Calcolo Numerico - Appunti

260236

luglio 2024

Prefazione

Ogni sezione di teoria presente in questi appunti, è stata ricavata dalle seguenti risorse:

- Calcolo Scientifico: Esercizi e problemi risolti con MATLAB e Octave. [1]

Altro:

GitHub repository

Indice

1 Equazioni non lineari

1.1 Introduzione

Il **calcolo degli zeri di una funzione** f reale di variabile reale o delle **radici dell'equazione** $f(x) = 0$, è un problema assai ricorrente nel Calcolo Scientifico.

In generale, *non è possibile* approntare metodi numerici che calcolino gli zeri di una generica funzione in un numero finito di passi. I metodi numerici per la risoluzione di questo problema sono pertanto necessariamente *iterativi*. A partire da uno o più dati iniziali, scelti convenientemente, essi generano una successione di valori $x^{(k)}$ che, sotto opportune ipotesi, convergerà ad uno zero α della funzione f studiata.

1.2 Il metodo di bisezione (o iterativo)

Sia f una funzione continua in $[a, b]$ tale che $f(a) f(b) < 0$. Per cui, vale il teorema degli zeri di una funzione continua, ossia f ammette almeno uno zero in (a, b).

Si supponga che ci sia un solo zero, indicato con α e nel caso in cui ce ne sia più di uno, individuare un intervallo tale che ne contenga solo uno.

Il **metodo di bisezione** (o **iterativo**) è una strategia che si suddivide nei seguenti passaggi:

1. **Dimezzare l'intervallo di partenza**;
2. **Selezionare tra i due sotto-intervalli ottenuti quello nel quale f cambia di segno agli estremi**;
3. **Applicare ricorsivamente questa procedura all'ultimo intervallo selezionato**.

Matematicamente parlando, dato $I^{(0)} = (a, b)$, e più in generale, $I^{(k)}$ il sotto-intervallo selezionato al passo k-esimo, si sceglie come $I^{(k+1)}$ il semi-intervallo di $I^{(k)}$ ai cui estremi f cambia di segno.

Questa procedura garantisce che ogni sotto-intervallo selezionato $I^{(k)}$ conterrà α. Questo poiché la successione $\left\{x^{(k)}\right\}$ dei punti medi dei sotto-intervalli $I^{(k)}$ dovrà ineluttabilmente convergere a α, in quanto la **lunghezza dei sotto-intervalli tende a** 0 per k che **tende all'infinito**.

Formalizziamo questa idea con un piccolo algoritmo. Ponendo:

$$a^{(0)} = a, \quad b^{(0)} = b, \quad I^{(0)} = \left(a^{(0)}, b^{(0)}\right), \quad x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$$

Al passo $k \geq 1$ il metodo di bisezione calcolerà il semi-intervallo $I^{(k)} = \left(a^{(k)}, b^{(k)}\right)$ dell'intervallo $I^{(k-1)} = \left(a^{(k-1)}, b^{(k-1)}\right)$, nel seguente modo (si ricorda che α è lo zero che si sta cercando):

1. Calcolo $x^{(k-1)} = \dfrac{a^{(k-1)} + b^{(k-1)}}{2}$
2. Se $f\left(x^{(k-1)}\right) = 0$:
   (a) Allora $\alpha = x^{(k-1)}$ e l'algoritmo termina.
3. Altrimenti, se $f\left(a^{(k-1)}\right) \cdot f\left(x^{(k-1)}\right) < 0$:
   (a) Si pone $a^{(k)} = a^{(k-1)}$
   (b) Si pone $b^{(k)} = x^{(k-1)}$
   (c) Si incrementa $k + 1$ e si ripete ricorsivamente.
4. Altrimenti, se $f\left(x^{(k-1)}\right) \cdot f\left(b^{(k-1)}\right) < 0$:
   (a) Si pone $a^{(k)} = x^{(k-1)}$
   (b) Si pone $b^{(k)} = b^{(k-1)}$
   (c) Si incrementa $k + 1$ e si ripete ricorsivamente.

Esempio 1

Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si parta da $a^{(0)} = -0.25$ e $b^{(0)} = 1.25$, e si applichi il metodo di bisezione:

1. Con $a^{(0)} = -0.25$ e $b^{(0)} = 1.25$:
   (a) Si calcola il punto medio:
   $$x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} = \frac{-0.25 + 1.25}{2} = 0.5$$
   (b) Si calcola la funzione con il punto medio come parametro:
   $$f(0.5) = 0.5^2 - 1 = -0.75$$
   (c) Dato che la funzione nel punto medio non è uguale a zero, l'algoritmo deve continuare. Per farlo, bisogna sostituire il punto medio con uno dei due estremi. Per decidere quale dei due sostituire, è necessario capire in quale cambia valore la funzione. Si verifica inizialmente con $a^{(0)}$:
   $$\begin{aligned} f\left(a^{(0)}\right) f\left(x^{(0)}\right) < 0 &= f(-0.25)\, f(0.5) < 0 \\ &= (-0.9375 \cdot -0.75) < 0 \\ &= 0.703125 \text{ ✗} \end{aligned}$$

(d) Si procede con l'algoritmo, provando adesso la $b^{(0)}$:

$$\begin{aligned} f\left(x^{(0)}\right) f\left(b^{(0)}\right) < 0 &= f(0.5)\, f(1.25) < 0 \\ &= (-0.75 \cdot 0.5625) < 0 \\ &= -0.421875 \text{ ✓} \end{aligned}$$

(e) Si pone $a^{(1)} = x^{(0)} = 0.5$

(f) Si pone $b^{(1)} = b^{(0)} = 1.25$

(g) Si incrementa k, $k = k + 1 = 0 + 1 = 1$

2. Con $a^{(1)} = 0.5$ e $b^{(1)} = 1.25$:

(a) Si calcola il punto medio:

$$x^{(1)} = \frac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2} = \frac{0.5 + 1.25}{2} = 0.875$$

(b) Si calcola la funzione con il punto medio come parametro:

$$f(0.875) = 0.875^2 - 1 = -0.234375$$

(c) Dato che la funzione nel punto medio non è uguale a zero, l'algoritmo deve continuare:

$$\begin{aligned} f\left(a^{(1)}\right) f\left(x^{(1)}\right) < 0 &= f(0.5)\, f(-0.234375) < 0 \\ &= (-0.75 \cdot -0.945068359375) < 0 \\ &= 0.70880126953125 \text{ ✗} \end{aligned}$$

(d) Si procede con l'algoritmo:

$$\begin{aligned} f\left(x^{(1)}\right) f\left(b^{(1)}\right) < 0 &= f(-0.234375)\, f(1.25) < 0 \\ &= (-0.945068359375 \cdot 0.5625) < 0 \\ &= -0.5316009521484375 \text{ ✓} \end{aligned}$$

