Introducción a Funciones Multivariables

Cálculo Multivariable

Estudia las funciones multivariables de la forma:

$$f(x, y, \dots, z) = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Éstas se pueden pensar como funciones **multidimensionales.**

Un punto se escribe como $\bar{x} = (x, y, z)$, mientras que un vector se escribe como $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

En una función $\underbrace{f(x, y)}_{\text{Input}} = \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{Output}}$ } **Transformación del espacio**

También se suele escribir $z = f(x, y) = \cos(x)\sin(y)$, pues z representa la altura (en este caso). Así, $f(0, y) = \sin(y)$ y $f(x, 0) = 0$. Esto da lugar a las derivadas parciales.

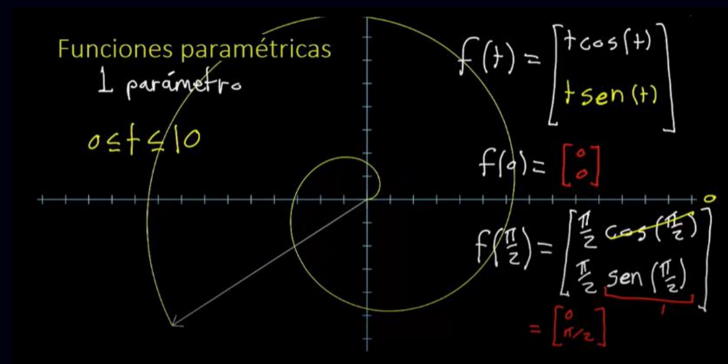
Las líneas de contorno son aquellas que se generan al hacer $f(\bar{x}) = c, c \in \mathbb{R}$.

Visualización de Funciones Vectoriales

Funciones Paramétricas y Campos Vectoriales

Curvas Paramétricas

Un ejemplo de un parámetro sería $f(t) = \begin{bmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{bmatrix}$, se puede pensar al parámetro como el input. Ahora, si sólo nos fijamos en el output, resulta una caminata como la siguiente:



En el caso de las curvas paramétricas, se **pierde la noción** de en qué puntos toma qué valores, sin embargo, nos quedamos con la información de cómo se ve la **curva resultante**.

Superficies Paramétricas

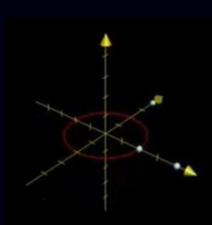
En este ejemplo, pensemos en la siguiente función que tiene **dos inputs y tres outputs**:

$$f(t,s) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) + \cos(t)\cos(s) \\ 3\sin(t) + \sin(t)\cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}$$

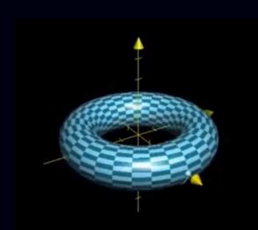
Para tener una intuición de cómo se forma la superficie paramétrica, se puede dejar uno de los parámetros fijos, digamos $s = \pi$, de tal manera que la función queda simplificada a:

$$f(t,\pi) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto da como resultado la siguiente curva paramétrica (color rojo):



Al momento de unir todas las superficies, es decir, cuando dejamos libre el parámetro s, se obtiene la siguiente figura:

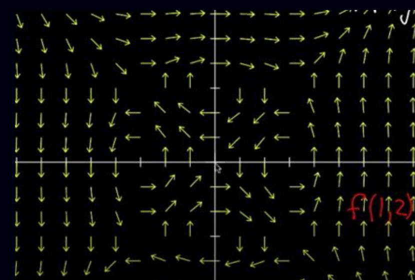


Campos Vectoriales

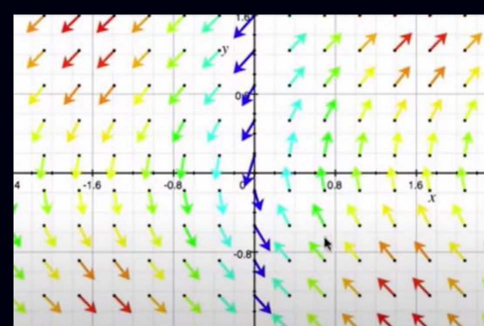
Son una manera de visualizar funciones que tienen la **misma dimensión** en el **input** como en el **output**. Pensemos en un ejemplo en donde se tienen dos inputs y de salida, un vector de dimensión dos:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} y^3 - 9y \\ x^3 - 9x \end{bmatrix}$$

Si quisiéramos representar esta función de manera convencional, necesitaríamos un espacio de **cuatro** dimensiones, por otro lado, en un **campo vectorial** sólo necesitamos de dos, pues se grafica en un plano de dos dimensiones y llevando cada valor a la **dirección** de su imagen por medio de una **flecha**. El ejemplo antes descrito, se vería así:

