

Elaborazione di segnali e immagini

VR443470

novembre 2022

Indice

1 Fondamenti	3
1.1 Matematica preliminare	3
1.1.1 Numeri complessi	3
1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale	4
1.1.3 Funzioni pari e dispari	5
1.1.4 Segnali periodici	6
1.2 Operazioni fondamentali	7
1.2.1 Somma	7
1.2.2 Shift (o traslazione)	8
1.2.3 Funzione box Π e impulso di Dirac	9
1.2.4 Funzione sinc	10
1.2.5 Funzione triangolo Λ	10
1.2.6 Funzione segno (sgn)	10
1.2.7 Funzione gradino	10
1.2.8 Treno di impulsi	11
1.2.9 Energia di un segnale	11
1.2.10 Potenza media di un segnale	12
1.3 Altre operazioni fondamentali	13
1.3.1 Rescaling (o riscalatura)	13
1.3.2 Cross-Correlazione	14
1.3.3 Esercizi d'esame	15
1.3.4 Cross-Correlazione Normalizzata	21
1.3.5 Convoluzione	27
2 Analisi di Fourier	28
2.1 Serie di Fourier	28
2.1.1 Proprietà della serie di Fourier	34
2.2 Trasformata di Fourier continua	35
2.2.1 Trasformata di Fourier	35
2.2.2 Trasformata di Fourier inversa	35
2.2.3 Proprietà della trasformata di Fourier	37
2.2.4 Trasformata di Fourier di una box	38
2.2.5 Trasformata di Fourier di un sinc	39
2.2.6 Trasformata di Fourier di un impulso	40
2.2.7 Trasformata di Fourier di un treno di impulsi	41
2.2.8 Sintesi	42

1 Fondamenti

1.1 Matematica preliminare

1.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso c appartiene all'insieme dei complessi \mathbb{C} e la sua forma è del tipo:

$$c = \Re + j\Im$$

con \Re, \Im variabili $\in \mathbb{R}$ e j chiamata *unità immaginaria* rappresentata come $j = \sqrt{-1}$. Inoltre, \Re rappresenta la *parte reale* e \Im la *parte immaginaria*. Il coniugato di c è

$$\tilde{c} = \Re - j\Im$$

I numeri complessi, dal punto di vista geometrico, possono essere visti come punti su un piano (chiamato *piano complesso*) e descritti da coordinate (R, I) . Nel piano complesso, le ascisse (x) sono rappresentate dalla parte reale, mentre le ordinate (y) dalla parte immaginaria.

Spesso è utile rappresentare i numeri complessi in coordinate polari formate nel seguente modo (*modulo, angolo*). Questa forma viene denominata *forma polare* di un numero complesso:

$$c = \Re + j\Im = |c|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

dove:

$$|c| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \longrightarrow \text{chiamato } \textit{modulo} \text{ o } \textit{magnitudo}$$

invece, *theta* rappresenta:

$$\theta \cong \arctan \left(\frac{\Im}{\Re} \right) \longrightarrow \text{chiamato } \textit{angolo}, \textit{fase} \text{ o } \textit{argomento in radianti}$$

Grazie alla formula di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

è possibile riscrivere la forma polare di un numero complesso in maniera alternativa, ossia:

$$c = \Re + j\Im = |c| (\cos \theta + j \sin \theta) = |c| e^{j\theta}$$

La **somma** e la **moltiplicazione** di due numeri complessi diventa:

$$c_1 = R_1 + jI_1 \quad c_2 = R_2 + jI_2$$

$$\text{Somma: } c_1 + c_2 = (R_1 + R_2) + j(I_1 + I_2)$$

$$\text{Moltiplicazione con Eulero: } c_1 \cdot c_2 = (R_1 R_2 - I_1 I_2) + j(R_1 I_2 + I_1 R_2) \longrightarrow = |c_1||c_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale

Dato $t \in \mathbb{R}$, una funzione f complessa di variabile reale è $f : D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D_2 \subseteq \mathbb{C}$. Viene introdotto questo concetto poiché il **fasore** è un eSEMPIO fondamentALE. Le **caratteristiche** di questa funzione:

- È una funzione complessa che modella la posizione di un punto che ruota attorno all'origine con raggio determinato $|c|$ e velocità angolare costante $\theta(t)$.
- Se la funzione fosse nei numeri reali, sarebbe più dispendioso in termini di numero di funzioni da utilizzare.

L'**obiettivo** dei fasori è quello di *passare dal dominio del tempo* (o spazio) a *quello dell'analisi frequenziale*.

La particolarità è che nel tempo il fasore riesce a variare un numero complesso (in forma polare) mantenendo il modulo $|c|$ fisso:

$$|c|e^{j\theta} \rightarrow |c|e^{j\theta(t)}$$

dove $\theta(t)$ indica la **velocità angolare**. Quest'ultima può essere calcolata tramite:

$$\theta(t) \longrightarrow \frac{2\pi}{T_0}t + \phi$$

dove T_0 indica il *tempo* impiegato per eseguire 2π radianti.

Soltamente si utilizza il fasore con le seguenti supposizioni:

- Coordinate rappresentate con (R, I)
- Impostata una distanza unitaria fissa dall'origine $|c| = 1$
- Velocità angolare costante pari a $2\pi/\text{sec.}$, ossia $\theta(t) = 2\pi t, T_0 = 1\text{sec.}$
- Con $t = 0$ si ha $\theta = 0$
- Viene mantenuto $\phi = 0$

1.1.3 Funzioni pari e dispari

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **pari** se e solo se:

$$f(t) = f(-t)$$

Invece, una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **dispari** se e solo se:

$$f(t) = -f(-t)$$

1.1.4 Segnali periodici

Un segnale f è **periodico** di periodo T o T -periodico se:

$$\exists T_0 \in R^+ : f(t + T_0) = f(t), \quad \forall t \in D_1$$

e T_0 è il minor numero per cui la condizione di ripetizione si verifica.

Dato un periodo T_0 con la lettera μ_0 si indica la **frequenza fondamentale**:

$$\mu_0 = \frac{1}{T_0}$$

Fissato $T_0 > 0$ i **segnali trigonometrici** di minimo periodo T_0 sono:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t)$$

dove μ è una frequenza generale, mentre $\mu_0 = \frac{1}{T_0}$ è la **frequenza fondamentale**. Invece, spesso la **velocità angolare** o **pulsazione** viene rappresentata come:

$$2\pi\mu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

Inoltre, fissato un $\theta \in \mathbb{R}$ chiamato **fase** si osserva che anche le funzioni:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t + \theta) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t + \theta)$$

