Analisi II

VR443470

novembre 2022

Indice

1 Lezione 01

1.1 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni differenziali a **variabili separabili** hanno due forme:

- **Forma canonica.** $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$
- **Forma alternativa.** $y' = f(x) \cdot g(y)$

Dove f e g sono funzioni continue "in un intervallo reale", più formalmente:

$$\begin{gathered} f \text{ continua in } I \subseteq R \\ g \text{ continua in } J \subseteq R \end{gathered}$$

Le **soluzioni** di un'equazione differenziale possono essere:

✓ **Costanti.** Quando $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è uno zero di $g(y)$ e dunque vale:

$$y(x) = \bar{y} \quad \forall x \in I$$

Quindi, quando un valore annulla $g(y)$, vuol dire che è stata trovata una soluzione costante dell'equazione differenziale.

✓ <u>**Non**</u> **costanti.** Quando $g(y)$ non si annulla e quindi ci sarà la relazione:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \longrightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Tuttavia, supponendo che $G(y)$ sia una primitiva di $\dfrac{1}{g(y)}$, allora:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(y(x)) = f(x) \qquad \text{con} \qquad G(x) = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Dove $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$. Ma dato che G è invertibile, si scrive:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c) \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{1}$$

L'equazione 1 rappresenta l'**insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale** e viene chiamato anche **integrale generale**.

Esempio equazione differenziale a variabili separabili

Equazione differenziale: $y' = xy$ in cui la x rappresenta $f(x)$ e la y rappresenta la $g(y)$. Una **nuova notazione** utilizzata negli esercizi è la seguente:

$$f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

Che indica che le **funzioni f e g sono continue nell'intervallo $\mathbb{R}$**.

L'esercizio si svolge *cercando* inizialmente le soluzioni costanti. Il modo più semplice per farlo è porre $y = 0$ e verificare se $g(y)$ si annulla: in caso affermativo esiste una soluzione costante. In questo esercizio si annulla, quindi *ha soluzione costante*.

Al contrario, le soluzioni *non* costanti si trovano quando $y \neq 0$. Quindi:

$$y' = xy \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy \to \frac{1}{y}\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \to \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Esplicitando il risultato:

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \quad c \in \mathbb{R} \longrightarrow y(x) = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad c \in \mathbb{R}$$

Dato che e^c può essere positivo o negativo escluso lo zero (soluzione costante!), si riscrive più precisamente l'**integrale generale dell'equazione**:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

È possibile **verificare la soluzione** dell'equazione differenziale effettuando una derivazione:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$
$$y'(x) = k \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \checkmark\text{Verificata}$$

1.2 Problema di Cauchy

Nel caso in cui si è interessati ad una soluzione particolare, è necessaria una condizione. In questo caso, si è di fronte al **problema di Cauchy**, il quale è caratterizzato dalla presenza di un'equazione differenziale e da almeno una condizione.
L'**obbiettivo** è verificare la/le condizione/i tramite una soluzione (o più soluzioni).
La **struttura** è la seguente:

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \qquad\qquad x_0 \in I \end{cases} \tag{2}$$

Esempio problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = -3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La risoluzione:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3y \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -3\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -3x + c \longrightarrow ...$$
$$... \longrightarrow y(x) = ke^{-3x} \quad k \in \mathbb{R} \ [\textbf{Integrale generale}]$$

Adesso si esegue la **verifica della condizione** sostituendo quest'ultima nella soluzione:

$$\text{Condizione: } y(0) = 2$$
$$\text{Eq. diff.: } y(0) = ke^{-3\cdot(0)} \longrightarrow 2 = k \cdot e^0 \longrightarrow k = 2$$

Quindi, la **soluzione del problema di Cauchy**:

$$y(x) = 2e^{-3x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

Un altro esempio del problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)x \quad f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Cercando la **soluzione costante** sostituendo $y = 0$, si osserva che la funzione non si annulla, quindi $1 + y^2 \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, ovvero nessun numero reale annulla $g(y)$.
Cercando eventuali **soluzioni costanti**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y^2)x \longrightarrow \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \textbf{Integrale generale}\text{: } \arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Verificando la condizione sostituendo, si ottiene:

$$\text{Condizione: } y(0) = 1$$

$$\text{Eq. diff.: } \arctan(1) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + c \longrightarrow \arctan(1) = 0 + c \longrightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

È possibile **esplicitare** la funzione $y(x)$ dall'integrale generale, ottenendo la seguente forma:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Inoltre, dato che arctan è sicuramente compreso, per definizione, nell'intervallo:

$$\pm\frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + c < \frac{\pi}{2}$$

Allora è possibile sostituire la c con il valore trovato durante l'esplicitazione:s

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

Per controllare che la soluzione sia effettivamente all'**interno dell'intervallo**, avviene nel seguente modo:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2}$$

Sicuramente $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}$ è verificata per $x \in \mathbb{R}$. La parte di destra è possibile verificarla effettuando qualche manipolazione sulla disuguaglianza:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{4} \longrightarrow x^2 < \frac{\pi}{2}$$

Quindi, la soluzione è corretta quando x è nell'intervallo (esplicitando):

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < +\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Quindi, l'**intervallo massimale delle soluzioni**, ovvero il più grande intervallo in cui è definita la soluzione del problema di Cauchy, è così definita:

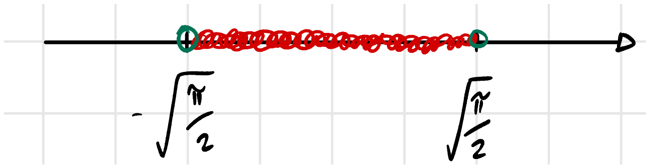

Figura 1: Intervallo massimale delle soluzioni.

2 Lezione 02

2.1 Problema di Cauchy per equazioni differenziali a variabili separabili

Per introdurre il problema di Cauchy con le equazioni differenziali a variabili separabili, è necessario introdurre il **teorema di <u>esistenza</u> e <u>unicità</u>**.

Si consideri il problema:

$$\begin{cases} y^{'} = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

In cui f è una funzione continua su $I = (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ e g è una funzione continua su un intervallo $J = (y_0 - r_2, y_0 + r_2)$.

Teorema 1 (Esistenza) *Esiste una soluzione al problema di Cauchy definita per ogni $x \in I^{'} = [x_0 - \delta, x + \delta] \subseteq I$. È dunque* ***garantita la soluzione locale*** *e non obbligatoriamente su tutto l'intervallo I.*

Teorema 2 (Unicità) *Se $g(y)$ è <u>continua e derivabile</u> con derivata continua (formalmente: $g(y) \in \mathcal{C}^1(J)$), allora la* ***soluzione è unica****.*

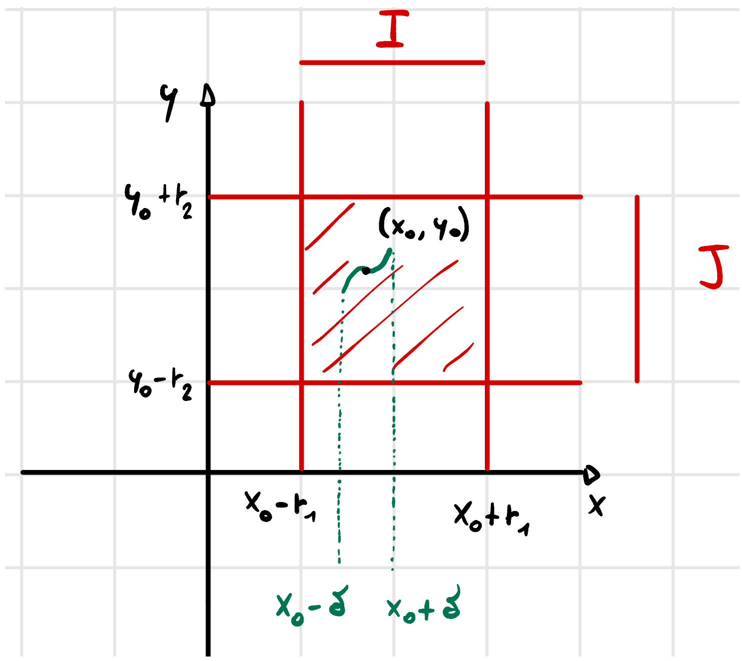

Figura 2: Rappresentazione grafica del problema di Cauchy con variabili separabili.

