FORMULE DI FRENET

(Rispetto alla parametrizzazione dell'ascissa curvilinea)

Ricordiamo che l'ascissa curvilinea è definita come segue:

$$s : t \in I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow s(t) = \int_{t_0}^{t} \|P'(t)\| \, dt$$

Possiamo considerare di riparametrizzare una curva $P(t)$ tramite l'ascissa curvilinea, cioè posso considerare la curva

$$Q(s) = P(t(s)) = P(t).$$

In altre parole, considero la curva $P(t)$,
gli cambio parametro $t \to t(s)$, $P(t) = P(t(s))$
e chiamo questa nuova curva $\underline{Q(s) := P(t(s))}$.

<u>PROP</u>: $\left\| \dfrac{dQ}{ds} \right\| = 1$ se s è l'ascissa curvilinea della curva $P(t)$

<u>DIM</u>

Ho che
$$\frac{dQ}{ds} = \frac{d}{ds} P(t(s)) = \frac{dP}{dt} \frac{dt}{ds} \qquad (\star)$$

Ricordando che, per come è definita l'ascissa curvilinea,
$\dfrac{ds}{dt} = \| P'(t) \|$, abbiamo che $\dfrac{dt}{ds} = 1 / \| P'(t) \|$,

che sostituendo in $(\star)$ ci dà
$$\frac{dQ}{ds} = \frac{dP}{dt} / \| P'(t) \| \quad \text{che è di modulo} = 1$$

Oss: Poiché $\|P'\|$ è il modulo della velocità, parametrizzare una curva tramite l'ascissa curvilinea significa che il punto $P = P(s)$ percorre la curva a velocità unitaria.

Per esempio abbiamo visto che il punto $P(s) = \big(\cos(s),\ \mathrm{sen}(s)\big)$ percorre la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $= 1$ con velocità unitaria (infatti in questo caso s è l'ascissa curvilinea)

Infatti $\|P'(s)\| = \|(-\mathrm{sen}(s), \cos(s)\| = 1$

PRIMA FORMULA DI FRENET e CURVATURA

Ricordiamo che $N(t) = T'(t) / \|T'(t)\|$ (★)

dove t è una parametrizzazione arbitraria della curva in esame.

Se scegliamo come parametrizzazione quella dell' ascissa curvilinea $t = s$, la (★) la riscrivo come segue

$$\frac{dT(s)}{ds} = \left\| \frac{dT(s)}{ds} \right\| N(s) = K(s) \cdot N(s)$$

dove $K(s) := \left\| \frac{dT(s)}{ds} \right\|$ è detta curvatura

Definiamo il raggio di curvatura $\rho(s) = \frac{1}{K(s)}$ come l'inverso della curvatura

