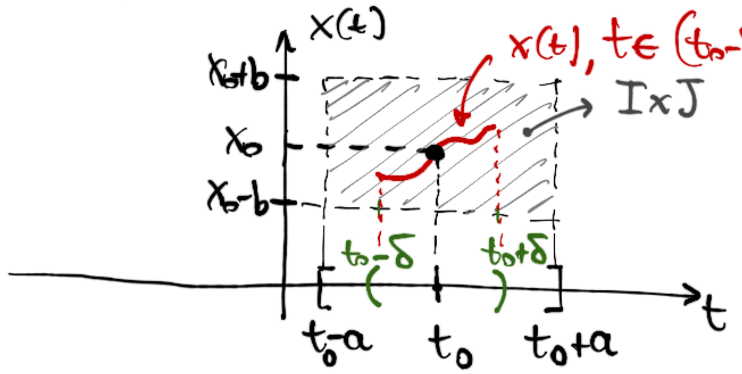
Prolungabilità della soluzione



$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

<u>Def.</u> Una funzione $f=f(t,x): I\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **sublineare** se esistono due funzioni $a=a(t): I\longrightarrow\mathbb{R}$, $b=b(t): I\longrightarrow\mathbb{R}$ t.c.

(i) $a, b \in C^0(I)$;

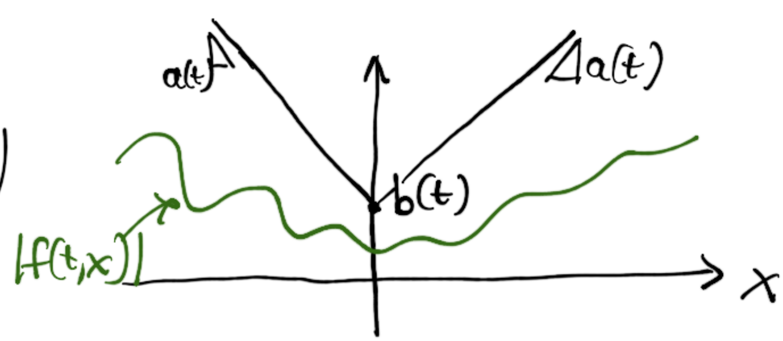
(ii) $a(t), b(t) \geq 0 \quad \forall t\in I$

con la seguente proprietà:

$$\boxed{\|f(t,x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t)}, \qquad \boxed{\forall t\in I,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.}$$

<u>Oss.</u> Se $n=1$:

$$|f(t,x)| \leq a(t)|x| + b(t)$$



<u>Teorema</u> Valgano le ipotesi del teorema di Cauchy su $I\times\mathbb{R}^n$ (cioè, in particolare, con $J=\mathbb{R}^n$) e supponiamo che f sia

inoltre sublineare in $I \times \mathbb{R}^n$. Allora la soluzione del problema di Cauchy (*) è definita su tutto I e si chiama soluzione globale.

Oss. Se $I = \mathbb{R}$ e la soluzione è globale, allora $x = x(t)$ risulta definita $\forall t \in \mathbb{R}$.

Oss. Le condizioni di questo teorema sono sufficienti ma non necessarie perché la soluzione sia globale.

Dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale

Teorema Valgano le ipotesi del teorema di Cauchy con, in particolare, $J = \mathbb{R}^n$. Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ due diversi dati iniziali prescritti ad un certo istante $t_0 \in I$ e chiamiamo $x(t)$, $y(t)$ le corrispondenti soluzioni:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Allora $\exists\, K > 0$ costante t.c.

$$\boxed{\|y - x\|_\infty \leq K \, \|y_0 - x_0\|} \qquad (**)$$

dove $\|\cdot\|_\infty := \sup_{t\in I}\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|$ denota una qualsiasi norma in $\mathbb{R}^n$.

Oss. La $(**)$ è detta una stima di dipendenza continua dai dati.