(e) Si pone $a^{(2)} = x^{(1)} = 0.875$

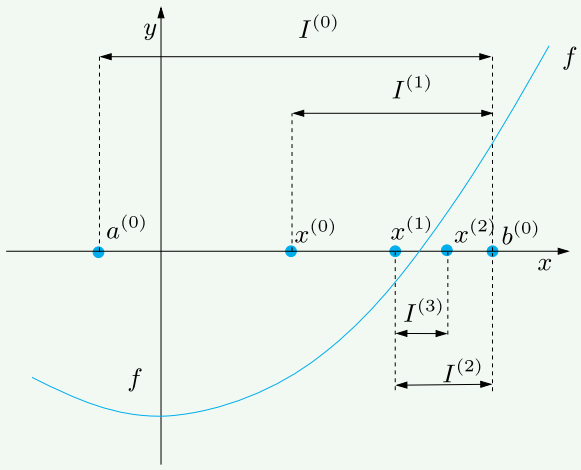
(f) Si pone $b^{(2)} = b^{(1)} = 1.25$

(g) Si incrementa k, $k = k + 1 = 1 + 1 = 2$

Si omettono i restanti calcoli per $k = 2, k = 3$, ma si lasciano qua di seguito i risultati:

- $I^{(2)} = (0.875, 1.25)$ e $x^{(2)} = 1.0625$
- $I^{(3)} = (0.875, 1.0625)$ e $x^{(2)} = 0.96875$

Nella seguente figura si possono vedere le iterazioni effettuate:



Iterazioni effettuate. [1]

Si noti che ogni intervallo $I^{(k)}$ contiene lo zero α. Inoltre, la successione $\left\{x^{(k)}\right\}$ converge necessariamente allo zero α in quanto ad ogni passo l'ampiezza $\left|I^{(k)}\right| = b^{(k)} - a^{(k)}$ dell'intervallo $I^{(k)}$ si dimezza.

Il valore $I^{(k)}$ può essere riassunto come:

$$\left|I^{(k)}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left|I^{(0)}\right|$$

E di conseguenza l'**errore al passo *k*** può essere calcolato come:

$$\left|e^{(k)}\right| = \left|x^{(k)} - \alpha\right| < \frac{1}{2} \cdot \left|I^{(k)}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot (b-a)$$

Inoltre, data una certa **tolleranza** ε, per **garantire che l'errore al passo** k **sia minore della tolleranza data** (ovvero, $\left|e^{(k)}\right| < \varepsilon$), basta applicare la seguente formula:

$$k_{\min} > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1 \tag{1}$$

Dove $k_{\min}$ rappresenta il **numero <u>minimo</u> di iterazioni prima di trovare un intero che soddisfi la disuguaglianza**.

Possibile svantaggio

Il metodo di bisezione **non garantisce una riduzione monotona dell'errore**, ma solo il dimezzamento dell'ampiezza dell'intervallo all'interno del quale si cerca lo zero. Infatti, **non viene tenuto conto del reale andamento di** f e questo può provocare il mancato coinvolgimento di approssimazioni di α accurate.

1.3 Il metodo di Newton

Il **metodo di Newton** sfrutta la funzione f maggiormente rispetto al metodo di bisezione, usando i suoi valori e la sua derivata.

Si ricorda che la retta tangente alla curva $(x, f(x))$ nel punto $x^{(k)}$ è:

$$y(x) = f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right)$$

Cercando un $x^{(k+1)}$ tale che la **retta tangente in quel punto sia uguale a zero** $y\left(x^{(k+1)}\right) = 0$, allora si trova:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} \qquad k \geq 0 \tag{2}$$

Purché la derivata prima nel punto $x^{(k)}$ sia diversa da zero, cioè $f'\left(x^{k}\right) \neq 0$.

Questa equazione consente di calcolare una successione di valori $x^{(k)}$ a partire da un dato iniziale $x^{(0)}$. In altre parole, il **metodo di Newton calcola lo zero di f sostituendo localmente a f la sua retta tangente**.

A differenza del metodo di bisezione, tale **metodo converge allo zero in un solo passo quando la funzione f è lineare**, ovvero nella forma $f(x) = a_1 x + a_0$.

Limitazione

La **convergenza** del metodo di Newton non è garantita **per ogni scelta** di $x^{(0)}$, ma **soltanto** per valori di $x^{(0)}$ **sufficientemente vicini** ad α, ovvero **appartenenti ad un intorno** $I(\alpha)$ sufficientemente piccolo di α.

Alcune osservazioni a seguito anche di questa limitazione:

- A seguito di questa limitazione, risulta evidente che se $x^{(0)}$ è stato scelto opportunamente e se lo zero α è semplice ($f'(\alpha) \neq 0$), allora il metodo converge.
- Nel caso in cui f è derivabile con continuità pari a due, allora si ottiene la seguente convergenza:

  $$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)-\alpha}}{\left(x^{(k)} - \alpha\right)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \tag{3}$$

  Il significato è: se $f'(\alpha) \neq 0$ il metodo di Newton converge almeno quadraticamente o con **ordine 2**.

  In parole povere, **per k sufficientemente grande, l'errore al passo $(k+1)$-esimo si comporta come il quadrato dell'errore al passo k-esimo, moltiplicato per una costante indipendente da k.**

- Se lo zero α ha molteplicità m maggiore di 1, ovverosia:

  $$f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

Allora il metodo di Newton è ancora convergente, purché $x^{(0)}$ sia scelto opportunamente e $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I(\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Tuttavia in questo caso l'ordine di convergenza è pari a 1. In tal caso, l'ordine 2 può essere ancora recuperato usando la seguente relazione al posto dell'equazione 2 ufficiale:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m \cdot \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} \qquad k \geq 0 \tag{4}$$

Purché $f'\left(x^{(k)}\right) \neq 0$. Naturalmente, questo **metodo di Newton modificato** richiede una conoscenza a priori di m.

1.3.1 Come arrestare il metodo di Newton

Data una tolleranza fissa ε, esistono due tecniche applicabili per capire quando è necessario fermarsi ed evitare di continuare ad iterare:

- La **differenza fra due iterate consecutive**, il quale si arresta in corrispondenza del più piccolo intero $k_{\min}$ per il quale:

$$\left|x^{(k_{\min})} - x^{(k_{\min}-1)}\right| < \varepsilon \tag{5}$$

  (test sull'incremento).

- Un'altra tecnica applicata anche per altri metodi iterativi è il **residuo** al passo k, il quale è definito come:

$$r^{(k)} = f\left(x^{(k)}\right)$$

  Che è nullo quando $x^{(k)}$ è uno zero di f. In questo modo, il metodo viene arrestato alla prima iterata $k_{\min}$:

$$\left|r^{(k_{\min})}\right| = \left|f\left(x^{(k_{\min})}\right)\right| < \varepsilon \tag{6}$$

  Da notare che tale tecnica fornisce una **stima accurata dell'errore** solo quando $|f'(x)|$ è circa pari a 1 in un intorno di I_α dello zero α cercato.

  Attenzione! Se la derivata non è circa pari a 1 in un intorno dello zero cercato, la tecnica porterà:

  - Ad una **sovrastima** dell'errore se $|f'(x)| \gg 1$ per $x \in I_\alpha$
  - Ad una **sottostima** dell'errore se $|f'(x)| \ll 1$ per $x \in I_\alpha$

1.4 Il metodo delle secanti

Nel caso in cui la funzione f non sia nota, il metodo di Newton non può essere applicato. Per fortuna, arriva in soccorso il **metodo delle secanti**, il quale esegue una valutazione di $f'\left(x^{(k)}\right)$ andando a sostituire quest'ultima con un **rapporto incrementale calcolato su valori di f già noti**.

