltre ad essere risolvibile tramite la tecnica presentata nel paragrafo precedente, è possibile risolverla anche a *variabili separabili* (paragrafo 1.1). In quest'ultimo caso, l'equazione sarebbe:

$$y^{'} = x\,(1-2y)$$

Tuttavia, si ricerca l'integrale generale come spiegato nel metodo nel paragrafo precedente.

Passo 1

Data la forma generale dell'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$y^{'} + a\,(x)\,y = f\,(x)$$

Dall'equazione dell'esercizio si ottiene:

$$\begin{array}{ccc} y^{'} + 2xy = x & \longrightarrow & a\,(x) = 2x \\ & \longrightarrow & f\,(x) = x \end{array}$$

Con entrambe le funzioni $a\,(x)$ e $f\,(x)$ continue sull'insieme dei reali $\mathbb{R}$.

Passo 2

Si calcola la primitiva del fattore $a\,(x)$:

$$a\,(x) = 2x \xrightarrow{\text{primitiva}} A\,(x) = x^2$$

Così da costruire la funzione $e^{A(x)}$:

$$e^{A(x)} \xrightarrow{\text{sostituzione}} e^{x^2}$$

Funzione chiamata anche **fattore integrante**.

Passo 3

Grazie al passo precedente si ha il fattore integrante, il quale viene usato per moltiplicare entrambi i membri dell'equazione differenziale. Quindi:

$$\begin{array}{lcll} \text{Equazione differenziale} & \longrightarrow & y^{'} + 2x\,y = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{Equazione diff. per } e^{A(x)} & \longrightarrow & \underbrace{e^{x^2} \cdot y^{'} + e^{x^2} \cdot 2x\,y}_{\left(e^{x^2} y(x)\right)^{'}} = e^{x^2} \cdot x & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Passo 4

Data la ***forma risolutiva generale*** delle equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} f(x) \, \mathrm{d}x + c \right)$$

Si sostituiscono i valori noti e si calcola l'integrale:

Forma risolutiva generale	$\longrightarrow$	(equazione sopra)
Forma risolutiva generale con valori noti	$\longrightarrow$	$e^{x^2} \cdot y(x) = \int x \cdot e^{x^2} \, \mathrm{d}x + c$
	$\hookrightarrow$	$e^{x^2} \cdot y(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2} + c$
Integrale generale (forma finale)	$\hookrightarrow$	$y(x) = \dfrac{1}{2} + ce^{-x^2}$

L'integrale generale ha sempre la x nell'insieme dei reali ovviamente $x \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Esempio 2

L'equazione differenziale è la seguente:

$$y^{'} - \frac{1}{t}y = t^2$$

Si ricerca l'integrale generale.

Passo 1

Data la forma generale dell'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$y^{'} + a(x)\,y = f(x)$$

Si evidenziano i termini $a(x)$ e $f(x)$ nell'equazione differenziale dell'esercizio:

$$\begin{aligned} y^{'} - \frac{1}{t}y = t^2 \quad &\longrightarrow \quad a(t) = -\frac{1}{t} \\ &\longrightarrow \quad f(t) = t^2 \end{aligned}$$

Attenzione!

Si noti bene che in questo caso la $a(t)$ è definita nell'insieme: $(0, +\infty)$. Questo perché la funzione è una frazione e sicuramente non può essere una 0. Inoltre, dato che **il problema di Cauchy si definisce solo su intervalli** e nel nostro caso la frazione sarebbe l'unione di due intervalli escluso lo 0, cioè $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, è necessario scegliere quale intervallo utilizzare. La decisione viene presa in base ad una specifica dell'esercizio oppure, più frequentemente, in base al punto iniziale fornito dal problema di Cauchy. Infatti, se il punto iniziale fosse maggiore di 0, si sceglierebbe l'intervallo $(0, +\infty)$, altrimenti, se fosse negativo, si sceglierebbe l'intervallo $(-\infty, 0)$.

Al contrario, la funzione $f(t)$ è definita nell'insieme dei reali $\mathbb{R}$.

