5

Trasformata di Fourier

5.1 Introduzione

5.2 Trasformata di Fourier: prime proprietà

L'analisi di Fourier è la branca dell'analisi matematica che fornisce le metodologie e gli strumenti per studiare le funzioni, i segnali, dal punto di vista delle frequenze che esse contengono al loro interno. Essa estende la teoria delle serie di Fourier che si limitava allo studio dei segnali periodici, permettendo l'analisi in frequenza di segnali generali.

Concetto centrale dell'analisi di Fourier è quello di trasformata di Fourier, un'operazione che permette di individuare il cosiddetto spettro delle frequenze contenute in un segnale. Introduciamo questo concetto partendo dalla serie di Fourier.

Sia $g : [-1/2, 1/2] \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1. Sappiamo allora dalla teoria delle serie di Fourier che vale l'uguaglianza

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \qquad \forall x \in [-1/2, 1/2]\,, \tag{5.1}$$

dove le costanti c_n sono date dai coefficienti di Fourier di g:

$$c_n = \int_{-1/2}^{1/2} g(t) e^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}t \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Se la funzione g è definita su un intervallo di ampiezza $a > 0$, $[-a/2, a/2]$, allora considerando il cambiamento di variabile $x \longmapsto x/2a$, si trova che

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{2\pi i n x/a}}{\sqrt{a}} \qquad \forall x \in [-a, a]\,, \tag{5.3}$$

dove questa volta i coefficienti di Fourier sono dati da

$$c_n = \int_{-a/2}^{a/2} g(t) \frac{e^{-2\pi int/a}}{\sqrt{a}} \,\mathrm{d}t \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{5.4}$$

Sostituendo (5.4) in (5.3) otteniamo

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} g(t) e^{2\pi in(x-t)/a} \,\mathrm{d}t \qquad \forall x \in [-a, a]\,. \tag{5.5}$$

Se g non è di classe C^1 la formula precedente può non valere, tuttavia esistono classi di funzioni meno regolari che la soddisfano, ad esempio le funzioni continue che ammettono derivate destra e sinistra in ogni punto.

La teoria delle serie di Fourier trova un'importante applicazione nello studio dei segnali periodici, poiché la formula (5.3) permette di rappresentare il segnale di periodo a come una somma (infinita) dei segnali sinusoidali

$$e^{-2\pi inx/a} = \cos(2\pi nx/a) + i\sin(2\pi nx/a).$$

È evidente però che tale teoria non è adatta per rappresentare un segnale $g(x)$ non periodico, in termini matematici una funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ non periodica. Cosa si può fare in questi casi? Come spesso si procede in matematica, per farci un'idea seguiamo un procedimento euristico, cioè effettuiamo dei calcoli formali, non rigorosi, che tuttavia possono suggerire quale sia la via giusta da intraprendere. L'idea è qualla di considerare un segnale non periodico come il limite di segnali periodici di periodo sempre più grandi, cioè di passare al limite per $a \to +\infty$ nell'equazione (5.5).

Si noti che, per ogni x fissato, (5.5) si può leggere come una somma di Riemann infinita di passo $1/a$ relativa alla funzione

$$F(\nu) = \int_{-a/2}^{a/2} g(t) e^{2\pi i\nu(x-t)} \,\mathrm{d}t,$$

In effetti si ha $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} F(n/a)$. Facendo il limite per $a \to +\infty$, si può sperare che essa converga al corrispondente integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\,\mathrm{d}\nu$. C'è tuttavia una complicazione in più: la F stessa dipende da a e quindi facendo il limite si deve tener conto anche di questa variazione. Mettendo tutto insieme, si pu ò congetturare che, sotto opportune ipotesi, quando $a \to +\infty$, valga una relazione del tipo

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{2\pi i\nu(x-t)} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i\nu t} \,\mathrm{d}t \right) e^{2\pi i\nu x} \,\mathrm{d}\nu. \end{aligned} \tag{5.6}$$

È chiaro che in generale questi passaggi non sono leciti, tuttavia è ragionevole pensare che sotto opportune ipotesi la relazione (**??**) possa valere. Tale relazione si può riformulare ponendo

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu x} \, \mathrm{d}\nu \tag{5.7}$$

dove

$$\hat{g}(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i \nu t} \, \mathrm{d}t. \tag{5.8}$$

La (5.7) si può interpretare come una somma 'continua' di armoniche che generalizza la serie di Fourier. I coefficienti di questa somma continua sono dati dalla (5.8) che in letteratura viene chiamata *trasformata di Fourier*.

