Fisica II

Esercitazione 9

Alessandro Pedico
alessandro.pedico@polito.it

27/10/2022

Induzione elettromagnetica

LEGGE DI FARADAY-HENRY

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

L'effetto della forza elettromotrice indotta è di **opporsi** alla causa che ha generato la variazione del flusso del campo magnetico.

forma locale

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Autoinduzione

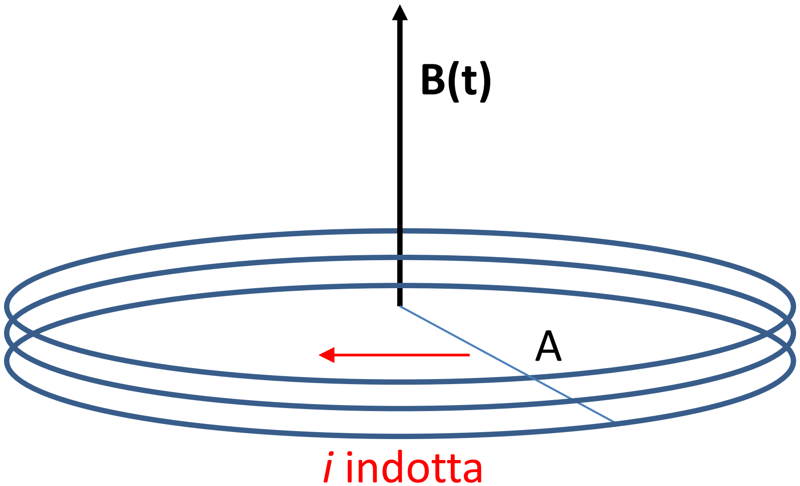
$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Una variazione della corrente *i* nel circuito determina una variazione dell'**autoflusso** e quindi la generazione di **forza elettromotrice autoindotta**.

Nota: la definizione è valida per circuiti rigidi e per variazioni di corrente su scale temporali maggiori di *d/c*, con *d* dimensione caratteristica del circuito e *c* velocità della luce ($3 \cdot 10^8$ m/s).

Il coefficiente di autoinduzione *L* di un circuito è particolarmente importante nel momento in cui andiamo a variare la corrente *i* molto rapidamente: ad esempio, **apertura** o **chiusura** di un circuito.

Solenoide



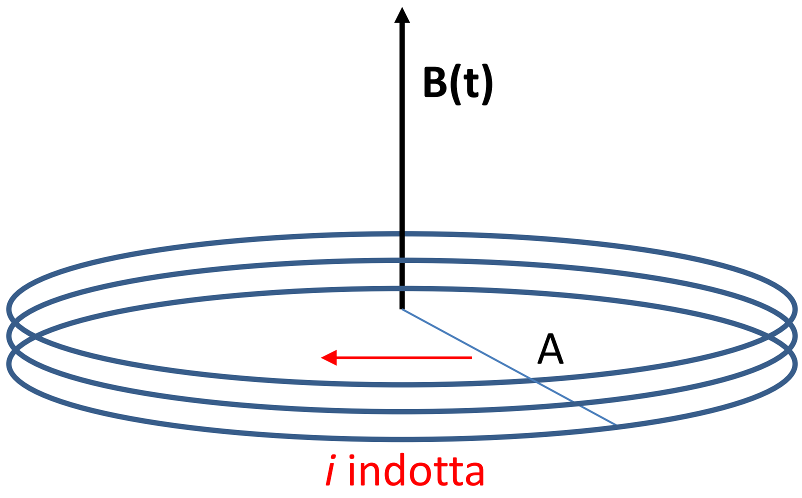
Consideriamo una bobina conduttrice con N= 100 spire di raggio A = 10 cm e resistenza R = 1 Ω. La spira è immersa in un campo magnetico **B**(t) = αt (α = 10^{-3} T/s) ortogonale al piano della spira, come rappresentato in figura.

Calcoliamo la **corrente indotta** nel circuito**.**

Solenoide

$$\Phi\big(B(t)\big)_{spira} = \int \vec{B}(t) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = B(t)\, \pi A^2$$

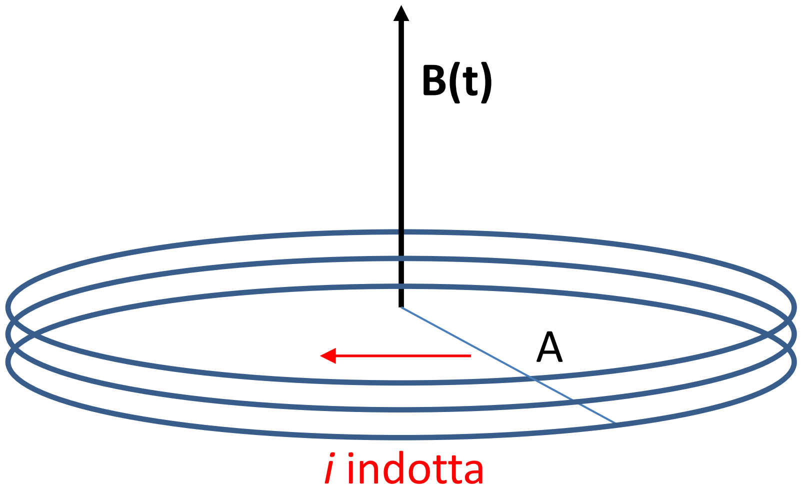
$$\Phi\big(B(t)\big) = N\, B(t)\, \pi A^2$$



$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -N\,\pi\, A^2 \alpha = -3.14 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -3.14 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}}$$

Solenoide



Possiamo anche calcolare la carica *q* che fluisce nel circuito in un certo intervallo di tempo. Supponiamo $\Delta t = 100s$.

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$$

In questo caso la corrente non dipende dal tempo e quindi abbiamo che:

