Istituzioni di A & G — ALGEBRA, lezione 24

28/11/22

Ideali primi e ideali massimali

Da ora in poi: A è un un anello commutativo con unità.

Definizione 1. $M \neq A$

- *Un ideale M di A è detto* **massimale** *se non è contenuto propriamente in nessun ideale proprio di A.* (i.e, se $\exists J$ ideale, $M \subsetneq J \Rightarrow$ o $M = J$ oppure $J = A$)
- *Un ideale P è detto* **primo** *se vale la condizione:*

$$\forall\, a, b \in A: \text{ se } ab \in P \;\Rightarrow\; a \in P \text{ oppure } b \in P.$$

Proposizione 2. *Ogni ideale massimale è primo.*

dim: sia M massimale di A. Siano $a, b \in A$ tale che $ab \in M$ ed $a \notin M$.

Sia $I = (a) + M$. Come $a \notin M$ $\quad M \subsetneq I \underset{\substack{\uparrow \\ M \text{ massimale}}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow I = A \Rightarrow 1 \in I$

Esiste $c \in A, m \in M$ tale che $1 = c \cdot a + m \Rightarrow$

$b = b \cdot 1 = b \cdot c \cdot a + bm = \underbrace{c\, ab}_{\in M} + \underbrace{bm}_{\in M} \in M$

Esempio. Gli ideali primi e massimali di $\mathbb{Z}$.

a) $\mathbb{Z}$ è un PID, cioè tutti i suoi ideali sono principali, del tipo (n) con $n \in \mathbb{Z}$

b) Come $(n) = (-n) \Rightarrow$ possiamo assumere $n \geq 0$

c) (0) è primo perché $\mathbb{Z}$ è un dominio di integrità:

se $ab \in (0) \Rightarrow ab = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Z} \text{ dominio}}}{\Rightarrow}$ oppure $a = 0$ o $b = 0$

$\Rightarrow$ oppure $a \in (0)$ o $b \in (0)$

d) (n) è primo $\Leftarrow$ $n \in \mathbb{Z}$ è primo

$\Rightarrow$) Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ tale che $a \cdot b = n$ (ed allora, $a | n$, $b | n$)

$$\Rightarrow ab \in (n) \underset{(n) \text{ primo}}{\Rightarrow} \begin{cases} \text{oppure } a \in (n) \Rightarrow n | a \Rightarrow n = \pm a \\ \text{o } b \in (n) \Rightarrow n | b \Rightarrow n = \pm b \end{cases}$$

$\Leftarrow$) Sia n primo e siano $a, b \in \mathbb{Z}$ $ab \in (n)$

$\Rightarrow$ $n | ab$ $\underset{n \text{ primo}}{\Rightarrow}$ $\begin{cases} \text{oppure } n | a \Rightarrow a \in (n) \\ \text{o } n | b \Rightarrow b \in (n) \end{cases}$

$\square$

e) (n) è massimale $\Leftrightarrow$ (n) primo ed $n \neq 0$

$\Leftarrow$) Sia $(n) \neq (0)$ primo, e sia $I \supseteq (n)$

$\mathbb{Z}$ PID $\Rightarrow$ $\exists\, a \in \mathbb{Z}$ t. che $I = (a)$ $\Rightarrow$ $(n) \subseteq (a)$

$\Rightarrow$ $n \in (a)$ $\Rightarrow$ $a | n$ $\underset{n \text{ primo}}{\Rightarrow}$ $\begin{cases} \text{oppure } a = \pm n \Rightarrow (a) = (n) \\ \text{o } a = \pm 1 \Rightarrow (a) = \mathbb{Z} \end{cases}$

$\square$

ricapito: In $\mathbb{Z}$, ideale primi: (0), $\underbrace{(n) \text{ con } n \text{ primo}}_{\text{massimali}}$

Osservazione 3. *Massimale $\Rightarrow$ primo, ma primo $\not\Rightarrow$ massimale.*

controesempio : $A = \mathbb{R}[x,y]$ $\qquad I = (x)$

I è primo : se $p(x,y) \cdot q(x,y) \in (x) \Rightarrow x \mid p(x,y) \cdot q(x,y)$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{oppure } x \mid p(x,y) \Rightarrow p(x,y) \in (x) \\ \text{o } \quad x \mid q(x,y) \Rightarrow q(x,y) \in (x) \end{cases}$

