Esercizio 1

1) Dimostra il teorema della bilancia: Dimostra che nella quale ottimale a bilancia di due masse m_1 e m_2 si ha $\frac{m_1}{m_2} = \frac{b_2}{b_1}$

2) Dimostra il teorema della leva: Dimostra che nella condizione di bilancia il che lunghezze

1) Data un sistema S-T in cui qn. pt. pt. sistema di data o. in punto o. si muove con acc. costante. Spazio percorso $\vec{s}$

2) $\vec{F} = m\vec{a}$ 3) Dimostra il moto a moto rettilineo (cento)

Esercizio 2 (FORMULE DI POISSON) Sia S un sistema inerziale in cui sono assegnate in E_3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una terna di versori solidale a $\mathcal{T}$ $\Rightarrow \exists!\ \omega = \omega(t)$: $\dot{e}_k = \omega \times e_k$. Dimostrare che se ω è diretto costante, allora ω è diretto lungo l'asse di rotazione.

Dim) Definisco ω la $\dot{e}_k = \omega \times e_k$: $\dot{e}_k = R(t)\, e_k$ $\Rightarrow$ $\dot{e}_k = \dot{R}(t)\, e_k$ $\Rightarrow$ $\dot{R}(t) R^T(t) = \Omega(t)$ $\Rightarrow$ $\Omega^T = -\Omega$; Se Ω antisimmetrica $\Rightarrow R^3$ ha autovalore 0

$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega\, \underline{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_2 \\ \omega_1\omega_3 - \omega_3\omega_1 \\ -\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_1 \end{pmatrix} = \omega \times \underline{\omega}$

LEZIONE DISTRIBUZIONE MASSIMA: Sia S in moto in E_3. Si dice $[t_1, t_2]$ $\Leftrightarrow$ $V_P = V_O$ $\forall\, P, Q \in S$ $\forall\, t \in [t_1, t_2]$ $\Rightarrow$ Per Rossom $\frac{d}{dt}(P-O) = \dot{P} - \dot{O} = V_P - V_O$ la $\frac{d}{dt}|P(t) - Q(t)| = 0$ $\forall P, Q$ $\Rightarrow$ $|P(t) - Q(t)| = \text{cost}$

$(P(t) - Q(t))^2 = \text{cost} \Rightarrow \frac{d}{dt}((P(t) - Q(t))^2) = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}((P(t) - Q(t)) \cdot (P(t) - Q(t)) = 0$ $\Rightarrow$ $2(P-Q) \cdot (\underline{v}_P - \underline{v}_Q) = 2(P-Q) \cdot (\underline{v}_P \times (P-Q)) = 0$ cvd

Allora vale la formula fondamentale $\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{\omega} \times (P - O) + \omega \times [\underline{\omega} \times (P - O)]$

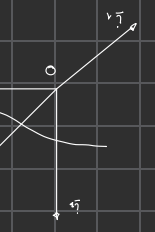
$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$

LAVORO ELEMENTARE: Spostamento di punto P soggetto $\vec{F}(P, x, t)$ $\Rightarrow$ $dL = \vec{F} \cdot d\vec{P}$ con $\{(P_i, \vec{F}_i)\}$ sono $dL = \vec{F}_i \cdot d\vec{P}_i$ con $dP_i = \underline{v}_i\, dt = (\underline{v}_O + \underline{\omega} \times (P_i - O))\, dt = dO + \underline{\omega} \times (P_i - O)$ $\Rightarrow$ $dL = \vec{F}_i \cdot dP_i = \sum_i (\vec{F}_i \cdot dO + \vec{F}_i \cdot (\underline{\omega} \times (P_i - O))) = \vec{R} \cdot dO + \underline{\omega} \cdot \left(\sum_i (P_i - O) \times \vec{F}_i\right) = \vec{R} \cdot d\underline{O} + \underline{\omega} \cdot d\underline{M}_O$

Oss: $d\underline{O}$ e $\underline{\omega}$ sono $\perp$ $\Rightarrow$ "Dim. cambiamento della spostamento finito"

Dimostrare che $\underline{\omega}$ è diretto lungo l'asse di rotazione: $\underline{\omega} = \omega\, \underline{e}_1$ $\Rightarrow$ $\underline{v}_P = \underline{v}_O + \omega\, \underline{e}_1 \times (P - O)$ $\Rightarrow$ $\underline{v}_P = \underline{v}_P^{\parallel} + \underline{\omega} \times (P - P^{\parallel}) = \underline{\omega} \times (P - P^{\parallel})$ base Fa dipende dagli omologhi

ASSI RELATIVI



$\{O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fisso $\quad$ Oss) Si può dire che $\{O, \underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ siano funzioni del t. quindi

$\underline{e}_1(t), \underline{e}_2(t)\}$ $\quad$ Quindi $\underline{v}_P = \dot{x}_1(t)\, \underline{e}_1$ (SUBITA VERSO) $\quad$ DERIVANDO TRAM ASSOLUTA DI UN VERSORE O) $\dot{\underline{e}}_1 = \dot{x}_{12}\, \underline{e}^{\perp}$, $x_{12} \cdot \underline{e}^{\perp}$

DERIVANDO RELATIVA (RISPETTO O) $\dot{\underline{e}}_1 = \dot{x}_{12}\, \underline{e}^{\perp}$

$\rightarrow$ CONTINUANDO CONTINUANDO: Sono $\{O, \underline{i}, \underline{k}\}$ e $\{O, \underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ due mt. rigidi in moto rigido intorno con O fisso e O rigido $\Rightarrow \dot{\underline{i}} = \dot{\underline{e}}_1 + \underline{\omega} \times \underline{e}_1$ dove $\underline{\omega}$ è vettore che o

Teorema (FORMULE DI POISSON) Sia S un sistema rigido in moto assegnato in E_3, $\{O, \underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ una terna di versori solidale a $\mathcal{T}$ $\Rightarrow \exists!\ \underline{\omega} = \underline{\omega}(t)$: $\dot{\underline{e}}_k = \underline{\omega} \times \underline{e}_k$. Dimostrare che se $\underline{\omega}$ è costante allora $\underline{\omega}$ è diretto lungo l'asse di rotazione.

Dim) Definisco ω la $\dot{\underline{e}}_k = \underline{\omega} \times \underline{e}_k$: $\dot{\underline{e}}_k = \dot{R}(t)\, \underline{e}_k$ $\Rightarrow$ $\dot{\underline{e}}_k = \dot{R}(t) R^T(t)\, \underline{e}_k$ $\Rightarrow$ $\dot{R}(t) R^T(t) = \Omega(t)$ $\Rightarrow$ $\Omega^T = -\Omega$; Se Ω antisimmetrica $\Rightarrow R^3$ ha autovalore 0

$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega\, \underline{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_2 \\ \omega_1\omega_3 - \omega_3\omega_1 \\ -\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_1 \end{pmatrix} = \underline{\omega} \times \underline{\omega}$

LEZIONE DISTRIBUZIONE MASSIMA: Sia S in moto in E_3. Si dice $[t_1, t_2]$ $\Leftrightarrow$ $V_P = V_O$ $\forall\, P, Q \in S$ $\forall\, t \in [t_1, t_2]$ $\Rightarrow$ Per Rossom $\frac{d}{dt}(P-O) = \dot{P} - \dot{O} = V_P - V_O$ la $\frac{d}{dt}|P(t) - Q(t)| = \text{cost}$ $\forall P, Q$ $\Rightarrow$ $|P(t) - Q(t)| = \text{cost}$

$(P(t) - Q(t))^2 = \text{cost} \Rightarrow \frac{d}{dt}((P(t) - Q(t))^2) = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}((P(t) - Q(t)) \cdot (P(t) - Q(t)) = 0$ $\Rightarrow$ $2(P-Q) \cdot (\underline{v}_P - \underline{v}_Q) = 2(P-Q) \cdot (\underline{\omega} \times (P-Q)) = 0$ cvd

Allora vale la formula fondamentale $\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{\omega} \times (P - O) + \omega \times [\underline{\omega} \times (P - O)]$

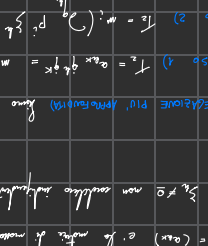
$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$

LAVORO ELEMENTARE: Spostamento di punto P soggetto $\vec{F}(P, x, t)$ $\Rightarrow$ $dL = \vec{F} \cdot d\vec{P}$ con $\{(P_i, \vec{F}_i)\}$ sono $dL = \vec{F}_i \cdot d\vec{P}_i$ con $dP_i = \underline{v}_i\, dt = (\underline{v}_O + \underline{\omega} \times (P_i - O))\, dt = dO + \underline{\omega} \times (P_i - O)$ $\Rightarrow$ $dL = \vec{F}_i \cdot dP_i = \sum_i (\vec{F}_i \cdot dO + \vec{F}_i \cdot (\underline{\omega} \times (P_i - O))) = \vec{R} \cdot dO + \underline{\omega} \cdot \left(\sum_i (P_i - O) \times \vec{F}_i\right) = \vec{R} \cdot d\underline{O} + \underline{\omega} \cdot d\underline{M}_O$

Oss: $d\underline{O}$ e $\underline{\omega}$ sono $\perp$ $\Rightarrow$ "Dim. cambiamento della spostamento finito"

Dimostrare che $\underline{\omega}$ è diretto lungo l'asse di rotazione: $\underline{\omega} = \omega\, \underline{e}_1$ $\Rightarrow$ $\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{\omega}

