Calcolo Numerico - Appunti

260236

marzo 2024

Prefazione

Ogni sezione di teoria presente in questi appunti, è stata ricavata dalle seguenti risorse:

- Calcolo Scientifico: Esercizi e problemi risolti con MATLAB e Octave. [1]

Altro:

- GitHub repository

Indice

1 Equazioni non lineari

1.1 Introduzione

Il **calcolo degli zeri di una funzione** f reale di variabile reale o delle **radici dell'equazione** $f(x) = 0$, è un problema assai ricorrente nel Calcolo Scientifico.

In generale, *non è possibile* approntare metodi numerici che calcolino gli zeri di una generica funzione in un numero finito di passi. I metodi numerici per la risoluzione di questo problema sono pertanto necessariamente *iterativi*. A partire da uno o più dati iniziali, scelti convenientemente, essi generano una successione di valori $x^{(k)}$ che, sotto opportune ipotesi, convergerà ad uno zero α della funzione f studiata.

1.2 Il metodo di bisezione (o iterativo)

Sia f una funzione continua in $[a, b]$ tale che $f(a) f(b) < 0$. Per cui, vale il teorema degli zeri di una funzione continua, ossia f ammette almeno uno zero in (a, b).

Si supponga che ci sia un solo zero, indicato con α e nel caso in cui ce ne sia più di uno, individuare un intervallo tale che ne contenga solo uno.

Il **metodo di bisezione** (o **iterativo**) è una strategia che si suddivide nei seguenti passaggi:

1. **Dimezzare l'intervallo di partenza**;
2. **Selezionare tra i due sotto-intervalli ottenuti quello nel quale f cambia di segno agli estremi**;
3. **Applicare ricorsivamente questa procedura all'ultimo intervallo selezionato**.

Matematicamente parlando, dato $I^{(0)} = (a, b)$, e più in generale, $I^{(k)}$ il sotto-intervallo selezionato al passo k-esimo, si sceglie come $I^{(k+1)}$ il semi-intervallo di $I^{(k)}$ ai cui estremi f cambia di segno.

Questa procedura garantisce che ogni sotto-intervallo selezionato $I^{(k)}$ conterrà α. Questo poiché la successione $\left\{x^{(k)}\right\}$ dei punti medi dei sotto-intervalli $I^{(k)}$ dovrà ineluttabilmente convergere a α, in quanto la **lunghezza dei sotto-intervalli tende a** 0 per k che **tende all'infinito**.

Formalizziamo questa idea con un piccolo algoritmo. Ponendo:

$$a^{(0)} = a, \quad b^{(0)} = b, \quad I^{(0)} = \left(a^{(0)}, b^{(0)}\right), \quad x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$$

Al passo $k \geq 1$ il metodo di bisezione calcolerà il semi-intervallo $I^{(k)} = \left(a^{(k)}, b^{(k)}\right)$ dell'intervallo $I^{(k-1)} = \left(a^{(k-1)}, b^{(k-1)}\right)$, nel seguente modo (si ricorda che α è lo zero che si sta cercando):

1. Calcolo $x^{(k-1)} = \dfrac{a^{(k-1)} + b^{(k-1)}}{2}$
2. Se $f\left(x^{(k-1)}\right) = 0$:
   (a) Allora $\alpha = x^{(k-1)}$ e l'algoritmo termina.
3. Altrimenti, se $f\left(a^{(k-1)}\right) \cdot f\left(x^{(k-1)}\right) < 0$:
   (a) Si pone $a^{(k)} = a^{(k-1)}$
   (b) Si pone $b^{(k)} = x^{(k-1)}$
   (c) Si incrementa $k+1$ e si ripete ricorsivamente.
4. Altrimenti, se $f\left(x^{(k-1)}\right) \cdot f\left(b^{(k-1)}\right) < 0$:
   (a) Si pone $a^{(k)} = x^{(k-1)}$
   (b) Si pone $b^{(k)} = b^{(k-1)}$
   (c) Si incrementa $k+1$ e si ripete ricorsivamente.

