Schemi Analisi II

VR443470

gennaio 2024

Indice

1 Prerequisiti

Il corso di Analisi II si articola in due macro sezioni: primo e secondo parziale. All'esame gli esercizi da svolgere saranno 10, suddivisi 5 per la prima parte e 5 per la seconda.

Nonostante vengano date 3 ore per svolgere l'esame totale, dunque 1 ora e mezza per ciascuna prova parziale, il tempo è una risorsa fondamentale. Difatti, se un calcolo matematico dovesse richiedere una quantità eccessiva di risorse/tempo, si rischierebbe di non passare l'esame con esito positivo.

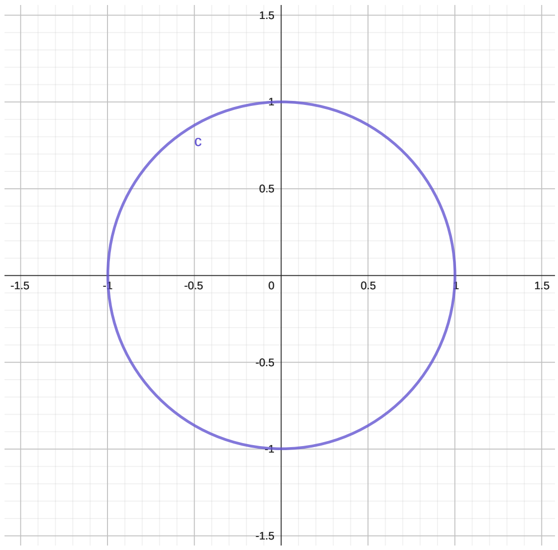
Risulta dunque fondamentale, per ciascun studente, giungere con dei prerequisiti solidi e non banali. In questo capitolo si provvederà a fornire alcuni prerequisiti necessari per affrontare il percorso senza eccessive difficoltà.

Ogni paragrafo presenterà degli esercizi e ognuno di essi sarà risolto nel seguente modo: il primo in modo approfondito per illustrare il modus operandi, gli altri facendo vedere i calcoli e risparmiando le spiegazioni prolisse. Chiaramente, nel caso in cui ci dovesse essere un caso particolare, esso verrà affrontato e spiegato passo passo.

1.1 Geometria analitica

1.1.1 Circonferenza

La circonferenza è graficamente rappresentata nel seguente modo:



Chiamando con $C = (x_C, y_C)$ le coordinate del centro della circonferenza e con r il raggio, la sua equazione generale è espressa nel seguente modo:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Nel caso in cui la circonferenza fosse centrata nell'origine degli assi, ovvero $C = (0, 0)$, allora l'equazione generale sarebbe ridotta a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Per essere più precisi, l'**equazione canonica** corrispondente alla circonferenza è la seguente:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Le formule più importanti per ricavare il centro della circonferenza C e il raggio r:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) \quad ; \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

Per ottenere l'equazione generale partendo dall'equazione canonica, si utilizza il metodo dei completamento dei quadrati (paragrafo 1.1.4).

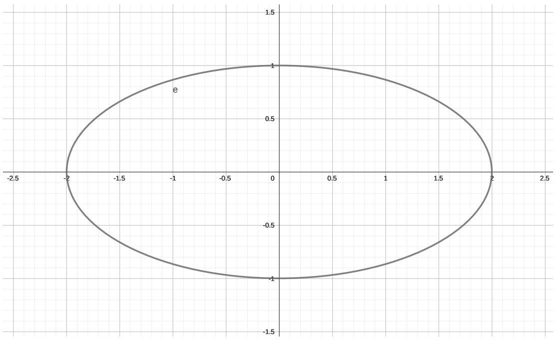
Per ottenere il raggio nel caso in cui sia noto il centro C e un punto $P = (x_P, y_P)$ appartenente alla circonferenza, si utilizza la seguente formula:

$$r = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$$

Per altri approfondimenti: YouMath.

1.1.2 Ellisse

Non esiste un'unica rappresentazione dell'ellisse, ma solitamente può essere facilmente riconoscibile perché di forma allungata:



Attenzione, che data l'**equazione canonica** dell'ellisse **centrata nell'origine**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \neq 0, \;\; b \neq 0$$

Il grafico corrisponde esattamente ad una circonferenza.

Un'ellisse presenta quattro vertici nel caso in cui abbia centro nell'origine. Le relative coordinate sono:

$$V_{1,2} = (\pm a, 0) \quad V_{3,4} = (0, \pm b)$$

Per calcolare l'eccentricità di un'ellisse ("quanto l'ellisse è schiacciata") si devono confrontare i due valori a^2 e b^2:

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{se} \quad a^2 > b^2 \quad \text{e quindi} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$e = \frac{c}{b} \quad \text{se} \quad b^2 > a^2 \quad \text{e quindi} \quad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Il valore è compreso tra: $0 \leq e < 1$.

Nel caso in cui non fosse centrata nell'origine, l'**equazione canonica** di un'**ellisse traslata**, con $C = (x_C, y_C)$ come coordinate del centro:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

I relativi vertici hanno le seguenti coordinate:

$$V_1 = (x_C - a, y_C) \quad ; \quad V_2 = (x_C + a, y_C)$$
$$V_3 = (x_C, y_C - b) \quad ; \quad V_4 = (x_C, y_C + b)$$

L'**importanza dei vertici** è dovuta al fatto che se fosse necessario rappresentare l'ellisse su un piano cartesiano, grazie alle precedenti formule. È possibile ricordarsi facilmente le formule ricordando che le coordinate dei vertici sono ottenute eseguendo la somma/differenza prima sulla coordinata x e poi sulla coordinata y.

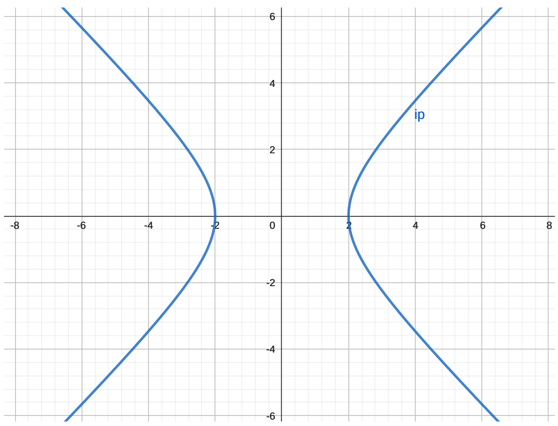
Per altri approfondimenti: YouMath.

1.1.3 Iperbole

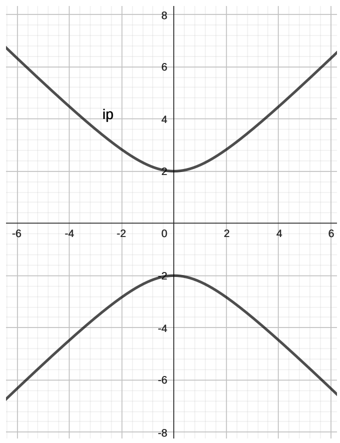
Un iperbole con centro nell'origine ha un'equazione del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \qquad \text{con } a \neq 0,\ b \neq 0$$

Il segno $+$ accanto all'1 rappresenta l'intersezione con l'asse delle ascisse (x), mentre il segno $-$ rappresenta l'intersezione con l'asse delle ordinate (y). Graficamente viene rappresentata nel seguente modo:



Con $+1$.



Con -1.

Nel caso di una iperbole con gli assi paralleli agli assi cartesiani e quindi con centro in un punto $C = (x_C, y_C)$, essa è data da:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = \pm 1 \qquad \text{con } a \neq 0,\ b \neq 0$$

Dove il segno $\pm$ accanto all'1 indica la stessa cosa detta in precedenza.

Il calcolo dei vertici, utile per rappresentare l'iperbole, ricorda molto quello utilizzato per l'ellisse. Tuttavia, dato che in questo caso i vertici sono solo 2 e non 4 (ellisse), tale calcolo cambia a seconda dell'intersezione con l'asse delle x o delle y (determinato dal segno $\pm$ dell'1 a sinistra dell'uguale):

$$\begin{aligned} \text{Intersezione asse } x, \text{ caso } +1 \quad &\rightarrow \quad V_1 = (x_C - a, y_C) \\ & \quad V_2 = (x_C + a, y_C) \\[1em] \text{Intersezione asse } y, \text{ caso } -1 \quad &\rightarrow \quad V_1 = (x_C, y_C - b) \\ & \quad V_2 = (x_C, y_C + b) \end{aligned}$$

Purtroppo tutto questo non basta per rappresentare un'iperbole, è necessario calcolare anche gli asintoti di un'iperbole per capire l'andamento dell'iperbole. Gli asintoti sono due punti dai quali passa una retta, la quale non viene mai toccata dall'iperbole:

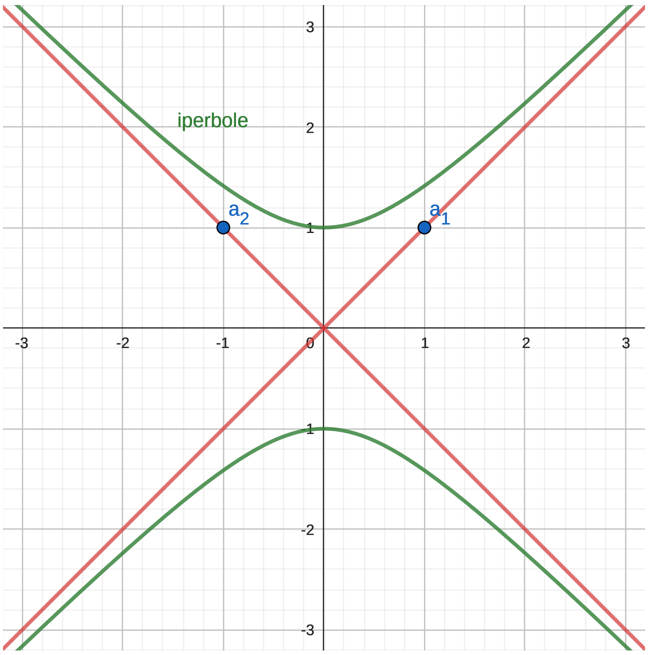
$$\begin{aligned} \text{Intersezione asse } x, \text{ caso } +1 \quad &\rightarrow \quad \text{asintoto } = \left(V_x, \pm\frac{b}{a} + V_y\right) \\ \text{Intersezione asse } y, \text{ caso } -1 \quad &\rightarrow \quad \text{asintoto } = \left(\pm\frac{b}{a} + V_x, V_y\right) \end{aligned}$$

Con V_x, V_y si intendono le coordinate x, y dei vertici.

Ricapitolando, i passi per disegnare un'iperbole partendo dall'equazione canonica sono:

1. Posizionarsi sulle coordinate di centro x_C, y_C
2. Calcolare i vertici, aumentando/diminuendo la x_C se l'1 nell'equazione canonica ha segno $+$, altrimenti aumentando/diminuendo la y_C se l'1 nell'equazione canonica ha segno $-$
3. Individuare i punti del fuoco e far passare una retta, per ciascun punto, passante per il centro x_C, y_C
4. Disegnare l'iperbole evitando di toccare le assi

Un esempio si può vedere nel seguente grafico:



Iperbole di equazione: $x^2 - y^2 = -1$

Ovviamente le rette non vanno disegnate, ma in questo grafico sono state rappresentate per mostrare come disegnare un'iperbole.
Per altri approfondimenti: YouMath.

1.1.4 Completamento dei quadrati

Il completamento dei quadrati è un'operazione molto potente che può essere applicata sempre (a discapito dello studente se ha senso o no applicarla!). In questo caso viene applicata ad un'ellisse.

Innanzitutto, la **prima operazione** dell'applicazione del completamento dei quadrati è il raggruppamento dei valori simili, ovverosia:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 &= 0 \\ \left(9x^2 + 36x\right) + \left(4y^2 - 24y\right) + 36 &= 0 \end{aligned}$$

La **seconda operazione** è prendere in considerazione i termini con le x, e poi quelli con le y, e cercare un quadrato. Ovvero sia un valore c tale per cui il Δ (nella formula del calcolo di un'equazione di secondo grado $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$) sia uguale a zero:

$$\begin{array}{lll} 9x^2 + 36x & \longrightarrow & 36^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\ & & 36^2 - 36c = 0 \\ & & c = 36 \\ \\ 4y^2 - 24y & \longrightarrow & 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\ & & 24^2 - 16c = 0 \\ & & c = 36 \end{array}$$

Suggerimento: per trovare tale valore, basta risolvere la banale equazione $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ con c incognita e a, b termini noti.

La **terza operazione** è riscrivere l'equazione con i nuovi valori c, ma per lasciare invariata l'equazione è necessario annullarli, ovvero scrivere $c - c$ (nessun problema, con manipolazioni algebriche si riuscirà ad evitare di ritornare al punto di inizio):

$$\left(9x^2 + 36x + 36 - 36\right) + \left(4y^2 - 24y + 36 - 36\right) + 36 = 0$$

Le manipolazioni algebriche riguardano $9x^2 + 36x + 36$ e $4y^2 - 24y + 36$. Ovvero, si riscrivono le due espressioni come quadrati!

$$\begin{array}{lll} 9x^2 + 36x + 36 & \longrightarrow & 9\left(x+2\right)^2 \\ 4y^2 - 24y + 36 & \longrightarrow & 4\left(y-3\right)^2 \end{array}$$

E si riscrive l'equazione generale:

$$9\left(x+2\right)^2 - 36 + 4\left(y-3\right)^2 - 36 + 36 = 0$$

Banali semplificazioni algebriche:

$$\begin{aligned} 9\left(x+2\right)^2 \cancel{-36} + 4\left(y-3\right)^2 - 36 \cancel{+36} &= 0 \\ \frac{1}{36} \cdot \cancel{9}\left(x+2\right)^2 + \cancel{4}\left(y-3\right)^2 &= \cancel{36} \cdot \frac{1}{\cancel{36}} \\ \frac{\left(x+2\right)^2}{4} + \frac{\left(y-3\right)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione corrisponde all'equazione canonica dell'ellisse.

1.1.5 Esercizi

Si rappresenti analiticamente le seguenti equazioni canoniche:

1. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$
2. $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$
4. $x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$
5. $2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$

Esercizio 1

Data l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$$

Prima di rappresentare analiticamente l'equazione, è necessario guardare immediatamente i termini x^2 e y^2 per vedere se si è di fronte ad una circonferenza. Infatti, ricordando l'equazione canonica della circonferenza (pagina 6):

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Si può notare una grande assomiglianza. Quindi, si procede con il calcolo delle coordinate del centro della circonferenza:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = \left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (2, -1)$$

Si procede con il calcolo del raggio:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma} = \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(2)^2}{4} - (-6)} = \sqrt{4+1+6} = \sqrt{11}$$

Infine, si scrive l'equazione canonica sostituendo i valori trovati:

$$\begin{aligned} (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &= r^2 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 11 \end{aligned}$$

Esercizio 2

Data l'equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si può subito vedere che si è di fronte ad un'ellisse centrata nell'origine:

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Si procede con un po' di intuito così da ricavare la forma canonica:

$$\frac{(x-0)^2}{1^2} + \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

E il risultato (forma canonica) eliminando i termini inutili:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \xrightarrow{\text{equivale a}} \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 - 1 = 0$$

Con una piccola manipolazione algebrica si ottiene l'equazione:

$$x^2 - 4y^2 = 1$$

Si tratta di un'iperbole che interseca l'asse delle ascisse (x) perché il segno dell'1 è + ed è centrata nell'origine perché x e y "non esistono". Quindi:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

Esercizio 4

Data l'equazione:

$$x^2 - y^2 + x + 4y - 4 = 0$$

Ci si accorge immediatamente che è un iperbole a causa dei segni x^2 e y^2 discordi. Eseguendo alcune operazioni algebriche:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + x + 4y - 4 &= 0 \\ x^2 - y^2 + x + 4y &= 4 \\ \left(x^2 + x\right) - \left(y^2 - 4y\right) &= 4 \end{aligned}$$

Si utilizza il completamento dei quadrati per ottenere la forma canonica:

$$\begin{aligned} x^2 + x \quad &\longrightarrow \quad 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\ & \qquad\quad c = \frac{1}{4} \\ y^2 - 4y \quad &\longrightarrow \quad (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\ & \qquad\quad c = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) &= 4 \\ \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - \left[(y-2)^2 - 4\right] &= 4 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - (y-2)^2 + 4 &= 4 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y-2)^2 &= 4 - 4 + \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (y-2)^2 &= \frac{1}{4} \\ 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\,(y-2)^2 &= 1 \\ \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} &= 1 \end{aligned}$$

Esercizio 5

Data l'equazione:

$$2x^2 + y^2 + 4x - y = 0$$

Si utilizza il completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned}
2x^2 + y^2 + 4x - y &= 0 \\
\left(2x^2 + 4x\right) + \left(y^2 - y\right) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x^2 + 4x \quad &\longrightarrow \quad 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0 \\
&\qquad\quad c = 2 \\
y^2 - y \quad &\longrightarrow \quad (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\
&\qquad\quad c = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(2x^2 + 4x + 2 - 2\right) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) &= 0 \\
\left[2\left(x+1\right)^2 - 2\right] + \left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] &= 0 \\
2\left(x+1\right)^2 - 2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\
2\left(x+1\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 2 + \frac{1}{4} \\
2\left(x+1\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\
\frac{4}{9} \cdot 2 \cdot \left(x+1\right)^2 + \frac{4}{9} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 1 \\
\frac{\left(x+1\right)^2}{\frac{9}{8}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} &= 1
\end{aligned}$$

L'equazione canonica si tratta di un'ellisse.

1.2 Algebra

1.2.1 Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni e i seguenti sistemi di equazioni algebriche:

1. $\begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

3. $\dfrac{y}{y+2} = mx^2$ (risolvere rispetto a y)

4. $\dfrac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1$ (risolvere rispetto a y)

5. $\log \dfrac{2-y}{1-y} = x + 3$ (risolvere rispetto a y)

Esercizio 1

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2y - 6xy = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Per trovare tutti i valori che annullano il sistema, si inizia con qualche manipolazione algebrica:

$$\begin{cases} 3y\left(x^2 - 2x\right) = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Quale valore annulla $x^2 - 2x$? Si calcola:

$$x^2 - 2x \longrightarrow x\,(x-2)$$

Quindi le soluzioni sono 0 e 2. Per cui i valori che annullano il sistema per adesso sono:

$$y = 0 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^3 - 3x^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^2\,(x-3) = 0 \end{cases} \longrightarrow x = 0; x = 3$$

Con $x = 0$ si è già trovata una soluzione ($y = 0$), quindi si prova $x = 2$:

$$x = 2 \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2^3 + 4y^3 - 3 \cdot 2^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y^3 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, quindi i possibili valori sono:

- $(x = 0, y = 0)$
- $(x = 3, y = 0)$
- $(x = 2, y = 1)$

Esercizio 2

Dato il sistema:

$$\begin{cases} x^2 = \lambda x \\ y^2 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{cases} x^2 - \lambda x = 0 \\ y^2 - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x\left(x - \lambda\right) = 0 \\ y\left(y - 4\lambda\right) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

I primi valori che si provano sono i soliti $x = 0$ e $y = 0$. Si inizia con $x = 0$:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ y\left(y - 4\lambda\right) = 0 \\ 0 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y\left(y - 4\lambda\right) = 0 \\ y^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y\left(y - 4\lambda\right) = 0 \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 4\lambda\right) = 0 \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{4\lambda}{\sqrt{2}} = 0 \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{4\lambda}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{8} \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Si prosegue con $y = 0$:

$$\begin{cases} x\left(x - \lambda\right) = 0 \\ 0 = 0 \\ x^2 + 0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x\left(x - \lambda\right) = 0 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 1 \\ 0 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Per concludere l'esercizio, si deve riscrivere il sistema utilizzando operazioni permesse dall'algebra:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} \cdot x^2 = \lambda x \cdot \dfrac{1}{x} \\ \\ \dfrac{1}{y} \cdot y^2 = 4\lambda y \cdot \dfrac{1}{y} \\ \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \left(\lambda\right)^2 + 2\left(4\lambda\right)^2 = 1 \end{cases}$$

È evidente che con questa piccola manipolazione algebrica, i calcoli risultano più semplici. Adesso si calcola il quadrato di lambda e si trovano le sue soluzioni per concludere l'esercizio:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 + 32\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ 33\lambda^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{33} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Si sostituisce λ all'interno di x e y:

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{33}} \\ y = \pm\dfrac{4}{\sqrt{33}} \\ \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{33}} \end{cases}$$

Le soluzioni sono terminate, sono state valutate tutte le linee del sistema. Quindi, i valori possibili sono:

- $\left(x = 0, y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $\left(x = 0, y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = -\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)$
- $(x = 1, y = 0, \lambda = 1)$
- $(x = -1, y = 0, \lambda = -1)$
- $\left(x = \dfrac{1}{\sqrt{33}}, y = \dfrac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{33}}\right)$
- $\left(x = -\dfrac{1}{\sqrt{33}}, y = -\dfrac{4}{\sqrt{33}}, \lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{33}}\right)$

Esercizio 3

Data l'equazione:

$$\frac{y}{y+2} = mx^2$$

Si deve risolvere rispetto a y:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{y+2} &= mx^2 \\
\frac{y+2}{1} \cdot \frac{y}{y+2} &= mx^2 \cdot \frac{y+2}{1} \\
y &= mx^2 y + 2mx^2 \\
y - mx^2 y &= 2mx^2 \\
y\left(1 - mx^2\right) &= 2mx^2 \\
\frac{1}{1-mx^2} \cdot y\left(1 - mx^2\right) &= 2mx^2 \cdot \frac{1}{1-mx^2} \\
y &= \frac{2mx^2}{1-mx^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Data l'equazione:

$$\frac{1}{y+1} = \sqrt{x+2} - 1$$

Si deve risolvere rispetto a y:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y+1} &= \sqrt{x+2} - 1 \\
(y+1) \cdot \frac{1}{y+1} &= \left(\sqrt{x+2} - 1\right) \cdot (y+1) \\
1 &= y\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} - y - 1 \\
-y\sqrt{x+2} + y &= -2 + \sqrt{x+2} \\
y\left(-\sqrt{x+2} + 1\right) &= \sqrt{x+2} - 2 \\
\frac{1}{1-\sqrt{x+2}} \cdot y\left(-\sqrt{x+2} + 1\right) &= \left(\sqrt{x+2} - 2\right) \cdot \frac{1}{1-\sqrt{x+2}} \\
y &= \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1-\sqrt{x+2}}
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Data l'equazione:

$$\log \frac{2-y}{1-y} = x+3$$

Si deve risolvere rispetto a y:

$$\begin{aligned}
\log \frac{2-y}{1-y} &= x+3 \\
\frac{2-y}{1-y} &= 10^{x+3} \\
(1-y) \cdot \frac{2-y}{1-y} &= 10^{x+3} \cdot (1-y) \\
2-y &= 10^{x+3} - 10^{x+3}y \\
-y &= 10^{x+3} - 10^{x+3}y - 2 \\
-y + 10^{x+3}y &= 10^{x+3} - 2 \\
y\left(-1+10^{x+3}\right) &= 10^{x+3} - 2 \\
\frac{1}{-1+10^{x+3}} \cdot y\left(-1+10^{x+3}\right) &= \left(10^{x+3} - 2\right) \cdot \frac{1}{-1+10^{x+3}} \\
y &= \frac{10^{x+3}-2}{10^{x+3}-1}
\end{aligned}$$

1.3 Calcolo differenziale e integrale

1.3.1 Integrali fondamentali (o notevoli)

Qua di seguito si presenta una lista di integrali fondamentali (o notevoli), che consentono di calcolare qualsiasi integrale basilare. Non devono essere imparati tutti a memoria poiché la maggior parte possono essere risolti ragionando:

- $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{con } n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x^n} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}} + c \qquad \text{con } n \neq 1$
- $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(|x|) + c$
- $\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + c \quad \text{ma} \quad \int \sin(n \cdot x) \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos(n \cdot x)}{n} + c$
- $\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x$
- $\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + c \quad \text{ma} \quad \int \cos(n \cdot x) \, \mathrm{d}x = \frac{\sin(n \cdot x)}{n} + c$
- $\int \cos^2(x) \, \mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} \mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, \mathrm{d}x = -\cot(x) + c$
- $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c$
- $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$
- $\int \sinh(x) \, \mathrm{d}x = \cosh(x) + c$
- $\int \cosh(x) \, \mathrm{d}x = \sinh(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin(x) + c$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arccos(x) + c$
- $\int \ln(x) = x(\ln(x) - 1) + c$

Per altri integrali, visita il sito: YouMath.

1.3.2 Integrare per sostituzione

Questa tecnica risolutiva è molto potente e può essere sempre applicata. Tuttavia, si tende a non utilizzarla talvolta poiché gli integrali notevoli (cap. 1.3.1) sono più immediati.

Il **primo passo** è prendere in considerazione l'integrale e sostituire il valore dx con:

$$dx = \frac{1}{t'}\,\mathrm{d}t$$

E cercare un valore t comodo così da effettuare sostituzioni intelligenti. Per esempio, dato l'integrale:

$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Si può sostituire dx scegliendo come t la x^2, infatti:

$$t = x^2 \qquad t' = 2x \qquad dx = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}t$$

$$\int x^3 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int x^{\overset{2}{\cancel{3}}} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}}\,\mathrm{d}t \longrightarrow \frac{1}{2}\int x^2 \cdot e^{-x^2}\,\mathrm{d}t \longrightarrow \frac{1}{2}\int t \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Una volta risolto l'integrale, si ritorna alla forma con x andando a risostituire.

1.3.3 Integrare per parti

L'integrazione per parti è un metodo che viene applicato quando:

- Se l'integranda è il prodotto di due funzioni;
- Se l'integranda è il prodotto di due funzioni, e una di queste è la derivata di una primitiva immediata (come esponenziali, trigonometriche, potenze, etc).

L'applicazione è la seguente a seconda dell'integrale definito o indefinito:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$

Un esempio valido è il seguente integrale:

$$\int t \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Si prosegue per parti:

$$f(t) = t \qquad f'(t) = 1 \qquad g'(t) = e^{-t} \qquad g(t) = -e^{-t}$$

E si va alla sostituzione:

$$\int t \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t = t \cdot \left(-e^{-t}\right) - \int 1 \cdot \left(-e^{-t}\right)$$

1.3.4 Decomposizione in frazioni parziali

La decomposizione in frazioni parziali è un metodo per trasformare il rapporto tra due polinomi in una somma di frazioni più semplici.

Questa tecnica viene inserita nel paragrafo degli integrali poiché spesso viene utilizzata per calcolare integrali che presentano frazioni apparentemente complesse.

Si presenta un integrale complesso:

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2} \,\mathrm{d}x$$

Innanzitutto, si eseguono alcune **operazioni preliminari**, ovverosia si prepara la frazione scomponendola il più possibile. In questo caso, al denominatore è possibile scomporre $x^2 - 1$ (ricordando $x^2 = 1 \to x = \pm 1$):

$$\int \frac{x^2}{\left[(x-1)(x+1)\right]^2} \,\mathrm{d}x$$

E inoltre, dato che vi è una potenza e una moltiplicazione all'interno, è possibile scomporre ancora di più:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} \,\mathrm{d}x$$

Adesso si parte con il vero algoritmo. Il **primo passo** è prendere ciascun fattore del denominatore e creare la sua corrispondenza con le lettere:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 \quad &\longrightarrow \quad \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \\
(x+1)^2 \quad &\longrightarrow \quad \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Come si può notare, si parte dal grado minimo del fattore preso in considerazione, e lo si aumenta di grado fino a che non si trova il grado originario. Nel caso in cui ci fosse stato:

$$\int \frac{1}{x(x-3)} \,\mathrm{d}x$$

Sarebbe bastato banalmente:

$$\begin{aligned}
x \quad &\longrightarrow \quad \frac{A}{x} \\
x-3 \quad &\longrightarrow \quad \frac{B}{x-3}
\end{aligned}$$

Ovviamente le lettere sono numeri reali da determinare (lo scopo dell'algoritmo). Quindi, il **secondo passo** è riscrivere i termini appena notati come un'uguaglianza:

$$\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

Il **terzo passo** è mettere tutti i termini a denominatore comune:

$$\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{A\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2+B\left(x+1\right)^2+C\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)+D\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2}$$

Il **quarto passo** è eliminare il denominatore:

$$x^2=A\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2+B\left(x+1\right)^2+C\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)+D\left(x-1\right)^2$$

Il **quinto passo** è eseguire i calcoli e cercare di raggruppare i termini in comune:

$$\begin{aligned}
x^2 &= A\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2+B\left(x+1\right)^2+C\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)+D\left(x-1\right)^2\\
x^2 &= Ax^3+Cx^3+Ax^2-Cx^2+Dx^2-Ax+2Bx-Cx-A+B+C+D\\
x^2 &= \left(A+C\right)x^3+\left(A+B-C+D\right)x^2+\left(-A+2B-C-2D\right)x-A+B+C+D
\end{aligned}$$

Il **sesto passo** è costruire un sistema che avrà come incognite le lettere e come valori noti 1 se vi è una corrispondenza con le x, 0 altrimenti. Quindi, in questo caso solo il fattore $(A+B-C+D)$ avrà 1 nel sistema:

$$\begin{cases}A+C=0\\A+B-C+D=1\\-A+2B-C-2D=0\\-A+B+C+D=0\end{cases}$$

Usando il metodo di sostituzione si ottengono i valori:

$$A=\frac{1}{4};\ \ B=\frac{1}{4};\ \ C=-\frac{1}{4};\ \ D=\frac{1}{4};$$

Il **settimo passo** è sostituire i valori trovati all'interno dell'uguaglianza scritta con le lettere:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{\left(x-1\right)^2}\\
\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2} &= \frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}}{\left(x-1\right)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{4}}{\left(x-1\right)^2}\\
\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2} &= \frac{1}{4\left(x-1\right)}+\frac{1}{4\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{4\left(x+1\right)}+\frac{1}{4\left(x+1\right)^2}
\end{aligned}$$

L'**ottavo** e ultimo **passo** è riscrivere l'integrale con i termini appena trovati. Adesso è evidente che il calcolo risulta molto più semplice:

$$\int\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{4\left(x-1\right)}+\frac{1}{4\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{4\left(x+1\right)}+\frac{1}{4\left(x+1\right)^2}\right)\mathrm{d}x$$

Fonte: YouMath.

1.3.5 Esercizi

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{\cos(3x+1)}$
2. $f(x) = (2x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

Calcolare i seguenti integrali:

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{4+y^2}\,\mathrm{d}y$
8. $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Esercizio 1

Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt{\cos(3x+1)}$$

La sua derivata è la seguente:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\cdot\sqrt{(\cos(3x+1))^1}}\cdot(-\sin(3x+1)\cdot 3)\\
f'(x) &= -\frac{3\sin(3x+1)}{2\sqrt{\cos(3x+1)}}
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Data la funzione:

$$f(x) = (2x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

La sua derivata è la seguente:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + (2x+1)\cdot(-x)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\\
f'(x) &= 2\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - 2x^2\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x}\,\mathrm{d}x$$

Si procede con la risoluzione:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{x^2 - 3x}\,\mathrm{d}x \\
= & \int \frac{1}{x\,(x-3)}\,\mathrm{d}x \\
& \downarrow \text{ si utilizza la decomposizione in frazioni parziali (pag. 21)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2 - 3x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} \\
\frac{1}{x^2 - 3x} &= \frac{A\,(x-3) + B\,(x)}{x\,(x-3)} \\
\frac{1}{x^2 - 3x} &= \frac{Ax - 3A + Bx}{x\,(x-3)} \\
x\,(x-3) \cdot \frac{1}{x^2 - 3x} &= \frac{(A+B)\,x - 3A}{x\,(x-3)} \cdot x\,(x-3) \\
1 &= (A+B)\,x - 3A \\
&= \begin{cases} A + B = 0 \\ -3A = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{3} \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases} \\
\frac{1}{x^2 - 3x} &= \frac{-\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3} \\
\frac{1}{x^2 - 3x} &= -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3\,(x-3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow \text{ si torna a risolvere l'integrale sostituendo il valore trovato} \\
= & \int -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3\,(x-3)}\,\mathrm{d}x \\
= & -\int \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{3\,(x-3)}\,\mathrm{d}x \\
= & -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Per risolvere questo integrale, si sfrutta uno degli integrali notevoli (pagina 19):

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\ln(x) + \frac{1}{3}\ln(x-3) + c \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Questo è vero perché si ricorda che:

$$
f(x) = \ln(x-3) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x-3}\cdot\frac{d}{dx}(x-3) = \frac{1}{x-3}\cdot 1
$$

Esercizio 4

Dato l'integrale:

$$
\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x
$$

Si procede con la risoluzione usando inizialmente il metodo di sostituzione:

$$
\begin{aligned}
& \int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
\downarrow\ & \text{ si imposta } t = x^2;\ t' = 2x;\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t'}\,\mathrm{d}t \\
=\ & \int x^3 e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}t \\
=\ & \int x^{\overset{2}{\cancel{3}}} e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}}\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int x^2 e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\
\downarrow\ & \text{ si termina la sostituzione} \\
=\ & \frac{1}{2}\cdot\int t\cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
\downarrow\ & \text{ data la moltiplicazione, adesso si cambia manovra e si utilizza il metodo per parti} \\
\downarrow\ & f(t) = t \qquad f'(t) = 1 \qquad g'(t) = e^{-t} \qquad g(t) = -e^{-t} \\
=\ & \frac{1}{2}\left[t\cdot(-e^{-t}) - \int 1\cdot\left(-e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t\right] \\
=\ & \frac{1}{2}\left[t\cdot(-e^{-t}) - e^{-t}\right] \\
\downarrow\ & \text{ si ritorna alla } x \\
=\ & \frac{1}{2}\left(-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}\right) \longrightarrow -\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} \longrightarrow -\frac{x^2+1}{2e^{x^2}}
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}}\,\mathrm{d}t$$

Si inizia con il metodo di sostituzione:

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}}\,\mathrm{d}t \\
\downarrow \quad & u = t-1; \qquad u' = 1; \qquad dt = \frac{1}{u'}\,\mathrm{d}u \\
= \quad & \int \frac{1}{\sqrt[3]{u}} \cdot \frac{1}{1}\,\mathrm{d}u \\
= \quad & \int \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}u \\
\downarrow \quad & \text{si applica l'integrale notevole: } \int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)\cdot x^{n-1}} \\
= \quad & -\frac{1}{\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot u^{\frac{1}{3}-1}} \\
\downarrow \quad & \text{si ritorna alla } t \\
= \quad & -\frac{1}{-\frac{2}{3}\cdot (t-1)^{-\frac{2}{3}}} \\
= \quad & -\frac{\sqrt[3]{(t-1)^2}}{-\frac{2}{3}} \\
= \quad & \frac{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 6

Dato l'integrale:

$$\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$

Si procede con la risoluzione:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \\
= \quad & \int t \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \\
\downarrow \quad & \text{si applica il metodo di sostituzione } u = t^2-1; \qquad u' = 2t; \qquad dt = \frac{1}{u'}\,\mathrm{d}u \\
= \quad & \int t \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}u \\
= \quad & \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\
= \quad & \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
= \quad & \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}u \\
\downarrow \quad & \text{si applica l'integrale notevole: } \int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)\cdot x^{n-1}} \\
= \quad & \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-1\right) \cdot u^{\frac{1}{2}-1}} \right) \\
= \quad & \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{-\frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}}} \right) \\
= \quad & \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{u}) \\
= \quad & \sqrt{u} \\
\downarrow \quad & \text{si ritorna alla } t \\
= \quad & \sqrt{t^2-1}
\end{aligned}$$

Esercizio 7

Dato l'integrale:

$$\int \frac{1}{4+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Si risolve con il metodo di sostituzione e utilizzando una grossa fetta di trigonometria:

$$\int \frac{1}{4+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$\downarrow$ metodo di sostituzione $y = 2\tan(t)\,;\qquad y' = 2\sec(t)^2\,;\qquad dy = y'\,\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{1}{4+(2\tan(t))^2}\cdot 2\sec(t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{2\sec(t)^2}{4+4\tan(t)^2}$$

$$= \int \frac{2\sec(t)^2}{4\left(1+\tan(t)^2\right)}$$

$$= \frac{\cancelto{1}{2}}{\cancelto{2}{4}}\int \frac{\sec(t)^2}{1+\tan(t)^2}$$

$\downarrow$ si utilizza la proprietà $\tan(t)^2 = \sec(t)^2 - 1$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec(t)^2}{1+\sec(t)^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int 1\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}t$$

$\downarrow$ si sostituisce la t

$\rightarrow$ $y = 2\tan(t) \rightarrow t = \arctan\left(\frac{y}{2}\right)$

$$= \frac{\arctan\left(\frac{y}{2}\right)}{2}$$

Esercizio 8

Dato l'integrale:

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Si procede con la risoluzione partendo dal metodo di sostituzione:

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$\downarrow$ metodo di sostituzione $t = 1 + x^2$; $\qquad t' = 2x$; $\qquad dx = \frac{1}{t'}\,\mathrm{d}t$

$$= \int x \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$\downarrow$ si utilizza l'integrale notevole $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{(t)^3}}{3}$$

$\downarrow$ si ritorna alla x

$$= \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}$$

2 Equazioni differenziali ordinarie

Le equazioni differenziali sono il primo argomento trattato durante il corso di Analisi II. È un argomento importante dal punto di vista teorico, ma soprattutto dal punto di vista pratico poiché ricopre $\frac{1}{4}$ dell'esame.

Si presenta una prima parte di teoria per capire il suo funzionamento e successivamente una parte pratica con degli esercizi.

2.1 Concetti e teoremi fondamentali

Si chiama **equazione differenziale ordinaria di ordine n** una relazione della forma:

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0 \tag{1}$$

con $F : \mathbb{R}^{n+2} \supseteq U \to \mathbb{R}$. La funzione incognita $y = y(t)$ insieme alle sue derivate fino all'ordine n incluso, calcolate nello stesso punto, in questo caso t.

L'**ordine** di un'equazione è l'ordine massimo di derivazione che vi compare. Con **ordinaria** si riferisce al fatto che l'incognita è una funzione di una variabile. È importante dire ordinaria, anche se talvolta viene omesso, poiché esistono anche equazioni a **derivate parziali** quando l'incognita è una funzione di più variabili.

Esplicitando la derivata di ordine massimo nell'equazione 1, si ottiene:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right) \tag{2}$$

con $f : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D \to \mathbb{R}$. Questa forma viene chiamata **normale**. Inoltre, se nell'equazione 1 F è un polinomio di primo grado, l'equazione viene definita **lineare**. Per cui, la forma generale è la seguente:

$$a_0(t)\, y^{(n)}(t) + a_1(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n(t)\, y(t) = b(t) \tag{3}$$

Nonostante la forma generale possa sembrare alquanto complessa, si presenta qua di seguito un **esempio** per dimostrare il contrario:

- Equazione del 1° ordine lineare:

$$N(t) = ce^{\varepsilon t}$$

  Primo grado poiché vi è solo $N(t)$ e non altre derivate (e.g. $N'(t), N''(t), ...$). Lineare poiché $N(t)$ è un polinomio di primo grado.

> **Definizione 1**
>
> Si dice **soluzione** (o integrale) dell'equazione 2 una funzione $\varphi = \varphi(t)$, definita e differenziabile n-volte in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\left(t, \varphi(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)\right) \in D$ e:
>
> $$\varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)\right) \quad \forall t \in I \tag{4}$$

Il seguente modello, che modella il moto dei pianeti, è un **esempio** di tre equazioni differenziali del secondo ordine:

$$x'' = -MG \cdot \frac{x}{r^3} \qquad y'' = -MG \cdot \frac{y}{r^3} \qquad z'' = -MG \cdot \frac{z}{r^3}$$

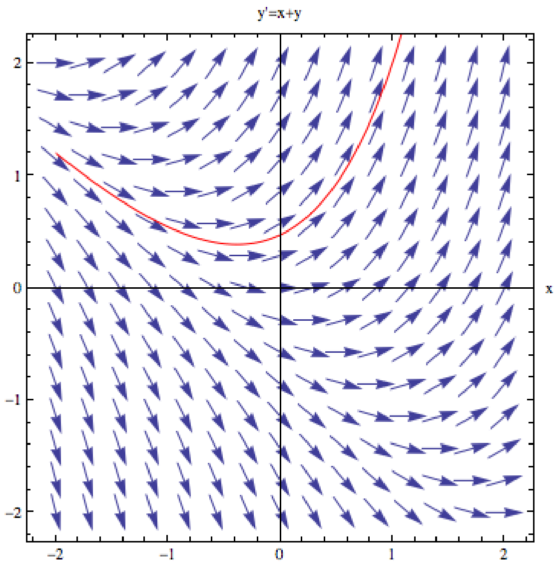
Da un **punto di vista geometrico**, un'equazione differenziale prescrive in ogni punto la **pendenza della tangente alla curva di soluzione che passa per quel punto**. Un **esempio**:

$$y' = x + y$$

se $x = 1$ e $y = 2$, allora si avrà:

$$y'(1) = 1 + 2$$

Risultato sensato vedendo il grafico:



La ricerca delle primitive di una data funzione f, continua su un intervallo, equivale a risolvere l'equazione differenziale:

$$y' = f(t)$$

che ha infinite soluzioni del tipo $y(t) = \int f(t)\, \mathrm{d}t + c, c \in \mathbb{R}$.

Più in generale, l'**insieme delle soluzioni** di un'equazione differenziale di ordine n o di un sistema di n equazioni del primo ordine sia rappresentato da una famiglia di funzioni, **dipendente da n parametri**. Tale famiglia prende il nome di **integrale generale**.

2.2 Equazioni lineari

Le **equazioni lineari** sono della forma:

$$y'(t) + a_0(t)\, y(t) = g(t) \tag{5}$$

Con a_0 e g funzioni reali di una variabile reale continue nel loro insieme di definizione, ossia:

$$a_0, g\ :\ I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad a_0, g \in C^0(I)$$

L'**integrale generale** dell'equazione differenziale lineare è data dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} \left[c_1 + \int \left(g(t)\, e^{A(t)} \right)\, \mathrm{d}t \right]$$

In cui:

$$A(t) = \int (a_0(t))\, \mathrm{d}t$$

Attenzione, prima di applicare la formula, è importante avere la forma dell'equazione 5.

Esempio

Data l'equazione:

$$y' = y + x$$

Si porta nella forma dell'equazione 5:

$$y' - y = x$$

Si calcola l'integrale:

$$e^{\int -1\, \mathrm{d}x} \to -\int 1\, \mathrm{d}x = -x \to e^{-x}$$

Si moltiplica il termine per entrambi i lati:

$$\left(e^{-x}\right) y' + \left(-1 \cdot e^{-x}\right) y = xe^{-x}$$

E risulta evidente che adesso è possibile applicare la proprietà delle moltiplicazioni delle derivate:

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ (-1 \cdot e^{-x})\, y + (e^{-x})\, y' &= [e^{-x} \cdot y]' \end{aligned}$$

Sostituendo il risultato, ottenuto eseguendo manipolazioni algebriche, all'interno dell'equazione:

$$\left[\left(e^{-x}\right) y\right]' = xe^{-x}$$

A questo punto si esegue l'integrale:

$$\int \left[\left(e^{-x}\right) y\right]'\, \mathrm{d}x = \int xe^{-x}\, \mathrm{d}x$$

A sinistra si può sempre semplificare la derivata con l'integrale, per cui non ci sono problemi:

$$\left(e^{-x}\right) y = \int x e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

A destra, si esegue il metodo per parti (par. 1.3.3):

$$f = x \quad g' = e^{-x} \quad f' = 1 \quad g = -e^{-x}$$
$$x \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int 1 \cdot \left(-e^{-x}\right) \, \mathrm{d}x$$
$$x \cdot \left(-e^{-x}\right) - \left(e^{-x}\right)$$

Dunque il risultato finale è:

$$\begin{aligned}
\left(e^{-x}\right) y &= -x e^{-x} - e^{-x} + c \\
\left(e^{-x}\right) y &= e^{-x} \left(-x - 1\right) + c \\
y &= -x - 1 + c \cdot \frac{1}{e^{-x}} \\
y &= -x - 1 + c \cdot e^{x}
\end{aligned}$$

2.3 Equazioni a variabili separabili

Le **equazioni a variabili separabili** sono della forma:

$$y' = f(t)\, g(y) \tag{6}$$

Con la funzione f continua nell'intervallo I ($f \in C(I)$) e la funzione g continua nell'intervallo J ($g \in C(J)$). Gli intervalli I, J sono contenuti in $\mathbb{R}$.

Nota bene: se la funzione $\overline{y}$ è soluzione dell'equazione $g(y) = 0$, la retta $y = \overline{y}$ è una curva integrale (si veda l'esempio sottostante per convincersi di ciò).

Se $g(y) \neq 0$ in $J' \subseteq J$, l'integrale generale dell'equazione 6 è:

$$\int \frac{1}{g(y)}\, \mathrm{d}y = \int f(t)\, \mathrm{d}t + c \tag{7}$$

Esempio

Data l'equazione:

$$y' = 2t\sqrt{1-y^2}$$

Si può effettuare immediatamente un'osservazione importante. Come detto precedentemente, se $g(y) = 0$ e $\overline{y}$ è soluzione dell'equazione, allora $y = \overline{y}$ è una curva integrale. Si può facilmente trovare due valori di y tali per cui l'equazione sia uguale a zero:

$$\begin{array}{rcl} y = 1 & \longrightarrow & y' = 2t\sqrt{1-1^2} \\ & & y' = 2t \cdot 0 \\ & & y' = 0 \\ & & \\ y = -1 & \longrightarrow & y' = 2t\sqrt{1-(-1)^2} \\ & & y' = 2t \cdot 0 \\ & & y' = 0 \end{array}$$

Dato che:

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & 2t \\ g(y) & = & \sqrt{1-y^2} \end{array}$$

E con $y = \pm 1$ la funzione g si annulla, allora ± 1 sono soluzioni dell'equazione.

Adesso si cercano le soluzioni tali che $g(y) \neq 0$, quindi con $y \neq \pm 1$. Per farlo, si applica semplicemente la "formula" 7:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, \mathrm{d}y = 2\int t\, \mathrm{d}t + c$$

Si procede con la risoluzione degli integrali:

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot \displaystyle\int t\, \mathrm{d}t & = & 2 \cdot \dfrac{t^2}{2} = t^2 + c \\ & & \\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, \mathrm{d}y & = & \arcsin(y) \end{array}$$

Si riaggregano i risultati:

$$\arcsin(y) = t^2 + c$$

Si esplicita la y ricordando le proprietà della trigonometria $\arcsin(y) = x \rightarrow \sin(x) = y$:

$$y = \sin\left(t^2 + c\right)$$

2.4 Problema di Cauchy

Il **problema di Cauchy (o dei valori iniziali)** ha due forme:

- Equazioni scalari di ordine n, con l'obbiettivo di trovare y di classe[1] C^n tale che:
$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right) \\ y(\tau) = \xi_0 \\ y'(\tau) = \xi_1 \\ \vdots y^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \end{cases}$$
essendo $\tau, \xi_0, \cdots, \xi_{n-1}$ costanti assegnate;
- Sistemi, con l'obbiettivo di trovare y di classe C^1 tale che:
$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$$
essendo $\tau \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ assegnati.

Le equazioni $y^{(j)}(\tau) = \xi_j$ con $j = 0, \cdots, j = n-1$, e $y(\tau) = \xi$, prendono il nome di **condizioni iniziali**. Le soluzioni si intendono definite localmente, ovvero in un intorno dell'istante iniziale τ.

Un **esempio** di problema di Cauchy:
$$\begin{cases} z''(t) + 4z'(t) + 4z(t) = (t+1)^2 \\ z(0) = \frac{1}{8} \\ z'(0) = -3 \end{cases}$$

Si consideri il seguente problema di Cauchy:
$$(P) \begin{cases} y'(x) = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema 1 (Teorema di esistenza e unicità locale per equazioni differenziabili a variabili separabili). *Sia $a(x)$ una funzione continua in un intervallo aperto I che contiene x_0 e $b(y)$ una funzione continua in un intervallo aperto J che contiene y_0. Allora esiste $\delta > 0$ e una funzione definita per ogni $x \in I'[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I$ e ivi derivabile che risolve il problema di Cauchy. Se $b(y) \in C^1(J)$, allora tale soluzione unica.*

Considerando il teorema 1 enunciato poco fa, si intende dire che esiste almeno una funzione $(\overline{y}(x))$ tale che la sua derivata è uguale alla funzione continua $(a(x))$ moltiplicata per un'altra funzione continua $(b(y))$ che ha come parametro la primitiva:

$$\begin{array}{rcl} \text{Primitiva} & \longrightarrow & \overline{y}(x) \\ \text{Derivata} & \longrightarrow & \overline{y}'(x) = a(x) \cdot b(\overline{y}(x)) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \end{array}$$

[1] Con questa notazione si indica che una funzione ha una derivata continua di grado n. Quindi dicendo che y è di classe C^4, vuol dire che y, y', y'', y''', y'''' sono tutte funzioni continue.

