

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN FISICA ED ASTROFISICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Tecniche di Teoria dei Campi per
gli Isolanti Topologici Tridimensionali**

Relatore

Dott. Andrea Cappelli

Candidato

Sisti Jacopo

Anno Accademico 2014/2015

Indice

Introduzione	5
1 L'Effetto Hall Quantistico	9
1.1 Introduzione	9
1.2 L'Effetto Hall Intero	11
1.2.1 I livelli di Landau	11
1.2.2 Incompatibilità dello stato fondamentale	13
1.2.3 Stati di bordo	13
1.2.4 Quantizzazione della conduttività	14
1.2.5 Esattezza della conduttività Hall	16
1.3 L'Effetto Hall Frazionario	18
1.3.1 La funzione d'onda di Laughlin	19
1.3.2 Eccitazioni con carica e statistica frazionaria	20
1.4 Verifiche Sperimentali sulla Carica e Statistica Frazionaria	21
1.4.1 Shot noise e carica frazionaria	21
1.4.2 Interferometro di Fabry-Perot e statistica frazionaria	22
2 Teorie di Campo dell'Effetto Hall	23
2.1 Stati di Bordo e Anomalia Chirale nell'Effetto Hall Intero	23
2.1.1 Dinamica degli stati di bordo	24
2.1.2 Algebra chirale sul cilindro	26
2.1.3 Argomento del flusso e l'anomalia chirale	28
2.2 Gli Stati di Bordo del FQHE e il Bosone Chirale	30
2.2.1 Il bosone chirale	30
2.2.2 Stati di bordo del FQHE	33
2.3 Teoria Effettiva di Campo nel Bulk	34
2.3.1 Corrispondenza bulk-boundary per il FQHE	35
2.4 Funzioni di Partizione dell'Effetto Hall	37
2.4.1 Condizioni di invarianza modulare	39
3 Isolanti Topologici Bidimensionali	42
3.1 Simmetria d'Inversione Temporale e Teorema di Kramers	43
3.2 Il Modello di Bernevig e Zhang del QSHE	45
3.3 Caratterizzazione \mathbb{Z}_2 degli Isolanti Topologici	46
3.4 Azione Effettiva di Bulk degli Isolanti Topologici Frazionari	48
3.5 Stabilità degli Stati di Bordo e Argomento del Flusso di Fu, Kane e Mele	50

3.5.1	Argomento di Fu-Kane per elettroni non interagenti	50
3.5.2	Argomento di Levin-Stern per elettroni interagenti	53
3.6	Funzione di Partizione degli Isolanti Topologici di Laughlin	55
3.6.1	Invarianza modulare	59
3.7	Il Modello in Pozzi di HgTe e la Verifica Sperimentale	60
4	Isolanti Topologici in Tre Dimensioni	63
4.1	Proprietà Topologiche degli Elettroni in Potenziali Periodici	64
4.1.1	Equivalenza topologica e stati di bordo	64
4.1.2	Fase di Berry e invarianti di Chern	65
4.2	Fasi Topologiche nei Sistemi Unidimensionali	66
4.2.1	Fase di Berry e polarizzazione	67
4.2.2	Il poliacetilene	68
4.2.3	Argomento di Jackiw e Rebbi	69
4.3	Stati Topologici in Due Dimensioni	71
4.3.1	La pompa di carica e l'IQHE	71
4.3.2	Il modello di Haldane	73
4.3.3	La corrispondenza bulk-boundary nel modello di Haldane	76
4.4	Isolanti Topologici Time-Reversal Invarianti	78
4.4.1	Il ruolo delle simmetrie discrete nella classificazione delle fasi topologiche	78
4.4.2	Simmetria time-reversal nei sistemi a bande	78
4.5	Isolanti Topologici in Tre Dimensioni	82
4.5.1	Caratterizzazione \mathbb{Z}_2 e isolanti strong-weak	83
4.5.2	Il Bi_2Se_3 come modello di isolante topologico	84
5	Teoria dei Campi di Bordo degli Isolanti Topologici Tridimensionali	88
5.1	Fermioni di Dirac in (3+1) e (2+1) Dimensioni	88
5.1.1	Riduzione dimensionale da D=3+1 a (2+1)	89
5.2	Anomalia di Parità in (2+1) Dimensioni	90
5.3	Cancellazione delle Anomalie negli Isolanti Topologici Tridimensionali	91
5.3.1	Metodo di Jackiw e Rebbi	92
5.3.2	Azione effettiva del bulk tridimensionale	95
5.3.3	Conseguenze fisiche del termine θ	96
5.4	Funzione di Partizione degli Stati di Bordo degli Isolanti Topologici Tridimensionali	98
5.4.1	Regolarizzazione mediante la funzione ζ di Riemann	100
5.4.2	Calcolo del determinante sul toro T^d	101
5.4.3	Funzione di partizione del fermione sul toro T^3 e stabilità degli stati di bordo	105
5.4.4	Invarianza modulare	107
5.5	Conclusioni e Prospettive	112
A	Funzione di Partizione in 3 Dimensioni	113

B Regolarizzazione dell'energia di vuoto	115
B.1 Regolarizzazione mediante la relazione di Epstein	115
B.2 Regolarizzazione mediante la trasformata di Mellin	116
C Identità della Θ massiva	118
Bibliografia	120

Introduzione

Uno degli obiettivi della fisica è quello di descrivere le varie fasi della materia. I diversi stati della materia come i solidi, i liquidi e i gas possono essere compresi mediante la rottura spontanea della simmetria e la teoria di Landau-Ginzburg; in modo analogo si caratterizzano le fasi magnetiche, le fasi superconduttrive e i superfluidi.

D'altra parte, in tempi più recenti è diventato chiaro che la materia si può trovare in stati ordinati che non possono essere spiegati dalla rottura spontanea di una simmetria. Nei cosiddetti *stati topologici della materia* esiste un nuovo tipo di ordine, ovvero di comportamento collettivo che è caratterizzato da proprietà topologiche. Con questo aggettivo intendiamo specificare sia la robustezza di questi effetti rispetto a piccole deformazioni dell'hamiltoniana, sia la presenza di gradi di libertà globali che dipendono dalla forma spaziale del sistema. L'esempio più noto di questi stati topologici è dato dall'*effetto Hall quantistico* (QHE) [1], un sistema bidimensionale di elettroni posto a temperature molto basse ($\sim 10 \text{ mK}$) e immerso in un forte campo magnetico ($\sim 10 \text{ Tesla}$). In tali condizioni il sistema presenta dei plateau nella conduttività trasversa, detta *conduttività Hall* σ_H , che assume valori quantizzati in unità di e^2/h molto precisi e universali: questi sono sia interi (*effetto Hall quantistico intero*) [2] che frazionari (*effetto Hall quantistico frazionario*) [3]. Diverse fasi Hall non presentano diversa simmetria, ma sono caratterizzate da un valore diverso di σ_H e dalla topologia dello stato fondamentale (*ordine topologico di Wen*) [4].

Gli stati Hall e gli altri stati topologici possiedono eccitazioni massive nel bulk e a massa nulla nel bordo del sistema. Le eccitazioni sia di bulk che di bordo sono fermioniche nell'effetto Hall intero e anioniche in quello frazionario, ovvero hanno carica frazionaria e statistica quantistica frazionaria.

Le proprietà di universalità dell'effetto Hall permettono di descrivere la dinamica di tali eccitazioni mediante teorie di campo effettive di bassa energia che sono teorie di gauge topologiche e quindi presentano delle proprietà nuove. In particolare, dalla teoria di Chern-Simons (2+1) dimensionale si può ottenere la statistica frazionaria delle eccitazioni di bulk mediante la fase di Aharonov-Bohm di un campo di gauge abeliano. D'altra parte, le eccitazioni al bordo del sistema, chirali e a massa nulla, sono descritte nel limite di bassa energia da una teoria di campo (1+1) dimensionale con simmetria conforme (CFT) [5]. La simmetria infinito dimensionale di Virasoro permette di determinare esattamente lo spettro delle eccitazioni anche nei casi interagenti. In particolare si può calcolare la funzione di partizione della teoria con condizioni periodiche al bordo, che è invariante per trasformazioni modulari, ovvero per riparametrizzazioni della geometria toroidale.

La teoria conforme chirale è caratterizzata da un'anomalia chirale: questa esprime la non conservazione della carica elettrica al bordo, che è compensata dalla corrente

Hall di bulk, secondo il meccanismo dell'*anomaly inflow*. In una geometria realistica composta da due bordi ed il bulk, l'anomalia chirale si cancella fra i due bordi e quindi la carica è conservata globalmente.

Una proprietà fondamentale degli stati di bordo è la loro stabilità, ovvero l'impossibilità di avere interazioni e sviluppare una massa. Intuitivamente, questa proprietà deriva dal fatto che le eccitazioni chirali non possono essere diffuse all'indietro. Lo studio degli stati di bordo sarà l'argomento principale di questa tesi e un'analisi accurata del caso dell'effetto Hall è necessaria al fine di comprendere gli altri stati topologici.

Negli ultimi dieci anni, sono stati proposti ed osservati sperimentalmente molti altri stati topologici, in particolare gli *isolanti topologici* [6]. Questi nuovi stati della materia sono caratterizzati dalla presenza della simmetria di inversione temporale \mathcal{T} . Un isolante topologico, come un normale isolante, ha un bulk in cui la banda di valenza e quella di conduzione sono separate da un gap, ma sulla sua superficie presenta, a differenza di quest'ultimo, degli stati elettronici a massa nulla protetti dalla simmetria di inversione temporale. Ad oggi sono noti isolanti topologici sia in due che in tre dimensioni spaziali.

Gli isolanti topologici bidimensionali possono essere modellizzati con due sistemi Hall indipendenti con chiralità opposte, seguendo il modello di Bernevig e Zhang dell'*effetto Hall quantistico di spin* [7]. A differenza del caso dell'effetto Hall, negli isolanti topologici la stabilità degli stati di bordo è più delicata perché le chiralità opposte possono interagire e diventare massive, rendendo il sistema un isolante banale. Un argomento generale per la stabilità degli stati di bordo è stato formulato da Fu, Kane e Mele [8] [9] e si basa sulla degenerazione ineliminabile degli stati di spin semintero in presenza di simmetria \mathcal{T} (*degenerazione di Kramers*). In particolare un numero dispari di fermioni di bordo a massa nulla è stabile, mentre un numero pari può prendere massa. L'analisi di stabilità è stata poi estesa al caso interagente da Levin e Stern [10], introducendo un indice \mathbb{Z}_2 che descrive la parità di spin delle eccitazioni al bordo (+1 spin intero, -1 spin semintero). Le eccitazioni stabili (spin semintero) sono caratterizzate da un'anomalia discreta \mathbb{Z}_2 che può essere vista come il residuo dell'anomalia chirale del QHE. La stabilità delle eccitazioni di bordo può essere discussa anche mediante lo studio della funzione di partizione della teoria conforme. In questa espressione, si identificano i doppietti di Kramers e gli stati che rimangono a massa nulla anche in presenza di interazioni \mathcal{T} -invarianti.

Gli isolanti topologici tridimensionali non possono essere compresi mediante gli stati Hall poiché non esiste un analogo tridimensionale dei livelli di Landau. È necessario quindi fare appello alla teoria delle bande degli elettroni non interagenti in potenziali periodici. Uno strumento fondamentale per caratterizzare gli stati topologici è la fase di Berry [11] che gioca un ruolo analogo al campo esterno nel QHE. In particolare grazie ad essa è possibile determinare la polarizzazione di un sistema periodico che misura l'accumulo di cariche al bordo, e corrisponde alla conducibilità Hall. Dal comportamento della polarizzazione sotto determinate trasformazioni del sistema è stato possibile caratterizzare prima gli isolanti topologici bidimensionali e, successivamente, quelli tridimensionali [9]. Ogni fase è caratterizzata da un numero topologico invariante sotto trasformazioni continue dell'hamiltoniana che mantengano il gap diverso da zero.

Quando due diverse fasi topologiche vengono messe a contatto, sull’interfaccia il gap deve annullarsi dando luogo a eccitazioni a massa nulla. Un modo generale per derivare gli stati di bordo, introdotto da Jackiw e Rebbi [12], è quello di descrivere il bulk dei vari sistemi con un’equazione di Dirac la cui massa è funzione delle coordinate e cambia di segno nel passare da una fase all’altra, annullandosi sull’interfaccia. Si trovano quindi le soluzioni dell’equazione a massa nulla localizzate all’interfaccia. In questo modo, la dinamica degli stati di bordo è determinata dalla teoria di bulk mediante una riduzione dimensionale.

Un isolante topologico tridimensionale presenta un bulk massivo e stati di bordo fermionici a massa nulla in (2+1) dimensioni. Anche in questo caso la teoria delle bande fornisce una classificazione \mathbb{Z}_2 : un numero dispari di fermioni sul bordo è stabile mentre un numero pari può essere reso massivo da interazioni \mathcal{T} -invarianti.

Il contenuto originale di questo lavoro di tesi si compone di due parti.

Nella prima parte studiamo la teoria fermionica di bordo in presenza del campo elettromagnetico esterno e dimostriamo l’assenza di anomalie per il sistema complessivo di bulk e bordo. Come nel QHE, gli stati di bordo stabili sono associati ad una anomalia, ovvero l’anomalia di parità \mathcal{P} in (2+1) dimensioni [13][14]. Questa determina un’azione effettiva di Chern-Simons sul bordo che rompe esplicitamente le simmetrie \mathcal{P} e \mathcal{T} . Il nostro contributo è stato quello di risolvere l’ambiguità del segno dell’anomalia mediante la riduzione dimensionale di Jackiw e Rebbi dei fermioni da (3+1) a (2+1) dimensioni. Abbiamo mostrato che le anomalie di bordi opposti sono di segno opposto e quindi la cancellazione globale è possibile introducendo un termine θ , o termine magneto-elettrico, nell’azione effettiva.

La seconda parte del lavoro di tesi consiste nel calcolo della funzione di partizione della teoria di bordo, ovvero di un fermione a massa nulla in (2+1) dimensioni con condizioni al contorno periodiche e antiperiodiche. Mediante la funzione di partizione abbiamo analizzato la stabilità degli stati di bordo: riformulando l’argomento di stabilità di Fu, Kane e Mele, abbiamo verificato l’esistenza di stati degeneri di Kramers nello spettro della teoria, che assicura la massa nulla delle eccitazioni e la stabilità della fase topologica, in completa analogia col caso bidimensionale. Infine abbiamo determinato le trasformazioni modulari della funzione di partizione.

La tesi è strutturata nel seguente modo. Nel capitolo 1 viene introdotto l’effetto Hall quantistico, sia intero che frazionario. Spiegheremo la quantizzazione della conduttività, l’esistenza degli stati di bordo e discuteremo la teoria di Laughlin del FQHE presentando brevemente le verifiche sperimentali. Nel capitolo 2 descriveremo le teorie di campo effettive del QHE. In particolare parleremo della teoria di bulk di Chern-Simons e della CFT di bordo. Vedremo come l’anomalia chirale del bordo venga cancellata dalla teoria di bulk (*anomaly inflow*) e discuteremo il calcolo della funzione di partizione degli stati di bordo di Laughlin del FQHE e le sue trasformazioni modulari. Nel capitolo 3 parleremo degli isolanti topologici bidimensionali. Introdurremo il modello di Bernevig e Zhang dell’effetto Hall di spin che verrà poi esteso al caso frazionario mediante la teoria di Chern-Simons. Seguirà l’analisi della stabilità di Fu, Kane e Mele (caso non interagente) e di Levin e Stern (caso interagente) e infine l’analisi mediante lo studio della funzione di partizione.

Il capitolo 4 introduce gli isolanti topologici tridimensionali. Per prima cosa vedremo come si possano caratterizzare diversi sistemi topologici mediante la fase di

Berry, mentre per determinare l'esistenza e la dinamica degli stati di bordo faremo uso del metodo di Jackiw e Rebbi. Il primo esempio è un sistema unidimensionale che descrive le due fasi di dimerizzazione del poliacetilene. Successivamente sarà la volta dell'effetto Hall intero e poi del modello di Haldane. Finalmente introdurremo un modello di isolanti topologici tridimensionali e la sua verifica sperimentale. Nel capitolo 5 introdurremo l'anomalia di parità e vedremo come sia possibile determinare il segno del termine di Chern-Simons al bordo mediante l'argomento di Jackiw e Rebbi. Dopo aver dimostrato la cancellazione delle anomalie mediante l'introduzione del termine θ nell'azione di bulk, discuteremo brevemente le conseguenze fisiche di quest'ultimo termine. Nell'ultima parte del capitolo determineremo la funzione di partizione di un fermione massless in $D = d + 1$ dimensioni facendo particolare attenzione al caso $D = 2 + 1$ corrispondente ad un bordo dell'isolante topologico. Presenteremo quindi l'argomento di stabilità e successivamente ricaveremo le trasformazioni modulari della funzione di partizione.

Capitolo 1

L'Effetto Hall Quantistico

1.1 Introduzione

Il sistema che introduciamo in questo capitolo prende il nome dal fisico Edwin Hall che nel 1879 propose un esperimento per determinare il segno della carica dei portatori di corrente. Una lastra metallica è immersa in un campo magnetico omogeneo e costante ad essa perpendicolare; si considera poi l'azione di un campo elettrico nella direzione della lunghezza della lastra come mostrato in figura 1.1.

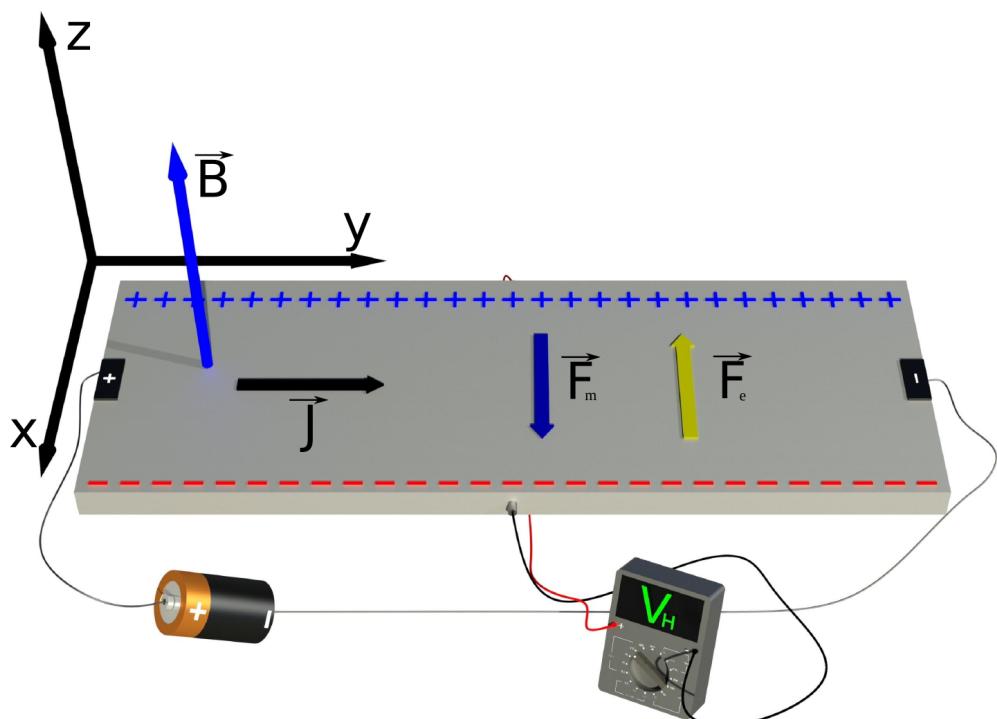


Figura 1.1: La lastra è attraversata da un campo magnetico perpendicolare uniforme e costante. Una differenza di potenziale nella direzione y provoca un accumulo di cariche sui bordi e quindi un potenziale Hall V_H in direzione x determinato dalla condizione di equilibrio della forza magnetica \vec{F}_m e elettrica \vec{F}_e , dovuta a V_H , sugli elettroni.

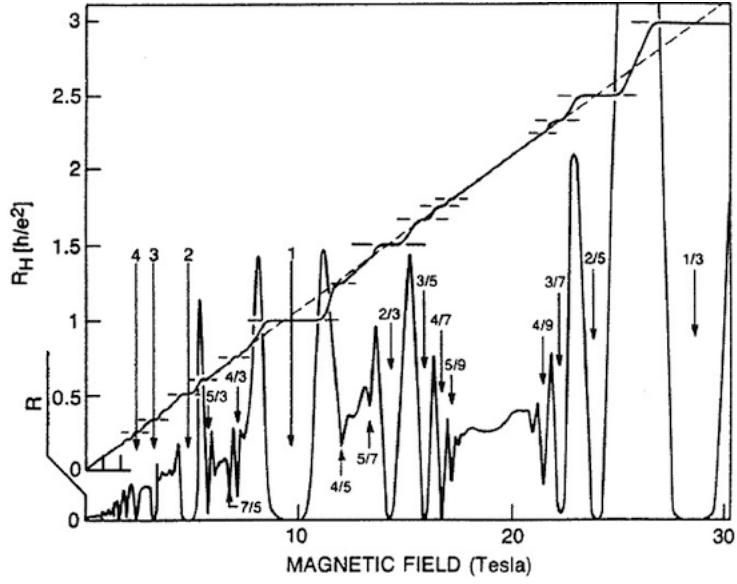


Figura 1.2: Grafico sperimentale della resistività Hall in funzione del campo magnetico.

Sui portatori di carica agisce la forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{q\rho c} \times \mathbf{B} \right), \quad (1.1)$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico in direzione x , \mathbf{B} il campo magnetico e ρ rappresenta la densità dei portatori di carica.

Utilizzando la condizione d'equilibrio $\mathbf{F} = 0$ ed introducendo il tensore conduttività σ_{ij} da $j_i = \sigma_{ij} E_j$ si ottiene,

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & q\rho c/B \\ -q\rho c/B & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

quindi la corrente è puramente trasversa e il suo segno determina la carica q dei portatori. Nel caso di un sistema chiuso la corrente trasversa produce un accumulo di cariche ai bordi della lastra ed una differenza di potenziale misurabile, detto *potenziale Hall*. La resistività è l'inverso della conducibilità (1.2),

$$R_{ij} = (\sigma^{-1})_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -B/q\rho c \\ B/q\rho c & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Nel modello classico questa è linearmente dipendente da B (linea tratteggiata in figura 1.2).

Negli anni ottanta, l'effetto Hall in pozzi bidimensionali di elettroni realizzati in eterogiunzioni di semiconduttori al silicio e GaAs-AlGaAs mostraronon una resistività anomala a basse temperature. In questi sistemi, immersi in campi magnetici dell'ordine dei 10 *Tesla* e a temperature che vanno dalle decine di *mK* ai *K*, si osservano dei plateau nella conducibilità corrispondenti a multipli interi di e^2/h ,

$$\sigma = \nu \frac{e^2}{h} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.4)$$

dove ν è detto *fattore di riempimento* o *filling fraction*. I valori interi hanno una sorprendente precisione ($\Delta\sigma/\sigma \sim \mathcal{O}(10^{-9})$) e sono universali in quanto indipendenti dalle caratteristiche del materiale. Questo è l'*effetto Hall quantistico intero* (IQHE) [2]. In figura 1.2 è mostrato il grafico della resistività Hall $R_H \equiv R_{xy} = h/\nu e^2$ in funzione del campo magnetico. I diversi plateau sono collegati da rampe la cui forma dipende dalle caratteristiche del dispositivo e dalla temperatura; vi corrispondono picchi della usuale conducibilità longitudinale ohmica R .

Successivamente furono osservati dei plateau a valori di ν frazionari $\nu = 1/3, 1/5, 2/5, \dots$, anch'essi molto precisi, corrispondenti all'*effetto Hall quantistico frazionario*.

Nel seguito introdurremo alcuni concetti base per la descrizione dell'effetto Hall quantistico intero e frazionario.

1.2 L'Effetto Hall Intero

Iniziamo col ricordare la meccanica quantistica di elettroni liberi in due dimensioni immersi in un campo magnetico perpendicolare. Vedremo che l'effetto Hall intero è legato all'esistenza di uno stato fondamentale non degenere separato dal primo stato eccitato da una differenza di energia (gap) molto grande.

1.2.1 I livelli di Landau

L'hamiltoniana di singola particella nel piano $\mathbf{x} = (x, y)$ con campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{z}$ assume la forma¹ [5]:

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\pi}^2, \quad (1.5)$$

dove $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A} = m\dot{\mathbf{x}}$ è l'impulso cinetico e \mathbf{p} quello canonico. Nell'hamiltoniana abbiamo omesso il termine di Pauli per lo spin in quanto questo è costante per spin sempre allineati al campo B (in questi materiali il fattore giromagnetico è molto elevato, $g \sim 10 - 100$). Dalle regole di commutazione²

$$[\pi_i, \pi_j] = ie\epsilon_{ij}B, \quad (1.6)$$

segue che entrambi gli impulsi \mathbf{p} e $\boldsymbol{\pi}$ non commutano con l'hamiltoniana. Il sistema è invariante per le due traslazioni spaziali, ma questa simmetria si realizza a meno di una trasformazione di gauge. Gli operatori di traslazione che commutano con l'hamiltoniana sono detti *traslazioni magnetiche* e sono definiti da [15]:

$$k_i \equiv \pi_i - eB\epsilon_{ij}x_j, \quad i = x, y. \quad (1.7)$$

Questi soddisfano le regole di commutazione:

$$[k_i, k_j] = -ie\epsilon_{ij}B, \quad [k_i, \pi_j] = 0, \quad [k_i, H] = 0. \quad (1.8)$$

I generatori delle traslazioni finite di vettore \mathbf{a} sono quindi:

$$T_B(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}. \quad (1.9)$$

¹In questa tesi assumeremo $\hbar = c = 1$; queste costanti saranno reintrodotte in alcune formule più significative che saranno segnalate esplicitamente.

² ϵ_{ij} è il tensore antisimmetrico definito da $\epsilon_{12} = 1$.

Le traslazioni magnetiche non commutano tra loro ma valgono le relazioni,

$$T_B(\mathbf{a}_1)T_B(\mathbf{a}_2) = T_B(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)e^{-i\frac{eB}{2}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)_z} = T_B(\mathbf{a}_2)T_B(\mathbf{a}_1)e^{-ieB(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)_z}, \quad (1.10)$$

dovute al fatto che una particella in un campo magnetico acquista una fase di Dirac. Nel caso di un percorso chiuso, la fase risulta pari al $e^{ie\Phi}$ dove $\Phi = BS$ è il flusso che attraversa la superficie S delimitata dalla curva chiusa.

Poiché $[k_i, H] = 0$ e $[k_i, k_j] \neq 0$ è possibile diagonalizzare simultaneamente l'hamiltoniana e una sola combinazione lineare degli operatori k_i . Per comodità prendiamo una configurazione invariante per rotazioni e scegliamo il gauge simmetrico $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}(By, -Bx, 0)$ nel quale i generatori k_i assumono la forma,

$$k_1 = p_1 - \frac{eB}{2}y, \quad k_2 = p_2 + \frac{eB}{2}x. \quad (1.11)$$

È comodo usare la notazione complessa $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ e quindi definire $c \equiv \frac{il}{2}(k_1 - ik_2)$ e $d \equiv \frac{il}{2}(\pi_1 + i\pi_2)$ che risultano essere

$$d = \frac{z}{2l} + l\bar{\partial}, \quad d^\dagger = \frac{\bar{z}}{2l} - l\partial, \quad [d, d^\dagger] = 1, \quad (1.12)$$

$$c = \frac{\bar{z}}{2l} + l\partial, \quad c^\dagger = \frac{z}{2l} - l\bar{\partial}, \quad [c, c^\dagger] = 1, \quad (1.13)$$

dove $l = \sqrt{2/eB}$ è detta *lunghezza magnetica*. Con queste definizioni l'hamiltoniana e il momento angolare $M = -ix^i\epsilon^{ij}\partial_j$ assumono la forma:

$$H = \omega_c \left(d^\dagger d + \frac{1}{2} \right), \quad (1.14)$$

$$M = c^\dagger c - d^\dagger d, \quad (1.15)$$

in cui si è introdotto la *frequenza di ciclotrone* $\omega_c = eB/m$. Lo spettro è quindi identico a quello di un oscillatore armonico unidimensionale. Inoltre poiché gli operatori c e d commutano, ogni livello di energia $\epsilon_n = \omega_c n$ è infinitamente degenero in momento angolare. Questi sono i *livelli di Landau*. La degenerazione infinita segue dal fatto che i due operatori di traslazione magnetica (1.8) commutano con H ma non fra loro.

Le funzioni d'onda del primo livello di Landau si ottengono imponendo $d\psi(z, \bar{z}) = 0$. Le soluzioni autostati del momento angolare M di autovalore m sono:

$$\psi_{0,m}(z, \bar{z}) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{z}{l} \right)^m e^{-\frac{|z|^2}{2l^2}}. \quad (1.16)$$

Osserviamo che il modulo quadro della funzione d'onda (1.16) è piccato su una circonferenza di raggio $r_m = \sqrt{ml}$ con una larghezza di ordine l . L'area racchiusa dall'orbita è $A_m = \pi r_m^2 = \pi ml^2$ e ogni orbita si estende su una superficie pari a $\pi l^2 = 2\pi/eB$, che rappresenta l'area attraversata da un quanto di flusso $\Phi_0 = 2\pi/e$ (fig. 1.3). Da questo segue che la densità degli elettroni è proporzionale al campo magnetico B secondo la relazione $\rho = 1/\pi l^2 = B/\Phi_0$.

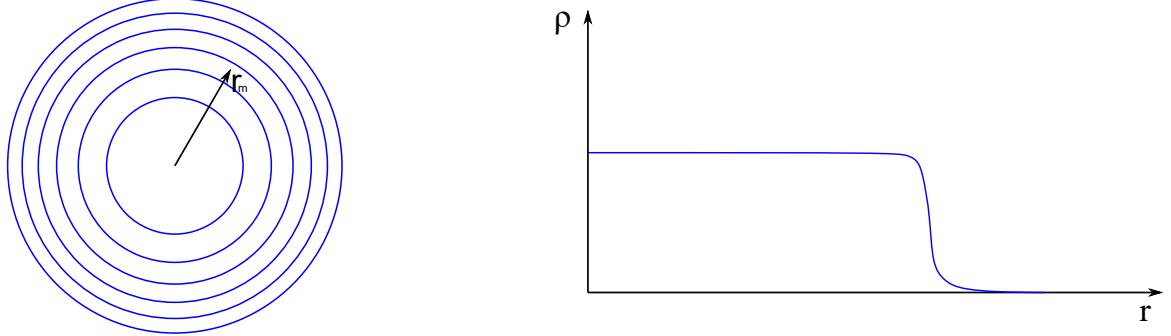


Figura 1.3: A sinistra sono rappresentate schematicamente le orbite del livello di Landau mentre a destra è rappresentato il profilo di densità elettronica in funzione della variabile radiale r .

Si può mostrare che la degenerazione dei livelli è finita per sistemi con area finita S . In questo caso il numero di stati di singola particella disponibili in ciascun livello di Landau è dato da $N_\Phi = SB/\Phi_0 = \Phi/\Phi_0$, dove Φ rappresenta il flusso totale che attraversa il sistema.

Si definisce ($\hbar, c \neq 1$):

$$\nu = \frac{N_e}{N_\Phi} = \frac{\hbar \rho c}{B e}, \quad (1.17)$$

la frazione di riempimento (*filling fraction*) degli stati nei livelli di Landau. Nel caso sopra esaminato solamente il primo livello di Landau è occupato (e pieno), pertanto risulta $\nu = 1$.

1.2.2 Incomprimibilità dello stato fondamentale

Supponiamo che il primo livello di Landau sia pieno e occupato da un numero $N_e = N_\Phi$ di elettroni. La funzione d'onda del sistema antisimmetrica (spin allineati) è espressa dal determinante di Slater delle funzioni d'onda di singola particella $\det_{ij}[\psi_{0,i}(z_j)]$. Questa quantità assume la forma del cosiddetto determinante di Vandermonde, moltiplicato per l'usuale fattore esponenziale:

$$\Psi(\{z_i\}) = \prod_{i < j}^{N_e} (z_i - z_j) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{N_e} \frac{|z_i|^2}{2l^2} \right\}. \quad (1.18)$$

Si può notare che questa funzione d'onda descrive una goccia circolare di fluido con densità costante $\rho = eB/2\pi$ (fig.1.3) che ha la caratteristica di essere incomprimibile, ovvero senza fluttuazioni di densità nel bulk. Infatti, una compressione del sistema diminuisce il momento angolare degli elettroni, ma essendo il primo livello di Landau occupato, il principio di Pauli forza gli elettroni ad occupare il successivo livello libero. Questa fluttuazione è depressa perché comporterebbe un salto d'energia pari a $\omega_c \propto B$, molto maggiore della tipica energia termica KT (fig. 1.4).

1.2.3 Stati di bordo

Discutiamo adesso un sistema di area finita, dove è presente un potenziale confinante gli elettroni [16]. Per una geometria a simmetria circolare possiamo supporre che il

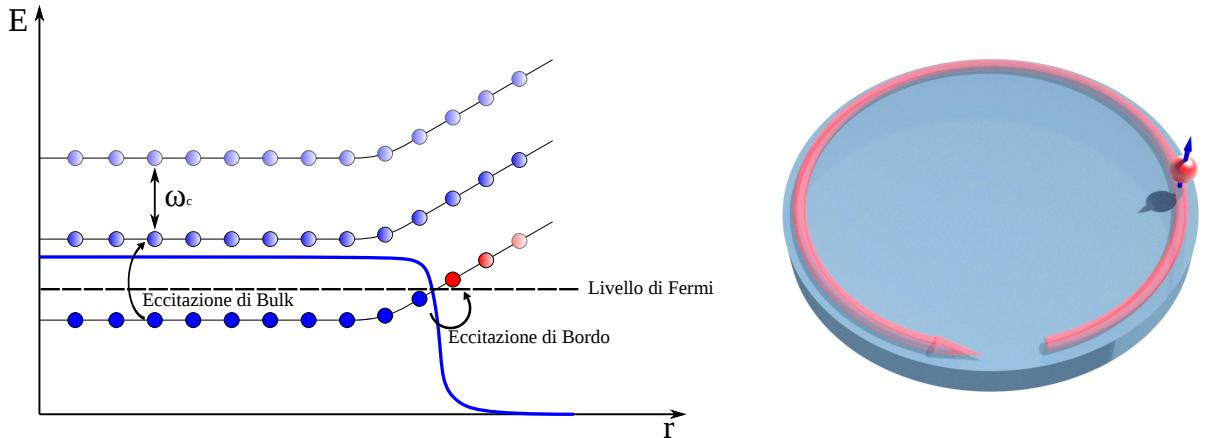


Figura 1.4: A sinistra sono rappresentati schematicamente i livelli di energia in prossimità del bordo mentre a destra l'eccitazione di bordo chirale.

potenziale sia funzione del raggio, $V = V(r)$; di conseguenza il momento angolare rimane un buon numero quantico, mentre la degenerazione d'energia viene rimossa vicino al bordo, con un andamento che è rappresentato qualitativamente in fig. 1.4. La configurazione $\nu = 1$ precedentemente descritta corrisponde al riempimento di tutti gli stati sotto il livello di Fermi. Le eccitazioni buca-particella di minore energia saranno quelle vicine alla superficie di Fermi e quindi in corrispondenza del bordo della goccia. Se M denota il momento angolare del massimo livello pieno ($N_e = M + 1$), possiamo considerare la linearizzazione dello spettro intorno alla superficie di Fermi. Per $M \rightarrow \infty$, otteniamo le energie:

$$\epsilon_m = \frac{v}{l\sqrt{M}} [(m - M) - \mu] + \beta, \quad |m| \ll M \rightarrow \infty, \quad (1.19)$$

dove v è la velocità di Fermi e μ il potenziale chimico [5]. Se si considera una geometria ad anello definita dai due raggi $R_1 \sim l\sqrt{M_1}$ e $R_2 \sim l\sqrt{M_2}$ lo spettro assume la forma

$$\epsilon_m = \begin{cases} -\frac{v_1}{R_1} (m - M_1 + \mu_1), & m \sim M_1, \\ \frac{v_2}{R_2} (m - M_2 - \mu_2), & m \sim M_2. \end{cases} \quad (1.20)$$

Queste relazioni mostrano che le eccitazioni al bordo sono relativistiche e *chirali*, ovvero si propagano in senso orario in un bordo e in senso antiorario nell'altro (fig. 1.4). Ad ogni bordo ci sono eccitazioni neutre particella-lacuna e eccitazioni cariche che risultano dal trasferimento di elettroni da un bordo all'altro. Entrambe le eccitazioni nel limite termodinamico sono gapless in quanto il lavoro per il trasferimento di carica è pari a $\mathcal{O}(1/R)$. Nel prossimo capitolo mostreremo che queste eccitazioni sono descritte da una teoria di campo relativistica con simmetria conforme.

1.2.4 Quantizzazione della conduttività

Consideriamo il primo livello di Landau completamente occupato ($\nu = 1$); possiamo rappresentare la conduzione Hall come una traslazione rigida della goccia di fluido

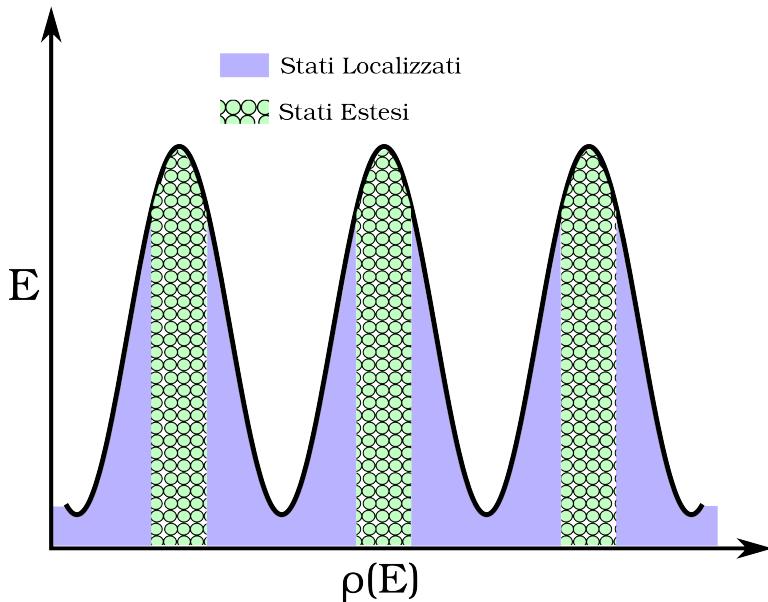


Figura 1.5: Nel caso in cui siano presenti impurità la densità degli stati assume una forma a campana dove gli stati estesi si trovano solo al centro delle campane mentre gli stati localizzati si distribuiscono sulle code.

senza produzione di eccitazioni. In tal caso, la descrizione classica (1.2) può essere utilizzata per determinare la conduttività. Si ottiene ($\hbar, c \neq 1$):

$$\sigma_H = \frac{epc}{B} = \frac{e^2}{h}. \quad (1.21)$$

L'equazione (1.21) può essere generalizzata a un sistema in cui si hanno n livelli di Landau completamente occupati ottenendo $\sigma_H = ne^2/h$. Questo risultato spiega la quantizzazione della conduttività.

La formazione dei plateau è un effetto dovuto alla presenza di impurezze. Queste giocano un duplice ruolo: rimuovono la degenerazione dei livelli di Landau modificando quindi il classico spettro a delta in uno a campana; inoltre introducono ulteriori stati localizzati fra i livelli di Landau (fig. 1.5). Notiamo che soltanto gli stati elettronici al centro di ogni campana sono delocalizzati e contribuiscono alla conduzione. Consideriamo quindi un campo magnetico leggermente inferiore al valore corrispondente al riempimento esatto del primo livello di Landau. Gli elettroni in eccesso occuperanno gli stati localizzati che si trovano tra il primo e il secondo livello e quindi non contribuiranno alla conduzione, che rimane invariata. Si avrà una variazione di conduttività, corrispondente alle rampe in fig. 1.2 solamente quando verranno riempiti altri stati delocalizzati al livello successivo. Una volta che questi stati saranno completamente riempiti avremo di nuovo una conduttività costante e un nuovo plateau.

Una previsione di questo argomento, verificata sperimentalmente, è che la larghezza dei plateau diminuisce con la riduzione della densità d'impurezze. In particolare, i primi esperimenti realizzati con campioni di semiconduttori abbastanza impuri permisero di osservare solamente i plateau interi, mentre campioni più puliti mostraronono successivamente quelli frazionari.

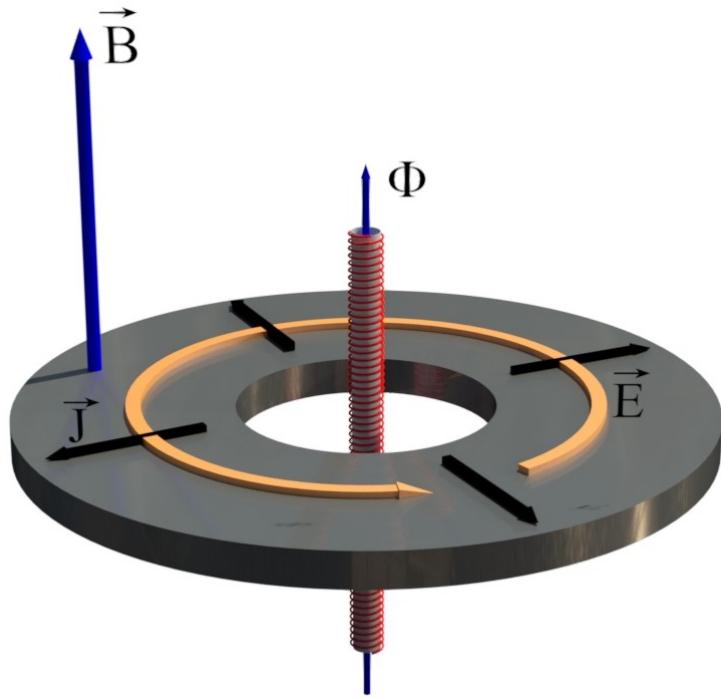


Figura 1.6: Rappresentazione schematica del sistema Hall in una geometria ad anello. L'inserzione di un flusso variabile nel tempo Φ genera un campo elettrico \mathbf{E} trasverso e quindi una corrente elettronica \mathbf{J} diretta verso il bordo esterno dell'anello.

1.2.5 Esattezza della conduttività Hall

Nella sezione precedente abbiamo visto come si possa spiegare la quantizzazione della conduttività. Tuttavia tale argomento ha delle lacune perché non ne spiega l'eccezionale precisione. Evidentemente la conducibilità Hall non è sensibile all'interazione degli elettroni e alle inevitabili piccole perturbazioni nell'hamiltoniana.

L'esattezza della quantizzazione si può dimostrare con vari argomenti che saranno discussi a più riprese nella tesi. Cominciamo col presentare l'argomento del flusso di Laughlin seguito dalla sua formulazione in termini di un invariante topologico dovuta a Thouless e collaboratori [17] [18] [19]. Nel prossimo capitolo discuteremo un'altra dimostrazione mediante la teoria conforme di bordo e la quantizzazione dell'anomalia chirale. Nel capitolo 4 collegheremo l'argomento di Laughlin alle proprietà topologiche dei fermioni nelle bande.

Argomento del flusso di Laughlin

Consideriamo l'effetto Hall intero nella geometria dell'anello ed inseriamo un solenoide sull'asse centrale (fig. 1.6), che produce un campo magnetico dipendente dal tempo; mediante una variazione adiabatica il flusso magnetico $\Phi(t)$ aggiunto al sistema raggiunge asintoticamente il valore di un quanto di flusso $\Phi(t \rightarrow \infty) = \Phi_0$.

L'hamiltoniana più generale che descrive il sistema Hall ha la forma seguente [19]:

$$H = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{2m_i} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y_i} - eBx_i \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^{N_e} U(x_i, y_i) + \sum_{i < j}^{N_e} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad (1.22)$$

contenente interazioni ad un corpo (ad esempio delle impurezze) e due corpi (potenziale Coulombiano). Supponiamo che lo stato fondamentale sia non degenere e con un gap sufficientemente grande da permettere il processo adiabatico. L'effetto dell'aggiunta del flusso magnetico $\Phi(t)$ nell'hamiltoniana (1.22) modifica le autofunzioni di singola particella per un fattore di fase $e^{ie\Phi(t)\theta}$. Asintoticamente a $\Phi = \Phi_0$, le autofunzioni hanno aumentato il momento angolare $m \rightarrow m + 1$ e l'hamiltoniana $H[\Phi_0]$ può essere riscritta nella forma iniziale $H[0]$ mediante una trasformazione di gauge. Confrontando il sistema a $\Phi = 0$ e $\Phi = \Phi_0$ abbiamo che lo spettro è lo stesso ma tutti gli stati sono evoluti in $m \rightarrow m + 1$, ovvero si è realizzato il cosiddetto *flusso spettrale*. In termini fisici la goccia di fluido si è espansa radialmente, lasciando uno stato $m = m_{min}$ libero nel bordo interno e occupando un nuovo stato $m = m_{max} + 1$ al bordo esterno. Si è quindi realizzato il trasporto di una carica e la conduttività Hall $\nu = 1$ è quindi determinata dal rapporto tra carica spostata e flusso.

Notiamo che questo argomento non richiede alcuna assunzione sulla dinamica del problema, oltre l'esistenza di un gap e l'invarianza di gauge. Ne segue che il risultato della quantizzazione intera di σ_H è robusto rispetto ad interazioni, impurezze ed altre perturbazioni purché mantengano il gap diverso da zero.

Conduttività come invariante topologico

L'argomento di Laughlin può essere riformulato esprimendo la conduttività come un invariante topologico. Questo aggettivo indica in senso lato l'indipendenza dalle piccole deformazioni del sistema e sarà associato più precisamente in vari contesti a delle quantità matematiche che sono invarianti sotto trasformazioni continue.

Nell'argomento di Thouless e altri [17] [19] si determina σ_H mediante formula di Kubo della risposta lineare:

$$\sigma_H = \frac{ie^2}{A} \sum_{n>0} \frac{\langle \psi_0 | v_1 | \psi_n \rangle \langle \psi_n | v_2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | v_2 | \psi_n \rangle \langle \psi_n | v_1 | \psi_0 \rangle}{(E_0 - E_n)^2}. \quad (1.23)$$

In questa espressione, E_n sono gli autovalori relativi agli autostati ψ_n dell'hamiltoniana (1.22), $A = L_1 L_2$ è l'area del sistema di forma rettangolare e v_1 e v_2 sono gli operatori di velocità (nella gauge $\mathbf{B} = (0, Bx)$):

$$v_1 = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{m_i} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad \text{e} \quad v_2 = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{m_i} \left(-i \frac{\partial}{\partial y_i} - eBx_i \right). \quad (1.24)$$

Le condizioni al contorno più generali della geometria toroidale sono le seguenti:

$$\psi(x_i + L_1) = e^{i\alpha L_1} e^{ieBy_i L_1} \psi(x_i), \quad (1.25)$$

$$\psi(y_i + L_2) = e^{i\beta L_2} \psi(y_i). \quad (1.26)$$

Nella (1.25) la fase dipendente da y_i è necessaria per rispettare la simmetria dell'hamiltoniana definita dagli operatori di traslazione magnetica in (1.9). Come è noto, variando le condizioni al contorno cambia anche lo spettro del sistema; poniamo $\theta = \alpha L_1$, $\phi = \beta L_2$ e effettuiamo la trasformazione unitaria

$$\psi_n \longrightarrow \phi_n = U\psi_n, \quad H \longrightarrow \tilde{H} = UHU^{-1}, \quad (1.27)$$

$$U = e^{-i\frac{\theta}{L_1}(x_1 + \dots + x_{N_e})} e^{-i\frac{\phi}{L_2}(x_1 + \dots + x_{N_e})}. \quad (1.28)$$

che introduce una dipendenza parametrica nell'hamiltoniana \tilde{H} . Notiamo quindi che la (1.23) può essere riscritta come:

$$\sigma_H = ie^2 \sum_{n>0} \frac{\langle \phi_0 | \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi} | \phi_0 \rangle - \langle \phi_0 | \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} | \phi_0 \rangle}{(E_0 - E_n)^2}. \quad (1.29)$$

Passando le derivate parametriche $(\partial_\theta, \partial_\phi)$ sugli stati si ottiene:

$$\sigma_H = ie^2 \left[\left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \middle| \frac{\partial \phi_0}{\partial \phi} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \phi} \middle| \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \right\rangle \right]. \quad (1.30)$$

Supponiamo adesso che le particelle non abbiano interazioni effettive a lungo raggio nello stato fondamentale; sotto questa ipotesi si può dimostrare che la conduttività non dipende dalla condizioni al contorno [19] e pertanto può essere espressa come la media sulle condizioni al contorno ($\hbar, c \neq 1$):

$$\sigma_H = \bar{\sigma}_H = \frac{e^2}{h} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \frac{1}{2\pi i} \left[\left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \middle| \frac{\partial \phi_0}{\partial \phi} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \phi} \middle| \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \right\rangle \right]. \quad (1.31)$$

Questa espressione risulta essere un invariante topologico, ovvero una quantità che non cambia valore per piccole deformazioni dell'hamiltoniana che non chiudono il gap sullo stato fondamentale. Come vedremo in modo più esteso nel capitolo 4, l'integrando della (1.31) è la curvatura $\mathcal{F} = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$ della connessione di Berry A_i associata alla funzione d'onda dello stato fondamentale ϕ_0 . L'integrale della curvatura è il numero topologico della prima classe di Chern del fibrato $U(1)$ realizzato dalla funzione d'onda con base lo spazio toroidale T^2 dei parametri (θ, ϕ) [18] [20].

