# Analisi II

VR443470

ottobre 2022

# Indice

# 1 Lezione 01

## 1.1 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni differenziali a **variabili separabili** hanno due forme:

- **Forma canonica.** $y'(x) = f(x) \cdot g\left(y(x)\right)$
- **Forma alternativa.** $y' = f(x) \cdot g(y)$

Dove $f$ e $g$ sono funzioni continue "in un intervallo reale", più formalmente:

$$
\begin{gathered}
f \text{ continua in } I \subseteq R \\
g \text{ continua in } J \subseteq R
\end{gathered}
$$

Le **soluzioni** di un'equazione differenziale possono essere:

✓ **Costanti.** Quando $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è uno zero di $g(y)$ e dunque vale:

$$y(x) = \bar{y} \quad \forall x \in I$$

Quindi, quando un valore annulla $g(y)$, vuol dire che è stata trovata una soluzione costante dell'equazione differenziale.

✓ **Non costanti.** Quando $g(y)$ non si annulla e quindi ci sarà la relazione:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \longrightarrow \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Tuttavia, supponendo che $G(y)$ sia una primitiva di $\dfrac{1}{g(y)}$, allora:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G\left(y(x)\right) = f(x) \qquad \text{con} \qquad G(x) = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Dove $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$. Ma dato che $G$ è invertibile, si scrive:

$$y(x) = G^{-1}\left(F(x) + c\right) \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{1}$$

L'equazione 1 rappresenta l'**insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale** e viene chiamato anche **integrale generale**.

## Esempio equazione differenziale a variabili separabili

Equazione differenziale: $y' = xy$ in cui la $x$ rappresenta $f(x)$ e la $y$ rappresenta la $g(y)$. Una **nuova notazione** utilizzata negli esercizi è la seguente:

$$f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

Che indica che le **funzioni $f$ e $g$ sono continue nell'intervallo** $\mathbb{R}$.

L'esercizio si svolge *cercando* inizialmente le soluzioni costanti. Il modo più semplice per farlo è porre $y = 0$ e verificare se $g(y)$ si annulla: in caso affermativo esiste una soluzione costante. In questo esercizio si annulla, quindi *ha soluzione costante*.

Al contrario, le soluzioni *non* costanti si trovano quando $y \neq 0$. Quindi:

$$y' = xy \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy \to \frac{1}{y}\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \to \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Esplicitando il risultato:

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \quad c \in \mathbb{R} \longrightarrow y(x) = \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad c \in \mathbb{R}$$

Dato che $e^c$ può essere positivo o negativo escluso lo zero (soluzione costante!), si riscrive più precisamente l'**integrale generale dell'equazione**:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

È possibile **verificare la soluzione** dell'equazione differenziale effettuando una derivazione:

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$
$$y'(x) = k \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \checkmark\text{Verificata}$$

## 1.2 Problema di Cauchy

Nel caso in cui si è interessati ad una soluzione particolare, è necessaria una condizione. In questo caso, si è di fronte al **problema di Cauchy**, il quale è caratterizzato dalla presenza di un'equazione differenziale e da almeno una condizione.
L'**obbiettivo** è verificare la/le condizione/i tramite una soluzione (o più soluzioni).
La **struttura** è la seguente:

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \qquad x_0 \in I \end{cases} \tag{2}$$

### Esempio problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = -3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La risoluzione:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3y \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -3\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -3x + c \longrightarrow ...$$
$$... \longrightarrow y(x) = ke^{-3x} \quad k \in \mathbb{R} \text{ [\textbf{Integrale generale}]}$$

Adesso si esegue la **verifica della condizione** sostituendo quest'ultima nella soluzione:

$$\text{Condizione: } y(0) = 2$$
$$\text{Eq. diff.: } y(0) = ke^{-3\cdot(0)} \longrightarrow 2 = k \cdot e^0 \longrightarrow k = 2$$

Quindi, la **soluzione del problema di Cauchy**:

$$y(x) = 2e^{-3x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

## Un altro esempio del problema di Cauchy

Il problema:

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)x \quad f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Cercando la **soluzione costante** sostituendo $y = 0$, si osserva che la funzione non si annulla, quindi $1 + y^2 \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, ovvero nessun numero reale annulla $g(y)$.
Cercando eventuali **soluzioni costanti**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y^2)x \longrightarrow \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x \longrightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \textbf{Integrale generale}\text{: } \arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