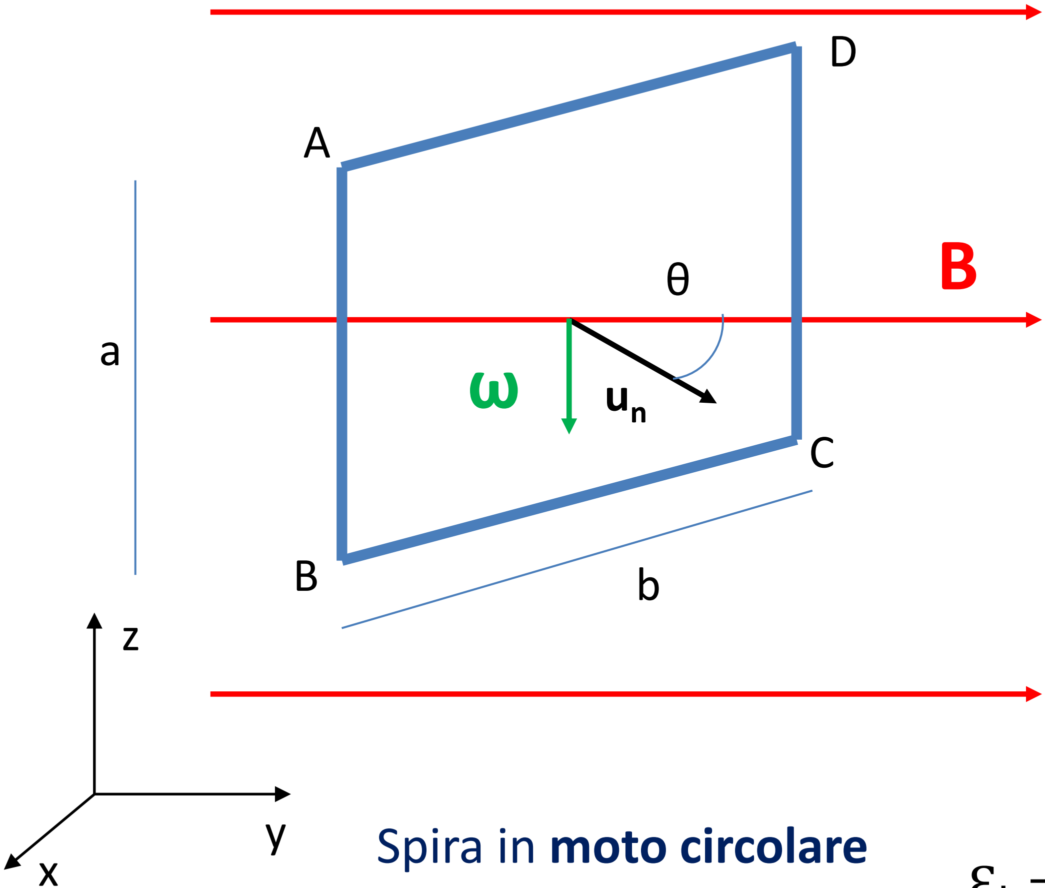
$$q = i\,\Delta t = 3.14 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{C}$$

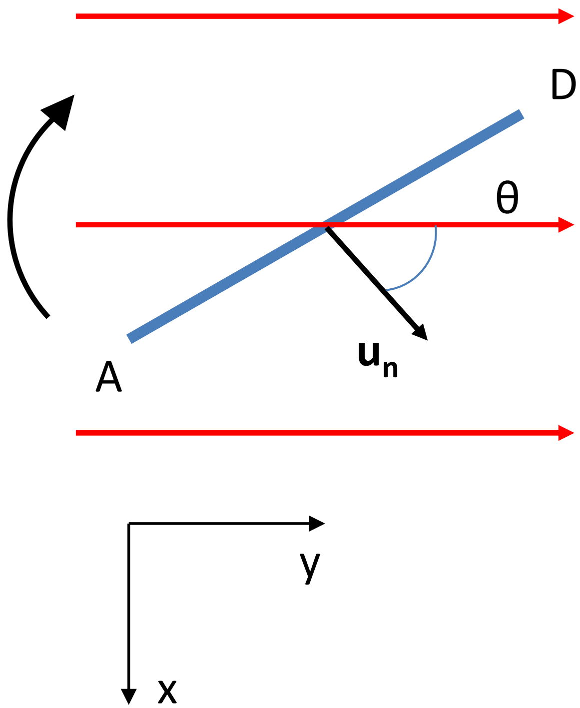
Possiamo anche calcolare la potenza dissipata sulla resistenza:

$$P = i^2 R = 9.8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W}$$

Generatore di corrente sinusoidale

Generatore di corrente alternata





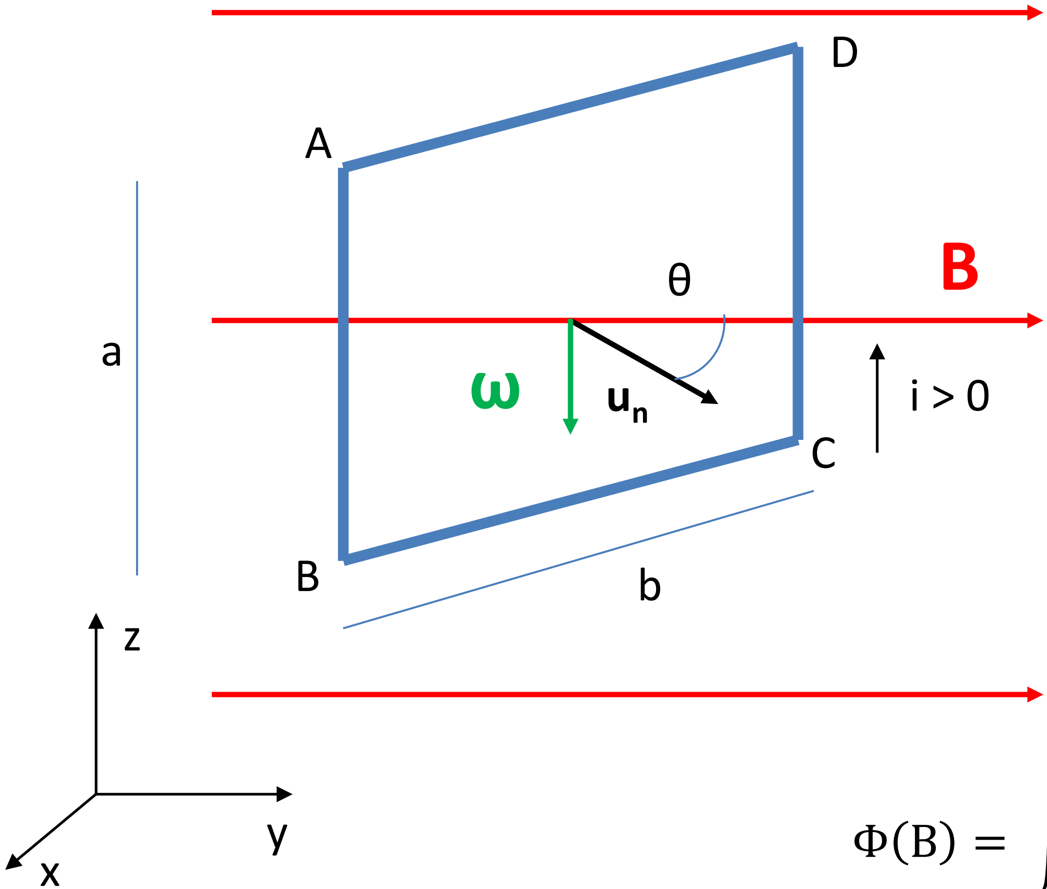
Spira in **moto circolare uniforme**: **θ = ωt**

B = cost.

