

# Elaborazione di segnali e immagini

VR443470

gennaio 2023

# Indice

<b>1 Fondamenti</b>	<b>4</b>
1.1 Matematica preliminare . . . . .	4
1.1.1 Numeri complessi . . . . .	4
1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale . . . . .	5
1.1.3 Funzioni pari e dispari . . . . .	6
1.1.4 Segnali periodici . . . . .	7
1.2 Operazioni fondamentali . . . . .	8
1.2.1 Somma . . . . .	8
1.2.2 Shift (o traslazione) . . . . .	9
1.2.3 Funzione box $\Pi$ e impulso di Dirac . . . . .	10
1.2.4 Funzione sinc . . . . .	11
1.2.5 Funzione triangolo $\Lambda$ . . . . .	11
1.2.6 Funzione segno ( $sgn$ ) . . . . .	11
1.2.7 Funzione gradino . . . . .	11
1.2.8 Treno di impulsi . . . . .	12
1.2.9 Energia di un segnale . . . . .	12
1.2.10 Potenza media di un segnale . . . . .	13
1.3 Altre operazioni fondamentali . . . . .	14
1.3.1 Rescaling (o riscalatura) . . . . .	14
1.3.2 Cross-Correlazione . . . . .	15
1.3.3 Esercizi d'esame . . . . .	16
1.3.4 Cross-Correlazione Normalizzata . . . . .	22
1.3.5 Convoluzione . . . . .	28
<b>2 Analisi di Fourier</b>	<b>29</b>
2.1 Serie di Fourier . . . . .	29
2.1.1 Proprietà della serie di Fourier . . . . .	35
2.2 Trasformata di Fourier continua . . . . .	36
2.2.1 Trasformata di Fourier . . . . .	36
2.2.2 Trasformata di Fourier inversa . . . . .	36
2.2.3 Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	38
2.2.4 Trasformata di Fourier di una box . . . . .	39
2.2.5 Trasformata di Fourier di un sinc . . . . .	40
2.2.6 Trasformata di Fourier di un impulso . . . . .	41
2.2.7 Trasformata di Fourier di un treno di impulsi . . . . .	42
2.2.8 Sintesi . . . . .	43
2.3 Trasformata di Fourier a tempo discreto . . . . .	44
2.3.1 Campionamento . . . . .	44
2.3.2 Trasformata di Fourier a tempo discreto . . . . .	45
2.3.3 Teorema del campionamento . . . . .	46
2.3.4 Considerazioni . . . . .	46
2.4 Trasformata di Fourier discreta . . . . .	47
2.5 Riassunto Trasformate . . . . .	49
2.6 Domanda da esame . . . . .	50

<b>3 Elaborazione di immagini - Dominio spaziale</b>	<b>51</b>
3.1 Strumento per l'elaborazione: istogramma . . . . .	52
3.2 Domini . . . . .	54
3.3 Operazioni puntuali . . . . .	55
3.3.1 Identità . . . . .	56
3.3.2 Negativo . . . . .	56
3.3.3 Clamping . . . . .	56
3.3.4 Stretching/Shrinking . . . . .	56
3.3.5 Trasformazione logaritmica . . . . .	57
3.3.6 Trasformazione esponenziale . . . . .	57
3.3.7 Trasformazione di potenza . . . . .	58
3.3.8 Binarizzazione . . . . .	58
3.3.9 Binarizzazione attraverso il metodo di Otsu . . . . .	59
3.3.10 Equalizzazione . . . . .	60
3.4 Operazioni locali . . . . .	64
3.4.1 Filtraggi spaziali: lineari e non lineari . . . . .	65
3.5 Rumore nelle immagini . . . . .	67
3.5.1 Rumore gaussiano additivo bianco . . . . .	68
3.5.2 Rumore impulsivo . . . . .	69
3.6 Altre operazioni locali: tipologie di filtraggio . . . . .	70
3.6.1 Smoothing - Filtro media . . . . .	71
3.6.2 Smoothing - Filtro mediano . . . . .	72
3.6.3 Smoothing - Filtro gaussiano . . . . .	73
3.6.4 Domanda da <b>esame</b> . . . . .	74
3.6.5 Filtraggi di sharpening . . . . .	75
3.6.6 Sharpening - Basic Highpass Spatial Filtering . . . . .	77
3.6.7 Sharpening - Filtro Laplaciano . . . . .	78
3.6.8 Sharpening - High Boost Filtering . . . . .	78
<b>4 Elaborazione di immagini - Rinforzo del dominio delle frequenze</b>	<b>79</b>
4.1 Ripasso formule utili . . . . .	79
4.2 Rumore nel dominio delle frequenze . . . . .	81
4.3 Panoramica su filtri passa alto ( <i>high-pass</i> ) e passa basso ( <i>low-pass</i> )	82
4.4 Filtri passa basso ( <i>low-pass</i> ) . . . . .	83
4.4.1 Filtri passa basso ideale . . . . .	83
4.4.2 Filtri passa basso di Butterworth . . . . .	85
4.4.3 Filtri passa basso Gaussiano . . . . .	87
4.4.4 Sintesi . . . . .	87
4.5 Filtri passa alto ( <i>high-pass</i> ) . . . . .	88
4.5.1 Filtri passa alto ideale . . . . .	89
4.5.2 Filtri passa alto di Butterworth . . . . .	89
4.5.3 Filtri passa alto Gaussiano . . . . .	90
4.6 Filtri per enfatizzare le alte frequenze . . . . .	91
4.7 Filtri passa banda e ferma banda . . . . .	91

# 1 Fondamenti

## 1.1 Matematica preliminare

### 1.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso  $c$  appartiene all'insieme dei complessi  $\mathbb{C}$  e la sua forma è del tipo:

$$c = \Re + j\Im$$

con  $\Re, \Im$  variabili  $\in \mathbb{R}$  e  $j$  chiamata *unità immaginaria* rappresentata come  $j = \sqrt{-1}$ . Inoltre,  $\Re$  rappresenta la *parte reale* e  $\Im$  la *parte immaginaria*. Il coniugato di  $c$  è

$$\tilde{c} = \Re - j\Im$$

I numeri complessi, dal punto di vista geometrico, possono essere visti come punti su un piano (chiamato *piano complesso*) e descritti da coordinate  $(R, I)$ . Nel piano complesso, le ascisse ( $x$ ) sono rappresentate dalla parte reale, mentre le ordinate ( $y$ ) dalla parte immaginaria.

Spesso è utile rappresentare i numeri complessi in coordinate polari formate nel seguente modo (*modulo, angolo*). Questa forma viene denominata *forma polare* di un numero complesso:

$$c = \Re + j\Im = |c|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

dove:

$$|c| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \longrightarrow \text{chiamato } \textit{modulo} \text{ o } \textit{magnitudo}$$

invece, *theta* rappresenta:

$$\theta \cong \arctan \left( \frac{\Im}{\Re} \right) \longrightarrow \text{chiamato } \textit{angolo}, \textit{fase} \text{ o } \textit{argomento in radianti}$$

Grazie alla formula di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

è possibile riscrivere la forma polare di un numero complesso in maniera alternativa, ossia:

$$c = \Re + j\Im = |c| (\cos \theta + j \sin \theta) = |c| e^{j\theta}$$

La **somma** e la **moltiplicazione** di due numeri complessi diventa:

$$c_1 = R_1 + jI_1 \quad c_2 = R_2 + jI_2$$

$$\text{Somma: } c_1 + c_2 = (R_1 + R_2) + j(I_1 + I_2)$$

$$\text{Moltiplicazione con Eulero: } c_1 \cdot c_2 = (R_1 R_2 - I_1 I_2) + j(R_1 I_2 + I_1 R_2) \longrightarrow = |c_1||c_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

### 1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale

Dato  $t \in \mathbb{R}$ , una funzione  $f$  complessa di variabile reale è  $f : D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D_2 \subseteq \mathbb{C}$ . Viene introdotto questo concetto poiché il **fasore** è un eSEMPIO fondamentALE. Le **caratteristiche** di questa funzione:

- È una funzione complessa che modella la posizione di un punto che ruota attorno all'origine con raggio determinato  $|c|$  e velocità angolare costante  $\theta(t)$ .
- Se la funzione fosse nei numeri reali, sarebbe più dispendioso in termini di numero di funzioni da utilizzare.

L'**obiettivo** dei fasori è quello di *passare dal dominio del tempo* (o spazio) a *quello dell'analisi frequenziale*.

La particolarità è che nel tempo il fasore riesce a variare un numero complesso (in forma polare) mantenendo il modulo  $|c|$  fisso:

$$|c|e^{j\theta} \rightarrow |c|e^{j\theta(t)}$$

dove  $\theta(t)$  indica la **velocità angolare**. Quest'ultima può essere calcolata tramite:

$$\theta(t) \longrightarrow \frac{2\pi}{T_0}t + \phi$$

dove  $T_0$  indica il *tempo* impiegato per eseguire  $2\pi$  radianti.

Soltamente si utilizza il fasore con le seguenti supposizioni:

- Coordinate rappresentate con  $(R, I)$
- Impostata una distanza unitaria fissa dall'origine  $|c| = 1$
- Velocità angolare costante pari a  $2\pi/\text{sec.}$ , ossia  $\theta(t) = 2\pi t, T_0 = 1\text{sec.}$
- Con  $t = 0$  si ha  $\theta = 0$
- Viene mantenuto  $\phi = 0$

### 1.1.3 Funzioni pari e dispari

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **pari** se e solo se:

$$f(t) = f(-t)$$

Invece, una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è **dispari** se e solo se:

$$f(t) = -f(-t)$$

#### 1.1.4 Segnali periodici

Un segnale  $f$  è **periodico** di periodo  $T$  o  $T$ -periodico se:

$$\exists T_0 \in R^+ : f(t + T_0) = f(t), \quad \forall t \in D_1$$

e  $T_0$  è il minor numero per cui la condizione di ripetizione si verifica.

Dato un periodo  $T_0$  con la lettera  $\mu_0$  si indica la **frequenza fondamentale**:

$$\mu_0 = \frac{1}{T_0}$$

Fissato  $T_0 > 0$  i **segnali trigonometrici** di minimo periodo  $T_0$  sono:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t)$$

dove  $\mu$  è una frequenza generale, mentre  $\mu_0 = \frac{1}{T_0}$  è la **frequenza fondamentale**. Invece, spesso la **velocità angolare** o **pulsazione** viene rappresentata come:

$$2\pi\mu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

Inoltre, fissato un  $\theta \in \mathbb{R}$  chiamato **fase** si osserva che anche le funzioni:

$$f(t) = \cos(2\pi\mu_0 t + \theta) \quad f(t) = \sin(2\pi\mu_0 t + \theta)$$

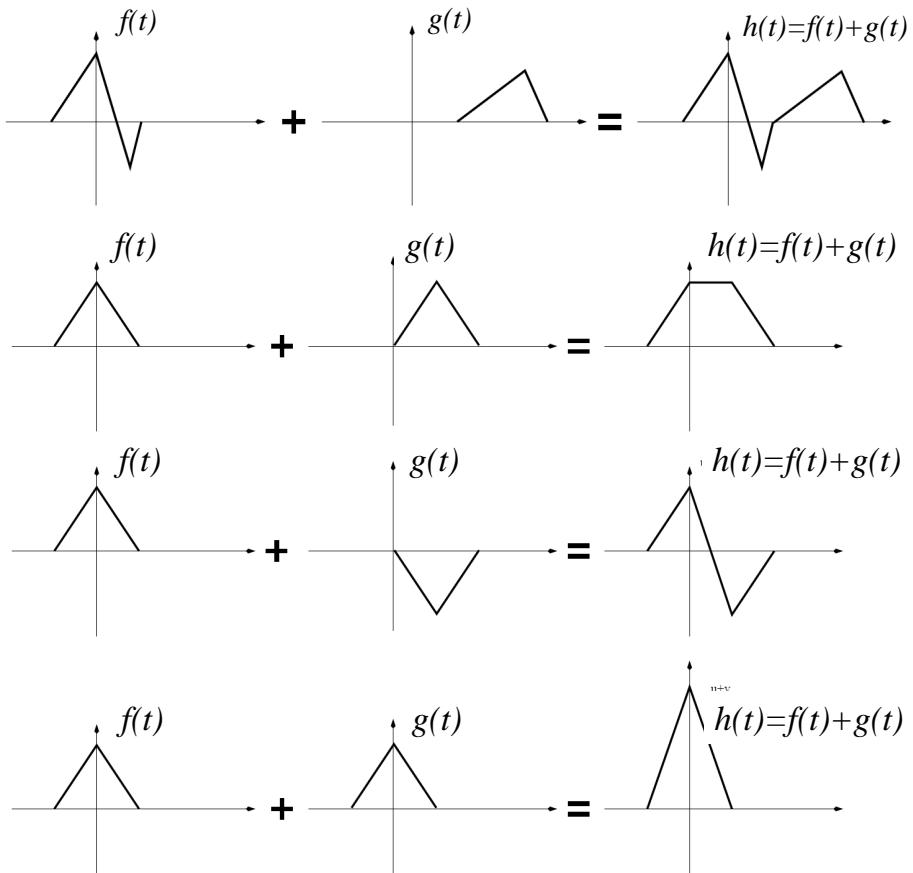
hanno il medesimo periodo  $T$ .

Infine, la fase  $\theta$  permette di eseguire operazione di *shift*.

## 1.2 Operazioni fondamentali

### 1.2.1 Somma

La *somma* di due segnali è facile quando essi non interferiscono, ovvero quando **non** sono contemporaneamente  $\neq 0$ . Alcuni esempi qui di seguito.



### 1.2.2 Shift (o traslazione)

Lo **shift** (o traslazione) è il cambio di posizione di un segnale. Può essere effettuato:

- **Traslazione a destra** con la funzione  $f(t - \tau)$
- **Traslazione a sinistra** con la funzione  $f(t + \tau)$

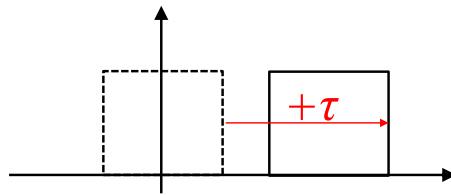


Figura 1: Shift a destra

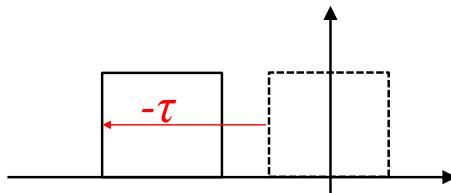


Figura 2: Shift a sinistra

### 1.2.3 Funzione box II e impulso di Dirac

La funzione ***box*** è definita nel seguente modo:

$$A\Pi\left(\frac{x}{b}\right) \quad x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

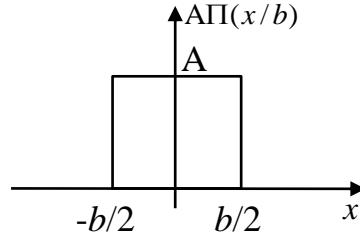


Figura 3: Box generica

La funzione  $\delta(x)$  è chiamata ***impulso unitario*** o ***impulso di Dirac*** perché è definita nel seguente modo:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Quindi è un impulso che tende all'infinito solamente quando la  $x$  è nell'origine, ma il suo integrale è uguale a 1. Alcune **proprietà** dell'impulso:

1.  $\delta(x - x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0$
2. Data una funzione generica  $f$  (**setacciamento**):  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dt = f(x_0)$
3.  $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
4.  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ fissato } a \in \mathbb{R} - \{0\}$

#### 1.2.4 Funzione sinc

La funzione **sinc** è definita nel seguente modo:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Ha due **caratteristiche** importanti: (1) l'intersezione con l'asse delle  $x$  avviene sempre nei numeri interi positivi e negativi (quindi 1 e -1, 2 e -2, ecc.); (2) il limite  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{sinc}(t) = 0$ .

Questa funzione è **importante per l'analisi nel dominio del tempo (o frequenza)**.

#### 1.2.5 Funzione triangolo $\Lambda$

La funzione **triangolo** è definita nel seguente modo:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è **importante per l'analisi spettrale e per le operazioni di convoluzione**.

#### 1.2.6 Funzione segno ( $\text{sgn}$ )

La funzione **segno** è definita nel seguente modo:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione ribalta segnali sopra o sotto l'asse delle  $x$ .

#### 1.2.7 Funzione gradino

La funzione **gradino** è definita nel seguente modo:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Questa funzione rappresenta un **segnale** che si attiva a partire dal tempo specificato e rimane attivo indefinitamente. Attenzione! Non si confonda questo segnale con il segno.

