- **Le Equazioni di Maxwell;**
- **dalle Eq.ni di Maxwell alle equazioni delle onde**

40-5 FORMA DIFFERENZIALE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL*

Nella tabella 2 abbiamo scritto le equazioni di Maxwell come

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q, \tag{A-1}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \tag{A-2}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt \tag{A-3}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \, (i + \epsilon_0 \, d\Phi_E/dt). \tag{A-4}$$

Tali equazioni si dicono in forma integrale e sotto al segno di integrale appaiono i campi variabili **E** e **B**, solitamente grandezze incognite. Solo in alcuni casi simmetrici li possiamo portare fuori dal segno di integrale; nel caso più generale ciò non è possibile.

Qualcosa di simile accade nel calcolo della densità ϱ di un corpo, noti che siano la sua massa m e il suo volume V. In generale queste grandezze sono collegate dall'equazione integrale

$$m = \int \varrho \, dV,$$

e solo se ϱ è costante in tutto il volume è possibile portarla fuori dal segno di integrale e scrivere $\varrho = m/V$.

Spesso è conveniente riscrivere le equazioni di Maxwell sotto forma di uguaglianze valide per tutti i *punti* dello spazio, piuttosto che come integrali validi in varie *regioni* di spazio. In altre parole vogliamo trasformare le equazioni di Maxwell dalla forma integrale delle eq. A-1, A-4 in una *forma differenziale*. Potremo poi collegare **E** e **B** in un punto con la densità di carica e con la densità di corrente in quel punto.

L'operatore ∇

Per trasformare le equazioni di Maxwell in una forma differenziale dobbiamo approfondire la nostra conoscenza dei metodi vettoriali e, in particolare, acquistare una certa familiarità con l'operatore ∇.

si è visto come si possono ottenere le componenti del (vettore) campo elettrostatico $\mathbf{E}$ in un punto qualsiasi mediante derivazione parziale della funzione potenziale scalare $V(x, y, z)$.

Così

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

in modo tale che il campo elettrostatico

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z$$

si possa scrivere nella forma

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right). \qquad \text{(A-5)}$$

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right). \qquad \text{(A-5)}$$

Possiamo scrivere l'eq. A-5 in forma più sintetica come

$$\mathbf{E} = -\nabla V,$$

dove ∇ (nabla) è un operatore vettoriale definito come

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad \text{(A-6)}$$

Tale operatore è particolarmente utile nella trattazione dei campi scalari e vettoriali.

Dato un generico campo scalare ψ, possiamo costruire un campo vettoriale, chiamato gradiente di ψ e scritto grad ψ o $\nabla\psi$, semplicemente applicando a ψ l'operatore ∇.

Dato un campo vettoriale $\mathbf{U} = U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + U_z\mathbf{k}$ possiamo applicargli l'operatore ∇ in due diversi modi.

Un modo è quello di costruire il prodotto scalare di ∇ e di $\mathbf{U}$, per ottenere il campo scalare chiamato *divergenza* di $\mathbf{U}$ e scritto div $\mathbf{U}$ o $\nabla \cdot \mathbf{U}$. L'altro modo è quello di costruire il prodotto vettore di ∇ e $\mathbf{U}$ per ottenere il campo vettoriale chiamato *rotore* di $\mathbf{U}$ e scritto rot $\mathbf{U}$ o $\nabla \times \mathbf{U}$. Queste operazioni possono essere sintetizzate come segue

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla\psi = \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad \text{(A-7)}$$

$$\text{div } \mathbf{U} \equiv \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \qquad \text{(A-8)}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{U} \equiv \nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + \\ + \mathbf{j}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + \\ + \mathbf{k}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right). \end{aligned} \qquad \text{(A-9)}$$

Si noti che grad ψ e rot $\mathbf{U}$ sono vettori, mentre div $\mathbf{U}$ è uno scalare. Lo studente può acquistare una certa familiarità con queste operazioni eseguendo i seguenti esercizi: (1) dimostrare che rot (grad ψ) $= 0$ e (2) dimostrare che div (rot $\mathbf{U}$) $= 0$.

Un altro operatore frequentemente usato è ∇^2 (nabla quadrato). Esso è definito semplicemente come $\nabla \cdot \nabla$ o, come lo studente può dimostrare dall'eq. A-6.

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Applicando l'operatore ∇^2 a un campo scalare ψ si ottiene

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \qquad \text{(A-10)}$$

Per un campo vettoriale $\mathbf{U}$ l'operazione $\nabla^2 \mathbf{U}$ è definita come

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \mathbf{i}\, \nabla^2 U_x + \mathbf{j}\, \nabla^2 U_y + \mathbf{k}\, \nabla^2 U_z. \qquad \text{(A-11)}$$

Come esercizio dimostrare che rot (rot $\mathbf{U}$) $= -\nabla^2 \mathbf{U} +$ grad (div $\mathbf{U}$).

Equazioni di Maxwell in forma differenziale

In questo paragrafo mostreremo come si possono scrivere le prime due equazioni di Maxwell in forma differenziale (eq. A-1 2). Applichiamo l'eq. A-1 a un elemento infinitesimo di volume a forma di parallelepipedo rettangolo contenente un punto P nel quale (e nelle vicinanze) esista un campo elettrico (fig. A-1*a*). Il

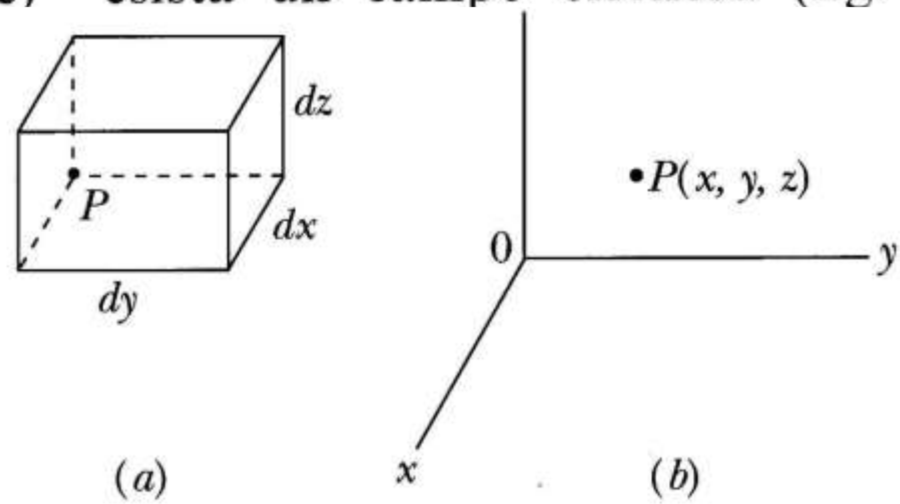


Figura A-1

punto P è situato in x, y, z nel sistema di riferimento della fig. A-1*b* e i lati del parallelepipedo hanno lunghezza dx, dy, dz.

Possiamo scrivere il vettore superficie della faccia posteriore del parallelepipedo come $d\mathbf{A} = -\,\mathbf{i}\;dy\;dz$. Il segno meno è dovuto al fatto che $d\mathbf{A}$ è scelto orientato come la normale *verso l'esterno*, che è descritta dal versore $-\mathbf{i}$. Per la faccia anteriore avremo: $d\mathbf{A} = +\,\mathbf{i}\;dy\;dz$.

Se il campo elettrico sulla faccia posteriore è $\mathbf{E}$, quello sulla faccia anteriore, che si trova a distanza dx da quella posteriore, sarà $\mathbf{E} + (\partial\mathbf{E}/\partial x)dx$, dove il secondo termine rappresenta la variazione di $\mathbf{E}$ associata alla variazione dx di x.

Il flusso attraverso tutta la superficie del parallelepipedo è $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ e il contributo delle sole due facce a questo flusso è:

$$(\mathbf{E})(-\mathbf{i}\,dy\,dz) + \left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x}dx\right)(+\mathbf{i}\,dy\,dz) =$$

$$= dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x} \cdot \mathbf{i}\right) =$$

$$= dx\,dy\,dz\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}) = dx\,dy\,dz\frac{\partial E_x}{\partial x}.$$

Essendovi da parte delle altre quattro facce un analogo contributo, il flusso elettrico totale è

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right).$$

Dall'eq. A-8 possiamo scrivere

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = dx\,dy\,dz\ \mathrm{div}\ \mathbf{E}. \qquad \text{(A-12)}$$

Ora il secondo membro dell'eq. A-1, che dà la carica racchiusa nella superficie, può essere scritto in generale come $q = \int \varrho \, dV$ e, in particolare, per l'elemento infinitesimo di volume centrato in P, come

$$q = \varrho \, dx \, dy \, dz, \tag{A-13}$$

dove ϱ è la densità volumica di carica in P. Sostituendo le eqq. A-12 e 13 nell'eq. A-1 ed eliminando il fat-

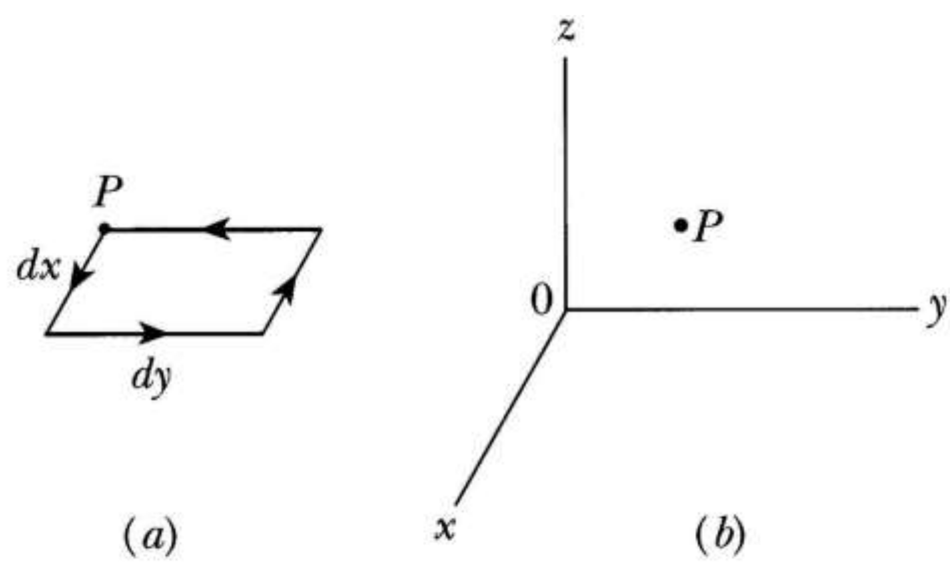


Figura A-2

tore comune $dx \, dy \, dz$ abbiamo alla fine

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho, \tag{A-14}$$

che rappresenta la prima equazione di Maxwell (eq. A-1) in forma differenziale.

Con la stessa tecnica possiamo esprimere la seconda equazione di Maxwell (eq. A-2) in forma differenziale come

$$\mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0. \tag{A-15}$$

Cerchiamo ora di trasformare la terza e la quarta equazione di Maxwell (eqq. A-3,4) in forma differenziale, Partiamo applicando l'eq. A-4 a un elemento infinitesimo di superficie in forma rettangolare contenente un punto P in un campo magnetico, come indicato in fig. A-2a. Il punto P è situato in x, y, z nel sistema di riferimento della fig. A-2b e i lati del rettangolo parallelo al piano x-y hanno lunghezza dx e dy.

Seguendo il percorso indicato dalle frecce si ha

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = {} & \mathbf{B} \cdot (\cdot\, \mathbf{j}\, dy) + && \text{(lato posteriore)} \\
& + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{i}\, dx) + && \text{(lato sinistro)} \\
& + \left(\mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} dx \right) \cdot (\mathbf{j}\, dy) + && \text{(lato anteriore)} \\
& + \left(\mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} dy \right) \cdot (-\mathbf{i}\, dx), && \text{(lato destro)}
\end{aligned}$$

dove $\mathbf{B}$ il campo magnetico in P.