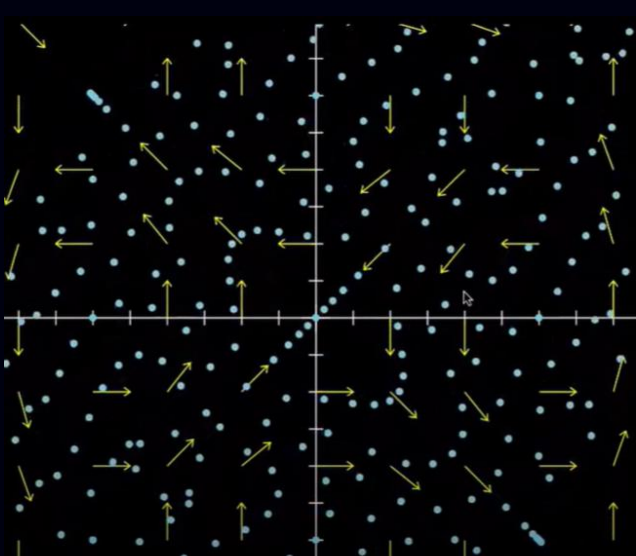


Obsérvese que todas las flechas tienen la **misma longitud,** sin embrago la magnitud de los vectores sí puede variar enormemente. Para mitigar esto, se dan **colores** a las flechas indicando su **magnitud**, esto termina viéndose así:



Otras formas de mostrar la **magnitud** es dibujar las flechas a un **tamaño proporciona**l de la magnitud del vector.

Flujo de Fluidos y Campos Vectoriales



Una aplicación de los **campos vectoriales** sería en el **flujo de fluidos.** Si se piensa que se ponen gotitas en varios puntos de un plano, el movimiento que sufren puede ser descrito por medio de un **campo vectorial**.

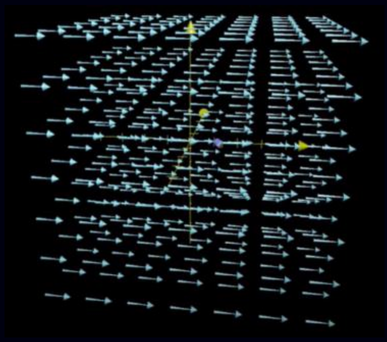
De la misma manera, se puede pensar en el movimiento de **partículas**. Así, se pueden estudiar puntos de atracción, repulsión o si rotan alrededor de un punto en específico. Si la función que se representa en el campo vectorial, saber si diverge o siquiera si es periódica.

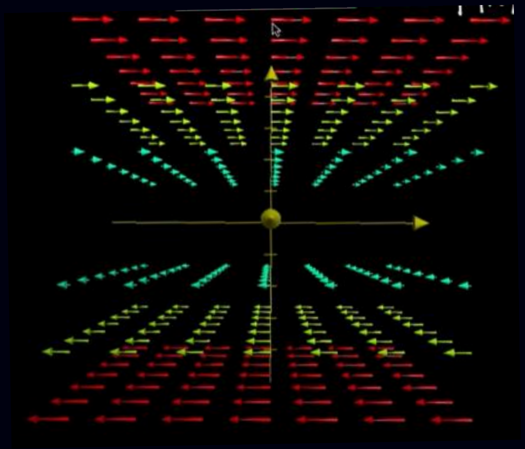
Campos Vectoriales Tridimensionales

Pensemos en la siguiente función:

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

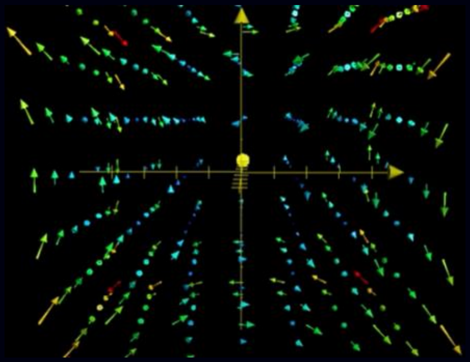
La **gráfica** de este campo vectorial sería la siguiente:





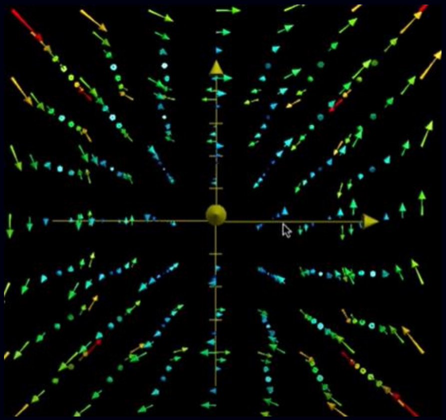
Ahora, si pensamos en un ejemplo un poco más interesante como:

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Si nos llegamos a encontrar con funciones vectoriales más complejas como

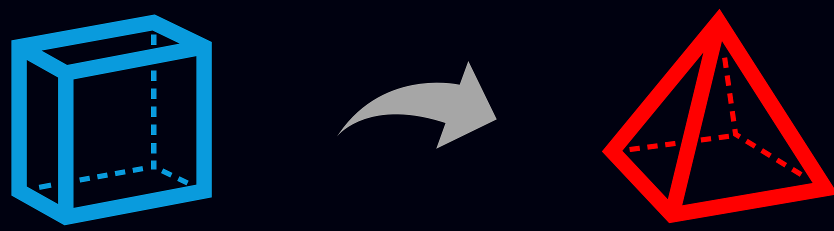
$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}$ que nos da la siguiente gráfica:



Para tener un mejor entendimiento de cómo se comporta la función, vamos a analizar **la tercera salida** que es xy, esta entrada indicará hacia dónde **apuntará** el vector. Si vemos el plano X y Y, nos daremos cuenta que si x, y ambos positivos o negativos, el producto será positivo, lo cual implicará que el vector se alejará del origen y de manera inversa si tienen signos opuestos. Así, viendo el plano ya mencionado, queda una gráfica como la que se observa al lado izquierdo. De manera análoga, se pueden interpretar la primera y segunda salida de la función.