### 1.2.8 Treno di impulsi

Il **treno di impulsi**  $S_{\Delta T}(x)$  è la somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità  $\Delta T$ :

$$S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

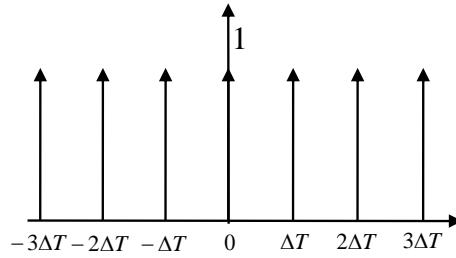


Figura 4: Treno di impulsi

### 1.2.9 Energia di un segnale

L'**energia di un segnale** è definita nel seguente modo:

$$E_f = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt & \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), \quad f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **ad energia finita** (o **di energia**) se l'integrale che rappresenta l'energia converge ed è diverso da 0. Quindi:

- ☞ **Condizione sufficiente** all'esistenza della sua trasformata di Fourier. Le funzioni trigonometriche non sono di energia ma hanno comunque la Trasformata di Fourier.
- ☞ **Condizione necessaria** per essere un segnale ad energia finita, all'infinito ( $+\infty$  e  $-\infty$ ) l'**ampiezza** va a zero.

Alcuni esempi:

- ★ **Segnali di energia.** Impulsi rettangolari, oscillazioni smorzate (sinc);
- ★ **Segnali non di energia.** Funzioni trigonometriche sin e cos.

L'**unità di misura** è il *joule*.

### 1.2.10 Potenza media di un segnale

La *potenza media di un segnale* è definita nel seguente modo:

$$P_f = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t) dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \quad \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), & f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **a potenza finita** (o **di potenza**) se l'integrale che rappresenta la potenza converge ed è diverso da 0. L'**unità di misura** è il *watt*.

Infine, un segnale ad energia finita ha la potenza che tende a zero (per cui un segnale non può appartenere ad entrambe le categorie). Invece, esistono segnali che non sono né di energia, né di potenza finita.

## 1.3 Altre operazioni fondamentali

### 1.3.1 Rescaling (o riscalatura)

La funzione di *rescaling* è definita nel seguente modo:

$$\forall f(t) : D_1 \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0$$

Simile allo *shift*, il *rescaling* ha una definizione generica e due varianti:

- **Definizione generica** con la funzione semplice  $f(t)$  (immagine 5).
- **Ritardo lineare del segnale di un fattore  $\omega$**  con la funzione  $f(\omega t)$ ,  $0 < \omega < 1$  (immagine 6).
- **Accelero lineare del segnale di un fattore  $\omega$**  con la funzione  $f(\omega t)$ ,  $\omega > 1$  (immagine 7).

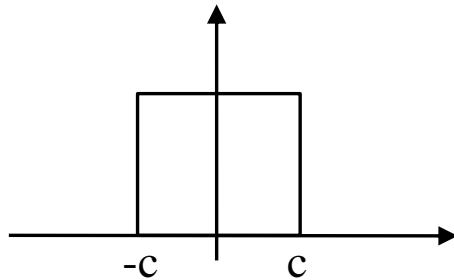


Figura 5: Definizione generica

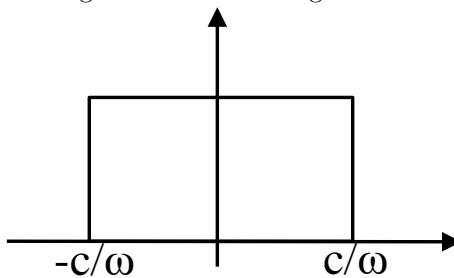


Figura 6: Ritardo lineare del segnale di un fattore  $\omega$

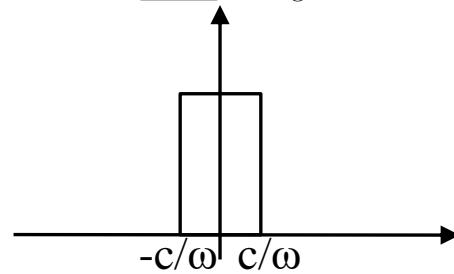


Figura 7: Accelero lineare del segnale di un fattore  $\omega$

### 1.3.2 Cross-Correlazione

Dati  $f_1(\tau), f_2(\tau)$  segnali continui,  $\tau \in \mathbb{R}$  il segnale di ***cross-correlazione*** viene definito come:

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

In cui  $\tilde{f}_1(\tau)$  rappresenta un *complesso coniugato*. Nel caso in cui  $f_1$  è reale, allora  $\tilde{f}_1(\tau) \rightarrow f_1(\tau)$ .

Infine, con  $t = 0$  si ha l'***integrale di cross-correlazione***, il quale è definito se l'integrale converge (ovviamente se il segnale non è né di energia, né di potenza, la convergenza non esiste!).

### 1.3.3 Esercizi d'esame

**Esercizio.**

Il primo esercizio fornisce una funzione  $f(t)$ :

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$$

Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

- I Rappresentare graficamente il segnale;
- II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se  $f(t)$  è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida. Infine, calcolare l'energia o la potenza nel caso in cui  $f(t)$  sia solo composta da  $e^{-2t}$ ;
- III Scrivere l'espressione analitica rispetto  $z(t) = -f(-t)$  e  $v(t) = f(t+4)$

**Risoluzione I.**

Il **primo passo** è quello di scomporre la funzione così da avere una visione più chiara sulle operazioni da effettuare:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t} \longrightarrow f(t) = \Pi\left(\frac{1}{4} \cdot (t-2)\right)$$

Come si può osservare, ci sono due operazioni da eseguire. Quindi, dopo l'esplicitazione si esegue la rappresentazione del segnale base  $\Pi(t)$ :

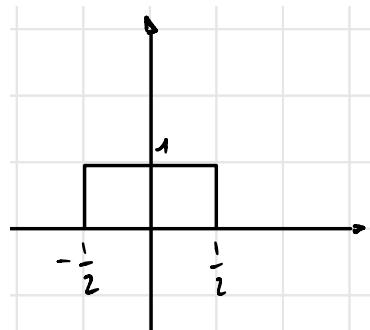


Figura 8: Rappresentazione della funzione  $f(t)$ , ovvero un box.

Adesso si esegue l'operazione di moltiplicazione per un fattore che in questo caso è  $\frac{1}{4}$ . Quindi si rappresenta la box  $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$ :

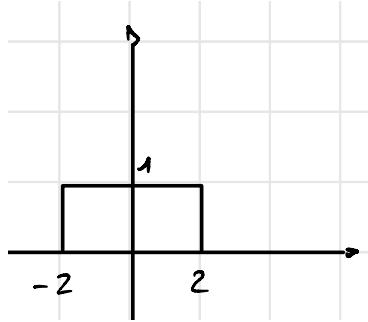


Figura 9: Box  $\Pi\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$  allargata.

L'operazione che è stata effettuata è stata semplicemente considerare la box del tipo  $\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$ . Ricordandosi le nozioni del corso di Sistemi, per definizione quindi la box è definita nell'intervallo  $-2, +2$ .

Infine, viene applicata l'ultima operazione, ovvero il  $-2$  all'incognita  $t$ . Quindi, la funzione box diventerà  $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$  e la sua rappresentazione grafica sarà uno shift a destra (ritardo):

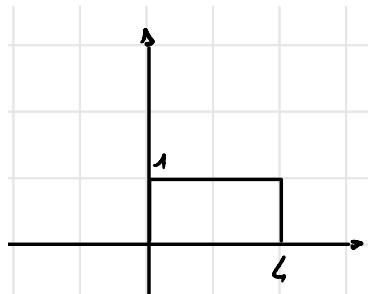


Figura 10: Box  $\Pi\left(\frac{1}{4}(t - 2)\right)$  dopo lo shift a destra.

Il **primo punto si conclude** con la rappresentazione del segnale  $e^{-2t}$  e la sua combinazione con la box. Quindi:

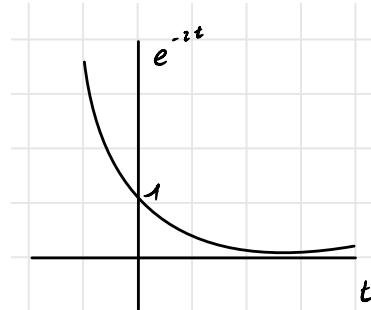


Figura 11: Rappresentazione della funzione  $e^{-2t}$

E infine la sua concatenazione con la box, quindi una sorta di applicazione di un filtro:

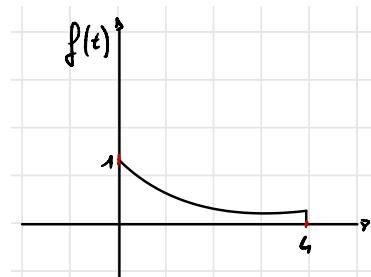


Figura 12: Rappresentazione finale della funzione  $f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$

### Risoluzione II.

Guardando la figura 12 si può già intuire che tipo di segnale sia. Infatti, dato che è limitato e non si estende all'infinito, per definizione è un **segnale finito**, quindi **di energia e non di potenza**. Per dimostrare questa affermazione, si eseguono i calcoli:

$$\text{Definizione di energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt$$

$$\text{Definizione di potenza: } P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$$

Dopo le definizioni, si esegue l'effettivo calcolo con i valori numerici:

#### Energia finita

$$E_f = \int_0^4 e^{-4t} dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_0^4 = \frac{-e^{-16} + 1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$$

#### Potenza finita

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^4 e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Come si osserva dai risultati, è un segnale di energia finita poiché è un valore noto, invece non è un segnale di potenza poiché il risultato è zero e non rispetta la definizione.

Al contrario, se la funzione fosse composta solamente dall'esponenziale, il calcolo dell'energia e della potenza sarebbe:

$$\text{Energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-4t} - e^{4t}}{-4} = \infty$$

$$\text{Potenza: } P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-4t}}{-4} \cdot \frac{1}{T} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-2T} - e^{2T}}{-4T} = \infty$$

Come si evince dai calcoli, il segnale non è né di energia né di potenza perché entrambi i risultati sono uguali a infinito.

### Risoluzione III.

Considerando la funzione  $z(t)$ , si osserva che è la copia simmetrica rispetto all'origine di  $f(t)$ . Invece, la funzione  $v(t)$  è identica alla funzione  $f(t)$  ma "shiftata" a sinistra di 4:

$$f(t) = -f(-t) \quad v(t) = f(t+4)$$

**Esercizio 2.**

Il secondo esercizio fornisce una funzione  $f(t)$ :

$$f(t) = \operatorname{sgn} \left( a \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right)$$

Con  $T_0 = 2$ . Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

- I Rappresentare graficamente il segnale;
- II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se  $f(t)$  è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida.

**Risoluzione I.**

Viene rappresentato il segnale della funzione segno sng:

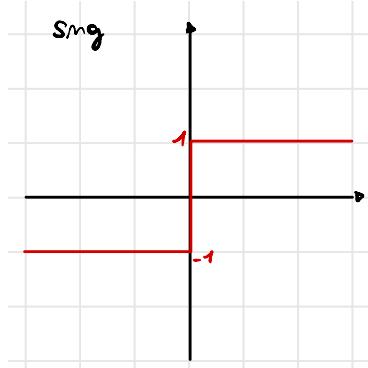


Figura 13: Funzione segno sng.

Si esplicitando le operazioni della funzione:

$$f(t) = \operatorname{sgn} \left( a \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right) = \cos \left( \frac{1}{T_0} \cdot 2\pi t \right)$$

E si rappresenta inizialmente la funzione  $\cos(2\pi)$  con  $T_0 = 1$ :

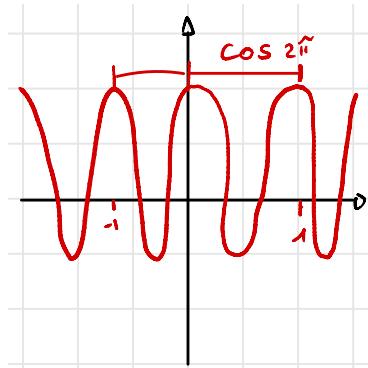


Figura 14: Funzione coseno  $\cos(2\pi)$ .

Si conclude la rappresentazione grafica aumentando  $T_0$  in maniera molto semplice:

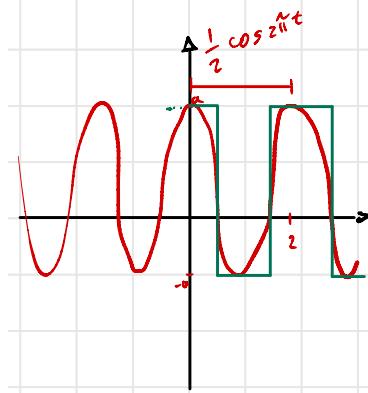


Figura 15: Funzione coseno  $\cos(2\pi)$  moltiplicata per  $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$ .

### Risoluzione II.

Si conclude l'esercizio calcolando l'energia o la potenza del segnale. Per farlo, dato che non è definito in un intervallo ma continua all'infinito, si calcolano i rispettivi integrali in un intervallo arbitrario  $n$  e poi lo si estende all'infinito:

$$\begin{aligned} E_f &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n \cdot \frac{T_0}{2}}^{n \cdot \frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \infty \\ P_f &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-n \cdot \frac{T_0}{2}}^{n \cdot \frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \cdot n \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot T_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \longrightarrow \neq 0 \end{aligned}$$

È evidente che il segnale è di potenza. Come si evince dalla figura 15, i tratti di colore verde indicano il rettangolo formato dal segnale. Calcolando l'area del rettangolo, si ottiene esattamente il valore di  $T_0$ . Infatti, la base del rettangolo (verticale) è 2, mentre l'altezza (orizzontale) è 1.

#### 1.3.4 Cross-Correlazione Normalizzata

Ha l'**obiettivo** di trattare segnali con range di valori diversi e consente di eseguire **confronti uno-a-molti** (*one-to-many*):

$$f_1 \bar{\otimes} f_2 (t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}}$$

In cui  $E_f$  indica l'**energia** del segnale  $f$ . Ci sono due caratteristiche importanti:

- $f_1 \bar{\otimes} f_2 (t) \in [-1, 1]$
- $|f_1 \bar{\otimes} f_2 (t)| = 1 \iff f_1(\tau) = \alpha f_2(\tau - t)$

Inoltre, si parla di **autocorrelazione** (normalizzata e non) quando  $f_1 = f_2$ . Utile per i segnali stocastici.

Nel **caso di segnali discreti**, dati  $x_1(k), x_2(k)$ :

$$x_1 \otimes x_2 (n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_1(k) x_2(k-n) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sotto l'ipotesi di convergenza della serie, cioè la serie deve convergere.

Nel caso in cui  $x_1(k)$  e  $x_2(k)$  sono limitati di lunghezza M ed N rispettivamente, allora la **cross correlazione è di lunghezza  $M + N - 1$** .

## Cross-Correlazione 1D

Data la definizione:

$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) x_2(k-n)$$

Esistono diverse casistiche:

- $n = 0$  si confronta tra  $x_1$  e  $x_2$  nei loro domini temporali originali.
- $n > 0$  sposta  $x_2$  a destra poiché c'è l'anticipo di  $x_2$
- $n < 0$  sposta  $x_2$  a sinistra poiché c'è ritardo di  $x_2$

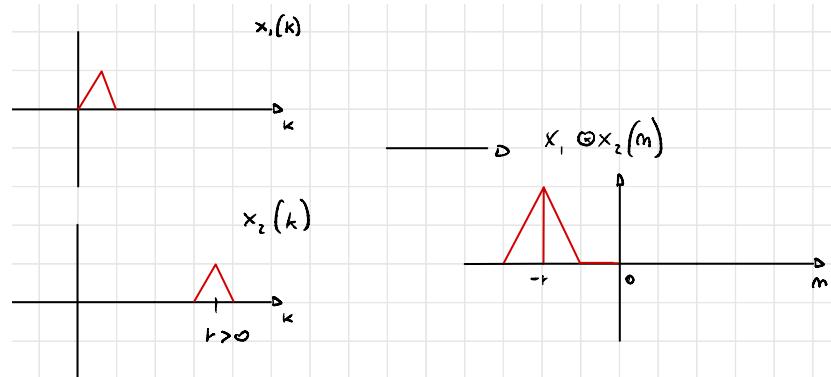


Figura 16: Esempio di cross-correlazione normalizzata 1D.

Il triangolo  $x_2$  va verso sinistra e il lasso di tempo che  $x_2$  non combacia con  $x_1$ , viene rappresentato come una linea orizzontale sull'asse delle  $n$  nel piano cartesiano di destra.

## Cross-Correlazione 2D

Data la definizione:

$$x_1 \otimes x_2 (m, n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(u - m, v - n) \quad u, v, m, n \in \mathbb{Z}$$

Nel 2D  $x_1$  e  $x_2$  possono essere pensate come **immagini infinite**.