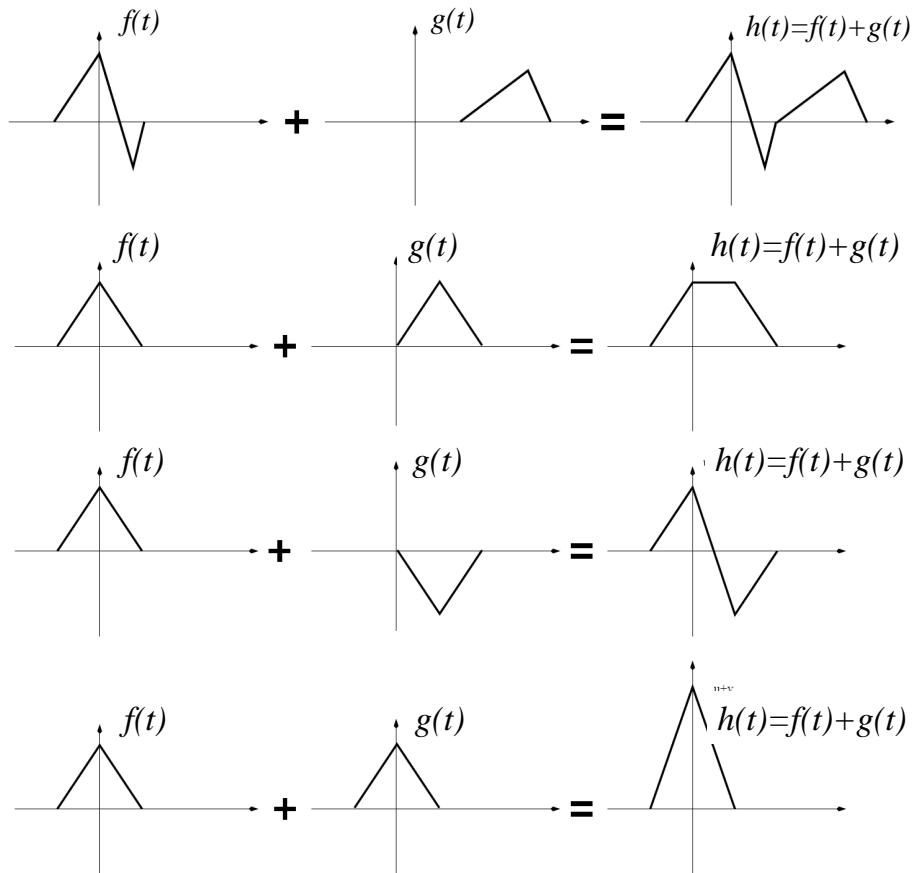
hanno il medesimo periodo T .

Infine, la fase θ permette di eseguire operazione di *shift*.

1.2 Operazioni fondamentali

1.2.1 Somma

La *somma* di due segnali è facile quando essi non interferiscono, ovvero quando **non** sono contemporaneamente $\neq 0$. Alcuni esempi qui di seguito.



1.2.2 Shift (o traslazione)

Lo **shift** (o traslazione) è il cambio di posizione di un segnale. Può essere effettuato:

- **Traslazione a destra** con la funzione $f(t - \tau)$
- **Traslazione a sinistra** con la funzione $f(t + \tau)$

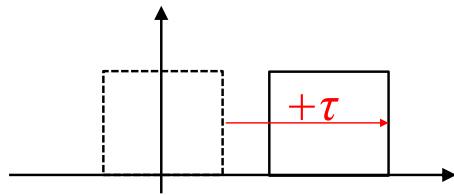


Figura 1: Shift a destra

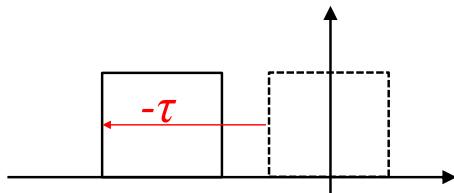


Figura 2: Shift a sinistra

1.2.3 Funzione box II e impulso di Dirac

La funzione ***box*** è definita nel seguente modo:

$$A\Pi\left(\frac{x}{b}\right) \quad x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

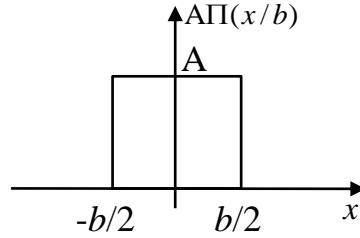


Figura 3: Box generica

La funzione $\delta(x)$ è chiamata ***impulso unitario*** o ***impulso di Dirac*** perché è definita nel seguente modo:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Quindi è un impulso che tende all'infinito solamente quando la x è nell'origine, ma il suo integrale è uguale a 1. Alcune **proprietà** dell'impulso:

1. $\delta(x - x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0$
2. Data una funzione generica f (**setacciamento**): $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dt = f(x_0)$
3. $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
4. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ fissato } a \in \mathbb{R} - \{0\}$

1.2.4 Funzione sinc

La funzione **sinc** è definita nel seguente modo:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Ha due **caratteristiche** importanti: (1) l'intersezione con l'asse delle x avviene sempre nei numeri interi positivi e negativi (quindi 1 e -1, 2 e -2, ecc.); (2) il limite $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{sinc}(t) = 0$.

Questa funzione è **importante per l'analisi nel dominio del tempo (o frequenza)**.

1.2.5 Funzione triangolo Λ

La funzione **triangolo** è definita nel seguente modo:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è **importante per l'analisi spettrale e per le operazioni di convoluzione**.

1.2.6 Funzione segno (sgn)

La funzione **segno** è definita nel seguente modo:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione ribalta segnali sopra o sotto l'asse delle x .

1.2.7 Funzione gradino

La funzione **gradino** è definita nel seguente modo:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Questa funzione rappresenta un **segnale** che si attiva a partire dal tempo specificato e rimane attivo indefinitamente. Attenzione! Non si confonda questo segnale con il segno.

1.2.8 Treno di impulsi

Il **treno di impulsi** $S_{\Delta T}(x)$ è la somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità ΔT :

$$S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

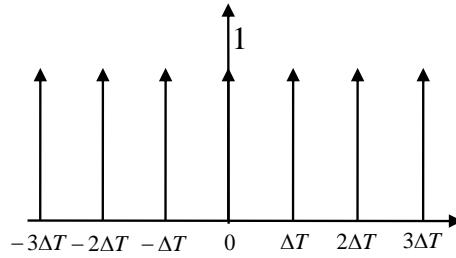


Figura 4: Treno di impulsi

1.2.9 Energia di un segnale

L'**energia di un segnale** è definita nel seguente modo:

$$E_f = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt & \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), \quad f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **ad energia finita** (o **di energia**) se l'integrale che rappresenta l'energia converge ed è diverso da 0. Quindi:

- ☞ **Condizione sufficiente** all'esistenza della sua trasformata di Fourier. Le funzioni trigonometriche non sono di energia ma hanno comunque la Trasformata di Fourier.
- ☞ **Condizione necessaria** per essere un segnale ad energia finita, all'infinito ($+\infty$ e $-\infty$) l'**ampiezza** va a zero.

Alcuni esempi:

- ★ **Segnali di energia.** Impulsi rettangolari, oscillazioni smorzate (sinc);
- ★ **Segnali non di energia.** Funzioni trigonometriche sin e cos.

L'**unità di misura** è il *joule*.

1.2.10 Potenza media di un segnale

La *potenza media di un segnale* è definita nel seguente modo:

$$P_f = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \quad \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), & f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **a potenza finita** (o **di potenza**) se l'integrale che rappresenta la potenza converge ed è diverso da 0. L'**unità di misura** è il *watt*.