Caso in cui il teorema dell'unicità viene violato! È facilmente riconoscibile poiché ci sono due soluzioni che passano per la condizione imposta (il punto x_0, y_0).

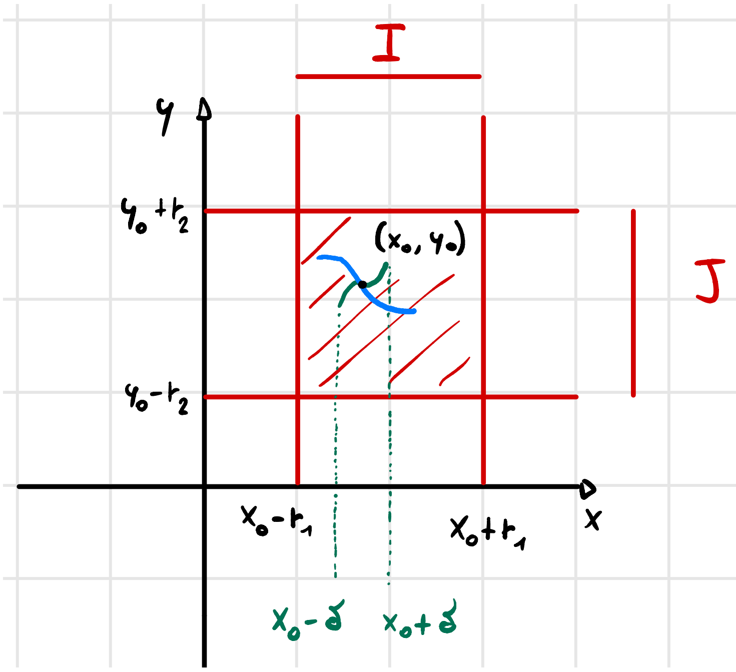

Figura 3: Teorema dell'esistenza garantito, ma teorema dell'unicità violato.

2.2 Esempi di problemi di Cauchy

2.2.1 Esempio semplice

Il problema:

$$\begin{cases} y' \cdot y = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

In questo caso **non esiste una soluzione** poiché $y^{'}(1) \cdot y(1)$ deve essere uguale a 1. Se nell'espressione $y^{'}(1) \cdot y(1) = 1$ vengono sostituite le funzioni con il valore zero, risulta impossibile l'uguaglianza: $y^{'}(1) \cdot 0 = 1$.

2.2.2 Esempio medio

Il problema:

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esiste sicuramente **una soluzione costante** con $y = 0$.

Inoltre, andando a studiare le **soluzioni non costanti**, quindi con $y \neq 0$, si evince chiaramente che:

$$y^{'} = y^{\frac{2}{3}} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{2}{3}}} = \mathrm{d}x \longrightarrow y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\textbf{Integrando...} \longrightarrow 3y^{\frac{1}{3}} = x + c$$

Dato che utilizzando la condizione del problema $y(0) = 0$ la c è zero:

$$3\left(y(0)^{\frac{1}{3}}\right) = 0 + c$$

Esplicitando la y, si ottiene la **soluzione al problema di Cauchy**:

$$y = \frac{1}{27}x^3 \qquad \text{con } x \geq 0$$

È interessante notare che la soluzione può essere prolungata a tutto l'insieme dei reali $\mathbb{R}$:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{27}x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre, è possibile anche traslare funzioni di questo tipo:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ \dfrac{1}{27}(x-\alpha)^3 & x \geq \alpha \end{cases}$$

Questo dimostra che la funzione ha una derivata non limitata nell'intervallo.

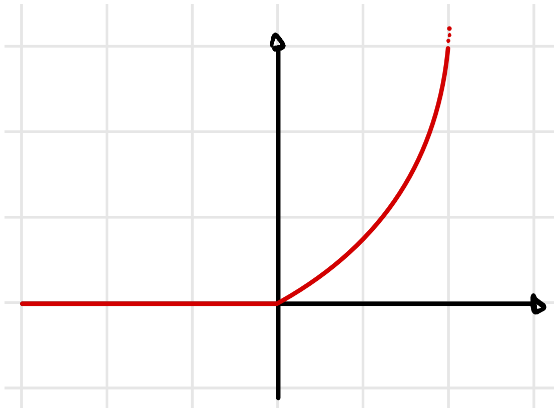

Figura 4: Grafico dell'osservazione estesa a $\mathbb{R}$.

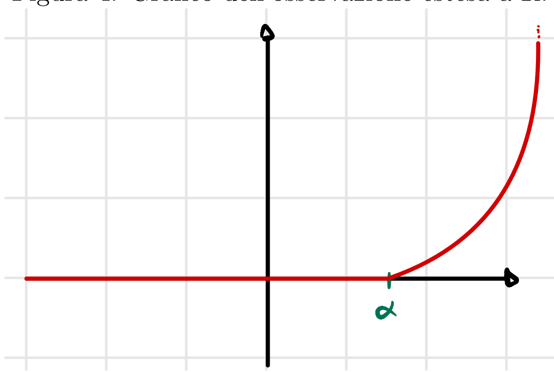

Figura 5: Grafico dell'osservazione estesa a $\mathbb{R}$ e traslata di α.

