Analisi II

VR443470

ottobre 2022

Indice

1 Lezione 01

1.1 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni differenziali a **variabili separabili** hanno due forme:

- **Forma canonica.** $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$
- **Forma alternativa.** $y' = f(x) \cdot g(y)$

Dove f e g sono funzioni continue "in un intervallo reale", più formalmente:

$$f \text{ continua in } I \subseteq R$$
$$g \text{ continua in } J \subseteq R$$

Le **soluzioni** di un'equazione differenziale possono essere:

✓ **Costanti.** Quando $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è uno zero di $g(y)$ e dunque vale:

$$y(x) = \bar{y} \quad \forall x \in I$$

Quindi, quando un valore annulla $g(y)$, vuol dire che è stata trovata una soluzione costante dell'equazione differenziale.

✓ **<u>Non</u> costanti.** Quando $g(y)$ non si annulla e quindi ci sarà la relazione:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \longrightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Tuttavia, supponendo che $G(y)$ sia una primitiva di $\dfrac{1}{g(y)}$, allora:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(y(x)) = f(x) \qquad \text{con} \qquad G(x) = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Dove $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$. Ma dato che G è invertibile, si scrive:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c) \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{1}$$

L'equazione 1 rappresenta l'**insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale** e viene chiamato anche **integrale generale**.

Esempio equazione differenziale a variabili separabili

Equazione differenziale: $y' = xy$ in cui la x rappresenta $f(x)$ e la y rappresenta la $g(y)$. Una **nuova notazione** utilizzata negli esercizi è la seguente:

$$f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

Che indica che le **funzioni f e g sono continue nell'intervallo** $\mathbb{R}$.

L'esercizio si svolge *cercando* inizialmente le soluzioni costanti. Il modo più semplice per farlo è porre $y = 0$ e verificare se $g(y)$ si annulla: in caso affermativo esiste una soluzione costante. In questo esercizio si annulla, quindi *ha soluzione costante*.

Al contrario, le soluzioni *non* costanti si trovano quando $y \neq 0$. Quindi:

$$y' = xy \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy \to \frac{1}{y}\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \to \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Esplicitando il risultato:

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \quad c \in \mathbb{R} \longrightarrow y(x) = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad c \in \mathbb{R}$$

Dato che e^c può essere positivo o negativo escluso lo zero (soluzione costante!), si riscrive più precisamente l'**integrale generale dell'equazione**:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

È possibile **verificare la soluzione** dell'equazione differenziale effettuando una derivazione:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$
$$y'(x) = k \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \checkmark \text{Verificata}$$

1.2 Problema di Cauchy

Nel caso in cui si è interessati ad una soluzione particolare, è necessaria una condizione. In questo caso, si è di fronte al **problema di Cauchy**, il quale è caratterizzato dalla presenza di un'equazione differenziale e da almeno una condizione.
L'**obbiettivo** è verificare la/le condizione/i tramite una soluzione (o più soluzioni).
La **struttura** è la seguente:

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \qquad\qquad x_0 \in I \end{cases} \tag{2}$$

Esempio problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = -3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La risoluzione:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3y \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -3\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -3x + c \longrightarrow ...$$
$$... \longrightarrow y(x) = ke^{-3x} \quad k \in \mathbb{R} \text{ [\textbf{Integrale generale}]}$$

Adesso si esegue la **verifica della condizione** sostituendo quest'ultima nella soluzione:

$$\text{Condizione: } y(0) = 2$$
$$\text{Eq. diff.: } y(0) = ke^{-3\cdot(0)} \longrightarrow 2 = k \cdot e^0 \longrightarrow k = 2$$

Quindi, la **soluzione del problema di Cauchy**:

$$y(x) = 2e^{-3x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

Un altro esempio del problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)x \quad f,g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Cercando la **soluzione costante** sostituendo $y = 0$, si osserva che la funzione non si annulla, quindi $1 + y^2 \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, ovvero nessun numero reale annulla $g(y)$.
Cercando eventuali **soluzioni costanti**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y^2)x \longrightarrow \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \textbf{Integrale generale}\text{: } \arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Verificando la condizione sostituendo, si ottiene:

$$\text{Condizione: } y(0) = 1$$
$$\text{Eq. diff.: } \arctan(1) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + c \longrightarrow \arctan(1) = 0 + c \longrightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

È possibile **esplicitare** la funzione $y(x)$ dall'integrale generale, ottenendo la seguente forma:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Inoltre, dato che arctan è sicuramente compreso, per definizione, nell'intervallo:

$$\pm\frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + c < \frac{\pi}{2}$$