Si tratta ora di mostrare se e quando tali relazioni sono valide, o eventualmente come interpretarle. Perciò motivati dalle formule (5.7) e (5.8) introduciamo la seguente

Definizione 5.1 *Sia* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *sommabile. Si dice* trasformata di Fourier *di* g *la funzione* $\mathcal{F}(g) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *definita da*

$$\mathcal{F}(g)(\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i \nu t} \, \mathrm{d}t, \qquad \nu \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

Si usa anche la notazione $\hat{g} := \mathcal{F}(g)$.

Si osservi che la definizione ha senso perché per ν fissato si ha $|g(t)e^{-2\pi i \nu t}| = |g(t)|$ per ogni t, quindi $g(t)e^{-2\pi i \nu t}$ è integrabile per ogni ν grazie al criterio del confronto per gli integrali impropri. È il caso di tenere presente che l'integrale in (5.9) potrebbe convergere anche se g non è sommabile, per cui la trasformata di Fourier può essere definita anche per alcune funzioni non sommabili. Al momento non consideriamo questa eventualità perché rientrerà nella teoria più generale nell'ambito delle distribuzioni. Spesso scriveremo $\int_{\mathbb{R}}$ invece che $\int_{-\infty}^{+\infty}$, tuttavia si consiglia di non adottare questa notazione quando si effettua un cambio di variabile. Vediamo subito alcune proprietà elementari della trasformata di Fourier.

Proposizione 5.2 *Siano* $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *sommabili,* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\nu_0, t_0, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Allora*

(i) $\mathcal{F}(\lambda g + \mu h) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(h)$.
(ii) $\mathcal{F}(e^{2\pi i \nu_0 t} g(t))(\nu) = \mathcal{F}(g(t))(\nu - \nu_0)$ *per ogni* $\nu \in \mathbb{R}$.
(iii) $\mathcal{F}(g(t - t_0))(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu} \mathcal{F}(g(t))(\nu)$ *per ogni* $\nu \in \mathbb{R}$.
(iv) $\mathcal{F}(g(at))(\nu) = \dfrac{1}{|a|} \mathcal{F}(g(t)) \left(\dfrac{\nu}{a} \right)$ *per ogni* $\nu \in \mathbb{R}$.
(v) $\mathcal{F}(g(-t))(\nu) = \mathcal{F}(g(t))(-\nu)$ *per ogni* $\nu \in \mathbb{R}$.
(vi) $\mathcal{F}(\overline{g(t)})(\nu) = \overline{\mathcal{F}(g(t))(-\nu)}$ *per ogni* $\nu \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

(i) Segue subito dalla linearità dell'integrale.
(ii) $\mathcal{F}(e^{2\pi i\nu_0 t}g(t))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\nu_0 t}g(t)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i(\nu-\nu_0)t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}(g(t))(\nu - \nu_0)$.
(iii) Grazie al cambio di variabile $s = t - t_0$ si ha che $\mathcal{F}(g(t-t_0))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t - t_0)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(s)e^{-2\pi i\nu(s+t_0)}\,\mathrm{d}s = e^{-2\pi i\nu t_0}\int_{\mathbb{R}} g(s)e^{-2\pi i\nu s}\,\mathrm{d}s = e^{-2\pi i\nu t_0}\mathcal{F}(g)(\nu)$.
(iv) Effettuando il cambio di variabile $s = at$ si trova

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g(at))(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(at)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-(2\pi i\nu s)/a}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}s & \text{se } a>0\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-(2\pi i\nu s)/a}\frac{1}{-a}\,\mathrm{d}s & \text{se } a<0\end{cases}\\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-2\pi i(\nu/a)s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(g(s))\left(\frac{\nu}{a}\right).\end{aligned}$$

(v) Segue dal punto precedente prendendo $a = -1$.
(vi) $\mathcal{F}(\overline{g(t)})(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)}e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)e^{2\pi i\nu t}}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t} = \overline{\mathcal{F}(g(t))(-\nu)}$.

Osserviamo che $e^{-2\pi i\nu t} = \cos(-2\pi\nu t) + i\sin(-2\pi\nu t) = \cos(2\pi\nu t) - i\sin(2\pi\nu t)$, perché le funzioni reali coseno e seno sono rispettivamente pari e dispari. Quindi

$$\boxed{\mathcal{F}(g)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\cos(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t - i\int_{\mathbb{R}} g(t)\sin(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t.} \tag{5.10}$$

Si osservi anche che il primo integrale è una funzione pari di ν, mentre il secondo è una funzione dispari. Se g è pari, si ha che $g(t)\sin(2\pi\nu t)$ è dispari (in t), per cui il secondo integrale è nullo. Se g è dispari, si ha che $g(t)\cos(2\pi\nu t)$ è dispari (in t), per cui il primo integrale è nullo. Abbiamo quindi provato la seguente

Proposizione 5.3 *Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sommabile. Allora*