Infine, un segnale ad energia finita ha la potenza che tende a zero (per cui un segnale non può appartenere ad entrambe le categorie). Invece, esistono segnali che non sono né di energia, né di potenza finita.

1.3 Altre operazioni fondamentali

1.3.1 Rescaling (o riscalatura)

La funzione di *rescaling* è definita nel seguente modo:

$$\forall f(t) : D_1 \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0$$

Simile allo *shift*, il *rescaling* ha una definizione generica e due varianti:

- **Definizione generica** con la funzione semplice $f(t)$ (immagine 5).
- **Ritardo lineare del segnale di un fattore ω** con la funzione $f(\omega t)$, $0 < \omega < 1$ (immagine 6).
- **Accelero lineare del segnale di un fattore ω** con la funzione $f(\omega t)$, $\omega > 1$ (immagine 7).

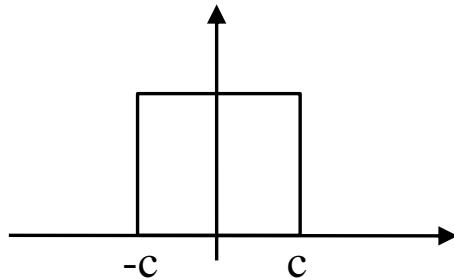


Figura 5: Definizione generica

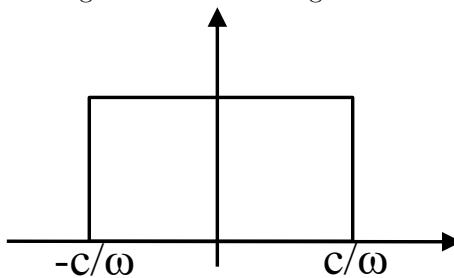


Figura 6: Ritardo lineare del segnale di un fattore ω

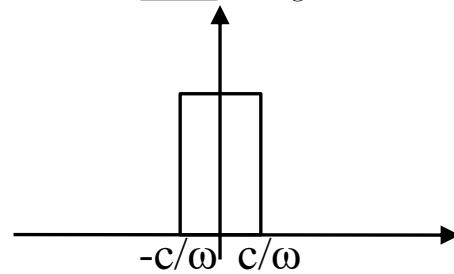


Figura 7: Accelero lineare del segnale di un fattore ω

1.3.2 Cross-Correlazione

Dati $f_1(\tau), f_2(\tau)$ segnali continui, $\tau \in \mathbb{R}$ il segnale di ***cross-correlazione*** viene definito come:

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

In cui $\tilde{f}_1(\tau)$ rappresenta un *complesso coniugato*. Nel caso in cui f_1 è reale, allora $\tilde{f}_1(\tau) \rightarrow f_1(\tau)$.

Infine, con $t = 0$ si ha l'***integrale di cross-correlazione***, il quale è definito se l'integrale converge (ovviamente se il segnale non è né di energia, né di potenza, la convergenza non esiste!).

1.3.3 Esercizi d'esame

Esercizio.

Il primo esercizio fornisce una funzione $f(t)$:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$$

Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

- I Rappresentare graficamente il segnale;
- II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se $f(t)$ è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida. Infine, calcolare l'energia o la potenza nel caso in cui $f(t)$ sia solo composta da e^{-2t} ;
- III Scrivere l'espressione analitica rispetto $z(t) = -f(-t)$ e $v(t) = f(t+4)$

Risoluzione I.

Il **primo passo** è quello di scomporre la funzione così da avere una visione più chiara sulle operazioni da effettuare:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t} \longrightarrow f(t) = \Pi\left(\frac{1}{4} \cdot (t-2)\right)$$

Come si può osservare, ci sono due operazioni da eseguire. Quindi, dopo l'esplicitazione si esegue la rappresentazione del segnale base $\Pi(t)$:

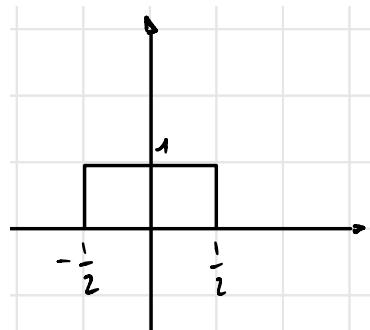


Figura 8: Rappresentazione della funzione $f(t)$, ovvero un box.

Adesso si esegue l'operazione di moltiplicazione per un fattore che in questo caso è $\frac{1}{4}$. Quindi si rappresenta la box $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$:

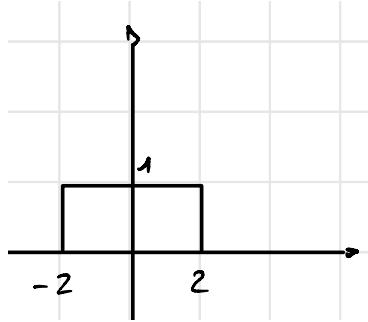


Figura 9: Box $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$ allargata.

L'operazione che è stata effettuata è stata semplicemente considerare la box del tipo $\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$. Ricordandosi le nozioni del corso di Sistemi, per definizione quindi la box è definita nell'intervallo $-2, +2$.

Infine, viene applicata l'ultima operazione, ovvero il -2 all'incognita t . Quindi, la funzione box diventerà $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$ e la sua rappresentazione grafica sarà uno shift a destra (ritardo):

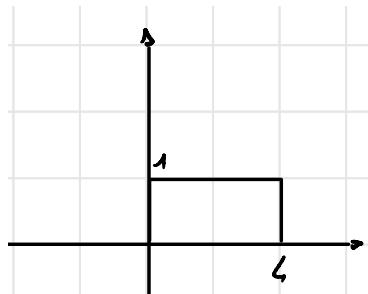


Figura 10: Box $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$ dopo lo shift a destra.

Il **primo punto si conclude** con la rappresentazione del segnale e^{-2t} e la sua combinazione con la box. Quindi:

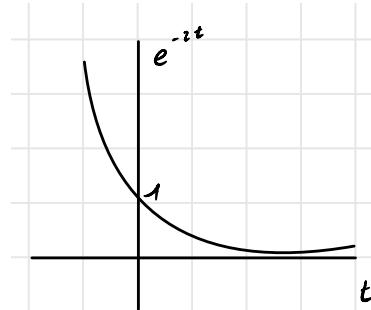


Figura 11: Rappresentazione della funzione e^{-2t}

E infine la sua concatenazione con la box, quindi una sorta di applicazione di un filtro:

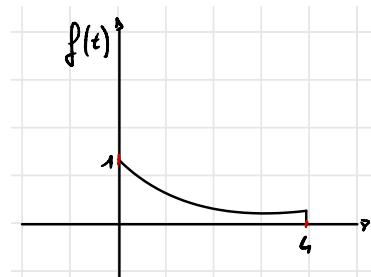


Figura 12: Rappresentazione finale della funzione $f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$

Risoluzione II.