TEOREMA COORDINATE GENERALI E ATTE) Supponiamo che il moto di uno spazio DELLE COMPIUTAMENTI sia dato da n coordinate $q^1, \dots, q^n$ tali che la posizione di un punto P dipenda da n coordinate $q^1, \dots, q^n$ e che le coordinate $q^1, \dots, q^n$ siano funzioni del tempo t. Allora la velocità di P è data da $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$ e la accelerazione è data da $\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^n$. Se P è vincolato a muoversi su una superficie S definita da $f(q^1, \dots, q^n) = 0$, allora le coordinate $q^1, \dots, q^n$ non sono più indipendenti tra loro, ma devono soddisfare la relazione $f(q^1, \dots, q^n) = 0$. In questo caso si dice che il punto P è vincolato a muoversi su S. Se S è una superficie liscia, allora la velocità $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$ e la accelerazione $\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^n$ non sono più indipendenti tra loro, ma devono soddisfare la relazione $\nabla f \cdot \dot{q} = 0$ e $\nabla f \cdot \ddot{q} + \dot{q} \cdot H_f \dot{q} = 0$, dove H_f è la matrice hessiana di f. Se S è una superficie liscia e P si muove su S con velocità v e accelerazione a, allora la velocità e l'accelerazione di P possono essere scritte come $v = v_t + v_n$ e $a = a_t + a_n$, dove v_t e a_t sono le componenti tangenziali di v e a rispetto a S, e v_n e a_n sono le componenti normali di v e a rispetto a S. Si ha $v_t = \nabla f \cdot v$ e $a_t = \nabla f \cdot a + v \cdot H_f v$, e $v_n = v - v_t$ e $a_n = a - a_t$. Inoltre, si ha $v_n = \frac{\nabla f \cdot v}{|\nabla f|^2} \nabla f$ e $a_n = \frac{\nabla f \cdot a + v \cdot H_f v}{|\nabla f|^2} \nabla f$. Infine, si ha $|v_n| = \frac{|\nabla f \cdot v|}{|\nabla f|}$ e $|a_n| = \frac{|\nabla f \cdot a + v \cdot H_f v|}{|\nabla f|}$. Se S è una superficie liscia e P si muove su S con velocità v e accelerazione a, allora la velocità e l'accelerazione di P possono essere scritte come $v = v_t + v_n$ e $a = a_t + a_n$, dove v_t e a_t sono le componenti tangenziali di v e a rispetto a S, e v_n e a_n sono le componenti normali di v e a rispetto a S. Si ha $v_t = \nabla f \cdot v$ e $a_t = \nabla f \cdot a + v \cdot H_f v$, e $v_n = v - v_t$ e $a_n = a - a_t$. Inoltre, si ha $v_n = \frac{\nabla f \cdot v}{|\nabla f|^2} \nabla f$ e $a_n = \frac{\nabla f \cdot a + v \cdot H_f v}{|\nabla f|^2} \nabla f$. Infine, si ha $|v_n| = \frac{|\nabla f \cdot v|}{|\nabla f|}$ e $|a_n| = \frac{|\nabla f \cdot a + v \cdot H_f v|}{|\nabla f|}$.



DAI YWUCKI ALLE FRAGE) ASSIRAMA: Dimo ladiduino ‘ ‘ ‘

RIMEMBRO IL TEOREMA SPETTRALE) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, simmetrica $(A^T = A) \Rightarrow \exists\, Q \in O_n(\mathbb{R})$ $(QQ^T = I)$: $Q^T A Q = D$ dove D e' diagonale. Equivalentemente, esiste una base ortonormale di autovettori di A in cui questa e' diagonale

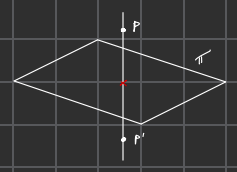
RICHIAMI DI ALGEBRA) Ricordiamo che preso un endomorfismo $f: V \to V$, quei vettori che rispettano questa condizione : $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ sono detti autovettori e λ gli autovalori; ricordando che $f(\underline{v}) = A\underline{v}$ otteniamo che $A\underline{v} = f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Leftrightarrow A\underline{v} = \lambda \underline{v} \Rightarrow$ per trovare gli autovalori si chiede $\det(A - I\lambda) = 0$ in quanto sono interessanti il Ker f non banale, ovvero che il sistema $(A - \lambda I)\underline{v} = M\underline{v} = 0$ non sia banale e quindi mi serve M non invertibile $\Leftrightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) \neq 0$

DEFINIZIONE) Dicesi riferimento PRINCIPALE di inerzia di un sistema materiale rispetto un punto O, quel riferimento ortonormale levogiro in cui la matrice di inerzia si diagonalizza.

COME DETERMINO I RIFERIMENTI PRINCIPALI DI INERZIA ?) Preso I_O come tensore di inerzia, preso $\{O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ il versore $\underline{e}_i$ e' un autovettore di I_O se i prodotti di inerzia si annullano : $\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -I_{xz}\underline{e}_1 - I_{yz}\underline{e}_2 + I_{zz}\underline{e}_3$ ma $I_O \underline{e}_3 = \lambda \underline{e}_3 \Leftrightarrow -I_{xz}\underline{e}_1 - I_{yz}\underline{e}_2 + I_{zz}\underline{e}_3 = \lambda \underline{e}_3$ (preso $\underline{e}_3$)

$\Rightarrow \lambda = I_{zz}$, facendo di tutto fare lo stesso con $\underline{e}_1$ ed $\underline{e}_2$ ho trovato il riferimento ortonormale levogiro in cui possiamo diagonalizzare.

PIANO DI SIMMETRIA MATERIALE) Diremo che π e' un piano di simmetria materiale per $S \Leftrightarrow$ 1) $\forall P \in S$, $\exists P' \in S$: $PP' \perp \pi$ 2) $d(P, \pi) \overset{\text{UGUALI}}{=} d(P', \pi)$ 3) $S(P) = S(P') \Rightarrow$ Allora $I_{is} = 0$ con $i \neq s$



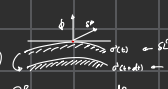
ES NOTEVOLE) Supponiamo $I = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcoliamo $P(\lambda) = \det|I - 1\lambda| = (1-\lambda)((5-\lambda)(3-\lambda) - 4) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 11) \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4+\sqrt{5}$, $\lambda_3 = 4-\sqrt{5}$, cerchiamo gli autovettori.

$(I - 1\lambda_3)\underline{x} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_3$ 2) $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3) $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -(1+\sqrt{5}) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ individuano le direzioni degli assi principali, con versori $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ tali che $\underline{e}_i \parallel \underline{e}_i$ e $I_{PRINCIPALE} = \begin{pmatrix} 4+\sqrt{5} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 4-\sqrt{5} \end{pmatrix}$ (BASE PRINCIPALE DI INERZIA)

EQ. EULERO - LAGRANGE) Riprendiamo le eq. cardinali: $\begin{cases} M_{tot}\underline{a}_{CM} = \sum F^{(EST)} \\ \dot{\underline{L}}_O + \dot{\underline{r}} \wedge M\underline{v}_{CM} = \underline{M}_O^{(EST)} \end{cases}$, il nostro obiettivo e' ora quello di verificare l'equivalenza tra le eq. Newton e le eq. Lagrange. Prendiamo un sistema $S = \{(P_1, m_1), \dots, (P_n, m_n)\}$ descritto con $q = (q_1, \dots, q_n)$, dove $m_i \underline{a}_i = \underline{F}_i^{(EST)} + \underline{\Phi}_i^{(EST)}$ da cui D'ALAMBERT riscritta $(\underline{F}_i^{(EST)} - m_i \underline{a}_i) + \underline{\Phi}_i = 0$ (STATICA) ($\underline{\Phi}_i = \underline{F}_i(P_1, \dots, P_n, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n; t)$) usando di vincolare la dinamica alla statica.

Osserviamo che abbiamo incognite DINAMICHE (Φ_i $i = 1, \dots, n$ quindi $3N$ incognite) e incognite CINEMATICHE ($q_1(t), \dots, q_n(t)$ sono n incognite) $\Rightarrow$ Ho $3N + n$ incognite.

Dividiamo : $(\underline{F}_i - m_i \underline{a}_i + \underline{\Phi}_i) \cdot \delta P^i = 0 \cdot \delta P_i = 0$ da $3N$ eq. scalari ovvero a 1 eq. scalare $\Rightarrow \underbrace{\underline{F}_i \cdot \delta P^i}_{\delta L^{(a)}} - \underbrace{m_i \underline{a}_i \cdot \delta P^i}_{\delta L^{(INERZIALE)}} + \underbrace{\Phi_i \cdot \delta P^i}_{\delta L^{(v)}} \Rightarrow \delta L^{(a)} + \delta L^{(in)} + \delta L^{(v)} = 0$ PRINCIPIO DI D'ALAMBERT. Mettiamoci nell'Hp : 1) vincoli olonomi ideali ($\delta L^{(v)} \geq 0$)



Abbiamo una di attrito : scesa $\Rightarrow \delta L^{(a)} + \delta L^{(in)} \leq 0$ $\forall$ configurazione di S

2) Vincoli olonomi lisciati ed ideali: $\delta L^{(a)} + \delta L^{(in)} = 0$, riscriviamo le $\delta L^{(a)} = Q_k \delta q^k = \underbrace{\underline{F}_i \cdot \frac{\partial P^i}{\partial q^k}}_{\text{COMP. LAGRANGIANE FORZE ATT.}} \delta q^k$ e $\delta L^{(in)} = \tau_k \delta q^k = \underbrace{(-m_i \underline{a}_i) \cdot \frac{\partial P^i}{\partial q^k}}_{\text{COMP. LAGRANGIANE FORZE INERZIA}} \delta q^k \Rightarrow Q_k + \tau_k = 0$ $\forall k = 1, \dots, n$. Studiamo la LEGGE DI CALCOLO (DERIVAZIONE PARTI) $\frac{\partial v}{\partial q_k} = \frac{\partial P}{\partial q_k}$ DATI $v = \frac{dP}{dt} = \partial_{q_k} P \dot{q}^k + \partial_t P \Rightarrow \partial_{\dot{q}_k} v = \partial_{q_k} P$.