**Verificando la condizione** sostituendo, si ottiene:

$$\text{Condizione: } y(0) = 1$$

$$\text{Eq. diff.: } \arctan(1) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + c \longrightarrow \arctan(1) = 0 + c \longrightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

È possibile **esplicitare** la funzione $y(x)$ dall'integrale generale, ottenendo la seguente forma:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Inoltre, dato che arctan è sicuramente compreso, per definizione, nell'intervallo:

$$\pm\frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + c < \frac{\pi}{2}$$

Allora è possibile sostituire la $c$ con il valore trovato durante l'esplicitazione:s

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

Per controllare che la soluzione sia effettivamente all'**interno dell'intervallo**, avviene nel seguente modo:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2}$$

Sicuramente $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}$ è verificata per $x \in \mathbb{R}$. La parte di destra è possibile verificarla effettuando qualche manipolazione sulla disuguaglianza:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{4} \longrightarrow x^2 < \frac{\pi}{2}$$

Quindi, la soluzione è corretta quando $x$ è nell'intervallo (esplicitando):

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < +\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Quindi, l'**intervallo massimale delle soluzioni**, ovvero il più grande intervallo in cui è definita la soluzione del problema di Cauchy, è così definita:

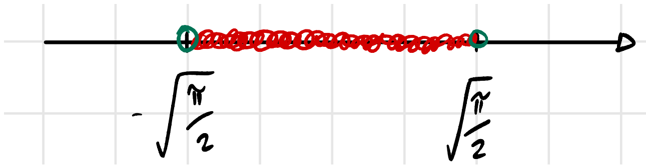


Figura 1: Intervallo massimale delle soluzioni.

## 2 Lezione 02

### 2.1 Problema di Cauchy per equazioni differenziali a variabili separabili

Per introdurre il problema di Cauchy con le equazioni differenziali a variabili separabili, è necessario introdurre il **teorema di esistenza e unicità**.

Si consideri il problema:

$$\begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

In cui $f$ è una funzione continua su $I = (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ e $g$ è una funzione continua su un intervallo $J = (y_0 - r_2, y_0 + r_2)$.

**Teorema 1 (Esistenza)** *Esiste una soluzione al problema di Cauchy definita per ogni $x \in I' = [x_0 - \delta, x + \delta] \subseteq I$. È dunque* ***garantita la soluzione locale*** *e non obbligatoriamente su tutto l'intervallo $I$.*

**Teorema 2 (Unicità)** *Se $g(y)$ è continua e derivabile con derivata continua (formalmente: $g(y) \in \mathcal{C}^1(J)$), allora la* ***soluzione è unica****.*

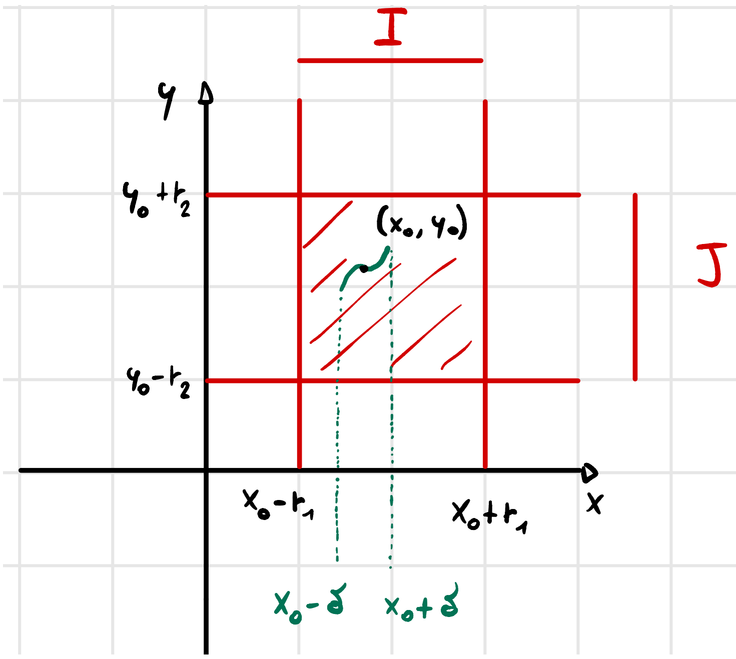


Figura 2: Rappresentazione grafica del problema di Cauchy con variabili separabili.