Raccogliendo i vari termini otteniamo

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = dx\ dy\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \cdot \mathbf{i}\right)$$
$$= dx\ dy\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{j}) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{i})\right)$$
$$= dx\ dy\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right). \tag{A-16}$$

Nel secondo membro dell'eq. A-4 i è la corrente concatenata dal percorso e $d\phi_E/dt$ è la variazione del flusso elettrico attraverso la superficie racchiusa. Quindi, se $\mathbf{J}$ rappresenta la densità di corrente e d$\mathbf{A}$ ($= \mathbf{k}\ dx\ dy$) il vettore superficie, si può scrivere

$$i = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{k}\ dx\ dy) = dx\ dy\ J_z \tag{A-17}$$

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot (\mathbf{k}\ dx\ dy)$$

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{\partial E_z}{dt} dx\ dy. \tag{A-18}$$

Sostituendo le eqq. A-16, 17 e 18 nell'eq. A-4 ed eliminando il fattore comune $dx\,dy$ otteniamo

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=J_z+\epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}. \tag{A-19}$$

Avremmo ottenuto risultati simili se avessimo scelto un rettangolo parallelo al piano y-z o al piano z-x. Ciascun rettangolo ci avrebbe fornito un diverso componente di una superficie infinitesima arbitrariamente orientata nel punto P. È chiaro che l'eq. A-19 è l'equazione corrispondente all'eq. A-4 secondo l'asse z. Se la moltiplichiamo per $\mathbf{k}$ e le sommiamo le due analoghe equazioni vettoriali corrispondenti all'asse x e all'asse y, che si possono ottenere mediante permutazione ciclica di x, y, z e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ si ottiene

$$\text{rot}\,\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}+\epsilon_0\,\partial\mathbf{E}/\partial t), \tag{A-20}$$

che è la quarta equazione di Maxwell in forma differenziale.

Legge di Ampere-Maxwell in forma differenziale

Sia **j** la densità di corrente nel punto P=(x,y,z)

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)=$$

$$=rot\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

Essendo S superficie aperta delimitata dalla curva chiusa C, integrando:

$$\int_{S-aperta}\vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_{S-aperta}\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}=$$

TEOREMA DI STOKES
o DEL ROTORE

$$=\oint_{C-chiusa-contorno-S}\vec{B}d\vec{l}$$

Allo stesso modo, partendo dall'eq. A-3, possiamo dimostrare che

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t, \tag{A-21}$$

che è la forma differenziale della terza equazione di Maxwell. Abbiamo quindi ricavato quattro equazioni differenziali dalle quattro equazioni integrali (dalla A-1 alla A-4). Si può dimostrare che le equazioni integrali possono essere ricavate da quelle differenziali, cioè i due gruppi di equazioni sono *equivalenti*.(*)

In riassunto le quattro equazioni differenziali sono:

$$\epsilon_0 \text{ div } \mathbf{E} = \varrho, \tag{A-22}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \tag{A-23}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t, \tag{A-24}$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \, \partial \mathbf{E}/\partial t), \tag{A-25}$$

esse sono quattro equazioni differenziali a derivate parziali accoppiate e sono valide in ogni punto di un campo elettromagnetico.

---

* Se i cammini d'integrazione (linee chiuse) *non* sono funzioni del tempo (N.d.T.).

La forma differenziale delle equazioni di Maxwell poteva essere ottenuta dando per scontati

DUE TEOREMI RELATIVI AI CAMPI VETTORIALI

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

dato un campo vettoriale ***C*** in una zona dello spazio il flusso di ***C*** attraverso una superficie chiusa ***S*** é uguale all'integrale della divergenza di ***C*** esteso al volume racchiuso in ***S*** detto ***V(S).***

$$divergenza\ \ di\ \ \vec{C} = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right)$$

$$\oint_S \vec{C}\cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right) dV$$

TEOREMA DI STOKES

dato un campo vettoriale ***C*** in una zona dello spazio la circuitazione di ***C*** lungo una curva chiusa ***L*** é uguale al flusso del rotore di ***C*** attraverso una superficie ***S*** che ha come contorno ***L*** detta ***S(L).***

$$rotore \;\; di \;\; \vec{C} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{C}\right)$$

$$\oint_L \vec{C} \cdot d\vec{l} = \int_{S(L)} \left(\vec{\nabla} \times \vec{C}\right) \cdot d\vec{S}$$

Applichiamo i teoremi alle quattro equazioni di Maxwell per ottenerne la forma differenziale!

•***<u>Legge di Gauss per il campo E</u>***

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S)} \rho dV$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S)} \rho dV$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

•***<u>Legge di Gauss per il campo B</u>***

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

•***<u>Legge di Faraday-Henry</u>***

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S(L)} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{S(L)} \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot d\vec{S} = -\int_{S(L)} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

•***<u>Legge di Ampere-Laplace</u>***

$$\oint_L \overline{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(L)} \vec{j}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_{S(L)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

LE EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO IN FORMA INTEGRALE

I^a eq. $$\oint_{\sup.chiusa} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

II^a eq. $$\oint_{\sup.chiusa} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

III^a *eq.* $$\oint_{L} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S(L)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

IV^a eq. $$\oint_{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[I_L + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S(L)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right]$$

LE EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO IN FORMA DIFFERENZIALE

I^a eq. $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

II^a eq. $$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

III^a *eq.* $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

IV^a eq. $$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Equazioni di Maxwell nel vuoto

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ — flusso di $\vec{E}$ attraverso sup. chiusa S è uguale alla carica racchiusa diviso ϵ_0
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ — flusso di $\vec{B}$ attraverso sup. chiusa è nullo
- $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — integrale di linea di $\vec{E}$ lungo linea chiusa γ è uguale alla variazione del flusso di $\vec{B}$ attraverso una sup. con contorno γ
- $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ — integrale di linea di $\vec{B}$ lungo linea chiusa γ è uguale alla variazione del flusso di $\vec{E}$ attraverso una sup. con contorno γ moltipl. per ϵ_0 + la corrente attraverso γ a meno della costante μ_0

Legge di conserv. della carica

- $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\dfrac{dq_S}{dt}$ — flusso di corrente attraverso sup. chiusa S è uguale a meno la variazione di carica interna ad S

Legge di Forza $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$

Legge del moto $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Gravitazione $\vec{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$

TUTTA la fisica fino a inizio 1900!

Principi dell'e.m.

campi E e B statici

- Legge di Coulomb
- Sovrapposizione per E
- Conservazione della carica
- Forza di Lorent
- Sovrapposizione per B
- Legge di Ampere-Laplace

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$$

campi E e B dinamini

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

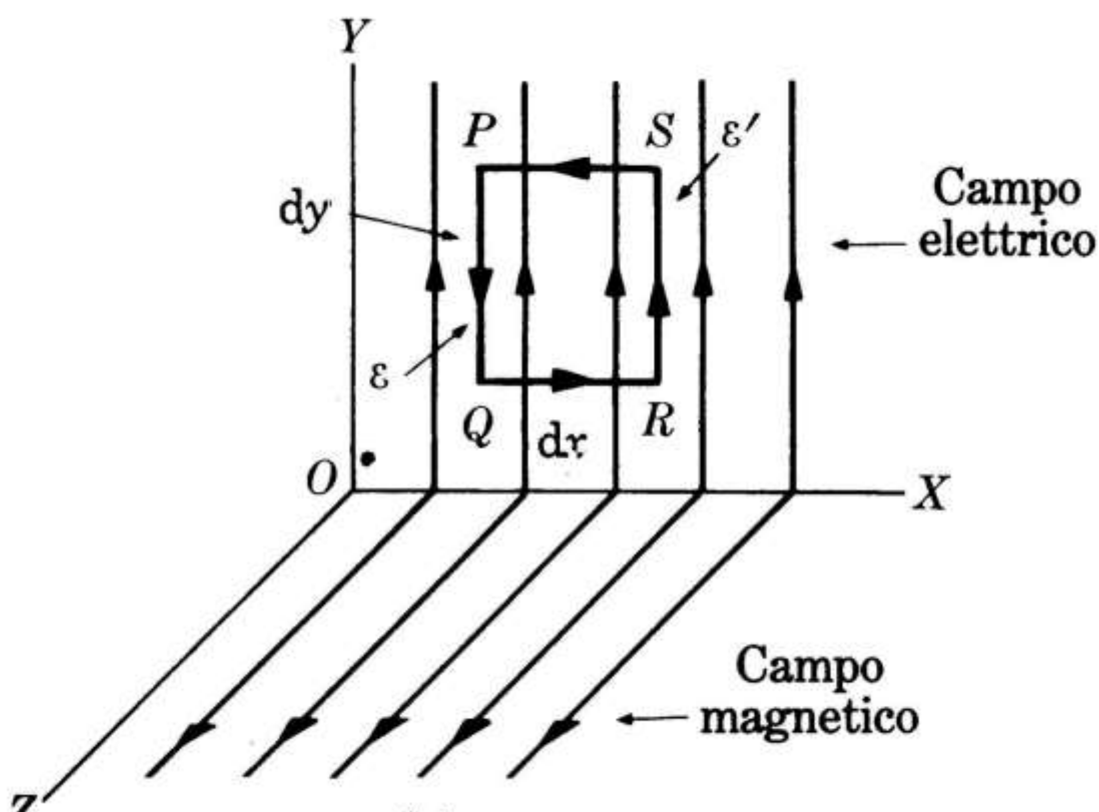
- Legge di Faraday-Henry
- Sovrapposizione per E
- Conservazione della carica
- Forza di Lorent
- Sovrapposizione per B
- oorrente di spostamento

ONDE ELETTROMAGNETICHE

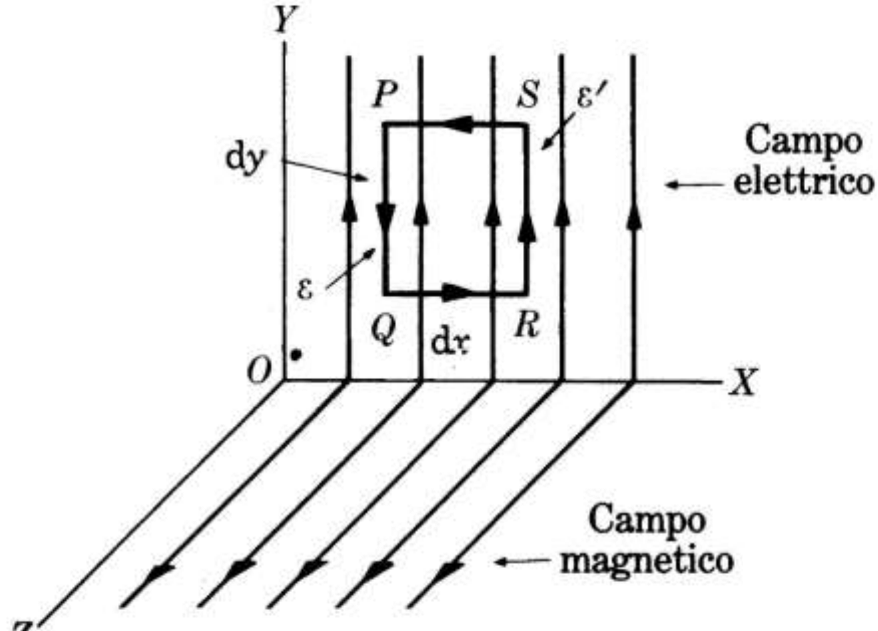
- Dalle equazioni di Maxwell all’equazione delle onde per il campo e.m.;

DALLE EQUAZIONI DI MAXWELL ALLE EQUAZIONI DELLE ONDE

Prendiamo una zona di spazio in cui c'è un campo elettrico con linee di forza giacenti sul piano **XY** e un campo magnetico con linee di forza giacenti sul piano **XZ** (<u>cioè i due campi sono perpendicolari, situazione che ha una notevole generalità se ci ricordiamo le leggi di Maxwell che legano ***E*** a ***B*** e viceversa</u>).