Example 1

Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si parta da $a^(0) = -0.25$ e $b^{(0)} = 1.25$, e si applichi il metodo di bisezione:

1. Con $a^{(0)} = -0.25$ e $b^{(0)} = 1.25$:
   (a) Si calcola il punto medio:
   $$x^0 = \frac{a^0 + b^0}{2} = \frac{-0.25 + 1.25}{2} = 0.5$$
   (b) Si calcola la funzione con il punto medio come parametro:
   $$f(0.5) = 0.5^2 - 1 = -0.75$$
   (c) Dato che la funzione nel punto medio non è uguale a zero, l'algoritmo deve continuare. Per farlo, bisogna sostituire il punto medio con uno dei due estremi. Per decidere quale dei due sostituire, è necessario capire in quale cambia valore la funzione. Si verifica inizialmente con $a^{(0)}$:
   $$\begin{aligned} f\left(a^{(0)}\right) f\left(x^{(0)}\right) < 0 &= f(-0.25)\, f(0.5) < 0 \\ &= (-0.9375 \cdot -0.75) < 0 \\ &= 0.703125 \text{ ✗} \end{aligned}$$

(d) Si procede con l'algoritmo, provando adesso la $b^{(0)}$:

$$\begin{aligned} f\left(x^{(0)}\right) f\left(b^{(0)}\right) < 0 &= f(0.5)\, f(1.25) < 0 \\ &= (-0.75 \cdot 0.5625) < 0 \\ &= -0.421875 \checkmark \end{aligned}$$

(e) Si pone $a^{(1)} = x^{(0)} = 0.5$

(f) Si pone $b^{(1)} = b^{(0)} = 1.25$

(g) Si incrementa k, $k = k + 1 = 0 + 1 = 1$

2. Con $a^{(1)} = 0.5$ e $b^{(1)} = 1.25$:

(a) Si calcola il punto medio:

$$x^1 = \frac{a^1 + b^1}{2} = \frac{0.5 + 1.25}{2} = 0.875$$

(b) Si calcola la funzione con il punto medio come parametro:

$$f(0.875) = 0.875^2 - 1 = -0.234375$$

(c) Dato che la funzione nel punto medio non è uguale a zero, l'algoritmo deve continuare:

$$\begin{aligned} f\left(a^{(1)}\right) f\left(x^{(1)}\right) < 0 &= f(0.5)\, f(-0.234375) < 0 \\ &= (-0.75 \cdot -0.945068359375) < 0 \\ &= 0.70880126953125 \text{ ✗} \end{aligned}$$

(d) Si procede con l'algoritmo:

$$\begin{aligned} f\left(x^{(1)}\right) f\left(b^{(1)}\right) < 0 &= f(-0.234375)\, f(1.25) < 0 \\ &= (-0.945068359375 \cdot 0.5625) < 0 \\ &= -0.5316009521484375 \checkmark \end{aligned}$$

(e) Si pone $a^{(2)} = x^{(1)} = 0.875$

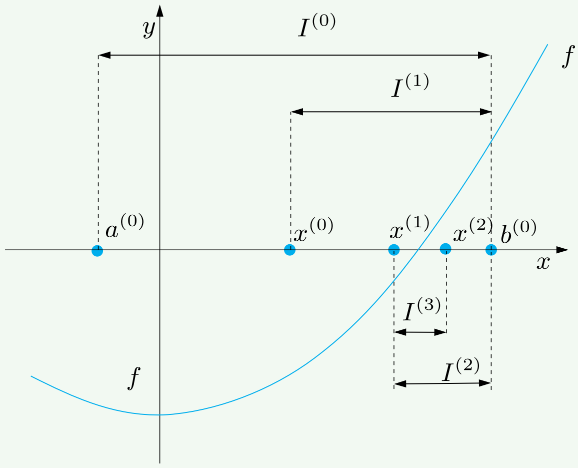
(f) Si pone $b^{(2)} = b^{(1)} = 1.25$

(g) Si incrementa k, $k = k + 1 = 1 + 1 = 2$

Si omettono i restanti calcoli per $k = 2, k = 3$, ma si lasciano qua di seguito i risultati:

- $I^{(2)} = (0.875, 1.25)$ e $x^{(2)} = 1.0625$
- $I^{(3)} = (0.875, 1.0625)$ e $x^{(2)} = 0.96875$

Nella seguente figura si possono vedere le iterazioni effettuate:



Iterazioni effettuate. [1]

Riferimenti bibliografici

[1] A. Quarteroni, F. Saleri, and P. Gervasio. *Calcolo Scientifico: Esercizi e problemi risolti con MATLAB e Octave.* UNITEXT. Springer Milan, 2017.

Index