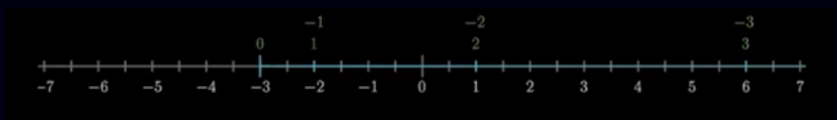
Transformaciones

La transformación sólo consta en la **aplicación** a cualquier espacio, pueden ser rectas, esferas o cualquier espacio (se le conoce como input) y lo **convierte** en otro objeto en algún espacio.



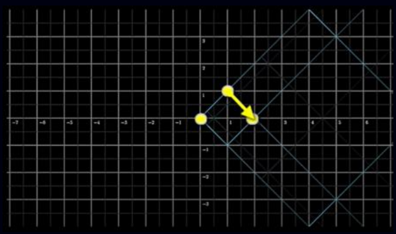
De esta manera, cuando pensamos en una función, debemos pensar que la transformación es la manera de **relacionar** las entradas con las salidas. Por ejemplo, la siguiente función:

$f(x) = x^2 - 3$



Así podemos ver que la **transformación** es simplemente un **mapeo que cambia la forma** de un espacio en otro.

Punto Fijo: Es aquel punto al cual se le aplica la transformación y permanece en el **mismo** lugar.



Para ejemplificar lo anterior, veamos que la función: $f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$ esto genera la transformación que se observa en la imagen.

Observemos que el **punto fijo** en la función anterior es el origen, pues al aplicar la transformación permanece en el mismo lugar.

Visualización de Funciones Multivariables

- **Función Multivariable:** Una función se llama multivariable si contiene más de una variable de entrada.
- **Funciones con valores vectoriales:** También conocidas como funciones multivariables, éstas son aquellas funciones que contienen más de una variable de salida.

La visualización de estas funciones se hace a través de la imaginación en un **espacio de varias dimensiones**, desafortunadamente, sólo podemos imaginar **hasta tres dimensiones**.

¿Qué es una función multivariable?

Inicialmente se puede pensar en un proceso que inicia **con un número** (o en este caso varios números) y lo **convierte en otros**. Sin embargo, en **Cálculo Multivariable,** puede tomar cualquier cosa, como una lista de números y convertirlo en otra lista de números. La **lista de números** que ya se mencionó se puede **visualiza**r en un espacio de **dimensión del tamaño** de la lista de números.

Así, es intuitivo pensar que las funciones multivariables tratan de asociar puntos en un espacio multidimensional a puntos en otro espacio multidimensional. Por ejemplo, la función $f(x, y) = x^2 y$ lleva de **un espacio bidimensional a un espacio unidimensional**, esto se puede notar por el número de entradas y salidas.

Funciones Vectoriales

Ahora, en lugar de pensar en una lista de números como un punto, lo pensaremos como **un vector**. Es decir, una **flecha** que contiene información de **dirección y velocidad**. Para hacer énfasis en esta manera de pensar las listas, se utiliza una **notación** distinta. Esta implica en escribir el vector de forma **vertical**. Como, por ejemplo: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Por distintas razones, se acostumbra pensar en la salida de una función multivariable como un vector y en la entrada como un punto. No es una regla, pero así se suele ver en libros, artículos y notas.

Terminología

- **Funciones con valores vectoriales:** Así se les conoce a las funciones cuya salida es un vector.
- **Funciones con valores escalares o valores reales:** Así se les conoce a las funciones cuya salida es un único número.

Ejemplos de Aplicaciones con Funciones Multivariadas

- **De la posición a la temperatura:** Se puede utilizar para modelar la variación de la temperatura en una grande región. Se puede pensar que la temperatura es una función de la longitud y la latitud, de manera que la función quedaría expresada como $T = f(L_1, L_2)$, también existe otra notación, en donde si decimos que la temperatura es una función de la **longitud y latitud** se escribe como $T(L_1, L_2)$.

- **Del tiempo a la posición:** Se utiliza para modelar la forma en la que una partícula se mueve en el tiempo. Así, se puede pensar que una función toma un parámetro, que sería el **tiempo** y regresa **varias entradas** que corresponde a las coordenadas de la **posición** en la que se encuentra la partícula. La fórmula de la función podría ser la siguiente: $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
- **De la posición al vector de velocidad**: Si se intenta modelar el movimiento de un fluido, se podría requerir una función para expresar la velocidad de cada partícula en el fluido. Para esto, se puede usar una función que tome valores de coordenadas, ya sean dos o tres, y retorne el valor de la velocidad de la partícula. La fórmula se vería como: $v = f(x, y)$.

¿Y el Cálculo?

Existen dos temas fundamentales en el Cálculo:

- **Derivadas:** Estudian la tasa de cambio de una función conforme cambia el valor de entrada. La tasa de cambio se refiere a la pendiente que se ve en la gráfica.
- **Integrales:** Estudian cómo suma una cantidad infinita de cantidades infinitesimales. Es decir, saber cómo calcular el área debajo de la curva en una gráfica.

La **derivada** se puede aplicar en el ejemplo de la temperatura para medir cómo cambia la temperatura si nos movemos en alguna dirección y cómo cambia la velocidad de las partículas en un fluido.

Por otro lado, la **integral** si se tiene el mapa con todas las temperaturas, podemos calcular la temperatura promedio o describir la fuerza total que ejerce un fluido.

Las Gráficas no son La Única Manera

Es importante notar que **las gráficas no son lo mismo que una función,** aunque pueda parecer obvio, la gente suele asociarlas de manera directa ya que en Cálculo de una Variable es muy útil representar las funciones como una gráfica.