2.2.3 Esempio difficile

Il problema:

$$\begin{cases} e^{x+y} \cdot y + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Tuttavia, la funzione non è in forma canonica, quindi si eseguono alcune operazioni algebriche:

$$e^{x+y} \cdot y + x = 0 \longrightarrow e^{x+y} \cdot y = -x \longrightarrow y^{'} = -\frac{x}{e^{x+y}}$$

Quindi:

$$\begin{cases} y^{'} = -\frac{x}{e^{x+y}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Il problema si risolve tramite la **tecnica delle variabili separabili**. Infatti:

$$y^{'} = -\frac{x}{e^{x+y}}; \quad y^{'} = -\frac{x}{e^{x} \cdot e^{y}}; \quad y^{'} = -\frac{x}{e^{x}} \cdot \frac{1}{e^{y}}; \quad y^{'} = -\underbrace{x \cdot e^{-x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-y}}_{g(y)}$$

Con gli intervalli definiti in tutto $\mathbb{R}$ cioè $I = J = \mathbb{R}$.
La risoluzione si svolge separando le variabili e integrando (N.B. la funzione $g(y)$ non ha zeri e quindi **non esistono soluzioni costanti**):

$$e^{y}\mathrm{d}y = -xe^{-x}\mathrm{d}x; \quad \int e^{y}\mathrm{d}y = \int -xe{-}x\mathrm{d}x; \quad e^{y} = xe^{-x} - \int 1 \cdot e^{-x}\mathrm{d}x;$$

Soluzione: $e^{y} = xe^{-x} + e^{-x} + c$

Dunque, l'**integrale generale**:

$$y(x) = \ln\left(xe^{-x} + e^{-x} + c\right)$$

Imponendo la **condizione iniziale**:

$$y(0) = \ln(1 + c) \qquad \text{con } c = 0$$

Per cui, la **soluzione al problema di Cauchy** è:

$$y(x) = \ln\left(xe^{-x} + e^{-x}\right) \qquad \text{con } x > -1$$

L'**intervallo massimale** è:

$$(-1; +\infty)$$

2.3 Modello di crescita logaritmica

Creato dal matematico belga Verhulst, riguarda le equazioni differenziali. Infatti, la forma generale trovata nei problemi di Cauchy è del tipo $y^{'} = ay\left(1 - by\right)$, ma in questo modello è importante una forma alternativa della funzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \text{Funzione:} & y^{'} = ky\left(1 - y\right) \\ \text{Condizione:} & y\left(0\right) = y_0 \end{cases}$$

In modo più formale, nel modello di crescita logaritmica l'equazione differenziale rappresenta una frazione di popolazione. Dunque, è possibile riscriverla come:

$$\begin{cases} y^{'} = ky\left(1 - y\right) & 0 \leq y \leq 1 \\ y\left(0\right) = y_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso, le **<u>soluzioni costanti</u> (o stabili, o d'equilibrio)** sono $y = 0$ e $y = 1$. Invece, le **<u>soluzioni *non* costanti</u>** sono:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - y\right)} = k\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{Integrando...}} \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1 - y\right)} = \int k\mathrm{d}x;$$
$$\ln\left(y\right) - \ln\left(1 - y\right) = kx + c;$$
$$\ln\left(\frac{y}{1 - y}\right) = kx + c$$

Nonostante la forma sia corretta, è utile avere la y esplicitata, quindi:

$$\frac{y}{1 - y} = e^{kx} \cdot e^{c}; \qquad y = e^{c} \cdot e^{kx} \cdot \left(1 - y\right);$$

$$y = e^{c} \cdot e^{kx} - e^{c} \cdot e^{kx} y; \quad y\left(1 + e^{c} \cdot e^{kx}\right) = e^{c} \cdot e^{kx};$$

$$y\left(x\right) = \frac{e^{c} \cdot e^{kx}}{1 + e^{c} \cdot e^{kx}}$$

Il modello si conclude **<u>applicando</u>** la **<u>condizione iniziale</u>**:

$$\underbrace{y\left(0\right)}_{=y_0} = \frac{e^{c}}{1 + e^{c}} \xrightarrow{\text{Esplicitando } e^{c}} \left(1 + e^{c}\right) y_0 = e^{c}; \qquad e^{c}\left(y_0 + 1\right) = y_0;$$
$$e^{c} = \frac{y_0}{1 - y_0}$$

Quindi, andando a sostituire il valore trovato con la condizione iniziale, si trova la **soluzione**:

$$y\left(t\right)=\frac{\dfrac{y_0}{1-y_0}\cdot e^{kx}}{1+\dfrac{y_0}{1-y_0}\cdot e^{kx}}=\frac{y_0\cdot e^{kx}}{1-y_0+y_0\cdot e^{kx}}$$

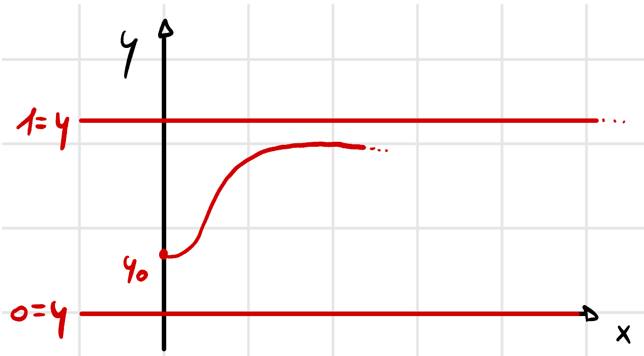

Figura 6: Esempio di grafico con un certo y_0.

2.4 Esercizio con domande da esame

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{'} = e^{x} + y^{2} \\ y\left(0\right) = 1 \end{cases}$$

Si **risponda alle seguenti <u>domande</u>**:

I Scrivere l'equazione della tangente al grafico della curva con soluzione nel punto di coordinate $(0, 1)$.

II Vicino (o intorno) al punto $x = 0$, la funzione è concava o convessa?

Risposta domanda I.

L'equazione generale (o definizione) della retta tangente è:

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$$

Con x_0, y_0 che sono coordinate del punto m, ovvero la *pendenza*. Quindi, andando a sostituire le coordinate fornite dall'esercizio nella definizione di retta tangente:

$$\textbf{Sostituzione} \;\; (0, 1) \rightarrow y - 1 = m\left(x - 0\right)$$

Sapendo che la pendenza m è la derivata della funzione calcolata nel punto zero, si eseguono questi calcoli usando la funzione fornita dall'esercizio:

$$m \longrightarrow y^{'}\left(0\right) = e^{0} + \left[y\left(0\right)\right]^{2}; \qquad y^{'}\left(0\right) = 1 + 1^{2} = 2$$

Il valore noto viene sostituito nella definizione di retta tangente, quindi l'equazione di quest'ultima diventa:

$$y - 1 = 2\left(x - 0\right) \longrightarrow y = 2x - 1$$

Risposta domanda II.

Per la concavità o convessità si studia la derivata seconda:

$$y^{''}\left(x\right) = e^{x} + 2y\left(x\right) \cdot y^{'}\left(x\right)$$

Dalla derivata seconda ottenuta si inserisce la condizione del problema:

$$y^{''}\left(0\right) = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 5$$

Il 2 è il risultato della $y^{'}\left(0\right)$ trovato prima.

Dato che il **<u>risultato è positivo, allora la funzione è convessa</u>**. Più formalmente, in un intorno di $x = 0$, se la $y^{''}\left(0\right) > 0$, la funzione si dice che è convessa.

3 Lezione 03

3.1 Equazioni differenziali del primo ordine

La forma generale di un'equazione differenziale lineare del **primo ordine** è la seguente:

$$y^{'} + a(x)\,y = f(x) \qquad \text{con } a(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I)$$

Si ricorda che la I indica l'intervallo nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{R}$. Inoltre, l'**equazione** si dice:

- **Omogenea**, se $f(x) \equiv 0$, cioè è nulla;
- **Non omogenea**, se $f(x) \not\equiv 0$, cioè non nulla;

La **risoluzione** di queste equazioni prevede due passaggi:

1. Determinare una primitiva $A(x)$ di $a(x)$ sull'intervallo dei reali I e considerare la funzione $e^{A(x)}$;
2. Moltiplicare entrambi i membri dell'equazione differenziale per $e^{A(x)}$, chiamato anche **fattore integrante**.