Ovviamente la derivata $\overline{y}(x)$ deve valere per qualsiasi x che appartiene all'intorno x_0 aggiungendo/rimuovendo δ. Inoltre la primitiva nel punto x_0 deve essere uguale a y_0 $(\overline{y}(x_0) = y_0)$. Allora, la primitiva $(\overline{y}(x))$ è derivabile e la sua derivata è continua. L'unicità è possibile affermarla se la funzione $b(y)$ ha una proprietà più forte della continuità, ovvero la continuità nella derivata in J.

Definizione 2

Teorema di esistenza e unicità globale per equazioni differenziali lineari.

Si consideri l'equazione differneziale lineare

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$$

Con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue su un intervallo I della retta reale. Se $x_0 \in I$, allora il problema:

$$\begin{cases} y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ammette un'unica soluzione in I.

Definizione 3

Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione omogenea del primo ordine.

L'insieme V delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$y' + a(x)\, y = 0$$

È uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 1.
Indicando con $y_P(x)$ una soluzione particolare dell'equazione completa

$$y' + a(x)\, y = b(x)$$

Allora il suo integrale generale è

$$y(x) = y_P(x) + y_{om}(x) \quad y_{om}(x) \in V$$

2.4.1 Intervallo massimale

Si parte subito con il dire che determinare l'intervallo massimale non è un'operazione banale. Questo perché non esistono algoritmi (semplici) certi che consentono di ottenere un intervallo massimale. Tuttavia, lo studente può utilizzare il ragionamento ed eventuali intuizioni per capire quando una soluzione ha intervallo estendibile e quando esso è massimale.

Definizione 4

Il più ampio intervallo su cui la soluzione è definita si chiama **intervallo massimale**.

L'intervallo massimale è possibile determinarlo una volta che si è giunti al termine del problema di Cauchy (par. 2.4). Una volta concluso l'esercizio, avendo trovato l'integrale generale e la costante c, è necessario eseguire alcuni passaggi:

a) Nell'integrale generale, sostituire la costante c trovata al termine dell'esercizio;

b) Esplicitare la y tramite passaggi algebrici;

c) Porre la condizione di esistenza;

d) Studiare l'intervallo massimale con appositi ragionamenti.

Si procede presentando due esempi e ricordando che un intervallo, **<u>può</u>** essere esteso se rispetta certe condizioni.

Esempio 1

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare l'intervallo massimale.

Il problema è risolvibile con il metodo delle variabili separabili (par. 2.3):

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x)\,g(y) \\ f(x) &= e^{-x} \\ g(y) &= \sqrt{y} \\ \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y &= \int e^{-x}\,\mathrm{d}x + c \end{aligned}$$

Si potrebbe tentare di calcolare una soluzione costante, ma risulterebbe evidente che l'unica soluzione costante, cioè $y = 0$, non è ammessa come soluzione del problema (condizione iniziale $y(0) = 1$!). Per questo motivo, si procede con il metodo delle variabili separabili.

Si risolve l'integrale:

$$\begin{aligned}
\int y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y &= -e^{-x}+c \\
&\downarrow \text{ si utilizza l'integrale notevole } \int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n\neq -1 \\
\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} &= -e^{-x}+c \\
2\sqrt{y} &= -e^{-x}+c
\end{aligned}$$

La soluzione trovata è l'integrale generale. Si conclude il problema di Cauchy trovando la costante c, quindi applicando la condizione iniziale $y(0)=1$:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{1} &= -e^{-0}+c \\
2+1 &= c \\
3 &= c
\end{aligned}$$

Adesso si calcola l'intervallo massimale:

- Si sostituisce nell'integrale generale la costante c:

  $$2\sqrt{y} = -e^{-x}+3$$

  Si esplicita la y:

  $$\begin{aligned}
  \sqrt{y} &= -\frac{e^{-x}}{2}+\frac{3}{2} \\
  y &= \left(-\frac{e^{-x}}{2}+\frac{3}{2}\right)^2
  \end{aligned}$$

- Le condizioni d'esistenza del problema di Cauchy sono le seguenti:

  $$\sqrt{y}e^{-x} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{]-\infty,+\infty[}_{def.x} \times \overbrace{[0,+\infty[}^{def.y}$$

  La y deve essere maggiore/uguale a zero, mentre la x non ha grosse restrizioni. L'intervallo massimale per definizione può essere identico o un sottoinsieme. Per trovarlo è necessario studiare il valore della y esplicitata al passaggio precedente. In questo caso, essa in zero ($y=0$) non ha soluzione, per cui si cercano le soluzioni per $y>0$.

- Andando a cercare una soluzione costante dell'equazione differenziale, ci si accorge che $g(y)=\sqrt{y}$ è uguale a zero solo se $y=0$, e quindi essa sarebbe una soluzione costante del problema (ricordandosi quanto detto nel par. 2.3) poiché $g(y)=0$ con $y=\overline{y}$. Tuttavia, $y=0$ non è ammesso dal problema a causa della condizione iniziale $y(0)=1$.

  Per questo motivo, si cerca una soluzione tale che $y>0$. E per farlo, si prende in considerazione la y trovata al passaggio precedente e si impone una condizione:

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-x}}{2}+\frac{3}{2} &> 0 \\ -e^{-x} &> -3 \\ e^{-x} &< 3 \\ -x &< \ln(3) \\ x &> -\ln(3) \end{aligned}$$

- Per ciascun valore di x che è maggiore di $-\ln(3)$, la y deve valere:

  $$y=\left(-\frac{e^{-x}}{2}+\frac{3}{2}\right)^2$$

  E per tutti gli altri casi? Nei casi in cui la x sia minore o uguale a $-\ln(3)$, la y dovrà valere 0, come confermato nel caso della soluzione costante $y=0$.

  Da queste considerazioni, è possibile rappresentare la soluzione del problema di Cauchy $\overline{y}$ come:

  $$\overline{y}(x)=\begin{cases}\left(-\dfrac{e^{-x}}{2}+\dfrac{3}{2}\right)^2 & \text{se } x>-\ln(3)\\[2ex] 0 & \text{se } x\le -\ln(3)\end{cases}$$

  Per cui l'intervallo massimale è $-\infty,+\infty$ e difatti si può estendere a destra e sinistra.

Esempio 2

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'-y^2\cos(x)=0\\[2ex] y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1\end{cases}$$

Calcolare l'intervallo massimale.

Il problema è risolvibile con il metodo delle variabili separabili (par. 2.3):

$$\begin{aligned} y'(x)-f(x)\,g(y) &= 0\longrightarrow y'(x)=f(x)\,g(y)\\ f(x) &= \cos(x)\\ g(y) &= y^2 \end{aligned}$$

$$\int\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int\cos(x)\,\mathrm{d}x+c$$

Si potrebbe tentare di calcolare una soluzione costante, ma risulterebbe evidente che l'unica soluzione costante, cioè $y=0$, non è ammessa come soluzione del problema (condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1!$). Per questo motivo, si procede con il metodo delle variabili separabili.

Si risolve l'integrale:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{y^2}\, \mathrm{d}y &= \int \cos(x)\, \mathrm{d}x \\
\int y^{-2}\, \mathrm{d}y &= \int \cos(x)\, \mathrm{d}x \\
&\downarrow \text{ si utilizza l'integrale notevole } \int x^n\, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1 \\
\frac{y^{-1}}{-1} &= \sin(x) \\
-y^{-1} &= \sin(x) \\
y &= -\frac{1}{\sin(x)} + c
\end{aligned}
$$

La soluzione trovata è l'integrale generale. Si conclude il problema di Cauchy trovando la costante c, quindi applicando la condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$:

$$
\begin{aligned}
-1 &= -\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + c \\
-1 &= -\frac{1}{1} + c \\
0 &= c
\end{aligned}
$$

Adesso si calcola l'intervallo massimale:

- Si sostituisce nell'integrale generale la costante c:

$$y = -\frac{1}{\sin(x)} + 0$$

- La condizione d'esistenza del problema di Cauchy sono le seguenti:

$$y^2 \cos(x) \quad \longrightarrow \quad \underbrace{]-\infty, +\infty[}_{def.x} \times \overbrace{]-\infty, +\infty[}^{def.y}$$

- A differenza dell'esempio precedente, in questo caso la x non può essere qualsiasi valore poiché c'è un sin al denominatore che potrebbe causare una divisione per zero (impossibile). Per cui, la condizione d'esistenza è:

$$\sin(x) > 0$$

Calcolando il arcsin di 0, si ottiene:

$$x > \arcsin(0) \longrightarrow x > 0$$

Ma attenzione! Perché il valore sin si può annullare anche con altri valori di x, come per esempio π, per cui:

$$0 < x < \pi$$

Questo risulta l'intervallo massimale, ovviamente estremi esclusi.

2.4.2 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Le **equazioni differenziali lineari del secondo ordine** nella forma standard sono composte nel seguente modo:

$$y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = f(x)$$

Con $a(x)$, $b(x)$, $f(x) \in \mathcal{C}^0(I)$.

Il problema di Cauchy per una equazione lineare del secondo ordine è composto nel seguente modo:

$$\begin{cases} y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Definizione 5

Teorema di esistenza e unicità globale per equazioni lineari del secondo ordine.

Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = f(x)$$

Con $a(x)$, $b(x)$ e $f(x)$ funzioni continue su un intervallo I detta retta reale. Se $x_0 \in I$, allora il problema:

$$\begin{cases} y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Ammette un'unica soluzione in I.

Definizione 6

Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione omogenea del secondo ordine

L'insieme V delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 2.

L'insieme S delle soluzioni dell'equazione completa è una varietà lineare:

$$S = \{y_P(x) + y_{om}(x) : y_{om}(x) \in V\}$$

In cui $y_P(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Per risolvere questo tipo di equazioni, si utilizza il **metodo di somiglianza o dei coefficienti indeterminati** (par. 2.5).

2.5 Metodo di somiglianza o dei coefficienti indeterminati

Il metodo di somiglianza o dei coefficienti indeterminati è una tecnica che consente di risolvere le equazioni differenziali lineari del secondo ordine rapidamente.

Non esiste un'unica tecnica risolutiva, ma è necessario avere a disposizione una serie di ***pattern risolutivi***. Il motivo è dovuto al fatto che ogniqualvolta si presenti un'equazione differenziale lineare del secondo grado, si eseguirà un *matching* tra i *pattern risolutivi* che si hanno a disposizione e l'equazione risultante (in parole povere, l'espressione a destra dell'uguale).

Tipo	**Equazione differenziale**	**Soluzione particolare**
Monomio	$y'' + y' - 2y = 5$	$y_P(x) = a$
Primo grado	$y'' + y' - 2y = x + 2$	$y_P(x) = ax + b$
Secondo grado	$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 1$	$y_P(x) = ax^2 + bx + c$
Esponenziale	$y'' + 3y' - 2y = 3e^{-x}$	$y_P(x) = ae^{-x}$
	$y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} \cdot x$	$y_P(x) = (ax + b)\, e^{-x}$
	$y'' + 3y' + 2y = 3e^{x}$	$y_P(x) = ae^{x}$
	$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} \cdot x$	$y_P(x) = (ax + b)\, e^{2x} \cdot x$
N.B. nell'ultima equazione viene aggiunta una x in y_P a causa delle soluzioni dell'equazione caratteristica (vedi la tab. 2), le quali sono 1 e 2. Quindi, la seconda soluzione, cioè 2, corrisponde al valore nell'esponenziale (non considerando la variabile ovviamente).		
Coseno/Seno	$y'' + y' = \cos(2x)$	$y_P(x) = a \cdot \cos(2x) + b \cdot \sin(2x)$

Tabella 1: Pattern risolutivi del metodo di somiglianza.

A questi pattern è necessario aggiungere alcuni casi che modificano la soluzione particolare. **Attenzione:** questi casi modificano la soluzione particolare scelta! Nella tabella 2, si indicano con λ le soluzioni dell'equazione caratteristica (in parole povere l'equazione a sinistra dell'uguale).

Un altro caso particolare è il **principio di sovrapposizione**. In questo caso, basta risolvere ogni fattore come un'equazione a sé stante. Per cui la soluzione particolare si compone nel seguente modo:

$$y_P(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x)$$

Per esempio, data l'equazione:

$$y'' + 6y' + 8y = e^{2x} + \sqrt{\pi}x^2$$

Si risolve:

$$y'' + 6y' + 8y = e^{2x}$$

E successivamente:

$$y'' + 6y' + 8y = \sqrt{\pi}x^2$$

$\boldsymbol{\lambda}$	**Equazione differenziale**	**Che cosa viene modificato**
Nel caso in cui la soluzione dell'equazione caratteristica è uguale a zero, si moltiplica la **soluzione particolare** per x. Quest'ultima viene elevata ad un valore pari al numero di volte che essa annulla l'equazione caratteristica. Nell'esempio sottostante, la x viene elevata ad 1 poiché le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Dunque, λ_1 annulla soltanto una volta l'equazione caratteristica (chiamata formalmente molteplicità algebrica). <u>Attenzione:</u> la regola viene applicata solo ai monomi (a), polinomi di primo e secondo grado, ovvero nella forma $ax + b$ o $ax^2 + bx + c$.		
$\lambda = 0$	$y'' + y' = x + 2$	$y_P(x) = (ax + b)\, x^1$
Nel caso in cui le soluzioni dell'equazione caratteristica siano uguale tra di loro, si modifica la **soluzione generale** aggiungendo una x. Nell'esempio sottostante, le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ per cui viene aggiunta una x nella soluzione generale.		
$\lambda_1 = \lambda_2$	$y'' - 2y' + y = (x-1)^2$	$y(x) = y_P(x) + c_1 e^x + c_2 e^x \cdot x$
Nel caso in cui le soluzioni dell'equazione caratteristica siano uguali al termine dell'esponenziale ($e^{\alpha x}$) presente a destra dell'uguale dell'equazione caratteristica, alla **soluzione particolare** viene moltiplicata una x elevata ad un valore pari alla sua molteplicità algebrica. Nell'esempio sottostante, le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$. E dato che il valore di λ_2 compare nell'esponenziale dell'equazione caratteristica, viene aggiunta una x. <u>Attenzione:</u> la regola vale solo se l'esponenziale ha una x tra i suoi termini, quindi non è valida per esempio con e^2. In generale deve essere: $e^{\alpha x}$		
$\lambda_1 = \alpha$	$y'' - 5y' + 6y = 3xe^{2x}$	$y_P(x) = x \cdot \left[e^{2x}(ax + b)\right]$
Nel caso in cui le soluzioni dell'equazione caratteristica siano numeri immaginari e uguali: al termine dell'esponenziale ($e^{\alpha x}$) e al termine del seno/coseno ($\cos(\beta x)/\sin(\beta x)$); allora viene aggiunta una x alla **soluzione particolare**.		
$\lambda = \alpha \pm \beta i$	$y'' \cdots = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $y'' \cdots = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$y_P(x) = x \cdot e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + \sin(\beta x))$

Tabella 2: Casi particolari della λ nel metodo di somiglianza.

2.6 Metodo di variazione delle costanti

Il **metodo di variazione** delle costanti è una tecnica più generale che consente di ricavare una soluzione particolare dell'equazione completa, qualunque sia la forma del termine forzante (cioè quello a destra dell'uguale).

Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Dopo aver ottenuto la soluzione particolare con il metodo di somiglianza (par. 2.5):

$$y_P(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$$

Si possono ottenere le due costanti grazie a queste operazioni tra matrici:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}}_{Wronskiana} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

Attenzione, in questo caso le costanti sono derivate, per cui è necessario integrarle per ottenere la soluzione finale.

Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione:

$$y'' + y = \sin(x)$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono:

$$\frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$$

La soluzione generale dunque è:

$$y(x) = y_P(x) + c_1 e^{i \cdot x} + c_2 e^{-i \cdot x}$$

Per ottenere la soluzione particolare viene utilizzato il metodo di somiglianza:

$$y_P(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$$

Adesso viene utilizzato il metodo di variazione per ottenere le costanti. Quindi si costruiscono le matrici:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'(x) \\ b'(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(x) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(x) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sin^2(x) \\ \cos(x)\sin(x) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Per ottenere le costanti a e b è necessario integrare le derivate appena trovare, per cui:

$$
\begin{aligned}
a &= \int -\sin^2(x)\ \mathrm{d}x \\
\downarrow &\quad \text{si utilizza l'integrale fondamentale } \int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= -\left(\int \frac{1}{2}\ \mathrm{d}x - \int \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x\right) \\
\downarrow &\quad \text{si ricorda il risultato della seguente derivata } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(5x) = 5\cos(5x) \\
&= -\frac{1}{2}x - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2x)}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= \int \cos(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x \\
\downarrow &\quad \text{si utilizza il metodo di sostituzione } t = \sin(x) \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t'}\ \mathrm{d}t \\
&= \int \cos(x)\cdot t\cdot\frac{1}{\cos(x)}\ \mathrm{d}t \\
&= \int \cancel{\cos(x)}\cdot t\cdot\frac{1}{\cancel{\cos(x)}}\ \mathrm{d}t \\
&= \int t\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{t^2}{2} \\
\downarrow &\quad \text{si conclude il metodo di sostituzione} \\
&= \frac{\sin^2(x)}{2} + c
\end{aligned}
$$

Per cui, andando a sostituire i due risultati nella soluzione particolare, è possibile ottenere anche la soluzione generale:

$$
\begin{aligned}
y_P(x) &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\cos(x) + \left(\frac{\sin^2(x)}{2}\right)\sin(x) \\
y(x) &= y_P(x) + c_1 e^{i\cdot x} + c_2 e^{-i\cdot x}
\end{aligned}
$$

2.7 Sistemi di equazioni differenziali

Nel corso di Analisi II vengono affrontati sistemi lineari del primo ordine a coefficienti costanti, quindi nella forma del tipo:

$$\begin{cases} x(t) = ax(t) + by(t) + f_1(x) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) + f_2(x) \end{cases}$$

Dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $x \in I$.

La **risoluzione** dei **sistemi di equazioni differenziali** prevede di risolvere la seguente equazione matriciale:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= A\mathbf{X} + \mathbf{F} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

Nel caso i valori $f_1(x)$ e $f_2(x)$ siano nulli, cioè uguali a zero, il sistema viene detto **omogeneo**:

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$$

In questo caso, calcolando gli autovalori (vedere esempio a fine paragrafo se non si ricorda come calcolare gli autovalori) della matrice A:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \to \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

è possibile trovare una forma dell'integrale generale particolare. Si ricorda che il determinante di una matrice quadrata 2×2 è possibile calcolarlo eseguendo una somma tra la moltiplicazione dei valori della diagonale principale e tra la moltiplicazione dei valori della diagonale secondaria.

Definizione 7

Siano λ_1 e λ_2 due autovalori distinti della matrice A del sistema omogeneo e siano $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ i corrispondenti autovettori. Dunque, l'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$ è dato da:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Esempio

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$$

Innanzitutto, si può osservare immediatamente che è un sistema omogeneo poiché mancano i termini $f_{1,2}(x)$ (vedi l'eq. 8). Si procede con la costruzione della matrice A e il calcolo dei suoi autovalori:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 0 \\
\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\
\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\
(2-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 3\cdot 2 &= 0 \\
2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 &= 0 \\
\lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\
\frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} &= \lambda_1 = 4; \quad \lambda_2 = -1
\end{aligned}$$

Si conclude l'esercizio calcolando i rispettivi autovalori, ovverosia sostituendo le due λ all'interno delle matrici precedenti:

$$\lambda_1 = 4 \longrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per ottenere la soluzione generale si applica rapidamente l'eliminazione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Risolvendo la seguente equazione ottenuta grazie alla EG:

$$-2k_1 + 3k_2 = 0 \longrightarrow 2k_1 = 3k_2 \longrightarrow k_1 = \frac{3}{2}k_2$$

Si ottiene la soluzione generale:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \left\{ k_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dove $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovalore di $\lambda_1 = 4$.

$$\lambda_2 \quad = \quad -1 \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Adesso EG:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[E_2\left(-\frac{1}{2}\right)]{E_1\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La soluzione generale è:

$$k_1 + k_2 = 0 \quad \rightarrow \quad k_1 = -k_2$$

$$\begin{pmatrix} -k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad = \quad \left\{ k_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dove $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovalore di $\lambda_2 = -1$.

L'esercizio si conclude scrivendo l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Si noti bene che l'integrale generale non è unico, infatti è possibile che gli autovalori siano diversi. Per esempio, anche il seguente integrale generale è ammesso:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

2.8 Esercizi

2.8.1 Variabili separabili e problema di Cauchy

Esame 21 giugno 2023 - Gruppo A - 1 esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 6x + 6xy^2 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

e indicare il più ampio intervallo su cui tale soluzione è definita.

Data l'equazione differenziale, non è possibile risolverla direttamente utilizzando le variabili separabili poiché dovrebbe essere nella forma del tipo $y' = f(t)\,g(y)$ (vedi eq. 6). Per cui, si raccoglie a fattore comune:

$$\begin{cases} y' = 6x\left(1 + y^2\right) \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

E a questo punto è possibile applicare le variabili separabili. Si scrive l'integrale (vedi eq. 7):

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int 6x\,\mathrm{d}x$$

E si risolvono entrambe le parti utilizzando gli integrali immediati (par. 1.3.1):

$$\arctan(y) = 3x^2 + c$$

Per trovare l'integrale generale, si trova c applicando la condizione iniziale del problema di Cauchy:

$$\begin{array}{rcl} \arctan(0) & = & 3 \cdot 2^2 + c \\ 0 & = & 12 + c \\ -12 & = & c \end{array}$$

E si esplicita la y:

$$\begin{array}{rcl} \arctan(y) & = & 3x^2 - 12 \\ \tan\left(3x^2 - 12\right) & = & y \end{array}$$

La prima parte dell'esercizio è conclusa. Si procede adesso con il calcolo dell'intervallo massimale.

La funzione tan, in generale, è definita tra $\pm\frac{\pi}{2}$ (vedi figura 1), quindi l'argomento della funzione deve essere compreso tra:

$$-\frac{\pi}{2} < 3x^2 - 12 < \frac{\pi}{2}$$

Adesso il ragionamento da fare per capire l'intervallo massimale non è banale. Inizialmente, magari presi dalla furia in sede d'esame, si potrebbe cadere nella

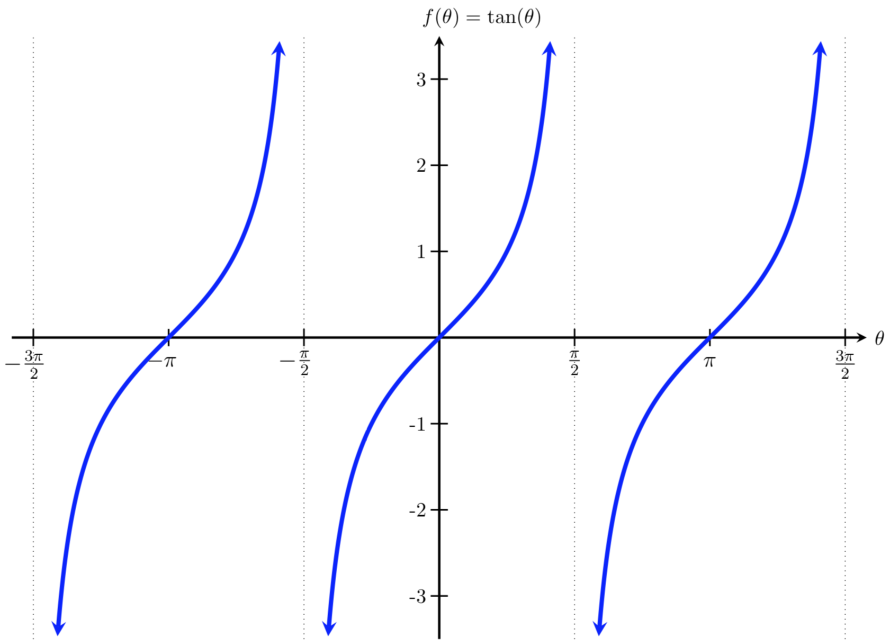


Figura 1: Grafico della funzione tan (fonte).

tentazione di procedere immediatamente con l'esplicitazione della x:

$$\begin{aligned}
3x^2 - 12 &< \frac{\pi}{2} \\
3x^2 &< \frac{\pi}{2} + 12 \\
x^2 &< \frac{\frac{\pi}{2}}{3} + 4 \\
x^2 &< \frac{\pi}{6} + 4 \\
x &< \sqrt{\frac{\pi}{6} + 4}
\end{aligned}$$

E a specchio anche l'altra parte (non si riportano i calcoli perché basta cambiare il segno...). Lo studente potrebbe erroneamente concludere dicendo che questo è l'intervallo massimale:

$$\sqrt{-\frac{\pi}{6} + 4} < x < \sqrt{\frac{\pi}{6} + 4}$$

E in parte è vero, perché nei pressi di $x = 2$, dove l'equazione $3x^2 - 12$ si annulla, la precedente disuguaglianza è sensata. Ma *attenzione* all'argomento della funzione tan! L'equazione $3x^2 - 12$ si annulla con i valori di $x = \pm 2$. Questo significa che vicino ai valori in cui si annulla, la x potrebbe avere dei valori che interessano le condizioni dell'intervallo massimale che si sta prendendo in considerazione.

Nel dettaglio, con $x = 2$ la seguente disuguaglianza è sensata:

$$\sqrt{-\frac{\pi}{6}+4} < x < \sqrt{\frac{\pi}{6}+4}$$

Per convincersi di ciò, si prenda come esempio $x = 2.1$, la disuguaglianza è vera:

$$1.8645\cdots < 2.1 < 2.1268\cdots$$

Con $x = -2$ non è più sensata, poiché prendendo come valore $x = -2.1$ e sostituendola nell'intervallo trovato inizialmente:

$$-\frac{\pi}{2} < 3\left(-2.1\right)^2 - 12 < \frac{\pi}{2}$$

$$-1.57\cdots < 1.23 < 1.57$$

La disuguaglianza è vera, mentre con quella trovata esplicitando la x no:

$$1.8645\cdots < -2.1 < 2.1268\cdots$$

Per renderla vera, basta semplicemente affermare che l'intervallo massimale dipende dalla condizione iniziale:

$$-\sqrt{\frac{\pi}{6}+4} < x < -\sqrt{-\frac{\pi}{6}+4} \quad \vee \quad \sqrt{-\frac{\pi}{6}+4} < x < \sqrt{\frac{\pi}{6}+4}$$

Si riportano qui i grafici della funzione $3x^2-12$ e dell'intervallo massimale. Ed è interessare notare come il "buco" tra i due intervalli sia causato dalla funzione che con quei valori di x decresce a tal punto da non rispettare più la disuguaglianza.

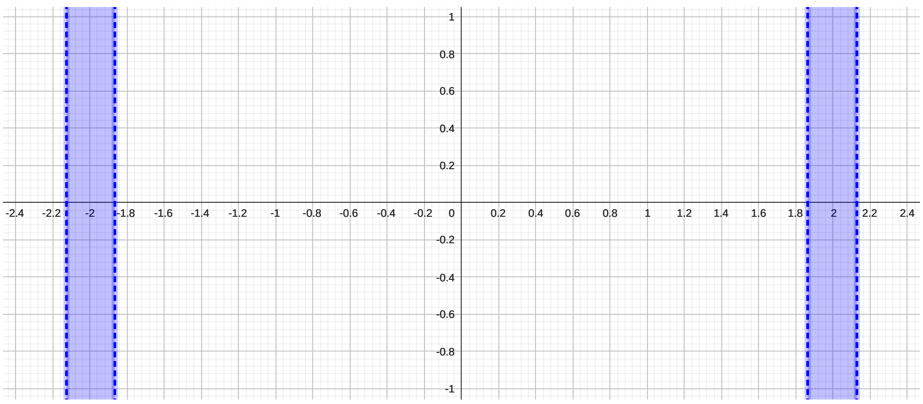


Figura 2: Grafico dell'intervallo massimale.

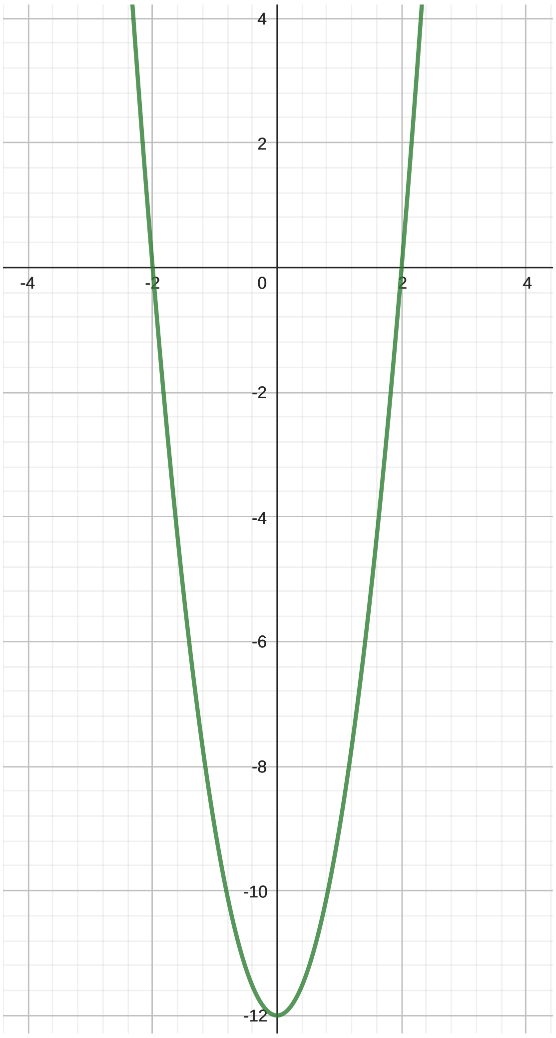


Figura 3: Grafico della funzione $3x^2 - 12$.

Esame 06 settembre 2023 - Gruppo A - 1 esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + x + y + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e indicare il più ampio <u>intervallo</u> su cui tale soluzione è definita.

Il problema può essere risolto in due modi: il primo, quello più immediato probabilmente, è risolverlo come un'equazione lineare; il secondo, quello più ragionato, è risolverlo con il metodo di separazione delle variabili eseguendo alcune manipolazioni algebriche.

Con il **metodo delle variabili separabili** è necessario raccogliere i termini usando un po' di intuizione:

$$1 + x + y + xy = (x+1)(y+1)$$

La soluzione costante dell'equazione è $y = -1$, ma non è concessa dal problema di Cauchy dato che la condizione iniziale impone $y(0) = 1$. Adesso si applica la definizione:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y &= \int x + 1\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y &= \frac{x^2}{2} + x + c \\
\int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y &= \frac{x^2}{2} + x + c \\
&\downarrow \quad \text{si risolve per sostituzione } t = y+1 \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{t'}\,\mathrm{d}y \\
\int \frac{1}{t} \cdot 1\,\mathrm{d}t &= \frac{x^2}{2} + x + c \\
\ln(y+1) &= \frac{x^2}{2} + x + c
\end{aligned}$$

Si esplicita la costante c imponendo la condizione iniziale:

$$\ln(1+1) = \frac{0^2}{2} + 0 + c \longrightarrow \ln(2) = c$$

Adesso si scrive l'integrale generale esplicitando la y:

$$\begin{aligned}
\ln(y+1) &= \frac{x^2}{2} + x + \ln(2) \\
y + 1 &= e^{\frac{x^2}{2} + x + \ln(2)} \\
y &= e^{\frac{x^2}{2} + x + \ln(2)} - 1 \\
y &= 2e^{\frac{x^2}{2} + x} - 1
\end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione come un'**equazione lineare**, sono necessarie alcune manipolazioni algebriche:

$$
\begin{aligned}
y' &= 1+x+y+xy \\
y' &= 1+x+y\,(1+x) \\
y'-(1+x)\,y &= 1+x \\
y'+(-1-x)\,y &= 1+x \\
&\downarrow \quad e^{\int -1-x} \to e^{-x-\frac{x^2}{2}} \\
\left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right)y'+\left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right)(-1-x)\,y &= (1+x)\left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) \\
\left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right)y'+\left(-e^{-x-\frac{x^2}{2}}-xe^{-x-\frac{x^2}{2}}\right)y &= (1+x)\left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&\downarrow \quad \text{si applica la proprietà delle derivate:} \\
& \quad (f\cdot g)' = f\cdot g' + f'\cdot g \\
\int \left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\cdot y\right)' \mathrm{d}x &= \int e^{-x-\frac{x^2}{2}} + xe^{-x-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x \\
e^{-x-\frac{x^2}{2}}\cdot y &= \int (1+x)\left(e^{-x-\frac{x^2}{2}}\right) \mathrm{d}x \\
&\downarrow \quad \text{si procede per sostituzione:} \\
& \quad t=-x-\frac{x^2}{2} \quad \mathrm{d}t=\frac{1}{-1-x}\,\mathrm{d}x \\
e^{-x-\frac{x^2}{2}}\cdot y &= \int (1+x)\left(e^t\right)\frac{1}{-1-x}\,\mathrm{d}x \\
e^{-x-\frac{x^2}{2}}\cdot y &= \int \left(e^t\right)\cdot \cancelto{-1}{\frac{1+x}{-1-x}}\,\mathrm{d}x \\
e^{-x-\frac{x^2}{2}}\cdot y &= -e^{-x-\frac{x^2}{2}}+c \\
y &= -e^{-x-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{e^{-x-\frac{x^2}{2}}}+c\cdot\frac{1}{e^{-x-\frac{x^2}{2}}} \\
y &= -1+\frac{c}{e^{-x-\frac{x^2}{2}}} \\
y &= -1+c\cdot e^{x+\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Applicando la condizione inziale:

$$1=-1+c\cdot e^{0+\frac{0^2}{2}} \longrightarrow c=2$$

Quindi l'integrale generale sarebbe di nuovo:

$$y=-1+2e^{\frac{x^2}{2}+x}$$

L'**intervallo massimale** è tutta la retta reale. Sia guardando l'integrale generale che l'equazione originale, ci si accorge che non c'è nessuna restrizione con i valori (e.g. una x al denominatore).

Esame 10 luglio 2023 - Gruppo A - 1 esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 e^{-y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e indicare il più ampio <u>intervallo</u> su cui tale soluzione è definita.

Il problema può essere risolto con il metodo delle variabili separabili ed è evidente:

$$\frac{x^2 e^{-y^2}}{y} = x^2 \cdot \left(\frac{1}{y e^{y^2}}\right)$$

Non esistono soluzioni costanti poiché e^{y^2} deve essere diverso da zero poiché è al denominatore. Si procede con il metodo delle variabili separabili:

$$\begin{aligned}
\int y \cdot e^{y^2} \,\mathrm{d}y &= \int x^2 \,\mathrm{d}x \\
\int y \cdot e^{y^2} \,\mathrm{d}y &= \frac{x^3}{3} + c \\
&\downarrow \text{ si utilizza la sostituzione: } t = y^2 \quad t' = 2y \quad \mathrm{d}y = \frac{1}{t'}\,\mathrm{d}t \\
\int y \cdot e^t \frac{1}{2y} \,\mathrm{d}t &= \frac{x^3}{3} + c \\
\int \cancel{y} \cdot e^t \frac{1}{2\cancel{y}} \,\mathrm{d}t &= \frac{x^3}{3} + c \\
\frac{1}{2} \cdot \int e^t \,\mathrm{d}t &= \frac{x^3}{3} + c \\
\frac{1}{2} \cdot e^t &= \frac{x^3}{3} + c \\
\frac{1}{2} \cdot e^{y^2} &= \frac{x^3}{3} + c
\end{aligned}$$

Si calcola la costante c applicando la condizione iniziale:

$$\frac{1}{2} \cdot e^{1^2} = \frac{0^3}{3} + c \to c = \frac{e}{2}$$

Dunque, l'integrale generale diventa, esplicitando la y:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot e^{y^2} &= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} e \\
e^{y^2} &= \frac{2}{3} x^3 + e \\
y^2 &= \ln\left(\frac{2}{3} x^3 + e\right) \\
y &= \pm\sqrt{\ln\left(\frac{2}{3} x^3 + e\right)}
\end{aligned}$$

La condizione iniziale è $y(0) = 1$, il valore di y è positivo, per cui la radice da scegliere è quella positiva. L'integrale generale:

$$y = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{3}x^3 + e\right)}$$

La condizione d'esistenza è:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{2}{3}x^3 + e\right) &> 0 \\
&\downarrow \text{ il logaritmo può essere uguale o maggiore a zero soltanto} \\
& \text{ se l'argomento è uguale o maggiore ad 1} \\
\frac{2}{3}x^3 + e &> 1 \\
\frac{2}{3}x^3 &> 1 - e \\
x^3 &> (1 - e)\frac{3}{2} \\
x &> \sqrt[3]{(1 - e)\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Viene imposto il $>$ e non il $\geq$ poiché si cercando soluzioni per $y \neq 0$ (la condizione d'esistenza della frazione iniziale è $y \neq 0$!). L'intervallo massimale ha un valore minimo, corrispondente al valore sotto radice, e un valore massimo uguale all'infinito:

$$\left]\sqrt[3]{(1 - e)\frac{3}{2}}, +\infty\right[$$

Esame 03 marzo 2023 - Gruppo A - 1 esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3x^2 (y-1)^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e indicare il più ampio intervallo su cui tale soluzione è definita.

L'unica soluzione costante è $y = 1$, ma non è concessa dalla condizione inziale $(y = -1)$:

$$(y-1)^2 \to \lambda = 1$$

Il metodo delle variabili separabili è possibile applicarlo immediatamente:

$$\begin{aligned}
y' &= 3x^2 (y-1)^2 \\
\int \frac{1}{(y-1)^2}\,\mathrm{d}y &= \int 3x^2\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{(y-1)^2}\,\mathrm{d}y &= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + c \\
&\downarrow \text{ si utilizza il metodo di sostituzione: } t = y-1 \quad t' = 1 \quad \mathrm{d}y = \frac{1}{t'}\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1}\,\mathrm{d}t &= x^3 + c \\
-\frac{1}{y-1} &= x^3 + c
\end{aligned}$$

Applicando la condizione iniziale si ottiene la costante c:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{y-1} &= x^3 + c \\
-\frac{1}{(-1)-1} &= 0^3 + c \\
\frac{1}{2} &= c
\end{aligned}$$

Esplicitando la y l'integrale generale diventa:

$$\begin{aligned}
(y-1)\frac{1}{y-1} &= \left(-x^3 - \frac{1}{2}\right)(y-1) \\
1 &= -x^3 y - \frac{1}{2} y + x^3 + \frac{1}{2} \\
x^3 y + \frac{1}{2} y &= x^3 + \frac{1}{2} - 1 \\
y\left(x^3 + \frac{1}{2}\right) &= x^3 + \frac{1}{2} - 1 \\
\frac{1}{x^3 + \frac{1}{2}} y \left(x^3 + \frac{1}{2}\right) &= \left(x^3 + \frac{1}{2} - 1\right)\frac{1}{x^3 + \frac{1}{2}} \\
y &= 1 - \frac{1}{x^3 + \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Per trovare l'intervallo massimale, si consideri il denominatore che deve essere maggiore di zero poiché si cerca una soluzione maggiore di zero:

$$\begin{aligned} x^3 + \tfrac{1}{2} &> 0 \\ x^3 &> -\tfrac{1}{2} \\ x &> -\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Quindi, l'intervallo massimo è:

$$\left]-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty\right[$$

Esame 07 febbraio 2023 - Gruppo A - 1 esercizio

Tra tutte le soluzioni dell'equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = e^{x-1+3y}$$

trovare quella per cui $y(1) = 0$.
Qual è il più ampio intervallo su cui è definita tale soluzione?

Si riscrive l'equazione differenziabile:

$$y' = e^{x-1+3y} \Longrightarrow y' = e^{x-1}e^{3y}$$

Non esiste nessuna soluzione costante poiché y' è sempre positiva. Si applica il metodo delle variabili separabili:

$$\begin{aligned}
y' &= e^{x-1}e^{3y} \\
e^{-3y} &= e^{x-1} \\
\int e^{-3y}\,\mathrm{d}y &= \int e^{x-1}\,\mathrm{d}x \\
-\frac{e^{-3y}}{3} &= \int e^{x}e^{-1}\,\mathrm{d}x \\
-\frac{e^{-3y}}{3} &= e^{-1}\int e^{x}\,\mathrm{d}x \\
-\frac{e^{-3y}}{3} &= e^{-1}e^{x} + c \\
-e^{-3y} &= 3e^{x-1} + 3c \\
-\frac{e^{-3y}}{3} - \frac{3e^{x-1}}{3} &= c \\
-\frac{e^{-3y}}{3} - e^{x-1} &= c \\
&\downarrow \ \text{si applica la condizione } y(1) = 0 \\
-\frac{e^{-3\cdot 0}}{3} - e^{1-1} &= c \\
-\frac{1}{3} - 1 &= c \\
-\frac{4}{3} &= c
\end{aligned}$$

L'integrale generale dunque è:

$$\begin{aligned}
-e^{-3y} &= 3e^{x-1} + 3\left(-\frac{4}{3}\right) \\
e^{-3y} &= -3e^{x-1} + 4 \\
-3y &= \ln\left(-3e^{x-1} + 4\right) \\
y &= -\frac{1}{3}\cdot\ln\left(-3e^{x-1} + 4\right)
\end{aligned}$$

Si calcola l'intervallo massimale:

$$\begin{aligned}
-3e^{x-1}+4 &> 0 \\
-3e^{x-1} &> -4 \\
e^{x-1} &< \frac{4}{3} \\
x-1 &< \ln\left(\frac{4}{3}\right) \\
x &< \ln\left(\frac{4}{3}\right)+1
\end{aligned}$$

Per cui, l'intervallo massimale è:

$$\left]-\infty, \ln\left(\frac{4}{3}\right)+1\right[$$

2.8.2 Metodo di somiglianza e problema di Cauchy

Esame 06 settembre 2023 - Gruppo A - 2 esercizio

Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 7 + 2t + e^{-t} \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Il primo passo per risolvere questo genere di esercizi è risolvere l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \longrightarrow \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 1$$

Per risolvere questo problema è necessario utilizzare il metodo di somiglianza. Si può identificare un esponenziale e un polinomio di primo grado. Quindi, l'integrale generale è formato dalla soluzione particolare e la somma delle soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$y(t) = y_P + c_1 e^{2t} + c_2 e^t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

La soluzione particolare è possibile vederla come la somma tra il metodo di somiglianza applicato sul polinomio di primo grado e l'esponenziale. Inoltre, per calcolare le costanti, è necessario calcolare le derivate fino al secondo livello:

$$y_P(t) = y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t)$$

$$\begin{array}{lll} y_{P_1}(t) = at + b & y'_{P_1}(t) = a & y''_{P_1}(t) = 0 \\ y_{P_2}(t) = ae^{-t} & y'_{P_2}(t) = -ae^{-t} & y''_{P_2}(t) = ae^{-t} \end{array}$$

Si sostituiscono i valori di ciascuna soluzione particolare all'interno dell'equazione differenziale:

Polinomio di primo grado:

$$\begin{aligned} 0 - 3(a) + 2(at + b) &= 7 + 2t + e^{-t} \\ -3a + 2at + 2b &= 7 + 2t + e^{-t} \\ (2a)t + (-3a + 2b) &= (2)t + 7 + e^{-t} \\ \begin{cases} 2a = 2 \\ -3a + 2b = 7 \end{cases} &= \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Esponenziale:

$$\begin{aligned} ae^{-t} - 3(-ae^{-t}) + 2(ae^{-t}) &= 7 + 2t + e^{-t} \\ (a + 3a + 2a)e^{-t} &= 7 + 2t + (1)e^{-t} \\ \begin{cases} 6a = 1 \end{cases} &= \begin{cases} a = \frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Si riscrive la soluzione particolare:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t) \\ &= (at + b) + (ae^{-t}) \\ &= t + 5 + \frac{1}{6}e^{-t} \end{aligned}$$

E l'integrale generale diventa:

$$y\,(t) = t + 5 + \frac{1}{6}e^{-t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$

Per applicare le condizioni iniziali è necessario prima fare la derivata prima dell'integrale generale:

$$y'\,(t) = 1 - \frac{1}{6}e^{-t} + 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$

Si mettono a sistema le due equazioni applicando le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} 5 = 0 + 5 + \frac{1}{6}e^{-0} + c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{0} \\ \\ 1 = 1 - \frac{1}{6}e^{-0} + 2c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 = 5 + \frac{1}{6} + c_1 + c_2 \\ \\ 1 = 1 - \frac{1}{6} + 2c_1 + c_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 - \frac{1}{6} \\ \\ 1 = 1 - \frac{1}{6} + 2c_1 - c_1 - \frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 - \frac{1}{6} \\ \\ 0 = -\frac{1}{6} + c_1 - \frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 - \frac{1}{6} \\ \\ \frac{1}{3} = c_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \\ \\ c_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'integrale generale, sostituendo le costanti, sono:

$$y\,(t) = t + 5 + \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}$$

Esame 10 luglio 2023 - Gruppo A - 2 esercizio

Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = (t-1)^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Si calcola l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \to \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{2}{2} \to \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

La forma dell'integrale generale è:

$$y(t) = y_P(t) + c_1 e^t + c_2 e^t \cdot t$$

La soluzione particolare è un polinomio di secondo grado:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= at^2 + bt + c \\ y_P'(t) &= 2at + b \\ y_P''(t) &= 2a \end{aligned}$$

Si sostituisce all'interno dell'equazione differenziale iniziale e si calcolano le incognite a, b, c:

$$\begin{aligned} 2a - 2(2at + b) + \left(at^2 + bt + c\right) &= \left(t^2 - 2t + 1\right) \\ 2a - 4at - 2b + at^2 + bt + c &= t^2 - 2t + 1 \\ (a)t^2 + (-4a + b)t + (2a - 2b + c) &= (1)t^2 + (-2)t + 1 \\ = \begin{cases} a = 1 \\ -4a + b = -2 \\ 2a - 2b + c = 1 \end{cases} &\to \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ 2a - 2b + c = 1 \end{cases} \\ &\to \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Si sostituiscono le incognite all'interno della soluzione particolare e si riscrive l'integrale generale. Inoltre, si calcola la derivata prima così da ottenere le incognite $c_{1,2}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(t^2 + 2t + 3\right) + c_1 e^t + c_2 e^t \cdot t \\ y'(t) &= 2t + 2 + c_1 e^t + c_2 e^t \cdot t + c_2 e^t \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y(t) = \left(t^2 + 2t + 3\right) + c_1 e^t + c_2 e^t \cdot t \\ y'(t) = 2t + 2 + c_1 e^t + c_2 e^t \cdot t + c_2 e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \left(0^2 + 2 \cdot 0 + 3\right) + c_1 e^0 + c_2 e^0 \cdot 0 \\ 0 = 2 \cdot 0 + 2 + c_1 e^0 + c_2 e^0 \cdot 0 + c_2 e^0 \end{cases} \to \begin{cases} 1 = 3 + c_1 \\ 0 = 2 + c_1 + c_2 \end{cases} \to \begin{cases} -2 = c_1 \\ 0 = c_2 \end{cases}$$

La soluzione del problema è:

$$y(t) = t^2 + 2t + 3 - 2e^t$$

Esame 21 giugno 2023 - Gruppo A - 2 esercizio

Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = 2\sin(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Si calcola l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \lambda \;\rightarrow\; \lambda(\lambda+1) \;\rightarrow\; \lambda_1 = 0,\; \lambda_2 = -1$$

Quindi, l'integrale generale è:

$$y(t) = y_P(t) + c_1 + c_2 e^{-t}$$

In cui la soluzione particolare è composta da seno e coseno. Si calcolano inoltre la derivata prima e seconda:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= a\sin(t) + b\cos(t) \\ y_P'(t) &= a\cos(t) - b\sin(t) \\ y_P''(t) &= -a\sin(t) - b\cos(t) \end{aligned}$$

Si inserisce la soluzione parziale e le sue derivate dentro l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} -a\sin(t) - b\cos(t) + a\cos(t) - b\sin(t) + 0\cdot(a\sin(t) + b\cos(t)) &= 2\sin(t) \\ (-a-b)\sin + (-b+a)\cos = (2)\sin(t) \end{aligned}$$

Il sistema per trovare le incognite a, b:

$$\begin{cases} -a-b=2 \\ -b+a=0 \end{cases} = \begin{cases} -b-b=2 \\ a=b \end{cases} = \begin{cases} b=-1 \\ a=-1 \end{cases}$$

Per cui l'integrale generale diventa:

$$y(t) = -\sin(t) - \cos(t) + c_1 + c_2 e^{-t}$$

Si sviluppa la derivata prima e si applicano le condizioni iniziali per trovare le costanti c_1, c_2:

$$y'(t) = -\cos(t) + \sin(t) - c_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} y(t) = -\sin(t) - \cos(t) + c_1 + c_2 e^{-t} \\ y'(t) = -\cos(t) + \sin(t) - c_2 e^{-t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = -\sin(0) - \cos(0) + c_1 + c_2 e^{-0} \\ -3 = -\cos(0) + \sin(0) - c_2 e^{-0} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 = -0 - 1 + c_1 + c_2 \\ -3 = -1 + 0 - c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = -1 + c_1 + 2 \\ 2 = c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = c_1 \\ 2 = c_2 \end{cases}$$

Per cui l'integrale generale è:

$$y(t) = -\sin(t) - \cos(t) - 1 + 2e^{-t}$$

Esame 03 marzo 2023 - Gruppo A - 2 esercizio

Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 2\sin(3t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Si calcola l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \pm\sqrt{-4} \ \rightarrow \ \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$$

L'integrale generale:

$$y(t) = y_P(t) + c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}$$

Grazie alla formula di Eulero:

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$$

È possibile riscrivere l'equazione in maniera più semplice:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_P(t) + c_1(\cos(2t) + i\sin(2t)) + c_2(\cos(-2t) + i\sin(-2t)) \\ y(t) &= y_P(t) + (c_1 + c_2)\cos(2t) + (c_1 - c_2)\, i\sin(2t) \\ y(t) &= y_P(t) + c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \end{aligned}$$

Risulta evidente che la somma e la differenza delle costanti è stata ridefinita con nuove variabili. Con il metodo di somiglianza si scrive la soluzione particolare e le relative derivate per ottenere le costanti:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= a\sin(3t) + b\cos(3t) \\ y'_P(t) &= 3a\cos(3t) - 3b\sin(3t) \\ y''_P(t) &= -9a\sin(3t) - 9b\cos(3t) \end{aligned}$$

Si sostituiscono le soluzioni particolari nell'equazione differenziali così da ottenere le costanti:

$$\begin{aligned} -9a\sin(3t) - 9b\cos(3t) + 4(a\sin(3t) + b\cos(3t)) &= 2\sin(3t) \\ (-9a + 4a)\sin(3t) + (-9b + 4b)\cos(3t) &= 2\sin(3t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -9a + 4a = 2 \\ -9b + 4b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{5} \\ b = 0 \end{cases}$$

Si riscrive l'integrale generale e si calcola anche la derivata:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{2}{5}\sin(3t) + c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ y'(t) &= -\frac{6}{5}\cos(3t) - 2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t) \end{aligned}$$

Per calcolare le costanti si inseriscono i valori in un sistema e si utilizzano le condizioni:

$$\begin{cases} y\left(t\right) = -\dfrac{2}{5}\sin\left(3t\right) + c_1\cos\left(2t\right) + c_2\sin\left(2t\right) \\ y'\left(t\right) = -\dfrac{6}{5}\cos\left(3t\right) - 2c_1\sin\left(2t\right) + 2c_2\cos\left(2t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = \cancel{-\dfrac{2}{5}\sin\left(3\cdot 0\right)} + c_1\cos\left(2\cdot 0\right) + \cancel{c_2\sin\left(2\cdot 0\right)} \\ \dfrac{4}{5} = -\dfrac{6}{5}\cos\left(3\cdot 0\right) - \cancel{2c_1\sin\left(2\cdot 0\right)} + 2c_2\cos\left(2\cdot 0\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = c_1 \\ 2 = 2c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = c_1 \\ 1 = c_2 \end{cases}$$

Si sostituiscono le costanti nell'integrale generale:

$$y\left(t\right) = -\frac{2}{5}\sin\left(3t\right) + 2\cos\left(2t\right) + \sin\left(2t\right)$$

2.8.3 Casi particolari

E se non posso applicare le variabili separabili? Niente panico...

Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Non è possibile applicare direttamente la tecnica delle variabili separabili perché non è nella forma classica, sono necessarie prima alcune manipolazioni algebriche.

Si tenta di applicare la regola del prodotto (Reverse Product Rule) tra derivate ma all'inverso:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} \cdot \left(y' - \frac{y}{x}\right) &= 1 \cdot \frac{1}{x} \\
\left(\frac{1}{x} \cdot y'\right) + \left(-\frac{1}{x^2} \cdot y\right) &= \frac{1}{x} \\
&\downarrow \text{ ricordando l'integrale fondamentale:} \\
&\quad\ \int \frac{1}{x^n}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}} \quad n \neq -1 \\
&\downarrow \int -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \\
\left(\frac{1}{x} \cdot y'\right) + \left(\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot y\right) &= \frac{1}{x} \\
&\downarrow \text{ ricordando la regola del prodotto tra derivate:} \\
&\quad\ [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
&\downarrow \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot y + \frac{1}{x} \cdot y' = \left[\frac{1}{x} \cdot y\right]' \\
\left[\frac{1}{x} \cdot y\right]' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Giunti a questo punto, non è possibile andare avanti cercando la disperata strada delle variabili separabili! Tuttavia, vi è un'opzione più semplice: risolverla come un'equazione lineare. Per cui, nella prossima pagina si presentano i calcoli.

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{x}\cdot y\right]' &= \frac{1}{x} \\
\int \left[\frac{1}{x}\cdot y\right]' \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{x}\cdot y &= \ln(x)+c \\
\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot y &= (\ln(x)+c)\cdot x \\
y &= x(\ln(x)+c)
\end{aligned}
$$

Applicando la condizione iniziale $y(1)=2$:

$$
\begin{aligned}
2 &= 1\cdot(\ln(1)+c) \\
2 &= c
\end{aligned}
$$

Quindi la soluzione finale del problema:

$$y = x(\ln(x)+2)$$

Altro esempio di risoluzione lineare

Equazione differenziale:

$$y' = e^x + 3y$$

La risolvo come un'equazione lineare. Cerco di sfruttare la regola del prodotto tra derivate:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned}
y' &= e^x + 3y \\
y' - 3y &= e^x \\
&\downarrow \quad \text{utilizzo l'esponenziale per cercare una forma accettabile} \\
& \quad e^{\int -3 \, \mathrm{d}x} = e^{-3x} \\
e^{-3x} \cdot (y' - 3y) &= e^{-3x} \cdot e^x \\
\left(e^{-3x}\right) y' + \left(-3e^{-3x}\right) y &= e^{-2x} \\
&\downarrow \quad \text{ora è possibile applicare la regola del prodotto tra derivate} \\
& \quad \left(-3e^{-3x}\right) y + \left(e^{-3x}\right) y' = y' \cdot y + y \cdot y' = (e^{-3x} \cdot y)' \\
(e^{-3x} \cdot y)' &= e^{-2x} \\
&\downarrow \quad \text{integrando ambo i lati} \\
\int (e^{-3x} \cdot y)' \, \mathrm{d}x &= \int e^{-2x} \, \mathrm{d}x \\
e^{-3x} \cdot y &= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + c \\
y &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-2x}}{e^{-3x}} + c \cdot \frac{1}{e^{-3x}} \\
y &= -\frac{1}{2} \cdot e^x + c \cdot e^{3x}
\end{aligned}$$

3 Spazi funzionali

Gli spazi funzionali sono il secondo argomento trattato durante il corso di Analisi II. È un argomento importante dal punto di visto teorico poiché è ha stretto contatto con l'esercizio d'esame.

3.1 Lo spazio $\mathbb{R}^n$

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ viene identificato nel seguente modo:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \; : \; x_i \in \mathbb{R}, \; 1 \leq i \leq n\}$$

Per comodità, quando $n = 2, 3$, verrà utilizzata la notazione:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ è uno **spazio vettoriale normato**. Si approfondisce il significato di questi termini. Con *spazio vettoriale* si intende che vi sono alcune operazioni definite:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Dato:} & x & = & (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{Dato:} & y & = & (y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \text{Somma:} & x + y & = & (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \\ \text{Prodotto per uno scalare:} & \alpha x & = & (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{Prodotto scalare:} & x \cdot y & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \end{array}$$

Invece, con *normato* si intende che è possibile definire all'interno dello spazio $\mathbb{R}^n$ una **norma**, ovvero una funzione del tipo:

$$\begin{array}{rcl} || \cdot || : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ||x|| \end{array}$$

Che possiede le seguenti <u>proprietà</u>:

- $||x|| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$; $||x|| = 0$ se e solo se il vettore x è tutto nullo, cioè $x = (0, 0, \cdots, 0)$.

  In "matematichese":

  $$||x|| \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n; \qquad ||x|| = 0 \iff x = (0, 0, \cdots, 0)$$

- $||\lambda x|| = ||\lambda|| ||x||$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

  In "matematichese":

  $$||\lambda \cdot x|| = ||\lambda|| \cdot ||x|| \qquad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, per ogni x e y appartenente a $\mathbb{R}^n$.

  In "matematichese":

  $$||x + y|| = ||x|| + ||y|| \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Nella pratica, una p-esima norma in $\mathbb{R}^n$ è rappresentata come:

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \tag{9}$$

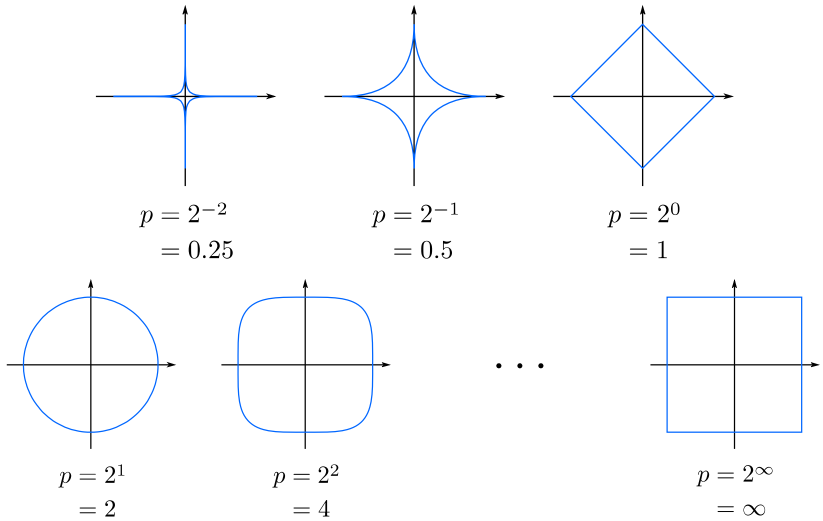


Figura 4: Alcune rappresentazioni di norme in due dimensioni ($\mathbb{R}^2$).

Il concetto di norma consente di mettere a fuoco che cosa si intende per **"lunghezza" di un vettore** o **"distanza" di un punto dall'origine**. **Per esempio**, nella seguente figura, ipotizzando che sia possibile muoversi solo lungo le linee del reticolo, la "distanza" tra i due punti è 7 e non $\sqrt{29}$ (teorema di pitagora, $\sqrt{5^2 + 2^2}$). Questo perché banalmente viene sommata l'ascissa con l'ordinata, ovvero 5 (x) e 2 (y).

$$(x_1, x_2) = (5, 2) \longrightarrow ||x||_1 = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^1 \right)^{\frac{1}{1}} = 5 + 2 = 7$$

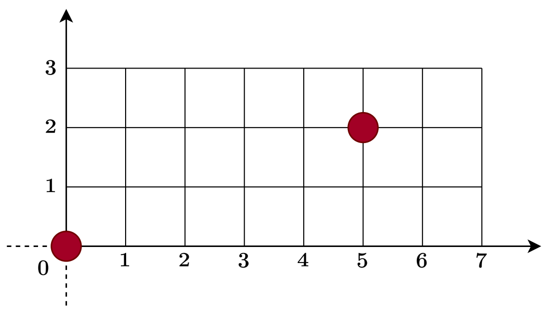


Figura 5: Esempio di norma.

E tra tutte le norme esistenti, la **norma euclidea** è la più interessante:

$$||x||_2 = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{10}$$

Un'altra disuguaglianza interessante è la **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$|x \cdot y| \leq ||x|| \cdot ||y|| \tag{11}$$

Il motivo per cui sono stati introdotti questi concetti è evidente con il prossimo paragrafo.

3.2 Spazio metrico e distanza (euclidea)

Definizione 1

Un insieme X si dice **spazio metrico** se è definita un'applicazione, chiamata **distanza** o **metrica**

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

Tale che per ogni $x, y, z \in X$ valgono le seguenti proprietà:

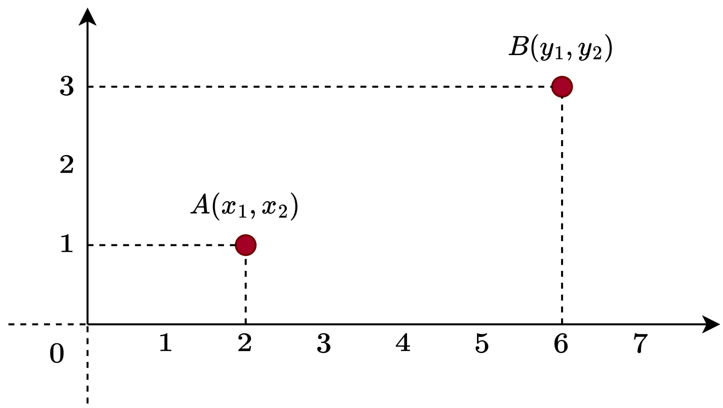
- $d(x, y) \geq 0; \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si sottolinea che uno spazio metrico è una coppia insieme-distanza o metrica, ovverosia $d(X, d)$. Questo perché su uno stesso insieme X potrebbero definirsi più metriche diverse $(d_1, d_2, d_3, \cdots)$.

Particolarmente interessante è la **distanza euclidea** che viene indotta dalla norma euclidea (equazione 10):

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{12}$$

Un **esempio** chiarificatore può essere la distanza euclidea tra i due punti presenti nella seguente figura:



La distanza dunque viene calcolata come (ricordando che $n = 2$ intuibile dal pedice massimo delle variabili nel grafico):

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Nonostante le notazioni classiche utilizzino (x, y) per rappresentare i punti, in questo caso è necessario utilizzare la notazione in figura poiché in caso di dimensioni più grandi (quindi di n maggiori) risulta poco efficiente.

3.3 Topologia in $\mathbb{R}^n$

3.3.1 Palla aperta

Definizione 2

Se (X, d) è uno spazio metrico e $x \in X$, si chiama **intorno sferico di** x (o **palla di centro** x) di raggio r l'insieme:

$$B(x, r) = \{y \in X \;:\; d(x, y) < r\} \tag{13}$$

È possibile esprimere una **palla aperta** di centro $\overline{x}$ e raggio $r > 0$ più chiaramente come:

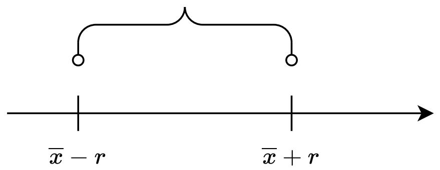
$$B_r(\overline{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; ||x - \overline{x}|| < r\} \tag{14}$$

Per **esempio**:

- Una palla aperta di centro x con $\boldsymbol{n = 1}$ è:

  $$B_r(\overline{x}) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; |x - \overline{x}| < r\} = \{x \in \mathbb{R} \;:\; \overline{x} - r < x < \overline{x} + r\}$$

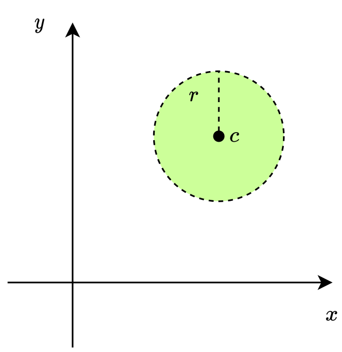
  Che graficamente è:



- Una palla aperta di centro x con $\boldsymbol{n = 2}$ (con (x_0, y_0) si indica il centro, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$) è:

  $$\begin{aligned} B_r(c) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\right\} \end{aligned}$$

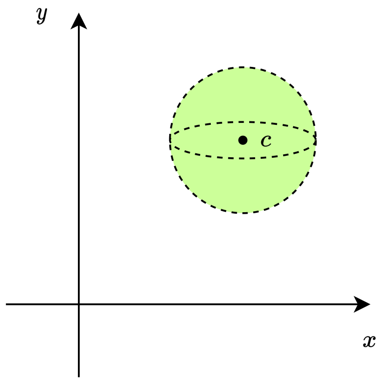
  Che graficamente è:



- Una palla aperta di centro x con $\boldsymbol{n = 3}$ (con (x_0, y_0, z_0) si indica il centro, $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$) è:

$$\begin{aligned} B_r(c) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\right\} \end{aligned}$$

Che graficamente è:



Si presenta anche un esercizio.

Esercizio

Rappresentare graficamente:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, ||x|| < 1\right\}$$

Dalla definizione di palla aperta (equazione 13, ma più evidente nell'equazione informale 14) si ricava che il raggio è uguale a $r = 1$. Inoltre, il termine $\overline{x}$, che rappresenta le coordinate del centro della palla, non è presente, dunque si deduce che sia uguale a zero ($||x - \overline{x}|| = ||x - 0|| = ||x||$).
Dall'esempio in figura a pagina 73, la norma, ovvero $||x||$, si rappresenta sommando le sue coordinate (come nell'equazione 9). Per cui, per rappresentare $||x|| < 1$, si deve affermare che:

$$||x|| < 1 \longrightarrow |x_1| + |x_2| < 1$$

Con x_1 che rappresenta l'asse delle x e x_2 che rappresenta l'asse delle y.

La rappresentazione grafica è possibile vederla chiaramente a pagina 73 in cui è possibile osservare alcune rappresentazioni di norma in due dimensioni.

3.3.2 Intorno di un punto

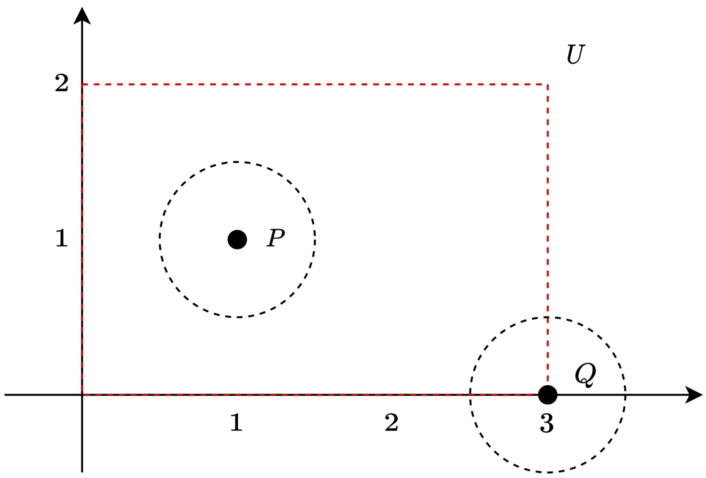
L'**intorno di un punto** $\overline{x}$ si definisce come:

$$U \subseteq \mathbb{R}^n$$

Se esiste $r > 0$ (cioè un raggio maggiore di zero) tale per cui una palla aperta di centro $\overline{x}$ è contenuta in U:

$$B_r(\overline{x}) \subseteq U$$

Esempio



Dato l'insieme:

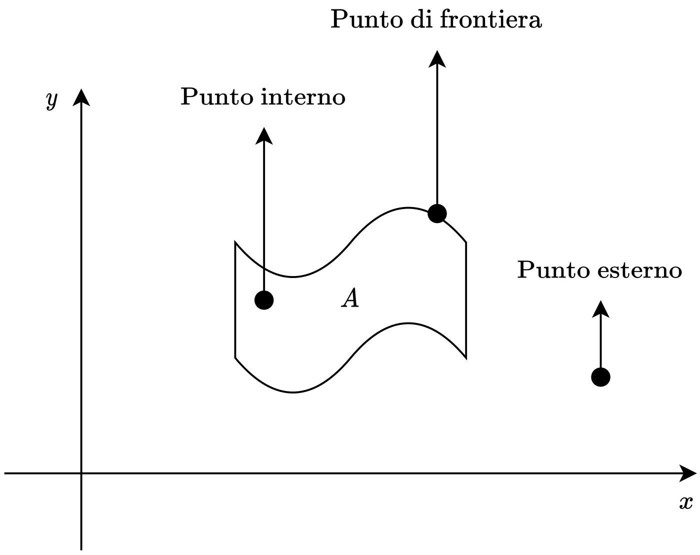
$$U = (0, 3) \times (0, 2)$$

Esso è un intorno di P poiché $B_{\frac{1}{2}}(P) \subseteq U$. Al contempo, U non è un intorno di Q poiché non esiste un raggio appartenente a $\mathbb{R}^+$ tale che una palla con quel raggio sia contenuta dentro U:

$$\nexists\, r \in \mathbb{R}^+ \;\; t.c. \;\; B_r(Q) \subseteq U$$

Infatti con $\left(3 + \frac{r}{2}, 0\right) \in B_r(Q)$ per ogni $r > 0$, viene di conseguenza che $\left(3 + \frac{r}{2}, 0\right) \notin U$.

3.3.3 Punti interni, esterni e di frontiera



- Un punto P è **interno** ad A se esiste un raggio $r > 0$ tale che la sua palla sia contenuta in A.

$$r > 0 \ \ t.c. \ \ B_r\left(P\right) \subseteq A \Longrightarrow P \text{ è interno ad } A$$

  L'**insieme** dei punti interni all'insieme A è rappresentato con il simbolo $\mathring{A}$ o con la scritta $\operatorname{int}\left(A\right)$.

- Un punto P è **esterno** ad A se è un punto interno a $\mathbb{R}^n$ ma non ad A:

$$P \text{ interno a } \mathbb{R}^n \setminus A \Longrightarrow P \text{ esterno a } A$$

  L'**insieme** dei punti esterni si indica con $\operatorname{ext}\left(A\right)$. E questo tipo di insieme viene chiamato anche **complementare** di A in $\mathbb{R}^n$.

- Un punto P è **frontiera** di A se non è né interno né esterno ad A. L'**insieme** dei punti di frontiera si indica con ∂A.

Infine, si esprime come **chiusura** di A ($\overline{A}$), l'unione tra l'insieme stesso e i punti di frontiera, ovvero:

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

Per vedere alcuni esempi, andare alla fine del prossimo paragrafo.

3.3.4 Insiemi aperti, chiusi e limitati

- Un insieme A è **aperto** se è intorno di ogni suo punto.

  Quindi l'insieme è aperto **se e solo se** $A = \mathring{A}$, ovvero se l'**insieme è uguale all'insieme dei punti interni**.

- Un insieme è **chiuso** se il suo complementare (insieme dei punti esterni) è aperto.

  Quindi l'insieme è chiuso **se e solo se** $A = \overline{A}$, ovvero se l'**insieme è uguale all'insieme dei punti esterni**.

- Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **limitato** se esiste un raggio maggiore di zero $r > 0$ tale che una palla nel punto zero con quel raggio contenga l'insieme A ($A \subseteq B_r(0)$).

  In altre parole, l'**insieme A è limitato se esiste un raggio maggiore di zero tale per cui la norma** x (somma delle sue coordinate in parole poverissime) **è minore del raggio per ogni** x **appartenente ad** A:

$$\exists\, r > 0 \;\; t.c. \;\; ||x|| < r\,, \;\; \forall x \in A \Longrightarrow A \text{ è limitato}$$

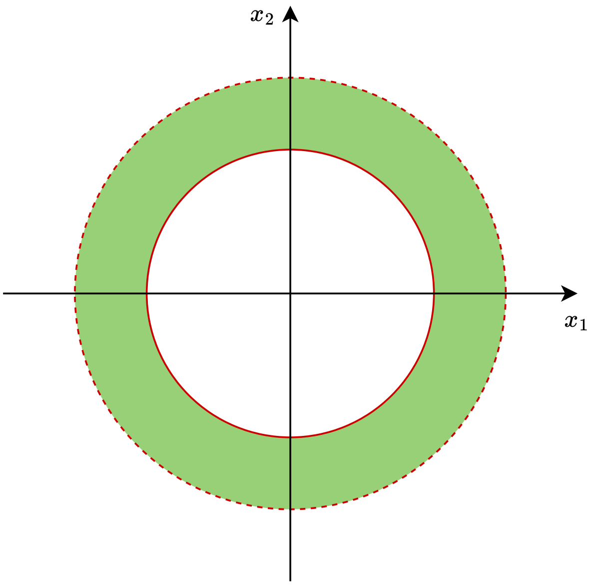
Gli insiemi $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono gli unici insiemi aperti e chiusi in $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1

Dato l'insieme A:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \leq ||x|| < 3\right\}$$

La sua rappresentazione grafica:



Si calcolano i vari insiemi per capire se è aperto, chiuso, limitato (e di conseguenza quali sono i punti interni, esterni e di frontiera).
L'insieme dei punti interni ad A sono tutte quelle x che si trovano nell'intervallo ammesso da A e non sono di frontiera:

$$\text{int}\,(A) = \mathring{A} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 < ||x|| < 3\right\}$$

L'insieme dei punti di frontiera di A è rappresentabile come l'unione di due insiemi:

$$\partial A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| = 2\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| = 3\right\}$$

Infine, si calcola la chiusura di A (complementare), per controllare se l'insieme è chiuso:

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \leq ||x|| \leq 3\right\}$$

- L'insieme è aperto? No, perché $A \neq \mathring{A}$;
- L'insieme è chiuso? No, perché $A \neq \overline{A}$.

Esempio 2

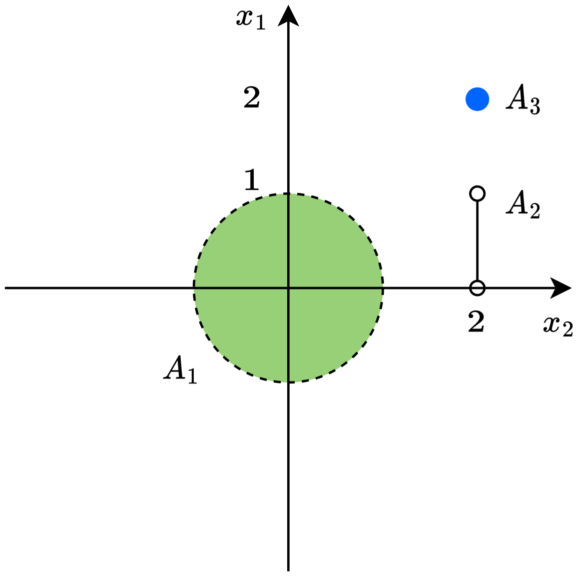
Dato l'insieme A:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| < 1\right\} \cup \{(2,t) \ : \ 0 < t < 1\} \cup \{(2,2)\}$$

E frammentandolo in piccoli insiemi:

- $A_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| < 1\right\}$
- $A_2 = \{(2,t) \ : \ 0 < t < 1\}$
- $A_3 = \{(2,2)\}$

Si ottiene facilmente la sua rappresentazione grafica:



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}\,(A) = \mathring{A} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| < 1\right\}$$

  Riguardo A_2 e A_3, non hanno punti interni poiché non avendo "area", prendendo dei punti essi sarebbero punti di frontiera.

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| = 1\right\} \cup \{(2,t) \ : \ 0 \le t \le 1\} \cup \{(2,2)\}$$

  Al contrario del precedente insieme, con i punti di frontiera si sceglie la frontiera di A_1, l'intero segmento A_2, inclusi gli estremi, e il punto A_3.

- La chiusura:

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| \le 1\right\} \cup \{(2,t) \ : \ 0 \le t \le 1\} \cup \{(2,2)\}$$

L'insieme non è né aperto ($A \neq \mathring{A}$) né chiuso ($A \neq \overline{A}$).

Esempio 3

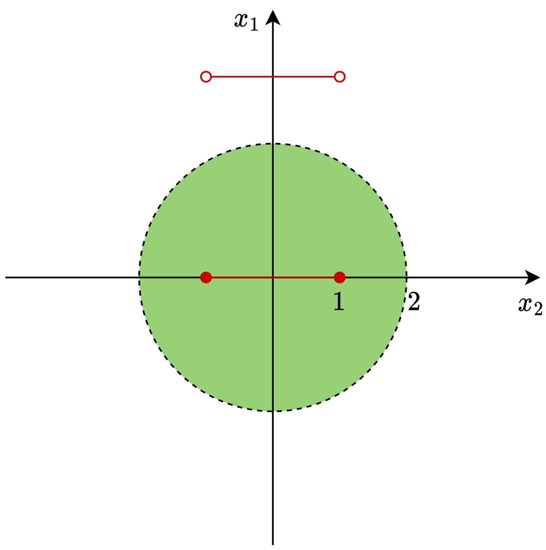
Dato l'insieme A:

$$A = \left(B_2\left(\overrightarrow{0}\right) \setminus ([-1,1] \times \{0\})\right) \cup ((-1,1) \times \{3\})$$

Con la notazione $B_2\left(\overrightarrow{0}\right)$ si intende una palla aperta centrata in $(0,0)$ e di raggio 2. Inoltre, è possibile riscrivere due parti dell'insieme:

- $([-1,1] \times \{0\})$ è una linea tratteggiata da -1 a 1 (entrambi inclusi) ad altezza 0, per cui:
$$\{(t,0) \ : \ -1 \le t \le 1\}$$
- $((-1,1) \times \{3\})$ è una linea tratteggiata da -1 a 1 (entrambi esclusi) ad altezza 3, per cui:
$$\{(t,3) \ : \ -1 < t < 1\}$$

La relativa rappresentazione grafica è:



- L'insieme dei punti interni:
$$\operatorname{int}(A) = \mathring{A} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| < 2\right\} \setminus \{(t,0) \ : \ -1 \le t \le 1\}$$
Tutti quei punti interni alla palla ma escludendo la linea all'interno.
- L'insieme dei punti di frontiera:
$$\partial A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| = 2\right\} \cup \{(t,0) \ : \ -1 \le t \le 1\} \cup \{(t,3) \ : \ -1 \le t \le 1\}$$
Tutti quei punti sulla frontiera della palla e tutte le linee fino agli estremi compresi.
- La chiusura, uguale a $A \cup \partial A$:
$$\overline{A} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||x|| \le 2\right\} \cup \{(t,0) \ : \ -1 \le t \le 1\} \cup \{(t,3) \ : \ -1 \le t \le 1\}$$
L'insieme non è aperto né aperto ($A \ne \mathring{A}$), né chiuso ($A \ne \overline{A}$).

Esempio 4

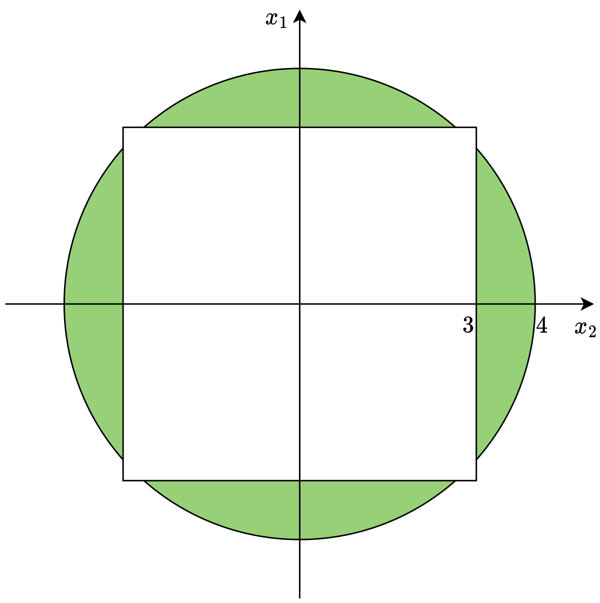
Dato l'insieme A:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|, |y|\} \geq 3, \ x^2 + y^2 \leq 16\right\}$$

In questo caso è possibile osservare delle cose interessanti. La funzione max sceglie il valore massimo tra i due proposti e tale valore deve essere maggiore o uguale a 3. Questo significa che è necessario disegnare un quadrato dato che potenzialmente il valore potrebbe andare all'infinito (vedi la figura a pagina 73 in cui si mostrano alcune norme a due dimensioni).

Negli esempi precedenti, è sempre stato chiesto di rappresentare delle norme ben definite. In questo caso, viene fornita un'equazione di una circonferenza (le formule si trovano nel paragrafo 1.1.1), che rappresenta una palla chiusa ($\leq$) di raggio $r = 4$ $\left(\sqrt{16}\right)$ e centro $(0, 0)$ (mancano gli altri valori rispetto l'equazione canonica).

Quindi, la sua rappresentazione grafica:



- L'insieme dei punti interni:

$$\operatorname{int}(A) = \mathring{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|, |y|\} > 3, \ x^2 + y^2 < 16\right\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|, |y|\} = 3, \ x^2 + y^2 = 16\right\}$$

- La chiusura, uguale a $A \cup \partial A$, è identica ad A poiché è già presente l'uguale nelle condizioni.

L'insieme non è aperto perché $A \neq \mathring{A}$, ma è chiuso poiché $A = \overline{A}$.

3.4 Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ (funzioni scalari)

Le funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, vengono chiamate **funzioni scalari**. Associando ad ogni n-upla di numeri reali in un insieme D un unico numero reale in base a una specifica regola, si definisce una funzione da D a $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\,:\, D \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{15}$$

In particolare, con $n = 2$, si può ridurre alla seguente forma:

$$\begin{aligned} f\,:\, D \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned} \tag{16}$$

In cui le variabili x e y sono indipendenti, mentre la variabile z è dipendente.

3.4.1 Rappresentazione grafica del dominio di funzioni ($n = 2$)

Determinare e rappresentare il dominio delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = x \ln(x - y)$
2. $f(x, y) = \sqrt{x - 3} + \sqrt{y + 1} - \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 4}$
4. $f(x, y) = \sqrt{x + y + 1} - \ln\left(x^2 - y\right)$
5. $f(x, y) = \arccos(xy)$
6. $f(x, y) = \dfrac{\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)}{\sqrt{x}}$
7. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{y^2 + z^2 - 4}$

Esempio 1

Data la funzione:

$$f(x, y) = x \ln(x - y)$$

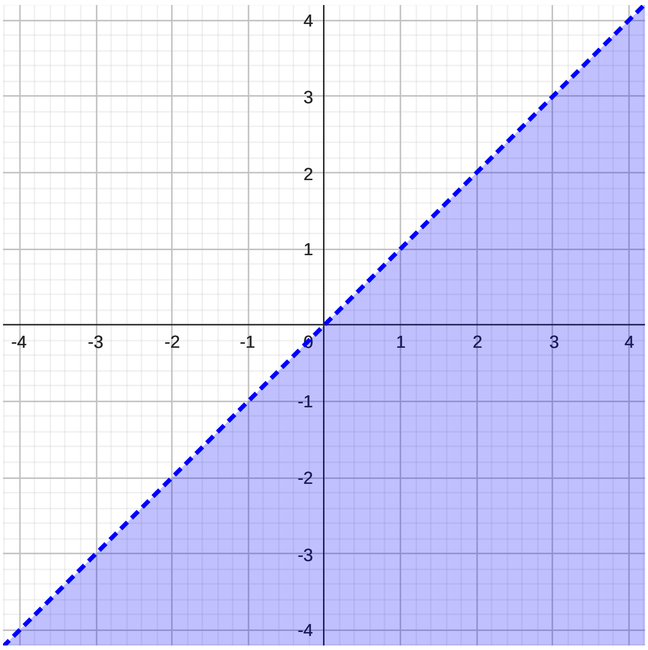
L'unica condizione d'esistenza è data dal logaritmo, il quale deve avere l'argomento maggiore di zero. Per cui, il dominio della funzione è:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x - y > 0\right\}$$

Per rappresentarlo, si può manipolare velocemente la disuguaglianza:

$$x - y > 0 \to x > y$$

Nel caso in cui fosse $x = y$, il grafico sarebbe una retta, ma in questo caso c'è il maggiore. Di conseguenza, la retta deve essere tratteggiata e il dominio di interesse è quello sotto la retta:



- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(D) = \mathring{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x - y > 0\right\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x - y = 0\right\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x - y \geq 0\right\}$$

L'insieme D è aperto poiché $D = \mathring{D}$ e non è chiuso poiché $D \neq \overline{D}$.

Esempio 2

Data la funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{x-3} + \sqrt{y+1} - \sqrt{x^2+y^2}$$

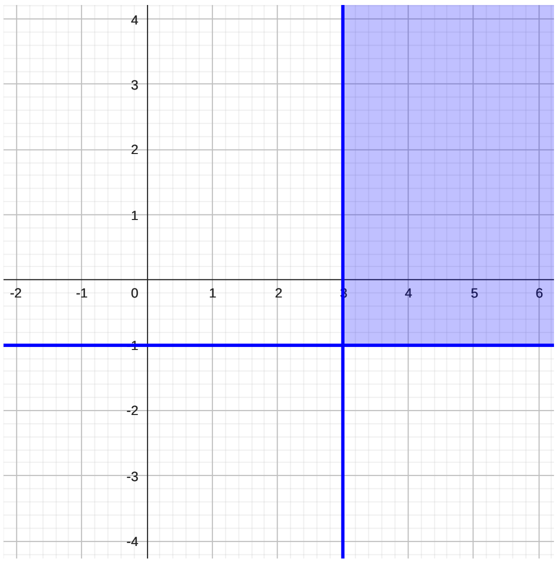
Le condizioni d'esistenza sono i valori sotto le radici, i quali devono essere maggiori uguali a zero per evitare di entrare nell'insieme dei numeri immaginari. Per cui, il dominio della funzione è:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x-3 \geq 0 \ \wedge \ y+1 \geq 0 \ \wedge \ x^2+y^2 \geq 0\right\}$$

Per rappresentarlo, si possono manipolare velocemente la disuguaglianze:

- $x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$
- $y+1 \geq 0 \rightarrow y \geq -1$

La rappresentazione delle due rette è immediato. Si prende in considerazione il piano da x maggiore/uguale di 3 in poi e da y maggiore uguale di -1 in poi. Per quanto riguarda x^2+y^2, non si prende in considerazione poiché la disuguaglianza è sempre verificata dato che un numero reale elevato al quadrato non potrà mai essere negativo (figuriamoci una somma tra due numeri reali al quadrato).



- L'insieme dei punti interni:
$$\text{int}(D) = \mathring{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 3 \ \wedge \ y > 1\right\}$$
- L'insieme dei punti di frontiera:
$$\partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 3 \ \wedge \ y = -1\right\}$$
- La chiusura:
$$\overline{D} = D \cup \partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 3 \ \wedge \ y \geq -1\right\}$$

L'insieme D non è aperto poiché $D \neq \mathring{D}$ ma è chiuso poiché $D = \overline{D}$.

Esempio 3

Data la funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 4}$$

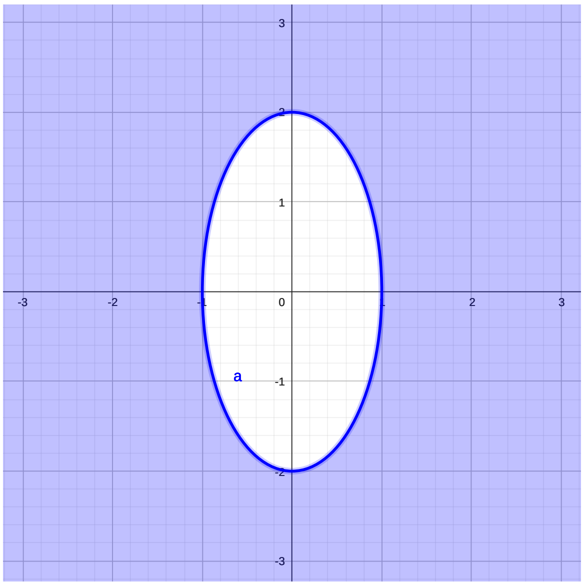
La condizione d'esistenza è il valore sotto radice, quindi il dominio è:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + y^2 - 4 \geq 0\right\}$$

In questo caso, dato che la disuguaglianza non è sempre vera come nell'esempio precedente, è necessario rappresentare l'ellisse (paragrafo 1.1.2) utilizzando l'equazione canonica che si ricava:

$$4x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \to 4x^2 + y^2 \geq 4 \to \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

La rappresentazione dell'ellisse non è complessa. Sapendo che è centrata nell'origine, i vertici vengono calcolati nel seguente modo. Riguardo l'asse x, l'ellisse intersecherà su ± 1, mentre sull'asse delle y intersecherà su ± 2 ($\sqrt{4}$, si ricorda che i valori al denominatore vengono considerati al quadrato secondo la forma canonica). Infine, dopo aver disegnato l'ellisse, si considera l'esterno e il bordo poiché la condizione è maggiore o uguale.



- L'insieme dei punti interni:

$$\operatorname{int}(D) = \mathring{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + y^2 - 4 > 0\right\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + y^2 - 4 = 0\right\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + y^2 - 4 \geq 0\right\}$$

L'insieme D non è aperto poiché $D \neq \mathring{D}$ ma è chiuso poiché $D = \overline{D}$.

Esempio 4

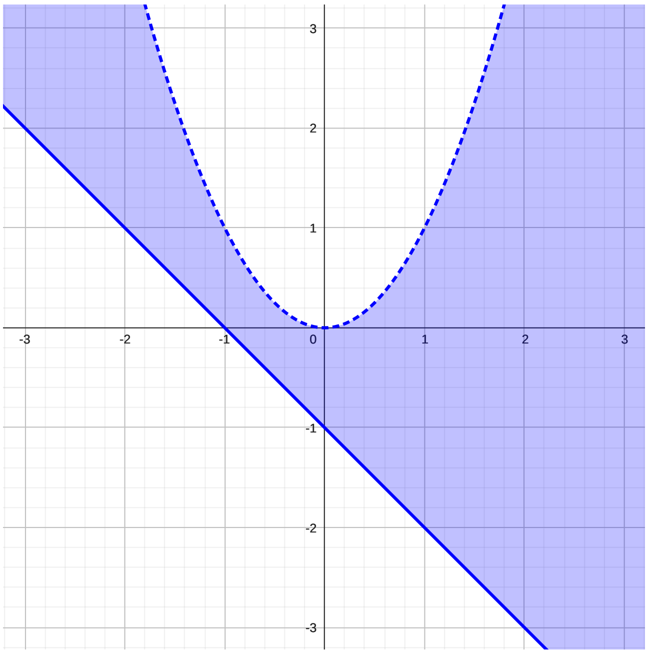
Data la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x + y + 1} - \ln\left(x^2 - y\right)$$

La condizione d'esistenza è il valore sotto radice e il logaritmo:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y + 1 \geq 0 \ \wedge \ x^2 - y > 0\right\}$$

In questo caso, la prima disuguaglianza è semplice. Sarebbe come dire x deve essere l'opposto di y $(x = -y)$, ma con y che poi viene incrementata di 1. Per cui, se $x = 1$, la $y = -1 + 1$, cioè 0. Invece, per la seconda dovrebbe essere immediato il fatto che sia un'iperbole. Difatti, se $x = \pm 1^2$, allora $y = 1$, se $x = \pm 2^2 = 4$ allora $y = 4$ e così via.



- L'insieme dei punti interni:

$$\operatorname{int}(D) = \mathring{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y + 1 > 0 \ \wedge \ x^2 - y > 0\right\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y + 1 = 0 \ \wedge \ x^2 - y = 0\right\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y + 1 \geq 0 \ \wedge \ x^2 - y \geq 0\right\}$$

L'insieme D non è aperto poiché $D \neq \mathring{D}$ ma neanche chiuso poiché $D \neq \overline{D}$.

Esempio 5

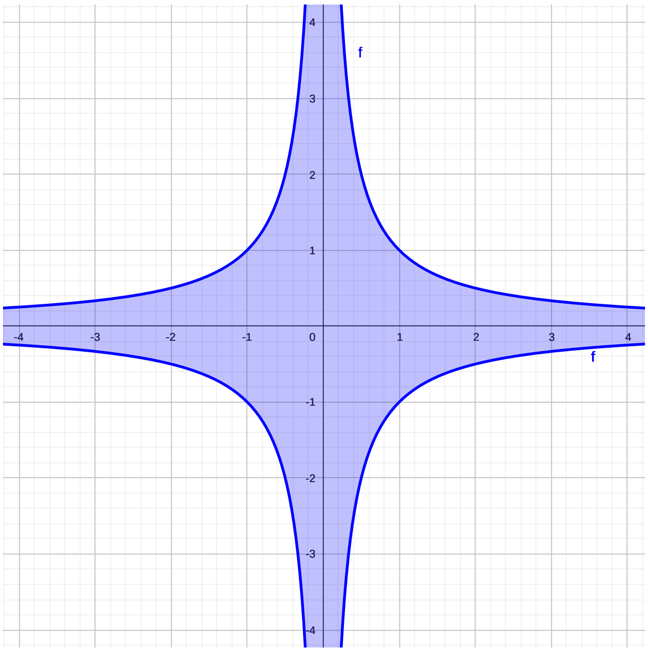
Data la funzione:

$$f(x,y) = \arccos(xy)$$

La funzione arccos corrisponde a $\alpha = \arccos(xy)$ ovvero $\cos(\alpha) = xy$. Ricordando (approfondimento) che la funzione arccos ha il suo argomento, in questo caso xy, definito nell'intervallo $[-1,1]$ e il valore α sarà definito nell'intervallo $[0,\pi]$:

$$\begin{aligned} \arccos \quad &: \quad [-1,+1] \to [0,\pi] \\ &\quad\;\; x \mapsto \arccos(x) \\ D \quad &= \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \leq xy \leq 1\right\} \end{aligned}$$

Il dominio è rappresentabile banalmente sapendo che $xy = \pm 1 \to x = \pm \dfrac{1}{y}$.



- L'insieme dei punti interni:

$$\operatorname{int}(D) = \mathring{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 < xy < 1\right\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 = xy \;\vee\; xy = 1\right\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \leq xy \leq 1\right\}$$

L'insieme D non è aperto poiché $D \neq \mathring{D}$ ma è chiuso poiché $D = \overline{D}$.

Esempio 6

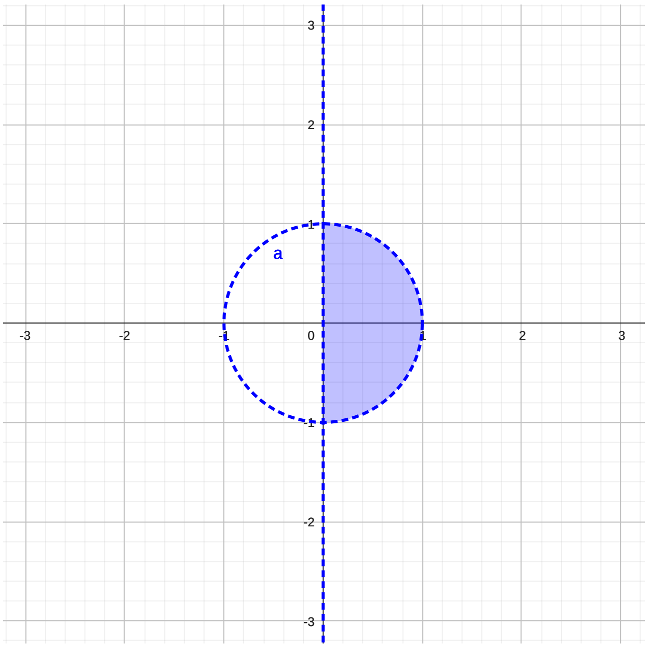
Data la funzione:

$$f(x,y) = \frac{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x}}$$

Le condizioni d'esistenza sono sulla radice (maggiore di zero) e sul logaritmo (maggiore di zero):

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1-x^2-y^2 > 0 \ \wedge \ x > 0\right\}$$

Il dominio è rappresentabile accorgendosi che $1-x^2-y^2$ è una circonferenza con un'equazione canonica del tipo $x^2+y^2=1$.



- L'insieme dei punti interni:

$$\operatorname{int}(D) = \mathring{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1-x^2-y^2 > 0 \ \wedge \ x > 0\right\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1-x^2-y^2 = 0 \ \wedge \ x = 0\right\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1-x^2-y^2 \geq 0 \ \wedge \ x \geq 0\right\}$$

L'insieme D è aperto poiché $D = \mathring{D}$ ma non è chiuso poiché $D \neq \overline{D}$.

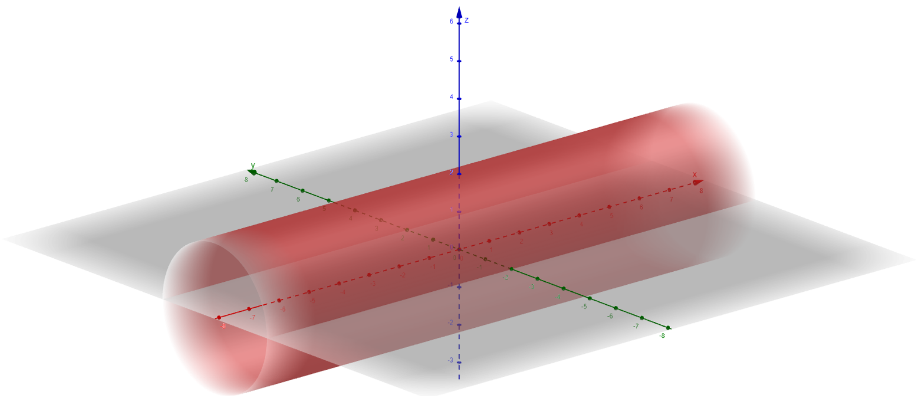
Esempio 7

Data la funzione:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{y^2 + z^2 - 4}$$

Sotto radice il valore deve essere diverso da zero, per cui $y^2 + z^2 - 4 \neq 0$. È possibile fare alcune manipolazioni $y^2 + z^2 \neq 4$ e scrivere il dominio come:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 \neq 4 \right\}$$



La linea blu è l'asse z (intersecata in ± 2), la linea verde è l'asse y (intersecata in ± 2), la linea rossa è l'asse x (all'interno del cilindro).