Guardando la figura 12 si può già intuire che tipo di segnale sia. Infatti, dato che è limitato e non si estende all'infinito, per definizione è un **segnale finito**, quindi **di energia e non di potenza**. Per dimostrare questa affermazione, si eseguono i calcoli:

$$\text{Definizione di energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt$$

$$\text{Definizione di potenza: } P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$$

Dopo le definizioni, si esegue l'effettivo calcolo con i valori numerici:

Energia finita

$$E_f = \int_0^4 e^{-4t} dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_0^4 = \frac{-e^{-16} + 1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Potenza finita

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^4 e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Come si osserva dai risultati, è un segnale di energia finita poiché è un valore noto, invece non è un segnale di potenza poiché il risultato è zero e non rispetta la definizione.

Al contrario, se la funzione fosse composta solamente dall'esponenziale, il calcolo dell'energia e della potenza sarebbe:

$$\text{Energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-4t} - e^{4t}}{-4} = \infty$$

$$\text{Potenza: } P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-4t}}{-4} \cdot \frac{1}{T} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-2T} - e^{2T}}{-4T} = \infty$$

Come si evince dai calcoli, il segnale non è né di energia né di potenza perché entrambi i risultati sono uguali a infinito.

Risoluzione III.

Considerando la funzione $z(t)$, si osserva che è la copia simmetrica rispetto all'origine di $f(t)$. Invece, la funzione $v(t)$ è identica alla funzione $f(t)$ ma "shiftata" a sinistra di 4:

$$f(t) = -f(-t) \quad v(t) = f(t+4)$$

Esercizio 2.

Il secondo esercizio fornisce una funzione $f(t)$:

$$f(t) = \operatorname{sgn} \left(a \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right) \right)$$

Con $T_0 = 2$. Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

- I Rappresentare graficamente il segnale;
- II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se $f(t)$ è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida.

Risoluzione I.

Viene rappresentato il segnale della funzione segno sng:

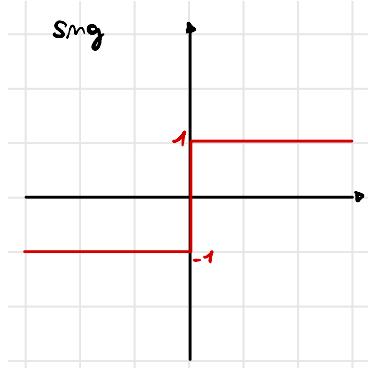


Figura 13: Funzione segno sng.

Si esplicitando le operazioni della funzione:

$$f(t) = \operatorname{sgn} \left(a \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right) \right) = \cos \left(\frac{1}{T_0} \cdot 2\pi t \right)$$

E si rappresenta inizialmente la funzione $\cos(2\pi)$ con $T_0 = 1$:

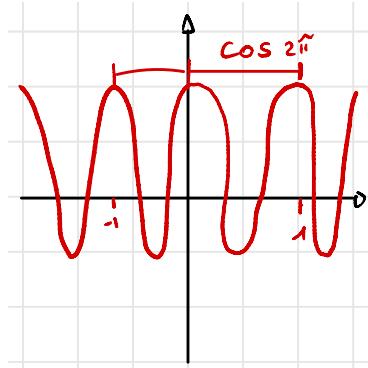


Figura 14: Funzione coseno $\cos(2\pi)$.

Si conclude la rappresentazione grafica aumentando T_0 in maniera molto semplice:

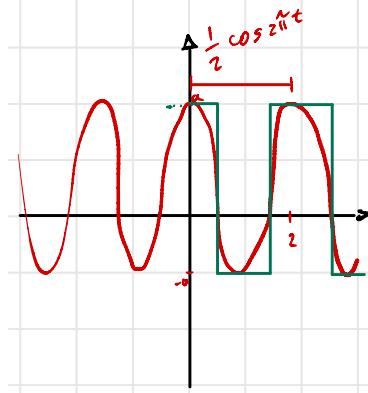


Figura 15: Funzione coseno $\cos(2\pi)$ moltiplicata per $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$.

Risoluzione II.

Si conclude l'esercizio calcolando l'energia o la potenza del segnale. Per farlo, dato che non è definito in un intervallo ma continua all'infinito, si calcolano i rispettivi integrali in un intervallo arbitrario n e poi lo si estende all'infinito:

$$\begin{aligned} E_f &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n \cdot \frac{T_0}{2}}^{n \cdot \frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \infty \\ P_f &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n T_0} \int_{-n \cdot \frac{T_0}{2}}^{n \cdot \frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n T_0} \cdot n \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot T_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \longrightarrow \neq 0 \end{aligned}$$

È evidente che il segnale è di potenza. Come si evince dalla figura 15, i tratti di colore verde indicano il rettangolo formato dal segnale. Calcolando l'area del rettangolo, si ottiene esattamente il valore di T_0 . Infatti, la base del rettangolo (verticale) è 2, mentre l'altezza (orizzontale) è 1.

1.3.4 Cross-Correlazione Normalizzata

Ha l'**obiettivo** di trattare segnali con range di valori diversi e consente di eseguire **confronti uno-a-molti** (*one-to-many*):

$$f_1 \bar{\otimes} f_2 (t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1 (\tau) f_2 (\tau - t) d\tau}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}}$$

In cui E_f indica l'**energia** del segnale f . Ci sono due caratteristiche importanti:

- $f_1 \bar{\otimes} f_2 (t) \in [-1, 1]$
- $|f_1 \bar{\otimes} f_2 (t)| = 1 \iff f_1 (\tau) = \alpha f_2 (\tau - t)$

Inoltre, si parla di **autocorrelazione** (normalizzata e non) quando $f_1 = f_2$. Utile per i segnali stocastici.

Nel **caso di segnali discreti**, dati $x_1(k), x_2(k)$:

$$x_1 \otimes x_2 (n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1 (k) x_2 (k - n) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sotto l'ipotesi di convergenza della serie, cioè la serie deve convergere.

Nel caso in cui $x_1(k)$ e $x_2(k)$ sono limitati di lunghezza M ed N rispettivamente, allora la **cross correlazione è di lunghezza $M + N - 1$** .

Cross-Correlazione 1D

Data la definizione:

$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) x_2(k-n)$$

Esistono diverse casistiche:

- $n = 0$ si confronta tra x_1 e x_2 nei loro domini temporali originali.
- $n > 0$ sposta x_2 a destra poiché c'è l'anticipo di x_2
- $n < 0$ sposta x_2 a sinistra poiché c'è ritardo di x_2

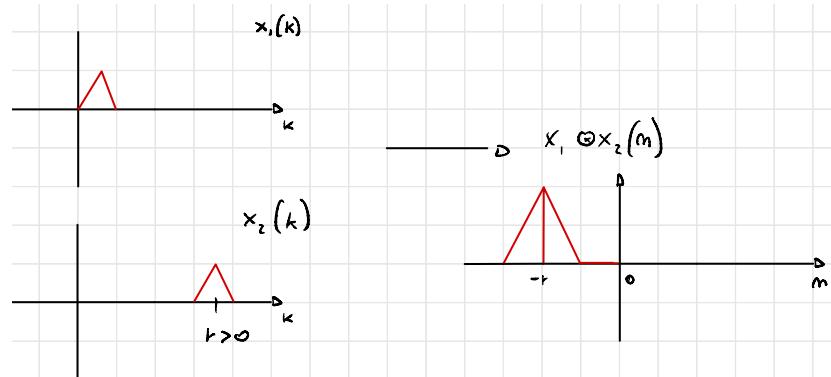


Figura 16: Esempio di cross-correlazione normalizzata 1D.

