Leggi della meccanica

Forze

Chiamiamo *forza* una grandezza vettoriale $\underline{F} \in \mathbb{R}^3$ agente su un punto materiale $P \in \mathbb{R}^3$ di massa $m > 0$, la quale caratterizza l'interazione di altri corpi con P.

Esistono vari tipi di forze, di alcune delle quali vediamo ora una classificazione.

- *Forze costanti* Sono forze indipendenti dalla posizione e dalla velocità del punto su cui agiscono e anche dal tempo t. Ad esempio la *forza peso*, denotata con $\underline{P}$, che per un punto materiale di massa m è

$$\underline{P} = m\underline{g}$$

essendo $\underline{g} \in \mathbb{R}^3$ il vettore *accelerazione di gravità*. La forza peso si può ritenere costante nei limiti in cui il moto del punto P si svolga ad una distanza dalla superficie terrestre "piccola" rispetto al raggio terrestre, cosicché il vettore $\underline{g}$ si possa ritenere con buona approssimazione costante e rivolto verso il basso.

In generale, la forza peso caratterizza l'interazione del punto P con la Terra. A distanza $r > 0$ dalla superficie terrestre si ha:

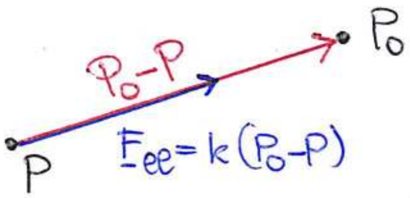
$$\boxed{\underline{g} = -\frac{GM}{r^2}\,\underline{e}_r,} \quad \boxed{r > R}$$

dove $\underline{e}_r$ è il versore radiale rispetto al centro della Terra, M è la massa della Terra, R è il raggio della Terra e G è la costante di gravitazione universale.

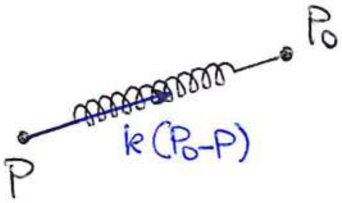
- *Forze posizionali* Sono forze che dipendono (solo) dalla posizione del punto su cui agiscono. Ad esempio la *forza elastica* che si esprime come

$$\underline{F}_{el}(P) = \underline{F}_{el} = k\,(P_0 - P)$$

essendo P_0 un altro punto, eventualmente fisso e non necessariamente materiale, e $k>0$ una costante detta la costante elastica.



Un dispositivo normalmente considerato per generare una forza elastica è una molla tra i punti P_0 e P, che nel caso ideale si considera di lunghezza a riposo nulla.



- Forze dipendenti dalla velocità   Sono forze che dipendono dall'atto di moto, in particolare dalla velocità, del punto su cui agiscono.
  Ad esempio le forze di resistenza, che si esprimono come:

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{v}_P) = -h\underline{v}_P$$

dove $h>0$ è una costante. A seconda del valore di h, esse possono modellizzare la resistenza del mezzo (ad es. aria o acqua) all'interno del quale si muove il punto materiale P.

- Forze dipendenti dal tempo   Sono forze che variano nel tempo pur a parità di atto di moto del punto su cui agiscono:

$$\underline{F} = \underline{F}(t).$$

<u>Def</u>. Si chiama <u>forza attiva</u> agente su un punto (materiale) $P \in \mathbb{R}^3$ una qualsiasi forza di cui sia nota a priori la dipendenza dall'atto di moto di P nonché l'eventuale dipendenza esplicita dal tempo:

$$\underline{F} = \underline{F}(P, \underline{v}_P, t).$$

<u>Lavoro e lavoro virtuale di una forza</u>

Consideriamo un punto $P \in \mathbb{R}^3$ sottoposto all'azione di una forza $\underline{F} \in \mathbb{R}^3$ nell'intervallo di tempo infinitesimo $[t, t+dt]$. Sia inoltre dP lo spostamento elementare di P nel medesimo intervallo di tempo, cioè $dP = \underline{v}_P \, dt$.