L' equazione

$$\boxed{\frac{d\,T(s)}{ds} = K(s) \cdot N(s)}$$

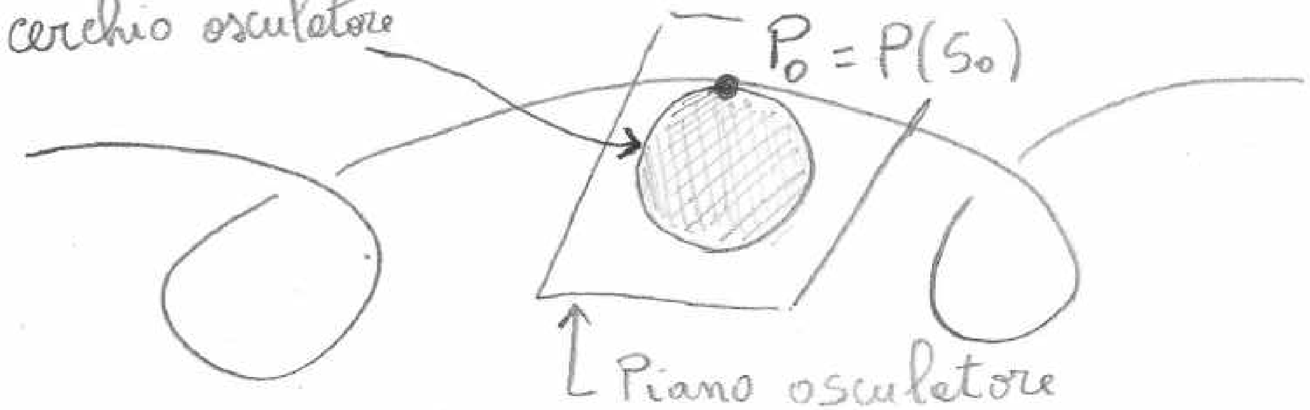
è detta <u>prima formula di Frenet</u>

(rispetto alla parametrizzazione dell' ascissa curvilinea)

DEF: Sia $P(s)$ una curva parametrizzata tramite l'ascissa curvilinea.

Il cerchio osculatore all'istante s_0

- è il cerchio passante per $P(s_0)$,
- contenuto nel piano osculatore per $P(s_0)$,
- tangente alla curva in $P(s_0)$ e
- avente come raggio il raggio di curvatura della curva in $P(s_0)$



Seconda Formula di Frenet e Torsione

Come per la prima formula di Frenet, consideriamo l'ascissa curvilinea.
Quindi nel seguito $T = T(s)$, $N = N(s)$, $B = B(s)$ dove s è l'ascissa curvilinea.

Prop: $\frac{dB}{ds}$ è ortogonale sia a B che a T

Dim:
Sappiamo che B è un versore, quindi $B \cdot B = 1$. Andando a derivare ho che

$$\frac{d}{ds}(B \cdot B) = 0 \longrightarrow 2\frac{dB}{ds} \cdot B = 0 \rightarrow$$ $\frac{dB}{ds}$ e B sono ortogonali

D'altra parte sappiamo che

$$B \bullet T = 0 \qquad (\star)$$

in quanto (ricordiamo che) $(T(s), N(s), B(s))$ è una base ortonormale $\forall s$

Andando a derivare $(\star)$ rispetto ad s otteniamo

$$0 = \frac{d}{ds}(B \bullet T) \overset{\text{Leibniz}}{=\!=} \frac{dB}{ds} \bullet T + B \bullet \frac{dT}{ds} =$$

$$\overset{\text{1º formula di Frenet}}{=\!=\!=} \frac{dB}{ds} \bullet T + B \bullet (K \cdot N) = \frac{dB}{ds} \bullet T$$

in quanto $B \bullet N = 0$ essendo ortogonali.

Quindi $\frac{dB}{ds} \bullet T = 0$, cioè $\frac{dB}{ds}$ e T sono ortogonali

<u>COROLLARIO</u>: Poiché $\frac{dB}{ds}$ è ortogonale sia a T che a B, è parallelo a N.

Basta ricordarsi che (T, N, B) è una base ortonormale

Dal corollario di sopra deduciamo che esiste una funzione $\tau(s)$ tale che

$$\boxed{\frac{dB(s)}{ds} = \tau(s) \cdot N(s)}$$

Questa equazione è detta <u>seconda formula di Frenet</u> e $\tau(s)$ è detta <u>Torsione</u>. (rispetto alla parametrizzazione dell'ascissa curvilinea s)

Terza formula di Frenet

Ricordiamo che $B = T \times N$.

Questo implica che $N = B \times T$.