Il triangolo x_2 va verso sinistra e il lasso di tempo che x_2 non combacia con x_1 , viene rappresentato come una linea orizzontale sull'asse delle n nel piano cartesiano di destra.

Cross-Correlazione 2D

Data la definizione:

$$x_1 \otimes x_2 (m, n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(u - m, v - n) \quad u, v, m, n \in \mathbb{Z}$$

Nel 2D x_1 e x_2 possono essere pensate come **immagini infinite**.

Di solito x_1 e x_2 sono **immagini finite** (segnali digitali ad intervallo limitato), e gli estremi di sommatoria sono quindi finiti.

Il primo segnale x_1 viene chiamato **template**, o **matrice kernel**, mentre x_2 genericamente **immagine** (di solito, la matrice kernel x_1 ha una dimensionalità minore di quella dell'immagine).

Nel caso $x_1 = x_2$ si ha **autocorrelazione 2D**.

Cross-Correlazione normalizzata 2D

Si definisce come:

$$x_1 \otimes x_2 (m, n) = \frac{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_1(u, v)] [x_2(u - m, v - n)]}{\sqrt{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_1(u, v)]^2 \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_2(u, v)]^2}}$$

In altre parole, fissato il punto di applicazione n, m , si sottrae la media ad ogni punto nell'interno di applicazione dalla matrice kernel. Successivamente, si divide per il prodotto della varianza dei due segnali, estraendo a radice alla fine.

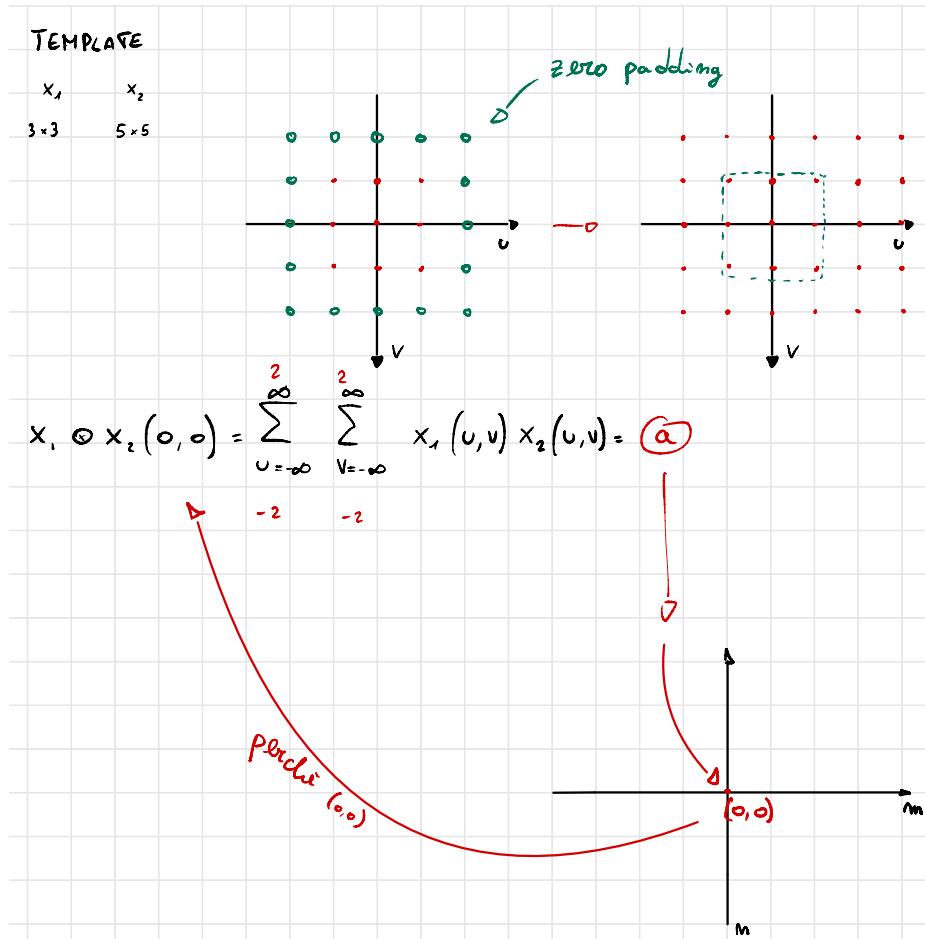


Figura 17: Esempio di Cross-Correlazione normalizzata 2D.

Esercizio Cross-Correlazione 2D

Dati le due immagini x_1 di dimensione 5×5 e x_2 di dimensione 3×3 , si calcola la cross-correlazione 2D. Quindi, si effettua la rappresentazione grafica.

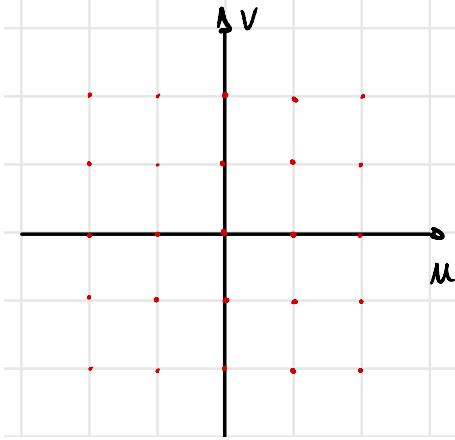


Figura 18: Piano cartesiano di x_2 di dimensione 5×5 .

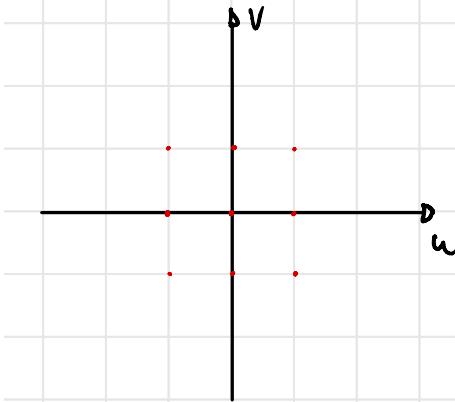


Figura 19: Piano cartesiano di x_1 di dimensione 3×3 .

E vengono fornite dall'esercizio le due matrici:

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esse indicano i valori nei punti corrispondenti. L'**obiettivo dell'esercizio** è trovare:

- L'argomento massimo della cross-correlazione ($\arg \max x_1 \otimes x_2 (m, n)$);
- Il massimo della cross-correlazione ($\max x_1 \otimes x_2 (m, n)$).