<u>Def</u>. Chiamiamo <u>lavoro elementare</u> di $\underline{F}$ su P nell'intervallo di tempo $[t, t+dt]$ la quantità scalare

$$dL = \underline{F} \cdot dP.$$

Se rappresentiamo $\underline{F} = F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}$ e $dP = dx \underline{i} + dy \underline{j} + dz \underline{k}$ abbiamo

$$dL = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz,$$

cioè il lavoro elementare è una <u>forma differenziale</u>.

Chiamiamo poi <u>lavoro virtuale</u> di $\underline{F}$ su P nell'intervallo di tempo $[t, t+dt]$ la quantità scalare

$$\delta L = \underline{F} \cdot \delta P,$$

essendo δP uno spostamento virtuale di P compatibile con i vincoli a cui P è soggetto in un determinato atto di moto.

Se consideriamo ora un sistema di punti $\{P_i\}_{i=1}^N$ su ciascuno dei quali agisce una forza $\underline{F}_i$, $i=1,\dots,N$ (cioè, in altre parole, consideriamo il sistema di vettori applicati $\{(\underline{F}_i, P_i)\}_{i=1}^N$), allora il lavoro elementare totale sarà definito come

$$dL = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot dP_i$$

e il lavoro virtuale come

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \delta P_i .$$

Lavoro di forze per un sistema olonomo

Supponiamo che, al netto di eventuali vincoli olonomi imposti sul sistema di punti, le posizioni dei P_i si possano identificare mediante n coordinate lagrangiane $q_1, \dots, q_n$ (che eventualmente possono coincidere per ciascun P_i con le sue tre coordinate cartesiane se non vi sono vincoli). Allora:

$$P_i - O = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_n, t),$$

dove l'eventuale dipendenza di $\underline{r}_i$ da t è dovuta a vincoli reonomi. Ne segue:

$$dP_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} dt$$

mentre

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Perché lo spostamento virtuale è compatibile coi vincoli così come sono a un istante fissato

dove $\{dq_k\}_{k=1}^n$, $\{\delta q_k\}_{k=1}^n$ sono gli incrementi rispettivamente elementari e virtuali delle coordinate lagrangiane che determinano, compatibilmente con i vincoli, gli spostamenti rispettivamente elementare e virtuale di P_i nel suo moto e in un suo atto di moto.

Allora l'espressione del lavoro elementare diventa:

$$dL = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} dt \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{Q_k} dq_k + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right)}_{Q_t} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Q_k \, dq_k + Q_t \, dt.$$

La quantità

$$Q_k := \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$

è detta la <u>forza generalizzata</u> associata alla coordinata lagrangiana q_k. Notiamo che in questo modo abbiamo scritto il lavoro elementare come una forma differenziale nelle n+1 variabili $q_1, \dots, q_k, t$. La dipendenza da t non c'è se i vincoli sono scleronomi.

L'espressione del lavoro virtuale diventa invece:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} Q_k \, \delta q_k .$$

<u>Lavoro di forze agenti su un corpo rigido</u>

Sappiamo che il vincolo di rigidità di un sistema di punti $\{P_i\}_{i=1}^{N}$ implica, una volta che si sia scelto un polo $Q \in \mathbb{R}^3$ dello spazio solidale

$$\boxed{\underline{v}_i = \underline{v}_Q + \underline{\omega} \times (P_i - Q)}$$

dove abbiamo indicato per brevità $\underline{v}_i := \underline{v}_{P_i}$. Di qui segue, in termini di spostamenti elementari,

$$dP_i = dQ + d\underline{\varepsilon} \times (P_i - Q)$$

dove $d\underline{\varepsilon} = \underline{\omega}\, dt$ è il vettore di rotazione infinitesima. Allora il lavoro elementare del sistema di forze applicate $\{(\underline{F}_i, P_i)\}_{i=1}^N$ si scrive:

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot dP_i \\ &= \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \left(dQ + d\underline{\varepsilon} \times (P_i - Q)\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \underline{F}_i\right) \cdot dQ + \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \left(d\underline{\varepsilon} \times (P_i - Q)\right). \qquad (*) \end{aligned}$$