1.3 L'Effetto Hall Frazionario

Nella discussione precedente abbiamo utilizzato il modello di fermioni liberi e il riempimento completo dei livelli per spiegare l'effetto Hall intero. Nel caso di riempimento frazionario, la teoria non interagente prevede un numero esponenziale di stati degeneri e la presenza di un gap osservato sperimentalmente (assenza di conducibilità ohmica ai plateau) deve fare appello all'interazione coulombiana. È evidente che tale gap non possa spiegarsi come perturbazione di infiniti stati degeneri e quindi è un effetto non-perturbativo; in questo caso, si utilizzano degli ansatz variazionali ed altri metodi effettivi per comprendere la natura dello stato fondamentale. Notiamo, per inciso, che la dimostrazione di Thouless e collaboratori della quantizzazione intera della conduttività discussa nella sezione precedente non vale nel caso frazionario perché lo stato fondamentale sul toro possiede una degenerazione finita detta *ordine topologico di Wen* [4].

1.3.1 La funzione d'onda di Laughlin

Le basi teoriche per comprendere il FQHE sono state sviluppate da Laughlin [21]: il suo approccio si basa nell'ipotizzare la funzione d'onda a molti corpi dello stato fondamentale del sistema. La funzione d'onda relativa al primo livello di Landau pieno ($\nu = 1$) (1.18), viene generalizzata nel seguente modo:

$$\Psi_p(\{z_i\}) = \prod_{i < j}^{N_e} (z_i - z_j)^p \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{N_e} \frac{|z_i|^2}{2l^2} \right\}, \quad (1.32)$$

dove p è un numero intero positivo per garantire l'analiticità e dispari per l'antisimmetria di Ψ nello scambio di ogni coppia (z_i, z_j) . Dal calcolo del momento angolare totale $M = pN_e(N_e - 1)/2$, si deduce che questa funzione descrive uno stato con riempimento $\nu = 1/p$. L'analisi numerica dello spettro dell'hamiltoniana con interazione repulsiva coulombiana, mostra che l'ansatz (1.32) è molto accurato per lo stato fondamentale. Questo si può capire dal fatto che il numero massimo di zeri $(z_i - z_j)^p$ nella distanza fra gli elettroni minimizza il valore della repulsione coulombiana. Inoltre si dimostra che la densità dello stato di Laughlin è costante e quindi si realizza la stessa pittura fisica del fluido incomprimibile dell'effetto Hall intero in accordo con i plateau osservati sperimentalmente.

Per comprendere le proprietà del fluido incomprimibile, Laughlin associa la funzione d'onda (1.32) al problema del plasma classico bidimensionale. Infatti la norma della funzione d'onda

$$\|\Psi\|^2 = \int \prod_{i=1}^{N_e} d^2 z_i |\Psi(\{z_i\})|^2 = \int \prod_i d^2 z_i e^{-\beta V(\{z_i\})}, \quad (1.33)$$

corrisponde alla somma statistica del plasma bidimensionale. Ponendo per comodità $\beta = 1/p$ si ottiene la forma del potenziale $V(\{z_i\})$ nella (1.33):

$$V(\{z_i\}) = -p^2 \sum_{i < j}^{N_e} \ln |z_i - z_j|^2 + \frac{p}{l^2} \sum_i^{N_e} |z_i|^2. \quad (1.34)$$

Tale potenziale descrive un plasma bidimensionale di particelle con carica p in un background uniforme con densità $\rho_B = -1/\pi l^2$. È noto che il plasma bidimensionale tende a raggiungere una configurazione neutra con il background e quindi realizza una densità uniforme. La densità elettronica,

$$\rho_e(z_1) = \frac{1}{\|\Psi\|^2} \int |\psi_p(\{z_i\})|^2 d^2 z_2 \dots d^2 z_{N_e}, \quad (1.35)$$

è uguale ad $1/p$ la densità del plasma equivalente:

$$\rho_e = \frac{1}{p\pi l}. \quad (1.36)$$

Da questo risultato si verifica che lo stato di Laughlin descrive il filling frazionario

$$\nu = \rho_e \pi l^2 = \frac{1}{p}, \quad p = 1, 3, 5, \dots, \quad (1.37)$$

in accordo con i valori sperimentalni dei plateau principali. L'analisi numerica e analitica del plasma bidimensionale (1.33) dimostra lo schermaggio dinamico (Debye screening) dell'interazione coulombiana su lunghezze di ordine $\mathcal{O}(l)$ per temperature $T = p < \mathcal{O}(100)$ ben superiori ai valori rilevanti per l'effetto Hall frazionario $p \leq 7$. Le eccitazioni del fluido sono quindi lacune nel plasma dette quasi-buche di dimensione $\mathcal{O}(l)$; la carica rimossa, $\Delta Q \sim \rho_e \pi l^2 = 1/p$, è quindi frazionaria. L'energia di queste eccitazioni è stimabile dalla self-energia coulombiana $\Delta = e^2/p^2 l$. Questi risultati sono verificati numericamente e sperimentalmente.

1.3.2 Eccitazioni con carica e statistica frazionaria

Laughlin ha proposto la forma della funzione d'onda delle quasi-buche del fluido utilizzando ancora l'analogia del plasma. La seguente espressione descrive una quasi-buca localizzata al punto $z = \xi$:

$$\Psi(\xi, \{z_i\}) = \prod_{i=1}^{N_e} (\xi - z_i) \Psi_p(\{z_i\}) \quad (1.38)$$

e può essere dedotta nel seguente modo. Consideriamo il corrispondente plasma bidimensionale della forma

$$V(\xi, \{z_i\}) = -p^2 \sum_{i < j}^{N_e} \ln |z_i - z_j|^2 + \frac{p}{l^2} \sum_i^{N_e} |z_i|^2 - p \sum_i^{N_e} \ln |\xi - z_i|^2. \quad (1.39)$$

In questa espressione si evidenzia il termine aggiuntivo $-p \ln |\xi - z_i|^2$ generato da una carica unitaria nel punto ξ . Poiché il plasma tende alla neutralità, intorno a ξ ci dovrà essere un accumulo di carica uguale e opposta; tuttavia poiché le particelle del plasma hanno carica p , si dovranno accumulare $1/p$ elettroni per bilanciare tale carica. Da tale analogia si deduce che l'eccitazione di quasi-buca ha carica frazionaria pari a e/p in accordo con il risultato dello screening di Debye.

Per due quasi-buche la funzione d'onda proposta da Laughlin è:

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \{z_i\}) = \mathcal{N}(\xi_1 - \xi_2)^{1/p} \prod_i (\xi_1 - z_i) \prod_j (\xi_2 - z_j) \Psi_p, \quad (1.40)$$

dove il termine $(\xi_1 - \xi_2)^{1/p}$ è necessario per garantire la neutralità del plasma equivalente. La presenza di questo fattore non-analitico nelle coordinate delle quasi-particelle determina un'altra interessante proprietà. Consideriamo il comportamento della funzione d'onda (1.40) sotto lo scambio delle due coordinate ξ_1, ξ_2 . Tale scambio equivale a una rotazione di π nel piano complesso,

$$(\xi_1 - \xi_2) \longrightarrow e^{i\pi} (\xi_1 - \xi_2), \quad (1.41)$$

$$\Psi_p(\xi_1, \xi_2, \{z_i\}) \longrightarrow \Psi_p(\xi_2, \xi_1, \{z_i\}) = e^{i\frac{\pi}{p}} \Psi_p(\xi_1, \xi_2, \{z_i\}). \quad (1.42)$$

La fase ottenuta, diversa da ± 1 , implica che le quasi-buche obbediscono ad una statistica quantistica che interpola fra quella bosonica e fermionica. La possibilità di avere statistiche diverse da quelle bosoniche e fermioniche in due dimensioni è stata

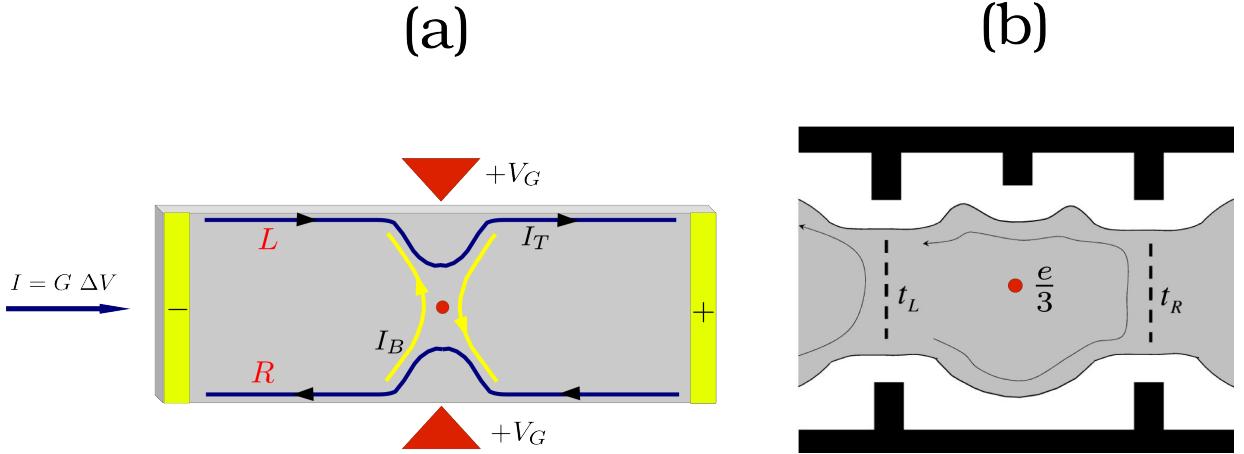


Figura 1.7: (a): È raffigurato schematicamente l'apparato sperimentale della misura della carica frazionaria. Il fluido è compresso in un punto attraverso un potenziale statico V_G , che permette un effetto tunnel tra i due bordi. (b): È rappresentato l'interferometro di Fabry-Perot adattato allo studio della statistica frazionaria. Mediante l'inserzione di due costrizioni R e L gli stati di bordo, mediante tunneling, possono avvolgersi attorno alle quasi-particelle nel bulk.

proposta nel 1977 da Leinaas e Myrheim [22], mentre si deve a Wilczek l'introduzione del termine anioni (anyons) per tali eccitazioni [23].

Una teoria completa delle eccitazioni con carica e statistica frazionaria è stata formulata nell'ambito della teoria di campo conforme delle eccitazioni di bordo descritta nel prossimo capitolo.

1.4 Verifiche Sperimentali sulla Carica e Statistica Frazionaria

Concludiamo questo capitolo con un breve cenno agli esperimenti effettuati per verificare l'esistenza di quasi-particelle con carica [24][25] e statistica frazionaria [26].

1.4.1 Shot noise e carica frazionaria

La carica frazionaria è stata determinata grazie a esperimenti di tunneling in cui si fanno interagire gli stati di bordo. L'apparato sperimentale è raffigurato in figura 1.7(a). Poiché le eccitazioni sono chirali lungo un bordo e antichirali nel bordo opposto è possibile introdurre un'interazione puntuale realizzando una costrizione in un punto del fluido Hall. In questo modo si introduce un effetto di tunneling che può essere descritto da un termine reale nell'hamiltoniana al punto di contatto.

Per temperature molto basse il rumore termico delle correnti è trascurabile rispetto al rumore quantistico, detto shot noise, dovuto alla quantizzazione dei portatori di carica. Questo rumore obbedisce alla statistica poissoniana di eventi indipendenti. Abbiamo quindi che la varianza del numero di particelle che passano da un bordo all'altro è proporzionale al valore medio. Ciò implica che la fluttuazione quadratica S_I della corrente di backscattering I_B (a frequenza nulla) è legata alla corrente I

dalla seguente relazione:

$$S_I = \langle |\delta I_B(\omega)|^2 \rangle_{\omega=0} = e^* I, \quad (1.43)$$

dove e^* rappresenta la carica dell'eccitazione. In caso di costrizione debole il contributo maggiore al tunneling è dovuto alle eccitazioni con carica minore. In questo modo si è potuto verificare sperimentalmente che la carica minima delle eccitazioni di bordo, uguale a quelle di bulk, è frazionaria e pari a $e^* = \nu e$ per $\nu = 1/p$.

1.4.2 Interferometro di Fabry-Perot e statistica frazionaria

Come abbiamo visto precedentemente, la teoria di Laughlin prevede che le eccitazioni di un fluido Hall con filling fraction $\nu = 1/p$ possiedano statistica frazionaria $\Delta\theta = \pi/p$. Per verificare tale proprietà è necessario misurare la fase acquistata dalla funzione d'onda dopo una scambio tra due eccitazioni o dopo che un'eccitazione ha compiuto un giro completo attorno all'altra. Per raggiungere questo scopo si utilizza un interferometro di Fabry-Perot. Nel seguito illustriamo le caratteristiche principali dell'esperimento [27].

Come si vede dalla figura 1.7(b), ci sono due restrizioni L e R in corrispondenza delle quali le eccitazioni hanno coefficienti di trasmissione, rispettivamente, t_L e t_R . Ad esempio, se consideriamo la conducibilità σ_{yy} fra il bordo in basso e in alto del lato sinistro, le eccitazioni di bordo con carica $e^* = \nu e$ possono passare direttamente oppure percorrere il circuito intorno alla regione centrale, includendo N_{qp} quasi-particelle presenti nel bulk. I due percorsi determinano un termine d'interferenza nella conducibilità come segue:

$$\sigma_{yy} \propto |t_R|^2 + |t_L|^2 + 2|t_L^* t_R|^2 \cos \left[(2\pi\nu) \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - N_{qp} \right) \right]. \quad (1.44)$$

Il primo termine nell'argomento del coseno rappresenta la fase di Aharonov-Bohm mentre il secondo dà la fase statistica delle eccitazioni del bordo attorno a N_{qp} anioni nel bulk. La carica può essere misurata dalla modulazione di σ_{yy} in funzione di Φ mentre la statistica frazionaria viene ricavata aumentando le particelle nel bulk da N_{qp} a $N_{qp} + 1$.

Verifiche sperimentali di questa interferenza sono state pubblicate [26], ma al momento attuale manca un accordo sull'interpretazione dell'esperimento; in particolare l'indipendenza della fase d'interferenza da altre fluttuazioni spurie del sistema non è stata completamente dimostrata.

Capitolo 2

Teorie di Campo dell’Effetto Hall

2.1 Stati di Bordo e Anomalia Chirale nell’Effetto Hall Intero

In questa sezione deriveremo la teoria di bordo nel caso del primo livello di Landau pieno ($\nu = 1$). Il punto di partenza è l’hamiltoniana di singola particella (1.5) che espressa nel formalismo di seconda quantizzazione risulta essere [5]:

$$H = \frac{1}{2m} \int d^2\mathbf{x} (D_i \Psi)^\dagger (D_i \Psi), \quad (2.1)$$

con $D_i = \partial_i + ieA_i$ la derivata covariante. L’operatore campo $\Psi(\mathbf{x}, t)$ ammette un’espansione in termini delle autofunzioni dell’energia e del momento angolare $\psi_{n,m}(\mathbf{x})$,

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=-n}^{+\infty} a_k^{(n)} \psi_{n,k}(\mathbf{x}) e^{-in\omega t}, \quad (2.2)$$

dove gli operatori di creazione e distruzione $a_k^{(n)}$ e $a_k^{(n)\dagger}$ soddisfano

$$\left\{ a_k^{(m)}, a_l^{\dagger(n)} \right\} = \delta_{n,m} \delta_{k,l}. \quad (2.3)$$

Se ci restringiamo al primo livello di Landau l’operatore Ψ è

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \psi_k(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Supponiamo che il sistema abbia la geometria di un disco e che il livello di Landau sia pieno. Lo stato fondamentale $|\Omega\rangle$, in cui tutti gli stati sono occupati, si ottiene dallo stato di vuoto $|0\rangle$ mediante l’azione degli operatori di creazione

$$|\Omega\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger \dots a_M^\dagger |0\rangle, \quad (2.5)$$

dove M rappresenta il massimo momento angolare (in unità di \hbar), legato al numero di particelle da $N = M + 1$.

Il calcolo della densità $\rho(\mathbf{x}) = \langle \Omega | \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) | \Omega \rangle$ mostra che lo stato fondamentale

corrisponde ad una goccia di fluido di densità uniforme. Infatti il valore di aspettazione sullo stato (2.5) è facilmente calcolabile e risulta

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^M |\psi_i|^2 = \frac{1}{l^2 \pi} e^{-\frac{|z|^2}{l^2}} \sum_{i=0}^M \frac{1}{i!} \left(\frac{|z|^2}{l^2} \right)^i. \quad (2.6)$$

La funzione (2.6) è circa costante per $r << l\sqrt{M}$ e decade velocemente a zero nell'intorno di $r = l\sqrt{M}$ (fig. 2.1). Un'altra quantità di interesse è la corrente

$$J^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2im} [\Psi^\dagger D_i \Psi - (D_i \Psi)^\dagger \Psi], \quad (2.7)$$

il cui valore di aspettazione può essere facilmente calcolato utilizzando la relazione $\partial_i \rho = \Psi^\dagger D_i \Psi + (D_i \Psi)^\dagger \Psi$. Si ottiene:

$$\langle \Omega | J^i | \Omega \rangle = -\frac{1}{2m} \epsilon^{ij} \partial_j \langle \Omega | \rho | \Omega \rangle. \quad (2.8)$$

La corrente è pertanto trasversa e localizzata al bordo del sistema; in fig. 2.1 è mostrato in blu il profilo di densità (2.6) mentre il valore di aspettazione della corrente (2.8) è rappresentato dalla curva verde.

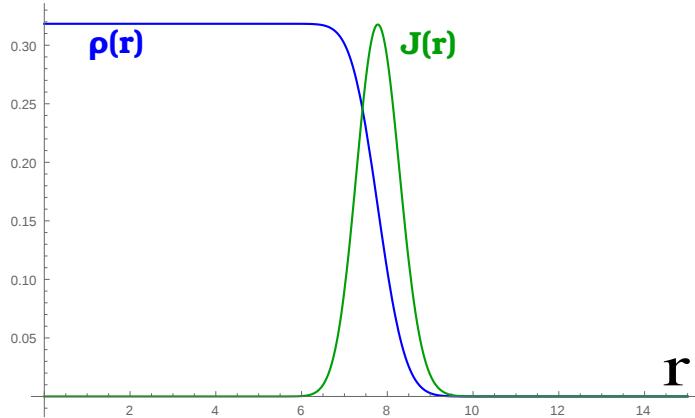


Figura 2.1: In figura sono rappresentate le curve del valore di aspettazione della densità $\rho(r)$ (blu) e della corrente $J(r)$ (verde) per $N = 60$, $l = 1$ e $m = 0.4$ in unità arbitrarie di lunghezza.

2.1.1 Dinamica degli stati di bordo

Nel capitolo precedente abbiamo discusso in modo qualitativo l'esistenza degli stati di bordo dell'IQHE e il loro comportamento chirale. In questa sezione vedremo come si possa dare una descrizione di tali stati in modo quantitativo facendo uso del formalismo di seconda quantizzazione.

Introduciamo una nuova hamiltoniana H_R ,

$$H_R = \frac{1}{2m} \int_{|\mathbf{x}| < R} d^2 \mathbf{x} (D_i \Psi)^\dagger (D_i \Psi), \quad (2.9)$$

in cui l'integrazione delle coordinata radiale viene fatta fino ad R mantenendo gli stati di singola particella definiti nell'intero piano. In questo modo la nuova hamiltoniana

descrive, con errore esponenzialmente piccolo, il sistema in un disco di raggio finito R . Come è stato detto nel capitolo precedente, in un sistema finito la degenerazione del primo livello di Landau è data, in unità di Φ_0 , dal flusso magnetico attraverso il disco, $\Phi = R^2/l^2$. Inoltre, quando $\nu = 1$, $(\Phi + 1)$ elettroni occupano approssimativamente una regione circolare di raggio R e di conseguenza possiamo correlare il numero di particelle ($M + 1$) al raggio R nel seguente modo:

$$\Phi = \frac{R^2}{l^2} = M + \mu, \quad \text{dove} \quad M \gg 1, \quad \mu = O(1). \quad (2.10)$$

Notiamo che le autofunzioni $\psi_m(\mathbf{x})$ (1.16) diagonalizzano anche la nuova hamiltoniana (2.9) il cui spettro è dato da

$$\epsilon_n = \frac{\omega \Phi^n e^{-\Phi}}{2} (n - \Phi). \quad (2.11)$$

In particolare la modifica dell'hamiltoniana ha rimosso la degenerazione rispetto al momento angolare n facendo acquistare al campo Ψ una dipendenza temporale

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \psi_n(\mathbf{x}) e^{-i\epsilon_n t}. \quad (2.12)$$

Gli stati in prossimità del bordo, con momento angolare $M - \sqrt{M} < n < M + \sqrt{M}$, hanno un energia approssimativamente lineare, come nel caso di un potenziale confinante discusso in sezione 1.2.3. Infatti usando la formula di Stirling si ottiene:

$$\epsilon_n \sim \frac{v}{R} [(n - M) - \mu], \quad v = \sqrt{\frac{eB}{4\pi m^2}}. \quad (2.13)$$

Dalla precedente equazione riconosciamo v e μ come, rispettivamente, la velocità e il potenziale chimico introdotti in 1.2.3. È importante sottolineare che la velocità v è un parametro fenomenologico e il valore (2.13) non deve essere considerato come una previsione.

Adesso vediamo come sia possibile ottenere la dinamica effettiva degli stati di bordo. Per prima cosa osserviamo che la condizione che determina gli stati del primo livello di Landau $d\psi = 0$ può essere riscritta:

$$D_+ \Psi(\mathbf{x}) \equiv (D_1 + iD_2) \Psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.14)$$

Combinando questa equazione con l'identità [28]

$$(D_i \Psi)^\dagger (D_i \Psi) = (D_+ \Psi)^\dagger (D_+ \Psi) + m\epsilon^{ij}\partial_i J^j + eB\rho, \quad (2.15)$$

possiamo mostrare che l'hamiltoniana H_R si riduce ad un termine di bordo:

$$H_R = \frac{1}{4m} \int_0^{2\pi R} dx \Psi^\dagger(-i) \left(\partial_x - i \frac{R}{l^2} \right) \Psi + \text{h.c.}, \quad (2.16)$$

dove $x = R\theta$ è la coordinata unidimensionale che descrive il bordo. La modifica (2.9) ha condotto a una riduzione dimensionale da un'hamiltoniana in (2+1) dimensioni

non-relativistica a un'hamiltoniana in (1+1) dimensioni relativistica. Tale procedura è l'analogo microscopico della corrispondenza bulk-boundary nella teoria di campo effettiva di Chern-Simons [29] che verrà discussa in seguito.

La teoria di bordo descritta dalla (2.16) diventa invariante conforme nel limite termodinamico $M \rightarrow +\infty$. A tale scopo facciamo le seguenti sostituzioni:

$$e_n = \epsilon_{M+n}, \quad b_n = a_{M+n}, \quad (2.17)$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \left(\frac{2}{\pi l^2} \right)^{1/4} e^{i(M+\mu)\theta} F_R(\mathbf{x}), \quad (2.18)$$

e valutiamo l'operatore F_R sul bordo:

$$F_R(R e^{i\theta}, t) = \sum_{n=-M}^{+\infty} \frac{C_n}{\sqrt{2\pi R}} e^{i(n-\mu)\theta} e^{-ie_n t} b_n, \quad (2.19)$$

$$C_n^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{(M+n)!} \left(\frac{R}{l} \right)^{2M+2n+1} e^{-R^2/l^2} \Big|_{R^2=(M+\mu)l^2}.$$

Nel limite $M \rightarrow +\infty$ i coefficienti hanno l'andamento $C_n \sim e^{-(n-\mu)^2/2M}$ e quindi impongono un cut-off ultravioletto naturale alla somma su n che risulta limitata all'intervallo $|n| < \sqrt{M} \sim R/l$, dove è valida l'approssimazione lineare per le energie e_n . Quindi, in questo limite, si ottiene l'operatore di campo approssimato:

$$F_R(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \exp[i(n-\mu)(\theta - vt/R)] b_n, \quad (2.20)$$

in termine del quale l'hamiltoniana H_R (2.16) assume la forma ($x = R\theta$):

$$H_R = \frac{v}{2} \int_0^{2\pi R} dx F_R^\dagger(-i\partial_x) F_R + \text{h.c..} \quad (2.21)$$

Le equazioni (2.20) e (2.21) descrivono un fermione relativistico massless chirale e carico, il fermione di Weyl, sul bordo del disco di circonferenza $2\pi R$. Un aspetto importante del limite termodinamico è il ruolo del potenziale chimico che specifica le condizioni al contorno del campo F_R :

$$F_R(\theta + 2\pi) = e^{-2i\pi\mu} F_R(\theta). \quad (2.22)$$

2.1.2 Algebra chirale sul cilindro

La particolarità del campo $F_R(\theta, t)$ è quella di essere un campo conforme in (1+1) dimensioni. Una delle caratteristiche principali di una teoria con invarianza conforme in (1+1) dimensioni (CFT) è quella di poter esprimere tutte le quantità di interesse come funzioni olomorfe e anti-olomorfe di una coordinata complessa η che descrive lo spazio-tempo euclideo [30]. Poiché il nostro fermione chirale è definito sul cilindro minkowskiano parametrizzato da $(R\theta, t)$ è necessario ruotare al tempo euclideo, $t = -i\tau$, e mappare il cilindro nel piano η con la seguente trasformazione conforme:

$$\eta = \exp \left\{ \frac{1}{R} (v\tau + iR\theta) \right\}. \quad (2.23)$$

Nella variabile η il campo (2.20) risulta essere anti-olomorfo

$$F_R(\bar{\eta}) = \frac{\bar{\eta}^{1/2}}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\eta}^{-n+\mu-1/2} b_n = \frac{\bar{\eta}^{1/2}}{\sqrt{2\pi R}} F(\bar{\eta}), \quad (2.24)$$

$$F_R^\dagger(\bar{\eta}) = \frac{\bar{\eta}^{1/2}}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\eta}^{n-\mu-1/2} b_n^\dagger = \frac{\bar{\eta}^{1/2}}{\sqrt{2\pi R}} F^\dagger(\bar{\eta}), \quad (2.25)$$

mentre le equazioni del moto si riducono alle condizioni di analiticità, $\partial_\eta F = \partial_\eta F^\dagger = 0$. Inoltre le densità di hamiltoniana e di carica $U(1)$ si scrivono:

$$\mathcal{H}_R(\bar{\eta}) = \frac{1}{2} v \left(\partial_{\bar{\eta}} F_R^\dagger F_R - F_R^\dagger \partial_{\bar{\eta}} F_R \right), \quad (2.26)$$

$$\rho_R(\bar{\eta}) = F_R^\dagger F_R. \quad (2.27)$$

Da questi due operatori si possono calcolare le cariche ρ_n e L_n che, in accordo con la CFT, generano rispettivamente le trasformazioni di gauge locali e le trasformazioni conformi [30]:

$$L_n \equiv \frac{R}{iv} \oint d\bar{\eta} \mathcal{H}_R(\bar{\eta}) \bar{\eta}^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(k - \frac{1}{2} n - \mu \right) b_{k-n}^\dagger b_k, \quad (2.28)$$

$$\rho_n \equiv \frac{R}{i} \oint d\bar{\eta} \rho_R(\bar{\eta}) \bar{\eta}^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{k-n}^\dagger b_k. \quad (2.29)$$

In particolare ρ_0 e L_{-1}, L_0, L_1 generano le trasformazioni globali. I valori di aspettazione degli operatori ρ_0 e L_0 sono divergenti nel limite $M \rightarrow \infty$ e necessitano di una regolarizzazione mediante l'ordinamento normale. Lo stato di Landau totalmente occupato è definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} b_n |\Omega\rangle &= 0, & n > 0, \\ b_n^\dagger |\Omega\rangle &= 0, & n \leq 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

e quindi l'ordinamento normale si realizza mettendo gli operatori di distruzione b_n ($n > 0$) e b_n^\dagger ($n \leq 0$) a destra degli operatori di creazione b_n ($n \leq 0$) e b_n^\dagger ($n > 0$). Tuttavia, poiché questa prescrizione comporta la sottrazione di infiniti, è necessario fissare le parti finite di L_0 e ρ_0 . Un modo per farlo è richiedere che gli operatori rinormalizzati soddisfino la forma standard dell'algebra delle correnti [30]:

$$\begin{aligned} [\rho_n, \rho_m] &= n \delta_{n+m,0}, \\ [L_n, \rho_m] &= -m \rho_{n+m,0}, \\ [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m,0} + \frac{1}{12}c(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \quad c = 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Il valore della carica centrale di Virasoro $c = 1$ è indipendente dalla scelta di regolarizzazione e verifica il fatto che stiamo descrivendo la teoria del fermione di

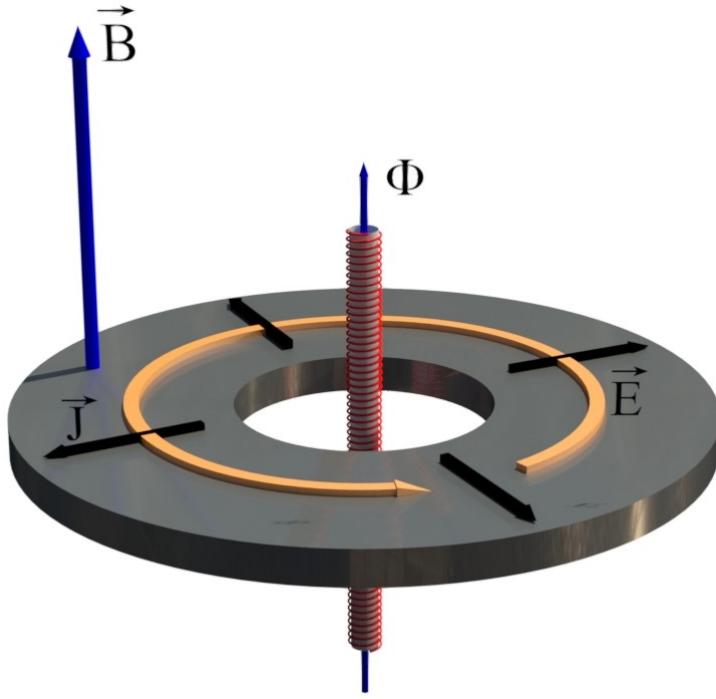


Figura 2.2: Rappresentazione schematica del sistema Hall in una geometria ad anello. L'inserzione di un flusso variabile nel tempo Φ genera un campo elettrico \mathbf{E} trasverso e quindi una corrente elettronica \mathbf{J} diretta verso il bordo esterno dell'anello.

Weyl. Le proprietà dello stato fondamentale possono essere calcolate analogamente e risultano essere date da:

$$L_n |\Omega, \mu\rangle = 0, \quad \rho_n |\Omega, \mu\rangle = 0 \quad \text{se } n > 0; \quad (2.32)$$

$$L_0 |\Omega, \mu\rangle = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} (\mu^2 - \mu) \right) |\Omega, \mu\rangle, \quad \rho_0 |\Omega, \mu\rangle = \left(\frac{1}{2} - \mu \right) |\Omega, \mu\rangle. \quad (2.33)$$

La dipendenza dello stato fondamentale dal potenziale chimico μ è una conseguenza della dipendenza dello spettro dalle condizioni al contorno (2.22). Nel caso dello stato Hall imperturbato, la scelta $\mu = 1/2$ è quella naturale. Queste condizioni periodiche sul cilindro e anti-periodiche nel piano η sono dette settore di Ramond nella letteratura della stringa relativistica. Il caso opposto è detto settore di Neveu-Schwarz.

2.1.3 Argomento del flusso e l'anomalia chirale

Nel capitolo precedente abbiamo discusso la quantizzazione della condutività e della corrente Hall come quantità di bulk, nel seguito deriveremo questa corrente mediante quantità di bordo (1+1) dimensionali. Seguiremo la trattazione data in [5] che rielabora l'argomento del flusso di Laughlin.

Consideriamo una geometria ad anello e inseriamo al centro dell'anello un tubo di flusso (fig. 2.2):

$$\delta B = 2\pi\Phi\delta^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \delta A_i = \Phi\epsilon^{ij}\frac{x^j}{|\mathbf{x}|^2}. \quad (2.34)$$

Tale inserzione modifica l'hamiltoniana di singola particella (1.5) nel seguente modo:

$$H = -\frac{1}{2m} [\nabla - ie(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})]^2. \quad (2.35)$$

Dopo l'aggiunta del flusso lo spettro rimane invariato, mentre le nuove autofunzioni sono

$$\hat{\psi}_{n,m} = e^{ie\Phi\theta} \psi_{n,m}, \quad (2.36)$$

e quindi gli autovalori del momento angolari sono cambiati in $m \rightarrow m + e\Phi$. Seguendo gli stessi passaggi che hanno portato alle equazioni (2.20) e (2.21) si ottengono la nuova hamiltoniana e il nuovo operatore di campo della teoria sul bordo

$$F_R \longrightarrow \hat{F}_R = e^{ie\frac{\Phi}{R}x} F_R, \quad \delta A_x = -\frac{\Phi}{R}, \quad (2.37)$$

$$H_R \longrightarrow \hat{H}_R = \frac{v}{2} \int_0^{2\pi R} dx \hat{F}_R^\dagger (-i\partial_x + e\delta A_x) \hat{F}_R + \text{h.c.} \quad (2.38)$$

Facendo variare Φ_0 nel tempo, il flusso genera un campo elettrico trasverso $E^i = \partial_0 A_i = \dot{\Phi}\epsilon^{ij}x^j/|\mathbf{x}|^2$ che al bordo si scrive:

$$E = \partial_0 \delta A_x = -\frac{\dot{\Phi}}{R}. \quad (2.39)$$

Pertanto il fermione di Weyl (1+1) dimensionale risulta accoppiato ad un campo elettrico esterno. Come è ben noto, questa teoria è affetta dall'*anomalia chirale* che corrisponde ad una violazione della conservazione della carica. Al fine di rendere evidenti le conseguenze dell'anomalia, effettuiamo una trasformazione di gauge in modo da avere $\delta A_x = 0$. In questo modo l'operatore di campo presente nell'hamiltoniana torna ad essere F_R , ma compare un termine addizionale nell'hamiltoniana di bordo:

$$H_R = \frac{v}{2} \int_0^{2\pi R} dx F_R^\dagger (-i\partial_x) F_R + \text{h.c.} + \int_0^{2\pi R} dx e\delta A_0 \rho_R, \quad (2.40)$$

dove $\delta A_0 = \dot{\Phi}x/R$ e quindi $E = -\partial_x A_0$.

Adesso possiamo facilmente calcolare l'evoluzione temporale dell'operatore densità ρ_R sfruttando le equazioni del moto di Heisenberg:

$$i\frac{d}{dt}\rho_R = [\rho_R, H_R]; \quad (2.41)$$

facendo uso dell'algebra delle correnti (2.31), si trova l'equazione dell'anomalia chirale

$$(\partial_t + v\partial_x) \rho_R = \frac{e}{2\pi} E. \quad (2.42)$$

La variazione temporale della carica sul bordo è ottenuta integrando la (2.42) ed è diversa da zero. Dal punto di vista della teoria di bordo, le cariche vengono estratte dal mare di Dirac che è identificabile col fluido Hall nel bulk. Calcolando l'anomalia sulla teoria antichirale all'altro bordo otterremo la stessa equazione (2.31) ma con segno opposto. Considerando il sistema dell'anello nel suo insieme di bulk e bordi, si

ottiene trasferimento di carica da un bordo all’altro. In conclusione l’anomalia in (1+1) dimensioni non è nient’altro che la corrente Hall:

$$J^i = \frac{e}{2\pi} \epsilon^{ij} E^j. \quad (2.43)$$

Il meccanismo di cancellazione dell’anomalia del bordo con una corrente (classica) di bulk viene in letteratura detto *anomaly inflow*.

Veniamo adesso alla dimostrazione della quantizzazione esatta delle conducibilità nell’ambito della teoria di bordo. L’integrale spazio-temporale della (2.42)

$$\Delta Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{2\pi R} (\partial_t + v\partial_x) \rho_R = \frac{e}{2\pi} \int dt dx E = e, \quad (2.44)$$

relativo al processo adiabatico che aggiunge un flusso Φ_0 può essere messo in relazione con la quantità detta *indice di Dirac* in (1+1) dimensioni ed obbedisce al teorema di Atiyah-Singer [20]. La (2.44) può essere riscritta in teoria dei campi (1+1) dimensionale come

$$\int d^2x \partial_\mu J_B^\mu = \frac{e}{2\pi} \int d^2x \mathcal{F} = en, \quad (2.45)$$

dove $J_B^\mu = (\rho_R, v\rho_R)$ e \mathcal{F} è il campo elettromagnetico (1+1) dimensionale, ovvero il campo elettrico (2+1) dimensionale. Il teorema dell’indice stabilisce che l’integrale spazio-temporale dell’anomalia chirale è espresso dalla prima classe di Chern del campo di bordo \mathcal{F} . Questa quantità è intera ed invariante topologica rispetto a deformazioni continue del campo elettromagnetico e della metrica dello spazio-tempo (mediante le quali si potrebbe modellizzare l’effetto delle impurezze). Ritroviamo quindi che la teoria di bordo conduce ad un risultato analogo a quello di Thouless e collaboratori descritto in sezione 1.2.5. Notiamo che la dimostrazione in teoria dei campi e la relazione con l’anomalia si estendono direttamente al caso frazionario.

2.2 Gli Stati di Bordo del FQHE e il Bosone Chirale

2.2.1 Il bosone chirale

Nelle sezioni precedenti abbiamo trovato che la teoria effettiva che descrive gli stati di bordo dell’IQHE è quella del fermione chirale (1+1) dimensionale libero espresso dalle equazioni (2.20) e (2.21). Come abbiamo visto nel capitolo precedente, il caso del FQHE non può essere spiegato con una teoria libera e necessita l’introduzione dell’interazione coulombiana. È naturale supporre che anche il fermione di Weyl al bordo acquisti un’interazione per $\nu < 1$. In (1+1) dimensioni possiamo risolvere esattamente questo sistema utilizzando le tecniche di bosonizzazione, ovvero il fatto che il fermione interagente (modello di Thirring) può essere esattamente mappato in un teoria bosonica [31]. Consideriamo quindi la teoria conforme $c = 1$ del bosone che deve essere compattificato, ovvero il campo diventa una variabile angolare $\phi \equiv \phi + 2\pi r$; i valori di r descrivono una varietà di teorie fermioniche interagenti e saranno determinati dai dati dell’effetto Hall frazionario. Notiamo che Wen per

primo ha suggerito l'introduzione del bosone per rappresentare le fluttuazioni della densità al bordo attraverso la relazione $\delta\rho(\mathbf{x})|_{|\mathbf{x}|=R} = \partial_x\phi$, con $x = R\theta$ la coordinata del bordo.

La bosonizzazione del fermione di Weyl richiede l'introduzione di una teoria chirale anche per il bosone, che differisce sostanzialmente dalla teoria di Klein-Gordon. L'azione del bosone chirale introdotta da Floreanini e Jackiw [32] è la seguente:

$$S = -\frac{k}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{2\pi R} dx (\partial_t + v\partial_x) \phi \partial_x \phi, \quad (2.46)$$

dove $\phi(x, t)$ è un bosone reale che si muove lungo un cerchio di lunghezza $2\pi R$ con condizioni al contorno

$$\phi(2\pi, t) - \phi(0, t) = -2\pi\alpha_0. \quad (2.47)$$

Notiamo che la lagrangiana è del primo ordine nel tempo e che il momento canonico coniugato è $\pi \propto \partial_x\phi$. Variando l'azione si ottiene l'equazione del moto

$$(\partial_t + v\partial_\theta) \partial_\theta \phi = 0, \quad (2.48)$$

dove abbiamo riscalato le variabili nel seguente modo: $t \rightarrow Rt$ e $x \rightarrow R\theta$.

La soluzione più generale dell'equazione del moto (2.48) è:

$$\phi(\theta, t) = f(\theta - vt) + g(t), \quad (2.49)$$

dove $g(t)$ rappresenta il grado di libertà di gauge dovuto all'invarianza dell'azione (2.46) sotto la trasformazione $\phi \rightarrow \phi + \lambda(t)$. Imponiamo quindi la seguente scelta di gauge:

$$(\partial_t + v\partial_\theta) \phi = 0, \quad (2.50)$$

che comporta $g(t) = 0$. In questa gauge, la soluzione generale che soddisfa la condizione al contorno (2.47) è:

$$\phi(\theta - vt) = \phi_0 - \alpha_0(\theta - vt) + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{in(\theta - vt)} \quad \text{con} \quad \alpha_n^* = \alpha_{-n}. \quad (2.51)$$

Per quantizzare la teoria è necessario imporre le relazioni di commutazione canoniche a tempi uguali, che hanno la seguente espressione [32]:

$$[\phi(\theta, t), \phi(\theta', t)] = i \frac{\pi}{k} \epsilon(\theta - \theta'), \quad (2.52)$$

dove $\epsilon(x) = \pm 1/2$ per $\pm x > 0$. Queste relazioni sono scelte in modo che l'equazione di Heisenberg riproduca correttamente le equazioni del moto (2.48). Si ottengono quindi le relazioni di commutazione per le componenti di ϕ :

$$[\alpha_0, \phi_0] = \frac{1}{ik}, \quad (2.53)$$

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \frac{n}{k} \delta_{n+m,0}, \quad (2.54)$$

mentre lo stato di vuoto dello spazio di Fock è definito da

$$\alpha_n |\Omega\rangle = 0 \quad n > 0. \quad (2.55)$$

Come abbiamo visto nella sezione precedente, il fermione di Weyl corrisponde ad una teoria conforme con $c = 1$. Adesso vedremo che anche il bosone chirale ha $c = 1$, ma è più generale e con esso è possibile descrivere gli stati di bordo a filling fraction ν frazionario.

Il primo passo è quello di ricavare l'hamiltoniana e l'operatore L_0 ; si ottiene:

$$H_R = \frac{vk}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\theta (\partial_\theta \phi)^2 \equiv \frac{v}{R} L_0 = \frac{k}{2} \alpha_0^2 + k \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n, \quad (2.56)$$

mentre le altre cariche L_n sono definite dai momenti dell'hamiltoniana,

$$L_n \equiv \frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta (\partial_\theta \phi)^2 \exp(-in(\theta - vt)) = \frac{k}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-l} \alpha_l. \quad (2.57)$$

Usando le regole di commutazione (2.53) e (2.54) si ottiene l'algebra delle correnti $c = 1$:

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \frac{n}{k} \delta_{n+m,0}, \quad (2.58)$$

$$[L_n, \alpha_m] = -m \alpha_{n+m}, \quad (2.59)$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \quad (2.60)$$

come nel caso del fermione libero, con $\alpha_n = \rho_n$.

Gli stati della teoria conforme sono descritti da rappresentazioni di questa algebra: la teoria fermionica libera dà luogo ad alcune rappresentazioni, mentre quella bosonica le realizza tutte. Consideriamo la compattificazione:

$$\phi(\theta, t) \equiv \phi(\theta, t) + \frac{2\pi}{p}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.61)$$

Le condizioni al contorno (2.47) implicano che $\phi(\theta)$ è una mappa non banale del cerchio in sé stesso. È necessaria la quantizzazione di α_0 ,

$$\alpha_0 = \frac{n}{p}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.62)$$

Poiché il momento coniugato a α_0 è $k\phi_0$, ϕ_0 è una variabile angolare che vive in $[0, 2\pi p/k]$ e quindi per consistenza con la (2.61) deve essere $k = p/q$ dove p e q sono interi coprimi.

Gli osservabili della teoria bosonica sono gli operatori di vertice di Fubini-Veneziano [30]:

$$V_\beta(\bar{\eta}) =: e^{i\beta\phi(\bar{\eta})} :. \quad (2.63)$$

Nel linguaggio della CFT in (1+1) dimensioni, questi sono campi primari con dimensione conforme $h_\beta = \beta^2/2k$ e carica $Q_\beta = \beta/k$, dove $\beta = n/q$, $n \in \mathbb{Z}$ nel caso della compattificazione con $k = p/q$. Il fermione di Weyl libero si ottiene per il valore particolare $k = 1$. In questo caso i campi F e F^\dagger vengono identificati dagli operatori di vertice $V_1 = F_R$ e $V_{-1} = F_R^\dagger$, e la densità di carica $\rho_R =: F_R^\dagger F_R :$ è espressa in termini del campo bosonico da:

$$\rho_R = -\frac{1}{2\pi} \partial_x \phi. \quad (2.64)$$

Dalla (2.64) possiamo verificare che $\alpha_n = \rho_n$; in particolare la carica totale ρ_0 è rappresentata nella teoria bosonica da α_0 .

Grazie a questa identificazione è possibile accoppiare il bosone chirale con il campo elettromagnetico aggiungendo il seguente termine all'azione (2.46):

$$S_{int} = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{2\pi R} dx (A_t \partial_x \phi - A_x \partial_t \phi). \quad (2.65)$$

In questo modo l'equazione del moto diventa:

$$(\partial_t + v \partial_x) \left(-\frac{1}{2\pi} \partial_x \phi \right) = \frac{e}{2\pi k} E, \quad (2.66)$$

che si riduce per $k = 1$ proprio all'equazione anomala (2.42).

Notiamo infine che il bordo interno dell'anello è descritto dalla teoria bosonica antichirale con azione (2.46) modificata in $v \rightarrow -v$ e $S \rightarrow -S$.

2.2.2 Stati di bordo del FQHE

Adesso vediamo come la teoria del bosone chirale permetta la descrizione degli stati di bordo del FQHE. Supponiamo di avere uno stato incomprimibile di Laughlin a $\nu = 1/p$ con p intero dispari. Assumiamo inoltre che le proprietà di bassa energia siano descritte da una teoria conforme di fermioni interagenti ovvero dal bosone chirale. Questa teoria deve riprodurre la corrente Hall

$$J^i = \nu \frac{e}{2\pi} \epsilon^{ij} E^j. \quad (2.67)$$

Confrontando questa equazione valutata nel bordo con la (2.66) si determina il valore di k :

$$k = \frac{1}{\nu} = p. \quad (2.68)$$

In questa teoria conforme $c = 1$, gli operatori di vertice $V_{\pm 1} \dots V_{\pm p}$ creano al bordo le eccitazioni con carica e statistica frazionaria previste dalla teoria di Laughlin. Infatti, la carica e la dimensione conforme sono date da:

$$Q_n = \frac{n}{p}, \quad h_n = \frac{n^2}{2p}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.69)$$

La statistica frazionaria può essere determinata dalla forma del correlatore conforme $\langle V_n(\eta) V_n(0) \rangle = \eta^{2h_n}$, ottenendo:

$$\theta_n = \frac{n^2}{p}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.70)$$

Osserviamo inoltre che poiché p è un intero dispari esiste sempre un'eccitazione con i numeri quantici dell'elettrone: $Q = 1$ e $\theta = 1$.

2.3 Teoria Effettiva di Campo nel Bulk

In questa sezione descriveremo la teoria effettiva del bulk del FQHE che corrisponde alla dinamica degli stati di bordo precedentemente descritti.