L'argomento massimo è con i valori $m = 1$ e $n = -1$ poiché così facendo la diagonale incontra tutti i valori positivi e che formano il massimo. Infatti, prendendo in considerazione la matrice x_2 5×5 e osservando l'operazione di cross-correlazione 2D:

$$\sum_u \sum_v x_1(u, v) \cdot x_2(u - m, v - n)$$

$$\xrightarrow{\text{sostituzione termini noti } (m,n)} \sum_u \sum_v x_1(u, v) \cdot x_2(u - 1, v - (-1))$$

Risulta evidente come si debba spostare a destra, rispetto l'origine, la matrice x_2 di un solo valore¹ e sotto, rispetto sempre l'origine, di un valore negativo². Così facendo, la diagonale della matrice x_2 corrisponderà esattamente a tutti i valori 1 della matrice x_1 .

¹Shift a destra poiché $u - 1$ nell'equazione rappresenta un ritardo.

²Spostamento sotto l'asse delle ascisse poiché è un valore positivo $v + 1$.

1.3.5 Convoluzione

La **convoluzione** è un parente stretto della cross-correlazione, ma è leggermente diverso. È definito nel seguente modo:

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Con $t \in \mathbb{R}$. Si ricordi che se i **segnali** non sono né di **energia** né di **potenza**, l'integrale converge.

Nel caso in cui i **segnali** siano **discreti**, dati $x_1(n)$, $x_2(n)$:

$$x_1 * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) x_2(n - k)$$

Con $k \in \mathbb{Z}$.

Nel caso in cui $x_1(n)$ e $x_2(n)$ sono limitati di lunghezza M ed N rispettivamente, allora la **convoluzione** è di lunghezza $M + N - 1$.

Convoluzione 2D

Nel caso delle immagini, quindi del 2D, x_1 ed x_2 sono solitamente **segnali digitali ad intervallo limitato**, e la convoluzione diventa dunque:

$$x_1 * x_2(m, n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(m - u, n - v) \quad u, v, m, n \in \mathbb{Z}$$

Solitamente il primo segnale x_1 viene chiamato **filtro**, o **matrice kernel**, mentre x_2 genericamente **immagine** (solitamente la matrice kernel ha una dimensione inferiore di quella dell'immagine).

2 Analisi di Fourier

2.1 Serie di Fourier

Una funzione, chiamata **funzione di sintesi**, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di variabile continua t , periodica di periodo T , si esprime come:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{e^{j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dove c_n è un numero complesso. Invece, una **funzione di analisi** è espressa come:

$$c_n \in \mathbb{C} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \underbrace{e^{-j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

N.B. si ricorda che $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$ è un **fasore rotante** di velocità angolare $\frac{2\pi n}{T} t$.

La **funzione di sintesi** quindi non è altro che una somma di infiniti termini. Ciascuno è composto dalla moltiplicazione tra un numero complesso ed un fasore, il quale *produce un altro fasore*. Esprimendo c_n come numero complesso in forma polare:

$$c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j \theta_n} e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j(\frac{2\pi n}{T} t + \theta_n)}$$

Si può notare come questa conversione corrisponda ad **estendere** il fasore $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$ ad una lunghezza $|c_n|$ facendolo partire con un **angolo di partenza** uguale a θ_n (chiamato **angolo di fase**).

Altra osservazione: se c_n appartiene all'insieme \mathbb{R} , significa che θ_n non compare. Questo comporta un cambiamento nella lunghezza dell' n -esimo fasore pari a $|c_n|$:

$$c_n = |c_n| e^{j \theta_n}$$

Esempio 1

Il primo esempio di serie di Fourier si applica per il segnale trigonometrico:

$$f(t) = \cos(2\pi t) \quad \text{con } T = 1$$

Applicando la **funzione di analisi** e saltando i passaggi perché complessi, si ottengono i seguenti valori:

$$c_{-1} = \frac{1}{2} \quad c_0 = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2} \quad c_{i \leq -2, i \geq 2} = 0$$

E sostituendo nella **funzione di sintesi**:

$$\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} = \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}$$

Ci sono **tre osservazioni** da fare:

I. $\frac{2\pi}{T} = f_0$;

II. $c_n = |c_n|e^{j\theta_n}$;

III. In questo caso, $c_n \in \mathbb{R}$ quindi l'angolo di fase non è presente.

Le parti dell'equazione sono le seguenti:

$$\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t}$$

☞ $\cos(2\pi t)$ → La funzione trigonometrica da studiare

☞ $\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}$ → Fasore di modulo 0.5 e velocità angolare $-2\pi t$

☞ $\frac{1}{2}e^{j2\pi t}$ → Fasore di modulo 0.5 e velocità angolare $2\pi t$

I coefficienti $c_{n=-1}$ e $c_{n=1}$ sono relativi ai **moduli o ampiezze dei fasori** complessi di frequenza $f_0 \cdot n$ con $n = -1, 1$ e ricordando che:

$$\exp\left(j\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right) = \exp(j(f_0 nt))$$

Che si possono annotare con le variabili f_{-1} e f_1 per $f_0 \cdot n$ con $n = -1, 1$ e analogamente per gli altri $n \in \mathbb{Z}$.

Inoltre, è possibile disegnare lo **spettro di ampiezza** che **mostra i moduli dei fasori costruiti con la trasformata di Fourier**, in particolare la funzione di sintesi.

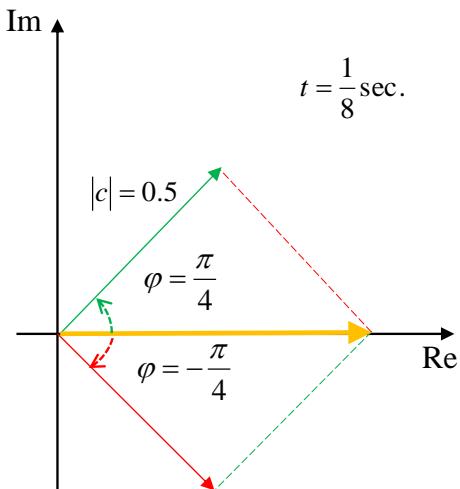


Figura 20: Grafico rappresentante i due fasori. La freccia verde rappresenta il valore assunto da $\cos(2\pi t)$ per $t = \frac{1}{8}$.

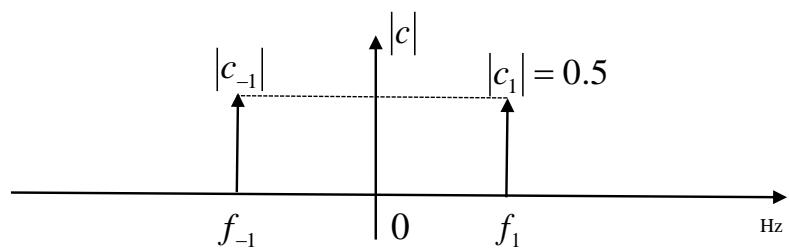


Figura 21: Grafico che rappresenta lo spettro di ampiezza.