Di solito  $x_1$  e  $x_2$  sono **immagini finite** (segnali digitali ad intervallo limitato), e gli estremi di sommatoria sono quindi finiti.

Il primo segnale  $x_1$  viene chiamato **template**, o **matrice kernel**, mentre  $x_2$  genericamente **immagine** (di solito, la matrice kernel  $x_1$  ha una dimensionalità minore di quella dell'immagine).

Nel caso  $x_1 = x_2$  si ha **autocorrelazione 2D**.

## Cross-Correlazione normalizzata 2D

Si definisce come:

$$x_1 \otimes x_2 (m, n) = \frac{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_1(u, v)] [x_2(u - m, v - n)]}{\sqrt{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_1(u, v)]^2 \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} [x_2(u, v)]^2}}$$

In altre parole, fissato il punto di applicazione  $n, m$ , si sottrae la media ad ogni punto nell'interno di applicazione dalla matrice kernel. Successivamente, si divide per il prodotto della varianza dei due segnali, estraendo a radice alla fine.

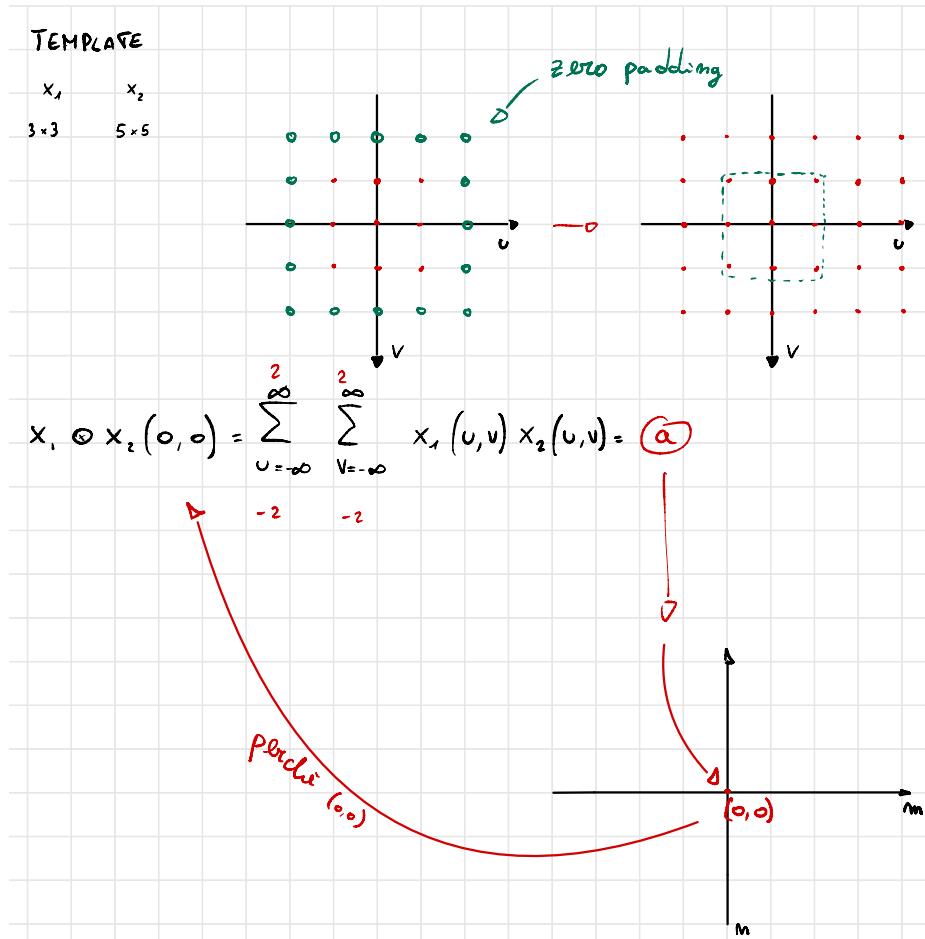


Figura 17: Esempio di Cross-Correlazione normalizzata 2D.

### Esercizio Cross-Correlazione 2D

Dati le due immagini  $x_1$  di dimensione  $5 \times 5$  e  $x_2$  di dimensione  $3 \times 3$ , si calcola la cross-correlazione 2D. Quindi, si effettua la rappresentazione grafica.

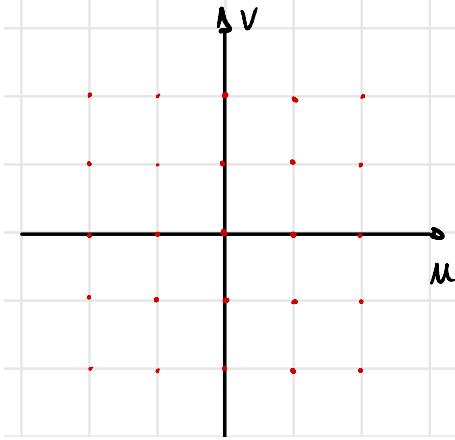


Figura 18: Piano cartesiano di  $x_2$  di dimensione  $5 \times 5$ .

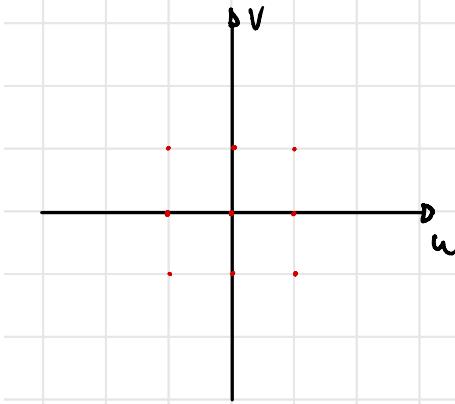


Figura 19: Piano cartesiano di  $x_1$  di dimensione  $3 \times 3$ .

E vengono fornite dall'esercizio le due matrici:

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esse indicano i valori nei punti corrispondenti. L'**obiettivo dell'esercizio** è trovare:

- L'argomento massimo della cross-correlazione ( $\arg \max x_1 \otimes x_2 (m, n)$ );
- Il massimo della cross-correlazione ( $\max x_1 \otimes x_2 (m, n)$ ).

L'argomento massimo è con i valori  $m = 1$  e  $n = -1$  poiché così facendo la diagonale incontra tutti i valori positivi e che formano il massimo. Infatti, prendendo in considerazione la matrice  $x_2$   $5 \times 5$  e osservando l'operazione di cross-correlazione 2D:

$$\sum_u \sum_v x_1(u, v) \cdot x_2(u - m, v - n)$$

$$\xrightarrow{\text{sostituzione termini noti } (m,n)} \sum_u \sum_v x_1(u, v) \cdot x_2(u - 1, v - (-1))$$

Risulta evidente come si debba spostare a destra, rispetto l'origine, la matrice  $x_2$  di un solo valore<sup>1</sup> e sotto, rispetto sempre l'origine, di un valore negativo<sup>2</sup>. Così facendo, la diagonale della matrice  $x_2$  corrisponderà esattamente a tutti i valori 1 della matrice  $x_1$ .

---

<sup>1</sup>Shift a destra poiché  $u - 1$  nell'equazione rappresenta un ritardo.

<sup>2</sup>Spostamento sotto l'asse delle ascisse poiché è un valore positivo  $v + 1$ .

### 1.3.5 Convoluzione

La **convoluzione** è un parente stretto della cross-correlazione, ma è leggermente diverso. È definito nel seguente modo:

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Con  $t \in \mathbb{R}$ . Si ricordi che se i **segnali** non sono né di energia né di potenza, l'integrale converge.

Nel caso in cui i **segnali** siano **discreti**, dati  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ :

$$x_1 * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) x_2(n - k)$$

Con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Nel caso in cui  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  sono limitati di lunghezza  $M$  ed  $N$  rispettivamente, allora la **convoluzione** è di lunghezza  $M + N - 1$ .

### Convoluzione 2D

Nel caso delle immagini, quindi del 2D,  $x_1$  ed  $x_2$  sono solitamente **segnali digitali ad intervallo limitato**, e la convoluzione diventa dunque:

$$x_1 * x_2(m, n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u, v) x_2(m - u, n - v) \quad u, v, m, n \in \mathbb{Z}$$

Solitamente il primo segnale  $x_1$  viene chiamato **filtro**, o **matrice kernel**, mentre  $x_2$  genericamente **immagine** (solitamente la matrice kernel ha una dimensione inferiore di quella dell'immagine).

## 2 Analisi di Fourier

### 2.1 Serie di Fourier

Una funzione, chiamata **funzione di sintesi**,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di variabile continua  $t$ , periodica di periodo  $T$ , si esprime come:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{e^{j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dove  $c_n$  è un numero complesso. Invece, una **funzione di analisi** è espressa come:

$$c_n \in \mathbb{C} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \underbrace{e^{-j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

**N.B.** si ricorda che  $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$  è un **fasore rotante** di velocità angolare  $\frac{2\pi n}{T} t$ .

La **funzione di sintesi** quindi non è altro che una somma di infiniti termini. Ciascuno è composto dalla moltiplicazione tra un numero complesso ed un fasore, il quale *produce un altro fasore*. Esprimendo  $c_n$  come numero complesso in forma polare:

$$c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j \theta_n} e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j(\frac{2\pi n}{T} t + \theta_n)}$$

Si può notare come questa conversione corrisponda ad **estendere** il fasore  $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$  ad una lunghezza  $|c_n|$  facendolo partire con un **angolo di partenza** uguale a  $\theta_n$  (chiamato **angolo di fase**).

**Altra osservazione:** se  $c_n$  appartiene all'insieme  $\mathbb{R}$ , significa che  $\theta_n$  non compare. Questo comporta un cambiamento nella lunghezza dell' $n$ -esimo fasore pari a  $|c_n|$ :

$$c_n = |c_n| e^{j \theta_n}$$

### Esempio 1

Il primo esempio di serie di Fourier si applica per il segnale trigonometrico:

$$f(t) = \cos(2\pi t) \quad \text{con } T = 1$$

Applicando la **funzione di analisi** e saltando i passaggi perché complessi, si ottengono i seguenti valori:

$$c_{-1} = \frac{1}{2} \quad c_0 = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2} \quad c_{i \leq -2, i \geq 2} = 0$$

E sostituendo nella **funzione di sintesi**:

$$\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} = \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}$$

Ci sono **tre osservazioni** da fare:

I.  $\frac{2\pi}{T} = f_0;$

II.  $c_n = |c_n|e^{j\theta_n};$

III. In questo caso,  $c_n \in \mathbb{R}$  quindi l'angolo di fase non è presente.

**Le parti** dell'equazione sono le seguenti:

$$\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t}$$

☞  $\cos(2\pi t) \rightarrow$  La funzione trigonometrica da studiare

☞  $\frac{1}{2}e^{-j2\pi t} \rightarrow$  Fasore di modulo 0.5 e velocità angolare  $-2\pi t$

☞  $\frac{1}{2}e^{j2\pi t} \rightarrow$  Fasore di modulo 0.5 e velocità angolare  $2\pi t$

I coefficienti  $c_{n=-1}$  e  $c_{n=1}$  sono relativi ai **moduli o ampiezze dei fasori** complessi di frequenza  $f_0 \cdot n$  con  $n = -1, 1$  e ricordando che:

$$\exp\left(j\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right) = \exp(j(f_0 nt))$$

Che si possono annotare con le variabili  $f_{-1}$  e  $f_1$  per  $f_0 \cdot n$  con  $n = -1, 1$  e analogamente per gli altri  $n \in \mathbb{Z}$ .

Inoltre, è possibile disegnare lo **spettro di ampiezza** che **mostra i moduli dei fasori costruiti con la trasformata di Fourier**, in particolare la funzione di sintesi.

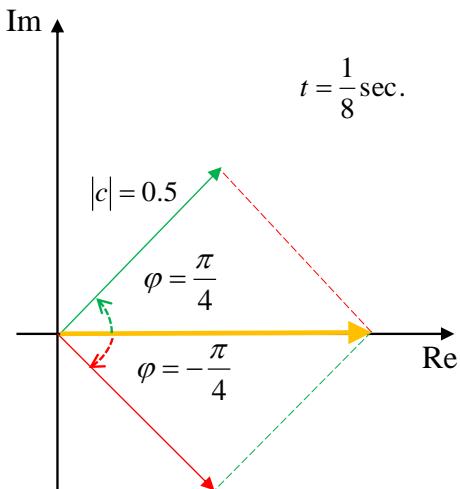


Figura 20: Grafico rappresentante i due fasori. La freccia verde rappresenta il valore assunto da  $\cos(2\pi t)$  per  $t = \frac{1}{8}$ .

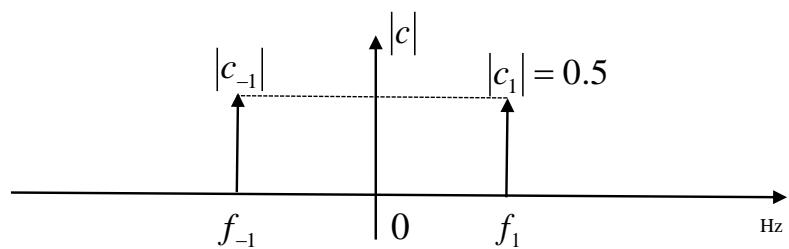


Figura 21: Grafico che rappresenta lo spettro di ampiezza.

## Esempio 2

Il secondo esempio di serie di Fourier è il segnale trigonometrico:

$$f(t) = \sin(2\pi t) \quad \text{con } T = 1$$

Applicando la **funzione di analisi** e saltando i passaggi perché complessi, si ottengono i seguenti valori:

$$c_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad c_0 = 0 \quad c_1 = \frac{1}{2j} \quad c_{i \leq -2, i \geq 2} = 0$$

Dove questa volta  $c_n \in \mathbb{C}$  ed in particolare:

$$\pm \frac{1}{2j} = \pm \frac{1}{2j} \cdot \frac{j}{j} = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{j}{j^2} = j \cdot \mp \frac{1}{2}$$

Si passa alla forma di esponenziale complesso:

$$\begin{aligned} j \cdot \frac{1}{2} &= 0 + j \cdot \frac{1}{2} \\ |c| &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{0.5}{0}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} &= c_{-1} \end{aligned}$$

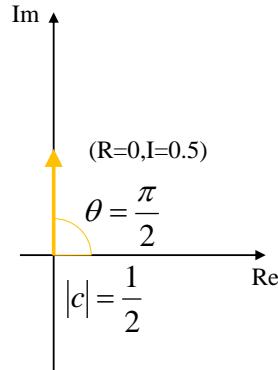


Figura 22: Grafico di  $c_{-1}$ .

Analogamente:

$$\begin{aligned}j \cdot -\frac{1}{2} &= 0 + j \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\|c| &= \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \\\theta &= \arctan\left(-\frac{0.5}{0}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\\frac{1}{2}e^{j \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} &= c_1\end{aligned}$$

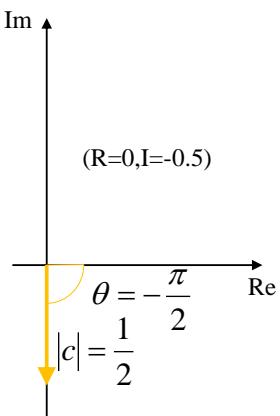


Figura 23: Grafico di  $c_1$ .

Applicando l'**equazione di sintesi** e sostituendo i termini noti:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = c_{-1} e^{j -2\pi t} + c_1 e^{j 2\pi t} \\ \text{sostituzione dei termini noti } c_{-1}, c_1 &\Rightarrow \frac{1}{2} e^{j \frac{\pi}{2}} e^{j \cdot (-2\pi t)} + \frac{1}{2} e^{j -\frac{\pi}{2}} e^{j 2\pi t} \\ \text{forma finale} &\Rightarrow \frac{1}{2} \exp\left(j\left(-2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \exp\left(j\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

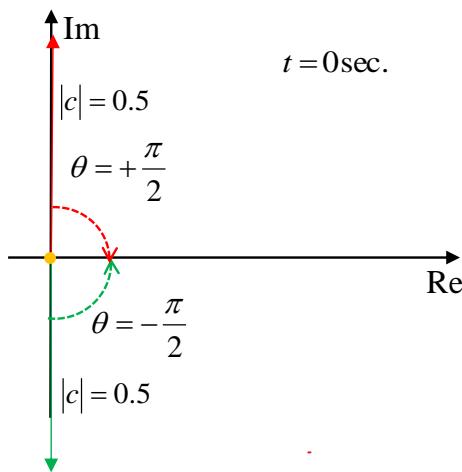


Figura 24: Grafico finale.

Infine, si disegna lo **spettro di ampiezza** e lo **spettro di fase**, quest'ultimo è un **grafico in cui si riportano gli angoli di fase della funzione**.