Per derivare la teoria effettiva osserviamo che la corrente Hall (2.67) e la densità di carica in funzione del campo magnetico, $J^0 = (-e)\nu B/2\pi$, possono essere scritte in un'unica espressione covariante¹:

$$eJ^\mu = \sigma_H \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda = \frac{\nu e^2}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda. \quad (2.71)$$

La teoria di campo effettiva che riproduce questa relazione è la teoria di Chern-Simons con la seguente azione:

$$S_{CS}[A_\mu] = \frac{\nu e^2}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda, \quad J^\mu = \frac{\delta \Gamma[A_\nu]}{\delta A_\mu}. \quad (2.72)$$

Questa azione descrive la risposta del sistema Hall introdotta dalla presenza del campo esterno $A_\mu = \tilde{A}_\mu + \delta A_\mu$, dove $\tilde{A}_\mu = (\tilde{A}_0, \tilde{A}_i) = (0, B/2\epsilon^{ij}x^j)$ è il campo magnetico costante.

È conveniente introdurre un altro campo di gauge $U(1)$ che descrive le fluttuazioni di materia e parametrizza la corrente J^μ come segue:

$$J^\mu = \frac{1}{2\pi} \partial_\nu a_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda}. \quad (2.73)$$

Questa relazione di dualità mostra che il campo *idrodinamico* a_μ è definito a meno di trasformazioni di gauge $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \chi$. Introduciamo per questo campo una ulteriore dinamica di Chern-Simons e un accoppiamento minimale al campo esterno $eA_\mu J^\mu$, come segue:

$$S_{eff}[a_\mu, A_\mu] = \int d^2x dt \left(-\frac{p}{4\pi} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda} + \frac{e}{2\pi} A_\mu \partial_\nu a_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda} \right) = S_{CS}[A_\mu]. \quad (2.74)$$

Poiché l'azione S_{eff} è quadratica in a_μ , il calcolo del path-integral nelle fluttuazioni di materia con azione (2.74) si calcola semplicemente sostituendo le equazioni di moto nell'azione ottenendo $S[A_\mu]$ (2.72). Identifichiamo quindi il filling fraction $\nu = 1/p$. Notiamo che dal punto di vista del gruppo di rinormalizzazione il termine di Chern-Simons in (2+1) dimensioni è più rilevante del termine di Maxwell; inoltre tale termine rompe le simmetrie di time-reversal e di parità in accordo con la presenza del campo magnetico esterno.

La teoria di Chern-Simons descrive non solo la risposta lineare ad un campo esterno (2.71), ma anche alcune proprietà delle eccitazioni di bulk, corrispondenti alle quasi-buche della teoria di Laughlin (sez. 1.3.2). A tale scopo introduciamo una carica puntiforme q del campo a_μ nel punto \mathbf{x}_0 mediante un termine sorgente statico, $qa_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. L'azione (2.74) viene modificata in

$$S = \int d^2x dt \left(-\frac{p}{4\pi} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda} + \frac{e}{2\pi} A_\mu \partial_\nu a_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda} + qa_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right). \quad (2.75)$$

¹In questa tesi si utilizzerà la metrica $\eta^{\mu\nu}$ dove *diag* $\eta = (1, -1, \dots, -1)$, mentre $\epsilon^{\mu\nu\lambda}$ è il tensore antisimmetrico con $\epsilon^{012} = 1$.

La variazione rispetto ad a_0 determina la densità

$$J^0 = \frac{e}{2\pi p} \epsilon^{0\mu\nu} \partial_\mu A_\nu + \frac{q}{p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\frac{e}{2\pi p} B + \frac{q}{p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (2.76)$$

Dalla (2.76) si deduce che il termine di sorgente crea un'eccitazione di carica

$$Q = -\frac{q}{p} e. \quad (2.77)$$

Oltre alla carica, l'eccitazione porta q/p unità di flusso del campo a_μ ; quindi se si hanno due eccitazioni con cariche q_1 e q_2 rispetto al campo a_μ , muovendone una intorno all'altra si induce una fase pari a

$$\theta = \frac{2\pi}{p} q_1 q_2. \quad (2.78)$$

Da questo segue che se le eccitazioni hanno la stessa carica $q_1 = q_2 = q$ un loro scambio comporta una fase di

$$\theta = \frac{\pi}{p} q^2. \quad (2.79)$$

Otteniamo quindi che la teoria di Chern-Simons riproduce la statistica frazionaria delle eccitazioni. È importante verificare che questa teoria effettiva abbia eccitazioni che corrispondono a un elettrone. Per vederlo consideriamo che una carica di $-e$ corrisponde a una particella che porta p unità della carica di a_μ . Tale eccitazione porta a una fase per scambio di $\theta = \pi p$ e quindi, essendo p dispari, ha statistica fermionica. Inoltre affinché la funzione d'onda fermionica sia regolare è necessario che $q \in \mathbb{Z}$. Quindi la teoria di Chern-Simons contiene eccitazioni con carica frazionaria minima di $Q = \pm e/p$ corrispondente a $q = 1$ con una statistica di $\theta = \pi/p$ in accordo con la teoria di Laughlin con $\nu = 1/p$ e la teoria di bordo conforme.

Notiamo infine che l'effetto Hall frazionario si osserva anche a filling fraction $\nu = n/p$, $n > 1$ più generali di quelli descritti dalla teoria di Laughlin. Si tratta degli stati Hall gerarchici o di Jain. Per questi è possibile generalizzare la teoria di bordo del bosone chirale e di bulk di Chern-Simons mediante l'introduzione di campi con n componenti [10].

2.3.1 Corrispondenza bulk-boundary per il FQHE

Abbiamo discusso precedentemente come la corrente Hall di bulk corrisponda alla non conservazione della carica di bordo ed in particolare al trasferimento di carica da un bordo all'altro. Complessivamente, la corrente è conservata in (2+1) dimensioni se si considerano tutti i contributi di bulk e di bordo (*anomaly inflow*). Ci aspettiamo quindi che la simmetria di gauge della teoria effettiva sia verificata sia nel bulk che nel bordo.

In effetti, la teoria di Chern-Simons di bulk non è invariante di gauge in una geometria con bordo e la teoria del bosone chirale al bordo deve essere inclusa per realizzare la compensazione. La verifica dell'invarianza di gauge fornisce quindi un argomento di compatibilità fra le azioni di bulk e di bordo che è un'ulteriore conferma dell'approccio di teoria dei campi.

Vediamo le trasformazioni di gauge in dettaglio. Consideriamo per semplicità la geometria spaziale del semipiano inferiore con bordo $\partial\mathcal{M}$ corrispondente all'asse delle x , ovvero $y = 0$. Poniamo inoltre $e = v = 1$ in questa sezione. La variazione di gauge dell'azione di Chern-Simons (2.72) genera il termine di bordo

$$\delta S_{CS}[A_\mu] = -\frac{1}{4\pi p} \int_{\partial\mathcal{M}} dt dx \Lambda (\partial_x A_t - \partial_t A_x), \quad \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda. \quad (2.80)$$

L'azione del bosone chirale accoppiato al campo esterno (2.46), (2.65) per $\nu = 1/p$ si scrive

$$S_b[\phi, A_\mu] = \int dt dx \left[-\frac{p}{4\pi} (\partial_t + \partial_x) \phi \partial\phi + \frac{1}{2\pi} (A_t \partial\phi - A_x \partial_t \phi) \right]. \quad (2.81)$$

Abbiamo visto che il bosone è chirale, ovvero soddisfa la condizione (2.50), $(\partial_t + \partial_x) \phi = 0$, e che l'azione $S_b[\phi, 0]$ è invariante per trasformazioni di gauge dipendenti dal tempo $\phi \rightarrow \phi + \lambda(t)$. Mostriamo adesso che il campo ϕ può essere ridefinito mediante la “trasformazione di gauge”

$$\phi \longrightarrow \phi + \frac{1}{p} \Lambda, \quad (2.82)$$

in modo tale che la variazione di gauge della teoria complessiva sia nulla

$$\delta S_{CS}[A_\mu] + \delta S_b[\phi, A_\mu] = 0, \quad \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad \delta\phi = \frac{\Lambda}{p}. \quad (2.83)$$

Notiamo che Λ deve essere essa stessa chirale al bordo per compatibilità della trasformazione (2.82)

$$(\partial_t + \partial_x) \Lambda = 0 \quad \text{su} \quad \partial\mathcal{M}. \quad (2.84)$$

Utilizzando la chiralità di ϕ e Λ possiamo verificare che la trasformazione di gauge del termine cinetico di S_b è nulla mentre quella del termine d'accoppiamento al campo è

$$\begin{aligned} \delta S_b &= \delta \left[\frac{1}{2\pi} \int dx dt \phi (\partial_t A_x - \partial_x A_t) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi p} \int dt dx \Lambda (\partial_t A_x - \partial_x A_t). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Questo termine cancella la variazione di S_{CS} (2.80) e quindi l'invarianza di gauge della teoria complessiva (2.83) è verificata.

Si osservi che la trasformazione del campo ϕ è la stessa del parametro di gauge $\Lambda \rightarrow \Lambda + \Lambda'$ per successive trasformazioni di gauge. In questo senso si può considerare il bosone chirale come un grado di libertà di gauge che diventa fisico al bordo. Si noti inoltre che la forma del termine cinetico in S_b non è determinata da questo argomento, in quanto la cancellazione (2.83) si otterrebbe anche con hamiltoniana di bordo nulla (cioè $v = 0$). Infatti la teoria di Chern-Simons descrive solo la corrente Hall e le fasi topologiche, mentre la teoria conforme al bordo contiene una dinamica introdotta da ulteriori richieste fisiche.

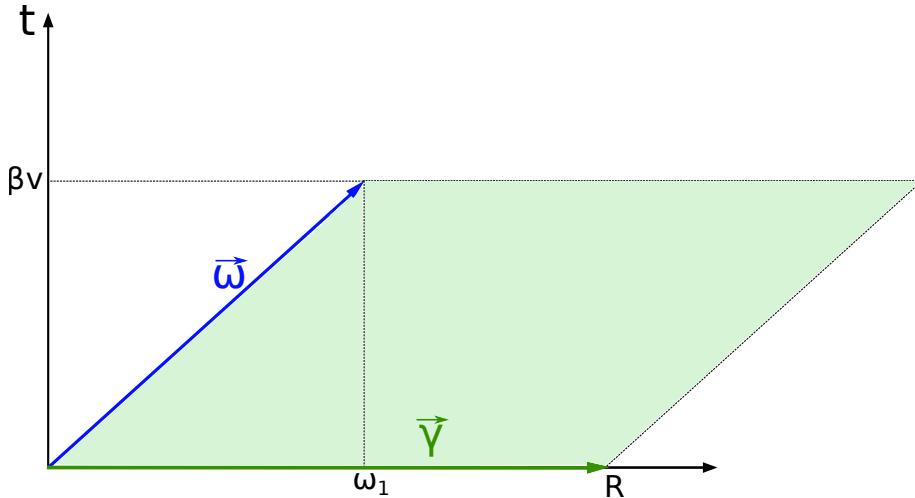


Figura 2.3: Rappresentazione dei vettori base ω e γ che generano il toro (1+1) dimensionale di entrambi i bordi dell'anello Hall.

2.4 Funzioni di Partizione dell'Effetto Hall

Concludiamo questo capitolo con il calcolo delle funzioni di partizione delle eccitazioni di bordo degli stati di Laughlin e la discussione dell'invarianza modulare.

La geometria su cui calcoleremo la funzione di partizione è quella dell'anello. In questo caso ci sono due bordi e quindi sono presenti sia stati chirali (R) che stati antichirali (L). Il calcolo delle funzioni di partizione è discusso in [33] [34] [35]: in questa tesi seguiremo una procedura leggermente diversa che sarà utile al capitolo 5 nello studio degli stati di bordo degli isolanti topologici tridimensionali.

Consideriamo la geometria dell'anello spaziale con il tempo euclideo compattificato con periodo $\beta = 1/T$, l'inverso della temperatura. La topologia di questa varietà spazio-temporale è $\mathcal{M} = S^1 \times S^1 \times I$ dove I è l'intervallo relativo alla coordinata radiale dell'anello. La funzione di partizione è definita nel bordo $\partial\mathcal{M}$ di tale varietà e corrisponde a due copie del toro spazio-temporale mostrato in figura 2.3 in cui i vettori $\omega = (\beta v, \omega_1)$ e $\gamma = (0, R)$ ne definiscono il reticolo di base. Per prima cosa definiamo le variabili complesse τ e ξ con le relazioni:

$$2\pi i\tau = -\beta \frac{v}{R} + i \frac{\omega_1}{R}, \quad 2\pi i\xi = -\beta(V_0 + i\mu), \quad (2.86)$$

dove V_0 è la differenza di potenziale tra i due bordi mentre μ è il potenziale chimico.

Con queste definizioni la funzione di partizione è data dalla traccia:

$$Z = \mathcal{K} \text{Tr} \left[e^{-\beta(H_R + H_L) + i\omega_1(P_R + P_L) + \xi Q_L + \bar{\xi} Q_R} \right]. \quad (2.87)$$

In questa equazione H_R, H_L e P_R, P_L sono le hamiltoniane e gli impulsi dei bosoni chirali e antichirali, rispettivamente; mentre gli operatori Q_R, Q_L corrispondono alle rispettive cariche. \mathcal{K} è un fattore di normalizzazione descritto in seguito.

Concentriamoci prima sulla parte chirale. Mediante il normal-ordering $\alpha_n |\Omega\rangle = 0$ per $n > 0$, l'hamiltoniana (2.56) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} H_R =: H_R : + E_0 &= \frac{v_R}{R_R} \left(\frac{k}{2} \alpha_0^2 + k \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_n \right) + \frac{v_R}{2R_R} \sum_{n=1}^{+\infty} n \\ &= \frac{v_R}{R_R} \left(\frac{k}{2} \alpha_0^2 + k \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_n \right) - \frac{1}{24} \frac{v_R}{R_R} \end{aligned} \quad (2.88)$$

dove l'energia di punto zero è stata regolarizzata mediante la funzione zeta di Riemann: $\zeta(-1) = -1/12$. L'operatore impulso si ricava dalla componente del tensore energia-impulso T^{01} , che dopo la regolarizzazione assume la forma:

$$P_R = \frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi R_R} dx : (\partial_x \phi)^2 : + P_0 = \frac{1}{R_R} \left(\frac{k}{2} \alpha_0^2 + k \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_n \right) - \frac{1}{24} \frac{1}{R_R}. \quad (2.89)$$

La parte antichirale è del tutto analoga; in particolare, assumendo per semplicità $v_R/R_R = v_L/R_L$ e $\omega_{1,R}/R_R = \omega_{1,L}/R_L$, risulta $H_L = H_R$ e $\omega_{1,L} P_L = -\omega_{1,R} P_R$.

A questo punto la traccia può essere facilmente calcolata e, con le definizioni (2.86), si ottiene

$$Z(\alpha_{0,R}, \alpha_{0,L}) = \mathcal{K} \frac{1}{\eta(q)} q^{\frac{k}{2} \alpha_{0,R}^2} z^{\alpha_{0,R}} \times \frac{1}{\eta(\bar{q})} \bar{q}^{\frac{k}{2} \alpha_{0,L}^2} \bar{z}^{\alpha_{0,L}}. \quad (2.90)$$

In quest'ultima equazione abbiamo definito $q = e^{2\pi i \tau}$ e $z = e^{2\pi i \xi}$, mentre $\eta(q)$ è la funzione di Dedekind [30],

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n). \quad (2.91)$$

Per ottenere la funzione di partizione totale è necessario sommare su tutti i valori di $\alpha_{0,R}$ e $\alpha_{0,L}$. Poiché in 2.2.1 abbiamo visto che per gli stati di Laughlin α_0 è quantizzato in unità di $1/p$ con $\nu = 1/p$, risulta comodo porre $\alpha_{0R} = \lambda/p + n$ e $\alpha_{0L} = \bar{\lambda}/p + \bar{n}$ dove $n, \bar{n} \in \mathbb{Z}$ e $\lambda, \bar{\lambda} = 0, \dots, p-1$. Quindi la funzione di partizione assume la forma:

$$Z(\tau, \xi) = \frac{1}{\eta(q)\eta(\bar{q})} \sum_{\lambda, \bar{\lambda}} \mathcal{N}_{\lambda, \bar{\lambda}} K_\lambda \bar{K}_{\bar{\lambda}}, \quad (2.92)$$

dove i coefficienti interi $\mathcal{N}_{\lambda, \bar{\lambda}}$ rappresentano le molteplicità delle eccitazioni a priori sconosciute, mentre K_λ è dato da

$$K_\lambda = e^{-\frac{\pi}{m} \frac{(\text{Im}\xi)^2}{\text{Im}\tau}} \frac{1}{\eta(q)} \sum_n \exp \left\{ 2\pi i \left[\tau \frac{(mn + \lambda)^2}{2m} + \xi \left(\frac{\lambda}{m} + n \right) \right] \right\}. \quad (2.93)$$

Il prefattore non analitico è la normalizzazione $\sqrt{\mathcal{K}}$ che sarà spiegata successivamente.

2.4.1 Condizioni di invarianza modulare

La funzione di partizione nel toro spazio-temporale deve soddisfare l'invarianza sotto trasformazioni modulari, corrispondenti a riparametrizzazioni lineari dei periodi ω, γ a coefficienti interi. Questa simmetria assicura che la teoria non dipenda dalla scelta delle coordinate usate per descrivere il toro. Il gruppo delle trasformazioni modulari $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ è generato dagli elementi S e T : S scambia i periodi, $\omega \leftrightarrow \gamma$, cioè $\tau \rightarrow -1/\tau$, ovvero il tempo con lo spazio; la trasformazione T si realizza con $\omega \rightarrow \omega + \gamma$ [30].

La funzione di partizione descrive tutti i gradi di libertà che vivono sul bordo dell'anello, che sono eccitazioni cariche (anioni) e neutre. Queste devono soddisfare altre condizioni U e V affinché le eccitazioni globali, accoppiate tra i due bordi, abbiano proprietà fermioniche come adesso descriveremo. La funzione di partizione deve quindi soddisfare a quattro simmetrie modulari: S , T^2 , U e V .

- S : Scambia spazio tempo e fisicamente corrisponde alla richiesta di completezza dello spettro della teoria. L'invarianza sotto S è data da

$$S : Z\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{\xi}{\tau}\right) = Z(\tau, \xi). \quad (2.94)$$

- T^2 : Realizza il fatto che le eccitazioni anioniche debbano combinarsi tra loro in modo da formare stati globali fermionici con spin intero o semintero, $2(L_0^R - L_0^L) \in \mathbb{Z}$. Infatti abbiamo

$$T^2 : Z(\tau + 2, \xi) = \text{Tr} \left[\dots e^{2\pi i 2(L_0^R - L_0^L)} \right] = Z(\tau, \xi). \quad (2.95)$$

Si noti che l'invarianza sotto il generatore T delle trasformazioni modulari richiederebbe eccitazioni con spin intero, una condizione troppo forte per sistemi elettronici.

- U : Impone che la carica globale delle eccitazioni sia intera, ovvero $Q_L + Q_R \in \mathbb{Z}$:

$$U : Z(\tau, \xi + 1) = \text{Tr} \left[\dots e^{2\pi i (Q_L + Q_R)} \right] = Z(\tau, \xi). \quad (2.96)$$

Questo implica che le eccitazioni frazionarie in un bordo debbano associarsi con i complementari del bordo opposto. Aggiungendo per esempio un elettrone in un sistema con $\nu = 1/3$, questo può dividersi in coppie di eccitazioni con cariche $(Q_L, Q_R) = (0, 1); (1/3, 2/3); (2/3, 1/3); (1, 0)$.

V : Nell'argomento di Laughlin, il potenziale ai bordi è variato aggiungendo un flusso magnetico al centro dell'anello. Questo flusso provoca una traslazione dei livelli di energia detta *flusso spettrale*. Quando il flusso magnetico raggiunge il valore di un quanto di flusso Φ_0 , questa rappresenta una trasformazione di gauge e quindi lo spettro della teoria deve tornare in sé stesso. L'aggiunta di un quanto di flusso corrisponde alla trasformazione $V_0 \rightarrow V_0 + 1/R$, ovvero $\xi \rightarrow \xi + \tau$. Si richiede quindi l'invarianza:

$$V : Z(\tau, \xi + \tau) = Z(\tau, \xi). \quad (2.97)$$

Vediamo come queste simmetrie si realizzano nella funzione di partizione (2.92). Innanzitutto la trasformazione U implica che $Q_R = \lambda/p + \mathbb{Z}$ e $Q_L = -\mu/p + \mathbb{Z}$ si combinano con $\mu = \lambda \bmod p$. Inoltre si dimostra che i caratteri K_λ trasformano sotto T^2, S, U, V nel seguente modo [34]:

$$T^2 : \quad K : \lambda(\tau + 2, \xi) = \exp\left(2\pi i \left(\frac{\lambda^2}{p} - \frac{1}{12}\right)\right) K_\lambda(\tau, \xi), \quad (2.98)$$

$$S : \quad K_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{\xi}{\tau}\right) = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{p} \operatorname{Re}\left(\frac{\xi^2}{\tau}\right)\right)}{\sqrt{p}} \sum_{\lambda'=0}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{\lambda\lambda'}{p}\right) K_{\lambda'}(\tau, \xi) \quad (2.99)$$

$$U : \quad K_\lambda(\tau, \xi + 1) = \exp\left(2\pi i \frac{\lambda}{p}\right) K_\lambda(\tau, \xi), \quad (2.100)$$

$$V : \quad K_\lambda(\tau, \xi + \tau) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{p} \left(\operatorname{Re}\frac{\tau}{2} + \operatorname{Re}\xi\right)\right) K_{\lambda+1}(\tau, \xi). \quad (2.101)$$

Si può verificare che la funzione di partizione (2.92) con $\lambda = -\mu$ e $\mathcal{N}_{\lambda, \bar{\lambda}} = \delta_{\lambda, \bar{\lambda}}^{(p)}$ è invariante sotto il sottogruppo modulare generato da S, T^2, U, V . In definitiva la funzione di partizione sull'anello per gli stati di Laughlin è data da

$$Z_{\text{anello}} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_\lambda \bar{K}_\lambda^c, \quad (2.102)$$

dove con \bar{K}^c si indica la coniugazione complessa e di carica $Q \rightarrow -Q$.

Per concludere discutiamo il prefattore non analitico in (2.93). Questo corrisponde ad aggiungere un termine costante nell'hamiltoniana $H_R + H_L$; lo spettro diventa:

$$E_{n_R, n_L} = \frac{1}{R} \frac{1}{2p} \left[(n_R + RV_0)^2 + (n_L - RV_0)^2 \right], \quad (2.103)$$

il cui minimo è indipendente da V_0 . Questa modifica è necessaria affinché la funzione di partizione sia invariante sotto il flusso spettrale generato dalla trasformazione V e corrisponde all'aggiunta di un'energia capacitiva pari a $E_c = RV_0^2/2p$ [36].

Nel linguaggio della CFT, le componenti chirali e antichirali corrispondono a due rappresentazioni dell'algebra affine, una olomorfa e l'altra antiolomorfa. Per i plateau di Laughlin lo spettro è dato dalla (2.69) e l'autovalore h_n di L_0 corrisponde allo spin frazionario pari alla metà della statistica frazionaria (2.70). Ogni coppia di valori di (Q, L_0) identifica una rappresentazione di massimo peso dell'algebra affine $U(1)$ contenente una torre di eccitazioni neutre aggiunte alla carica Q , le cui energie sono $E_\alpha \propto L_0 + k$ con $k \in \mathbb{N}$. Le quantità K_λ sono i caratteri delle rappresentazioni di Virasoro che, come mostrato dalle (2.94), (2.95), (2.96) e (2.97), danno una rappresentazione unitaria e finito-dimensionale del gruppo modulare. Notiamo infine che la funzione di partizione (2.102) per $\xi = 0$ non coincide con quella più nota del campo bosonico reale compattificato [30],

$$Z_B = \frac{1}{|\eta|^2} \sum_{n,m} q^{\frac{1}{2} \left(\frac{n}{2R_c} + mR_c\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2} \left(\frac{n}{2R_c} - mR_c\right)^2}. \quad (2.104)$$

In particolare abbiamo l'uguaglianza solo nel caso in cui $R_c = 1/p$ che comporta p pari; ovvero la CFT dei plateau di Laughlin composta da un bosone chirale ed uno antichirale sui rispettivi bordi è diversa dalla usuale teoria bosonica reale. Il contenuto di campi è lo stesso ma le condizioni di compattificazione e quantizzazione sono diverse.

Capitolo 3

Isolanti Topologici Bidimensionali

Nei capitoli precedenti abbiamo descritto le principali caratteristiche degli stati Hall: il bulk massivo e le eccitazioni di bordo relativistiche descritte esattamente dalla teoria di campo invariante conforme. In presenza del campo magnetico che rompe le simmetrie di parità \mathcal{P} e inversione temporale \mathcal{T} , le eccitazioni di bordo sono chirali: la loro anomalia $U(1)$ corrisponde alla corrente Hall e permette di dimostrare l'esatta quantizzazione della conducibilità. Una caratteristica delle eccitazioni chirali è quella di rimanere imperturbate in presenza di impurezze ed altri effetti. In termini tecnici, non si può scrivere un termine di interazione reale nell'hamiltoniana con campi chirali; intuitivamente, un'eccitazione chirale non può urtare un'impurezza perché non può rimbalzare, ovvero non è possibile la propagazione con velocità opposta.

In questo capitolo e nel seguito della tesi considereremo stati topologici della materia con eccitazioni di bordo di entrambe le chiralità. In particolare, gli isolanti topologici sono realizzati senza campo magnetico e rispettano le simmetrie \mathcal{P} e \mathcal{T} . In questi sistemi, la stabilità delle eccitazioni di bordo, ovvero l'impossibilità di sviluppare una massa in presenza di impurezze ed altre interazioni, è più delicata. Vedremo che un'analisi accurata della simmetria \mathcal{T} permette di dimostrare la stabilità sotto alcune condizioni. In particolare, la stabilità sarà associata alla presenza di un'anomalia discreta \mathbb{Z}_2 che può essere vista come il residuo dell'anomalia chirale $U(1)$ degli stati Hall. In generale, gli stati topologici non chirali sono stabili in presenza di simmetrie discrete che includono \mathcal{T} , e sono detti *stati topologici della materia protetti da simmetria*.

In questo capitolo vedremo come sia possibile costruire gli isolanti topologici in 2 dimensioni dagli stati Hall descritti nei due precedenti capitoli. Dopo aver introdotto il modello più semplice, dovuto a Bernevig e Zhang, vedremo come un'estensione time-reversal invariante della teoria di campo effettiva di Chern-Simons sia in grado di descrivere in tutta generalità tali sistemi. Successivamente sarà presentato un argomento di stabilità degli stati di bordo che sarà ulteriormente chiarito dallo studio delle funzioni di partizione.

3.1 Simmetria d'Inversione Temporale e Teorema di Kramers

La simmetria di inversione temporale è definita da

$$\mathcal{T} : t \rightarrow -t, \quad \mathcal{T} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}. \quad (3.1)$$

La richiesta che le relazioni di commutazione tra x e p restino invariate implica che

$$\mathcal{T} i \mathcal{T} = -i, \quad (3.2)$$

e quindi l'operatore \mathcal{T} è antiunitario.

Vediamo come agisce tale simmetria sulla funzione d'onda di una particella massiva $\Psi_{\mathbf{p},s}$ con impulso \mathbf{p} , spin j e proiezione lungo un asse s ; considereremo anche la particella massless con elicità σ , $\Psi_{\mathbf{p},\sigma}$ ¹. Mediante le proprietà di simmetria sotto coniugazione complessa delle armoniche sferiche o degli spinori di Dirac si può mostrare che l'azione di \mathcal{T} nei due casi è [37]:

$$\mathcal{T} : \Psi_{\mathbf{p},s} \longrightarrow \xi(-1)^{j-s} \Psi_{-\mathbf{p},-s}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{T} : \Psi_{\mathbf{p},\sigma} \longrightarrow \xi e^{i\pi\sigma} \Psi_{-\mathbf{p},\sigma}, \quad (3.4)$$

dove ξ è un fattore di fase. Le conseguenze più interessanti sono date dall'azione del quadrato \mathcal{T}^2 :

$$\mathcal{T}^2 : \Psi_{\mathbf{p},s} \longrightarrow (-1)^{2j} \Psi_{\mathbf{p},s}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{T}^2 : \Psi_{\mathbf{p},\sigma} \longrightarrow (-1)^{2|\sigma|} \Psi_{\mathbf{p},\sigma}. \quad (3.6)$$

Se \mathcal{T}^2 agisce su uno stato Ψ di un sistema che contiene un numero dispari di fermioni si ha un cambio di segno:

$$\mathcal{T}^2 : \Psi \longrightarrow -\Psi. \quad (3.7)$$

Quest'ultima proprietà consente di dimostrare il *teorema di Kramers*: per un sistema invariante sotto time-reversal ogni autostato dell'hamiltoniana con spin semi-intero è doppiamente degenero.

In un sistema time-reversal invariante l'hamiltoniana H deve commutare con \mathcal{T} e quindi se $|\Psi\rangle$ è un autostato di H allora anche $|\Psi'\rangle = \mathcal{T}|\Psi\rangle$ è un autostato con la stessa energia di $|\Psi\rangle$. Per dimostrare la presenza di degenerazione basta quindi mostrare che i due stati sono indipendenti, ovvero che non valga

$$|\Psi'\rangle = \chi |\Psi\rangle, \quad (3.8)$$

dove χ è una fase. Se $|\Psi\rangle$ è uno stato fermionico, abbiamo

$$\mathcal{T}^2 |\Psi\rangle = -|\Psi\rangle. \quad (3.9)$$

D'altra parte utilizzando la relazione (3.8) e l'antiunitarietà, otteniamo

$$\mathcal{T}^2 |\Psi\rangle = \mathcal{T}|\Psi'\rangle = \mathcal{T}\chi |\Psi\rangle = \chi^* \mathcal{T}|\Psi\rangle = |\chi|^2 |\Psi\rangle = |\Psi\rangle, \quad (3.10)$$

¹In teorie in cui lo spazio-tempo è di dimensioni dispari non esiste il concetto di elicità, in questo caso si considera lo spin dell'analogia particella massiva.

che contraddice la (3.9). Quindi i due stati (doppietto di Kramers) sono indipendenti. Si può mostrare anche che gli stati sono ortogonali e che per ogni operatore O hermitiano time-reversal invariante valgono le relazioni:

$$\langle \Psi' | O | \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi | O | \Psi \rangle = \langle \Psi' | O | \Psi' \rangle. \quad (3.11)$$

Ne segue che la degenerazione non può essere rimossa da interazioni \mathcal{T} -invarianti.

Il teorema di Kramers può essere ulteriormente esteso in forma *locale* come segue [10]. A tale fine supponiamo di avere uno stato a molti corpi $|\Psi\rangle$ con un numero di elettroni dispari in due zone sufficientemente distanti tra loro in modo da poter trascurare le correlazioni; si noti che il numero totale di elettroni è pari e quindi il teorema di Kramers nella sua formulazione globale non può essere applicato. Un esempio di tale sistema è dato dal potenziale a doppia buca che vincola due elettroni a stare nell'intorno dei punti $x = a$ e $x = b$ molto distanti tra di loro. L'idea intuitiva è quella di considerare le due regioni come due insiemi separati ai quali si possa applicare il teorema di Kramers in modo indipendente.

Definiamo quindi un *operatore locale* come un operatore che può essere scritto come somma di termini, ognuno dei quali è un prodotto di un numero pari di operatori di creazione e di distruzione elettronici che agiscono in una regione limitata dello spazio. Inoltre diciamo che lo stato $|\Psi\rangle$ di un numero pari di elettroni ha correlazioni a corto raggio se dati gli operatori locali O_a e O_b definiti nelle regioni spaziali rispettivamente a e b , vale:

$$\langle \Psi | O_a O_b | \Psi \rangle = \langle \Psi | O_a | \Psi \rangle \langle \Psi | O_b | \Psi \rangle. \quad (3.12)$$

Lo stato $|\Psi\rangle$ ha una degenerazione di Kramers locale nelle due regioni a e b se soddisfa le seguenti condizioni:

1. Esistono due operatori S_a e S_b tali che

$$\mathcal{T} |\Psi\rangle = S_a S_b |\Psi\rangle. \quad (3.13)$$

2. Lo stato $|\Psi\rangle$ soddisfa

$$\mathcal{T}_a^2 |\Psi\rangle = \mathcal{T}_b^2 |\Psi\rangle = - |\Psi\rangle, \quad (3.14)$$

dove $\mathcal{T}_a = \mathcal{T} S_b$ e $\mathcal{T}_b = \mathcal{T} S_a$. Questa condizione formalizza il fatto di avere un numero dispari di elettroni localizzati nelle due regioni a e b .

In [10], Levin e Stern hanno dimostrato che se uno stato $|\Psi\rangle$ soddisfa le condizioni (3.13) e (3.14), per lo stato trasformato $|\Psi'\rangle = \mathcal{T}_a |\Psi\rangle$ vale:

$$\langle \Psi' | O | \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi | O | \Psi \rangle = \langle \Psi' | O | \Psi' \rangle, \quad (3.15)$$

dove O è un qualunque operatore composto dal prodotto di un numero finito di operatori locali, hermitiani e \mathcal{T} -invarianti. Queste ultime relazioni implicano che se $|\Psi\rangle$ è lo stato fondamentale di un'hamiltoniana \mathcal{T} -invariante con un gap allora lo stato $|\Psi'\rangle = \mathcal{T}_a |\Psi\rangle$ è uno stato ortogonale a $|\Psi\rangle$ con stessa energia e quindi insieme formano un doppietto di Kramers limitato alla regione a . Inoltre tale degenerazione non può essere rimossa da nessuna perturbazione che rispetti la simmetria per inversione temporale dell'hamiltoniana. Ovviamente le stesse conclusioni valgono per la regione b e quindi in definitiva esiste un quadrupletto di stati degeneri.

3.2 Il Modello di Bernevig e Zhang del QSHE

Nel QHE la presenza di stati di bordo chirali e quindi non interagenti è dovuta al campo magnetico esterno che rompe esplicitamente l'invarianza \mathcal{T} . Discutiamo adesso sistemi nei quali una diversa hamiltoniana \mathcal{T} -invariante produca una fisica simile a quella del QHE. Nel modello di Bernevig e Zhang [7] l'interazione spin-orbita conduce a livelli energetici analoghi ai livelli di Landau.

Nel QHE l'interazione con il campo magnetico è descritta dal termine $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$, che nel gauge simmetrico $\mathbf{A} = -B(y, -x, 0)/2$, è proporzionale a $B(xp_y - yp_x)$; tale termine cambia di segno sotto \mathcal{T} . L'interazione di spin-orbita è proporzionale a $(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ dove \mathbf{E} è il campo elettrico e $\boldsymbol{\sigma}$ sono le matrici di Pauli che rappresentano gli operatori di spin. Se si suppone che il campo elettrico sia costante nel piano xy si può porre $\mathbf{E} \propto E(x, y, 0)$ ottenendo per l'accoppiamento di spin-orbita $E\sigma_z(xp_y - yp_x)$. In questo caso il cambio di segno sotto \mathcal{T} di $(xp_y - yp_x)$ è compensato dal cambio di segno di σ_z e quindi tale interazione è \mathcal{T} invariante. Questo modello equivale a un sistema di particelle che interagiscono con un campo magnetico effettivo il cui segno dipende dal valore della proiezione dello spin s_z .

In semiconduttori come il GaAs i *gradienti di sforzo* possono produrre l'interazione di spin-orbita [7]. L'hamiltoniana del sistema è:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} \frac{C_3}{\hbar} g(yp_x - xp_y)\sigma_z + D(x^2 + y^2), \quad (3.16)$$

dove C_3/\hbar , g e D sono dei parametri. Trasformiamo le variabili nel seguente modo

$$x \longrightarrow (2mD)^{-1/4}x, \quad y \longrightarrow (2mD)^{-1/4}y, \quad R = \frac{C_3}{2\hbar} \sqrt{2mg/D}. \quad (3.17)$$

Il punto interessante nello spazio dei paramenti (D, g) corrisponde a $R = 2$, dove $D = 2mgC_3^2/16\hbar^2$. In questo caso l'hamiltoniana (3.16) diventa:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}\sigma_z)^2, \quad \mathbf{A} = \frac{mC_3g}{2\hbar e}(y, -x, 0). \quad (3.18)$$

Questa espressione è equivalente a quella di una carica in un campo magnetico uniforme il cui segno dipende dall'autovalore di σ_z .

Poiché $[H, \sigma_z] = 0$, è possibile diagonalizzare sia l'hamiltoniana che l'operatore di spin lungo z . Come nel caso del QHE passiamo alle variabili complesse $z = x + iy$ e introduciamo gli operatori (d, d^\dagger) in (1.12) e (c, c^\dagger) in (1.13) con $l = 1$. L'hamiltoniana si riscrive come

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad H_\pm = 2\sqrt{\frac{D}{2m}} \left[\left(1 \pm \frac{R}{2} \right) dd^\dagger + \left(1 \mp \frac{R}{2} \right) cc^\dagger + 1 \right]. \quad (3.19)$$

Gli autostati e gli autovalori dell'hamiltoniana sono dati da:

$$|m, n\rangle = (d^\dagger)^m (c^\dagger)^n |0, 0\rangle, \quad E_{\pm}^{m,n} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{2m}} \left[\left(1 \pm \frac{R}{2} \right) m + \left(1 \mp \frac{R}{2} \right) n + 1 \right]. \quad (3.20)$$

Nel punto $R = 2$ l'hamiltoniana ristretta al primo livello di Landau e le autofunzioni per gli elettroni spin-up sono

$$H_+ = \frac{C_3}{2\hbar}g(2dd^\dagger + 1), \quad \phi_+^n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{\pi n!}}e^{-\frac{|z|^2}{2}}. \quad (3.21)$$

In questo caso gli operatori (d, d^\dagger) creano i livelli di Landau mentre gli operatori (c, c^\dagger) gli stati degeneri del momento angolare $M_z = cc^\dagger - dd^\dagger$. Opposta è la situazione per gli elettroni con spin-down, per i quali l'hamiltoniana e le autofunzioni del primo livello di Landau sono

$$H_- = \frac{C_3}{2\hbar}g(2cc^\dagger + 1), \quad \phi_-^m(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{\pi m!}}e^{-\frac{|\bar{z}|^2}{2}}, \quad (3.22)$$

corrispondenti allo scambio di ruolo degli operatori c e d . Il momento angolare delle due autofunzioni è $M_z\phi_\pm^n = \pm n\phi_\pm^n$; la funzione d'onda spin-up, essendo olomorfa, genera sul bordo un fermione di Weyl chirale con conducibilità Hall quantizzata in unità di e^2/h , mentre la funzione di spin-down, antiolomorfa, ne genera uno antichirale con conducibilità Hall opposta.

È chiaro che se si trascurano le interazioni tra elettroni con spin opposto, il sistema risulta il prodotto diretto di due sistemi Hall indipendenti che hanno conducibilità opposte:

$$\sigma_H^+ = \nu \frac{e^2}{h}, \quad \sigma_H^- = -\nu \frac{e^2}{h}. \quad (3.23)$$

Questa è una conseguenza diretta del fatto che il sistema complessivo è invariante sotto inversione temporale; infatti in questo caso la conducibilità Hall totale deve essere nulla e ciò è garantito dalla presenza di un egual numero di fermioni di Weyl chirali e antichirali sul bordo.

Tuttavia la conducibilità di spin, definita dalla differenza delle conducibilità di carica, è finita e quantizzata in unità di $e/2\pi$,

$$\sigma_s \equiv \frac{\hbar}{2e} (\sigma_H^+ - \sigma_H^-) = \nu \frac{e}{2\pi}. \quad (3.24)$$

In conclusione, il sistema è equivalente a due copie del QHE ed è presente una corrente Hall di spin quantizzata: questo è il *Quantum Spin Hall Effect* (QSHE).

In un sistema più realistico, la simmetria $U(1)_s$ responsabile della corrente conservata di spin è esplicitamente rotta da interazioni di spin flip. Questo sistema è detto isolante topologico. Tuttavia come vedremo gli stati di bordo non cessano di esistere e la rottura della simmetria $U(1)_s$ non è totale, ma rimane una simmetria \mathbb{Z}_2 residua.

3.3 Caratterizzazione \mathbb{Z}_2 degli Isolanti Topologici

Nella sezione precedente abbiamo considerato un modello in cui è presente una corrente di spin $U(1)_s$. Discutiamo adesso le interazioni tra elettroni di spin opposto.

La stabilità degli stati di bordo viene meno se un'interazione crea un gap tra lo stato fondamentale e gli stati eccitati che equivale ad un termine di massa nel

linguaggio della teoria di campo effettiva. Supponiamo di avere solo una coppia di fermioni di bordo, spin-up e spin-down. Il più semplice termine di massa è dato da

$$H_{\text{massa}} = m \int \frac{dk}{2\pi} \left(\psi_{k+}^\dagger \psi_{k-} + h.c. \right), \quad (3.25)$$

dove $\psi_{k\pm}^\dagger$ e $\psi_{k\pm}$ sono gli operatori di creazione e distruzione di un elettrone sul bordo con impulso k e proiezione di spin \pm . L'operatore di inversione temporale \mathcal{T} agisce sugli operatori elettronici nel seguente modo:

$$\mathcal{T}\psi_{k+}\mathcal{T}^{-1} = \psi_{-k-}, \quad \mathcal{T}\psi_{k-}\mathcal{T}^{-1} = -\psi_{-k+}, \quad (3.26)$$

dove il segno $-$ nella seconda relazione è necessario per avere $\mathcal{T}^2 = -1$. Queste relazioni comportano che

$$\mathcal{T}H_{\text{massa}}\mathcal{T}^{-1} = -H_{\text{massa}}; \quad (3.27)$$

quindi tale termine rompe esplicitamente la simmetria di inversione temporale e non è ammmissibile. In questa tesi considereremo sistemi nei quali la simmetria \mathcal{T} non è né rotta esplicitamente né spontaneamente. In generale, l'assenza di questa simmetria, ad esempio in presenza di impurezze magnetiche, determina una fase isolante banale.

In un sistema di due coppie di stati di bordo $\psi_{k1,\pm}$ e $\psi_{k2,\pm}$, è possibile introdurre un termine di massa compatibile con la simmetria \mathcal{T} :

$$\tilde{H}_{\text{massa}} = \tilde{m} \int \frac{dk}{2\pi} \left(\psi_{k1+}^\dagger \psi_{k2-} - \psi_{k1-}^\dagger \psi_{k2+} + h.c. \right). \quad (3.28)$$

L'argomento può essere esteso a più coppie di stati di bordo: un numero pari di coppie non è stabile in quanto tutti gli stati possono essere resi massivi, mentre se il numero di coppie è dispari rimane almeno una coppia di stati massless. Questo semplice argomento valido per hamiltoniane quadratiche ci indica che un isolante topologico con simmetria di inversione temporale è caratterizzato da un indice \mathbb{Z}_2 .

Un altro semplice argomento di stabilità si basa sull'analisi del *backscattering* dovuto a impurezze non magnetiche. Un'impurezza può interagire con uno stato di bordo attraverso l'interazione di spin-orbita e causarne una diffusione all'indietro con spin rovesciato; un elettrone spin-up che si muove in avanti può compiere un giro intorno all'impurità in senso orario o antiorario con stessa probabilità. Nel primo caso lo spin ruota di $\theta = \pi$, mentre nell'altro $\theta = -\pi$, quindi in totale si ha una differenza di $\Delta\theta = 2\pi$. Poiché la funzione d'onda di una particella di spin 1/2 cambia di segno per una rotazione di 2π i due cammini riflessi interferiscono distruttivamente e pertanto non vi è backscattering. Se invece l'impurezza è magnetica, ovvero il time-reversal è rotto, le probabilità dei due sensi di rotazione non sono uguali e pertanto non vi è interferenza distruttiva. Questa pittura è valida solo per una singola coppia di stati di bordo; se infatti sono presenti due stati propaganti in avanti con spin-up (e quindi due stati spin down propaganti in direzione opposta), un elettrone può essere diffuso da un canale in avanti a uno indietro.

In letteratura è stato dimostrato che l'indice \mathbb{Z}_2 si estende a sistemi di eccitazioni di bordo \mathcal{T} -invarianti in presenza di qualunque tipo d'interazione compatibile con questa simmetria [8] [38] [39] [40] [41]. Vedremo in seguito un sistema di elettroni interagenti basato sul modello dello spin Hall frazionario.

3.4 Azione Effettiva di Bulk degli Isolanti Topologici Frazionari

Il modello di Bernevig e Zhang descrive un QSHE in cui gli elettroni non interagiscono tra di loro: la sua hamiltoniana (3.18) è del tutto analoga all'hamiltoniana (1.5) del IQHE. D'altra parte abbiamo visto nel secondo capitolo che la teoria di Chern-Simons è in grado di descrivere il caso interagente del FQHE. Discuteremo in questa sezione un'estensione della teoria di Chern-Simons che descrive l'effetto Hall di spin frazionario e quindi gli isolanti topologici frazionari.

Ricordiamo dal secondo capitolo l'azione di Chern-Simons

$$S_{\text{bulk}} = \int d^2x dt \left(-\frac{p}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho \right), \quad (3.29)$$

dove $\nu = 1/p$ è il filling fraction. L'operatore di time-reversal \mathcal{T} agisce sul campo a_μ come

$$\mathcal{T} : a_0(t, \mathbf{x}) \longrightarrow a_0(-t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{T} : a_i(t, \mathbf{x}) \longrightarrow -a_i(-t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad (3.30)$$

e in modo analogo agisce sul campo esterno A_μ

$$\mathcal{T} : A_0(t, \mathbf{x}) \longrightarrow A_0(-t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{T} : A_i(t, \mathbf{x}) \longrightarrow -A_i(-t, \mathbf{x}). \quad (3.31)$$

Da queste trasformazioni si deduce che l'azione di bulk non è invariante sotto inversione temporale, $S_{\text{bulk}} \rightarrow -S_{\text{bulk}}$.

È possibile generalizzare la teoria effettiva per recuperare l'invarianza sotto time-reversal. Consideriamo due campi di Chern-Simons, $a_\mu^{(1)}$ e $a_\mu^{(2)}$ e scriviamo l'azione seguente

$$S = \int d^2x dt \left[-\frac{p}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} (a_\mu^{(1)} \partial_\nu a_\rho^{(1)} - a_\mu^{(2)} \partial_\nu a_\rho^{(2)}) + \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} (A_\mu \partial_\nu a_\rho^{(1)} + A_\mu \partial_\nu a_\rho^{(2)}) \right]. \quad (3.32)$$

Questa azione è time-reversal invariante se si suppongono le seguenti trasformazioni

$$\mathcal{T} : a_0^{(1),(2)}(t, \mathbf{x}) \longrightarrow -a_0^{(2),(1)}(-t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{T} : a_i^{(1),(2)}(t, \mathbf{x}) \longrightarrow a_i^{(2),(1)}(-t, \mathbf{x}). \quad (3.33)$$

Definendo le combinazioni simmetriche e antisimmetriche $a^\pm \equiv (a_\mu^{(1)} \pm a_\mu^{(2)})/2$, l'azione si riscrive come:

$$S = \int d^2x dt \left[-\frac{p}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} (a_\mu^+ \partial_\nu a_\rho^- + a_\mu^- \partial_\nu a_\rho^+) + \frac{e}{\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho^+ \right], \quad (3.34)$$

le cui equazioni del moto sono

$$J^+ \equiv \frac{e}{\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho^+ = 0, \quad (3.35)$$

$$J^- \equiv \frac{e}{\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho^- = 2e \times \frac{e}{2\pi p} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho. \quad (3.36)$$

Da queste si legge che la conduttività Hall σ_H è nulla mentre la conduttività di spin è

$$\sigma_s = \nu \frac{e}{2\pi}, \quad \nu = 1/p. \quad (3.37)$$

Abbiamo quindi ottenuto una teoria effettiva di bulk, detta *doppio Chern-Simons*, che riproduce le proprietà del modello microscopico di Bernevig e Zhang estendendolo al caso frazionario.