L'**obbiettivo** finale, ovvero successivamente alla risoluzione, è avere al primo membro la derivata di un prodotto tra funzioni.

Più esplicitamente, in maniera **generalistica**, si eseguono i seguenti passaggi:

1. $\overbrace{e^{A(x)} \cdot y^{'}(x) + e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot y(x)}^{\text{Derivata di un prodotto tra due funzioni}} = e^{A(x)} \cdot f(x) \qquad \forall x \in I$
2. $e^{A(x)} \cdot y(x) = \int e^{A(x)} f(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$

Per derivata di un prodotto tra due funzioni ovviamente si intende:

$$\left(e^{A(x)} \cdot y(x)\right)^{'}$$

La **forma risolutiva generale** è la seguente:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} f(x)\ \mathrm{d}x + c \right)$$

Ovviamente, per determinare la costante c si utilizzano le condizioni iniziali.

Combinando l'equazione differenziale lineare del primo ordine con le condizioni iniziali, il sistema da risolvere è il di nuovo il **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x) & a(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I) \\ y(x_0) = y_0 & x_0, y_0 \in I \end{cases}$$

E per definizione del teorema dell'esistenza e dell'unicità (teoremi 1 e 2 a pagina 8), l'equazione differenziale lineare del primo ordine **ammette un'unica soluzione di classe** $\mathcal{C}^1(I)$. Si osservi che la soluzione è definita su *tutto* l'intervallo e di conseguenza è una **soluzione globale**!

Nei prossimi paragrafi vengono presentati degli esempi guidati.

3.1.1 Esempio 1

L'equazione differenziale è la seguente:

$$y^{'} + 2xy = x$$

Si osservi che l'equazione differenziale, oltre ad essere risolvibile tramite la tecnica presentata nel paragrafo precedente, è possibile risolverla anche a *variabili separabili* (paragrafo 1.1). In quest'ultimo caso, l'equazione sarebbe:

$$y^{'} = x\left(1 - 2y\right)$$

Tuttavia, si ricerca l'integrale generale come spiegato nel metodo nel paragrafo precedente.

Passo 1

Data la forma generale dell'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$y^{'} + a\left(x\right)y = f\left(x\right)$$

Dall'equazione dell'esercizio si ottiene:

$$\begin{array}{lcl} y^{'} + 2xy = x & \longrightarrow & a\left(x\right) = 2x \\ & \longrightarrow & f\left(x\right) = x \end{array}$$

Con entrambe le funzioni $a\left(x\right)$ e $f\left(x\right)$ continue sull'insieme dei reali $\mathbb{R}$.

Passo 2

Si calcola la primitiva del fattore $a\left(x\right)$:

$$a\left(x\right) = 2x \xrightarrow{\text{primitiva}} A\left(x\right) = x^2$$

Così da costruire la funzione $e^{A(x)}$:

$$e^{A(x)} \xrightarrow{\text{sostituzione}} e^{x^2}$$

Funzione chiamata anche **fattore integrante**.

Passo 3

Grazie al passo precedente si ha il fattore integrante, il quale viene usato per moltiplicare entrambi i membri dell'equazione differenziale. Quindi:

$$\begin{array}{lcll} \text{Equazione differenziale} & \longrightarrow & y^{'} + 2x\,y = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{Equazione diff. per } e^{A(x)} & \longrightarrow & \underbrace{e^{x^2} \cdot y^{'} + e^{x^2} \cdot 2x\,y}_{\left(e^{x^2}y(x)\right)^{'}} = e^{x^2} \cdot x & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Passo 4

Data la ***forma risolutiva generale*** delle equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} f(x) \, \mathrm{d}x + c \right)$$

Si sostituiscono i valori noti e si calcola l'integrale:

Forma risolutiva generale	$\longrightarrow$	(equazione sopra)
Forma risolutiva generale con valori noti	$\longrightarrow$	$e^{x^2} \cdot y(x) = \int x \cdot e^{x^2} \, \mathrm{d}x + c$
	$\hookrightarrow$	$e^{x^2} \cdot y(x) = \frac{e^{x^2}}{2} + c$
Integrale generale (forma finale)	$\hookrightarrow$	$y(x) = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$

L'integrale generale ha sempre la x nell'insieme dei reali ovviamente $x \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Esempio 2

L'equazione differenziale è la seguente:

$$y^{'} - \frac{1}{t} y = t^2$$

Si ricerca l'integrale generale.

Passo 1

Data la forma generale dell'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$y^{'} + a(x)\, y = f(x)$$

Si evidenziano i termini $a(x)$ e $f(x)$ nell'equazione differenziale dell'esercizio:

$$\begin{aligned} y^{'} - \frac{1}{t} y = t^2 \quad &\longrightarrow \quad a(t) = -\frac{1}{t} \\ &\longrightarrow \quad f(t) = t^2 \end{aligned}$$

Attenzione!

Si noti bene che in questo caso la $a(t)$ è definita nell'insieme: $(0, +\infty)$. Questo perché la funzione è una frazione e sicuramente non può essere una 0. Inoltre, dato che **il problema di Cauchy si definisce solo su intervalli** e nel nostro caso la frazione sarebbe l'unione di due intervalli escluso lo 0, cioè $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, è necessario scegliere quale intervallo utilizzare. La decisione viene presa in base ad una specifica dell'esercizio oppure, più frequentemente, in base al punto iniziale fornito dal problema di Cauchy. Infatti, se il punto iniziale fosse maggiore di 0, si sceglierebbe l'intervallo $(0, +\infty)$, altrimenti, se fosse negativo, si sceglierebbe l'intervallo $(-\infty, 0)$.

Al contrario, la funzione $f(t)$ è definita nell'insieme dei reali $\mathbb{R}$.

Passo 2

Si calcola la primitiva di $a(t)$ per costruire il fattore integrante. Quindi:

$$a(t) = -\frac{1}{t} \xrightarrow{\text{primitiva}} A(t) = -\ln t$$

E di conseguenza il fattore integrante corrisponde a $e^{-\ln t}$. Con qualche accorgimento è possibile riscrivere il fattore integrante come:

$$e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$$

Il meno scompare perché si utilizza la proprietà fondamentale dei logaritmi e si ottiene t^{-1}.

Passo 3

Si esegue la moltiplicazione del fattore integrante per l'equazione differenziale:

$$\text{Equazione differenziale} \quad \longrightarrow \quad y^{'} - \frac{1}{t}y = t^2$$

$$\text{Equazione diff. per } e^{A(x)} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{t}y^{'} - \frac{1}{t^2}}_{\left(\frac{1}{t}y(t)\right)^{'}} = t \qquad \text{con } t \in (0, +\infty)$$

L'insieme in cui cade t è definito nello stesso modo del passo 1.

Passo 4

L'esercizio si conclude calcolando l'integrale generale tramite l'integrale vero e proprio:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}y &= \int t \, \mathrm{d}t + c \\ &= \frac{1}{t}y = \frac{t^2}{2} + c \\ \textbf{Integrale generale} &= y\,(t) = \frac{1}{2}t^3 + ct \end{aligned}$$

Con t definita nell'insieme del passo 1, cioè $t \in (0, +\infty)$. Al contrario, la costante c in tutto l'insieme dei reali, quindi $c \in \mathbb{R}$.