Passo 2

Si calcola la primitiva di $a(t)$ per costruire il fattore integrante. Quindi:

$$a(t) = -\frac{1}{t} \xrightarrow{\text{primitiva}} A(t) = -\ln t$$

E di conseguenza il fattore integrante corrisponde a $e^{-\ln t}$. Con qualche accorgimento è possibile riscrivere il fattore integrante come:

$$e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$$

Il meno scompare perché si utilizza la proprietà fondamentale dei logaritmi e si ottiene t^{-1}.

Passo 3

Si esegue la moltiplicazione del fattore integrante per l'equazione differenziale:

$$\text{Equazione differenziale} \quad \longrightarrow \quad y^{'} - \frac{1}{t}y = t^2$$

$$\text{Equazione diff. per } e^{A(x)} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{t}y^{'} - \frac{1}{t^2}}_{\left(\frac{1}{t}y(t)\right)^{'}} = t \qquad \text{con } t \in (0, +\infty)$$

L'insieme in cui cade t è definito nello stesso modo del passo 1.

Passo 4

L'esercizio si conclude calcolando l'integrale generale tramite l'integrale vero e proprio:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}y &= \int t \, \mathrm{d}t + c \\ &= \frac{1}{t}y = \frac{t^2}{2} + c \\ \textbf{Integrale generale} &= y(t) = \frac{1}{2}t^3 + ct \end{aligned}$$

Con t definita nell'insieme del passo 1, cioè $t \in (0, +\infty)$. Al contrario, la costante c in tutto l'insieme dei reali, quindi $c \in \mathbb{R}$.

3.1.3 Esempio 3

L'equazione differenziale è la seguente:

$$x^{'}(t) + \cot(t)\, x(t) = e^t$$

Si ricerca l'integrale generale.

Passo 1

Talvolta le equazioni differenziali hanno variabili diverse dal solito, ma il ragionamento rimane invariato. In questo caso, l'equazione ha la variabile t definita nell'intervallo $t \in (0, \pi)$. Il motivo è banale:

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

Data la forma generale dell'equazione differenziale lineare di primo grado:

$$y^{'} + a(x)\, y = f(x)$$

Si evidenziano i termini $a(t)$ e $f(t)$ dall'equazione:

$$x^{'}(t) + \cot(t)\, x(t) = e^t \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \quad a(t) = \cot(t) \\ \longrightarrow \quad f(t) = e^t \end{array}$$

Passo 2

Si calcola la primitiva di $a(t)$ così da ottenere il fattore integrante. Quindi:

$$a(t) = \cot(t) \xrightarrow{\text{primitiva}} A(t) = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t = \ln|sin(t)|$$

Si sostituisce la primitiva nella definizione del fattore integrante $e^{A(t)}$ e si ottiene:

$$e^{A(t)} \xrightarrow{\text{sostituzione}} e^{\ln|\sin(t)|} = |\sin(t)| = \sin(t)$$

È possibile portare il sin fuori dall'esponente grazie ad una delle proprietà dei logaritmi. Inoltre, grazie alla definizione dell'insieme in cui è definita t, cioè $t \in (0, +\infty)$, è possibile anche rimuovere il valore assoluto dato che sarà sempre positivo.

Passo 3

L'equazione differenziale trovata al passo precedente viene moltiplicata per il fattore integrante:

$$\begin{array}{lll} \text{Equazione differenziale} & \longrightarrow & x^{'}(t) + \cot(t)\, x(t) = e^t \\ \text{Equazione diff. per } e^{A(t)} & \longrightarrow & \underbrace{\sin(t) \cdot x^{'}(t) + \cos(t)\, x(t)}_{(x(t)\cdot\sin(t))^{'}} = e^t \cdot \sin(t) \end{array}$$

Il termine cos si ricava dall'operazione di moltiplicazione tra cotangente $\cot = \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$ e il seno $\sin(t)$ che rappresenta il fattore integrante.