Por ejemplo, cuando se están estudiando las derivadas, para entender el concepto, se le piensa como la pendiente de la gráfica. Sin embargo, esto no es tan sencillo de ver en una función multivariada y más bien se piensa en la derivada por su definición que es: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

De la misma manera, para las **integrales** se suelen pensar en el área debajo de la curva, sin embargo, se trata de hacer una infinidad de sumas infinitesimales para cada punto de la función, que no necesariamente forma una curva.

Derivada Multivariable:

Para que quede más claro, la derivada consiste en preguntarse cómo cambia el valor de la función si nos movemos muy muy poquito en alguna dirección.

Integral Multivariable:

De la misma manera, es fundamentalmente la suma en muchos valores muy pequeños, pero esto no siempre implica área.

Cinco Visualizaciones Diferentes

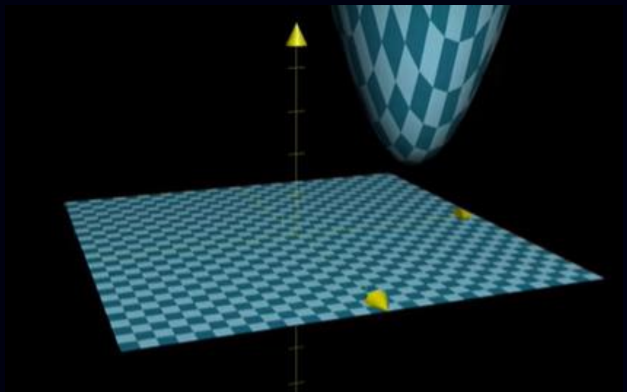
- **Gráficas:** Las gráficas son capaces de mostrar tanto el espacio de entrada como de salida, pero están limitadas por la dimensión. Por esta razón, se utilizan únicamente para representar funciones con una entrada y dos salidas o viceversa.
- **Mapas de Curvas de Nivel:** Estos sólo muestran el espacio de entrada y se utilizan para funciones con un valor de entrada de dos dimensiones y un valor de salida de una dimensión.
- **Campos Vectoriales:** Se aplican a funciones cuyo espacio de entrada y de salida tiene el mismo número de dimensiones. Funcionan muy bien para analizar cómo se mueve cada punto en el espacio de las entradas.
- **Transformaciones:** Funciones muy bien para cualquier tipo de función sin importar la dimensión de sus entradas o salidas. Lamentablemente, su representación se debe hacer a través de animaciones. Por lo que son útiles para obtener un sentido conceptual de la función.

Gráficas Multidimensionales

Vamos a construir una gráfica de una función que tiene una entrada bidimensional y una salida unidimensional. Para esto requeriremos trazar puntos en el **espacio tridimensional.**

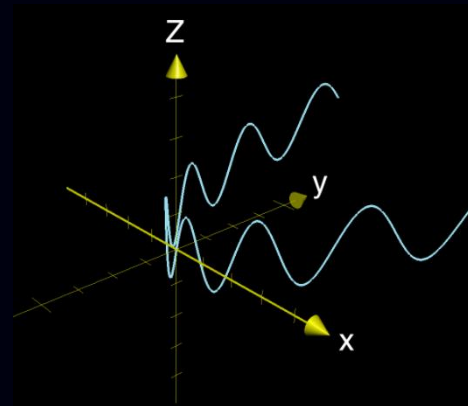
Primero debemos obtener una serie de puntos para darnos una idea de cómo se ve la función, para esto usaremos como ejemplo a $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + 2$ y utilizaremos **una tabla** para anotar los valores, por ejemplo

Entradas (x, y)	Salida $f(x, y)$
$(0, 0)$	10
$(1, 0)$	7
$(1, 2)$	3
$\vdots$	$\vdots$



Así, vamos a **asociar** cada valor de la **tabla con** un punto en **la gráfica**. Por ejemplo, asociaremos $(0,0) \rightarrow 10$ con el punto tridimensional $(0,0,10)$. En general pensaremos a todos los puntos como $(x, y, f(x, y))$ para cada par de números x y y. Una vez graficado, debe quedar una gráfica como la que se muestra en la imagen.

Y la interpretación es que, para cada par de coordenadas, la función dará un número que representaremos como la altura del que se conoce usualmente como **eje z.**



También se puede graficar una función que tenga **un valor de entrada y dos valores de salida**, podemos pensar en la función $f(x) = (x^2, \sin(x))$, en donde para cada punto en x obtenemos un punto en el espacio yz como se ve en la gráfica.

Sin embargo, las gráficas se ven **limitadas** en cuanto la suma de las dimensiones superan el tres, pues no nos alcanza la imaginación para interpretar gráficas de tal magnitud.

Mapas de Curvas de Nivel

El proceso

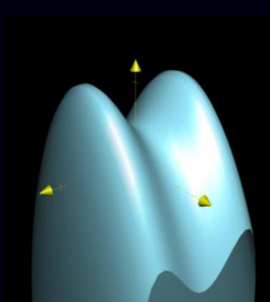
Las **curvas de nivel** suelen ser de utilidad cuando se tiene entradas bidimensionales y salida unidimensionales. Por ejemplo, la función $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$.

Si buscásemos graficarlo, sería tan simple como asociar cada punto de la forma $(x, y, f(x,y))$, esto resultaría en una superficie en el espacio **tridimensional**.

