Indice

1 Fondamenti

1.1 Matematica preliminare

1.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso c appartiene all'insieme dei complessi $\mathbb{C}$ e la sua forma è del tipo:

$$c = \Re + j\Im$$

con $\Re, \Im$ variabili $\in \mathbb{R}$ e j chiamata *unità immaginaria* rappresentata come $j = \sqrt{-1}$. Inoltre, $\Re$ rappresenta la *parte reale* e $\Im$ la *parte immaginaria*. Il coniugato di c è

$$\tilde{c} = \Re - j\Im$$

I numeri complessi, dal punto di vista geometrico, possono essere visti come punti su un piano (chiamato *piano complesso*) e descritti da coordinate (R, I). Nel piano complesso, le ascisse (x) sono rappresentate dalla parte reale, mentre le ordinate (y) dalla parte immaginaria.

Spesso è utile rappresentare i numeri complessi in coordinate polari formate nel seguente modo $(modulo, angolo)$. Questa forma viene denominata *forma polare* di un numero complesso:

$$c = \Re + j\Im = |c|(\cos\theta + j\sin\theta)$$

dove:

$$|c| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \longrightarrow \text{chiamato } \textit{modulo} \text{ o } \textit{magnitudo}$$

invece, *theta* rappresenta:

$$\theta \cong \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right) \longrightarrow \text{chiamato } \textit{angolo}, \textit{fase} \text{ o } \textit{argomento} \ \underline{\text{in radianti}}$$

Grazie alla formula di Eulero:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

è possibile riscrivere la forma polare di un numero complesso in maniera alternativa, ossia:

$$c = \Re + j\Im = |c|\left(\cos\theta + j\sin\theta\right) = |c|e^{j\theta}$$

La **somma** e la **moltiplcazione** di due numeri complessi diventa:

$$c_1 = R_1 + jI_1 \qquad c_2 = R_2 + jI_2$$

$$\text{Somma: } c_1 + c_2 = (R_1 + R_2) + j\left(I_1 + I_2\right)$$

$$\text{Moltiplicazione con Eulero: } c_1 \cdot c_2 = (R_1R_2 - I_1I_2) + j\left(R_1I_2 + I_1R_2\right) \longrightarrow = |c_1||c_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

1.1.2 Funzioni complesse di variabile reale

Dato $t \in \mathbb{R}$, una funzione f complessa di variabile reale è $f : D_1 \subseteq \mathbb{R} \to D_2 \subseteq \mathbb{C}$. Viene introdotto questo concetto poiché il ***fasore*** è un esempio fondamentale. Le **caratteristiche** di questa funzione:

- È una funzione complessa che modella la posizione di un punto che ruota attorno all'orgiine con raggio determinato $|c|$ e velocità angolare costante $\theta(t)$.
- Se la funzione fosse nei numeri reali, sarebbe più dispendioso in termini di numero di funzioni da utilizzare.

L'**obbiettivo** dei fasori è quello di *passare dal dominio del tempo* (o spazio) *a quello dell'analisi frequenziale.*
La particolarità è che nel tempo il fasore riesce a variare un numero complesso (in forma polare) mantenendo il modulo $|c|$ fisso:

$$|c|e^{j\theta} \to |c|e^{j\theta(t)}$$

dove $\theta(t)$ indica la ***velocità angolare***. Quest'ultima può essere calcolata tramite:

$$\theta(t) \longrightarrow \frac{2\pi}{T_0}t + \phi$$

dove T_0 indica il *tempo* impiegato per eseguire 2π radianti.

Solitamente si utilizza il fasore con le seguenti supposizioni:

- ✍ Coordinate rappresentate con (R, I)
- ✍ Impostata una distanza unitaria fissa dall'origine $|c| = 1$
- ✍ Velocità angolare costante pari a $2\pi/sec.$, ossia $\theta(t) = 2\pi t, T_0 = 1$sec.
- ✍ Con $t = 0$ si ha $\theta = 0$
- ✍ Viene mantenuto $\phi = 0$

1.1.3 Funzioni pari e dispari

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ***pari*** se e solo se:

$$f(t) = f(-t)$$

Invece, una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ***dispari*** se e solo se:

$$f(t) = -f(-t)$$

1.1.4 Segnali periodici

Un segnale f è ***periodico*** di periodo T o T-periodico se:

$$\exists\, T_0 \in R^+ : f\left(t+T_0\right) = f(t), \quad \forall t \in D_1$$

e T_0 è il minor numero per cui la condizione di ripetizione si verifica.

