Analisi Funzionale

Operatori lineari limitati fra spazi normati

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino

a.a. 2023/2024

Operatori lineari limitati

Def. Siano X e Y spazi vettoriali su $\mathbb{F}$. Diciamo *operatore lineare* da X a Y ogni applicazione lineare $T : X \to Y$.
Se $X = Y$, chiamiamo T un operatore lineare *su* X.

Oss. L'insieme $\mathcal{L}(X, Y)$ degli operatori lineari da X a Y è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(X, Y)$. Scriviamo $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Def. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati su $\mathbb{F}$.

(a) Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, la *norma operatoriale* di T è definita da
$\|T\|_{\mathrm{op}} = \|T\|_{X \to Y} = \inf\{C \in [0, \infty) : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \ \forall x \in X\}$.

(b) Un operatore $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ si dice *limitato* se $\|T\|_{\mathrm{op}} < \infty$, cioè se esiste $C \in [0, \infty)$ tale che
$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$
Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ non è limitato, si dice *illimitato*.

(c) L'insieme degli operatori lineari limitati da X a Y si denota con $\mathcal{B}(X, Y)$. Scriviamo anche $\mathcal{B}(X)$ al posto di $\mathcal{B}(X, X)$.

Caratterizzazioni degli operatori lineari

Se X e Y sono spazi normati, per ogni $T \in \mathcal{L}(X,Y)$,

$$\|T\|_{\mathrm{op}} = \inf\{C \in [0,\infty) : \|Tx\|_Y \le C\|x\|_X \ \forall x \in X\}.$$

Lemma Siano X e Y spazi normati e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Allora

$$\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \le 1\}.$$

Se poi $X \neq \{0\}$, si ha anche

$$\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \setminus \{0\}\right\}.$$

Prop. Siano X, Y spazi normati e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Sono fatti equivalenti:

(i) T è un operatore limitato;

(ii) T è lipschitziano;

(iii) T è uniformemente continuo;

(iv) T è continuo;

(v) T è continuo in 0.

Inoltre, se T è limitato, allora T è $\|T\|_{\mathrm{op}}$-lipschitziano e

$$\|Tx\|_Y \le \|T\|_{\mathrm{op}}\|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Esempi e non-esempi di operatori limitati

1. Se X è uno spazio normato, allora l'*operatore identità* $\mathrm{id}_X : X \to X$, definito da $\mathrm{id}_X x = x$ per ogni $x \in X$, soddisfa $\mathrm{id}_X \in \mathcal{B}(X)$ e
$$\|\mathrm{id}_X\|_{\mathrm{op}} = \begin{cases} 1 & \text{se } X \neq \{0\}, \\ 0 & \text{se } X = \{0\}. \end{cases}$$
2. Sia M uno spazio metrico compatto e $C(M)$ dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$. Per ogni $p \in M$, l'*operatore di valutazione* $V_p : C(M) \to \mathbb{F}$ dato da
$$V_p f = f(p) \qquad \forall f \in C(M)$$
soddisfa $V_p \in \mathcal{B}(C(M), \mathbb{F})$ e $\|V_p\|_{\mathrm{op}} = 1$.
3. Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Dotiamo $C^1[a, b]$ della norma indotta da $C[a, b]$. Per $p \in [a, b]$, se $S_p : C^1[a, b] \to \mathbb{F}$ è definito da
$$S_p f = V_p(f') = f'(p) \qquad \forall f \in C^1[a, b],$$
allora $S_p \in \mathcal{L}(C^1[a, b], \mathbb{F})$, ma $\|S_p\|_{\mathrm{op}} = \infty$, quindi S_p è illimitato.
4. Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio pre-hilbertiano. Per ogni $y \in H$, la mappa $\langle\cdot, y\rangle : x \mapsto \langle x, y\rangle$ soddisfa $\langle\cdot, y\rangle \in \mathcal{B}(H, \mathbb{F})$ e $\|\langle\cdot, y\rangle\|_{\mathrm{op}} = \|y\|$.