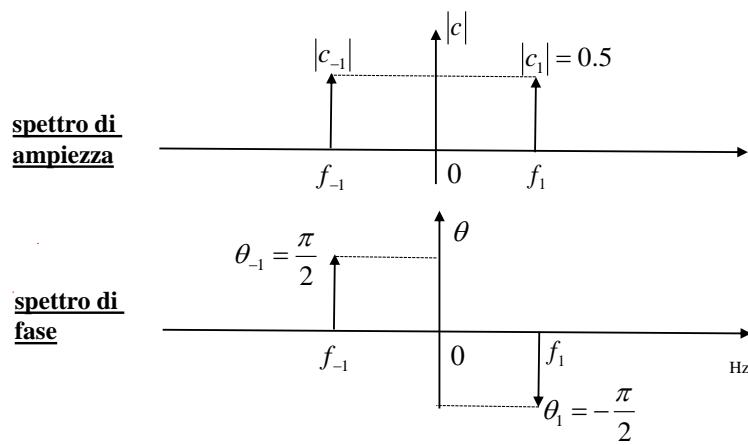


Figura 25: Spettro di ampiezza e di fase della funzione  $\sin(2\pi t)$ .

### 2.1.1 Proprietà della serie di Fourier

Lo **spettro di ampiezza e di fase** sono funzioni nel dominio delle frequenze che formano lo **spettro di Fourier**. Lo spettro di Fourier per i segnali periodici gode delle **seguenti proprietà**:

- Lo **spettro di ampiezza** è *simmetrico* rispetto all'asse  $y$ ;
- Lo **spettro di fase** è *antisimmetrico* rispetto all'asse  $y$ ;
- Se i coefficienti  $c_n$  sono reali, **non esiste lo spettro di fase**;
- Entrambe gli spettri sono funzioni a pettine, definite su frequenze multiple rispetto a quella fondamentale:

$$\left\{ \frac{2\pi n}{T} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{f_0 \cdot n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

## 2.2 Trasformata di Fourier continua

### 2.2.1 Trasformata di Fourier

Sia  $f(t)$  un **segnale reale continuo**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodico o non, si definisce la **Trasformata di Fourier** (TdF)  $\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu)$  il segnale  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

L'**unità frequenziale**  $\mu$  è l'angolo di  $\frac{n}{T}$  della serie di Fourier (per esempio, con  $n = 1$ ,  $T = 1$  sec.  $\rightarrow \mu = 1$  sec. $^{-1}$  = 1 Hz).

La Trasformata di Fourier esiste se  $f(t)$  è un **segnale di energia**. Condizione sufficiente e non necessaria perché altri segnali ammettono la TdF.

### 2.2.2 Trasformata di Fourier inversa

Sia  $F(\mu)$  la trasformata di Fourier di un segnale  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si definisce la **trasformata di Fourier inversa** il segnale  $\mathcal{F}^{-1}(F(\mu)) = f(t)$ :

$$\mathcal{F}^{-1} = (F(\mu)) = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

La trasformata di Fourier restituisce, per una data frequenza  $\mu$ , un coefficiente di “presenza”  $F(\mu)$ . Infatti, la sua inversa permette di ricostruire  $f$  a partire da  $F$ .

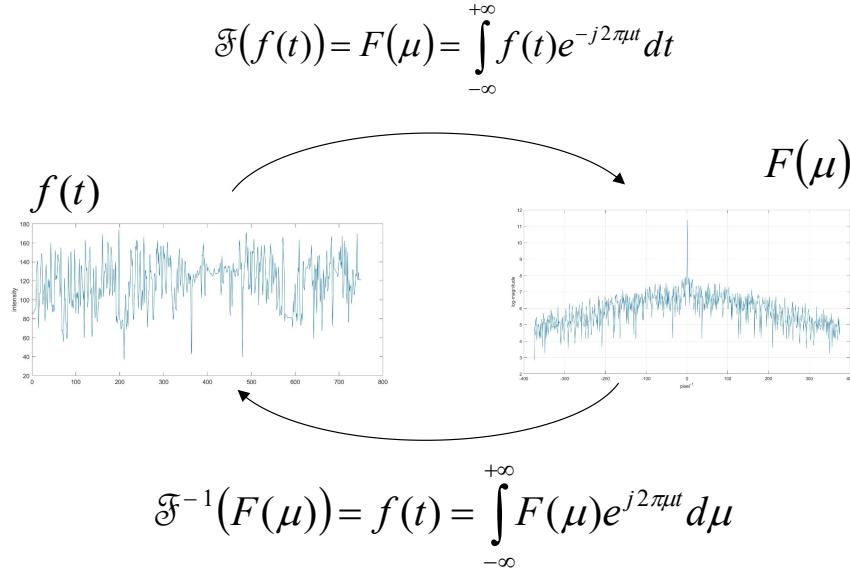


Figura 26: (Anti)Trasformata di Fourier su un segnale  $f(t)$ .

Nel caso in cui il segnale  $f(t)$  non è reale, la trasformata è complessa:

- $t$  rappresenta il **tempo** (in secondi), allora  $\mu$  rappresenta gli **Hertz**, cioè  $\frac{\text{numero cicli}}{\text{secondi}}$ ;
- $t$  rappresenta lo **spazio** (in metri), allora  $\mu$  rappresenta la **frequenza spaziale**, cioè  $\frac{\text{numero cicli}}{\text{metri}}$

Mentre nella serie di Fourier le funzioni rappresentate negli spettri di ampiezza e di fase erano a “pettine” (paragrafo 2.1.1), in questo caso le funzioni sono solitamente continue, nello spettro di ampiezza, o continue a tratti:

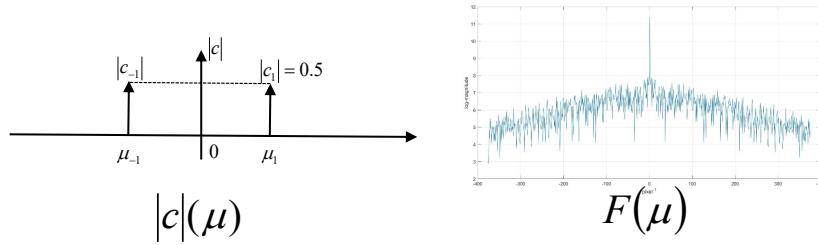


Figura 27: Esempio di spettro di ampiezza.

### 2.2.3 Proprietà della trasformata di Fourier

#### ☞ Linearità

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_1 F_1(\mu) + a_2 F_2(\mu)$$

#### ☞ Scalatura temporale

$$z(t) = f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(\mu) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\mu}{a}\right)$$

#### ☞ Dualità

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(\mu) \\ F(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}^-} f(-\mu) \end{aligned}$$

N.B. derivando la forma analitica per una trasformata, la sua antitrasformata ne produce un'altra con segno opposto.

#### ☞ Time shift

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t - t_0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi\mu(u+t_0)} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi\mu u} e^{-j2\pi\mu t_0} du \\ &= e^{-j2\pi\mu t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi\mu u} du \\ &= F(\mu) \underbrace{e^{-j2\pi\mu t_0}}_{\text{phase}} \end{aligned}$$

#### 2.2.4 Trasformata di Fourier di una box

La trasformata di Fourier di una box (paragrafo 1.2.3) è la seguente:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \Pi\left(\frac{t}{w}\right) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

Il risultato corrisponde alla funzione sinc:

$$f(\mu) = Aw \cdot \text{sinc}(\mu w)$$

Dove la funzione sinc è uguale a:

$$\text{sinc} = \frac{\sin(\pi\mu w)}{\pi\mu w}$$

Per ripassare la funzione sinc, si rimanda al paragrafo 1.2.4. Tuttavia, si ricorda che la sua forma generale è del tipo:

$$\text{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{\pi m}$$

E risultata uguale a:

- $\text{sinc}(0) = 1$
- $\text{sinc}(m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

Prima di concludere, si ricorda che:

- ☞ All'aumentare della larghezza della box, la funzione sinc tenderà a stringersi;
- ☞ La box è **limita**, invece la sinc è **infinita** a destra e sinistra, anche se il termine al denominatore attenua il valore della funzione comportando un limite a 0.
- ☞ In sintesi, la TdF di una box è:

$$\Pi\left(\frac{t}{w}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} w \cdot \text{sinc}(\mu w)$$

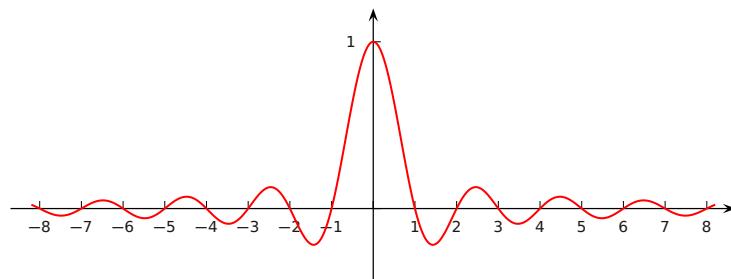


Figura 28: Grafico della funzione sinc.

### 2.2.5 Trasformata di Fourier di un sinc

La trasformata di Fourier di un segnale sinc (segnale rappresentato in figura 28) è la seguente:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(tw) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

Dato che la TdF di una box è:

$$\Pi\left(\frac{t}{w}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} w \cdot \text{sinc}(\mu w)$$

Al contrario, si ottiene la trasformata di Fourier di un sinc:

$$\text{sinc}(tw) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{w} \Pi\left(-\frac{\mu}{w}\right) = \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{w}\right)$$

### 2.2.6 Trasformata di Fourier di un impulso

La trasformata di Fourier di un impulso<sup>3</sup> è la seguente:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

Il risultato della trasformata di Fourier di un impulso è molto semplice grazie alle sue proprietà. Infatti, il risultato è uguale a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(0) e^{-j2\pi\mu 0} dt = 1$$

La proprietà che consente di ottenere il risultato uguale a 1 è la seguente:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

**N.B. In questo caso è rappresentabile solo lo spettro di ampiezza!**

Analogamente, con un impulso centrato in  $t_0$ , quindi non nell'origine:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt = e^{-j2\pi\mu t_0}$$

Il risultato è stato ottenuto grazie alla proprietà di setacciamento (definita a pagina 10). Tuttavia, in questo caso i valori non sono più reali ma complessi.

---

<sup>3</sup>Definizione di impulso al paragrafo 1.2.3.

### 2.2.7 Trasformata di Fourier di un treno di impulsi

Data la definizione di treno di impulsi (funzione definita nel paragrafo 1.2.8):

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si ottiene la sua relativa trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}(S_{\Delta T}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\Delta T}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$

Tralasciando i vari calcoli numerici per arrivare al risultato, si può scrivere la trasformata di Fourier in maniera più semplice:

$$S_{\Delta T}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

### 2.2.8 Sintesi

Qui di seguito si lascia un riassunto rapido delle trasformate di Fourier continue dei segnali più importanti.

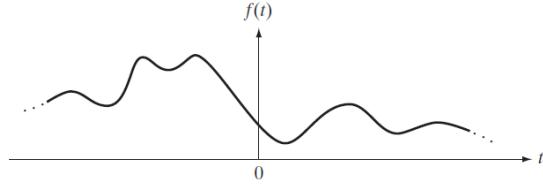
Segnale	Trasformata di Fourier	
Box:	$A\Pi\left(\frac{t}{w}\right)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $Aw \cdot \text{sinc}(\mu w)$
Sinc:	$\text{sinc}(tw)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\frac{1}{w} \cdot \Pi\left(-\frac{\mu}{w}\right) = \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{w}\right)$
Impulso:	$\delta(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\begin{cases} 1 & \text{se valori reali} \\ e^{-j2\pi\mu t_0} & \text{se valori complessi} \end{cases}$
Treno di impulsi:	$S_{\Delta T}(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$

Tabella 1: Trasformate di Fourier continue.

## 2.3 Trasformata di Fourier a tempo discreto

### 2.3.1 Campionamento

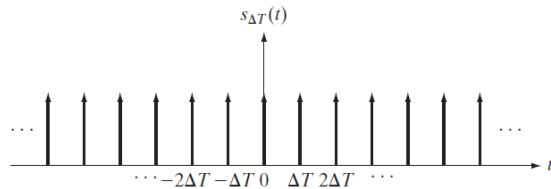
Sia  $f(t)$  un segnale reale continuo definito  $f : ]-\infty, +\infty[ \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (attenzione al dominio non limitato), anche non periodico:



Questo tipo di segnale, per essere elaborato al computer deve essere **campionato** ad intervalli discreti. Per farlo, si prenda in considerazione il treno di impulsi:

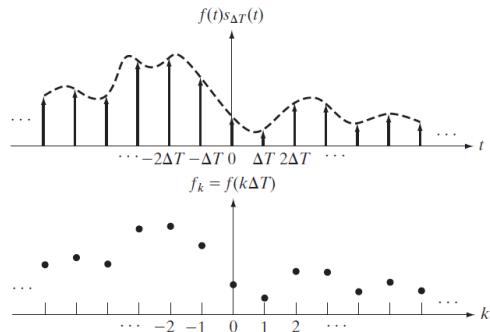
$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

Con periodo  $\Delta T$ , ossia con **frequenza di campionamento** pari a:  $\mu_S = \frac{1}{\Delta T}$



Si assume che il treno di impulsi sia un **segnale discreto**. Matematicamente parlando, **campionare un segnale** significa moltiplicarlo per un treno di impulsi:

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot S_{\Delta T}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



### 2.3.2 Trasformata di Fourier a tempo discreto

Sia  $F(\mu)$  la trasformata di Fourier di un segnale  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si considera  $\tilde{f}(t)$  e si calcola la trasformata di Fourier  $\tilde{F}(\mu)$  (entrambi sono a tempo discreto). Grazie alla convoluzione si ottiene:

$$\tilde{F}(\mu) = \mathcal{F}\left\{\tilde{f}(t)\right\} = F(\mu) * S_{\Delta T}(\mu)$$

Si ricorda che:

$$S_{\Delta T}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

E risolvendo la convoluzione, si ottiene che la **trasformata di Fourier a tempo discreto** corrisponde a:

$$F(\mu) * S_{\Delta T}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cdot S_{\Delta T}(\mu - \tau) d\tau = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

Analizzando la formula si evidenziano alcuni termini:

- $F(\mu)$  è la trasformata di Fourier della funzione originale  $f(t)$ ;
- $F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$  è la trasformata di Fourier della funzione originale  $f(t)$  shiftato a destra di una quantità pari a  $\frac{n}{\Delta T}$ ;
- $\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$  sono infinite copie dello spettro  $F(\mu)$ , ripetute ovviamente ogni  $\frac{1}{\Delta T}$ .

Inoltre, è un **segnale periodico** (nelle frequenze) di periodo  $\frac{1}{\Delta T}$ , ovvero si ripete ogni  $\frac{1}{\Delta T}$  Hz.

La sua scalatura nell'ampiezza è pari a  $\frac{1}{\Delta T}$  e rappresenta la T.d.F. a tempo discreto.

### 2.3.3 Teorema del campionamento

Un segna~~le reale continuo  $f(t)$~~ , limitato in banda, può essere ricostruito senza errori completamente dai suoi campioni se essi sono acquisiti con un tempo di campionamento  $\Delta T$  tale per cui:

$$\frac{1}{\Delta T} = \mu_S \geq 2\mu_{\max}$$

Ovvero se nel tempo si adotta una frequenza di campionamento  $\frac{1}{\Delta T}$  almeno doppia rispetto alla frequenza massima del segnale  $\mu_{\max}$ .

In altre parole, il teorema del campionamento afferma che tutte le proprietà di un segnale possono essere espresse usando dei campioni.

**Attenzione!** L'espressione  $\frac{1}{\Delta T}$  viene chiamata *frequenza di Nyquist* e per frequenze minori si crea aliasing, fenomeno che impedisce la ricostruzione senza errori.

### 2.3.4 Considerazioni

Dal punto di vista teorico la trasformata di Fourier a tempo discreto consente di ricostruire il segnale. Tuttavia, è impossibile implementarla in un computer poiché tende, come limiti, all'infinito e ci vorrebbe un numero infinito di campioni e di segnali di tipo sinc.

## 2.4 Trasformata di Fourier discreta

La trasformata di Fourier di un segnale reale continuo  $f(t)$  di dominio illimitato e non periodico, campionato nel tempo con periodo di campionamento  $\Delta T$ , è una funzione continua, periodica (di periodo  $\frac{1}{\Delta T}$ ) anch'essa di dominio illimitato:

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \xrightarrow{\text{F}} \tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

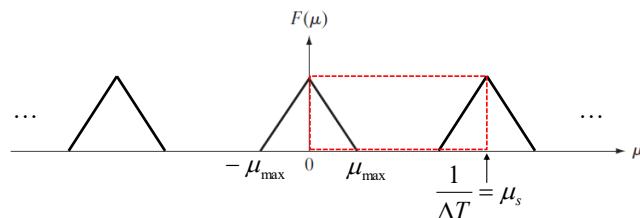
Il **problema** di questa formulazione è data l'espressione analitica dello spettro, la quale suppone che si è a **conoscenza della T.d.F. teorica  $F$  del segnale di partenza**. Questo, spesso, è molto difficile.

