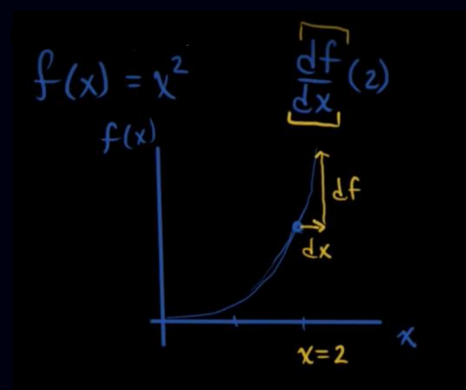
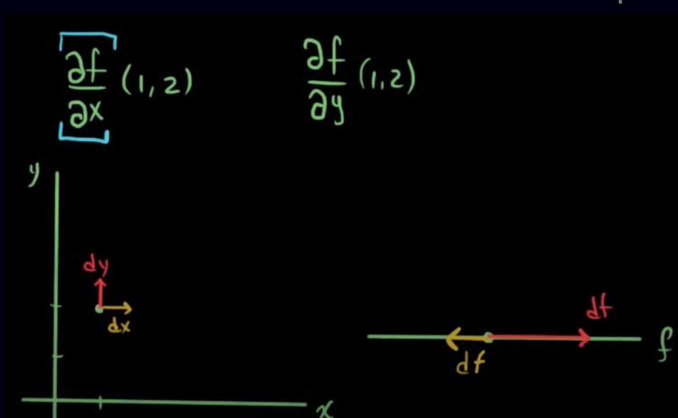
Derivadas Parciales

Introducción a las Derivadas Parciales

Para entender bien el concepto de **derivadas parciales**, sería ilustrativo ver un pequeño ejemplo, por ello pensaremos en la función $f(x, y) = x^2y + sen(y)$. Lo que buscamos ahora será derivar esta función, para esto usaremos la **derivada parcial**, que funciona como una derivada común de una variable. Pero claro que entonces debemos recordar el concepto de **derivada en una variable.** La notación para obtener la derivada de una función f respecto a la variable x se escribe como $\frac{df}{dx}(x)$, lo que quiere decir es que mide un cambio incremental infinitesimal sobre f entre un cambio incremental infinitesimal sobre x, tiene como objetivo medir la tasa de cambio de la función en un punto. Podemos ver una ilustración ejemplificada en la imagen adjunta al párrafo. Una vez que recordamos la derivada común, desarrollemos la intuición para la derivada parcial. Supongamos que tenemos una función de dos variables de entrada y se busca $\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}2)$, esto quiere decir, **la derivada parcial de f respecto a la variable x en el punto (1,2).** Es decir, cuánto cambia la función f si hacemos un pequeño cambio en x. Esto también está ilustrado en la imagen adjunta.





Es importante notar que, si la **derivada es respecto a una variable, las otras variables serán consideradas constantes**, pues en realidad no las estamos variando. Regresando al ejemplo, haremos los cálculos de la derivada parcial:

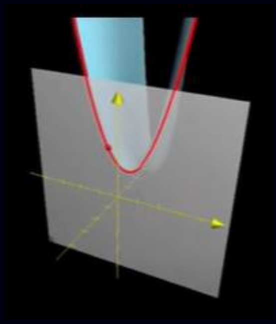
Respecto a $x = 1$: $\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}2) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x^2 \cdot 2 + sen(2)\right)\big|_{x=1} = 4x + 0\big|_{x=1} = 4$

Respecto a $y = 2$: $\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}2) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(1^2 \cdot y + sen(y)\right)\big|_{y=2} = y + cos(y)\,\big|_{y=2} = 1 + cos\,(2)$

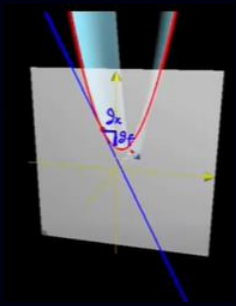
Respecto a x en general: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x^2 \cdot y + sen(y)\right) = 2xy + 0$