Con questo in mente noto che: $\tau_k := (-m_i \underline{a}_i) \cdot \partial_{q_k} P^i = (-m_i \dot{\underline{v}}_i) \cdot \partial_{q_k} P^i = -\frac{d}{dt}(m_i \underline{v}_i \cdot \partial_{q_k} P^i) + m \underline{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\partial_{q_k} P^i = -\frac{d}{dt}(m_i \underline{v}_i \cdot \partial_{q_k} \underline{v}^i) + m_i \underline{v}_i \cdot \partial_{q_k} \underline{v}^i = -\frac{d}{dt}\left(\partial_{\dot{q}_k}\left(\frac{1}{2} m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}^i\right)\right) + \partial_{q_k}\left(\frac{1}{2} m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}^i\right) = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \Rightarrow Q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$ $k = 1, \dots, n$

(Prod. scalare; CALC. ALTRO; CALC. ALTRO)

$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \\ q_k(t_0) = q_k^0, \dots, q_n(t_0) = q_n^0 \\ \dot{q}_k(t_0) = \dot{q}_k^0, \dots, \dot{q}_n(t_0) = \dot{q}_n^0 \end{cases}$ 2n CONDIZIONI

(← CHE BELLO → MOTIVAZIONE) $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_k}\ddot{q}^k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial q_k}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial t} \Rightarrow A\ddot{q} = \underbrace{Q_k + \partial_{q_k} T - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial q_k}\dot{q}^k - \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial t}}_{F_k(q, \dot{q}, t)} \Rightarrow A\ddot{q} = F(q, \dot{q}; t)$ e dato che A e' def positiva la $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \ddot{q} = A^{-1}F(q, \dot{q}; t)$ che e' una eq. diff. ordinaria in forma NORMALE

EQ. DI LAGRANGE

$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}; t) \\ q_i(t_0) = q_i^0 ; \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_i^0 \end{cases}$ Sistema a vincoli olonomi lisci e bilateri $\Rightarrow$ PROPRIETA') - INTERPRETATI - QUALI A VIOLF - SONO SCALARI

Riassumendo $T = T_0 + T_1 + T_2$ $\quad T_2 = \frac{1}{2} a_{hk}(q; t)\dot{q}^h \dot{q}^k$ $\quad T_1 = a_h(q; t)\dot{q}^h$

$V(q, t) \to \delta V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i = \partial_i V \delta q^i$

RICORDO: $\delta L^{(in)} = \underline{F}_i \cdot \delta P^i = \underline{F}_i \cdot (\partial_{q^h} P^i)\delta q^h = (\underline{F}_i \cdot \partial_{q^h} P^i)\delta q^h = Q_h \delta q^h$

Le eq. di Lagrange sono un sistema di equazioni differenziali (prime delle incognite vincolari), ordinarie, nelle incognite $(q_1(t), \dots, q_n(t))$

DEF) Diremo che un sistema di forze posizionali e' conservativo se esiste una funzione $V(q; t)$, detta energia potenziale, tale che $Q_k = -\partial_{q_k} V \Leftrightarrow \delta L = -\delta V$

Supponiamo ora che le forze attive siano $Q_k = Q_k(q; t)$ e che esista una funzione (almeno di classe C^1) $V(q; t)$ tale che : $Q_k = -\partial_{q_k} V \Leftrightarrow \delta L = -\delta V \Rightarrow \frac{d}{dt}\partial_{\dot{q}_i} T - \partial_{q_i} T = Q_i = -\partial_{q_i} V \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} = 0$ (NON CONSERVATIVO; E' vero perche $\partial_{\dot{q}_i} V = 0$) Poniamo $\mathcal{L} = T - U$ e la chiamiamo lagrangiana

da cui ricaviamo le eq. di Eulero - Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ DEF) Diremo che un sistema di forze di componenti $Q_k = Q_k(q, \dot{q}; t)$ deriva da un potenziale generalizzato $V(q, \dot{q}; t)$ se $Q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$ ES) Forza di Coriolis nei sistemi non inerziali, forza di Lorentz in EM.

CHIARIMENTI UTILI) Dopo aver letto queste cose, sorgono diverse domande: Perché posso usare $V(q; t)$? Cos'e' il potenziale generalizzato? Andiamo con ordine: Volendo ricondurci alla prima, notiamo che abbiamo detto $Q_i = -\partial_{q_i} V$, ma $V = V(q; t)$ non rappresenta un sistema conservativo in quanto dipende dal tempo, si ottiene facilmente da $\delta V = -\delta L$ perché $\delta V = \partial_{q_i} V \delta q^i + \partial_t V \delta t$ (COME LE SOLITE) ma il secondo e' nullo $\delta t = 0$ (NON C'E' IN δL) $\Rightarrow$ Considerando $\delta V(q; t) = \partial_{q_i} V \delta q^i + \partial_t V \delta t = \partial_{q_i} V \delta q^i \Rightarrow$ le eq. di E-L che abbiamo dedotto per sistemi conservativi continuano a valere anche se $V = V(q; t)$, poiché sale ancora $Q_i = -\partial_{q_i} V$ e $\partial_{q_i} V = 0$, non continua a valere se considero $V = V(q, \dot{q}; t)$ poiché: $\delta V = \partial_{q_i} V \delta q^i + \partial_{\dot{q}_i} V \delta \dot{q}^i + \partial_t V \delta t = \partial_{q_i} V \delta q^i + \partial_{\dot{q}_i} V \delta \dot{q}^i \Rightarrow Q_i \neq -\partial_{q_i} V$, cerchiamo di inventarci qualcosa, supponiamo di essere una F_i : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = F_i(q, \dot{q}; t)$ perché continui a valere la formulazione con una $\mathcal{L} = T - V$ manipoliamo un po': introduciamo una $U = U(q; \dot{q}; t)$ e imponiamo che valga con $\mathcal{L} = T - U$ che $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} \Rightarrow$ Concludendo, abbiamo trovato che se $\exists\, U(q; \dot{q}; t)$: $F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i}$ continua a valere la formulazione lagrangiana.

SALVATAGGIO LINEARITA') Prendiamo l'equazione di D'Alembert : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = Q_i^{(conservativa)} + Q_i^{(n. cons)} = -\partial_{q_i} V + Q_i^{(n. cons)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^{(n. cons)}$, cerchiamo di modellare una $Q_i^{(n. cons)}$ se una $F^{(smorza)}$ o $K\underline{x}$, per dimostrare $Q_i = F_{a_j}\frac{\partial P^j}{\partial q_j}$ assumiamo esista $\mathcal{F} : -\vec{\nabla}_{v_i}\mathcal{F} = F_{a_i} \Rightarrow$

$Q_j = F_{a_i} \cdot \frac{\partial P^i}{\partial q_j} = -\sum_i^n \vec{\nabla}_{v_i}\mathcal{F} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j}$, questa funzione se $\mathcal{F}(q; \dot{q}; t) = \frac{1}{2}\sum_i (K_{x_i} V_{x_i}^2 + K_{y_i} V_{y_i}^2 + K_{z_i} V_{z_i}^2) \Rightarrow$ la forza di attrito proporzionale a $\underline{v}$ le E-L assumono questa forma: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0$

LE EQ. DI LAGRANGE COME INVARIANTI PER CAMBIAMENTI RAZIONALI (INVERTIBILI)

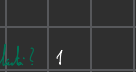
Mettiamoci nello spazio delle configurazioni, abbiamo $\underline{q} = (q_1(t), \dots, q_n(t))$. Effettuiamo una trasformazione delle coordinate $\xi_i = \xi_i(q, t)$ che deve essere INVERTIBILE cioe' : $\det\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}\right) \neq 0$, con questa nuova posso ottenere $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)]_{q = q(\xi)} \Rightarrow$ le eq. di Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = 0$

DIM) Iniziamo con $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_s} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi_s}$ ma $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j}\dot{\xi}^j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\xi}_s} = \frac{\partial q_i}{\partial \xi_s} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi_s}\right) = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial \xi_s} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_s}\right)$ vediamo se $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_s}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_s}\right)\dot{\xi}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_s}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_s}\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \xi_k}\dot{\xi}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \xi_s} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_i} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \xi_k}$ (DA DEF) $+ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_k}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_k} = 0$ $\square$ (Il caso di $\det\left(\frac{\xi_s}{q_i}\right) \neq 0$ e la parentesi di $q \to \xi$ e quindi $\xi = \xi(q, t)$ e $q = q(\xi, t)$)

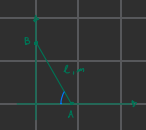
↳ E' la Jacobiana del cambio di coordinate : $J = \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} = J(\xi, t)$ perché $q \to q(\xi, t)$