Osserviamo che dati $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vale:

$$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = -(\underline{w} \times \underline{v}) \cdot \underline{u} = (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u}$$

per la proprietà di permutazione ciclica del prodotto misto. Se applichiamo questa proprietà al secondo addendo in $(*)$ con $\underline{u} = d\underline{\varepsilon}$, $\underline{v} = P_i - Q$ e $\underline{w} = \underline{F}_i$ otteniamo:

$$dL = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \underline{F}_i\right)}_{\underline{R}} \cdot dQ + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N (P_i - Q) \times \underline{F}_i\right)}_{\underline{M}_Q} \cdot d\underline{\varepsilon}$$

$$= \underline{R} \cdot dQ + \underline{M}_Q \cdot d\underline{\varepsilon}.$$

Quindi il lavoro elementare del sistema di vettori applicati $\{(\underline{F}_i, P_i)\}_{i=1}^N$ si può calcolare come il lavoro dovuto al risultante $\underline{R}$ immaginato applicato ad un punto arbitrario Q dello spazio solidale più il lavoro do-

vuto al momento risultante $\underline{M}_Q$ calcolato rispetto allo stesso punto Q.
Notiamo che il lavoro dovuto al momento risultante $\underline{M}_Q$ ha la forma

$$\underline{M}_Q \cdot d\underline{\varepsilon},$$

ossia è il prodotto scalare tra $\underline{M}_Q$ e la rotazione infinitesima $d\underline{\varepsilon}$.

Se richiamiamo inoltre l'espressione dello spostamento virtuale del punto P_i sotto il vincolo di rigidità:

$$\delta P_i = \delta Q + \delta \underline{\varepsilon} \times (P_i - Q),$$

dove $\delta\underline{\varepsilon}_v = \underline{\Omega}\, dt$ è una rotazione infinitesima corrispondente alla velocità angolare virtuale $\underline{\Omega}$, allora con lo stesso procedimento precedente otteniamo:

$$\delta L = \underline{R} \cdot \delta Q + \underline{M}_Q \cdot \delta \underline{\varepsilon}_v$$

Dinamica del punto materiale

Consideriamo ora un singolo punto materiale $P \in \mathbb{R}^3$ di massa $m > 0$ ed enunciamo i postulati, noti come leggi della dinamica o principi della Meccanica, che stanno alla base della fondazione assiomatica della Meccanica come teoria matematica.

Postulato (Primo principio della Meccanica)
Esistono sistemi di riferimento, ovvero osservatori, rispetto ai quali i punti materiali liberi, cioè quelli su cui non agisce alcuna forza oppure agisce un sistema di forze di risultante nullo, rimangono in quiete oppure si muovono con accelerazione nulla.
Questi sistemi di riferimento sono detti *inerziali*.

Postulato (Secondo principio della Meccanica)
In un sistema di riferimento inerziale un punto materiale soggetto ad una forza $\underline{F}$ acquista un'accelerazione parallela e concorde alla forza, di

modulo proporzionale a quello di $\underline{F}$. La costante di proporzionalità tra l'accelerazione $\underline{a}$ del punto e la forza $\underline{F}$ è la massa m del punto, in modo che:

$$\underline{F} = m\underline{a}.$$

<u>Postulato</u> (Terzo principio della Meccanica)

Le interazioni tra coppie di punti materiali si rappresentano con una coppia di forze di braccio nullo.

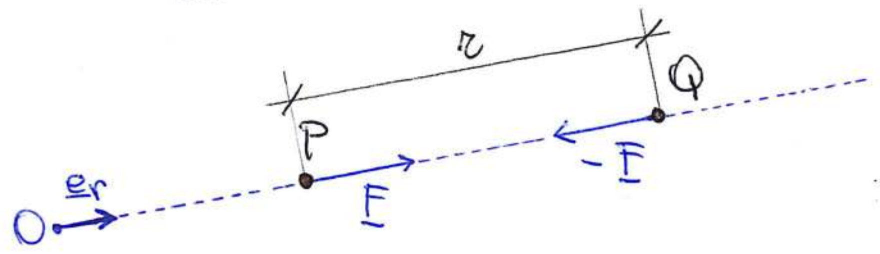
Ciò significa che, dati due punti materiali $P, Q \in \mathbb{R}^3$ liberi di masse rispettive $m_P, m_Q > 0$, un'interazione reciproca tra di loro si rappresenta con un sistema di vettori applicati del tipo $\{(\underline{F}, P), (-\underline{F}, Q)\}$ per modo che, in base al secondo principio,