Si ricava dunque una *forma più semplice* da manipolare. Essa consente di **costruire una rappresentazione spettrale a partire dai campioni della funzione originale  $f(t)$** :

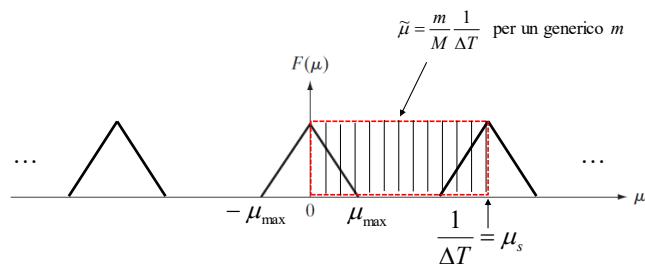
$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n \Delta T}$$

Al contrario, la prima formulazione era più chiara per comprendere il fatto che la T.d.F. di una funzione campionata genera delle repliche dello spettro originale  $F(\mu)$ .

L'equazione alternativa deve essere modificata, eseguendo un campionamento per il dominio spettrale, per poterla implementare su un computer. Per farlo, si prende in considerazione solo l'intervallo frequenziale da 0 a  $\frac{1}{\Delta T} = \mu_s$ .



Inoltre, si prendono in considerazione  $M$  campioni tramite l'operazione di campionamento.



In cui:

$$\tilde{\mu} = \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{\Delta T} \quad \text{con } m = 0, \dots, M - 1 \text{ e dove } \frac{m}{M} \in \left[0, 1 - \frac{1}{M}\right]$$

La  $m$  indica il **range di variazione** degli indici dei campioni frequenziali. Calcolando la trasformata di Fourier a tempo discreto sui campioni  $M$ , si giunge alla **forma finale della trasformata di Fourier discreta**:

$$\tilde{F}(\tilde{\mu}) = \tilde{F}\left(\frac{m}{M} \cdot \frac{1}{\Delta T}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi \frac{m}{M} n} \quad \text{con } m = 0, \dots, M - 1$$

La **trasformata di Fourier discreta inversa**, ovvero l'antitrasformata:

$$\tilde{f}(n\Delta T) = f(n\Delta T) = f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi \frac{m}{M} n}$$

## 2.5 Riassunto Trasformate

Qui di seguito vengono rappresentate le trasformate più importanti.

Funzione	Serie di Fourier
Funzione di sintesi:	$f(t) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{e^{j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} \quad n \in \mathbb{Z}$
Funzione di analisi:	$c_n \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \underbrace{e^{-j \frac{2\pi n}{T} t}}_{\text{fasore}} dt \quad n \in \mathbb{Z}$
Segnale	Trasformata di Fourier continua
Box:	$A\Pi\left(\frac{t}{w}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} Aw \cdot \text{sinc}(\mu w)$
Sinc:	$\text{sinc}(tw) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(-\frac{\mu}{w}\right) = \frac{1}{w} \cdot \Pi\left(\frac{\mu}{w}\right)$
Impulso:	$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{cases} 1 & \text{se valori reali} \\ e^{-j2\pi\mu t_0} & \text{se valori complessi} \end{cases}$
Treno di impulsi:	$S_{\Delta T}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$
Funzione	Trasformata di Fourier a tempo discreto
$F(\mu) * S_{\Delta T}(\mu)$	$\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$
Funzione	Trasformata di Fourier discreta
$\tilde{F}(\tilde{\mu})$	$\tilde{F}\left(\frac{m}{M} \cdot \frac{1}{\Delta T}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi \frac{m}{M} n}$
	$m = 0, \dots, M-1$
Funzione	Trasformata di Fourier discreta inversa
$\tilde{f}(n\Delta T) = f(n\Delta T) = f_n$	$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi \frac{m}{M} n}$

Tabella 2: Trasformate di Fourier.

## **2.6 Domanda da esame**

All'esame è possibile che sia richiesto come domanda: "quali sono le trasformate di Fourier studiate durante il corso?"

La risposta, anche se banale, è la seguente: le trasformate di Fourier studiate durante il corso sono 4:

- I. Serie di Fourier (paragrafo 2.1)
- II. Trasformata di Fourier continua (paragrafo 2.2)
- III. Trasformata di Fourier a tempo discreto (paragrafo 2.3)
- IV. Trasformata di Fourier discreta (paragrafo 2.4)

### 3 Elaborazione di immagini - Dominio spaziale

L'**elaborazione delle immagini** consiste nel prendere come input un'immagine (segnalet) e restituirne un'altra (sempre segnalet) come output.

Il **rinforzo (enhancement) di immagini** è un tipo di elaborazione delle immagini. Il suo **obbiettivo** è elaborare un'immagine in modo che il risultato sia più adatto alle esigenze soggettive dell'utente. La definizione è *problem-oriented* poiché, per esempio, per visualizzare lo spettro di ampiezza di un'immagine, è necessario eseguire un'operazione di rinforzo (*log-transformation*); oppure, per migliorare la visibilità dei dettagli di un'immagine, si effettua un'altra operazione di rinforzo (*sharpening*).

La **qualità di un'immagine** è la combinazione pesata di tutti gli attributi significativi di un'immagine. Infatti, *non* esiste una ricetta univoca per determinare quando un'immagine sia di qualità poiché è un'opinione soggettiva. Tuttavia, è più facile dire quando un'immagine *non* è di qualità. In genere, un'**immagine non è di qualità** quando non viene interpretata facilmente da un operatore umano.

A differenza del rinforzo, il **restauro (restoration)** è un processo di ricostruzione dell'immagine a partire da un modello di degradazione noto.

### 3.1 Strumento per l'elaborazione: istogramma

I pixel di un'immagine sono una “popolazione” sulla quale è possibile calcolare tutte le quantità statistiche descrittive che vengono usate normalmente come media, mediana, varianza, deviazione standard, quartili, percentili, etc. Uno **strumento fondamentale** per l'elaborazione delle immagini è l'**istogramma**, il quale può essere visto come una funzione continua o discreta.

Infatti, per ogni livello di grigio (in un'immagine solo a livelli di grigi) vengono riportati il numero di pixel. Per un'immagine  $I [M, N]$  si identifica con  $M, N$  il **numero di pixel righe per colonne** e con la funzione  $H(r)$  il **numero di pixel di valore  $r$** , quest'ultimo è definito nell'intervallo  $0 \leq r \leq L - 1$  con  $r, L \in \mathbb{N}$  dove  $L$  indica i livelli di grigio. Inoltre:

$$\sum_{r=0}^{L-1} H(r) = M \cdot N$$

Grazie all'istogramma, è possibile comprendere immediatamente le caratteristiche dell'immagine (come in figura).



Figura 29: Esempio di istogramma.

Un istogramma può essere anche visto come una distribuzione di probabilità:

$$p_h(r) = \frac{H(r)}{M \cdot N} \quad \sum_r p_h(r) = 1$$

Uno **svantaggio** di questo strumento è che immagini diverse potrebbero avere istogrammi simili, questo perché l'istogramma non tiene conto della distribuzione spaziale dei pixel. Dunque, **utilizzando solo questo metodo è impossibile ricostruire un'immagine**.

Al contrario, un **vantaggio** dell'istogramma è la possibilità di identificare facilmente il **contrasto**: rapporto o differenza tra il valore più alto (punto più luminoso) e il valore più basso (punto più scuro) della luminosità (che corrisponde al livello di grigio per le immagini a livello di grigio).

Un'immagine viene definita:

- Valori più alti sulla destra:
  - **chiara**, caratteristica dell'immagine;

- **sovraesposta**, caratteristica di come è stata acquisita l'immagine.
- Valori più alti sulla sinistra:
  - **scura**, caratteristica dell'immagine;
  - **sottoesposta**, caratteristica di come è stata acquisita l'immagine.

### 3.2 Domini

L'elaborazione delle immagini può avvenire nel **dominio spaziale** o nel **dominio frequenziale** (dopo aver applicato la T.d.F. discreta 2D). Nel **dominio spaziale**, l'elaborazione delle immagine può essere espressa come:

$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

In cui:

- $f$  è l'immagine di ingresso (input) da elaborare;
- $g$  è l'immagine d'uscita (output) elaborata;
- $T$  è un operatore su  $f$  definito in un intorno di  $(x, y)$ .

L'**operatore** definito in un intorno di  $(x, y)$  può essere di tre tipi:

- **Puntuale:**  $[f(x, y)] = f(x, y)$ , l'intorno coincide con il pixel stesso;
- **Locale:**  $[f(x, y)]$  rappresenta una regione, per esempio quadrata, attorno al pixel di locazione  $(x, y)$ ;
- **Globale:**  $[f(x, y)]$  rappresenta l'intera immagine  $f$ .

### 3.3 Operazioni puntuale

Si dice **operatore puntuale**, un operatore che ha preso in input il valore di un pixel e ne restituisce uno cambiato, il quale dipende esclusivamente dal valore del pixel in ingresso.

L'**obbiettivo** è quello di variare il contrasto. Infatti, eseguendo questa operazione, si evidenziano le differenze strutturali dell'oggetto rappresentato. Per farlo, basta cambiare il valore di un pixel per renderlo più scuro o più chiaro.

Un operatore puntuale può essere rappresentato tramite una **funzione** che prende in input un valore  $r$  e lo modifica in un valore  $s = T(r)$  con  $s, r$  appartenenti allo stesso campo di definizione (esempio tra 0 e 255). Più in generale viene definita come:

$$T : [0, L - 1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, L - 1] \subset \mathbb{R}$$

Dato che un operatore puntuale dipende solo dal singolo valore del pixel, esso è dunque descritto da una tabella di questo tipo:

r	0	1	2	3	4	5	6	...
s	$T(0)$	$T(1)$	$T(2)$	$T(3)$	$T(4)$	$T(5)$	$T(6)$	...

### 3.3.1 Identità

È l'operazione più semplice e non fa nulla:

$$s = r$$

### 3.3.2 Negativo

Rende l'immagine più scura:

$$s = L - 1 - r$$

Nel caso dei livelli di grigio:

$$s = 255 - r$$

Viene **utilizzata** quando si hanno dettagli grigi immersi in zone nere che si vogliono evidenziare.

### 3.3.3 Clamping

Limita l'intensità ad un range definito  $[a, b]$ :

$$T(r) = \begin{cases} a & \text{se } r < a \\ r & \text{se } a \leq r \leq b \\ b & \text{se } r > b \end{cases}$$

Viene **utilizzata** nel caso in cui ci siano dei pixel di rumore molto chiari o molto scuri che *mascherano* l'immagine. Quindi, si pensi per esempio ad un'immagine con dei puntini bianchi al quale si applica il *clamping* per rimuoverli.

### 3.3.4 Stretching/Shrinking

Stira/comprime le intensità di un range  $[r_{\min}, r_{\max}]$  ad un range definito  $[a, b]$ :

$$s = \left[ \frac{r - r_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}} \right] [b - a] + a$$

In cui:

- $r_{\min}$  /  $r_{\max}$  sono il più piccolo/grande livello di grigio del range che si vuole trattare;
- $a, b$  sono il minimo e il massimo “stretchati”.

**Nota bene:** l'operazione è seguita da *rounging* (arrotondamento) nel caso di dominio di valori nei naturali (come in 0-255). Inoltre, lo **stretching** non risolve il problema del rumore impulsivo (puntini neri o bianchi), neanche se mascherato con il clamping.

### 3.3.5 Trasformazione logaritmica

La forma generale è:

$$s = c \cdot \log(1 + r) \quad r \in [0, L - 1]$$

Con  $c$  che rappresenta la **costante di normalizzazione**:

$$c = \frac{L - 1}{\log(L)}$$

La quale assicura la mappatura in  $[0, L - 1]$ . Inoltre, l'aggiunta di 1 permette di evitare il calcolo di quantità  $\in [0, 1]$  che generano valori minori di zero ed in particolare il calcolo di  $\log(0) = -\infty$ .

Viene **utilizzata** quando si vuole mappare fasce strette di valori dell'immagine originale in fasce più ampie, aumentandone così il range del contrasto, rendendo inoltre l'interpretazione umana più informativa.

### 3.3.6 Trasformazione esponenziale

Al contrario della trasformazione logaritmica, la trasformazione esponenziale consente di aumentare il range di una fascia determinata di livelli di grigi chiari:

$$s = (e^r)^{\frac{1}{c}} - 1 \quad r \in [0, L - 1]$$

Con la **costante di normalizzazione**:

$$c = \frac{L - 1}{\log(L)}$$

### 3.3.7 Trasformazione di potenza

La trasformazione di potenza può essere espressa come:

$$s = cr^\gamma \quad c, \gamma > 0 \in \mathbb{R}$$

La costante  $c$  è scelta **in dipendenza da**  $\gamma$  in modo da normalizzare i valori di  $s$  nell'intervallo  $[0, 255]$ .

- $\gamma < 1$ , la trasformazione ha effetti analoghi alla trasformazione logaritmica (3.3.5), cioè espansione della dinamica per bassi valori di  $r$ , mentre compressione della dinamica per alti valori di  $r$ ;
- $\gamma > 1$ , la trasformazione ha effetti opposti ai valori negativi di gamma.

Nella pratica, il termine di normalizzazione  $c$  è complicato da definire analiticamente, quindi si preferiscono due versioni di  $s$ :

- **Non normalizzata:**  $\tilde{s} = r^\gamma$ ;
- **Normalizzata**  $s = cr^\gamma$

Per passare dalla versione **non normalizzata** alla **versione normalizzata** si esegue lo *stretching*:

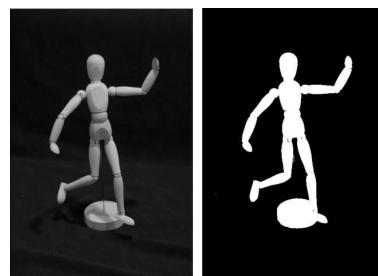
$$s = \left[ \frac{\tilde{s} - \tilde{s}_{\min}}{\tilde{s}_{\max} - \tilde{s}_{\min}} - \tilde{s}_{\min} \right] [\max - \min]$$

Dove  $\tilde{s}_{\min/\max}$  sono il più piccolo/grande livello di grigio e  $\max$  e  $\min$  sono il massimo e il minimo livello di grigio possibile (255, 0).

### 3.3.8 Binarizzazione

Produce un'immagine che ha solo due livelli: nero e bianco. Si **ottiene** scegliendo una soglia  $T$ , si imposta a colore nero tutti i pixel il cui valore è minore a  $T$  e si imposta a colore bianco tutti gli altri.

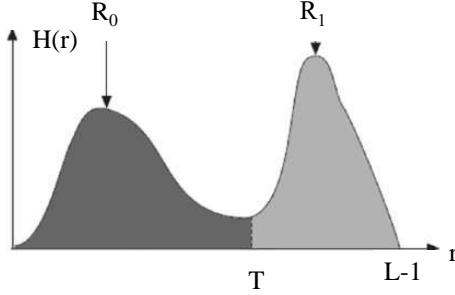
Si **utilizza** la binarizzazione per discriminare un oggetto dalla scena.



Soltanamente il suo utilizzo è prevalente nell'ambito delle immagini biomedicali e di videosorveglianza. La difficoltà maggiore di questa tecnica è il saper scegliere la soglia  $T$  più ragionevole.