ES) CALCOLA lagrangiana e ricava eq. Eulero - Lagrange



BANALE

ES)



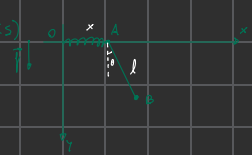
Quanti gradi di libertà? 1

Eulero - Lagrange : Usiamo prima i lavori virtuali, $\delta L = \underline{F} \cdot \delta P = mg \cdot \delta P = -mg\,\delta y_G$ ma $y_G = \frac{l}{2}\sin\theta$ e $\delta y_G = \frac{l}{2}\cos\theta\,\delta\theta \Rightarrow \delta L = -\frac{1}{2}mgl\cos\theta\,\delta\theta = -\delta\left(\frac{1}{2}mgl\sin\theta\right)$, abbiamo la $T = \frac{1}{2}m v_G^2 + \frac{1}{2}\underbrace{I_G}_{\frac{1}{12}ml^2}\dot{\theta}^2$ $\quad x_G = \frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow \dot{x}_G = -\frac{l}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}$, $y_G = \frac{l}{2}\sin\theta \Rightarrow \dot{y}_G = \frac{l}{2}\cos\theta\,\dot{\theta} \Rightarrow v_G^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2\dot{\theta}^2$ $\quad I_G = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho\,\xi^2\,d\xi = \frac{1}{12}ml^2$

$\Rightarrow T = \frac{1}{6}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{24}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{6}m(l\dot{\theta})^2$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{6}m(l\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2}mgl\sin\theta$ CALCOLA E-L : $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mgl\cos\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta$ Se $\theta \sim 0$ facile soluzione

ES)



$A(x, 0)$ $\quad B(x + l\sin\theta, -l\cos\theta)$ $\quad q_1 = x$ e $q_2 = \theta$

Ho aggiunto $h_p = 0$

$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left((\dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + (l\sin\theta\,\dot{\theta})^2\right) \Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left((\dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + (l\sin\theta\,\dot{\theta})^2\right) + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2$

$U = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2$

EQ. E-L : $\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}l\cos\theta - m\dot{x}l\sin\theta\,\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} + m\dot{x}l\sin\theta\,\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow m\ddot{x}l\cos\theta + ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow m(2\ddot{x} + l\cos\theta\,\ddot{\theta} - l\sin\theta\,\dot{\theta}^2) + kx = 0 \end{cases}$

RAMMENTIAMO ALCUNI PRINCIPI / LEGGI UTILI:

Se $F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ si dice conservativa, cioe' $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \exists\, \phi : \vec{F} = -\vec{\nabla}\phi \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ in un Ω SLC $\Rightarrow$ Se presenza di simmetria temporale si CONSERVA L'ENERGIA : $E_{TOT} = T + U$ inoltre $L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \Delta T_{AB}$

CONSERVAZIONE QUANTITA' MOTO) Abbiamo che $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^t \vec{F}\,dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{P} \Rightarrow \vec{P}_{F_A} - \vec{P}_{F_A^0} = \int_{t_0}^t \vec{F}_A\,dt = -\int_{t_0}^t \vec{F}_B\,dt = \vec{P}_{F_B^0} - \vec{P}_{F_B} \Rightarrow \vec{P}_{F_A} + \vec{P}_{F_B} = \vec{P}_{F_A^0} + \vec{P}_{F_B^0} \Rightarrow \Delta\vec{P} = 0$ se il sistema e' isolato IMPULSO $\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F}\,dt$

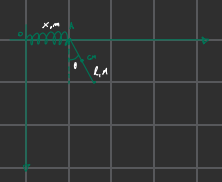
CENTRO MASSA) Prendo O e O', O' si muove a $\vec{x} \Rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{x}$, calcoliamo la $\vec{P}' = m_J \vec{v}'_J = \sum_J m_J(\vec{v}_J - \vec{x}) = m_J \vec{v}^J - \sum_J m_J \vec{x}$ imponiamo che $\vec{P}' = 0 \Rightarrow \vec{x} = \frac{m_J \vec{v}^J}{\sum_J m_J}$ Questo riferimento e' detto CM ed e' quello in cui la $\vec{P}_{TOT}$ del sistema e' nulla.

(CINETICA : $T_{CM} = \frac{1}{2}m_i|\vec{v}'_i|^2 \Rightarrow T_0 = \frac{1}{2}\sum_i^n m_i|\vec{v}'_i + \vec{x}|^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i^n m_i|\vec{v}'_i|^2 + \sum_i^n m_i|\vec{x}|^2\right) + \sum_i^n m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{x} = T_{CM} + \frac{1}{2}M_{TOT}V_{CM}^2$ TEO. KONIG

EQ. CARDINALI) I : $\frac{d}{dt}\sum_i^n \vec{P}_i^{ext} = M_{TOT}\vec{a}_{CM}$ II : $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}_{TOT}^{EXT} - \vec{v}_0 \times \vec{P}_{TOT}$ RELAZIONI SU $\vec{L}$: $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}\,dm = \int(\vec{r}' + \vec{R}_{CM}) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{v}')\,dm = \int \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}\,dm + \int \vec{r}' \times \vec{v}'\,dm = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \left(\int r'^2\omega'\,dm\right)\hat{r} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{TOT} + (I_z^{CM}\omega')\hat{z} \Rightarrow T = \int \frac{1}{2}|\vec{v}'|^2\,dm = \frac{1}{2}M_{TOT}V_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_z^{CM}\omega'^2$ STEINER : $I_z = I_z^{CM} + M_{TOT}d_{AMI}^2$

$I = \int |\vec{r}'|^2\,dm$ e $\vec{M}^{EXT} = I\vec{\alpha}$ (o fermo, $\frac{d}{dt}\hat{\omega} = 0$)

ES PER ELIO)



$A(x, 0)$ $\quad CM(x + l^*\sin\theta, -l^*\cos\theta)$ $\quad$ VARIABILI UTILI : $\boxed{l^* = \frac{l}{2} \quad I_z^{CM} = \frac{M}{12}l^2 \quad h_p = 0}$

$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left((\dot{x} + l^*\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + (l^*\sin\theta\,\dot{\theta})^2\right) + \frac{1}{2}I_z^{CM}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + (l^*\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}l^*\cos\theta\,\dot{\theta}) + \frac{1}{24}Ml^2\dot{\theta}^2$

$U = -\frac{1}{2}kx^2 - Mgl^*\cos\theta$

SONO LE 2:43 (SIATE CLEMENTI)

$q_1 = x$, $q_2 = \theta$ $\quad$ NDOF = 2

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + (l^*\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}l^*\cos\theta\,\dot{\theta}) + \frac{1}{6}Ml^{*2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + Mgl^*\cos\theta$

I : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{x}(m + M) + Ml^*(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2) + kx = 0$

II : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow Ml^{*2}\ddot{\theta} + M\ddot{x}l^*\cos\theta - M\dot{x}l^*\sin\theta\,\dot{\theta} + \frac{Ml^{*2}}{3}\ddot{\theta} + M\dot{x}l^*\sin\theta\,\dot{\theta} + Mgl^*\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(m + M) + Ml^*(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2) + kx = 0 \\ \frac{4}{3}Ml^{*2}\ddot{\theta} + M\ddot{x}l^*\cos\theta + Mgl^*\sin\theta = 0 \end{cases}$

OSS) Per i più attenti, noterà che nello stesso esercizio ho considerato $\dot\theta$ senza troppo preoccuparmi che nella $T = \frac{1}{2}M_{rot}V_{cm}^2 + \frac{1}{2}I^s_{cm}\dot\theta_{cm}^2$ PERCHÉ? Sono impazzito? Chiaramente no, supponiamo che $\exists\, O \in O'$: $\dot\theta \times \dot\theta' \Rightarrow \underline{V}_P = \underline{V}_O + \omega_s \times (P-O)$ e $\underline{V}_P = \underline{V}_{O'} + \omega' \times (P-O') \Rightarrow \underline{V}(O') \equiv \underline{V}_{O'} = \underline{V}_O + \omega_s \times (O'-O)$

ma $\Rightarrow \underline{V}_P = \underline{V}_O + \omega_s \times (O'-O) + \omega' \times (P-O') \Rightarrow \omega_s \times (O'-O) + \omega' \times (P-O') = \omega_s \times (P-O)$ e noto che $P-O = P-O'+O'-O$ ho $(\omega_s - \omega') \times (P-O') = 0 \Rightarrow (\omega_s - \omega') \parallel (P-O')$ $\forall P \in S$ corpo, ma se non è una retta $\Rightarrow \omega_s = \omega'$ □.

FUNZIONE DI JACOBI) Abbiamo un sistema di Lagrangiana $\mathcal{L}(q;\dot q;t)$, iniziamo per il tempo: (USANDO LE SOLUZIONI ED E-L) $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q;\dot q;t) = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\ddot q_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\dot q_k\right) - \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\right)\dot q_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\dot q_k\right) + \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\right)\dot q_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\dot q_k - \mathcal{L}\right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ (SO CONSIDERANDO $\{q_k(1), k=1,\dots,n\}$ SOLUZ ED. E-L) ($h_L(q;\dot q;t)$ FUNZIONE JACOBI), ossia dico che se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ la funzione di Jacobi si conserva

TEO CONSERVAZIONE JACOBI) Sia S un sistema di Lagrangiana $\mathcal{L}$, se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow h_L(q;\dot q;t) = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\dot q_k - \mathcal{L} = cost$, cioè la funzione di Jacobi è costante lungo il moto (Nell'spazio delle configurazioni) OSS) Chiamiamo MOMENTO GENERALIZZATO: $P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}$ (Spesso lo moltiplicato per $\dot q_i$, PORCODIO l'unità dimensionale)

OSS FUNZ h_L) Osserviamo che anche se $h_L = h_L(q;\dot q;t)$ è numericamente uguale all'Hamiltoniana, ma come poi vedremo l'Hamiltoniana $H = H(q^s, p^s)$ sarà dipendente solo dalle posizioni e di $2n$ - VARIABILI.