La teoria di bordo può essere ottenuta in modo del tutto analogo a quello fatto nel capitolo 2. Per il campo (1) si ottiene

$$S_{edge}^{(1)} = \int_{\partial\Omega} d^2x \left[-\frac{p}{4\pi} (\partial_0 + v\partial_1) \phi^{(1)} \partial_1 \phi^{(1)} + \frac{e}{2\pi} (A_0 \partial_1 \phi^{(1)} - A_1 \partial_0 \phi^{(1)}) \right], \quad (3.38)$$

con condizione di gauge

$$(\partial_t + v\partial_x) \phi^{(1)} = 0. \quad (3.39)$$

Osserviamo che affinché la teoria bulk e bordo sia time-reversal invariante è necessario che il bosone $\phi^{(2)}$ sia antichirale

$$S_{edge}^{(2)} = \int_{\partial\Omega} d^2x \left[+\frac{p}{4\pi} (\partial_0 - v\partial_1) \phi^{(2)} \partial_1 \phi^{(2)} + \frac{e}{2\pi} (A_0 \partial_1 \phi^{(2)} - A_1 \partial_0 \phi^{(2)}) \right], \quad (3.40)$$

con scelta di gauge

$$(\partial_t - v\partial_x) \phi^{(2)} = 0. \quad (3.41)$$

Ritroviamo quindi la presenza di due stati di bordo con chiralità opposte come conseguenza della richiesta di invarianza sotto \mathcal{T} . Dal comportamento sotto \mathcal{T} dei campi $a^{(1),(2)}$ (equazione (3.33)) discende

$$\mathcal{T} \partial_1 \phi^{(1),(2)} \mathcal{T}^{-1} = \partial_1 \phi^{(2),(1)}, \quad (3.42)$$

da cui, integrando, si trova la trasformazione di $\phi^{(1),(2)}$ sotto \mathcal{T} :

$$\mathcal{T} \phi^{(1),(2)} \mathcal{T}^{-1} = \phi^{(2),(1)} + c_{1,2}. \quad (3.43)$$

Le costanti c_1 e c_2 devono essere determinate dalle proprietà di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione elettronici. A tal fine definiamo gli operatori di vertice

$$\Phi_\uparrow =: e^{iep\phi^{(1)}} : , \quad \Phi_\downarrow =: e^{-iep\phi^{(2)}} : . \quad (3.44)$$

Dalla richiesta

$$\mathcal{T}^2 \Phi_{\uparrow,\downarrow} \mathcal{T}^{-2} = -\Phi_{\uparrow,\downarrow}, \quad (3.45)$$

si ottiene la condizione

$$c_1 + c_2 = (2n+1) \frac{\pi}{p}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.46)$$

In questa sezione abbiamo visto come si possano descrivere l'effetto Hall frazionario di spin partendo dai fluidi di Laughlin. Il bulk è descritto da due campi di Chern-Simons con corrente Hall (di carica) opposta, quindi nulla in totale, e con corrente di spin σ_s conservata; inoltre le eccitazioni di bordo chirali e antichirali sono relazionate dall'operatore \mathcal{T} . Analogamente all'effetto Hall, si possono descrivere isolanti topologici più generali la cui teoria di bulk e di bordo è decritta da campi a più componenti [10].

Questi modelli di teorie di bordo conformi \mathcal{T} -invarianti dell'effetto Hall frazionario di spin descrivono anche gli isolanti topologici frazionari quando si aggiungono delle

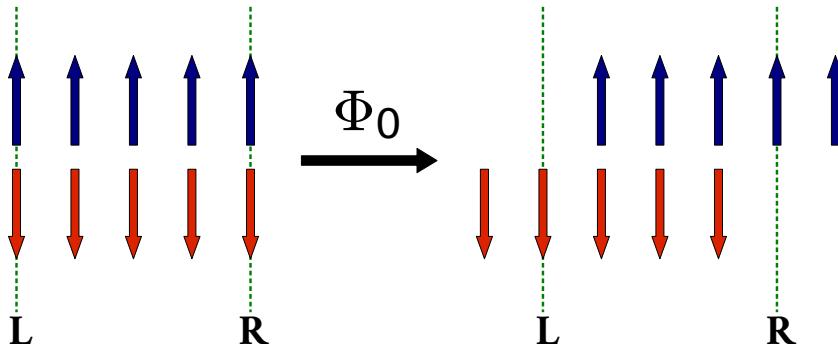


Figura 3.1: L'inserzione di un quanto di flusso Φ_0 trasla gli elettroni spin-up (in blu) verso il bordo esterno (R) mentre quelli spin-down (in rosso) verso il bordo interno (L) di un orbitale di Landau.

interazioni di spin flip. Gli isolanti topologici di elettroni interagenti non sono stati osservati sperimentalmente, ma esistono delle evidenze numeriche in modelli di hamiltoniane realistiche. Le teorie conformi possono descrivere la stabilità degli isolanti topologici frazionari mediante uno studio accurato delle interazioni di spin flip [10]. Inoltre forniscono la base per argomenti di simmetria che sono validi in presenza di interazioni.

3.5 Stabilità degli Stati di Bordo e Argomento del Flusso di Fu, Kane e Mele

In questa sezione diamo un criterio sufficiente per stabilire se gli stati di bordo siano stabili. Tale criterio si basa sul principio della *pompa di spin*, dove per pompa si intende una trasformazione adiabatica periodica del sistema. Discutiamo la possibilità di generare eccitazioni a spin diverso da zero al bordo del sistema e vedremo come il teorema di Kramers possa essere utilizzato per dimostrare la massa nulla delle eccitazioni di bordo e quindi la stabilità della fase topologica [8] [39] [41].

3.5.1 Argomento di Fu-Kane per elettroni non interagenti

Vediamo prima l'argomento nel caso di elettroni non interagenti [8] [39] [41], ovvero il QSHE costituito da due fluidi Hall con chiralità opposte e $\nu = 1$.

Consideriamo un'estensione dell'argomento di Laughlin esposto in 1.2.5: nella geometria ad anello inseriamo un tubo di flusso che varia adiabaticamente nel tempo. Poiché in questo caso lo spin s_z è conservato, l'argomento di Laughlin è valido per ognuna delle due proiezioni di spin prese separatamente. In perfetta analogia con quanto succede nel QHE, dopo l'inserzione di un quanto di flusso Φ_0 il sistema Hall relativo alla proiezione spin up trasla verso il bordo esterno (R) di una larghezza pari a un orbitale di Landau, mentre il sistema con spin down trasla verso il bordo interno (L) della stessa quantità (fig. 3.1). La conservazione della carica $U(1)_{\text{em}}$ garantisce l'esistenza di un flusso spettrale, mentre l'invarianza \mathcal{T} implica che la carica pompata su ciascun bordo è nulla

$$Q_R^\uparrow + Q_R^\downarrow = +1 - 1 = 0, \quad Q_L^\uparrow + Q_L^\downarrow = -1 + 1 = 0. \quad (3.47)$$

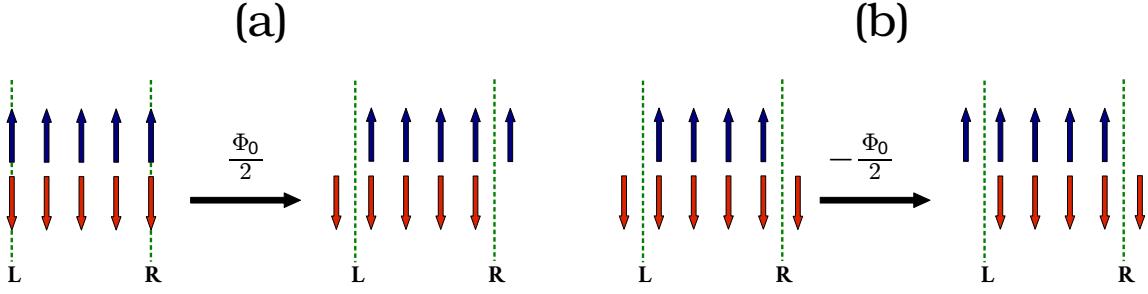


Figura 3.2: a): L'inserzione di mezzo flusso $\Phi_0/2$ produce uno stato fermionico neutro $|1/2, +\rangle$ su ogni bordo e con spin $s_z^R = 1/2$ e $s_z^L = -1/2$. b): Lo stato $|1/2, -\rangle$ è il partner di Kramers locale (bordo R) di $|1/2, +\rangle$ e mediante l'inserzione di un flusso $-\Phi_0/2$ si ottiene lo stato eccitato a flusso nullo $|ex\rangle$.

Sempre grazie alla conservazione dello spin, possiamo definire la differenza tra le conducibilità Hall:

$$\sigma_H^\uparrow - \sigma_H^\downarrow = 2 \frac{e^2}{h}, \quad (3.48)$$

dalla quale vediamo che lo spostamento di spin dal bordo interno al bordo esterno è dato, in unità di \hbar , da

$$\Delta s_z = \frac{1}{2} (Q_R^\uparrow - Q_R^\downarrow) = 1. \quad (3.49)$$

Adesso analizziamo meglio cosa succede durante l'inserzione di un flusso. In generale tale inserzione rompe l'invarianza sotto inversione temporale; questo è dovuto al fatto che

$$\mathcal{T} : \Phi \longrightarrow -\Phi. \quad (3.50)$$

Tuttavia ci sono dei valori di Φ che non rompono la simmetria. Ricordiamo che un quanto di flusso Φ_0 può essere eliminato da una trasformazione di gauge, e quindi l'hamiltoniana è periodica in Φ con periodo Φ_0 . Abbiamo le relazioni:

$$H[\Phi + \Phi_0] = H[\Phi], \quad (3.51)$$

$$\mathcal{T}H[\Phi]\mathcal{T}^{-1} = H[-\Phi]. \quad (3.52)$$

Queste implicano che il sistema è \mathcal{T} -invariante per valori del flusso pari a seminteri di $\Phi = n\Phi_0/2$, in particolare:

$$\mathcal{T}H[0]\mathcal{T}^{-1} = H[0], \quad \mathcal{T}H[\Phi_0/2]\mathcal{T}^{-1} = H[\Phi_0/2]. \quad (3.53)$$

Consideriamo adesso l'inserzione di mezzo flusso $\Phi_0/2$ (fig. 3.2 (a)). Dal fatto che $H[\Phi_0/2] \neq H[0]$, risulta che lo spettro dell'hamiltoniana dopo l'inserzione sarà cambiato e quindi lo stato fondamentale si sarà evoluto nello stato eccitato $|1/2, +\rangle$ che corrisponde ad una eccitazione al bordo esterno neutra con spin $s = 1/2$. Poiché l'hamiltoniana è invariante sotto inversione temporale è possibile applicare il teorema di Kramers nella sua formulazione locale al bordo esterno e concludere che tale stato deve appartenere a un doppietto di Kramers $|1/2, \pm\rangle$ dove lo stato $|1/2, -\rangle$ ha proiezione di spin opposto (fig. 3.2(b)). Adesso se si ritorna a flusso nullo, lo stato $|1/2, +\rangle$ torna nello stato fondamentale di partenza, mentre il suo partner $|1/2, -\rangle$ viene portato in uno stato eccitato $|ex\rangle$ di $H[0]$ (fig. 3.2(b)). Poiché il

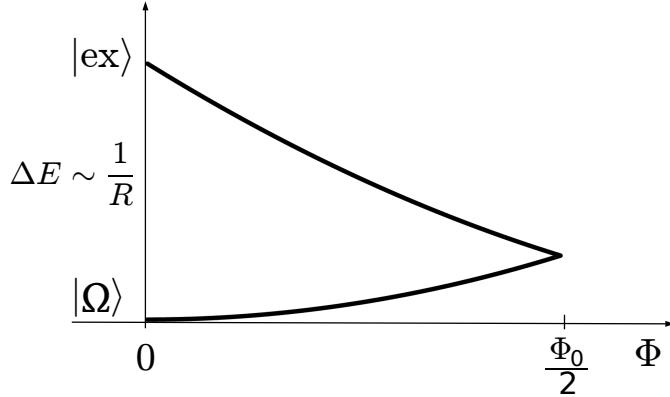


Figura 3.3: Flusso spettrale dello stato fondamentale $|\Omega\rangle$ e del primo stato eccitato $|ex\rangle$.

lavoro effettuato con l'inserzione di flusso è di ordine $\mathcal{O}(1/R)$, si annulla nel limite termodinamico $R \rightarrow +\infty$, dove R è il raggio esterno dell'anello, la deformazione dello spettro tra $H[0]$ e $H[\Phi_0/2]$ deve essere $\Delta E = \mathcal{O}(1/R)$. La degenerazione di Kramers a $\Phi_0/2$ implica che lo stato eccitato $|ex\rangle$ di $H[0]$ deve anch'esso avere un'energia $\mathcal{O}(1/R)$, escludendo quindi la possibilità di un gap nel limite termodinamico (fig. 3.3).

Pertanto abbiamo mostrato che l'esistenza di un'eccitazione di bordo a massa nulla in $H[0]$ è assicurata dalla creazione di un'eccitazione con $s = 1/2$ in $H[\Phi_0/2]$. Nel caso in cui si abbiano N coppie di fermioni al bordo, l'argomento di Fu-Kane si generalizza nel modo seguente: se N è dispari allora lo stato è fermionico e quindi per il teorema di Kramers deve esistere un'eccitazione di energia $\mathcal{O}(1/R)$ nello spettro di $H[0]$; se invece N è pari lo stato è bosonico, il teorema di Kramers non può essere applicato e a priori è possibile dare massa agli stati di bordo.

Prima di passare al caso di elettroni interagenti, vediamo che l'argomento della pompa di spin può essere applicato anche nel caso in cui lo spin s_z non sia un buon numero quantico, ovvero quando l'interazione di spin-orbita rompe la simmetria $U(1)_s$, rendendo possibile lo spin flip tra i due sistemi Hall. Nei lavori [8] [39] [41] è mostrato che l'argomento di Fu-Kane rimane valido anche in assenza di una corrente di spin. In questo caso le eccitazioni sono caratterizzate dal momento angolare totale J_z . L'argomento basato sul teorema di Kramers distingue il caso di spin intero o semintero. Questa differenza è insensibile a eventuali spin flip. Notiamo che la possibilità di avere una pompa di spin non banale è, in ultima analisi, data dalla seguente quantità [39]

$$\mathcal{I} = (-1)^{2J_z^R} = (-1)^{Q_R^\uparrow - Q_R^\downarrow}, \quad (3.54)$$

detta *parità di spin di bordo*. In particolare, se dopo un cambiamento del flusso da $\Phi = 0$ a $\Phi = \Phi_0/2$ c'è stata una variazione di \mathcal{I} allora si ha una pompa di spin non banale e quindi stati a massa nulla.

Infatti nel caso analizzato prima partendo dallo stato fondamentale a $\Phi = 0$ si ha che $\mathcal{I} = (-1)^{2J_z^R} = 1$; quando il flusso è $\Phi = \Phi_0/2$ allora $\mathcal{I} = -1$ se al bordo si è

accumulato un numero dispari di spin $1/2$. Quindi è possibile sfruttare il teorema di Kramers nella sua formulazione locale e dimostrare l'esistenza di stati eccitati a massa nulla a $\Phi = 0$ come spiegato in precedenza. Nel caso in cui a $\Phi = \Phi_0/2$ ci siano un numero pari di fermioni sul bordo \mathcal{I} non varia e, non essendo soddisfatte le ipotesi del teorema di Kramers, non possiamo dire nulla sull'esistenza di stati a massa nulla. Notiamo che l'indice parità di spin \mathcal{I} è una quantità conservata per sistemi con simmetria \mathcal{T} , anche in presenza di interazioni \mathcal{T} -invarianti.

Osserviamo inoltre che questo argomento del flusso è simile ma non identico a quello del QHE. L'argomento negli isolanti topologici si conclude una volta che il flusso raggiunge il punto time-reversal invariante $\Phi_0/2$ che non corrisponde a una trasformazione di gauge dell'hamiltoniana, mentre per il QHE occorre giungere al punto gauge-simmetrico Φ_0 .

In conclusione, abbiamo mostrato che esiste una quantità \mathbb{Z}_2 chiamata parità di spin \mathcal{I} in termini della quale è possibile stabilire se un isolante topologico ha stati di bordo protetti dalla simmetria \mathcal{T} , ovvero quando tale quantità varia dopo un'inserzione di flusso $\Phi_0/2$. Nei lavori [8] [39], analisi numeriche mostrano che modelli invarianti sotto inversione temporale con hamiltoniana che soddisfa le condizioni (3.51) (3.52) hanno uno spettro energetico in funzione del flusso inserito tale che la banda di valenza e di conduzione sono separate da un gap finito per $\Phi = 0$ mentre a $\Phi = \Phi_0/2$ si incontrano chiudendo il gap dando luogo, quindi, a stati massless con chiralità opposte che vivono sul bordo.

3.5.2 Argomento di Levin-Stern per elettroni interagenti

Nel caso in cui gli elettroni siano interagenti è presente una degenerazione di natura differente, detta *ordine topologico di Wen* [4], che è associata alla presenza di quasi-particelle con carica e statistica frazionaria. Tale degenerazione comporta una modifica nell'argomento del flusso nel caso in cui il filling fraction sia frazionario perché lo stato fondamentale non è unico. Prendiamo per esempio il caso in cui $\nu = 1/3$. In questo caso vi sono 3 settori distinti con ognuno un proprio stato fondamentale, $|\Omega_0\rangle, |\Omega_1\rangle, |\Omega_2\rangle$ che corrispondono alle cariche $Q_R = -Q_L = 0, 1/3, 2/3$. Mediante l'inserzione di flussi pari a Φ_0 e $2\Phi_0$ si passa dallo stato $|\Omega_0\rangle$ agli stati $|\Omega_1\rangle$ e $|\Omega_2\rangle$, rispettivamente. Questo può essere visto mediante l'utilizzo della funzione di partizione poiché i caratteri K_λ (2.93) con $\lambda = 0, 1, 2$ vengono trasformati nel seguente modo dalla trasformazione V :

$$K_0 \xrightarrow{V} K_1 \xrightarrow{V} K_2 \xrightarrow{V} K_0 .$$

Tale degenerazione è diversa da quella dovuta al teorema di Kramers che invece riguarda le eccitazioni elettroniche in ogni settore di carica fissata. Infatti in questo caso, l'inserzione di un quanto di flusso Φ_0 risulta in un trasferimento di un'eccitazione con carica $1/3$ e spin up dal bordo interno (L) a quello esterno (R) accompagnata dal trasferimento di un'eccitazione sempre con carica $1/3$ ma con spin down dal bordo esterno (R) a quello interno (L). Ne risulta che il flusso che dobbiamo inserire per poter ripetere l'argomento del flusso di Fu, Kane e Mele è pari a $p\Phi_0/2$ dove $p = 1/\nu$.

Per prima cosa notiamo che tale inserzione è legittima in quanto l'hamiltoniana a tale flusso è invariante sotto inversione temporale:

$$\mathcal{T} H [p\Phi_0/2] \mathcal{T}^{-1} = H [p\Phi_0/2]. \quad (3.55)$$

Quindi come nel caso non interagente, dobbiamo determinare se lo stato $|1/2, +\rangle$ ottenuto dall'inserzione del flusso $p\Phi_0/2$ forma un doppietto di Kramers locale con lo stato $|1/2, -\rangle$. Per raggiungere lo scopo basta mostrare che sono soddisfatte le condizioni (3.13) (3.14).

Concentriamoci quindi sul bordo esterno (R). Osserviamo per prima cosa che lo stato $|1/2, -\rangle$ viene creato dallo stato $|1/2, +\rangle$ dall'inserzione di un flusso $\Phi = -p\Phi_0$. Questa inserzione può essere realizzata adiabaticamente sull'anello mediante l'aggiunta di un potenziale vettore lentamente variabile nel tempo $A^\mu = (0, \Phi/R, 0)$ dove la funzione $\Phi(t)$ soddisfa $\Phi(-\infty) = 0$ e $\Phi(+\infty) = -2\pi p$ in unità di $\hbar = c = e = 1$. Dall'equazione della densità di carica del bosone chirale (2.64) definiamo la carica

$$Q^{(1),(2)} = -\frac{1}{2\pi} \int dx_1 \partial_1 \phi^{(1),(2)}. \quad (3.56)$$

Integrando le equazioni del moto si ottiene

$$Q^{(1)} \longrightarrow Q^{(1)} - 1, \quad (3.57)$$

$$Q^{(2)} \longrightarrow Q^{(2)} + 1. \quad (3.58)$$

Utilizzando le regole di commutazione del bosone chirale

$$[\phi^{(l)}(x), \partial_y \phi^{(m)}(y)] = (-1)^l \frac{2\pi i}{p} \delta_{lm} \delta(x - y), \quad l, m = 1, 2, \quad (3.59)$$

è facile mostrare che l'operatore

$$\Gamma_R(p) = \int \frac{dx}{\sqrt{R}} e^{ip\phi^{(1)}} e^{ip\phi^{(2)}}, \quad (3.60)$$

soddisfa:

$$[Q^{(1)}, \Gamma_R(p)] = -\Gamma_R(p), \quad (3.61)$$

$$[Q^{(2)}, \Gamma_R(p)] = +\Gamma_R(p). \quad (3.62)$$

Quindi, paragonando le ultime due equazioni con la (3.57) e la (3.58), si deduce che $\Gamma(p)$ implementa l'inserzione di flusso. Da questo segue che includendo anche l'altro bordo si ottiene che l'operatore trasforma uno stato nell'altro:

$$|1/2, -\rangle = \Gamma_L(-p) \Gamma_R(p) |1/2, +\rangle. \quad (3.63)$$

Dal fatto che i due operatori Γ_R e Γ_L agiscono sui due bordi tale equazione è equivalente alla (3.13).

Sotto l'operatore di inversione temporale \mathcal{T} l'operatore $\Gamma_R(p)$ trasforma come

$$\mathcal{T} \Gamma_R(p) \mathcal{T}^{-1} = \Gamma_R(-p) e^{-i\pi p(c_1+c_2)} = -\Gamma_R(-p), \quad (3.64)$$

dove nell'ultima equazione si è usato il fatto che $c_1 + c_2 = (2n + 1)\pi/p$. La dimostrazione si conclude osservando che vale

$$\mathcal{T}\Gamma_R(p)\mathcal{T}\Gamma_R(p)|1/2,+\rangle = -\Gamma_R(-p)\Gamma_R(p)|1/2,+\rangle = -|1/2,+\rangle, \quad (3.65)$$

che è un'espressione equivalente alla (3.14). Una condizione analoga vale per il bordo interno (L).

Abbiamo quindi mostrato che per gli isolanti topologici frazionari di Laughlin le due condizioni (3.13) e (3.14) sono soddisfatte e quindi lo stato $|1/2,+\rangle$ creato dall'inserzione di un flusso $\Phi = p\Phi_0/2$ è degenere e tale degenerazione, provenendo dal teorema di Kramers, non può essere rotta da nessuna perturbazione che rispetti la simmetria di inversione temporale. È quindi possibile definire una pompa di spin non banale e concludere che a flusso nullo lo spettro ammette almeno uno stato eccitato massless che appartiene allo stesso settore topologico dello stato fondamentale $|\Omega\rangle$.

Notiamo che la variazione dell'indice \mathcal{I} può essere scritta come

$$\mathcal{I} = (-1)^{\sigma_s/e^*}, \quad e^* = \nu e, \quad (3.66)$$

che è l'indice Levin-Stern [10]. Notiamo che la quantità \mathcal{I} si riduce alla parità di spin precedentemente discussa per $\nu = 1$. Adesso ci possiamo chiedere se sia possibile avere stati stabili anche quando \mathcal{I} è pari. La risposta è negativa perché si dimostra che in questo caso esiste sempre un termine reale da aggiungere all'hamiltoniana che rende tutti gli stati di bordo massivi [10].

Concludendo, un generico isolante time-reversal invariante in 2 dimensioni possiede stati di bordo robusti contro ogni perturbazione che rispetti l'inversione temporale *se e solo se* l'indice \mathcal{I} è dispari. In particolare in questa sezione abbiamo esteso la classificazione \mathbb{Z}_2 anche al caso di isolanti topologici interagenti di tipo Laughlin.

3.6 Funzione di Partizione degli Isolanti Topologici di Laughlin

Nella sezione 2.4 abbiamo discusso la funzione di partizione del QHE per gli stati di Laughlin e le sue proprietà di invarianza modulare. In questa sezione vedremo come sia possibile ricavare la funzione di partizione degli isolanti topologici in 2 dimensioni composti dagli stati di Hall chirali e antichirali di filling fraction $\nu = 1/p$ con p dispari [42]. Utilizzeremo quindi la funzione di partizione per riprodurre e chiarire l'argomento di stabilità di Fu, Kane e Mele.

Per prima cosa ricordiamo i risultati riguardanti il FQHE. Considerando una geometria ad anello, gli stati di bordo di un sistema Hall sono descritti dal bosone chirale (2.46) (bordo esterno R) e dal bosone antichirale (bordo interno L) che realizzano teorie invarianti conformi con $c = 1$. La funzione di partizione è la seguente:

$$Z_{anello}^{QHE} = \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_\lambda \bar{K}_\lambda^c. \quad (3.67)$$

I caratteri K_λ sono dati da

$$K_\lambda = e^{-\frac{\pi}{p} \frac{(\text{Im}\xi)^2}{\text{Im}\tau}} \frac{1}{\eta(q)} \sum_n \exp \left\{ 2\pi i \left[\tau \frac{(pn + \lambda)^2}{2p} + \xi \left(\frac{\lambda}{p} + n \right) \right] \right\}, \quad (3.68)$$

e corrispondono a stati con carica frazionaria $Q = \lambda/p + \mathbb{Z}$; \bar{K}^c indica il coniugato complesso e di carica $Q \rightarrow -Q$.

Nel QHE, vi è una conduttività Hall non nulla che permette uno scambio di cariche tra i due bordi del sistema, mentre negli isolanti topologici la simmetria $U(1)_s$ è genericamente rottata dalla presenza della spin-orbita e quindi i due bordi sono indipendenti.

Concentriamoci quindi su un bordo, per esempio quello esterno, e analizziamo le simmetrie del sistema. La teoria di bordo dell'isolante topologico equivale a quella di due fluidi Hall con chiralità opposta. La simmetria $U(1)_{em}$ impone la conservazione della carica localmente a ciascun bordo. Questa è implementata dalla trasformazione U definita in (2.96), che implica ad ogni bordo:

$$Q^\uparrow + Q^\downarrow \in \mathbb{Z}. \quad (3.69)$$

La simmetria \mathbb{Z}_2 , residuo della simmetria $U(1)_s$ di spin, è protetta dalla simmetria \mathcal{T} , ed implica stati elettronici con parità di spin ben definita

$$\mathcal{I} = (-1)^{Q^\uparrow - Q^\downarrow} = (-1)^{2J_z}. \quad (3.70)$$

Queste proprietà ci mostrano che possiamo associare i caratteri chirali e antichirali (2.93) alle eccitazioni di un solo bordo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} K_\lambda(\tau, \xi) &\longrightarrow \text{eccitazione di bordo chirale spin-up } \uparrow, \\ \bar{K}_\lambda^c(\bar{\tau}, \bar{\xi}) &\longrightarrow \text{eccitazione di bordo antichirale spin-down } \downarrow. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Da questa identificazione risulta che la funzione di partizione dell'isolante topologico del bordo esterno ha la stessa forma di quella del QHE di entrambi i bordi (2.102). In particolare tale funzione di partizione è invariante sotto le trasformazioni modulari T^2 e S definite in 2.4; mentre l'invarianza sotto V , che descrive l'inserzione di un quanto di flusso Φ_0 , segue dal fatto che la teoria di bordo dell'isolante topologico è invariante sotto time-reversal ed ha conducibilità Hall nulla.

Adesso riformuliamo l'argomento del flusso discusso in 3.5 utilizzando la funzione di partizione (3.67). A tal fine determiniamo la parità di spin \mathcal{I} del suo stato fondamentale. Ricordandoci che le condizioni al contorno del bosone chirale (e antichirale) (2.47) sono quelle del settore di Neveu-Schwarz, indicheremo sia la funzione di partizione che lo stato fondamentale con il pedice NS . Osserviamo inoltre che lo stato fondamentale si trova nel settore $\lambda = 0$ e quindi, sviluppando $K_0 \bar{K}_0^c$ nei primi valori di (n, \bar{n}) attorno al punto $(0, 0)$, si ottiene:

$$Z_{NS} \propto \frac{1}{|\eta(q)|^2} [1 + q^{p/2} z + q^{p/2} z^{-1} + \bar{q}^{p/2} \bar{z} + \bar{q}^{p/2} \bar{z}^{-1} + \dots], \quad (3.72)$$

dove $q = e^{i2\pi\tau}$ e $z = e^{i2\pi\xi}$. Il primo termine della precedente equazione corrisponde allo stato fondamentale (ottenuto per $n = \bar{n} = 0$) mentre gli altri descrivono stati

in cui sono stati aggiunti o tolti elettroni con spin-up o spin-down al bordo esterno. Poiché nello stato di vuoto non vi è eccesso o difetto di carica ($Q^\uparrow + Q^\downarrow = 0$) la sua parità di spin è positiva, ovvero

$$(-1)^{Q_R^\uparrow - Q_R^\downarrow} |\Omega\rangle_{NS} = |\Omega\rangle_{NS}. \quad (3.73)$$

L'argomento di stabilità della sezione precedente richiede l'inserzione di un flusso pari a $\Phi = p\Phi_0/2$ dove p rappresenta l'ordine topologico di Wen. Nel formalismo della funzione di partizione, questa inserzione è descritta dalla trasformazione $V^{p/2}$ come segue

$$V^{p/2} : K_\lambda^{NS}(\tau, \xi) \longrightarrow K_\lambda^{NS}\left(\tau, \xi + \tau \frac{p}{2}\right) \propto K_{\lambda + \frac{p}{2}}^{NS}(\tau, \xi). \quad (3.74)$$

Dall'equazione (2.36) si vede che l'inserzione di flusso cambia le condizioni al contorno delle funzioni d'onda; nel caso dei fluidi di Laughlin l'inserzione di $p\Phi_0$ deve mandare le autofunzioni in sé stesse, mentre l'inserzione di un flusso $p\Phi_0/2$ cambia le condizioni al contorno da antiperiodiche a periodiche. Pertanto la funzione di partizione trasformata dall'operatore $V^{p/2}$ è quella relativa al settore di Ramond:

$$Z^R = \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_\lambda^R \bar{K}_\lambda^{Rc}, \quad (3.75)$$

dove si è definito

$$\begin{aligned} K_\lambda^R(\tau, \xi) &\equiv K_{\lambda + \frac{p}{2}}^{NS} \\ &= e^{-\frac{\pi}{p} \frac{(\text{Im}\xi)^2}{\text{Im}\tau}} \frac{1}{\eta(q)} \sum_n \exp \left\{ 2\pi i \left[\tau \frac{(pn + \lambda + \frac{p}{2})^2}{2p} + \xi \left(\frac{\lambda}{p} + n + \frac{p}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

In particolare la trasformazione $V^{p/2}$ trasforma il carattere chirale del settore di Neveu-Schwarz in quello di Ramond e viceversa:

$$K_\lambda^{NS}(\tau, \xi) \xrightarrow{V^{\frac{p}{2}}} K_\lambda^R(\tau, \xi) \xrightarrow{V^{\frac{p}{2}}} K_{\lambda+p}^{NS}(\tau, \xi) = K_\lambda^{NS},$$

$$K_\lambda^R(\tau, \xi) \xrightarrow{V^{\frac{p}{2}}} K_\lambda^{NS}(\tau, \xi) \xrightarrow{V^{\frac{p}{2}}} K_{\lambda+p}^R(\tau, \xi) = K_\lambda^R.$$

Analogamente a quanto fatto per il settore di Neveu-Schwarz, gli stati più bassi dello spettro di Ramond si ottengono sviluppando intorno a $(n, \bar{n}) = (0, 0)$ il termine $\lambda = 0$ della funzione di partizione (3.75):

$$\begin{aligned} Z^R &\propto \frac{1}{|\eta(q)|^2} [q^{p/8} z^{1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{z}^{1/2} + q^{p/8} z^{1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{z}^{-1/2} \\ &\quad + q^{p/8} z^{-1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{z}^{1/2} + q^{p/8} z^{-1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{z}^{-1/2} + \dots]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

In questo modo troviamo lo stato fondamentale ($n = \bar{n} = 0$) $|\Omega_R\rangle$ del settore di Ramond che corrisponde all'evoluzione dello stato fondamentale $|\Omega_{NS}\rangle$

$$|\Omega\rangle_R \longleftrightarrow q^{p/8} z^{1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{z}^{1/2}. \quad (3.78)$$

La trasformazione $V^{p/2}$ ha l'effetto di polarizzare il bordo spostando le cariche spin-up verso l'esterno di $p/2$ orbitali di Landau mentre quelle spin-down verso l'interno. In questo modo la carica elettrica totale spostata è nulla

$$\Delta Q = Q^\uparrow + Q^\downarrow = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad (3.79)$$

mentre lo spin totale varia della quantità

$$2J_z = Q^\uparrow - Q^\downarrow = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad (3.80)$$

Di conseguenza la parità di spin dello stato fondamentale del settore di Ramond è dispari

$$(-1)^{Q^\uparrow - Q^\downarrow} |\Omega\rangle_R = -|\Omega\rangle_R, \quad (3.81)$$

e corrisponde a un'eccitazione fermionica.

Il teorema di Kramers ci assicura che lo stato di Ramond deve far parte di un doppietto degenero in energia. Dallo sviluppo (3.77) si può vedere che uno stato con la stessa energia e carica è dato da

$$|\Omega'\rangle_R \leftrightarrow q^{p/8} z^{-1/2} \bar{q}^{p/8} \bar{z}^{-1/2}, \quad (3.82)$$

che corrisponde alla coppia $n = \bar{n} = -1$. Questo viene ottenuto mediante il flusso spettrale generato da $V^{p/2}$ a partire dallo stato eccitato della funzione di partizione di Neveu-Schwarz (3.67) $|ex\rangle_{NS} \leftrightarrow q^{p/2} w^{-1} \bar{q}^{p/2} \bar{z}^{-1}$. Quindi, poiché le inserzioni di flusso $\Phi_0/2$ e $-\Phi_0/2$ sono equivalenti a meno di una trasformazione di gauge, risulta che lo stato $|\Omega'\rangle_R$ è il trasformato sotto \mathcal{T} come richiesto dal teorema di Kramers. In modo euristico si può notare che lo stato $|\Omega\rangle_R$ può essere ottenuto dallo stato $|\Omega'\rangle_R$ invertendo lo spin-up in uno spin-down al bordo esterno (R).

La relazione (3.81) può essere interpretata come un'*anomalia* \mathbb{Z}_2 poiché la parità di spin dello stato di vuoto cambia passando da $H[0]$ ad $H[\Phi_0/2]$ senza una rottura esplicita della simmetria temporale; tale anomalia è il residuo dell'anomalia di spin $U(1)_s$ che caratterizza il QSHE.

Ricapitolando, lo stato fondamentale a flusso nullo che abbiamo chiamato stato di Neveu-Schwarz ha parità di spin pari. Sotto l'inserzione di un flusso $p\Phi_0/2$, corrispondente ad un'hamiltoniana time-reversal invariante ma non equivalente, lo stato $|\Omega\rangle_{NS}$ viene portato nello stato fondamentale di Ramond $|\Omega\rangle_R$ che ha parità di spin dispari e corrisponde a un'eccitazione fermionica. In accordo con il teorema di Kramers, esiste un altro stato $|\Omega'\rangle_R$ con la stessa energia; questo stato è il partner time-reversal di $|\Omega'\rangle_R$ e dalla funzione di partizione si vede che può essere ottenuto mediante il flusso spettrale a partire dal primo stato eccitato del settore di Neveu-Schwarz $|\Omega\rangle_{NS}$ con carica totale nulla (fig. 3.3).

Abbiamo quindi chiarito l'argomento di Fu, Kane e Mele della sezione precedente utilizzando le funzioni di partizione. Prima di concludere il capitolo discutiamo l'invarianza modulare della funzione di partizione dell'isolante topologico.

Lo studio delle funzioni di partizione, che determina lo spettro esatto della teoria conforme, ha permesso in letteratura l'estensione della stabilità \mathbb{Z}_2 ad ogni modello di isolante topologico interagente, anche con statistica quantistica non abeliana [43]. In tutti i casi, l'indice di stabilità è dato dall'espressione di Levin e Stern (3.66).

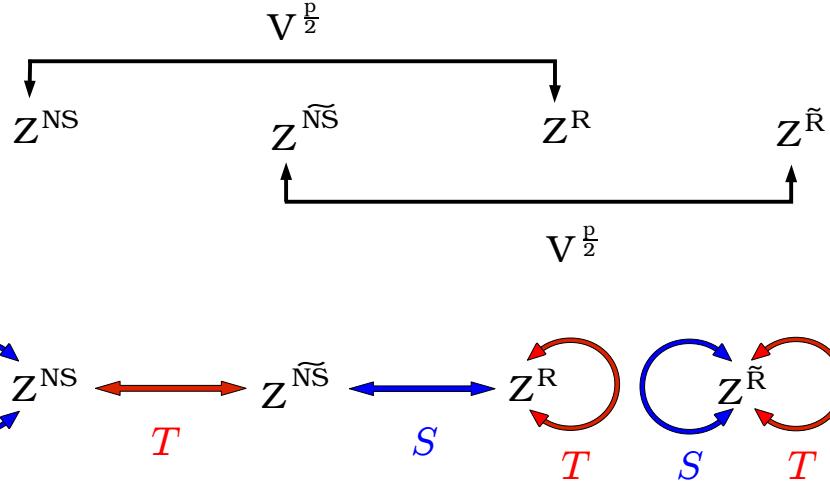


Figura 3.4: Trasformazioni modulari delle quattro funzioni di partizione.

3.6.1 Invarianza modulare

Nel caso degli isolanti topologici time-reversal invarianti dobbiamo aggiungere nell'insieme delle trasformazioni modulari anche la trasformazione $V^{p/2}$, in quanto introduce dei nuovi stati, indispensabili per l'argomento della pompa di spin, che non sono presenti nel settore di Neveu-Schwarz, come il settore di Ramond. Dall'azione delle trasformazioni $(S, T, V^{p/2})$ risulta che affinché si abbia una struttura chiusa sotto l'azione del gruppo modulare è necessario introdurre due settori in più, che chiamiamo $\tilde{N}S$ e \tilde{R} , e corrispondenti a condizioni periodiche nel tempo. I caratteri di questi quattro settori sono:

$$\begin{aligned}
 K_{\lambda}^{NS} &= e^{-\frac{\pi}{p} \frac{(\text{Im}\xi)^2}{\text{Im}\tau}} \frac{1}{\eta(q)} \sum_n \exp \left\{ 2\pi i \left[\tau \frac{(pn + \lambda)^2}{2p} + \xi \left(\frac{\lambda}{p} + n \right) \right] \right\}, \\
 K_{\lambda}^{\tilde{NS}} &= e^{-\frac{\pi}{p} \frac{(\text{Im}\xi)^2}{\text{Im}\tau}} \frac{1}{\eta(q)} \sum_n (-1)^{pn} \exp \left\{ 2\pi i \left[\tau \frac{(pn + \lambda)^2}{2p} + \xi \left(\frac{\lambda}{p} + n \right) + \frac{\lambda}{2} \right] \right\}, \\
 K_{\lambda}^R &= K_{\lambda + \frac{p}{2}}^{NS}, \\
 K_{\lambda}^{\tilde{R}} &= K_{\lambda + \frac{p}{2}}^{\tilde{NS}}.
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Da ogni settore possiamo definire una funzione di partizione nel seguente modo:

$$Z^i(\tau, \xi) = \sum_{\lambda=0}^{p-1} K_{\lambda}^i \bar{K}_{\lambda}^{ic}, \quad i = NS, \tilde{NS}, R, \tilde{R}. \tag{3.84}$$

Le trasformazioni modulari delle quattro funzioni di partizione sono rappresentate in figura 3.4. In particolare tutte le funzioni di partizione (3.84) sono invarianti sotto le trasformazioni T^2 , U e V , mentre il settore \tilde{R} è un singoletto del gruppo modulare.

Osserviamo che nei modelli di meccanica statistica come il modello di Ising in (1+1) dimensioni [30], si può costruire una funzione di partizione invariante modulare sommando i quattro settori (3.84):

$$Z = Z^{NS} + Z^{\tilde{NS}} + Z^R + Z^{\tilde{R}}. \tag{3.85}$$

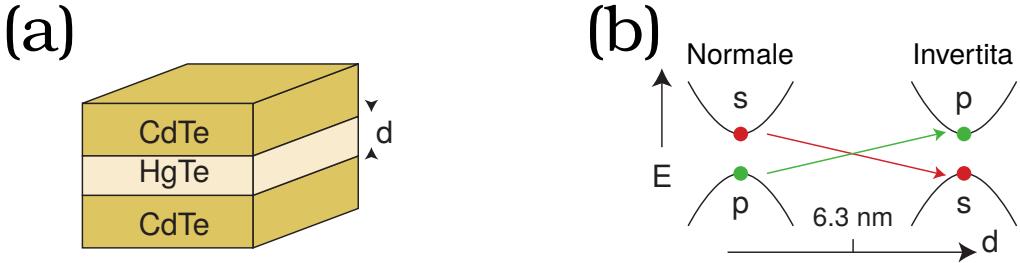


Figura 3.5: (a): Disegno schematico del HgCdTe. (b): La configurazione delle bande dipende dallo spessore del semiconduttore HgTe, quando tale spessore supera il valore di $d_c \sim 6.3 \text{ nm}$ la struttura a bande risulta invertita.

Tuttavia negli isolanti topologici, i quattro settori possono non avere la stessa parità di spin e pertanto tale funzione di partizione non sarebbe invariante sotto inversione temporale. In particolare la simmetria \mathcal{T} richiede che gli stati fondamentali dei settori NS e R abbiano stessa parità \mathcal{I} . Quando questo non accade, ovvero quando le eccitazioni di bordo sono stabili, non possiamo scrivere una funzione di partizione invariante modulare compatibile con l'invarianza \mathcal{T} . In questo caso, i quattro settori della teoria formano il vettore

$$(Z^{NS}, Z^{\bar{N}S}, Z^R, Z^{\bar{R}}). \quad (3.86)$$

In conclusione, nel caso stabile la funzione di partizione \mathcal{T} -invariante non è invariante modulare, ma si compone di quattro parti che trasformano fra di loro.

3.7 Il Modello in Pozzi di HgTe e la Verifica Sperimentale

La verifica sperimentale dell'esistenza di fasi topologiche \mathcal{T} -invarianti è stata confermata in pozzi quantici di HgCdTe come previsto teoricamente da Bernevig, Hughes e Zhang in [44].

Le $Hg_{1-x}Cd_xTe$ sono una famiglia di semiconduttori in cui è presente una forte interazione spin-orbita. Mentre il CdTe, come la maggior parte dei semiconduttori, ha una struttura a bande in cui gli stati di conduzione hanno una simmetria s e quelli di valenza una simmetria p , il HgTe presenta stati p con energia maggiore degli stati s e quindi ha una struttura a bande *invertita*. Bernevig, Hughes e Zhang (BHZ) hanno considerato una quantum well in cui il HgTe è inserito tra due semiconduttori di CdTe (fig. 3.5(a)). Se lo spessore d del HgTe è minore di $d < d_c = 6.3 \text{ nm}$ allora il sistema ha un'ordinaria struttura a bande, d'altra parte se $d > d_c$ allora la bande risultano invertite (fig. 3.5(b)). In [44] è mostrato che l'inversione delle bande che avviene in funzione dello spessore d segnala una transizione di fase quantistica tra un normale isolante e un isolante topologico bidimensionale.

In [44] è mostrato, mediante considerazioni sulla simmetria del sistema, che la dinamica degli elettroni nei pressi del livello di Fermi è descritta dalla seguente hamiltoniana:

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} h(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & h^*(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad h(\mathbf{k}) = \epsilon(\mathbf{k})\mathbb{I}_{2 \times 2} + d_i(\mathbf{k})\sigma_i, \quad (3.87)$$

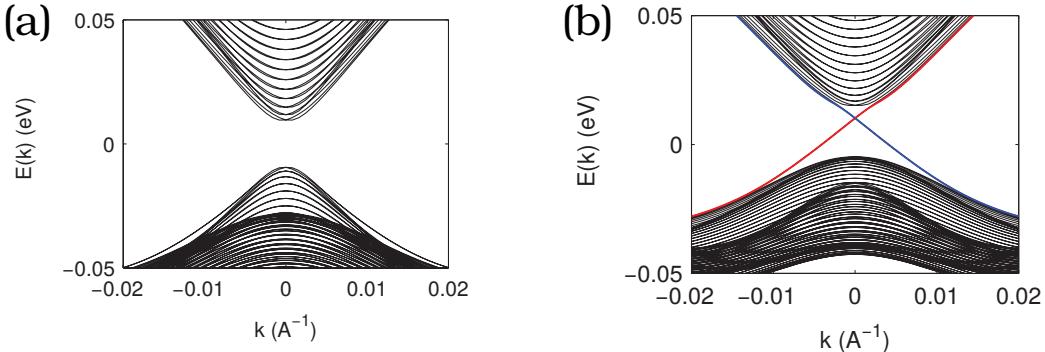


Figura 3.6: Struttura a bande di una striscia di semiconduttore. Se lo spessore del HgTe è inferiore allo spessore critico d_c è presente un gap tra lo stato fondamentale e lo stato eccitato (a); se invece lo spessore è maggiore di d_c gli stati di valenza e di conduzione risultano connessi da due bande che rappresentano gli stati di bordo chirali (in rosso) e antichirali (in blu) (b) [45].

dove $\mathbb{I}_{2 \times 2}$ è la matrice identità 2×2 , σ sono le matrici di Pauli e

$$\begin{aligned}\epsilon(\mathbf{k}) &= C - D(k_x^2 + k_y^2), \\ d_i(\mathbf{k}) &= [Ak_x, -Ak_y, M(\mathbf{k})] \quad \text{con} \quad M(\mathbf{k}) = M - B(k_x^2 + k_y^2).\end{aligned}\quad (3.88)$$

A, B, C, D e M sono parametri che dipendono dalla geometria del sistema.

Mediante una procedura che vedremo in dettaglio nel capitolo 4 nell'ambito degli isolanti topologici tridimensionali, dall'hamiltoniana (3.87) si può ricavare l'esistenza e la dinamica degli stati di bordo. Supponiamo che il sistema sia definito solo nel semipiano $x > 0$; se il sistema è nella fase di QSHE che corrisponde al caso in cui $M/B > 0$ (sistema con bande invertite) si hanno gli stati di bordo

$$\Psi_{\uparrow}(x) = \begin{pmatrix} \psi_0(x) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\downarrow}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_0(x) \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} a(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) \chi_{-}, & A/B < 0, \\ c(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}) \chi_{+}, & A/B > 0, \end{cases} \quad (3.90)$$

dove $\Psi_{\uparrow}(x)$ e $\Psi_{\downarrow}(x)$ sono correlati dal time-reversal, gli spinori χ_{\pm} sono gli autostati di σ_y con autovalori \pm e il segno di A/B determina la polarizzazione dello spin. La dinamica delle eccitazioni di bordo è determinata dall'hamiltoniana (3.87) che proiettata sugli stati (3.89) assume la forma

$$H_{edge} = Ak_y\sigma_z. \quad (3.91)$$

L'esistenza degli stati di bordo è stata prevista anche mediante simulazioni numeriche dell'hamiltoniana (3.87) su una striscia di semiconduttore di larghezza finita [45] (fig. 3.6).

La prima verifica sperimentale dell'esistenza della fase di QSHE nel modello di BHZ è stata presentata in [46]. L'esistenza di eccitazioni di bordo a massa nulla implica una conducibilità diversa da zero anche se il sistema nel bulk è isolante. Gli stati di bordo portano una conducibilità di e^2/h per ogni chiralità; in figura 3.7 sono mostrate le misure di resistenza di diversi campioni in funzione del voltaggio di gate

che accorda l'energia di Fermi all'interno del gap di energia. Il campione (I) presenta una grande resistenza nel gap mentre i campioni (II), (III) e (IV) sono quantum well nel regime invertito. In particolare i campioni (III) e (IV) mostrano una conduttività $2e^2/h$ associata agli stati dei bordi superiori e inferiori. Il fatto che entrambi i campioni abbiano stessa lunghezza $L = 1\mu$ ma diverso spessore $w = 0.5\mu, 1.0\mu$ indica che la conduzione avviene ai bordi del sistema. Infine il campione (II) ($L = 20\mu$) mostra effetti di scattering dovuti alla temperatura. Questi esperimenti dimostrano in modo convincente l'esistenza degli stati di bordo e quindi della fase di QSHE.