$$m_P \underline{a}_P = \underline{F}, \qquad m_Q \underline{a}_Q = -\underline{F}$$

e dunque $m_P \underline{a}_P + m_Q \underline{a}_Q = \underline{0}$, ossia

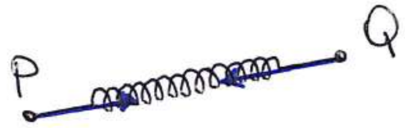
$$\underline{a}_Q = -\frac{m_Q}{m_P}\underline{a}_P.$$

In questo caso, $\underline{F}$ è da intendersi come la forza di cui P risente per effetto dell'azione di Q e $-\underline{F}$ come la forza di cui Q risente per effetto dell'azione di P. Si pensi, ad esempio, al caso dell'attrazione gravitazionale:



qui $\underline{F} = \dfrac{G m_P m_Q}{r^2}\underline{e}_r$ è la forza agente su P per effetto di Q e allora la forza agente su Q per effetto di P sarà $-\underline{F} = -\dfrac{G m_P m_Q}{r^2}\underline{e}_r$.

Si pensi ora al caso di una forza elastica agente tra P e Q :



se la forza agente su P per effetto di Q è $\underline{F}_{el} = k(Q-P)$ allora, per il terzo principio, la forza agente su Q per effetto di P è $-\underline{F}_{el} = k(P-Q)$.

Il fatto che le forze della coppia abbiano braccio nullo indica che esse hanno la stessa retta di applicazione.

Il terzo principio della Meccanica è anche noto come principio di azione e reazione.

Principio di sovrapposizione delle forze

Si consideri un punto materiale $P \in \mathbb{R}^3$ di massa $m>0$ e un sistema di forze $\{\underline{F}_i\}_{i=1}^N$ applicato ad esso. Sia $\underline{a}_i$, $i=1,\dots,N$, l'accelerazione che P acquisterebbe, in base al secondo principio, se la forza $\underline{F}_i$ fosse applicata da sola a P. Allora l'accelerazione che P acquista dalla contemporanea applicazione di tutte le $\underline{F}_i$ è:

$$\underline{a} := \sum_{i=1}^{N} \underline{a}_i ,$$

per cui vale

$$m\underline{a} = \sum_{i=1}^{N} m\underline{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i = \underline{R},$$

ossia il sistema di forze applicate in P può essere sostituito dal suo risultante ai fini della validità del secondo principio.

Sistemi di riferimento non inerziali

Nel proseguo considereremo sempre e solo sistemi di riferimento inerziali, per i quali cioè valga la proporzionalità tra la forza applicata ad un punto materiale e l'accelerazione acquistata da quest'ultimo (secondo principio). Diamo però qui un cenno su come si modifica l'applicazione del secondo principio in un sistema di riferimento non inerziale.

Consideriamo un osservatore fisso e un osservatore mobile rispetto ad esso con velocità angolare $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Dalla cinematica relativa sappiamo che tra l'accelerazione assoluta $\underline{a}_a$ e quella relativa $\underline{a}_r$ di uno stesso punto $P \in \mathbb{R}^3$ vale la relazione:

$$\underline{a}_a = \underline{a}_r + \underline{a}_\tau + \underline{a}_c$$

dove

$$\underline{a}_\tau = \underline{a}_Q + \dot{\underline{\omega}} \times (P-Q) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (P-Q)) \qquad \text{(trascinamento)}$$

$$\underline{a}_c = 2\underline{\omega} \times \underline{v}_r \qquad \text{(Coriolis)}$$

e Q è l'origine dell'osservatore mobile.