- L'insieme dei punti interni:

$$\text{int}(D) = \mathring{D} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 \neq 4 \right\}$$

- L'insieme dei punti di frontiera:

$$\partial D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y^2 + z^2 = 4 \right\}$$

- La chiusura:

$$\overline{D} = D \cup \partial D = \text{non possibile}$$

L'insieme D è aperto poiché $D = \mathring{D}$ ma non è chiuso poiché $D \neq \overline{D}$.

Esempio bonus

Data la funzione:

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 - y^2 + 1\right) - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Il dominio è influenzato dal logaritmo e dalla radice al denominatore (combinazione di condizioni):

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y^2 + 1 > 0 \ \wedge \ x > 0\right\}$$

L'equazione $x^2 - y^2 + 1$ è un'iperbole (par. 1.1.3). Infatti basta ricordare che se x^2 e y^2 hanno segno concorde, allora si tratta di un'ellisse o di una circonferenza, mentre nel caso di segno discorde, si tratta di un'iperbole. Per rappresentarla, si eseguono alcune operazioni algebriche:

$$x^2 - y^2 + 1 \to x^2 - y^2 = -1$$

Si scrive l'equazione canonica:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(x - x_C\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y - y_C\right)^2}{b^2} &= \pm 1 \qquad \text{con } a \neq 0,\ b \neq 0 \\
\frac{\left(x - 0\right)^2}{1^2} - \frac{\left(y - 0\right)^2}{1^2} &= -1
\end{aligned}$$

Per cui, l'iperbole ha centro nell'origine (lo si capisce dai -0!), il segno dell'1 è negativo, per cui l'iperbole ha un'intersezione nell'asse delle ordinate (y).

3.4.2 Grafico di una funzione scalare in n variabili

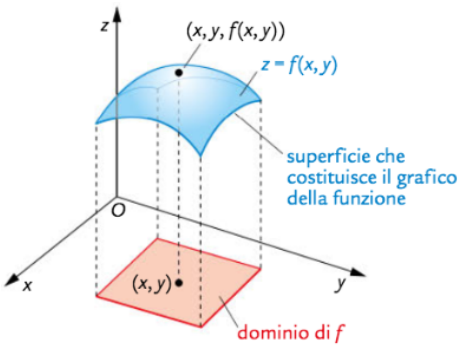
Definizione 3

Se f è una funzione reale di due variabili reali con dominio D, il **grafico** della funzione f è l'insieme di tutti i punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in D$.

La definizione si può estendere per $n > 2$. In altre parole, il grafico di una funzione è:

$$\Gamma(f) = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}$$

Nel caso di $n = 2$, il grafico della funzione f risulta:



3.4.3 Esempio di grafico di funzioni a due variabili

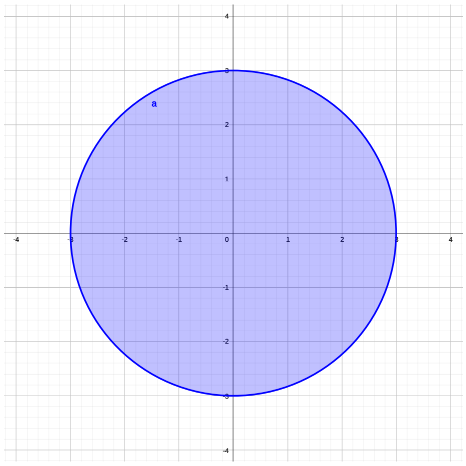
Data la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

La sua condizione d'esistenza è determinata dalla radice quadrata:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \right\}$$

Il dominio è una circonferenza di raggio 3 ($\sqrt{9}$):



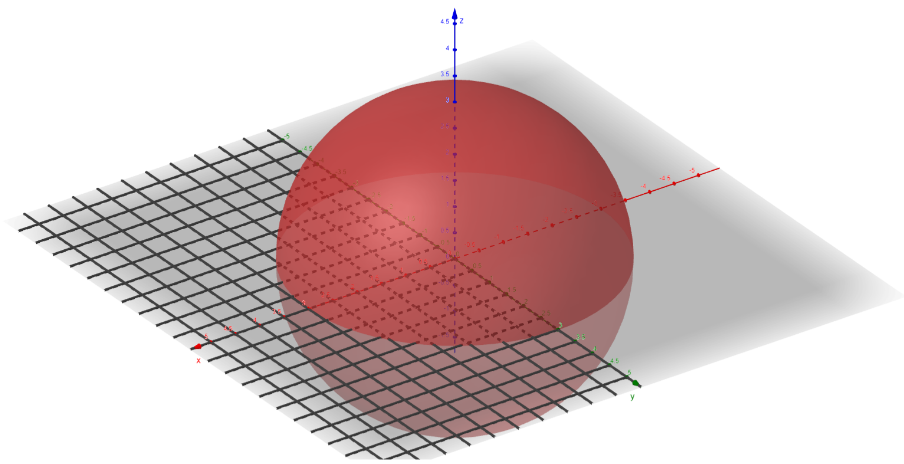
Invece, per quanto riguarda il grafico della funzione, si applica la formula. Per cui, il grafico avrà il seguente dominio:

$$\Gamma(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = f(x, y)\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right\}$$

Per rappresentare la figura, si deve avere un po' di intuito poiché è noto che una sfera abbia i termini x, y, z al quadrato. Di conseguenza, la z può essere anche vista come $x^2 = 9 - x^2 - y^2$. E con alcuni aggiustamenti aritmetici, si giunge all'equazione canonica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Il dominio del grafico può essere riscritto ricordandosi di aggiungere la condizione d'esistenza sulla z, cioè il maggiore uguale dovuto alla radice quadrata.

$$\Gamma(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\right\}$$

Il grafico è una sfera tagliata a metà a causa della $z \geq 0$:



3.5 Insiemi (curve) di livello

L'insieme dei punti nel dominio di una funzione f che hanno la stessa immagine $k \in \mathbb{R}$ si chiama **insieme di livello** k (o curve di livello):

$$L_k(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = k\} \tag{17}$$

Nel caso in cui $n = 2$, la funzione $L_k(f)$ è la proiezione sul piano xy della curva che si ottiene intersecando il grafico della funzione f con il piano $z = k$.

In parole povere, le **curve di livello** forniscono una rappresentazione bidimensionale del grafico della funzione f. Questo rendere la rappresentazione, talvolta, più chiara e semplice da eseguire.

3.5.1 Alcuni esempi

Esempio 1

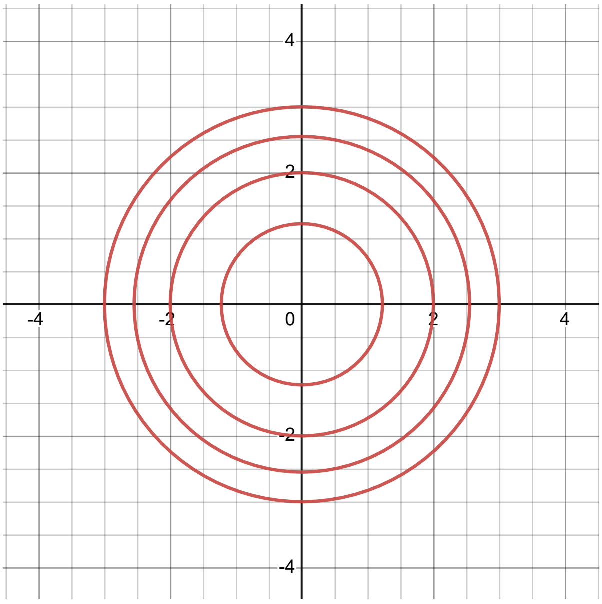
Data la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

E il dominio relativo (già calcolato nel par. 3.4.3):

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 9 - x^2 - y^2 \geq 0\right\}$$

La funzione è una circonferenza di raggio 3. Di conseguenza, le curve di livello andranno da un massimo di raggio pari a 3 ad un minimo pari a 0:



In forma matematica (eq. 17):

$$L_k(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x, y) = k\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{9 - x^2 - y^2} = k\right\}$$

Per rappresentarla facilmente, si utilizzano alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - x^2 - y^2} &= k \\ 9 - x^2 - y^2 &= k^2 \\ -x^2 - y^2 &= k^2 - 9 \\ x^2 + y^2 &= 9 - k^2 \end{aligned}$$

Risulta evidente adesso che modificando la k, si modifica il raggio della circonferenza $(x^2 + y^2)$. Per cui, è immediato il fatto che la k debba essere compresa tra 0 e 3:

$$0 \leq k \leq 3$$

Infatti, nel grafico delle curve di livello nella pagina precedente, la seconda curva di livello interseca il valore 2. Questo perché con $k = \sqrt{5}$ si ha:

$$L_{\sqrt{5}}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 9 - \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4\right\}$$

Esempio 2

Data la funzione:

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

E il dominio risulta essere:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \mathbb{R}^2\right\}$$

Si applicano le curve di livello, utilizzando sempre l'equazione 17:

$$L_k(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ e^{-x^2-y^2=k}\right\}$$

L'espressione è possibile riscriverla come:

$$-x^2 - y^2 = \ln(k) \to x^2 + y^2 = -\ln(k)$$

Dalla quale si ricava la condizione d'esistenza $k > 0$. Si deduce che se $k \leq 0$, le curve di livello hanno valore 0:

$$\begin{cases} L_k = 0 & k \leq 0 \\ L_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = -\ln(k)\right\} & k > 0 \end{cases}$$

Ma non solo, nel caso in cui $k > 0$, la condizione è rispettata finché il risultato del logaritmo è negativo o uguale a zero. Con $k = 1$ il logaritmo si annulla e la condizione $x^2 + y^2 = 0$ è rispettata. Ma con $k = 2$ il risultato è ≈ -0.69 e la condizione non viene rispettata. Di conseguenza, si aggiorna il sistema:

$$\begin{cases} L_k = 0 & k \leq 0 \\ L_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = -\ln(k)\right\} & 0 < k \leq 1 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Esempio 3

Data la funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{11 - 4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y}$$

Il dominio è semplicemente maggiore o uguale a zero:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 11 - 4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y \geq 0\right\}$$

Con qualche manipolazione algebrica, per ottenere l'equazione canonica, si ottiene:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 \leq 0$$

Prima di tracciare le curve di livello è necessario rappresentare il dominio. Quindi, si sceglie di rappresentarlo alla frontiera, ovvero sia:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11$$

Per convincersi che sia la frontiera, basta considerare la disuguaglianza del dominio:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 \leq 0 \ \rightarrow \ 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y \leq 11$$

Risulta evidente che i valori di sinistra devono essere minore o al massimo uguale a 11.

Per rappresentare l'ellisse, è necessario ottenere l'equazione canonica. Quindi, si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y &= 11 \\ 4\left(x^2 - 4x\right) + 9\left(y^2 + 2y\right) &= 11 \end{aligned}$$

Dal paragrafo 1.1.2 si ricorda che l'equazione canonica è nella forma:

$$\frac{\left(x - x_C\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - y_C\right)^2}{b^2} = 1$$

Per cui come è possibile procedere? Ci viene in soccorso il completamento dei quadrati (par. 1.1.4):

a. Si cerca un Δ per ogni equazione di secondo grado (per x e per y) tale che sia uguale a zero:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y &= 11 \\ 4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16x \quad &\rightarrow \quad (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\ &\qquad\ -16c = -\left(-16\right)^2 \\ &\qquad\ c = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9y^2 + 18y \quad &\rightarrow \quad (18)^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\ &\qquad\ -36c = -324 \\ &\qquad\ c = 9 \end{aligned}$$

b. Si riscrive l'equazione con i nuovi termini ma lasciandola invariata, per cui:

$$\begin{aligned}\left(4x^2-16x\right)+\left(9y^2+18y\right) &= 11\\ \left(4x^2-16x+16-16\right)+\left(9y^2+18y+9-9\right) &= 11\end{aligned}$$

c. Si resiste alla voglia di semplificare e si esegue un raggruppamento:

$$\begin{aligned}4x^2-16x+16 &\rightarrow 4\left(x^2-4x+4\right)\\ & 4\left(x-2\right)^2\\ 9y^2+18y+9 &\rightarrow 9\left(y^2+2y+1\right)\\ & 9\left(y+1\right)^2\end{aligned}$$

Per raggruppare in questo modo basta calcolare trovare le soluzioni dell'equazione di secondo grado e riscriverle come quadrato. Quindi, data l'equazione di secondo grado ax^2+bx+c:

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\xRightarrow{\Delta=0}\frac{-b}{2a}=\lambda\rightarrow\left(x-\lambda\right)^2$$

E infatti sostituendo l'equazione x^2-4x+4:

$$\frac{-\left(-4\right)\pm\sqrt{\left(-4\right)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}\xRightarrow{\Delta=0}\frac{4}{2}=2\rightarrow\left(x-2\right)^2$$

d. Si riscrive l'equazione dopo il raggruppamento:

$$\left(4\left(x-2\right)^2-16\right)+\left(9\left(y+1\right)^2-9\right)=11$$

A questo punto si possono portare a destra i termini non legati alle variabili x e y:

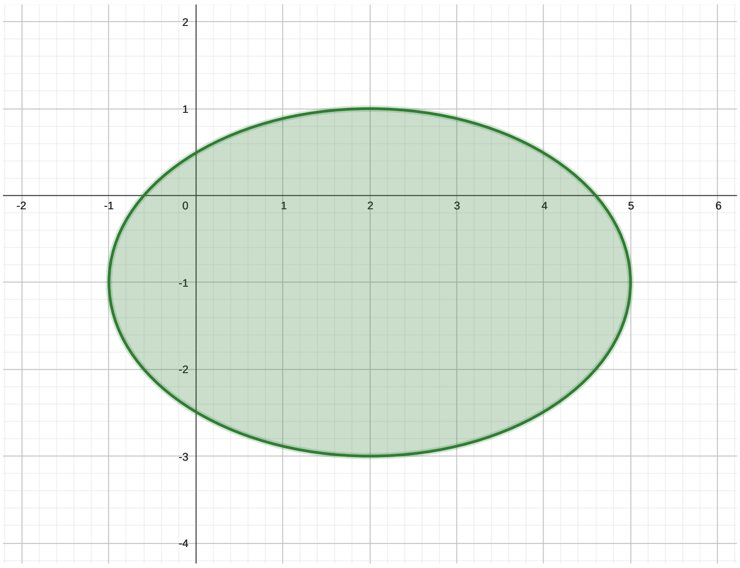
$$4\left(x-2\right)^2+9\left(y+1\right)^2=36$$

e. A destra è necessario il valore 1 per l'equazione canonica, dunque viene in automatico dividere tutto per 36:

$$\begin{aligned}\frac{1}{36}\cdot4\left(x-2\right)^2+\frac{1}{36}\cdot9\left(y+1\right)^2 &= 36\cdot\frac{1}{36}\\ \frac{\left(x-2\right)^2}{9}+\frac{\left(y+1\right)^2}{4} &= 1\end{aligned}$$

Dato che il centro dell'ellisse è dato dai valori che vengono sottratti a x^2 (x^2-x_C) e y^2 (y^2-y_C), in questo caso le coordinate sono: $(2,-1)$. I vertici sono piuttosto immediati:

Vertice sx	$\rightarrow$	$\left(2-\sqrt{9},-1\right)$	Vertice dx	$\rightarrow$	$\left(2+\sqrt{9},-1\right)$
		$(-1,-1)$			$(5,-1)$
Vertice up	$\rightarrow$	$\left(2,-1+\sqrt{4}\right)$	Vertice down	$\rightarrow$	$\left(2,-1-\sqrt{4}\right)$
		$(2,1)$			$(2,-3)$



La figura dell'ellisse alla frontiera e rappresenta anche la curva di livello più bassa poiché è al limite.

Il motivo per cui si dice "è al limite" è dato dal fatto che con k sotto radice, la sua condizione d'esistenza è $k \geq 0$. Per cui, rappresentare:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$$

È identico a rappresentare:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = \sqrt{k} \quad \text{con } k = 0$$

Per completezza, si rappresenta una curva di livello utilizzando $k = \sqrt{11}$ e l'equazione 17 delle curve di livello:

$$L_{\sqrt{11}}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x, y) = \sqrt{11}\right\}$$

Per cui l'equazione da rappresentare è:

$$\begin{aligned} \sqrt{11 - 4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y} &= \sqrt{11} \\ 11 - 4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y &= 11 \\ 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y &= 0 \end{aligned}$$

Come in precedenza, si procede con il completamento dei quadrati:

$$4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y = 0$$
$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16x \quad \rightarrow \quad & (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0 \\ & -16c = -(-16)^2 \\ & c = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9y^2 + 18y \quad \rightarrow \quad & (18)^2 - 4 \cdot 9 \cdot c = 0 \\ & -36c = -324 \\ & c = 9 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\left(4x^2 - 16x + 16 - 16\right) + \left(9y^2 + 18y + 9 - 9\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16x + 16 \quad &\to \quad 4\left(x^2 - 4x + 4\right) \\ & \quad 4\left(x-2\right)^2 \\ 9y^2 + 18y + 9 \quad &\to \quad 9\left(y^2 + 2y + 1\right) \\ & \quad 9\left(y+1\right)^2 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$4\left(x-2\right)^2 - 16 + 9\left(y+1\right)^2 - 9 = 0$$

$$4\left(x-2\right)^2 + 9\left(y+1\right)^2 = 25$$

$$\downarrow$$

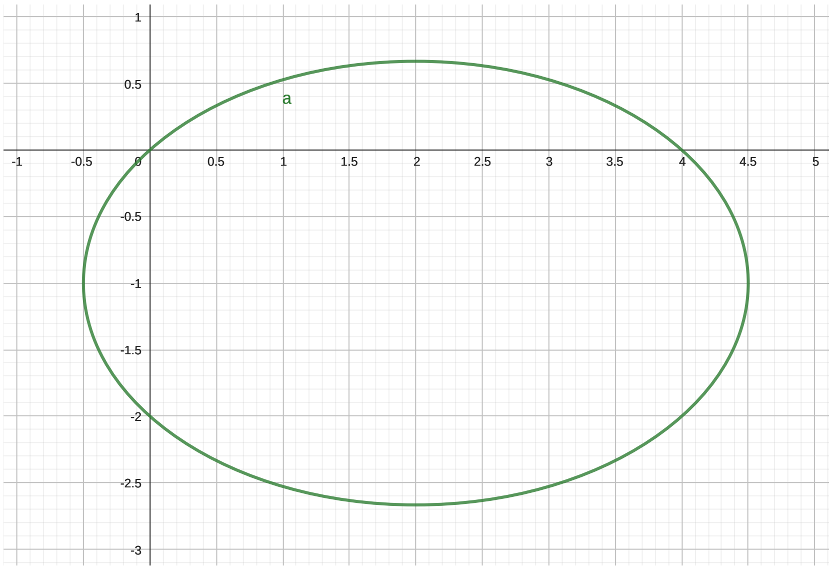
$$\begin{aligned} \frac{1}{25}\cdot 4\left(x-2\right)^2 + \frac{1}{25}\cdot 9\left(y+1\right)^2 \quad &= \quad 25\cdot\frac{1}{25} \\ \frac{\left(x-2\right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{\left(y+1\right)^2}{\frac{25}{9}} \quad &= \quad 1 \end{aligned}$$

Il centro dell'ellisse è $(2, -1)$ e i vertici sono:

Vertice sx $\to$ $\left(2 - \sqrt{\frac{25}{4}}, -1\right)$ $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ Vertice dx $\to$ $\left(2 + \sqrt{\frac{25}{4}}, -1\right)$ $\left(\frac{9}{2}, -1\right)$

Vertice up $\to$ $\left(2, -1 + \sqrt{\frac{25}{9}}\right)$ $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ Vertice down $\to$ $\left(2, -1 - \sqrt{\frac{25}{9}}\right)$ $\left(2, -\frac{8}{3}\right)$

La figura dell'ellisse:



3.6 Continuità

Si mostra la definizione di continuità.

Definizione 4

Si consideri una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in D$. La funzione f è **continua** nel punto x_0 se per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno di U di x_0 tale che:

$$f(x) \in V \qquad \forall\, x \in U \cap D$$

Una **notazione** utilizzata talvolta per dimostrare la continuità, è $\varepsilon - \delta$: per ogni ε esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni x appartenente a D e dunque la distanza (par. 3.2, eq. 12) è minore di δ ($||x - x_0|| < \delta$).

Esempio

Questo metodo è estendibile a qualsiasi altra funzione.

Dimostrare che la funzione $f(x,y) = \sin(x)$ è continua. Fissati un punto di coordinate $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ e un qualunque numero reale positivo ε, secondo la notazione $\varepsilon - \delta$ si ha:

$$|f(x,y) - f(\overline{x}, \overline{y})| = |\sin(x) - \sin(\overline{x})| < \varepsilon$$

Ovviamente tale affermazione è vera se:

$$||x - \overline{x}|| < \delta$$

Perciò, si consideri una palla aperta U di centro $(\overline{x}, \overline{y})$ e raggio δ. Se $(x,y) \in U$ allora:

$$||x - \overline{x}|| < ||(x,y) - (\overline{x}, \overline{y})|| < \delta$$

Dove $||(x,y) - (\overline{x}, \overline{y})||$ corrisponde a $\sqrt{(x - \overline{x})^2 + (y - \overline{y})^2}$.
Ma da questa affermazione, si deduce che:

$$|f(x,y) - f(\overline{x}, \overline{y})| < \varepsilon = |\sin(x) - \sin(\overline{x})| < \varepsilon$$

QED

Nella dimostrazione:

- $||x - \overline{x}||$ rappresenta la distanza di x da $\overline{x}$ (come spiegato nel paragrafo 3.2);
- $||(x,y) - (\overline{x}, \overline{y})|| = \sqrt{(x - \overline{x})^2 + (y - \overline{y})^2}$ rappresenta la distanza dal punto di coordinate (x,y) al punto $(\overline{x}, \overline{y})$

Si elencano qua di seguito alcune proprietà delle funzioni continue:

- Se f e g sono funzioni continue su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $f \pm g$ e $f \times g$ sono continue su A, mentre $f \div g$ è continua sull'insieme identico ma con il risultato della funzione g diverso da zero. Quindi, la differenza tra insiemi:

$$A \setminus \{x \in A \, : \, g(x) = 0\}$$

- Se f è continua su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e g è continua su $I \subseteq \mathbb{R}$, allora $h = g \circ f$ è continua su $D = \{x \in A \, : \, f(x) \in I\}$.

  In altre parole, componendo funzioni continue si ottengono funzioni continue.

Teorema **2.** ***Teorema di Weierstrass*** *Sia f una funzione continua su un insieme chiuso e limitato $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora f ha minimo e massimo assoluto, cioè esistono $x_{min}, x_{max} \in D$ tali per cui:*

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \qquad \forall x \in D$$

La tecnica utilizza nel teorema è presente anche nel metodo del confronto (par 3.7.3)

3.7 Limiti

3.7.1 Definizione

Definizione 5

Sia f una funzione di due variabili e (a, b) un punto di accumulazione del dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ della funzione f.
Si afferma che:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \in \mathbb{R} \tag{18}$$

Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se:

- Per ogni x, y appartenenti al dominio D della funzione f, $(x, y) \in D$;
- La distanza tra il punto (x, y) e il punto di accumulazione (a, b) sia maggiore di zero ma minore di δ:

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

Allora la distanza tra la funzione e il risultato del limite (che parte da x, y e tende a a, b della funzione f nel punto x, y) è minore di ε:

$$||f(x, y) - L|| < \varepsilon$$

In generale, se la funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\overline{x}$ è un punto di accumulazione del dominio D:

Definizione 6

Si dice che:

$$\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = L \in \mathbb{R} \tag{19}$$

Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se x appartiene al dominio D e $||x - \overline{x}|| < \delta$ allora $||f(x, y) - L|| < \varepsilon$.

Da queste definizioni si può affermare che la funzione f è **continua** in $\overline{x} \in D$ se e solo se:

$$\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = f(\overline{x})$$

Mostrare che i seguenti limiti <u>non esistono</u>:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ con:

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{y}} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Esempio 1

Dato il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$$

Si considera la restrizione della funzione alla retta $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \frac{x^3+0^2}{x^2+0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x = 0$$

Si considera la restrizione della funzione alla retta $x = 0$:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \frac{0^3+y^2}{0^2+y^2} = \frac{y^2}{y^2} = 1$$

I limiti sono diversi, quindi essi non esistono.

Esempio 2

Dato il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \begin{cases} xe^{\frac{x}{y}} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Esso non può esistere dato che la y al denominatore non è ammessa.

Esempio 3

Dato il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Si considera la restrizione della funzione alla retta $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

Si considera la restrizione della funzione alla retta $x = 0$:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

I due limiti sono uguali. Questa condizione è necessaria ma non sufficiente per affermare che i limiti esistano. Difatti, andando a risolvere il limite con (x,x) si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Risulta evidente che il limite non esiste.

Esempio bonus

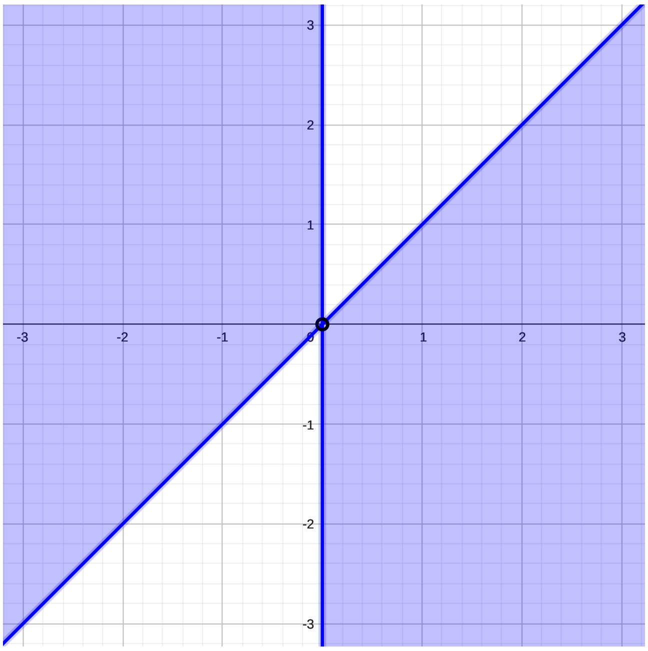
Determinare e rappresentare graficamente il dominio, ed eventualmente calcolare il limite (se esiste):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x(x-y)}}{x^2+y^2}$$

Il dominio è:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x(x-y) \geq 0 \ \wedge \ x^2+y^2 > 0\right\}$$

Con la condizione $x^2 + y^2 > 0$, tutto il grafico viene incluso eccetto il punto $(0,0)$. Per rappresentare $x^2 - xy \geq 0$ è sufficiente rappresentare l'equazione $x^2 = xy$. Ovvero una retta che si espande in positivo e in negativo rispetto y. Quindi con i punti $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ e $x = \pm 3$ si ottiene:



Per verificare l'esistenza del limite, si può verificare andando a sostituire parzialmente con $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \frac{\sqrt{x(x-0)}}{x^2+0^2} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Ricordando che 0^+ è un numero che corrisponde a $0,00\cdots 001$. Per cui, un numero diviso 0^+ risulta infinito. Per quanto riguarda $x = 0$:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \frac{0}{0^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

Il risultato dei due limiti è differente, per cui il limite non esiste.

3.7.2 Manipolazioni algebriche

Per verificare l'esistenza di limiti per funzioni di due variabili, spesso si utilizzano tecniche di manipolazione algebrica per ottenere forme più convenienti.

Esempio 1

Il seguente limite, se sostituito immediatamente si ottiene la forma indeterminata:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y^3 - x^3y^2}{x^2 - y^2} = \frac{1^2 \cdot 1^3 - 1^3 \cdot 1^2}{1^2 - 1^2} = \frac{0}{0}$$

Con alcune manipolazioni algebriche si può ottenere la seguente forma:

$$\frac{x^2y^3 - x^3y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2y^2\left(y - x\right)}{\left(x + y\right)\left(x - y\right)} = \frac{\cancel{-}x^2y^2\cancel{\left(y - x\right)}}{-\left(x + y\right)\cancel{\left(x - y\right)}} = -\frac{x^2y^2}{x + y}$$

Andando a sostituire il limite si ottiene una forma determinata:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} -\frac{x^2y^2}{x + y} = -\frac{1}{2}$$

Esempio 2

Il seguente limite ha forma indeterminata con una sostituzione immediata:

$$\lim_{(x,y)\to\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\cos\left(y\right) - \sin\left(2y\right)}{\cos\left(x\right)\cos\left(y\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0 - 0}{-1 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\frac{\cos\left(y\right) - \sin\left(2y\right)}{\cos\left(x\right)\cos\left(y\right)} = \frac{\cos\left(y\right) - 2\sin\left(y\right)\cos\left(y\right)}{\cos\left(x\right)\cos\left(y\right)} = \frac{\cos\left(y\right)\left(1 - 2\sin\left(y\right)\right)}{\cos\left(x\right)\cos\left(y\right)} = \frac{1 - 2\sin\left(y\right)}{\cos\left(x\right)}$$

Andando a sostituire i valori del limite si ottiene una forma determinata:

$$\lim_{(x,y)\to\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1 - 2\sin\left(y\right)}{\cos\left(x\right)} = +1$$

3.7.3 Maggiorazioni utili per risolvere limiti e Teorema del confronto (dei due carabinieri)

Purtroppo, le manipolazioni algebriche talvolta non sono abbastanza. Risulta dunque necessario introdurre una nuova tecnica utilizzata in combo con un teorema famoso: il teorema del confronto o dei due carabinieri.

Teorema 3 (**Teorema del confronto**). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per il dominio di tre funzioni: f, g, h. Le quali sono definite in un intorno di x_0 chiamato I. Ipotizzando che:*

a) Per ogni $x \in I$ la funzione $g(x)$ assuma valori non inferiori a $f(x)$ e non superiori a $h(x)$, ovverosia:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in I$$

b) I due limiti per x tendente a x_0 di $f(x)$ e $h(x)$ esistano finiti e valgano entrambi l:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \qquad \text{con } l \in \mathbb{R}$$

Allora, sotto tali ipotesi, risulta che il limite per $x \to x_0$ di $g(x)$ vale l:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Nel teorema vengono prese in considerazione tre funzioni definite in un intorno di x_0, la quale può essere un valore finito o infinito. La condizione importante per cui tale teorema sia veritiero, è che la seguente ipotesi sia vera:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Ovvero che g **debba essere contenuta tra** f **e** h. Per questo motivo, la funzione f viene chiamata funzione ***minorante***, mentre la funzione h viene chiamata funzione ***maggiorante*** (questo è anche il motivo per cui si cercano "maggiorazioni" per risolvere i limiti).

Il teorema si chiama "dei due carabinieri" poiché è possibile immaginare le funzioni esterne (f e h) come due carabinieri che accompagnano il detenuto (g) in prigione.

Alcune maggiorazioni utili da tenere a mente:

- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $|xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $|\sin(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Esempio 1

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \to f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Si può applicare il teorema del confronto. La funzione minorante può essere tranquillamente zero, mentre la funzione maggiorante è necessario calcolarla.

$$0 \leq \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leq ???$$

La funzione maggiorante può essere la funzione originale ma con alcune manipolazioni algebriche:

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

Per cui la base di partenza del teorema del confronto è:

$$0 \leq \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2$$

Adesso si può verificare il limite per gli estremi e se i risultati rispettano la disuguaglianza, allora si può affermare che esiste. Il limite di 0 è immediato, mentre il limite di x^2+y^2 è:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0^2+0^2 = 0$$

Per cui, grazie al teorema del confronto è possibile affermare che:

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \leq & x^2+y^2 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 & \leq & \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \leq & \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 \\ 0 & \leq & \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \leq & 0 \end{array}$$

Il limite esiste ed è uguale a zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Inoltre la funzione è continua.

Esempio 2

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \to f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si può applicare il teorema del confronto. La funzione minorante può essere tranquillamente zero, mentre la funzione maggiorante è necessario calcolarla.

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq ???$$

La funzione maggiorante può essere ottenuta grazie alla maggiorazione x^2+y^2, ovvero aggiungendo una y^2:

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Il denominatore e il numeratore si possono semplificare:

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Adesso si può verificare il limite per gli estremi e se i risultati rispettano la disuguaglianza, allora si può affermare che esiste. Il limite di 0 è immediato, mentre il limite di $\sqrt{x^2+y^2}$ è:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+0^2} = 0$$

Per cui, grazie al teorema del confronto è possibile affermare che:

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \leq & \sqrt{x^2+y^2} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 & \leq & \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \leq & \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 & \leq & \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \leq & 0 \end{array}$$

Il limite esiste ed è uguale a zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

E la funzione è continua. In questo esempio, la maggiorazione è stata applicata con l'intuito, ovvero con l'intento di riuscire a semplificare il denominatore così da non avere forme indeterminate nel caso di sostituzione.

Esempio 3

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \to f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si può applicare il teorema del confronto. La funzione minorante può essere tranquillamente zero, mentre la funzione maggiorante è necessario calcolarla.

$$0 \le \frac{x^4y^4}{x^2+y^4} \le ???$$

La funzione maggiorante può essere ottenuta con un piccolo ragionamento. Osservando bene, si può scompattare la frazione e notare che un valore (y) diviso lo stesso valore ma aumentato di un'unità sempre positiva (x^2+y), è sempre minore uguale a 1. Questo perché il numeratore sarà sempre minore o uguale al denominatore:

$$\frac{y^4}{x^2+y^4} \le 1$$

Quindi, un'unità che è 1 o minore, sarà sempre minore o uguale ad un valore elevato alla 4. Formalmente:

$$0 \le \frac{x^4y^4}{x^2+y^4} = \underbrace{\frac{y^4}{x^2+y^4}}_{\le 1} \cdot x^4 \le x^4$$

Adesso si può verificare il limite per gli estremi e se i risultati rispettano la disuguaglianza, allora si può affermare che esiste. Il limite di 0 è immediato, mentre il limite di x^4 è zero. Ne consegue che:

$$\begin{array}{rcccc} 0 & \le & \dfrac{y^4}{x^2+y^4} \cdot x^4 & \le & x^4 \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 & \le & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4} \cdot x^4 & \le & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4 \\ 0 & \le & \dfrac{y^4}{x^2+y^4} \cdot x^4 & \le & 0 \end{array}$$

Il limite esiste ed è uguale a zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

E la funzione è continua. Anche in questo esempio, la maggiorazione è stata applicata con l'intuito, ovvero con l'intento di riuscire a imporre una maggiorazione.

Esempio 4

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \to f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si può applicare il teorema del confronto. La funzione minorante può essere tranquillamente zero, mentre la funzione maggiorante è necessario calcolarla.

$$0 \le \frac{x^4 y^4}{x^2 + y^4} \le ???$$

La funzione maggiorante può essere ottenuta guardando le maggiorazioni ad inizio capitolo. Infatti, il seno è possibile riscriverlo come il valore assoluto del suo argomento:

$$\left| \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} \right| \le \frac{|xy|}{\sqrt{|xy|}}$$

Semplificando il numeratore con il denominatore (perché un valore diviso per la sua radice quadrata restituisce il risultato della radice quadrata):

$$\sqrt{|xy|}$$

Adesso si può verificare il limite per gli estremi e se i risultati rispettano la disuguaglianza, allora si può affermare che esiste. Il limite di 0 è immediato, mentre il limite di $\sqrt{|xy|}$ è zero. Ne consegue che:

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \le & \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} & \le & \sqrt{|xy|} \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 & \le & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} & \le & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xy|} \\ 0 & \le & \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} & \le & 0 \end{array}$$

Il limite esiste ed è uguale a zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

E la funzione è continua. A differenza degli altri esempi, qui la maggiorazione è stata applicata ricordandosi una maggiorazione nota.

Esempio 5

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \to f(x,y) = \frac{x^6+3y^3-3x^2-3y^2}{x^2+y^2}$$

Si può applicare il teorema del confronto. Ma prima di partire è necessario capire dove applicarlo. La funzione maggiorante può essere ottenuta notando che la frazione può essere riscritta in un altro modo:

$$\frac{x^6+3y^3-3x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^6+3y^3-3\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \frac{x^6+3y^3}{x^2+y^2} - \underbrace{\frac{3\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}}_{3}$$

Il valore -3 è una costante e non dipende da nessuna variabile! Per cui adesso si sposta l'attenzione sulla frazione. Essa può essere riscritta come:

$$\frac{x^6+3y^3}{x^2+y^2} = \frac{x^6}{x^2+y^2} + \frac{3y^3}{x^2+y^2} = x^4 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot 3|y|$$

Come accadeva nell'esempio 3 a pagina 112, le due frazioni hanno un valore minore o uguale a 1 poiché il numeratore sarà sempre minore del denominatore. Quindi, si può considerare solo i valori moltiplicati, e applicare il teorema del confronto:

$$\begin{array}{rccccc} & 0 & \leq & \dfrac{x^6+3y^3}{x^2+y^2} & \leq & x^4+3|y| \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} & 0 & \leq & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+3y^3}{x^2+y^2} & \leq & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4+3|y| \\ & 0 & \leq & \dfrac{x^6+3y^3}{x^2+y^2} & \leq & 0 \end{array}$$

Il limite di quella frazione è uguale a zero. Ma attenzione, il risultato finale è diverso. Si ricorda che era stato rimosso il valore -3 poiché era una costante. Quindi il risultato del limite della funzione è -3:

$$\frac{x^6+3y^3-3x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^6+3y^3}{x^2+y^2} - 3$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+3y^3}{x^2+y^2} - 3 = -3$$

E la funzione è continua. Come negli altri esempi, qui la maggiorazione è stata applicata facendo alcune considerazioni su una parte di funzione.

3.7.4 Calcolo limiti in coordinate polari

Per studiare il comportamento di una funzione f che da $(x, y) \to (a, b)$, si può vedere che cosa accade alla funzione:

$$F(\rho, \theta) = f(a + \rho \cos(\theta), b + \sin(\theta)) \tag{20}$$

Quando ρ tende a 0^+.

Teorema 4. *Se in un intorno di (a, b) si ha $|F(\rho, \theta) - L| \leq g(\rho)$ con $g(\rho) \to 0$ per ρ che tende a 0^+, allora:*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \tag{21}$$

Da notare che quello che il teorema esprime è:

$$\lim_{\rho\to 0^+} F(\rho, \theta) = L$$

Uniformemente rispetto a θ.

In parole povere il teorema può essere riscritto come: se in un intorno di (a, b) si ha

$$|F(r, \theta) - L| \leq g(r) \qquad \text{con} \qquad \lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$$

Allora:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

N.B.: si ricorda che per passare alle coordinate polari bisogna trasformare la x e la y in:

$$\begin{cases} x = a + \rho \cos(\theta) \\ y = b + \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Dove a e b sono le coordinate in cui viene definito il limite

Nelle seguenti pagine si riportano alcuni esempi di limiti risolti con le coordinate polari (il limite numero 4 è importante come esempio):

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{(x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 4(y+1)^2}{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 4$

4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0$

Esempio 1

Verificare il risultato del limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Si applica il teorema per i limiti in coordinate polari. Per cui, la funzione, ovvero la frazione, meno il suo risultato, in questo caso 0, deve essere minore o uguale alla funzione $g(r)$, in questo caso l'incognita da trovare. Ovviamente la funzione g deve avere il limite per 0^+ che è uguale a zero. Prima di tutto si riscrive l'espressione con le coordinate polari:

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \to F(r,\theta) = \frac{r\cos(\theta)\cdot r\sin(\theta)}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}}$$

Poi si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}} = \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}} = \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2\cdot 1}}$$

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2}}\cdot\cos(\theta)\sin(\theta) = \sqrt{r^2}\cdot\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Per definizione del seno e del coseno, si è certi che la funzione $F(r,\theta)$ è sicuramente minore o uguale a $\sqrt{r^2}$:

$$0 \le |F(r,\theta) - L| \le \sqrt{r^2}$$

Il risultato del limite che tende a 0^+ su $\sqrt{r^2}$ è zero. Inoltre, dipende solo da r e non da θ, per cui è una condizione abbastanza forte per dire che il limite esiste ed è uguale a zero (in riferimento a $f(x,y)$).

Esempio 2

Verificare che il limite esista e valga zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$$

In questo caso le coordinate polari saranno $r\cos(\theta)$ e $1+r\sin(\theta)$. Questo perché il limite tende a $a=0$ e $b=1$:

$$0 \leq \left| \frac{r^2\cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+(1+r\sin(\theta)-1)^2}} \right| \leq ???$$

Si semplifica la frazione:

$$\left| \frac{r^2\cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}} \right| = \left| \frac{r^2\cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2}} \right| = \left| \frac{r^2\cos^2(\theta)}{r} \right| = r\cos^2(\theta)$$

Il valore trovato è sicuramente sempre minore o uguale a r:

$$0 \leq r\cos^2(\theta) \leq r$$

Il limite in r di 0^+ è sempre 0^+. Per cui, il limite della funzione esiste ed è uguale a zero.

Esempio 3

Verificare che il limite esista e valga 4:

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{(x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 4(y+1)^2}{(x-2)^2 + (y+1)^2}$$

Si riscrive la funzione con le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos(\theta) \\ y = -1 + r\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r^3\cos^3(\theta) + 4r^2\cos^2(\theta) + 4r^2\sin^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} &= \frac{r^3\cos^3(\theta) + 4r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)}{r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)} \\
&= \frac{r^3\cos^3(\theta) + 4r^2}{r^2} \\
&= \frac{r^3\cos^3(\theta)}{r^2} + \frac{4r^2}{r^2} \\
&= r\cos^3(\theta) + 4
\end{aligned}$$

A questo punto, si può notare che la formula $|F(r,\theta) - L|$ prevede $-L$, che in questo esempio è identificato dal $+4$ ottenuto nell'ultimo passaggio. Per cui:

$$|F(r,\theta) - 4| = \left|r\cos^3(\theta)\right|$$

Quel valore è sicuramente minore o uguale a r (classico ragionamento fatto anche per gli esercizi precedenti):

$$\left|r\cos^3(\theta)\right| \le r$$

E il limite di r in 0^+ è uguale a 0^+, ovvero un'unità infinitesima. L'esercizio si conclude affermando che il limite esiste e ha risultato uguale a 4. Questo perché si considera $F - L$ e non solo la funzione F.

Esempio 4 (importante)

Questo limite, a differenza degli altri, può essere risolto in maniera differente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Nel caso in cui il limite esistesse, varrebbe zero. Questo perché la restrizione della funzione f a qualunque retta passante per l'origine, porta a:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^2 + m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1 + m^4x^2} = 0$$

Qualunque sia $m \in \mathbb{R}$. Tuttavia, questo modo differente di dimostrare l'esistenza di un limite, non è una condizione sufficiente per concludere la dimostrazione. Infatti, nel caso in cui ci si muovesse lungo l'asse y con $y = \sqrt{x}$ accadrebbe:

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(x, \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

E questo dimostra che il limite originale non esiste.

3.8 Curve in $\mathbb{R}^n$

Definizione 7

Sia I un intervallo della retta reale. Si chiama **curva in $\mathbb{R}^n$** una funzione del tipo:

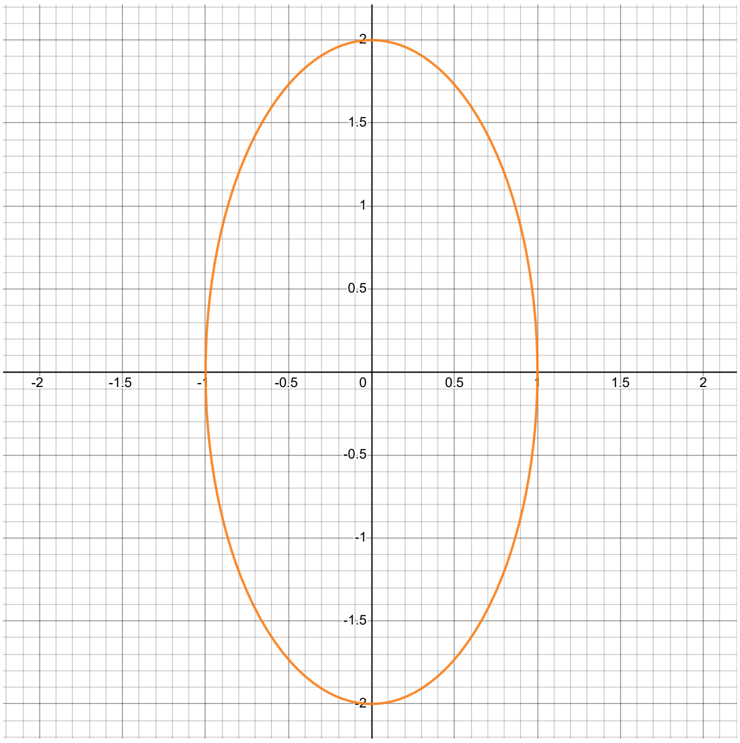
$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \cdots, \gamma_n(t)) \end{aligned} \qquad (22)$$

Che ha tutte le componenti $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue su I. Inoltre, viene detto **sostegno della curva** l'immagine di γ:

$$\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\} \qquad (23)$$

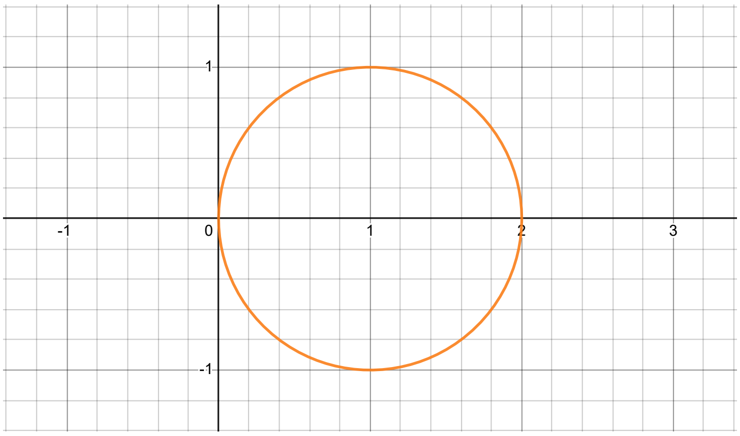
Con il termine "curva" si intende una funzione di variabile reale[2], con "sostegno di una curva" si intende un **insieme di punti** nello spazio euclideo.

Nel caso in cui l'insieme I è chiuso e limitato, cioè $I = [a, b]$, si dice che la curva γ è un **arco** o un **cammino continuo**. Inoltre, $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ sono estremi dell'arco (punto iniziale e punto finale). Alcuni esempi di parametrizzazione:

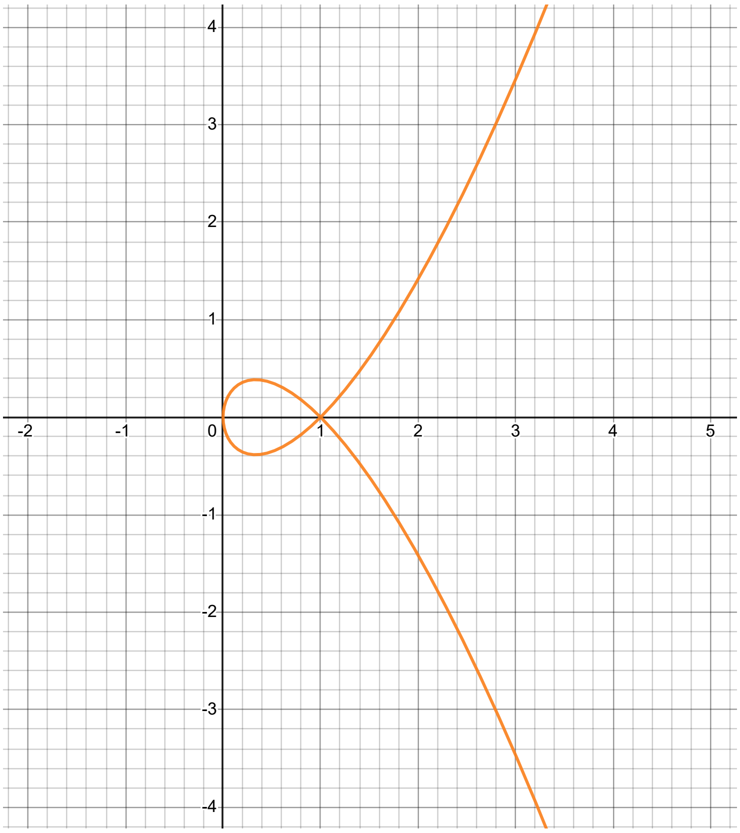


$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (\cos(t), 2\sin(t))$ è un cammino chiuso semplice.