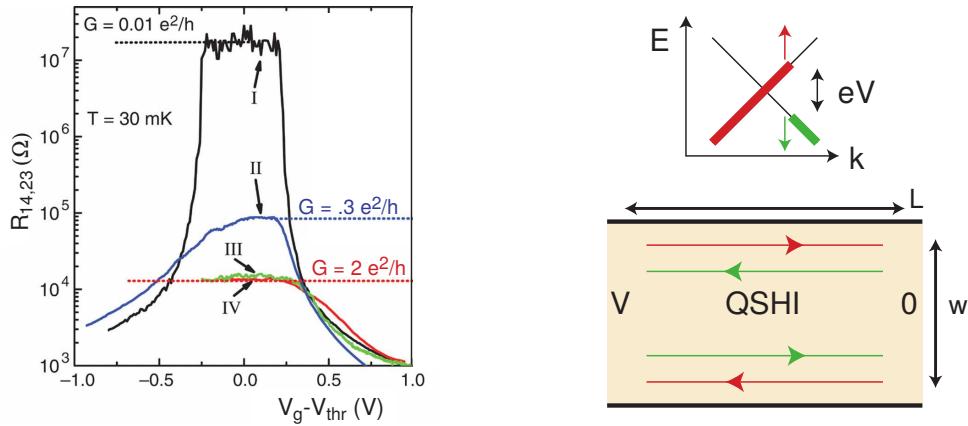


Figura 3.7: Il grafico mostra la misura della conduttività in funzione del voltaggio di gate. Il campione (I) che ha $d < d_c$ ha un comportamento isolante, mentre i campioni (III) e (IV) mostrano una corrente quantizzata associata agli stati di bordo [46].

Capitolo 4

Isolanti Topologici in Tre Dimensioni

Nei precedenti capitoli abbiamo descritto fasi topologiche della materia in due dimensioni utilizzando i metodi sviluppati per l'effetto Hall quantistico; in particolare abbiamo discusso il caso \mathcal{T} invariante mediante il modello dell'effetto Hall di spin.

In questo capitolo discuteremo delle fasi topologiche in tre dimensioni le cui proprietà di bulk non sono descrivibili dai livelli di Landau. Presenteremo altri metodi che si basano essenzialmente sulla teoria delle bande elettroniche. Vedremo che in questo caso il ruolo del campo esterno sarà giocato dalla *connessione di Berry* e mostreremo che alcuni aspetti topologici del QHE si generalizzano anche a sistemi strutturalmente molto diversi. Cominceremo col discutere alcuni stati topologici senza simmetria \mathcal{T} in una dimensione (il poliacetilene, sezione 4.2.2) ed in due dimensioni (il modello di Haldane [47], sezione 4.3.2). Quindi descriveremo l'estensione della teoria topologica delle bande al caso \mathcal{T} invariante, dovuta a Fu, Kane e Mele [8] [38], per gli isolanti topologici bidimensionali (sezione 4.4). Ritroveremo la caratterizzazione mediante l'invariante \mathbb{Z}_2 descritto al capitolo precedente. Finalmente il caso tridimensionale sarà discusso nella sezione 4.5.

I sistemi fermionici discussi in questo capitolo possiedono livelli energetici che al variare del quasi-impulso si estendono dalla banda di valenza a quella di conduzione. Questi incroci di bande (*band crossing*) sono stabili per deformazioni infinitesime dell'hamiltoniana e quindi hanno una natura topologica. Intorno ai punti d'incrocio si realizza una relazione di dispersione lineare corrispondente a fermioni a massa nulla situati sul bordo del sistema, una proprietà analoga a quella dell'effetto Hall intero. Queste eccitazioni di bassa energia possono essere descritte di nuovo mediante la teoria dei campi. Un metodo generale per descrivere il limite di bassa energia ai band crossing è fornito dal modello di Jackiw e Rebbi [12], nel quale si considera un fermione di Dirac nel bulk con un profilo di massa a forma di kink e si ottengono stati fermionici a massa nulla localizzati al centro del kink, che quindi possiedono una dimensione in meno. Mostreremo le proprietà specifiche di questi elettroni di bordo in una e due dimensioni rispettivamente nelle sezioni 4.2.2, 4.3.3, mentre un'analisi dettagliata del caso tridimensionale sarà fatta nel capitolo successivo.

4.1 Proprietà Topologiche degli Elettroni in Potenziali Periodici

4.1.1 Equivalenza topologica e stati di bordo

Ricordiamo brevemente la teoria delle bande elettroniche ed introduciamo una relazione di equivalenza per le hamiltoniane sotto deformazioni continue che ci permetterà di definire delle classi topologiche.

Consideriamo un'hamiltoniana di singola particella H con periodicità data dal reticolo spaziale Γ . Dal teorema di Bloch [48] segue che gli autostati dell'hamiltoniana possono essere scelti della forma:

$$\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (4.1)$$

dove $u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ è una funzione periodica con la stessa periodicità del reticolo Γ , n rappresenta l'indice di banda mentre \mathbf{k} è il quasi-momento. Le funzioni $u_{n,\mathbf{k}}$ sono autofunzioni dell'hamiltoniana

$$H(\mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} H e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.2)$$

che assieme ai suoi autovalori $E_n(\mathbf{k})$ relativi alle autofunzioni $u_{n,\mathbf{k}}$ definiscono la struttura a bande del sistema. In particolare, per ogni vettore \mathbf{G} appartenente al reticolo Γ^* duale di Γ vale la seguente relazione di periodicità:

$$H(\mathbf{k} + \mathbf{G}) = H(\mathbf{k}), \quad E_n(\mathbf{k} + \mathbf{G}) = E_n(\mathbf{k}), \quad \mathbf{G} \in \Gamma^*. \quad (4.3)$$

Grazie a questa periodicità, il quasi-momento \mathbf{k} appartiene alla *zona di Brillouin* $BZ = \mathbb{R}^d/\Gamma^*$, che in d dimensioni ha la topologia di un toro T^d .

Il sistema è isolante se la banda di valenza è completamente occupata ed è separata dalla banda di conduzione da un gap di energia finito. Possiamo definire un'equivalenza topologica tra sistemi isolanti nel seguente senso: due isolanti vengono detti *topologicamente equivalenti* se è possibile portare l'uno nell'altro cambiando adiabaticamente l'hamiltoniana senza annullare mai il gap. Osserviamo che il valore del gap fissa la scala di tempo nel quale la trasformazione adiabatica deve avvenire in modo che durante il processo lo stato fondamentale venga mappato nello stato fondamentale.

Discutiamo adesso l'interfaccia tra due sistemi topologicamente inequivalenti. In base alle precedenti definizioni, l'interfaccia situata ad esempio nel piano $z = z^*$ sarà caratterizzata dall'annullarsi del gap fra le due bande. Di conseguenza in questo piano si troveranno degli stati elettronici a massa nulla. La stessa situazione si realizza tra un isolante topologico ed un isolante banale ovvero il vuoto. Ritroviamo quindi le proprietà salienti del QHE, ovvero delle eccitazioni di bordo a massa nulla ed un bulk massivo. Abbiamo visto come la robustezza degli stati di bordo corrisponda alla stabilità della fase topologica di bulk nel caso dello spin Hall effect e degli isolanti topologici bidimensionali, essendo associati rispettivamente ai numeri topologici \mathbb{Z} e \mathbb{Z}_2 .

In questo capitolo discuteremo analoghe quantità topologiche definite sia nel bulk che nel bordo e vedremo le corrispondenze fra di loro. Questa corrispondenza fra proprietà di bulk e di boundary è un tema ricorrente in questo ambito.

4.1.2 Fase di Berry e invarianti di Chern

I sistemi a bande possono essere caratterizzati dalle proprietà della fase di Berry [11] [49]. Consideriamo un sistema quantistico con hamiltoniana dipendente da un vettore di parametri \mathbf{R} e supponiamo che lo stato fondamentale $|\Omega\rangle$ sia separato dagli altri stati da un gap. Se effettuiamo una variazione adiabatica di \mathbf{R} lungo un ciclo C nello spazio dei parametri, lo stato fondamentale ritornerà in sé stesso a meno di una fase,

$$\gamma_c = -i \oint_C d\mathbf{R} \cdot \langle \Omega(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \Omega(\mathbf{R}) \rangle = -i \oint_C d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}), \quad (4.4)$$

detta *fase di Berry*. Questa fase è una proprietà quantistica che non ha analogo classico e può essere definita anche per l'evoluzione di altri stati se lo spettro d'energia è sufficientemente spaziato da consentire il ciclo adiabatico. Nel nostro caso saremo interessati principalmente allo stato fondamentale.

Notiamo che sotto trasformazioni unitarie

$$|u(\mathbf{R})\rangle \longrightarrow e^{i\phi(\mathbf{R})} |u(\mathbf{R})\rangle, \quad (4.5)$$

la connessione di Berry $\mathbf{A}(\mathbf{R})$ in (4.4) trasforma come una connessione di gauge

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{R}) + \nabla_{\mathbf{R}}\phi. \quad (4.6)$$

In presenza di un campo elettromagnetico esterno, la connessione di Berry corrisponde a quella di gauge, ma può in generale essere indotta da altre proprietà dinamiche in assenza del campo magnetico esterno, come vedremo in seguito.

La fase di Berry nei sistemi a bande è definita da:

$$\mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{k}) = -i \langle u_n(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | u_n(\mathbf{k}) \rangle, \quad (4.7)$$

e si immagina una variazione ciclica C dei quasi-impulsi all'interno della zona di Brillouin, $C \subset BZ$,

$$\gamma_C = \oint_C d\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{k}) = \int_S \mathcal{F}^{(n)}(\mathbf{k}), \quad (4.8)$$

dove S è una superficie delimitata da C e $\mathcal{F}^{(n)} = d\mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{k})$ è detta *curvatura di Berry*.

Consideriamo un sistema bidimensionale a due bande caratterizzate dagli autostati $|\pm\rangle$ su cui agiscono le matrici di Pauli $\boldsymbol{\sigma}$. L'hamiltoniana può essere scritta nel seguente modo:

$$H(\mathbf{k}) = \mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} d_z & d_x - id_y \\ d_x + id_y & -d_z \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Gli autovalori dell'hamiltoniana sono $E_{\pm} = \pm|\mathbf{d}|$. In questo caso conviene passare alle coordinate sferiche

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = |\mathbf{d}| (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (4.10)$$

dove θ e ϕ sono funzioni di \mathbf{k} . Con queste definizioni i due autovettori normalizzati assumono la forma:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \theta / 2e^{-i\phi} \\ \cos \theta / 2 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta / 2e^{-i\phi} \\ \sin \theta / 2 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

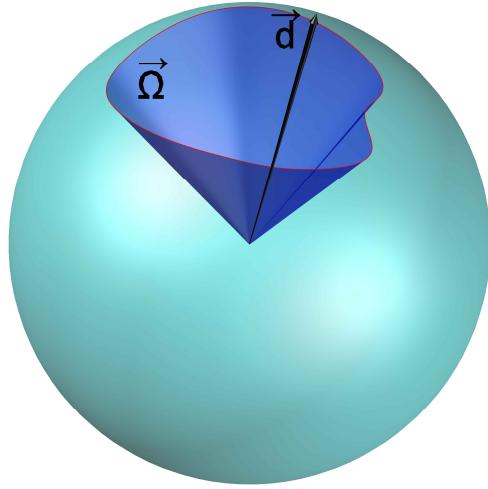


Figura 4.1: La fase di Berry è pari a metà dell'angolo solido delimitato dalla traiettoria del vettore $\mathbf{d}(\mathbf{k})$.

In questo sistema di coordinate la connessione di Berry assume una forma particolarmente semplice; si ottiene:

$$A_\theta^\pm = -i \langle \pm | \partial_\theta | \pm \rangle = 0, \quad (4.12)$$

$$A_\phi^+ = -i \langle + | \partial_\phi | + \rangle = \sin^2 \theta / 2, \quad A_\phi^- = -i \langle - | \partial_\phi | - \rangle = -\cos^2 \theta / 2, \quad (4.13)$$

da cui

$$\mathcal{F}_{\theta\phi}^\pm = \partial_\theta A_\phi^\pm - \partial_\phi A_\theta^\pm = \frac{\sin \theta}{2}. \quad (4.14)$$

In particolare la fase di Berry γ_C corrisponde a metà dell'angolo solido delimitato dal vettore \mathbf{d} (fig. 4.1), ovvero

$$\gamma_C = \int_S d\theta d\phi \mathcal{F}_{\theta\phi} = \int_S d\theta d\phi \frac{\sin \theta}{2}. \quad (4.15)$$

Si riconosce nelle (4.13), (4.14) il campo elettromagnetico del monopolo di Dirac [50]; in modo analogo γ_C (4.8) definisce il numero topologico intero delle mappe dalle curve dalla zona di Brillouin $S^1 \subset T^2$ allo spazio di gauge $U(1) \sim S^1$. L'integrale della curvatura di Berry su tutta la zona di Brillouin

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} \mathcal{F} d^2 \mathbf{k}, \quad (4.16)$$

è l'invariante topologico detto *prima classe di Chern* del fibrato $U(1)$ descritto dalle funzioni di Bloch con base il toro T^2 . Come vedremo meglio in seguito, abbiamo una situazione analoga all'anomalia chirale in due dimensioni discussa nel capitolo 2.

4.2 Fasi Topologiche nei Sistemi Unidimensionali

In questa sezione caratterizzeremo le fasi topologiche unidimensionali mediante la fase di Berry.

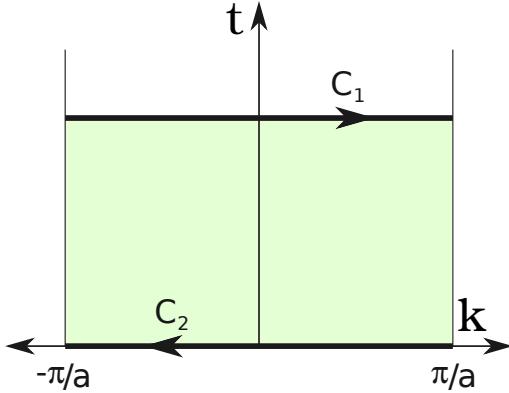


Figura 4.2: In figura è rappresentata la superficie delimitata dai cammini di integrazione C_1 e C_2 .

4.2.1 Fase di Berry e polarizzazione

In elettrostatica, la polarizzazione elettrica \mathbf{P} è definita come il momento di dipolo per unità di volume. In termini della polarizzazione, la densità di carica nel bulk di un sistema è $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, mentre la densità di carica superficiale è $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Se il sistema è unidimensionale la densità superficiale non è altro che la carica ai bordi del sistema e quindi

$$Q_{edge} = P. \quad (4.17)$$

Si può dimostrare che la polarizzazione è proporzionale alla fase di Berry della banda di valenza occupata dagli elettroni [51]. Presentiamo un argomento euristico per questo risultato in una dimensione. La polarizzazione può essere vista come il valore di aspettazione dell'operatore $P = e < x >$. Per calcolare tale valore di aspettazione non conviene utilizzare le funzioni di Bloch in quanto queste sono estese su tutto lo spazio. Introduciamo quindi le *funzioni di Wannier*,

$$|\phi(R)\rangle = \oint_{BZ} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(R-x)} |u(k)\rangle, \quad (4.18)$$

che risultano essere localizzate attorno ai siti reticolari R . Poiché le funzioni di Bloch sono determinate a meno di una trasformazione unitaria è possibile scegliere la gauge in cui le funzioni di Wannier assumono la massima localizzazione, in questo caso si parla di funzioni *massimamente localizzate* [52]. Utilizzando le funzioni di Wannier si può esprimere la polarizzazione come

$$P = e \langle \phi(R) | x - R | \phi(R) \rangle = \frac{ie}{2\pi} \oint_{BZ} dk \langle u(k) | \nabla_k | u(k) \rangle = \frac{e}{2\pi} \oint_{BZ} dk A(k). \quad (4.19)$$

Questa relazione tra polarizzazione e fase di Berry necessita di qualche specificazione. La polarizzazione non è completamente definita in quanto è possibile rimuovere o aggiungere un numero intero di cariche ai bordi senza modificare il bulk del sistema, ovvero $P = Q_{edge} \bmod e$. D'altra parte la fase di Berry dipende dalla classe di omotopia,

$$P \longrightarrow P + ne. \quad (4.20)$$

La quantità fisica è la variazione della polarizzazione per effetto di determinate

deformazioni del sistema. Supponiamo quindi che l'hamiltoniana venga trasformata adiabaticamente da un parametro t , $H(k) \rightarrow H(k, t)$. La variazione della polarizzazione tra $t = 0$ e $t = T$ è:

$$\begin{aligned}\Delta P = P_{t=T} - P_{t=0} &= \frac{e}{2\pi} \left[\oint_{C_1} - \oint_{C_2} \right] A \cdot dk \\ &= \frac{e}{2\pi} \int_S \mathcal{F} dk dt,\end{aligned}\quad (4.21)$$

dove C_1 e C_2 sono i loop rispettivamente ai tempi $t = 0$ e $t = T$ e $\mathcal{F} = \partial_t A - \partial_k A$. L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che in questo caso $C_1 - C_2$ rappresenta il bordo della superficie in figura 4.2 e quindi è possibile applicare il teorema di Stokes. Notiamo l'analogia della (4.21) con l'argomento di Laughlin dell'inserzione di flusso nel QHE, dove \mathcal{F} è il campo indotto e t è il tempo. In ambedue i casi una deformazione adiabatica ha prodotto un accumulo di carica al bordo del sistema. Le modalità di questo trasporto di carica caratterizzeranno le fasi topologiche descritte nelle prossime sezioni.

4.2.2 Il poliacetilene

Un interessante modello che ci permette di illustrare i concetti finora esposti è il modello di Su, Schrieffer e Heeger (SSH) [53] che spiega le proprietà di conduzione del poliacetilene ($[C_2H_2]_n$), un polimero che si presenta in due possibili stati dimerizzati (fig. 4.3). Il modello di SSH descrive un sistema unidimensionale a due bande in cui l'hamiltoniana di seconda quantizzazione è data da:

$$H = \sum_i (t + \delta t) c_A^\dagger(r_i) c_B(r_i) + (t - \delta t) c_A^\dagger(r_{i+1}) c_B(r_i) + h.c.. \quad (4.22)$$

In questa equazione $c_{A,B}(r_i)$ e $c_{A,B}^\dagger(r_i)$ sono gli operatori di distruzione e creazione relativi al sito reticolare $r_i = ia$ dove a è il passo reticolare. In questo modello si suppone che la cella unitaria sia formata da due atomi indicati con i pedici A e B . I due stati di dimerizzazione sono caratterizzati dal segno della quantità δt che quando

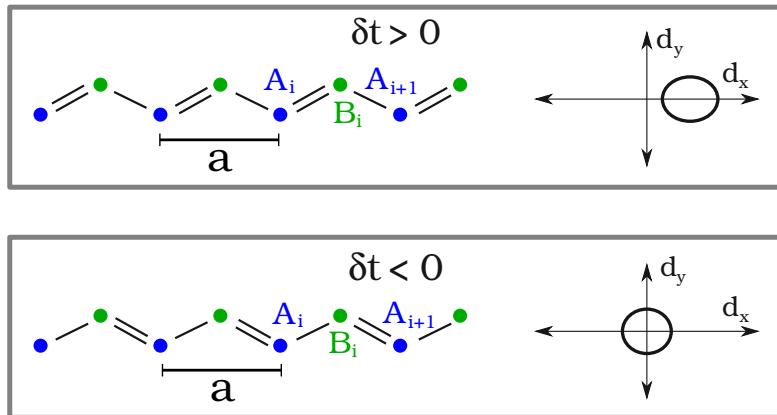


Figura 4.3: I due possibili stati di dimerizzazione del poliacetilene e le corrispondenti componenti x e y del vettore $\mathbf{d}(k)$.

è diverso da zero genera un gap tra le due bande.

Passando allo spazio di Fourier,

$$c_A(r_i) = \sum_k c_A(k) e^{ikr_i}, \quad c_A^\dagger(r_i) = \sum_k c_A^\dagger(k) e^{-ikr_i}, \quad (4.23)$$

l'hamiltoniana viene riscritta come

$$H = \sum_{i,j=A,B} \sum_k H_{ij}(k) c_i^\dagger(k) c_j(k). \quad (4.24)$$

In questa equazione $H_{ij} = \mathbf{d}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij}$ dove $i, j = A, B$ e le componenti del vettore $\mathbf{d}(k)$ dell'hamiltoniana (4.9) sono:

$$\begin{aligned} d_x &= (t + \delta t) + (t - \delta t) \cos(ka), \\ d_y &= (t - \delta t) \sin(ka), \\ d_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Poiché $d_z = 0$ il sistema presenta una “simmetria chirale”, ovvero l'hamiltoniana anticommuta con σ_z . Questo fa sì che lo spettro sia simmetrico rispetto al valore $E = 0$, infatti se $|E\rangle$ è uno autostato con autovalore allora il trasformato chirale $\sigma_z |E\rangle$ è anch'esso un autostato dell'hamiltoniana con autovalore $-E$.

Consideriamo il sistema a due bande con la fase di Berry introdotta precedentemente (4.8). Per il modello di SSH si ha che $\theta = \pi/2$, mentre l'angolo $\phi = \phi(k)$. Per $\delta t > 0$, $d_x(k) > 0$ e quindi il vettore $\mathbf{d}(k)$ non spazza alcun angolo solido e quindi $\gamma_C = 0$. Se invece $\delta t < 0$ allora al variare di k l'angolo ϕ assume tutti i valori tra 0 e 2π e pertanto l'angolo solido spazzato è pari a 2π portando a una polarizzazione $P = \pm e/2$.

La quantità significativa è la variazione di polarizzazione, per δt che varia da $\delta t = t$ a $\delta t = -t$; si ottiene:

$$\Delta P = P_{\delta t=-t} - P_{\delta t=t} = \pm \frac{e}{2}. \quad (4.26)$$

Abbiamo quindi ottenuto il risultato che il valore della fase di Berry, ovvero della polarizzazione, caratterizza l'interfaccia fra le due fasi topologiche del modello di SSH.

Notiamo che il risultato (4.26) può essere espresso come l'integrale della curvatura di Berry (4.21), ma il risultato non è intero perché il dominio d'integrazione è finito. La quantizzazione si ottiene nel caso di condizioni periodiche nel tempo, come descritto successivamente nella sezione 4.3.

4.2.3 Argomento di Jackiw e Rebbi

Adesso studiamo la teoria di campo effettiva di bassa energia del modello di SSH. Per prima cosa osserviamo che gli autovalori al quadrato dell'hamiltoniana $H(k)$ sono dati da:

$$E^2(k) = |\mathbf{d}(k)|^2 = 2t^2(1 + \cos(ka)) + 2\delta t^2(1 - \cos(ka)), \quad (4.27)$$

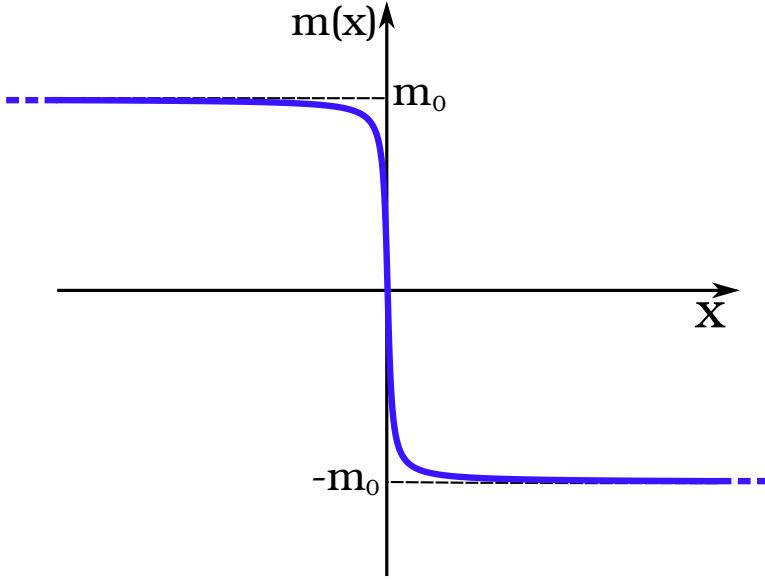


Figura 4.4: Profilo di massa a forma di kink.

e che quindi per $\delta t = 0$ le due bande sono degeneri nel punto $k = \pi/a$. Facciamo quindi uno sviluppo intorno a tale punto supponendo che $|\delta t| \ll |t|$. Definendo $k = \pi/a + q$ con $q \sim 0$ si ottiene

$$E \sim \pm \sqrt{(ta)^2 q^2 + (2\delta t)^2} + \mathcal{O}(q), \quad (4.28)$$

da cui si legge che $v_F = ta$ e $m = 2\delta t$ come anticipato. Mediante la trasformazione unitaria,

$$U = \sigma_y e^{i\frac{\pi}{2}s_z} = \sigma_y e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z}, \quad (4.29)$$

l'hamiltoniana (4.24), (4.25) assume la forma dell'hamiltoniana di un fermione di Dirac (1+1) dimensionale. Facendo la sostituzione $q \rightarrow -i\partial_x$ si ottiene

$$H_{\text{Dirac}} = -iv_F\sigma_x\partial_x + m\sigma_y. \quad (4.30)$$

In conclusione, le eccitazioni di bassa energia del poliacetilene sono dei fermioni massivi, con il segno della massa che dipende dalla fase. Considerando un profilo di massa $m = m(x)$ della forma di un kink, $m(x) \rightarrow \mp m_0$ per $x \rightarrow \pm\infty$ (fig.4.4), possiamo descrivere il contatto tra le due fasi mediante un interfaccia a $x = 0$. In base alle considerazioni generali descritte all'inizio del capitolo ci attendiamo uno stato a massa nulla a $x = 0$. Questo stato di Jackiw e Rebbi (stato fermionico all'interno del solitone) si determina nel seguente modo. Moltiplicando H per σ_x a sinistra, l'equazione per l'autovalore nullo si riscrive:

$$(-v_F\partial_x + m\sigma_z)f(x)\chi = 0, \quad (4.31)$$

dove χ è uno spinore a due componenti. La soluzione generale è data dalla combinazione lineare di autostati di σ_z , ovvero:

$$\psi_0(x) = Ae^{+\int_0^x dy m(y)/v_F} |+\rangle + Be^{-\int_0^x dy m(y)/v_F} |-\rangle. \quad (4.32)$$

La richiesta della normalizzabilità di $\psi_0(x)$ implica $B = 0$ e quindi,

$$\psi_0(x) = \mathcal{N} e^{+ \int_0^x dy m(y)/v_F} |+\rangle, \quad (4.33)$$

dove \mathcal{N} rappresenta la normalizzazione dell'autofunzione. Tale modo nullo è detto topologico in quanto la sua esistenza non dipende dalla forma particolare del profilo di massa $m(x)$ ma solo dal fatto che questo cambi segno.

Abbiamo quindi mostrato che all'interfaccia fra due fasi topologiche distinte del poliacetilene abbiamo uno stato di bordo a massa nulla. La teoria effettiva di bassa energia descrive correttamente le proprietà di questo stato. Si dimostra che lo stato ha carica $\pm e/2$ in accordo con il risultato della sezione precedente.

4.3 Stati Topologici in Due Dimensioni

In questa sezione vedremo come la fase di Berry caratterizzi topologicamente i sistemi bidimensionali non \mathcal{T} -invarianti dell'effetto Hall intero e del modello di Haldane.

4.3.1 La pompa di carica e l'IQHE

Per prima cosa prendiamo in considerazione un generico sistema unidimensionale la cui hamiltoniana varia adiabaticamente nel tempo in modo periodico con periodo T , $H(k, t) = H(k, t + T)$. Come descritto precedentemente (sezione (4.2.1)), possiamo valutare la variazione della polarizzazione $P(t)$ per un ciclo, ottenendo:

$$\Delta P = P(T) - P(0) = ne, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.34)$$

Questo sistema definisce una “pompa di carica” [54] [55] in cui ad ogni ciclo n elettroni vengono trasportati attraverso il sistema che possiede un gap finito. Poiché l'hamiltoniana è periodica, l'intero n è dato dalla prima classe di Chern

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} \mathcal{F} dk dt, \quad (4.35)$$

dove il dominio di integrazione è il toro $T^2 = [-\pi/a, \pi/a] \times [0, T]$.

Adesso vogliamo mostrare che la pompa di carica non è altro che una formulazione dell'argomento del flusso di Laughlin descritto in sezione 1.2.5 e 2.1.3. Le trattazioni precedenti non facevano riferimento al fatto che il sistema fosse periodico, ma possono esservi ricondotte con il seguente argomento. Nel caso dei livelli di Landau possiamo definire gli operatori di traslazione magnetica (1.9) che non commutano fra loro. Tuttavia le traslazioni finite (1.9) relative a celle di area contenenti un numero intero di flussi Φ_0 sono commutanti e definiscono una usuale periodicità come nel reticolo. Si definisce quindi una *zona di Brillouin magnetica* e si può applicare il teorema di Bloch a questo sistema. La variazione della polarizzazione ΔP (4.34) (4.35) relativa ad un ciclo del sistema unidimensionale e periodico viene a corrispondere con l'espressione della conducibilità Hall intera (1.31), $\sigma_H = e\Delta P/h = e^2 n/h$.

Per dimostrare questa equivalenza ripetiamo l'argomento del flusso di Laughlin (sezioni 1.2.5, 2.1.3) in una geometria a cilindro (fig. 4.5). Inserendo un flusso che

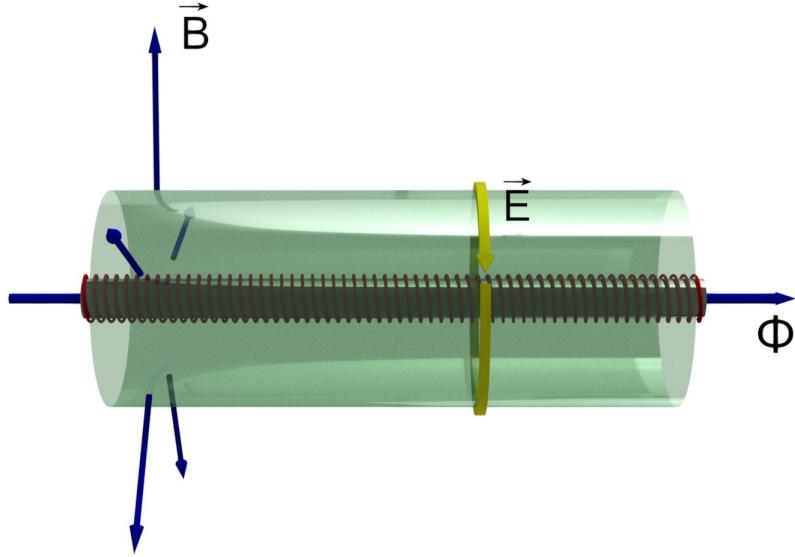


Figura 4.5: Un flusso variabile al centro del cilindro crea un campo elettrico attorno ad esso e di conseguenza, dopo un'inserzione di un quanto di flusso Φ_0 , delle eccitazioni al bordo.

varia adiabaticamente nel tempo da $\Phi = 0$ a $\Phi = \Phi_0$ all'interno del cilindro, si genera un campo elettrico $E = d\Phi/dt$ intorno al cilindro ed una corrente Hall pari a $J_x = \sigma_H d\Phi/dt$ nella direzione assiale. Quindi in un ciclo completo abbiamo uno spostamento di carica pari a $\sigma_H h/e = ne$ da un bordo all'altro.

Poiché un flusso pari a Φ_0 può essere eliminato mediante una trasformazione di gauge, l'hamiltoniana ha la periodicità $H[\Phi + \Phi_0] = H[\Phi]$. In particolare possiamo vedere il cilindro come un sistema 1D nella direzione x mentre la direzione longitudinale viene percorsa cambiando il flusso Φ . In altre parole il sistema rappresenta una pompa di carica descritta precedentemente, con $t \rightarrow \Phi$ e $T \rightarrow \Phi_0$; il numero di Chern (4.35) può essere calcolato nel seguente modo. Data la compattificazione del sistema attorno al cilindro, il numero quantico k_y assume i valori discreti:

$$k_y = \frac{2\pi}{L}m = \frac{m}{R}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.36)$$

Di conseguenza per un tubo di flusso nel centro del cilindro della forma (2.34) risulta che il quasi-impulso di Bloch azimutale è dato da:

$$k_y^m(\Phi) = \frac{\left(m + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{R}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4.37)$$

e quindi dall'equazione (4.35) si ottiene,

$$n = \sum_m \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Phi_0} d\Phi \int dk_x \mathcal{F}(k_x, k_y^m(\Phi)), \quad (4.38)$$

Facendo un cambiamento di variabili da Φ a k_y^m si vede che la somma di integrali equivale a un singolo integrale su tutta la prima zona di Brillouin T^2 , portando alla relazione

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} n = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} dk_x dk_y \mathcal{F}(k_x, k_y). \quad (4.39)$$

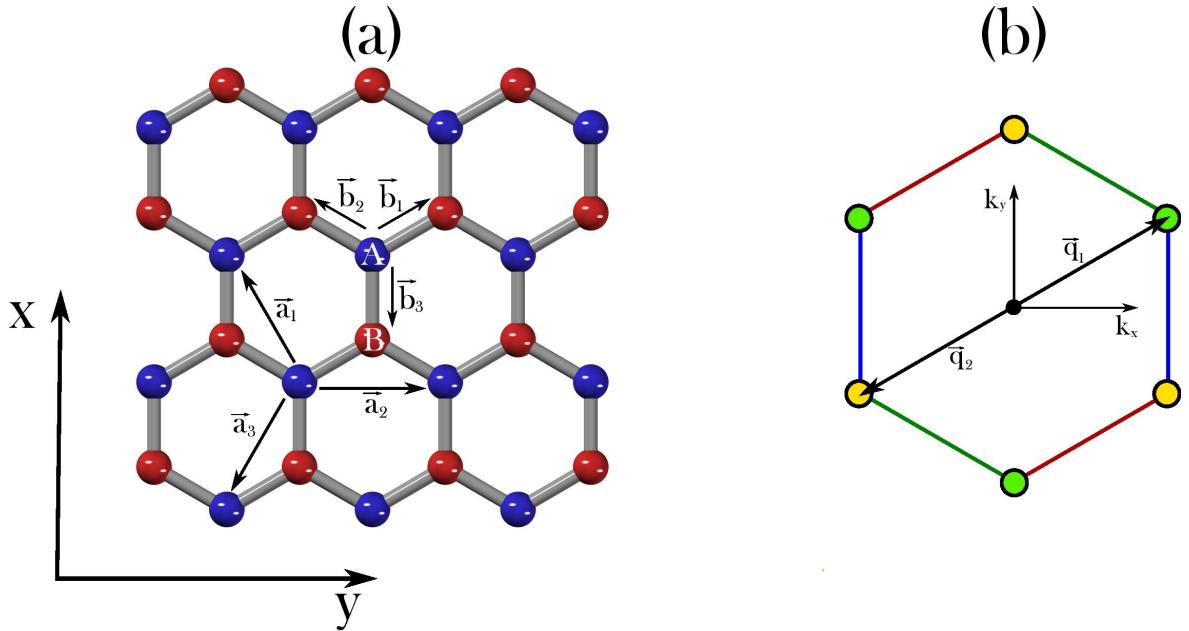


Figura 4.6: (a): È rappresentato il reticolo esagonale del grafene e i vettori del reticolo relativi ai primi vicini \mathbf{b}_i e ai secondi vicini \mathbf{a}_i . (b): Rappresentazione della zona di Brillouin. I lati sono identificati secondo i colori e di conseguenza lo sono i vertici corrispondenti ai punti di minimo gap.

Abbiamo quindi espresso la conduttività Hall intera con la stessa espressione della polarizzazione di un sistema periodico bidimensionale (4.16), in termini della connessione di Berry delle autofunzioni di singola particella. Ne concludiamo che le proprietà topologiche sono fondamentalmente le stesse nei sistemi a bande e nell'effetto Hall intero, nella descrizione di elettroni non interagenti.

Notiamo infine che nel capitolo 1 abbiamo descritto la conduttività mediante l'espressione di Thouless e collaboratori che coinvolge la curvatura di Berry relativa alla funzione d'onda a molti corpi. Quella descrizione è diversa dalla (4.39) ed è valida con maggiore generalità per sistemi interagenti.

4.3.2 Il modello di Haldane

Nel lavoro [47], Haldane ha introdotto per primo un modello di fermioni su reticolo esagonale in due dimensioni che presenta delle caratteristiche simili a quelle dell'effetto Hall, ma in assenza di campo magnetico esterno. In questo sistema, derivato dallo studio del grafene (strati bidimensionali della grafite), si introducono degli accoppiamenti nell'hamiltoniana che rompono la simmetria \mathcal{T} e inducono delle fasi magnetiche locali associate al moto degli elettroni.

Consideriamo prima l'hamiltoniana \mathcal{T} invariante del grafene [56] e quindi introduciamo i termini che rompono questa simmetria. Nel reticolo si alternano i siti A e B come mostrato in figura 4.6(a). I vettori base del reticolo, che individuano i siti A ,

sono [56]:

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) a, \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1) a, \quad \mathbf{a}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) a; \quad (4.40)$$

mentre i primi vicini, i siti B vengono individuati dai vettori,

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \right) a, \quad \mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \right) a, \quad \mathbf{b}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) a. \quad (4.41)$$

L'hamiltoniana di elettroni mobili nel reticolo è

$$H = t_1 \sum_{\mathbf{A}, i} \psi_A^\dagger(\mathbf{A}) \psi_B(\mathbf{A} + \mathbf{b}_i) + \psi_B^\dagger(\mathbf{A} + \mathbf{b}_i) \psi_A(\mathbf{A}) \\ + \epsilon \sum_{\mathbf{A}} \left[\psi_A^\dagger(\mathbf{A}) \psi_A(\mathbf{A}) - \psi_B^\dagger(\mathbf{A} + \mathbf{b}_1) \psi_B(\mathbf{A} + \mathbf{b}_1) \right], \quad (4.42)$$

dove \mathbf{A} è la variabile che individua i siti A . In questa hamiltoniana il coefficiente t_1 misura l'intensità dell'interazione tra primi vicini, mentre ϵ corrisponde al termine di massa che genera un gap tra la banda di valenza e quella di conduzione. L'indice di spin è stato omesso dai campi fermionici perché non gioca alcun ruolo salvo dare una molteplicità due ad alcune quantità. Passando allo spazio di Fourier

$$\psi_A(\mathbf{A}) = \int_{BZ} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}} \psi_A(\mathbf{k}), \quad \psi_B(\mathbf{B}) = \int_{BZ} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}} \psi_B(\mathbf{k}), \quad (4.43)$$

la (4.42) può essere riscritta come

$$H = \int_{BZ} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\psi_A^\dagger(\mathbf{k}), \psi_B^\dagger(\mathbf{k}) \right) \begin{pmatrix} \epsilon & t_1 \sum_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}_i} \\ t_1 \sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}_i} & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A(\mathbf{k}) \\ \psi_B(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Questa espressione riproduce la forma generale dell'hamiltoniana a due bande (4.9) con

$$d_x(\mathbf{k}) = t_1 \sum_i \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_i), \quad d_y(\mathbf{k}) = -t_1 \sum_i \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}_i), \quad d_z(\mathbf{k}) = \epsilon. \quad (4.45)$$

Tale teoria è invariante sotto inversione temporale \mathcal{T} : infatti d_x e d_z sono invarianti sotto la trasformazione $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, mentre il cambiamento di segno di d_y è compensato dalla coniugazione complessa. Notiamo inoltre che la simmetria di parità è rotta dal termine ϵ , infatti \mathcal{P} manda $d_z(\mathbf{k})$ in $-d_z(-\mathbf{k})$ mentre \mathcal{T} lo trasforma in $+d_z(-\mathbf{k})$ e pertanto l'invarianza sotto entrambe le simmetrie imporrebbe $d_z(\mathbf{k}) = 0$.

Gli autovalori dell'hamiltoniana sono

$$E(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{\epsilon^2 + t_1^2 \left| \sum_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}_i} \right|^2}, \quad (4.46)$$

e tale spettro assume l'usuale forma relativistica intorno ai punti dello spazio di Fourier in cui si azzera la combinazione lineare di esponenziali. Tali punti corrispondono

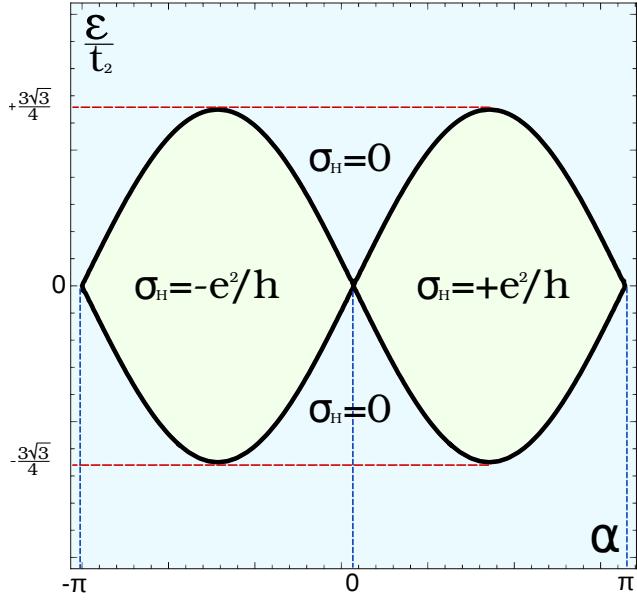


Figura 4.7: Sono rappresentate le fasi topologiche del modello di Haldane in funzione dei parametri α e ϵ/t_2 .

ai vertici della zona di Brillouin che ha la forma di un esagono regolare. I colori in figura 4.6(b) corrispondono ai punti equivalenti tra loro.

Poiché ognuno di questi punti è in compartecipazione tra 3 zone di Brillouin la dinamica di bassa energia è data da solo due teorie di Dirac che possiamo far corrispondere a una coppia di punti inequivalenti, per esempio:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \mathbf{q}_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right). \quad (4.47)$$

Mediante una procedura analoga a quella seguita nel caso del poliacetilene, la seguente dinamica di bassa energia [56],

$$H = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} [\bar{\psi}_1(\mathbf{k})(v_F \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - m)\psi_1(\mathbf{k}) + \bar{\psi}_2(\mathbf{k})(v_F \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + m)\psi_2(\mathbf{k})]. \quad (4.48)$$

In quest'ultima equazione utilizzando la rappresentazione,

$$\gamma^0 = \sigma_3, \gamma^1 = i\sigma_1, \gamma^2 = i\sigma_2, \quad (4.49)$$

la velocità dei fermioni è data da $v_F = at_1\sqrt{3}/2$, mentre la loro massa è $m = \epsilon$.

Per avere una corrente Hall diversa da zero è necessario rompere la simmetria di inversione temporale. Introduciamo un termine di interazione complesso $t_2 e^{i\alpha}$ tra secondi vicini che comporta una modifica dell'hamiltoniana (4.42) mediante un termine aggiuntivo proporzionale all'identità $d_0(\mathbf{k})$ e una modifica di $d_z(\mathbf{k})$ che rompe la simmetria di inversione temporale, come segue:

$$d_0(\mathbf{k}) = 2t_2 \cos \alpha \left(\sum_i \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i) \right), \quad d_z(\mathbf{k}) = \epsilon + 2t_2 \sin \alpha \left(\sum_i \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i) \right). \quad (4.50)$$

Mediante passaggi analoghi a quelli fatti in precedenza si ottiene:

$$H = \int \frac{d^2x}{(2\pi)^2} [\bar{\psi}_1(\mathbf{x})(i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial} + m_1)\psi_1(\mathbf{x}) + \bar{\psi}_2(\mathbf{x})(i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial} + m_2)\psi_2(\mathbf{x})], \quad (4.51)$$

dove in questo caso le masse m_1 e m_2 assumono i valori

$$m_1 = \frac{3t_2}{2t_1} \sin \alpha - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon}{t_1}, \quad m_2 = \frac{3t_2}{2t_1} \sin \alpha + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon}{t_1}. \quad (4.52)$$

Come si vede per $\alpha = 0$ il sistema risulta time-reversal invariante e si riottiene il risultato di Semenoff (4.48). Al variare di α e ϵ/t_2 , il sistema presenta due fasi topologiche caratterizzate dalla conduttività Hall $\sigma_H = \pm e^2/h$ [47] (fig. 4.7).

È possibile comprendere l'esistenza delle due fasi topologiche calcolando il valore della fase di Berry. Notiamo che d_x e d_y in equazione (4.45) cambiano di segno passando da \mathbf{k} a $-\mathbf{k}$ e in particolare l'angolo ϕ che parametrizza la fase di Berry (4.15) fa un giro completo. Il comportamento dell'angolo θ dipende dai parametri α e ϵ . Discutiamo i due casi semplici $\alpha = 0$ e $\epsilon = 0$ corrispondenti a fase banale (\mathcal{T} -invariante) e topologica (non \mathcal{T} -invariante) rispettivamente. Se $\alpha = 0$ si ha che $d_z > 0$ e il vettore $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ non spazza alcun angolo solido e si ottiene la classe di Chern nulla, ovvero $\sigma_H = 0$. Se invece $\epsilon = 0$ allora il vettore $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ avvolge tutta la sfera una sola volta portando a una conduttività Hall non nulla, $\sigma_H = e^2/h$ [47] [57].

Abbiamo quindi ottenuto un modello di fermioni su reticolo che possiede una conduttività Hall in assenza di campo magnetico esterno, ma in presenza di una hamiltoniana non \mathcal{T} -invariante.

4.3.3 La corrispondenza bulk-boundary nel modello di Haldane

Come abbiamo appena visto, il modello di Haldane presenta due fasi che dipendono dal valore dei parametri della teoria. Se consideriamo un sistema in cui queste due fasi diverse vengono messe a contatto ci aspettiamo degli stati di bordo a massa nulla localizzati nell'interfaccia dei due sistemi. Supponiamo quindi che passando da una fase all'altra i parametri cambino in modo che la massa m_1 cambi di segno mentre m_2 rimanga sempre dello stesso segno.

Ripetiamo quindi l'argomento di Jackiw-Rebbi e consideriamo un'equazione di Dirac (2+1) dimensionale con profilo di massa a kink per una delle due specie fermioniche. Prendiamo l'interfaccia parallela all'asse x e quindi il profilo di massa, $m = m(y)$, è quello in figura 4.4. L'hamiltoniana è la seguente:

$$H = -i\gamma^0\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} - i\gamma^0\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^0 m(y) \equiv H_x + H_y. \quad (4.53)$$

Siamo interessati a soluzioni dell'equazione $H\Psi = E\Psi$ di bassa energia localizzate a $y = 0$. Supponiamo quindi una soluzione fattorizzata in x e y per lo spinore Ψ che realizzi una riduzione dimensionale effettiva. Poniamo:

$$\Psi(x, y) = \phi(x)f_0(y)\chi, \quad (4.54)$$

dove χ è uno spinore costante, e determiniamo $f_0(y)$ in modo che abbia autovalore nullo per la parte dell'hamiltoniana dipendente da y :

$$H_y f_0(y) \chi = \left[-i\sigma_1 \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_3 m(y) \right] f_0(y) \chi = 0. \quad (4.55)$$

In completa analogia al risultato di sezione 4.2.2 otteniamo la soluzione normalizzabile

$$f_0(y) \chi = e^{\int_0^y dy' m(y')} \chi_-, \quad (4.56)$$

dove χ_- è l'autostato di σ_2 relativo all'autovalore -1 . L'hamiltoniana di Dirac proiettata nel sottospazio delle soluzioni (4.56) risulta ridotta dimensionalmente e assume la forma

$$-i \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) = E \phi(x), \quad (4.57)$$

che descrive un fermione chirale (1+1) dimensionale sul bordo.

Possiamo modellizzare un sistema topologico isolato introducendo due bordi mediante un profilo di massa a forma di kink-antikink infinitamente distanti (fig. 4.8). Per il bordo relativo all'antikink la procedura è la stessa, ma la soluzione normalizzabile è quella con autovalore di σ_2 pari a $+1$. L'equazione di Dirac ridotta risulta avere segno opposto:

$$-i \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) = -E \phi(x). \quad (4.58)$$

In conclusione abbiamo mostrato che su ciascun bordo è presente un fermione massless unidimensionale, rispettivamente chirale e antichirale, in modo analogo a quanto accade nell'effetto Hall.