3.1.3 Esempio 3

L'equazione differenziale è la seguente:

$$x^{'}(t) + \cot(t)\, x(t) = e^{t}$$

Si ricerca l'integrale generale.

Passo 1

Talvolta le equazioni differenziali hanno variabili diverse dal solito, ma il ragionamento rimane invariato. In questo caso, l'equazione ha la variabile t definita nell'intervallo $t \in (0, \pi)$. Il motivo è banale:

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

Data la forma generale dell'equazione differenziale lineare di primo grado:

$$y^{'} + a(x)\, y = f(x)$$

Si evidenziano i termini $a(t)$ e $f(t)$ dall'equazione:

$$\begin{aligned} x^{'}(t) + \cot(t)\, x(t) = e^{t} \quad &\longrightarrow \quad a(t) = \cot(t) \\ &\longrightarrow \quad f(t) = e^{t} \end{aligned}$$

Passo 2

Si calcola la primitiva di $a(t)$ così da ottenere il fattore integrante. Quindi:

$$a(t) = \cot(t) \xrightarrow{\text{primitiva}} A(t) = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t = \ln|sin(t)|$$

Si sostituisce la primitiva nella definizione del fattore integrante $e^{A(t)}$ e si ottiene:

$$e^{A(t)} \xrightarrow{\text{sostituzione}} e^{\ln|\sin(t)|} = |\sin(t)| = \sin(t)$$

È possibile portare il sin fuori dall'esponente grazie ad una delle proprietà dei logaritmi. Inoltre, grazie alla definizione dell'insieme in cui è definita t, cioè $t \in (0, +\infty)$, è possibile anche rimuovere il valore assoluto dato che sarà sempre positivo.

Passo 3

L'equazione differenziale trovata al passo precedente viene moltiplicata per il fattore integrante:

$$\begin{aligned} &\text{Equazione differenziale} && \longrightarrow && x^{'}(t) + \cot(t)\, x(t) = e^{t} \\ &\text{Equazione diff. per } e^{A(t)} && \longrightarrow && \underbrace{\sin(t) \cdot x^{'}(t) + \cos(t)\, x(t)}_{(x(t)\cdot\sin(t))^{'}} = e^{t} \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

Il termine cos si ricava dall'operazione di moltiplicazione tra cotangente $\cot = \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$ e il seno $\sin(t)$ che rappresenta il fattore integrante.

Passo 4

Si conclude l'esercizio trovando l'integrale generale:

$$\begin{aligned}
x(t) \cdot \sin(t) &= \int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t \\
\text{Integrale per parti} &= e^t \sin(t) - \int e^t \cos(t)\ \mathrm{d}t \\
\text{Si ripete integrazione per parti} &= e^t \sin(t) - \left(e^t \cos(t) + \int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t \right) \\
&= e^t \sin(t) - e^t \cos(t) - \int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Dato che l'incognita iniziale era l'integrale $\int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t$ e il risultato che è stato trovato corrisponde a $e^t \sin(t) - e^t \cos(t) - \int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t$, è possibile eguagliare questi due termini per ottenere la soluzione dell'integrale:

$$\begin{aligned}
\int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t &= e^t \sin(t) - e^t \cos(t) - \int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t \\
\int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t + \int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t &= e^t \sin(t) - e^t \cos(t) \\
2 \cdot \int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t &= e^t \sin(t) - e^t \cos(t) \\
\int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{e^t \sin(t) - e^t \cos(t)}{2} \\
\int e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \cdot e^t (\sin(t) - \cos(t)) + c
\end{aligned}$$

Per concludere, si riprendere l'equazione generale iniziale e si sostituisce il risultato dell'integrale trovato:

$$x(t) \cdot \sin(t) = \frac{1}{2} \cdot e^t (\sin(t) - \cos(t)) + c$$

Si esplicita l'incognita e si ottiene l'**integrale generale**:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot e^t \cdot (1 - \cot(t)) + \frac{c}{\sin(t)}$$

3.2 Operatore differenziale lineare

Con un punto di vista ancora più generale, si definisce una particolare applicazione che si posiziona tra lo spazio continuo $\mathcal{C}^1(I)$ delle funzioni con derivata continua sull'intervallo I e lo spazio continuo $\mathcal{C}^0(I)$ delle funzioni continue su I:

$$\begin{array}{rccl} L: & \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ & y(x) & \longmapsto & y'(x) + a(x)\, y(x) \qquad \text{con } a(x) \text{ continua su } I \end{array} \tag{3}$$

L'operazione definita e rappresentata dalla lettera L si chiama: **operatore differenziale lineare di ordine 1**. Anche per questa operazione vale la **linearità**.

Linearità

Se $y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{C}^1(I)$, allora l'operatore differenziale lineare di ordine 1 viene moltiplicato considerando anche le costanti:

$$L(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) = \alpha L(y_1(x)) + \beta L(y_2(x)) \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Quindi, l'equazione differenziale con la sua forma classica $y'(x) + a(x)\, y(x) = f(x)$ con la funzione $f(x)$ continua sull'intervallo I, si può anche riscrivere come:

$$L(y(x)) = f(x)$$

Da questa definizione di linearità, la **soluzione** cambia a seconda del tipo:

- **Omogenea.** Allora la funzione $f(x) = 0$ e di conseguenza l'equazione differenziale $L(y(x)) = 0$ ovvero:

  $$v = \ker(L) \text{ è sottospazio vettoriale di } \mathcal{C}^1(I)$$

  Dove:

  - v rappresenta l'**insieme delle soluzioni** dell'omogenea associata;
  - $\ker(L)$ è il **nucleo** (*kernel*, ker) dell'**applicazione lineare** L;
  - Il sottospazio vettoriale è chiaro, ma si ricordi che nel caso di equazioni differenziali del primo ordine, la **dimensione del sottospazio è pari a** 1.

  L'**obbiettivo** delle soluzioni omogenee è trovare le funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ che hanno come immagine un vettore nullo.

- **Non omogenea.** L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $L(y(x)) = f(x)$ è definita come:

  $$\{y_p(x) + y_v(x) : y_v(x) \in \ker(L)\}$$

4 Lezione 04

4.1 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

La forma generale di un'equazione differenziale lineare del **secondo ordine** è la seguente:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \qquad \text{con } a(x), b(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I)$$

Solitamente le equazioni differenziali lineari del secondo ordine vengono associate ad un **problema di Cauchy** date due condizioni iniziali. La forma generale:

$$\begin{cases} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) & a(x), b(x), f(x) \in \mathcal{C}^0(I) \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Anche per questo tipo di equazioni esiste il **teorema di esistenza e unicità**: esiste ed è unica la soluzione al problema di Cauchy definita sull'intervallo I. La soluzione è definita in $\mathcal{C}^2(I)$.

4.1.1 Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del 2° ordine

Per l'insieme delle soluzioni si definisce un operatore differenziale lineare:

$$\begin{array}{llll} L: & \mathcal{C}^2(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ & y(x) & \longmapsto & y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) \qquad \text{con } a(x), b(x) \in \mathcal{C}^0(I) \end{array}$$

L'operatore differenziale lineare L è considerato "lineare" poiché:

$$L(\alpha y_1(x) + f y_2(x)) = \alpha L(y_1(x)) + f L(y_2(x)) \qquad \text{con } \forall \alpha, f \in \mathbb{R}$$

Ne consegue che l'equazione differenziale e l'operatore differenziale lineare hanno una relazione:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \iff L(y(x)) = f(x)$$

Teorema 3 *L'insieme V delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea:*

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \qquad \textit{con } a(x), b(x) \in \mathcal{C}^0(I)$$

È uno spazio vettoriale di dimensione 2.