[2]A ogni valore del parametro $t \in I$ è associato uno e un solo punto del sostegno.



$\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (1 + \cos(t), \sin(t))$ è un arco di circonferenza semplice, ma non è chiuso.



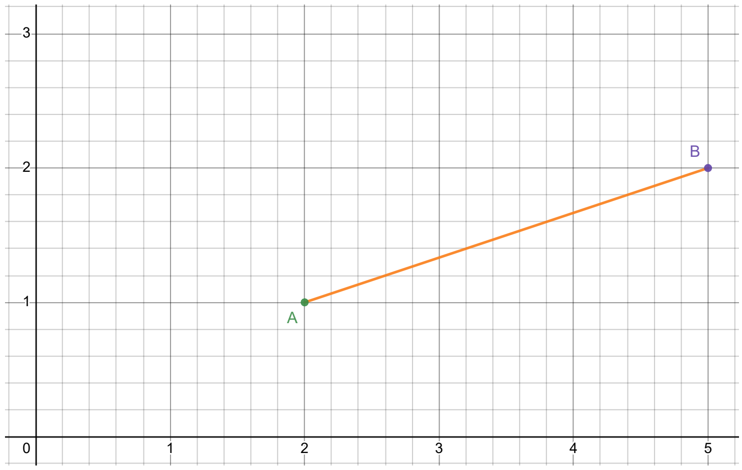
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \left(t^2, t^3 - t\right)$ è una curva non semplice.

3.8.1 Parametrizzazioni notevoli

Esistono tre tipi di parametrizzazioni notevoli: per un segmento, per un grafico di una funzione e per le coniche.

Parametrizzazione notevole: segmento

Dato il seguente grafico:



Si definisce il vettore $\overrightarrow{v}$ che parte dal punto B e finisce al punto A come:

$$\overrightarrow{v} = B - A = (5,2) - (2,1) = (3,1)$$

La **parametrizzazione notevole** di una retta (segmento) è la seguente formula:

$$\gamma(t) = A + t \cdot \overrightarrow{v} \qquad \text{con } t \in [0,1] \tag{24}$$

Sostituendo i valori noti in questo esempio:

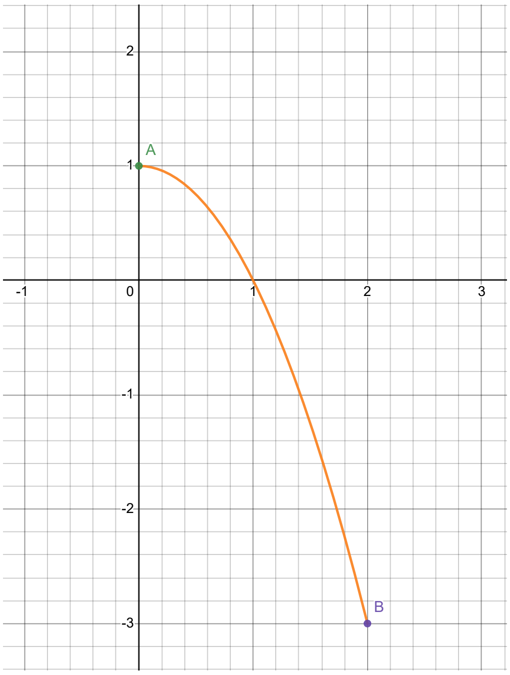
$$\gamma(t) = (2,1) + t\,(3,1) = (2+3t, 1+t)$$

La parametrizzazione dunque è:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (2+3t, 1+t) \end{array}$$

Parametrizzazione notevole: grafico di una funzione

Dato il seguente grafico come esempio:



Il grafico di una funzione:

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Ha una parametrizzazione del tipo:

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, f(t)) \end{aligned} \tag{25}$$

L'esempio ha i punti $A = (0, 1)$ e $B = (2, -3)$ e dunque la parametrizzazione è:

$$\begin{aligned} \gamma\, [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(t, 1 - t^2\right) \end{aligned}$$

Parametrizzazione notevole: conica

- La parametrizzazione di un'**ellisse di centro** (x_c, y_c) e semiassi a, b:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x_c + a\cos(t), y_c + b\sin(t)) \end{aligned}$$

- La parametrizzazione dell'**iperbole equilatera** $\left(x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cosh(t), \sinh(t)) \end{aligned}$$

Ricordando che $\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\sinh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

3.8.2 Retta tangente a una curva

Una curva $\gamma(t)$, con $t \in I$, è derivabile in I se e solo se tutte le sue componenti sono derivabili in I e in tal caso:

$$\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \cdots, \gamma_n'(t)\right)$$

Si può interpretare la derivata della curva $\gamma'(t)$ come un vettore velocità di un punto, il quale descrive la traiettoria (sostegno della curva γ) secondo la parametrizzazione data.

Nel caso in cui la derivata è diversa dal vettore zero, $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, allora una **parametrizzazione della retta tangente alla curva** in $\gamma(t_0)$ è:

$$r(t) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) \qquad t \in \mathbb{R} \tag{26}$$

3.8.3 Esercizio parametrizzazione retta tangente

Trovare l'equazione della retta tangente al sostegno della curva:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : (-1, +\infty) & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \left(e^t, \ln(t+1), t\right) \end{array}$$

Nel suo punto di coordinate $(1, 0, 0)$. Il **primo passo** è trovare un punto t_0 appartenente alla curva $(-1, +\infty)$ tale che il risultato sia $\gamma(t_0) = (1, 0, 0)$. Per questo motivo, si inseriscono i valori nel sistema:

$$\begin{cases} e^t = 1 \\ \ln(t+1) = 0 \\ t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione immediata}} t_0 = 0$$

Il **secondo passo** è calcolare la derivata in quel punto:

$$\gamma'(t)|_{t=0} = \left.\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(e^t\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\ln(t+1)\right) \\ \frac{d}{dt}(t) \end{cases}\right|_{t=0} = \left.\begin{cases} e^t \\ \frac{1}{t+1} \\ 1 \end{cases}\right|_{t=0} = (1, 1, 1)$$

Il **terzo e ultimo passo** è scrivere l'equazione della tangente (eq. 26):

$$r(s) = \gamma(t_0) + s \cdot \gamma'(t_0) = (1, 0, 0) + s(1, 1, 1) = (1 + s, s, s)$$

Questa risulta essere l'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = s \\ z = s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

3.8.4 Esercizio parametrizzazione arco di ellisse

Trovare una parametrizzazione dell'arco di ellisse di equazione:

$$4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$$

E si scriva poi l'equazione della tangente alla curva in $P\left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, +1\right)$.

Il **primo passo** è verificare che l'equazione data sia in forma canonica e in caso contrario ottenerla con le varie tecniche introdotte nel capitolo dei Prerequisiti. Quindi, si esegue la tecnica del completamento dei quadrati (par. 1.1.4) per ottenere la forma canonica:

- Si raggruppano le variabili:

$$4\left(x^2 + 2x\right) + 9\left(y^2 - 4y\right) + 4 = 0$$

- Si cerca un $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x \quad &\rightarrow \quad 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\ & \quad -4c = -4 \\ & \quad c = 1 \\ y^2 - 4y \quad &\rightarrow \quad (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \\ & \quad -4c = -16 \\ & \quad c = 4 \end{aligned}$$

- Si riscrive l'equazione:

$$4\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 9\left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) + 4 = 0$$

- Si raggruppano le equazioni di secondo grado con i nuovi termini e si ottiene l'equazione canonica:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 \quad &\rightarrow \quad \frac{-2 \pm 0}{2 \cdot 1} = -1 \\ y^2 - 4y + 4 \quad &\rightarrow \quad \frac{-(-4) \pm 0}{2 \cdot 1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\left((x+1)^2 - 1\right) + 9\left((y-2)^2 - 4\right) + 4 &= 0 \\ 4(x+1)^2 - 4 + 9(y-2)^2 - 36 + 4 &= 0 \\ 4(x+1)^2 + 9(y-2)^2 &= 36 \\ \frac{1}{36} \cdot 4(x+1)^2 + \frac{1}{36} \cdot 9(y-2)^2 &= 36 \cdot \frac{1}{36} \\ \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

La parametrizzazione di un'ellisse di centro (x_c, y_c) e semiassi a, b è:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \begin{cases} x_c + a\cos(t) \\ y_c + b\sin(t) \end{cases}$$

Quindi, il **secondo passo** è trovare la parametrizzazione. In questo esempio, l'ellisse è centrata in $(-1, 2)$ mentre i semiassi sono $a = \sqrt{9} = 3$ e $b = \sqrt{4} = 2$. Per cui, la parametrizzazione di un'ellisse è:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \begin{cases} -1 + 3\cos(t) \\ 2 + 2\sin(t) \end{cases}$$

Il **terzo passo** è eguagliare la parametrizzazione al punto P questo perché è necessario trovare l'equazione della tangente alla curva. Per questo motivo, si procede il calcolo con il sistema:

$$\begin{cases} -1 + 3\cos(t) = -1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ 2 + 2\sin(t) = +1 \end{cases} \to \begin{cases} \cos(t) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \\ \\ \sin(t) = -1 \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \cos(t) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin(t) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A questo punto il calcolo della t non è banale perché applicando la funzione arccos e arcsin, si otterrebbero due valori differenti di t. Quindi come è possibile ottenerla? Si utilizza la definizione di tangente che è seno fratto coseno:

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \to \tan(t) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \div -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Con l'arcotangente si ottiene il valore t:

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = t = \frac{\pi}{6}$$

Ma attenzione! Con $\frac{\pi}{6}$ il valore del coseno e seno sarebbero differenti (riguardo il segno). Questo perché, la funzione arcotangente restituisce il primo valore trovato, ovvero quello nel quadrante positivo (si veda la figura 6 nella pagina successiva).

Per risolvere questo problema, si disegna una circonferenza su un piano cartesiano, e partendo dal punto $(1, 0)$, si cerca, con i diversi livelli di gradi, di arrivare nel quadrante interessato. Quindi:

- Il primo quadrante (in alto a dx) avrà i valori del seno e coseno positivi. Il range dei gradi è: $(0°, 90°)$
- Il secondo quadrante (in alto a sx) avrà i valori del coseno negativi e del seno positivi. Il range dei gradi è: $(90°, 180°)$
- Il terzo quadrante (in basso a sx) avrà i valori del coseno e del seno negativi. Il range dei gradi è: $(180°, 270°)$
- Il quarto quadrante (in basso a dx) avrà i valori del coseno positivi e i valori del seno negativi. Il range dei gradi è: $(270°, 0°)$

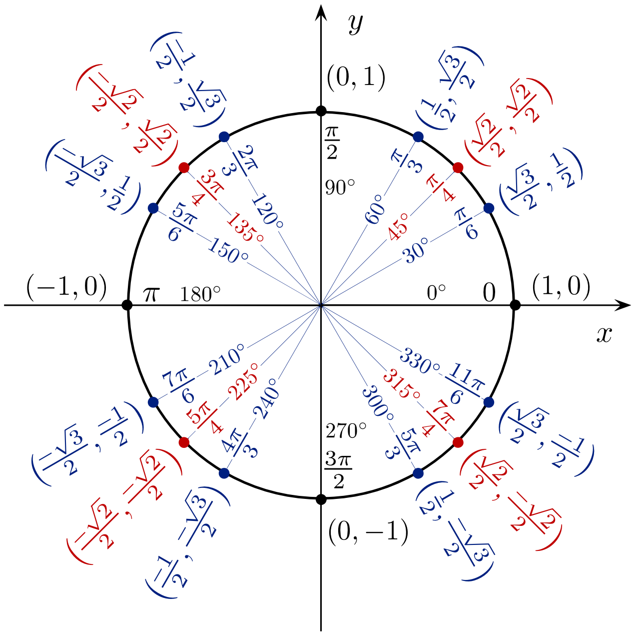


Figura 6: I valori assunti dalla funzione tan.

Portando il valore $\frac{\pi}{6}$ da radianti a gradi (ricordando $\pi = 180°$, quindi $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6} \cdot 180 = 30°$) si ottengono $30°$. Quindi, sapendo che il terzo quadrante è quello interessato, per arrivarci si continua ad aumentare il valore stesso:

$$
\begin{aligned}
30° + 30° + 30° = 90° \quad &\rightarrow \quad \text{primo quadrante passato} \\
90° + 30° + 30° + 30° = 180° \quad &\rightarrow \quad \text{secondo quadrante passato} \\
180° + 30° = 210° \quad &\rightarrow \quad \text{primo valore ammesso nel terzo quadrante}
\end{aligned}
$$

Il valore è stato aumentato 7 volte, per cui, al valore $\frac{\pi}{6}$ (corrispondente valore in radianti di $30°$) basterà moltiplicare 7:

$$t = \frac{7\pi}{6}$$

Come viene mostrata nell'equazione 26, per ottenere l'equazione è necessaria la derivata della parametrizzazione. Per cui, il **quarto passo** è eseguire la derivata della parametrizzazione e valutarla nel valore t trovato con il punto P nel passaggio precedente:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} -3\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{cases} \rightarrow \gamma'\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \begin{cases} -3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ \\ 2\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \\ -\sqrt{3} \end{cases}$$

Il **quinto passo** è applicare l'equazione 26:

$$\begin{aligned}
r(t) &= \gamma(t) + t \cdot \gamma'(t) \qquad t \in \mathbb{R} \\
&= \begin{cases} -1 + 3\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) \\ \\ 2 + 2\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) \end{cases} + t \cdot \begin{cases} -3\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) \\ \\ 2\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) \end{cases} \\
&= \begin{cases} -1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{cases} + t \cdot \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ \\ -\sqrt{3} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}t \\ \\ 1 - \sqrt{3}t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

L'esercizio si conclude qua con l'equazione della retta tangente.

3.8.5 Insiemi connessi per archi e teorema degli zeri

Definizione 8

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **connesso per archi** se presi due punti qualunque $x, y \in A$ esiste un arco continuo in A che ha per estremi x e y.

Banalmente un insieme è connesso per archi se si riesce a disegnare una strada tra due punti appartenenti all'insieme stesso.

Teorema **5** (**Teorema degli zeri**). *Sia f una funzione continua su un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi. Se x e y sono due punti di D tali che $f(x) > 0$ e $f(y) < 0$, allora esiste $z \in D$ tale che $f(z) = 0$.*

3.8.6 Lunghezza di una curva

Dato l'arco di curva:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

E una partizione dell'intervallo $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, t_2, \cdots, b = t_m\}$$

Alla partizione rimane associata una poligonale, di cui si può **calcolare la lunghezza** (di una curva):

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|| \tag{27}$$

Definizione 9

Si dice che un **arco di curva** è **rettificabile** se $\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P} < \infty)$. In tal caso, per definizione:

$$L(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P})$$

Definizione 10

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è un arco di curva regolare, ovvero la derivata prima è diverso al vettore nullo ed è continua, allora è rettificabile e la sua **lunghezza** è:

$$\int_a^b ||\gamma'(t)|| \, \mathrm{d}t \tag{28}$$

Dove la lunghezza viene calcolata in questo modo:

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + \cdots n^2} \tag{29}$$

In cui tutte le variabili sotto radice sono i valori della parametrizzazione. Ovviamente devono essere inseriti post derivata. Si veda gli esempi.

Esempio 1

Calcolare la lunghezza dell'arco di curva:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t), 3t) \end{array}$$

Il **primo passo** per calcolare la lunghezza è trovare la derivata:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 3 \end{cases}$$

Il **secondo passo** è calcolare l'integrale applicando l'equazione 29:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (3)^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{10} \, \mathrm{d}t = \left[\sqrt{10}t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{10} \cdot 2\pi$$

Esempio 2

Calcolare la lunghezza dell'arco di curva parametrizzato da:

$$\begin{array}{rcl}\gamma : [0,3] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{2}{3}t^3, 1-t^2\right)\end{array}$$

Il **primo passo** per calcolare la lunghezza è trovare la derivata:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 2t^2 \\ -2t \end{cases}$$

Il **secondo passo** è calcolare l'integrale applicando l'equazione 29:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 ||\gamma'(t)|| &= \int_0^3 \sqrt{\left(2t^2\right)^2 + \left(-2t\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^3 \sqrt{4t^4 + 4t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^3 \sqrt{4t^2\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^3 2t \cdot \sqrt{\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= 2 \cdot \int_0^3 t \cdot \sqrt{\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t \\
&\downarrow \text{ si procede per sostituzione: } x = t^2+1; \;\; \mathrm{d}t = \frac{1}{t'}\,\mathrm{d}x \\
&= \cancel{2} \cdot \int_0^3 \cancel{t} \cdot \sqrt{x}\frac{1}{\cancel{2t}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \\
&\downarrow \text{ proprietà fondamentale della radice quadrata: } \sqrt[\beta]{(x)^\alpha} = x^{\frac{\alpha}{\beta}} \\
&= \int_0^3 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 \\
&\downarrow \text{ si torna alla forma pre-sostituzione} \\
&= \left[\frac{\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 \\
&= \frac{\left(3^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{\left(0^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{(10)^3}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{(10)^3}-2}{3}
\end{aligned}$$

3.8.7 Derivate parziali

Sia f una funzione di due variabili, definita in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Se la restrizione della funzione f alla retta di equazione $y = y_0$ è derivabile in x_0, si dice che f **ammette derivata parziale** rispetto a x nel punto (x_0, y_0) e si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned} \tag{30}$$

Le derivate parziali sono i **coefficienti angolari** delle rette tangenti alle curve ottenute selezionando il grafico di f con i piani $y = y_0$ e $x = x_0$.

Generalizzazione al caso n-dimensionale

Sia f definita in un intorno di $x \in \mathbb{R}^n$. Indicato con e_i il vettore:

$$(0, 0, 0, \cdots, 0, \mathbf{1}, 0, \cdots, 0, 0, 0)$$

Ovvero l'unico elemento non nullo nella i-esima posizione, allora si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} \tag{31}$$

Se questo limite esiste finito.

Esempi

a) Data $f(x, y) = x^2 + 3xy^4$ e calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 12xy^3$$

b) Data $f(x, y) = ye^{xy}$ e calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1 \cdot y) \cdot ye^{xy} = y^2 e^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

c) Data $f(x, y, z) = y \cdot \tan(x + 2z)$ e calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y}{\cos^2(x + 2z)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \tan(x + 2z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2y}{\cos^2(x + 2z)}$$

d) Sia $f(x, y) = y\sqrt[3]{x}$, calcolare, se esiste, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \frac{y}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La derivata della funzione f nell'origine vale 0.

e) Sia $f(x,y) = \exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, calcolare, se esiste, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y \\
&= \exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{\sqrt{h^2}} - 1}{h}
\end{aligned}$$

In questo caso il limite non esiste poiché venendo da destra (0^+) o da sinistra (0^-), il limite assume diversi valori:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{h^2}} - 1}{h} \longrightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{1^+ - 1}{0^+} \longrightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{0^+}{0^+} = +1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{\sqrt{h^2}} - 1}{h} \longrightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{1^+ - 1}{0^-} \longrightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{0^+}{0^-} = -1$$

Ovviamente esistono anche **derivate di ordine superiore** che si risolvono banalmente una dopo l'altra:

- $f(x,y)$:
  - $f_x(x,y)$
    - $f_{xx}(x,y)$
    - $f_{xy}(x,y)$
  - $f_y(x,y)$
    - $f_{yy}(x,y)$
    - $f_{yx}(x,y)$

Le variabili f_{xy} e f_{yx} sono dette **derivate miste**:

$$\begin{aligned}
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h} \\
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}
\end{aligned} \tag{32}$$

3.8.8 Gradiente

Definizione 11

Se f ammette derivate parziali in un punto $\overline{x}$, si chiama **gradiente** di f in $\overline{x}$ il vettore:

$$\nabla f\left(\overline{x}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\overline{x}\right),\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\overline{x}\right),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\overline{x}\right)\right) \tag{33}$$

Per capire al meglio il gradiente, si introduce un esercizio dettagliato con anche l'introduzione della matrice Hessiana (utilizzata in futuro).

Esempio guidato

- Scrivere il gradiente della funzione:
$$f\left(x,y\right)=x^2y-xy^2+xy$$
in un generico punto di $\mathbb{R}^2$.
- Trovare i punti in cui il gradiente è nullo (punti stazionari di f).
- Calcolare il determinante della matrice:
$$H_f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix} f_{xx}\left(x,y\right) & f_{xy}\left(x,y\right)\\ f_{yx}\left(x,y\right) & f_{yy}\left(x,y\right)\end{pmatrix} \tag{34}$$
nel punto stazionario $(0,0)$.

Il gradiente è facilmente calcolabile facendo la derivata parziale rispetto a x e un'altra rispetto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=2xy-y^2+y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=x^2-2xy+x$$
$$\nabla f\left(x,y\right)=\left(2xy-y^2+y,\ x^2-2xy+x\right)$$

Per trovare i punti in cui il gradiente è nullo, basta porre le condizioni uguale a zero e ottenere tutte le possibili soluzioni:

$$\begin{cases}2xy-y^2+y=0\\ x^2-2xy+x=0\end{cases}$$

Le derivate parziali miste e parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xx}\left(x,y\right)=2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}\left(x,y\right)=2x-2y+1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial yy}\left(x,y\right)=-2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial yx}\left(x,y\right)=2x-2y+1$$

$$H_f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix} 2y & 2x-2y+1\\ 2x-2y+1 & -2x\end{pmatrix}\to H_f\left(0,0\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Le derivate miste sono uguali! E questo non è un caso perché dichiarato nel Teorema di Schwarz (pag. 133).

Teorema 6 (**Teorema di Schwarz**)**.** *Sia f una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto. Se le due derivate miste:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

esistono in un intorno di $\overline{x} \in A$ e sono entrambe continue in $\overline{x}$, allora in tale punto esse coincidono.

Nota bene:

1. Se la funzione f ha tutte le derivate parziali fino all'ordine due continue in A si dice che f è di classe $\mathcal{C}^2$ in A.

2. Il teorema si generalizza a funzioni di classe $\mathcal{C}^k(A)$, cioè funzioni che hanno tutte le derivate parziali fino all'ordine k continue in A.

   Per esempio, con A aperto di $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{C}^4(A)$, $\overline{x} \in A$:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^2}(\overline{x}) = \frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1 \partial x_3}(\overline{x}) = D^{(1,1,2)} f(\overline{x})$$

Qua di seguito, si fornisce una formula fondamentale. Sia D un insieme aperto in $\mathbb{R}^n$:

Teorema 7 (**Formula del gradiente**)**.** *Se f è differenziabile (par. 3.8.11) in $\overline{x} \in D$, allora f ammette in $\overline{x}$ la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(\overline{x})$ qualunque sia il vettore unitario $\overrightarrow{v}$ e inoltre si ha:*

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(\overline{x}) = \nabla f(\overline{x}) \cdot \overrightarrow{v} \tag{35}$$

Questa formula è fondamentale in alcuni esercizi. Il prodotto nell'equazione 35, è un prodotto vettoriale, per cui si moltiplicano le coordinate del gradiente per le coordinate del vettore (la x del gradiente con la x del vettore e la y del gradiente con la y del vettore) e si sommano i due valori.

Un altro aspetto **importante** che viene chiesto talvolta in sede d'esame è la **massima crescita**. Se f è differenziabile in $\overline{x} \in D$ e $\nabla f(\overline{x}) \neq \overrightarrow{0}$, cioè il gradiente non è nullo, allora:

- La **massima crescita** di f, a partire da $\overline{x}$, avviene nella **direzione del gradiente**

- La **massima decrescita** avviene nella **direzione opposta a quella del gradiente**

E ancora, si presenta qua di seguito un altro argomento richiesto spesso in sede d'esame: quando un gradiente è **ortogonale**.

Teorema 8 (Ortogonale)**.** *Sia f di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $\overline{x}$ e supponiamo che $\nabla f(\overline{x}) \neq \overrightarrow{0}$. Allora $\nabla f(\overline{x})$ è* ***ortogonale*** *alla curva di livello di f che passa per $\overline{x}$.*

3.8.9 Derivate direzionali

Si consideri la restrizione della funzione f a una retta tipo $r(t) = P + t\overrightarrow{v}$, con $t \in \mathbb{R}$, dove $\overrightarrow{v}$ è un **versore** (vettore unitario) che indica una particolare direzione e P è un punto interno al dominio di f.

Definizione 12

La funzione f ha una **derivata direzionale** in P nella direzione di $\overrightarrow{v}$ se esiste finito il limite:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P + t\overrightarrow{v}) - f(P)}{t} \tag{36}$$

3.8.10 Teorema della funzione implicita (Ulisse Dini)

Teorema 9 (**Teorema di Dini**). *Sia f una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in un aperto A di $\mathbb{R}^2$ e supponiamo che esista un punto $(\overline{x}, \overline{y})$ tale che la funzione valutata in quel punto sia uguale a zero $f(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ e la sua derivata parziale rispetto a y non sia nulla $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$.*

Allora esiste un intorno I di $\overline{x}$ e un'unica funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ in I tale che $\overline{y} = \varphi(\overline{x})$ e $f(x, \varphi(x)) = 0$ per ogni $x \in I$.
Inoltre:

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \qquad \forall x \in I \tag{37}$$

In parole povere, la curva di livello $f(x, y) = 0$ è localmente il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$.

Nei temi d'esame, il Teorema di Dini viene richiesto quando si chiede di calcolare la pendenza di una retta tangente in un punto. Il procedimento è quello di calcolare le derivate parziali, l'equazione della retta tangente e infine di applicare la frazione, ovvero il teorema di Dini.

3.8.11 Differenziabilità

Definizione 13

Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in un punto (a, b) interno a D se esistono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ e inoltre:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \tag{38}$$

dove:

$$T(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \tag{39}$$

In altre parole, basta utilizzare l'equazione 39 per calcolare la differenziabilità.

Inoltre, quando si dice che una funzione è differenziabile? Sia f definita in un intorno di $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ e si supponga che esistano tutte le derivate parziali di f in $\overline{x}$. Si dice che la funzione f è **differenziabile** in $\overline{x}$ se:

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x) - T(x)}{||x - \overline{x}||} = 0$$

In cui:

$$T(x) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})(x_i - \overline{x}_i) = f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x}) \cdot (x - \overline{x})$$

L'importanza di dire se una funzione è differenziabile o meno è una conseguenza del fatto che:

Teorema 10. *Se f è differenziabile in un punto P, allora f è continua in P.*

Senza dover fare calcoli pesanti, una funzione è **differenziabile** nel caso in cui le derivate parziali in un intorno di un punto sono continue:

Teorema 11. *Se f ammette derivate parziali in un intorno di $\overline{x}$, continue in $\overline{x}$, allora f è differenziabile in $\overline{x}$.*

In particolare, se le derivate parziali di f esistono e sono continue in un aperto A, allora f è differenziabile in tutti i punti di A.

Ricapitolando:

Esistenza derivate in ogni direzione	$\not\Rightarrow$	Continuità
Differenziabilità	$\Rightarrow$	Esistenza derivate in ogni direzione e continuità

3.9 Esercizi

3.9.1 Dominio, insieme aperto/chiuso, limitato/illimitato, connesso/sconnesso

Esame 6 settembre 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (a)

Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} - \sqrt{2x + 1}$$

determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!).

Il dominio della funzione dipende dalle due radici quadrate:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \,\wedge\, 2x + 1 \geq 0\right\}$$

Per rappresentare il grafico si parte dalla retta $2x + 1$. Quindi, si manipola la disuguaglianza esplicitando la x:

$$2x + 1 \geq 0 \longrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

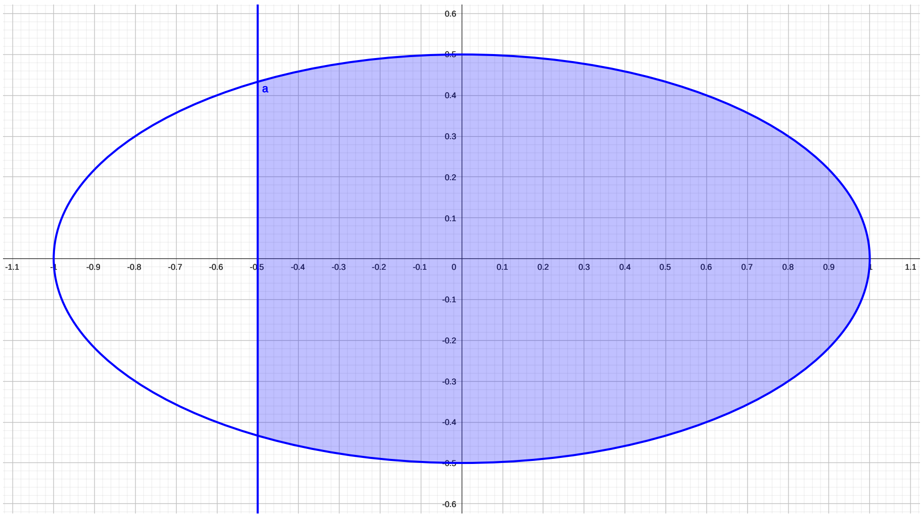
Mentre per l'equazione di secondo grado, è evidente che sia un'ellisse centrata nell'origine (dato che mancano i termini che si sottraggono alle variabili di secondo grado):

$$1 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \longrightarrow x^2 + 4y^2 \leq 1 \longrightarrow x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} \leq 1$$

Il centro dell'ellisse è nell'origine $(0, 0)$, mentre i vertici sono:

$$\begin{array}{lll}
\text{Orizzontali:} & V_1 = (0 - 1, 0) & V_2 = (0 + 1, 0) \\
& V_1 = (-1, 0) & V_2 = (1, 0) \\[1em]
\text{Verticali:} & V_3 = \left(0, 0 - \sqrt{\frac{1}{4}}\right) & V_4 = \left(0, 0 + \sqrt{\frac{1}{4}}\right) \\
& V_3 = \left(0, -\dfrac{1}{2}\right) & V_4 = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)
\end{array}$$

La disuguaglianza ha il minore uguale, quindi l'ellisse deve essere considerata solo al suo interno. La figura viene rappresentata nella pagina successiva.



Rappresentazione di $1 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \ \wedge \ 2x + 1 \geq 0$.

Si calcolano i punti interni e di frontiera per capire se è un insieme aperto o chiuso:

$$\begin{aligned}
\mathring{D} &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 - x^2 - 4y^2 > 0 \ \wedge \ 2x + 1 > 0\right\} \\
\partial D &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 - x^2 - 4y^2 = 0 \ \wedge \ 2x + 1 = 0\right\} \\
\overline{D} &= D \cup \partial D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \ \wedge \ 2x + 1 \geq 0\right\}
\end{aligned}$$

Il dominio D è uguale alla chiusura $\overline{D}$, questo significa che l'insieme è chiuso e non aperto poiché $D \neq \mathring{D}$.

Inoltre, l'insieme è limitato poiché esiste una palla di centro $(0, 0)$ con un raggio maggiore di zero tale che essa racchiuda questo insieme.

Infine, l'insieme è anche connesso per archi perché è possibile prendere due punti all'interno dell'insieme e disegnare una strada.

Esame 10 luglio 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (a)

Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt[4]{2-(x-1)^2-(y-1)^2} + e^{\frac{1}{x}}$$

determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!).

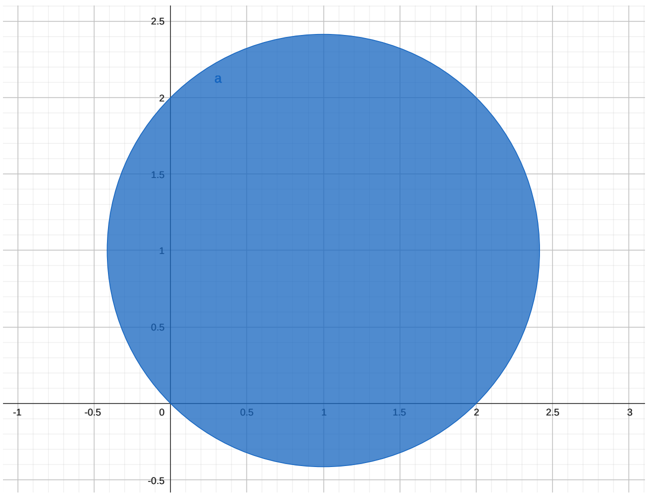
Il dominio della funzione f è condizionato dalla radice quadrata e dalla frazione nell'esponenziale:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2-(x-1)^2-(y-1)^2 \geq 0 \,\wedge\, x \neq 0\right\}$$

Si rappresenta il dominio partendo dalla circonferenza, ma trasformandola prima in un'equazione canonica:

$$\begin{aligned} 2-(x-1)^2-(y-1)^2 &\geq 0 \\ -(x-1)^2-(y-1)^2 &\geq -2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Sul piano cartesiano, si disegna una circonferenza centrata in $(1,1)$ e si esclude l'asse $x \neq 0$:



Si calcolano i vari insiemi:

$$\begin{aligned} \mathring{D} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2-(x-1)^2-(y-1)^2 > 0\right\} \\ \partial D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2-(x-1)^2-(y-1)^2 = 0 \,\wedge\, x = 0\right\} \\ \overline{D} &= D \cup \partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2-(x-1)^2-(y-1)^2 \geq 0\right\} \end{aligned}$$

L'insieme non è né aperto ($D \neq \mathring{D}$) né chiuso ($D \neq \overline{D}$). Inoltre, l'insieme è limitato poiché esiste una palla con un raggio maggiore di zero tale che possa racchiudere questo insieme. Infine, l'insieme non è connesso per archi.

Esame 21 giugno 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (a)

Data la funzione

$$f(x,y) = \left(x+y^2\right)\ln\left(|x|-y\right) + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!).

Il dominio è influenzato dal logaritmo e dalla radice quadrata al denominatore:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x|-y>0 \;\wedge\; x-1>0\right\}$$

Ricordando la rappresentazione di un valore assoluto:

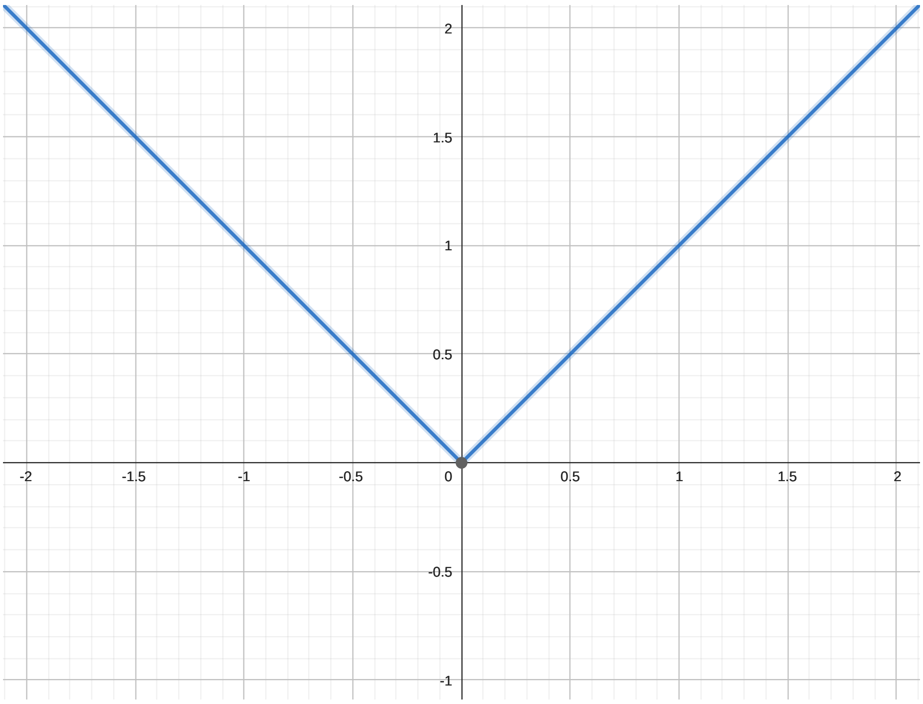
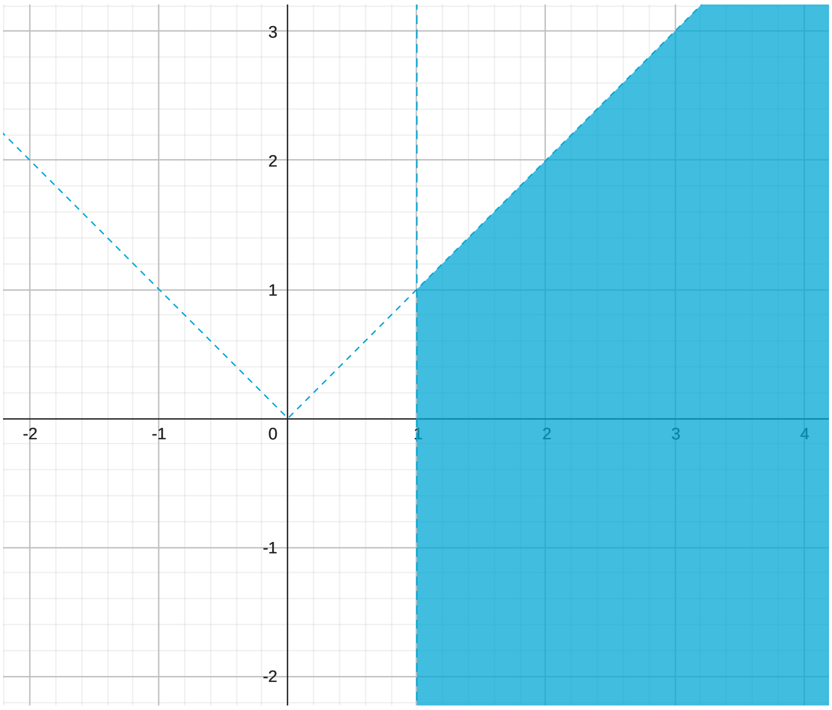


Figura 7: Rappresentazione grafica di $|x|$.

Si rappresenta il dominio nel piano cartesiano, considerando la parte di grafico da $x = 1$ (escluso) in poi verso infinito e disegnando una retta comprendendo la parte di destra a causa della disuguaglianza. Si veda il grafico per comprendere meglio.



Rappresentazione nel piano cartesiano del dominio.

Si dimostra se l'insieme è aperto o chiuso:

$$\begin{aligned}
\mathring{D} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| - y > 0 \ \wedge \ x - 1 > 0\right\} \\
\partial D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| - y = 0 \ \wedge \ x - 1 = 0\right\} \\
\overline{D} &= D \cup \partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| - y \geq 0 \ \wedge \ x - 1 \geq 0\right\}
\end{aligned}$$

Per cui, l'insieme non è chiuso perché $D \neq \overline{D}$, ma invece è aperto poiché $\mathring{D} = D$.

L'insieme è illimitato poiché non esiste una palla di raggio r maggiore zero che riesca a contenere un insieme.

Infine, l'insieme è connesso per archi.

Esame 03 marzo 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (a)

Data la funzione

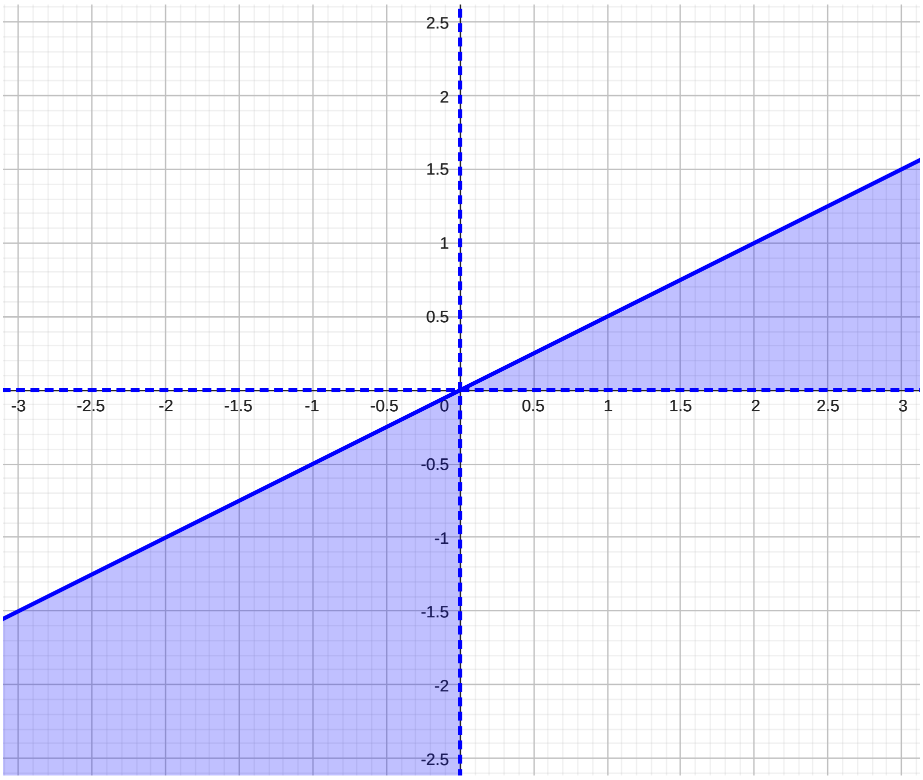
$$f(x,y) = ye^{\sqrt{x-2y}} - \ln(xy)$$

determinare analiticamente il suo dominio naturale D e poi rappresentarlo (con cura!) nel piano cartesiano. Stabilire se D è un insieme limitato/illimitato, aperto/chiuso, connesso/sconnesso (motivare le risposte!).

Il dominio è condizionato dal logaritmo e dalla radice quadrata:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - 2y \geq 0 \, \wedge \, xy > 0\right\}$$

Il grafico si rappresenta facilmente, $xy > 0$ non consente di comprendere le linee cartesiane, mentre $x \geq 2y$ taglia a metà il grafico dal lato opposto:



Si dimostra se è aperto o chiuso:

$$\begin{aligned}
\mathring{D} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - 2y > 0 \, \wedge \, xy > 0\right\} \\
\partial D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - 2y = 0 \, \wedge \, xy = 0\right\} \\
\overline{D} &= D \cup \partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x - 2y \geq 0 \, \wedge \, xy \geq 0\right\}
\end{aligned}$$

L'insieme non è né aperto ($D \neq \mathring{D}$) né chiuso ($D \neq \overline{D}$). L'insieme è illimitato poiché non esiste una palla di raggio r maggiore di zero che contenga l'insieme. Infine, l'insieme non è connesso per archi.

3.9.2 Derivata direzionale con valore massimo

Esame 6 settembre 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (b)

Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} - \sqrt{2x + 1}$$

calcolare la derivata direzionale f nel punto $P\left(0, \frac{1}{4}\right)$ in direzione $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Qual è il valore massimo di $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(P)$ al variare di $\overrightarrow{v}$?

Si calcolano le derivate direzionali nel punto P:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}} \cdot (-2x) - \frac{1}{2\sqrt{2x + 1}} \cdot (2) \\
&= -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \\
\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{1}{4}\right) &= -1 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}} \cdot (-8y) - \frac{1}{2\sqrt{2x + 1}} \cdot (0) \\
&= -\frac{4y}{\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y}\left(0, \frac{1}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \\
&= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{razionalizzazione}} -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Il gradiente è:

$$\nabla f\left(0, \frac{1}{4}\right) = \left(-1, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Per calcolare la derivata direzionale si utilizza la formula del gradiente (prodotto vettoriale):

$$\nabla f\left(0, \frac{1}{4}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \left(-1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

Per calcolare il valore massimo al variare del vettore, si calcola con la norma del gradiente:

$$||\nabla f(P)|| = \left|\left|\nabla f\left(0, \frac{1}{4}\right)\right|\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Esame 10 luglio 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (b)

Data la funzione

$$f(x,y)=\sqrt[4]{2-(x-1)^2-(y-1)^2}+e^{\frac{1}{x}}$$

calcolare $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(1,2)$***, con*** $\overrightarrow{v}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Si calcolano inizialmente le derivate parziali:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}f(x,y) &= \frac{1}{4\sqrt[4]{\left(2-(x-1)^2-(y-1)^2\right)^3}}(-2x+2)-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\\
\frac{\partial f}{\partial x}f(1,2) &= \frac{1}{4\sqrt[4]{\left(2-(1-1)^2-(2-1)^2\right)^3}}(-2\cdot 1+2)-\frac{1}{1^2}e^{\frac{1}{1}}\\
&= -e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}f(x,y) &= \frac{1}{4\sqrt[4]{\left(2-(x-1)^2-(y-1)^2\right)^3}}(-2y+2)\\
\frac{\partial f}{\partial y}f(1,2) &= \frac{1}{4\sqrt[4]{\left(2-(1-1)^2-(2-1)^2\right)^3}}(-2\cdot 2+2)\\
&= \frac{-2}{4\cdot 1}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Quindi il gradiente in $(1,2)$ è: $\nabla f(1,2)=\left(-e,-\frac{1}{2}\right)$. La derivata direzionale si calcola con il prodotto vettoriale:

$$\nabla f(1,2)\cdot\overrightarrow{v}=\left(-e,-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{e}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Esame 21 giugno 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (b)

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)$***:***

$$f(x,y) = \left(x+y^2\right)\ln\left(|x|-y\right) + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

nel punto $(2,1,f(2,1))$

Il primo passo è calcolare il gradiente nel punto $(2,1)$ e considerando la $|x| = x$ perché il punto interessato è $(2,1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) &= \ln(x-y) + \left(x+y^2\right)\frac{1}{x-y}\cdot 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}\,(x-1)} \\
\frac{\partial f}{\partial x} f(2,1) &= \ln(2-1) + \left(2+1^2\right)\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2\sqrt{2-1}\,(2-1)} \\
\frac{\partial f}{\partial x} f(2,1) &= 3 - \frac{1}{2} \\
\frac{\partial f}{\partial x} f(2,1) &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) &= 2y\cdot\ln(x-y) + \left(x+y^2\right)\frac{1}{x-y}\cdot(-1) \\
\frac{\partial f}{\partial y} f(2,1) &= 2\cdot 1\cdot\ln(2-1) + \left(2+1^2\right)\frac{1}{2-1}\cdot(-1) \\
\frac{\partial f}{\partial y} f(2,1) &= -3
\end{aligned}$$

$$\nabla f(2,1) = \left(\frac{5}{2}, -3\right)$$

Il secondo passo è scrivere l'equazione del piano tangente al grafico. Per cui si utilizza la formula:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Si sostituiscono i valori ricordando che $f(x,y,f(x_0,y_0)) = f(2,1,f(2,1))$:

$$\begin{aligned}
z &= f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1) \\
z &= 1 + \frac{5}{2}x - 5 - 3y + 3 \\
z &= \frac{5}{2}x - 3y - 1
\end{aligned}$$

Esame 03 marzo 2023 - Gruppo A - 3 esercizio (b)

Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y)$:

$$f(x, y) = ye^{\sqrt{x-2y}} - \ln(xy)$$

in $P(3, 1)$ nella direzione del versore $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. Qual è la direzione di massima crescita per f?

Il primo passo è calcolare la derivata parziale nel punto P:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2y}}\right) ye^{\sqrt{x-2y}} - \frac{1}{xy} \cdot y \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2y}}\right) ye^{\sqrt{x-2y}} - \frac{1}{x} \\
\frac{\partial f}{\partial x} f(3, 1) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{3-2\cdot 1}}\right) \cdot 1e^{\sqrt{3-2\cdot 1}} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2}e - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) &= e^{\sqrt{x-2y}} + y\left(-\frac{1}{\sqrt{x-2y}}\right) e^{\sqrt{x-2y}} - \frac{1}{xy} \cdot x \\
&= e^{\sqrt{x-2y}} + ye^{\sqrt{x-2y}} \left(-\frac{1}{\sqrt{x-2y}}\right) - \frac{1}{y} \\
\frac{\partial f}{\partial y} f(3, 1) &= e^{\sqrt{3-2\cdot 1}} + 1 \cdot e^{\sqrt{3-2\cdot 1}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3-2\cdot 1}}\right) - \frac{1}{1} \\
&= e - e - 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Adesso si calcola la derivata direzionale:

$$\nabla f(P) \cdot \overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}, -1\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3e}{2\sqrt{10}}$$

Per definizione, la massima crescita della funzione f è quella data dal gradiente in P.

3.9.3 Limiti e continuità

Esame 6 settembre 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (a)

Stabilire se la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|y|}\sin(xy)}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2em] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$?
Suggerimento: prendere in considerazione la restrizione di f alla parabole di equazione $y=x^2$.