### 3.3.9 Binarizzazione attraverso il metodo di Otsu

Questo metodo assume che ci siano due regioni da scegliere, come nella seguente figura:



Se l'immagine ha un **istogramma bimodale** la binarizzazione è efficace, altrimenti no. Le due regioni sono definite come:

$$\begin{aligned} p_{0 \rightarrow T}(r) &= \frac{H(r)}{\sum_{r=0}^T H(r)} \\ \sigma_{0 \rightarrow T}^2 &= \sum_{r=0}^T p_{0 \rightarrow T}(r) (r - \mu_{0 \rightarrow T})^2 \\ \mu_{0 \rightarrow T} &= \sum_{r=0}^T r \cdot p_{0 \rightarrow T}(r) \end{aligned}$$

La formula da minimizzare su  $T$  è la seguente:

$$\sigma_w^2(T) = W_0(T) \sigma_0^2(T) + W_1(T) \sigma_1^2(T)$$

Dove si considera la versione probabilistica dell'istogramma, ovvero la sua versione normalizzata, e si ha:

$$\begin{aligned} W_0(T) &= \sum_{r=0}^{T-1} p(r) \\ W_1(T) &= \sum_{r=T}^{L-1} p(r) \\ p(r) &= \frac{1}{M \cdot N} \sum_{r=0}^{L-1} H(r) \end{aligned}$$

Dove  $W_0, W_1$  sono le probabilità che le due classi siano separate da  $T$  e  $\sigma_0^2$  e  $\sigma_1^2$  sono le varianze sui valori di istogramma assunti dalle due classi. **L'approccio "cicla" su tutti i possibili valori di  $T$  e restituisce:**

$$T_{best} = \arg_T \min (\sigma_w^2(T))$$

### 3.3.10 Equalizzazione

Un’immagine si dice **equalizzata** quando il contributo di ogni differente tonalità di grigio è simile. L’istogramma tende ad essere uniforme o appiattito.

L’**obbiettivo** è vedere l’istogramma come una distribuzione e di renderla il più simile a quella uniforme. Una **distribuzione uniforme** ha un’**entropia massima**<sup>4</sup>. Nelle immagini, ogni valore della distribuzione è un valore di grigio, per cui ogni valore di grigio appartiene all’entropia massima.

Si **utilizza** questo operatore poiché un istogramma piatto assicura a livello percettivo una risposta del cervello migliore (in termini di numero di dettagli che si riesce a riconoscere), per cui l’immagine diventa più “informativa” da osservare.

Se  $r_k$  è il  $k$ -esimo livello di grigio  $k = 0, \dots, L - 1$  e  $H(r_k)$  è il conteggio dato dall’istogramma dell’immagine di dimensione  $M \times N$ , allora si può definire:

$$p_r(r_k) = \frac{H(r_k)}{M \cdot N}$$

L’**equalizzazione dell’istogramma** si basa sulla seguente funzione  $T$ , con  $s_k$  che rappresenta il  $k$ -esimo valore di grigio in cui viene “mappato”  $r_k$ :

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \frac{\sum_{j=0}^k H(r_j)}{\frac{M \cdot N}{(L - 1)}}$$

#### Algoritmo

- I. Calcolare le  $L$  somme cumulative  $\sum_{j=0}^k p_r(r_j)$  dei valori dell’istogramma visto come distribuzione con  $k = 0, \dots, L - 1$ ;
- II. Moltiplicare i valori del passo precedente per il massimo di livelli di grigio  $L - 1$ ;
- III. Normalizzazione dei valori calcolati al primo passo, dividendo per il numero totale di pixel  $M \cdot N$  e arrotondamento;
- IV. Applicare il mapping  $T$  ottenuto.

---

<sup>4</sup>Secondo l’entropia, un sistema isolato si trasforma ed evolve nel tempo fino a raggiungere uno stato di equilibrio finale macroscopico in cui le differenze locali sono minime.

### Esempio

Sia data un'immagine con  $L = 8, 64 \times 64$  pixel ( $M \cdot N = 4096$ ), con la seguente distribuzione d'intensità:

$r_k$	$H(r_k)$	$p_r(r_k) = \frac{H(r_k)}{M \cdot N}$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

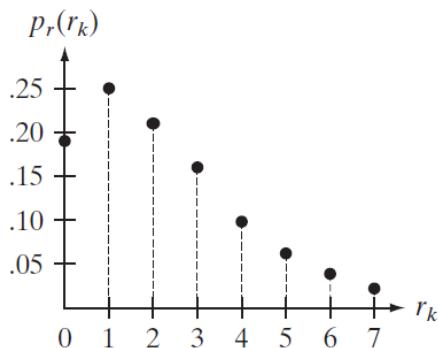


Figura 30: Rappresentazione della distribuzione di intensità.

Si applica la formula di equalizzazione:

$$\begin{aligned}
 s_0 &= T(r_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_r(r_j) = 7p_r(r_0) &= 1.33 \\
 s_1 &= T(r_1) = 7 \sum_{j=0}^1 p_r(r_j) = 7p_r(r_0) + 7p_r(r_1) &= 3.08
 \end{aligned}$$

Analogamente anche per gli altri valori si applica la formula e si trovano i seguenti valori:

$$\begin{aligned}s_2 &= 4.55 \\ s_3 &= 5.67 \\ s_4 &= 6.23 \\ s_5 &= 6.65 \\ s_6 &= 6.86 \\ s_7 &= 7.00\end{aligned}$$

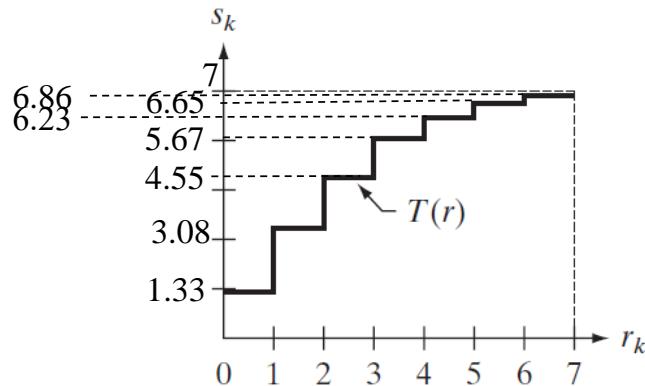


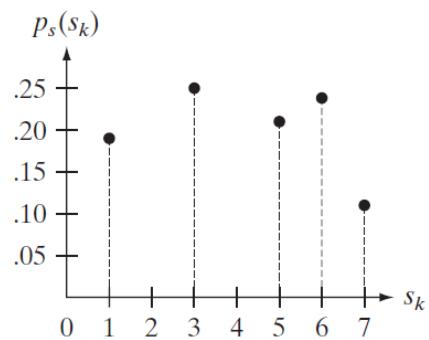
Figura 31: LUT (*Lookup Table*)

**LUT** (*Lookup Table*) è un termine utilizzato per descrivere una predeterminata lista di numeri che offre una “scorciatoia” per una specifica computazione. Nel contesto dei colori, una LUT trasforma i colori, ricevuti come input (camera), in un output desiderato (final footage).

L’immagine è quantizzata, quindi si effettua l’arrotondamento dei valori ottenendo l’intero più vicino:

$$\begin{aligned}s_0 &= 1.33 \longrightarrow 1 \\ s_1 &= 3.08 \longrightarrow 3 \\ s_2 &= 4.55 \longrightarrow 5 \\ s_3 &= 5.67 \longrightarrow 6 \\ s_4 &= 6.23 \longrightarrow 6 \\ s_5 &= 6.65 \longrightarrow 7 \\ s_6 &= 6.86 \longrightarrow 7 \\ s_7 &= 7.00 \longrightarrow 7\end{aligned}$$

Dopo l'arrotondamento, si ottiene una nuova immagine e il suo relativo istogramma.



### 3.4 Operazioni locali

Un'operazione locale restituisce un pixel che dipende da un limitato intorno del corrispondente punto in input. Tali operazioni vengono utilizzati per migliorare la qualità delle immagini o per estrarre delle informazioni dall'immagine.

Le operazioni locali sono come dei filtri spaziali dell'immagine. Il filtraggio spaziale è un'elaborazione  $T$  dell'immagine  $f$  dove un pixel di locazione  $(n, m)$ , di intensità  $f(n, m)$ , viene cambiato in  $g(n, m)$  da una funzione dei pixel in un intorno di  $(n, m)$ , ossia:

$$g(n, m) = T([f(n, m)])$$

Dove le parentesi quadrate indicano che viene preso in considerazione un intorno di  $n, m$ . Ovviamente, il risultato dell'operazione, se applicato a tutti i pixel dell'immagine  $f$ , è una nuova immagine  $g$ .

Gli intorni presi maggiormente in considerazione sono di grandezza  $K \times K$ , con  $K$  dispari (per fare in modo di considerare uniformemente i pixel attorno al punto  $(n, m)$  di applicazione), di solito  $3 \times 3, 5 \times 5, 7 \times 7$ . I pixel al di fuori dell'intorno non prendono parte alla funzione.

#### Pseudocodice

- **Input:**

- Immagine  $f$  definita con un suo valore di pixel generico  $f(n, m) \in [0 \dots L - 1] \subset \mathbb{N}$  con  $(n, m) \in [1 \dots N] \times [1 \dots M] \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ;
- Intorno di valori di pixel  $[f(n, m)]$  ossia  $f(n - u, m - v)$  definita come:

$$(u, v) \in \left[ -\frac{K-1}{2} \dots \frac{K-1}{2} \right] \times \left[ -\frac{K-1}{2} \dots \frac{K-1}{2} \right] \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad K \in \{3, 5, 7, \dots\}$$

- **Output:**

- Nuova immagine  $g(n, m) \in \mathbb{R}$  che attraverso operazioni puntuali può essere riportata in  $g(n, m) \in [0 \dots L - 1] \subset \mathbb{N}$

- **Procedimento:**

```
for n = 1 ... N
    for m = 1 ... M
        g(n, m) = T([f(n, m)])
```

### 3.4.1 Filtraggi spaziali: lineari e non lineari

Le due principali categorie di operazioni locali sono lineari e non lineari:

- **Filtraggio lineare** se  $T$  è una combinazione lineare dei valori di pixel nel vicinato. Quindi, la convoluzione di un'immagine con un kernel è una somma di fattori ognuno dei quali è una moltiplicazione di un valore dell'immagine per un coefficiente del filtro:

$$g(n, m) = T([f(n, m)]) = h * f(n, m) = \sum_{u=-k}^{+k} \sum_{v=-k}^{+k} h(u, v) f(n - u, m - v)$$

$$k = \frac{K - 1}{2}$$

Un esempio di operazione lineare è la convoluzione;

- **Filtraggio non lineare** se  $T$  contiene operazioni non lineari sulle variabili indipendenti. Un esempio di operazioni non lineari sono la mediana dei pixel nell'intorno e il valore massimo dei pixel nel vicinato.

I filtraggi lineari **non** presentano un **problema ai bordi** nel momento in cui l'intorno è definito all'interno dell'immagine (cioè non cade fuori dall'immagine). Alcuni filtri lineari:

- **Cropping** è un filtro dove solo l'intorno cade all'interno dell'immagine, quindi il filtro viene applicato ad un'area ristretta e non a tutta l'immagine. Un esempio:

$$\text{Input} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 1 \\ 9 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Output} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & 30 & 45 & 30 & * \\ * & 46 & 27 & 37 & * \\ * & 34 & 41 & 28 & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Le aree con un \* non verranno calcolate;

- **Zero Padding** utilizzato per inserire degli zero che creano degli artefatti così da consentire il filtraggio. Un esempio:

$$\text{Input} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Output} = \begin{bmatrix} 11 & 19 & 17 & 22 & 11 \\ 25 & 30 & 45 & 30 & 31 \\ 25 & 46 & 27 & 37 & 19 \\ 35 & 34 & 41 & 28 & 29 \\ 16 & 27 & 12 & 18 & 10 \end{bmatrix}$$

Le aree in grigio non vengono calcolate.

- **Replicazione** utilizzata per creare artefatti, infatti l'immagine risultante non è realistica. Un esempio:

$$\text{Input} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 7 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Output} = \begin{bmatrix} 25 & 27 & 29 & 31 & 33 \\ 34 & 30 & 45 & 30 & 39 \\ 51 & 46 & 27 & 37 & 32 \\ 54 & 34 & 41 & 28 & 35 \\ 48 & 32 & 24 & 34 & 26 \end{bmatrix}$$

Le aree in grigio non vengono calcolate.

### 3.5 Rumore nelle immagini

Il **rumore nelle immagini** è un disturbo dell'immagine introdotto dal sistema di acquisizione (e.g. fotocamera) o dal mezzo di propagazione che ne degrada la qualità (e.g. Whatsapp). Il rumore è tipicamente *modellato* come **additivo e casuale**:

$$\tilde{f}(n, m) = f(n, m) + \varepsilon(n, m)$$

Dove  $f$  è l'**immagine** priva di rumore e  $\varepsilon$  è un processo aleatorio che genera delle quantità che seguono una distribuzione particolare, indipendentemente da dove il processo è collocato nell'immagine, ovvero indipendentemente da  $n, m$ .

Esistono due **tipi di rumore**: gaussiano additivo bianco (rumore generato da una distribuzione gaussiana) e impulsivo (rumore generato da una distribuzione bernoulliana).

La **quantità di rumore** può essere stimata attraverso la misura di *SNR* (*signal to noise ratio*), di cui esistono varie versioni. La più utilizzata è la **mean square, SNR<sub>ms</sub>**:

$$SNR_{ms} = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \tilde{f}(n, m)^2}{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [\tilde{f}(n, m) - f(n, m)]^2}$$

Una forma alternativa della *SNR* può essere stimata grazie alla varianza  $\sigma_n^2$ , o alla deviazione standard  $\sigma_n$ :

$$SNR = \frac{\sigma_s}{\sigma_n}$$

Dove  $\sigma_s$  è la deviazione standard del segnale e  $\sigma_n$  è la deviazione standard dell'immagine affetta da rumore. Per questo motivo si utilizzano immagini ad alto contrasto, poiché  $\sigma_s$  risulta maggiore!

### 3.5.1 Rumore gaussiano additivo bianco

Il **rumore gaussiano additivo bianco** è un processo stocastico, ovvero una variabile aleatoria che emette valori casuali nel tempo  $\varepsilon(t)$  o nello spazio  $\varepsilon(n, m)$  con le seguenti caratteristiche:

- Si somma al segnale pulito;
- Non è periodico nel tempo o nello spazio;
- I valori vengono prodotti con la seguente probabilità:

$$P(\varepsilon(n, m) = l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(l - 0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

In cui 0 è uguale a  $\mu$ , ovvero indica la media del rumore. Inoltre, data una distribuzione gaussiana  $\mu, \sigma^2$  il 98% di valori  $l \in [\mu - 2.5\sigma, \mu + 2.5\sigma]$ .

- I valori seguono una distribuzione gaussiana di media pari a zero, ed una particolare varianza  $\sigma^2$  (o deviazione standard  $\sigma$ ) dove più è alta la varianza, più distanti da zero saranno i numeri prodotti e sommati all'immagine pulita, più rumorosa l'immagine finale.

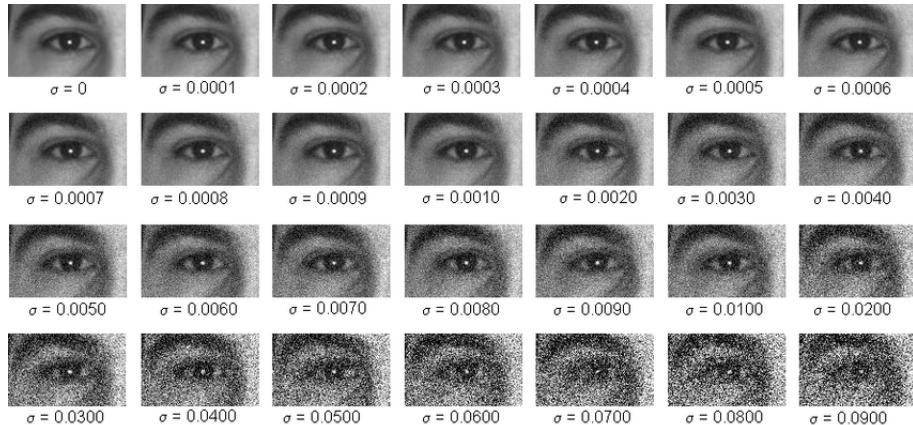


Figura 32: Esempio di rumore gaussiano a diversi valori di  $\sigma$ .

### 3.5.2 Rumore impulsivo

Il **rumore impulsivo** è causato da alterazione brusche nel segnale, viene parametrizzato da un fattore  $D$  (una percentuale) che è la densità con cui esso si localizza su pixel dell'immagine: maggiore il valore di intensità  $D$ , maggiore sarà il numero di pixel affetti.

Per esempio, il disturbo sale e pepe (*salt-and-pepper noise*) può essere utilizzato selezionando una percentuale  $D$  di pixel, ovvero  $D\%$ , in maniera uniforme nell'immagine e per ogni pixel si assegna un valore minimo o massimo con probabilità uniforme pari a  $p = 0.5$ .

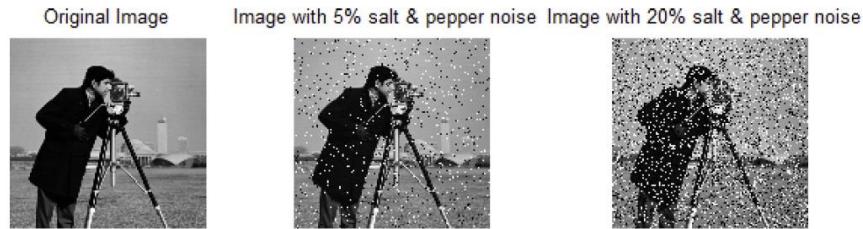


Figura 33: Esempio di applicazione dell'effetto *salt-and-pepper noise*.