**Caso in cui il teorema dell'unicità viene violato! È facilmente riconoscibile poiché ci sono due soluzioni che passano per la condizione imposta (il punto $x_0, y_0$).**

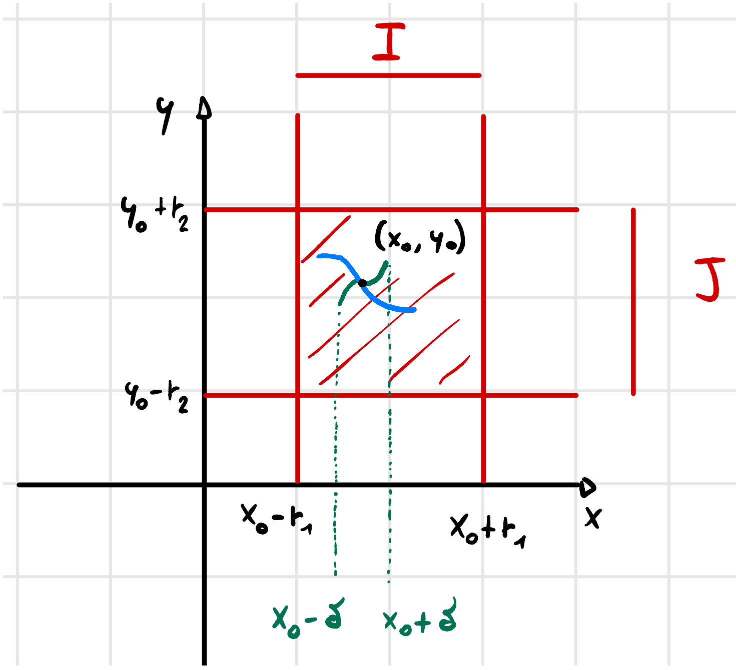


Figura 3: Teorema dell'esistenza garantito, ma teorema dell'unicità violato.

## 2.2 Esempi di problemi di Cauchy

### 2.2.1 Esempio semplice

Il problema:

$$\begin{cases} y' \cdot y = 1 \\ y\left(1\right) = 0 \end{cases}$$

In questo caso **non esiste una soluzione** poiché $y^{'}\left(1\right) \cdot y\left(1\right)$ deve essere uguale a 1. Se nell'espressione $y^{'}\left(1\right) \cdot y\left(1\right) = 1$ vengono sostituite le funzioni con il valore zero, risulta impossibile l'uguaglianza: $y^{'}\left(1\right) \cdot 0 = 1$.

### 2.2.2 Esempio medio

Il problema:

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

Esiste sicuramente **una soluzione costante** con $y = 0$.

Inoltre, andando a studiare le **soluzioni non costanti**, quindi con $y \neq 0$, si evince chiaramente che:

$$y^{'} = y^{\frac{2}{3}} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{2}{3}}} = \mathrm{d}x \longrightarrow y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$
$$\textbf{Integrando...} \longrightarrow 3y^{\frac{1}{3}} = x + c$$

Dato che utilizzando la condizione del problema $y\left(0\right) = 0$ la $c$ è zero:

$$3\left(y\left(0\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 0 + c$$

Esplicitando la $y$, si ottiene la **soluzione al problema di Cauchy**:

$$y = \frac{1}{27}x^3 \qquad \text{con } x \geq 0$$

È interessante notare che la soluzione può essere prolungata a tutto l'insieme dei reali $\mathbb{R}$:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{27}x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre, è possibile anche traslare funzioni di questo tipo:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ \dfrac{1}{27}(x-\alpha)^3 & x \geq \alpha \end{cases}$$

Questo dimostra che la funzione ha una derivata non limitata nell'intervallo.

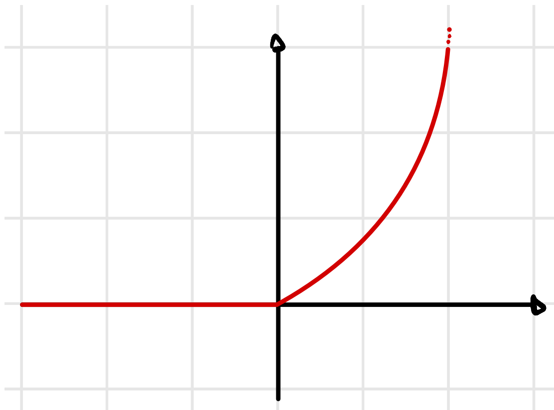

Figura 4: Grafico dell'osservazione estesa a $\mathbb{R}$.