Dato un periodo T_0 con la lettera μ_0 si indica la ***frequenza fondamentale***:

$$\mu_0 = \frac{1}{T_0}$$

Fissato $T_0 > 0$ i ***segnali trigonometrici*** di minimo periodo T_0 sono:

$$f(t) = \cos\left(2\pi\mu_0 t\right) \qquad f(t) = \sin\left(2\pi\mu_0 t\right)$$

dove μ è una frequenza generale, mentre $\mu_0 = \dfrac{1}{T_0}$ è la **frequenza fondamentale**. Invece, spesso la **velocità angolare** o ***pulsazione*** viene rappresentata come:

$$2\pi\mu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

Inoltre, fissato un $\theta \in \mathbb{R}$ chiamato ***fase*** si osserva che anche le funzioni:

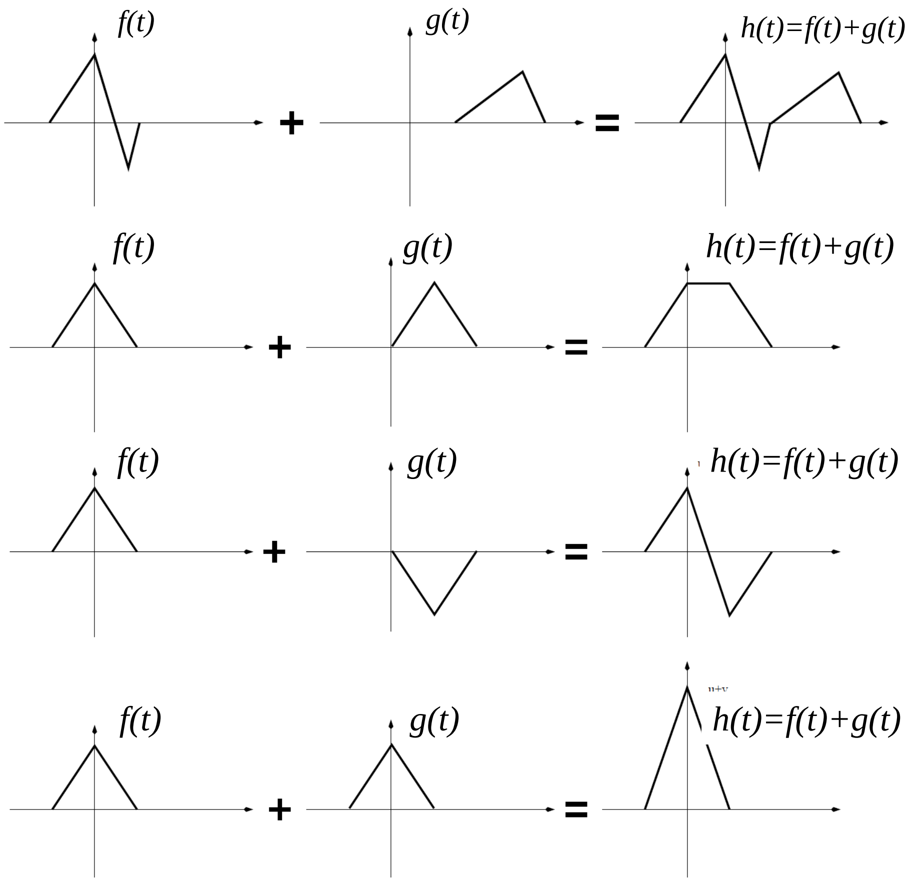
$$f(t) = \cos\left(2\pi\mu_0 t + \theta\right) \qquad f(t) = \sin\left(2\pi\mu_0 t + \theta\right)$$

hanno il medesimo periodo T.
Infine, la fase θ permette di eseguire operazione di *shift*.

1.2 Operazioni fondamentali

1.2.1 Somma

La ***somma*** di due segnali è facile quando essi non interferiscono, ovvero quando **non** sono contemporaneamente $\neq 0$. Alcuni esempi qui di seguito.