L'esistenza degli stati chirali nel modello di Haldane può essere compresa anche risolvendo esplicitamente tale modello in una geometria con un bordo a $y = 0$. In figura 4.9(a) è mostrata la struttura delle bande nell'interfaccia in funzione del quasi-impulso k_x . Le regioni colorate mostrano le bande di conduzione e di valenza con un gap di energia che si minimizza nei punti \mathbf{q} e $-\mathbf{q}$ della zona di Brillouin. Un'unica banda, che descrive gli stati localizzati al bordo, connette la banda di

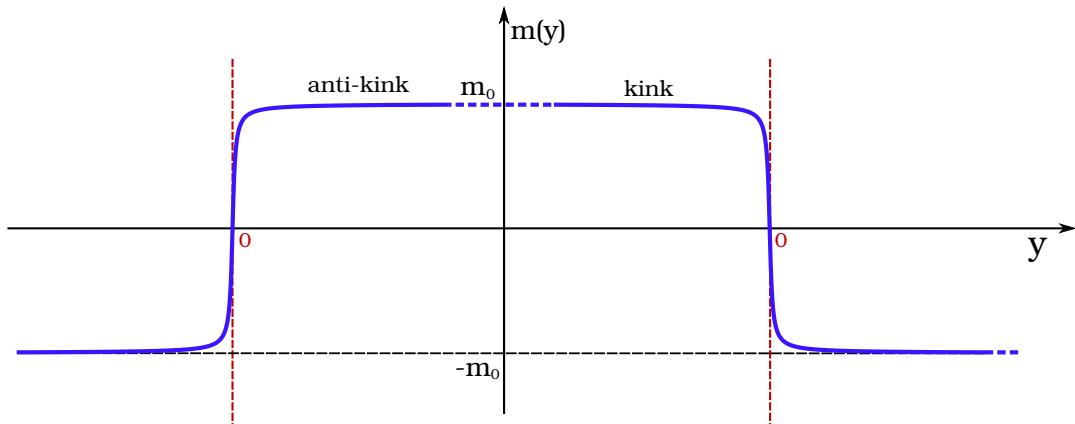


Figura 4.8: Profilo di massa a kink-antikink infinitamente distanti nel caso di un sistema con due bordi.

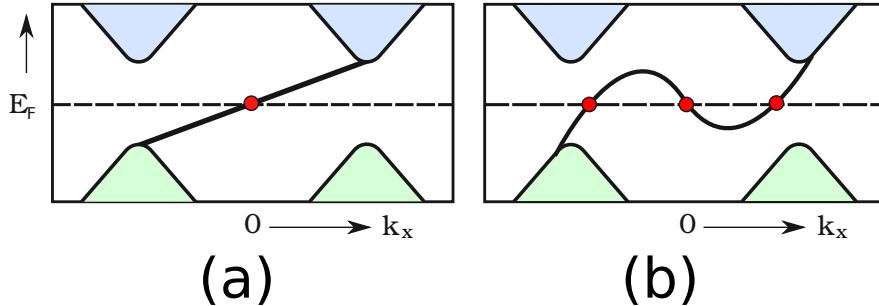


Figura 4.9: (a): Un'unica banda di stati di bordo collega gli stati di valenza da quelli di conduzione. (b): Il numero di stati chirali (R) e stati antichirali (L) può cambiare ma non la loro differenza $N_R - N_L$.

valenza in $-\mathbf{q}$ con quella di conduzione in \mathbf{q} . Modificando il sistema vicino al bordo è possibile cambiare l'hamiltoniana in modo che la dispersione degli elettroni sulla superficie sia modificata, per esempio $E(k_x)$ può sviluppare un kink. In questo modo il livello di Fermi interseca gli stati di bordo tre volte invece di una, due con velocità di gruppo positiva e una con velocità di gruppo negativa, fig. 4.9(b). La quantità invariante è la differenza tra i modi chirali (R) e i modi antichirali (L) che è fissata dalla topologica del bulk mediante la relazione

$$N_R - N_L = \Delta n, \quad (4.59)$$

dove Δn è la differenza tra i numeri di Chern dei due sistemi. L'equazione (4.59) esprime sinteticamente la *corrispondenza bulk-boundary*.

4.4 Isolanti Topologici Time-Reversal Invarianti

4.4.1 Il ruolo delle simmetrie discrete nella classificazione delle fasi topologiche

L'analisi delle fasi topologiche nei sistemi a bande di elettroni non interagenti è stata estesa in altre dimensioni e in presenza di simmetrie discrete: simmetria di invarianza temporale \mathcal{T} , di coniugazione di carica \mathcal{C} e “chirale” $\mathcal{S} = \mathcal{T}\mathcal{C}$. In figura 4.10 sono indicate la dieci classi possibili in ogni dimensione, secondo i casi in cui la simmetria è assente (“0”) o presente (“1”), in particolare presente con $\mathcal{T}^2 = \pm 1$ e/o $\mathcal{C}^2 = \pm 1$ (“+” e “-”). Il QHE appartiene alla classe *A* in due dimensioni che viola le tre simmetrie, ed è caratterizzata dalla prima classe di Chern (conducibilità) che assume i valori interi \mathbb{Z} . Come descritto nel precedente capitolo, gli isolanti topologici in due dimensioni sono \mathcal{T} invarianti e realizzano $\mathcal{T}^2 = -1$ (classe *AII*); essi sono caratterizzati da un indice \mathbb{Z}_2 . Nell'ultima sezione di questo capitolo considereremo l'estensione di quest'ultimi al caso tridimensionale.

4.4.2 Simmetria time-reversal nei sistemi a bande

Consideriamo ancora le funzioni di Bloch e analizziamo le conseguenze della simmetria \mathcal{T} . Nel capitolo precedente abbiamo visto che \mathcal{T} è un operatore anti-unitario che nel

class \ \delta	T	C	S	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0
AIII	0	0	1	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
AI	+	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
BDI	+	+	1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2
D	0	+	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
DIII	-	+	1	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$
AII	-	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0
CII	-	-	1	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0
C	0	-	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0
CI	+	-	1	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}

Figura 4.10: Classificazione delle fasi topologiche in base alle simmetrie e alla dimensionalità del sistema.

caso di particelle di spin 1/2 assume la forma:

$$\mathcal{T} = e^{i\pi S_y/\hbar} K, \quad (4.60)$$

dove K è la coniugazione complessa e S_y è la componente y dell'operatore di spin. Si verifica che $\mathcal{T}^2 = -1$. Nel caso dei sistemi a bande, poiché l'operatore \mathcal{T} cambia il segno del quasi-impulso \mathbf{k} , la condizione di invarianza sotto inversione temporale implica:

$$\mathcal{T}H(\mathbf{k})\mathcal{T}^{-1} = H(-\mathbf{k}), \quad E_n(\mathbf{k}) = E_n(-\mathbf{k}). \quad (4.61)$$

In assenza di altri numeri quantici ogni banda è simmetrica rispetto al punto della zona di Brillouin $\mathbf{k} = 0$, mentre nel caso in cui siano presenti altri numeri quantici dispari sotto \mathcal{T} la situazione risulta più complicata e non sarà qui discussa.

In un sistema fermionico gli autostati dell'hamiltoniana presentano la degenerazione di Kramers introdotta alla sezione 3.1. Per ogni valore di $E_n(\mathbf{k})$ si hanno due autostati indipendenti:

$$|\psi_1\rangle = |u_n^I(\mathbf{k})\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \mathcal{T}|\psi_1\rangle = e^{i\chi_n(\mathbf{k})} |u_n^{II}(-\mathbf{k})\rangle, \quad (4.62)$$

dove $\chi_n(\mathbf{k})$ è un fattore di fase mentre gli apici I e II sono stati aggiunti perché vi è almeno un altro numero quantico (per esempio lo spin) che può cambiare sotto \mathcal{T} . L'equazione (4.62) implica che gli autovalori dell'energia soddisfino:

$$E_n^I(\mathbf{k}) = E_n^{II}(-\mathbf{k}). \quad (4.63)$$

Questo comporta che le bande (per n fissato), anche se deformate da interazioni time-reversal invarianti come la spin-orbita, sono comunque degeneri nei cosiddetti *punti time-reversal invarianti* che corrispondono a $\mathbf{k} = 0$ e a tutti gli angoli della zona di Brillouin.

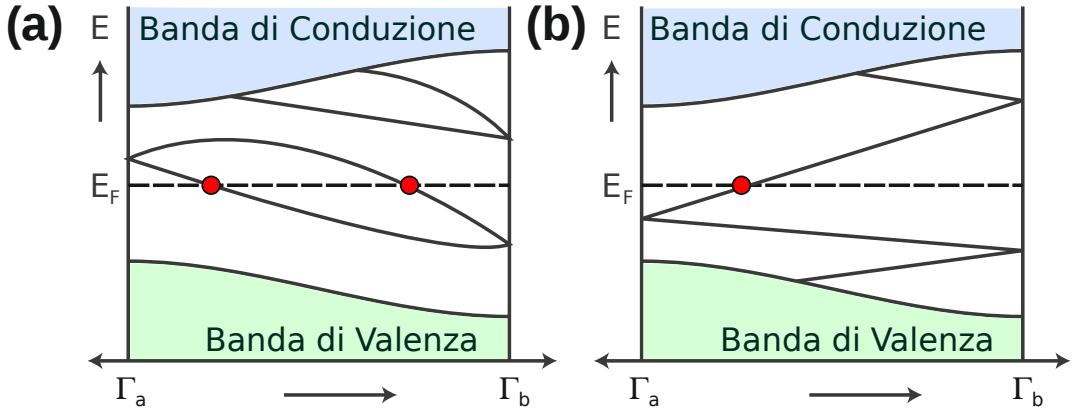


Figura 4.11: (a): Le bande degli stati di bordo sono collegati a coppia nei punti time-reversal invarianti e quindi gli stati di bordo sono instabili. (b): Il livello di Fermi interseca solo una coppia di stati di bordo che è quindi stabile.

Supponiamo di avere un sistema bidimensionale. In base alle proprietà dell’hamiltoniana, ci possono essere o non essere stati localizzati al bordo $y = 0$. Se questi esistono, l’invarianza sotto time-reversal impone che le bande corrispondenti debbano essere degeneri nei punti time-reversal invarianti Γ_a ($k_x = 0$) e Γ_b ($k_x = \pm\pi/a$). Questo si può realizzare nei 2 modi distinti illustrati in fig. 4.11, dove è rappresentata solo la metà $k_x > 0$ della zona di Brillouin poiché l’altra metà è completamente definita dalla (4.63). Nel caso (a) gli stati sono collegati a coppia e possono essere eliminati modificando in modo opportuno il potenziale chimico al bordo; nel caso (b), invece, gli stati di bordo non possono essere eliminati e sono pertanto stabili in presenza di perturbazioni che rispettano la simmetria di time-reversal. Osserviamo che, a causa di questa simmetria, se esiste uno stato chirale con $k_x = \tilde{k}_x > 0$ allora deve esistere lo stato antichirale con $k_x = -\tilde{k}_x < 0$. Inoltre, notiamo che in (a) il livello di Fermi interseca le bande un numero pari di volte per chiralità, mentre in (b) un numero dispari per chiralità. Questo è in accordo con quanto discusso in sezione 3.3, in cui abbiamo visto che in presenza di eccitazioni di bordo con un numero pari di modi chirali e antichirali è possibile introdurre un termine di massa che li rende instabili, mentre questo non è possibile per un numero dispari di modi.

Le due diverse scelte appartengono a classi topologiche distinte e sono caratterizzate da un numero topologico di bulk \mathbb{Z}_2 denominato μ il cui valore è legato al numero N_c di coppie di stati di bordo dalla relazione:

$$\mu = N_c \bmod 2. \quad (4.64)$$

In particolare è stato dimostrato che il numero topologico di bulk μ coincide con la parità di spin introdotta nel precedente capitolo nella teoria di bordo del sistema. Nel seguito discuteremo brevemente la derivazione del numero topologico di bulk \mathcal{T} -invariante μ nella teoria delle bande.

Polarizzazione \mathbb{Z}_2 \mathcal{T} -invariante

La prima formulazione dell’invariante topologico \mathbb{Z}_2 è stata presentata in [38] da Kane e Mele nell’ambito del QSHE. Successivamente sono state presentate numerose

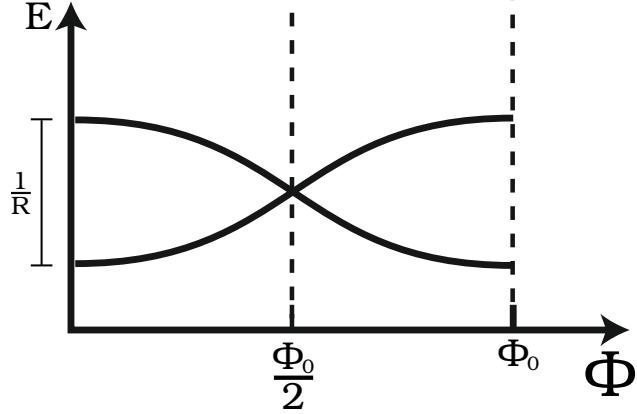


Figura 4.12: In figura sono rappresentati gli stati in funzione del flusso Φ . Se a $\Phi = \Phi_0/2$ la parità di spin cambia di segno allora lo stato fondamentale e uno stato eccitato devono essere degeneri.

formulazioni equivalenti [9] [58] [59]. In questa tesi discuteremo brevemente la derivazione di Fu e Kane presentata in [8].

In 4.3.1 abbiamo visto come la variazione della polarizzazione porti a caratterizzare gli stati del QHE mediante la prima classe di Chern della curvatura di Berry. Questa caratterizzazione non vale adesso perché la simmetria di inversione temporale richiede $\mathcal{F}(-t, -k) = -\mathcal{F}(t, k)$ e quindi annulla il numero di Chern.

Osserviamo adesso che in base al teorema di Kramers, gli autostati dell'hamiltoniana sono doppietti e quindi possono essere suddivisi in N coppie che soddisfano:

$$|u_{-k,\alpha}^I\rangle = -e^{i\chi_{k,\alpha}} \mathcal{T} |u_{k,\alpha}^{II}\rangle, \quad (4.65)$$

$$|u_{-k,\alpha}^{II}\rangle = e^{i\chi_{-k,\alpha}} \mathcal{T} |u_{k,\alpha}^I\rangle, \quad (4.66)$$

dove $\alpha = 1, \dots, N$, $\chi_{k,\alpha}$ sono fasi arbitrarie e la differenza di segno tra le due espressioni è dovuta al fatto che $\mathcal{T}^2 = -1$. Possiamo definire delle connessioni di Berry e polarizzazioni (4.19), relative ai due settori $s = I, II$,

$$P^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \mathcal{A}^s(k), \quad \mathcal{A}^s(k) = i \sum_{\alpha} \langle u_{k,\alpha}^s | \nabla_k | u_{k,\alpha}^s \rangle. \quad (4.67)$$

La simmetria \mathcal{T} implica che la somma delle polarizzazioni parziali $P = P^I + P^{II}$ si annulli, mentre la differenza può essere non banale. D'altra parte, la differenza $P_{\theta} = P^I - P^{II}$ cambia di segno sotto \mathcal{T} . Possiamo quindi definire l'indice \mathcal{T} -invariante

$$(-1)^{P_{\theta}}, \quad P_{\theta} = P^I - P^{II}. \quad (4.68)$$

Il lavoro di Kane e collaboratori ha dimostrato come questa quantità sia invariante per deformazioni dell'hamiltoniana che mantengono il gap e ne ha dato un'espressione in termine di determinanti di funzioni di Wannier [38] [8]. Come nel caso del QHE, occorre studiare la variazione di P_{θ} nell'argomento della pompa di carica. Consideriamo ancora una volta il sistema come un cilindro in cui inseriamo un tubo di flusso al suo centro che varia in modo adiabatico. L'argomento è identico a quello formulato nel capitolo 3 per il QSHE. Dalle equazioni (3.52), che caratterizzano un generico sistema time-reversal invariante, risulta che i punti nello spazio dei parametri

in cui $\Phi = 0, \Phi_0/2, \Phi_0$ sono punti time-reversal invarianti e i valori $\Phi = 0, \Phi_0$ sono identificati. Se passando da 0 a $\Phi_0/2$ la polarizzazione time-reversal cambia di parità, lo stato fondamentale ed uno stato eccitato devono necessariamente venire a coincidere in $\Phi_0/2$ per il teorema di Kramers. Ne segue che questo stato eccitato ha energia $\mathcal{O}(1/R)$, dove R sono le dimensioni del sistema, nello spettro iniziale di flusso nullo, fig. 4.12.

Se supponiamo che il cilindro contenga una sola cella del reticolo allora la situazione è equivalente a quella di fig. 4.11 dove sono rappresentati gli stati di bordo. In questo caso i punti time-reversal invarianti $k = 0$ e $k = \pi/a$ corrispondono rispettivamente ai valori di flusso $\Phi = 0$ e $\Phi = \Phi_0/2$.

In conclusione l'invariante topologico \mathbb{Z}_2 è dato dalla variazione

$$\mu = P_\theta(\Phi_0/2) - P_\theta(0) \bmod 2. \quad (4.69)$$

Nel modello di Bernevig e Zhang discusso in sezione 3.2 l'indice topologico μ assume una forma molto semplice grazie alla simmetria rotazionale generata dall'operatore s_z . In questo caso, dalle polarizzazioni parziali (4.67) si possono definire due numeri di Chern indipendenti, uno per ogni proiezione di spin, n_\uparrow e n_\downarrow . Anche se la simmetria di time-reversal impone l'annullarsi del numero di Chern totale $n_\uparrow + n_\downarrow = 0$ la differenza $n_s = n_\uparrow - n_\downarrow$, che definisce la condutività di spin quantizzata (3.24), determina l'invariante \mathbb{Z}_2 mediante la relazione

$$\mu = n_s \bmod 2. \quad (4.70)$$

Come già osservato nel capitolo 3, l'indice rimane valido anche in presenza di interazioni che generano spin flip.

4.5 Isolanti Topologici in Tre Dimensioni

Negli isolanti topologici bidimensionali, eccitazioni di bordo a massa nulla si presentano a coppie chirali e antichirali; nel caso tridimensionale invece gli stati di superficie si presentano come singoletti e la stabilità si ha per un numero dispari di modi fermionici. Nel caso minimale una sola eccitazione fermionica massless è descritta, in approssimazione di bassa energia, dalla teoria di Dirac a massa nulla in (2+1) dimensioni. Questo fermione presenta la caratteristica di avere lo spin vincolato ad essere perpendicolare all'impulso e giacente sul piano della superficie (fermione *elicale*).

La particolarità di questo sistema è evidente se lo si confronta con un sistema bidimensionale isolato time-reversal invariante. Se non è presente l'interazione di spin-orbita allora le bande hanno una doppia degenerazione poiché differenti proiezioni di spin hanno la stessa energia per ogni valore del quasi-impulso \mathbf{k} ; accendendo la spin-orbita tale degenerazione viene rimossa in tutti i punti tranne che nei punti time-reversal invarianti. La figura 4.13 mostra le bande del sistema; come si vede, qualunque sia il livello di Fermi, questo interseca un numero pari di livelli e quindi, nel linguaggio della teoria dei campi esistono un numero pari di fermioni di Dirac. Invece nel caso dell'isolante topologico (fig. 4.13) il livello di Fermi attraversa solo un livello. Il motivo per cui questo può accadere è dovuto al fatto che la superficie

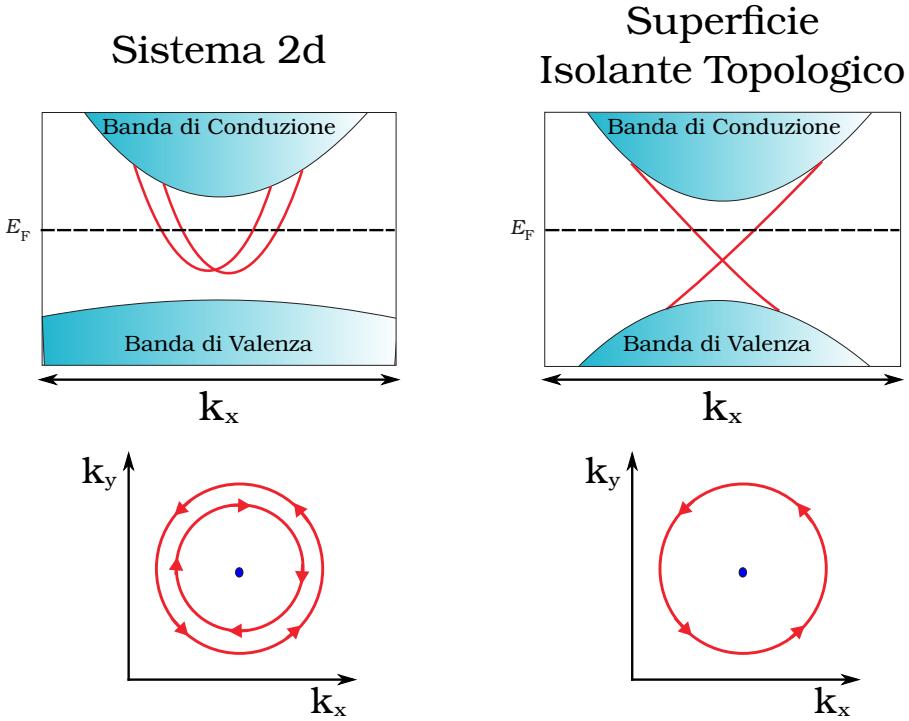


Figura 4.13: Rappresentazione schematica delle bande di una superficie bidimensionale generica con interazione di spin-orbita e di un isolante topologico. Mentre nel primo caso è possibile modificare il potenziale chimico in modo da eliminare gli stati di bordo nel caso dell'isolante topologico questo non è possibile.

di un isolante topologico non è un sistema isolato ma rappresenta l'interfaccia tra due sistemi tridimensionali non equivalenti.

La presenza di fasi topologiche time-reversal invarianti è stata teorizzata prima nel $\text{Bi}_x\text{Sb}_{1-x}$ [9] e quindi le eccitazioni di superficie fermioniche sono state osservate sperimentalmente [60]. Successivamente lo stesso comportamento è stato teorizzato e osservato nei cristalli di Bi_2Se_3 , Sb_2Te_3 , Bi_2Se_3 [61] [62].

In questa sezione discuteremo come l'invariante topologico \mathbb{Z}_2 possa essere esteso da due a tre dimensioni [58]. Discuteremo inoltre un modello hamiltoniano per il cristallo di Bi_2Se_3 e la verifica sperimentale degli stati di bordo.

4.5.1 Caratterizzazione \mathbb{Z}_2 e isolanti strong-weak

In tre dimensioni la zona di Brillouin è una varietà tridimensionale e quindi, per semplicità, supponiamo che questa sia un cubo con spigoli di $2\pi/a$. Partiamo dal caso senza invarianza \mathcal{T} . Per ogni piano xy , yz e xz è possibile definire un invariante di Chern che è ben definito. Questo è dovuto al fatto che i vari piani xy (o yz e xz) sono tutti connessi in maniera continua tra di loro e pertanto l'invariante di Chern, essendo una quantità intera, non può essere funzione di k_z . Per un sistema time-reversal invariante, invece, bisogna far riferimento all'indice \mathbb{Z}_2 e quindi la situazione è diversa. In questo caso non tutti i piani xy sono equivalenti in quanto solo quelli che corrispondono a $k_z = 0$ e $k_z = \pm\pi/a$ sono invarianti sotto time-reversal e quindi solo per questi è definito l'indice \mathbb{Z}_2 . Poiché tali piani non possono essere

connessi in modo continuo si ha l'esistenza di 2 indici, uno per il piano $k_z = 0$ e uno per i piani a $k_z = \pi/a$, che non necessariamente coincidono. In totale ci sono quindi sei invarianti \mathbb{Z}_2 che però non sono tutti indipendenti tra loro. Infatti mediante considerazioni geometriche [58] si può dimostrare l'esistenza di due relazioni che riducono il numero degli invarianti a 4: $(\mu_0; \mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Il primo invariante è detto *strong* e definisce gli *isolanti topologici strong*, mentre gli altri tre sono detti *weak* e caratterizzano gli isolanti topologici *weak*.

Un isolante topologico è *weak* ($\mu_0 = 0$) quando non avviene alcun cambiamento di indice \mathbb{Z}_2 tra i piani. Sistemi di questo tipo equivalgono a QSHE stratificati. Per contro, un isolante topologico è *strong* (e quindi $\mu_0 = 1$) quando vi è un cambiamento di indice \mathbb{Z}_2 tra i piani in ogni direzione. Tale sistema non può essere costruito a partire da alcun sistema in 2D e quindi è un nuovo stato topologico della materia, diverso dall'isolante topologico bidimensionale.

I 3 invarianti *weak* indicano la costruzione dell'isolante topologico in 3 dimensioni da due QSHE; per esempio se $\nu_1 = 1$ mentre $\nu_{2,3} = 0$ allora il sistema è equivalente a due QSHE stratificati nella direzione 1 (ovvero x). Solo l'isolante topologico *strong* è caratterizzato dal cono di Dirac discusso precedentemente. Poiché gli isolanti topologici *weak* corrispondono sostanzialmente a due QSHE questi non risultano stabili a perturbazioni della superficie e pertanto nel seguito non saranno considerati e ci riferiremo solamente agli isolanti topologici *strong*.

In conclusione, anche per gli isolanti topologici in tre dimensioni esiste una classificazione \mathbb{Z}_2 e l'invariante μ_0 è l'analogo tridimensionale del numero topologico μ trovato in 2 dimensioni.

4.5.2 Il Bi_2Se_3 come modello di isolante topologico

Il primo sistema proposto per la realizzazione degli isolanti topologici in tre dimensioni è stato il $\text{Bi}_x\text{Sb}_{1-x}$ [9] nel quale sono stati trovati stati di superficie a massa nulla mediante esperimenti di spettroscopia fotonica ARPES (*angle-resolved photoemission spectroscopy*) [60]. Tuttavia tale sistema ha un gap molto piccolo ed è soggetto a disordine oltre ad avere stati di bordo piuttosto complicati. Per queste ragioni sono stati considerati i cristalli di Bi_2Se_3 , Sb_2Te_3 , Bi_2Se_3 che presentano anch'essi fasi topologiche. In questa sottosezione discuteremo un modello hamiltoniano che descrive questa famiglia di cristalli, in particolare mostreremo l'esistenza di *stati elicali* di fermioni di Dirac in (2+1) dimensioni [61].

La cella unitaria del cristallo di Bi_2Se_3 (fig. 4.14(a)) è formata da 5 atomi: 2 atomi equivalenti di Se (Se1 e Se1') e 2 atomi equivalenti di Bi (Bi1 e Bi1') disposti in modo simmetrico rispetto al centro di inversione occupato dall'atomo inequividente di Se (Se2). In fig 4.14(b) è mostrata schematicamente la struttura a bande del cristallo in prossimità del livello di Fermi. In particolare, i livelli importanti sono quelli di momento angolare orbitale $L = 1$ (p_x, p_y, p_z) e hanno una doppia degenerazione di spin. Inoltre, poiché la geometria del sistema è stratificata in direzione dell'asse z , si ha uno splitting degli stati relativi agli orbitali p_x, p_y rispetto a quelli degli orbitali p_z che risultano quelli più vicini al livello di Fermi e quindi gli unici di interesse. Come nel caso bidimensionale, l'interazione spin-orbita $H = \lambda \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ gioca un ruolo fondamentale nella realizzazione degli isolanti topologici in tre dimensioni. Se il

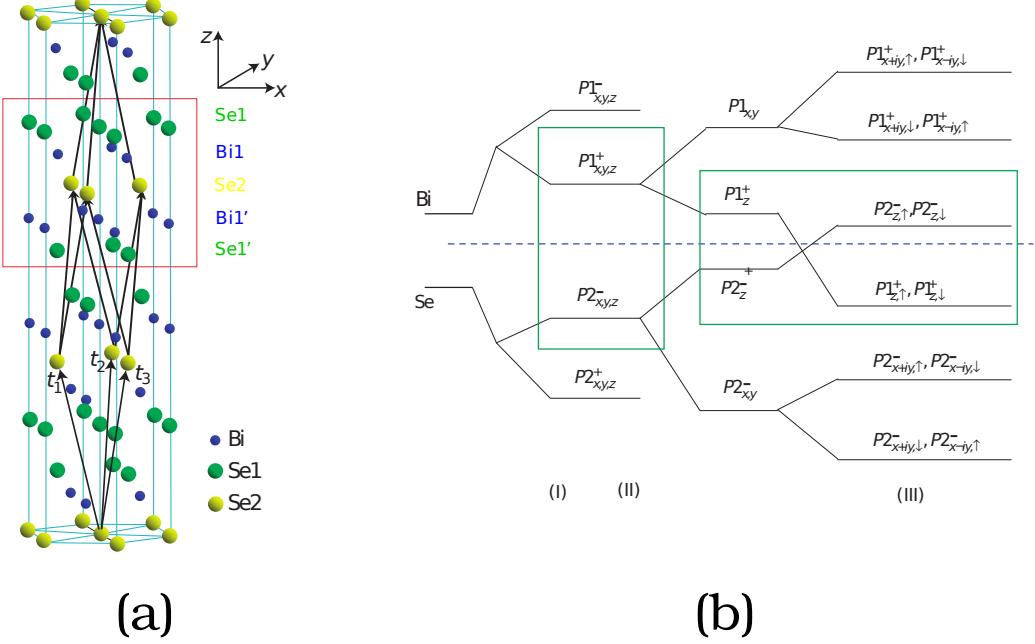


Figura 4.14: (a): Rappresentazione della struttura del reticolo del cristallo Bi_2Se_3 . (b): Evoluzione schematica della struttura a bande in prossimità del livello di Fermi. Gli orbitali p del Bi e del Se si ibridano (I); la stratificazione lungo l’asse z provoca lo splitting dei livelli p_z (II); l’introduzione dell’interazione di spin-orbita comporta il crossing tra i livelli (III).

parametro λ supera il valore critico λ_c allora le bande del Bi e del Se si invertono nel centro della zona di Brillouin. La situazione è analoga a quella bidimensionale che si riscontra nei pozzi quantici di HgTe [44] discussi nel capitolo 3.

La natura topologica del sistema è determinata dalla fisica in prossimità del livello di Fermi. Poiché le bande interessate sono quattro, l’hamiltoniana più generale time-reversal invariante che rispetta tutte le simmetrie del cristallo è data da [61]:

$$H_{\text{eff}} = H_0 + H_3, \quad (4.71)$$

$$H_0 = \epsilon(\mathbf{k}) + \mathcal{M}(\mathbf{k})\Gamma_5 + \mathcal{B}(k_z)\Gamma_4 k_z + \mathcal{A}(k_{||})(\Gamma_1 k_y - \Gamma_2 k_x), \quad (4.72)$$

$$H_3 = R_1\Gamma_3(k_x^3 - 3k_x k_y^2) + R_2\Gamma_4(3k_x^2 k_y - k_y^3), \quad (4.73)$$

dove le Γ_i sono matrici che soddisfano le relazioni di anticommutazione $\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{i,j}$ e dove $\epsilon(\mathbf{k}) = C_0 + C_1 k_z^2 + C_2 k_{||}^2$, $\mathcal{M}(\mathbf{k}) = M_0 + M_1 k_z^2 + M_2 k_{||}^2$, $\mathcal{B}(k_z) = B_0 + B_2 k_z^2$ e $k_{||} = k_x^2 + k_y^2$.

Stati di Bordo

Dall’hamiltoniana (4.73) è possibile dimostrare l’esistenza degli stati di bordo e descriverne la dinamica.

Supponiamo quindi che il cristallo occupi solo la parte di spazio $z > 0$, in questo caso i quasi-momenti k_x e k_y rimangono buoni numeri quantici mentre per k_z facciamo la sostituzione $k_z \rightarrow -i\partial_z$. Per quest’ultimo motivo conviene separare la parte di hamiltoniana (4.71) che dipende da k_z come segue:

$$H_{\text{eff}} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}_1, \quad (4.74)$$

$$\tilde{H}_0 = \tilde{\epsilon}(k_z) + \tilde{M}(k_z)\Gamma_5 + B_0(k_z)\Gamma_4 k_z, \quad (4.75)$$

$$\tilde{H}_1 = C_2 k_{||}^2 + M_2 k_{||}^2 \Gamma_5 + A_0(\Gamma_1 k_y - \Gamma_2 k_x) + H_3. \quad (4.76)$$

Scegliendo una base in cui \tilde{H}_0 sia diagonale a blocchi, l'equazione agli autovalori $\tilde{H}_0(k_z \rightarrow -i\partial_z)\Psi(z) = E\Psi(z)$ per gli autostati

$$\Psi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

è data da

$$[\tilde{\epsilon}(-i\partial_z) + \tilde{M}(-i\partial_z)\tau_3 - iB_0\tau_2\partial_z] \psi_0(z) = E\psi_0(z). \quad (4.78)$$

Trascurando per semplicità il termine $\tilde{\epsilon}$ si trovano le soluzioni con autovalore $E = 0$ normalizzabili

$$\psi_0(z) = \begin{cases} a(e^{\lambda_1 z} - e^{\lambda_2 z})\phi_+, & B_0/M_1 > 0, \\ c(e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z})\phi_-, & B_0/M_1 < 0, \end{cases} \quad (4.79)$$

dove

$$\lambda_{1,2} = -\frac{B_0}{M_1} \pm \sqrt{4\frac{M_0}{M_1} + \left(\frac{B_0}{M_1}\right)^2}. \quad (4.80)$$

Queste soluzioni esistono solo se vale la condizione $M_0M_1 < 0$ che equivale alla presenza del crossing tra le bande [61] e quindi solo se siamo nella fase di isolante topologico.

La dinamica degli stati di bordo può essere determinata proiettando l'operatore \tilde{H}_1 nel sottospazio generato da $\{\Psi_{\uparrow}, \Psi_{\downarrow}\}$. Si ottiene:

$$H_{\text{sur}} = \tilde{C}_0 + \tilde{C}_2 k_{||}^2 + \tilde{A}(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) + \tilde{R}(k_+^3 + k_-^3)\sigma_z, \quad (4.81)$$

dove $k_{\pm} = k_x \pm ik_y = k_{||}e^{i\theta}$. Per una completa descrizione della dinamica è necessario considerare lo spin. In [61] viene trovata la forma esplicita degli operatori di spin:

$$S_x = S_{x0}\sigma_x, \quad S_y = -S_{y0}\sigma_y, \quad S_z = S_{z0}\sigma_z, \quad (4.82)$$

con $S_{x0} = S_{y0} = S_{||}$ e S_{z0} costanti positive.

Una semplice conseguenza delle equazioni (4.81) e (4.82) è che gli stati di bordo degli isolanti topologici 3D sono descritti dall'equazione di Dirac in (2+1) dimensioni nel limite di bassa energia. Per $\mathbf{k} \rightarrow 0$ l'hamiltoniana (4.81) si riduce infatti al termine

$$H = \tilde{A}(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) + \text{cost.} \quad (4.83)$$

Supponendo che $\tilde{A} > 0$, gli autostati e gli autovalori sono:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{k_y - ik_x}{|\mathbf{k}|} \end{pmatrix}, \quad E_{\pm} = \pm \tilde{A} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (4.84)$$

dove il \pm indica gli stati di particella e di lacuna. Scegliendo la soluzione di particella (+), i valori di aspettazione delle componenti dello spin si possono calcolare facilmente:

$$\langle S_x \rangle = S_{||} \frac{k_y}{\mathbf{k}^2}, \quad \langle S_y \rangle = S_{||} \frac{k_x}{\mathbf{k}^2}, \quad \langle S_z \rangle = 0. \quad (4.85)$$

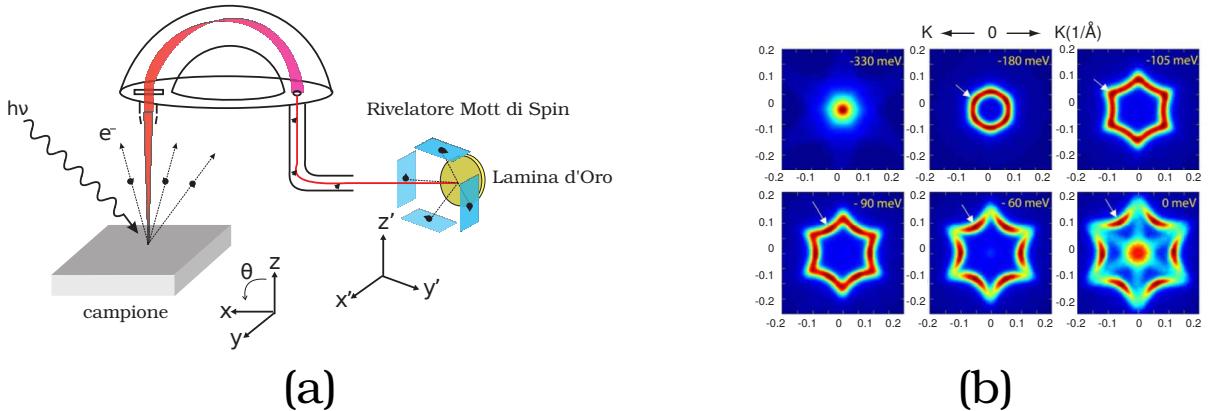


Figura 4.15: (a): Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale ARPES. (b): Osservazione degli stati di superficie per diversi valori del livello di Fermi.

Questo risultato mostra la natura *elicale* degli stati di bordo il cui spin è perpendicolare all'impulso e parallelo alla superficie.

La verifica sperimentale dell'esistenza degli stati di bordo nel Bi_2Se_3 è riportata in [62] [63], dove si è utilizzato il metodo spin-ARPES. Un fascio di radiazione monocromatica incide sul campione di isolante topologico; gli elettroni sulla superficie vengono così emessi per effetto fotoelettrico in tutte le direzioni. Mediante un analizzatore di elettroni che copre una piccola porzione di angolo solido si può misurare l'energia cinetica E_{cin} degli elettroni emessi per un dato angolo. In questo modo anche l'impulso \mathbf{p} risulta completamente determinato: il suo modulo è dato da $p = \sqrt{2mE_{cin}}$ mentre le componenti parallele e perpendicolari alla superficie del campione sono ottenute dagli angoli di emissione polari θ e azimutali ϕ . Se si suppone che gli elettroni non siano interagenti e se si trascura l'impulso del fotone possiamo correlare l'energia cinetica e l'impulso dell'elettrone all'energia di legame e al quasi-momento $\hbar\mathbf{k}$ nel cristallo:

$$E_{cin} = h\nu - \zeta, \quad (4.86)$$

$$\mathbf{p}_{||} = \hbar\mathbf{k}_{||} = \sqrt{2mE_{cin}} \sin \theta, \quad (4.87)$$

dove ν è la frequenza del fotone e ζ rappresenta il lavoro di estrazione necessario a strappare gli elettroni di valenza. Lo spin dell'elettrone viene invece determinato da un rivelatore Mott di spin. In figura 4.15(a) è rappresentato schematicamente l'apparato sperimentale mentre in figura 4.15(b) sono mostrati gli stati di superficie del Bi_2Te_3 . Come si vede, per piccoli valori di $|\mathbf{k}|$ la dispersione a cono di Dirac è una buona approssimazione. Per valori maggiori il cono si deforma e gli stati di superficie assumono una forma esagonale dovuta ai termini cubici in (4.81).

Capitolo 5

Teoria dei Campi di Bordo degli Isolanti Topologici Tridimensionali

Questo capitolo contiene i risultati originali del lavoro di tesi. Nell’ambito della descrizione degli stati di bordo mediante la teoria dei campi presenteremo due argomenti. Nel primo deriveremo i fermioni a massa nulla sul bordo bidimensionale mediante l’argomento di riduzione dimensionale di Jackiw e Rebbi. Questo metodo ci permetterà di chiarire un’ambiguità nel segno dell’anomalia \mathbb{Z}_2 dei fermioni di bordo e quindi otterremo una dimostrazione completa della cancellazione dell’anomalia nel sistema complessivo di bulk e bordo. Questa cancellazione ha caratteristiche diverse da quelle del caso bidimensionale (capitolo 2) noto come *anomaly inflow*.

Il secondo risultato originale è l’analisi dell’indice di stabilità \mathbb{Z}_2 per gli isolanti topologici tridimensionali nel contesto della teoria fermionica di bordo. Seguiremo la stessa strategia del caso bidimensionale: calcoleremo la funzione di partizione del fermione nella geometria del toro T^3 e analizzeremo l’evoluzione degli stati di bordo al variare dei flussi aggiunti al sistema. Verificheremo quindi in modo esplicito l’argomento di flusso di Fu, Kane e Mele nel caso tridimensionale e le trasformazioni che sono indotte sui settori periodici e anti-periodici della teoria fermionica. Infine verificheremo le proprietà di invarianza modulare delle funzioni di partizione.

5.1 Fermioni di Dirac in (3+1) e (2+1) Dimensioni

In questa sezione ricordiamo alcune proprietà dei fermioni in D dimensioni prestando particolare attenzione ai casi (3+1) e (2+1) dimensionali. In particolare ci concentriamo sul loro comportamento sotto la trasformazione di inversione temporale \mathcal{T} . I casi con D pari e dispari differiscono sostanzialmente e quindi devono essere discussi separatamente.

In $D = 2k$ dimensioni spazio-temporali, la densità di lagrangiana di un fermione di Dirac è [64]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (5.1)$$

dove ψ è un campo spinoriale a 2^k componenti, mentre le matrici γ^μ $2^k \times 2^k$ soddisfano l'algebra di Clifford,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 2k-1, \quad (5.2)$$

con $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. L'hamiltoniana della teoria,

$$H = -i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0 \equiv \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + m\beta, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.3)$$

è hermitiana se le matrici γ^μ soddisfano la relazione:

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}. \quad (5.4)$$

Per $D = 2k$ esiste un'altra matrice γ^{2k+1} hermitiana che anticommuta con tutte le γ^μ definita nel seguente modo:

$$\gamma^{2k+1} = i\gamma^0\gamma^1 \dots \gamma^{2k-1}. \quad (5.5)$$

Gli autostati di questa matrice sono stati a *chiralità* ben definita e γ^{2k+1} genera simmetrie chirali se $m = 0$. Notiamo che le matrici γ^μ e $-\gamma^\mu$ corrispondono a rappresentazioni equivalenti poiché esiste una matrice S per cui

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} = -\gamma^\mu, \quad S = e^{i\frac{\pi}{2}\gamma^{2k+1}}. \quad (5.6)$$

La matrice S è anche unitaria per soddisfare (5.4). Abbiamo quindi che il segno della massa m nell'equazione di Dirac è ininfluente.

In dimensioni dispari $D = 2k + 1$, le matrici gamma hanno dimensione $2^{2k} \times 2^{2k}$ e la matrice γ^{2k+1} rappresenta la direzione $\mu = 2k + 1$, quindi non esiste il concetto di chiralità. Inoltre, le matrici γ^μ e $-\gamma^\mu$ danno luogo a rappresentazioni inequivalenti; ovvero non esiste una S che realizza la (5.6). La differenza è rilevante per $m \neq 0$, dove il segno della massa nell'equazione di Dirac è distinguibile.

5.1.1 Riduzione dimensionale da D=3+1 a (2+1)

Sceglieremo la seguente rappresentazione delle matrici γ^μ e γ^5 in $D = 3 + 1$:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{1,2} = \begin{pmatrix} i\sigma^{1,2} & 0 \\ 0 & -i\sigma^{1,2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

perché particolarmente comoda per la riduzione dimensionale. In questa rappresentazione l'operatore di time-reversal \mathcal{T} è dato da:

$$\mathcal{T} = \eta \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} K, \quad \mathcal{T}^2 = -1, \quad (5.8)$$

dove η è un fattore di fase mentre K rappresenta la coniugazione complessa. In particolare la lagrangiana (5.1) (e l'hamiltoniana (5.3)) sono invarianti sotto \mathcal{T} sia nel caso massless che nel caso massivo.

Osserviamo che nella rappresentazione (5.7), tutte le matrici gamma sono diagonali a blocchi tranne la γ^3 . Da questo segue che la riduzione dimensionale, effettuata

ponendo $p_3 = 0$, porta un singolo fermione di Dirac in due fermioni in (2+1) dimensioni, ψ_+, ψ_- , con lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{2+1}^+ = \bar{\psi}_+(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_+, \quad (5.9)$$

$$\mathcal{L}_{2+1}^- = \bar{\psi}_-(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi_-. \quad (5.10)$$

Come si vede da queste ultime equazioni i due fermioni ψ_+, ψ_- appartengono a due rappresentazioni inequivalenti discriminate dal segno della massa m . Per quanto riguarda il comportamento sotto inversione temporale, notiamo che dalla (5.8) si ha che sotto time-reversal ψ_+ e ψ_- seguono le trasformazioni:

$$\mathcal{T} : \psi_+ \longrightarrow \eta\sigma_2 K \psi_-, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{T} : \psi_- \longrightarrow \eta\sigma_2 K \psi_+, \quad (5.12)$$

e quindi

$$\mathcal{T} : \mathcal{L}_{2+1}^\pm \longrightarrow \mathcal{L}_{2+1}'^\pm = \mathcal{L}_{2+1}^\mp. \quad (5.13)$$

In particolare il termine di massa sotto l'inversione temporale cambia di segno e quindi rompe la simmetria di time-reversal. Invece la teoria massless risulta invariante sotto \mathcal{T} (a livello classico). È possibile avere una teoria massiva \mathcal{T} -invariante a patto di considerare coppie di fermioni ψ_\pm e questo è in accordo con il fatto che la teoria di Dirac in (3+1) dimensioni rispetta \mathcal{T} .

Quest'ultima osservazione ci permette di concludere che, per hamiltoniane quadratiche, la teoria di bordo di un fermione è stabile sotto perturbazioni che non rompono la simmetria \mathcal{T} poiché non può essere aggiunto un termine di massa. Ritroviamo quindi la classificazione \mathbb{Z}_2 degli isolanti topologici tridimensionali \mathcal{T} -invarianti, per fermioni non interagenti. L'argomento di stabilità è lo stesso descritto precedentemente in due dimensioni (cap. 3.3).

5.2 Anomalia di Parità in (2+1) Dimensioni

La discussione presentata nella sezione precedente è totalmente classica. In questa sezione vedremo che la quantizzazione del campo di Dirac in (2+1) dimensioni accoppiato ad un background elettromagnetico rompe la simmetria \mathcal{T} anche per teorie massless in conseguenza dell'anomalia di parità (e time-reversal). Questo comporta che, affinché l'isolante topologico sia \mathcal{T} invariante, ci debba essere un meccanismo di cancellazione dell'anomalia, che sarà discusso nella prossima sezione.

L'anomalia di parità in (2+1) dimensioni è stata studiata per la prima volta da Redlich in [13] [14] sia con il calcolo perturbativo a one-loop che con il metodo del tempo proprio di Schwinger [65]. Discutiamo il secondo metodo perché più utile ai nostri scopi.

L'azione effettiva della teoria è data da:

$$e^{iS_{eff}[A]} = \int d\bar{\psi} d\psi \ e^{i \int d^3x \ \bar{\psi}(i\hat{\partial} + e\hat{A} + m)\psi}, \quad (5.14)$$

dove la massa m può essere sia positiva che negativa in modo da trattare entrambe le rappresentazioni inequivalenti. Con il metodo di Schwinger è possibile calcolare la

corrente $\langle J^\mu \rangle$ e quindi risalire all'azione effettiva integrando la relazione

$$\langle J^\mu \rangle = \frac{\delta}{\delta A_\mu} S_{eff}[A]. \quad (5.15)$$

Il calcolo della corrente e dell'azione effettiva può essere fatto in modo esatto se si considera un campo elettromagnetico omogeneo e costante ($F^{\mu\nu} = \text{cost}$); in questo caso il potenziale può essere scritto come:

$$A^\mu = \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda}}{2} x_\nu {}^*F_\lambda, \quad {}^*F_\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (5.16)$$

Il metodo consiste nel determinare la funzione di Green dell'operatore di Dirac,

$$(i\hat{\partial} + e\hat{A} + m)G(x, y) = \delta^3(x - y), \quad (5.17)$$

in termini della quale la corrente è scritta come:

$$\langle J^\mu \rangle = ie \operatorname{tr} [\gamma^\mu G(x, y)]|_{x \rightarrow y}. \quad (5.18)$$

Qui ci limitiamo a riportare il risultato ottenuto in [14]. La corrente risulta essere:

$$\langle J^\mu \rangle = \frac{m}{|m|} \frac{e^2}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}, \quad (5.19)$$

mentre l'azione effettiva è

$$S_{eff}[A] = S_{eff}^{NA}[A, m] + \frac{m}{|m|} \frac{e^2}{8\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (5.20)$$

dove il termine $S_{eff}^{NA}[A, m]$ è un termine non analitico in A_μ ma \mathcal{T} -invariante.