Consideriamo ora un sistema meccanico holonomo soggetto a forze oltre di potenziale $V(q;t)$: $h_L(q;\dot q;t) = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}\dot q_k - \mathcal{L} = \sum_k \frac{\partial T_2}{\partial \dot q_k}\dot q_k + \sum_k \frac{\partial T_1}{\partial \dot q_k}\dot q_k - T_2 - T_1 - T_0 + V$ applichiamo il TEO di Eulero per le funzioni omogenee ($\lambda \in \mathbb{R}^+$: $f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) = \lambda^d f(x_1,\dots,x_n)$ omogenea di grado d) $\Rightarrow \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}x_i = d f$) $\Rightarrow$

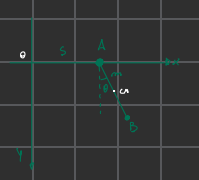
$\Rightarrow 2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 + V = T_2 - T_0 + V$, inoltre se il sistema è a vincoli fissi e soggetto a forze conservative stazionarie: $h_L = T_2 - T_0 + V \longrightarrow T_0 = 0$, $T_2 = T$ $h_L = T + V$ che è l'energia meccanica totale. ($T_2 = \frac{1}{2}a_{hk}\dot q^h \dot q^k \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot q_k}\dot q^h \dot q^k = \dot q^h \dot q_h$)

TEO EULERO F OMOGENEE) Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $\hat\Omega$: $x \in \hat\Omega \cap \lambda x \in \hat\Omega$, si dice OMOGENEA di grado k $\Leftrightarrow \forall x \in \Omega \cap \forall t > 0$: $tx \in \hat\Omega$ sse $f(tx) = t^k f(x)$. Se $f \in C^1(\Omega)$ è omogenea di grado $d \Rightarrow$ DIM: $\forall x \in \Omega$ sse $x \cdot \vec\nabla f(x) = k f(x)$ DIM) Proviamo un po', iniziamo PIF definendo $\varphi(t) = f(tx)$ con $t > 0$ dove sfruttando le H_p ho $f(tx) = t^d f(x) \Rightarrow \varphi(t) = t^d f(x)$, iniziamo per t: $\frac{d}{dt}\varphi(t) = d t^{d-1} f(x)$ e $\frac{d}{dt}f(tx) = \frac{d}{dt}f(tx_1,\dots,tx_n) = \sum_i \frac{\partial f(tx)}{\partial (tx_i)}\frac{d(tx_i)}{dt} = \sum_i \frac{\partial f(tx)}{\partial (tx_i)}x_i$, valendo $\forall t$ varrà per $t=1 \Rightarrow \dot\varphi(1) = d f(x)$ $\dot\varphi(1) = \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}x_i = \vec\nabla f(x)\cdot x \Rightarrow \vec\nabla f(x)\cdot x = d f(x)$.

DEF) Sia dato un sistema di Lagrangiana $\mathcal{L}(q;\dot q;t)$, diremo che $f(q(t);\dot q(t);t)$ è un integrale primo delle equazioni di Lagrange se si conserva costante lungo le soluzioni di tali equazioni. (Ricordando sistema con integrali primi funzionalmente indipendenti)

DEF) Sia dato un sistema di Lagrangiana $\mathcal{L}(q;\dot q;t)$, diremo che q_i è una coordinata ciclica o ignorabile $\Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} = cost$ (Ogni coordinata ciclica corrisponde ad un MOMENTO CONIUGATO che costante, quindi ad una simmetria del SISTEMA)

ES)



$A(s,0)$ $CM(s+\frac{l}{2}\cos\theta, \frac{l}{2}\cos\theta)$ $T = \frac{1}{2}m\left((\dot s + \frac{l}{2}\cos\theta\,\dot\theta)^2 + (-\frac{l}{2}\sin\theta\,\dot\theta)^2\right) + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot s^2 + l\cos\theta\,\dot s\dot\theta + \frac{l^2}{4}\cos^2\theta\,\dot\theta^2 + \frac{l^2}{4}\sin^2\theta\,\dot\theta^2\right) + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot s^2 + \frac{l^2}{4}\dot\theta^2 + l\cos\theta\,\dot s\dot\theta\right) + \frac{1}{2}I\dot\theta^2$ $V = -mg\frac{l}{2}\cos\theta$

$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot s^2 + \frac{l^2}{4}\dot\theta^2 + l\cos\theta\,\dot s\dot\theta\right) + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta$ da cui, se si è fatto ANALISI 1 al primo trimestre, è banale vedere che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 \Rightarrow s$ è CICLICA

DEF) Diremo che una trasformazione di coordinate $Q_i = f_i(q)$ è ammissibile per $\mathcal{L}$ se $\mathcal{L}(Q;\dot Q) = \mathcal{L}(q;\dot q)$ soggetto sia $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, $\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_s}\right) \neq 0$.

OSS) Naturalmente se ho una semplice trasformazione invertibile, $Q_i = f_i(q)$ con $\det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_s}\right) \neq 0$, la Lagrangiana diventa in q sse $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q;\dot q)$, ora considero Q $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(Q;\dot Q) = \tilde{\mathcal{L}}(f(q); Df(q)\dot q)$ dove $q \neq f(q)$ e $\dot q \neq Df(q)\dot q$, mentre nel caso di TRASF AMM valgono le identità.

In particolare abbiamo una famiglia di trasformazioni ad un parametro $Q_i = f(q;s)$ con $s \in \mathbb{R}$ che ci interessa.

DEF) Diremo che una famiglia di trasformazioni ammissibili ad un parametro $f(q;s)$ costituisce un GRUPPO di trasf. amm. per $\mathcal{L}$ se: 1) $f(q,0) = q$ 2) $Q = f(q,s) \Rightarrow q = f(Q,-s)$ $\forall s$ 3) $f(f(q,s_1),s_2) = f(q, s_1+s_2)$

FORMALIZZAZIONE (MOLTO UTILE): Dato che ODIO gli dami di notazione cerchiamo di essere più chiari; definiamo, fissato $s \in \mathbb{R}$, una trasformazione $T_s: q \in C_n \to T_s(q) = f(q,s) = Q \in C_n$, posto $G = \{T_s : s \in \mathbb{R}\}$, l'operazione binaria interna del gruppo è la composizione $\circ: G \times G \longrightarrow G$ tale che

$(T_{s_1} \circ T_{s_2})(q) = T_{s_1}(T_{s_2}(q)) \Rightarrow$ il gruppo così definito si scrive $(G, \circ) = (\{T_s : C_n \to C_n \mid s \in \mathbb{R}\}, \circ)$. Diciamo al lice che la 2 è soddisfatta, per quanto la 1 sia ovvia dalla def di gruppo la 3 non lo è infatti in realtà si c'era stattura dipendenza in più che permette al gruppo

"con parametro" di avere una corretta definizione; si è implicitamente usato $S: s \in \mathbb{R} \to T_s \in G$ a cui si deve chiedere di essere un omomorfismo ($S(s_1+s_2) = S(s_1) \circ S(s_2)$) $\Rightarrow T_{s_1+s_2} = S(s_1+s_2) = S(s_1) \circ S(s_2) = T_{s_1} \circ T_{s_2}$; ma la 2 è quindi banale DIMOSTRAZIONE) Prendo $f_{s_2}(f_{s_1}(q,s_1), s_2) = f_{s_1+s_2}(q, s_1+s_2)$ e impongo $s_1 = -s$ e $s_2 = s \Rightarrow f_s(f_{-s}(q,-s), s) = f_0(q,0) = q \Rightarrow f_{-s}(q,-s) = Q$ e $f_s(Q,s) = q$ □

$(R,1) \xrightarrow{s} (G,0)$

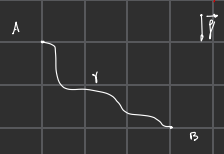
TEO DI NÖETHER) Sia $f(q,s)$ un gruppo di trasformazioni ammissibili per la $\mathcal{L}(q,\dot q) \Rightarrow$ la funzione $I = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\frac{\partial f_s}{\partial s}(q,0)$ (Q_s ma per $s=0$, $Q=q$) è un integrale primo delle E-L, cioè lungo un moto reale $q(t)$: $\frac{d}{dt}I(q(t);\dot q(t)) = 0$ DIM) Osserviamo preliminarmente che $\mathcal{L}(f(q,s), f(q,s)) = \mathcal{L}(q,\dot q)$ $s \in \mathbb{R}$ e $\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(q,s), f(q,s)) = 0$, assumiamo di dover quando sse $\{q_k(t), k=1,\dots,n\}$ e notiamo quindi: $0 = \frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(q,s), f(q,s)) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s}\frac{\partial f_s}{\partial s} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\frac{\partial f_s}{\partial s} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s}\frac{\partial f_s}{\partial s} + \frac{d}{dt}\left(\sum_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\frac{\partial f_s}{\partial s}\right) - \sum_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\right)\frac{\partial f_s}{\partial s} = \sum_s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\right)\frac{\partial f_s}{\partial s} + \frac{d}{dt}\left(\sum_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\frac{\partial f_s}{\partial s}\right)$ (Q_s, Q_s) $\frac{d}{dt}\left(\sum_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\frac{\partial f_s}{\partial s}\right) = \sum_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\right)\frac{\partial f_s}{\partial s} + \sum_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_s}{\partial s}\right)$ e $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f_s}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f_s}{\partial t}$ poiché $f_s \in C^2$ con dim. E-L

