1.

Esercizio 2

Siano X una variabile di Poisson di parametro $\lambda > 0$ e Y una variabile aleatoria di legge non nota.
Si sa che, condizionatamente all'evento $(X = n)$, la v.a. Y segue una legge Binomiale di parametri n e p.

a) Calcolare $\mathbb{E}[Y|X]$ e $\mathbb{E}[Y]$.

b) Determinare la legge di Y e ritrovare il valore atteso.

c) Determinare la legge di X condizionata a $(Y = k)$.

d) Calcolare $\mathbb{E}[X|Y]$ (calcolare prima $\mathbb{E}[X - Y|Y]$)

Soluzione

$$X \sim P(\lambda) \qquad Y|_{X=n} \sim B(n,p) \quad \text{ovvero} \quad Y \sim B(X,p)$$

a) $\mathbb{E}[Y|X] = Xp \qquad \mathbb{E}[Y] = \lambda p$

b) $Y \sim P(\lambda p)$

c) $\forall k \in \mathbb{N} = Y(\Omega) \qquad X|_{(Y=k)}$?

Poiché $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$P_{X|Y=k}(n) = \frac{P_{(X,Y)}(n,k)}{P_Y(k)} = \frac{P_{Y|X=n}(k)\, P_X(n)}{P_Y(k)}$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\text{Bayes: } \mathbb{P}(X=n \mid Y=k) = \frac{\mathbb{P}(X=n, Y=k)}{\mathbb{P}(Y=k)} = \frac{\mathbb{P}(Y=k \mid X=n)\,\mathbb{P}(X=n)}{\mathbb{P}(Y=k)} \right)$$

se $n < k \qquad P_{X|Y=k}(n) = 0$

se $n \geq k \qquad P_{X|Y=k}(n) = \dfrac{\left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right)\left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}\right)}{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}} =$

$$= \frac{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}\,(n-k)!}\,\cancel{p^k}\,(1-p)^{n-k}\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}}{e^{-\lambda p}\,\frac{\lambda^k\,\cancel{p^k}}{\cancel{k!}}}$$

$$= \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}\,e^{-\lambda(1-p)}$$

$$\Rightarrow\ p_{X|Y=k}(n) = e^{-\lambda(1-p)}\,\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}\qquad \forall\, n \geq k$$

d) Sia $Z = X - Y$

$$p_{Z|Y=k}(n) = \mathbb{P}(Z = n \mid Y = k) = \mathbb{P}(X - Y = n \mid Y = k)$$

$$= \mathbb{P}(X = n + k \mid Y = k) = p_{X|Y=k}(n+k)$$

$$= e^{-\lambda(1-p)}\,\frac{[\lambda(1-p)]^{(n+\cancel{k})-\cancel{k}}}{((n+\cancel{k})-\cancel{k})!}\qquad \forall\,(n+\cancel{k}) \geq \cancel{k}$$

$$= e^{-\lambda(1-p)}\,\frac{[\lambda(1-p)]^{n}}{n!}\qquad \forall\, n \geq 0$$

$$Z|(Y=k) \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$$

$$\Rightarrow\ Z = X - Y \perp\!\!\!\perp Y \quad \text{e} \quad Z \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$$

$$\left(p_Z(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{(Z,Y)}(n,k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{Z|Y=k}(n)\cdot p_Y(k) \right.$$

non dipende da k

$$\left. = p_{Z|Y=k}(n)\,\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_Y(k)}_{=1} = p_{Z|Y=k}(n) \right)$$

$$\mathbb{E}[Z \mid Y] \overset{Z \perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{E}[Z] = \lambda(1-p)$$

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[Z+Y \mid Y] = \mathbb{E}[Z] + Y = \lambda(1-p) + Y$$

NOTA:

- $\mathbb{E}[X \mid Y=k] = \mathbb{E}[Z+Y \mid Y=k] = \mathbb{E}[Z+k \mid Y=k]$
  $= \mathbb{E}[Z+k] = \mathbb{E}[Z] + k = \lambda(1-p) + k$

- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[\lambda(1-p) + Y] =$
  $= \lambda(1-p) + \mathbb{E}[Y] = \lambda(1-p) + \lambda p = \lambda$

Esercizio 3

Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo e siano

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty)}(y), \qquad f_{X|Y=y}(x) = y^2 x e^{-xy}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x).$$

a) Determinare la legge congiunta di (X, Y).

b) Determinare la legge marginale di X.

c) Determinare la legge di Y condizionata a $(X = x)$.

d) Calcolare $\mathbb{E}[Y|X]$.

Soluzione

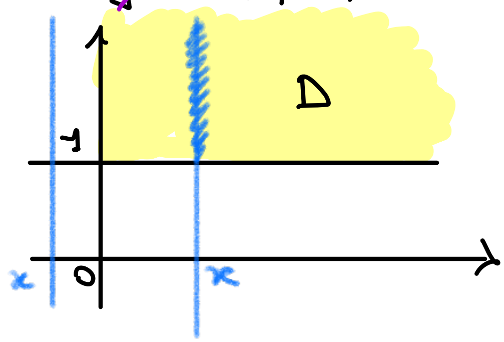
a)

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$= \left(\cancel{y^2}\, x e^{-xy} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\right) \cdot \left(\frac{1}{\cancel{y^2}} \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(y)\right)$$

$$= x e^{-xy} \mathbb{1}_D(x,y)$$

con $D = (0,+\infty) \times [1,+\infty)$



b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy = 0 \quad \text{se } x \leq 0$$

se $x > 0$

$$f_X(x) = \underbrace{\int_1^{+\infty} x e^{-xy}\, dy}_{S_U(1) = e^{-x}} = e^{-x}$$

↳ densità di $U \sim Exp(x)$

$\Rightarrow X \sim Exp(1)$

c) $f_{Y|X=x}(y)$?

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x e^{-xy} \mathbb{1}_D(x,y)}{e^{-x} \cancel{\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)}}$$

NO

se $x > 0$

$$= x\, e^{-x(y-1)}\, \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(y)$$

d) $\mathbb{E}[Y|X]$?

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y|X=x}(y)\, dy$$

$\Rightarrow$ da cui ottengo $\mathbb{E}[Y|X]$ (...)

alternativa:

sia $Z = Y-1$

$$f_Z(z) = f_Y(z+1)$$

$$f_{aY+b}(z) = \frac{1}{|a|} f_Y\left(\frac{z-b}{a}\right)$$

Analogamente $f_{Z|X=x}(z) = f_{Y|X=x}(z+1)$ (provare)

$$\Rightarrow f_{Z|X=x}(z) = x\, e^{-x(z+\cancel{1}-\cancel{1})}\, \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(z+1)$$

$$= x\, e^{-xz}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(z)$$

$\Rightarrow Z|_{X=x} \sim Exp(x)$ oppure $Z \sim Exp(X)$

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Z+1|X] = \mathbb{E}[Z|X]+1 = \frac{1}{X}+1$$

(ovvero:

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \mathbb{E}[Z+1|X=x] = \mathbb{E}[Z|X=x]+1 \overset{Z|(X=x)\sim Exp(x)}{=}$$

$$= \frac{1}{x}+1 \Rightarrow \mathbb{E}[Y|X] = \frac{1}{X}+1 \quad)$$

Esercizio 4

Delle apparecchiature vengono sottoposte a manutenzione Y volte l'anno. La variabile Y segue una legge di Poisson con parametro aleatorio $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$, dove X rappresenta la propensione alla difettosità di ciascuna apparecchiatura.

a) Determinare la legge di Y e il numero medio di manutenzioni annuali.

b) Supponendo di conoscere il numero di manutenzioni in un anno, stimare la propensione alla difettosità.