4.2 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

Teorema 4 *La funzione* $e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ *è la soluzione dell'equazione omogenea* $y'' + ay' + by = 0$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *se e solo se* λ *è la soluzione dell'equazione algebrica di secondo grado* $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ *(quest'ultima chiamata* ***equazione caratteristica****)*

Sia $e^{\lambda x}$ una soluzione. Allora la derivata prima:

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

E la derivata seconda:

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Sostituendo le derivate nell'equazione differenziale lineare di secondo grado:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} &= 0 \\ \longrightarrow \quad & e^{\lambda x} \underbrace{\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)}_{\text{eq. caratteristica}} &= 0 \\ \text{La } e \text{ è sempre diverso da } 0: \quad & \cancel{e^{\lambda x}} \left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) &= 0 \end{aligned}$$

La **risoluzione dell'equazione caratteristica** prevede tre casi:

I. **Caso $\Delta > 0$.** L'equazione caratteristica ha **due soluzioni reali distinte** λ_1, λ_2.
Quindi, $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.
Spazio soluzioni rappresenta l'**integrale generale** $v = \left\{c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$.

II. **Caso $\Delta = 0$.** L'equazione caratteristica ha **due soluzioni reali coincidenti** $\lambda_1 = \lambda_2$.
Quindi, $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.
L'**integrale generale** è così rappresentato: $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

III. **Caso $\Delta < 0$.** L'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.
Quindi, $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$ che grazie ad Eulero è possibile riscriverle:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} \longrightarrow z_1 = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x} \longrightarrow z_2 = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)$$

L'**integrale generale** dunque risulta: $y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

4.3 Equazioni differenziali complete omogenee a coefficienti costanti

L'**obbiettivo** di questo tipo particolare di equazioni consiste nella *ricerca di una soluzione particolare* (definizione spiegata qualche riga più avanti).

La forma generale di un'equazione differenziale completa omogenea a coefficienti costanti è:

$$y^{''} + ay^{'} + by = f(x) \qquad \text{con } x \in I$$

Per risolvere queste equazioni viene utilizzato il **metodo di somiglianza**. Spiegato nel prossimo capitolo, esso consiste nell'individuare una somiglianza tra l'equazione differenziale da calcolare e una già calcolata.

Che cos'è una soluzione particolare? In generale, se la funzione $f(x)$ è un polinomio di grado n tale che $(f(x) = P_n(x))$ con $b \neq 0$, allora una soluzione particolare è un polinomio di grado n:

$$y_P(x) = Q_n(x)$$

In cui Q_n indica un polinomio di grado n.

5 Lezione 05

5.1 Come trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare del 2° ordine a coefficienti costanti

Metodo di somiglianza

Se il termine forzante $f(x)$ ha una forma particolare, allora è possibile trovare una soluzione che abbia una forma "simile" alla funzione $f(x)$:

- $f(x) = p(x) \cdot e^{\lambda x}$
- $f(x) = p(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\omega x)$
- $f(x) = p(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\omega x)$

Con p che rappresenta il polinomio, invece le variabili α, ω rappresentano numeri reali.

5.1.1 Esempio 1

Data l'equazione differenziale:

$$y^{''} + 5y^{'} + 4y = 3 - 2x$$

L'obbiettivo è cercare un polinomio che abbia la forma del tipo:

$$y_p(x) = a_0 + a_1 x$$

Nell'equazione differenziale, si nota bene che la parte $3 - 2x$ rappresenta il polinomio di 1° grado. Adesso si va a sostituire il polinomio y_P nell'equazione differenziale ricordando di eseguire eventuali derivate:

Equazione differenziale	$\longrightarrow$	$y^{''} + 5y^{'} + 4y = 3 - 2x$
Derivata seconda	$\longrightarrow$	$y^{''} = (a_0 + a_1 x)^{''} = 0$
Derivata prima	$\longrightarrow$	$5y^{'}$
	$\longrightarrow$	$5 \cdot (a_0 + a_1 x)^{'}$
	$\longrightarrow$	$5a_1$
Equazione dopo aver sostituito	$\longrightarrow$	$0 + 5a_1 + 4(a_0 + a_1 x) = 3 - 2x$
	$\longrightarrow$	$5a_1 + 4a_0 + 4a_1 x = 3 - 2x$

Con $\forall x \in \mathbb{R}$.

Per capire se il polinomio è corretto bisogna eseguire un confronto. Quindi, per capire se due polinomi sono uguali, è necessario verificare che siano uguali i coefficienti. Si crea il sistema:

$$\begin{cases} 4a_1 = -2 \\ \\ 5a_1 + 4a_0 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \\ a_0 = \dfrac{11}{8} \end{cases}$$

Le equazioni inserite nel sistema corrispondono all'associazione effettuata nell'equazione differenziale, in particolare:

$$5a_1 + 4a_0 + 4a_1 x = 3 - 2x$$

Grazie ai colori è adesso comprensibile la costruzione delle equazioni nel sistema:

- **Verde**: $5a_1 + 4a_0 = 3$
- **Rosso**: $4a_1 = -2$

Dopo aver risolto il sistema, si riscrive il polinomio:

$$y_p = \frac{11}{8} - \frac{1}{2}x$$

Si ottiene l'equazione caratteristica dall'equazione differenziale:

$$y^{''} + 5y^{'} + 4y = 3 - 2x \longrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

La quale ha due soluzioni reali distinte (dato che risale immediatamente all'occhio visto che il delta è positivo $\Delta > 0$) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1$.

Andando a creare l'equazione completa sommando i due fattori integranti e il polinomio:

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + \frac{11}{8} - \frac{1}{2}x \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

5.1.2 Esempio 2

Questo esempio è diverso dagli altri perché si divide in due casi che presentano ed evidenziano due situazioni differenti. L'idea sarebbe quella di svolgere i passaggi in modo coordinato, come se si stessero facendo nello stesso momento. Questo sarà il compito del lettore, ovvero quello di leggere i due casi nello stesso istante (magari alternando!)