1.2.2 Shift (o traslazione)

Lo ***shift*** (o traslazione) è il cambio di posizione di un segnale. Può essere effettuato:

- **Traslazione a destra** con la funzione $f(t-\tau)$
- **Traslazione a sinistra** con la funzione $f(t+\tau)$

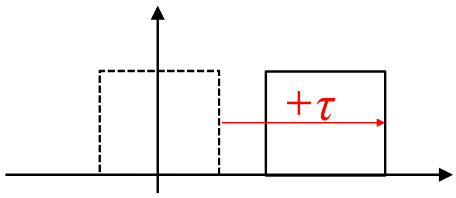


Figura 1: Shift a destra

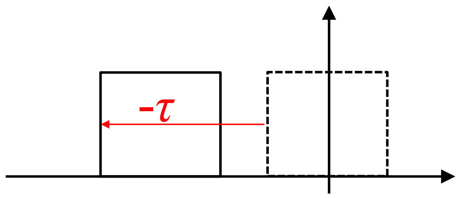


Figura 2: Shift a sinistra

1.2.3 Funzione box Π e impulso di Dirac

La funzione ***box*** è definita nel seguente modo:

$$A\Pi(\frac{x}{b}) \qquad x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

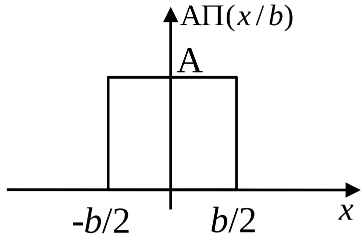


Figura 3: Box generica

La funzione $\delta(x)$ è chiamata ***impulso unitario*** o ***impulso di Dirac*** perché è definita nel seguente modo:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Quindi è un impulso che tende all'infinito solamente quando la x è nell'origine, ma il suo integrale è uguale a 1. Alcune **proprietà** dell'impulso:

1. $\delta(x - x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0$
2. Data una funzione generica f (**setacciamento**): $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\, dt = f(x_0)$
3. $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
4. $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, fissato $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

1.2.4 Funzione sinc

La funzione ***sinc*** è definita nel seguente modo:

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Ha due **caratteristiche** importanti: (1) l'intersezione con l'asse delle x avviene sempre nei numeri interi positivi e negativi (quindi 1 e -1, 2 e -2, ecc.); (2) il limite $\lim_{t \to \pm\infty} \operatorname{sinc}(t) = 0$.
Questa funzione è **importante per l'analisi nel dominio del tempo** (o **frequenza**).

1.2.5 Funzione triangolo Λ

La funzione ***triangolo*** è definita nel seguente modo:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione è **importante per l'analisi spettrale e** per le **operazioni di convoluzione**.

1.2.6 Funzione segno (sgn)

La funzione ***segno*** è definita nel seguente modo:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Questa funzione ribalta segnali sopra o sotto l'asse delle x.

1.2.7 Funzione gradino

La funzione ***gradino*** è definita nel seguente modo:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Questa funzione rappresenta un **segnale** che si attiva a partire dal tempo specificato e rimane attivo indefinitamente. Attenzione! Non si confonda questo segnale con il segno.

1.2.8 Treno di impulsi

Il ***treno di impulsi*** $S_{\Delta T}(x)$ è la somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità ΔT:

$$S_{\Delta T}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

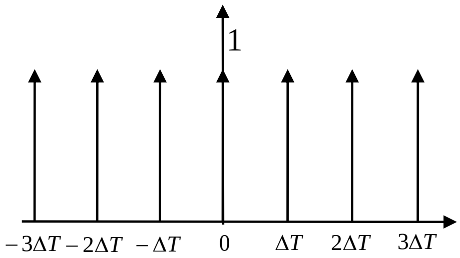


Figura 4: Treno di impulsi

1.2.9 Energia di un segnale

L'***energia di un segnale*** è definita nel seguente modo:

$$E_f = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\, dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \quad \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), & f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **ad energia finita** (o **di energia**) se l'integrale che rappresenta l'energia converge ed è diverso da 0. Quindi:

☞ **Condizione *sufficiente*** all'esistenza della sua trasformata di Fourier. Le funzioni trigonometriche non sono di energia ma hanno comunque la Trasformata di Fourier.

☛ **Condizione *necessaria*** per essere un segnale ad energia finita, all'infinito ($+\infty$ e $-\infty$) l'**ampiezza** va a zero.

Alcuni esempi:

✰ **Segnali di energia.** Impulsi rettangolari, oscillazioni smorzate (sinc);

✰ **Segnali <u>non</u> di energia.** Funzioni trigonometriche sin e cos.