Respecto a x en general: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(x^2 \cdot y + \mathrm{sen}(y)\right) = x^2 + \cos(y)$

Comprensión Gráfica de las Derivadas Parciales



Siguiendo el ejemplo que utilizamos en la sección pasada, vamos a hacer un análisis gráfico de qué significa la derivada. Siguiendo la aritmética, podemos ver que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2$. Ahora, podemos ver que estamos dejando **a y constante,** lo cual implica que estamos cortando la gráfica en $y = 1$, el hacer ese corte, nos deja la línea roja que se puede apreciar en la imagen.



Y ahora sí, podemos interpretar la derivada parcial como la pendiente, pues de tener una superficie, pasamos a tener una curva. Ahora, la pendiente sería aquella que se ve **en la línea de color azul**. Pues es la **pendiente de la recta** que es tangente a la **curva azul**.

Definición Formal de las Derivadas Parciales

Como ya comentamos en la primera sección, en lo que consiste la derivada es en hacer un **incremento infinitesimal** al que denotamos por ∂x, pero para hacer las cosas más sencillas, lo cambiaremos por h, entonces buscaremos dado que cambiamos el valor de x por $x + h$. Para calcular ∂f lo que hacemos es la resta entre $f(x+h,y) - f(x,y)$ y así es como vemos cuánto cambia. Entonces como la derivada **es la tasa de cambio,** necesitamos obtener el cociente de lo anterior: $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$. El único problema es que buscamos que h **sea muy muy pequeño,** entonces lo que haremos será tomar el $\lim h \to 0$. Así, la definición formal de la **Derivada Parcial es:**

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}}$$

Teorema de Schwarz

Imaginemos que se tiene la **función multivariada** $f(x, y) = sen(x) \cdot y^2$, sabemos cómo obtener la **derivada parcial respecto a x o y**. Estas serían:

- $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x) = cos(x) \cdot y^2$
- $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x) = 2 \cdot sen(x) \cdot y$

Pero fijémonos que resultan en otras funciones multivariadas. Éstas a su vez podemos volverlas a derivar, por ejemplo:

- $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = -sen(x) \cdot y^2$
- $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = cos(x) \cdot 2y$
- $f_{yx} = cos(x) \cdot 2y$

Hay que notar que **las derivadas parciales primero sobre y y luego sobre x son iguales a cuando se hace primero sobre x y luego sobre y**. A esto se le conoce como *Teorema de Schwarz. ´Si las segundas derivadas parciales son continuas, entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales´.*

El Gradiente

¿Cómo se calcula?

Pensemos en la función $f(x, y) = x^2 sen(y)$, ahora pensemos que el gradiente es como el resumen de las derivadas parciales de la función. Ahora sacaremos las **derivadas parciales**.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot sen(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot cos\ (y)$$

Ahora procedemos a **calcular el vector del gradiente:**

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x \cdot sen(y) \\ x^2 \cdot cos\ (y) \end{bmatrix}$$

Así podemos describir que, de manera general, **el gradiente se calcula como:**

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}) \end{bmatrix}$$

El triángulo que antecede a f se le conoce como **nabla** y podemos pensar a nabla como el vector de parciales:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

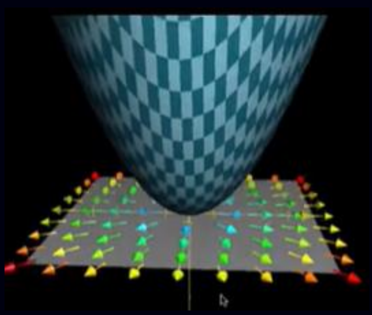
Y al momento de utilizar **nabla, se piensa en una multiplicación matricial.** Respecto a su **dimensión,** el vector resultante de la aplicación del gradiente será de **nx1,** donde **n** es el tamaño de la dimensión del espacio de entrada de f.