(a)



(a)

Prendiamo il rettangolo di vertici RSPQ nel piano XY e applichiamo la ***legge di Faraday-Henry*** con percorrenza in senso antiorario:

$$-\frac{d}{dt}\Phi_B = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \Phi_B = \int_{S=RSPQ} \vec{B}\cdot d\vec{S} = B(dxdy)$$

$$\oint_{L=RSPQ} \vec{E}\cdot d\vec{l} = E'dy - Edy$$

Da cui otteniamo:

$$-\frac{d}{dt}(Bdxdy) = (E' - E)dy = dEdy$$

$$-\frac{dB}{dt} = \frac{dE}{dx}$$

Prendiamo adesso il rettangolo di vertici RSPQ nel piano XZ e applichiamo la ***legge di Ampere-Maxwell*** con percorrenza in senso antiorario:
(senza correnti)

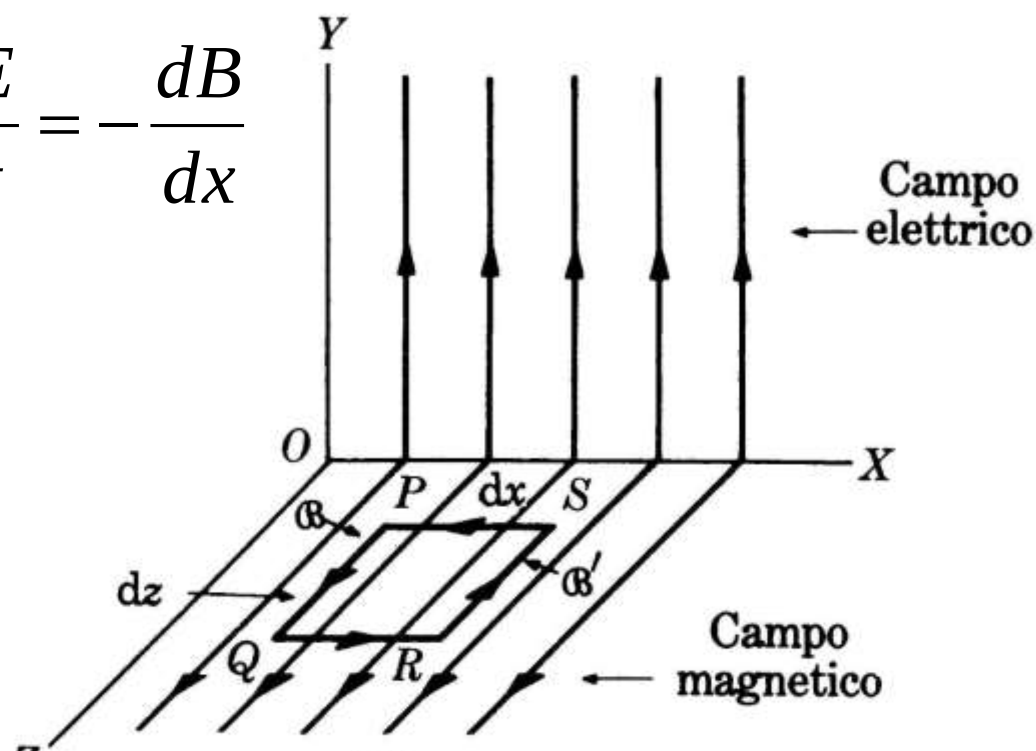
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\Phi_E$$

$$\Phi_E = \int_{S=RSPQ} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(dxdz)$$

$$\oint_{L=RSPQ} \vec{B}\cdot d\vec{l} = Bdz - B'dz$$

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}(Edxdz) = -(B'-B)dz = -dBdz$$

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = -\frac{dB}{dx}$$



(b)

Vediamo di utilizzare i due risultati ottenuti dalle leggi di ***Faraday-Henry*** e ***Ampere-Maxwell***:

$$-\frac{dB}{dt}=\frac{dE}{dx} \qquad\qquad \mu_0\varepsilon_0\frac{dE}{dt}=-\frac{dB}{dx}$$

Derivando la prima rispetto al tempo e la seconda rispetto la coordinata x, sostituendo otteniamo:

$$\frac{d^2B}{dx^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{d^2B}{dt^2}$$

Derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto al tempo, sostituendo otteniamo:

$$\frac{d^2E}{dx^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{d^2E}{dt^2}$$

<u>Cioè sia campo magnetico che campo elettrico soddisfano ad una equazione che viene detta delle onde</u>

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE

- L’equazione delle onde;
- Generalità sul moto ondulatorio

- Onde e.m. piane;
- Polarizzazione delle onde e.m.;
- La propagazione del campo e.m.

Le onde e la loro equazione

Se prendiamo una funzione ***y=f(x)*** e ne consideriamo la sua traslazione verso la direzione positiva dell'asse ***x*** di una quantità ***a*** otteniamo la funzione ***y=f(x-a)*** .

Se ***a=vt***, dove ***v*** è una velocità e ***t*** è il tempo la funzione ***y=f(x-vt)*** rappresenta la curva ***y*** che si muove verso destra con una velocità ***v*** detta ***velocità di fase***.
Analogamente ***y=f(x+vt)*** rappresenta la curva ***y*** che si muove verso sinistra con una velocità ***v.***

Quindi l'espressione matematica

$$y(x,t) = f(x \pm vt)$$

è in grado di descrivere uno stato fisico che si propaga senza deformazione lungo l'asse ***x***,

<u>questo tipo di propagazione viene detta onda</u>

la quantità ***(x-vt)*** (cioè l'argomento della funzione) viene detta **<u>fase dell'onda</u>**.

L’equazione differenziale che descrive il moto di un’onda che si propaga in direzione ***x*** a velocità ***v*** è

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Una tale equazione differenziale descrive una quantità di grandezze fisiche (deformazione longitudinale di una sbarra, pressione di un gas, deformazioni trasversali di una corda, perturbazioni sulla superficie di un liquido, …..).

La soluzione generale è del tipo:

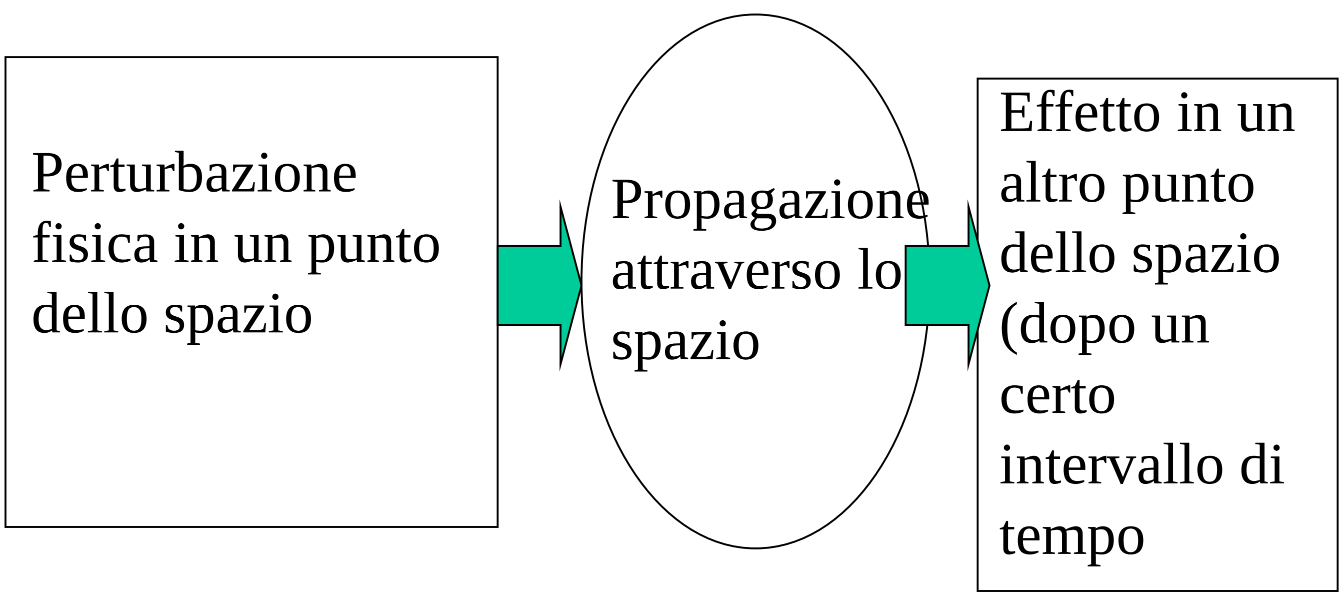
$$y(x,t) = f_1(x+vt) + f_2(\underline{x-vt})$$

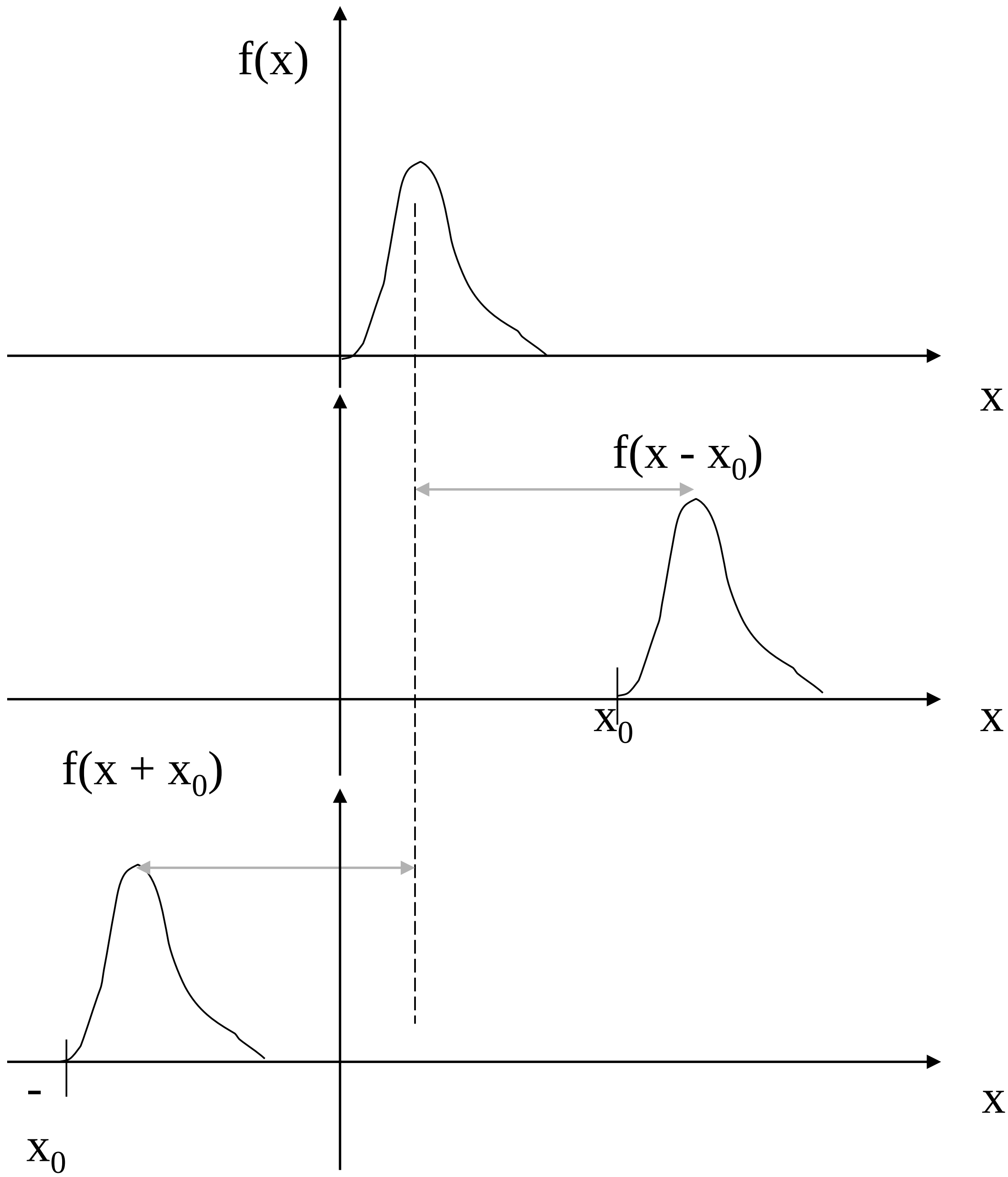
velocità di fase

fase dell’onda

Moto Ondulatorio

Esempi: il suono di un campanello, che è possibile udire ad una certa distanza rispetto alla sorgente, la scia sull’acqua prodotta da una barca, le cui onde possono dopo un certo periodo temporale raggiungere la spiaggia, la luce prodotta da una lampadina che è in grado di illuminare una stanza, sono tutti esempi di processi in cui si ha