Si sfrutta il suggerimento a nostro favore. Per cui, si evita di applicare le coordinate polari. Si potrebbe procedere con la sostituzione parziale (spostarsi lungo una retta), ovverosia considerando prima $y=0$ e poi $x=0$. Ma attenzione! Che cosa dice il suggerimento? $x^2=y$. Per cui, si procede prima verificando cosa accade percorrendo lungo $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4}=0$$

Adesso si studia cosa accade percorrendo lungo $y=x^2$:

$$f\left(x,x^2\right)=\frac{\sqrt{|x^2|}\sin\left(x^3\right)}{x^4+\left(x^2\right)^2}=\frac{|x|\sin\left(x^3\right)}{2x^4}$$

Dato che la x dovrà essere sempre maggiore di zero, condizione imposta dal dominio poiché si trova al denominatore, si può togliere il valore assoluto e semplificare:

$$\frac{x\sin\left(x^3\right)}{2x^4}=\frac{\sin\left(x^3\right)}{2x^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3}$$

Adesso, applicando il limite che tende a 0^+ (non zero poiché non è ammesso!), si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(0^+\right)}{0^+}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0^+}{0^+}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

I due limiti hanno risultati diversi, per cui il limite che tende a $(0,0)$ non esiste e la funzione non è continua in $(0,0)$ (ma lo è in tutti gli altri punti, ovvero $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$).

Esame 10 luglio 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (a)

La funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+y^2-4x+4} & (x,y)\neq(2,0)\\ \\ 0 & (x,y)=(2,0)\end{cases}$$

è continua e differenziabile in $\mathbb{R}^2$?

Si prova a semplificare la l'equazione soprastante:

$$x^2-4x+4=0\rightarrow\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot4}}{2}\rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2$$

Per cui è possibile riscriverla come:

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4x+4+y^2}$$

E si può notare che:

$$\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2+y^2}$$

A questo punto, è possibile passare alle variabili polari:

$$\begin{cases}x=2+r\cos(\theta)\\ y=0+r\sin(\theta)\end{cases}\rightarrow\frac{(2+r\cos(\theta)-2)^2}{(2+r\cos(\theta)-2)^2+(r\sin(\theta))^2}$$

A questo punto, si prova ad eseguire alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned}\frac{(2+r\cos(\theta)-2)^2}{(2+r\cos(\theta)-2)^2+(r\sin(\theta))^2} &= \frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}\\ &= \frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}\\ &= \frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^2}\\ &= \cos^2(\theta)\end{aligned}$$

A questo punto risulta evidente che il limite non esiste. La motivazione è semplice, non esiste nessuna maggiorazione tale che sia indipendente da θ (teoria nel par. 3.7.4).

Da questa conclusione, si può affermare anche che la funzione non è differenziabile. Infatti, una condizione necessaria della differenziabilità è la continuità.

Esame 21 giugno 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (a)

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2} & y\neq 0\\ \\ 0 & y=0\end{cases}$$

Esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$***?***

Suggerimento: prendere in considerazione la restrizione di f ***alla parabola di equazione*** $y=x^2$

Dato il suggerimento, si sfrutta cercando di fare una sostituzione parziale. Per cui, si guarda il comportamento del limite nel caso in cui $y=x^2$:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,x^2\right) &= \frac{x}{x^2}\cdot\sqrt{x^2+x^4}\\ &= \frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2\left(1+x^2\right)}\\ &= \frac{|x|}{x}\cdot\sqrt{1+x^2}\end{aligned}$$

A questo punto, provando il limite che viene da destra (0^+) o da sinistra (0^-) e non da 0 poiché la x è al denominatore, risulta evidente che il limite non esiste:

$$\begin{aligned}x\to 0^+ \quad &\longrightarrow \quad \frac{0^+}{0^+}\cdot\sqrt{1+\left(0^+\right)^2}\\ &\qquad\quad 1\sqrt{1^+}\\ &\qquad\quad 1^+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y\to 0^+ \quad &\longrightarrow \quad \frac{|0^-|}{0^-}\cdot\sqrt{1+\left(0^-\right)^2}\\ &\qquad\quad 1^-\sqrt{1^+}\\ &\qquad\quad -1\end{aligned}$$

Esame 03 marzo 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (a)

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che f risulta continua nell'origine?

Si utilizza le coordinate polari per verificare se esiste il limite in $(0,0)$:

$$\begin{cases} x = 0 + r\cos(\theta) \\ y = 0 + r\sin(\theta) \end{cases}$$

Andando a sostituirle nella frazione:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} &\to \frac{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r\cos(\theta)\cdot r\sin(\theta)+r^2\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{r^2\overbrace{\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}^{1}}{r^2\underbrace{\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}_{1}+r^2\cos(\theta)\sin(\theta)} \\ &= \frac{r^2}{r^2+r^2\cos(\theta)\sin(\theta)} \\ &= \frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}(1+\cos(\theta)\sin(\theta))} \\ &= \frac{1}{1+\cos(\theta)\sin(\theta)} \end{aligned}$$

Risulta evidente nell'ultima espressione che è impossibile ottenere una maggiorazione uniformemente a θ poiché r non c'è più.

Si conclude che non esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che la funzione f risulta continua nell'origine.

Esame 1 marzo 2022 - Gruppo A - 4 esercizio (a)

Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} & (x,y) \neq (1,2) \\ \\ 0 & (x,y) = (1,2) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2$***.***
Se sostituiamo l'espressione $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$ ***con*** $(x-1)^2+(y-2)^2$***, la risposta cambia?***

Vedendo i termini al denominatore (al quadrato) e i punti a, b, cioè $1, 2$, si può tentare di utilizzare le coordinate polari così da avere una semplificazione, non da poco, al denominatore. Quindi, le coordinate polari sono:

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos(\theta) \\ y = 2 + r\sin(\theta) \end{cases}$$

Si sostituiscono le coordinate polari nell'espressione:

$$\frac{(x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} \to \frac{(1+r\cos(\theta)-1)(2+r\sin(\theta)-2)}{\sqrt{(1+r\cos(\theta)-1)^2+(2+r\sin(\theta)-2)^2}}$$

Si eseguono alcune manipolazioni algebriche:

$$\begin{aligned}
\frac{(1+r\cos(\theta)-1)(2+r\sin(\theta)-2)}{\sqrt{(1+r\cos(\theta)-1)^2+(2+r\sin(\theta)-2)^2}} &= \frac{(r\cos(\theta))\cdot(r\sin(\theta))}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}} \\
&= \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}} \\
&= \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2\cdot\cancel{(1)}}} \\
&= \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r} \\
&= r\cos(\theta)\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Adesso si può applicare il teorema del calcolo dei limiti con coordinate polari, ovverosia se è vero che:

$$|F(r,\theta)-L| \leq g(r) \qquad \text{con} \qquad \lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$$

Allora si può concludere che il limite della funzione è uguale a L:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Applicando la teoria alla pratica, si ha che:

$$|F(r,\theta) - 0| \leq g(r) = |r\cos(\theta)\sin(\theta)| \leq r$$

La maggiorazione fatta in questo caso è sempre vera poiché il valore r, a sinistra, è influenzato dalle due funzioni trigonometriche le quali, si ricorda, non potranno mai essere maggiori di 1. Per cui r sarà sempre uguale a sé stessa o minore. Inoltre, la funzione $g(r)$, in questo caso r, ha come risultato del limite per $r \to 0^+$ un valore infinitesimo. Infine, la funzione $g(r)$ non dipende da θ, per cui rispetta il teorema (si dice che è uniformemente rispetto a θ).

Con queste osservazioni, si può affermare con certezza che la funzione è continua in $\mathbb{R}^2$ e che il limite in $(1,2)$ ha risultato 0:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 0$$

Se sostituiamo l'espressione $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ con $(x-1)^2 + (y-2)^2$, la risposta cambia?

La risposta è assolutamente sì! Il motivo è semplice. Riprendendo le manipolazioni algebriche effettuate nella pagina precedente, è facile notare che nel punto in cui al denominatore è presente solo r^2 sotto radice (si riportano qua i calcoli essenziali per comodità):

$$\frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{r^2}} \xrightarrow{\text{caso particolare}} \frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2}$$

La mancanza della radice avrebbe portato a semplificare al numeratore e al denominatore r, causando così l'alterazione della funzione $F(r,\theta)$ nel teorema, la quale sarebbe stata:

$$|\cos(\theta)\sin(\theta)| \leq g(r)$$

E avrebbe impedito di trovare una maggiorazione (funzione g) uniformemente rispetto a θ. Ne consegue che la funzione non sarebbe stata continua in $\mathbb{R}^2$.

3.9.4 Parametrizzazione

Esame 6 settembre 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (b)

Data la curva parametrizzata da:

$$\gamma(t) = \left(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t)\right) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

scrivere le equazioni parametriche della retta tangente e della retta normale a γ nel suo punto T di coordinate $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Per trovare la retta tangente ad una curva è necessario applicare la formula nota:

$$r(t) = \gamma(t) + s\gamma'(t)$$

Per cui, prima è necessario trovare la t partendo dalla parametrizzazione nota, successivamente si ottiene la derivata e si applica il punto t, infine si esegue la somma. Ovviamente il tutto deve passare dal punto T:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) \quad &= \quad \begin{cases} \cos^2(t) = \frac{1}{4} \\ \cos(t)\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad = \begin{cases} \sqrt{\cos^2(t)} = \sqrt{\frac{1}{4}} \\ \cos(t)\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad = \begin{cases} \cos(t) = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \\
&= \quad \begin{cases} \cos(t) = \frac{1}{2} \\ \sin(t) = \frac{2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad = \begin{cases} \cos(t) = \frac{1}{2} \\ \sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad = \begin{cases} t = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \\ t = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

L'angolo in radianti si traduce in gradi: $2\pi = 360° \Rightarrow \frac{360\pi}{3} \div 2\pi = 60°$. I gradi si trovano nel primo quadrante, quello positivo ed è ammesso poiché il punto T si trova nel primo quadrante (x e y positive). Per cui:

$$\gamma(t) = T \Rightarrow \gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Per calcolare la retta tangente, si procede con il calcolo della derivata:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} -\sin(t)\cos(t) - \cos(t)\sin(t) \\ -\sin(t)\sin(t) + \cos(t)\cos(t) \end{cases} = \begin{cases} -2\sin(t)\cos(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{cases}$$

E si sostituisce la $t = \frac{\pi}{3}$:

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{cases} -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} = \begin{cases} -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

A questo punto, si può applicare tranquillamente la formula per calcolare la retta tangente:

$$r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + s\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}s \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2}s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

Per trovare una retta normale è necessario trovare un vettore ortogonale a T. Per cui, serve un vettore, un punto, tale per cui il prodotto vettoriale con T sia uguale a zero. Una regola generale per ottenere l'ortogonalità partendo da un vettore di due valori, è quello di scambiare i valori e cambiare di segno alternativamente:

$$T = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(-\left(-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Difatti, il prodotto vettoriale tra i due punti trovati è zero:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

Per cui, la parametrizzazione della retta normale è:

$$r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + s\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}s \\ \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

N.B. che la variabile s chiaramente non è la stessa.

Esame 10 luglio 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (*b*)

Calcolare la lunghezza dell'arco di curva piana parametrizzata da

$$\gamma(\theta) = \left(2\theta - 1, \theta^{\frac{3}{2}}\right) \qquad \theta \in [1, 20]$$

La lunghezza dell'arco di una curva piana si calcola con la norma della derivata prima della parametrizzazione, inserita all'interno dell'integrale definito da 1 a 20. Quindi, prima di tutto si calcola la derivata:

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} 2\theta - 1 \\ \theta^{\frac{3}{2}} \end{cases} \qquad \gamma'(\theta) = \begin{cases} 2 \\ \frac{3}{2} \cdot \theta^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

L'integrale con la norma è la seguente:

$$\begin{aligned}
\int_1^{20} ||\gamma'(\theta)||\ \mathrm{d}\theta &= \int_1^{20} \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{3}{2} \cdot \theta^{\frac{1}{2}}\right)^2}\ \mathrm{d}\theta \\
&= \int_1^{20} \sqrt{4 + \frac{9}{4} \cdot \theta\ \mathrm{d}\theta} \\
&= \int_1^{20} \sqrt{\frac{1}{4}(16 + 9\theta)}\ \mathrm{d}\theta \\
&= \int_1^{20} \frac{1}{2}\sqrt{16 + 9\theta}\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_1^{20} \sqrt{16 + 9\theta}\ \mathrm{d}\theta \\
&\downarrow \text{ metodo di sostituzione: } t = 16 + 9\theta \quad t' = 9 \quad \mathrm{d}\theta = \frac{1}{t'}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_1^{20} \sqrt{t} \cdot \frac{1}{9}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \int_1^{20} \sqrt{t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{18} \int_1^{20} \sqrt{t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{18} \int_1^{20} t^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{20} \\
&= \left[\frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3}\left(\sqrt[2]{(16 + 9 \cdot 20)^3}\right) - \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3}\left(\sqrt[2]{(16 + 9 \cdot 1)^3}\right)\right]_1^{20} \\
&= \frac{5488}{54} - \frac{250}{54} \\
&= 97
\end{aligned}$$

Esame 21 giugno 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (b)

Scrivere le equazioni parametriche della retta r tangente all'arco di curva:

$$\gamma(t) = \left(t^3, t^2\right) \qquad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

nel suo punto $T\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}\right)$.
Qual è l'equazione cartesiana di r?

Per ottenere la retta r tangente all'arco di curva, si la variabile t nel punto T:

$$\gamma(t) = \begin{cases} t^3 = \dfrac{1}{27} \\ \\ t^2 = \dfrac{1}{9} \end{cases} = \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ \\ t = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Adesso, si calcolano le derivate prime e successivamente si imposta il valore t per ottenere una parametrizzazione generale:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 3t^2 \\ 2t \end{cases} \quad \rightarrow \gamma'\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \\ \\ 2 \cdot \dfrac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \\ \\ \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Si scrive adesso l'equazione della retta tangente utilizzando la classica formula:

$$\begin{aligned} r(t) &= \gamma(t) + s\gamma'(t) \\ r\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}\right) + s\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{3}s \\ \\ \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{3}s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Con l'espressione equazione cartesiana l'intento, forse, era mettere alla prova lo studente con un po' di teoria. Ricordando la parametrizzazione notevole di una retta (segmento, paragrafo 3.8.1), il punto T utilizzato nella parametrizzazione viene sottratto ad un altro punto (la fine del segmento). Il risultato è il punto t ottenuto nell'esercizio, ossia $\dfrac{1}{3}$. Quindi, sommando l'inizio della retta $\left(\dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{9}\right)$ con il punto in cui vi è la tangente $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, si ottiene il punto in cui la retta termina:

$$\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{9}\right)$$

A questo punto, avendo il punto di inizio della retta e il punto di fine, è possibile ricavare l'equazione con la classica formula delle rette:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Sostituendo i punti e facendo qualche semplificazione algebrica, si ottiene l'equazione cartesiana della retta:

$$
\begin{aligned}
\text{Punto di inizio} &= \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}\right) \\
\text{Punto di fine} &= \left(\frac{10}{27}, \frac{7}{9}\right) \\
\frac{x - \frac{1}{27}}{\frac{10}{27} - \frac{1}{27}} &= \frac{y - \frac{1}{9}}{\frac{7}{9} - \frac{1}{9}} \\
\left(x - \frac{1}{27}\right) \cdot 3 &= \left(y - \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{3}{2} \\
3x - \frac{1}{9} &= \frac{3}{2}y - \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} + 3x - \frac{1}{9} &= \frac{3}{2}y \\
\frac{1}{18} + 3x &= \frac{3}{2}y \\
\frac{1}{27} + 2x &= y
\end{aligned}
$$

Esame 03 marzo 2023 - Gruppo A - 4 esercizio (b)

Si consideri l'arco di curva parametrizzato da:

$$\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare la lunghezza dell'arco e scrivere le equazioni parametriche della retta tangente alla curva nel punto $P\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right)$.
NOTA: è utile ricordare la seguente identità goniometrica:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}, \qquad \forall x \in [0, 2\pi]$$

Si parte dal calcolo della lunghezza dell'arco, per cui innanzitutto si calcola la derivata prima:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{cases}$$

Adesso è possibile calcolare l'integrale negli estremi $0, 2\pi$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} ||\gamma'(t)|| \, \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos(t) + 1} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(t))} \, \mathrm{d}t \\
&\downarrow \text{ si sfrutta il prezioso suggerimento in questo modo:} \\
& \; 2(1 - \cos(t)) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(t)}{2}\right) \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(t)}{2}\right)} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\cos(t)}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \cdot \left[\left(-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= 2 \cdot (-2(\cos(\pi)) - (-2)\cos(0)) \\
&= 2(4) = 8
\end{aligned}$$

Adesso si scrivono le equazioni parametriche della retta tangente. Quindi si calcola il sistema:

$$\begin{cases} t - \sin(t) = \dfrac{\pi}{2} - 1 \\ 1 - \cos(t) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t - \sin(t) = \dfrac{\pi}{2} - 1 \\ \cos(t) = 0 \end{cases} \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Quindi $\gamma\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = P$. Adesso si calcola la derivata in $t = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

L'equazione della retta tangente si calcola con:

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) + s\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right) + s(1,1) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - 1 + s \\ 1 + s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

4 Ottimizzazione delle funzioni di più variabili

4.1 Ricerca dei punti stazionari

Sia A un insieme aperto in $\mathbb{R}^n$ e f una funzione definita su A:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Definizione 1

- $\overline{x} \in A$ è un punto di **massimo globale** per f se $f(\overline{x}) \geq f(x)$ per ogni $x \in A$;
- $\overline{x} \in A$ è un punto di **minimo globale** per f se $f(x) \geq f(\overline{x})$ per ogni $x \in A$;
- $\overline{x} \in A$ è un punto di **massimo locale** per f se esiste $r > 0$ tale che $f(\overline{x}) \geq f(x)$ per ogni $x \in B_r(\overline{x}) \cap A$. Con $B_r(\overline{x})$ si intende una palla aperta centrata in $\overline{x}$ di raggio r;
- $\overline{x} \in A$ è un punto di **minimo locale** per f se esiste $r > 0$ tale che $f(x) \geq f(\overline{x})$ per ogni $x \in B_r(\overline{x}) \cap A$. Con $B_r(\overline{x})$ si intende una palla aperta centrata in $\overline{x}$ di raggio r.

Nonostante la teoria possa sembrare complessa, la classificazione dei punti stazionari si divide in alcuni passaggi che consentono di trovare i punti di massimo e minimo senza commettere errori.

4.1.1 Approssimazioni quadratiche e polinomio di Taylor (ordine 2)

Le **approssimazioni quadratiche** devono essere introdotte poiché riguardano la **costruzione di polinomi di secondo grado che approssimano una funzione in un intorno di un punto**. Questi polinomi sono *utili* per stimare il comportamento di una funzione in un punto vicino a quello di interesse. Questo argomento sarà importante tra poco, perché prima è necessario introdurre qualche formula riguardo Taylor (cose banali, niente di fantascientifico), e alcune deduzioni.

Teorema 12. *Sia f una funzione di classe $\mathcal{C}$ in un intorno di $(\overline{x}, \overline{y})$. Allora f ammette nel punto $(\overline{x}, \overline{y})$ il seguente sviluppo di Taylor di ordine 2 (con resto di Peano):*

$$\begin{aligned} f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) &= f(\overline{x}, \overline{y}) + \nabla f(\overline{x}, \overline{y}) \cdot (h,k) + \\ &\quad \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx}(\overline{x}, \overline{y}) + 2hk f_{xy}(\overline{x}, \overline{y}) + k^2 f_{yy}(\overline{x}, \overline{y})\right) + \\ &\quad + o\left(h^2 + k^2\right) \end{aligned} \tag{40}$$

Per $(h,k) \to (0,0)$.

Dall'equazione 40, si estrapola il polinomio di secondo grado:

$$h^2 f_{xx}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) + 2hk f_{xy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) + k^2 f_{yy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$$

Il quale rappresenta una **forma quadratica** delle variabili h, k:

$$Q\left(h, k\right) = h^2 f_{xx}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) + 2hk f_{xy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) + k^2 f_{yy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \tag{41}$$

Questa equazione è importante poiché sarà utilizzata nella classificazione dei punti critici. Questa equazione si può riscrivere come moltiplicazione tra matrici:

$$Q\left(h, k\right) = \left(h, k\right) \begin{pmatrix} f_{xx}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) & f_{xy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \\ f_{xy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) & f_{yy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \tag{42}$$

La matrice 2×2 costruita con le derivate parziali seconde di f si chiama **matrice hessiana** di f nel puto $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ ed era già strata introdotta in passato (eq. 34).

Inoltre, sia $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ un punto stazionario per f. Allora:

$$f\left(\overline{x} + h, \overline{y} + k\right) \approx f\left(\overline{x}, \overline{y}\right) + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) + 2hk f_{xy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) + k^2 f_{yy}\left(\overline{x}, \overline{y}\right)\right)$$

Il segno della funzione $f\left(\overline{x} + h, \overline{y} + k\right) - f\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$, dipende dal segno di $Q\left(h, k\right)$ se si rimane abbastanza vicini al punto $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$. Il segno della funzione aiuta a capire che tipo di punto è:

Definizione 2

- $Q\left(h, k\right)$ è definita **positiva**, se $Q\left(h, k\right) > 0$ per ogni $\left(h, k\right) \neq \left(0, 0\right)$. Questo comporta che il punto $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ sia un **punto di minimo**.
- $Q\left(h, k\right)$ è definita **negativa**, se $Q\left(h, k\right) < 0$ per ogni $\left(h, k\right) \neq \left(0, 0\right)$. Questo comporta che il punto $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ sia un **punto di massimo**.
- $Q\left(h, k\right)$ è definita **indefinita**, se $Q\left(h, k\right)$ è sia maggiore di zero che minore di zero. Quindi, se esistono due coppie $\left(h_1, k_1\right)$ e $\left(h_2, k_2\right)$ tali che $Q\left(h_1, k_1\right) > 0$ e $Q\left(h_2, k_2\right) < 0$, allora $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ è un **punto di sella**.

Per capire quando Q è positiva, negativa o indefinita, si legga il capitolo 4.1.2.

4.1.2 Forme quadratiche

Esistono due forme quadratiche che consentono di **classificare una forma quadratica**:

1°forma

$$Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = (h,k)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \tag{43}$$

Supponendo che $A \neq 0$, si riscrive $Q(h,k)$ nella seguente forma:

$$\frac{1}{A}(Ah + Bk)^2 + \frac{k^2}{A}\left(AC - B^2\right)$$

Si deduce quindi:

Definizione 3

- $A > 0$ e $AC - B^2 > 0$ allora $Q(h,k)$ è definita **positiva**.
- $A < 0$ e $AC - B^2 > 0$ allora $Q(h,k)$ è definita **negativa**.
- $AC - B^2 < 0$ allora $Q(h,k)$ è **indefinita**.
- $AC - B^2 = 0$ allora $Q(h,k)$ è **semidefinita**.

2°forma

Una matrice 2×2 è simmetrica e pertanto diagonalizzabile. Per cui è possibile scegliere un sistema del tipo:

$$Q(h',k') = (h',k')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} = \lambda_1 (h')^2 + \lambda_2 (k')^2 \tag{44}$$

Definizione 4

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ allora $Q(h,k)$ è definita **positiva**.
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ allora $Q(h,k)$ è definita **negativa**.
- Se λ_1 e λ_2 hanno segni discorde allora $Q(h,k)$ è **indefinita**.
- Se λ_1 o λ_2 è nullo, allora $Q(h,k)$ è **semidefinita**.

Esempio

Data la forma quadratica:

$$Q(h,k) = 12h^2 - 8hk + 12k^2$$

a) Qual è la matrice associata a $Q(h,k)$?

b) $Q(h,k)$ è definita positiva? Motivare.

c) $(1,1)$ è un punto stazionario per:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Tale che:

$$\Delta f = f(1+h, 1+k) - f(1,1) = \frac{1}{2}Q(h,k) + o\left(h^2 + k^2\right)$$

Cosa è possibile dire riguardo $(1,1)$?

La matrice associata $Q(h,k)$ è possibile ricavarla grazie alla prima forma quadratica (eq. 43):

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = (h,k)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 12h^2 - 8hk + 12k^2 \\ &= (12)\,h^2 + 2\,(-4)\,hk + (12)\,k^2 \\ &= (h,k)\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Grazie alla precedente forma quadratica, è possibile stabilire anche il segno di Q. La lettera A, cioè 12 è positiva, per cui si studia il risultato di:

$$AC - B^2 > 0 \Longrightarrow 12 \cdot 12 - (-4)^2 > 0 \longrightarrow 144 - 16 > 0 \longrightarrow 128 > 0$$

Quindi la risposta è: sì, $Q(h,k)$ è definita positiva.

Il segno della funzione f è positivo poiché, come scritto alla fine del paragrafo 4.1.1, il segno di f è dato dal segno di $Q(h,k)$ se si rimane abbastanza vicini al punto $(\overline{x}, \overline{y})$. Per cui, è possibile affermare che $(1,1)$ è un punto di minimo dato che $\Delta f > 0$.

4.1.3 Test delle derivate seconde

Questo metodo è un test, per cui non può essere l'unico metodo per trovare i punti di massimo e minimo, poiché potrebbe accadere che alcuni punti non lo siano. Il **teorema delle derivate seconde** sfrutta la matrice Hessiana (eq. 34) per enunciare delle euristiche (o regole) che consentono di trovare i punti di max/min:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Teorema **13 (delle derivate seconde).** *Sia f una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ su un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ un punto stazionario per f. Valgono le seguenti implicazioni:*

- *Se la derivata seconda rispetto x è maggiore di zero e il determinante della matrice Hessiana è maggiore di zero, allora il punto $(\overline{x}, \overline{y})$ è un **punto di minimo**:*

$$f_{xx}(\overline{x}, \overline{y}) > 0, \quad \det(H_f(\overline{x}, \overline{y})) > 0 \implies (\overline{x}, \overline{y}) \text{ è punto di } \textbf{\textit{minimo}}$$

- *Se la derivata seconda rispetto x è minore di zero e il determinante della matrice Hessiana è maggiore di zero, allora il punto $(\overline{x}, \overline{y})$ è un **punto di massimo**:*

$$f_{xx}(\overline{x}, \overline{y}) < 0, \quad \det(H_f(\overline{x}, \overline{y})) > 0 \implies (\overline{x}, \overline{y}) \text{ è punto di } \textbf{\textit{massimo}}$$

- *Se il determinante della matrice Hessiana è minore di zero, allora il punto $(\overline{x}, \overline{y})$ è un **punto di sella**:*

$$\det(H_f(\overline{x}, \overline{y})) < 0 \implies (\overline{x}, \overline{y}) \text{ è punto di } \textbf{\textit{sella}}$$

- *Se il determinante è uguale a zero, allora **non è possibile stabilire la natura** del punto $(\overline{x}, \overline{y})$ senza ulteriori indagini:*

$$\det(H_f(\overline{x}, \overline{y})) = 0 \implies (\overline{x}, \overline{y}) \ \textbf{\textit{indeterminabile}}$$

Esempio guidato

Trovare i punti stazionari della funzione:

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + x^2 y$$

e specificarne la natura.

Il **primo passo** è calcolare le derivate parziali prime e seconde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x + 2xy & \frac{\partial f}{\partial xy}(x,y) &= 2x & \frac{\partial f}{\partial xx}(x,y) &= 2 + 2y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4y + x^2 & \frac{\partial f}{\partial yx}(x,y) &= 2x & \frac{\partial f}{\partial yy}(x,y) &= 4 \end{aligned}$$

Grazie alle derivate prime, si possono trovare i punti stazionari, ovvero quei punti che annullano sia la derivata prima rispetto x, sia rispetto y. Per cui, il **secondo passo** è porre le derivate parziali come sistema e trovare soluzioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 2xy = 0 \\ 4y + x^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x(1+y) = 0 \\ 4y + x^2 = 0 \end{cases} \quad x = 0 \vee y = -1$$

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4y + 0^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$y = -1 \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -4 + x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari sono:

- $A(0,0)$
- $B(2,-1)$
- $C(-2,-1)$

Il **terzo e ultimo passo** è la classificazione dei punti stazionari. Per farlo si utilizza la matrice Hessiana (eq. 34):

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$$

In particolare, si è interessati ad analizzare soltanto il determinante, per cui:

$$\det(H_f(x,y)) = [(2+2y)\cdot(4)] - [(2x)(2x)] = 8 + 8y - 4x^2$$

Dopodiché si sostituiscono all'interno della matrice i punti stazionari trovati:

$$\begin{aligned} H_f(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} &\rightarrow \det(H_f(0,0)) &= 8 \\ H_f(2,-1) &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} &\rightarrow \det(H_f(2,-1)) &= 8 - 8 - 16 = -16 \\ H_f(-2,-1) &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} &\rightarrow \det(H_f(-2,-1)) &= 8 - 8 - 16 = -16 \end{aligned}$$

La classificazione, seguendo il teorema 13 delle derivate seconde:

- $A(0,0)$ ha la derivata parziale seconda rispetto x maggiore di zero (2) e il determinante maggiore di zero (8). Per cui è un punto di minimo;
- $B(2,-1)$ ha la derivata parziale seconda rispetto x uguale a zero, ma soprattutto il determinante minore di zero (-16). Per cui è un punto di sella;
- $C(0,0)$ ha la derivata parziale seconda rispetto x uguale a zero, ma soprattutto il determinante minore di zero (-16). Per cui è anch'esso un punto di sella.

In generale, è conveniente prima guardare il determinante e in caso sia maggiore di zero valutare anche la derivata seconda rispetto a x.

4.2 Ricerca dei massimi e minimi assoluti

La ricerca dei punti estremi di una funzione:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si concentra sui:

- Punti critici ($(x, y) \in \mathring{A}$ tale che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$), ovvero tutti quei punti interni (appartenenti quindi all'insieme dei punti interni, par. 3.3.3) tale che il gradiente in quei punti sia zero.
- Punti di A che sono punti di frontiera.
- Punti di A in cui f non è derivabile.

Nelle applicazioni spesso si chiede di trovare i massimi e minimi di f su sottoinsiemi del dominio descritti da equazioni o disequazioni:

$$\begin{array}{rl} \max & f(x, y) \\ s.t. & g(x, y) = 0 \end{array}$$

Dove $s.t.$ indica *subject to*, cioè soggetta al vincolo g.

In questi casi, esistono due approcci:

- Ridursi al problema di ricerca degli estremi in una variabile, ovvero **parametrizzazione del vincolo** (par. 4.2.1);
- **Metodo dei moltiplicatori di Lagrange** (par. 4.2.2).

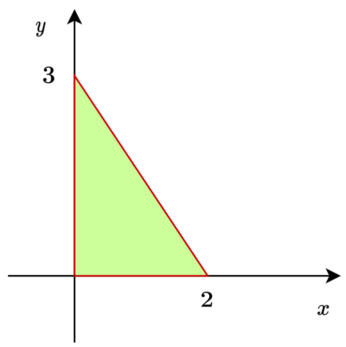
Indipendentemente dal metodo scelto, è importante utilizzare il Teorema di Weierstrass (teorema num. 2, pagina 104) per mostrare al lettore (professore) che i punti di massimo/minimo assoluto esistano. In altre parole, basta **verificare che la funzione f sia chiusa e limitata** (e continua) e per farlo si può riprendere la teoria (par. 3.3.4).

4.2.1 Parametrizzazione del vincolo

Determinare il massimo e il minimo assoluto di:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$$

Sulla regione (verde) in figura:



Il dominio della regione, ovvero l'applicazione del metodo parametrico, è il seguente:

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3 \right\}$$

Il primo passo è verificare il Teorema di Weierstrass, quindi si verifica se è un insieme limitato e chiuso:

$$\begin{aligned}
\mathring{T} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 2 \ \wedge \ 0 < y < -\frac{3}{2}x + 3 \right\} \\
\partial T &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x = 0 \vee x = 2) \ \wedge \ \left(y = 0 \vee y = -\frac{3}{2}x + 3 \right) \right\} \\
\overline{T} &= A \cup \partial T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3 \right\}
\end{aligned}$$

Quindi l'insieme è limitato e chiuso (perché $T = \overline{T}$).

Si cercano eventuali massimi/minimi interni al triangolo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema è $(0, 0)$, il quale non è all'interno di T ma sulla frontiera.

La ricerca continua sulla frontiera di T andando a cercare gli estremi di f, per cui si considerano i tre lati del triangolo:

- La base da $x = 0$ a $x = 2$:

$$f_1(x) = f(x, 0) = x^2 + 0^2 - x \cdot 0 = x^2 \qquad x \in [0, 2]$$

In cui il minimo valore, cioè andando a sostituire 0, è:

$$f_1(0) = 0^2 = 0$$

Mentre il massimo, cioè andando a sostituire 2, è:

$$f_1(2) = 2^2 = 4$$

- Il lato di sinistra, cioè quello che percorre lungo y da $y = 0$ a $y = 3$:

$$f_2(y) = f(0, y) = 0^2 + y^2 - 0 \cdot y = y^2 \qquad y \in [0, 3]$$

Studiando gli estremi si ha:

$$\begin{aligned} \min f_2(y) &= f_2(0) = 0 \\ \max f_2(y) &= f_2(3) = 9 \end{aligned}$$

- Il lato obliquo, cioè quello da $(2, 0)$ a $(0, 3)$:

$$f_3\left(x, -\frac{3}{2}x + 3\right) = x^2 + \left(-\frac{3}{2}x + 3\right)^2 - x \cdot \left(-\frac{3}{2}x + 3\right) = \frac{19}{4}x^2 - 12x + 9$$

Studiando gli estremi si ha:

$$\begin{aligned} \min f_3(x) &= f_3(0) = \frac{19}{4} \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 \\ \max f_3(x) &= f_3(2) = \frac{19}{4} \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = \frac{27}{19} \approx 1,4210 \end{aligned}$$

Da queste analisi, è possibile dedurre che il minimo di f su T è 0 (nel punto $(0, 0)$), mentre il massimo di f su T è 9 (nel punto $0, 3$), come dimostrato in $\max f_2(y)$.

4.2.2 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Teorema 14. *Siano f e g due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\overline{x}$ è un punto di estremo per f su $G = \{x \in A \,:\, g(x) = 0\}$ e $\nabla g(\overline{x}) = \overrightarrow{0}$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\nabla f(\overline{x}) = \lambda \nabla g(\overline{x})$$

La lettera λ rappresenta il **moltiplicatore di Lagrange**.

Il teorema afferma che per trovare dei punti **regolari** sul vincolo imposto, nei quali f assuma un valore massimo o minimo, bisogna cercare tra quelli che verificano le equazioni:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\
g(x, y) &= 0
\end{aligned}$$

Ma dato che le precedenti equazioni sono vere se e solo se:

$$\nabla (f(x, y) - \lambda g(x, y)) = (0, 0)$$

Allora, si può definire la **funzione Lagrangiana** come:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) \triangleq f(x, y) - \lambda g(x, y) \tag{45}$$

Grazie a questa formula, il problema di ottimizzazione si trasforma nella ricerca dei punti critici di $\mathcal{L}$. Qua di seguito si presenta un metodo per risolvere tali problemi, ma questa potrebbe essere una fonte utile.

Esempio 1

Data la funzione:

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

Definita sul vincolo:

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Si parte con l'analisi del vincolo. Come prima passo si verifica che sia possibile ottenere punti di massimo/minimo assoluto:

$$\begin{aligned}
\mathring{G} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{1}{2}x^2 + y^2 < 1\right\} \\
\partial G &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1\right\} \\
\overline{G} &= G \cup \partial G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1\right\}
\end{aligned}$$

Il vincolo è un insieme chiuso e limitato, per cui il teorema di Weierstrass ci assicura, dato che la funzione è anche continua, l'esistenza di massimi e minimi assoluti.

Il **secondo passo** è l'applicazione del Teorma di Lagrange utilizzando la funzione Lagrangiana (eq. 45):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x,y,\lambda) &= f(x,y) - \lambda g(x,y) \\
\mathcal{L}(x,y,\lambda) &= x^2 + xy + 2y^2 - \lambda\left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

Il **terzo passo** è calcolare le derivate parziali rispetto x, y, λ e trovare le soluzioni del sistema posto uguale a zero:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
2x + y - \lambda x = 0 \\
x + 4y - 2y\lambda = 0 \\
-\left(\dfrac{1}{2}x^2 + y^2 - 1\right) = 0
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
y - x(\lambda - 2) = 0 \\
x + 4y - 2y\lambda = 0 \\
\dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
y = x(\lambda - 2) \\
x = -2y(\lambda - 2) \\
\dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
y = x(\lambda - 2) \\
x = -2x(\lambda - 2)(\lambda - 2) \\
\dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
y = x(\lambda - 2) \\
\dfrac{1}{2} = -(\lambda - 2)(\lambda - 2) \\
\dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
y = x(\lambda - 2) \\
-\dfrac{1}{2} = (\lambda - 2)^2 \\
\dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
y = x(\lambda - 2) \\
\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = (\lambda - 2) \\
\dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
y = x(\lambda - 2) \\
2 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \lambda \\
\dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1
\end{cases}$$

Dopo aver trovato le soluzioni di λ, si prosegue cercando le soluzioni di x e successivamente di y:

$$\begin{cases} y = x(\lambda - 2) \\ \lambda = 2 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x\left(2 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2\right) \\ \lambda = 2 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x \\ \lambda = 2 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2}x^2 + \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x \\ \lambda = 2 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x & \rightarrow y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = 2 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 = 1 & \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari sono:

- $A = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $B = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $C = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $D = \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Il **terzo** e ultimo passo è confrontare i punti trovare e stabilire il massimo e il minimo. Quindi, basta sostituire i punti all'interno della funzione f, ottenere il risultato e verificare quale sia il valore più alto e più basso:

- $f(A) = f\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $f(D) = f\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $f(B) = f\left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $f(C) = f\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Quindi il valore massimo assoluto è $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, mentre il minimo assoluto è $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esempio 2

Data la funzione:

$$f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

Definita sul vincolo:

$$G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1\right\}$$

Si analizza il vincolo:

$$\begin{aligned}
\mathring{G} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\neq 1\right\}\\
\partial G &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1\right\}\\
\overline{G} &= G\cup\partial G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1\right\}
\end{aligned}$$

L'insieme è chiuso, ma non limitato poiché non esiste una palla di raggio maggiore zero che lo contenga. Quindi il Teorema di Weierstrass non assicura la presenza di max/min assoluti. Si procede comunque l'analisi con Lagrange.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x,y,\lambda) &= f(x,y)-\lambda G(x,y)\\
\mathcal{L}(x,y,\lambda) &= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-\lambda\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-1\right)}_{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-1=0}
\end{aligned}$$

Si costruisce il sistema con le derivate parziali poste a zero:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda)=-\dfrac{1}{x^2}-\left(\lambda\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)\right)=0\\
\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda)=-\dfrac{1}{y^2}-\left(\lambda\left(-\dfrac{2}{y^3}\right)\right)=0\\
\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-1=0
\end{cases}
\to
\begin{cases}
-\dfrac{1}{x^2}+\lambda\dfrac{2}{x^3}=0\\
-\dfrac{1}{y^2}+\lambda\dfrac{2}{y^3}=0\\
\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-1=0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{-x+2\lambda}{x^3}=0\\
\dfrac{-y+2\lambda}{y^3}=0\\
\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-1=0
\end{cases}
\to
\begin{cases}
-x+2\lambda=0\\
-y+2\lambda=0\\
\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-1=0
\end{cases}
\to
\begin{cases}
x=2\lambda\\
y=2\lambda\\
\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-1=0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x=2\lambda\\
y=2\lambda\\
\dfrac{1}{4\lambda^2}+\dfrac{1}{4\lambda^2}-1=0
\end{cases}
\to
\begin{cases}
x=2\lambda\\
y=2\lambda\\
\dfrac{1}{2\lambda^2}=1
\end{cases}
\to
\begin{cases}
x=2\lambda & \to x=2\cdot\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
y=2\lambda & \to y=x\\
\dfrac{1}{2\lambda^2}=1 & \to \lambda=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}
\end{cases}$$

I punti stazionari sono:

- $A = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$
- $B = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

E applicando tali punti nella funzione f si trovano i valori:

$$\begin{aligned} f(A) &= \sqrt{2} \approx 1.4142 \\ f(B) &= -\sqrt{2} \approx -1.4142 \end{aligned}$$

Quindi il punto A è un punto di massimo e il punto B è un punto di minimo.

Esempio 3 - Lagrange può non restituire sempre quello che si cerca

Data la funzione:

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

Definita sul vincolo:

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5\right\}$$

Il primo passo è sempre capire se il vincolo è chiuso e limitato:

$$\begin{aligned}
\mathring{G} &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \neq 5\right\} \\
\partial G &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5\right\} \\
\overline{G} &= G \cup \partial G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5\right\}
\end{aligned}$$

L'insieme è chiuso e limitato dato che la somma di due radici quadrate non può essere negativa (siamo nei numeri reali!) e non può superare 5. Per cui, il teorema di Weierstrass assicura la presenza di massimi e minimi assoluti. Si procede con Lagrange:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x, y, \lambda) &= f(x, y) - \lambda G(x, y) \\
\mathcal{L}(x, y, \lambda) &= (2x + 3y) - \lambda\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 5\right)
\end{aligned}$$

Il sistema di derivate parziali poste a zero:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2 - \lambda \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 3 - \lambda \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 5 = 0
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
\lambda \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \\
\lambda \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = 3 \\
\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
\dfrac{2}{\lambda} \cdot \lambda \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \cdot \dfrac{2}{\lambda} \\
\dfrac{2}{\lambda} \cdot \lambda \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = 3 \cdot \dfrac{2}{\lambda} \\
\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{4}{\lambda} \\
\dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{6}{\lambda} \\
\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} = 4 \\
\dfrac{\lambda}{\sqrt{y}} = 6 \\
\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
\lambda = 4\sqrt{x} \\
\lambda = 6\sqrt{y} \\
\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
\sqrt{x} = \dfrac{\lambda}{4} \\
\sqrt{y} = \dfrac{\lambda}{6} \\
\dfrac{3\lambda + 2\lambda}{12} = 5
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x = \left(\dfrac{12}{4}\right)^2 = 9 \\
y = \left(\dfrac{12}{6}\right)^2 = 4 \\
\lambda = \dfrac{60}{5} = 12
\end{cases}$$

Il punto trovato e sostituito nella funzione restituisce $f(9, 4) = 30$ che è un minimo assoluto. Il massimo assoluto sarebbe 75 con il punto $(0, 25)$. Tuttavia, Lagrange non ha intercettato tale punto poiché non è regolare a causa della condizione fornita! Infatti, si vede immediatamente che se nel sistema si sostituisce $x = 0, y = 0$, il risultato o è impossibile o non sensato.

5 Integrali multipli

5.1 Integrali doppi

5.1.1 Definizione su regioni rettangolari

Si vuole definire un integrale del tipo:

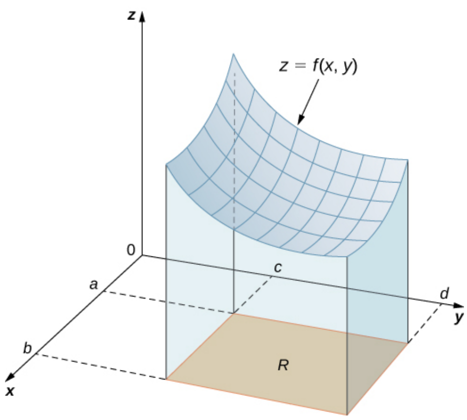
$$\iint\limits_{R} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

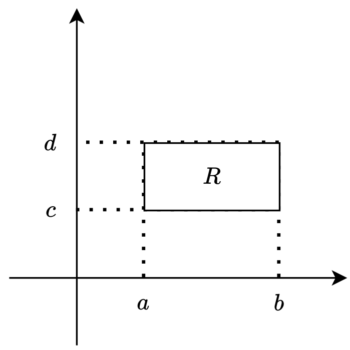
Di modo che il suo valore sia il volume del solido:

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ (x,y) \in \mathbb{R},\ 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}$$

La situazione più semplice che è possibile incontrare è una regione rettangolare. Si supponga inizialmente la regione:

$$R = [a,b] \times [c,d]$$





Con la funzione f limitata sulla regione R e non negativa. Allora l'integrale doppio non è altro che:

Teorema 15. *Se $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è **integrabile**. Inoltre:*

$$\begin{aligned} \iint\limits_{R} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_d^c \left(\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{46}$$

1. Sia:
$$I = \iint\limits_R \left(x^2 + y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$
Dove:
$$R = [0,1] \times [0,1]$$
Calcolare I.
2. Sia:
$$I = \iint\limits_R x \cos(xy) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$
Dove:
$$R = [0,1] \times [0,\pi]$$
Calcolare I.
3. Sia:
$$I = \iint\limits_R \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$
Dove:
$$R = [a,b] \times [c,d]$$
Calcolare I.

Esercizio 1

$$I = \iint\limits_R \left(x^2 + y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad R = [0,1] \times [0,1]$$

Gli integrali doppi, nel caso semplice di un rettangolo, devono essere risolti osservando attentamente la regione definita. Come **primo passo**, è necessario identificare gli estremi di integrazione. Ricordando che la regione è scritta nella forma del tipo $[a,b]\times[c,d]$, come suggerisce il teorema 15, e che a, b sono sull'asse x, gli estremi di integrazione saranno:

$$R = [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \times [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \Longrightarrow \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \left(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \left(x^2 + y^2\right) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Il **secondo passo** è il calcolo dell'integrale più interno:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^1 y^2 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[xy^2\right]_0^1 \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right] + \left[1 \cdot y^2 - 0 \cdot y^2\right] \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3} + y^2 \, \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 2

$$I = \iint_R x\cos(xy)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad\qquad R = [0,1]\times[0,\pi]$$

Si scrivono gli estremi di integrazione:

$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 x\cos(xy)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y$$

Ma prima di procedere con il calcolo, si spiega il motivo per cui si mostra questo esempio. Come si vede dall'espressione, un integrale di questo tipo non è semplice da calcolare e non è affatto immediato. In questi casi è fortemente consigliato sfruttare il teorema 15 e riscrivere l'intero integrale:

$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 x\cos(xy)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y = \int_0^{1}\left(\int_0^{\pi} x\cos(xy)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x$$

E qui la situazione cambia. La x diventa costante e dunque diventa un integrale con un argomento composto. Per cui:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1}\left(\int_0^{\pi} x\cos(xy)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left([\sin(xy)]_0^{\pi}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sin(\pi x)\ \mathrm{d}x \\
&\downarrow \ \text{per sostituzione } t = \pi x \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{t'}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sin(t)\cdot\frac{1}{\pi}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot[-\cos(t)]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot[-\cos(\pi x)]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot[-\cos(\pi)-(-\cos(0))] \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot[-(-1)-(-1)] \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Esercizio 3

$$I = \iint\limits_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad\qquad R = [a,b] \times [c,d]$$

Si scrivono gli estremi di integrazione:

$$\int_c^d \int_a^b \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Si risolve l'integrale del valore 1:

$$\begin{aligned}
\int_c^d \int_a^b \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \int_a^b 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d [x]_a^b\,\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d b - a\,\mathrm{d}y \\
&= [by - ay]_c^d \\
&= (bd - ad) - (bc - ac) \\
&= bd - ad - bc + ac
\end{aligned}$$

5.1.2 Definizione su regioni non rettangolari: insiemi x e y semplici

Si consideri un sottoinsieme limitato D di $\mathbb{R}^2$. Per definire l'integrale di una funzione f su D, si estende la funzione f ad un rettangolo R che contiene il dominio D:

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Si dice che la funzione f è integrabile su D se $\overline{f}$ è integrabile su R e, in tal caso:

$$\iint\limits_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \triangleq \iint\limits_R \overline{f}(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Nonostante le regioni non siano rettangolari, esistono alcuni pattern risolutivi.

Definizione 1

L'insieme:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a,b], g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\} \tag{47}$$

Con g_1, g_2 funzioni continue su $[a,b]$, viene definito **insieme y-semplice** o **insieme verticalmente convesso**. In questo caso l'integrale doppio è:

$$\iint\limits_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \tag{48}$$

L'insieme:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \in [c,d], h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\} \tag{49}$$

Con h_1, h_2 funzioni continue su $[c,d]$, viene definito **insieme x-semplice** o **insieme orizzontalmente convesso**. In questo caso l'integrale doppio è:

$$\iint\limits_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \tag{50}$$

In figura 8 è possibile vedere la rappresentazione grafica dei due insiemi.

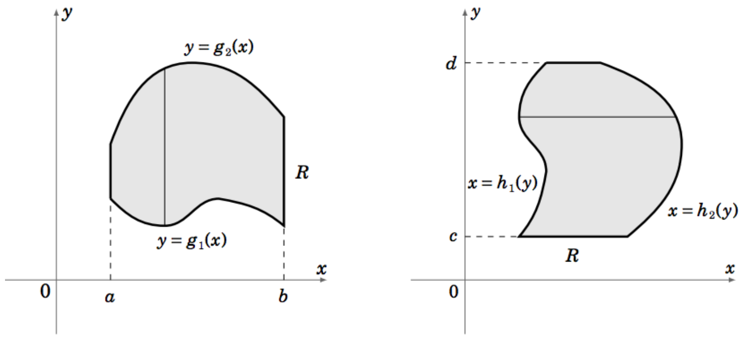


Figura 8: A sinistra l'insieme y-semplice e a destra l'insieme x-semplice (fonte).