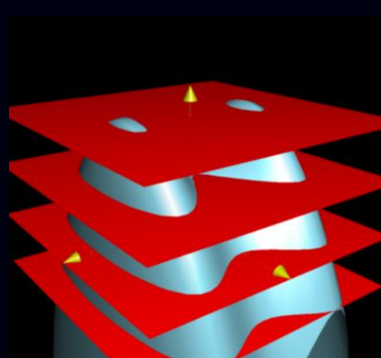
Pero por experiencia, sabemos que dibujar en un espacio **tridimensional es complejo** si se hace a mano. Para ellos las curvas de nivel nos **ayudan** a representar la función al dibujar únicamente en el espacio de entrada bidimensional.

A continuación, se mostrará **paso a paso** cómo se deben hacer:

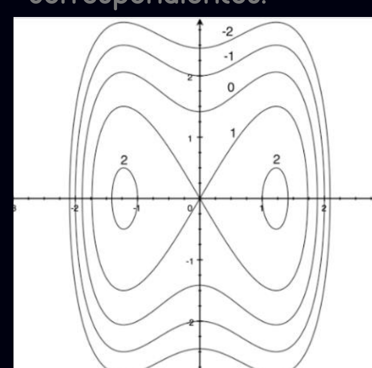
- **Paso 1:** Comienza con la gráfica de la función



- **Paso 2:** Corta la gráfica con varios planos paralelos al **eje** xy, separados por la misma distancia. Es decir, pensamos en la salida igualada a cierta z **como por ejemplo** $z = 2$.



- **Paso 3:** Proyecta las líneas en donde se cruza el plano xy y etiqueta sus alturas correspondientes.



Nombres para las Curvas de Nivel

- **Curvas de Nivel**
- **Conjuntos de Nivel.** Llamados así porque representan el conjunto de puntos (x, y) donde la altura de la gráfica permanece sin cambio, por lo tanto, nivelada.
- **Isolíneas.** Se les conoce así porque ¨iso¨ significa igual en griego.

Interpretación de las Curvas de Nivel

Se puede deducir cuán pronunciada es una porción de la gráfica a partir de que tan **cerca** están las líneas. Entre haya más espacio, significa que habrá que hacer **grandes movimientos laterales** para cambiar la altitud y si **están cerca** implica que con pequeños saltos laterales se producen grandes movimientos laterales.

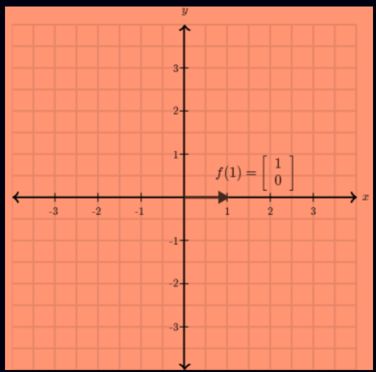
Cuando un conjunto de nivel se aproxima a **un pico** las curvas se verán más **cerradas** y cada vez **más pequeñas**. Lo mismo ocurre con un valle, de manera que se pueden identificar **máximos y mínimos** usando las Curvas de Nivel.

Funciones Paramétricas

Un parámetro

Aquí construiremos una función con una **entrada unidimensional y salida multidimensional** que se piensa como una curva dibujada en el espacio **multidimensional**. Las funciones de este estilo se les llama **paramétrica** y a su entrada se le conoce como **parámetro.** A veces, nos veremos en la necesidad de encontrar una función paramétrica que dibuje una **curva en particular,** a esto se le conoce como **parametrizar** una curva.

Visualización de Funciones con Valores Vectoriales de Salida

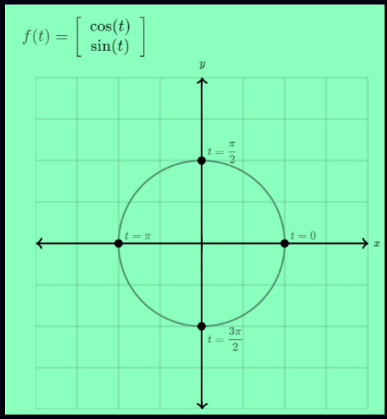


Por ejemplo, cómo se vería una función cuya fórmula es la siguiente:

$$f(t) = \begin{bmatrix} t \cdot \cos(2\pi t) \\ t \cdot \sin(2\pi t) \end{bmatrix}$$

Para empezar, podemos evaluar la función en 1 y eso nos da la salida $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Esto da un vector que apunta en la misma dirección que el **eje** x.

Pero para visualizar todos los valores de salida al mismo tiempo, una buena manera es imaginar la punta del vector a medida que t cambia. Es decir, imaginar como si estuviéramos dibujando la curva a partir de la dirección de los vectores en cada punto. A esto se le conoce como **curva paramétrica** y a la función que deja el trazo se le llama **función paramétrica.** Por último, al valor de la entrada t se le conoce como **parámetro.**



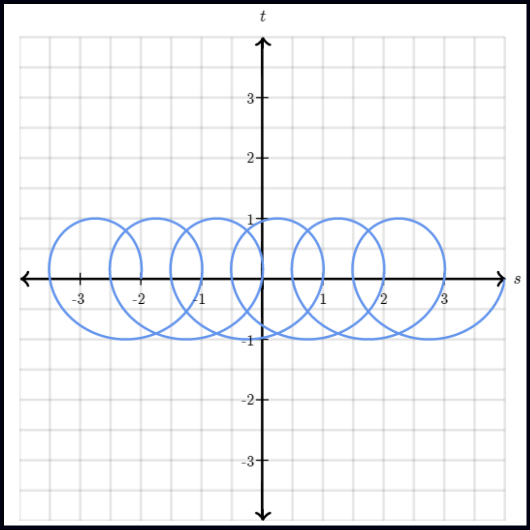
Es importante mencionar que en esta visualización sólo observamos el **espacio de salida** y esto tiene sentido ya que **el espacio de salida tiene más dimensiones que el de entrada.**

Por lo mismo de que sólo usamos el espacio de salida, se **pierde información sobre los valores de entrada,** pues no es claro de qué valor de entrada proviene un resultado. Para esto, se suele **etiquetar los valores** a medida que se van dibujando, como se ve en la imagen.