f(x)
x
f(x - x0)
x0
x
f(x + x0)
-
x0
x

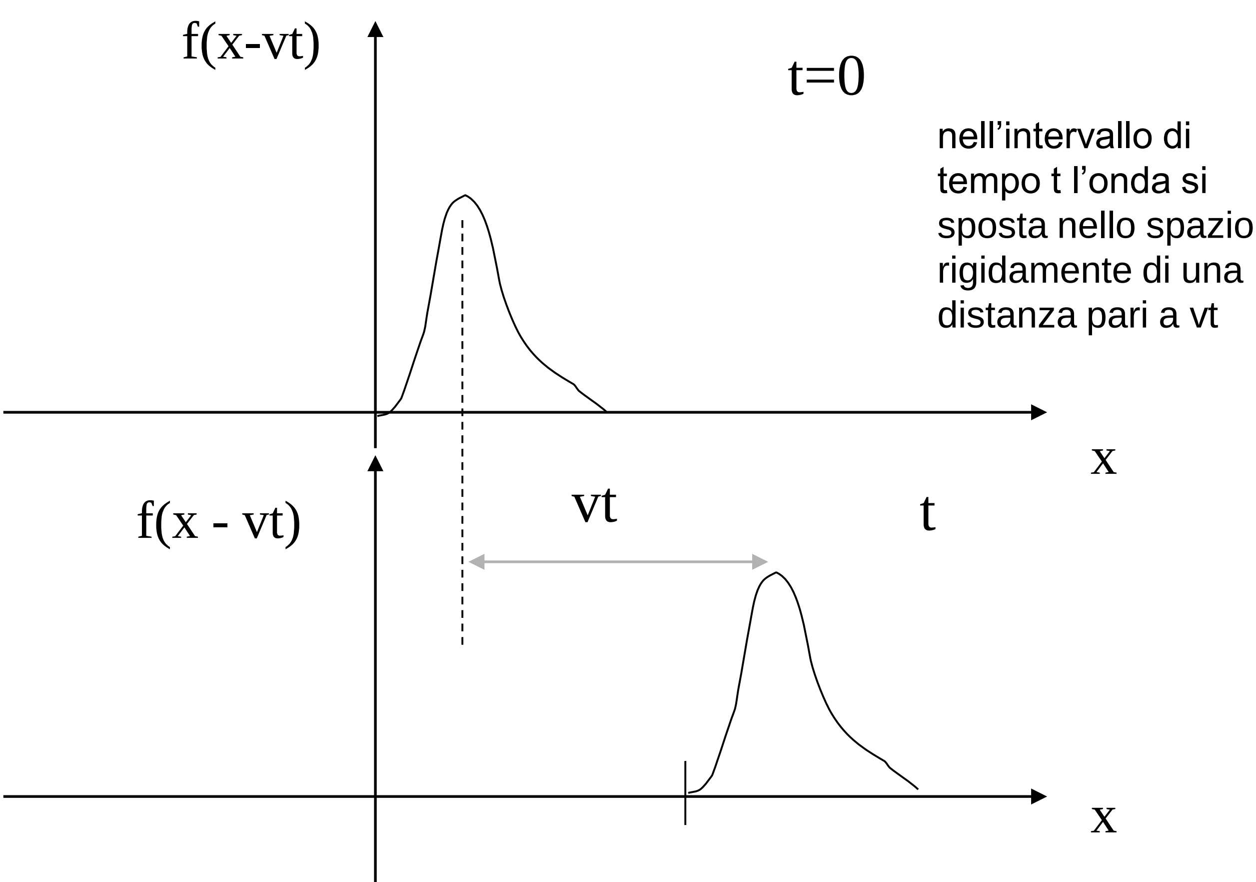
Ponendo x_0 = vt, si ottiene una curva ‘viaggiante’, del tipo

$$f(x,t) = f(x \pm vt)$$

In cui il segno – è associato al moto verso i valori **positivi** delle x con velocità v (detta velocità di fase)

Il segno **+** è associato al moto verso i valori **negativi** delle x con la stessa velocità v

N. B. L’espressione $f(x,t) = f(x \pm vt)$ descrive una ‘perturbazione fisica’ che si propaga lungo l’asse x senza deformarsi.



Vengono definite armoniche onde del tipo

$f(x \pm vt) = A\sin[k(x \pm vt)] = A\sin[kx \pm \omega t]$ con $\omega = v \cdot k$

Tali onde sono caratterizzate da una periodicità **spaziale** e **temporale**

Nel caso in cui x sia sostituito da $x + 2\pi/k$,

la $f(x,t)$ assume lo stesso valore

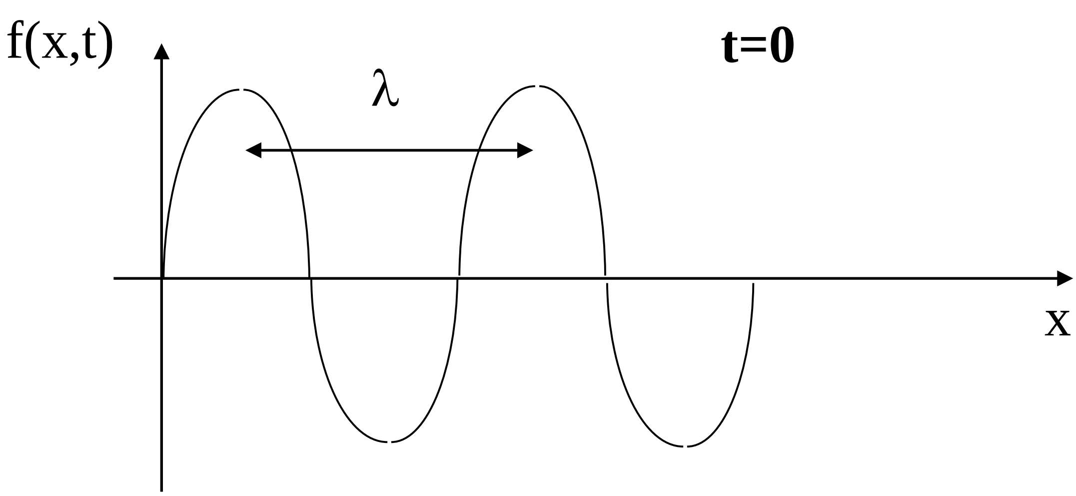
$f(x,t) = A\sin[k(x \pm vt)]$

$f(x + 2\pi/k, t) = A\sin[k(x + 2\pi/k \pm vt)] =$

$= A\sin[k(x \pm vt) + 2\pi] = A\sin[k(x \pm vt)]$

Quindi la quantità $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ detta **lunghezza d'onda**, caratterizza il 'periodo spaziale'.

La curva si ripete ogni lunghezza λ (fissato t).



Analogamente, nel caso in cui t sia sostituito da $t + 2\pi/\omega$, la f(x,t) assume lo stesso valore

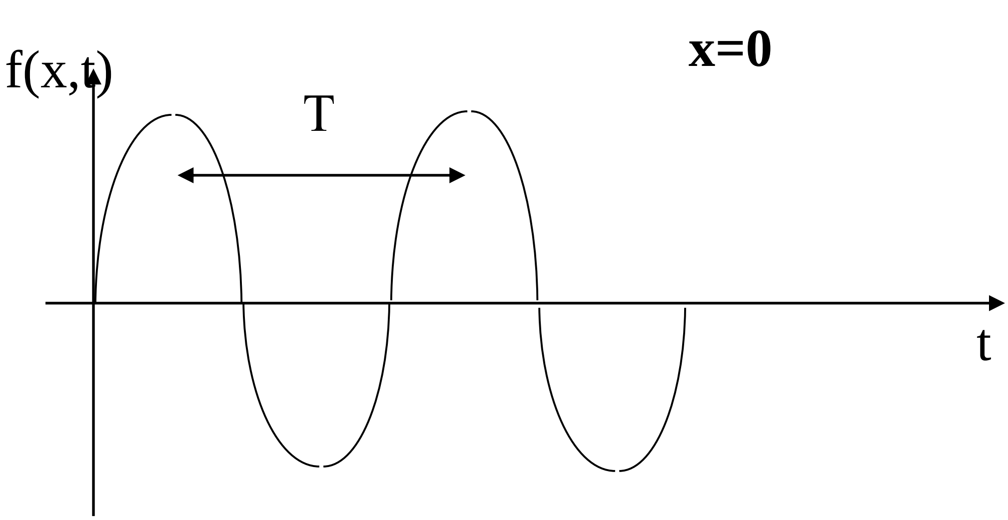
$f(x,t) = A\sin[kx \pm \omega t)]$

$f(x, t + \omega T) = A \sin[kx \pm \omega(t + 2\pi/\omega)]=$

$$A \sin[kx \pm \omega t \pm 2\pi]= A\sin[kx \pm \omega t)]$$

Quindi la quantità $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ detta **periodo d’oscillazione**, caratterizza il ‘periodo temporale’ . La curva si ripete ogni intervallo di tempo T (fissato x).