Più formalmente, assegnati due punti $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$, per $k \geq 1$ si calcola:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(\frac{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}\right)^{-1} \cdot f\left(x^{(k)}\right) \tag{7}$$

Quando converge?

Il metodo delle secanti converge a seguito di certe condizioni:

- **Converge ad α**, se:
  - α radice semplice[1];
  - $I(\alpha)$ è un opportuno intorno di α;
  - $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ sono sufficientemente vicini ad α
  - $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I(\alpha) \setminus \{\alpha\}$
- **Converge con ordine p super-lineare**, se:
  - $f \in \mathcal{C}^2(I(\alpha))$
  - $f'(\alpha) \neq 0$

  Ovvero, esiste una costante $c > 0$ tale che:

$$\left|x^{(k+1)} - \alpha\right| \leq c\left|x^{(k)} - \alpha\right|^p \qquad p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots \tag{8}$$

- **Convergenza lineare**, se:
  - Radice α è multipla.

  Come succederebbe usando il metodo di Newton.

[1] $f'(\alpha) \neq 0$

1.5 I sistemi di equazioni non lineari

Di solito i metodi presentati nelle pagine precedenti vengono inseriti in dei sistemi. Nella realtà ci sono varie condizioni che influiscono sul sistema in analisi. È per questo motivo che si introducono i sistemi.

Si consideri un generale sistema di equazioni non lineari:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Dove $f_1, \dots, f_n$ sono funzioni non lineari. Si pongono i seguenti vettori:

- $\mathbf{f} \equiv (f_1, \dots, f_n)^T$
- $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)^T$

Con l'obbiettivo di riscrivere il sistema in maniera più agevole:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Esempio 2: esempio di sistema non lineare

Un esempio banale di sistema non lineare:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \sin\left(\pi \dfrac{x_1}{2}\right) + x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Prima di estendere i metodi di Newton e delle secanti si introduce la matrice Jacobiana.

Definizione 1: matrice Jacobiana

Senza entrare troppo nel gergo matematico (non è l'obbiettivo del corso), la **matrice Jacobiana** di una funzione è quella **matrice i cui elementi sono le derivate parziali prime della funzione**.

$$\mathbf{J_f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Che può essere riscritto in modo più leggibile come:

$$(\mathbf{J_f})_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad i, j = 1, \dots, n \tag{10}$$

Dove rappresenta la derivata parziale della funzione f_i rispetto a x_j.

Il metodo di Newton e delle secanti può essere esteso sfruttando la matrice Jacobiana:

- Il **metodo di Newton** usando un sistema di equazioni non lineari diventa: dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, per $k = 0, 1, \ldots$, fino a convergenza

$$\begin{aligned} &\text{risolvere} && \mathbf{J_f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \\ &\text{porre} && \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} \end{aligned} \tag{11}$$

  Se ne deduce che venga richiesto ad ogni passo la soluzione di un sistema lineare di matrice $\mathbf{J_f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$.

- Il **metodo delle secanti** usando un sistema di equazioni non lineari si basa sulla matrice Jacobiana e sul metodo di Broyden.

  L'**idea di base** è sostituire le matrici Jacobiane $\mathbf{J_f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ (per $k \geq 0$) con delle matrici chiamate B_k, definite ricorsivamente a partire da una matrice B_0 che sia una approssimazione di $\mathbf{J_f}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$.

  Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, data $\mathrm{B}_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ per $k = 0, 1, \ldots$, fino a convergenza

$$\begin{aligned} &\text{risolvere} && \mathrm{B}_k\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \\ &\text{porre} && \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)} \\ &\text{porre} && \boldsymbol{\delta}\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k+1)}\right) - \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \\ &\text{calcolare} && \mathrm{B}_{k+1} = \mathrm{B}_k + \frac{\left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{f}^{(k)} - \mathrm{B}_k\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)}\right)\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)^T}}{\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)^T}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}^{(k)}} \end{aligned} \tag{12}$$

  Da notare che non si chiede alla successione $\{\mathrm{B}_k\}$ così costruita di convergere alla vera matrice Jacobiana $\mathbf{J_f}(\boldsymbol{\alpha})$ ($\boldsymbol{\alpha}$ è la radice del sistema); questo risultato non è garantito tuttavia.

1.6 Iterazioni di punto fisso

Esempio 3: esempio di introduzione

Con una calcolatrice si può facilmente verificare che applicando ripetutamente la funzione cos partendo dal numero 1 si genera la seguente successione di numeri reali:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \cos(1) &&= 0.54030230586814 \\ x^{(2)} &= \cos\left(x^{(1)}\right) &&= 0.85755321584639 \\ &\vdots \\ x^{(10)} &= \cos\left(x^{(9)}\right) &&= 0.74423735490056 \\ &\vdots \\ x^{(20)} &= \cos\left(x^{(19)}\right) &&= 0.73918439977149 \end{aligned}$$

Che tende al valore $\alpha = 0.73908513$.

Con l'esempio di introduzione è possibile capire il punto fisso. Essendo per costruzione $x^{(k+1)} = \cos\left(x^{(k)}\right)$ per $k = 0, 1, \ldots$ (con $x^{(0)} = 1$), α è tale che $\cos(\alpha) = \alpha$. Quindi, α viene detto punto fisso della funzione coseno.

Perché è interessante?

Se α è un punto fisso per il coseno, allora esso è uno zero della funzione $f(x) = x - \cos(x)$ ed il metodo appena proposto potrebbe essere usato per il calcolo degli zeri di f.

Non tutte le funzioni hanno un punto fisso

Non tutte le funzioni ammettono punti fissi. Ad esempio, ripetendo l'esperimento dell'esempio con una funzione esponenziale a partire da $x^{(0)} = 1$, dopo soli 4 passi si giunge ad una situazione di *overflow* (figura 1, pagina 14).

Definizione 2

Data una funzione $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, trovare $\alpha \in [a, b]$ tale che:

$$\alpha = \phi(\alpha)$$

Se tale α esiste, viene detto un **punto fisso** di ϕ e lo si può determinare come limite della seguente successione:

$$x^{(k+1)} = \phi\left(x^{(k)}\right) \qquad k \geq 0 \tag{13}$$

Dove $x^{(0)}$ è un dato iniziale. L'algoritmo viene chiamato **iterazioni di punto fisso** e la funzione ϕ è detta **funzione di iterazione**.

Dalla definizione, si deduce che l'esempio introduttivo è un algoritmo di iterazioni di punto fisso per la funzione $\phi(x) = \cos(x)$.

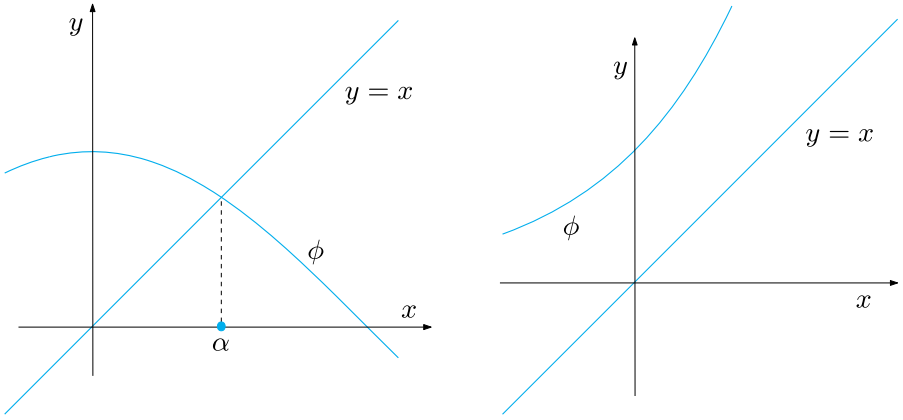


Figura 1: La funzione $\phi(x) = \cos(x)$ (sx) ammette un solo punto fisso, mentre la funzione $\phi(x) = e^x$ (dx) non ne ammette alcuno.

