Ricordiamo:

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-D\xi^2 t}$$

Per antitrasformare e ricavare $u(x,t)$ ricordiamo una trasformata notevole:

$$\mathcal{F}\left(e^{-(ax)^2}\right)(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}, \quad a \in \mathbb{R}_+ .$$

Scegliendo a t.c. $\frac{1}{4a^2} = Dt \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{4Dt}}$ otteniamo:

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right)(\xi) = \sqrt{4\pi Dt}\, e^{-D\xi^2 t}$$

$\hat{u}(\xi,t)$

da cui

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-D\xi^2 t}\right)(x) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}} .$$

Osserviamo che $u(x,t)$ è una densità di probabilità gaussiana di media 0 e varianza $2Dt$.

Oss. Nonostante $\operatorname{supp} u_0 = \{0\}$, per ogni $t > 0$ risulta $\operatorname{supp} u(\cdot,t) = \mathbb{R} \Rightarrow$ l'equazione del calore esprime un trasporto a velocità infinita, che fisicamente corrisponde al fenomeno chiamato diffusione.

Consideriamo ora:

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ u = u_0 & \text{in } \mathbb{R},\ t=0 \end{cases}$$

dove $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, $u_0(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx = 1$.

Vediamo come sfruttare la soluzione fondamentale per scrivere la soluzione di questo problema di Cauchy per u_0 generico:

$$\partial_t u - D\partial_x^2 u = 0 \xrightarrow{\mathcal{F}} \partial_t \hat{u} + D\xi^2 \hat{u} = 0$$

$$\partial_t\left(e^{D\xi^2 t}\hat{u}\right) = 0$$

$$e^{D\xi^2 t}\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-D\xi^2 t}\hat{u}_0(\xi).$$

Da qui vediamo che:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-D\xi^2 t}\hat{u}_0(\xi)\right)(x)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right) * u_0(x)$$

convoluzione (in x)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} u_0(y)\, dy .$$

Oss. Poiché la soluzione fondamentale è di classe C^∞ su $\mathbb{R}$ per ogni $t>0$, la soluzione u eredita questa stessa regolarità in x per ogni $t>0$ per proprietà della convoluzione, indipendentemente dalla regolarità del dato iniziale u_0.

Equazione del calore su un dominio limitato

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato

$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\ u = u_0 & \text{in } \Omega,\ t>0 \\ + \text{ cond. al bordo} & \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

Oss.

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t u - D\Delta u = 0 \\ &\quad\downarrow \\ &+ \operatorname{div}(\underbrace{-D\nabla u}_{=:F}) \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \partial_t u + \operatorname{div} F = 0$$

legge di conservazione con flusso

$$F = -D\nabla u$$

Per esprimere il fatto che la particella non abbandona mai il dominio Ω, in modo che ad ogni tempo sia preservata l'interpretazione di u come distribuzione di probabilità della posizione della particella in Ω, dobbiamo richiedere:

$$F \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty) \Rightarrow -D\nabla u \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty)$$

versore normale a $\partial\Omega$ uscente

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty)$$

condizione al bordo di Neumann omogenea

In definitiva, consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\ u = u_0 & \text{in } \Omega,\ t = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0,+\infty). \end{cases}$$

<u>Teorema</u> Se $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ con

$$u_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \int_\Omega u_0(x)\,dx = 1$$

allora

$$u(x,t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall t > 0 \quad \text{e inoltre}$$

$$\int_\Omega u(x,t)\, dx = 1, \quad \forall t > 0.$$

Dim. (i) Facciamo vedere che u ha integrale unitario su Ω ad ogni tempo $t > 0$:

$$\int_\Omega \partial_t u \, dx - D \int_\Omega \Delta u \, dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u(x,t) dx - D \underbrace{\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u) dx}_{\text{teorema di Gauss}} = 0$$

$$= \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla u \cdot \underline{n}}_{= \frac{\partial u}{\partial n} = 0} \, d\sigma$$

$\underline{n}$: versore normale a $\partial\Omega$ uscente

$= \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ per condizione al bordo

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_\Omega u(x,t) dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega u(x,t) dx = \int_\Omega \underbrace{u(x,0)}_{u_0(x)} dx \quad \forall t > 0$$

$$= 1 \qquad\qquad \forall t > 0$$

che ci dà la prima parte della tesi.

(ii) Ora facciamo vedere che $u(x,t) \geq 0$ in Ω $\forall t > 0$.
Per questo, definiamo la parte negativa di u:

$$u^-(x,t) := \max\{0, -u(x,t)\}.$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } u(x,t) > 0 \\ -u(x,t) & \text{se } u(x,t) \leq 0. \end{cases}$$

Con u^- calcoliamo:

$$\int_\Omega \partial_t u \, u^- \, dx - D \int_\Omega \Delta u \, u^- \, dx = 0.$$

Osserviamo che:

$$\partial_t u \, u^- = \partial_t(-u^-) u^-$$

$$= -\partial_t u^- \cdot u^- = -\frac{1}{2}\partial_t\left((u^-)^2\right).$$