L'**unità di misura** è il *joule.*

1.2.10 Potenza media di un segnale

La ***potenza media di un segnale*** è definita nel seguente modo:

$$P_f = \begin{cases} \displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t)\, dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt \quad \text{con } |f(t)|^2 = \tilde{f}(t)f(t), & f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Un segnale si dice **a potenza finita** (o **di potenza**) se l'integrale che rappresenta la potenza converge ed è diverso da 0. L'**unità di misura** è il *watt*. Infine, un segnale ad energia finita ha la potenza che tende a zero (per cui un segnale non può appartenere ad entrambe le categorie). Invece, esistono segnali che non sono né di energia, n* di potenza finita.

1.3 Altre operazioni fondamentali

1.3.1 Rescaling (o riscalatura)

La funzione di ***rescaling*** è definita nel seguente modo:

$$\forall f(t) : D_1 \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0$$

Simile allo *shift*, il *rescaling* ha una definizione generica e due varianti:

- **Definizione generica** con la funzione semplice $f(t)$ (immagine 5).
- **Ritardo lineare del segnale di un fattore** ω con la funzione $f(\omega t), 0 < \omega < 1$ (immagine 6).
- **Accelero lineare del segnale di un fattore** ω con la funzione $f(\omega t), \omega > 1$ (immagine 7).

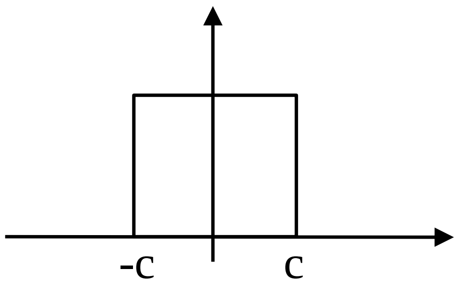


Figura 5: Definizione generica

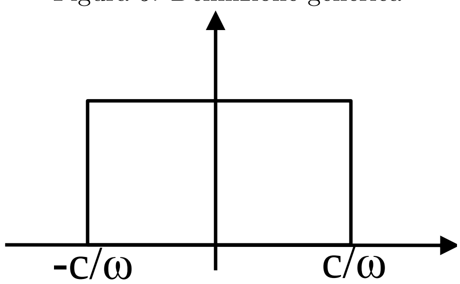


Figura 6: Ritardo lineare del segnale di un fattore ω

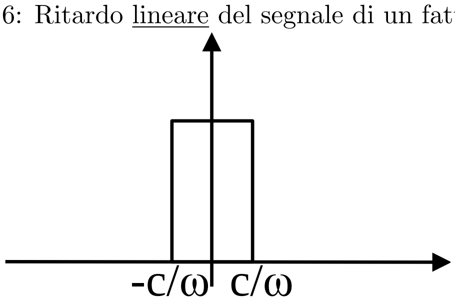


Figura 7: Accelero lineare del segnale di un fattore ω

1.3.2 Cross-Correlazione

Dati $f_1(\tau), f_2(\tau)$ segnali continui, $\tau \in \mathbb{R}$ il segnale di ***cross-correlazione*** viene definito come:

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1(\tau) f_2(\tau - t)\, d\tau$$

In cui $\tilde{f}_1(\tau)$ rappresenta un *complesso coniugato*. Nel caso in cui f_1 è reale, allora $\tilde{f}_1(\tau) \rightarrow f_1(\tau)$.
Infine, con $t = 0$ si ha l'***integrale di cross-correlazione***, il quale è definito se l'integrale converge (ovviamente se il segnale non è né di energia, né di potenza, la convergenza non esiste!).

1.3.3 Esercizi d'esame

Esercizio.
Il primo esercizio fornisce una funzione $f(t)$:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t}$$

Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

I Rappresentare graficamente il segnale;

II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se $f(t)$ è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida. Infine, calcolare l'energia o la potenza nel caso in cui $f(t)$ sia solo composta da e^{-2t};

III Scrivere l'espressione analitica rispetto $z(t) = -f(-t)$ e $v(t) = f(t+4)$

Risoluzione I.
Il **primo passo** è quello di scomporre la funzione così da avere una visione più chiara sulle operazioni da effettuare:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) e^{-2t} \longrightarrow f(t) = \Pi\left(\frac{1}{4}\cdot(t-2)\right)$$

Come si può osservare, ci sono due operazioni da eseguire. Quindi, dopo l'esplicitazione si esegue la rappresentazione del segnale base $\Pi(t)$:

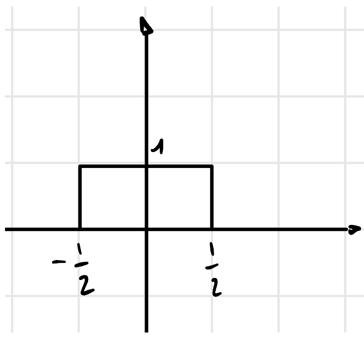


Figura 8: Rappresentazione della funzione $f(t)$, ovvero un box.