El Gradiente y las Gráficas

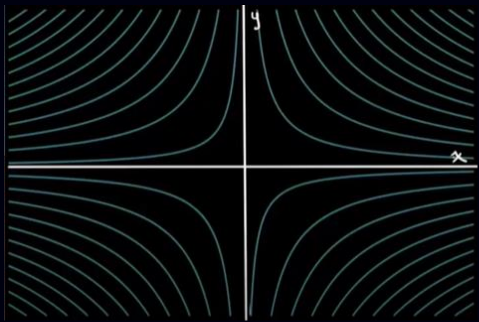
Pensemos en la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces el gradiente será:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Si le aplicáramos un **campo vectorial** a la función, nos resultaría en la siguiente gráfica:

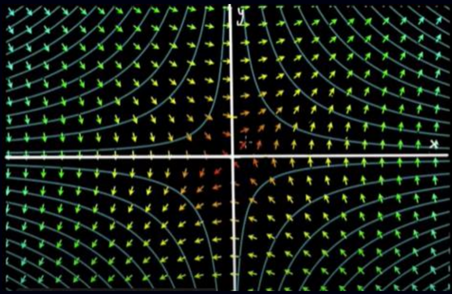


Al realizar un **análisis** sobre la gráfica, podemos ver que el vector del gradiente apunta en **la dirección del ascenso más pronunciado.**



El Gradiente y las Curvas de Nivel

Si ahora tomamos como ejemplo la función $f(x,y)=xy$ cuyas curvas de nivel son las que se muestran en la imagen a la izquierda.



Entonces el **gradiente** resulta en: $\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$, de manera que si dibujamos el **campo vectorial** nos resulta en la imagen que se muestra, conocida como **campo gradiente**. Si nosotros nos colocamos exactamente en **un punto de alguna curva de nivel**, lo que nos indica el vector es en qué dirección debemos dirigirnos para que la función **incremente su valor de salida** de la manera **más rápida.** De manera que se puede concluir que **el gradiente siempre será perpendicular a la curva de nivel**.

Derivada Direccional

Imaginemos que tenemos la función $f(x,y)=x^2y$. Ahora, pensemos que tenemos un vector $\vec{v}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ y nos preguntamos **qué le pasaría a la función si realizamos un pequeño empujón sobre un punto del espacio de entrada en la dirección de** $\vec{v}$, esto imitando el funcionamiento de la derivada parcial, pero utilizando **una dirección distinta al de los ejes.** Para mostrar la dirección, lo que haremos será **multiplicar nuestro vector por un escalar muy muy pequeño.** Por tanto, la dirección estará definida por el vector $\lim_{h\to 0} h\vec{v}=\begin{bmatrix}-h\\2h\end{bmatrix}$, de forma que ahora el **gradiente direccional** está dado por: $\nabla_{\vec{v}}f(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}+2\frac{\partial f}{\partial y}$. De manera general, si tenemos el vector:

$$\vec{w}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

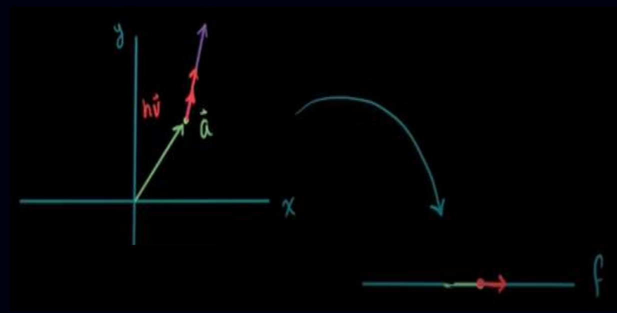
Y buscamos obtener el gradiente en dirección $\vec{w}$ haremos el producto punto con ∇f, de manera que nos queda como:

$$\nabla_{\vec{w}}f=\nabla f\cdot\vec{w}=a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}$$