Andando a derivare rispetto ad s (ascissa curvilinea) e tenendo presente che la regola di Leibniz si applica anche al prodotto vettoriale, abbiamo che

$$\frac{dN(s)}{ds} \overset{\text{Leibniz}}{=} \frac{dB(s)}{ds} \times T + B \times \frac{dT(s)}{ds} \xrightarrow[]{\text{Dalla } 1^a \text{ e } 2^a \text{ formula di Frenet}} =$$

$$\rightarrow = \tau(s)\Big(N(s) \times T(s)\Big) + K(s)\Big(B(s) \times N(s)\Big) \longrightarrow =$$

$$\rightarrow = -\tau(s)\, B(s) - K(s)\, T(s) \text{ , quindi}$$

$$\boxed{\frac{dN(s)}{ds} = -K(s)\,T(s) - \tau(s)\,B(s)}$$

Terza formula di Frenet

(rispetto all'ascissa curvilinea s)

Riscrivendo le tre formule di Frenet abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = KN \\[2ex] \dfrac{dN}{ds} = -KT - \tau B \\[2ex] \dfrac{dB}{ds} = \tau N \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{dT}{ds} \\[2ex] \dfrac{dN}{ds} \\[2ex] \dfrac{dB}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

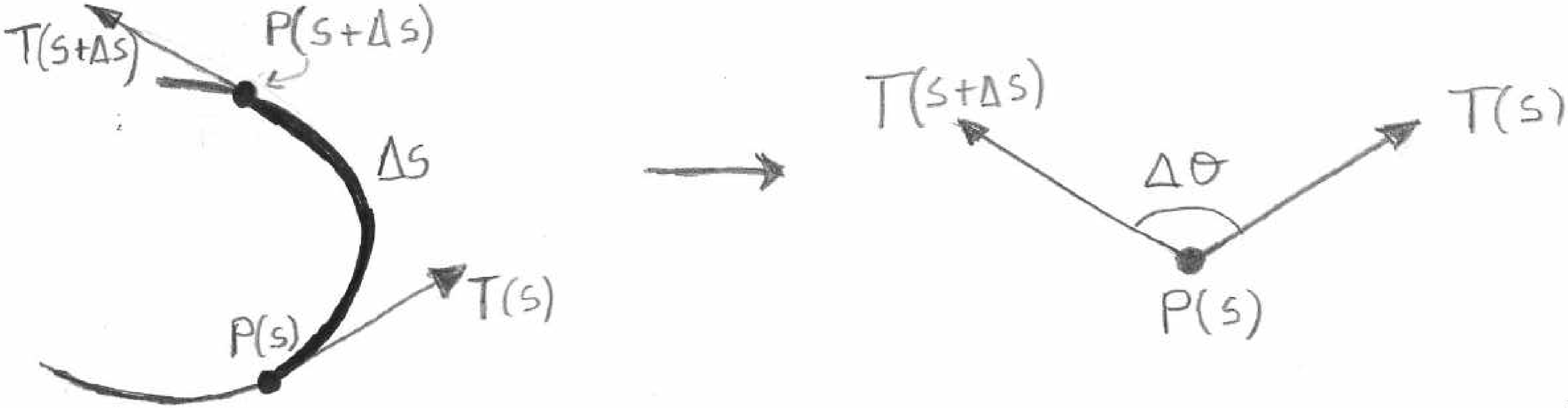
<u>Oss</u>: Molti testi usano altre convenzioni, per esempio $-\tau$ al posto di τ

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA CURVATURA

Ricordiamo che la curvatura è definita da

$$K(s) = \left\| \frac{dT(s)}{ds} \right\| \quad \text{con } s \text{ ascissa curvilinea}$$

Sia $\Delta\theta$ l'angolo che il vettore $T(s+\Delta s)$ forma con $T(s)$:



Abbiamo che

$$\left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \to 0} \left\| \frac{T(s+\Delta s) - T(s)}{\Delta s} \right\| =$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \left\| \frac{T(s+\Delta s) - T(s)}{\Delta \theta} \right\| \cdot \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$

(Notare che se $\Delta s \to 0$ anche $\Delta \theta \to 0$)