Adesso si esegue l'operazione di moltiplicazione per un fattore che in questo caso è $\frac{1}{4}$. Quindi si rappresenta la box $\Pi\left(\frac{1}{4}\cdot t\right)$:

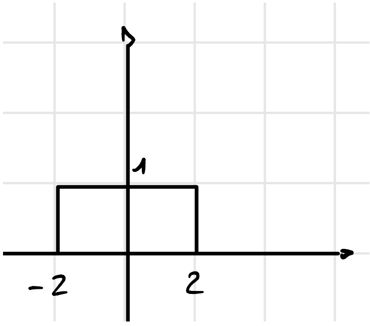


Figura 9: Box $\Pi\left(\frac{1}{4}\cdot t\right)$ allargata.

L'operazione che è stata effettuata è stata semplicemente considerare la box del tipo $\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$. Ricordandosi le nozioni del corso di Sistemi, per definizione quindi la box è definita nell'intervallo $-2,+2$.

Infine, viene applicata l'ultima operazione, ovvero il -2 all'incognita t. Quindi, la funzione box diventerà $\Pi\left(\frac{1}{4}\left(t-2\right)\right)$ e la sua rappresentazione grafica sarà uno shift a destra (ritardo):

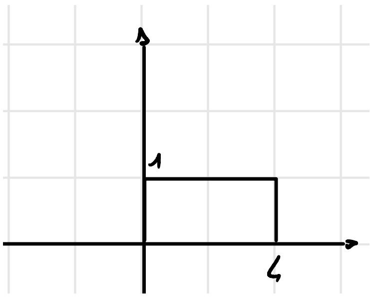


Figura 10: Box $\Pi\left(\frac{1}{4}\left(t-2\right)\right)$ dopo lo shift a destra.

Il **primo punto si conclude** con la rappresentazione del segnale e^{-2t} e la sua combinazione con la box. Quindi:

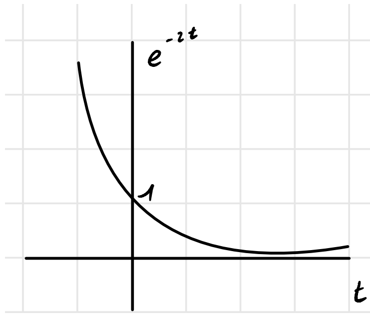


Figura 11: Rappresentazione della funzione e^{-2t}

E infine la sua concatenazione con la box, quindi una sorta di applicazione di un filtro:

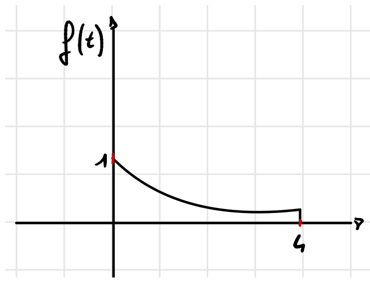


Figura 12: Rappresentazione finale della funzione $f(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)e^{-2t}$

Risoluzione II.

Guardando la figura 12 si può già intuire che tipo di segnale sia. Infatti, dato che è limitato e non si estende all'infinito, per definizione è un **segnale finito**, quindi **di energia** e non di potenza. Per dimostrare questa affermazione, si eseguono i calcoli:

$$\textbf{Definizione di energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 \, \mathrm{d}t$$

$$\textbf{Definizione di potenza: } P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) \, \mathrm{d}t$$

Dopo le definizioni, si esegue l'effettivo calcolo con i valori numerici:

Energia finita

$$E_f = \int_0^4 e^{-4t} \, \mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-4t}}{-4}\right|_0^4 = \frac{-e^{-16}+1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Potenza finita

$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^4 e^{-4t} \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Come si osserva dai risultati, è un segnale di energia finita poiché è un valore noto, invece non è un segnale di potenza poiché il risultato è zero e non rispetta la definizione.