Esempio 2

Il secondo esempio di serie di Fourier è il segnale trigonometrico:

$$f(t) = \sin(2\pi t) \quad \text{con } T = 1$$

Applicando la **funzione di analisi** e saltando i passaggi perché complessi, si ottengono i seguenti valori:

$$c_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad c_0 = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2j} \quad c_{i \leq -2, i \geq 2} = 0$$

Dove questa volta $c_n \in \mathbb{C}$ ed in particolare:

$$\pm \frac{1}{2j} = \pm \frac{1}{2j} \cdot \frac{j}{j} = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{j}{j^2} = j \cdot \mp \frac{1}{2}$$

Si passa alla forma di esponenziale complesso:

$$\begin{aligned} j \cdot \frac{1}{2} &= 0 + j \cdot \frac{1}{2} \\ |c| &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{0.5}{0}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} &= c_{-1} \end{aligned}$$

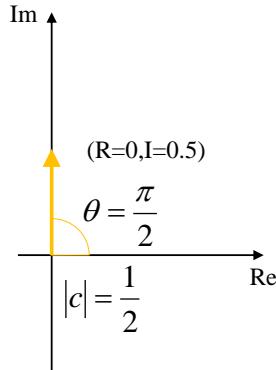


Figura 22: Grafico di c_{-1} .

Analogamente:

$$\begin{aligned}j \cdot -\frac{1}{2} &= 0 + j \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\|c| &= \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\\theta &= \arctan\left(-\frac{0.5}{0}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\\frac{1}{2}e^{j \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} &= c_1\end{aligned}$$

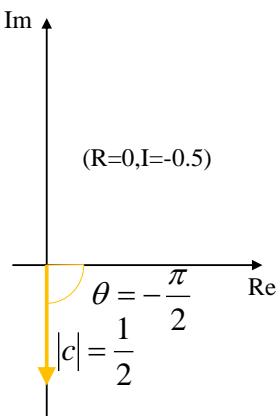


Figura 23: Grafico di c_1 .

Applicando l'**equazione di sintesi** e sostituendo i termini noti:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = c_{-1} e^{j -2\pi t} + c_1 e^{j 2\pi t} \\ \text{sostituzione dei termini noti } c_{-1}, c_1 &\Rightarrow \frac{1}{2} e^{j \frac{\pi}{2}} e^{j \cdot (-2\pi t)} + \frac{1}{2} e^{j -\frac{\pi}{2}} e^{j 2\pi t} \\ \text{forma finale} &\Rightarrow \frac{1}{2} \exp\left(j\left(-2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \exp\left(j\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

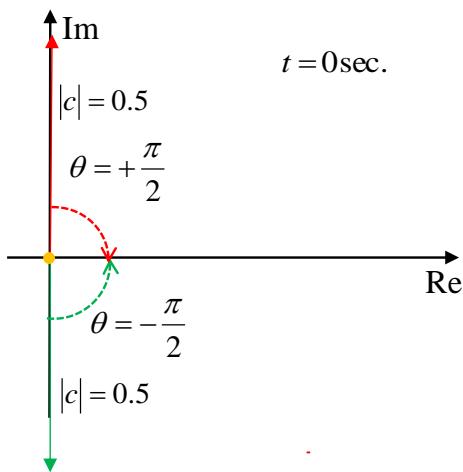


Figura 24: Grafico finale.

Infine, si disegna lo **spettro di ampiezza** e lo **spettro di fase**, quest'ultimo è un **grafico in cui si riportano gli angoli di fase della funzione**.

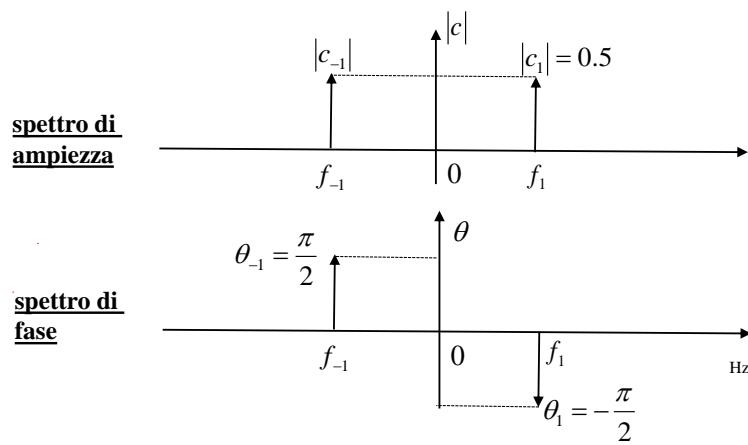


Figura 25: Spettro di ampiezza e di fase della funzione $\sin(2\pi t)$.

2.1.1 Proprietà della serie di Fourier

Lo **spettro di ampiezza e di fase** sono funzioni nel dominio delle frequenze che formano lo **spettro di Fourier**. Lo spettro di Fourier per i segnali periodici gode delle **seguenti proprietà**:

- Lo **spettro di ampiezza** è *simmetrico* rispetto all'asse y ;
- Lo **spettro di fase** è *antisimmetrico* rispetto all'asse y ;
- Se i coefficienti c_n sono reali, **non esiste lo spettro di fase**;
- Entrambe gli spettri sono funzioni a pettine, definite su frequenze multiple rispetto a quella fondamentale:

$$\left\{ \frac{2\pi n}{T} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{f_0 \cdot n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

2.2 Trasformata di Fourier continua

2.2.1 Trasformata di Fourier

Sia $f(t)$ un **segnale reale continuo** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodico o non, si definisce la **Trasformata di Fourier** (TdF) $\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu)$ il segnale $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

L'**unità frequenziale** μ è l'angolo di $\frac{n}{T}$ della serie di Fourier (per esempio, con $n = 1$, $T = 1$ sec. $\rightarrow \mu = 1$ sec. $^{-1}$ = 1 Hz).

La Trasformata di Fourier esiste se $f(t)$ è un **segnale di energia**. Condizione sufficiente e non necessaria perché altri segnali ammettono la TdF.

2.2.2 Trasformata di Fourier inversa

Sia $F(\mu)$ la trasformata di Fourier di un segnale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si definisce la **trasformata di Fourier inversa** il segnale $\mathcal{F}^{-1}(F(\mu)) = f(t)$:

$$\mathcal{F}^{-1} = (F(\mu)) = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

La trasformata di Fourier restituisce, per una data frequenza μ , un coefficiente di “presenza” $F(\mu)$. Infatti, la sua inversa permette di ricostruire f a partire da F .

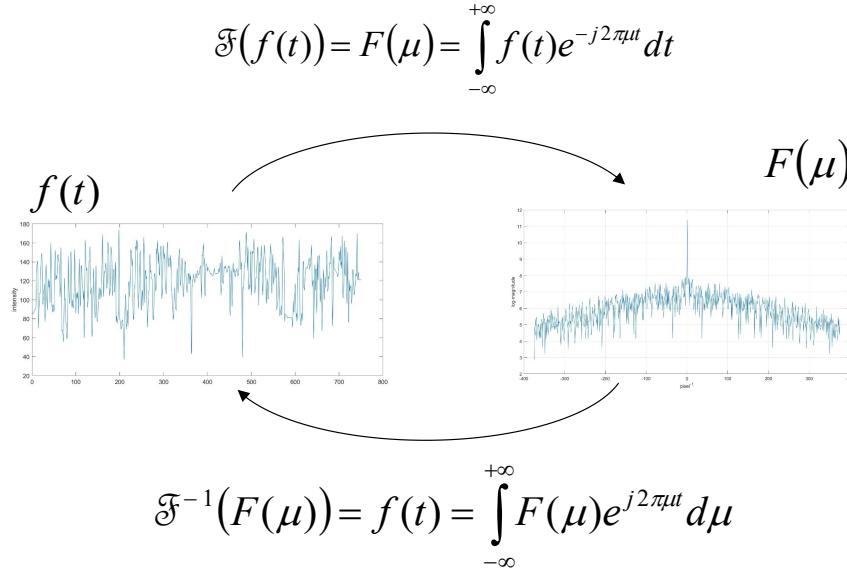


Figura 26: (Anti)Trasformata di Fourier su un segnale $f(t)$.