Si suole definire la frequenza di oscillazione $\nu = 1/T$



Essendo $\omega = v \cdot k$ ed avendo definito

$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ $k = 2\pi/\lambda$ risulta

$2\pi/T = v \cdot 2\pi/\lambda$ ossia $$v = \frac{\lambda}{T}$$

Lunghezza d'onda

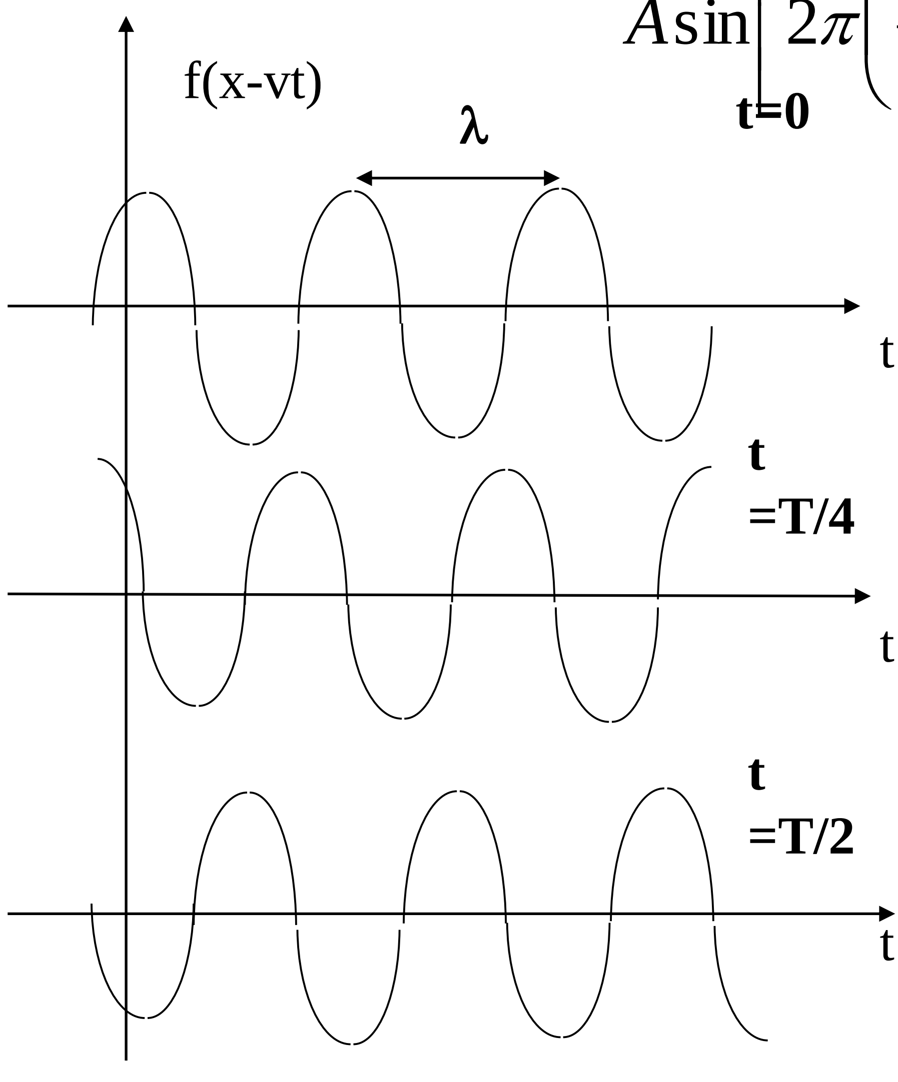
Periodo di oscillazione

Velocità di propagazione dell'onda

Una rappresentazione alternativa delle onde armoniche è

$f(x \pm vt) = A\sin[k(x \pm vt)] = A\sin[kx \pm \omega t] =$

$$A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)\right]$$



QUINDI:

Qualunque funzione del tipo $f(x,t) = f\,(x \pm vt)$ soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

Equazione delle onde

In generale, un moto ondulatorio che si propaga, è una situazione fisica generata in un determinato punto che viene trasmesso in altre regioni. In realtà, **non è la materia che si propaga, ma è lo stato di moto**

In un moto ondulatorio, energia e quantità di moto si propagano nello spazio

Ritornando alle equazioni equivalenti alle equazioni di Maxwell per il campo e.m.

$$\frac{d^2E}{dx^2} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{d^2E}{dt^2} \qquad \frac{d^2B}{dx^2} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{d^2B}{dt^2}$$

Ricordando che la costante che appare nelle equazioni è il quadrato dell'inverso della velocità di propagazione dell'onda

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Otteniamo che la velocità di propagazione delle onde e.m. nel vuoto è una costante che vale:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 m/s$$

Una soluzione valida per i campi ***E*** e ***B*** che si propagano nel vuoto con direzione lungo l'asse **x** diventa:

$$E(x,t) = E(x-ct)$$

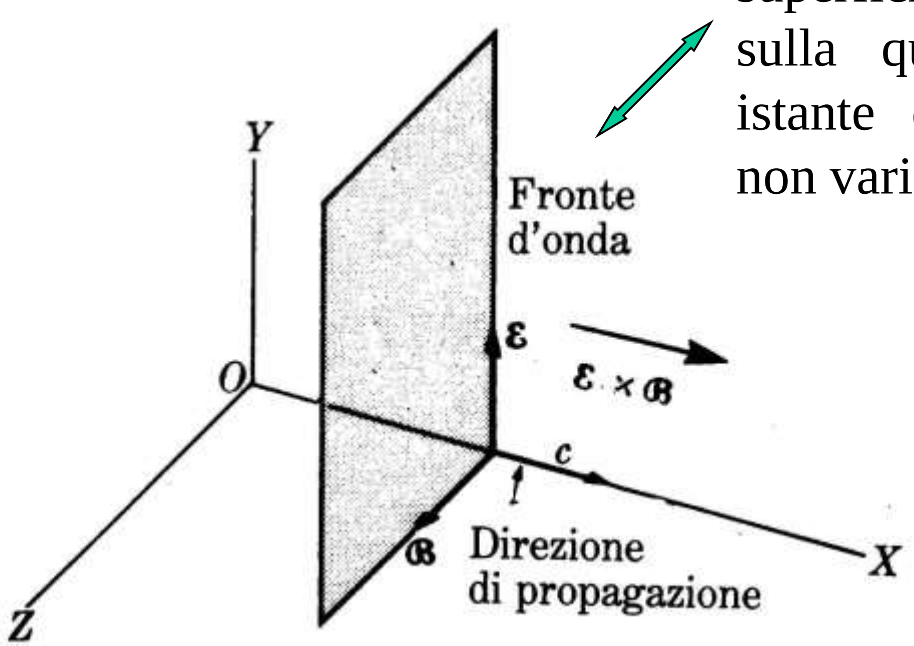
$$B(x,t) = B(x-ct)$$

***<u>In conclusione abbiamo trovato che</u>*:**

• ***il campo elettromagnetico soddisfa all'equazione delle onde;***
• ***il campo E e il campo B sono perpendicolari l'uno all'altro;***
• ***la velocità di propagazione dell'onda e.m. nel vuoto vale*** $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ ***ed è una costante.***

Inoltre, la direzione di propagazione è data dal prodotto vettoriale $\vec{E} \times \vec{B}$

N.B. un fronte d'onda è una superficie a fase costante sulla quale, ad un certo istante di tempo, i campi non variano



Equazioni di Maxwell - Onde Elettromagnetiche

Al termine dello studio su campi elettrici e magnetici in regime stazionario e non stazionario siamo pervenuti alle seguenti equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tali equazioni possono anche essere espresse in forma integrale e avremo:

$$\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_n d\Sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}; \qquad \oint_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_n d\Sigma = 0;$$

$$\int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\oint_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_n d\Sigma\right); \qquad \int_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_n d\Sigma\right)$$

Le equazioni di Maxwell mostrano che la derivata temporale di $\vec{E}$ è sorgente di campo magnetico e viceversa. Questa circostanza suggerisce che sia necessaria una trattazione unificata dei due campi, che nel loro insieme prendono il nome di campo elettromagnetico. Sperimentalmente si osserva che il campo elettromagnetico si propaga sotto forma di *onde* che viaggiano nello spazio senza bisogno di alcun supporto materiale.

In generale si definisce come *onda* una qualsiasi perturbazione impulsiva o periodica che si propaga con una velocità v ben definita. Le onde hanno origine da una sorgente che produce la perturbazione: essa può essere una vibrazione di un corpo materiale che mette in movimento le molecole di un mezzo (onde elastiche) oppure un movimento di cariche elettriche (onde elettromagnetiche). Nel caso delle onde elettromagnetiche, le sorgenti sono cariche in accelerazione che producono un campo elettrico $\vec{E}(x, y, z, t)$ e magnetico $\vec{B}(x, y, z, t)$ correlati tra loro.

Definizioni e nomenclatura relativa alle onde

Una funzione $f(x, t)$ di x e t rappresenta un'onda di ampiezza costante che si propaga lungo l'asse x di un sistema cartesiano se la dipendenza dallo spazio x e dal tempo t è data dalla sola combinazione:

$$\xi = x \pm vt \quad \rightarrow \quad f(\xi) = f(x \pm vt)$$

con v costante positiva. L'onda si dice progressiva o regressiva in funzione che nella espressione di ξ compaia il segno (-) o il segno (+). Il motivo per cui un'onda è rappresentata da una funzione di argomento del tipo di ξ è il seguente.

Il valore f_0 assunto dalla funzione f in ξ_0, $f_0 = f(x_0 - vt_0)$, si ritrova in qualsiasi istante successivo $t > t_0$ nel punto x che soddisfa la condizione:

$$x - vt = x_0 - vt_0 \quad \text{ovvero} \quad x = x_0 + v(t - t_0)$$

relazione che esprime un moto rettilineo lungo x con velocità v. Analogamente $f(x + vt)$ rappresenta una grandezza che si muove lungo l'asse x, nel verso negativo, con velocità v. In entrambi i casi si tratta di una traslazione rigida, in cui la funzione non cambia mai forma.

Nella maggior parte dei fenomeni fisici le onde si propagano in tre dimensioni, si chiama allora fronte d'onda il luogo dei punti in cui, ad un fissato istante, la variabile $(x \pm vt)$ assume lo stesso valore. Un'onda bidimensionale si dice rettilinea o circolare se i suoi fronti d'onda sono rette o circonferenze (pensiamo per esempio all'effetto di un sasso lanciato in uno stagno). Un'onda tridimensionale si dice piana o sferica se i suoi fronti d'onda sono piani o superfici sferiche.

Se la funzione $f(x \pm vt)$ è periodica del suo argomento, l'onda è detta periodica. In particolare sono periodiche le onde sinusoidali (*onde armoniche*, per le quali si ha una espressione di questo tipo:

$$f(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \phi\right) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

tale funzione è periodica sia nella variabile x (fissato t), sia nella variabile t (fissato x). Il periodo temporale T e quello spaziale λ sono legati dalla relazione:

$$\frac{\lambda}{T} = v$$

Per un'onda sinusoidale si definiscono i seguenti parametri:

- A è detta ampiezza dell'onda;
- $\nu = \dfrac{1}{T}$ è detta frequenza e si misura in Hz;
- $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ è detta pulsazione o frequenza angolare e si misura in rad/s;
- $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{v}$ è detto numero d'onda e si misura in m^{-1}

In un'onda armonica, l'argomento del seno o del coseno $(kx - \omega t + \phi)$ viene detto *fase* dell'onda. Per come è stata definita la velocità dell'onda (che è la velocità di un qualunque fronte d'onda), la velocità dell'onda altro non è che la velocità con cui si muove la fase dell'onda. Infatti tale fase $(kx - \omega t + \phi)$ risulta costante se la si osserva muovendosi sull'asse x con una legge oraria del tipo $x = vt + cost$ e $v = \omega/k$. Questa è la ragione per cui la grandezza $v = \omega/k$ prende il nome di *velocità di fase* dell'onda.

Equazione delle Onde Elettromagnetiche

Poniamoci nel vuoto in assenza di sorgenti di campo elettrico e magnetico del tipo correnti e densità di carica. Le equazioni ridiventano:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0;$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tali equazioni costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Proviamo ora a risolvere il sistema. Applichiamo l'operatore $\nabla \times$, per esempio alla equazione sul rotore del campo elettrico:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

ora, l'operazione di:

$$\nabla \times (\nabla \times) = \nabla (\nabla \cdot) - \nabla^2$$

pertanto

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

ma la $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ nel vuoto e dunque:

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$$

da cui, utilizzando l'equazione di Ampere-Maxwell:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Formalmente l'equazione di un onda trasversale che si propaga con velocità v è:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

pertanto le equazioni di Maxwell prevedono come soluzione particolare campi elettrici e magnetici che si propagano nello spazio come un'onda (che chiameremo elettromagnetica) di velocità:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

E' da notare che per il campo magnetico si può risalire ad una equazione analoga utilizzando lo stesso procedimento e si ottiene che:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Onde Elettromagnetiche piane

L'equazione delle onde è una equazione differenziale alle derivate parziali, come tale le soluzioni sono determinate a meno di funzioni arbitrarie, che possono essere determinate solo sulla base delle condizioni iniziali e della condizioni al contorno.