### 3.6 Altre operazioni locali: tipologie di filtraggio

Esistono altre 3 tipologie principali di filtraggio:

- **Smoothing**, utilizzato per aumentare il *SNR* (pagina 67), ovvero per rimuovere il rumore.  
Per esempio, il filtro di media, mediano, gaussiano;
- **Sharpening**, utilizzato per aumentare il grado di dettaglio delle immagini.  
Per esempio, il filtro laplaciano;
- **Estrazione di caratteristiche**, utilizzato per estrarre rappresentazioni alternative alle immagini di partenza, che ne evidenzino aspetti particolari (edge, microstrutture, oggetti).  
Per esempio, il filtro prewitt, sobel, canny.

### 3.6.1 Smoothing - Filtro media

Il **filtro media** è utilizzato per **rimuovere il rumore gaussiano**. È un filtraggio  $T$  lineare, si attua attraverso la convoluzione dell'immagine con la maschera media la quale ha le seguenti caratteristiche:

- Dimensioni  $K \times K$  con  $K$  dispari;
- I suoi coefficienti sono tutti uguali e pari a  $\frac{1}{K^2}$ ;
- Il suo funzionamento è il seguente: dato un intorno di applicazione  $[(n, m)]$ , esso calcola la media dei valori vii compresi  $[\tilde{f}(n, m)]$ , e la sostituisce al posto del valore  $\tilde{f}(n, m)$ :

$$g(n, m) = T([\tilde{f}(n, m)]) = E([f(n, m)])$$

Dove  $E$  è l'operatore di media, perché  $T$  essenzialmente è l'operatore di media

Si osservi che la somma dei valori del kernel è 1:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Questo significa che il filtraggio in una locazione  $(x, y)$  è una **combinazione lineare convessa**. In altre parole, la somma dei livelli di grigio dell'immagine originale  $f$  e di quella processata  $g$  sono uguali (a meno di padding!).

**Maggiore è l'ampiezza  $K$**  della maschera, **più severo è l'effetto della media** sulla struttura dell'immagine.

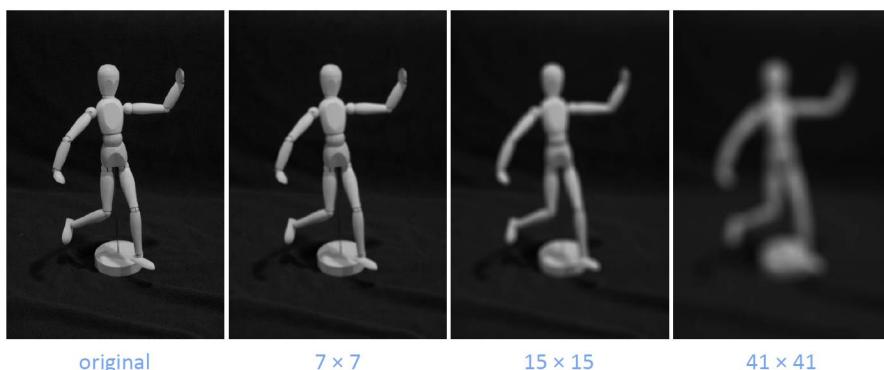


Figura 34: Esempio di filtro media all'aumentare di  $K$ , ovvero della grandezza.

### 3.6.2 Smoothing - Filtro mediano

Il **filtro mediano** è utilizzato per **rimuovere il rumore impulsivo**. È un filtraggio  $T$  non lineare, che si realizza attraverso un algoritmo. Data la matrice dell'immagine:

$$\begin{bmatrix} 240 & 245 & 0 \\ 247 & 0 & 244 \\ 251 & 246 & 250 \end{bmatrix}$$

1. Si calcola la media di tutti i valori della matrice:

$$\frac{240 + 245 + 0 + 247 + 0 + 244 + 251 + 246 + 250}{9} \approx 191$$

2. Si inseriscono in un vettore riga i valori in ordine crescente:

$$[0 \ 0 \ 240 \ 244 \ 245 \ 246 \ 247 \ 250 \ 251]$$

3. Si calcola la mediana del vettore:

$$9 \div 2 = 4.5 \longrightarrow [0 \ 0 \ 240 \ 244 \ \underline{245} \ 246 \ 247 \ 250 \ 251]$$



Figura 35: Esempio di applicazione di filtro mediano.

### 3.6.3 Smoothing - Filtro gaussiano

Il **filtro gaussiano** è quello di rendere più “lisica (*smooth*)” l’immagine, in modo simile al filtraggio di media, e come parametro l’operatore prende il valore  $\sigma$  che rappresenta la **forza** (maggiore è il valore, più è forte lo *smoothing*). La **differenza** sostanziale tra il filtraggio di media e il filtraggio gaussiano è che quest’ultimo è una media pesata, dove i pesi più vicini al centro della maschera hanno valori più alti. Così facendo si ha:

- **Vantaggio**

- Il filtraggio gaussiano effettua uno *smoothing* più lieve, **preservando i contorni meglio** di quanto faccia il filtraggio media. Quindi, la struttura viene preservata meglio.

- **Svantaggio**

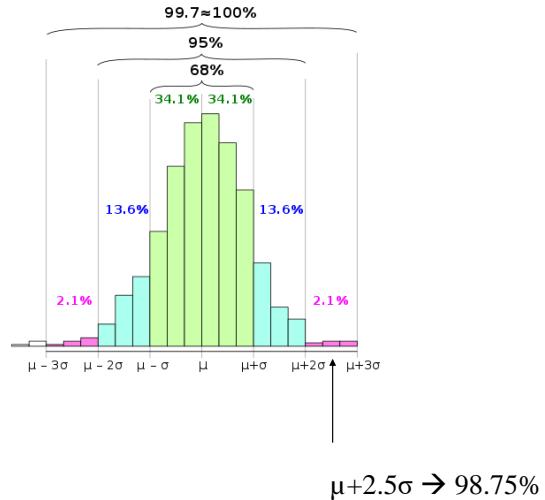
- Il rumore viene rimosso in maniera inferiore e questo provoca l'**impossibilità di applicare la formula di annullamento del rumore** visto per il filtro media.

Questo filtro può essere **implementato in maniera efficiente** in quanto la maschera è separabile, ovvero è possibile eseguirlo facendo un filtraggio prima su tutte le  $N$  righe dell’immagine come se fossero funzioni  $1D$ , e poi su tutte le  $M$  colonne:

$$\begin{aligned} I_G(i, j) &= \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} G(h, k) I(i + h, j + k) \\ &= \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{h^2 + k^2}{2\sigma^2}\right) I(i + h, j + k) \\ &= \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) I(i + h, j + k) \end{aligned}$$

Dove le variabili  $i, j, h, k, m$  sono indici per comprendere la **separabilità**. Quest’ultima consente di progettare manualmente un filtro gaussiano come segue nella prossima pagina.

Si definiscono i parametri  $\sigma$  e  $W$ . Quindi, si fissi  $\sigma$  e si trovi la dimensione della maschera  $W$  sapendo che  $W$  deve essere tale da contenere un'elevata percentuale di probabilità (uguale all'area della densità gaussiana, come in figura). In particolare, la statistica dice che con  $W = 5\sigma$  si copre il 98.75% dell'area della densità gaussiana. In altre parole, se si vuole  $\sigma = 1$  allora  $W = 5 \cdot 1 = 5$ ; se si vuole  $\sigma = 0.6$  allora  $W = 5 \cdot 0.6 = 3$ .



### 3.6.4 Domanda da esame

#### *Domanda*

Il livello di noise gaussiano presente in un'immagine, se esso noto (e.g.  $\sigma_1 = 0.01$ ) può guidare la scelta del parametro  $\sigma_2$  della maschera di filtro gaussiano?

#### *Risposta*

No, perché il rumore gaussiano lavora su tutti i valori di grigio, mentre il filtro gaussiano sulle coordinate e non c'è correlazione. Invece, il filtro media è quello ideale.

### 3.6.5 Filtraggi di sharpening

I **filtraggi di sharpening** servono per evidenziare i dettagli o come post processing dopo filtraggi di *smoothing* (questo perché i filtraggi di *smoothing* eliminano i dettagli). Per lo stesso motivo, i filtraggi di sharpening possono incrementare il rumore (un'immagine di rumore è un'immagine ad alta frequenza). Esistono due categorie: ***basic highpass spatial filtering*** e ***high boost filtering***.

I filtri di sharpening sono detti anche **filtri di derivata**, poiché calcolano numericamente nell'intorno in cui sono definiti la derivata locale (prima o seconda) dell'immagine.

#### Rispetto a x

##### Derivata asimmetrica

$$\begin{aligned} I_x(x, y) &= \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h, y) - I(x, y)}{h} \\ I_x[x, y] &= \frac{\partial I}{\partial x}[x, y] = I[x+1, y] - I[x, y] \end{aligned}$$

##### Derivata simmetrica

$$\begin{aligned} I_x(x, y) &= \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h, y) - I(x-h, y)}{2h} \\ I_x[x, y] &= \frac{\partial I}{\partial x}[x, y] = \frac{1}{2}(I[x+1, y] - I[x-1, y]) \end{aligned}$$

##### Filtro differenziale asimmetrico

$$\partial_x = [-1 \quad 1]$$

##### Filtro differenziale simmetrico

$$\partial_x = \frac{1}{2} [-1 \quad 0 \quad 1]$$

## Rispetto a $y$

### Derivata asimmetrica

$$I_y(x, y) = \frac{\partial I}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x, y + h) - I(x, y)}{h}$$

$$I_y[x, y] = \frac{\partial I}{\partial y}[x, y] = I[x, y + 1] - I[x, y]$$

### Derivata simmetrica

$$I_y(x, y) = \frac{\partial I}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x, y + h) - I(x, y - h)}{2h}$$

$$I_y[x, y] = \frac{\partial I}{\partial y}[x, y] = \frac{1}{2} (I[x, y + 1] - I[x, y - 1])$$

### Filtro differenziale asimmetrico

$$\partial_y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Filtro differenziale simmetrico

$$\partial_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Proprietà della derivata prima:

- Nulla in regioni di intensità costante;
- Non nulla in presenza di variazioni di intensità.

### Proprietà della derivata seconda:

- Nulla in regioni di intensità costante;
- Nulla in presenza di variazioni costanti di intensità (rampe);
- Non nulla in presenza di variazioni non costanti (all'inizio e alla fine di rampe).

### 3.6.6 Sharpening - Basic Highpass Spatial Filtering

Il filtraggio di sharpening chiamato **basic highpass spatial filtering** è un **filtraggio lineare** con il laplaciano, con la maschera  $H$  caratterizzata da coefficienti di un segno (e.g. positivo) vicino al centro e di segno opposto (e.g. negativo) nella periferia esterna.

Una tipica maschera di filtraggio, chiamata laplaciana:

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Altre maschere laplaciane:

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Alcune caratteristiche:

- La **somma dei coefficienti è zero**. Questo indica che quando il filtro passa su regioni con livelli di grigio quasi stabili, l'output della maschera è zero o molto piccolo;
- L'**uscita è alta** quando il valore centrale differisce dai valori periferici;
- L'**immagine di output non assomiglierà** a quella originale;
- L'**immagine di output mostra tutti i dettagli**;
- Sono inclusi alcuni **ridimensionamenti e/o clipping**, necessari per compensare eventuali livelli di grigio negativi dopo il filtraggio.

Il filtraggio lineare utilizza il *basic highpass spatial filtering* per **creare un'immagine realistica**, simile a quella di partenza, con gli edge amplificati:

$$g(n, m) = T([f(n, m)]) = f(n, m) + c \cdot h * f(n, m)$$

In cui  $h$  indica la **maschera laplaciana**,  $c$  è una **costante** pari a uno nel caso in cui il pixel centrale della maschera laplaciana sia positivo, altrimenti  $-1$ .

### 3.6.7 Sharpening - Filtro Laplaciano

La funzione laplaciana prende in ingresso un parametro  $\alpha$  il cui significato è legato all'importanza che si vuole dare agli edge verticali e orizzontali ( $\alpha = 0$ ), diagonali ( $\alpha = 1$ ), tutti gli edge ( $\alpha = 0.5$ ), attraverso questa formula:

$$h = \frac{1}{\alpha + 1} \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & -\alpha \\ \alpha - 1 & \alpha + 5 & \alpha - 1 \\ -\alpha & \alpha - 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

### 3.6.8 Sharpening - High Boost Filtering

L'immagine filtrata dallo *sharpening* si ottiene sottraendo l'immagine filtrata con *smoothing* dall'immagine originale:

**Immagine filtrata dallo sharpening** = Originale – Im. filtrata con smoothing

Se la costante  $A$  rappresenta un **fattore di amplificazione degli edge**, allora il filtro **high boost filtering** è definito come:

$$\text{High-boost} = A \cdot \text{Originale} + \text{Im. filt. dallo sharpening}$$

A differenza degli altri filtri, questo dà maggiore libertà al progettista. Infatti, il blur può avvenire attraverso una maschera di supporto arbitrariamente grande.

## 4 Elaborazione di immagini - Rinforzo del dominio delle frequenze

### 4.1 Ripasso formule utili

Si ricorda la trasformata di Fourier discreta a una dimensione (1D) che si rappresenta con la seguente equazione:

$$\tilde{F}\left(\frac{m}{M} \frac{1}{\Delta T}\right) = F\left(\frac{m}{M} \frac{1}{\Delta T}\right) = F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi \frac{m}{M} n}$$

Mentre la trasformata di Fourier discreta inversa (o antitrasformata), corrisponde a:

$$\tilde{f}(n\Delta T) = f(n\Delta T) = f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi \frac{m}{M} n}$$

È possibile fare alcune osservazioni riguardo le trasformate di fourier in una e due dimensioni. Partendo dalla definizione:

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi \frac{m}{M} n}$$

Si intende la trasformata di Fourier discreta come la moltiplicazione del segnale per delle funzioni sinusoidali 1D. Più il segnale “assomiglia” alla sinusoide di frequenza specifica con cui si moltiplica, più il valore di ampiezza della trasformata di Fourier discreta è alto per quella frequenza.

Si esegue un cambio di variabile, quindi  $\mu$  diventa la **variabile delle frequenze** e  $x$  quella dello **spazio**. Entrambe rappresentano una quantità campionata e 1D è:

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi \frac{m}{M} n} \longrightarrow F_u = F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi \frac{u}{M} x}$$

Si passa alla seconda dimensione aggiungendo  $y$  e  $v$  per l'**analisi verticale**:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{u}{M} x + \frac{v}{N} y \right)}$$

In cui  $F(u, v)$  rappresenta la **risposta** di  $I$  all'immagine (complessa) di base  $(u, v) e^{\dots}$ , invece l'esponenziale rappresenta l'**immagine** (complessa) base che è funzione di  $(u, v)$ .

Si elencano un paio di **proprietà della trasformata di Fourier discreta 2D**, utili per questo capitolo:

- **Traslazione:**

$$\text{Segnale: } g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$$

$$\text{T.d.F.: } G(u, v) = F(u, v) e^{-j2\pi(\frac{u}{M}x_0 + \frac{v}{N}y_0)}$$

$$\text{Segnale: } g(x, y) = f(x, y) e^{j2\pi(\frac{u}{M}x_0 + \frac{v}{N}y_0)}$$

$$\text{T.d.F.: } G(u, v) = f(u - u_0, v - v_0)$$

- **Rotazione:** la trasformata di Fourier di un'immagine a cui è stata applicata una rotazione  $\theta$ , porterà ad un'immagine di trasformata ruotata di angolo  $\theta$ :

$$\mathcal{F}(f_\theta)(u, v) = \mathcal{F}(f)_\theta(u, v)$$

Si richiama anche il **teorema di convoluzione**, ovvero la convoluzione nel tempo tra due segnali corrisponde alla moltiplicazione nel dominio delle frequenze. Ovviamente per cambiare dominio è necessario applicare Fourier:

$$\mathcal{F}(f * h) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(h)$$

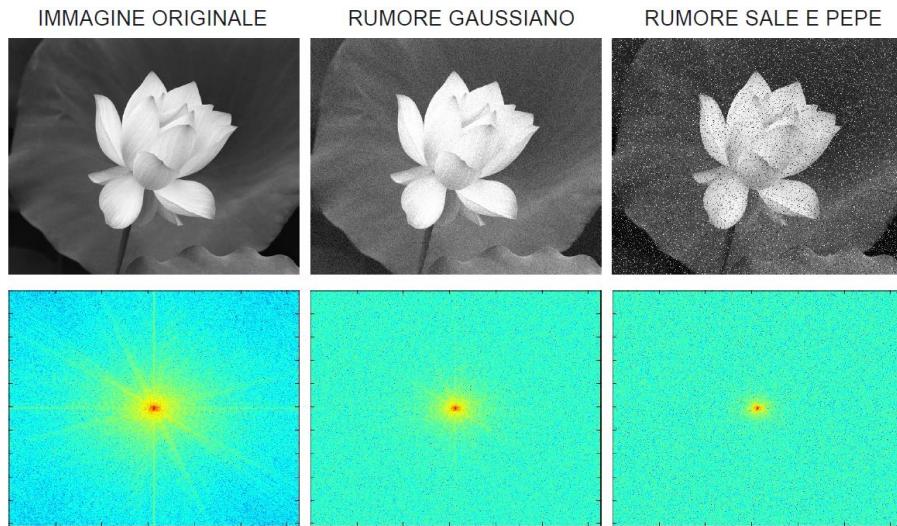
$$\mathcal{F}(f \cdot h) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(h)$$

Questo teorema è la base del filtraggio in frequenza.