I non è massimale : $(x) \subsetneq (x) + (y) \neq \mathbb{R}[x,y]$

Ricordiamo la definizione e le proprietà dei domini di integrità:

- Due elementi $a, b \in A$ sono detti **divisori dello zero** se $a \neq 0$, $b \neq 0$, e o $ab = 0$ o $ba = 0$. A è detto **dominio di integrità** se non ha divisori dello zero.
- A è dominio di integrità se e solo se vale la legge di semplificazione per il prodotto:

$$a \neq 0 \quad \text{e} \quad ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

Proposizione 4. *Siano A un anello commutativo con unità e I un suo ideale proprio.*

1. *I è primo $\Leftrightarrow$ A/I è un dominio d'integrità.*
2. *I è massimale $\Leftrightarrow$ A/I è un campo.*

Osservazione 5. *Poiché ogni campo è un dominio d'integrità, questo risultato fornisce un'altra dimostrazione del fatto che ogni ideale massimale è primo.*

Corollario 6. *A è un dominio d'integrità se e solo se l'ideale (0) è primo.*

dim Prop 4. ric: in $A/_I$, $\bar{0} = 0_{A/_I} = I$, $\bar{1} = 1_{A/_I} = I + 1$

1. I è primo $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in A, (ab \in I$ ed $a \notin I \Rightarrow b \in I)$

$\Leftrightarrow \forall a, b \in A \; (\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = \bar{0}$, ed $\bar{a} \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{b} = \bar{0})$

$\Leftrightarrow$ $A/_I$ dominio d'integrità.

2) $\Leftarrow$| Sia $A/_I$ campo, dobbiamo vedere che I massimale

Sia N ideale tale che $I \subseteq N$, $N \neq I$ $\Rightarrow$ $\exists\, x \in N$, $x \notin I$

$\Rightarrow$ $\bar{x} \neq \bar{0}$ in $A/_I$ $\underset{\substack{\uparrow \\ A/_I \text{ campo}}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \bar{y} \in A/_I$ $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1}$ $\Rightarrow$

$\overline{x \cdot y - 1} = \bar{0}$ in $A/_I$ $\Rightarrow$ $x \cdot y - 1 \in I \subset N$ $\Rightarrow$ $1 \in N$
$x \in N$

$\Rightarrow N = A$

$\Rightarrow$| sia I massimale Dobbiamo vedere che $A/_I$ campo

Sia $\bar{x} \neq \bar{0}$ in $A/_I$ $\Rightarrow$ $x \notin I$ $\underset{\substack{\uparrow \\ I \text{ massimale}}}{\Rightarrow}$ $I + (x) = A$

$\Rightarrow$ $1 \in I + (x)$ $\Rightarrow$ $\exists\, i \in I, y \in A$ $1 = i + xy$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\bar{1} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ in $A/_I$ $\Rightarrow$ $\bar{x}$ invertibile.

$\square$

Un'altra maniera di vedere che J massimale $\Leftrightarrow$ A/J campo:

Esiste biiezione tra:

$$\{N \text{ ideale di } A \mid I \subseteq N\} \xleftrightarrow{\varphi} \{\text{ideali di } A/J\}$$

$$N \longrightarrow \bar{N} = \{\bar{n} \mid n \in N\}$$

Allora: J massimale $\Leftrightarrow$ $\forall N \supseteq I$, $N = J$ o $N = A$.

$\Leftrightarrow$ $\forall$ ideale $\bar{N}$ di A/J, $\bar{N} = A/J$ oppure $\bar{N} = \bar{0}$ $\Leftrightarrow$ φ biiezione

$\Leftrightarrow$ A/J campo

Esempi.

- In $\mathbb{Z}[x]$: sia (x) l'ideale generato da x

$$\mathbb{Z}[x]/_{(x)} \cong \mathbb{Z}$$ dominio, non campo $\Rightarrow$

(x) primo non massimale

- sia $(2, x) \in \mathbb{Z}[x]$

$$\mathbb{Z}/_{(2,x)} \simeq \mathbb{Z}_2$$ campo $\Rightarrow$

$(2, x)$ massimale

- In $\mathbb{R}[x]$, (x) massimale: $\mathbb{R}[x]/_{(x)} \cong \mathbb{R}$ campo

- (x^2-1) non primo: $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}[x]/_{(x^2-1)}$ non è dominio d'integrità