L'espressione più semplice delle condizioni al contorno è una configurazione di onda piana (ad esempio ortogonale ad $\hat{x}$). In questo caso tutte le componenti di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono indipendenti da y e z e ad ogni istante di tempo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ hanno lo stesso valore su tutti i punti di un piano ortogonale a $\hat{x}$. Fisicamente questa condizione non è mai verificata, ma lo è in buona approssimazione tutte le volte che ci si limiti a descrivere una porzione piccola di spazio e molto lontana dalla sorgente (dove un fronte d'onda sferico e ben approssimabile localmente con il piano tangente).

Nel caso di onda piana tutte le derivate rispetto a y e z sono nulle, pertanto l'equazione d'onda viene semplificata:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

La soluzione di questa equazione è un'onda piana sinusoidale (monocromatica in quanto oscilla nel tempo con pulsazione ω) di forma:

$f(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$ oppure, per il campo $\vec{B}$: $f(x,t) = B_0 \sin(kx - \omega t)$

infatti:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -k^2 E_0 \sin(kx - \omega t) + \epsilon_0\mu_0 E_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t)$$

ma ricordando che:

$$k = \frac{\omega}{v} \quad \rightarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

l'onda armonica piana è soluzione dell'equazione delle onde se la velocità di propagazione dell'onda vale

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$$

In un dielettrico generico avremo:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \simeq \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

dove si è considerato che per la stragrande maggioranza dei materiali (in pratica quelli non ferromagnetici) $\mu_r \approx 1$ e dove si è definito $n = \sqrt{\epsilon_r}$ *indice di rifrazione* del materiale. L'indice di rifrazione di un mezzo è dunque il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo:

$$n = \frac{c}{v}$$

Proprietà delle onde elettromagnetiche piane

Ricaviamo ora alcune ulteriori proprietà delle onde elettromagnetiche piane utilizzando le equazioni di Maxwell, che i campi elettrico e magnetico ad associati alle onde devono soddisfare. Ricordiamo che nel caso dell'onda piana che stiamo considerando tutte le componenti dei campi sono indipendenti da y e z e dunque:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Ricordando l'espressione delle componenti del rotore

$$\nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

dalle equazioni di Maxwell possiamo ricavare le seguenti condizioni ulteriori:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad (a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \qquad (b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial B_x}{\partial t} = 0 & (c) \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \dfrac{\partial B_y}{\partial t} & (d) \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} & (e) \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0 & (f) \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon\mu \dfrac{\partial E_y}{\partial t} & (g) \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon\mu \dfrac{\partial E_z}{\partial t} & (h) \end{cases}$$

Dalle relazioni (a), (b), (c) e (f) si deduce che E_x e B_x sono costanti nello spazio e nel tempo, queste due componenti pertanto non contribuiscono alla propagazione dell'onda e si possono considerare nulle. In altri termini le onde elettromagnetiche sono trasversali, cioè la componente dei campi parallela alla direzione di propagazione non dà alcun contributo.

Dalle restanti relazioni (d), (e), (g) e (h) si nota che se l'onda ha una componente E_y deve avere anche una componente B_z e viceversa e se ha una componente E_z, deve avere anche una componente B_y e viceversa. D'altra parte grazie alla linearità delle equazioni di Maxwell, ogni combinazione lineare di soluzioni è soluzione delle equazioni. Non si ha dunque nessuna perdita di generalità se si considera un'onda il cui campo $\vec{E}$ sia orientato nella direzione di un asse, per esempio $\hat{y}$ ($\Rightarrow E_z = 0$). Una tale onda si dice polarizzata linearmente lungo l'asse $\hat{y}$. La più generale delle onde sarà scomponibile nella somma di un'onda polarizzata lungo $\hat{y}$ e una lungo $\hat{z}$ (polarizzazione ellittica o circolare in funzione che le ampiezze lungo le due direzioni siano differenti o uguali rispettivamente).

Se l'onda è polarizzata linearmente, per esempio lungo $\hat{y}$, allora avremo che $E_z = 0$, perciò:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

da cui si ricava che la componente lungo $\hat{y}$ del campo magnetico è uniforme nello spazio e costante nel tempo e dunque non contribuisce anch'essa alla propagazione dell'onda. Questo significa che l'unica componente che rimane per il campo magnetico sarà in questo caso B_z e cioè in un'onda elettromagnetica, il campo elettrico e magnetico sono tra essi perpendicolari.

Dentro alle equazioni (e) e (g) è nascosta un'altra informazione rilevante che riguarda le ampiezze relative dei campi elettrico e magnetico. Supponiamo infatti di applicare la (e) per esempio all'onda piana monocromatica sinusoidale:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E_y \sin(kx - \omega t)\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(B_z \sin(kx - \omega t)\right)$$

svolgendo i conti:

$$kE_y \cos(kx - \omega t) = \omega B_z \cos(kx - \omega t) \quad \rightarrow \quad \frac{E_y}{B_z} = \frac{\omega}{k} = v$$

cioè il rapporto tra le ampiezze dei due campi è pari alla velocità di propagazione dell'onda (c se ci si trova nel vuoto, c/n in un dielettrico di indice di rifrazione pari a n). Tenendo conto delle direzioni relative dei vettori $\vec{E}$, $\vec{B}$ e della velocità di propagazione $\vec{v}$, paralleli rispettivamente a $\hat{y}$, $\hat{z}$ e $\hat{x}$, potremo scrivere che:

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$$

Sia campo magnetico che campo elettrico soddisfano all'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 y$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} \qquad \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

Ricordando che la costante che appare nelle equazioni è il quadrato dell'inverso della velocità di propagazione dell'onda

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Otteniamo che la velocità di propagazione delle onde e.m. nel vuoto è una costante che vale:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 m/s$$

Una soluzione valida per i campi ***E*** e ***B*** che si propagano nel vuoto con direzione lungo l'asse **x** diventa:

$$E(x,t) = E(x-ct)$$

$$B(x,t) = B(x-ct)$$

Onde elettromagnetiche piane

Un caso particolare per la soluzione ***E*** e **B** per l'equazione delle onde e.m. è dato dalle funzioni armoniche. Prendiamo come al solito la direzione di propagazione parallela all'asse **X**, il campo ***E*** parallelo a **Y**, quello ***B*** parallelo a **Z**.
Tale situazione è ovviamente generale!

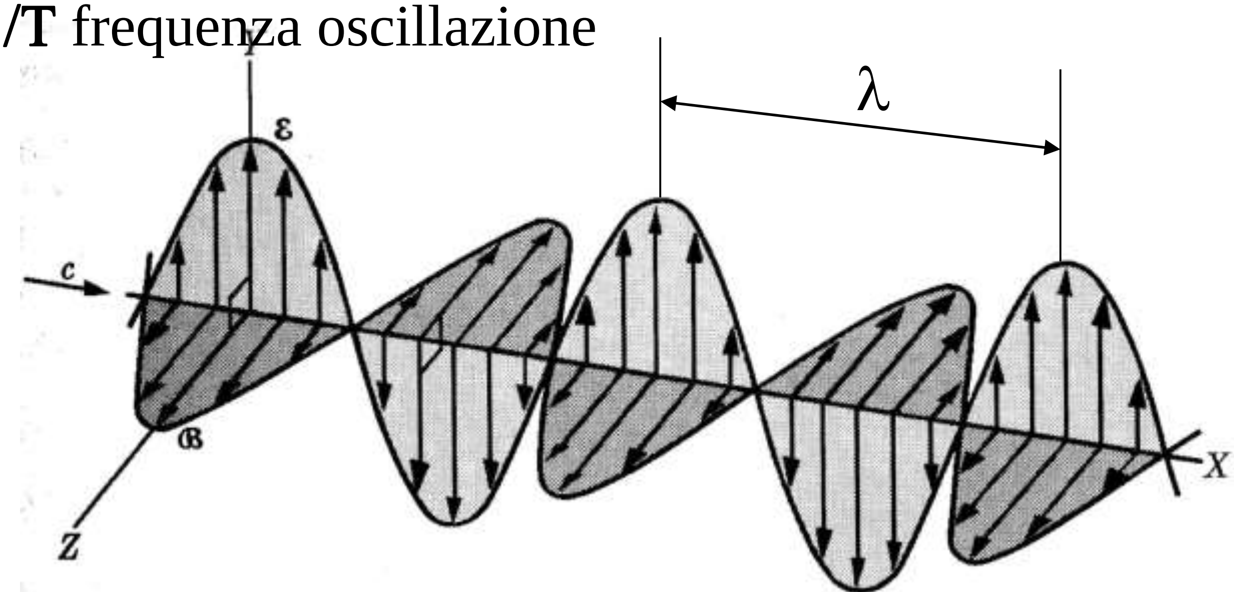
$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x-ct) = \vec{E}_0 sin\left[k\left(x-ct\right)\right]$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}(x-ct) = \vec{B}_0 sin\left[k\left(x-ct\right)\right]$$

Dove: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; $kc = \omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}}$$

λ lunghezza d'onda (parametro di periodicità spaziale)
K=2π/λ vettore d'onda
T periodo di oscillazione (par. di periodicità temporale)
ν=1/T frequenza oscillazione



Onde elettromagnetiche piane in notazione complessa

Come detto un caso particolare per la soluzione ***E*** e **B** per l'equazione delle onde e.m. è dato dalle funzioni armoniche.

Prendiamo come al solito la direzione di propagazione parallela all'asse **X**, il campo ***E*** parallelo a **Y**, quello ***B*** parallelo a **Z**.

Ricordando le proprietà dei numeri complessi:

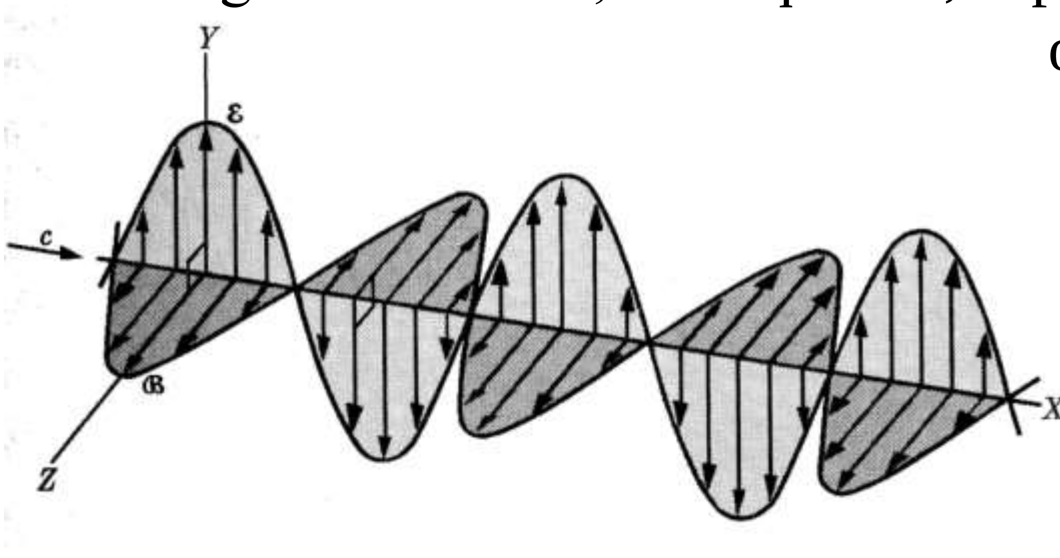
$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x-ct) = \mathrm{Im}\left\{\vec{E}_0 e^{i[k(x-ct)]}\right\}$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}(x-ct) = \mathrm{Im}\left\{\vec{B}_0 e^{i[k(x-ct)]}\right\}$$

Dove: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; $kc = \omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$

k è detto numero d'onda,

λ lunghezza d'onda; ν frequenza; ***T*** periodo di oscillazione



Inserendo le soluzioni ammesse per i campi ***E*** e ***B*** nelle equazioni ottenute dalle leggi di ***Faraday-Henry*** e ***Ampere-Maxwell***:

$$E(x,t) = E(x-ct)$$
$$B(x,t) = B(x-ct)$$

$$-\frac{dB}{dt} = \frac{dE}{dx}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = -\frac{dB}{dx}$$