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$ **LEGGE DI FARADAY**

$$\mathcal{E}_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$ **FORZA DI LORENTZ**

Generatore di corrente sinusoidale



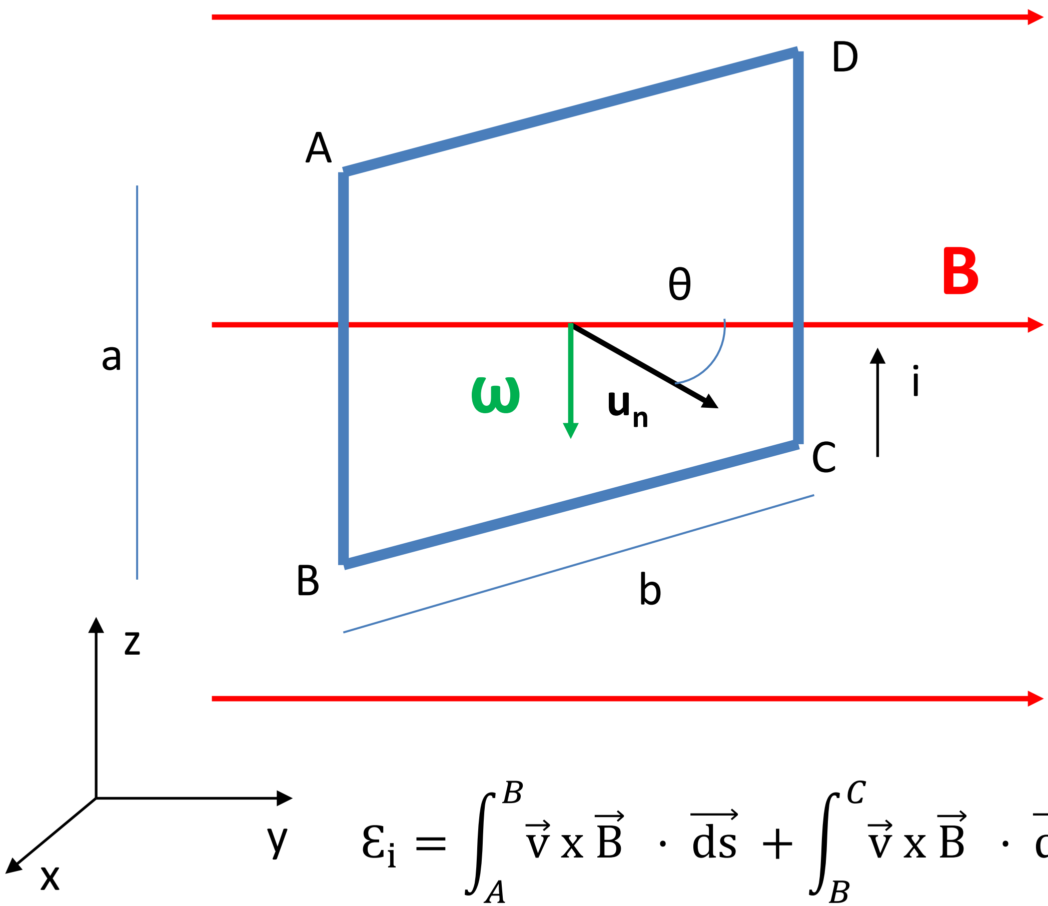
METODO 1: $\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi(B)}{dt}$

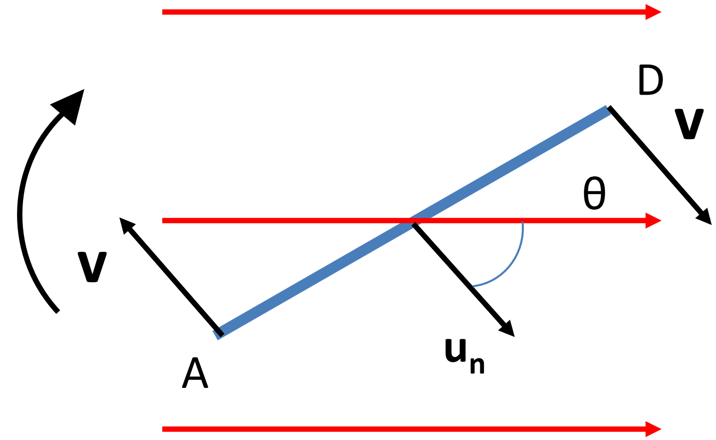
LEGGE DI FARADAY

$$\Phi(B) = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = B\,\Sigma \cos\theta = B\,\Sigma \cos\omega t$$

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = \omega\, B\, \Sigma \sin\omega t}$$

Generatore di corrente sinusoidale



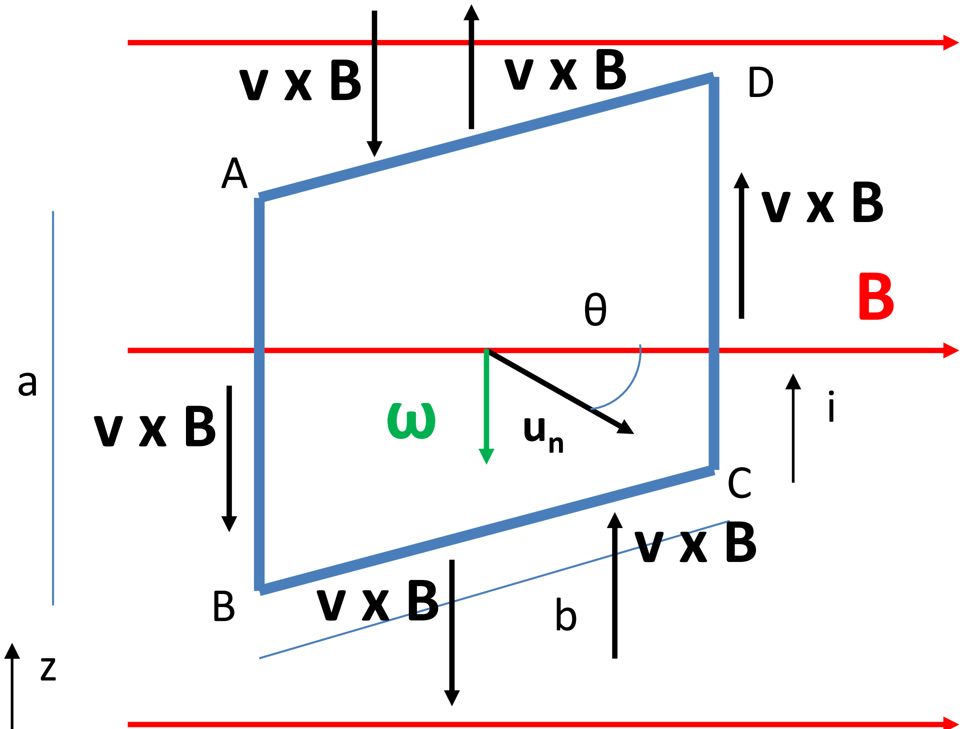


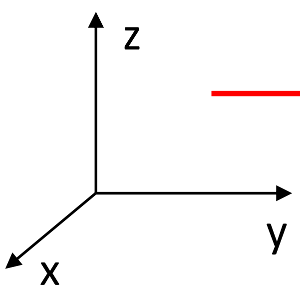
METODO 2:

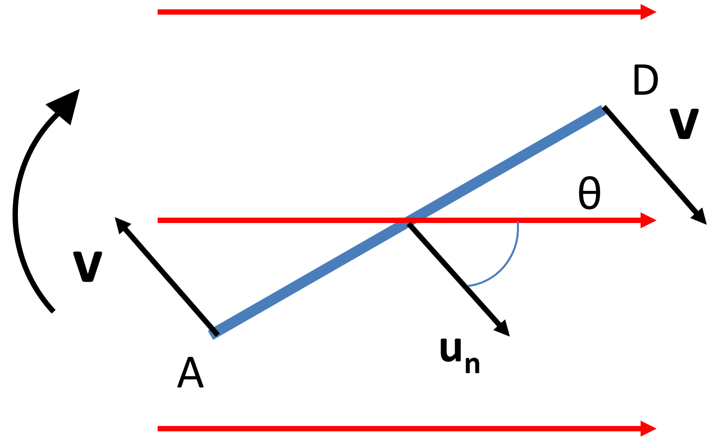
$$\mathcal{E}_i = \int \vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\mathcal{E}_i = \int_A^B \vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} + \int_B^C \vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} + \int_C^D \vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} + \int_D^A \vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} =$$

Generatore di corrente sinusoidale





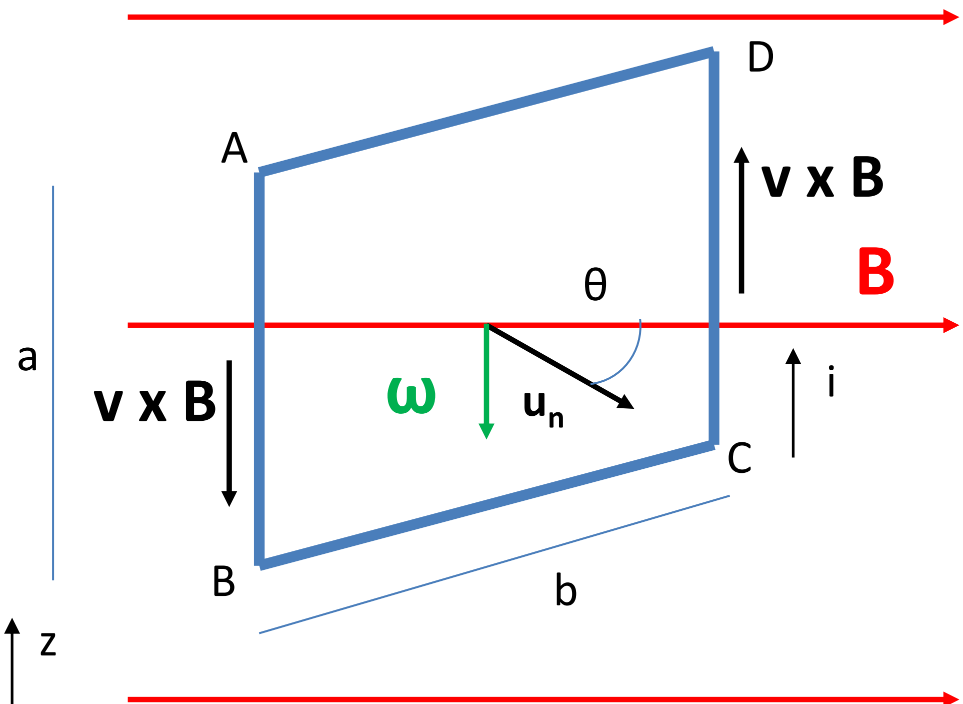


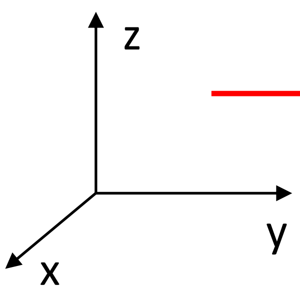
METODO 2:

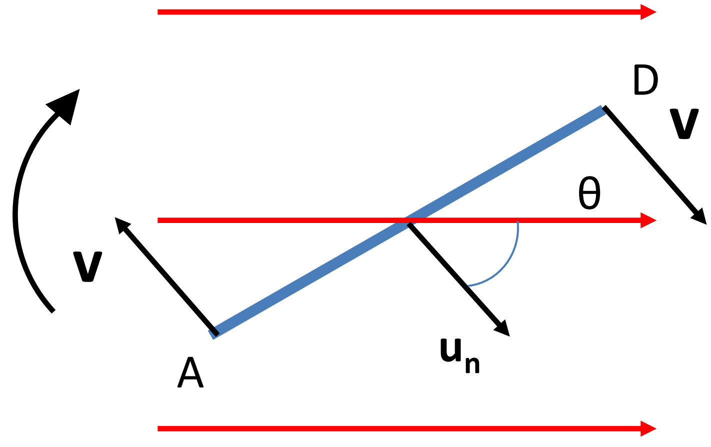
$$\mathcal{E}_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\mathcal{E}_i = \int_A^B \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} + \cancel{\int_B^C \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}} + \int_C^D \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} + \cancel{\int_D^A \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}} =$$

Generatore di corrente sinusoidale







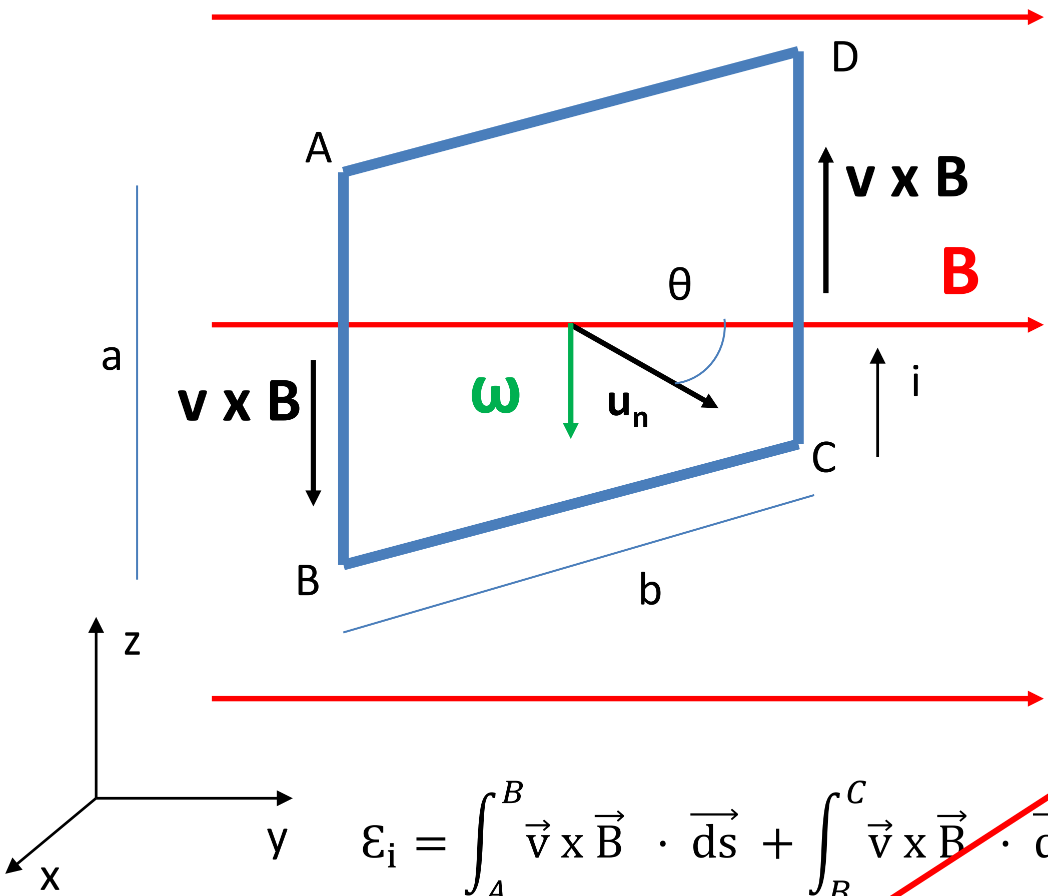
METODO 2:

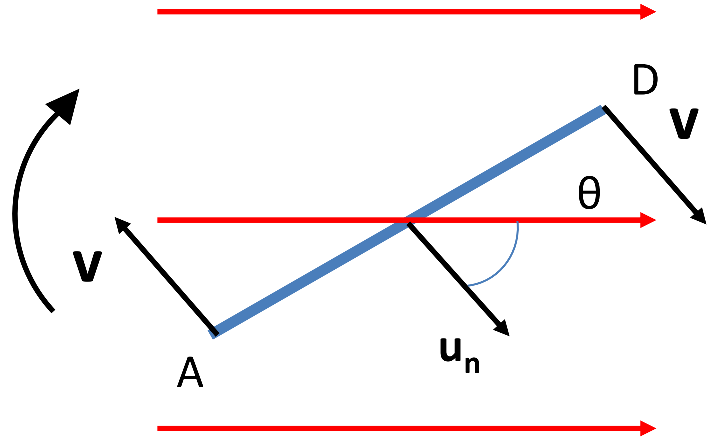
$$\mathcal{E}_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\mathcal{E}_i = \int_A^B \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} + \cancel{\int_B^C \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}} + \int_C^D \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} + \cancel{\int_D^A \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}} =$$

$$\int_A^B -\mathrm{v}\, B \sin\theta\, \hat{u}_z \cdot \overrightarrow{ds} = -\,\mathrm{v}\, B \sin\theta \int_A^B \hat{u}_z \cdot \overrightarrow{ds} = -\,\mathrm{v}\, B \sin\theta\, (-a) = a\, \mathrm{v}\, B \sin\theta$$

Generatore di corrente sinusoidale





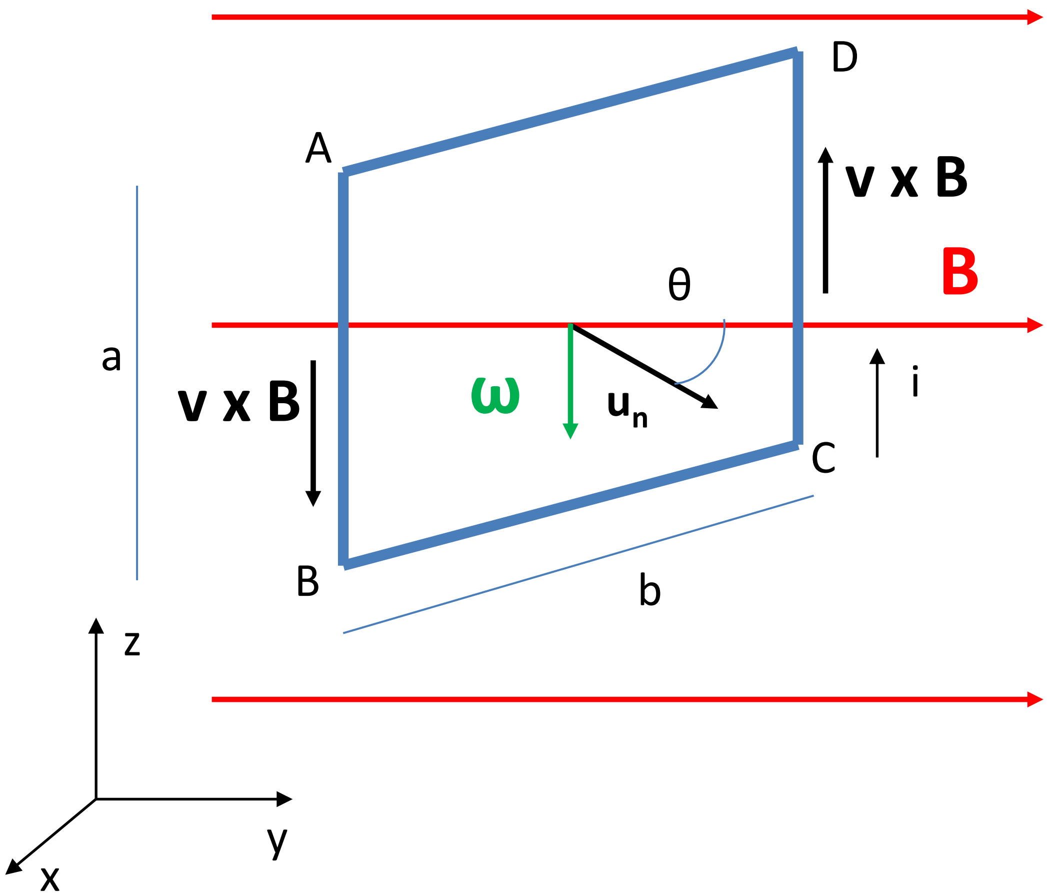
METODO 2:

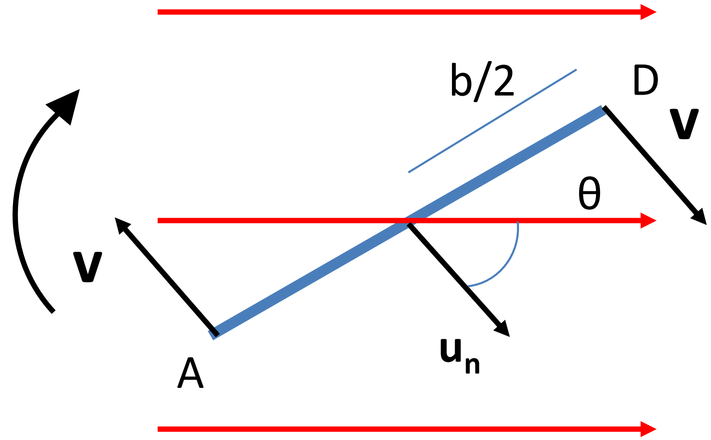
$$\mathcal{E}_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

$$\mathcal{E}_i = \int_A^B \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{ds} + \cancel{\int_B^C \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{ds}} + \int_C^D \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{ds} + \cancel{\int_D^A \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{ds}} =$$

$$\int_C^D v\, B \sin\theta\, \hat{u}_z \cdot \vec{ds} = v\, B \sin\theta \int_C^D \hat{u}_z \cdot \vec{ds} = a\, v\, B \sin\theta$$