Definición Formal de la Derivada Direccional

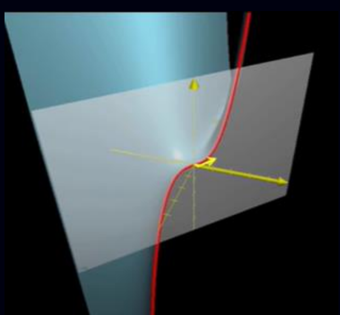
La **definición formal de la Derivada Direccional es:**

$$\boxed{\nabla_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a})}{h \cdot \left|\left|\vec{v}\right|\right|}}$$



Geométricamente, se vería como la imagen que se muestra a la derecha. ***Se utiliza para cuando no queremos que la norma del vector afecte la Derivada Direccional.***

Derivadas Direccionales y la Pendiente



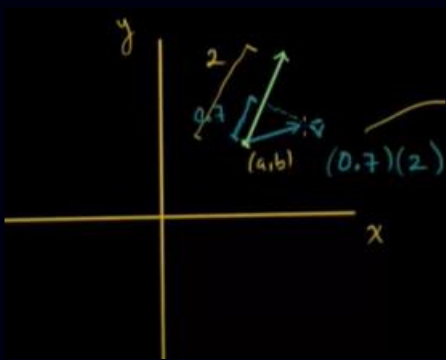
Si dibujamos en una gráfica tridimensional a la función $f(x, y) = x^2y$ y tomamos el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, entonces tomemos la gráfica, y cortemos con el plano en donde vive $\vec{v}$ y pongamos al mismo vector, tal como se nota en la imagen. **Nótese que estamos tomando la derivada direccional en el punto (-1,-1).** Por la definición que tomamos para la **derivada parcial**, es necesario que el vector de donde obtendremos la dirección tenga **norma uno.** Esto con el fin que la derivada parcial pueda ser interpretada como **una pendiente.** Por lo tanto, necesitamos utilizar el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix}$. Como vimos anteriormente, vamos a calcular la derivada direccional como $\nabla f \cdot \overrightarrow{w}$, **sin embargo, si queremos no preocuparnos por la norma del vector, deberíamos modificar esta definición de derivada direccional a:**

$$\boxed{\nabla_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \frac{\nabla f(\vec{a}) \cdot \overrightarrow{w}}{\left|\left|\vec{v}\right|\right|}}$$

- $\nabla f(\vec{a}) = \begin{bmatrix}2xy\\x^2\end{bmatrix}(\vec{a}) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ pues lo estamos evaluando en el punto (-1,-1). Y sólo resta obtener el producto punto.
- $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Es de notar que no dividimos entre la norma, ya que el vector ya **era unitario.**

Intuición del gradiente

Como vimos ya en las secciones anteriores, **el gradiente apunta en la dirección del ascenso más pronunciado.** ¿Por qué ocurre esto? Ahora que conocemos el concepto de derivada direccional, podemos darnos cuenta del porqué ocurre.



Tomemos un vector tal que $\left|\left|\vec{v}\right|\right| = 1$, entonces $\nabla_{\vec{v}}f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{v}$ esta fórmula nos dará la derivada parcial en cualquier dirección. Entonces si queremos obtener el vector que maximice la derivada direccional. Es decir, $\max\limits_{||\vec{v}||=1} \nabla f(a,b) \cdot \vec{v}$ es lo que buscamos. Como $\vec{v}$ **debe tener norma uno**, entonces lo que debemos pensar es qué valores de $\vec{v}$ maximizan el valor de la expresión. Si nosotros tomamos un vector cualquiera (vectores azules) y lo proyectamos sobre el **vector del gradiente (vector verde)** y posteriormente lo multiplicamos por la longitud de éste como se ve en la imagen, obtendremos cierto valor **para la derivada direccional**, nuestro objetivo es **maximizar dicho valor.** ¿Qué vector lo maximiza? **Claramente lo hace el vector con la misma dirección que el gradiente.**