Se l'osservatore fisso è inerziale allora l'osservatore mobile sarà a sua volta inerziale se $\underline{a}_Q \equiv \underline{0}$ e $\underline{\omega} \equiv \underline{0}$. Infatti in tal caso risulterà $\underline{a}_a = \underline{a}_r$ e quindi quando P è in quiete o si muove con accelerazione nulla rispetto all'osservatore fisso lo stesso accadrà per l'osservatore mobile.

Se invece $\underline{a}_Q \not\equiv \underline{0}$ o $\underline{\omega} \not\equiv \underline{0}$ l'osservatore mobile non è inerziale. In tal caso, in seguito all'applicazione di una forza $\underline{F}$ su P l'osservatore fisso (supposto inerziale) misurerà un'accelerazione $\underline{a}_a$ tale che

$$m\underline{a}_a = \underline{F} \Rightarrow m\underline{a}_r + m\underline{a}_\tau + m\underline{a}_c = \underline{F}$$

in ragione del secondo principio; mentre l'osservatore mobile (supposto non inerziale) misurerà un'accelerazione $\underline{a}_r$ tale che:

$$m\underline{a}_r = \underline{F} - m\underline{a}_\tau - m\underline{a}_c,$$

cioè <u>non</u> misurerà un'accelerazione proporzionale alla forza $\underline{F}$ applicata a P.

Le quantità $-m\underline{a}_\tau$ e $-m\underline{a}_c$ sono dette rispettivamente la <u>forza di trascinamento</u> e la <u>forza di Coriolis</u>:

$$\underline{F}_\tau := -m\underline{a}_\tau$$
$$\underline{F}_c := -m\underline{a}_c.$$

Rispetto all'osservatore non inerziale esse sono dette <u>forze apparenti</u> perché non provengono da un'interazione effettiva con il punto P, ma nascono dal tentativo dell'osservatore non inerziale di associare una forza direttamente proporzionale all'accelerazione misurata.

Poiché

$$m\underline{a}_r = \underline{F} + \underline{F}_\tau + \underline{F}_c,$$

il secondo principio della Meccanica può ritenersi valido anche nei sistemi di riferimento non inerziali pur di aggiungere "d'ufficio" al punto P anche l'azione delle forze di trascinamento e di Coriolis.

<u>Postulato delle reazioni vincolari</u>

Consideriamo un punto vincolato a muoversi su una superficie $S_t \subset \mathbb{R}^3$ eventualmente variabile nel tempo (vincolo reonomo). Dal punto di vista cinematico, questo vincolo modifica sostanzialmente la velocità e l'accelerazione del punto rispetto al caso in cui quest'ultimo sia libero di muo=

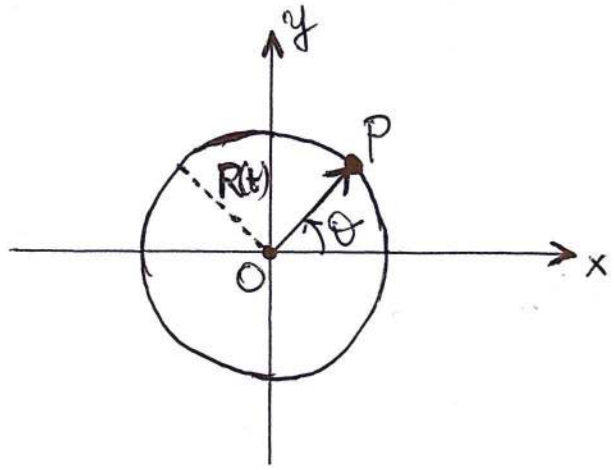
versi in tutto $\mathbb{R}^3$. In particolare, una qualsiasi velocità istantaneamente ammissibile del punto avrà la forma:

$$\underline{v} = \underline{v}_{tang} + \underline{v}_{norm} ,$$

dove $\underline{v}_{tang}$ appartiene allo spazio tangente ad S_t nel punto considerato mentre $\underline{v}_{norm}$ è normale alla superficie nel punto e dipende dall'eventuale moto del vincolo. In pratica, $\underline{v}_{tang}$ può essere una qualsiasi velocità virtuale del punto nell'istante di atto di moto considerato mentre $\underline{v}_{norm} = \underline{0}$ se il vincolo è scleronomo. Allo stesso modo, una qualsiasi accelerazione istantaneamente ammissibile del punto avrà la struttura