Soluzione

Y = n° manutenzioni annuali

$Y \sim P(X)$ ovvero $Y|_{X=x} \sim P(x)$

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \qquad \alpha, \lambda > 0$

X = propensione al guasto

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$f_{(X,Y)}(x,n) = p_{Y|X=x}(n) \cdot f_X(x) =$$

$$= \left(e^{-x} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \right)$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{n!} \cdot x^{n+\alpha-1} e^{-(\lambda+1)x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

$\Downarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$p_Y(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,n)\, dx$$

$$\left(f_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,n) \right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{n!} \, x^{n+\alpha-1} e^{-(\lambda+1)x} \, dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(\lambda+1)^{n+\alpha}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda+1)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} x^{n+\alpha-1} e^{-(\lambda+1)x} \, dx}_{\Gamma(n+\alpha,\, \lambda+1)}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(\lambda+1)^{n+\alpha}}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\, n!} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^\alpha \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n \quad \circledast$$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$Y \sim P(X)$

$\mathbb{E}[Y|X] = X$

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

<u>Osservazione</u>

se $\alpha = k \in \mathbb{N}$ $\quad X \sim \Gamma(k, \lambda)$ Erlang

$$p_Y(n) = \underbrace{\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\, n!}}_{\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n$$

$Y \sim BN(k, p)$ con $p = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ (Binomiale Negativa)

(NOTA: si usa il termine Binomiale Negativa anche per indicare la legge di Y è $\circledast$: $Y \sim BN\left(\alpha, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$)

b) $\mathbb{E}[X|Y]$?

$$f_{X|Y=n}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,n)}{f_Y(n)} =$$

se $n \in \mathbb{N}$

$$= \frac{\cancel{\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}} \cdot \cancel{\frac{1}{n!}} \cdot x^{n+\alpha-1} e^{-(\lambda+1)x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)}{\cancel{\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}} \cdot \cancel{\frac{1}{n!}} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(\lambda+1)^{n+\alpha}}}$$

$$= \frac{(\lambda+1)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} x^{(n+\alpha)-1} e^{-(\lambda+1)x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

$X|Y=n \sim \Gamma(n+\alpha, \lambda+1)$ ovvero $X \sim \Gamma(Y+\alpha, \lambda+1)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y=n] = \frac{n+\alpha}{\lambda+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X|Y] = \frac{Y+\alpha}{\lambda+1}}$$

PREMESSA

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV

Sia $X \in L^1$, $X \geq 0$ q.o.

Allora $\forall \varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}(X > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}}$$

dim

Sia $Y = \varepsilon \mathbb{1}_{(X > \varepsilon)} \Rightarrow Y \leq X$ q.o.

$\Rightarrow$ monotonia $\quad \mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{1}_{(X>\varepsilon)}] = \varepsilon \mathbb{P}(X > \varepsilon) \Rightarrow \text{ok}$$

DISUGUAGLIANZA DI CHEBICHEV

Sia $X \in L^2$

Allora $\forall \varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}}$$

dim

Sia $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2 \geq 0$ e $Y \in L^1$

Allora

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}[X])^2 > \varepsilon^2)$$

$$= \mathbb{P}(Y > \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2} \Rightarrow \text{ok}$$

CONVERGENZA DI SUCCESSIONI DI VARIABILI ALEATORIE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità (completo)

Definizione 1

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ e X v.a.

Diciamo che la successione $(X_n)_{n\geq 1}$ converge a X quasi ovunque (q.o.) oppure quasi certamente (q.c.) oppure con probabilità 1 se

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \not\to X(\omega)\}) = \mathbb{P}(X_n \not\to X) = 0}$$

$$\left(\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = \mathbb{P}(X_n \to X) = 1 \right)$$

Denotiamo con $X_n \xrightarrow{q.o.} X$, $X_n \xrightarrow{q.c.} X$

Definizione 2

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ e X v.a.