Esempi e non-esempi di operatori limitati - 2

5. Siano $[a, b], [c, d] \subseteq \mathbb{R}$. Sia $K \in C([a, b] \times [c, d])$. L'*operatore integrale* $T_K : C[c, d] \to C[a, b]$ con *nucleo integrale* K è dato da
$$T_K f(x) = \int_c^d K(x, y) f(y)\, dy \tag{$\dagger$}$$
per ogni $f \in C[c, d]$ e $x \in [a, b]$. Allora $T_K \in \mathcal{B}(C[c, d], C[a, b])$ e
$$\|T_K\|_{\mathrm{op}} \leq \sup_{x\in[a,b]} \int_c^d |K(x, y)|\, dy \leq (d - c)\|K\|_\infty.$$

6. Con la notazione dell'esempio precedente, se $K \in L^2((a, b) \times (c, d))$, allora ($\dagger$) definisce un operatore integrale $T_K \in \mathcal{B}(L^2(c, d), L^2(a, b))$ e
$$\|T_K\|_{\mathrm{op}} \leq \|K\|_{L^2((a,b)\times(c,d))}.$$

7. Più in generale, se $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ sono spazi di misura σ-finiti e $(M, \mathcal{M}, \mu)$ è lo spazio di misura prodotto, allora, per ogni $K \in L^2(M, \mu)$, l'operatore integrale T_K dato da
$$T_K f(x) = \int_{M_2} K(x, y) f(y)\, d\mu_2(y)$$
soddisfa $T_K \in \mathcal{B}(L^2(M_2, \mu_2), L^2(M_1, \mu_1))$ e $\|T_K\|_{\mathrm{op}} \leq \|K\|_{L^2(M,\mu)}$.

Esempi e non-esempi di operatori limitati - 3

8. Sia $\underline{w} \in \ell^\infty$. Allora l'*operatore* $D_{\underline{w}}$ *di moltiplicazione per* $\underline{w}$ dato da
$$D_{\underline{w}}\underline{x} = \underline{w} \cdot \underline{x} := (w_k x_k)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \forall \underline{x} \in \ell^2$$
(qui $\underline{w} \cdot \underline{x}$ denota il *prodotto componente per componente*)
soddisfa $D_{\underline{w}} \in \mathcal{B}(\ell^2)$ e $\|D_{\underline{w}}\|_{\mathrm{op}} = \|\underline{w}\|_\infty$.

9. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati, e sia $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ il loro prodotto.
Allora le *proiezioni* $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ sui due fattori, definite da
$$\pi_X(x, y) = x, \qquad \pi_Y(x, y) = y \qquad \forall (x, y) \in X \times Y,$$
soddisfano $\pi_X \in \mathcal{B}(X \times Y, X)$, $\pi_Y \in \mathcal{B}(X \times Y, Y)$ e
$$\|\pi_X\|_{\mathrm{op}} = \begin{cases} 1 & \text{se } X \neq \{0\}, \\ 0 & \text{se } X = \{0\}, \end{cases} \qquad \|\pi_Y\|_{\mathrm{op}} = \begin{cases} 1 & \text{se } Y \neq \{0\}, \\ 0 & \text{se } Y = \{0\}. \end{cases}$$

Proprietà degli operatori limitati

Prop. Siano X e Y spazi normati.
Se $\dim X < \infty$, allora $\mathcal{B}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$,
cioè tutti gli operatori lineari da X a Y sono limitati.

Prop. Siano X, Y, Z spazi normati.

(i) $\mathcal{B}(X, Y)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(X, Y)$ e $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ è una norma su $\mathcal{B}(X, Y)$.

(ii) Se $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$, allora $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ e
$$\|ST\|_{\mathrm{op}} \leq \|S\|_{\mathrm{op}} \|T\|_{\mathrm{op}}$$
(submoltiplicatività della norma operatoriale). Inoltre la mappa
$$\mathcal{B}(Y, Z) \times \mathcal{B}(X, Y) \ni (S, T) \mapsto ST \in \mathcal{B}(X, Z)$$
è continua.

Prop. Siano X e Y spazi normati. Sia $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

(i) Il nucleo $\operatorname{Ker} T$ di T è un sottospazio vettoriale chiuso di X.