Notiamo che il termine di Chern-Simons di rottura esplicita di \mathcal{T} e \mathcal{P} sopravvive nel limite $m \rightarrow 0$, dove diventa quindi un'anomalia \mathbb{Z}_2 . Il segno del termine anomalo dipende dal segno della massa: nel caso di due fermioni con masse opposte si cancella; questo è il caso della riduzione dimensionale da un fermione di Dirac in $D = 3 + 1$. Nel caso di un singolo fermione in $D = 2 + 1$, l'anomalia \mathbb{Z}_2 è ineliminabile (a meno che non si rinunci all'invarianza di gauge).

Il termine anomalo (5.20) nell'azione effettiva si ottiene anche partendo dalla teoria a massa nulla. In questo caso, la massa nella (5.20) corrisponde al regolatore delle divergenze ultraviolette (ad esempio nella regolarizzazione di Pauli-Villars), il cui segno è arbitrario. Nel caso di una coppia di fermioni massless, si può scegliere i segni opposti e cancellare l'anomalia, oppure uguali ottenendo una violazione doppia. La scelta fra le due opzioni è determinata da ulteriori condizioni fisiche, che discuteremo nella prossima sezione.

5.3 Cancellazione delle Anomalie negli Isolanti Topologici Tridimensionali

Nel capitolo 4 abbiamo discusso un modello microscopico di fermioni nelle bande per gli isolanti topologici tridimensionali che prevede l'esistenza di fermioni a massa

nulla elicali sul bordo. La stabilità di questa fase topologica è legata ad un indice \mathbb{Z}_2 corrispondente al numero di modi massless modulo due, in completa analogia col caso bidimensionale. In questa sezione vogliamo riottenere questi risultati basandoci sulla teoria di campo effettiva di bordo ed associare la stabilità alla presenza di un'anomalia \mathbb{Z}_2 . Anche in questo approccio, ci guida l'analogia con il quantum spin Hall effect del capitolo 3. Estenderemo a tre dimensioni l'argomento di stabilità basato sul teorema di Kramers e mostreremo che il caso stabile è anomalo, dove la quantità anomala è ancora la parità di spin delle eccitazioni di bordo.

In questa sezione chiariremo un aspetto che a prima vista potrebbe sembrare diverso tra due e tre dimensioni. Nel caso bidimensionale l'anomalia del QSHE si cancella nel sistema complessivo, composto da due bordi ed il bulk, ad esempio nella geometria dell'anello, mediante il meccanismo dell'*anomaly inflow*, ovvero grazie alla corrente di spin di bulk. Nell'isolante topologico tridimensionale non è presente una corrente di bulk e quindi la cancellazione globale dell'anomalia non è evidente.

Mostreremo adesso che la cancellazione avviene comunque, ma con modalità diverse. Utilizzeremo due argomenti complementari: la riduzione dimensionale dei fermioni di Jackiw e Rebbi e lo studio dell'azione effettiva di bulk.

5.3.1 Metodo di Jackiw e Rebbi

Nello studio delle dieci fasi topologiche di elettroni non interagenti si è trovato che ogni classe può essere associata ad una teoria di Dirac massiva nel bulk, tale che le eccitazioni topologiche di bordo sono derivate mettendo un profilo di massa $m(z)$ a forma di kink. In termini euristici, vicino ai punti di incrocio delle bande il fermione acquista una invarianza per traslazioni e di Lorentz nel limite di bassa energia, ovvero i dettagli della struttura a bande diventano irrilevanti.

Effettuiamo la riduzione dimensionale del fermione massivo di bulk col metodo di Jackiw e Rebbi, come già descritto nei casi di una e due dimensioni (poliacetilene e modello di Haldane), allo scopo di determinare il segno della massa degli elettroni di bordo. Come visto alla sezione precedente, questo segno determina il valore dell'anomalia di parità.

La teoria di Dirac di bulk dell'isolante topologico tridimensionale (classe AII) è descritta dalla seguente hamiltoniana:

$$H(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta m = \begin{pmatrix} m & \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -m \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Nella nostra discussione useremo, per comodità, la seguente rappresentazione:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Analogamente a quanto fatto nel capitolo precedente deriviamo gli stati di bordo usando un profilo di massa dato da una funzione monotona $m = m(z)$, tale che $m(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} m_0$, $m(0) = 0$ e $m(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} -m_0$. Facendo la sostituzione $\mathbf{k} \rightarrow -i\nabla$ si ottiene la seguente hamiltoniana

$$H = -i\gamma^0\gamma^1\partial_x - i\gamma^0\gamma^2\partial_y - i\gamma^0\gamma^3\partial_z + \gamma^0m(z) \equiv H_0 + H_z \quad (5.23)$$

Cerchiamo gli stati di bassa energia che corrispondono agli autostati di H_z con autovalore nullo. Come nel caso del modello di Haldane, tali autostati nulli sono ottenuti per separazione delle variabili e sono quindi anche autostati dell'intera hamiltoniana H . Consideriamo quindi l'espressione:

$$H_z\psi = (-i\gamma^0\gamma^3\partial_z + \gamma^0m(z))\psi = 0, \quad (5.24)$$

moltiplicando a sinistra per $\gamma^3\gamma^0$ si ottiene

$$(i\partial_z + \gamma^3m(z))\psi = 0. \quad (5.25)$$

Per risolvere la (5.25) supponiamo che l'autostato sia della forma

$$\psi = f_{\pm}(z)u_{\pm}(x, y), \quad (5.26)$$

dove u_{\pm} è uno spinore autostato di γ^3 , ovvero tale che $\gamma^3u_{\pm} = \pm iu_{\pm}$. In questo caso si ottiene l'equazione ridotta

$$(\partial_z \pm m(z))f_{\pm}(z) = 0, \quad (5.27)$$

con soluzione

$$f_{\pm} \propto e^{\mp \int_0^z dz' m(z')}. \quad (5.28)$$

Affinché la soluzione sia normalizzabile, è necessario prendere la soluzione relativa all'autostato di γ^3 con autovalore negativo ottenendo

$$\psi(x, y, z) = e^{\int_0^z dz' m(z')}u_{-}(x, y). \quad (5.29)$$

Questo stato è localizzato attorno al punto in cui la massa $m(z)$ cambia di segno.

La dinamica delle eccitazioni al bordo $z = 0$ è determinata da H_0 ; è conveniente proiettare H_0 nel sottospazio generato da u_- . Per farlo definiamo il seguente proiettore:

$$P_- = \frac{1 + i\gamma^3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

dal quale si ottiene

$$P_- H P_- = P_- H_0 P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_y\sigma_1 - k_x\sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Poiché

$$u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

si ottiene l'equazione agli autovalori dell'hamiltoniana della teoria di Dirac massless in (2+1) dimensioni

$$(k_y\sigma_1 - k_x\sigma_2)\chi = E\chi. \quad (5.33)$$

Notiamo quindi che il risultato del fermione elicale, già derivato in sezione 4.5.2, è una conseguenza universale della riduzione dimensionale di Jackiw e Rebbi da (3+1) a (2+1) dimensioni.

In un sistema con due bordi lungo l'asse z , il secondo bordo è descrivibile da un profilo di massa $m(z) \rightarrow -m(z)$. In questo caso l'autovalore di γ^3 positivo soddisfa la condizione di normalizzabilità. Il proiettore è adesso

$$P_+ = \frac{1 - i\gamma^3}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Come è facile verificare, ponendo $u_+ = (\chi, 0)$, si ottiene la stessa equazione di Dirac (5.33). Questo risultato va contrastato con il caso della riduzione da due a una dimensione, nel quale i fermioni ai due bordi avevano chiralità opposta. In conclusione abbiamo derivato le proprietà dei fermioni localizzati al bordo del sistema.

Abbiamo adesso gli elementi per discutere la cancellazione dell'anomalia di parità fra i due bordi. Introduciamo l'interazione elettromagnetica ed otteniamo l'azione effettiva con termine anomalo (5.20). Essendo i fermioni a massa nulla, dobbiamo determinare il segno delle masse (regolatori). Consideriamo il seguente argomento. L'anomalia si realizza nel limite $m \rightarrow 0$ di annullamento della rottura esplicita. Per il sistema bulk più boundary è naturale introdurre una rottura esplicita nel bulk tridimensionale aggiungendo il seguente termine nell'hamiltoniana di Dirac (5.21):

$$H_{\tilde{m}} = i\gamma^0\gamma^5\tilde{m}. \quad (5.35)$$

Tale termine cambia di segno sotto \mathcal{T} e apre un gap al bordo rendendo i fermioni massivi con massa \tilde{m} . La cosa interessante è che in questo modo le eccitazioni nei due bordi risultano appartenere a due rappresentazioni inequivalenti. Per vedere questo è sufficiente proiettare il termine con i due proiettori:

$$P_- i\gamma^0\gamma^5 P_- = i\gamma^0\gamma^5 P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad P_+ i\gamma^0\gamma^5 P_+ = i\gamma^0\gamma^5 P_+ = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Quindi in conclusione le due teorie di bordo sono date da

$$H_- = k_y\sigma_1 - k_x\sigma_2 + \tilde{m}\sigma_3, \quad \mathcal{L}_- = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - \tilde{m})\psi, \quad (5.37)$$

$$H_+ = k_y\sigma_1 - k_x\sigma_2 - \tilde{m}\sigma_3, \quad \mathcal{L}_+ = \bar{\psi}(i\hat{\partial} + \tilde{m})\psi. \quad (5.38)$$

La quantizzazione della teoria di bordo in presenza di accoppiamento con il campo elettromagnetico esterno porta, come discusso nella sezione precedente, alla nascita del termine anomalo di Chern-Simons che ha quindi segno opposto nei due bordi. Nel limite $\tilde{m} \rightarrow 0$, otteniamo:

$$S_{eff}^- = -\frac{e^2}{8\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (5.39)$$

$$S_{eff}^+ = +\frac{e^2}{8\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (5.40)$$

Abbiamo quindi una caratterizzazione non ambigua dell'anomalia \mathbb{Z}_2 dei fermioni bidimensionali al bordo di un isolante topologico tridimensionale. La cancellazione dell'anomalia tra i due bordi si ottiene aggiungendo un termine θ , come spiegato nel prossimo paragrafo.

5.3.2 Azione effettiva del bulk tridimensionale

Analogamente al caso degli stati topologici bidimensionali, deriviamo l'azione effettiva di bulk valida ad energie sotto il gap, che descrive le proprietà topologiche del sistema. Questa azione può essere ottenuta da principi generali di simmetria e dimensionalità, nonché dalla compatibilità con la fisica di bassa energia del bordo.

In (3+1) dimensioni, l'introduzione di un campo A_μ esterno induce un'azione effettiva Lorentz invariante che all'ordine più basso nel numero di derivate può avere due termini, ovvero il termine di Maxwell e il termine θ abeliano:

$$S = S_M + S_\theta, \quad (5.41)$$

$$S_M = \int d^4x \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.42)$$

$$S_\theta = \frac{\theta e^2}{4\pi^2} \int d^4x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\theta e^2}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}. \quad (5.43)$$

Per inversione temporale, $(A^0, \mathbf{A}) \rightarrow (A^0, -\mathbf{A})$, il primo termine è invariante mentre il secondo cambia di segno. Il termine θ determina le proprietà topologiche. Ricordiamo che questa espressione è una derivata totale, ed in un sistema con bordo si riduce al termine di Chern-Simons sul bordo,

$$S_\theta = \frac{\theta e^2}{8\pi^2} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x n^\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (5.44)$$

dove n^σ è la normale alla superficie $\partial\mathcal{M}$, diretta esternamente al volume \mathcal{M} .

Se consideriamo un isolante topologico con due bordi lungo l'asse z a $z = \pm L$, concludiamo che l'espressione dell'azione di bulk S_θ con $\theta = \pi$ è uguale ed opposta al termine dovuto all'anomalia \mathbb{Z}_2 sui due bordi, (5.39),(5.40), del paragrafo precedente. Si ottiene quindi la cancellazione complessiva dell'anomalia:

$$S_{tot} = S_\theta + S_{eff}^- + S_{eff}^+ = 0, \quad \theta = \pi. \quad (5.45)$$

Questa cancellazione verifica la simmetria \mathcal{T} dell'isolante topologico tridimensionale. Osserviamo la differenza con la cancellazione dell'anomalia chirale $U(1)$ nel QHE (*anomaly inflow*). In quel caso l'invarianza di gauge assicura la conservazione complessiva della carica del sistema, corrispondente ad una corrente Hall di bulk. Nel precedente caso abbiamo la cancellazione di un'anomalia discreta \mathbb{Z}_2 senza correnti di bulk. Ciononostante il termine θ produce degli effetti fisici interessanti che discuteremo successivamente.

In presenza di N_f fermioni elicali al bordo, il termine di Chern-Simons anomalo viene moltiplicato proporzionalmente e la cancellazione si realizza per $\theta = N_f\pi$. Il caso $N_f > 1$ però non è significativo, perché in quel caso i fermioni, seppur anomali, possono acquistare massa a coppie con interazioni quadratiche \mathcal{T} -invarianti e quindi scompaiono dalla fisica di bassa energia. Pertanto i casi importanti sono $\theta = 0$, ovvero l'isolante banale, e $\theta = \pi$, l'isolante topologico. Ritroviamo quindi la caratterizzazione \mathbb{Z}_2 di questa fase topologica nel valore del parametro θ .

Consideriamo adesso le proprietà dell'isolante topologico in una varietà (3+1)-dimensionale compatta. In questo caso $S_\theta = \theta C_2$ dove C_2 è un invariante topologico

detto seconda classe di Chern, che assume valori interi se A_μ possiede configurazioni topologicamente non banali; questo può avvenire per esempio quando lo spazio-tempo ha condizioni periodiche al contorno $\mathcal{M} = T^4$. Poiché $C_2 \in \mathbb{Z}$, il contributo di S_θ alla funzione di partizione è $e^{i\theta n}$ e quindi θ è definito a meno di 2π , ovvero è un angolo. In particolare, i valori non banali $\theta = \pm\pi$ sono identificati e quindi S_θ risulta invariante sotto \mathcal{T} .

In conclusione, abbiamo mostrato che l'isolante topologico tridimensionale \mathcal{T} -invariante è caratterizzato dall'azione effettiva S_θ con $\theta = \pi$. Nel caso di geometrie con bordo, l'azione di bulk si cancella con il contributo anomalo di bordo, mentre nel caso di spazio-tempo compatto il termine S_π può essere non nullo ed in tal caso è \mathcal{T} -invariante.

5.3.3 Conseguenze fisiche del termine θ

Effetto Hall di superficie

Consideriamo il caso in cui il bordo dell'isolante topologico sia messo a contatto con un materiale magnetico ottenendo una rottura superficiale della simmetria \mathcal{T} . In questo caso i fermioni di bordo acquistano una massa che viola \mathcal{T} e quindi scompaiono dalla teoria di bassa energia. Ne segue che la cancellazione bulk-bordo (5.45) non ha luogo e il termine θ induce un'azione effettiva (5.40) S_{eff}^\pm di Chern-Simons nel bordo massivo. Si realizza quindi un effetto Hall superficiale con conducibilità ($c, \hbar \neq 1$):

$$\sigma_H = \frac{1}{2} \frac{e^2}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{h}, \quad (5.46)$$

corrispondente a $\nu = 1/2$. In presenza di N_f fermioni sugli altri bordi \mathcal{T} -invarianti, il valore $\theta = N_f\pi$ implicherebbe $\nu = N_f/2$ sul bordo massivo, ma questa eventualità è soppressa dall'instabilità di $N_f > 1$ stati di bordo. Si noti che il valore $\nu = (2n+1)/2$ è caratteristico dell'effetto Hall intero (livelli di Landau) per fermioni relativistici. Osserviamo infine che la possibilità di introdurre interazioni fra gli elettroni Hall al bordo dell'isolante topologico 3d offre interessanti prospettive di ricerca di nuove fasi topologiche accoppiate 3d-2d ancora inesplorate [66].

Effetto magneto-elettrico

Altri effetti fisici del termine θ si ottengono studiando le modifiche prodotte sulla polarizzazione \mathbf{P} e sulla magnetizzazione \mathbf{M} sul bordo:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} + \frac{\theta}{\pi}\alpha\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} - \frac{\theta}{\pi}\alpha\mathbf{B}. \quad (5.47)$$

Il termine topologico modifica \mathbf{M} e \mathbf{P} lasciando invariati la densità di carica ρ e la densità di corrente \mathbf{j} . Dalle equazioni (5.47) si legge infatti che la polarizzazione di carica \mathbf{P} ottiene un contributo proporzionale a $\theta\mathbf{B}$ mentre la magnetizzazione \mathbf{M} un termine proporzionale a $\theta\mathbf{E}$. Questo giustifica il nome di termine magneto-elettrico per l'azione S_θ (5.43), ovvero che un campo magnetico produce una polarizzazione ed uno elettrico una magnetizzazione proporzionali a θ sul bordo. Notiamo inoltre che il termine θ , essendo una derivata totale, non modifica le equazioni di Maxwell.

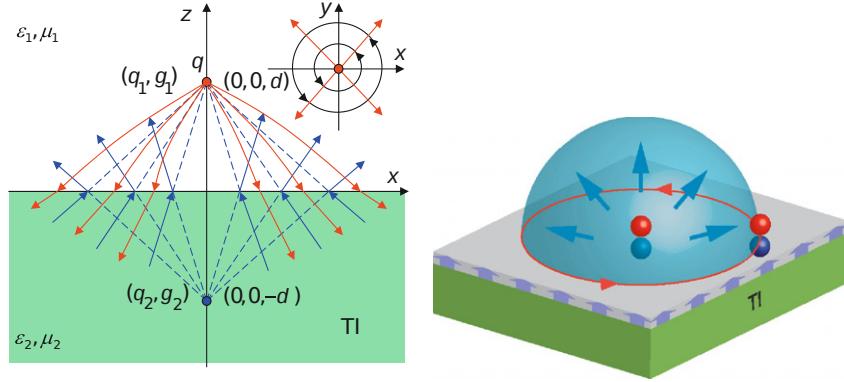


Figura 5.1: A sinistra sono rappresentati la carica immagine e il monopolio immagine indotto dal campo elettrico. Le frecce rosse e blu mostrano rispettivamente il campo elettrico della carica di prova e il campo magnetico del monopolio immagine. In alto a destra sono invece mostrati i due campi sul piano xy . A destra è illustrata la statistica frazionaria dovuta al monopolio immagine.

Adesso discuteremo brevemente due effetti fisici che derivano dalla presenza del termine θ : l'*effetto del monopolio magnetico immagine* e le *rotazioni topologiche di Kerr e Faraday*.

L'Effetto del Monopolio Magnetico Immagine

In un isolante ordinario una carica di prova in prossimità della sua superficie induce una polarizzazione di carica che può essere descritta da una carica immagine sotto la superficie stessa. Nel caso di un isolante topologico in cui è stata rotta la simmetria di inversione temporale sulla superficie, a causa della presenza del termine magnetoelettrico la carica di prova induce una magnetizzazione generata dal suo campo elettrico. Tale magnetizzazione può essere descritta da un monopolio magnetico immagine sotto la superficie [67] (fig. 5.1).

La posizione e il flusso magnetico del monopolio immagine in un sistema con interfaccia sul piano xy caratterizzata da $\theta(z) = 0$ per $z > 0$ e $\theta(z) = \theta_0 = \pi$ per $z < 0$ possono essere determinate risolvendo le equazioni di Maxwell e considerando le modifiche alla polarizzazione e alla magnetizzazione sul bordo di (5.47). Supponiamo che la carica di prova q sia situata in coordinata $z = d$ dalla superficie, allora il monopolio immagine (come la carica immagine) saranno situati nel punto simmetrico rispetto al piano xy (di coordinata $z = -d$). La carica immagine q_1 e il monopolio immagine g_1 sono dati da:

$$q_1 = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(1/\mu_1 + 1/\mu_2) - \alpha^2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)(1/\mu_1 + 1/\mu_2) + \alpha^2} q, \quad (5.48)$$

$$g_1 = -\frac{2\alpha}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)(1/\mu_1 + 1/\mu_2) + \alpha^2} q, \quad (5.49)$$

dove $\epsilon_{1,2}$ e $\mu_{1,2}$ sono le costanti dielettriche e le permeabilità magnetiche del bulk banale $z > 0$ e topologico $z < 0$ rispettivamente. Analogamente, un osservatore situato nel bulk topologico osserverà una carica immagine $q_2 = q_1$ e un monopolio immagine $g_2 = -g_1$ nella stessa posizione della carica di prova q .

È interessante considerare questo effetto in presenza di più cariche di prova in movimento, infatti in questo caso i monopoli immagine conferiscono alle cariche

immagini una statistica frazionaria. Quando due cariche di prova si muovono l'una intorno all'altra, così fanno anche i rispettivi monopoli immagine; si viene così a creare uno stato legato di cariche e monopoli detto *dione* [68]. Di conseguenza ogni carica vede un flusso magnetico dovuto al monopolio dell'altra carica. Se la distanza R tra due cariche q è molto maggiore della distanza d di ogni carica dalla superficie, allora il flusso dei monopoli risulta pari a $g/2$. Per un elettrone $q = e$ e l'angolo statistico è dato da:

$$\phi = \frac{g_1 q}{2\hbar c} = \frac{\alpha^2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)(1/\mu_1 + 1/\mu_2) + \alpha^2}. \quad (5.50)$$

In pratica l'immagine di monopolio gioca il ruolo del campo magnetico nel QHE portando a una fase aggiuntiva quando la carica percorre una percorso chiuso e quindi a una modifica della statistica che in questo caso risulta *irrazionale*. Il monopolio immagine può essere osservato in modo diretto da sonde sensibili a piccoli campi magnetici come lo *scanning SQUID* (*superconducting quantum interference devices*) e lo *scanning MFM* (*scanning magnetic force microscopy*) [67].

Rotazioni Topologiche di Kerr e Faraday

Consideriamo un'onda elettromagnetica polarizzata linearmente che incide perpendicolarmente sulla superficie di un isolante topologico. Poiché, come abbiamo già avuto modo di vedere, un campo elettrico induce una magnetizzazione, il piano di polarizzazione sia dell'onda trasmessa che di quella riflessa vengono ruotati. Questi due effetti sono conosciuti come *effetto Faraday* nel caso dell'onda trasmessa e *effetto Kerr* in quello dell'onda riflessa. Risolvendo le equazioni di Maxwell con le stesse convenzioni utilizzate per discutere il caso del monopolio immagine, si ottengono gli angoli di rotazione di Faraday θ_F e di Kerr θ_K :

$$\tan \theta_K = \frac{2\alpha\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}}{\epsilon_2/\mu_2 - \epsilon_1/\mu_1 + \alpha^2}, \quad (5.51)$$

$$\tan \theta_F = \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}}. \quad (5.52)$$

Dalle precedenti equazioni si osserva che gli angoli di rotazione sono dell'ordine di $\alpha \sim 1/137$ e quindi misurabili con le odierni tecniche sperimentali. Notiamo inoltre che, poiché l'azione effettiva $S = S_1 + S_2$ è un'approssimazione di bassa energia, le rotazioni di Faraday e Kerr possono essere osservate solo per onde di frequenza piccola dell'ordine di $\omega = E_g/\hbar$ dove E_g è il gap di energia minore nel sistema. In particolare, come nel caso del monopolio immagine, affinché vi sia tale effetto è necessario che vi sia una rottura dell'invarianza sotto time-reversal in modo che gli stati di superficie sviluppino un gap finito.

5.4 Funzione di Partizione degli Stati di Bordo degli Isolanti Topologici Tridimensionali

Nel secondo capitolo abbiamo visto come sia possibile dimostrare la stabilità degli stati di bordo negli isolanti topologici bidimensionali mediante argomenti di simmetria,

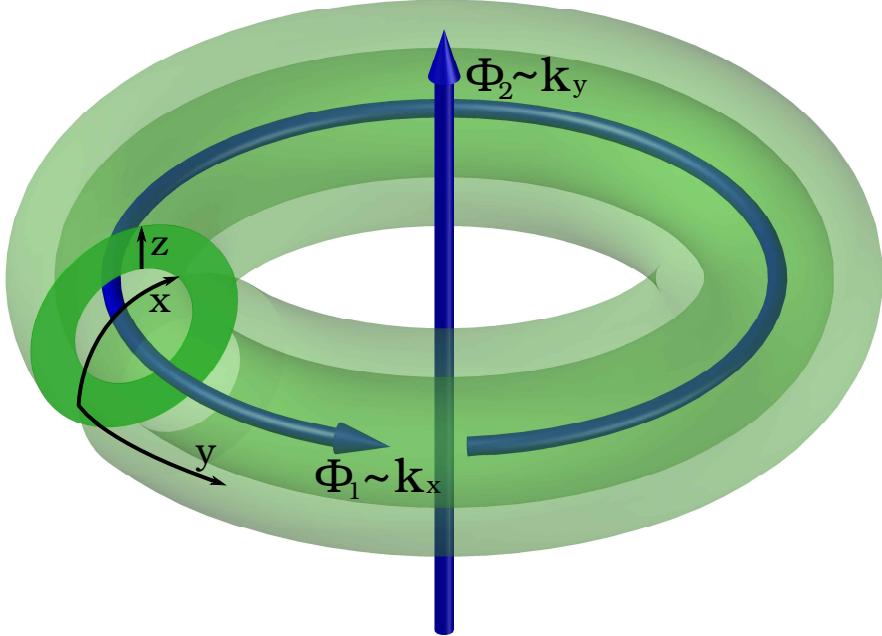


Figura 5.2: L'isolante topologico in una geometria toroidale. I flussi Φ_1 e Φ_2 giocano il ruolo delle componenti k_x e k_y del quasi-impulso rispettivamente. La posizione dei due bordi è indicata dalla direzione z .

il teorema di Kramers ed inserzione di flussi adiabatici. La stabilità è stata quindi chiarita dallo studio della funzione di partizione. Nel caso particolare di sistemi periodici non interagenti l'argomento è stato discusso in sezione 4.4.2. Se l'isolante topologico è tridimensionale possiamo utilizzare una geometria toroidale come in fig. 5.2. Analogamente al caso bidimensionale, i flussi Φ_1 e Φ_2 giocano il ruolo rispettivamente delle componenti k_x e k_y del quasi-impulso rispettivamente. In questo modo l'argomento di sezione 4.4.2 può essere esteso a sistemi tridimensionali [9].

Per un sistema elettronico generico, anche interagente, l'inserzione dei flussi in entrambe le direzioni cambia le condizioni al contorno degli stati di bordo del sistema e quindi lo spettro dell'hamiltoniana. In particolare l'inserzione di un quanto di flusso Φ_0 consiste in una trasformazione di gauge mentre un'inserzione di $\Phi_0/2$ cambia le condizioni al contorno da periodiche ad anti-periodiche e viceversa.

In questa sezione discuteremo la stabilità degli stati di bordo degli isolanti topologici tridimensionali utilizzando la funzione di partizione. Per prima cosa è presentato il calcolo della funzione di partizione di un fermione in d dimensioni che vive in uno spazio-tempo toroidale T^d con condizioni al contorno twistate in modo da simulare l'inserzione dei flussi, poi specializzato al caso (2+1) dimensionale. In seguito vedremo come da tale risultato sia possibile discutere la stabilità degli stati di bordo in modo del tutto analogo a quello di sezione 3.6. Infine discuteremo le trasformazioni della funzione di partizione sotto il gruppo modulare $SL(3, \mathbb{Z})$.

5.4.1 Regolarizzazione mediante la funzione ζ di Riemann

In questa sottosezione discutiamo brevemente il metodo di regolarizzazione dei determinanti fermionici che fa uso della funzione ζ di Riemann generalizzata [69].

Dato un operatore K con autostati $\{\psi_n\}$ e autovalori $\{\lambda_n\}$, ovvero

$$K\psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad (5.53)$$

si può definire il suo determinante come il prodotto degli autovalori:

$$\det K \equiv \prod_{\lambda_n \neq 0} \lambda_n. \quad (5.54)$$

In generale il prodotto diverge e quindi deve essere regolarizzato. A tal fine definiamo la *funzione Zeta generalizzata*:

$$\zeta_K(s) \equiv \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n^s}. \quad (5.55)$$

Il determinante può essere espresso in termini di $\zeta_K(s)$. La derivata prima si può scrivere come

$$\zeta'_K(0) = - \sum_{\lambda_n \neq 0} \log(\lambda_n) = - \log \left(\prod_{\lambda_n \neq 0} \lambda_n \right). \quad (5.56)$$

Da questo segue che possiamo esprimere il determinante come

$$\det K = \prod_{\lambda_n \neq 0} \lambda_n = e^{-\zeta'_K(0)}. \quad (5.57)$$

Il valore di $\zeta'(s)$ in $s = 0$ può essere ottenuto per continuazione analitica da valori di $\text{Re}(s)$ sufficientemente grandi per cui la somma (5.55) converga, ottenendo una sorta di regolarizzazione dimensionale di $\det K$. Ad esempio, il calcolo della funzione di partizione del bosone massless libero in D dimensioni euclidiene richiede il determinante di $K = -\partial_\mu \partial^\mu$. In questo caso $\zeta_K(s)$ è convergente per $\text{Re}(s) > D/2$.

Nel caso del fermione libero a massa nulla la situazione è più delicata [70] [71], infatti l'operatore di cui dobbiamo calcolare il determinante è $K = i\gamma^\mu \partial_\mu = i\hat{\partial}$ che non è definito positivo. In questo caso è quindi necessario cambiare la definizione (5.55) ponendo $\lambda_n = e^{\pm i\pi}(-\lambda_n)$ se $\lambda_n < 0$, ovvero:

$$\zeta_K(s) \equiv \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} + e^{\pm i\pi s} \sum_{\lambda_n < 0} (-\lambda_n)^{-s}. \quad (5.58)$$

Definiamo le combinazioni pari e dispari

$$\zeta_K^P(s) \equiv \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} + \sum_{\lambda_n < 0} (-\lambda_n)^{-s}, \quad (5.59)$$

$$\zeta_K^D(s) \equiv \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} - \sum_{\lambda_n < 0} (-\lambda_n)^{-s}, \quad (5.60)$$

per mezzo delle quali la funzione Zeta generalizzata assume la forma

$$\zeta_K(s) = \frac{1 + e^{\pm i\pi s}}{2} \zeta_K^P(s) + \frac{1 - e^{\pm i\pi s}}{2} \zeta_K^D(s). \quad (5.61)$$

Osserviamo che per la combinazione pari $\zeta_K^P(s)$ vale

$$\zeta_K^P(s) = \sum_{\lambda_n} |\lambda_n|^{-s} = \zeta_{K^2} \left(\frac{s}{2} \right), \quad (5.62)$$

mentre definiamo la funzione η_K di Dirac come:

$$\eta_K(s) \equiv \zeta_K^D(s) \sum_{\lambda > 0} \lambda_n^{-s} - \sum_{\lambda_n < 0} (-\lambda_n)^{-s}. \quad (5.63)$$

La funzione $\eta_K(s)$ misura il grado di asimmetria dello spettro dell'operatore K rispetto allo zero ed è presente solo nel caso in cui lo spazio-tempo è di dimensioni dispari. Infatti se la dimensione è pari, esiste la matrice γ^{2k+1} che anticommuta con tutte le altre γ^μ ; da questo risulta che se ψ_n ha autovalore λ_n allora $\tilde{\psi}_n = \gamma^{D+1} \psi_n$ ha autovalore $-\lambda_n$ e quindi non vi è asimmetria, ovvero $\eta_K(s) = 0$.

Dalla derivata prima di $\zeta_K(s)$,

$$\zeta'_K(0) = \pm \frac{i\pi}{2} \zeta_{K^2}(0) + \frac{1}{2} \zeta'_{K^2}(0) \mp \frac{i\pi}{2} \eta_K(0), \quad (5.64)$$

otteniamo il determinante dell'operatore di Dirac,

$$\det(i\hat{D}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \zeta'_{K^2}(0) \mp \zeta_{K^2}(0) \pm i\frac{\pi}{2} \eta(0) \right]. \quad (5.65)$$

5.4.2 Calcolo del determinante sul toro T^d

Per calcolare il determinante fermionico seguiremo il metodo utilizzato in [72] per il calcolo delle funzioni di partizione bosoniche in $D = d + 1 > 2$. Il toro in D dimensioni spazio-temporali è definito da D vettori $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_d$, generatori del reticolo delle periodicità. Senza perdere di generalità, supponiamo che l'unico vettore con componente temporale ($t = x_0$) non nulla sia ω_0 e per comodità introduciamo la notazione $(\omega_\mu)_\nu \equiv \omega_{\mu\nu}$. Ovvero si ha che:

$$\omega_{00} = T > 0, \quad \omega_{i0} = 0 \quad \forall i > 0. \quad (5.66)$$

Lo spazio duale al toro è generato dai vettori base \mathbf{k}_i che devono soddisfare la relazione

$$\mathbf{k}_\mu \cdot \omega_\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, d, \quad (5.67)$$

e possono essere definiti nel seguente modo:

$$\mathbf{k}_\mu = (-1)^{\mu+1} \frac{\omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_{\mu-1} \wedge \omega_{\mu+1} \wedge \cdots \wedge \omega_d}{|\omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_d|} \equiv (-1)^{\mu+1} \frac{\Omega_\mu}{V}, \quad (5.68)$$

dove $V = |\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\omega}_d|$ è il volume della cella elementare del reticolo. Con queste definizioni le componenti dei vettori \mathbf{k}_μ assumono la forma:

$$\begin{aligned} k_{00} &= \frac{\det \boldsymbol{\omega}'}{\det \boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\omega_{00}}, \quad k_{0j} = 0, \quad \forall j \neq 0, \\ k_{ij} &= (-1)^{i+j} \frac{\det_{ij} \boldsymbol{\omega}}{\det \boldsymbol{\omega}} = (\omega^{-1})_{ji}, \quad \forall i, j \neq 0, \end{aligned} \quad (5.69)$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la matrice con componenti $\omega_{\mu\nu}$ e $\boldsymbol{\omega}'$ è la matrice con solo le componenti spaziali.

La lagrangiana di un fermione di Dirac accoppiato con il campo elettromagnetico nel formalismo euclideo è la seguente:

$$\mathcal{L}^E = \bar{\psi}^E (\gamma_\mu^E \partial_\mu^E + i \gamma_\mu^E A_\mu^E) \psi^E = \bar{\psi}^E \hat{D}^E \psi^E, \quad (5.70)$$

dove $x_0^E = ix^0$ mentre $x_i^E = x^i$ con $i = 1, \dots, d$. Le matrici γ_E^μ soddisfano le relazioni di anticommutazione $\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$ e sono definite dalle γ^μ minkowskiane come

$$\gamma_0^E = \gamma^0, \quad \gamma_i^E = -i\gamma^i \quad i = 1, \dots, d. \quad (5.71)$$

Il campo vettoriale A_E^μ è dato da:

$$A_0^E = -iA^0, \quad A_i^E = A^i, \quad i = 1, \dots, d. \quad (5.72)$$

In analogia al caso bidimensionale, l'inserzione dei flussi viene realizzata generalizzando l'equazione (2.37) a D dimensioni nel seguente modo:

$$A_j^E = -2\pi\Phi_i k_{ij}, \quad A_0^E = 0. \quad (5.73)$$

Gli autovalori dell'operatore

$$K = i\hat{D}^E, \quad (5.74)$$

sono dati da:

$$\lambda_{n_1 \dots n_D} = \pm(2\pi) |(n_0 + \alpha_0)\mathbf{k}_0 + \cdots + (n_d + \alpha_d)\mathbf{k}_d|. \quad (5.75)$$

In questa equazione i parametri $\{\alpha\}$ comprendono sia i flussi Φ_i che le condizioni al contorno periodiche o anti-periodiche, ovvero

$$\alpha_0 = \delta, \quad \alpha_i = \delta + \Phi_i, \quad \delta = 0, 1/2; \quad i = 1, \dots, d. \quad (5.76)$$

Prima di iniziare a calcolare il determinante fermionico discutiamo la degenerazione degli stati dovuta sia ai gradi interni (quali lo spin) che all'ambiguità di segno \pm caratteristica delle teorie relativistiche. La degenerazione è pari a $d_g = 2^{[\frac{D}{2}]}$ con $D > 1$; per esempio per $D = 4$ dobbiamo considerare anche le due proiezioni di s_z , mentre per $D = 3$ e $D = 2$ non abbiamo tale degenerazione ma solo quella dovuta al segno.

Osservando che la degenerazione è indipendente dai numeri $\{n\}$, la ζ_K^P può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \zeta_K^P(2s) &= \zeta_{K^2}(s) = \sum_n d_g (2\pi)^{-2s} |(n_0 + \alpha_0)\mathbf{k}_0 + \cdots + (n_d + \alpha_d)\mathbf{k}_d|^{-2s} \\ &= d_g (2\pi k_{00})^{-2s} \sum_n |(n_0 + \alpha_0)\mathbf{h}_0 + \cdots + (n_d + \alpha_d)\mathbf{h}_d|^{-2s}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

dove si è posto $\mathbf{h}_i = \mathbf{k}_i/k_{00}$. Introducendo:

$$\lambda = (n_1 + \alpha_1)h_{10} + \cdots + (n_d + \alpha_d)h_{d,0}, \quad (5.78)$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= [(n_1 + \alpha_1)h_{11} + \cdots + (n_d + \alpha_d)h_{d,1}]^2 + \dots \\ &\quad + [(n_1 + \alpha_1)h_{1,d} + \cdots + (n_d + \alpha_d)h_{d,d}]^2, \end{aligned} \quad (5.79)$$

la funzione $\zeta_{K^2}(s)$ assume la forma

$$\zeta_{K^2}(s) = d_g (2\pi k_{00})^{-2s} \sum_{n_1 \dots n_d} \sum_{n_0} [(n_0 + \alpha_0 + \lambda)^2 + \epsilon^2]^{-s}. \quad (5.80)$$

Adesso concentriamoci sulla somma su n_0 che può essere riscritta mediante la trasformata di Mellin [73] nel seguente modo:

$$\sum_{n_0} [(n_0 + \alpha_0 + \lambda)^2 + \epsilon^2] = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_p \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} t^{s-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\pi^2 p^2}{t} - t\epsilon^2 - 2\pi i p(\lambda + \alpha_0) \right\}. \quad (5.81)$$

A questo punto occorre dividere i due casi $p = 0$ e $p \neq 0$:

Caso $p = 0$ In questo caso l'integrale è gaussiano e si ottiene semplicemente:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \epsilon^{1-2s} \Gamma \left(s - \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{s \rightarrow 0} s \sqrt{\pi} \Gamma \left(-\frac{1}{2} \right) \epsilon. \quad (5.82)$$

Caso $p \neq 0$ In questo caso si esegue la seguente sostituzione $t \rightarrow t' = \left| \frac{\epsilon}{\pi p} \right| t$ ottenendo:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{p \neq 0} \left| \frac{\pi p}{\epsilon} \right|^{s-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} t^{s-\frac{1}{2}} \exp [-\pi |p\epsilon| (t + t^{-1})] e^{-2\pi i p(\lambda + \alpha_0)} \\ &\xrightarrow{s \rightarrow 0} s \sqrt{\pi} \sum_{p \neq 0} \left| \frac{\pi p}{\epsilon} \right|^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} t^{-\frac{1}{2}} \exp [-\pi |p\epsilon| (t + t^{-1})] e^{-2\pi i p(\lambda + \alpha_0)}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Mediante l'integrale definito,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} t^{\pm \frac{1}{2}} e^{-x(t+t^{-1})} = \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{-2x}, \quad (5.84)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &s \sum_{p \neq 0} \frac{1}{|p|} e^{-[2\pi|\epsilon|+2\pi i(\lambda+\alpha_0)]p} \\ &= -s [\log (1 - e^{-2\pi|\epsilon|-2\pi i(\lambda+\alpha_0)}) + \log (1 - e^{-2\pi|\epsilon|+2\pi i(\lambda+\alpha_0)})]. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Mettendo insieme le equazioni (5.82) e (5.85), la zeta generalizzata può essere scritta nel seguente modo:

$$\zeta_{K^2}(s) = d_g (2\pi k_{00})^{-2s} \left\{ s\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{n_1\dots n_d} \epsilon - s \sum_{n_1\dots n_d} [\log(1 - e^{-2\pi|\epsilon|-2\pi i(\lambda+\alpha_0)}) + \log(1 - e^{-2\pi|\epsilon|+2\pi i(\lambda+\alpha_0)})] \right\}. \quad (5.86)$$

Il primo termine è divergente e quindi deve essere regolarizzato. A tale fine usiamo la continuazione analitica della formula di Epstein discussa in appendice B.1:

$$\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{n_1\dots n_d} \epsilon = \frac{\pi^{-d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\det \mathbf{h}} \sum'_{n_1\dots n_d} \frac{e^{-2\pi i \sum_{i=1}^d \alpha_i n_i}}{|n_1 \mathbf{W}_1 + \dots + n_d \mathbf{W}_d|^D}, \quad (5.87)$$

dove si è definito $(W_i)_j \equiv (h^{-1})_{ji}$ con $i, j \neq 0$ e nella somma è stato omesso il modo nullo. Finalmente si ottiene:

$$\zeta_{K^2}(s) = d_g (2\pi k_{00})^{-2s} \left\{ s \frac{\pi^{-d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\det \mathbf{h}} \sum'_{n_1\dots n_d} \frac{e^{-2\pi i \sum_{i=1}^d \alpha_i n_i}}{|n_1 \mathbf{W}_1 + \dots + n_d \mathbf{W}_d|^D} - s \sum_{n_1\dots n_d} [\log(1 - e^{-2\pi|\epsilon|-2\pi i(\lambda+\alpha_0)}) + \log(1 - e^{-2\pi|\epsilon|+2\pi i(\lambda+\alpha_0)})] \right\}. \quad (5.88)$$

In particolare $\zeta_{K^2}(0) = 0$ e come si vede dalla (5.75) in questo caso non vi è asimmetria nello spettro e quindi risulta anche $\eta_K(s) = 0$. Pertanto il determinante fermionico può essere semplicemente calcolato come:

$$\det(i\hat{D}^E) = e^{-\frac{1}{2}\zeta'_K(0)}. \quad (5.89)$$

Dalla derivata prima della zeta in $s = 0$ si ottiene:

$$-\log(i\hat{D}^E) = \frac{d_g}{2} \left\{ \frac{\pi^{-d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\det \mathbf{h}} \sum'_{n_1\dots n_d} \frac{e^{-2\pi i \sum_{i=1}^d \alpha_i n_i}}{|n_1 \mathbf{W}_1 + \dots + n_d \mathbf{W}_d|^D} - \sum_{n_1\dots n_d} [\log(1 - e^{-2\pi|\epsilon|-2\pi i(\lambda+\alpha_0)}) + \log(1 - e^{-2\pi|\epsilon|+2\pi i(\lambda+\alpha_0)})] \right\}. \quad (5.90)$$

Abbiamo quindi ottenuto l'espressione del determinante regolarizzato che determina la funzione di partizione di un fermione di Dirac a massa nulla in D dimensioni che vive sul toro T^D . Lo stesso risultato si può ottenere in forma hamiltoniana utilizzando la quantizzazione canonica [74].

5.4.3 Funzione di partizione del fermione sul toro T^3 e stabilità degli stati di bordo

In 3 dimensioni la funzione di partizione (5.89) e (5.90) viene riscritta nel seguente modo (appendice A):

$$Z_{\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2} = e^{-VF_0} \prod_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \exp(-2\pi\epsilon_{n_1, n_2} - 2\pi i \lambda_{n_1, n_2} - 2\pi i \alpha_0) \\ 1 - \exp[\dots (\alpha_0 \rightarrow -\alpha_0); (\alpha_1 \rightarrow -\alpha_1); (\alpha_2 \rightarrow -\alpha_2) \dots] \end{array} \right\}, \quad (5.91)$$

dove

$$\epsilon_{n_1, n_2} = \frac{V}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|^2} |(n_1 + \alpha_1)\boldsymbol{\omega}_2 - (n_2 + \alpha_2)\boldsymbol{\omega}_1|, \quad (5.92)$$

$$\lambda_{n_1, n_2} = \frac{(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2)}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|^2} [(n_1 + \alpha_1)(\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_2) - (n_2 + \alpha_2)(\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_1)], \quad (5.93)$$

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \sum'_{n_1, n_2} \frac{e^{-2\pi i(\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2)}}{|n_1 \boldsymbol{\omega}_2 - n_2 \boldsymbol{\omega}_1|^3}, \quad (5.94)$$

e la somma \sum' esclude il valore $(n_1, n_2) = (0, 0)$. I parametri α_i assumono i valori $\alpha = 1/2$, ovvero A , e $\alpha_i = 0$, ovvero P ; ad esempio:

$$Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{2}} = Z_{A, AA}. \quad (5.95)$$

Per evidenziare la carica degli stati è utile introdurre il potenziale scalare $A_0^E = iV_0 k_{00}$ che può essere inserito nella funzione di partizione semplicemente mediante la sostituzione

$$\alpha_0 \longrightarrow \alpha_0 + i \frac{V_0}{2\pi}. \quad (5.96)$$

Adesso discutiamo la stabilità degli stati di bordo mediante l'argomento dell'inserzione di flusso analogamente a quanto fatto in sezione 3.6 nel caso bidimensionale. A tale fine scegliamo il sistema di riferimento in modo da avere $\boldsymbol{\omega}_2$ parallelo a $\hat{\mathbf{x}}_2$ ($\omega_{21} = 0$), $\omega_{12} > 0$ e $|\boldsymbol{\omega}_2| = \omega_{22} = 1$ utilizzando l'invarianza di scala ($\omega_{11} \neq 0$ necessariamente). In questa geometria le energie (5.92) assumono la forma esplicita:

$$\epsilon_{n_1, n_2} = \frac{\omega_{00}}{|\omega_{11}|} \sqrt{(n_1 \pm \alpha_1)^2 \omega_{11}^2 + [(n_1 \pm \alpha_1) - (n_2 \pm \alpha_2)\omega_{12}]^2}, \quad (5.97)$$

dove i segni $\pm \alpha_i$ sono relativi alle due produttorie in (5.91). A queste energie si aggiunge un contributo globale dato dal termine (5.94) che dipende dalle condizioni al contorno.

Come nel caso bidimensionale, la funzione di partizione con condizioni anti-periodiche in tutte le direzioni, $Z_{A, AA}$, contiene lo stato fondamentale imperturbato ($\Phi = 0$) e le eccitazioni canoniche $O((V_0)^0)$ e grancanoniche $O((V_0)^n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Possiamo considerare il settore AAA come l'analogo tridimensionale del settore di

Neveu-Schwarz. In questo settore, le energie più basse dello spettro si trovano per gli indici $(n_1, n_2) = (0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ e quindi abbiamo lo sviluppo:

$$Z_{A,AA} \propto [1 + e^{-2\pi\epsilon_{0,0}-2\pi i\lambda_{0,0}+V_0} + e^{-2\pi\epsilon_{0,0}+2\pi i\lambda_{0,0}-V_0} + e^{-2\pi\epsilon_{-1,-1}-2\pi i\lambda_{-1,-1}+V_0} + e^{-2\pi\epsilon_{+1,+1}+2\pi i\lambda_{+1,+1}-V_0} + \dots]. \quad (5.98)$$

Il primo termine è il contributo dello stato di vuoto $|\Omega_{AA}\rangle$ alla funzione di partizione mentre gli altri termini corrispondono agli stati con gli impulsi più piccoli.