Allora è possibile sostituire la c con il valore trovato durante l'esplicitazione:s

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

Per controllare che la soluzione sia effettivamente all'**interno dell'intervallo**, avviene nel seguente modo:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2}$$

Sicuramente $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}$ è verificata per $x \in \mathbb{R}$. La parte di destra è possibile verificarla effettuando qualche manipolazione sulla disuguaglianza:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{4} \longrightarrow x^2 < \frac{\pi}{2}$$

Quindi, la soluzione è corretta quando x è nell'intervallo (esplicitando):

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < +\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Quindi, l'**intervallo massimale delle soluzioni**, ovvero il più grande intervallo in cui è definita la soluzione del problema di Cauchy, è così definita:

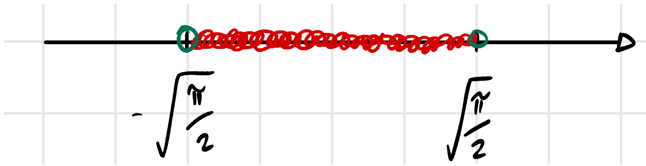

Figura 1: Intervallo massimale delle soluzioni.

2 Lezione 02

2.1 Problema di Cauchy per equazioni differenziali a variabili separabili

Per introdurre il problema di Cauchy con le equazioni differenziali a variabili separabili, è necessario introdurre il **teorema di <u>esistenza</u> e <u>unicità</u>**.

Si consideri il problema:

$$\begin{cases} y^{'} = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

In cui f è una funzione continua su $I = (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ e g è una funzione continua su un intervallo $J = (y_0 - r_2, y_0 + r_2)$.

Teorema 1 (Esistenza) *Esiste una soluzione al problema di Cauchy definita per ogni $x \in I^{'} = [x_0 - \delta, x + \delta] \subseteq I$. È dunque **garantita la soluzione locale** e non obbligatoriamente su tutto l'intervallo I.*

Teorema 2 (Unicità) *Se $g(y)$ è <u>continua e derivabile</u> con derivata continua (formalmente: $g(y) \in \mathcal{C}^1(J)$), allora la **soluzione è unica**.*

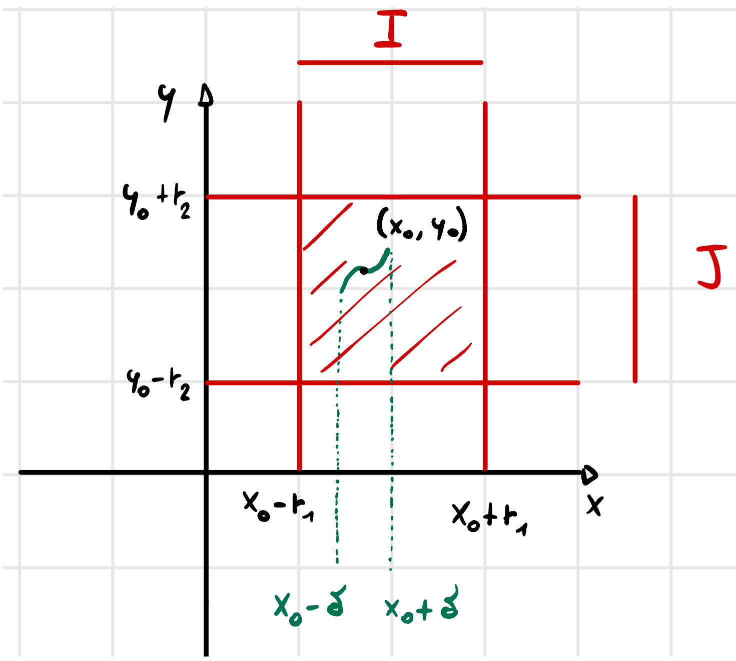

Figura 2: Rappresentazione grafica del problema di Cauchy con variabili separabili.

Caso in cui il teorema dell'unicità viene violato! È facilmente riconoscibile poiché ci sono due soluzioni che passano per la condizione imposta (il punto x_0, y_0).