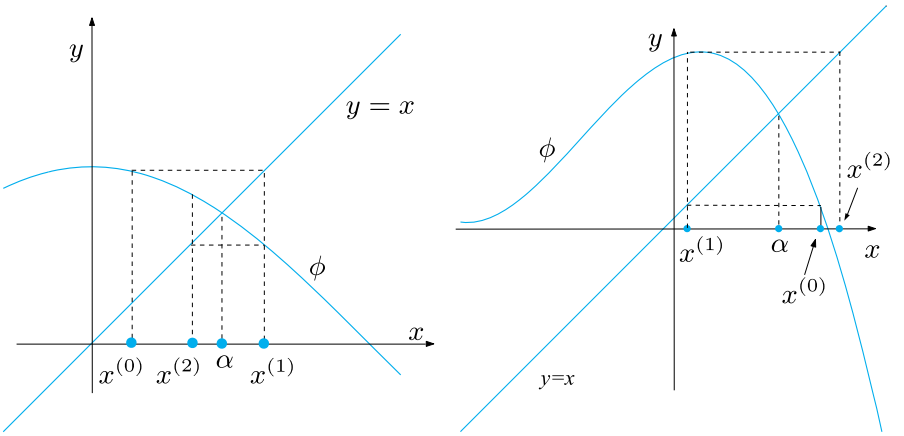


Figura 2: Rappresentazione delle prime iterazioni di punto fisso per due funzioni di iterazione. Le iterazioni convergono verso il punto fisso α (sx), mentre si allontanano da α (dx).

Definizione 3: quando una funzione ha un punto fisso?

Si consideri la successione (formula) 13 a pagina 13.

1. Si supponga che $\phi(x)$ sia continua nell'intervallo $[a,b]$ e che $\phi(x) \in [a,b]$ per ogni $x \in [a,b]$; allora **esiste almeno un punto fisso** $\alpha \in [a,b]$.

2. Si supponga inoltre che esista un valore L minore di 1 tale per cui:

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$$

Per ogni x_1, x_2 appartenente all'insieme $[a,b]$. Con tale supposizione, allora ϕ ha un **unico punto fisso** $\phi \in [a,b]$ e la successione definita nell'equazione 13 a pagina 13 converge a α, qualunque sia il dato iniziale $x^{(0)}$ in $[a,b]$.

La supposizione scritta in precedenza può essere riassunta in un'equazione:

$$\exists L < 1 \;\; t.c. \;\; |\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad (14)$$

Nella pratica è però spesso **difficile delimitare a priori l'ampiezza dell'intervallo** $[a,b]$; in tal caso è utile il seguente risultato di convergenza locale:

Theorem 1 (di Ostrowski)**.** *Sia α un punto fisso di una funzione ϕ continua e derivabile con continuità in un opportuno intorno $\mathcal{J}$ di α. Se risulta $|\phi'(\alpha)| < 1$, allora esiste un $\delta > 0$ in corrispondenza del quale la successione $\left\{x^{(k)}\right\}$ converge ad α, per ogni $x^{(0)}$ tale che $\left|x^{(0)} - \alpha\right| < \delta$. Inoltre si ha:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha) \quad (15)$$

Dal teorema si deduce che le iterazioni di punto fisso convergono almeno linearmente cioè che, per k sufficientemente grande, l'errore del passo $k+1$ si comporta come l'errore al passo k moltiplicato per una costante, $\phi'(\alpha)$ nel teorema, indipendente da k ed il cui valore assoluto è minore di 1. Per questo motivo la costante viene chiamata **fattore di convergenza** e la convergenza sarà tanto più rapida quanto più piccola è tale costante.

Definizione 4: quando il metodo di punto fisso è convergente

Si suppongano valide le ipotesi del teorema di Ostrowski 1. Se, inoltre, ϕ è derivabile con continuità due volte e se:

$$\phi'(\alpha) = 0 \qquad \phi''(\alpha) \neq 0$$

Allora il metodo di punto fisso (eq. 13) è convergente di ordine 2 e si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{\left(x^{(k)} - \alpha\right)^2} = \frac{1}{2}\phi''(\alpha) \quad (16)$$

Un'ultima osservazione interessante:

- Nel caso in cui $|\phi'(\alpha)| > 1$, se $x^{(k)}$ è sufficientemente vicino ad α, in modo tale che $\left|\phi'\left(x^{(k)}\right)\right| > 1$, allora $\left|\alpha - x^{(k+1)}\right| > \left|\alpha - x^{(k)}\right|$, e **non è possibile che la successione converga al punto fisso**.
- Nel caso in cui $|\phi'(\alpha)| = 1$ **non si può trarre alcuna conclusione** perché potrebbero verificarsi sia la convergenza sia la divergenza, a seconda delle caratteristiche della funzione di punto fisso.

2 Metodi risolutivi per sistemi lineari e non lineari

2.1 Metodi diretti per sistemi lineari

2.1.1 Metodo delle sostituzioni in avanti e all'indietro

Perché sono importanti i metodi numerici?

Si consideri il seguente **sistema lineare**:

$$Ax = b$$

Dove:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di componenti a_{ij} e $b \in \mathbb{R}^n$ sono valori noti.
- $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle incognite.
- La costante n rappresenta il numero di equazioni lineari delle incognite x_j.

Con queste caratteristiche, è possibile rappresentare la i-esima equazione nel seguente modo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \rightarrow \quad a_{1i}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

La **soluzione esatta** del sistema, chiamata **formula di Cramer**, è:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \tag{17}$$

Con $A_j = |a_1 \ \ldots \ a_{j-1} \ b \ a_{j+1} \ \ldots \ a_n|$ e a_i le colonne di A. Ovviamente la soluzione **esiste ed è unica se il determinante** della matrice A è **diverso da zero**:

$$\det(A) \neq 0$$

Purtroppo questo metodo è **inutilizzabile** poiché il calcolo di un determinante richiede all'incirca $n!$ (fattoriale di n) operazioni.

Risulta evidente che sia necessario uno studio approfondito di **metodi numerici che si traducano in algoritmi efficienti** da farli eseguire su calcolatori. Nelle seguenti pagine si introducono i primi due algoritmi "efficienti".

Definizione 1

Il seguente algoritmo rappresenta il **metodo delle sostituzioni in avanti**.
Dati:

- $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice triangolare inferiore non singolare (cioè con determinante diverso da zero $\det(L) \neq 0$)
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vettore termine noto

La soluzione è data da $Lx = \mathbf{b}$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Più in generale si ha:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i=1} L_{ij}\, x_j}{L_{ii}} \tag{18}$$

Il **numero di operazioni** richieste dal metodo delle sostituzioni in avanti è dato da 1 sottrazione, $i-1$ moltiplicazioni, $i-2$ addizioni e 1 divisione:

$$\#op. = \sum_{i=1}^{n} (i-1) + (i-2) + 1 + 1 = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \tag{19}$$

Per completezza si presenta anche il metodo delle sostituzioni all'indietro.