Rappresentando E e B come funzioni armoniche

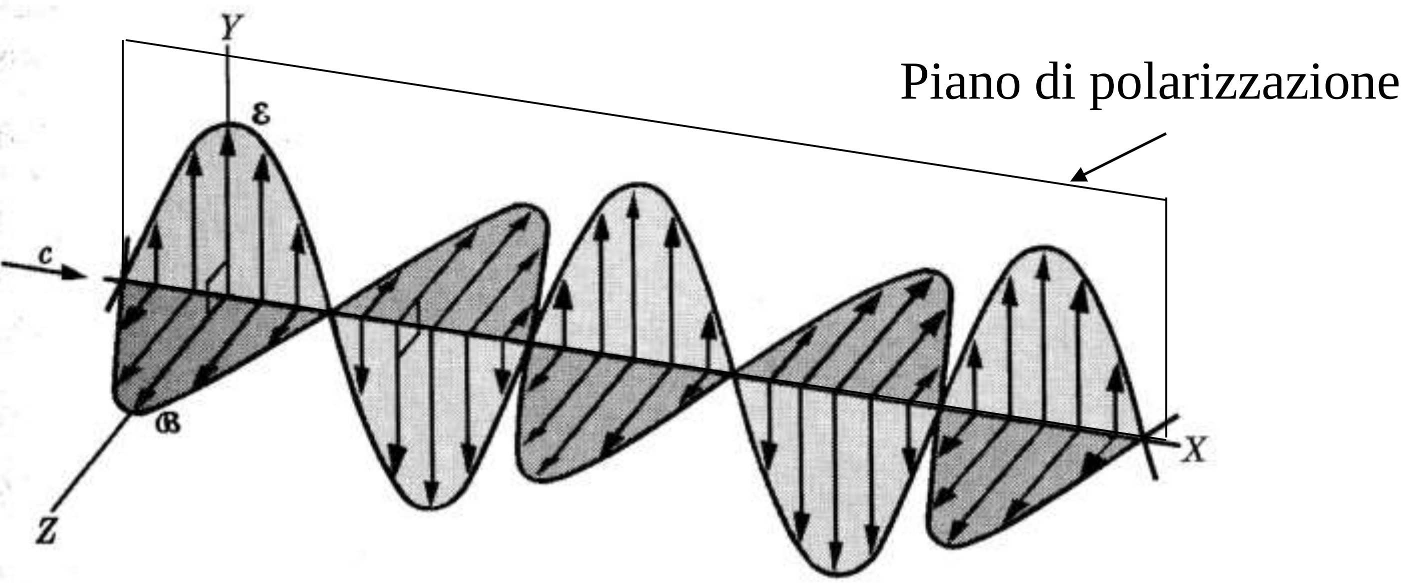
$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x-ct) = \vec{E}_0 sin\left[k\left(x-ct\right)\right]$$
$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}(x-ct) = \vec{B}_0 sin\left[k\left(x-ct\right)\right]$$

Si ottiene una relazione generale tra i moduli dei campi:

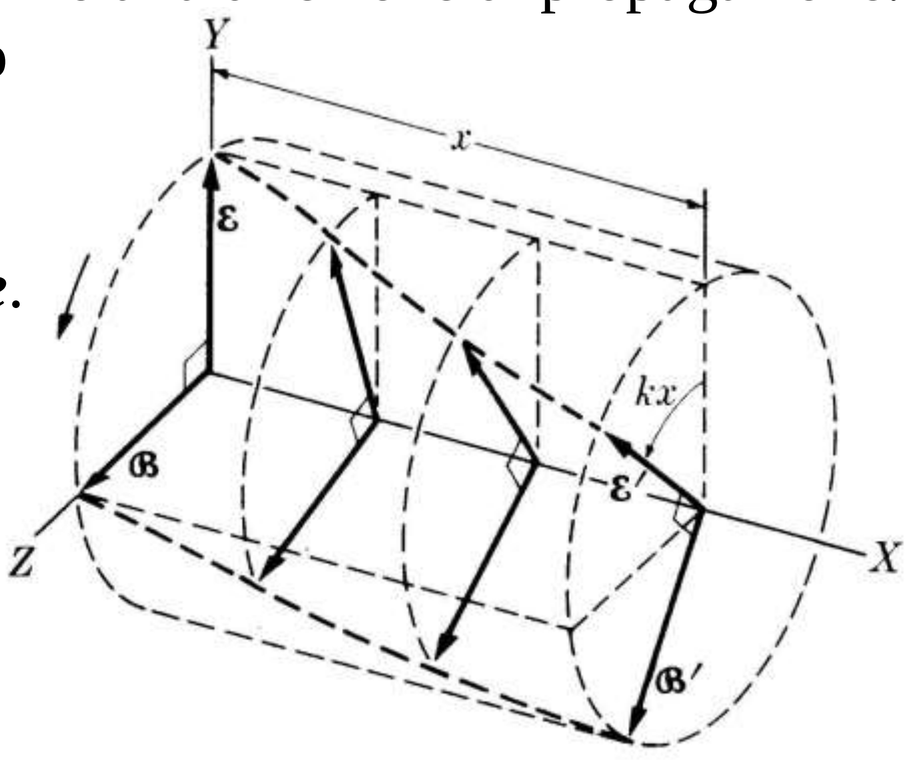
$$E(P,t) = cB(P,t)$$

Da questa relazione vediamo che i campi ***E*** e ***B*** sono in fase, cioè raggiungono gli zeri e i valori massimi allo stesso istante.

Il caso appena riportato corrisponde ad una ***onda elettromagnetica piana detta polarizzata linearmente***. Polarizzazione lineare di un onda e.m. vuol dire che i vettori campo E e B vibrano sempre sullo stesso piano.



Possiamo immaginarci il caso in cui i vettori ***E*** e ***B*** ruotano intorno alla direzione di propagazione. In questo caso l'onda si dice ***polarizzata circolarmente***.



In conclusione:

•***Le soluzioni delle equazioni di Maxwell del tipo onde piane armoniche sono completamente generali. Questo è una conseguenza della serie o dell'integrale di Fourier (qualsiasi altra soluzione la posso sviluppare in serie).***

•***I vettori campo E e B in genere possono variare la loro orientazione, fermo restando che fissata la direzione di uno dei vettori resta fissata quella dell'altro e la direzione di propagazione (onde trasversali con E e B ortogonali).***

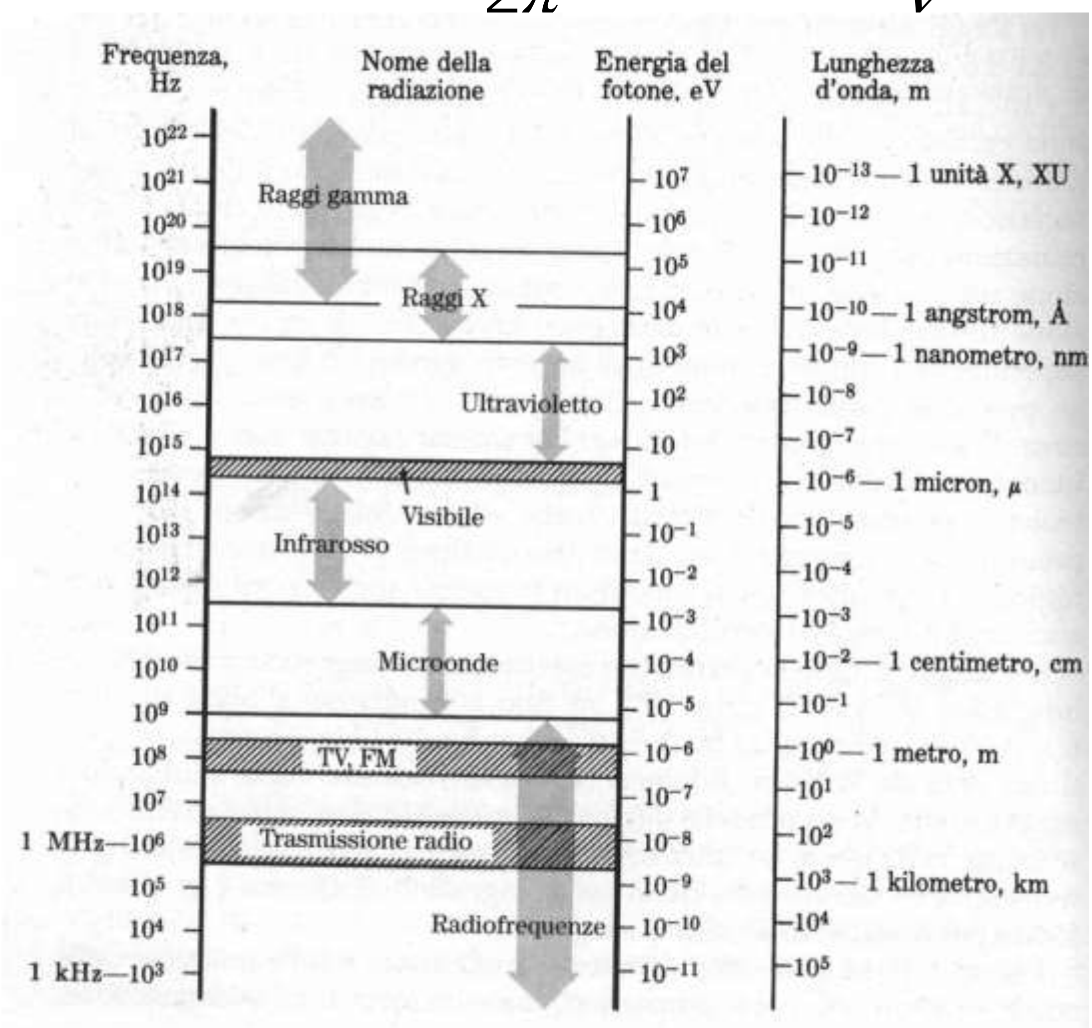
•***Componendo vettori E e B in casi particolari o per particolari tipi di propagazioni nascono le onde e.m. polarizzate.***

Spettro delle onde elettromagnetiche

Se consideriamo le onde e.m. sinusoidale piane di forma $\vec{A} = \vec{A}_0 sin(kx - \omega t)$

abbiamo un'onda monocromatica con ***A***=***E*** o ***B*** e ***x*** la direzione di propagazione.