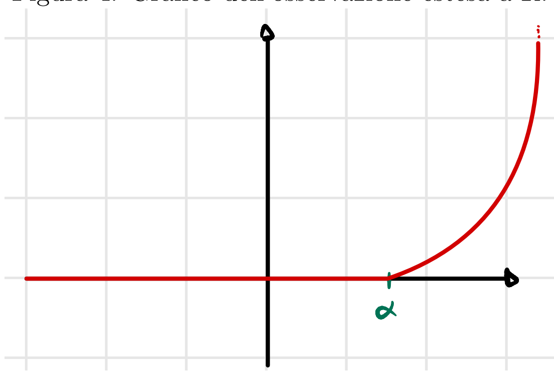


Figura 5: Grafico dell'osservazione estesa a $\mathbb{R}$ e traslata di $\alpha$.

### 2.2.3 Esempio difficile

Il problema:

$$\begin{cases} e^{x+y} \cdot y + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Tuttavia, la funzione non è in forma canonica, quindi si eseguono alcune operazioni algebriche:

$$e^{x+y} \cdot y + x = 0 \longrightarrow e^{x+y} \cdot y = -x \longrightarrow y' = -\frac{x}{e^{x+y}}$$

Quindi:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{e^{x+y}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Il problema si risolve tramite la **tecnica delle variabili separabili**. Infatti:

$$y' = -\frac{x}{e^{x+y}}; \quad y' = -\frac{x}{e^x \cdot e^y}; \quad y' = -\frac{x}{e^x} \cdot \frac{1}{e^y}; \quad y' = -\underbrace{x \cdot e^{-x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-y}}_{g(y)}$$

Con gli intervalli definiti in tutto $\mathbb{R}$ cioè $I = J = \mathbb{R}$.
La risoluzione si svolge separando le variabili e integrando (N.B. la funzione $g(y)$ non ha zeri e quindi **non esistono soluzioni costanti**):

$$e^y \mathrm{d}y = -xe^{-x}\mathrm{d}x; \quad \int e^y \mathrm{d}y = \int -xe{-}x\mathrm{d}x; \quad e^y = xe^{-x} - \int 1 \cdot e^{-x}\mathrm{d}x;$$

$$\textbf{Soluzione: } e^y = xe^{-x} + e^{-x} + c$$

Dunque, l'**integrale generale**:

$$y(x) = \ln\left(xe^{-x} + e^{-x} + c\right)$$

Imponendo la **condizione iniziale**:

$$y(0) = \ln(1 + c) \qquad \text{con } c = 0$$

Per cui, la **soluzione al problema di Cauchy** è:

$$y(x) = \ln\left(xe^{-x} + e^{-x}\right) \qquad \text{con } x > -1$$

L'**intervallo massimale** è:

$$(-1; +\infty)$$

## 2.3 Modello di crescita logaritmica

Creato dal matematico belga Verhulst, riguarda le equazioni differenziali. Infatti, la forma generale trovata nei problemi di Cauchy è del tipo $y^{'} = ay\left(1 - by\right)$, ma in questo modello è importante una forma alternativa della funzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \text{Funzione:} & y^{'} = ky\left(1-y\right) \\ \text{Condizione:} & y\left(0\right) = y_0 \end{cases}$$

In modo più formale, nel modello di crescita logaritmica l'equazione differenziale rappresenta una frazione di popolazione. Dunque, è possibile riscriverla come:

$$\begin{cases} y^{'} = ky\left(1-y\right) & 0 \leq y \leq 1 \\ y\left(0\right) = y_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso, le **<u>soluzioni costanti</u> (o stabili, o d'equilibrio)** sono $y = 0$ e $y = 1$. Invece, le **<u>soluzioni *non* costanti</u>** sono:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-y\right)} = k\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{Integrando...}} \int \frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-y\right)} = \int k\mathrm{d}x;$$
$$\ln\left(y\right) - \ln\left(1-y\right) = kx + c;$$
$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = kx + c$$