(i) g *pari* $\implies$ $\mathcal{F}(g)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\cos(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t$ *e* $\mathcal{F}(g)$ *è pari.*

(ii) g *dispari* $\implies$ $\mathcal{F}(g)(\nu) = -i\int_{\mathbb{R}} g(t)\sin(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t$ *e* $\mathcal{F}(g)$ *è dispari.*

Esempio 5.4 Sia $a > 0$ e sia $g(t) := H(t)e^{-at}$, $t \in \mathbb{R}$. La funzione g è sommabile in $\mathbb{R}$ e si ha

$$\hat{g}(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2\pi i\nu)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-(a+2\pi i\nu)t}}{-(a+2\pi i\nu)}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}.$$

Osserviamo che, essendo $a > 0$, si ha

$$|e^{-(a+2\pi\nu)t}| = e^{\mathrm{Re}(-a-2\pi i\nu)t} = e^{-at} \to 0 \qquad \text{per } t \to +\infty,$$

quindi

$$\boxed{\mathcal{F}(H(t)e^{-at})(\nu) = \frac{1}{a + 2\pi i\nu} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \tag{5.11}$$

Esempio 5.5 Sia $a > 0$ e sia $g(t) := e^{-a|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. La funzione g è sommabile in $\mathbb{R}$ e si ha

$$e^{-a|t|} = H(t)e^{-at} + H(-t)e^{at}$$

quindi, utilizzando i punti (i) e (v) della Proposizione 5.2, si trova

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(\nu) &= \mathcal{F}(H(t)e^{-at})(\nu) + \mathcal{F}(H(-t)e^{at})(\nu) \\ &= \mathcal{F}(H(t)e^{-at})(\nu) + \mathcal{F}(H(t)e^{-at})(-\nu) \\ &= \frac{1}{a + 2\pi i\nu} + \frac{1}{a - 2\pi i\nu} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}. \end{aligned}$$

Perciò

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\nu) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \tag{5.12}$$

Esempio 5.6 Siano $a > 0$ e $g(t) := p_a(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\hat{g}(\nu) = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-2\pi i\nu t}}{-2\pi i\nu}\right]_{t=-a/2}^{t=a/2} = \frac{e^{\pi i\nu a} - e^{-\pi i\nu a}}{2\pi i\nu} = \frac{\sin(a\pi\nu)}{\pi\nu}.$$

Quindi

$$\boxed{\mathcal{F}(p_a)(\nu) = \frac{\sin(a\pi\nu)}{\pi\nu} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \tag{5.13}$$

Esempio 5.7 Siano $a > 0$ e $g(t) := (a - |t|)p_{2a}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Osserviamo che g è pari, per cui dalla Proposizione 5.3 segue che

$$\hat{g}(\nu) = \int_{-a}^{a} (a - |t|)\cos(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a (a - t)\cos(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t,$$

dove nel secondo passaggio si è usato il fatto che la funzione integranda è pari in t e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a $t = 0$. Allora, utilizzando anche un'integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned} \hat{g}(\nu) &= 2a\int_0^a \cos(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^a t\cos(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sin(2\pi\nu a)}{\pi\nu} - 2\left(\left[\frac{t\sin(2\pi\nu t)}{2\pi\nu}\right]_{t=0}^{t=a} - \int_0^a \frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi\nu}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= 2\left[-\frac{\cos(2\pi\nu t)}{(2\pi\nu)^2}\right]_{t=0}^{t=a} = \frac{1}{2\pi^2\nu^2}(1 - \cos(2\pi\nu a)) = \frac{\sin^2(\pi\nu a)}{\pi^2\nu^2} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Quindi

$$\boxed{\mathcal{F}\big(p_{2a}(t)(a-|t|)\big)(\nu) = \frac{\sin^2(a\pi\nu)}{\pi^2\nu^2} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a>0).} \tag{5.15}$$

Esempio 5.8 Siano $a > 0$ e $g(t) := e^{-at^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Abbiamo già calcolato questo integrale utilizzando i metodi dell'analisi complessa e abbiamo trovato che

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-at^2})(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2\nu^2/a} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R}, \quad a>0.} \tag{5.16}$$

Si osservi che nel caso particolare $a = \pi$ si trova

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-\pi t^2})(\nu) = e^{-\pi\nu^2} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a>0).} \tag{5.17}$$

Proposizione 5.9 *Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è sommabile, allora*

(i) $\hat{g} \in C(\mathbb{R})$.
(ii) $\|\hat{g}\|_\infty \le \|g\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,\mathrm{d}t$.

Dimostrazione.