Tali tipi di onde possono coprire un grande campo di frequenze $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{c}{\nu}$



Sorgenti del campo elettromagnetico

LE EQUAZIONI DI MAXWELL CI PERMETTONO DI CONCLUDERE CHE

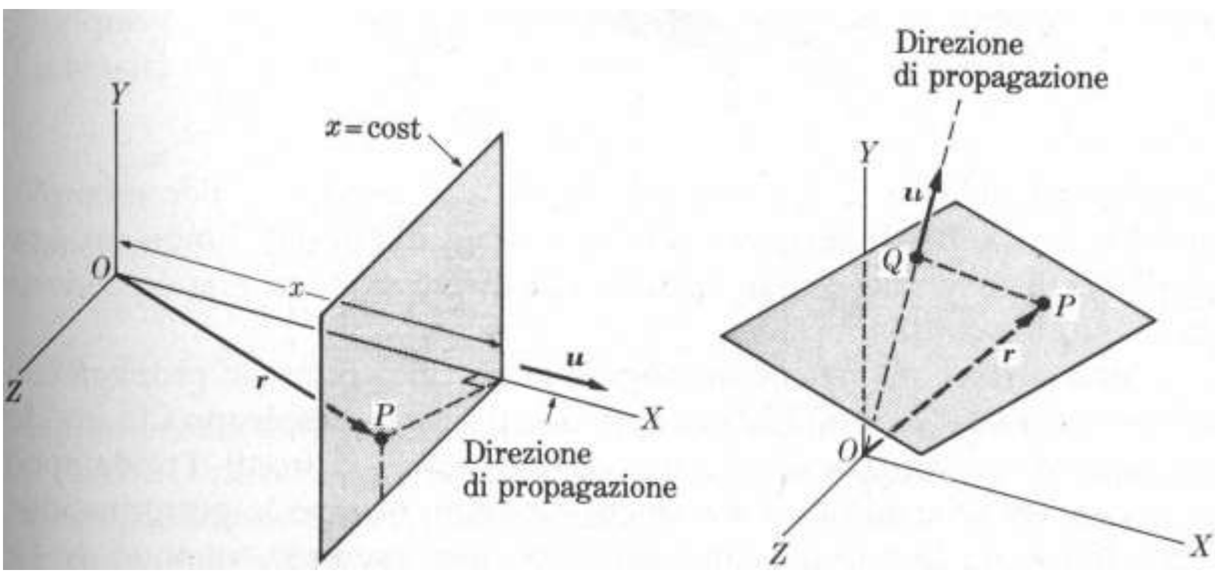
↓

CAMPO		**SORGENTE**
ELETTRICO STATICO	→	CARICHE FISSE
MAGNETICO STATICO	→	CARICHE IN MOTO UNIFORME
ELETTROMAGNETICO	→	CARICHE ACCELERATE

Definizione di raggi e fronti d'onda

Una onda che si sta propagando nella direzione **x** che scriviamo come $\xi = f(x - \mathrm{v}t)$

Non è concentrata sull'asse **x**
ma si propaga in uno spazio tridimensionale con caratteristiche della perturbazione ξ identiche su piani perpendicolari all'asse **x**.



Possiamo cioè riscrivere l'equazione dell'onda come

$$\xi = f(\vec{r} \cdot \vec{u} - \mathrm{v}t)$$

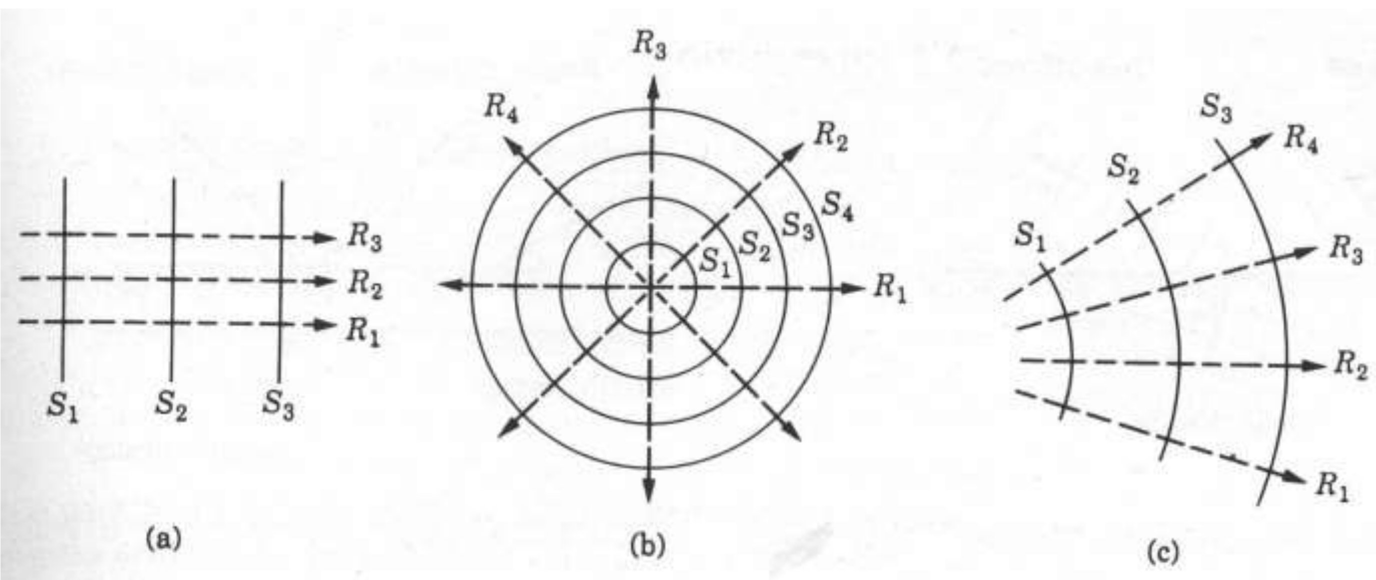
dove **r** è il generico punto del piano che ha le stesse caratteristiche ξ nella perturbazione;
u è la direzione in cui l'onda si muove con velocità **v**.

Dove $(\vec{r} \cdot \vec{u} - \mathrm{v}t) = \Phi$ è la fase dell'onda

Ma l'equazione $f(\Phi)$

Finisce col definire la più generica onda che si propaga in direzione $\vec{\mathbf{u}}$ con velocità **v**.

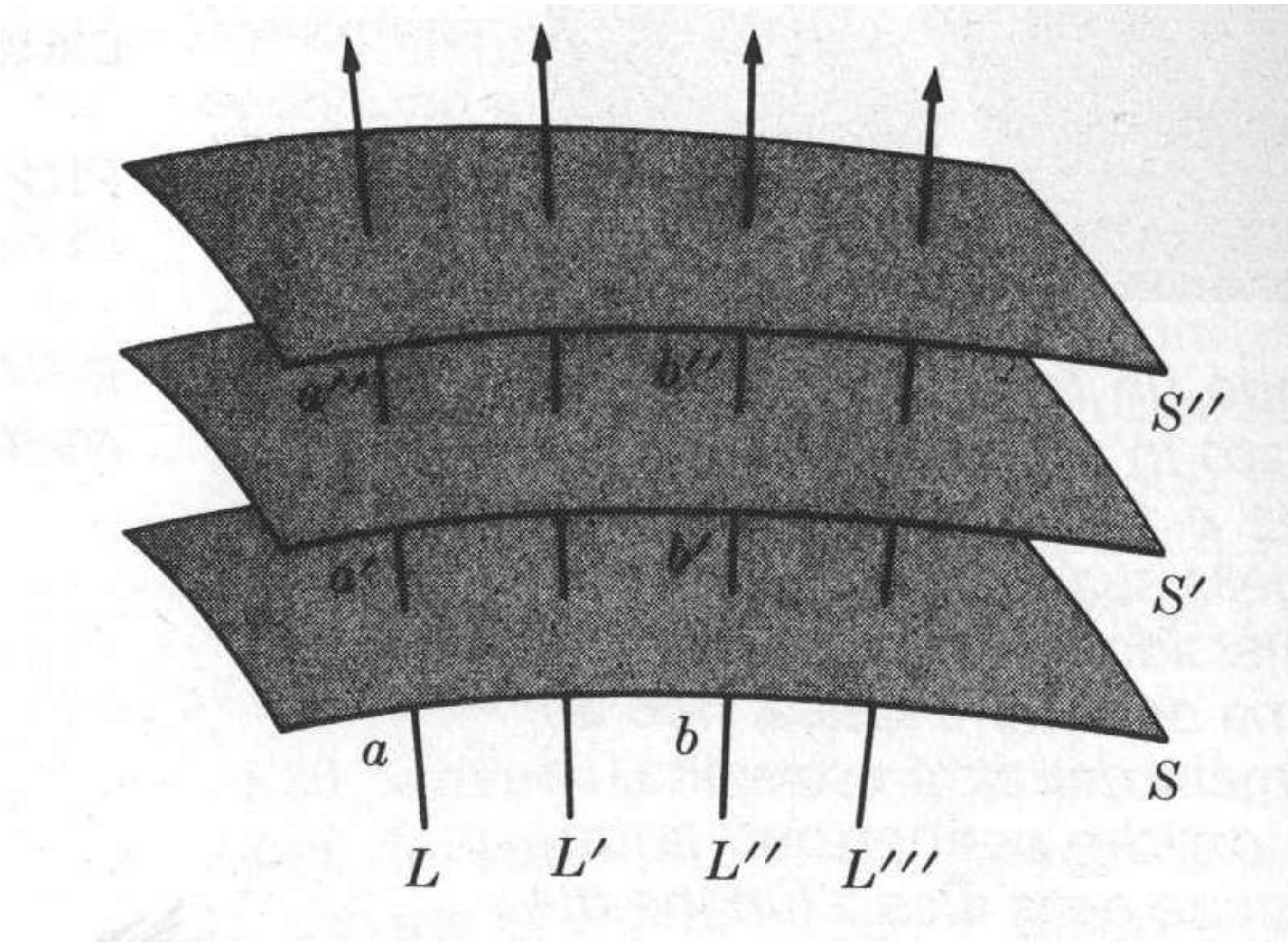
Essa non è necessariamente un'onda piana. Dipende da come nasce la perturbazione della sorgente.



•Le superfici che presentano all'istante ***t*** lo stesso valore di Φ

sono detti ***<u>fronti d'onda</u>***

• $\vec{u}$ è perpendicolare ai fronti d'onda.
Le curve tangenti a $\vec{u}$ sono dette ***raggi***.



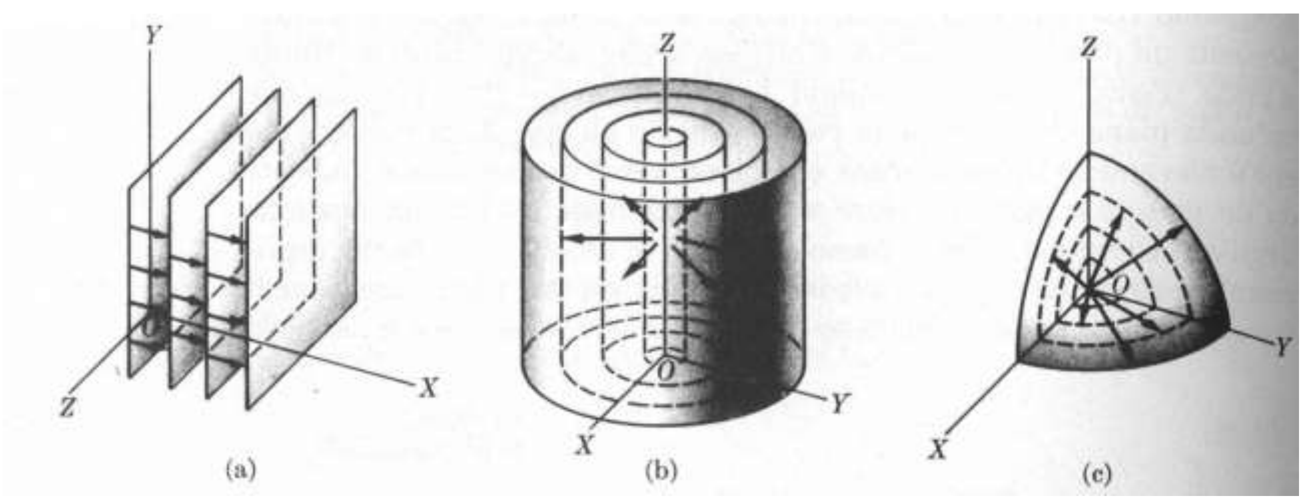
•Possiamo intuitivamente affermare (verrà confermato tra breve) che se le proprietà del mezzo sono omogenee i raggi sono rette;

•se le proprietà del mezzo non sono omogenee (cioè variano da punto a punto) i raggi non sono più rette;

•se le proprietà del mezzo sono isotrope (cioè non dipendono dalla direzione) i fronti d'onda si ripetono identici e paralleli:

piani ---> piani cilindri ---> cilindri

sfere ---> sfere



•Se le proprietà del mezzo sono anisotrope i fronti d'onda si deformano in modo anche complicato.