Parametrización

En Cálculo Multivariado y en un tema llamado **Integración de Línea** se comienza con una curva y se busca una función paramétrica que la dibuje. Un ejemplo de esto sería el de un **círculo unitario**. EL encontrar la función, se le llama **parametrizar la curva.** Cuya parametrización se encuentra en la imagen del párrafo anterior.

Es importante notar que en la parametrización **es necesario** definir el **rango de valores para el parámetro.**



Ejemplo: Si se busca parametrizar una curva como la de la imagen, se necesita pensar de la siguiente manera:

1. Si nos fijamos en la curva, tiene un patrón de un círculo dibujado en contra de las manecillas del reloj. Esto planta una fórmula base para realizar la parametrización. $f(t) = \begin{bmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{bmatrix}$.
2. Pero esto hace que empecemos en el punto **(1,0)**, pero buscamos empezar en el punto **(−2,0)** por lo que a la entrada de x se le restará −3.
3. Luego debe empujar hacia la derecha conforme pasa el tiempo, de manera que le sumaremos a la misma entrada ct que es una constante multiplicada por el tiempo. $f(t) = \begin{bmatrix} cos(t) - 3 + \text{ct} \\ sin(t) \end{bmatrix}$
4. Para determinar el valor de la constante, necesitamos saber qué tanto se mueve a la derecha al completar una vuelta cuando t va de 0 a 2π. Al ver la curva parece que se desplaza exactamente

una unidad después de una vuelta. Esto quiere decir que $2\pi c = 1$ por lo tanto $c = 1/2\pi$. $f(t) = \begin{bmatrix} cos(t) - 3 + (\frac{1}{2\pi})t \\ sin(t) \end{bmatrix}$

5. Por último, resta acotar el parámetro, como parece que da 6 vueltas, multiplicamos $2\pi * 6 = 12\pi$.

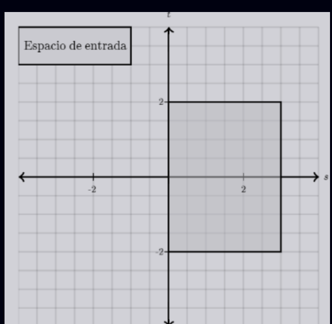
Dos parámetros

Ahora, extenderemos el concepto de las **funciones paramétricas.** Podemos pensar ahora que la función tenga **dos parámetros de entrada y valores de salida tridimensionales.** Esto nos dará como resultado una superficie paramétrica.

El **proceso inverso** de convertir una superficie en una función paramétrica se le conoce como **parametrización.**

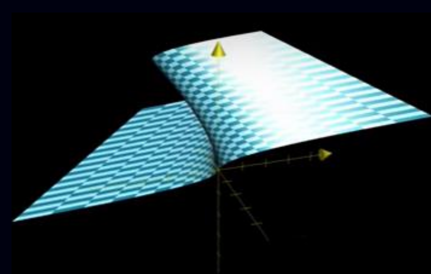
Ahora pasaremos a ver un ejemplo de cómo podemos dibujar este tipo de superficies. Pensemos en la siguiente función paramétrica con dos variables de entrada.

$$f(s,t) = \begin{bmatrix} t^3 - st \\ s - t \\ s + t \end{bmatrix}$$



Primero debemos especificar el rango de los valores que pueden tomar los **parámetros.** En este ejemplo diremos que $0 < s < 3$ y que $-2 < t < 2$.

Luego, basados en nuestro rango, evaluamos en una tablita **los posibles valores** de la función. Claro que sería imposible tomar literalmente todos los valores, sin embargo, esto ayuda para darnos una idea de la forma que tomará **la imagen.**

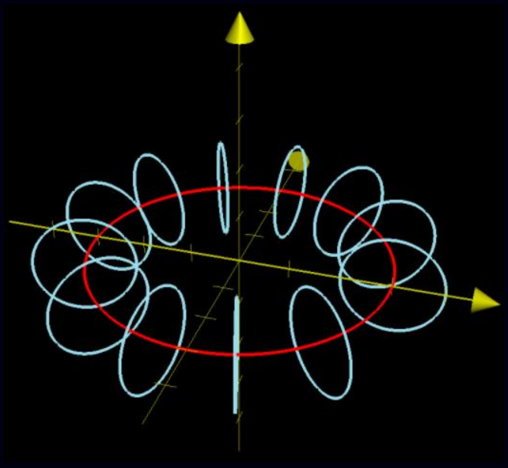


La superficie resultante de tres dimensiones se le llamará una **superficie paramétrica.** Cabe notar, que no se deben confundir con las gráficas del primer ejemplo, se están haciendo cosas muy distintas.