(i) Fissato $\nu_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, mostriamo che $\hat{g}$ è continua in ν_0, equivalentemente che per ogni successione $\nu_n \to \nu_0$ si ha $\lim_{n\to\infty} g(\nu_n) = g(\nu_0)$. Grazie al Teorema di convergenza dominata 5.46 dell'Appendice passiamo al limite sotto il segno di integrale e otteniamo $\lim_{n\to\infty} \hat{g}(\nu_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i\nu_n t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} g(t)e^{-2\pi i\nu_n t}\,\mathrm{d}t$ $= \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i\nu_0 t}\,\mathrm{d}t = \hat{g}(\nu_0)$.
(ii) Si ha

$$\|\hat{g}\|_\infty := \sup_{\nu\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t \right| \le \int_{\mathbb{R}} |g(t)||e^{-2\pi i\nu t}|\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Oltre alle proprietà della Proposizione precedente è possibile dimostrare il *Lemma di Riemann-Lebesgue*, che afferma che $\lim_{\nu\to\pm\infty} \hat{g}(\nu) = 0$. La dimostrazione di questo fatto richiede però strumenti avanzati di teoria dell'integrazione.

5.3 Trasformata di funzioni rapidamente decrescenti

Per approfondire lo studio della trasformata di Fourier, risulta particolarmente utile studiarne il comportamento su una particolare sottoclasse di funzioni sommabili. Tale analisi permetterà di mettere in luce una serie di interessanti collegamenti tra la regolarità di un segnale (esistenza di derivate) e l'andamento asintotico della corrispondente trasformata e sarà anche propedeutico alla successiva estensione della trasformata di Fourier all'ambito distribuzione.

Iniziamo con la seguente:

Definizione 5.10 *Una funzione* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *si dice* rapidamente decrescente all'infinito *se* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *e*

$$\lim_{t \to \pm\infty} t^p \varphi^{(q)}(t) = 0 \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

L'insieme di tali funzioni si denota con $\mathscr{S}(\mathbb{R})$*, o più semplicamente con* $\mathscr{S}$*. Date* $\varphi_n, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *si dice che* $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *se*

$$t^p \varphi_n^{(q)}(t) \to t^p \varphi^{(q)}(t) \qquad \textit{uniformemente in } \mathbb{R} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

Un tipico esempio di funzione rapidamente decrescente ad infinito è $\varphi(t) = e^{-t^2}$. Un altro esempio è dato dalle funzioni C^∞ a supporto compatto, cioè abbiamo

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Non è difficile verificare che $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, cioè che

$$\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\varphi + \mu\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Infine è chiaro che ogni funzione φ di $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ è sommabile in $\mathbb{R}$, infatti prendendo nella definizione $p = 2$ e $q = 0$, si ha che $\lim_{t \to \pm\infty} t^2 \varphi(t) = 0$, quindi esiste $M > 0$ tale che $|t^2 \varphi(t)| \leq 1$ per $|t| \geq M$. Allora

$$|\varphi(t)| \leq \frac{1}{t^2} \qquad \text{per } |t| \geq M$$

e si applica il criterio del confronto per gli integrali impropri.
Vediamo ora che effettivamente $\mathscr{S}$ è stabile rispetto alla trasformata di Fourier. Per vederlo ci servono delle utili proprietà sul comportamento della trasformata rispetto all'operazione di derivazione.

Proposizione 5.11 *Se* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *allora*

(i) $[\mathcal{F}(\varphi)]^{(p)}(\nu) = (-2\pi i)^p \mathcal{F}(t^p \varphi(t))(\nu)$ *per ogni* $p \in \mathbb{N}$.
(ii) $\mathcal{F}(\varphi^{(p)})(\nu) = (2\pi i)^p \nu^p \mathcal{F}(\varphi)(\nu)$ *per ogni* $p \in \mathbb{N}$.
(iii) $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
(iv) $\varphi_n \to \varphi$ *in* $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}(\varphi_n) \to \mathcal{F}(\varphi) \qquad$ *per* $n \to \infty$.

Dimostrazione.

(i) È possibile derivare sotto il segno di integrale (cfr. Teorema 5.47), quindi

$$\begin{aligned}[\mathcal{F}(\varphi)]'(\nu) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}(-2\pi i t)\,\mathrm{d}t \\ &= (-2\pi i)\int_{\mathbb{R}} t\varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}(t\varphi(t))(\nu),\end{aligned}$$

per cui abbiamo dimostrato (i) nel caso $p = 1$. Il caso $p > 1$ si ottiene iterando la formula appena trovata.

(ii) Integrando per parti otteniamo che

$$[\mathcal{F}(\varphi')](\nu) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \Big[\varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}\Big]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}(-2\pi i\nu)\,\mathrm{d}t.$$

Si osservi ora che

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi(t)e^{-2\pi i\nu t} = 0$$

perché $\varphi(t)$ tende a zero e $e^{-2\pi i\nu t}$ è limitato. Quindi

$$[\mathcal{F}(\varphi')](\nu) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}(-2\pi i\nu)\,\mathrm{d}t = (2\pi i\nu)\mathcal{F}(\varphi)(\nu)$$

e la (ii) è dimostrata per $p = 1$. Il caso $p > 1$ si ottiene iterando la formula appena trovata.