Generatore di corrente sinusoidale



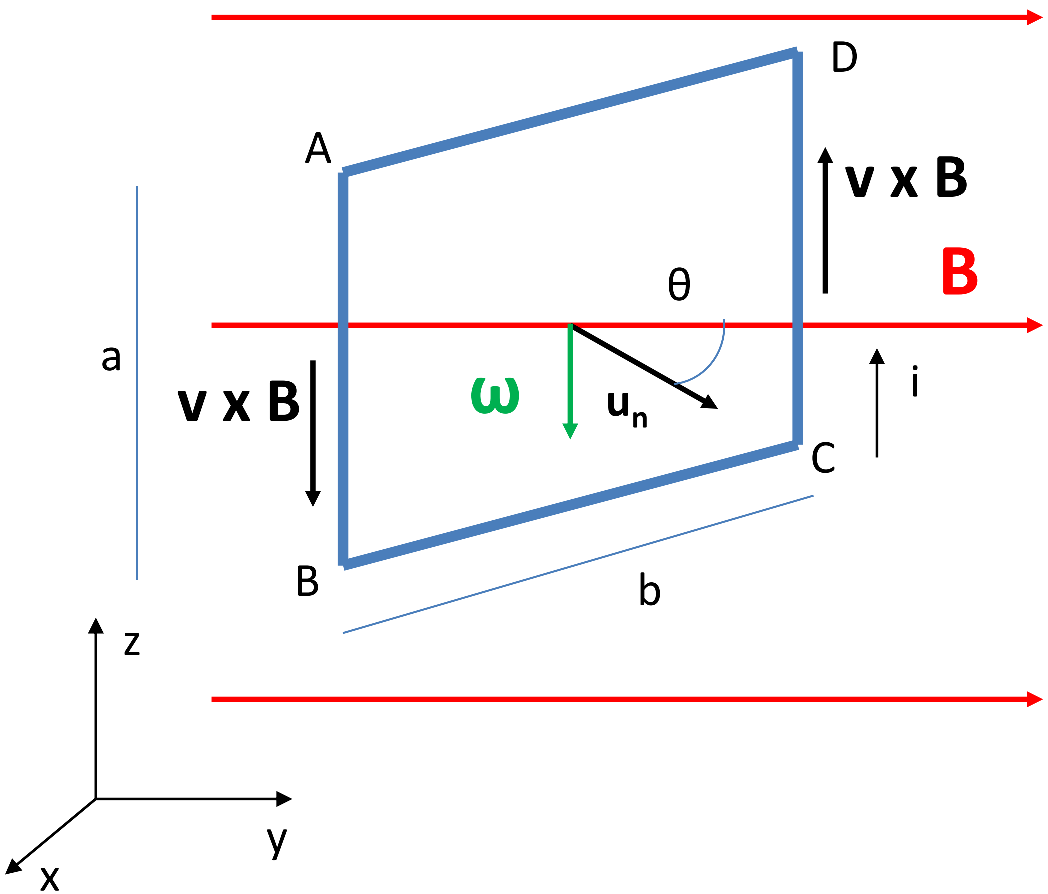


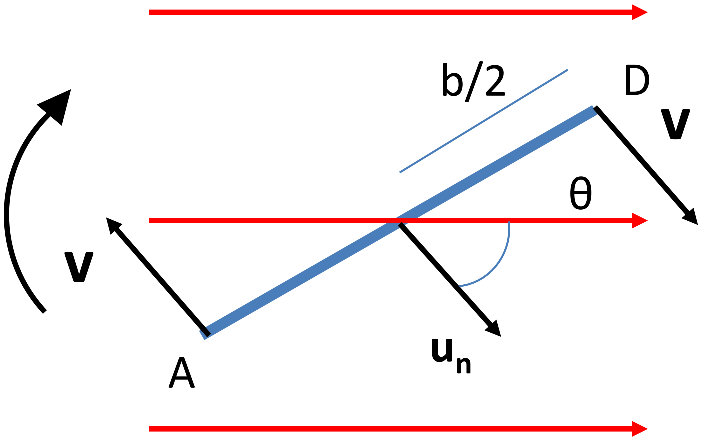
METODO 2:

$$\mathcal{E}_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\mathcal{E}_i = 2\,a\,\mathbf{v}\,B \sin\theta = 2a\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\omega}\,B\,\sin\omega t =$$

Generatore di corrente sinusoidale





METODO 2:

$$\mathcal{E}_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\mathcal{E}_i = 2\,a\,v\,B \sin\theta = \mathbf{2a\frac{b}{2}}\,\omega\, B\, \sin \omega t = \mathbf{\Sigma}\,\omega\, B \sin \omega t$$

Generatore di corrente sinusoidale

$$\mathcal{E}_i = \omega\, B\, \Sigma \sin \omega t$$

$$\mathrm{i} = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega\, B\, \Sigma}{R} \sin \omega t$$

All'interno del circuito comincia a fluire corrente e si genera un momento magnetico associato alla spira:

$$\vec{m} = \mathrm{i}\, \Sigma\, \hat{u}_n$$

Il campo magnetico tende ad allineare il momento magnetico con se stesso e quindi ad **opporsi** al moto rotatorio del circuito.

Bisogna fornire **lavoro** (quindi potenza) **meccanico** per mantenere il moto rotatorio costante del circuito.

ESEMPIO: circuito N = 20 spire circolari, r = 20 cm, frequenza f = 50 Hz, B = 0.4 T

$$\mathcal{E}_i = \omega\, B\, \Sigma \sin \omega t \Longrightarrow \mathcal{E}_{max} = 2\pi f\; B\; N\pi r^2 \sim 316\, V$$

Generatore di corrente sinusoidale

$$\mathcal{E}_i = \omega B \Sigma \sin \omega t$$

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B \Sigma}{R} \sin \omega t$$

All'interno del circuito comincia a fluire corrente e si genera un momento magnetico associato alla spira: $\vec{m} = i \Sigma \hat{u}_n$

Il campo magnetico tende ad allineare il momento magnetico con se stesso e quindi ad **opporsi** al moto rotatorio del circuito.

Bisogna fornire **lavoro** (quindi potenza) **meccanico** per mantenere il moto rotatorio costante del circuito.