Parametrización de una Superficie

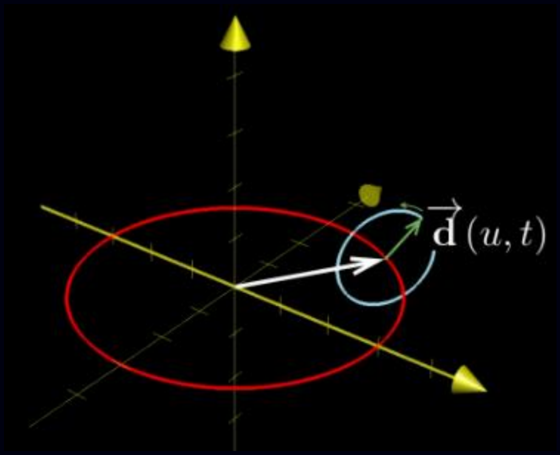
La parametrización de superficies es bastante compleja y requiere de cierta experiencia, pero para que se obtenga la idea general de cómo se hace, se mostrará un ejemplo de la **parametrización** de una superficie llamada **toro** que, si recordamos, es la dona que se vio al principio de esta lección.

Pensemos entonces en el ejemplo, tenemos una **dona vacía** que buscamos parametrizar, tal como se ve en la imagen. Es complicado pensar que **dibujamos una superficie,** por ello tendremos que recurrir a otra estrategia. Dividiremos la dona en **rebanadas**. Cuyo resultado podemos ver en la imagen.



Además de las rebanadas, podemos observar que se dibujó una línea roja, que servirá como **referencia** ya que ésta pasa por el centro de cada círculo. Como esto es sólo un ejemplo, podemos imaginar que el radio del **círculo rojo** sea 3 y que el radio de cada **rebanada azul** sea de 1.

Pensemos a cada punto sobre el toro como **la suma de dos vectores**:



1. Un vector que va del origen a un punto del círculo rojo, a este le llamaremos $\vec{c}$, el cual dependerá del parámetro t. Conforme el valor del parámetro cambie, el punto en el **círculo rojo** cambiará. Es importante notar que, por lógica, querremos que t tome valores entre **0 y** 2π.
2. Otro vector que llamaremos $\vec{\mathrm{d}}$, este irá desde **círculo rojo** a un punto de la rebanada azul, para que quede bien, la dirección en la que apunta este vector deberá depender del parámetro **t**. Más aun, usaremos un segundo parámetro **u** para determinar hacia qué parte de la **rebanada azul** apuntará $\vec{\mathrm{d}}$.

Así cada punto del toro estará definido por la suma de dos vectores: $\vec{\mathrm{c}}(\mathrm{t}) + \vec{\mathrm{d}}(\mathrm{u},\mathrm{t})$. La idea es que es muy fácil para nosotros definir círculos, de manera que nos conviene **descomponer el toro** en una infinidad de círculos. El círculo rojo grande se parametriza de la siguiente manera:

$$\vec{c}(t) = 3\begin{bmatrix}\cos(\mathrm{t})\\ \sin(\mathrm{t})\\ 0\end{bmatrix}$$

Por último, el segundo vector es ligeramente más complicado, esto se debe a que es un círculo con un ángulo en específico. Sabemos cómo parametrizar un círculo. Pero ahora en lugar de tomar el vector unitario en la dirección x, la pensamos como si fuera el vector unitario que apunta hacia afuera del origen, la cual llamaremos $\hat{v}(t)$. Del mismo modo, la dirección **ascendiente** la llamaremos $\hat{k}(t)$.

Así, parametrizamos de la siguiente manera: $\vec{\mathrm{d}}(\mathrm{u},\mathrm{t}) = \cos(\mathrm{u})\,\hat{\mathrm{v}}(\mathrm{t}) + \sin(\mathrm{u})\,\hat{\mathrm{k}}$.

Pero veamos que $\hat{v}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{t}) \\ \sin(\mathrm{t}) \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. De esta manera, la **parametrización** queda de la siguiente manera:

$$\vec{\mathrm{c}}(\mathrm{t}) + \vec{\mathrm{d}}(\mathrm{u},\mathrm{t}) = 3\begin{bmatrix} \cos(\mathrm{t}) \\ \sin(\mathrm{t}) \\ 0 \end{bmatrix} + \cos(\mathrm{u})\begin{bmatrix} \cos(\mathrm{t}) \\ \sin(\mathrm{t}) \\ 0 \end{bmatrix} + \sin(\mathrm{u})\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos(t) + \cos(\mathrm{u})\cos(\mathrm{t}) \\ 3\sin(\mathrm{t}) + \cos(\mathrm{u})\sin(\mathrm{t}) \\ \sin(\mathrm{u}) \end{bmatrix}$$

Campos Vectoriales

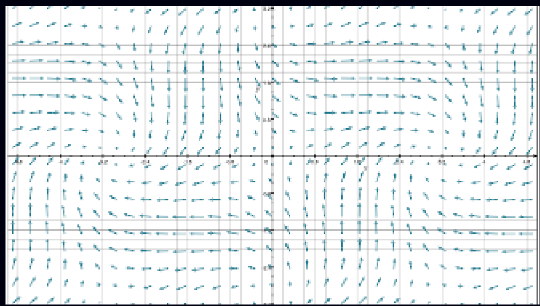
Recordemos que:

- Un campo vectorial asocia un vector a cada punto en el espacio.
- Los campos vectoriales y el movimiento de fluidos están muy relacionados.
- Los campos vectoriales funcionan cuando coincide la dimensión de las entradas y las salidas.