Passo 4

Si conclude l'esercizio trovando l'integrale generale:

$$
\begin{aligned}
&x(t)\cdot\sin(t) &&= \int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t\\
&\text{Integrale per parti} &&= e^t\sin(t)-\int e^t\cos(t)\ \mathrm{d}t\\
&\text{Si ripete integrazione per parti} &&= e^t\sin(t)-\left(e^t\cos(t)+\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t\right)\\
& &&= e^t\sin(t)-e^t\cos(t)-\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Dato che l'incognita iniziale era l'integrale $\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t$ e il risultato che è stato trovato corrisponde a $e^t\sin(t)-e^t\cos(t)-\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t$, è possibile eguagliare questi due termini per ottenere la soluzione dell'integrale:

$$
\begin{aligned}
\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t &= e^t\sin(t)-e^t\cos(t)-\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t\\
\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t+\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t &= e^t\sin(t)-e^t\cos(t)\\
2\cdot\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t &= e^t\sin(t)-e^t\cos(t)\\
\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{e^t\sin(t)-e^t\cos(t)}{2}\\
\int e^t\sin(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\cdot e^t\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+c
\end{aligned}
$$

Per concludere, si riprendere l'equazione generale iniziale e si sostituisce il risultato dell'integrale trovato:

$$x(t)\cdot\sin(t)=\frac{1}{2}\cdot e^t\left(\sin(t)-\cos(t)\right)+c$$

Si esplicita l'incognita e si ottiene l'**integrale generale**:

$$x(t)=\frac{1}{2}\cdot e^t\cdot\left(1-\cot(t)\right)+\frac{c}{\sin(t)}$$

3.2 Operatore differenziale lineare

Con un punto di vista ancora più generale, si definisce una particolare applicazione che si posiziona tra lo spazio continuo $\mathcal{C}^1(I)$ delle funzioni con derivata continua sull'intervallo I e lo spazio continuo $\mathcal{C}^0(I)$ delle funzioni continue su I:

$$\begin{array}{rlcll} L: & \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) & \\ & y(x) & \longmapsto & y'(x) + a(x)\,y(x) & \quad \text{con } a(x) \text{ continua su } I \end{array} \tag{3}$$

L'operazione definita e rappresentata dalla lettera L si chiama: **operatore differenziale lineare di ordine 1**. Anche per questa operazione vale la **linearità**.

Linearità

Se $y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{C}^1(I)$, allora l'operatore differenziale lineare di ordine 1 viene moltiplicato considerando anche le costanti:

$$L(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) = \alpha L(y_1(x)) + \beta L(y_2(x)) \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Quindi, l'equazione differenziale con la sua forma classica $y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x)$ con la funzione $f(x)$ continua sull'intervallo I, si può anche riscrivere come:

$$L(y(x)) = f(x)$$

Da questa definizione di linearità, la **soluzione** cambia a seconda del tipo:

- **Omogenea.** Allora la funzione $f(x) = 0$ e di conseguenza l'equazione differenziale $L(y(x)) = 0$ ovvero:

  $$v = \ker(L) \text{ è sottospazio vettoriale di } \mathcal{C}^1(I)$$

  Dove:

  - v rappresenta l'**insieme delle soluzioni** dell'omogenea associata;
  - $\ker(L)$ è il **nucleo** (*kernel*, ker) dell'**applicazione lineare** L;
  - Il sottospazio vettoriale è chiaro, ma si ricordi che nel caso di equazioni differenziali del primo ordine, la **dimensione del sottospazio è pari a** 1.

  L'**obbiettivo** delle soluzioni omogenee è trovare le funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ che hanno come immagine un vettore nullo.

- **Non omogenea.** L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $L(y(x)) = f(x)$ è definita come:

  $$\{y_p(x) + y_v(x) : y_v(x) \in \ker(L)\}$$

4 Lezione 04

4.1 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

La forma generale di un'equazione differenziale lineare del **secondo ordine** è la seguente:

$$y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = f(x) \qquad \text{con } a(x), b(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I)$$

Solitamente le equazioni differenziali lineari del secondo ordine vengono associate ad un **problema di Cauchy** date due condizioni iniziali. La forma generale:

$$\begin{cases} y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = f(x) & a(x), b(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I) \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \\ y'(x_0) = y_1 & \end{cases}$$

Anche per questo tipo di equazioni esiste il **teorema di esistenza e unicità**: esiste ed è unica la soluzione al problema di Cauchy definita sull'intervallo I. La soluzione è definita in $\mathcal{C}^2(I)$.