ESEMPIO: circuito N = 20 spire circolari, r = 20 cm, frequenza f = 50 Hz, B = 0.4 T

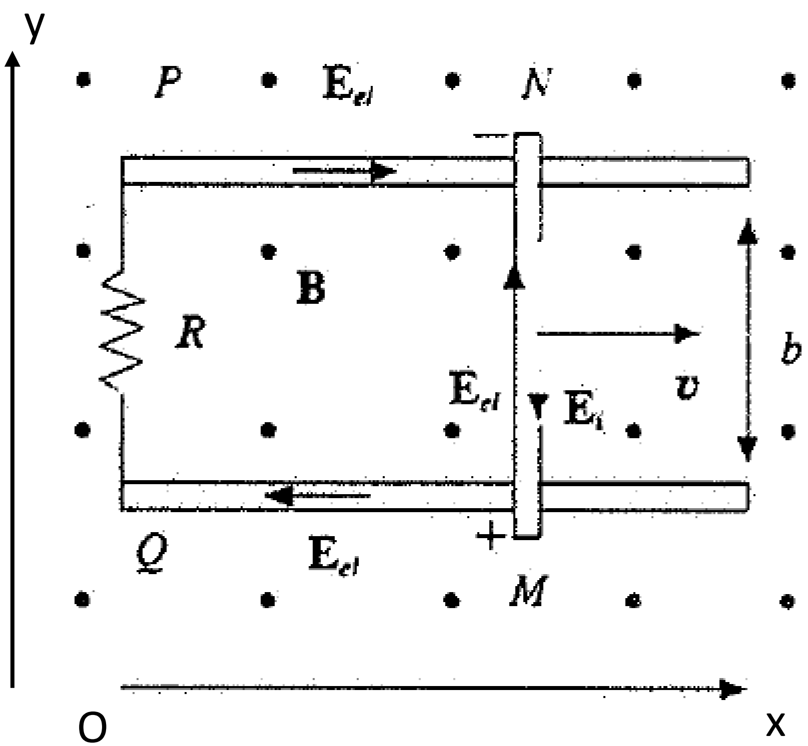
$$\mathcal{E}_i = \omega B \Sigma \sin \omega t$$

$$\mathcal{E}_{max} \sim 316 \, V$$

$$\mathcal{E}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{\sqrt{2}} \sim 223 \, V$$

Circuito con un lato mobile

Circuito con lato mobile

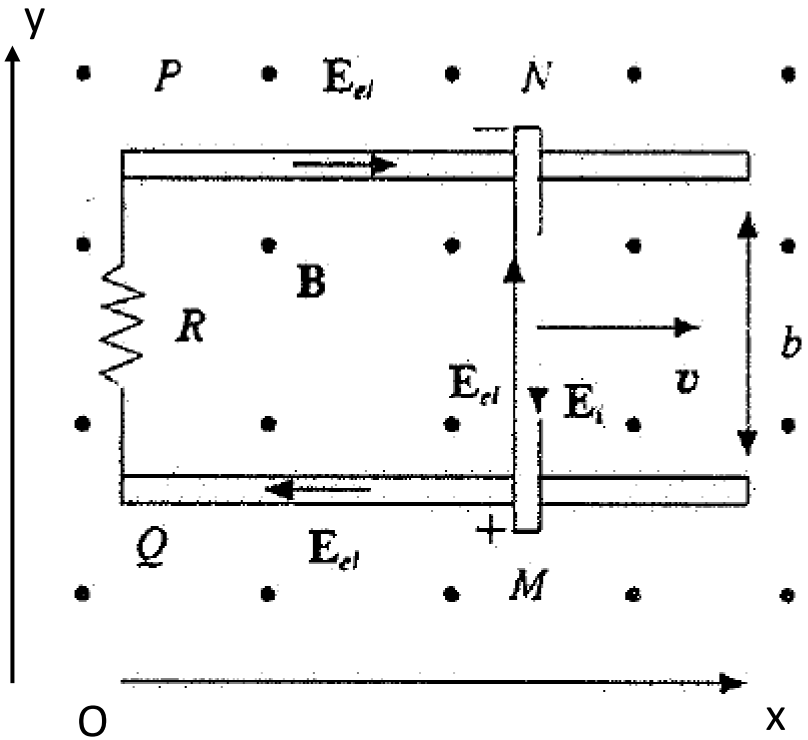


Consideriamo un circuito rettangolare con un lato mobile di resistenza *r* che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità ***v***. Il circuito è immerso in un campo magnetico uniforme ***B*** ortogonale a ***v***.

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$ **LEGGE DI FARADAY**

$$\mathcal{E}_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$ **FORZA DI LORENTZ**

Circuito con un lato mobile



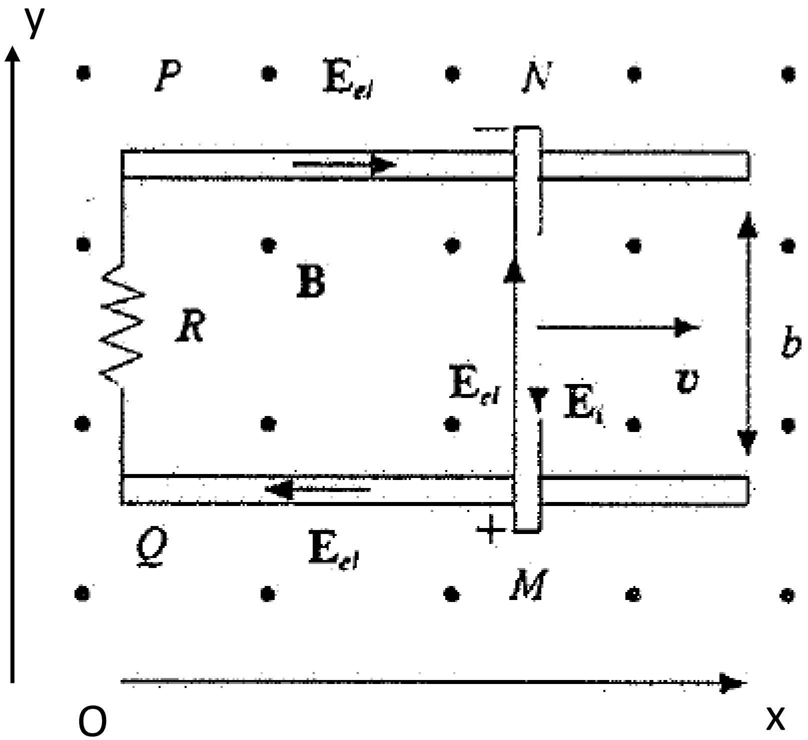
METODO 1: $\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi(B)}{dt}$

LEGGE DI FARADAY

$$\Phi(B) = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = B\, b\, v\, t$$

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -b\, B\, v}$$

Circuito con un lato mobile



METODO 2:

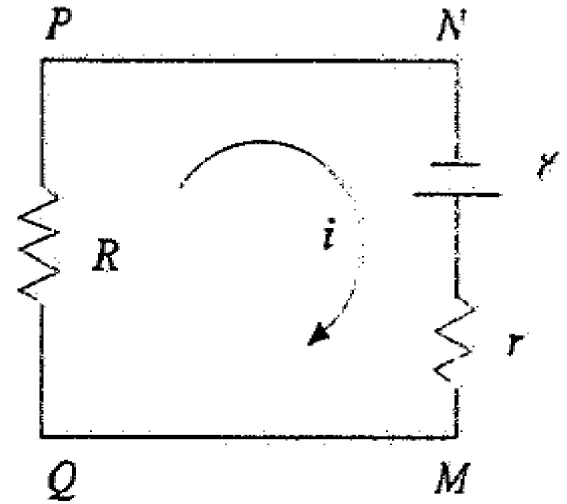
$$\mathcal{E}_i = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_i = \int_M^N \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = vB \int_M^N -\hat{u}_y \cdot \overrightarrow{ds} = -b\,B\,v}$$