L'argomento di stabilità di Fu, Kane e Mele si basa sulla verifica dell'esistenza di un doppietto di Kramers nello spettro del sistema perturbato dall'aggiunta di mezzi flussi $\Phi_0/2$ in entrambi gli assi spaziali del toro, corrispondenti a cambi di condizioni al contorno $\alpha_i \rightarrow \alpha_i + 1/2$, per $i = 1, 2$. Abbiamo quindi

$$\Phi_1 = \Phi_0/2 : Z_{A,AA} \longrightarrow Z_{A,PA}, \quad (5.99)$$

$$\Phi_2 = \Phi_0/2 : Z_{A,PA} \longrightarrow Z_{A,PP}. \quad (5.100)$$

L'analisi esplicita delle energie (5.97) di $Z_{A,PA}$ e di $Z_{A,AP}$ mostra che non vi possono essere degenerazioni, se si escludono valori particolari dei vettori ω_i . Lo sviluppo di $Z_{A,PP}$ mostra invece che i primi quattro termini hanno energie (5.97) nulle e quindi degeneri. Abbiamo lo sviluppo

$$Z_{A,PP} \propto [1 + e^{-V_0} + e^{V_0} + e^{V_0}e^{-V_0} + \dots]. \quad (5.101)$$

Osserviamo che la dipendenza da V_0 determina la carica degli stati. Abbiamo quindi le identificazioni:

$$1 \longleftrightarrow |\Omega_{PP}\rangle, \quad (5.102)$$

$$e^{\pm V_0} \longleftrightarrow |Q = \pm 1\rangle, \quad (5.103)$$

$$e^{V_0}e^{-V_0} \longleftrightarrow |\Omega'_{PP}\rangle. \quad (5.104)$$

Il primo stato $|\Omega_{PP}\rangle$ è lo stato fondamentale in questo settore, ottenuto per evoluzione da $|\Omega_{AA}\rangle$. Il quarto stato $|\Omega'_{PP}\rangle$ è a carica nulla e corrisponde al partner nel doppietto di Kramers. Ambedue hanno acquistato spin 1/2 dall'inserzione di flusso. Gli altri due sono stati carichi che non intervengono nell'argomento.

L'espansione della funzione di partizione di bordo permette quindi di verificare nella teoria di bordo l'argomento di flusso di Kane e collaboratori: il cambiamento dell'indice di parità di spin richiede l'inserzione di $\Phi_0/2$ nei due cerchi spaziali, in accordo con la discussione dell'invariante topologico di bulk \mathcal{T} -invariante di tipo *strong*.

Per concludere l'argomento di stabilità facciamo l'inserzione di flussi opposta $\Phi_{1,2} = -\Phi_0/2$ che riporta la funzione di partizione allo stato iniziale $Z_{A,AA}$. Sotto tale trasformazione lo stato $|\Omega_{PP}\rangle$ ritorna nello stato di vuoto $|\Omega_{AA}\rangle$ ma lo stato $|\Omega'_{PP}\rangle$ viene portato nello stato eccitato,

$$|ex_{AA}\rangle \propto e^{-2\pi\epsilon_{-1,-1}+V_0}e^{-2\pi\epsilon_{-1,-1}-V_0}, \quad (5.105)$$

che corrisponde ad un'eccitazione fermionica accompagnata da una lacuna. Analogamente al caso bidimensionale lo stato eccitato differisce dallo stato fondamentale di

un’energia dell’ordine di $\mathcal{O}(1/R)$ dove R è una misura della dimensione del sistema e quindi nel limite termodinamico $R \rightarrow +\infty$ tale eccitazione è massless.

È possibile anche in questo caso connettere la stabilità degli stati di bordo con l’anomalia \mathbb{Z}_2 introdotta nel capitolo 3. Negli isolanti topologici tridimensionali, poiché vi è solo una specie fermionica al bordo e non due specie con chiralità opposta, la parità di spin può essere definita semplicemente come:

$$\mathcal{I} = (-1)^{2S}, \quad (5.106)$$

dove S è lo spin dello stato di bordo. Anche in questo caso l’inserzione di mezzo quanto di flusso $\Phi_0/2$ in entrambe le direzioni cambia la parità di spin:

$$(-1)^{2S} |\Omega_{AA}\rangle = |\Omega_{AA}\rangle, \quad (5.107)$$

$$(-1)^{2S} |\Omega_{PP}\rangle = -|\Omega_{PP}\rangle. \quad (5.108)$$

L’anomalia consiste quindi, come in due dimensioni, in un cambiamento della parità di spin dello stato fondamentale della teoria di bordo a causa di una trasformazione che non viola la \mathcal{T} -invarianza.

5.4.4 Invarianza modulare

In questa sezione deriveremo le trasformazioni modulari $SL(3, \mathbb{Z})$ delle funzioni di partizione $Z_{\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2}$ (5.91) al variare delle condizioni di periodicità $\alpha_i = A, P$. Per semplicità poniamo $V_0 = 0$ nel seguito.

Il gruppo modulare $SL(3, \mathbb{Z})$ è generato dai due generatori $T_1, U_1 = S_1 P_{12}$ [74], dove (T_1, S_1) generano il sottogruppo $SL(2, \mathbb{Z})$ che agisce su ω_0, ω_1 mentre P_{12} corrisponde alla permutazione dei due vettori spaziali ω_1, ω_2 del toro T^3 . Le matrici corrispondenti sono

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.109)$$

ed agiscono nel seguente modo:

$$S_1 : \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \omega_1 \\ -\omega_0 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad T_1 : \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \omega_0 + \omega_1 \\ \omega_0 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad P_{12} : \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \omega_0 \\ -\omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}. \quad (5.110)$$

Dalle trasformazioni T_1 e S_1 si possono ricavare, mediante la permutazione $P_{1,2}$, le trasformazioni S_2 e T_2 che generano il sottospazio $SL(2, \mathbb{Z})$ agente sui periodi (ω_0, ω_2) :

$$S_2 = P_{12} S_1 P_{12} : \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\omega_2 \\ -\omega_1 \\ -\omega_0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = P_{12} T_1 P_{12} : \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \omega_0 - \omega_2 \\ -\omega_1 \\ -\omega_2 \end{pmatrix}. \quad (5.111)$$

Trasformazione P_{12}

Le funzioni di partizione (5.91) trasformano in modo evidente sotto $P_{1,2}$. Infatti lo scambio tra i vettori ω_1 e ω_2 non modifica il valore $\omega_1 \times \omega_2$ mentre per le altre quantità l'invarianza è banale se si rinomina la somma su n_1 nel seguente modo

$$n_1 + \alpha_1 \longrightarrow -(n_1 + \alpha_1), \quad \alpha_1 = 0, 1/2. \quad (5.112)$$

Quindi le funzioni di $Z_{\alpha_0,AA}$ e $Z_{\alpha_0,PP}$ sono invarianti, mentre le condizioni al contorno miste di scambiano: $Z_{\alpha_0,AP} \leftrightarrow Z_{\alpha_0,PA}$. Questo risultato implica che è sufficiente determinare le trasformazioni modulari date da T_1 e S_1 .

Trasformazione T_1

La trasformazione T_1 porta $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \omega_1$ e quindi influenza solo la quantità λ :

$$\begin{aligned} & 2\pi i \frac{\omega_1 \times \omega_2}{|\omega_1 \times \omega_2|^2} \{(n_1 + \alpha_1)(\omega_0 \times \omega_2) - (n_2 + \alpha_2)(\omega_0 \times \omega_1)\} \longrightarrow \\ & 2\pi i \frac{\omega_1 \times \omega_2}{|\omega_1 \times \omega_2|^2} \{(n_1 + \alpha_1)[(\omega_0 + \omega_1)] \times \omega_2) - (n_2 + \alpha_2)[(\omega_0 + \omega_1)] \times \omega_1)\} \\ & = 2\pi i \frac{\omega_1 \times \omega_2}{|\omega_1 \times \omega_2|^2} \{(n_1 + \alpha_1)(\omega_0 \times \omega_2) - (n_2 + \alpha_2)(\omega_0 \times \omega_1)\} + 2\pi i(n_1 + \alpha_1). \end{aligned} \quad (5.113)$$

Poiché $e^{2\pi i n_1} = 1$, l'unico contributo è dato da $e^{2\pi i \alpha_1}$ che modifica le condizioni al contorno nel tempo. In particolare se $\alpha_1 = 0$ la funzione di partizione è invariante sotto T_1 mentre se $\alpha_1 = 1/2$ allora vengono cambiate le condizioni al contorno temporali da anti-periodiche a periodiche e viceversa (fig. 5.3).

Trasformazione S_1

La trasformazione S_1 è quella più complicata da discutere in quanto la funzione di partizione non è manifestamente invariante per $\omega_0 \leftrightarrow \omega_1$. Nel seguito sarà utile scegliere una configurazione particolare del sistema di coordinate in modo che la matrice ω abbia la seguente forma:

$$\omega = \begin{pmatrix} 2\pi R_0 & -2\pi\alpha R_1 & -2\pi\gamma R_2 \\ 0 & 2\pi R_1 & -2\pi\beta R_2 \\ 0 & 0 & 2\pi R_2 \end{pmatrix}, \quad (5.114)$$

dove R_0, R_1, R_2 sono rispettivamente i raggi dei vettori proiettati sugli assi $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}$. Per questa scelta la funzione di partizione (5.91), prima della regolarizzazione della

ϵ , assume la forma

$$\begin{aligned}
Z_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} &= \\
&= \prod_{n_2} \left\{ \prod_{n_1} \left| 1 + \exp \left(-2\pi r_{01} \sqrt{[(n_1 + \alpha_1) + \beta(n_2 + \alpha_2)]^2 + [r_{12}(n_2 + \alpha_2)]^2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - 2\pi i [\alpha(n_1 + \alpha_1) + (n_2 + \alpha_2)(\alpha\beta + \gamma)] - 2\pi i\alpha_0 \right) \right|^2 \times \right. \\
&\quad \left. \times \exp \left[2\pi r_{01} \sum_{n_1} \sqrt{[(n_1 + \alpha_1) + \beta(n_2 + \alpha_2)]^2 + [r_{12}(n_2 + \alpha_2)]^2} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{5.115}$$

dove abbiamo separato le produttorie su n_1 e n_2 e dove $r_{01} = R_0/R_1$ e $r_{12} = R_1/R_2$. L'ultimo esponenziale deve essere regolarizzato; si trova (vedi appendice B.2) che

$$\begin{aligned}
2\pi r_{01} \sum_{n_1} \sqrt{[(n_1 + \alpha_1) + \beta(n_2 + \alpha_2)]^2 + [r_{12}(n_2 + \alpha_2)]^2} &= \\
&= 4\pi r_{01} \Delta[r_{12}(n_2 + \alpha_2); \alpha_1 + \beta(n_2 + \alpha_2)],
\end{aligned} \tag{5.116}$$

dove la funzione Δ è definita come

$$\Delta(m; a) = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{l>0} \int_0^{+\infty} dt e^{-\frac{\pi^2 m^2}{t} - tl^2} \cos(2\pi l a). \tag{5.117}$$

Definendo la funzione Θ massiva [74] [75]:

$$\begin{aligned}
\Theta_{[a,b]}(\tau; m) &= \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left| 1 + \exp \left[-2\pi \text{Im}(\tau) \sqrt{(n+a)^2 + m^2} + 2\pi i \text{Re}(\tau)(n+a) + 2\pi ib \right] \right|^2 \times \\
&\quad \times \exp [4\pi \text{Im}(\tau) \Delta(m; a)];
\end{aligned} \tag{5.118}$$

la funzione di partizione si riscrive nel seguente modo:

$$Z_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} = \prod_{n_2 \in \mathbb{Z}} \Theta_{[\alpha_1 + \beta(n_2 + \alpha_2), \gamma(n_2 + \alpha_2) + \alpha_0]}(\tau; r_{12}(n_2 + \alpha_2)). \tag{5.119}$$

Adesso vediamo come cambiano i parametri del toro sotto la trasformazione S_1 . Poiché

$$S_1 : \boldsymbol{\omega}_0 = 2\pi \begin{pmatrix} R_0 \\ -\alpha R_1 \\ -\gamma R_2 \end{pmatrix} \longrightarrow -\boldsymbol{\omega}_1 = 2\pi \begin{pmatrix} 0 \\ -R_1 \\ \beta R_2 \end{pmatrix}, \tag{5.120}$$

$$S_1 : \boldsymbol{\omega}_1 = 2\pi \begin{pmatrix} 0 \\ R_1 \\ -\beta R_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{\omega}_0 = 2\pi \begin{pmatrix} R_0 \\ -\alpha R_1 \\ -\gamma R_2 \end{pmatrix}, \tag{5.121}$$

si vede che $\gamma \rightarrow -\beta$, $\beta \rightarrow \gamma$ e $R_2 \rightarrow R_2$. Inoltre, osservando che le prime due componenti dei vettori $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$ non si mescolano alla terza possiamo restringerci al

piano t, x . Per questa ragione, analogamente al caso in (1+1) dimensioni, possiamo definire il parametro modulare τ come

$$\tau = -\alpha + ir_{01}, \quad S_1 : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}. \quad (5.122)$$

In particolare si ottiene:

$$S_1 : \alpha \longrightarrow -\frac{\alpha}{\alpha^2 + r_{01}^2}, \quad S_1 : r_{01} \longrightarrow \frac{r_{01}}{\alpha^2 + r_{01}^2}. \quad (5.123)$$

Infine imponendo le trasformazioni dei moduli dei vettori $|\omega_0| \leftrightarrow |\omega_1|$ si ottengono le trasformazioni dei raggi R_0 e R_1 :

$$S_1 : R_1 \longrightarrow R_1 |\tau|, \quad S_1 : R_0 \longrightarrow \frac{R_0}{\tau}. \quad (5.124)$$

In appendice C è dimostrato che la funzione Θ massiva soddisfa la seguente relazione:

$$\Theta_{[a,b](\tau,m)} = \Theta_{[b,-a]} \left(-\frac{1}{\tau}, m|\tau| \right); \quad (5.125)$$

quindi se si considera la trasformazione della funzione di partizione nella forma (5.119) si ha,

$$\begin{aligned} S_1 : & \Theta_{[\alpha_1 + \beta(n_2 + \alpha_2), \gamma(n_2 + \alpha_2) + \alpha_0]}(\tau; r_{12}(n_2 + \alpha_2)) \longrightarrow \\ & \Theta_{[\alpha_1 + \gamma(n_2 + \alpha_2), -\beta(n_2 + \alpha_2) + \alpha_0]} \left(-\frac{1}{\tau}; r_{12}(n_2 + \alpha_2) |\tau| \right) = \\ & \Theta_{[-\alpha_0 + \beta(n_2 + \alpha_2), \alpha_1 + \gamma(n_2 + \alpha_2)]}(\tau; r_{12}(n_2 + \alpha_2)), \end{aligned} \quad (5.126)$$

dalla quale segue che,

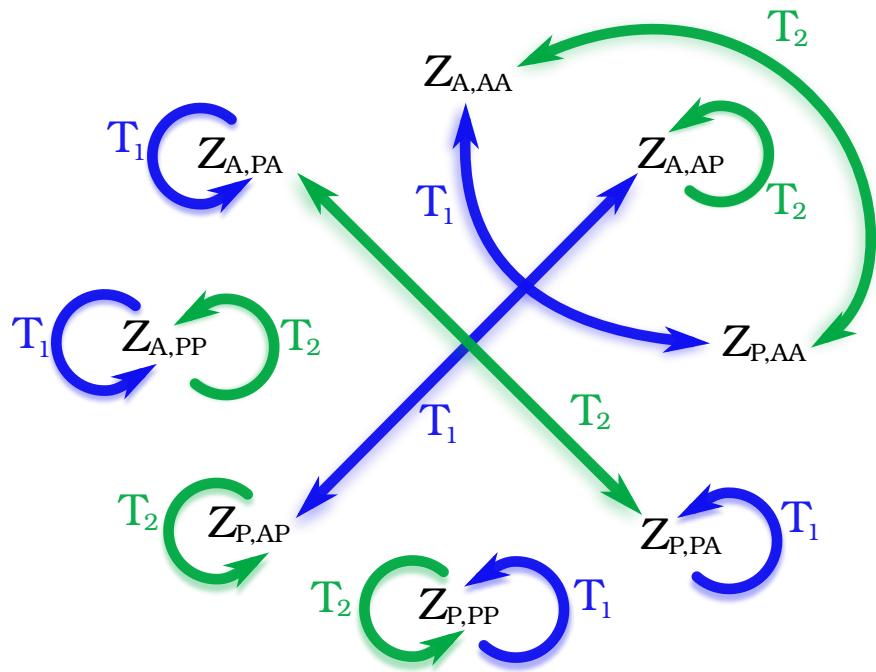
$$S_1 : Z_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \longrightarrow Z_{\alpha_1, -\alpha_0, \alpha_2}. \quad (5.127)$$

In conclusione abbiamo trovato come la funzione di partizione cambia sotto la trasformazione modulare S_1 . L'equazione (5.127) mostra che l'effetto di S_1 è quello di scambiare le condizioni al contorno relative ai vettori base del toro ω_0 e ω_1 , lasciando invariata quella relativa al vettore ω_2 (fig. 5.3).

Trasformazioni T_2 e S_2

Effettuando le semplici modifiche della funzione di partizione sotto la permutazione $P_{1,2}$, possiamo ottenere le trasformazioni modulari T_2 e S_2 da T_1 e S_1 (fig. 5.3).

Trasformazioni T



Trasformazioni S

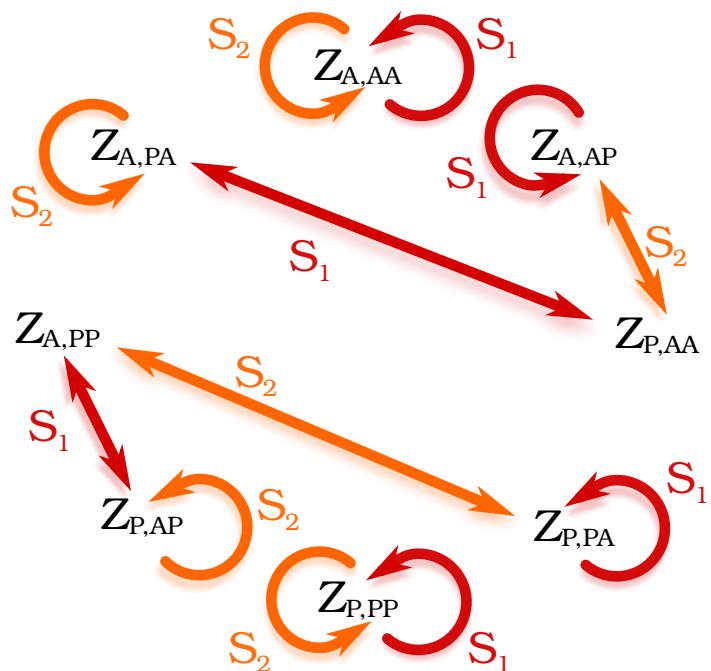


Figura 5.3: Trasformazioni modulari.

Notiamo adesso che la somma delle funzioni di partizione:

$$Z_{tot} = \sum_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 = A, P} Z_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2}, \quad (5.128)$$

è invariante modulare. Tuttavia, come discusso nel caso bidimensionale al capitolo 3, Z_{tot} non sarebbe compatibile con la \mathcal{T} -invarianza della teoria. Nel caso qui discusso di un singolo fermione di bordo, abbiamo visto che gli stati fondamentali dei settori $Z_{A,AA}$ e $Z_{A,PP}$ hanno parità di spin diversa e non possono fare parte della stessa funzione di partizione senza violare la \mathcal{T} -invarianza.

In conclusione, la teoria a flussi nulli deve essere identificata on $Z_{A,AA}$ e gli altri settori vanno tenuti separati e corrispondono al sistema deformato. Le otto funzioni di partizione trasformano quindi come un vettore sotto il gruppo modulare (fig. 5.3).

5.5 Conclusioni e Prospettive

In questo capitolo abbiamo presentato due nuovi risultati nello studio degli isolanti topologici tridimensionali. Nella prima parte abbiamo utilizzato la riduzione dimensionale di Jackiw e Rebbi per risolvere un'ambiguità dell'anomalia \mathbb{Z}_2 dei fermioni di bordo. Questo ci ha permesso di dimostrare la cancellazione dell'anomalia nel sistema complessivo di bulk e bordo, in accordo con l'invarianza per inversione temporale di questo sistema.

Nella seconda parte, abbiamo derivato la funzione di partizione del fermione sul toro T^3 . Questa funzione di partizione ci ha permesso di discutere l'indice \mathbb{Z}_2 di stabilità $(-1)^{2S}$, dove S è la parità di spin del bordo, e verificare la corrispondenza con l'analisi di Fu, Kane e Mele basata sull'indice strong di bulk $(-1)^{\mu_0}$. L'equivalenza dei due indici e la riproduzione dell'argomento della pompa di spin, mostrano una corrispondenza completa con il caso bidimensionale, che per certi aspetti è sorprendente.

In ambedue i nostri studi, i metodi della teoria dei campi di basse energie si sono dimostrati particolarmente adatti per descrivere le proprietà universali degli isolanti topologici. Se la teoria delle bande e delle sue proprietà topologiche sono state finora cruciali per capire gli stati topologici di fermioni non interagenti, i metodi campistici potranno affrontare in futuro i sistemi interagenti. Sempre guidati dall'esempio bidimensionale, ci riproponiamo di affrontare questo caso mediante lo studio della teoria di bordo bosonica che può descrivere fermioni interagenti. Inoltre la caratterizzazione mediante le anomalie sarà molto utile per la sua proprietà di essere indipendente dall'intensità dell'interazione.

Appendice A

Funzione di Partizione in 3 Dimensioni

In tre dimensioni la matrice $\boldsymbol{\omega}$ è data da:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & \omega_{02} \\ 0 & \omega_{11} & \omega_{12} \\ 0 & \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}, \quad \det \boldsymbol{\omega} = \omega_{00}(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}), \quad (\text{A.1})$$

dalla quale otteniamo,

$$\omega_{00} = \frac{1}{k_{00}} = \frac{\det \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|} = \frac{V}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|}. \quad (\text{A.2})$$

La matrice \mathbf{k} invece è data da:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\det \boldsymbol{\omega}} \begin{pmatrix} -\omega_{12}\omega_{21} + \omega_{11}\omega_{22} & 0 & 0 \\ \omega_{02}\omega_{12} - \omega_{01}\omega_{22} & \omega_{00}\omega_{22} & -\omega_{00}\omega_{21} \\ -\omega_{02}\omega_{11} + \omega_{01}\omega_{12} & -\omega_{00}\omega_{12} & \omega_{00}\omega_{11} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

mentre la matrice $\mathbf{h} = \mathbf{k}/k_{00}$ è,

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dots & \frac{\omega_{00}\omega_{22}}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|} & -\frac{\omega_{00}\omega_{21}}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|} \\ \dots & -\frac{\omega_{00}\omega_{12}}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|} & \frac{\omega_{00}\omega_{11}}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

e quindi,

$$\det \mathbf{h} = \frac{\omega_{00}^2}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|}. \quad (\text{A.5})$$

Infine la matrice \mathbf{W} è:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\det \mathbf{h}} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{21} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

- Riscriviamo in 3 dimensioni il termine dovuto alla regolarizzazione di ϵ :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi \det \mathbf{h}} \sum'_{n_1, n_2} \frac{e^{-2\pi i(\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2)}}{|n_1 \mathbf{W}_1 + n_2 \mathbf{W}_2|^3} \\
&= \frac{\det^3 \mathbf{h}}{2\pi \det \mathbf{h}} \sum'_{n_1, n_2} \frac{e^{-2\pi i(\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2)}}{\left[\sqrt{(n_1 h_{22} - n_2 h_{12})^2 + (n_2 h_{11} - n_1 h_{21})^2} \right]^3} \\
&= \frac{\det^2 \mathbf{h}}{2\pi} \sum'_{n_1, n_2} \frac{e^{-2\pi i(-\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2)}}{\left[\sqrt{(n_2 h_{22} + n_1 h_{12})^2 + (n_1 h_{11} + n_2 h_{21})^2} \right]^3} \\
&= \frac{\det^2 \mathbf{h} k_{00}^3}{2\pi} \sum'_{n_1, n_2} \frac{e^{-2\pi i(-\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2)}}{|n_1 \tilde{\mathbf{k}}_1 + n_2 \tilde{\mathbf{k}}_2|^3}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

dove i vettori $\tilde{\mathbf{k}}_i$ non hanno le componenti temporali. Osserviamo adesso che

$$\begin{aligned}
|c_1 \tilde{\mathbf{k}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{k}}_2| &= \sqrt{(c_1 k_{11} + c_2 k_{21})^2 + (c_1 k_{12} + c_2 k_{22})^2} \\
&= \frac{\omega_{00}}{\det \boldsymbol{\omega}} \sqrt{(c_1 \omega_{22} - c_2 \omega_{12})^2 + (-c_1 \omega_{21} + c_2 \omega_{11})^2} \\
&= \frac{\omega_{00}}{\det \boldsymbol{\omega}} |c_1 \boldsymbol{\omega}_2 - c_2 \boldsymbol{\omega}_1| = \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|} |c_1 \boldsymbol{\omega}_2 - c_2 \boldsymbol{\omega}_1|.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

In conclusione la regolarizzazione della ϵ si riscrive come:

$$\frac{\pi^{-\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\det \mathbf{h}} \sum'_{\{n\}} \frac{e^{-2\pi i \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i n_i}}{|n_1 \mathbf{W}_1 + \cdots + n_{d-1} \mathbf{W}_{d-1}|^d} = \frac{V}{2\pi} \sum'_{n_1, n_2} \frac{e^{-2\pi i(-\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2)}}{|n_1 \boldsymbol{\omega}_2 - n_2 \boldsymbol{\omega}_1|^3} \tag{A.9}$$

- Le energie ϵ_{n_1, n_2} si possono scrivere come:

$$\begin{aligned}
\epsilon &= |(n_1 + \alpha_1) \mathbf{h}_1 + (n_2 + \alpha_2) \mathbf{h}_2| = \frac{1}{k_{00}} |(n_1 + \alpha_1) \mathbf{k}_1 + (n_2 + \alpha_2) \mathbf{k}_2| \\
&= \frac{1}{k_{00}} \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|} |(n_1 + \alpha_1) \boldsymbol{\omega}_2 - (n_2 + \alpha_2) \boldsymbol{\omega}_1| \\
&= \frac{V}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|^2} |(n_1 + \alpha_1) \boldsymbol{\omega}_2 - (n_2 + \alpha_2) \boldsymbol{\omega}_1|.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

- Per gli impulsi λ_{n_1, n_2} abbiamo:

$$\lambda = (n_1 + \alpha_1) h_{10} + (n_2 + \alpha_2) h_{20} = \frac{1}{k_{00}} [(n_1 + \alpha_1) k_{10} + (n_2 + \alpha_2) k_{20}] \tag{A.11}$$

e, poiché dalla (5.68) risulta $\mathbf{k}_1 = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_2 / \det \boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{k}_2 = -\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_1 / \det \boldsymbol{\omega}$, si ottiene

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2}{|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|^2} \cdot [(n_1 + \alpha_1) \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_2 - (n_2 + \alpha_2) \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_1]. \tag{A.12}$$

Rimettendo tutto insieme si ottiene la funzione di partizione di un fermione libero massless in 2+1 dimensioni (5.91).

Appendice B

Regolarizzazione dell'energia di vuoto

B.1 Regolarizzazione mediante la relazione di Epstein

Definiamo la funzione Zeta generalizzata di Epstein [72][76]:

$$\zeta_\phi[\mathbf{g}, \mathbf{h}](s) = \sum_{m_1, \dots, m_p \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2\pi i \mathbf{m} \cdot \mathbf{h}}}{[\phi(\mathbf{m} + \mathbf{h})]^{s/2}}, \quad (\text{B.1})$$

dove $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_p)$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_p)$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_p)$ e $\phi(\mathbf{g}) = \mathbf{g}^T C \mathbf{g}$ in cui C è una matrice $p \times p$ invertibile e definita positiva. Tale funzione può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \zeta_\phi[\mathbf{g}, \mathbf{h}](s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{z} z^{s/2} \sum_{m_1, \dots, m_p \in \mathbb{Z}} e^{-\pi z \phi(\mathbf{g} + \mathbf{m}) + 2\pi i (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h})} \\ &\equiv \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{z} z^{s/2} \Theta_\phi[\mathbf{g}, \mathbf{h}](z). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Per $s > 2$ l'integrale (B.2) è convergente mentre diverge per $s \leq 2$. Per trovare una continuazione analitica della funzione ζ_ϕ dividiamo l'integrale in due parti: $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. Sul primo termine usiamo la generalizzazione della somma di Gauss:

$$\sum_{m_1, \dots, m_p \in \mathbb{Z}} e^{-\pi z \phi(\mathbf{g} + \mathbf{m}) + 2\pi i \mathbf{h} \cdot \mathbf{m}} = \frac{e^{-2\pi i (\mathbf{g} \cdot \mathbf{h})}}{z^{p/2} \sqrt{\det C}} \sum_{m_1, \dots, m_p \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{z} \Phi(\mathbf{h} + \mathbf{m}) - 2\pi i (\mathbf{g} \cdot \mathbf{m})}, \quad (\text{B.3})$$

dove $\Phi(\mathbf{g}) = \mathbf{g}^T C^{-1} \mathbf{g}$. Successivamente facciamo la sostituzione $z \rightarrow 1/z$ ottenendo la relazione

$$\begin{aligned} &(\det C)^{1/4} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z_\phi[\mathbf{g}, \mathbf{h}](s) = \\ &(\det C)^{1/4} e^{i\pi \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}} \int_1^{+\infty} \frac{dz}{z} z^{\frac{s}{2}} \Theta_\phi[\mathbf{g}, \mathbf{h}](z) + \frac{e^{-i\pi \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}}}{(\det C)^{1/4}} \int_1^{+\infty} \frac{dz}{z} z^{\frac{p-s}{2}} \Theta_\Phi[\mathbf{h}, -\mathbf{g}](z). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Quest'ultima equazione ci dice che la funzione ζ_ϕ rimane invariata se si attuano le sostituzioni

$$s \rightarrow p - s, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ -\mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad C \rightarrow C^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

Ovvero possiamo scrivere:

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_\phi[\mathbf{g}, \mathbf{h}](s) = \frac{e^{-2\pi i \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}}}{\sqrt{C}} \pi^{-\frac{p-s}{2}} \Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right) \zeta_{\Phi=\phi^{-1}}[\mathbf{h}, -\mathbf{g}](p-s). \quad (\text{B.6})$$

Poiché il termine di destra è convergente per $s < p - 2$, abbiamo ottenuto una continuazione analitica della ζ_ϕ .

Nel nostro caso si ha $\mathbf{g} = 0$, $\mathbf{h} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ e $p = d$. Di conseguenza è necessario omettere il modo nullo $\mathbf{m} = (0, \dots, 0)$ dalla sommatoria poiché tale contributo è divergente. La parte finita della ζ_ϕ viene fissata richiedendo che la funzione di partizione abbia le giuste trasformazioni modulari.

B.2 Regolarizzazione mediante la trasformata di Mellin

Introducendo la variabile complessa,

$$\zeta = \alpha_1 + \beta(n_2 + \alpha_2) + ir_{12}(n_2 + \alpha_2), \quad r_{12} = \frac{R_1}{R_2}, \quad (\text{B.7})$$

si ottiene:

$$2\pi r_{01} \sum_{n_1} \sqrt{[(n_1 + \alpha_1) + \beta(n_2 + \alpha_2)]^2 + [r_{12}(n_2 + \alpha_2)]^2} = 2\pi r_{01} \sum_n |n + \zeta|. \quad (\text{B.8})$$

Quest'ultima quantità può essere riscritta mediante la trasformata di Mellin nel seguente modo:

$$\frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{|n + \zeta|^{2s}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(s)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}} e^{-t(\text{Im}(\zeta))^2 + \frac{\pi^2 l^2}{t} + 2\pi i l \text{Re}(\zeta)}. \quad (\text{B.9})$$

Adesso separiamo il modo $l = 0$ dai modi $l \neq 0$ e per quest'ultimi facciamo la sostituzione $t \rightarrow \pi^2/t$ ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_n \frac{1}{|n + \zeta|^{2s}} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(s)} (\text{Im}(\zeta))^{1-2s} \Gamma(s-1/2) + \\ &+ \frac{\pi^{-1/2+2s}}{\Gamma(s)} \sum_{l>0} \int_0^{+\infty} dt t^{-(s+1/2)} e^{-\frac{\pi^2}{t}(\text{Im}(\zeta))^2 + tl^2} \cos(2\pi l \text{Re}(\zeta)). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Per $s = -1/2$ il primo termine è divergente in quanto la $\Gamma(x)$ ha un polo in $x = -1$ e quindi è necessario sottrarlo. La parte finita può essere fissata richiedendo che la funzione di partizione abbia la “giuste” trasformazioni sotto S_1 . Risulta che la

corretta regolarizzazione consiste semplicemente nel sottrarre il termine divergente e quindi si ottiene:

$$\frac{1}{2} \sum_n |n + \zeta| = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{l>0} \int_0^{+\infty} dt e^{-\frac{\pi^2}{t}(\text{Im}(\zeta))^2 + tl^2} \cos(2\pi l \text{Re}(\zeta)). \quad (\text{B.11})$$

Appendice C

Identità della Θ massiva

Prendiamo il logaritmo della Θ :

$$\begin{aligned} \log \Theta_{[a,b]}(\tau, m) &= \sum_n \log \left[1 - \exp \left\{ -2\pi\tau_2 \sqrt{(n+a)^2 + m^2} + 2\pi i \tau_1(n+a) + 2\pi i b \right\} \right] + c.c. \\ &\quad + 4\pi\tau_2 \Delta(m, a). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Sviluppando in serie di Taylor il logaritmo si ha

$$\begin{aligned} \log \Theta_{[a,b]}(\tau, m) &= - \sum_n \sum_{p=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{p} \left[\exp \left\{ -2\pi\tau_2 \sqrt{(n+a)^2 + m^2} + 2\pi i \tau_1(n+a) + 2\pi i b \right\} \right] + c.c. \right\} \\ &\quad + 4\pi\tau_2 \Delta(m, a). \end{aligned} \tag{C.2}$$

Adesso utilizziamo l'identità

$$e^{-z} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} ds s^{-1/2} e^{-s - \frac{z^2}{4s}} \tag{C.3}$$

e successivamente applicando la sostituzione $s \rightarrow p^2 s$ si ottiene

$$\begin{aligned} \log \Theta_{[a,b]}(\tau, m) &= - \sum_n \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} ds \left\{ \frac{1}{p} \left[\exp \left\{ -\pi \left(\frac{\pi\tau_2^2}{s} \right) n^2 + 2\pi i \left(\frac{i\pi\tau_2^2 a}{s} + \tau_1 p \right) n + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \pi^2 \frac{\tau_2^2 p^2 a^2}{s} - \frac{\pi^2 \tau_1^2}{s} m^2 + 2\pi i p a \tau_1 + 2\pi i b p - p^2 s \right\} \right] + c.c. \right\} + 4\pi\tau_2 \Delta(m, a). \end{aligned} \tag{C.4}$$

Usando la formula di Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi A n^2 + 2\pi i B n} = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{A}(n-B)^2} \tag{C.5}$$

si ha

$$\begin{aligned}
& \log \Theta_{[a,b]}(\tau, m) \\
&= -\frac{1}{\pi\tau_2} \sum_n \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} ds \left\{ \frac{1}{p} \left[\exp \left\{ -sp^2 \frac{|\tau|^2}{\tau_2^2} - \frac{\pi^2 \tau_2^2 m^2}{s} + 2\pi i b p - \frac{sn^2}{\tau_2^2} + 2nsp + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + 2\pi ina \frac{\tau_1}{\tau_2^2} \right] + c.c. \right\} + 4\pi\tau_2 \Delta(m, a).
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Possiamo scambiare i range delle sommatorie ottenendo

$$\begin{aligned}
& \log \Theta_{[a,b]}(\tau, m) \\
&= -\frac{1}{\pi\tau_2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_p \int_0^{+\infty} ds \left\{ \frac{1}{p} \left[\exp \left\{ -sp^2 \frac{|\tau|^2}{\tau_2^2} - \frac{\pi^2 \tau_2^2 m^2}{s} + 2\pi i b p - \frac{sn^2}{\tau_2^2} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + 2ns \frac{\tau_1}{\tau_2^2} p + 2\pi ina \right] + c.c. \right\} + 4\pi \frac{\tau_2}{|\tau|^2} \Delta(m|\tau|, b).
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Infine facendo la sostituzione $s \rightarrow s|\tau|$ si trova finalmente la trasformazione modulare S :

$$\Theta_{[a,b]}(\tau, m) = \Theta_{[b,-a]} \left(-\frac{1}{\tau}, m|\tau| \right). \tag{C.8}$$

Bibliografia

- [1] R. E. Prange e S. M. Girvin, “The Quantum Hall Effect”, Springer (1990).
- [2] K. von Klitzing, G. Dorda e M. Pepper, “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance”, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [3] D. C. Tsui H. L. Stormer e A. C. Gossard, “Two-Dimensional Magneto-transport in the Extreme Quantum Limit”, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [4] X.-G. Wen, “Quantum Field Theory of Many-Body Systems: From the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons”, OUP Oxford (2007).
- [5] A. Cappelli, Gerald V. Dunne, Carlo A. Trugenberger e Guillermo R. Zemba, “Conformal Symmetry and Universal Properties of Quantum Hall States”, Nuclear Physics **B398**, 531-567 (1993).
- [6] X.-L. Qi e S.-C. Zhang, “Topological Insulators and Superconductors”, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).
- [7] A. B. Bernevig e S-C Zhang, “Quantum Spin Hall Effect”, Phys. Rev. Lett. **96**, 106802 (2006).
- [8] L. Fu e C. L. Kane, “Time Reversal Polarization and a \mathbb{Z}_2 Adiabatic Spin Pump”, Phys. Rev. **B74**, 195312 (2006).
- [9] L. Fu e C. L. Kane, “Topological Insulators with Inversion Symmetry”, Phys. Rev. **B76**, 045302 (2007).
- [10] M. Levin e A. Stern, “Classification and Analysis of Two-Dimensional Abelian Fractional Topological Insulators”, Phys. Rev. **B86**, 115131 (2012).
- [11] A. Bohm e A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu e J. Zwanziger, “The Geometric Phase in Quantum System: Foundations, Mathematical Concepts, and Applications in Molecular and Condensed Matter Physics”, Springer (2003).

- [12] R. Jackiw e C. Rebbi, “Solitons with Fermion Number 1/2”, Phys. Rev. **D13**, 3398 (1976).
- [13] A. N. Redlich, “Gauge Noninvariance and Parity Nonconservation of Three-Dimensional Fermions”, Phys. Rev. Lett. **52**, 18 (1984).
- [14] A. N. Redlich, “Parity Violation and Gauge Noninvariance of the Effective Gauge Field Action in Three Dimensions”, Phys. Rev. **D29**, 2366 (1984).
- [15] J. Zak, “Magnetic Translation Group. II. Irreducible Representations”, Phys. Rev. **A34**, 1607 (1964).
- [16] B. I. Halperin, “Quantized Hall Conductance, Current-Carrying Edge States, and the Existence of Extended States in a Two-Dimensional Disordered Potential”, Phys. Rev. **B25**, 2185 (1981).
- [17] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale e M. den Nijs, “Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential”, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
- [18] J. Avron, R. Seiler e B. Simon, Homotopy and Quantization in Condensed Matter Physics”, Phys. Rev. Lett. **51**, 51 (1983).
- [19] Qian Niu, D. J. Thouless e Yong-Shi Wu, “Quantized Hall Conductance as a Topological Invariant”, Phys. Rev. **B31**, 3372 (1985).
- [20] M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics”, CRC Press 2 edizione (2003).
- [21] R. B. Laughlin, “Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations”, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
- [22] J. M. Leinaas e J. Myrheim, “On the Theory of Identical Particles”, Il Nuovo Cimento **B37**, 1-23 (1977).
- [23] F. Wilczek, “Fractional Statistics and Anyon Superconductivity”, Singapore World Scientific (1990).
- [24] R. de Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin e D. Mahalu, “Direct Observation of a Fractional Charge”, Nature **389**, 162 (1997).
- [25] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin e B. Etienne, “Observation of the $e/3$ Fractionally Charged Laughlin Quasiparticle”, Phys. Rev. Lett. **79**, 2526 (1997).
- [26] W. E. Chickering, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer e K. W. West, “Thermopower of Two-Dimensional Electrons at Filling Factors $\nu = 3/2$ and $5/2$ ”, Phys. Rev. **B81**, 245319 (2010).

- [27] B. I. Halperin, A. Stern, I. Neder e B. Rosenow, “Theory of the Fabry-Pérot Quantum Hall Interferometer”, Phys. Rev. B83, 155440 (2011).
- [28] R. Jackiw e S. Y. Pi, “Classical and Quantal Nonrelativistic Chern-Simons Theory”, Phys. Rev. D42, 3500 (1990).
- [29] E. Witten, “Quantum Field Theory and the Jones Polynomial”, Commun. Math. Phys. 121, 351 (1989).
- [30] P. Di Francesco, P. Mathieu e D. Sénéchal, “Conformal Field Theory”, Springer (1997).
- [31] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten, “Superstring Theory”, Cambridge University Press (1988).
- [32] R. Floreanini, R. Jackiw, “Self-Dual Fields as Charge-Density Solitons”, Phys. Rev. Lett. 59, 1873 (1987).
- [33] A. Cappelli e G. Zemba, “Modular Invariant Partition Functions in the Quantum Hall Effect”, Nucl. Phys. B490, 595 (1997).
- [34] A. Cappelli e G. Viola, “Partition Functions of Non-Abelian Quantum Hall States”, J. Phys. A: Math. Theor. 44 075401 (2011).
- [35] A. Cappelli, G. Viola e G. Zemba, “Chiral Partition Functions of Quantum Hall Droplets”, Ann. Phys. 325, 465 (2010).
- [36] G. W. Moore e N. Seiberg, “Taming the Conformal Zoo”, Phys. Lett. B220, 422 (1989).
- [37] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields: Volume 1 Foundations”, Cambridge University Press (May 2005).
- [38] C. L. Kane e E. J. Mele, “ \mathbb{Z}_2 Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect”, Phys. Rev. Lett. 95 146802 (2005).
- [39] X. L. Qi e S. C. Zhang, “Spin Charge Separation in the Quantum Spin Hall State”, Phys. Rev. Lett. 101, 086802 (2008).
- [40] C. Wu, B. A. Bernevig e S. C. Zhang, “Helical Liquid and the Edge of Quantum Spin Hall Systems”, Phys. Rev. Lett. 96, 106401 (2006).
- [41] C. Xu e J. E. Moore, “Stability of the Quantum Spin Hall Effect: Effects of Interactions, Disorder, and \mathbb{Z}_2 Topology” Phys. Rev. B73, 045322 (2006).
- [42] A. Cappelli e E. Randellini, “Partition Functions and Stability Criteria of Topological Insulators”, J. High Energy Phys. 101, 2013 (2013).
- [43] A. Cappelli e E. Randellini, “Stability of Topological Insulators with non-Abelian Edge Excitations”, J. Phys. A 48, 105404 (2015).

- [44] B. A. Bernevig, T. L. Hughes e S.-C. Zhang, “Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells”, *Science* **314**, 1757 (2006).
- [45] B. Zhou, Hai-Zhou Lu, Rui-Lin Chu, Shun-Qing Shen e Qian Niu, “Finite Size Effects on Helical Edge States in a Quantum Spin-Hall System”, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 246807 (2008).
- [46] M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi e S.-C. Zhang, “Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells”, *Science* **318**, 766 (2007).
- [47] F. D. M. Haldane, “Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the Parity Anomaly”, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2015 (1988).
- [48] N. W. Ashcroft e N. D. Mermin, “Solid State Physics”, Saunders (1976).
- [49] J. Zak, “Berry’s Phase for Energy Bands in Solids”, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2747 (1989).
- [50] P. Goddard e I. Olive, “Magnetic Monopoles in Gauge Field Theories”, *Rep. Prog. Phys.* **41**, (1978).
- [51] R. Resta, “Electrical Polarization and Orbital Magnetization: the Modern Theories”, *Rev. Mod. Phys.* **66** 899 (1994).
- [52] N. Marzari, A. A. Mostofi, J. R. Yates, I. Souza e D. Vanderbilt, “Maximally Localized Wannier Functions: Theory and Applications”, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1419 (2012).
- [53] W.P. Su, J. R. Schrieffer e A.J. Heeger, “Solitons in Polyacetylene”, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1698 (1979).
- [54] D. J. Thouless, “Quantization of Particle Transport”, *Phys. Rev.* **B27**, 1651 (1983).
- [55] Q. Niu e D. J. Thouless, “Quantised Adiabatic Charge Transport in the Presence of Substrate Disorder and Many-Body Interaction”, *J. Phys.* **A17**, 2453 (1984).
- [56] G. W. Semenoff, “Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly”, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449 (1984).
- [57] E. Fradkin, “Field Theories of Condensed Matter Physics”, Cambridge University Press (2013).
- [58] J. E. Moore e L. Balents, “Topological Invariants of Time-Reversal-Invariant Band Structures”, *Phys. Rev.* **B75**, 121306 (2007).

- [59] T. Fukui, T. Fujiwara e Y. Hatsugai, “Topological Meaning of \mathbb{Z}_2 Numbers in Time Reversal Invariant Systems”, J. Phys. Soc. Jpn. **77**, 123705 (2008).
- [60] G. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. S. Hor, R. J. Cava e M. Z. Hasan, “A Topological Dirac Insulator in a Quantum Spin Hall Phase”, Nature **452**, 970 (2008).
- [61] C.-X. Liu, X.-L. Qi, H.J. Zhang, Xi Dai, Z. Fang e S.-C. Zhang, “Model Hamiltonian for Topological Insulators”, Phys. Rev. B **(82)**, 045122 (2010).
- [62] Y. Xia, D. Qian, D. Hsieh, L. Wray, A. Pal, H. Lin, A. Bansil, D. Grauer, Y. S. Hor, R. J. Cava e M. Z. Hasan, “Observation of a Large-Gap Topological-Insulator Class with a Single Dirac Cone on the Surface”, Nat. Phys. **5**, 398 (2009).
- [63] Z. Alpichshev, J. G. Analytis, J.-H. Chu, I. R. Fisher, Y. L. Chen, Z. X. Shen, A. Fang e A. Kapitulnik, “STM Imaging of Electronic Waves on the Surface of Bi_2Te_3 : Topologically Protected Surface States and Hexagonal Warping Effects”, Phy. Rev. Lett. **104**, 016401 (2010).
- [64] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, “Supergravity”, Cambdrige University Press (2012).
- [65] J. Schwinger, “On Gauge Invariance and Vacuum Polarization”, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [66] A. Vishwanath e T. Senthil, “Physics of Three-Dimensional Bosonic Topological Insulators: Surface-Deconfined Criticality and Quantized Magnetoelectric Effect”, Phys. Rev. X **3**, 011016 (2013).
- [67] X.-L. Qi, R. Li, J. Zang e S.-C. Zhang, “Inducing a Magnetic Monopole with Topological Surface States”, Science **323**, 1184 (2009).
- [68] E. Witten, “Dyon of Charge $e\theta/2\pi$ ”, Phys. Lett. B **86**, 282 (1979).
- [69] S. W. Hawking, “Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime”, Commun. Math. Phys. **55**, 133 (1977).
- [70] S. Deser, L. Griguolo e D. Seminara, “Gauge Invariance, Finite Temperature, and Parity Anomaly in $D = 3$ ”, Phys. Rev. Lett. **79**, 1976 (1997).
- [71] S. Deser, L. Griguolo e D. Seminara, “Effective QED actions: Representations, Gauge Invariance, Anomalies, and Mass Expansions”, Phys. Rev. **D57**, 7444 (1998).
- [72] A. Cappelli e A. Coste, “On the Stress Tensor of Conformal Field Theories in Higher Dimensions”, Nucl. Phys. **B314**, 707 (1989).

- [73] C. Itzykson e J. B. Zuber, “Two-Dimensional Conformal Invariant Theories on a Torus”, Nuc. Phys. B275, 580-616 (1986).
- [74] C.-T. Hsieh, G. Y. Cho e S. Ryu, “Global Anomalies on the Surface of Fermionic Symmetry-Protected Topological Phases in (3+1) Dimensions”, arXiv:1503.01411 (2015).
- [75] O. Bergman, M. R. Gaberdiel e M. B. Green, “D-brane interactions in type IIB plane-wave background”, J. High Energy Phys. JHEP03(2003)002.
- [76] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger e F. Tricomi, “Higher transcendental functions”, Bateman project vol. 3, sezione 17.9, (McGraw-Hill, New York, 1955).