Nonostante la forma sia corretta, è utile avere la $y$ esplicitata, quindi:

$$\frac{y}{1-y} = e^{kx} \cdot e^{c}; \qquad y = e^{c} \cdot e^{kx} \cdot \left(1-y\right);$$
$$y = e^{c} \cdot e^{kx} - e^{c} \cdot e^{kx} y; \qquad y\left(1 + e^{c} \cdot e^{kx}\right) = e^{c} \cdot e^{kx};$$
$$y\left(x\right) = \frac{e^{c} \cdot e^{kx}}{1 + e^{c} \cdot e^{kx}}$$

Il modello si conclude **<u>applicando</u>** la **<u>condizione iniziale</u>**:

$$\underbrace{y\left(0\right)}_{=y_0} = \frac{e^{c}}{1+e^{c}} \xrightarrow{\text{Esplicitando } e^{c}} \left(1+e^{c}\right) y_0 = e^{c}; \qquad e^{c}\left(y_0 + 1\right) = y_0;$$
$$e^{c} = \frac{y_0}{1-y_0}$$

Quindi, andando a sostituire il valore trovato con la condizione iniziale, si trova la **soluzione**:

$$y\left(t\right) = \frac{\frac{y_0}{1-y_0} \cdot e^{kx}}{1 + \frac{y_0}{1-y_0} \cdot e^{kx}} = \frac{y_0 \cdot e^{kx}}{1 - y_0 + y_0 \cdot e^{kx}}$$

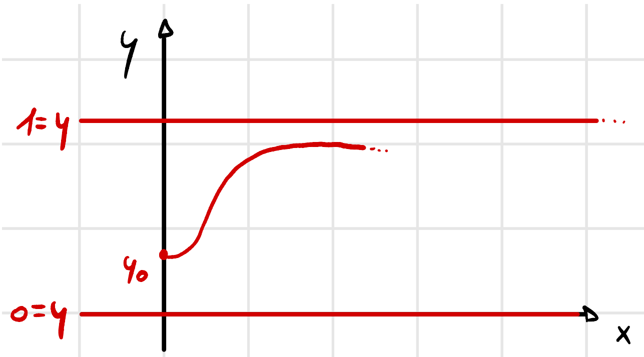


Figura 6: Esempio di grafico con un certo $y_0$.

## 2.4 Esercizio con domande da esame

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{'} = e^{x} + y^{2} \\ y\,(0) = 1 \end{cases}$$

Si **risponda alle seguenti domande**:

I Scrivere l'equazione della tangente al grafico della curva con soluzione nel punto di coordinate $(0, 1)$.

II Vicino (o intorno) al punto $x = 0$, la funzione è concava o convessa?

**Risposta domanda I.**

L'equazione generale (o definizione) della retta tangente è:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

Con $x_0$, $y_0$ che sono coordinate del punto $m$, ovvero la *pendenza*. Quindi, andando a sostituire le coordinate fornite dall'esercizio nella definizione di retta tangente:

$$\textbf{Sostituzione}\;\;(0,1) \to y - 1 = m\,(x - 0)$$

Sapendo che la pendenza $m$ è la derivata della funzione calcolata nel punto zero, si eseguono questi calcoli usando la funzione fornita dall'esercizio:

$$m \longrightarrow y^{'}\,(0) = e^{0} + [y\,(0)]^{2}\,; \qquad y^{'}\,(0) = 1 + 1^{2} = 2$$

Il valore noto viene sostituito nella definizione di retta tangente, quindi l'equazione di quest'ultima diventa:

$$y - 1 = 2\,(x - 0) \longrightarrow y = 2x - 1$$

**Risposta domanda II.**

Per la concavità o convessità si studia la derivata seconda:

$$y^{''}\,(x) = e^{x} + 2y\,(x) \cdot y^{'}\,(x)$$

Dalla derivata seconda ottenuta si inserisce la condizione del problema:

$$y^{''}\,(0) = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 5$$

Il 2 è il risultato della $y^{'}\,(0)$ trovato prima.

Dato che il **risultato è positivo, allora la funzione è convessa**. Più formalmente, in un intorno di $x = 0$, se la $y^{''}\,(0) > 0$, la funzione si dice che è convessa.