Nel caso in cui il segnale $f(t)$ non è reale, la trasformata è complessa:

- t rappresenta il **tempo** (in secondi), allora μ rappresenta gli **Hertz**, cioè $\frac{\text{numero cicli}}{\text{secondi}}$;
- t rappresenta lo **spazio** (in metri), allora μ rappresenta la **frequenza spaziale**, cioè $\frac{\text{numero cicli}}{\text{metri}}$

Mentre nella serie di Fourier le funzioni rappresentate negli spettri di ampiezza e di fase erano a “pettine” (paragrafo 2.1.1), in questo caso le funzioni sono solitamente continue, nello spettro di ampiezza, o continue a tratti:

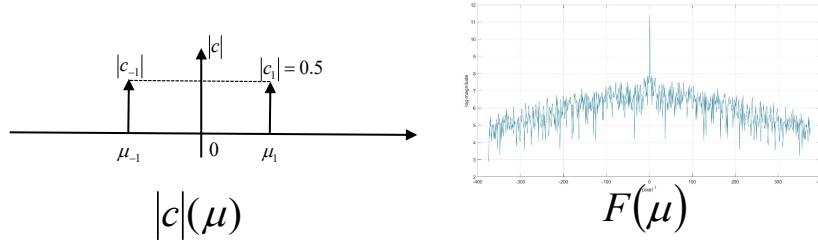


Figura 27: Esempio di spettro di ampiezza.

2.2.3 Proprietà della trasformata di Fourier

☞ Linearità

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_1 F_1(\mu) + a_2 F_2(\mu)$$

☞ Scalatura temporale

$$z(t) = f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(\mu) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\mu}{a}\right)$$

☞ Dualità

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\mu) \\ F(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(-\mu) \end{aligned}$$

N.B. derivando la forma analitica per una trasformata, la sua antitrasformata ne produce un'altra con segno opposto.

☞ Time shift

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t - t_0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi\mu(u+t_0)} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi\mu u} e^{-j2\pi\mu t_0} du \\ &= e^{-j2\pi\mu t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi\mu u} du \\ &= F(\mu) \underbrace{e^{-j2\pi\mu t_0}}_{\text{fase}} \end{aligned}$$

2.2.4 Trasformata di Fourier di una box

La trasformata di Fourier di una box (paragrafo 1.2.3) è la seguente:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\Pi\left(\frac{t}{w}\right) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

Il risultato corrisponde alla funzione sinc:

$$f(\mu) = Aw \cdot \text{sinc}(\mu w)$$

Dove la funzione sinc è uguale a:

$$\text{sinc} = \frac{\sin(\pi\mu w)}{\pi\mu w}$$

Per ripassare la funzione sinc, si rimanda al paragrafo 1.2.4. Tuttavia, si ricorda che la sua forma generale è del tipo:

$$\text{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{\pi m}$$

E risultata uguale a:

- $\text{sinc}(0) = 1$
- $\text{sinc}(m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

Prima di concludere, si ricorda che:

- ☞ All'aumentare della larghezza della box, la funzione sinc tenderà a stringersi;
- ☞ La box è **limita**, invece la sinc è **infinita** a destra e sinistra, anche se il termine al denominatore attenua il valore della funzione comportando un limite a 0.
- ☞ In sintesi, la TdF di una box è:

$$\Pi\left(\frac{t}{w}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} w \cdot \text{sinc}(\mu w)$$

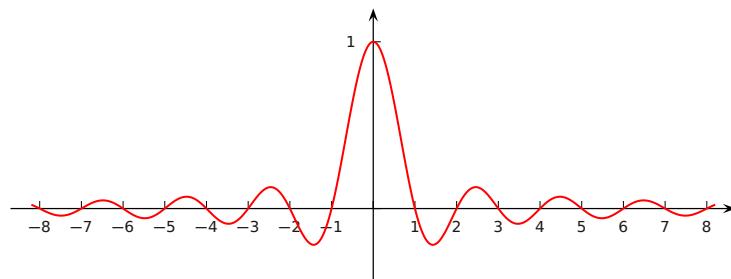


Figura 28: Grafico della funzione sinc.

2.2.5 Trasformata di Fourier di un sinc

La trasformata di Fourier di un segnale sinc (segnale rappresentato in figura 28) è la seguente:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(tw) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

Dato che la TdF di una box è:

$$\Pi\left(\frac{t}{w}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} w \cdot \text{sinc}(\mu w)$$

Al contrario, si ottiene la trasformata di Fourier di un sinc:

$$\text{sinc}(tw) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{w} \Pi\left(-\frac{\mu}{w}\right) = \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{w}\right)$$

2.2.6 Trasformata di Fourier di un impulso

La trasformata di Fourier di un impulso³ è la seguente:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

Il risultato della trasformata di Fourier di un impulso è molto semplice grazie alle sue proprietà. Infatti, il risultato è uguale a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(0) e^{-j2\pi\mu 0} dt = 1$$

La proprietà che consente di ottenere il risultato uguale a 1 è la seguente:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

N.B. In questo caso è rappresentabile solo lo spettro di ampiezza!

Analogamente, con un impulso centrato in t_0 , quindi non nell'origine:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt = e^{-j2\pi\mu t_0}$$

Il risultato è stato ottenuto grazie alla proprietà di setacciamento (definita a pagina 9). Tuttavia, in questo caso i valori non sono più reali ma complessi.

³Definizione di impulso al paragrafo 1.2.3.

2.2.7 Trasformata di Fourier di un treno di impulsi

Data la definizione di treno di impulsi (funzione definita nel paragrafo 1.2.8):

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si ottiene la sua relativa trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}(S_{\Delta T}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\Delta T}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

Tralasciando i vari calcoli numerici per arrivare al risultato, si può scrivere la trasformata di Fourier in maniera più semplice:

$$S_{\Delta T}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

2.2.8 Sintesi

Qui di seguito si lascia un riassunto rapido delle trasformate di Fourier dei segnali più importanti.

Segnale	Trasformata di Fourier	
Box:	$A\Pi\left(\frac{t}{w}\right)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $Aw \cdot \text{sinc}(\mu w)$
Sinc:	$\text{sinc}(tw)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\frac{1}{w} \cdot \Pi\left(-\frac{\mu}{w}\right) = \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{w}\right)$
Impulso:	$\delta(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\begin{cases} 1 & \text{se valori reali} \\ e^{-j2\pi\mu t_0} & \text{se valori complessi} \end{cases}$
Treno di impulsi:	$S_{\Delta T}(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$

Tabella 1: Trasformate di Fourier dei segnali più importanti.