## 4.2 Rumore nel dominio delle frequenze

Il **rumore** porta ad un aumento delle alte frequenze. Infatti, eseguendo una riduzione delle alte frequenze, si riduce sia il rumore (aspetto *positivo*) sia il livello di dettaglio (aspetto *negativo*).

Qui di seguito, vengono lasciate tre immagini per eseguire un confronto. L'immagine originale presenta certe frequenze, ma applicando il rumore gaussiano, o sale e pepe (*salt-and-pepper noise*), viene ridotto sensibilmente sia il rumore che il livello di dettaglio.



### 4.3 Panoramica su filtri passa alto (*high-pass*) e passa basso (*low-pass*)

I filtri passo alto (*high-pass*) e passa basso (*low-pass*) sono identici a quelli visti durante il corso di Sistemi. L'obbiettivo di questo paragrafo è introdurre qualche definizione e dare una panoramica generale dei due filtri approfonditi nei prossimi paragrafi.

In un immagine, le **frequenze basse** rappresentano informazioni con variazioni di intensità “lente”. Per esempio, le gradazioni di colore su un muro illuminato, o la nuvolosità nel cielo.

Al contrario, le informazioni ad **alte frequenze** indicano informazioni con variazioni di intensità “repentine”. Per esempio, spigoli, angoli e rumore.

Per lavorare sulle frequenze esistono due filtri importanti:

- **Filtro passa basso** (*low-pass filter*) rimuove dall'immagine le informazioni ad alte frequenze e mantiene quelle a basse frequenze.
- **Filtro passa alto** (*high-pass filter*) rimuove dall'immagine le informazioni a basse frequenze e mantiene quelle ad alte frequenze.

Dato che ogni filtro è il contrario dell'altro, da ciascuno è possibile derivare il suo opposto:

$$H_{PA} = 1 - H_{PB}$$

In cui  $PA$  indica passa alto e  $PB$  passa basso.

## 4.4 Filtri passa basso (*low-pass*)

### 4.4.1 Filtri passa basso ideale

Il **filtro passa basso ideale** viene usato per ottenere: lo sfocamento e lo *smoothing*. Solitamente, per ottenere questi risultati si attenuano le alte frequenze, ma facendo così si ottiene anche una riduzione inevitabile del rumore.

Matematicamente parlando, un filtro passa basso ideale è una funzione di trasferimento (uguale alla sua trasformata nel dominio delle frequenze) di una box.

Viene detta **ideale** perché come si vede in figura, una transizione così netta in corrispondenza alla *frequenza di taglio* non è analogicamente realizzabile. In parole poche, è ideale poiché nell'elettronica non può fisicamente avvenire un calo di energia così repentino.

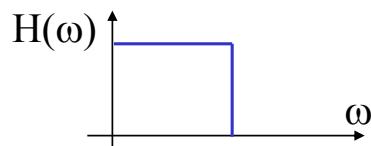


Figura 36: Funzione di trasferimento di un filtro passa basso ideale.

Dato che i filtri studiati sono solamente digitali, teoricamente potremmo tralasciare questo taglio repentino. Purtroppo, esso provoca un effetto visivo indesiderato chiamato **ringing**.

Il **ringing** (o effetto di Gibbs) è dovuto al fatto di eseguire un filtraggio passa basso ideale (in frequenza) equivalente ad eseguire una convoluzione con l'operatore sinc (nello spazio). Ne consegue che la risposta all'impulso del passa basso ideale è ancora un sinc e l'**immagine visivamente risulta increspata vicino ai bordi taglienti**<sup>5</sup>.

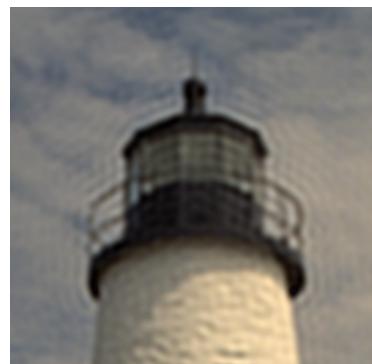
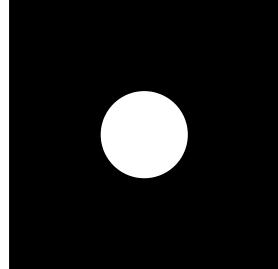


Figura 37: Effetto ringing su un'immagine.

---

<sup>5</sup>Fonte: *Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University*

Segnale  $H$ :



Le formule da applicare per il filtro basso ideale sono:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

In cui  $D_0$  è uguale a  $\mu_{\text{thresh}}$  che indica la soglia e  $D(u, v)$  è il raggio del cerchio:

$$D(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2}$$

Da notare che solo le frequenze nel cerchio di raggio  $D_0$  vengono mantenute.

#### 4.4.2 Filtri passa basso di Butterworth

Il **filtro passa basso di Butterworth** è un filtro con attenuazione dolce in prossimità della frequenza di taglio. La **proprietà caratterizzante** di questo

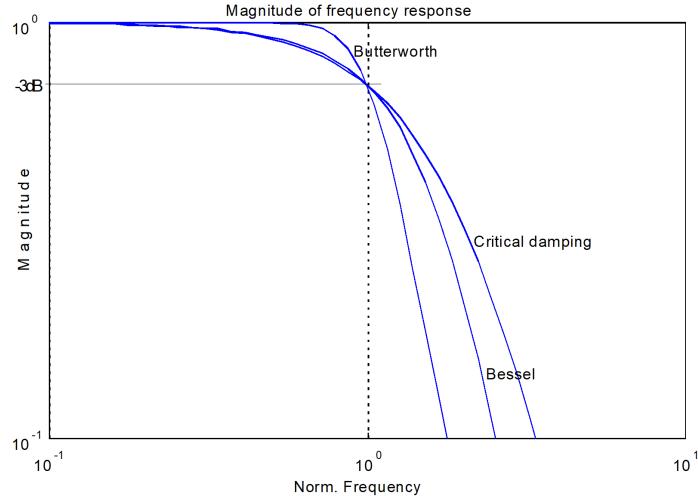


Figura 38: Filtro passa basso di Butterworth.

filtro è la **risposta molto ripida nella banda passante**.

L'ordine è  $n$  e la frequenza di taglio  $D_0 = \mu_{\text{thresh}}$ :

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u, v)}{D_0}\right)^{2n}}$$

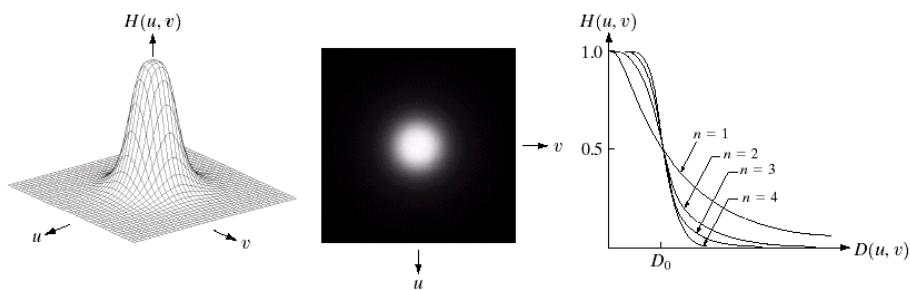


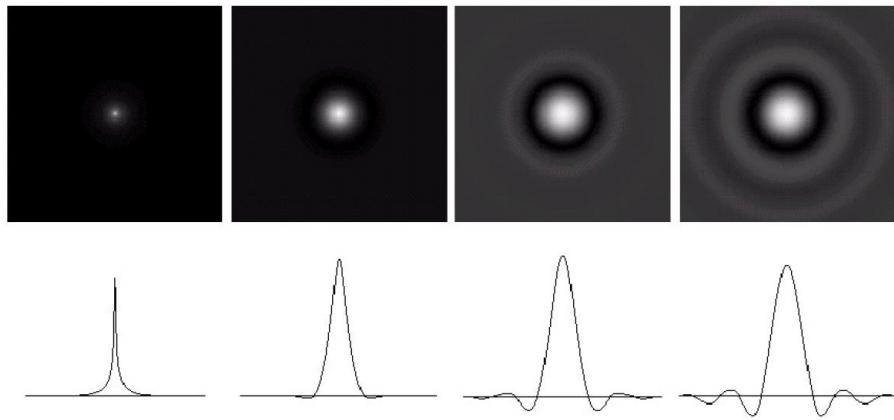
Figura 39: Applicazione dell'ordine e della frequenza di taglio.

Le formule da applicare:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}}$$

$$D(u, v) = \sqrt{\left( u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left( v - \frac{N}{2} \right)^2}$$

È interessante notare che facendo tendere  $n$  all'infinito, si ottiene il filtro passa basso ideale:



#### 4.4.3 Filtri passa basso Gaussiano

La trasformata di Fourier di una funzione Gaussiana è anch'essa Gaussiana:

$$F(u) = Ae^{-\frac{u}{2\sigma^2}}$$

$$f(t) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2t^2}$$

Oppure allo stesso identico modo:

$$f(t) = Ae^{-\frac{t}{2\sigma^2}}$$

$$F(u) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2u^2}$$

Le equazioni di questa operazione sono:

$$\begin{aligned} H(u, v) &= e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}} \\ D(u, v) &= \sqrt{\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

In cui la costante  $D_0$  può essere sostituita con  $\sigma$ , ovvero l'effettiva deviazione standard della distribuzione Gaussiana. In questo caso, la frequenza di taglio  $D_0$  corrisponde alla deviazione standard  $\sigma$ . In altre parole, quando  $D(u, v) = \sigma$ , allora l'intensità di taglio è 0.607 e il filtraggio crea un attenuamento di quella frequenza pari al 60.7%.

Un'**osservazione** interessante è la seguente. Un filtro gaussiano con una certa scala nel dominio delle frequenze, corrisponde ad un filtro gaussiano con scala inversa nel dominio dello spazio.

#### 4.4.4 Sintesi

Qui di seguito si elencano i filtri passa basso più importanti:

- **Ideale:** è una brusca transizione in corrispondenza della frequenza di *cut-off*. Questo causa un fenomeno di Gibbs o di *ringing*;
- **Gaussiano:** transizione di *cut-off* dolce. Il parametro  $\sigma$  determina la frequenza di *cut-off*;
- **Butterworth:** ha una rapidità variabile e transizione *smooth*. La ripidità viene modellata dall'ordine del filtro. La frequenza di *cut-off* viene selezionata indipendentemente dall'ordine del filtro. Si può avere *ringing* per ordini elevati.

## 4.5 Filtri passa alto (*high-pass*)

Un **filtro passa alto** sopprime (blocca) le basse frequenze e lascia passare le alte frequenze. La costruzione di un filtro passa alto può essere eseguita come:

$$H_{PA} = 1 - H_{PB}$$

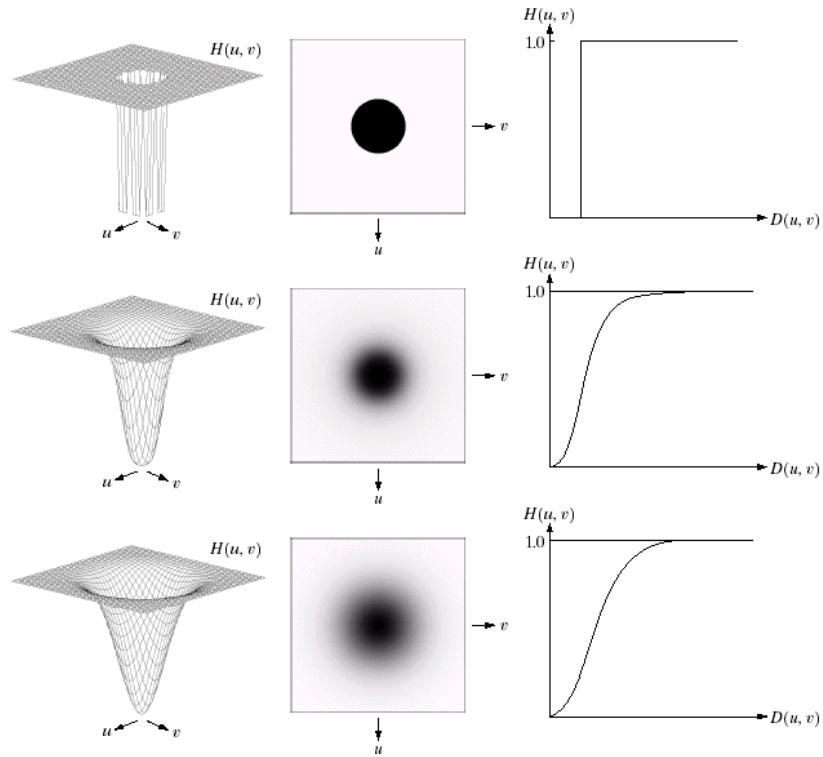
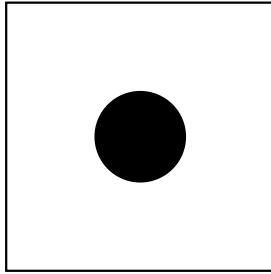


Figura 40: Filtri passa alto, dall'alto: ideale, di Butterworth, Gaussiano.

#### 4.5.1 Filtri passa alto ideale

Dato il segnale  $H$ :



Le formule da applicare per il **filtro passa alto ideale** sono:

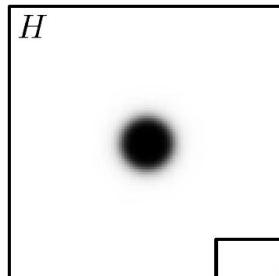
$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2}$$

Solamente le frequenze fuori dal cerchio di raggio  $D_0$  vengono mantenute.

#### 4.5.2 Filtri passa alto di Butterworth

Dato il segnale  $H$ :



Le formule da applicare per il **filtro passa alto di Butterworth** sono:

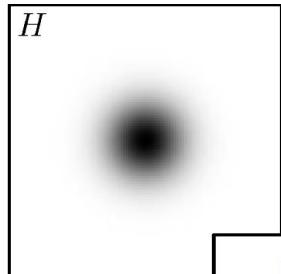
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0}\right]^{-2n}}$$

$$D(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2}$$

Per  $n$  tendente ad infinito si ha il filtro passa alto ideale.

#### 4.5.3 Filtri passa alto Gaussiano

Dato il segnale  $H$ :



Le formule da applicare per il **filtro passa alto Gaussiano** sono:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$
$$D(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2}$$

## 4.6 Filtri per enfatizzare le alte frequenze

Esiste anche il **filtro omeomorfo** che attenua le basse frequenze e aumenta quelle delle alte:

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[ 1 - e^{-\frac{cD^2[u, v]}{D_0^2}} \right] + \gamma_L$$

Invece, usando il **filtro passa alto**, è possibile enfatizza aumentando la variabile  $k$ :

$$H(u, v) = (1 + k \cdot H_{PA}(u, v)) \cdot H$$

Dove  $k$  è il contributo delle alte frequenze,  $H$  lo spettro dell'immagine e  $H_{PA}$  il filtro passa alto

## 4.7 Filtri passa banda e ferma banda

I seguenti filtri operano su una banda di frequenze, al contrario i precedenti filtri lavoravano su alte o basse frequenze.

Un **filtro passa banda** sopprime tutte le frequenze al di fuori di un intervallo di frequenze specificato.

Un **filtro ferma banda** sopprime tutte le frequenze nell'intervallo specificato.

Analogamente ai filtri passa basso e alto, anche qui è possibile derivare uno dei due filtri avendo solamente l'altro:

$$H_{PBn} = 1 - H_{FBn}$$

Dove  $PB$  indica passa banda e  $FB$  ferma banda.