$$\underline{a} = \underline{a}_{tang} + \underline{a}_{norm} .$$

<u>Esempio</u> – Punto vincolato su una guida circolare di raggio variabile



Abbiamo:

$$P - O = \underline{r} = R(t) \left(\cos\theta \, \underline{i} + \sin\theta \, \underline{j} \right)$$

e inoltre

$$\underline{v}_P = \dot{R} \left(\cos\theta \, \underline{i} + \sin\theta \, \underline{j} \right) + R\dot{\theta} \left(-\sin\theta \, \underline{i} + \cos\theta \, \underline{j} \right)$$

$$= \underbrace{\dot{R}\underline{N}}_{\underline{v}_{norm}} + \underbrace{R\dot{\theta}\underline{T}}_{\underline{v}_{tang}} .$$

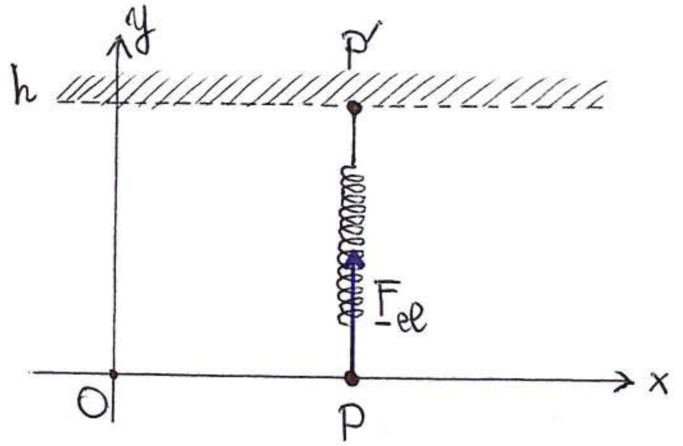
Analogamente:

$$\underline{a}_P = \ddot{R}(\cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j}) + \dot{R}\dot{\theta}(-\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j})$$
$$+ \dot{R}\dot{\theta}(-\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}) + R\left[\ddot{\theta}(-\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j})\right.$$
$$\left. + \dot{\theta}^2(-\cos\theta\,\underline{i} - \sin\theta\,\underline{j})\right]$$
$$= \ddot{R}\underline{N} + 2\dot{R}\dot{\theta}\,\underline{T} + R\ddot{\theta}\,\underline{T} + R\dot{\theta}^2(-\underline{N})$$
$$= \underbrace{(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\underline{N}}_{\underline{a}_{norm}} + \underbrace{(2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta})\underline{T}}_{\underline{a}_{tang}}.$$

Osserviamo che nel caso di $\underline{v}_P$ il vettore $\underline{v}_{tang}$ è arbitrario, perché si può fissare a piacere $\dot{\theta}$, mentre v_{norm} è univocamente determinato dal moto del vincolo. Analogamente, nel caso di $\underline{a}_P$ il vettore $\underline{a}_{tang}$ è arbitrario, in quanto si può fissare a piacere $\ddot{\theta}$, mentre $\underline{a}_{norm}$ è determinato una volta che si sia fissato $\ddot{\theta}$ (da cui dedurre $\dot{\theta}$) e il moto del vincolo. Inoltre, a_{norm} non è nullo neppure quando il vincolo è fisso.

Quando si applica una forza $\underline{F}$ ad un punto materiale vincolato, le restrizioni cinematiche all'accelerazione che abbiamo appena visto sono in generale non compatibili con una proporzionalità diretta tra $\underline{F}$ e l'accelerazione che il punto acquista in conseguenza dell'applicazione di $\underline{F}$.
Ad esempio, se al punto precedente si applica una forza $\underline{F}$ normale alla circonferenza non ci si può aspettare che l'accelerazione $\underline{a}_P$ si esplichi solo in direzione normale e con un modulo direttamente proporzionale a quello di $\underline{F}$.