(ii) Il *grafico* $\Gamma(T) := \{(x, Tx) : x \in X\}$ di T è un sottospazio vettoriale chiuso dello spazio prodotto $X \times Y$.

Teor. Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach.
Allora $\mathcal{B}(X, Y)$ con la norma operatoriale è uno spazio di Banach.

Isometrie lineari

Def. Siano X e Y spazi normati. Una *isometria lineare* da X a Y è un operatore $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ che *preserva la norma*, cioè

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Prop. Siano X e Y spazi normati e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Sono equivalenti:

(i) $T : X \to Y$ è un'isometria lineare;

(ii) T *preserva la distanza*, cioè

$$\|Tx - Tx'\|_Y = \|x - x'\|_X \qquad \forall x, x' \in X.$$

Inoltre, se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ è un'isometria lineare, allora:

(a) T è un operatore limitato, con $\|T\|_{\mathrm{op}} = \begin{cases} 1 & \text{se } X \neq \{0\}, \\ 0 & \text{se } X = \{0\} \end{cases}$;

(b) T è iniettivo;

(c) se T è suriettivo, allora $T^{-1} : Y \to X$ è un'isometria lineare;

(d) se Z è uno spazio normato e $S : Y \to Z$ è un'isometria lineare, allora $ST : X \to Z$ è un'isometria lineare.

Isometrie lineari e isomorfismi isometrici

Def. Siano X e Y spazi normati.

(a) Un *isomorfismo isometrico* da X a Y è un'isometria lineare biiettiva.

(b) Gli spazi X e Y si dicono *isometricamente isomorfi* se esiste un isomorfismo isometrico da X a Y. In tal caso, scriviamo $X \underset{\text{isom.}}{\cong} Y$.

Oss. Siano X, Y, Z spazi normati. Allora:

- $\mathrm{id}_X : X \to X$ è un isomorfismo isometrico;
- se $T : X \to Y$ è un isomorfismo isometrico, anche $T^{-1} : Y \to X$ lo è;
- se $T : X \to Y$ e $S : Y \to Z$ sono isomorfismi isometrici, anche $ST : X \to Z$ lo è.

Dunque la relazione $\underset{\text{isom.}}{\cong}$ tra spazi normati è una relazione di equivalenza.

Oss. Se $X \underset{\text{isom.}}{\cong} Y$ e X è completo, anche Y è completo.

Prop. Siano $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ spazi pre-hilbertiani e $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Sono equivalenti:

(i) $T : H_1 \to H_2$ è un'isometria lineare;

(ii) T *preserva il prodotto scalare*, cioè

$$\langle Tx, Tx' \rangle_2 = \langle x, x' \rangle_1 \qquad \forall x, x' \in X.$$

Estensione di operatori lineari

Teor. (di estensione) Siano X spazio normato e Y spazio di Banach.
Sia D un sottospazio vettoriale denso di X; dotiamo D della norma indotta.
Per ogni $T \in \mathcal{B}(D, Y)$, esiste un unico $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$ tale che $\widetilde{T}|_D = T$,
e si ha $\|\widetilde{T}\|_{\mathrm{op}} = \|T\|_{\mathrm{op}}$;
tale operatore $\widetilde{T}$ è detto *estensione per continuità* di T a X.

Oss. Per dimostrare l'unicità dell'estensione la completezza di Y non serve (bastano la densità di D in X e la continuità dell'estensione).
La completezza di Y è invece essenziale per garantire l'esistenza.

Coroll. Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach. Siano D ed E sottospazi vettoriali di X ed Y rispettivamente; dotiamo D ed E delle norme indotte. Supponiamo D denso in X. Per ogni $T \in \mathcal{B}(D, E)$, esiste un unico $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$ tale che $\widetilde{T}|_D = T$, e si ha $\|\widetilde{T}\|_{\mathrm{op}} = \|T\|_{\mathrm{op}}$.

Oss. Vedremo in seguito (teorema di Hahn–Banach) che nel caso $Y = \mathbb{F}$ per l'esistenza di un'estensione non serve che D sia denso in X (ma l'estensione non è necessariamente unica in tal caso).