Dibujando el movimiento al usar vectores de velocidad

Recordemos de Física que la longitud de vector, conocido como **magnitud**, indica la rapidez, mientras que la **dirección** indica la dirección en la que se mueve l objeto.

Para representar el movimiento de **un fluido**, necesitamos comunicar mucha más información que sólo la magnitud y la dirección. En realidad, es suficiente con hacer la representación sobre una **muestra de partículas**. Por ejemplo, con un vector de velocidad en cada partícula mostrada y agregamos los **ejes ordenados**, conseguimos una imagen así:

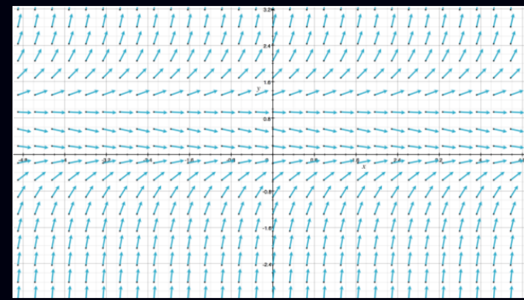


Las **partículas cercanas** entre sí tienden a moverse con rapidez y dirección muy similares, por ello un mismo vector puede ser representativo de una vecindad de partículas. Un diagrama como el que vimos, se le llama **campo vectorial.**

Es importante mencionar que **rara vez se dibujan los vectores a escala**. Por esto, vemos que usualmente los vectores son más pequeños de lo que representan, pero coincide con la proporción del resto de los vectores.

Pensemos por ejemplo en la función: $f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ y^2 - y \end{bmatrix}$

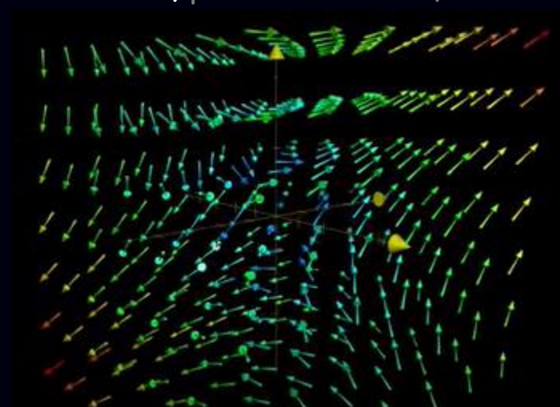
Vamos a intentar predecir como se verá el espacio vectorial antes de graficarlo. Primero, debemos notar que no hay un componente x por lo que si no habrá cambio en los vectores si nos movemos de la izquierda a la derecha. Por otro lado, **el componente vertical** contiene una ecuación cuadrática, cuyas raíces están en **0 y 1,** además de que precisamente en ese intervalo es negativa, es decir, **los vectores apuntarán hacia abajo**. Una vez hecho este pequeño razonamiento, es hora de ver cómo queda el **campo vectorial**.



Campos Vectoriales en Tres Dimensiones

Podemos hacer lo mismo en tres dimensiones, quizás ahora pensando en **corrientes de aire** en lugar de líquidos. Podremos ver un ejemplo de un **campo vectorial tridimensional** de una función que tiene tres entradas y tres coordenadas de salida. Una **gráfica requeriría 6 dimensiones,** pero en este caso, al ser un campo vectorial, sólo necesitamos de **tres dimensiones**. La función que se utilizará será la siguiente y a un lado, se pondrá una imagen de su representación:

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix}$$



Transformaciones

Hasta el momento, **todos los métodos buscan representar la conexión entre los valores de entrada.** Esto varía de una visualización a otra:

- **Gráficas:** Traza una serie de puntos cuyas coordenadas contienen información tanto de valores de entradas como de salida.
- **Mapas de Curvas de Nivel:** Esto consiste en marcar qué valores de entrada irán precisamente a ciertos valores de salida.
- **Funciones Paramétricas:** Aquí sólo marcamos los valores de salida al hacer variar el valor de entrada o parámetro.
- **Campos Vectoriales:** Se grafica el valor de salida como un vector en el lugar donde se encuentra el valor de entrada.

El pensamiento detrás de una transformación es **ver o imaginar** cómo cada punto de entrada se **mueve** a su punto de salida correspondiente. Por ejemplo, podemos **transformar** un simple cuadrado en una dona o toro.

Precisión

Pensar en una función como una **transformación** es muy poderoso pues no se está limitado por la dimensión, los valores de entrada y salida pueden estar en distintas dimensiones. Incluso si las dimensiones son **muy grandes para visualizarlas** la transformación nos permite tener una idea vaga de cómo está cambiando. Por ejemplo, si vamos de 3 dimensiones a un espacio bidimensional, podemos pensar que la **transformación está aplastando** una dimensión. Entender las funciones desde las **transformaciones** permitirá ver de una más sencilla la conexión entre **Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal**, pero se debe recalcar que las transformaciones serán útiles para ver qué hacen las funciones y no tanto para hacer descripciones precisas.

Pensemos ahora en un ejemplo en donde se pasa **del espacio al espacio**, las funciones que mapean tres dimensiones en tres dimensiones, se puede **observar el mapeo en un mismo espacio tridimensional**. La función de la transformación que veremos es $f(x, y, z) = (\mathrm{yz}, \mathrm{xz}, \mathrm{xy})$:

Como reflexiones finales, es **muy útil** pensar en transformaciones para obtener características sobre las funciones pues, por ejemplo, **una función discontinua romperá el espacio de entrada**, estas interpretaciones serán muy importantes una vez que nos adentremos más al **Cálculo Multivariable.**