Definizione 2

Il seguente algoritmo rappresenta il **metodo delle sostituzioni all'indietro**.
Dati:

- $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice triangolare superiore non singolare (cioè con determinante diverso da zero $\det(U) \neq 0$)
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vettore termine noto

La soluzione è data da $Ux = \mathbf{b}$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Più in generale si ha:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i=1} U_{ij}\, x_j}{U_{ii}} \tag{20}$$

Il numero di operazioni è il medesimo del metodo delle sostituzioni in avanti.

2.2 Metodi iterativi per sistemi lineari

2.3 Metodi numerici per sistemi non lineari

3 Laboratorio

3.1 Introduzione al linguaggio MATLAB

L'introduzione al linguaggio di programmazione MATLAB sarà molto rapido. Si assume dunque che l'interfaccia grafica sia familiare e che concetti base di programmazione (per esempio "che cos'è una variabile?") siano ben noti.

In MATLAB, l'assegnazione di scalari a delle variabili è classica, quindi si utilizza il simbolo uguale: `a = 1` (assegnazione del valore `1` alla variabile `a`). Inoltre, il linguaggio è *case sensitive*, di conseguenza la variabile `a` è diversa dalla variabile `A`. Alcuni comandi utili e generali:

- `help` *`nome-comando`*, per avere informazioni in più riguardo al comando *`nome-comando`*;
- `clear` *`nome-variabile`*, per rimuovere la variabile *`nome-variabile`* dalla memoria. Se non viene inserito il *`nome-variabile`*, vengono rimosse tutte le variabili dalla memoria.
- `who`, per visualizzare le variabili attualmente in memoria.
- `clc`, per ripulire la *Command Window*.

Tabella 1: Argomenti trattati.

Well-known variables

Esistono alcune variabili che sono ben note e hanno valori prestabiliti. Tra le più importanti:

- `pi`, che rappresenta il π e MATLAB gli assegna il valore `3.1416`
- `i`, che rappresenta l'unità immaginaria e MATLAB gli assegna il valore `0.0000 + 1.0000i`
- `eps`, che rappresenta il più piccolo valore rappresentabile nel calcolatore (PC) attualmente in uso. Solitamente, `eps` ritorna il valore `2.2204e-16`.

Questo tipo di variabili possono essere ridefinite, ma non è una *good practice*.

Cambiare il formato delle variabili: `format`

Il comando `format` è utilizzato per cambiare il formato con cui sono rappresentate le variabili. MATLAB non cambia la precisione della variabile (quindi non si ottiene una precisione maggiore dopo la virgola), ma modifica soltanto la rappresentazione. Di default MATLAB utilizza una rappresentazione di tipo `short`. Tra i più utilizzati (di default `pi` è uguale a `3.1416`):

- `default` per reimpostare la rappresentazione di default.
- Decimale:
  - `short`, rappresentazione a 5 cifre:

```
>> format short
>> pi

ans =
    3.1416
```

  - `long`, rappresentazione a 15 cifre:

```
>> format long
>> pi

ans =
   3.141592653589793
```

- *Floating point*:
  - `short e`, rappresentazione a 5 cifre floating point:

```
>> format short e
>> pi

ans =
   3.1416e+00
```

  - `long e`, rappresentazione a 15 cifre floating point:

```
>> format long e
>> pi

ans =
     3.141592653589793e+00
```

Altri formati si possono trovare nella documentazione ufficiale.

Assegnamento di vettori e matrici

- **Vettore riga**, si può creare utilizzando uno spazio tra i valori o una virgola `,`:

```
>> a = [1 2 3 4]

a =
     1     2     3     4

>> b = [1, 2, 3, 4]

b =
     1     2     3     4
```

- **Vettore colonna**, si crea usando il punto e virgola `;`:

```
>> a = [1; 2; 3; 4]

a =
     1
     2
     3
     4
```

Talvolta può essere utile la generazione automatica di un vettore riga (sono ammessi anche i valori negativi e con la virgola ovviamente):

- **Vettore riga generato linearmente**, si crea usando i due punti e specificando il valore di inizio e il valore di fine:

```
>> a = [1 : 4]

a =
     1     2     3     4
```

- **Vettore riga generato usando un passo**, si crea usando i due punti e specificando (in ordine) il valore di inizio, il "salto", e il valore di fine. Nel caso in cui il salto sia troppo grande e si superi il valore di fine, MATLAB prenderà il primo valore ammissibile:

```
>> % Generazione con passo 1
>> a = [1 : 1 : 4]

a =
     1     2     3     4

>> % Generazione con passo 2
>> a = [1 : 2 : 5]

a =
     1     3     5

>> % Generazion con passo 2 (fine non raggiunta)
>> a = [1 : 2 : 6]

a =
     1     3     5

>> % ... ma cambiando l'upper bound
```

```
>> a = [1 : 2 : 7]

a =
     1     3     5     7
```

- **Vettore riga generato con valori uniformemente distanziati**, si crea usando la funzione `linspace`, la quale accetta tre parametri:
  - `x1`, valore di partenza.
  - `x2`, valore di fine.
  - `n`, numero di valori da generare; se non specificato, di default è `100`; se il valore inserito è zero o minore, viene creato un vettore vuoto.

```
>> % Vettore riga identico a: a = [1 : 4]
>> linspace(1, 4, 4)

ans =
     1     2     3     4

>> % Chiedendo piu' valori, MATLAB andra' ad utilizzare i
    decimali
>> linspace(1, 4, 6)
ans =

     1.000000000000000e+00     1.600000000000000e+00
     2.200000000000000e+00     2.800000000000000e+00
     3.400000000000000e+00     4.000000000000000e+00
```

Le matrici possono essere create a mano o usando la combinazione delle tecniche viste in precedenza:

- **Matrice**, le righe si creano usando gli spazi e le colonne si creano usando il punto e virgola:

```
>> a = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12]

a =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12

>> a = [1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12]

a =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12
```

- **Matrice creata usando la generazione lineare dei vettori**, si possono utilizzare le tecniche precedenti e i punti e virgola:

```
>> % Usando a = [x : y]
>> a = [1 : 4; 5 : 8; 9 : 12]

a =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12

```

```
>> % Usando a = [x : y : z]
>> a = [1 : 2 : 7; 9 : 2 : 15; 17 : 2 : 23]
a =

     1     3     5     7
     9    11    13    15
    17    19    21    23

>> % Usando linspace
>> a = [linspace(1, 4, 4); linspace(5, 8, 4); linspace(9, 12,
    4)]

a =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12
```

Operazioni su vettori e matrici

- **Trasposizione**, la classica operazione eseguita con le matrici o vettori, si esegue con la keyword `'` oppure usando la funzione `transpose`:

```
>> a = [1 2 3 4]

a =
     1     2     3     4

>> a'

ans =
     1
     2
     3
     4

>> transpose(a)

ans =
     1
     2
     3
     4
```