Si presenta nelle prossime pagine due esempi:

1. Calcolare:
$$I = \iint\limits_R (4 - 4x - 4y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
Dove:
$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in [0, 1]\,,\ 0 \le y \le 1 - x\right\}$$

2. Calcolare:
$$I = \iint\limits_R ye^{xy}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
Dove:
$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in [0, 1]\,, y \in [0, \ln(2)]\right\}$$

3. Calcolare:
$$I = \iint\limits_R e^{y^3}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
Dove R è la regione piana limitata nel primo quadrante da $y = 1, x = 0$ e da $y = \sqrt{x}$.

Esempio 1

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_R (4-4x-4y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ R &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\in[0,1]\,,\ 0\le y\le 1-x\right\} \end{aligned}$$

Il **primo passo** è sempre capire gli estremi di integrazione. Questo è un caso semplificato e la regione è già ben specificata. Risulta subito evidente che è un insieme y-semplice poiché le due funzioni agli estremi (0 e $1-x$) dipendono da x e la y si trova al centro della disuguaglianza. Dunque, applicando l'equazione 48 si scrive l'integrale come:

$$\begin{aligned} &\text{Integrale dato:} && I = \iint\limits_R (4-4x-4y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\text{Eq. } y\text{-semplice:} && \iint\limits_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &\text{Applicazione:} && \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (4-4x-4y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Il **secondo passo** è risolvere il doppio integrale come al solito:

$$\begin{aligned} \iint\limits_R (4-4x-4y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (4-4x-4y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[4y-4xy-2y^2\right]_0^{1-x}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[2y\,(2-2x-y)\right]_0^{1-x}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2\,(1-x)\,(2-2x-1+x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2\,(1-x)\,(1-x)\ \mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 1-2x+x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[x-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 2\left[1-1^2+\frac{1^3}{3}\right] \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\begin{aligned} I &= \iint_R y e^{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ R &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,1]\,, y \in [0, \ln(2)]\right\} \end{aligned}$$

A differenza del precedente esercizio, in questo caso la regione è scritta in maniera leggermente differente. Tuttavia, questo non cambia la risoluzione. Si ha a disposizione due strade:

- Insieme x-semplice:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1, y \in [0, \ln(2)]\right\}$$

- Insieme y-semplice:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,1]\,, 0 \le y \le \ln(2)\right\}$$

Qua di seguito si presenta il calcolo con x-semplice giusto per variare dal precedente esercizio che è stato svolto con y-semplice.

$$\begin{aligned} \iint_R y e^{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^{\ln(2)} \int_0^1 y e^{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &\downarrow \text{ integrale immediato o per sostituzione} \\ &= \int_0^{\ln(2)} e^y - e^0 \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\ln(2)} e^y - 1 \, \mathrm{d}y \\ &= \left[e^y - y\right]_0^{\ln(2)} \\ &= \left[e^{\ln(2)} - \ln(2) - \left(e^0 - 0\right)\right] \\ &= \left[2 - \ln(2) - 1\right] \\ &= 1 - \ln(2) \end{aligned}$$

Esempio 3

$$I = \iint\limits_R e^{y^3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

A differenza degli altri, in questo esempio è necessario un po' di ragionamento. I dati dicono che la y può arrivare al massimo ad 1 ($y = 1$) e ad un minimo di $x = 0$, ovvero $y = \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$. Quindi il range di y è ben definito. Per quanto riguarda x, è noto che parta da 0 e può arrivare ad un massimo di $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$. Per cui la regione sarà:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y \in [0, 1] \, , \; 0 \le x \le y^2\right\}$$

Quindi, risolvendo con x-semplice, gli estremi di integrazione saranno:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R e^{y^3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[x \cdot e^{y^3}\right]_0^{y^2} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y^2 \cdot e^{y^3} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y^2 \cdot e^{y^3} \, \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{3} \cdot e^{y^3}\right]_0^1 \\
&= \frac{e}{3} - \frac{e^0}{3} \\
&= \frac{e - 1}{3}
\end{aligned}$$

5.1.3 Proprietà additiva degli integrali doppi

Si consideri una regione piana $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, dove ogni D_i è un insieme semplice (x o y) e inoltre gli insiemi D_i si intersecano a due a due eventuale solo lungo il bordo. Se è valida questa premessa, allora è valida anche la **proprietà additiva**:

$$\iint\limits_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Insieme anche alle proprietà di linearità e monotonia.

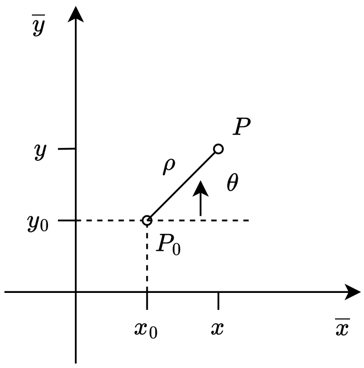
In parole povere, se due insiemi si intersecano e sono semplici, allora si può calcolare la loro somma considerando ogni insieme indipendente.

5.1.4 Coordinate polari

In questo paragrafo si presenta una tecnica utile e facile da applicare per risolvere determinati esercizi riguardante gli integrali doppi.

Prima di esporre teoricamente e praticamente questa tecnica, si cerca di capire *perché è necessario eseguire un cambio di variabili in coordinate polari?* Poiché esistono integrali abbastanza complessi. Quindi, usando un cambio di variabili (in coordinate polari) è possibile ricavare una forma semplice da risolvere.

Dato un sistema di coordinate:



E fissati due punti:

$$P_0 = (x_0, y_0) \qquad P = (x, y)$$

Si vogliono esprimere le coordinate del punto P_0 al punto P. Per fare ciò, si utilizzano le classiche coordinate polari:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos(\theta) \\ y = y_0 + \rho \sin(\theta) \end{cases} \tag{51}$$

Definizione 2

Dato un integrale definito in una regione D semplice o non:

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

È possibile riscriverlo in coordinate polari, riscrivendo il suo insieme:

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \theta \in [a, b], \, g_1(\theta) \le \rho \le g_2(\theta) \right\} \tag{52}$$

E cambiando le sue variabili inserendo anche il determinante della matrice Jacobiana ρ:

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(\rho, \theta) \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \tag{53}$$

Esempio 1 - Esercizio passo per passo

Data la regione:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{3}x \right\}$$

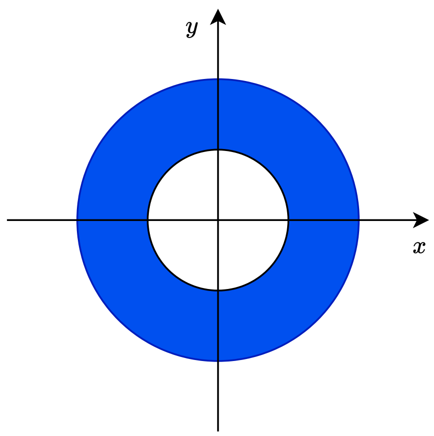
Calcolare l'integrale:

$$\iint_D (x+y)^2 \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

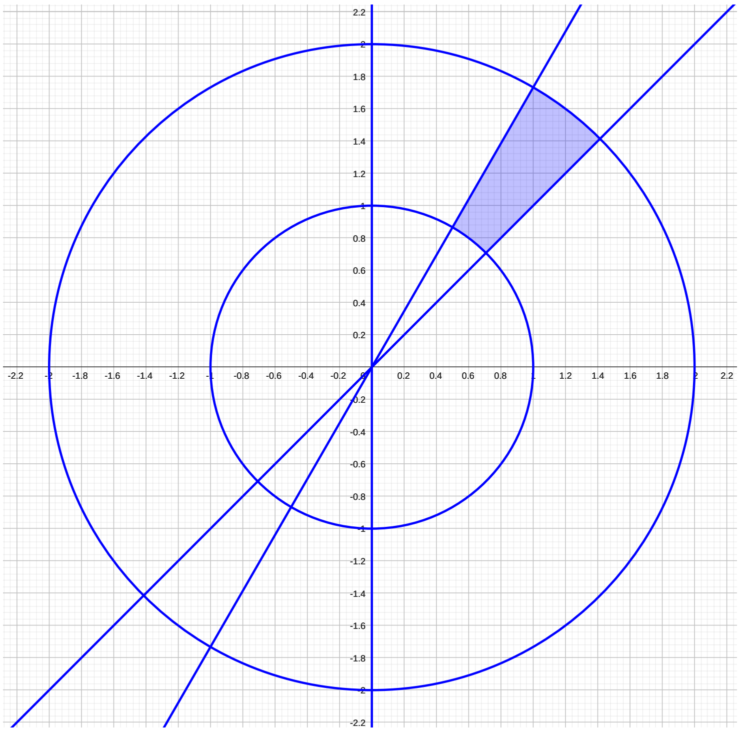
Il **primo passo** è rappresentare il dominio per capire meglio quali sono gli estremi di integrazione. Si inizia con la rappresentazione di:

$$x^2 + y^2 \geq 1 \qquad\qquad x^2 + y^2 \leq 4$$

Che sono entrambe circonferenze di raggio rispettivamente 1 ($\sqrt{1}$) e 2 ($\sqrt{4}$):



Si continua la rappresentazione considerando la seconda disuguaglianza. In questo caso si ha $0 \leq x$ e di conseguenza anche $0 \leq y$. A questo punto rimane in considerazione solo il primo quadrante (in alto a dx). Dopodiché si valuta $x \leq y$, ovvero una retta che taglia a metà il grafico. Infine, $y \leq \sqrt{3}x$ è la retta x corrispondente a y ma con coefficiente $\sqrt{3}$.



Il **secondo passo** è trasformare le coordinate del dominio in coordinate polari. Quindi è necessario trovare due valori costanti per θ e due funzioni dipendenti da θ in cui è "contenuta" ρ. Per trovare θ basta prendere l'ampiezza della regione, ovvero si prendono i limiti considerando il valore in radianti. Per cui la retta $x = y$, quella che taglia a metà il grafico, ha come gradi 45°, per trasformarlo in radianti si usa la proporzione:

$$360^\circ : 2\pi = 45 : x \qquad x = 45 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{360} = \frac{1}{4}\pi$$

Questo è il limite inferiore, invece il limite superiore è $y = \sqrt{3}x$. Per calcolare l'angolo compiuto da una retta si utilizza l'arcotangente del suo coefficiente angolare:

$$\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Nota bene: questa formula sarebbe andata bene anche nel caso precedente con l'equazione $x = y$ e coefficiente angolare $m = 1$:

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Una volta definito l'intervallo di θ si passa a ρ. La situazione è semplice, come limite inferiore basta prendere la distanza dal punto di origine alla prima circonferenza incontrata: in questo caso il raggio della prima circonferenza è 1, ovvero la distanza dall'origine alla prima circonferenza partendo dall'origine. Come limite superiore, si prende la distanza dall'origine fino alla seconda circonferenza: in questo caso il raggio della seconda è 2.

$$D = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},\ 1 \leq \rho \leq 2\right\}$$

Il **terzo passo** a questo punto è calcolare l'integrale doppio utilizzando l'equazione (definizione) 53 e sostituendo al posto delle variabili x, y le coordinate polari (eq. 51) considerando $x_0, y_0 = 1$, cioè inesistenti:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D (x+y)^2 \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 (\rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta))^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 (\rho (\cos(\theta) + \sin(\theta)))^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 \rho^2 (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 \rho^3 (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 \ \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left((\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 \cdot \int_1^2 \rho^3 \ \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left((\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 \cdot \left(\left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 \right) \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{15}{4} (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 \ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{15}{4} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta) \ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{15}{4} \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 1 \, \mathrm{d}\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(\theta)\sin(\theta) \ \mathrm{d}\theta \right) \\
&\downarrow \ \text{sostituzione: } t = \sin(\theta) \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{1}{t'} \, \mathrm{d}t \qquad t' = \cos(\theta) \\
&= \frac{15}{4} \cdot \left(\Big[\theta \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cancel{\cos(\theta)} \cdot t \cdot \frac{1}{\cancel{\cos(\theta)}} \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{15}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \right) \\
&= \frac{15}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2 \left[\frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \right) \\
&= \frac{15}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2 \left[\frac{\frac{3}{4}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2} \right] \right) \\
&= \frac{15}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{15}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \right)
\end{aligned}
$$

Esempio 2 - Non solo circonferenze

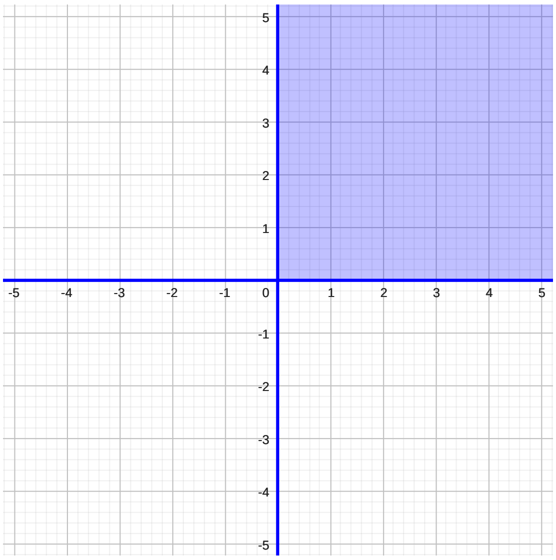
Data la regione:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x+y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$$

Calcolare l'integrale:

$$\iint_D \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

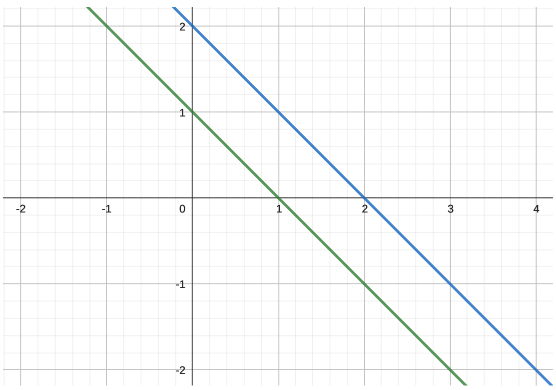
Il primo passo è rappresentare il dominio. Le due condizioni più semplici sono $x \ge 0$ e $y \ge 0$:



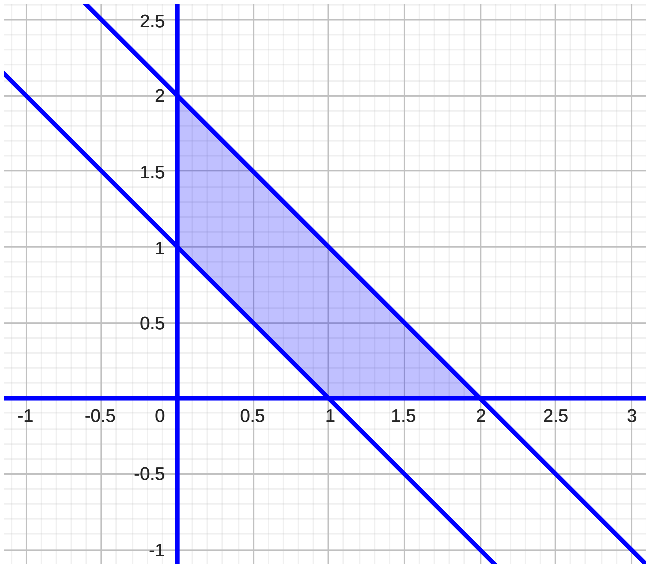
Si passa alla seconda condizione:

$$1 \le x+y \longrightarrow y = -x+1 \qquad\qquad x+y \le 2 \longrightarrow y = -x+2$$

Cioè tutte rette:



Il grafico finale:



Questo tipo di esercizio potrebbe essere risolto con il metodo x o y semplice. Tuttavia, si dovrebbe dividere l'esercizio in due parti rischiando di aumentare la percentuale di errore. In questo caso, è consigliato utilizzare le coordinate polari, le quali non si applicano soltanto nel caso di equazioni di circonferenze presenti nel dominio. Un **indizio** che dovrebbe aiutare è vedere nella funzione da integrare l'espressione $x^2 + y^2$.

Si procede con l'individuazione degli estremi di integrazione. Il valore di θ sarà da 0° a 90°, ovvero (in radianti):

$$90^\circ \rightarrow 90 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{360} = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Per identificare ρ si utilizza un escamotage. Data la condizione $1 \le x + y \le 2$, si applicano le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \longrightarrow \quad 1 \le x + y \le 2$$

$$1 \le \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) \le 2$$

$$1 \le \rho (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \le 2$$

$$\downarrow \quad \text{si esplicita } \rho$$

$$\frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \le \rho \le \frac{2}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}$$

Quindi il dominio in coordinate polari è definito:

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \ \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \le \rho \le \frac{2}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right\}$$

Si risolve l'integrale applicando gli estremi:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{\frac{2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}} \frac{\rho\left(\cos(\theta)-\sin(\theta)\right)}{\rho^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)} \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{\frac{2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}} \frac{\rho\left(\cos(\theta)-\sin(\theta)\right)}{\rho^2} \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{\frac{2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}} \cos(\theta)-\sin(\theta)\ \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\cos(\theta)-\sin(\theta)\right] \cdot \left[\rho\right]_{\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{\frac{2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)-\sin(\theta)}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&\downarrow\ \text{sostituzione: } t=\cos(\theta)+\sin(\theta) \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{1}{t'}\,\mathrm{d}t \\
&\ t' = -\sin(\theta)+\cos(\theta) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos(\theta)-\sin(\theta)}}{t} \cdot \frac{1}{\cancel{-\sin(\theta)+\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \ln\left(\cos(0)+\sin(0)\right) \\
&= \ln(1)-\ln(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

5.2 Integrali tripli

5.2.1 Definizione su intervalli di $\mathbb{R}^3$

Si parte con la **definizione teorica degli integrali tripli**.

Si consideri l'intervallo D di $\mathbb{R}^3$:

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

E una funzione $f(x, y, z)$ definita su D.

Si procede, come nel caso di intervalli in $\mathbb{R}^2$, a una divisione:

- Di $[a_1, b_1]$ in I parti $[x_{i-1}, x_i]$ di uguale ampiezza Δx
- Di $[a_2, b_2]$ in I parti $[y_{j-1}, y_j]$ di uguale ampiezza Δy
- Di $[a_3, b_3]$ in I parti $[z_{k-1}, x_k]$ di uguale ampiezza Δz

Per cui, l'intervallo tridimensionale D è diviso in $l \cdot m \cdot n$ sottointervalli:

$$D_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, x_k]$$

Scegliendo un punto $(x_{ijk}*, y_{ijk}*, z_{ijk}*)$ in ogni sottorettangolo D_{ijk} si può costruire la somma di Riemann:

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}*, y_{ijk}*, z_{ijk}*)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{54}$$

Definizione 3

La funzione $f : D \to \mathbb{R}$, limitata, si dice **integrabile** su D se esiste finito:

$$\lim_{l,m,n \to +\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}*, y_{ijk}*, z_{ijk}*)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{55}$$

E se tale valore non dipende dalla scelta dei punti $(x_{ijk}*, y_{ijk}*, z_{ijk}*)$.
Se f è integrabile, il valore del limite si chiama **integrale triplo** di f su D e si indica con il simbolo:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \tag{56}$$

Alcune **interpretazioni del risultato** di un integrale triplo (importanti nel caso in cui in sede d'esame venga richiesto):

- Se la funzione da integrare $f(x,y,z)$ è maggiore o uguale a zero ≥ 0, allora è possibile interpretare la funzione come la **densità di massa** (variabile punto per punto) di un corpo che occupa la regione D dello spazio. In questo modo, l'integrale triplo è la massa m del corpo:

$$m = \iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{57}$$

  E le coordinate del baricentro del corpo sarebbero:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m}\iiint_D x f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ y_G &= \frac{1}{m}\iiint_D y f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ z_G &= \frac{1}{m}\iiint_D z f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{58}$$

- Se la funzione da integrare $f(x,y,z)$ è uguale ad uno, allora l'integrale triplo:

$$\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{59}$$

  È il volume della regione di D.

Teorema 16. *Se la funzione f è continua su:*

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

Allora è integrabile. Inoltre:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{60}$$

Cambiando l'ordine di integrazione, **il valore dell'integrale non cambia**.

Definizione 4

Il **valore medio** $\overline{f}$ di una funzione f sulla regione D si calcola facendo la divisione tra l'integrale triplo della funzione f nella regione D e il volume della regione D, ovvero l'integrale triplo in D di 1:

$$\overline{f} = \frac{\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\displaystyle\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} \tag{61}$$

Esempio 1

Nella regione $D = [0,1]\times[0,1]\times[0,3]$ la temperatura è definita in gradi centigradi punto per punto dalla funzione:

$$T\left(x,y,z\right) = xyz$$

Calcolare la temperatura media nella regione D.

Il **valore medio** della funzione $T\left(x,y,z\right)$ sulla regione D è dato dalla frazione tra l'integrale triplo nella regione D della funzione T, diviso il volume della regione D (ovvero l'integrale triplo senza nessun argomento). Quindi la formula è:

$$\overline{T} = \frac{\displaystyle\iiint_D xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\displaystyle\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

Il **primo passo** è definire gli estremi di integrazione (ricordando il teorema 16 degli integrali tripli), che in questo caso sono ben definiti:

$$D = [\mathbf{0},\mathbf{1}]\times[\mathbf{0},\mathbf{1}]\times[\mathbf{0},\mathbf{3}] \Rightarrow \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\left(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\left(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{3}} xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

E il **secondo passo** è risolverli partendo dall'espressione più interna ed andando verso l'esterno, come se fosse una matriosca:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^3 xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\int_0^1\left(xy\cdot\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^3\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\left(\int_0^1 xy\cdot\frac{3^2}{2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\left(\frac{9}{2}x\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1^2}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Si calcola anche il denominatore con i medesimi estremi:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^3 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^3 1 \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 [z]_0^3 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 3 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [3y]_0^1 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 3 \, \mathrm{d}x \\
&= [3x]_0^1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

E infine si esegue la divisione per calcolare il risultato, ovvero il valore medio:

$$\overline{T} = \frac{\displaystyle\iiint_D xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{\displaystyle\iiint_D \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^3 xyz \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^3 \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x} = \frac{\frac{9}{8}}{3} = \frac{3}{8}$$

Esempio 2

Un cubo occupa la regione $D = [0,2] \times [0,2] \times [0,2]$ in $\mathbb{R}^3$. In ogni punto la sua densità è definita dalla funzione $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Trovare la massa e il baricentro del cubo.

Per calcolare la massa si utilizza l'equazione 57 presentata con gli integrali tripli:

$$\begin{aligned}
m = \iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^2 \left(\int_0^2 \left(\int_0^2 \left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^2 \left[zx^2 + zy^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^2 2x^2 + 2y^2 + \frac{2^3}{3}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^2 2x^2 + 2y^2 + \frac{8}{3}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[2yx^2 + 2\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{8}{3}y \right]_0^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 4x^2 + \frac{16}{3} + \frac{16}{3}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[4\frac{x^3}{3} + \frac{32}{3}x \right]_0^2 \\
&= \frac{8\cdot 4}{3} + \frac{32\cdot 2}{3} \\
&= 32
\end{aligned}$$

Invece, per calcolare il baricentro del cubo, è necessario ottenere le tre coordinate (x,y,z) usando l'equazione 58:

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{m}\iiint_D x f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
y_G &= \frac{1}{m}\iiint_D y f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
z_G &= \frac{1}{m}\iiint_D z f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Per cui si riportano i calcoli delle varie coordinate.

Calcolo di x_G:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m}\iiint\limits_D xf\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{32}\int_0^2\int_0^2\int_0^2 x\left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{32}\int_0^2\int_0^2\left[x^3z+xy^2z+x\cdot\frac{z^3}{3}\right]_0^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{32}\int_0^2\int_0^2 2x^3+2xy^2+\frac{8}{3}\cdot x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{32}\int_0^2\left[2yx^3+2x\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{8}{3}xy\right]_0^2\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{32}\int_0^2 4x^3+\frac{16}{3}x+\frac{16}{3}x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{32}\int_0^2 4x^3+\frac{32}{3}x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{32}\left[x^4+\frac{16}{3}x^2\right]_0^2\\
&= \frac{1}{32}\cdot\left(16+\frac{64}{3}\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{2}{3}\\
&= \frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

I passaggi per y_G e z_G sono uguali, si omettono dunque i passaggi.

5.2.2 Metodo di integrazione per fili

Il metodo di integrazione per fili è utilizzato, come x-semplice e y-semplice per gli integrali doppi, per estendere il calcolo degli integrali tripli a regioni più complesse.

Definizione 5

L'insieme:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y) \in D,\; g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\right\} \tag{62}$$

Con g_1 e g_2 funzioni continue sull'insieme semplice $D \subset \mathbb{R}$, si dice **insieme semplice rispetto all'asse z**. Infatti, è verificato che (con il teorema di Fubini):

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_{D} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{63}$$

Questa formula di riduzione è nota come **formula di integrazione per fili** (*shadow method*).

Si noti che la lettera Omega Ω viene **utilizzata per identificare i domini semplici rispetto all'asse** z. Questo è importante poiché in sede d'esame un insieme di questo tipo dovrebbe dare un punto di partenza allo studente per consentire di svolgere l'esercizio facilmente.

Esempio 1 - Esercizio di introduzione

Calcolare:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \ge 0,\; y \ge 0,\; z \ge 0,\; x + y + z \le 1\right\} \\ \text{Integrale} &= \iiint\limits_{\Omega} x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

L'insieme non è esplicitato in maniera chiara poiché le disuguaglianze non consentono di esplicitare in maniera limpida le funzioni che andranno agli estremi dell'integrale. Per cui, il **primo passo** (obbligatorio sempre) è capire come riuscire a riscrivere le condizioni d'esistenza in modo da avere una forma riconoscibile (eq. 62).

Dato che le tre variabili non possono essere negative (sempre maggiori di zero), ma non possono neanche superare 1, allora si può riscrivere:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1,\; x + y + z \le 1\right\}$$

Adesso, la z deve essere al centro di una disuguaglianza doppia, mentre la x e la y devono far parte di un altro insieme, per esempio D:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y) \in D,\; z \le 1 - x - y\right\}$$

Dai ragionamenti precedenti e dalla definizione dell'insieme, risulta logico pensare che la z non possa essere minore di zero:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in D,\, 0 \le z \le 1-x-y\right\}$$

L'insieme D è scontato:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, x+y \le 1\right\}$$

Il **secondo passo** è scrivere la formula di integrazione per fili (eq. 63) si scrivono gli estremi di integrazione:

$$\iint\limits_D \left(\int_0^{1-x-y} x \,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Si risolve l'integrale è poi si ragiona sul rimanente:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \left(\int_0^{1-x-y} x \,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_D [zx]_0^{1-x-y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D x - x^2 - yx \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

A questo punto l'esercizio diventa lo svolgimento di un integrale doppio con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, x+y \le 1\right\} \\
\text{Risolvere} &: \iint\limits_D x - x^2 - yx \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Si sceglie x o y semplice. In questo caso, si usa x-semplice:

$$\begin{aligned}
D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1-x\right\} \\
\iint\limits_D x - x^2 - yx \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x - x^2 - yx \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[yx - yx^2 - \frac{y^2}{2}x\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x - x^2 - x^2 + x^3 - \left(\frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Esempio 2 - La rappresentazione aiuta la risoluzione!

Data la regione:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq z,\; x^2 + y^2 \geq z^2\right\}$$

Calcolare l'integrale:

$$\iiint\limits_{\Omega} 2\left(x^2 + y^2\right) z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

A differenza dell'esercizio precedente in cui era possibile eseguire delle operazioni modificando direttamente il dominio, in questo caso conviene rappresentarlo per capire l'area di integrazione. Quindi, si inizia con $x^2 + y^2 = z$ che rappresenta un paraboloide ellittico centrato nell'origine:

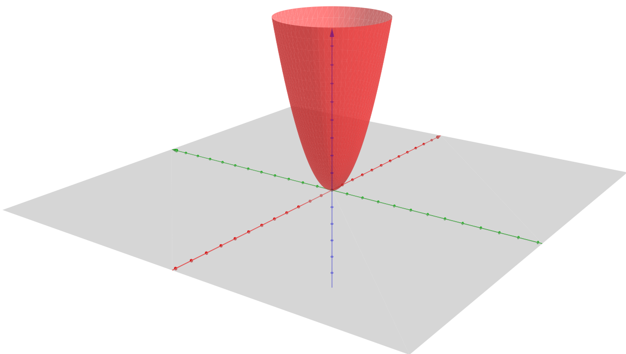


Figura 9: Rappresentazione grafica di $x^2 + y^2 = z$

Ovviamente si considerano tutti i punti all'interno poiché prendendo un punto di test $x = 0, y = 0, z = 1$, rispetta la condizione $x^2 + y^2 \leq z$. La seconda condizione è semplicemente un cono ellittico dato che la sua equazione canonica è $x^2 + y^2 = z^2$. I punti da prendere in considerazione sono quelli esterni al cono.

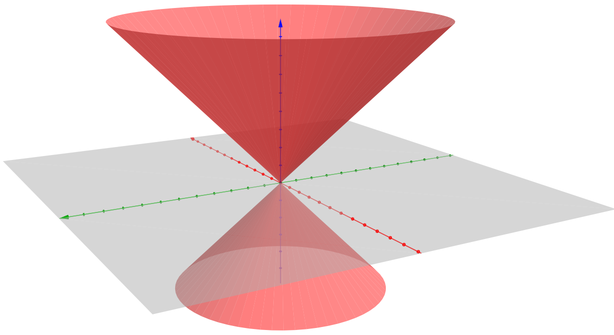


Figura 10: $x^2 + y^2 = z^2$

Per cui, andando ad unire le due figure, è possibile calcolare l'integrale proiettando la circonferenza che si incontra nell'intersezione. Per capire dove si intersecano, basta mettere a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dots \\ z = z^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dots \\ z^2 - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dots \\ z = 0 \vee z = 1 \end{cases}$$

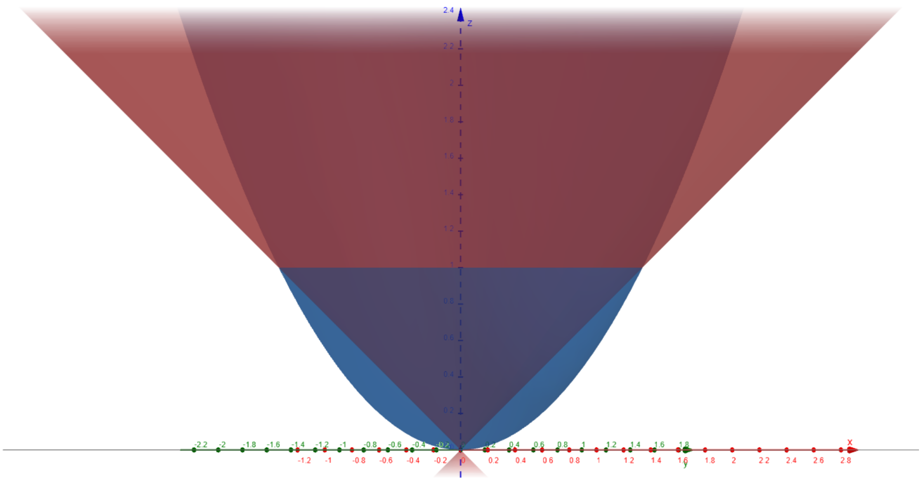


Figura 11: Da questa figura è possibile capire l'area di integrazione. Precisamente tra il cono e il paraboloide.

Quindi l'integrale doppio sarà in x, y, ovvero il calcolo di una circonferenza di raggio 1 (cioè il risultato del sistema):

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Per quanto riguarda la z, si guardi attentamente il grafico. La z varia tra una funzione che corrisponde al paraboloide ellittico (base) e la funzione del cono. Quest'ultima deve essere adattata a z, quindi facendo una radice quadrata:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; (x, y) \in D, \; x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

Si calcola dunque l'integrale più interno rispetto a z:

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} 2\left(x^2 + y^2\right) z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \iint\limits_{D} \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} 2\left(x^2 + y^2\right) z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D} \left(2\left(x^2 + y^2\right) \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D} \left(2\left(x^2 + y^2\right) \left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_{D} \left(\cancel{2} \left(x^2+y^2\right) \left[\frac{z^2}{\cancel{2}} \right]_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D} \left(\left(x^2+y^2\right) \left[x^2+y^2 - \left(x^2+y^2\right)^2 \right] \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D} \left(x^2+y^2\right)^2 - \left(x^2+y^2\right)^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Adesso si applicano gli estremi dell'integrale doppio rispetto a D. Prima di farlo, si passa alle coordinate polari per facilitare i calcoli dato che la regione è la seguente:

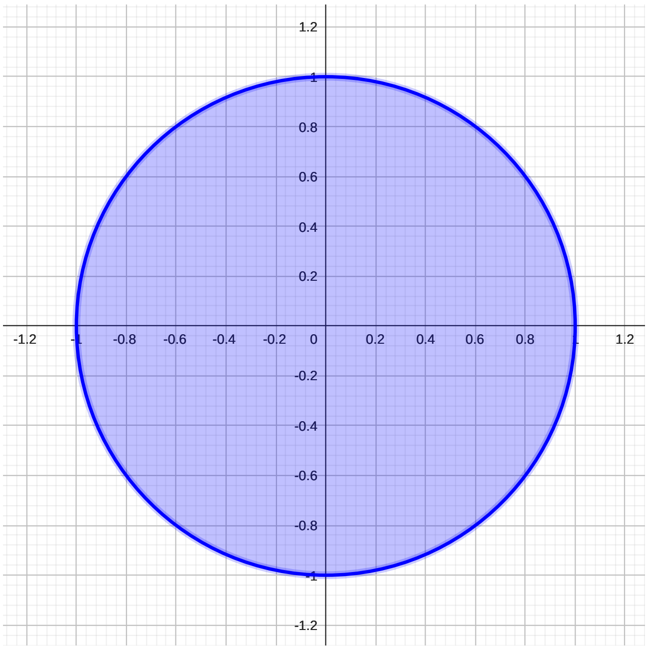


Figura 12: La nuova regione da calcolare: $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \le 1\right\}$.

Il valore θ varia da 0 a 2π, allo stesso modo ρ varia da 0 a 1 (raggio). Per cui la nuova regione diventa:

$$
D = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le \theta \le 2\pi, \; 0 \le \rho \le 1\right\}
$$

Si esegue la conversione in coordinate polari delle costanti:

$$
\iint\limits_{D} \left(\left(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2\right)^2 - \left(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2\right)^3 \right) \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta
$$

Adesso si calcola l'integrale:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\rho^4 - \rho^6\right) \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^5 \, \mathrm{d}\rho - \int_0^1 \rho^7 \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 - \left[\frac{\rho^8}{8}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \, \mathrm{d}\theta$$

$$\left[\frac{1}{24}\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$\frac{1}{12}\pi$$

Esempio 3

Data la regione:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq y \leq x^3 \leq 1, \ 0 \leq z \leq \frac{1}{x^2y^2 + 1} \right\}$$

Calcolare l'integrale:

$$\iiint\limits_{\Omega} 16x^9 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

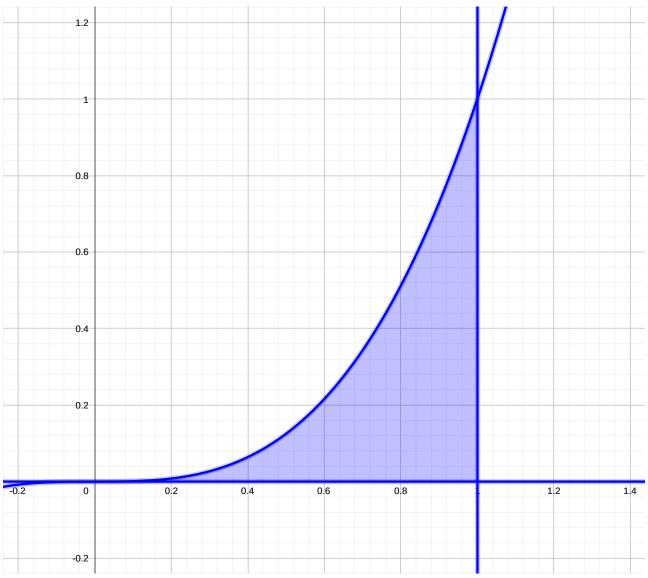
A differenza dell'esempio precedente, in questo caso risulta molto complesso rappresentare il dominio. È possibile farlo con un *tool* online, ma all'esame non sarà possibile. Per cui in questi casi è necessario eseguire alcune considerazioni sul dominio. È possibile notare che la z è già impostata come intervallo che dipende da funzioni x e y, per cui si parte immediatamente:

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} 16x^9 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \iint\limits_{D} \left(\int_0^{\frac{1}{x^2y^2+1}} 16x^9 y \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D} 16x^9 y \cdot \frac{1}{x^2y^2 + 1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

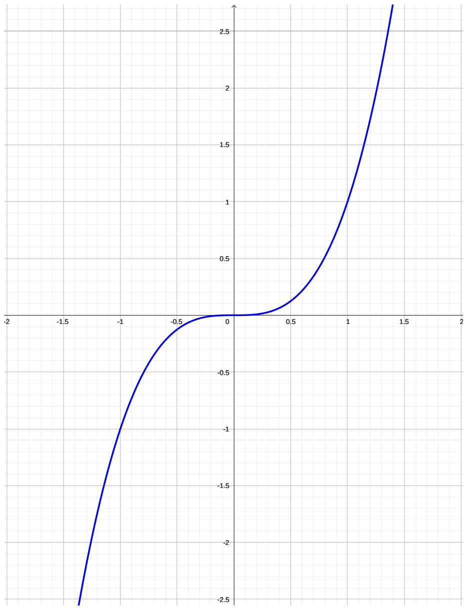
Gli estremi di integrazione della regione D devono essere calcolati poiché adesso si ha:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq x^3 \leq 1 \right\}$$

In questo caso, è possibile utilizzare la convenzione grafica per risolvere l'integrale. Per cui, y è maggiore di zero e di conseguenza anche x^3 deve esserlo. Inoltre, la y deve essere minore uguale di 1 e lo stesso vale per x ($\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1} \rightarrow x = 1$):



Si ricorda che la funzione x^3 è la seguente curva:



Per cui, si può riscrivere il dominio come:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x^3\right\}$$

E si risolve l'integrale doppio esplicitando gli estremi:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D 16x^9 y \cdot \frac{1}{x^2y^2+1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} \frac{16x^9 y}{x^2y^2+1} \, \mathrm{d}y\right) \, \mathrm{d}x \\
&\downarrow \ \text{sostituzione: } t = x^2y^2+1 \ \mathrm{d}y = \frac{1}{x^2 2y} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} \frac{16x^9 y}{t} \cdot \frac{1}{x^2 2y} \, \mathrm{d}t\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} \frac{8x^7}{t} \, \mathrm{d}t\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 8x^7 \cdot \left[\ln(t)\right]_0^{x^3} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 8x^7 \cdot \left[\ln\left(x^2y^2+1\right)\right]_0^{x^3} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 8x^7 \cdot \ln\left(x^8+1\right) \, \mathrm{d}x \\
&\downarrow \ \text{sostituzione: } t = x^8+1 \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{8x^7} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \cancel{8x^7} \cdot \ln(t) \cdot \frac{1}{\cancel{8x^7}} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

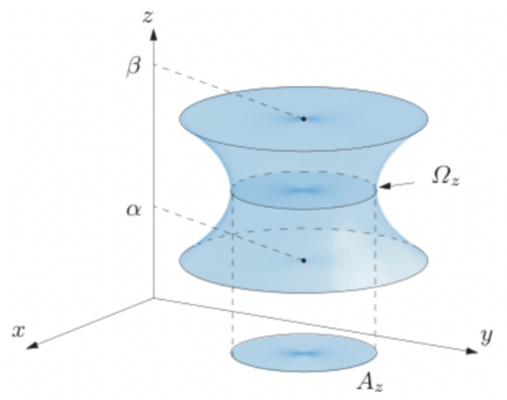
$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \ln(t) \, \mathrm{d}t \\
&= [t(\ln(t) - 1)]_0^1 \\
&= \left[\left(x^8 + 1\right)\left(\ln\left(x^8 + 1\right) - 1\right)\right]_0^1 \\
&= \left[\left(1^8 + 1\right)\left(\ln\left(1^8 + 1\right) - 1\right)\right] - \left[\left(0^8 + 1\right)\left(\ln\left(0^8 + 1\right) - 1\right)\right] \\
&= 2\ln(2) - 2 + 1 \\
&= 2\ln(2) - 1
\end{aligned}
$$

5.2.3 Metodo di integrazione per strati

Si supponga che un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^3$ si possa rappresentare nel seguente modo:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \in [\alpha, \beta], (x, y) \in A_z\right\}$$

Dove A_z è la proiezione sul piano xy dell'intersezione tra Ω e il piano parallelo al piano xy che si trova a quota z.



Definizione 6

La **formula di integrazione per strati paralleli al piano** xy (*cross-section method*) è la seguente:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\iint\limits_{A_z} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \qquad (64)$$

Con A_z insieme semplice o unione di insiemi semplici.

Lo scopo di questo metodo è quello di calcolare l'integrale doppio su A_z e successivamente "estenderlo" a tutta la regione, da α a β.

A differenza del metodo di integrazione precedente (per fili) qui in prima battuta viene calcolata l'area proiettata e successivamente viene "estesa" da α a β. Ovviamente l'area proiettata varia a seconda dell'altezza, ovvero varia a seconda dell'apertura di z. Vedendo l'esempio 1, si può vedere come l'integrale che è stato calcolato varia a seconda di z.

Esempio

Data la regione:

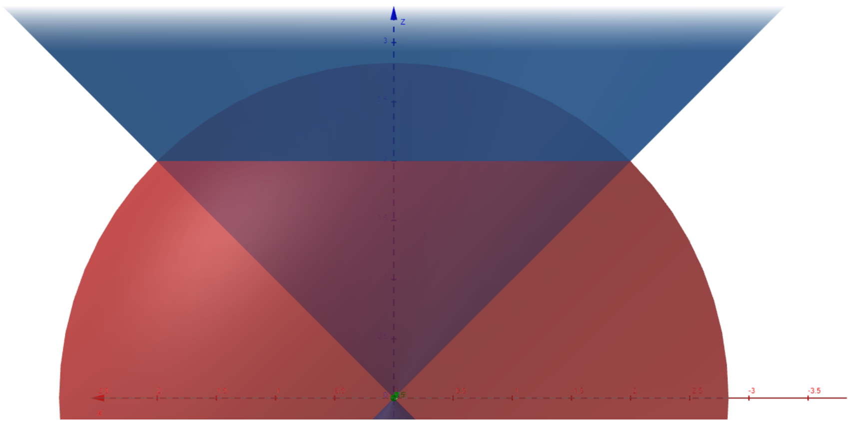
$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, \ x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, \ z \geq 0\right\}$$

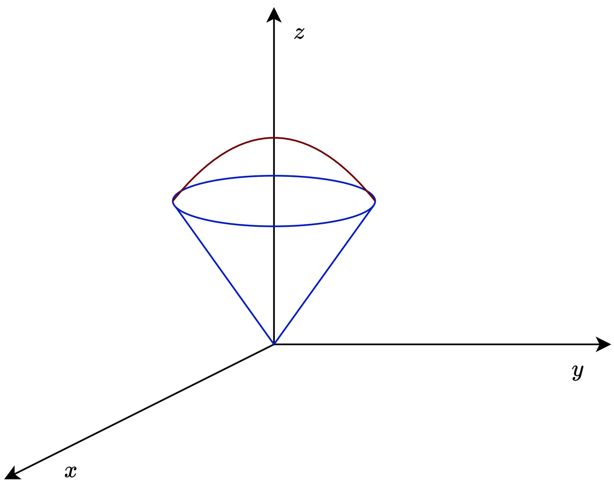
Calcolare l'integrale:

$$\iiint\limits_{\Omega} 8x^2 z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

Attenzione! Questo esercizio viene eseguito in questo modo per mostrare come adoperare il metodo di integrazione per strati. Tuttavia, nei casi in cui ci fosse una sfera, è sempre consigliato adoperare le coordinate sferiche (par. 5.2.5, esercizio a pagina 218).

Il **primo passo** è capire le forme che compongono la regione. In questo caso, si ha una sfera ($x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$) e un cono ($x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$) centrato nell'origine. La z deve essere maggiore o uguale di zero, per cui è necessario prendere l'area positiva. La figura dunque è:



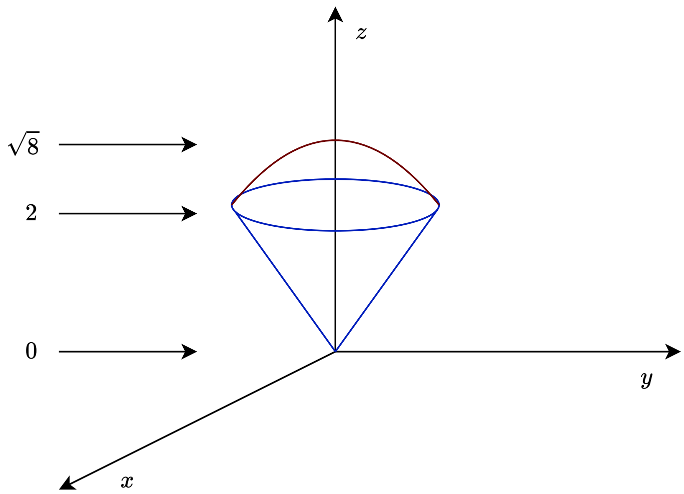


Il **secondo passo** è intuire gli estremi di integrazione. In questo caso, la sfera avrà come valore massimo il suo raggio, ovvero $\sqrt{8}$. Mentre il valore all'origine è chiaramente 0.

Questo esempio è particolare poiché è composto da due forme. Per cui non è possibile calcolare direttamente un integrale doppio da 0 a $\sqrt{8}$, è necessario prima capire l'intersezione tra i due:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z^2=8 \\ \cdots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\pm 2 \\ \cdots \end{cases}$$

Per cui adesso sono chiari gli estremi di integrazione:



Supponendo che la regione Ω sia formata da $\Omega_1+\Omega_2$, ovvero dalla somma della regione del cono (blu sotto) e dalla regione della mezza sfera (rosso sopra), allora è possibile definire le due regioni come:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, 0\le z\le 2,\ x^2+y^2-z^2\le 0\right\} \\ \Omega_2 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, 2\le z\le \sqrt{8},\ x^2+y^2+z^2\le 8\right\} \end{aligned}$$

Il **terzo passo** è risolvere gli integrali e sommare i risultati. Giunti a questo punto, è risultato evidente che l'ostacolo più grande è stata l'individuazione dei vari dati. Innanzitutto si calcola prima l'integrale rispetto al cono, ovvero rispetto alla regione Ω_1:

$$\iiint_{\Omega} 8x^2 z \, dx \, dy \, dz \quad = \quad \int_0^2 \left(\iint_{\Omega_1} 8x^2 z \, dx \, dy \right) dz$$

La figura proiettata sul piano x, y è una circonferenza che varia (dal basso) da 0 quando $z=0$, fino a 4 quando è $z=2$. Dato che la figura è una circonferenza, si utilizzano le coordinate polari (par. 5.1.4). Osservando l'insieme Ω_1 si può ricavare l'equazione della circonferenza banalmente:

$$x^2+y^2=z^2$$

Con chiaramente raggio pari a $\sqrt{z^2}=z$. La circonferenza è completa ($0\le\theta\le 2\pi$) e varia da 0 a z ($0\le\rho\le z$):

$$D=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le z\right\}$$

Si calcola l'integrale impostando gli estremi:

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} 8x^2 z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &\overset{\frac{1}{2}}{=} \int_0^2 \left(\iint\limits_{\Omega_1} 8x^2 z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^z 8\rho^2 \cos(\theta)^2 z \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} 8\cos(\theta)^2 z \left(\int_0^z \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} 8\cos(\theta)^2 z \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^z \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} 8\cos(\theta)^2 z \cdot \frac{z^4}{4} \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} 2\cos(\theta)^2 z^5 \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 2z^5 \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&\downarrow \text{ integrale fond. } \int \cos(x) = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} \\
&= \int_0^2 2z^5 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 2z^5 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&\downarrow \text{ integrale fond. } \int \cos(n\cdot x) = \frac{\sin(n\cdot x)}{n} \\
&= \int_0^2 2z^5 \left(\left[\frac{1}{2}\cdot\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 2z^5 \pi \,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \left[\frac{z^6}{6} \right]_0^2 \\
&= \frac{64\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda la seconda regione, il calcolo è il medesimo poiché anche la seconda regione è una circonferenza. Questa volta però l'equazione della circonferenza è un po' più complessa:

$$x^2 + y^2 = 8 - z^2 \qquad \textit{raggio} = \sqrt{8 - z^2}$$

Anche in questo caso, la circonferenza è completa ($0 \le \theta \le 2\pi$) e varia da 0 a $\sqrt{8-z^2}$ (attenzione agli estremi di z che adesso ha cambiato poiché si considera il secondo intervallo Ω_2):

$$D = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \rho \le \sqrt{8-z^2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} 8x^2 z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &\overset{\frac{2}{2}}{=} \int_2^{\sqrt{8}} \left(\iint\limits_{\Omega_2} 8x^2 z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_2^{\sqrt{8}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{8-z^2}} 8\rho^2 \cos(\theta)^2 z \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= 8 \int_2^{\sqrt{8}} z \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \left(\int_0^{\sqrt{8-z^2}} \rho^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= 8 \int_2^{\sqrt{8}} z \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \left(\left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{8-z^2}} \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= 8 \int_2^{\sqrt{8}} z \left(\left(\frac{z^4}{4} - 4z^2 + 16 \right) \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= 8 \int_2^{\sqrt{8}} z \left(\left(\frac{z^4}{4} - 4z^2 + 16 \right) \pi \right) \mathrm{d}z \\
&= 8 \int_2^{\sqrt{8}} \frac{z^5}{4}\pi - 4z^3\pi + 16z\pi \, \mathrm{d}z \\
&= 8 \left(\int_2^{\sqrt{8}} \frac{z^5}{4}\pi \, \mathrm{d}z - \int_2^{\sqrt{8}} 4z^3\pi \, \mathrm{d}z + \int_2^{\sqrt{8}} 16z\pi \, \mathrm{d}z \right) \\
&= 8 \left(\frac{1}{4}\pi \int_2^{\sqrt{8}} z^5 \, \mathrm{d}z - 4\pi \int_2^{\sqrt{8}} z^3 \, \mathrm{d}z + 16\pi \int_2^{\sqrt{8}} z \, \mathrm{d}z \right) \\
&= 2\pi \left[\frac{z^6}{6} \right]_2^{\sqrt{8}} - 32\pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_2^{\sqrt{8}} + 128\pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_2^{\sqrt{8}} \\
&= \frac{448}{3}\pi - 384\pi + 256\pi \\
&= \frac{64}{3}\pi
\end{aligned}$$

Quindi il risultato dell'integrale è la somma delle due aree calcolate:

$$\iiint\limits_{\Omega} 8x^2 z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \frac{64}{3}\pi + \frac{64}{3}\pi = \frac{128}{3}\pi$$

5.2.4 Coordinate cilindriche

Negli integrali doppi, quindi nello spazio $\mathbb{R}^2$, le coordinate polari erano state identificate con la trasformazione da (x, y) a (ρ, θ), con $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$.