Circuito con un lato mobile

$$\mathcal{E}_i = -b\,B\,v$$

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R + r} = -\frac{b\,B\,v}{R + r}$$



Circuito con un lato mobile

$$\mathcal{E}_i = -b\,B\,v$$

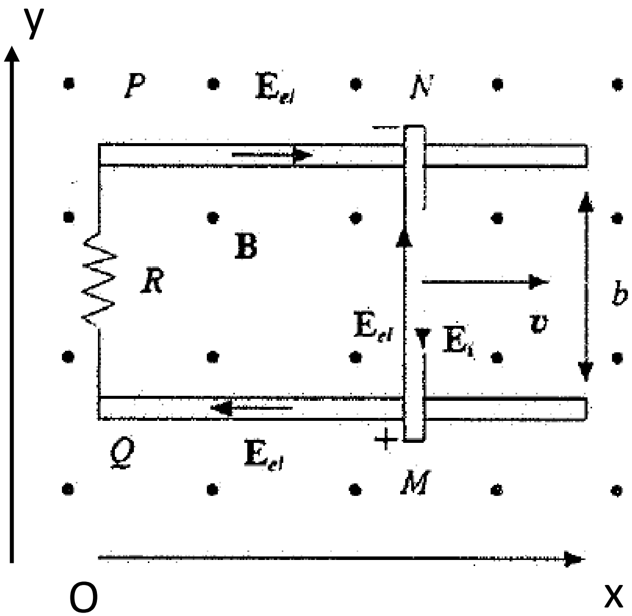
$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R + r} = -\frac{b\,B\,v}{R + r}$$

La potenza dissipata nella resistenza per effetto Joule è: $P = \dfrac{\mathcal{E}_i^2}{R + r}$

Chi fornisce la potenza necessaria? Non può essere la forza magnetica in quanto come sappiamo **non compie lavoro**.

Dobbiamo tenere presente che nel momento in cui comincia a fluire corrente all'interno del circuito dobbiamo considerare l'effetto della forza magnetica sulla sbarra mobile.

Circuito con un lato mobile



$$\vec{F}_L = i\int_N^M \overrightarrow{ds} \times \vec{B} = -i\, b\, B\, \hat{u}_x = -\frac{v\,B^2 b^2}{R+r}\,\hat{u}_x$$

Dobbiamo vincere questo **attrito magnetico** con l'applicazione di una forza esterna, uguale e contraria.

$$\vec{F}_{ext} = i\, b\, B\, \hat{u}_x = \frac{b^2 B^2}{R+r}\vec{v} \rightarrow v\,\hat{u}_x$$

Applichiamo quindi **potenza meccanica** tramite forza esterna:

$$P = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = \frac{b^2 B^2}{R+r}\,\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{\varepsilon_i^2}{R+r}$$

Legge di Felici

Consideriamo una spira rigida di piccola area *Σ* e resistenza *R*, immersa in un campo magnetico **B**. Se la spira si muove all'interno della regione, in generale avremo variazione di flusso magnetico concatenato con la spira e quindi formazione di una corrente all'interno della spira.

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \quad \Longrightarrow \quad i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

Supponiamo che la spira si muova con una certa legge oraria; avremo che la corrente generata dipende dal tempo e quindi possiamo calcolare la carica che fluisce tra il tempo t_1 e il tempo t_2 come:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

Legge di Felici

Abbiamo quindi ottenuto che la **carica netta** che fluisce nell'intervallo di tempo dipende solo dalla configurazione iniziale e da quella finale della spira e non dalla particolare legge temporale.

LEGGE DI FELICI $$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

Poniamo la spira ortogonale alle linee di campo di **B** e supponiamo che l'area Σ della spira sia piccola rispetto alla scala dimensionale su cui il campo magnetico **B** varia. Possiamo con buona approssimazione considerare **B** **costante** su tutta la spira.

Supponiamo di fare compiere alla spira una rotazione di π attorno all'asse ortogonale a **B**. Avremo allora che:

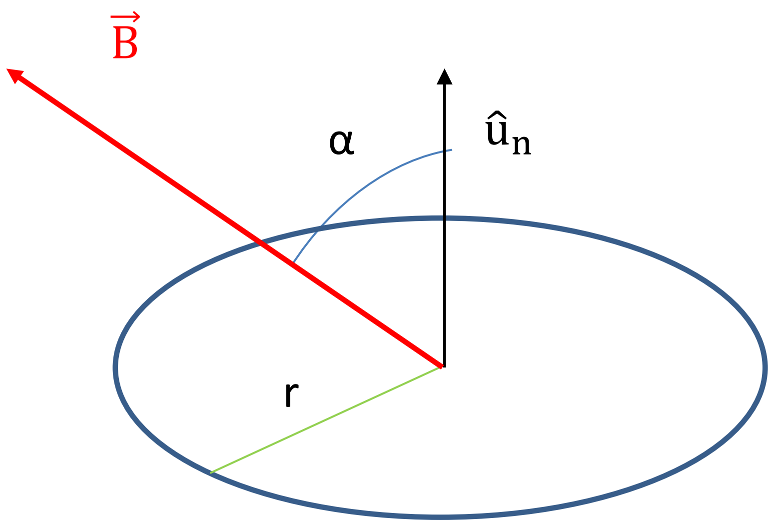
$$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{B\,\Sigma - (-B\,\Sigma)}{R} = \frac{2\,B\,\Sigma}{R} \quad \longrightarrow \quad B = \frac{q\,R}{2\,\Sigma}$$

Possiamo quindi conoscere B misurando q.

Spira in movimento

Consideriamo una spira di raggio ***r = 5 cm***, costituita da un filo conduttore di sezione ***S = 1 mm²*** e resistività ***ρ = 1.7 10⁻⁸ Ω m***. La spira viene portata da una regione in cui esiste una campo di induzione magnetica uniforme ***B = 0.5 T*** diretto secondo un angolo ***α = 60°*** rispetto alla normale alla spira ad una regione in cui il campo è nullo.

Calcolare la carica totale ***Q*** che percorre la spira in conseguenza di tale spostamento.



Spira in movimento

Utilizziamo la legge di Felici: $$Q = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R}$$

$$\Phi_i = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = B\cos\alpha \int d\Sigma = B\cos\alpha \, \pi r^2$$

$$\Phi_f = 0$$

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{2\pi r}{S}$$

$$Q = \frac{\Phi_i}{R} = \frac{B\cos\alpha \, \pi r^2}{\rho \frac{2\pi r}{S}} = \frac{B\cos\alpha \, rS}{2\rho} =$$

$$= \frac{0.5 \cdot \cos 60° \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1.7 \cdot 10^{-8}} = 0.37 \text{ C}$$