- **Somma e sottrazione**
  - Tra **vettore e scalare**:

```
>> a = [1 2 3 4]

a =
     1     2     3     4

>> a + 1

ans =
     2     3     4     5

>> a - 1

ans =
     0     1     2     3
```

  - Tra **vettore e matrice**:

```
>> a = [1 2 3 4]

a =
     1     2     3     4

>> b = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12]

b =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12

>> a + b

ans =
```

```
     2     4     6     8
     6     8    10    12
    10    12    14    16

>> a - b

ans =
     0     0     0     0
    -4    -4    -4    -4
    -8    -8    -8    -8
```

– Tra **matrice e scalare**:

```
>> b = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12]

b =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12

>> b + 1

ans =
     2     3     4     5
     6     7     8     9
    10    11    12    13

>> b - 1

ans =
     0     1     2     3
     4     5     6     7
     8     9    10    11
```

– Tra **matrice e matrice**:

```
>> b = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12]

b =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12

>> c = [13 14 15 16; 17 18 19 20; 21 22 23 24]

c =
    13    14    15    16
    17    18    19    20
    21    22    23    24

>> b + c

ans =
    14    16    18    20
    22    24    26    28
    30    32    34    36

>> b - c

ans =
   -12   -12   -12   -12
   -12   -12   -12   -12
   -12   -12   -12   -12
```

- **Prodotto**
  - **Prodotto matriciale**:

```
>> b = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12]

b =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12

>> c = [13 14 15; 16 17 18; 19 20 21; 22 23 24]

c =
    13    14    15
    16    17    18
    19    20    21
    22    23    24

>> b * c

ans =
   190   200   210
   470   496   522
   750   792   834
```

  - **Prodotto punto per punto**, in MATLAB è possibile moltiplicare ogni cella di una matrice (o vettore) per la corrispettiva cella della matrice (o vettore) moltiplicata. La keyword utilizzata è `.*`:

```
>> b = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12]

b =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12

>> c = [13 14 15 16; 17 18 19 20; 21 22 23 24]

c =
    13    14    15    16
    17    18    19    20
    21    22    23    24

>> b .* c

ans =
    13    28    45    64
    85   108   133   160
   189   220   253   288

>> d = [1 2 3 4]

d =
     1     2     3     4

>> b .* d

ans =
     1     4     9    16
     5    12    21    32
     9    20    33    48
```

- **Potenza**
  - **Potenza matriciale**:

```
>> b = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

b =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

>> b^2

ans =
    30    36    42
    66    81    96
   102   126   150
```

  - **Potenza punto per punto**, come per il prodotto, è possibile elevare al quadrato ogni valore della matrice (o vettore):

```
>> b = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

b =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

>> b.^2

ans =
     1     4     9
    16    25    36
    49    64    81
```

Funzioni intrinseche per vettori e matrici

Qua di seguito si elencano le funzioni più importanti da utilizzare per i vettori e le matrici.

- `size`, restituisce la dimensione del vettore o della matrice nel formato *`righe colonne`*. Specificando anche un valore (o vettore) come parametro, la funzione restituisce la dimensione (un vettore contenente le dimensioni richieste) nella "dimensione" richiesta:

```
>> a = [1 2 3 4]

a =
     1     2     3     4

>> size(a)

ans =
     1     4

>> size(a, 2)
ans =

     4

>> b = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

b =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

>> size(b)

ans =
     3     3

>> size(b, [2, 3])

ans =
     3     1
```

- `length`, restituisce la lunghezza del vettore e per le matrici restituisce il numero degli elementi per ogni riga:

```
>> a = [1 2 3 4]

a =
     1     2     3     4

>> length(a)

ans =
     4

>> b = [1 2 3 4 5 6; 7 8 9 10 11 12]

b =
     1     2     3     4     5     6
     7     8     9    10    11    12

```

```
>> length(b)

ans =
     6
```

- `max`, `min`, calcolano rispettivamente il massimo e il minimo valore delle componenti di un vettore; per le matrici viene presa in considerazione ogni colonna e calcolato il massimo o minimo:

```
>> a = [ 1 2 3 4]

a =
     1     2     3     4

>> max(a)

ans =
     4

>> min(a)

ans =
     1

>> b = [7 1 1 4; 2 3 9 10; 8 1 7 1]

ans =
     7     1     1     4
     2     3     9    10
     8     1     7     1

>> max(b)

ans =
     8     3     9    10

>> min(b)

ans =
     2     1     1     1
```

- `sum`, `prod`, calcola rispettivamente la somma e il prodotto degli elementi che compongono il vettore; nel caso di una matrice, viene presa in considerazione ogni colonna e calcolata la somma o il prodotto. Inoltre, i due comandi possono prendere un argomento in più per eseguire il calcolo in una dimensione specifica (cosa sensata con le matrici):

```
>> a = [ 1 2 3 4]

a =
     1     2     3     4

>> sum(a)

ans =
    10

>> prod(a)

ans =
    24
```

```
>> b = [7 1 1 4; 2 3 9 10; 8 1 7 1]

b =
     7     1     1     4
     2     3     9    10
     8     1     7     1

>> sum(b) % per colonne

ans =
    17     5    17    15

>> sum(b, 2) % per righe

ans =
    13
    24
    17

>> prod(b)

ans =
   112     3    63    40
```

- `norm`, la norma di un vettore o di una matrice. Passando un vettore o un matrice, viene calcolata di default la norma euclidea (norma 2):

$$||\mathrm{v}||_2 = \sqrt{\sum_{i=2}^{\texttt{length(v)}} \mathrm{v}_i^2}$$

  Passando un valore aggiuntivo, esso rappresenterà l'ordine della norma:

$$||\mathrm{v}||_n = \left(\sum_{i=2}^{\texttt{length(v)}} |\mathrm{v}_i|^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

  Infine, con `inf` viene calcolata la norma infinito:

$$||\mathrm{v}||_\infty = \max_{1 \leq i \leq \texttt{length(v)}} |\mathrm{v}_i|$$

```
>> a = [1 2 3 4]

a =
     1     2     3     4

>> norm(a)

ans =
     5.477225575051661e+00

>> norm(a, 2)

ans =
     5.477225575051661e+00

>> norm(a, 3)
```

```
ans =
     4.641588833612779e+00

>> norm(a, inf)

ans =
     4

>> b = [7 1 1 4; 2 3 9 10; 8 1 7 1]

b =
     7     1     1     4
     2     3     9    10
     8     1     7     1

>> norm(b, 2)

ans =
     1.711222312384884e+01

>> norm(b, inf)

ans =
    24
```

- `abs`, rappresenta il valore assoluto e restituisce il vettore o matrice dopo aver applicato il valore assoluto a ciascun elemento:

```
>> a = [-1 -2 -3 -4]

a =
    -1    -2    -3    -4

>> abs(a)

ans =
     1     2     3     4

>> b = [7 1 1 -4; 2 3 -9 10; 8 1 -7 1]
b =

     7     1     1    -4
     2     3    -9    10
     8     1    -7     1

>> abs(b)

ans =
     7     1     1     4
     2     3     9    10
     8     1     7     1
```

- `diag`, estrae la diagonale di una matrice esistente, oppure ne crea una con i valori dati come input. Inoltre, può creare una matrice con la diagonale spostata a seconda del valore dato (si veda l'esempio):

```
>> b = [7 1 1 4; 2 3 9 10; 8 1 7 1]

b =
     7     1     1     4
     2     3     9    10
     8     1     7     1

>> diag(b)

ans =
     7
     3
     7

>> diag(b, 1)

ans =
     1
     9
     1

>> diag(b, -1)

ans =

     2
     1

>> diag([1 2 3])

ans =
     1     0     0
     0     2     0
     0     0     3

>> diag([1 2 3], -1)

ans =
     0     0     0     0
     1     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0     3     0
```

Funzioni matematiche elementari

Qua di seguito una lista di alcune funzioni matematiche elementari. Gli esempi e la sintassi non verranno mostrati poiché è sempre la medesima:

funzione(*parametro*)

Funzione	Comando
Radice quadrata	`sqrt`
Esponenziale	`exp`
Logaritmo Naturale	`log`
Logaritmo In Base 2	`log2`
Logaritmo In Base 10	`log10`
Seno	`sin`
Arcoseno	`asin`
Coseno	`cos`
Arcocoseno	`acos`
Tangente	`tan`

Tabella 2: Funzioni matematiche elementari.