Caso A

Data l'equazione differenziale:

$$y^{''} - 3y^{'} + 2y = e^{5x}$$

Il polinomio da ottenere è uguale a:

$$y_p(x) = c \cdot e^{5x}$$

Prima di eseguire le sostituzioni nell'equazione differenziale, si effettuano le derivate:

$$\begin{aligned} y_p^{'}(x) &= 5 \cdot ce^{5x} \\ y_p^{''}(x) &= 25 \cdot ce^{5x} \end{aligned}$$

Si effettua la sostituzione nell'equazione differenziale:

Equazione differenziale	$\longrightarrow$	$y^{''} - 3y^{'} + 2y = e^{5x}$	
Polinomio	$\longrightarrow$	$y_p(x) = c \cdot e^{5x}$	
Derivate del polinomio	$\longrightarrow$	$y_p^{'}(x) = 5 \cdot ce^{5x}$	
	$\longrightarrow$	$y_p^{''}(x) = 25 \cdot ce^{5x}$	
Sostituzione	$\longrightarrow$	$25 \cdot ce^{5x} - 3\left(5 \cdot ce^{5x}\right) + 2\left(c \cdot e^{5x}\right) = e^{5x}$	$\forall x \in \mathbb{R}$

Si eseguono alcune semplificazioni e si ottiene la variabile c:

$$\begin{aligned} \frac{25 \cdot c \cdot \cancel{e^{5x}}}{\cancel{e^{5x}}} - \frac{15 \cdot c \cdot \cancel{e^{5x}}}{\cancel{e^{5x}}} + \frac{2 \cdot c \cdot \cancel{e^{5x}}}{\cancel{e^{5x}}} &= \frac{\cancel{e^{5x}}}{\cancel{e^{5x}}} \\ 25c - 15c + 2c &= 1 \\ c &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio identificato inizialmente diventa:

$$y_p(x) = c \cdot e^{5x} \longrightarrow y_p(x) = \frac{1}{12}e^{5x}$$

L'esercizio si conclude calcolando l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado sono due reali e distinte ($\Delta > 0$): $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Andando a sostituire le soluzioni all'interno dell'equazione completa, si ottiene:

$$y\left(x\right) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Si ricorda che l'equazione completa si costruisce sommando i due termini c e le due e, le quali avranno come esponente la x e come costante le soluzioni trovate nell'equazione caratteristica. Infine, si somma il polinomio trovato tramite la sostituzione del termine c. Quindi, evidenziando i termini:

$$y\left(x\right) = \overbrace{c_1 e^x}^{\lambda_1} + \underbrace{c_2 e^{2x}}_{\lambda_2} + \overbrace{\frac{1}{12} e^{5x}}^{y_p}$$

Caso B

Data l'equazione differenziale, differente dal caso precedente:

$$y^{''} - 3y^{'} + 2y = e^{2x}$$

Il polinomio da ottenere è uguale a:

$$y_p(x) = c \cdot e^{2x}$$

Prima di eseguire le sostituzioni nell'equazione differenziale, si effettuano le derivate:

$$\begin{aligned} y_p^{'}(x) &= 2 \cdot ce^{2x} \\ y_p^{''}(x) &= 4 \cdot ce^{2x} \end{aligned}$$

Si effettua la sostituzione nell'equazione differenziale:

$$\begin{array}{lll} \text{Equazione differenziale} & \longrightarrow & y^{''} - 3y^{'} + 2y = e^{2x} \\ \text{Polinomio} & \longrightarrow & y_p(x) = c \cdot e^{2x} \\ \text{Derivate del polinomio} & \longrightarrow & y_p^{'}(x) = 2 \cdot ce^{2x} \\ & \longrightarrow & y_p^{''}(x) = 4 \cdot ce^{2x} \\ \text{Sostituzione} & \longrightarrow & 4 \cdot ce^{2x} - 3\left(2 \cdot ce^{2x}\right) + 2\left(c \cdot e^{2x}\right) = e^{2x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Qui c'è la differenza sostanziale rispetto all'esercizio precedente. Provando a semplificare l'equazione differenziale tramite la variabile e^{2x}, si ottiene l'uguaglianza $0 = 1$:

$$\frac{4 \cdot c \cdot \cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} - \frac{3\left(2 \cdot c \cdot \cancel{e^{2x}}\right)}{\cancel{e^{2x}}} + \frac{2\left(c \cdot \cancel{e^{2x}}\right)}{\cancel{e^{2x}}} = \frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}}$$

Questo accade perché il valore 2, il quale era l'unico termine diverso rispetto al caso A, è una soluzione dell'equazione caratteristica. Quindi, si cambia il polinomio applicando una piccola variazione:

$$y_p(x) = c \cdot x \cdot e^{2x}$$

Si rieseguono i procedimenti classici:

$$\begin{array}{lll} \text{Equazione differenziale} & \longrightarrow & y^{''} - 3y^{'} + 2y = e^{2x} \\ \text{Polinomio} & \longrightarrow & y_p(x) = c \cdot x \cdot e^{2x} \\ \text{Derivate del polinomio} & \longrightarrow & y_p^{'}(x) = ce^{2x} + cx \cdot 2e^{2x} = ce^{2x}(1+2x) \\ & \longrightarrow & y_p^{''}(x) = 2ce^{2x} \cdot (1+2x) + ce^{2x} \cdot 2 = 2ce^{2x}(2+2x) \\ \text{Sostituzione} & \longrightarrow & 2ce^{2x}(2+2x) - 3\left(ce^{2x}(1+2x)\right) + 2\left(ce^{2x}\right) = e^{2x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Eseguendo le classe semplificazioni, che vengono omesse, si ottiene la costante uguale a 1, $c = 1$. Si conclude l'esercizio andando a costruire il polinomio particolare:

$$y_p\left(x\right) = xe^{2x}$$

Adesso si dovrebbe calcolare l'equazione caratteristica, trovare le sue soluzioni e andare a costruire l'equazione completa. Tuttavia, i passaggi sono identici al caso A dato che le due equazioni differenziali hanno i due termini a sinistra identici.

5.1.3 Esempio 3

Data l'equazione differenziale:

$$y^{''} + y = \sin(2x)$$

Si calcola l'equazione particolare. Il polinomio simile è il seguente:

$$y_p(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

Si calcolano le derivate:

$$\begin{aligned} y_p^{'}(x) &= -2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x) \\ y_p^{''}(x) &= -4c_1 \cos(2x) - 4c_2 \sin(2x) \end{aligned}$$

Nell'equazione differenziale si sostituiscono le derivate:

$$-4c_1 \cos(2x) - 3c_2 \sin(2x) + c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) = \sin(2x)$$

Si eseguono le semplificazioni e si ottiene l'equazione:

$$-3c_1 \cos(2x) - 3c_2 \sin(2x) = \sin(2x)$$

Le due costanti si ottengono inserendo i valori nel sistema:

$$\begin{cases} -3c_1 = 0 \\ -3c_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Si sostituiscono i valori trovati nel polinomio iniziale:

$$y_p(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \longrightarrow y_p(x) = -\frac{1}{3} \sin(2x)$$

Attenzione!

Nel caso in cui l'equazione differenziale fosse stata $y^{''} + y = \sin(x)$, la risoluzione avrebbe avuto gli stessi problemi dell'esempio 2, caso B. La situazione sarebbe stata risolto con una piccola variazione, ovvero aggiungendo una x a y_p:

$$\begin{aligned} \textbf{OLD:} \quad y_p &= c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \\ \textbf{NEW:} \quad y_p &= x \cdot (c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)) \end{aligned}$$

5.2 Sintesi

In questo capitolo è stato ampiamente spiegato come trovare una soluzione particolare per un'equazione differenziale lineare del 2° ordine a coefficienti costanti. Esistono alcune forme particolari che sono utili per trovare la soluzione (l'elenco è stato fatto all'inizio del capitolo). Il metodo di somiglianza funzione perché si suppone che la soluzione abbia una forma "simile" alle forme particolari introdotte.

Il primo esempio ha spiegato dettagliatamente i passaggi da seguire per risolvere questo tipo di esercizi. Il secondo ha introdotto un problema che è possibile che si verifichi, ovvero quello di trovare una soluzione dell'equazione caratteristica prima del previsto (caso B). Infine, il terzo esempio ha concluso la spiegazione mostrando un esercizio un leggermente più complesso.