Analogamente, se consideriamo quest'altro esempio:



con il punto P vincolato a rimanere lungo l'asse x, non ci possiamo aspettare che l'accelerazione acquistata da P in conseguenza dell'applicazione della forza elastica $\underline{F}_{el} = k(P'-P)$ sia proporzionale ad $\underline{F}_{el}$.

Per garantire la validità del secondo principio della meccanica anche in presenza di vincoli imposti sul punto P, è necessario introdurre a secondo membro dell'equazione $m\underline{a} = \underline{F}$ un vettore $\underline{\Phi} \in \mathbb{R}^3$ tale che, qualunque sia la forza attiva $\underline{F}$ applicata a P, permetta all'accelerazione $\underline{a}$ di soddisfare tutte le restrizioni cinematiche imposte dai vincoli e contemporaneamente di essere direttamente proporzionale alla forza complessivamente agente su P. Scriviamo perciò:

$$m\underline{a} = \underline{F} + \underline{\Phi}$$

e chiamiamo $\underline{\Phi}$ la <u>reazione vincolare</u> esplicata dal vincolo su P.

Si noti che la reazione vincolare <u>non</u> è una forza attiva, in quanto di essa <u>non</u> è nota a priori la dipendenza dall'atto di moto di P. Essa dipende invece sia dai vincoli imposti a P sia dalle forze attive applicate su di esso.

Nel caso dell'esempio precedente, il vincolo che P debba rimanere lungo l'asse x comporta:

$$P-O = \underline{r} = x\,\underline{i},$$

dove $x = x(t)$ è la coordinata lagrangiana usata per caratterizzare la posizione di P. Se P′ è il punto tale che $P' - O = x(t)\,\underline{i} + h\,\underline{j}$ allora:

$$\underline{F}_{el} = k\,(P' - P) = k\,[(P' - O) - (P - O)]$$
$$= k\,[x\underline{i} + h\underline{j} - x\underline{i}] = kh\underline{j}$$

mentre $\underline{a}_P = \ddot{x}\,\underline{i}$, da cui:

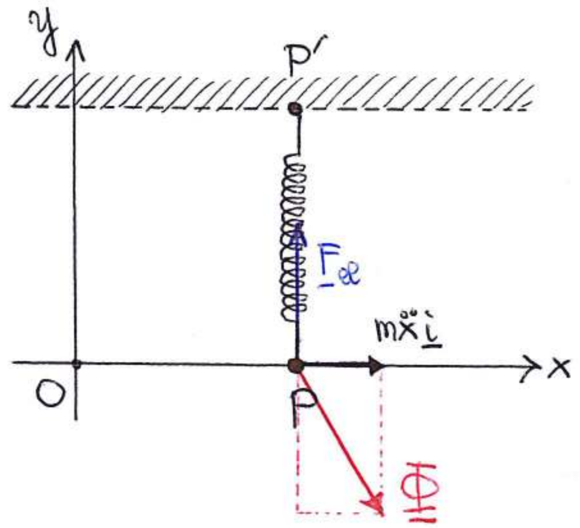
$$m\ddot{x}\,\underline{i} = kh\,\underline{j} + \underline{\Phi}.$$

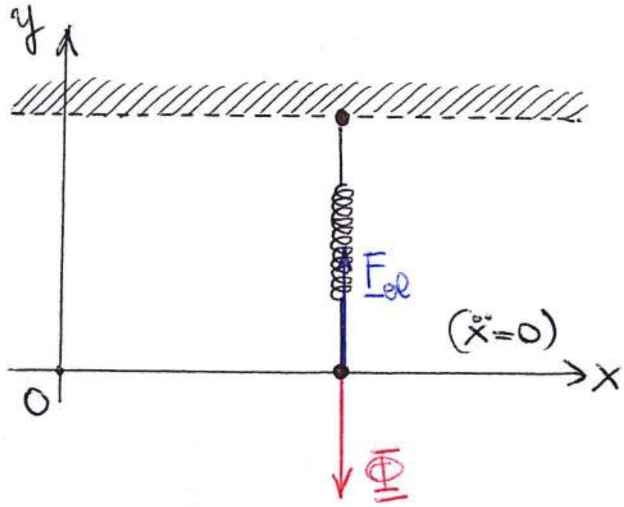
Istantaneamente, quindi, il vincolo su P esplica la reazione vincolare