Il principio di uniforme limitatezza

Teor. (Banach–Steinhaus) Siano X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato. Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ tale che

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\|_Y < \infty \qquad \forall x \in X. \tag{†}$$

Allora

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\|_{\mathrm{op}} < \infty. \tag{‡}$$

Teor. (lemma di Baire) Sia (M, d) uno spazio metrico completo.

(i) Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi aperti densi di M. Allora $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = M$, cioè anche la loro intersezione è densa.

(ii) Supponiamo che $M \neq \emptyset$. Sia $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di sottoinsiemi chiusi di M tali che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = M$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathring{C}_n \neq \emptyset$.

Coroll. Siano X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato. Sia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $\mathcal{B}(X, Y)$ tale che, per ogni $x \in X$, esiste il limite $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ in Y. Allora $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathrm{op}} < \infty$.
Inoltre, se definiamo $T : X \to Y$ ponendo $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x \qquad \forall x \in X$, allora $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $\|T\|_{\mathrm{op}} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathrm{op}} \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathrm{op}}$.

Operatori limitati invertibili

Def. Siano X, Y spazi normati. Un operatore $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ si dice *invertibile con inverso limitato*, oppure un *isomorfismo*, se $T : X \to Y$ è biiettivo e $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$.

Oss. Siano X, Y, Z spazi normati.

1. $\mathrm{id}_X \in \mathcal{B}(X)$ è un isomorfismo, con $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$.
2. Se $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ è un isomorfismo, allora anche $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ lo è, e $(T^{-1})^{-1} = T$.
3. Se $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ sono isomorfismi, allora anche $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ è un isomorfismo e $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.
4. Se $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ è un isomorfismo e $X \neq \{0\}$, allora
$$\|T^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|T\|_{\mathrm{op}} \geq 1.$$

Teor. (dell'isomorfismo di Banach) Siano X e Y spazi di Banach e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Se $T : X \to Y$ è biiettivo, allora $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$, cioè T è un isomorfismo.

Teor. (del grafico chiuso) Siano X e Y spazi di Banach, e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Allora $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ se e solo se il grafico $\Gamma(T) := \{(x, Tx) : x \in X\}$ di T è un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$.

Coercività in norma e invertibilità

Teor. Siano X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato. Sia $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Allora T è un isomorfismo se e solo se valgono <u>entrambe</u> le seguenti proprietà:

(a) $\overline{\mathrm{Im}\, T} = Y$
(T ha immagine densa);

(b) esiste $C \in (0, \infty)$ tale che $\|x\|_X \leq C\|Tx\|_Y$ per ogni $x \in X$
(T è *coercivo in norma*).

Lemma Siano X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato. Sia $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Se T è *coercivo in norma*, cioè esiste $C \in (0, \infty)$ tale che

$$\|x\|_X \leq C\|Tx\|_Y \qquad \forall x \in X,$$

allora $\mathrm{Im}\, T$ è chiusa in Y.

Criterio di invertibilità di Neumann

Teor. (criterio di Neumann) Sia X uno spazio di Banach. Sia $T \in \mathcal{B}(X)$ tale che $\|T\|_{\mathrm{op}} < 1$. Allora $\mathrm{id}_X - T$ è un isomorfismo e

$$(\mathrm{id}_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

dove la serie converge in $\mathcal{B}(X)$. Inoltre

$$\|(\mathrm{id}_X - T)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{1 - \|T\|_{\mathrm{op}}}.$$

Coroll. Sia X uno spazio di Banach.

(i) Se $R \in \mathcal{B}(X)$ è un isomorfismo, $T \in \mathcal{B}(X)$ e

$$\|R - T\|_{\mathrm{op}} < 1/\|R^{-1}\|_{\mathrm{op}},$$

allora T è un isomorfismo.

(ii) L'insieme

$$\mathcal{I}(X) := \{T \in \mathcal{B}(X) : T \text{ è un isomorfismo}\}$$

è un sottoinsieme aperto di $\mathcal{B}(X)$.

Oss. Nel caso $\dim X < \infty$, si ha

$$\mathcal{I}(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : \det T \neq 0\}.$$