Diciamo che la successione $(X_n)_{n\geq 1}$ converge a X in probabilità (in misura) se

$\forall \varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Denotiamo con $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Definizione 3

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ e X v.a.

Diciamo che la successione $(X_n)_{n\geq 1}$ converge a X in norma L^p (in L^p, in norma p-esima) se $X_n, X \in L^p$ $\forall n \geq 1$ e

$$\boxed{\| X_n - X \|_{L^p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Si noti che $\| X_n - X \|_{L^p} \longrightarrow 0 \iff \boxed{\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \to 0}$

quindi si parla anche di convergenza in media di ordine p

(se $p=2$ si parla di convergenza in media quadratica
se $p=1$ si parla di convergenza in media)

Denotiamo $X_n \xrightarrow{L^p} X$

Proposizione

1) Se $p \geq q \geq 1$ allora $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^q} X$

2) Se $X_n \xrightarrow{L} X \Rightarrow \mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$

3) Se $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow \mathbb{E}[|X_n|^p] \to \mathbb{E}[|X|^p]$

NOTA: Se $X_n \xrightarrow{L^2} X \Rightarrow$ per 1: $X_n \xrightarrow{L^1} X$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{per } 2:\ \mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X] \\ \text{per } 3:\ \mathbb{E}[X_n^2] \to \mathbb{E}[X^2] \end{array}\right\} \Rightarrow Var(X_n) \to Var(X)$$

non viceversa!

4) $X_n \xrightarrow{L^2} a \iff \mathbb{E}[X_n] \to a$

$\qquad\qquad\qquad\qquad Var(X_n) \to 0$

dim

1) Sia $X \in L^p$ ($X \in L^q$ perchè $L^p \subseteq L^q$)

$$+\infty > \mathbb{E}[|X|^p] = \mathbb{E}\left[\left(|X|^q\right)^{p/q}\right] = \mathbb{E}\left[\psi(|X|^q)\right]$$

$\psi(x) = x^{p/q}$

ψ convessa, su $x \geq 0$

$$\underset{\text{Jensen}}{\geq} \psi\left(\mathbb{E}[|X|^q]\right) = \left(\mathbb{E}[|X|^q]\right)^{p/q}$$

$$\Rightarrow \|X\|_{L^q} \leq \|X\|_{L^p} < +\infty$$

(usando Jensen per v. a. ≥ 0, non necessariamente integrabili, questo prova anche che $L^p \subseteq L^q$)

Nel nostro caso

$X_n, X \in L^p \Rightarrow X_n, X \in L^q$ e inoltre

$$\|X_n - X\|_{L^q} \leq \|X_n - X\|_{L^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^q} X$$

2) Sappiamo che $\|X_n - X\|_{L^1} \to 0$

$\|X_n - X\|_{L^1} = \mathbb{E}[|X_n - X|]$

$$\Rightarrow \left|\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X]\right| = \left|\mathbb{E}[X_n - X]\right| \underset{\text{Jensen}}{\leq} \mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$$

3) Sappiamo che $\|X_n - X\|_{L^p} \to 0$

$$\big|\, \|X_n\|_{L^p} - \|X\|_{L^p} \big| \leq \|X_n - X\|_{L^p} \to 0$$

segue dalla dis. triangolare

$$\Rightarrow \|X_n\|_{L^p} \to \|X\|_{L^p} \Rightarrow \mathbb{E}[|X_n|^p] \to \mathbb{E}[|X|^p]$$

4) $$X_n \xrightarrow{L^2} a \iff \mathbb{E}[(X_n - a)^2] \to 0$$

$$\mathbb{E}[(X_n-a)^2] = \operatorname{var}(X_n - a) + (\mathbb{E}[X_n - a])^2$$

$$= \operatorname{var}(X_n) + (\mathbb{E}[X_n] - a)^2 \longrightarrow 0$$

quantità non negative

$$\iff \begin{cases} \operatorname{var}(X_n) \to 0 \\ \mathbb{E}[X_n] \to a \end{cases}$$