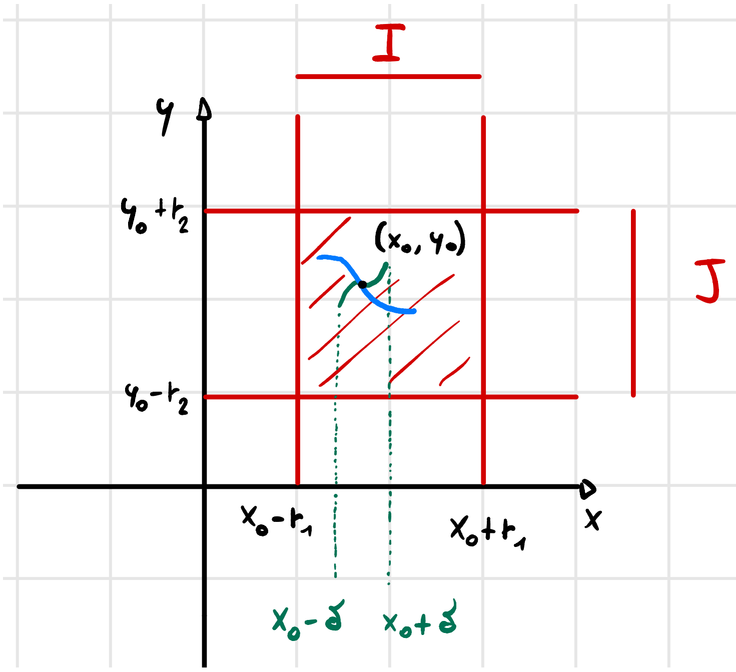

Figura 3: Teorema dell'esistenza garantito, ma teorema dell'unicità violato.

2.2 Alcuni esempi

Esempio 1

Il problema:

$$\begin{cases} y' \cdot y = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

In questo caso **non esiste una soluzione** poiché $y^{'}(1) \cdot y(1)$ deve essere uguale a 1. Se nell'espressione $y^{'}(1) \cdot y(1) = 1$ vengono sostituite le funzioni con il valore zero, risulta impossibile l'uguaglianza: $y^{'}(1) \cdot 0 = 1$.

Esempio 2

Il problema:

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esiste sicuramente **una soluzione costante** con $y = 0$.

Inoltre, andando a studiare le **soluzioni non costanti**, quindi con $y \neq 0$, si evince chiaramente che:

$$y^{'} = y^{\frac{2}{3}} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{2}{3}}} = \mathrm{d}x \longrightarrow y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\textbf{Integrando...} \longrightarrow 3y^{\frac{1}{3}} = x + c$$

Dato che utilizzando la condizione del problema $y(0) = 0$ la c è zero:

$$3\left(y(0)^{\frac{1}{3}}\right) = 0 + c$$

Esplicitando la y, si ottiene la **soluzione al problema di Cauchy**:

$$y = \frac{1}{27}x^3 \qquad \text{con } x \geq 0$$

È interessante notare che la soluzione può essere prolungata a tutto l'insieme dei reali $\mathbb{R}$:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{27}x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre, è possibile anche traslare funzioni di questo tipo:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ \dfrac{1}{27}(x-\alpha)^3 & x \geq \alpha \end{cases}$$

Questo dimostra che la funzione ha una derivata non limitata nell'intervallo.

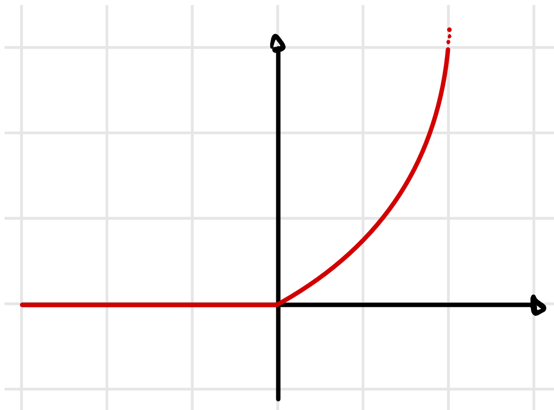

Figura 4: Grafico dell'osservazione estesa a $\mathbb{R}$.

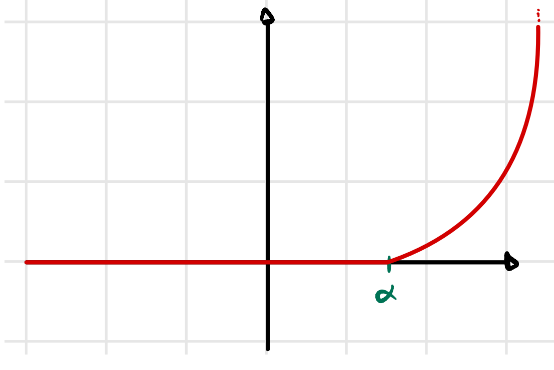

Figura 5: Grafico dell'osservazione estesa a $\mathbb{R}$ e traslata di α.