(iii) Grazie a (i) abbiamo che $\mathcal{F}(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Per ogni $p, q \in \mathbb{N}$ abbiamo poi che

$$\begin{aligned}|\nu^p[\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu)| &= |\nu^p(-2\pi i)^q\mathcal{F}(t^q\varphi(t))(\nu)| && \text{(per il punto (i))} \\ &= |(-2\pi i)^q\nu^p\mathcal{F}(t^q\varphi(t))(\nu)| \\ &= |(-2\pi i)^{q-p}[\mathcal{F}((t^q\varphi(t))^{(p)})](\nu)| && \text{(per il punto (ii))} \\ &= |2\pi|^{q-p}\left|\int_{\mathbb{R}} (t^q\varphi(t))^{(p)}e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le |2\pi|^{q-p}\int_{\mathbb{R}} |(t^q\varphi(t))^{(p)}|\,\mathrm{d}t := C_{p,q}.\end{aligned}$$

Quindi

$$|\nu^{p+1}[\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu)| \le C_{p+1,q}$$

da cui segue che

$$|\nu^p[\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu)| \le \frac{C_{p+1,q}}{|\nu|} \to 0 \qquad \text{per } \nu \to \pm\infty.$$

(iv) Supponiamo che $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, cioè $x^p(\varphi_n^{(q)} - \varphi^{(q)}) \to 0$ uniformemente per ogni $p, q \in \mathbb{N}$. Vogliamo provare che $\nu^p\Big([\mathcal{F}(\varphi_n)]^{(q)}(\nu) - [\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu)\Big) \to 0$ uniformemente per ogni $p, q \in \mathbb{N}$. Si osservi che $[\mathcal{F}(\varphi_n)]^{(q)}(\nu) - [\mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu) = [\mathcal{F}(\varphi_n) - \mathcal{F}(\varphi)]^{(q)}(\nu) = [\mathcal{F}(\varphi_n - \varphi)]^{(q)}(\nu)$, quindi ponendo $\psi_n := \varphi_n - \varphi$, si tratta di dimostrare che $\nu^p[\mathcal{F}(\psi_n)]^{(q)} \to 0$ uniformemente. Allora grazie a (ii) e (i)

$$
\begin{aligned}
\left|\nu^p[\mathcal{F}(\psi_n)]^{(q)}\right| &= |\nu^p(-2\pi i)^q \mathcal{F}(t^q(\psi_n(t)))(\nu)| && \text{(per il punto (i))}\\
&= |(-2\pi i)^{q-p}[\mathcal{F}((t^q(\psi_n(t)))^{(p)})](\nu)| && \text{(per il punto (ii))}\\
&\le (2\pi)^{q-p}\int_{\mathbb{R}} |(t^q\psi_n(t))^{(p)}|\,\mathrm{d}t\\
&= (2\pi)^{q-p}\int_{\mathbb{R}} (1+t^2)|(t^q\psi_n(t))^{(q)}|\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&\le (2\pi)^{q-p}\|(1+t^2)(t^q\psi_n(t))^{(q)}\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Ora l'ultimo termine tende a zero per $n \to \infty$, perché $\psi_n = \varphi_n - \varphi$ tende a zero in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ e quindi $\|(1+t^2)(t^q\psi_n(t))^{(q)}\|_\infty \le \|(t^q\psi_n(t))^{(q)}\|_\infty + \|t^2(t^q\psi_n(t))^{(q)}\|_\infty \to 0$. Allora

$$
\|\nu^p[\mathcal{F}(\psi_n)]^{(q)}\|_\infty \le (2\pi)^{q-p}\|(1+t^2)(t^q\psi_n(t))^{(q)}\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \to 0
$$

per $n \to \infty$ ed abbiamo concluso.

Le proprietà (i) e (ii) valgono anche per funzioni più generali di $\mathscr{S}$, ma è un po' laborioso scrivere le ipotesi precise. Sarà più semplice enunciare le proprietà corrispondenti nell'ambito più generale delle distribuzioni. Passiamo ora all'importante nozione di antitrasformata di Fourier.

Definizione 5.12 *Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sommabile. Si dice* antitrasformata di Fourier di g *la funzione $\check{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da*

$$
\check{g}(\nu) := \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t, \qquad \nu \in \mathbb{R}. \tag{5.18}
$$

In altri termini

$$
\check{g}(\nu) := \hat{g}(-\nu), \qquad \nu \in \mathbb{R}. \tag{5.19}
$$

Si usa anche la notazione $\mathcal{F}^{-1}(g) := \check{g}$, in quanto, come vedremo, in $\mathscr{S}$ essa è effettivamente la trasformazione inversa di $\mathcal{F}$.