Sia:

$$f(x) = p(x)\, e^{\alpha x}$$

La funzione particolare, allora si costruisce l'equazione particolare in questo modo:

$$y_p(x) = Q(x)\, x^m e^{\alpha x}$$

In cui la Q rappresenta la p nella funzione f. Invece, la variabile m è la molteplicità di α come radice dell'equazione caratteristica e infatti è definita come $m \in \{0, 1, 2\}$.

Un'altra forma della funzione è:

$$f(x) = p(x)\, e^{\alpha x} \cdot \underbrace{\cos(\omega x)}_{\text{oppure } \sin(\omega x)}$$

Allora la funzione particolare si costruisce in questo modo:

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \cdot x^m \left(Q_1(x) \cos(\omega x) + Q_2(x) \sin(\omega x) \right)$$

Con $m \neq 0$ se $\alpha + i\omega$ è la soluzione dell'equazione caratteristica.

6 Lezione 06

6.1 Come trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare del 2° ordine a coefficienti costanti

Oltre al metodo di somiglianza introdotto nel capitolo precedente, esiste un altro metodo chiamato **metodo di variazione delle costanti**.
Metodo di variazione delle costanti

Data l'equazione differenziale di secondo grado:

$$y^{''}+ay^{'}+by=f\left(x\right)$$

È conosciuto l'integrale generale dell'omogenea associata $y_v\left(x\right)=c_1y_1\left(x\right)+c_2y_2\left(x\right)$ dove $y_1\left(x\right)$ e $y_2\left(x\right)$ sono soluzioni indipendenti su I.
L'**obbiettivo** è cercare una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma:

$$y_p\left(x\right)=c_1\left(x\right)y_1\left(x\right)+c_2\left(x\right)y_2\left(x\right)$$

Con c_1, c_2 sono variazioni delle costanti.

A **differenza del metodo di somiglianza**, le costanti qui sono *funzioni*. Come nel metodo di somiglianza, l'equazione particolare si sostituisce nell'equazione completa calcolando le derivate (la seconda si omette perché sarà introdotta tra poco):

$$\begin{aligned}
y_p\left(x\right) &= c_1\left(x\right)y_1\left(x\right)+c_2\left(x\right)y_2\left(x\right)\\
y_p^{'}\left(x\right) &= c_1^{'}\left(x\right)y_1\left(x\right)+c_1\left(x\right)y_1^{'}\left(x\right)+c_2^{'}\left(x\right)y_2\left(x\right)+c_2\left(x\right)y_2^{'}\left(x\right)
\end{aligned}$$

Per semplificare l'espressione, si esegue una scelta di comodo: $c_1^{'}\left(x\right)y_1\left(x\right)+c_2^{'}\left(x\right)y_2\left(x\right)=0$ con $\forall x\in I$. Quindi, la derivata prima e seconda si *riscrivono*:

$$\begin{aligned}
y_p^{'}\left(x\right) &= c_1\left(x\right)y_1^{'}\left(x\right)+c_2\left(x\right)y_2^{'}\left(x\right)\\
y_p^{''}\left(x\right) &= c_1^{'}\left(x\right)y_1^{'}\left(x\right)+c_1\left(x\right)y_1^{''}\left(x\right)+c_2^{'}\left(x\right)y_2^{'}\left(x\right)+c_2\left(x\right)y_2^{''}\left(x\right)
\end{aligned}$$

Sostituendo e raggruppando le derivate nell'equazione completa, si ha:

$$c_1\underbrace{\left(y_1^{''}+ay_1^{'}+by_1\right)}_{*}+c_2\underbrace{\left(y_2^{''}+ay_2^{'}+by_2\right)}_{*}+c_1^{'}y_1^{'}+c_2^{'}y_2^{'}$$

In cui le due equazioni tra parentesi contrassegnate con l'asterisco sono uguali a zero poiché vengono trattate solamente equazioni omogenee, cioè uguale a zero. Quindi, rimuovendo i termini nulli dall'equazione e mettendo a sistema i rimanenti:

$$\cancel{c_1\left(y_1^{''}+ay_1^{'}+by_1\right)}+\cancel{c_2\left(y_2^{''}+ay_2^{'}+by_2\right)}+c_1^{'}y_1^{'}+c_2^{'}y_2^{'}\longrightarrow\begin{cases}c_1^{'}y_1+c_2^{'}y_2=0\\ c_1^{'}y_1^{'}+c_2^{'}y_2^{'}=f\left(x\right)\end{cases}$$

Grazie al corso di algebra lineare è noto come scrivere un sistema in **forma matriciale**. In particolare si creano tre matrici, di cui la prima viene chiamata **matrice wronskiana**:

$$\begin{cases} c_1^{'}y_1 + c_2^{'}y_2 = 0 \\ \\ c_1^{'}y_1^{'} + c_2^{'}y_2^{'} = f(x) \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1^{'} \\ \\ c_2^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ f \end{bmatrix}$$

La **matrice wronskiana** è associata a y_1 e y_2. Inoltre, è sempre invertibile $\forall x \in I$ cioè il *determinante è diverso da zero*: $\det W(x) \neq 0 \; \forall x \in I$.

Grazie a questa forma matriciale, si calcolano le due variabili $c_1^{'}, c_2^{'}$:

$$c_1^{'} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2^{'} \end{vmatrix}}{y_1 \cdot y_2^{'} - y_1^{'} \cdot y_2} = -\frac{f \cdot y_2}{y_1 \cdot y_2^{'} - y_1^{'} \cdot y_2}$$

$$c_1^{'} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1^{'} & f \end{vmatrix}}{y_1 \cdot y_2^{'} - y_1^{'} \cdot y_2} = +\frac{f \cdot y_1}{y_1 \cdot y_2^{'} - y_1^{'} \cdot y_2}$$

Con $c_1^{'}$ e $c_2^{'}$ che sono continue nell'intervallo I e quindi integrabili.

6.1.1 Esempio

Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Si elencano di seguito i passaggi per risolvere l'esercizio usando il metodo di variazione delle costanti (paragrafo precedente).

Passo 1

Si ricava l'equazione caratteristica dall'equazione differenziale data:

$$y'' + y = \sin(x) \longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

Le soluzioni trovate sono due complesse coniugate: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

Passo 2

Si scrive l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea associata, dato che è sicuro che esiste grazie alla matrice wronskiana: $y_v(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$.

Passo 3

Adesso è possibile costruire la matrice wronskiana:

$$W(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \text{ con } \det W(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

In cui i valori nella seconda riga sono le derivate della prima.

Passo 4

Si scrive l'intero sistema utilizzando le matrici:

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(x) \end{bmatrix}$$

E si calcola la matrice inversa:

$$\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}}_{W^{-1}(x)} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin^2(x) \\ \sin(x)\cos(x) \end{bmatrix}$$

Le costanti sono evidenti, ovvero:

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\sin^2(x) \\ c_2'(x) &= \sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

Passo 5

L'ultimo passaggio è calcolare l'integrale delle costanti trovate:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x &&= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c \\ c_2(x) &= \int \sin(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x &&= -\frac{1}{4}\cos(2x) + c \end{aligned}$$

Andando a sostituire le soluzioni trovate nell'equazione particolare y_p si trovano i valori:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\sin(x) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x)\sin(x) \end{aligned}$$

7 Lezione 07