$Q_s = q_s + \delta_{is}s$

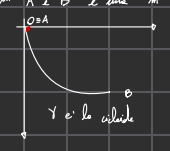
Definiamo ora $f_s(q,s) = \begin{cases} q_i - s & \text{se } i = s \\ q_s & \text{se } i \neq s \end{cases}$ e impongo $\frac{\partial f_s}{\partial s}(q,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } s = i \\ 0 & \text{se } s \neq i \end{cases} \Rightarrow I(q,\dot q) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}\frac{\partial f_s}{\partial s}(s,0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} = p_i$ MOMENTO CONIUGATO DI q_i

$\hookrightarrow$ Quando pongo $s=0$, Q_i "collassa" a q_i

PROBLEMA BRACHISTOCRONA) Consideriamo una guida che collega A e B e una m posta in A con $v_i = 0$, DOMANDA: "Qual è la curva di tempo minimo che collega A a B?"



Cerchiamo di trovare Y:



$P(0) = 0$ e $\dot P(0) = 0$

INTEGRALE ENERGIA: $\frac{1}{2}mv^2 - mgy = \frac{1}{2}m v_i^2 - mgy_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mgy \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \Rightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \Rightarrow \int_0^T dt = \int_0^{x_2}\frac{ds}{\sqrt{2gy}}$ dove $ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx \Rightarrow T = \int_0^{x_2}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\,dx$ imponiamo $\tau = \int_0^{x_2}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\,dx$ e noto che $g = 1$

DOVREMO MINIMIZZARE CHE È UN FUNZIONALE

FUNZIONALE INTEGRALE CALCOLO VARIAZIONALE) $I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x)\,dx$ ($\in \mathbb{R}$) dove F è detta Lagrangiana, considero y^* max di $I(y)$, cioè $I(y^*) \geq I(y)$ in un intorno di funzioni $C^0[x_0,x_1]$ e $C^1(x_0,x_1)$ cioè considero $y(x) = y^*(x) + \lambda\eta(x)$ con $\lambda \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ e $\eta(x) \in C^0[x_0,x_1]$, $C^1(x_0,x_1)$ e $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ DEF ESTREMI FUNZIONALI) Diremo che y^* è un massimo (minimo) relativo di $I(y)$ se $I(y^*) \overset{\leq}{\geq} I(y^* + \lambda\eta)$ $\forall \lambda \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ e η definite come prima (CLASSE DELLE FUNZIONI AMMISSIBILI)

TEO EULERO) Sia $I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x)\,dx$, con $A := \{y \in C^0[x_0,x_1], C^1(x_0,x_1) : y(x_0) = y_0 \text{ e } y(x_1) = y_1\}$ e $F \in C^2 \Rightarrow I: y(x) \in A \to I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x)\,dx$, condizione necessaria affinché y^* sia un estremo di $I(y)$ è che y^* sia soluzione dell'eq: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ DIM) Supponiamo che y^* sia un max di $I[y]$ tale che $I[y^*] \geq I[y^* + \lambda\eta]$ $\forall \lambda$ e $\forall \eta$, consideriamo il LEMMA FONDAMENTALE ($\int_a^b G(x)\eta(x)\,dx = 0$ con $\eta(x)$ ammissibile e $G(x) \in C^0 \Rightarrow G(x) = 0$ in $[a,b]$) che dimostriamo regolarmente: Per assurdo $\exists\, \xi \in [a,b]$: $G(\xi) \neq 0 \Rightarrow$ Posso assumere che $G(\xi) > 0$ e quindi $\exists\, \delta > 0$: $G(x) > 0$ $\forall x \in B_\delta(\xi)$, fissiamo $\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a,x_1] \\ (x-x_1)^2(x-x_2)^2 & \text{se } x \in [x_1,x_2] \\ 0 & \text{se } x \in [x_2,b] \end{cases} \Rightarrow$ stringo che $\int_a^b G(x)\eta(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} G(x)(x-x_1)^2(x-x_2)^2\,dx > 0$, ma quale $\int^* \Rightarrow \exists\, \xi$: $G(\xi) \neq 0$, dunque $G(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$. Riprendiamo la dimostrazione, poniamo $I[y^* + \lambda\eta] = \int_{x_0}^{x_1} F(y^* + \lambda\eta, y^{*\prime} + \lambda\eta', x)\,dx$ dove sappiamo essere massimo in $\lambda = 0$, deriviamo I per $\lambda \Rightarrow \frac{d}{d\lambda}I = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right)dx =$

$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta\Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\,dx$ ma $\frac{dI}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0 \Rightarrow$ per il lemma fondamentale $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ OSS) Definiamo $\Delta\eta(x) = \delta y$ e notiamo che $(\delta y)' = \Delta\eta(x) = \delta y'$ introduciamo poi l'OPERATORE VARIAZIONALE DI LAGRANGE: $\delta I := \frac{dI}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\lambda$ VARIAZIONE PRIMA di $I[y]$ infatti se sviluppo il funzionale stesso

$\hookrightarrow I(y^* + \delta y) \Rightarrow \delta I = \frac{dI}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}d\lambda$ e $\delta y = \frac{\partial y}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0}d\lambda$

la seguente: $I[y^* + \lambda\eta] = I[y^*] + \lambda\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx + o(\lambda)$

$\hookrightarrow I(\lambda)\Big|_{\lambda} = I(0) + \frac{dI}{d\lambda}\lambda + o(\lambda)$

APPLICAZIONE Lagrangiana) Stiamo considerando $\int_{x_0}^{x_1} F(y_1,\dots,y_n; y_1',\dots,y_n'; x)\,dx$ e $y_i = y_i^* + \lambda\eta_i$, dove si rispettano le condizioni di prima $\Rightarrow 0 = \frac{dI}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right)\eta_i(x)\,dx \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0$ $\forall j = 1,\dots,n$

DEF) Sia $I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(y_1,\dots,y_n; y_1',\dots,y_n'; x)\,dx$, diremo che $y^*(x) = (y_1^*,\dots,y_n^*)$ rende stazionario il funzionale I se $\delta I = 0$ ovvero equivalentemente $\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0$

PRINCIPIO DI HAMILTON) Per quanto abbiamo già visto nelle coordinate Lagrangiane ci ricordiamo che la CONFIGURAZIONE ISTANTANEA di un sistema è pienamente descritta dalle n coordinate generalizzate e corrisponde alla posizione di un punto in un iperspazio cartesiano nel quale le q sono coordinate rispetto un sistema di riferimento*; questo spazio è detto SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI. Al passare del tempo la configurazione del sistema cambia descrivendo una curva detta TRAIETTORIA DEL MOTO DEL SISTEMA (Il tempo può essere pensato come il parametro che descrive la curva). Il PRINCIPIO INTEGRALE DI HAMILTON, che a breve definirò, descrive il moto di sistemi meccanici per i quali le forze, escluse le vincolari, sono ricavabili da potenziali generalizzati, sistemi siffatti sono detti MONOGENICI; POSTULATO: Il moto del sistema fra t_1 e t_2 è tale da rendere stazionario $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt$ l'azione, lungo la traiettoria reale del moto; possiamo dunque riassumere il principio così: $\delta S = 0$.

OSS *) Voglio ricordare che $q(t) = (q_1(t),\dots,q_n(t))$ non è un sistema di riferimento infatti di seguito costruiamo un cassetto: Prendiamo un sistema fisico, fissiamo un riferimento e conseguentemente descrivo il sistema fisico al riferimento (MESSO MEGLIO PER PASSARE), ogni punto è descritto da una $\underline{x}_i$ con $i = 1,\dots,m$ poi, con la teoria delle coordinate Lagrangiane, sappiamo di poter scrivere $\underline{x}_i = \underline{x}_i(q_1,\dots,q_n;t)$, ma attenzione il riferimento ci dice "da significa" $\underline{x}_i$, mentre le $q_1,\dots,q_n$ sono parametri che individuano le configurazioni ammesse dai vincoli.