Esattamente come per la trasformata di Fourier si dimostra la seguente

Proposizione 5.13 *Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è sommabile, allora*

(i) $\check{g} \in C(\mathbb{R})$.
(ii) $\|\check{g}\|_\infty \le \|g\|_1$.

Il prossimo teorema mostra che in $\mathscr{S}$ l'antitrasformata è la trasformazione inversa di $\mathcal{F}$.

Teorema 5.14 (Formula di inversione in $\mathscr{S}$) *Se $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ allora $\check{\hat{\varphi}} = \varphi = \hat{\check{\varphi}}$, cioè*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F})(\varphi) = \varphi = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})(\varphi). \tag{5.20}$$

Usando (5.19) si può riscrivere la formula come

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi))(t) = \varphi(-t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.21}$$

Dimostrazione. Se fosse possibile applicare il Teorema di Fubini (cfr. Teorema 5.48) avremmo:

$$\begin{aligned}
\check{\hat{\varphi}}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) e^{2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(s) e^{-2\pi i t s}\,\mathrm{d}s \right] e^{2\pi i \nu t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i (s-\nu) t}\,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \hat{1}(s-\nu)\,\mathrm{d}s = (\varphi * \hat{1})(\nu).
\end{aligned}$$

Però i conti precedenti non sono leciti perché la funzione $\varphi(s)e^{-2\pi i(s-\nu)t}$ non è integrabile in $\mathbb{R}^2$. Quindi la approssimiamo moltiplicando per la funzione a decrescenza rapida in t

$$f_\varepsilon(t) := e^{-\pi(\varepsilon t)^2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

dove $\varepsilon > 0$ è molto piccolo. Ricordiamo che

$$f_\varepsilon(t) = f(\varepsilon t) \qquad \text{dove } f(t) := e^{-\pi t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.22}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1, \tag{5.23}$$

$$\hat{f} = f, \tag{5.24}$$

da cui segue che

$$\hat{f}_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\varepsilon s) e^{-2\pi i t s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} f(\sigma) e^{-2\pi i \frac{t}{\varepsilon}\sigma}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\varepsilon} \hat{f}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Allora adesso possiamo applicare il Teorema di Fubini e dedurre che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t) f_\varepsilon(t) e^{2\pi i \nu t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(s) e^{-2\pi i t s}\,\mathrm{d}s \right] f_\varepsilon(t) e^{2\pi i \nu t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \left[\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t) e^{-2\pi i (s-\nu) t}\,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \hat{f}_\varepsilon(s-\nu)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) f\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) e^{-\pi (s-\nu)^2/\varepsilon^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\nu + \varepsilon\sigma) e^{-\pi\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \left[\sigma = \frac{(s-\nu)}{\varepsilon}\right].
\end{aligned}$$

Allora, poiché $\lim_{\varepsilon\to 0+} f_\varepsilon(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, è possibile applicare un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (Teorema 5.46) e ottenere che

$$\begin{aligned}\check{\hat{\varphi}}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t)e^{2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\varphi}(t)f_\varepsilon(t)e^{2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t)f_\varepsilon(t)e^{2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\nu+\varepsilon\sigma)e^{-\pi\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon\to 0+} \varphi(\nu+\varepsilon\sigma)e^{-\pi\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \varphi(\nu)\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \varphi(\nu).\end{aligned}$$

Abbiamo mostrato perciò che $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = \varphi$. L'altra uguaglianza segue subito da questa osservando che grazie alla Proposizione 5.2-(v)

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(t))(\nu) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)(-t))(\nu) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)(t))(-\nu) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)(t))(\nu) = \varphi(\nu).$$

5.4 Distribuzioni temperate

La trasformata di Fourier è un utile strumento per analizzare segnali non periodici, però la sua applicabilità è limitata dal fatto che la formula (5.9) non ha senso, ad esempio, per segnali non sommabili come $g(t) = H(t)$. L'idea è allora quella di passare alle distribuzioni, formulando un'opportuna definizione di trasformata delle distribuzioni che conservi le buone proprietà della trasformata (5.9). Osserviamo che, grazie al Teorema di Fubini 5.48 (cfr. Appendice) sugli integrali iterati, si ha

$$\begin{aligned}\langle T_{\hat{g}}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu)\varphi(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t\varphi(\nu)\,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\int_{\mathbb{R}} \varphi(\nu)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(t)\hat{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t = \langle T_g, \hat{\varphi}\rangle,\end{aligned}$$