Dim. Riscriviamo in forma integrale i problemi soddisfatti da x e da y:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau,$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,d\tau.$$

→ Fissiamo, per comodità e senza perdita di generalità, $t_0 = 0$ (istante iniziale) d'ora in poi.

$$\|y(t) - x(t)\| = \left\| y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau))\,d\tau - x_0 - \int_0^t f(\tau, x(\tau))\,d\tau \right\|$$

$$= \left\| y_0 - x_0 + \int_0^t \big(f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, x(\tau))\big)\,d\tau \right\|$$

$$\leq \|y_0 - x_0\| + \left\| \int_0^t \big(f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, x(\tau))\big)\,d\tau \right\|$$

$$\leq \|y_0 - x_0\| + \left| \int_0^t \underbrace{\|f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, x(\tau))\|}_{\leq L\|y(\tau) - x(\tau)\|} d\tau \right|$$

per lipschitzianità di $f(t, x)$ in x uniformemente in t

$$\leq \|y_0 - x_0\| + L \left| \int_0^t \|y(\tau) - x(\tau)\| d\tau \right|.$$

→ Fissiamo $t > 0$ (se $t < 0$ i ragionamenti da fare sono analoghi) e fissiamo un tempo finale $T > 0$ finito. Dunque t varia in $[0, T] \subset \mathbb{R}$.

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \|y_0 - x_0\| + L \int_0^t \|y(\tau) - x(\tau)\| d\tau. \qquad (***)$$

Per proseguire abbiamo bisogno del seguente

F Lemma (di Grönwall)

Sia $u = u(t) : [0, \bar{T}] \to \mathbb{R}$, con $\bar{T} > 0$, una funzione integrabile e non negativa su $[0, \bar{T}]$:

$$u(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, \bar{T}], \qquad \int_0^{\bar{T}} u(t) dt < +\infty.$$

Supponiamo che u soddisfaccia una disuguaglianza del tipo:

$$u(t) \le c_1 + c_2 \int_0^t u(\tau)\,d\tau, \quad \forall t \in [0,T]$$

con $c_1, c_2 \ge 0$ costanti. Allora:

$$u(t) \le c_1\left(1 + c_2 t e^{c_2 t}\right), \quad \forall t \in [0,T].$$

Dim. Poniamo:

$$v(t) := \int_0^t u(\tau)\,d\tau.$$

Allora:

$$\frac{dv}{dt} = u(t) \le c_1 + c_2 v(t)$$

$$\underbrace{\left(\frac{dv}{dt} - c_2 v\right) e^{-c_2 t}}_{\underbrace{\frac{dv}{dt} e^{-c_2 t} - c_2 e^{-c_2 t} v}_{\frac{d}{dt}\left(v e^{-c_2 t}\right)}} \le c_1 e^{-c_2 t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(v e^{-c_2 t}\right) \le c_1 e^{-c_2 t}$$

Integrando entrambi i membri tra 0 e $t \le \overline{T}$ otteniamo,

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(v(\tau)e^{-c_2\tau}\right)d\tau \le \int_0^t c_1 \underbrace{e^{-c_2\tau}}_{\le 1}\, d\tau$$

$$v(t)\, e^{-c_2 t} - v(0) \le c_1 t$$

$$v(t)\, e^{-c_2 t} \le v(0) + c_1 t$$

$$v(t) \le \underbrace{v(0)}_{=0} e^{c_2 t} + c_1 t\, e^{c_2 t}$$

$$\Rightarrow v(t) \le c_1 t\, e^{c_2 t}.$$

Ritornando a u:

$$u(t) \le c_1 + c_2 v(t) \qquad (\text{per ipotesi})$$

$$\le c_1 + c_2 c_1 t\, e^{c_2 t}$$

$$= c_1\left(1 + c_2 t\, e^{c_2 t}\right).$$

$\boxtimes$

Tornando alle disuguaglianze (***), possiamo prendere:

$$u(t) = \|y(t) - x(t)\|, \quad c_1 = \|y_0 - x_0\|, \quad c_2 = L.$$

Per la disuguaglianza di Grönwall:

$$\|y(t)-x(t)\| \leq \|y_0 - x_0\| \left(1 + Lt e^{Lt}\right), \quad \forall t \in [0,T].$$

Passando al sup su entrambi i membri:

$$\underbrace{\sup_{t\in[0,T]} \|y(t)-x(t)\|}_{\|y-x\|_\infty} \leq \|y_0 - x_0\| \sup_{t\in[0,T]} \left(1 + Lt e^{Lt}\right)$$

$$= \underbrace{\left(1 + LT e^{LT}\right)}_{K>0} \|y_0 - x_0\|.$$

$\boxtimes$

Def. (Buona positura nel senso di Hadamard)

Un problema matematico si dice ben posto se valgono contemporaneamente queste condizioni:

(i) esiste una soluzione;

(ii) la soluzione è unica;

(iii) la soluzione dipende con continuità dai dati del problema.

Se anche una sola di queste condizioni manca il problema si dice mal posto.