Iterazione con il ciclo for

In MATLAB il ciclo for viene eseguito con la seguente sintassi.

```
for index = values
   statements
end
```

Di seguito si riporta un ciclo `for` che itera sulla diagonale secondaria di una matrice:

```
>> b = [7 1 1 4; 2 3 9 10; 8 1 7 1]

b =
     7     1     1     4
     2     3     9    10
     8     1     7     1

>> res = []

res =
     []

>> for i = 1 : size(b, 1)
    res(i) = b(i, size(b, 1) - i + 1);
end

>> res

res =
     1     3     8
```

Funzioni per definire vettori o matrici particolari

In queste pagine vengono presentate alcuni funzioni utili che consentono di creare matrici o vettori "particolari".

- **Vettore/Matrice nulla**, con la funzione `zeros` è possibile creare una matrice o un vettore di tutti zeri. I parametri ammessi corrispondono alla dimensione del vettore o matrice:

```
>> zeros(1, 4)

ans =
     0     0     0     0

>> zeros(4, 1)

ans =
     0
     0
     0
     0

>> zeros(4, 4)

ans =
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
```

- **Vettore unario/Matrice unaria**, con la funzione `ones` è possibile creare una matrice o un vettore di tutti uni. I parametri ammessi corrispondono alla dimensione del vettore o matrice:

```
>> ones(1, 4)

ans =
     1     1     1     1

>> ones(4, 1)

ans =
     1
     1
     1
     1

>> ones(4, 4)

ans =
     1     1     1     1
     1     1     1     1
     1     1     1     1
     1     1     1     1
```

- **Matrice identità**, con la funzione `eye` è possibile creare una matrice identità. I parametri ammessi corrispondono alla dimensione del vettore o matrice:

```
>> eye(3)

ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> eye(2, 3)

ans =
     1     0     0
     0     1     0

>> eye(1, 4)

ans =
     1     0     0     0
```

- **Matrice/Vettore riga di numeri casuali interi e non**, con il comando `rand` si genera una matrice di numeri casuali nell'intervallo $[0, 1]$ con la virgola, mentre con il comando `randi` si genera una matrice di numeri casuali interi (primo parametro deve essere specificato il range dei valori):

```
>> rand(3, 5)

ans =
    0.9157    0.6557    0.9340    0.7431    0.1712
    0.7922    0.0357    0.6787    0.3922    0.7060
    0.9595    0.8491    0.7577    0.6555    0.0318

>> % Matrice di valori interi random da 1 a 5
>> randi([1, 5], 3, 4)

ans =
     2     5     5     2
     1     4     1     4
     1     2     3     4

>> % Errore! L'intervallo e' sbagliato
>> randi([-1, -50], 3, 4)
Error using randi
First input must be a positive scalar integer value IMAX, or
    two integer values [IMIN IMAX] with IMIN less than or
    equal to IMAX.

>> randi([-50, -1], 3, 4)

ans =
   -41   -18   -37   -42
   -26   -15   -17   -45
   -28   -13   -18   -26
```

3.1.1 Esercizio

Creare una funzione (file) chiamato `mat_hilbert.m` che fornisca la matrice di Hilbert avente una generica dimensione `n`. Ogni cella della matrice di Hilbert deve rispettare la seguente condizione:

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$$

Dopo aver creato la funzione, utilizzare la funzione nativa di MATLAB `hilb`, per verificare il risultato ottenuto.

Soluzione

Il codice non ha bisogno di grandi spiegazioni. Vi è un controllo iniziale per verificare l'argomento inserito dall'utente e successivamente due cicli `for` per popolare la matrice:

```
function hilbert_matrix = mat_hilbert(n)

if n < 0
    error("n can't be 0 or less than zero")
end

hilbert_matrix = zeros(n);
for i = 1 : n
    for j = 1 : n
        hilbert_matrix(i, j) = 1 / (i + j - 1);
    end
end
```

Il risultato:

```
mat_hilbert(5)

ans =

    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000
    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667
    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429
    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429    0.1250
    0.2000    0.1667    0.1429    0.1250    0.1111

hilb(5)

ans =

    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000
    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667
    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429
    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429    0.1250
    0.2000    0.1667    0.1429    0.1250    0.1111
```

3.2 Zeri di funzione

3.2.1 Grafici di funzione

In MATLAB una funzione $f(x)$ viene memorizzata come un vettore. In particolare, il vettore y ottenuto valutando f nel vettore delle ascisse x. Per cui la rappresentazione della funzione $f(x)$ è di fatto la rappresentazione del vettore y contro il vettore x.

Per introdurre i concetti di funzione e grafici di funzione, si presentano qua di seguito alcuni esempi di caso d'uso.

Definire le seguenti variabili:

- x***: vettore di estremi*** 0 ***e*** 10 ***con passo*** 0.1
- $y = e^x + 1$

Il vettore delle ascisse x può essere costruito banalmente con il seguente costrutto:

```
x = [0 : 0.1 : 10];
```

Per quanto riguarda la **funzione**, si utilizza la keyword per indicare che f ha come input un valore (`x`) e rappresenta la funzione `exp(x)+1`. In questo caso, la funzione si dice anonima. Per dichiarare funzioni esplicite, si rimanda alla documentazione ufficiale.

```
f = @(x) exp(x) + 1
```

Una volta definita una **funzione**, per **valutarla in uno o più punti**, si utilizzerà banalmente la sintassi matematica:

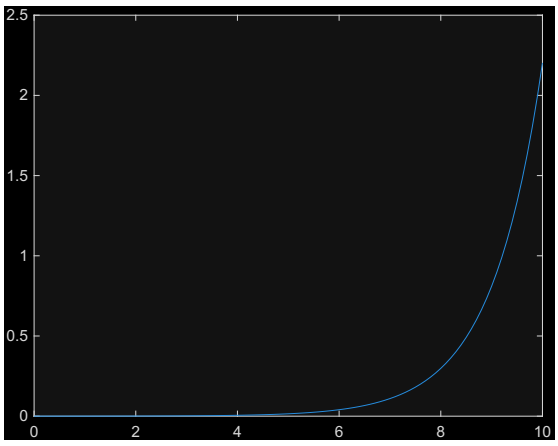
```
f(2)

ans =

    8.3891

f(0:3)

ans =

    2.0000    3.7183    8.3891   21.0855
```

Da notare che se l'argomento è un vettore, allora il risultato sarà un vettore della medesima lunghezza del vettore dato in input.