Al contrario, se la funzione fosse composta solamente dall'esponenziale, il calcolo dell'energia e della potenza sarebbe:

$$\textbf{Energia: } E_f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t} \, \mathrm{d}t = \left.\frac{e^-4t}{-4}\right|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-4t} - e^{4t}}{-4} = \infty$$

$$\textbf{Potenza: } P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-4t} \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \left.\frac{e^{-4t}}{-4} \cdot \frac{1}{T}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-2T} - e^{2T}}{-4T} = \infty$$

Come si evince dai calcoli, il segnale non è né di energia né di potenza perché entrambi i risultati sono uguali a infinito.

Risoluzione III.

Considerando la funzione $z(t)$, si osserva che è la copia simmetrica rispetto all'origine di $f(t)$. Invece, la funzione $v(t)$ è identica alla funzione $f(t)$ ma "shiftata" a sinistra di 4:

$$f(t) = -f(-t) \qquad v(t) = f(t+4)$$

Esercizio 2.
Il secondo esercizio fornisce una funzione $f(t)$:

$$f(t) = \text{sgn}\left(a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right)$$

Con $T_0 = 2$. Le **richieste** dell'esercizio sono le seguenti:

I Rappresentare graficamente il segnale;

II Calcolare sia l'energia che la potenza media. Inoltre, dire se $f(t)$ è una funzione di energia o di potenza fornendo una motivazione valida.

Risoluzione I.
Viene rappresentato il segnale della funzione segno sng:

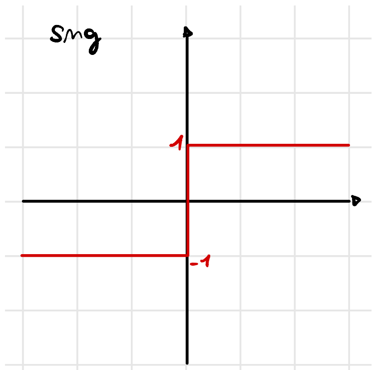


Figura 13: Funzione segno sng.

Si esplicitando le operazioni della funzione:

$$f(t) = \text{sgn}\left(a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right) = \cos\left(\frac{1}{T_0} \cdot 2\pi t\right)$$

E si rappresenta inizialmente la funzione $\cos(2\pi)$ con $T_0 = 1$:

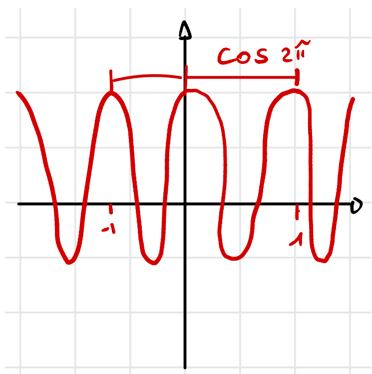


Figura 14: Funzione coseno $\cos(2\pi)$.

Si conclude la rappresentazione grafica aumentando T_0 in maniera molto semplice:

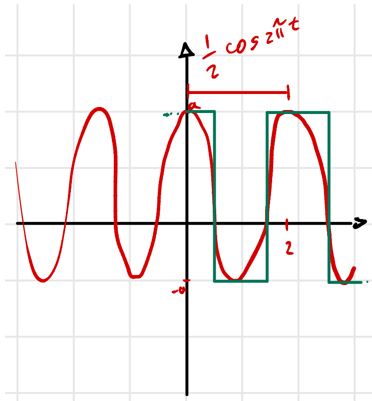


Figura 15: Funzione coseno $\cos(2\pi)$ moltiplicata per $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{2}$.

Risoluzione II.

Si conclude l'esercizio calcolando l'energia o la potenza del segnale. Per farlo, dato che non è definito in un intervallo ma continua all'infinito, si calcolano i rispettivi integrali in un intervallo arbitrario n e poi lo si estende all'infinito:

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{-n\cdot\frac{T_0}{2}}^{n\cdot\frac{T_0}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \infty$$

$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-n\frac{T_0}{2}}^{n\frac{T_0}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \cancel{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\cancel{n}T_0} \cdot \cancel{n} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{T_0} \cdot T_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \longrightarrow \neq 0$$

È evidente che il segnale è di potenza. Come si evince dalla figura 15, i tratti di colore verde indicano il rettangolo formato dal segnale. Calcolando l'area del rettangolo, si ottiene esattamente il valore di T_0. Infatti, la base del rettangolo (verticale) è 2, mentre l'altezza (orizzontale) è 1.