quindi un tentativo molto naturale potrebbe essere quello di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione T ponendo $\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle$. Purtroppo $\mathcal{F}(\varphi)$ non ha supporto compatto, quindi questa definizione è priva di significato, almeno che non sia compatto supp (T): è infatti possibile dimostrare che $\mathcal{F}(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R})$ e sappiamo come valutare una distribuzione a supporto compatto in una funzione C^∞. Allora, ad esempio per la delta di Dirac δ_{x_0}, avremmo che per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(\delta_{x_0}), \varphi\rangle &:= \langle \delta_{x_0}, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \langle \delta_{x_0}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i x_0 t}\,\mathrm{d}t = \langle T_{e^{-2\pi i x_0 t}}, \varphi(t)\rangle,\end{aligned}$$

quindi confondendo come di consueto la distribuzione regolare $T_{e^{-2\pi i x_0 \nu}}$ con la funzione $e^{-2\pi i x_0 \nu}$ ad essa associata, abbiamo trovato che

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0})(\nu) = e^{-2\pi i x_0 \nu} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Ciò non risolve tuttavia il problema che ci eravamo posti, perché la definizione appena data vale solo per distribuzioni a supporto compatto, come ad esempio

δ_{x_0} e p_1, ma non per $H(t)$. La soluzione consiste nel trovare un nuovo tipo di distribuzioni che operino su un nuovo spazio di funzioni test V che sia stabile rispetto alla trasformata di Fourier, cioè per cui $\varphi \in V \implies \mathcal{F}(\varphi) \in V$. Uno spazio del genere già l'abbiamo costruito, è quello delle funzioni rapidamente decrescenti. Le nuove distribuzioni opereranno proprio su questo spazio.

Definizione 5.15 *Un funzionale* $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *si dice* distribuzione temperata *è lineare e continuo, cioè*

$$\langle T, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle = \lambda\langle T, \varphi\rangle + \mu\langle T, \psi\rangle, \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \tag{5.25}$$

$$\varphi_n \to \varphi \text{ in } \mathscr{S}(\mathbb{R}) \quad \implies \quad \langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle. \tag{5.26}$$

L'insieme delle distribuzioni temperate si denota con $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Spesso è utile inserire una variabile indipendente nella notazione $\langle T, \varphi\rangle$ e scrivere invece

$$\langle T(t), \varphi(t)\rangle$$

che pur non essendo una notazione del tutto corretta (in generale T non è una funzione di t), non è ambigua e in alcuni contesti permette di capire chiaramente quale è la variabile indipendente di φ.
Non è difficile verificare che $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, cioè che

$$T, S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \implies \quad \lambda T + \mu S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}).$$

Come nel caso delle distribuzioni di $\mathscr{D}'$ la (5.26) è una richiesta di natura tecnica.

Proposizione 5.16 *Se* $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *è lineare, allora* T *è continuo se e solo se vale la seguente implicazione:*

$$\varphi_n \to 0 \text{ in } \mathscr{S}(\mathbb{R}) \quad \implies \quad \langle T, \varphi_n\rangle \to 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Allora $\psi_n := \varphi_n - \varphi \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, infatti $\sup_{t\in\mathbb{R}} |t^p \psi_n^{(q)}(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^p(\varphi_n^{(q)}(t) - \varphi_n^{(q)}(t))| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^p\varphi_n^{(q)}(t) - t^p\varphi_n^{(q)}(t)| \to 0$ per $n \to \infty$. Quindi $|\langle T, \varphi_n\rangle - \langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \varphi_n - \varphi\rangle| \to 0$ cioè $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$.

Consideriamo una distribuzione temperata $T \in \mathscr{S}'$, cioè un funzionale $T : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ lineare e continuo. Poiché $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{S}$ ha senso considerare la restrizione di T a $\mathscr{D}$, cioè considerare $T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$. Evidentemente T è ancora lineare. Meno ovvio è che T è continuo nel senso di $\mathscr{D}'$: infatti se $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}$, allora $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n^{(q)}\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_n^{(q)}(t)| = 0$ per ogni $q \in \mathbb{N}$ ed esiste $R \geq 0$ tale che supp $\varphi_n \subseteq [-R, R]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $\|t^p\varphi_n^{(q)}(t)\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^p\varphi_n^{(q)}(t)| \leq$

$\sup_{t\in\mathbb{R}} |R|^p|\varphi_n^{(q)}(t)| \to 0$ per $n \to \infty$, cioè $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Abbiamo quindi mostrato che un elemento $T \in \mathscr{S}'$ può essere considerato anche come un elemento di $\mathscr{D}'$. Vale pure la seguente

