esercizio 2 foglio 7

(a) x^4+n-1 é riducibile in $\mathbb{Z}_n[x]$ $\forall n\geq 1$

OSS: se un polinomio di grado ≥ 2 ammette una radice, allora per Ruffini é riducibile.

$p(x)=x^4+n-1 \in \mathbb{Z}[x]$

$p(1)=n$

$\Longrightarrow$ in $\mathbb{Z}_n$: $p(\bar{1})=\bar{n}=\bar{0}$

Cioé $\bar{1}$ é radice di $p(x)$ in $\mathbb{Z}_n$

$\Longrightarrow$ $p(x)$ é riducibile $\forall n\geq 1$

In $\mathbb{Z}_n[x]$: $x^4-\bar{1}=(x^2+1)(x+\bar{1})(x-\bar{1})$

(b) x^4+n-1 é irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ se $n-1>0$ non é un quadrato.

se $n-1>0$ x^4+n-1 non ha radici in $\mathbb{Z}$.
Quindi non puó avere un fattore di grado 1, ma potrebbe essere riducibile come prodotto di 2 polinomi di grado 2:

$$x^4+n-1 \overset{?}{=} (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$
$$=x^4+x^3(a+c)+x^2(d+ac+b)+x(ad+bc)+bd$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ d+ac+b=0 \\ ad+bc=0 \\ bd=n-1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} c=-a \\ \boxed{d-a^2+b=0} \\ \boxed{ad-ab=0} \\ bd=n-1 \end{cases}$$

$a(d-b)=0$

$a=0 \Longrightarrow c=-a=0 \Longrightarrow d=-b$
$\Longrightarrow bd=-b^2=n-1>0$ no

$a\neq 0 \Longrightarrow d-b=0 \Longrightarrow db=b^2=n-1$ no

se $n-1$ non è un quadrato $\Longrightarrow$ non posso scrivere $p(x)$ come prodotto di 2 poli di deg 2
$\Longrightarrow$ $p(x)$ è irriducibile ✓

(c) esiste $n \geq 1$ t.c. x^4+n-1 sia irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$, anche se $n-1$ è un quadrato.

$n=10 \qquad n-1=9=3^2$

x^4+9 è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$

esercizio 9 foglio 7

$p(x)=x^2-5 \in \mathbb{Z}[x] \qquad I=(p(x))$

(a) Dimostrare che I non è massimale.

(b) Trovare un ideale massimale J che contiene I.

<u>oss</u>: x^2-5 è irriducibile su $\mathbb{Z}$ (perché non ha radici) $\Longrightarrow$ I è primo.

$J=(5,x)=\{q(x) \mid q(x)=5\cdot q_1+x\cdot q_2\}$

$p(x)=x^2-5 \in J \Longrightarrow I=(p(x)) \subseteq J$

$I \neq J$, ad esempio $g(x)=x+5 \in J$ ma $g(x) \notin I$

quindi $\qquad I \subsetneq J \subseteq \mathbb{Z}[x]$

Ma $J \neq \mathbb{Z}[x]$: ad es., il polinomio costante 2 non è un elt. di J.

Quindi I non è massimale, mentre J lo è:

se $\exists \quad J \subseteq K \subseteq \mathbb{Z}[x]$

$K = J$ ✓

$K \neq J$, $\exists$ un elemento che $\in K$ ma $\notin J$.

Da qui si può dim. che allora $1 \in K$

$\Longrightarrow K = \mathbb{Z}[x]$ ✓

(cf mec. scaso la dim. che l'ideale $(2, x)$ è max.)

(c) Stabilire se $\exists$ $\overline{q(x)} \in \mathbb{Z}[x]/I$ tale che $\overline{q(x)}^2 = \overline{1}$.

$\overline{q(x)}^2 = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}[x]/I$

$\overline{q(x)}^2 - \overline{1} = \overline{0}$ in $\mathbb{Z}[x]/I$

$(\overline{q(x)} + \overline{1})(\overline{q(x)} - \overline{1}) = \overline{p(x)} = \overline{x^2 - 5}$

In realtà non ci sono tanti conti da fare come credevo: semplicemente:

$(q(x)+1)(q(x)-1) \in I = (p(x))$ ideale primo

$\Longrightarrow$ o $q(x)+1 \in I$, oppure $q(x)-1 \in I$.

se $q(x)-1 \in I \Longrightarrow q(x)-1 = g(x)p(x)$ per qualche $g(x)$, quindi $\overline{q(x)} = \overline{1}$.

se $q(x)+1 \in I \Longrightarrow$ con lo stesso ragionamento, $\overline{q(x)} = -\overline{1}$.

(d) $\overline{3x-1} \in \mathbb{Z}[x]/I$ è invertibile?

se esiste una classe $\overline{\alpha(x)} \in \mathbb{Z}[x]/I$ tale che:

$$\overline{3x-1} \cdot \overline{\alpha(x)} = \overline{1} \text{ in } \mathbb{Z}[x]/I$$

$$(3x-1)\cdot\alpha(x) = 1 + \beta(x)\cdot(x^2-5)$$

questa uguaglianza $\uparrow$ deve valere per tutti gli x:

in $x=3$

$$8\alpha(3) = 1 + 4\cdot b(3)$$

$$1 \overset{*}{=} 4\left(2\alpha(3) - b(3)\right)$$

$\Longrightarrow$ non è possibile perché non c'è nessun valore intero di $\alpha(3)$ t.c. l'uguaglianza $*$ è soddisfatta.

def: Un campo K é ALGEBRICAMENTE CHIUSO se ogni polinomio di grado ≥ 1 in $K[x]$ ha almeno una radice in K.

Teo. fond. dell'algebra: I numeri complessi $\mathbb{C}$ formano un campo alg. chiuso.

Prop: • I polinomi irriducibili di $\mathbb{C}[x]$ sono tutti e soli i polinomi di grado 1.

• Ogni polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado ≥ 1 si decompone in $\mathbb{C}[x]$ come:

$$f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

con $a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

Prop: Gli elementi irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ sono:

(i) i polinomi di grado 1

(ii) i polinomi ax^2+bx+c con $a \neq 0$ e $b^2-4ac<0$.

(dim. mercoledí)

Lemma: Se $\alpha = a+ib$ é una radice complessa di un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, allora anche il suo coniugato $\overline{\alpha} = a-ib$ é radice di f.

dim: il coniugio é un isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha &\longmapsto \overline{\alpha} \end{aligned}$$

e i numeri reali sono i suoi punti fissi.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$$
$$f(\alpha) = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

ma $\overline{f(\alpha)} = f(\overline{\alpha})$ (e sono tutti $=0$) infatti:

$$\overline{f(\alpha)} = \overline{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n}$$
$$= \overline{a_0} + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_2\alpha^2} + \dots + \overline{a_n\alpha^n}$$
$$= a_0 + a_1\overline{\alpha} + a_2\overline{\alpha^2} + \dots + a_n\overline{\alpha^n} = f(\overline{\alpha})$$

#