$$\underline{\Phi} = m\ddot{x}\,\underline{i} - kh\,\underline{j}.$$

Se P è fermo $(\ddot{x} = 0)$ allora risulta in particolare:

$$\underline{\Phi} = -kh\,\underline{j}.$$





<u>Postulato</u> (delle reazioni vincolari)

L'azione che ogni vincolo esplica su un punto materiale si può rappresentare mediante una forza, detta <u>reazione vincolare</u>, associata a quel vincolo.
Il secondo principio della meccanica rimane valido anche per un punto vincolato pur di includere tra le forze agenti su di esso anche le

reazioni vincolari dovute ai vincoli cinematici imposti sul punto.

Def. Sia P un punto materiale soggetto ad un certo vincolo

$$\varphi(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \geq 0.$$

Sia δP uno spostamento virtuale ammissibile per P, cioè compatibile con i vincoli a partire da una generica configurazione del sistema. Denotiamo infine con $\underline{\Phi}$ la reazione vincolare esplicata dal vincolo φ in quella configurazione. Diremo che il vincolo φ è ideale se

$$\delta L^{(v)} = \underline{\Phi} \cdot \delta P \geq 0, \quad \forall \delta P \text{ ammissibile},$$

dove $\delta L^{(v)}$ è il lavoro virtuale della reazione vincolare $\underline{\Phi}$.

Supponiamo che il vincolo φ sia olonomo bilatero

$$\varphi(\underline{r}, t) = 0.$$

A t fissato, questo vincolo fa sì che il punto P si trovi su una superficie in $\mathbb{R}^3$, cioè risulterà $\underline{r} = \underline{r}(q_1, q_2, t)$.

Se $\delta P \in \text{span}\{\partial_{q_1}\underline{r}, \partial_{q_2}\underline{r}\}$ è uno spostamento virtuale ammissibile, anche $-\delta P \in \text{span}\{\partial_{q_1}\underline{r}, \partial_{q_2}\underline{r}\}$, cioè anche $-\delta P$ è ammissibile. Allora se il vincolo φ è anche ideale dovrà risultare:

$$\underline{\Phi} \cdot \delta P \geq 0, \qquad \underline{\Phi} \cdot (-\delta P) \geq 0$$

per ogni coppia di spostamenti virtuali $\delta P, -\delta P$ e quindi, in definitiva,

$$\underline{\Phi} \cdot \delta P = 0 \quad \forall \delta P \in \text{span}\{\partial_{q_1}\underline{r}, \partial_{q_2}\underline{r}\}.$$

Dunque $\underline{\Phi}$ risulta <u>ortogonale</u> alla superficie su cui è vincolato P.

I vincoli ideali in grado di esplicare reazioni vincolari puramente orto=

gonali alla varietà su cui vincolano P sono detti <u>vincoli lisci</u>.

Non tutti i vincoli ideali sono però lisci. Consideriamo un disco che rotola senza strisciare lungo l'asse x del piano Oxy. Sappiamo che il centro di istantanea rotazione G del disco è il suo punto di contatto con l'asse x, per il quale vale quindi $\underline{v}(G) = \underline{0}$ nell'atto di moto. Ne segue che lo spazio delle velocità virtuali per G è istantaneamente $\{\underline{0}\}$ e quindi l'unico spostamento virtuale possibile è $\delta G = \underline{0}$. Se $\underline{\Phi}$ è la reazione vincolare che il vincolo di rotolamento senza strisciamento esplica su G avremo quindi:

$$\delta L^{(v)} = \underline{\Phi} \cdot \delta G = 0,$$

il che però non dà alcuna informazione sulla direzione di $\underline{\Phi}$, che potrebbe anche non essere normale all'asse x.