Introduciamo alcune tecniche di calcolo VARIAZIONALE, supponiamo di prendere $f = f(y, \dot y, x)$ su un percorso $y = y(x)$ tra x_1 e x_2 $\Rightarrow$ consideriamo di voler rendere stazionario il funzionale $J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot y, x)\,dx$ su una famiglia di percorsi $Y(x,\lambda) = Y(x,0) + \lambda\eta(x)$ dove $Y(x,0)$ coincide col percorso effettivo e $\eta(x)$ una funzione ausiliaria, continua $C^2(I)$. Tutto il conto si riduce ad analizzare I, $J(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y(x,\lambda), \dot Y(x,\lambda), x)\,dx \Rightarrow \frac{dJ}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0$

Mi assicuro sia $C^1(x_1,x_2)$, la differenziabile C^2

$Y(x,\lambda) = Y(x,0) + \lambda\eta(x) \longrightarrow \partial_\lambda Y(x,\lambda) = \eta(x) \Rightarrow \partial_\lambda Y(x,\lambda)\Big|_{x_1}^{x_2} = \eta(x_2) - \eta(x_1) = 0$ ← TUTTE DEVONO PASSARE PER x_1 e x_2 $\Rightarrow \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

$\frac{dJ}{d\lambda} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\lambda}\left(f(Y(\lambda,x), \dot Y(\lambda,x), x)\right)dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \dot Y}\frac{\partial \dot Y}{\partial \lambda}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \dot Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial \lambda}\right)dx$ (I, II)

II: $\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial \dot Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial \lambda}\,dx = \frac{\partial f}{\partial \dot Y}\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot Y}\right)\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\,dx \Rightarrow \frac{dJ}{d\lambda} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot Y}\right)\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\,dx \Rightarrow$ Noto che $\frac{dJ}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot Y}\right)\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0$ da cui, usando il LEMMA FONDAMENTALE del calcolo delle variazioni, cioè se $\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)\,dx = 0$ $\forall \eta(x)$ con $x \in (x_1,x_2) \Rightarrow M(x) = 0$ in $(x_1,x_2) \Rightarrow \frac{dJ}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot Y}\right) = 0$, notiamo poi che se moltiplico entrambi i lati per $\delta\lambda$ ottengo: $\frac{dJ}{d\lambda}\delta\lambda = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot Y}\right)\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\,d\lambda\,\delta\lambda \Rightarrow \delta J = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot Y}\right)\delta Y\,dx = 0$

$\Rightarrow$ la richiesta di stazionarietà di J lungo il percorso $\frac{dJ}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}$ si traduce in $\delta J = 0$ che implica $\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot Y} = 0$

CATENA LOGICA: Eq di Newton $\Leftrightarrow$ Principio di d'Alembert: $\delta L^{(m)} + \delta L^{(v)} = 0 \Leftrightarrow$ Eq. di Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow$ Principio di Hamilton: $\delta\left(\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}(q;\dot q;t)\,dt\right) = 0$

LE EQ. DI LAGRANGE SONO INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI PUNTUALI (INVERTIBILI): Prendiamo un'applicazione $Q: C_n \to C_n$ invertibile, sappiamo mostrare che se $\mathcal{L}(q;\dot q;t) := \mathcal{L}^*(Q;\dot Q;t) \Rightarrow$ le eq. E-L ottenute dalle $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^*$ sono equivalenti. Questo è facile, se $\mathcal{L}(q;\dot q;t) = \mathcal{L}^*(Q;\dot Q;t) \Rightarrow \mathcal{L}^*(Q;\dot Q;t) = \mathcal{L}^*(q(Q;t);\dot q(Q;t);t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}^*\,dt \Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}\,dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}^*\,dt \Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}\,dt = 0 \Leftrightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}^*\,dt = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot Q} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial Q} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$ ($\mathcal{L}^* = \mathcal{L}(q;\dot q;t)\big|_{q=q(Q,t)}$)

EQ. DI HAMILTON

TRASFORMATA DI LEGENDRE) Lagrangiana $f(x,y)$ → $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ ⟹ $df = \underbrace{u}_{\frac{\partial f}{\partial x}}dx + \underbrace{v}_{\frac{\partial f}{\partial y}}dy$ ⟹ $\begin{cases} u = -\lambda_1 y \\ v = \lambda_1 x \end{cases}$ ⟹ $x = \lambda_1 u$ ⟹ $x = -\lambda_2 v$

f: funzione biettiva di $f(x,y)$ $\xrightarrow{f(x,y)=(u,v)}$ $\begin{cases} x = \frac{\partial f}{\partial u} \\ y = \frac{\partial f}{\partial v} \end{cases}$

Una funzione f è convessa se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ ⟹ $\frac{\partial f}{\partial x}$ è crescente ⟹ $\frac{\partial f}{\partial x} = u$ ⟹ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} > 0$ ⟹ $\frac{\partial x}{\partial u} > 0$ ⟹ $x = x(u)$ ⟹ $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = u \\ \frac{\partial f}{\partial y} = v \end{cases}$ ⟹ $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(v) \end{cases}$ ⟹ $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases}$ ⟹ $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(x) \end{cases}$ ⟹ $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(x(u)) \end{cases}$ ⟹ $\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(x(u)) \end{cases}$

$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$ ⟹ $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}

Caso $H = H(q,p)$ Dipendenza $H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$, impongo che $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \cos t = \gamma(q, \frac{\partial S}{\partial q})$ ma quindi $\frac{\partial S}{\partial t} = -\gamma \Rightarrow S(q,\lambda,t) = W(q,\lambda) - \gamma t$ e anche $\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \Rightarrow$ richiamo λ, eq. ricorda $H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \gamma$ cioè, in maniera codificata impongo a mano.

OSS CHIAMIEI CATTOLI HAMILTON JACOBI: Come abbiamo visto sopra, fissato $S(q,\lambda,t)$ o una $W(q,\lambda)$ il H è determinato da eq. $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$ e $O_i = \frac{\partial S}{\partial \lambda_i}$ per la quantità S posso ricostruire la traiettoria di fase, quindi $P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q(t), \lambda, t)$ dunque λ fissato $q_i(t) = q_i(\lambda, p, t)$ dunque $p_i(t) = \frac{\partial S}{\partial q}(q(t), \lambda, t)$ Quindi, considerando (Q, M) $P(M)$ $(q,p) \to (Q,P)$ per quanto detto sopra $P_i = P_i(q,p,t)$ dunque $Q_i = Q_i(q,p,t)$ dunque λ risulta λ funzione di (q,p,t) cioè $\lambda = \lambda(q,p,t)$ dunque $Q_i = Q_i(q,p,t)$ dunque λ funzione di (q,p,t) cioè $\lambda = \lambda(q,p,t)$ dunque $Q_i = Q_i(q,p,t)$ dunque λ funzione di (q,p,t)

LUMGO LE SOLUZIONI

Es) Risolvere un oscillatore armonico: $H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) \Rightarrow$ con le condizioni di prima $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) = \lambda$ $(\lambda = E$ energia$) \Rightarrow \frac{1}{2}\left((\frac{\partial W}{\partial q})^2 + m^2\omega^2 q^2\right) = \lambda \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\lambda - m^2\omega^2 q^2}$ $\Rightarrow W = \int \sqrt{2m\lambda - m^2\omega^2 q^2}\, dq$ abbiamo quindi $S = W - \lambda t$ e $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} - t$ $\Rightarrow$

$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = t + \beta$ dove β è una costante $\longrightarrow W(q,\lambda) = \int \sqrt{2m\lambda - m^2\omega^2 q^2}\, dq \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{m}{\sqrt{2m\lambda}} \int \frac{2\lambda}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\lambda}}} = \frac{\lambda}{m\omega^2} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\lambda}}\right) \Rightarrow$ Uguaglio $\frac{\partial W}{\partial \lambda} = t + \beta$ $\Rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2\lambda}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta)$

Ricordo dunque che $W(q,\lambda) = \int \sqrt{2m\lambda}\int \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2\lambda}q^2}\, dq$ dove il simbolo di $\lambda = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\lambda}\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2\lambda}q^2} = \sqrt{2m\lambda}\cos(\omega t + \beta)$

OSS: Voglio far z particolare, che accade se non dipendesse da q? Ritorno $E = E(q,p,t)$ e faccio un nuovo $\int$ cambio $(q,p) \to (Q,P)$ dunque conservo la λ $E_i = E_i(q,p,t)$ e $Q_i = Q_i(q,p,t)$ $\Rightarrow \frac{\partial E_i}{\partial p_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial p}$ non ne sono soddisfatte o $(Q,P) \to (q,p)$ quindi $\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = \frac{\partial p_i}{\partial Q}$ $\Rightarrow$ posso fissare $q = \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = \frac{\partial E_i}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial E_i}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial E_i}{\partial q}\right) = 0 \Rightarrow$ Tolgo il $\int$ Teo DELLA EQUAZIONE INVERSA $\Rightarrow p_i = p_i(Q,P,t)$ e posso risolvere $L(q,Q,P,t) = \frac{\partial E}{\partial P}(q,P,t)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial^2 E}{\partial P_i \partial q} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right) = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{\partial E}{\partial P_i}\right) = \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial E}{\partial Q}\right) = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial P_i \partial t} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial P_i} = \frac{\partial^2 E}{\partial P_i^2} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial E}{\partial P_i}\right) = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial P_i} = \frac{\partial E}{\partial P_i} = q$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial L

Consideriamo il PROBLEMA DI KEPLERO in cui assumiamo il sole sia fisso. Abbiamo la massa del pianeta e, di conseguenza, l'energia cinetica e potenziale. Il pianeta è soggetto a una sola forza, il pianeta è vincolato a muoversi su un piano. Il momento angolare $\vec{L}$ è costante. Il momento angolare $\vec{L}$ è costante $\Rightarrow$ $\frac{d(\vec{Q}\wedge\vec{P})}{dt} = 0$

Il vettore di Laplace-Runge-Lenz $\vec{W} = \vec{P}\wedge\vec{L} - m\alpha\vec{Q}$ è costante. Dimostrare che $\vec{W}$ è parallelo al semiasse maggiore.