4.1.1 Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del 2° ordine

Per l'insieme delle soluzioni si definisce un operatore differenziale lineare:

$$\begin{array}{llll} L: & \mathcal{C}^2(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ & y(x) & \longmapsto & y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) \qquad \text{con } a(x), b(x) \in \mathcal{C}^0(I) \end{array}$$

L'operatore differenziale lineare L è considerato "lineare" poiché:

$$L(\alpha y_1(x) + f y_2(x)) = \alpha L(y_1(x)) + f L(y_2(x)) \qquad \text{con } \forall \alpha, f \in \mathbb{R}$$

Ne consegue che l'equazione differenziale e l'operatore differenziale lineare hanno una relazione:

$$y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = f(x) \iff L(y(x)) = f(x)$$

Teorema 3 *L'insieme V delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea:*

$$y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0 \qquad \textit{con } a(x), b(x) \in \mathcal{C}^0(I)$$

È uno spazio vettoriale di dimensione 2.

4.2 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

Teorema 4 *La funzione* $e^{\lambda x}\,(\lambda \in \mathbb{C})$ *è la soluzione dell'equazione omogenea* $y^{''}+ay^{'}+by=0$ *con* $a,b\in\mathbb{R}$ *se e solo se* λ *è la soluzione dell'equazione algebrica di secondo grado* $\lambda^2+a\lambda+b=0$ *(quest'ultima chiamata* ***equazione caratteristica****)*

Sia $e^{\lambda x}$ una soluzione. Allora la derivata prima:

$$y^{'}(x)=\lambda e^{\lambda x}$$

E la derivata seconda:

$$y^{''}(x)=\lambda^2 e^{\lambda x}$$

Sostituendo le derivate nell'equazione differenziale lineare di secondo grado:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 e^{\lambda x}+a\lambda e^{\lambda x}+be^{\lambda x} &= 0 \\ \longrightarrow \quad & e^{\lambda x}\underbrace{\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)}_{\text{eq. caratteristica}} &= 0 \\ \text{La } e \text{ è sempre diverso da } 0: \quad & \cancel{e^{\lambda x}}\left(\lambda^2+a\lambda+b\right) &= 0 \end{aligned}$$

La **risoluzione dell'equazione caratteristica** prevede tre casi:

I. **Caso $\Delta>0$.** L'equazione caratteristica ha **due soluzioni reali distinte** λ_1,λ_2.
Quindi, $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.
Spazio soluzioni rappresenta l'**integrale generale** $v=\left\{c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}: c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$.

II. **Caso $\Delta=0$.** L'equazione caratteristica ha **due soluzioni reali coincidenti** $\lambda_1=\lambda_2$.
Quindi, $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.
L'**integrale generale** è così rappresentato: $y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ con $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

III. **Caso $\Delta<0$.** L'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$.
Quindi, $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$ che grazie ad Eulero è possibile riscriverle:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} \longrightarrow z_1=e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x)\right)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x} \longrightarrow z_2=e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x)-i\sin(\beta x)\right)$$

L'**integrale generale** dunque risulta: $y(x)=c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

4.3 Equazioni differenziali complete omogenee a coefficienti costanti

L'**obbiettivo** di questo tipo particolare di equazioni consiste nella *ricerca di una soluzione particolare* (definizione spiegata qualche riga più avanti). La forma generale di un'equazione differenziale completa omogenea a coefficienti costanti è:

$$y^{''} + ay^{'} + by = f\left(x\right) \qquad \text{con } x \in I$$

Per risolvere queste equazioni viene utilizzato il **metodo di somiglianza**. Spiegato nel prossimo capitolo, esso consiste nell'individuare una somiglianza tra l'equazione differenziale da calcolare e una già calcolata.

Che cos'è una soluzione particolare? In generale, se la funzione $f\left(x\right)$ è un polinomio di grado n tale che $\left(f\left(x\right) = P_n\left(x\right)\right)$ con $b \neq 0$, allora una soluzione particolare è un polinomio di grado n:

$$y_P\left(x\right) = Q_n\left(x\right)$$

In cui Q_n indica un polinomio di grado n.