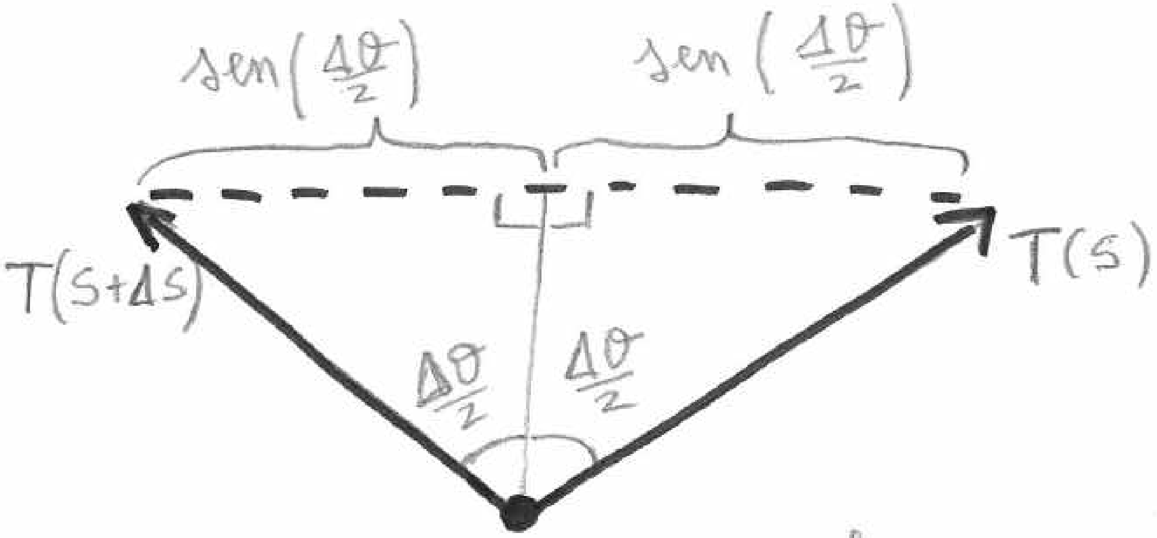
$$= \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| .$$

Vediamo perché

Dimostreremo che

$$\lim_{\Delta \theta \to 0} \left\| \frac{T(s+\Delta s) - T(s)}{\Delta \theta} \right\| = 1$$

Riprendo il disegno di pag. 10.



Ricordarsi che la lunghezza di T(s) e T(s+Δs) è uguale a 1

$\| T(s+\Delta s) - T(s) \|$ è la lunghezza del segmento tratteggiato, quindi è uguale a $2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$. Quindi

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \left\| \frac{T(s+\Delta s) - T(s)}{\Delta\theta} \right\| = \lim_{\Delta\theta \to 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\Delta\theta} \right) = 1$$

In definitiva, per quello detto a pag. 11,

$$\left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$

$\frac{\Delta \theta}{\Delta s}$ dà la misura di quanto la curva si discosta dalla direzione tangente in $P(s)$ lungo Δs. Abbiamo che

<u>PROP</u>: Se la curvatura $K(s) = 0 \ \forall s$, allora la curva è una retta

<u>DIM</u>:
Infatti $K(s) = 0 \longleftrightarrow \frac{dT}{ds} = 0 \longleftrightarrow T(s) = \text{costante}$

$\longleftrightarrow$ la curva $P(s)$ è una retta

<u>Oss:</u> Alternativamente alla dimostrazione di pagina precedente, potevamo osservare che

$$\left\| \frac{dT}{ds} \right\| = 0 \longleftrightarrow \left\| \frac{d^2P}{ds^2} \right\| = 0$$

(Ricordiamo sempre che s è l'ascissa curvilinea e quindi $T(s) = \frac{dP}{ds}$ in quanto $\left\| \frac{dP}{ds} \right\| = 1$)

$$\longleftrightarrow \frac{d^2P}{ds^2} = \vec{0} = (0,0,0)$$

$$\longleftrightarrow P(s) = P_0 + s\vec{v} \quad \text{con } \|\vec{v}\| = 1 \quad (\text{ricordarsi})$$

che è l'equazione
di una retta passante per $P_0 = P(0)$, di direzione data da $\vec{v}$ con <u>parametrizzazione</u> <u>l'ascissa</u> <u>curvilinea</u>