$\Rightarrow$ Dobbiamo mostrare che $\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = 0$. Abbiamo $\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{d\vec{P}}{dt}\wedge\vec{L} + \vec{P}\wedge\frac{d\vec{L}}{dt} - m\alpha\frac{d\vec{Q}}{dt}$. Sappiamo che $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ e $\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{\alpha m}{r^3}\vec{Q}$ e $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{\vec{P}}{m}$. Quindi $\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\frac{\alpha m}{r^3}\vec{Q}\wedge\vec{L} - \frac{\alpha m}{r^3}\vec{Q}\wedge\vec{L} = 0$.

Dimostrare che $\vec{W}$ è parallelo al semiasse maggiore, quindi la traiettoria è un'ellisse. Se $\vec{W}$ è parallelo al semiasse maggiore, allora $\vec{W}\wedge\vec{Q} = 0$. Quindi $\vec{W}\wedge\vec{Q} = \vec{P}\wedge\vec{L}\wedge\vec{Q} - m\alpha\vec{Q}\wedge\vec{Q} = \vec{P}\wedge\vec{L}\wedge\vec{Q}$. Ma $\vec{L}\wedge\vec{Q} = 0$ perché $\vec{L}$ è ortogonale a $\vec{Q}$. Quindi $\vec{W}\wedge\vec{Q} = 0$.

Dimostrare che $\vec{W}$ è costante. Abbiamo $\vec{W}\wedge\vec{L} = \vec{P}\wedge\vec{L}\wedge\vec{L} - m\alpha\vec{Q}\wedge\vec{L} = -m\alpha\vec{Q}\wedge\vec{L}$. Quindi $\vec{W

MOTI ALLA POLO SOT) Determinare il baricentro di un disco S e' alla Poinsot se $M_G^{(e)} = 0$ con O fisso e $O \equiv CM$

non serve

Nella formulazione di Lagrange linearizzata senza più perturbazioni, per un sistema di molti e. a struttura Giroscopica nella I fase O si $\equiv \Omega$ quando la matrice f:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (I_1\dot{\omega}_1 - K(I_2 - I_3))\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_1\dot{\omega}_1 + K^2\omega_1(1 - \frac{I_3}{I_1})^2 = 0 \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_1\dot{\omega}_1 + K(I_1 - I_3)\omega_1 = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_1 + K^2\omega_1(1 - \frac{I_3}{I_1})^2 = 0 \\ \omega_3 = K \end{cases}$$

si risolve con $K^2(1 - \frac{I_3}{I_1})^2 = \lambda^2 \Rightarrow \dot{\omega}_1 + \lambda^2\omega_1 = 0$

Allora $L_0 = I_1\omega_1\underline{e}_1 + I_2\omega_2\underline{e}_2 + I_3\omega_3\underline{e}_3 = I_1(\omega_1\underline{e}_1 + \omega_2\underline{e}_2) + I_3\omega_3\underline{e}_3 \pm I_1\omega_3\underline{e}_3 = I_1\underline{\omega} + (I_3 - I_1)\omega_3\underline{e}_3 \Rightarrow \underline{\omega} = \frac{1}{I_1}\underline{L}_0 + \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3\underline{e}_3 = \underline{\omega}' + \underline{\omega}_c$ dove stabilizzano le ipotesi di molto fi. FINECESSIONE: $\underline{\omega} = \lambda\underline{e}_3 + \mu\underline{e}_1 = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$

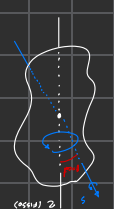
impulso costante spinta fissa

$\underline{\omega}^{(0)}$ sempre variabile

Oss: Nel caso della sfera in' cuscinetti in Rito giroscopico λ fi. molto alle Poinsot

PROBLEMA) Se un solido con un punto fisso e libero sono connessi mediante costrizioni unilaterali? Abbiamo a quale ora? Dimostrando per Eulero di rotazione, quindi, abbiamo $\dot{\underline{\omega}}_0 + \underline{\omega} \times \underline{\omega}_0 = 0$ ma $\underline{\omega}_0 = \text{cost} \Leftrightarrow \dot{\underline{\omega}} = 0$ e $\underline{\omega} = \underline{\omega}' \Rightarrow$ la prima relazione vale solo quando si ferma!

Abbiamo allora che $\underline{\omega} \times \underline{\omega}_0 = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \underline{\omega}_0 = \lambda\underline{\omega}$ cioè, che $\underline{\omega}$ e' un autovettore per $\underline{\omega}_0$. TEO) Un moto di un solido S con un punto fisso O e' un moto ROTAZIONE PERMANENTE $\Leftrightarrow$ l'asse di rotazione è fisso in S e in Σ_0.



DEF) non fisso) Un moto rigido di un solido O, in un solido S, tale che ogni punto P, $\neq$ da O, ha z = 1, quindi $\underline{v} = \lambda\underline{e}_3 + \mu\underline{i}_3$ dove $\underline{e}_3$ e' fisso e $\underline{i}_3$ e' fisso. Il λ e μ sono indipendenti dal tempo, inoltre la traiettoria e' elica. Quindi S ruota e traslica. Quindi $(\underline{i}_3)$ e 2 fisse $(\underline{i}_3)$ quindi $\underline{e}_3 \cdot \underline{i}_3 = \cos\theta = \text{cost} \Rightarrow \theta = \text{cost} \Rightarrow \dot{\underline{e}}_3 \cdot \underline{i}_3 = \dot{\theta} \cdot \underline{i}_3 = \omega \times \underline{e}_3 \cdot \underline{i}_3 = 0$

PROBLEMA

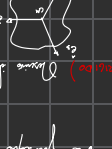
DIM) $\rightarrow$ Se $\underline{e}_3$ e' fisso, quindi $\underline{e}_3 = \lambda\underline{i}_3 + \mu\underline{e}_3$ dove $\underline{i}_3$ e' fisso. Il λ e μ sono indipendenti dal tempo, inoltre la traiettoria e' elica. Se 2 fisse $(\underline{i}_3)$ e 1 quindi $(\underline{e}_3)$, quindi $\underline{e}_3 \cdot \underline{i}_3 = \cos\theta = \text{cost} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$ $\Rightarrow \dot{\underline{e}}_3 \cdot \underline{i}_3 = \omega \times \underline{e}_3 \cdot \underline{i}_3 = 0$

$(\underline{\omega} \times \underline{e}_3) \cdot \underline{i}_3 = 0 \Rightarrow$ dato che $(\underline{\omega} \times \underline{e}_3) = \underline{\omega} \cdot (\underline{e}_3 \times \underline{i}_3) = 0 \Leftrightarrow \underline{\omega} \perp (\underline{e}_3 \times \underline{i}_3)$ dove $\underline{e}_3 \times \underline{i}_3$ e' un vettore ortogonale al $\underline{e}_3 \wedge \underline{i}_3 \Rightarrow \underline{\omega} = \mu\underline{i}_3 + \lambda\underline{e}_3$ con $\underline{i}_3$ fisso e $\underline{e}_3$ quindi, $\dot{\mu}$ $\dot{\lambda}$ $\dot{\theta}$ $(\underline{e}_3 \cdot \underline{i}_3) = 0$

ortogonale $\underline{e}_3$ quindi: $\dot{\underline{e}}_3(\underline{e}_3 \cdot \underline{i}_3) = \dot{\underline{e}}_3 \cdot \underline{i}_3 + \underline{e}_3 \cdot \dot{\underline{i}}_3 = \dot{\underline{e}}_3 \cdot \underline{i}_3$ ancora dimostra $\dot{\underline{e}}_3 = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_3 \Rightarrow \dot{\underline{e}}_3(\underline{e}_3 \cdot \underline{i}_3) = \mu(\underline{i}_3 \times \underline{e}_3) \cdot \underline{i}_3 = \mu(\underline{i}_3 \times \underline{e}_3) \cdot \underline{i}_3 = \mu\,\underline{i}_3 \cdot (\underline{i}_3 \times \underline{e}_3) = \mu\,\underline{e}_3 \cdot (\underline{i}_3 \times \underline{i}_3) = 0$ $\square$

DEF) Un solido si dice giroscopico: $\underline{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$ dove $C = CM$, quando si ha solo la matrice una sola, la matrice, allora $\underline{x}^T\underline{I}\,\underline{x} = I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2 = 1$ ELLISSOIDE DI INERZIA

MOTO Il caso giro rigido) Consideriamo il solido simmetrico. Il solido si muove con $\underline{L}_0 = \underline{M}_G$ (cost) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \ddot{\underline{x}}_G = \frac{1}{M}\underline{R}_e \text{ (cost)} \\ \dot{\underline{L}}_G = \underline{M}_G \end{cases}$ Problema sulla spinta fissa 1) 2) $\begin{cases} \dot{\underline{L}}_G = \frac{1}{M}\underline{R}_e \text{ (cost)} \\ \dot{\underline{L}}_G = \underline{M}_G \end{cases}$ Problema sulla spinta 2)



quindi anche occupato a giroscopicamente non linearizzabile. N rigidamente e' a, quindi il solido.

Oss: E' una quadrica fi. consulta. Se 1 se nulla lungo fi. rotazione in. Ho 2 da nulla collegata. Ma quando $\frac{d\underline{L}_G}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \frac{d\underline{L}_G}{dt} = \frac{d\vec{L}_G}{dt} + \omega \times \vec{L}_G = \vec{M}$ e qui fi. dinamica, se zero sul solido

$\frac{d\vec{L}_G}{dt}_{\text{fisso}} = 0$ ad e' nuovo sistema

$\underline{\omega}$ fisso

$\underline{\omega}$ fisso

$\underline{\omega}$ fisso