Utilizzando le variabili precedentemente definite, disegnare il grafico della funzione $y = e^x + 1$ ***nell'intervallo*** $[0, 10]$**.**

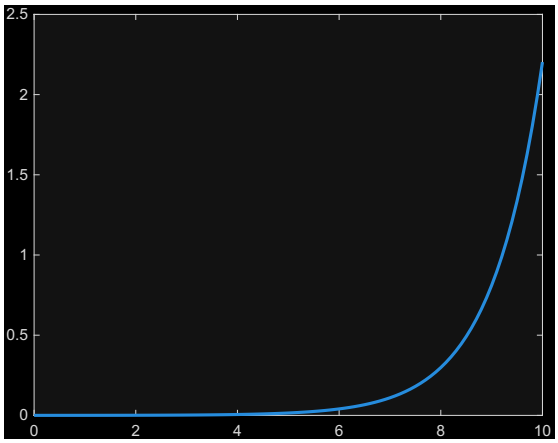
Per disegnare il grafico si utilizza il comando `plot`. Di default questa funzione disegna i valori in un piano cartesiano usando segmenti rettilinei (retta spezzata):

```
y = f(x);
plot(x, y)
```



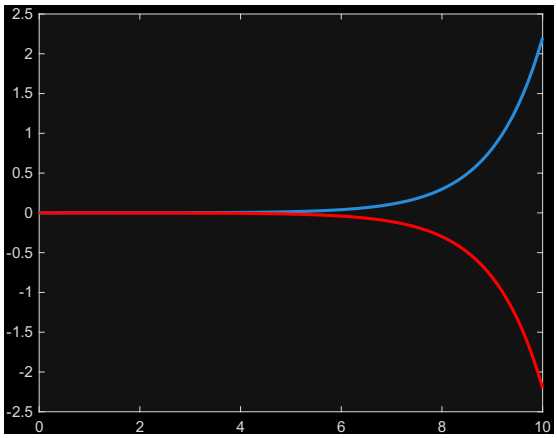
Per evitare che MATLAB sovrascriva la figura nella finestra aperta, è possibile numerarle usando la funzione `figure` (e.g. `figure(1); plot(x,y); figure(2); plot(0:3, 0:3)`).

La funzione `plot` accetta determinati valori per modificare il grafico finale. Nella documentazione ufficiale è possibile trovare l'intera lista e alcuni esempi. Scrivendo `plot(x, f(x), 'linewidth', 2)`, il parametro `'linewidth'` consente di definire lo spessore delle curve. Il valore che viene specificato in questo caso è 2 e il risultato:



Usando il comando `hold on` per fare un confronto tra i vari grafici e invocando di nuovo la funzione `plot` ma con parametri differenti, si ottiene:

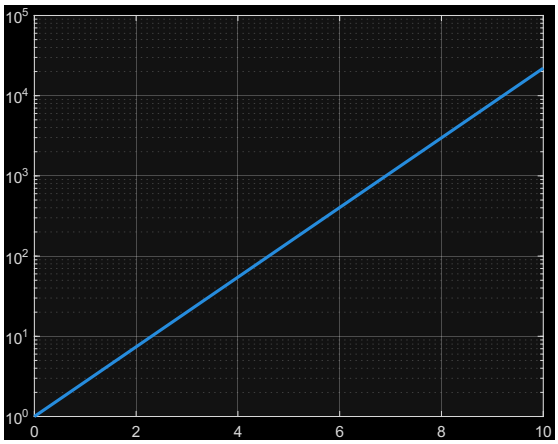
```
figure(1)
plot(x, f(x), 'linewidth', 2)
hold on
plot(x, -f(x), 'r', 'linewidth', 2)
```



Disegnare il grafico in scala semi-logaritmica (logaritmica solo per le ordinate) della funzione $y = e^x$ nell'intervallo $[0, 10]$. È possibile prevedere come sarà il grafico in scala semi-logaritmica della funzione $y = e^{2x}$? Verificare la risposta tracciando sulla medesima finestra le due funzioni utilizzando colori diversi per i due grafici.

Per disegnare il grafico in scala semi-logaritmica (logaritmica sulle ordinate) si utilizza il comando `semilogy` e si aggiunge anche la griglia:

```
semilogy(x, exp(x), 'linewidth', 2)
grid on
```

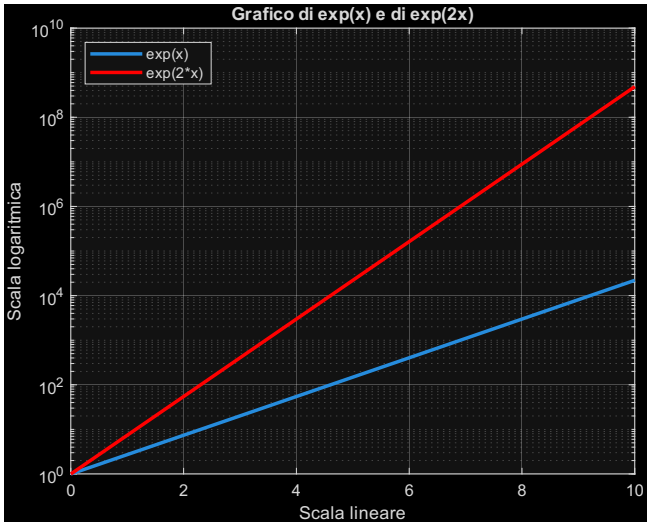


È una retta poiché $\log_{10}(y) = \log_{10}(e^x) = x \log_{10}(e)$.

- Il comando `semilogy` è l'equivalente di `plot` ma traccia un **grafico con l'asse delle ordinate in scala logaritmica**.
- Il comando `semilogx` traccia un **grafico con l'asse delle ascisse logaritmico**.
- Il comando `loglog` traccia un grafico in cui entrambi gli assi sono in scala logaritmica.

Passando alla risoluzione dell'esercizio, dato che $\log_{10}\left(e^{2x}\right) = 2x\log_{10}(e)$, disegnando in scala semi-logaritmica la funzione $y = e^{2x}$, si otterrà una retta con pendenza doppia rispetto alla retta precedentemente disegnata.

```
hold on
semilogy(x, exp(2 * x), 'r', 'linewidth', 2)
% oppure in un solo comando senza usare hold on
% semilogy(x, exp(x), 'b', x, exp(2*x), 'r', 'linewidth', 2)
title('Grafico di exp(x) e di exp(2x)')
xlabel('Scala lineare')
ylabel('Scala logaritmica')
grid on
legend('exp(x)', 'exp(2*x)', 'Location', 'NorthWest')
```



Il comando `legend` attribuisce alle curve disegnate da `plot` le stringhe di testo che gli vengono passate. Attenzione che alcune stringhe, come `'Location'` e `'NorthWest'`, vengono interpretate dalla funzione come comandi veri e propri. In questo caso si chiede di inserire una legenda in alto a sinistra.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Quarteroni, F. Saleri, and P. Gervasio. *Calcolo Scientifico: Esercizi e problemi risolti con MATLAB e Octave*. UNITEXT. Springer Milan, 2017.

Index