Negli integrali tripli, per cui nella terza dimensione $\mathbb{R}^3$, un punto con coordinate (x, y, z) può essere identificato con le coordinate cilindriche (ρ, θ, z). Ebbene, si utilizza la stessa identica regola di conversione, ma lasciando immutata la variabile z.

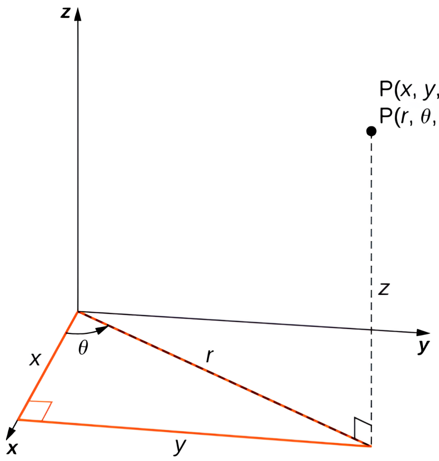


Figura 13: Rappresentazione grafica di un punto con le coordinate cilindriche.

Quindi le coordinate cilindriche si trasformano con la seguente regola:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \tag{65}$$

Definizione 7

Data una funzione $f(x, y, z)$ continua in una box rettangolare B, quest'ultima descritta con le **coordinate cilindriche**:

$$B = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; a \leq \rho \leq b, \; \alpha \leq \theta \leq \beta, \; c \leq z \leq d\right\} \tag{66}$$

Allora la funzione $f(x, y, z) = f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$ è possibile calcolarla con l'integrale triplo:

$$\iiint\limits_{B} f(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{c}^{d} \left(\int_{\beta}^{\alpha} \left(\int_{a}^{b} f(r, \theta, z) \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \tag{67}$$

Nota: anche qui, come per le coordinate polari, il determinante della matrice Jacobiana ρ deve essere moltiplicato alla funzione!

Per capire l'ordine di integrazione della formula 67, si supponga che la box cilindrica abbia il dominio:

$$B = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \leq \rho \leq b, \ \alpha \leq \theta \leq \beta, \ c \leq z \leq d\right\}$$

E si supponga di dividere ogni intervallo in costanti l, m, n come:

$$\Delta r = \frac{b \cdot a}{l} \qquad \Delta\theta = \frac{\beta \cdot \alpha}{m} \qquad \Delta r = \frac{d \cdot c}{n}$$

Allora la figura può essere rappresentata come:

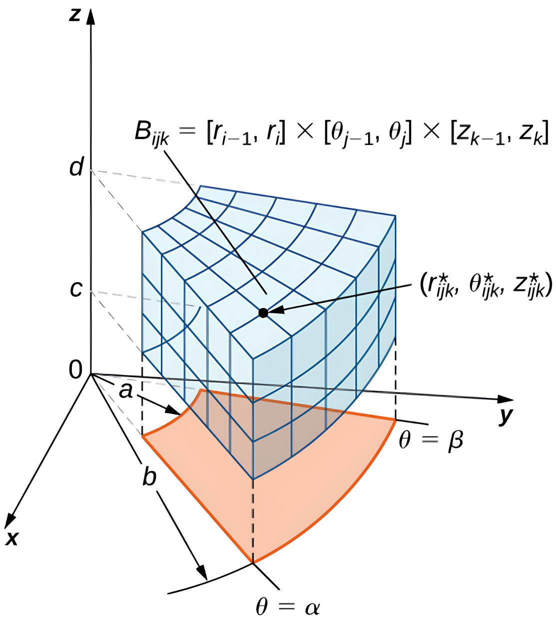


Figura 14: Integrali tripli con le coordinate cilindriche.

Se la regione cilindrica da integrare è un solido generale, è possibile sfruttare la proiezione sul piano "polare". Precisamente, data una funzione continua $f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)$ definita su una regione solida:

$$E = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (\rho, \theta) \in D, \ u_1(\rho, \theta) \leq z \leq u_2(\rho, \theta)\right\} \tag{68}$$

Dove la regione D è la proiezione della regione E sul piano $\rho\theta$ (esattamente come nell'integrazione per fili, eq. 62) e l'integrale è:

$$\iiint_E f(\rho, \theta, z) \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{u_1(\rho,\theta)}^{u_2(\rho,\theta)} f(\rho, \theta, z) \ \mathrm{d}z \right) \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \tag{69}$$

In particolare, se l'insieme D è così definito:

$$D = \{(\rho, \theta) \ : \ g_1(\theta) \leq \rho \leq g_2(\theta), \ \alpha \leq \theta \leq \beta\} \tag{70}$$

Allora l'integrale è possibile definirlo in maniera più dettagliata:

$$\iiint_E f(\rho, \theta, z) \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \left(\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \left(\int_{u_1(\rho,\theta)}^{u_2(\rho,\theta)} f(\rho, \theta, z) \ \mathrm{d}z \right) \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \tag{71}$$

Esempio

Sia D la regione $\mathbb{R}^3$ contenuta nel primo ottante e delimitata dalle superfici cilindriche:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 = 4$$

E dai piani: $z = 0, z = 1, x = 0, x = y$. Calcolare:

$$\iiint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

Il **primo passo** è rappresentare i due cilindri:

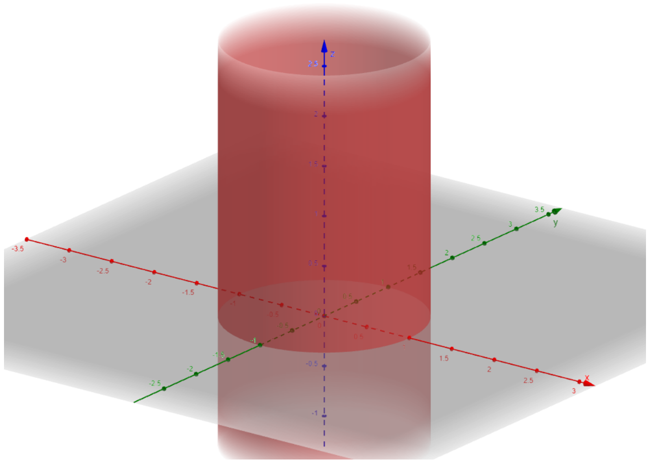


Figura 15: Rappresentazione dell'equazione $x^2 + y^2 = 1$ con raggio 1.

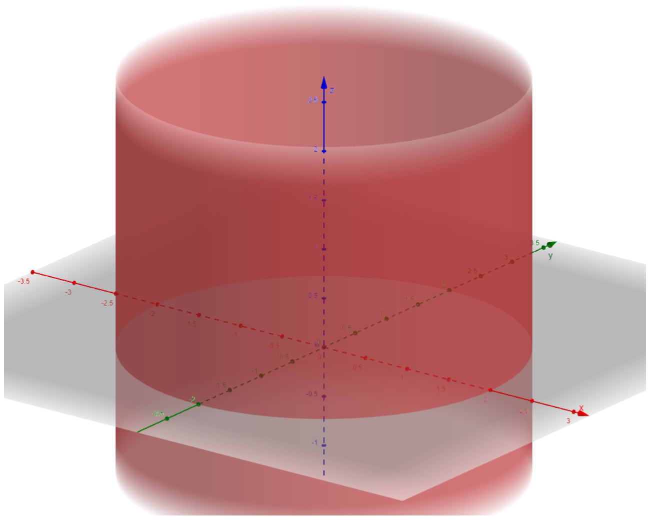


Figura 16: Rappresentazione dell'equazione $x^2 + y^2 = 4$ con raggio 2.

L'esercizio chiede il calcolo della superficie delimitata dai due cilindri, per cui si intende l'area interna tra i due:

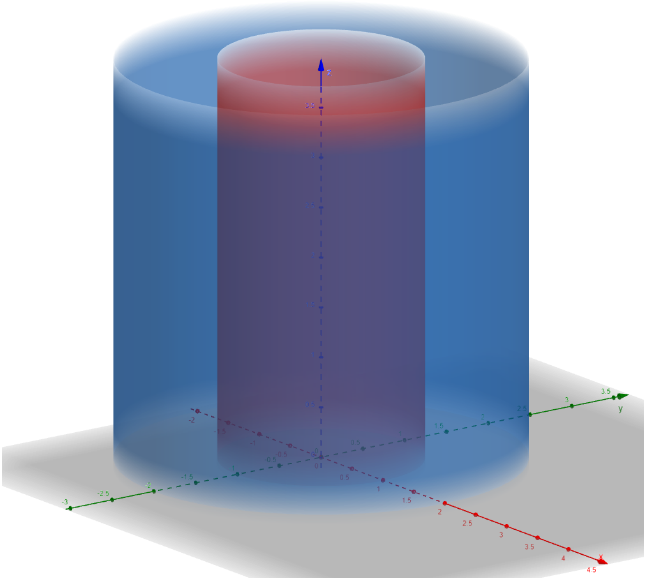


Figura 17: Rappresentazione dell'equazione $x^2 + y^2 = 1 \wedge x^2 + y^2 = 4$.

Infine, si rappresentano i piani richiesti: $z = 0, z = 1, x = 0, x = y$:

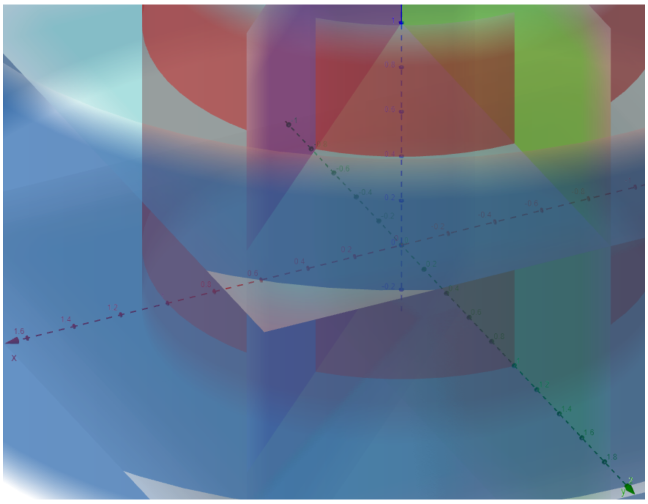
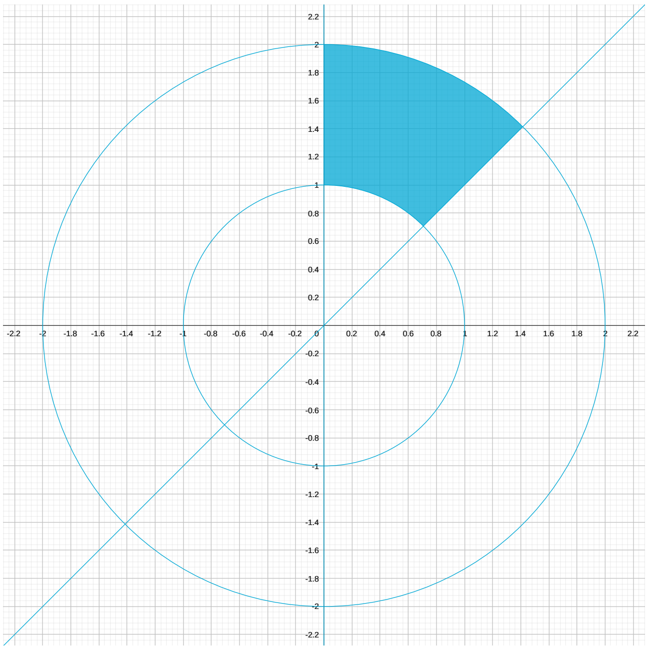


Figura 18: L'area interessata è tra i due cilindri e delimitata dalle pareti (rette in due dimensioni).

Quindi, l'area interessata è delimitata da $0 \leq z \leq 1$, mentre la x ha una retta che passa per 0 e, infine, vi è una retta che taglia il grafico a metà: $x = y$.

Il **secondo passo** è capire gli estremi di integrazione dell'integrale triplo. Per quanto riguarda la terza dimensione, ovvero z, la questione è semplice poiché essa va da 0 a 1 (come viene esplicitato). Per quanta riguarda gli estremi di x e y è necessario uno "sguardo dall'alto":



Come è possibile osservare dalla figura, risulta evidente che y sia nell'intervallo $[1, 2]$. Per quanto riguarda la x, essa è compresa in $0 \le x \le y$. Adesso è possibile risolvere l'integrale triplo poiché si hanno tutti gli estremi chiari:

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le y,\ 1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1\right\}$$

$$\iiint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_0^y \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

Prima di risolvere l'integrale e rischiare di complicarsi i calcoli in questo modo, si osservi bene la sua forma. Come accadeva per le coordinate polari, anche qua si è di fronte ad una forma $x^2 + y^2$ che senza coordinate polari (o cilindriche in questo caso!) potrebbe essere ardua risolvere.

Il **terzo passo** è eseguire la conversione in coordinate cilindriche che non è altro che la conversione in coordinate polari dato che la variabile z rimane uguale (eq. 65)!

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Per convertire l'insieme, è necessario ragionare sugli estremi degli intervalli. Assodato che la z è identica, nel piano a due dimensioni, la x è limitata da 45°

fino a 90°, che tradotto in radianti:

$$\begin{aligned}
45° &\quad\rightarrow\quad 45 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{360} = \frac{\pi}{4} \\
90° &\quad\rightarrow\quad 90 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{360} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la y, essa è limitata da 1 a 2, valori che corrispondono anche al raggio delle due circonferenze (e cilindri nel piano $\mathbb{R}^3$). Si hanno tutti i valori per costruire il nuovo insieme con le coordinate cilindriche:

$$D = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, 1 \leq \rho \leq 2,\, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

Applicando la formula 67 si riscrive l'integrale come:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \left(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2 \right) \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \left(\rho^2 \left(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 \right) \right) \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{15}{4} \, \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\frac{15}{4} \cdot \left[\, \theta \, \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{4}\pi \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{15}{16}\pi
\end{aligned}$$

5.2.5 Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche sono pressoché identiche alle coordinate cilindriche (par. 5.2.4) ma con l'unica differenza che un punto viene identificato con delle coordinate polari un po' più complesse:

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} \qquad \rho \in [0, +\infty),\ \varphi \in [0, \pi],\ \theta \in [0, 2\pi) \tag{72}$$

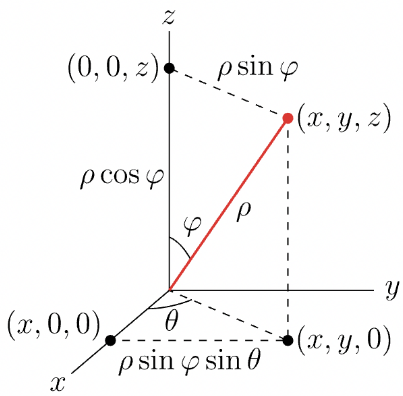


Figura 19: Rappresentazione grafica di un punto con le coordinate sferiche.

Definizione 8

Data una funzione $f(x, y, z)$ continua in un solido sferico B:

$$\begin{aligned} B &= \left\{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \le \rho \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta,\ \gamma \le \varphi \le \psi\right\} \\ B &= [a, b] \times [\alpha, \beta] \times [\gamma, \psi] \end{aligned} \tag{73}$$

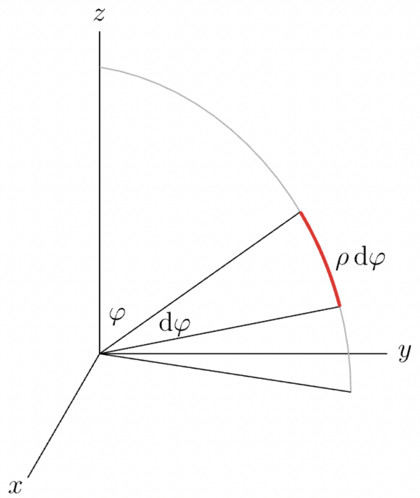
Allora la funzione f è possibile calcolarla con l'integrale triplo:

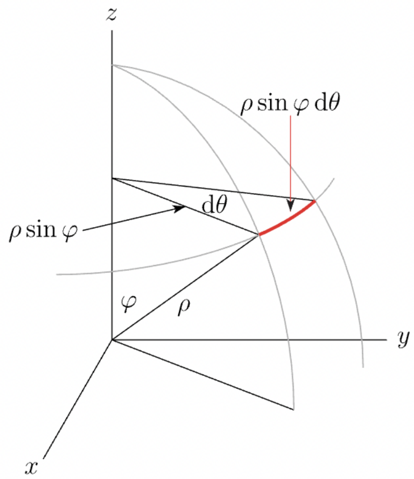
$$\iiint_B f(\rho, \theta, \varphi) \cdot \rho^2 \sin(\varphi)\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{74}$$

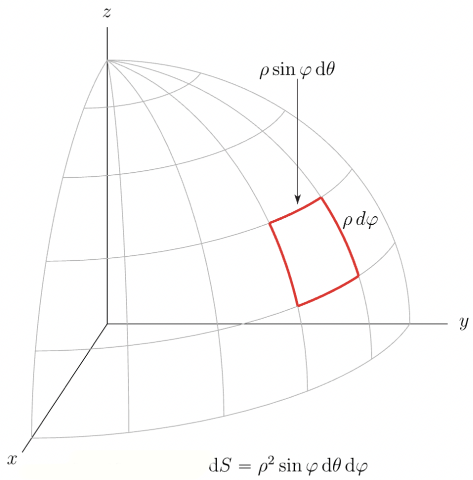
Ovvero con gli estremi definiti:

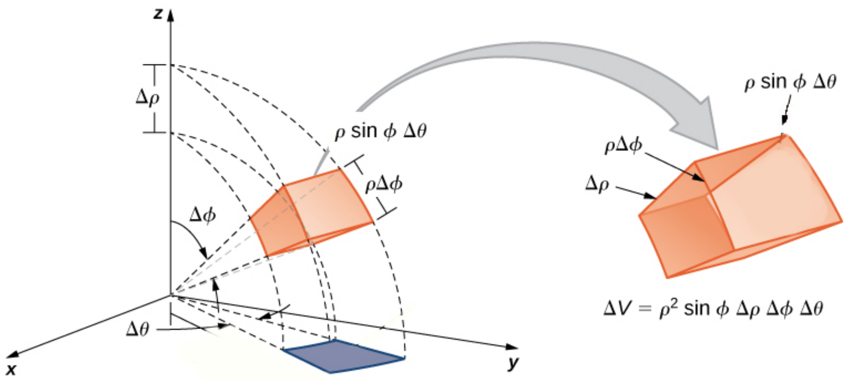
$$\int_\gamma^\psi \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(\rho, \theta, \varphi)\, \rho^2 \sin(\varphi)\ \mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}\varphi \tag{75}$$

Rappresentazione grafica dell'integrale triplo con coordinate sferiche:









Esempio

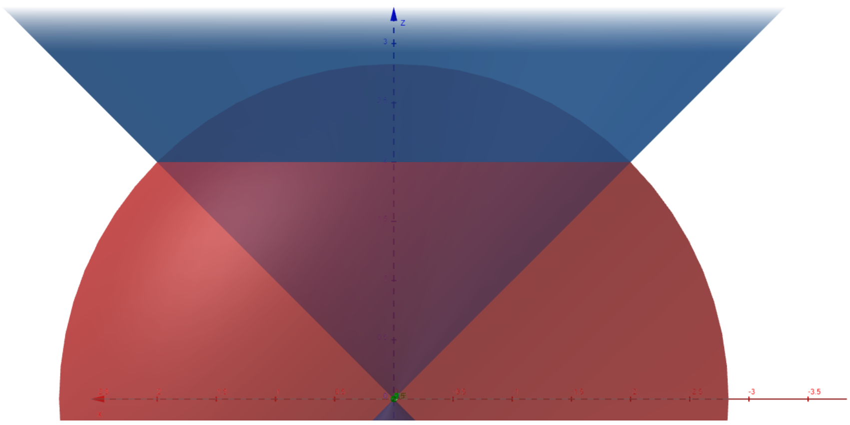
Data la regione:

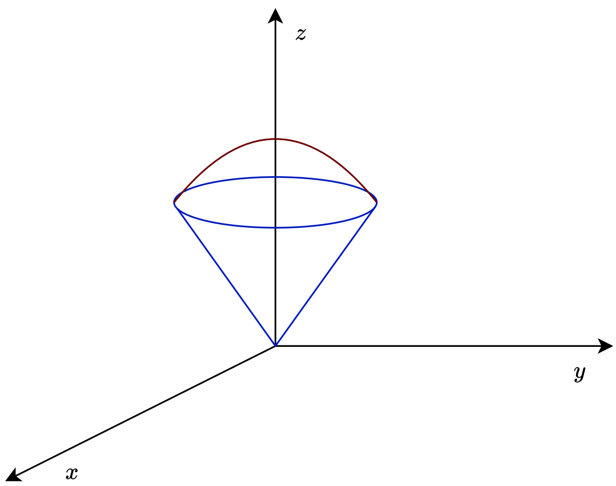
$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, \ z \geq 0\right\}$$

Calcolare l'integrale:

$$\iiint\limits_{\Omega} 8x^2 z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

Il **primo passo** è rappresentare le due figure:





In cui il cono è l'equazione $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$. Il **secondo passo** è l'applicazione delle coordinate sferiche. Immediatamente poiché si è davanti ad una sfera. Quindi, si parte con la variabile più semplice: ρ. Essa rappresenta la porzione verticale, cioè lungo z, in cui è calcolato l'integrale. In questo caso, varia da un minimo di zero, ad un massimo di "raggio della sfera". Infatti, il punto più alto è il raggio della sfera, che corrisponde a $\sqrt{8}$.

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{8}$$

Per quanta riguarda φ, ci si riferisce alla pendenza (valore dell'angolo) partendo dall'asse parallelo a z. Per cui, la pendenza parte da 0 e arriva fino all'intersezione tra il cono e la sfera, il quale è il valore più distante e quindi il limite superiore. Dato che è un cono, per definizione esso taglia esattamente a metà il grafico tra x e y, per cui il limite massimo è 45°, che in radianti corrisponde a:

$$45 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{360} = \frac{1}{4}\pi \quad \longrightarrow \quad 0 \le \varphi \le \frac{1}{4}\pi$$

Infine, l'ultimo valore da ottenere è θ. Rappresenta l'angolo giro della circonferenza e in questo caso non ci sono limitazioni, si prende tutta l'area:

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

Il **terzo passo** è l'applicazione della formula 75 dell'integrale triplo ricordando la conversione in coordinate sferiche e il determinante della matrice Jacobiana $\rho^2 \sin(\varphi)$:

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\Omega = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le \rho \le \sqrt{8},\ 0 \le \varphi \le \frac{1}{4}\pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{8}} 8 \left(\rho^2 \sin(\varphi)^2 \cos(\theta)^2 \right) \rho \cos(\varphi)\, \rho^2 \sin(\varphi) \ \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{8}} 8\rho^5 \sin(\varphi)^3 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi) \ \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$8 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \cdot \left(\int_0^{\sqrt{8}} \rho^5 \ \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$8 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \cdot \left(\left[\frac{\rho^6}{6} \right]_0^{\sqrt{8}} \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$8 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \cdot \frac{256}{3} \ \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{2048}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \ \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{2048}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \ \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{2048}{3} \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\varphi)^3 \cos(\varphi) \ \mathrm{d}\varphi$$

$\downarrow$ sostituzione: $t = \sin(\varphi) \quad \mathrm{d}\varphi = \dfrac{1}{\cos(\varphi)}\, \mathrm{d}t$

$$\frac{2048}{3} \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^3 \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} \ \mathrm{d}t$$

$$\frac{2048}{3} \cdot \pi \cdot \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{2048}{3} \cdot \pi \cdot \left[\frac{\sin(\varphi)^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{2048}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{16}$$

$$\frac{128}{3}\pi$$

6 Integrali di linea

6.1 Di prima specie

Definizione 1

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un arco di curva regolare:

$$\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b]) \qquad \gamma'(t) \neq \vec{0} \ \ \forall t \in [a, b]$$

E sia f una funzione continua del tipo:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

In cui A è un insieme aperto contenente il sostegno di γ.
Si chiama **integrale di linea di prima specie**, cioè l'integrale di f esteso al cammino γ il numero reale:

$$\int_\gamma f(x, y) \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)|| \, \mathrm{d}t \tag{76}$$

Nota bene: se la funzione $f(x, y) = 1$ per ogni x, y appartenente all'insieme A, allora l'integrale di linea di prima specie si riduce ad un banale calcolo della lunghezza dell'arco di curva γ (come calcolarlo: eq. 29).

Interpretazione geometrica dell'integrale di linea: se γ è una curva in $\mathbb{R}^2$, allora $\displaystyle\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$ è l'**area della superficie verticale limitata in basso dal sostegno di** γ **e in alto dalla superficie** $z = f(x, y)$.

Esempio 1

Data:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Calcolare l'integrale di linea:

$$\int_\gamma x \, \mathrm{d}s$$

Il **primo passo** è calcolare la lunghezza della curva poiché la formula (76) dell'integrale di linea è:

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)|| \, \mathrm{d}t$$

Per calcolare la lunghezza di una curva si utilizza l'eq. 29:

$$||\gamma'(t)|| = \left|\left| \begin{cases} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{cases} \right|\right| = \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Il **secondo passo** è calcolare l'integrale di linea. In questo caso, come argomento dell'integrale c'è la x, per cui si utilizza la x della parametrizzazione:

$$\int_\gamma x \, \mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t) \cdot 1 \, \mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esempio 2

Data:

$$\gamma(t) = (\sin(t) - t\cos(t), t\sin(t) + \cos(t)) \qquad t \in [0,1]$$

Calcolare l'integrale di linea:

$$\int_\gamma \frac{1}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}s$$

Il **primo passo** è calcolare la lunghezza della curva:

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\| &= \left\| \left(\begin{cases} \sin(t) - t\cos(t) \\ t\sin(t) + \cos(t) \end{cases} \right)' \right\| \\
&= \left\| \begin{cases} \cos(t) - (\cos(t) - t\sin(t)) \\ \sin(t) + t\cos(t) - \sin(t) \end{cases} \right\| \\
&= \left\| \begin{cases} \cancel{\cos(t) - \cos(t)} + t\sin(t) \\ \cancel{\sin(t)} + t\cos(t) \cancel{- \sin(t)} \end{cases} \right\| \\
&= \sqrt{(t\sin(t))^2 + (t\cos(t))^2} \\
&= \sqrt{t^2} \\
&= t
\end{aligned}$$

Il **secondo passo** è calcolare l'integrale di linea (ricordando di moltiplicare la lunghezza):

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}s &= \int_0^1 \frac{1}{(\sin(t) - t\cos(t))^2 + (t\sin(t) + \cos(t))^2} \cdot t\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \cdot t\, \mathrm{d}t \\
&\downarrow \ \text{sostituzione: } x = t^2 + 1 \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{2t}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot t \cdot \frac{1}{2t}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln(t^2+1)\right]_0^1 \\
&= \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

Esempio 3

Calcolare:

$$\int_\gamma (xy + 2z)\ \mathrm{d}s$$

Lungo il segmento di estremi $P(1,0,0)$ e $Q(0,1,1)$.

Per calcolare la parametrizzazione si utilizza la formula utilizzata nell'equazione 24 (par. 3.8.1):

$$\gamma(t) = (1,0,0) + t\,[(0,1,1) - (1,0,0)] = \begin{cases} 1-t \\ t \\ t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

Adesso si calcola la lunghezza:

$$\left|\left|\gamma(t)'\right|\right| = ||(-1,1,1)|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Si conclude con il calcolo dell'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (xy + 2z)\ \mathrm{d}s &= \int_0^1 ((1-t)\,t + 2t)\,\sqrt{3}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{3} \cdot \int_0^1 t - t^2 + 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{3} \cdot \int_0^1 -t^2 + 3t\,\mathrm{d}t \\
&= -\sqrt{3} \cdot \left(\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 3t\,\mathrm{d}t \right) \\
&= -\sqrt{3} \cdot \left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \right) \\
&= -\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) \\
&= \sqrt{3} \cdot \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

6.2 Campi vettoriali

Si chiama **campo vettoriale** in $\mathbb{R}^n$ un'applicazione:

$$\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Che associa a ogni punto di Ω un vettore n-dimensionale. La costante $\vec{F}$ è un campo vettoriale continuo (differenziabile) su Ω se tutte le sue componenti $F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sono funzioni continue (differenziabili). Per esempio:

- $\vec{F}(x, y) = (x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$
- $\vec{G}(x, y) = (-y, x) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$

Definizione 2

Sia $\vec{F}$ un campo vettoriale continuo su una regione che contiene il sostegno di una curva γ, regolare a tratti e orientata. Si chiama **integrale del campo $\vec{F}$ lungo γ** il numero reale:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \tag{77}$$

Tale formula viene indicata anche come **lavoro elementare**, ovvero la forza per spostamento infinitesimo.

Alcune note:

- Sia γ un arco di curva orientata. Se si indica con $-\gamma$ lo stesso arco percorso nel verso opposto, allora:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r}$$

- L'espressione formale:

$$\omega(x, y) = A(x, y) \, \mathrm{d}x + B(x, y) \, \mathrm{d}y$$

  Si chiama **forma differenziale lineare** (in $\mathbb{R}^2$) ed è un modo alternativo di esprimere il prodotto scalare $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, con:

$$\vec{F}(x, y) = (A(x, y), B(x, y)) \qquad \mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

  Si è quindi soliti scrivere l'**integrale di linea di un campo vettoriale** anche nella forma:

$$\int_\gamma \omega$$

6.2.1 Campi vettoriali conservativi

Definizione 3

Sia Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^n$ e $\overrightarrow{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Si dice che $\overrightarrow{F}$ è **conservativo** se esiste una funzione $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{F} = \nabla U$. In cui U è chiamato **potenziale** di $\overrightarrow{F}$.

Teorema 17 (**Fondamentale del calcolo per integrali di linea**). *Se $\overrightarrow{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un campo conservativo e $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è un suo potenziale, allora:*

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) \tag{78}$$

Dove $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è un arco di curva regolare a tratti con sostegno in Ω.

Esempio 1

Verificare che la funzione:

$$U(x, y) = x^3 + xy^2$$

È un potenziale del campo:

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \left(3x^2 + y^2, 2xy\right)$$

E successivamente valutare:

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$$

Dove γ è l'arco di circonferenza con centro in $(0, 0)$ che congiunge nell'ordine i punti $P(-2, 0)$ e $Q(0, -2)$.

Se U è il potenziale del campo $\overrightarrow{F}$, vuol dire che quest'ultimo è conservativo (come da definizione). Di conseguenza, vale l'equivalenza $\overrightarrow{F} = \nabla U$. Per cui facendo il gradiente del potenziale U, si dovrebbe ottenere il campo conservativo. Questo tipo di operazione viene solitamente effettuata a termine degli esercizi per essere sicuri che il potenziale trovato sia effettivamente uno dei possibili potenziali del campo conservativo.

Si procede con il calcolo del gradiente:

$$\nabla U = \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 2xy \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{F} = \nabla U \to \left(3x^2 + y^2, 2xy\right) = \nabla U$$

Adesso che si è dimostrato che U è un potenziale del campo $\overrightarrow{F}$, si valuta l'integrale di linea. Il grande vantaggio di un campo conservativo è il suo potenziale! Per cui <u>non</u> è necessario stare a parametrizzare la curva, ma basta semplicemente applicare il teorema 17, il quale afferma che dato un campo conservativo e un suo potenziale, allora si può calcolare l'integrale di linea, essendo a conoscenza degli estremi della parametrizzazione, come:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(Q) - U(P) &= U((0,-2)) - U((-2,0)) \\
&= \left(0^3 + 0 \cdot (-2)^2\right) - \left((-2)^3 + -2 \cdot 0^2\right) \\
&= 8
\end{aligned}$$

Esempio 2

Sapendo che:

$$\vec{F}(x,y,z) = 2xy\vec{i} + \left(x^2 + 2yz\right)\vec{j} + y^2\vec{k}$$

È un campo conservativo, calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo un qualunque cammino che congiunge i punti $A(0,0,0)$ e $B(1,1,1)$.

Dato che è noto che $\vec{F}$ è un campo conservativo, per calcolare il campo senza avere il potenziale si potrebbe sfruttare la definizione di campo conservativo, ovvero che qualsiasi percorso da A a B ha lo stesso valore. Di conseguenza, si prende in considerazione la parametrizzazione più semplice: la retta.

$$\gamma(t) = (0,0,0) + t(1,1,1) = (t,t,t) \qquad t \in [0,1]$$

E si calcola l'integrale di linea del campo (eq. 77):

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^1 \left(2t^2, 3t^2, t^2\right) \cdot (1,1,1)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 6t^2\ \mathrm{d}t \\
&= 2\left[t^3\right]_0^1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

6.2.2 Condizioni per la conservatività di un campo vettoriale

Teorema 18. *Se $\overrightarrow{F}$ è un campo conservativo di classe $\mathcal{C}^1$ sull'insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, allora:*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \tag{79}$$

Per ogni i, j e per ogni $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$.

Questo teorema esprime una **condizione** **<u>necessaria</u>**, **ma non sufficiente** affinché un campo sia conservativo. Un *metodo rapido* per controllare se è rispettata la condizione precedente è verificare la condizione di simmetrica della matrice Jacobiana del campo $\overrightarrow{F}$:

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Esempio

Il campo vettoriale:

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = yze^{xz}\overrightarrow{i} + e^{xz}\overrightarrow{j} + xye^{xz}\overrightarrow{k}$$

È conservativo. Verificare che è soddisfatta la condizione necessaria espressa dal precedente teorema e poi trovare un potenziale.

Il **primo passo** è verificare che la condizione necessaria del teorema sia rispettata. Si utilizza la matrice Jacobiana per mostrare come è possibile dimostrare rapidamente la condizione necessaria:

$$\begin{aligned} J_{\overrightarrow{F}}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_{\overrightarrow{i}}}{\partial x}(x, y, z) & \dfrac{\partial F_{\overrightarrow{j}}}{\partial x}(x, y, z) & \dfrac{\partial F_{\overrightarrow{k}}}{\partial x}(x, y, z) \\ \dfrac{\partial F_{\overrightarrow{i}}}{\partial y}(x, y, z) & \dfrac{\partial F_{\overrightarrow{j}}}{\partial y}(x, y, z) & \dfrac{\partial F_{\overrightarrow{k}}}{\partial y}(x, y, z) \\ \dfrac{\partial F_{\overrightarrow{i}}}{\partial z}(x, y, z) & \dfrac{\partial F_{\overrightarrow{j}}}{\partial z}(x, y, z) & \dfrac{\partial F_{\overrightarrow{k}}}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} yz^2e^{xz} & \boldsymbol{ze^{xz}} & \boldsymbol{y\left(e^{xz} + xze^{xz}\right)} \\ \boldsymbol{ze^{xz}} & 0 & \boldsymbol{xe^{xz}} \\ \boldsymbol{y\left(e^{xz} + zxe^{xz}\right)} & \boldsymbol{xe^{xz}} & x^2ye^{xz} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I colori indicano quale coppie osservare per capire se sono uguali e di conseguenza capire se la matrice è simmetrica. Per cui, in questo caso la matrice è simmetrica e la condizione necessaria è rispettata.

Il **secondo passo** è trovare un potenziale. Per farlo basta seguire i seguenti passaggi. Dato che i campi conservativi hanno la seguente proprietà $\overrightarrow{F} = \nabla U$, ovvero:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \\
\left(yze^{xz}, e^{xz}, xye^{xz}\right) &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

Calcolando l'integrale rispetto alla derivata parziale di x, si riesce ad ottenere una forma parziale del potenziale:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_x = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = yze^{xz} \implies U(x, y, z) &= \int yze^{xz}\,\mathrm{d}x \\
&= yz \cdot \int e^{xz}\,\mathrm{d}x \\
&= yz \cdot \frac{e^{xz}}{z} + c(y, z) \\
&= ye^{xz} + c(y, z)
\end{aligned}$$

$$\text{Forma parziale del potenziale: } U(x, y, z) = ye^{xz} + c(y, z)$$

Ovviamente vi è una costante che dipende da y, z, la quale può essere un numero o anche una funzione. Per trovare il potenziale c'è anche da valutare la y e la z. Per questo motivo si esegue la derivata parziale del potenziale (la sua forma parziale) rispetto ad y e si eguaglia alla y del campo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_y = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = e^{xz} \implies \frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{xz} + c(y, z)\right) &= e^{xz} \\
e^{xz} + \frac{\partial}{\partial y}c(y, z) &= e^{xz} \\
\frac{\partial}{\partial y}c(y, z) &= 0
\end{aligned}$$

$$\text{Forma parziale del potenziale: } U(x, y, z) = ye^{xz} + c_1(z)$$

Da questo risultato si deduce che la costante c non dipende da y, ma soltanto da z: $c_1(z)$. Si conclude la costruzione del potenziale valutando z:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_z = \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = xye^{xz} \implies \frac{\partial}{\partial z}\left(ye^{xz} + c_1(z)\right) &= xye^{xz} \\
xye^{xz} + \frac{\partial}{\partial z}c_1(z) &= xye^{xz} \\
\frac{\partial}{\partial z}c_1(z) &= 0
\end{aligned}$$

$$\text{Forma finale: } U(x, y, z) = ye^{xz} + k$$

Dato che la derivata di $c_1(z)$ è uguale a zero, vuol dire che essa è una costante (un numero, infatti la derivata di un numero è zero!). Si conclude l'esercizio scrivendo la forma finale del potenziale con il dettaglio di k:

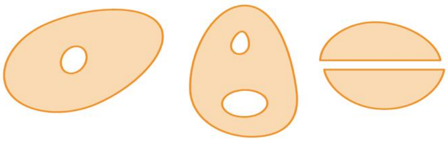
$$U(x, y, z) = ye^{xz} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

6.2.3 Condizione necessaria e sufficiente per campi conservativi: insiemi semplicemente connessi

Definizione 4

Un insieme aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **semplicemente connesso** se ogni curva chiusa semplice γ in Ω si può ridurre a un punto, con deformazioni continue, senza uscire da Ω.

simply-connected region



regions that are not simply-connected

Alcune osservazioni:

- In $\mathbb{R}^2$:
  - Ogni insieme aperto connesso, cioè "formato da un solo pezzo", e privo di buchi, è semplicemente connesso. In particolare, ogni aperto convesso è semplicemente connesso: **per cui l'insieme $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso**.
  - Il piano privo di un punto (per esempio $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$) **non** è semplicemente connesso.
  - Il piano privo di un segmento **non** è semplicemente connesso.
- In $\mathbb{R}^3$:
  - Ogni sottoinsieme aperto convesso è un insieme semplicemente connesso. Quindi, **l'insieme $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso**.
  - Lo spazio privato di un punto (per esempio $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$) è semplicemente connesso.
  - Lo spazio privato di una retta (per esempio uno degli assi cartesiani) **non** è semplicemente connesso.

Ora che gli insiemi sono stati definiti teoricamente, si può dare una condizione sufficiente e necessaria per gli insiemi conservativi.

Teorema 19. *Se il campo vettoriale* $\vec{F}$ *è definito su una regione aperta* ***semplicemente connessa*** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*, allora la condizione:*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \tag{80}$$

Per ogni i, j *e per ogni* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$*, è* ***necessaria e sufficiente*** *affinché* $\vec{F}$ *sia conservativo su* Ω*.*

Attenzione: in sede d'esame è necessario dire esplicitamente che l'insieme dell'esercizio è semplicemente connesso (se lo è) e che la matrice Jacobiana è simmetrica. Questo garantisce che il campo sia conservativo. L'omissione di una delle due parti (l'affermazione o la scrittura della matrice), non garantisce la correttezza dell'esercizio.

6.3 Operatori differenziali

Sia $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω (insieme aperto, connesso). Si definisce **divergenza** e **rotore** del campo $\vec{F}$ in questo modo:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F} \\
\operatorname{rot} \vec{F} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \nabla \times \vec{F} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} - \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial z} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{cases}
\end{aligned} \tag{81}
$$

Si noti che se il rotore $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ in ogni punto di Ω, si dice che $\vec{F}$ è un **irrotazionale**.
<u>Nota</u>: un campo conservativo è necessariamente irrotazionale.

Si può stabilire una corrispondenza tra i campi vettoriali e le forme differenziali:

Linguaggio dei campi vettoriali	**Linguaggio delle forme differenziali**
Lavoro del campo $\vec{F}$ sul cammino γ	Integrale della forma differenziale ω su γ
$\vec{F}$ è conservativo in Ω $\exists U : \vec{F} = \nabla U$	ω è esatta in Ω $\exists f : \omega = df = f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z$
$\vec{F}$ è irrotazionale in Ω $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$, cioè $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} \in \Omega$	ω è chiusa in Ω $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$, cioè $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} \in \Omega$
Un campo conservativo è irrotaziona-le	Una forma differenziale esatta è chiu-sa

6.3.1 Relazione tra integrali doppi e integrali di linea

Teorema 20 (Di Green nel piano). *Sia γ una curva semplice chiusa regolare a tratti orientata positivamente, immersa in un campo vettoriale piano $\vec{F}$ di classe $\mathcal{C}^1$. Sia R la regione limitata da γ. Allora vale la seguente uguaglianza:*

$$\oint_{\gamma^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad (82)$$

Il teorema si applica spesso nel calcolo delle aree. Infatti, scegliendo per esempio il campo $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$, il teorema di Green consente di scrivere:

$$\frac{1}{2} \oint_{\gamma^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_R \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = Area\,(R)$$

Esempio 1

Calcolare l'arco della regione di piano limitata dall'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Il **primo passo** è parametrizzare la curva di un'ellisse usando le formule a pagina 122:

$$\gamma(t) = \left(0 + \sqrt{4}\cos(t), 0 + \sqrt{9}\sin(t)\right) = (2\cos(t), 3\sin(t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Adesso si passa al calcolo dell'integrale usando il teorema di Green:

$$Area = \frac{1}{2} \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Con il campo vettoriale che corrisponde a (per essere in linea con il teorema di Green):

$$\vec{F}(x, y) = (-y, x)$$

Per cui il **secondo passo** è ottenere i valori per calcolare l'integrale:

$$\begin{array}{rcl}
\gamma(t) & = & (2\cos(t), 3\sin(t)) \\
\vec{F} & = & (-y, x) \\
\vec{F}(\gamma(t)) & = & (-3\sin(t), 2\cos(t)) \\
\gamma'(t) & = & (-2\sin(t), 3\cos(t))
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2} \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} & = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-3\sin(t), 2\cos(t)) \cdot (-2\sin(t), 3\cos(t)) \, \mathrm{d}t \\
& = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 6\sin(t)^2 + 6\cos(t)^2 \, \mathrm{d}t \\
& = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 6 \, \mathrm{d}t \\
& = & 3 \cdot 2\pi \\
& = & 6\pi
\end{array}$$

7 Appendice

7.1 Temi d'esame

In questo paragrafo viene presentata una lista di temi d'esame svolti durante la scrittura di questi appunti. Le risorse vengono raggruppate per appello, per cui nel caso in cui si fosse intenzionati a ripassare un solo argomento, si consiglia di andare alla fine del capitolo nella sezione "Esercizi". Infine, con "Ex." si intende il numero dell'esercizio nel testo d'esame.

- **2023**
  - **07 febbraio**
    - Gruppo A
      - Ex. 1) Variabili separabili e problema di Cauchy ma posto in maniera differente: pag. 61
  - **03 marzo**
    - Gruppo A
      - Ex. 1) Variabili separabili e problema di Cauchy: pag. 59
      - Ex. 2) Metodo di somiglianza e problema di Cauchy con soluzioni dell'equazione caratteristica immaginarie (esercizio interessante): pag. 67
      - Ex. 3) (a) Dominio, insieme aperto o chiuso, limitato o illimitato, connesso o sconnesso: pag. 141
      - Ex. 3) (b) Derivata direzionale e direzione di massima crescita per f: pag. 145
      - Ex. 4) (a) Limiti e continuità e calcolare per quale valore la funzione risulta continua nell'origine: pag. 149
      - Ex. 4) (b) Parametrizzazione di una retta tangente e trovare l'equazione cartesiana: pag. 157
  - **21 giugno**
    - Gruppo A
      - Ex. 1) Variabili separabili e problema di Cauchy: pag. 51
      - Ex. 2) Metodo di somiglianza e problema di Cauchy: pag. 66
      - Ex. 3) (a) Dominio, insieme aperto o chiuso, limitato o illimitato, connesso o sconnesso: pag. 139
      - Ex. 3) (b) Equazione del piano tangente al grafico di una funzione $f(x, y)$ nel punto $(x, y, f(x, y))$: pag. 144
      - Ex. 4) (a) Limiti e continuità: pag. 148
      - Ex. 4) (b) Parametrizzazione di una retta tangente e trovare l'equazione cartesiana: pag. 155
  - **10 luglio**
    - Gruppo A
      - Ex. 1) Variabili separabili e problema di Cauchy: pag. 57
      - Ex. 2) Metodo di somiglianza e problema di Cauchy: pag. 65
      - Ex. 3) (a) Dominio, insieme aperto o chiuso, limitato o illimitato, connesso o sconnesso: pag. 138

Ex. 3) (b) Derivata direzionale: pag. 143
Ex. 4) (a) Limiti e continuità con differenziabilità: pag. 147
Ex. 4) (b) Calcolo della lunghezza di una curva piana: pag. 154

- **06 settembre**
  - Gruppo A
    - Ex. 1) Variabili separabili e problema di Cauchy: pag. 55
    - Ex. 2) Metodo di somiglianza e problema di Cauchy: pag. 63
    - Ex. 3) (a) Dominio, insieme aperto o chiuso, limitato o illimitato, connesso o sconnesso: pag. 136
    - Ex. 3) (b) Derivata direzionale e calcolo del valore massimo della derivata direzionale al variare del vettore $\overrightarrow{v}$: pag. 142
    - Ex. 4) (a) Limiti e continuità: pag. 146
    - Ex. 4) (b) Parametrizzazione di una retta tangente e di una retta normale: pag. 152

- **2022**
  - **01 marzo**
    - Gruppo A
      - Ex. 4) (a) Limiti e continuità: pag. 150

7.2 Raccoglitore di argomenti

In questo paragrafo viene presenta una lista di argomenti presenti all'esame raggruppata per esercizio. Per esempio, l'esercizio 3 sarà composto da argomenti del tipo: limiti, continuità, derivate direzionali, valore massimo, ecc. L'intento è quello di analizzare ogni tipo di argomento raggruppato per numero di esercizio, così da abituarsi all'esame.