Proposizione 5.17 *Se $T_1, T_2 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ e $T_1 \neq T_2$, allora T_1 e T_2 ristrette a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ sono due diverse distribuzioni di $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Abbiamo già verificato che T_k, $k = 1, 2$, ristrette a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ sono distribuzioni. Rimane da vedere che T_1 e T_2 non sono lo stesso elemento di $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Essendo diverse in $\mathscr{S}'$, si ha che esiste $\varphi \in \mathscr{S}$ per cui $\langle T_1, \varphi\rangle \neq \langle T_2, \varphi\rangle$. Supponiamo per assurdo che $T_1 = T_2$ come elementi di $\mathscr{D}'$ e approssimiamo φ con una successione di funzioni test $\varphi_n \in \mathscr{D}$ tali che $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{S}$ (ciò è possibile grazie al seguente lemma tecnico 5.18). Allora $\langle T_1, \varphi_n\rangle = \langle T_2, \varphi_n\rangle$ per ogni n per cui prendendo il limite per $n \to \infty$ si ottiene $\langle T_1, \varphi\rangle = \langle T_2, \varphi\rangle$, assurdo.

Lemma 5.18 *Se $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ allora esiste $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. L'idea è quella di moltiplicare, ad ogni passo $n \in \mathbb{N}$, la funzione φ per una funzione $\psi_n(t) \in \mathscr{D}$ tale che $\psi_n(t) = 1$ per $|t| \leq n$. Prendiamo allora $\psi_1 \in \mathscr{D}$ che vale 1 in $[-1, 1]$ e zero fuori dall'intervallo $[-2, 2]$, e poniamo $\psi_n(t) := \psi_1(t/n)$. Consideriamo quindi la successione $\varphi_n := \varphi\psi_n$, per cui $\varphi_n \in \mathscr{D}$, supp $(\varphi_n) \subseteq [-2n, 2n]$ e $\varphi_n(t) = \varphi(t)$ se $t \in [-n, n]$. Si ha che $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente su $\mathbb{R}$, infatti

$$\begin{aligned}\|\varphi - \varphi_n\|_\infty &= \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi(t)\psi_n(t)| \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)||1 - \psi_n(t)| = \sup_{|t|\geq n} |\varphi(t)||1 - \psi_n(t)| \leq \sup_{|t|\geq n} |\varphi(t)| \to 0\end{aligned}$$

per $n \to \infty$ perché $\varphi(t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$. Ora se $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$, grazie alla formula di Leibniz si ha

$$\begin{aligned}|\varphi_n^{(q)}(t) - \varphi^{(q)}(t)| &= |[\varphi(t)(\psi_n(t) - 1)]^{(q)}| = |[\varphi(t)(\psi_1(t/n) - 1)]^{(q)}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} |\varphi^{(q-k)}(t)||(\psi_1(t/n) - 1)^{(k)}| \\ &= |\varphi^{(q)}(t)||\psi_1(t/n) - 1| + \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} |\varphi^{(q-k)}(t)||\psi_1^{(k)}(t/n)|1/n^k\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\|\varphi_n^{(q)} - \varphi\|_\infty &\leq \sup_{|t|\geq n} |\varphi^{(q)}(t)||\psi_1(t/n) - 1| + \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} \|\varphi^{(q-k)}\|_\infty \|\psi_1^{(k)}\|_\infty 1/n^k \\ &\leq \sup_{|t|\geq n} |\varphi^{(q)}(t)| + \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} \|\varphi^{(q-k)}\|_\infty \|\psi_1^{(k)}\|_\infty 1/n^k \to 0 \qquad (5.27)\end{aligned}$$

per $n \to \infty$. Allora se $p \in \mathbb{N}$

$$\|t^p \varphi_n^{(q)}(t) - t^p \varphi_n^{(q)}(t)\|_\infty \leq \sup_{|t|\geq n} |t^p||\varphi^{(q)}(t)| + \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} \|t^p \varphi^{(q-k)}(t)\|_\infty \|\psi_1^{(k)}\|_\infty 1/n^k \tag{5.28}$$

che tende a zero per $n \to \infty$ perche $\lim_{t\to\pm\infty} |t^p||\varphi^{(q)}(t)| = 0$. Il lemma è quindi dimostrato.

Le considerazioni precedenti permettonno di identificare lo spazio delle distribuzioni temperate con un sottospazio delle distribuzioni, per cui è lecito scrivere l'inclusione

$$\boxed{\mathscr{S}'(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{D}'(\mathbb{R}).}$$

È utile quindi sapere se una data distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è temperata, cioè se appartenga o no a $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. I prossimi tre importanti esempi forniscono tre criteri in tal senso.

Esempio 5.19 Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è sommabile allora T_f è temperata.
È chiaro che T_f è lineare. Per verificare la continuità consideriamo $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Allora

$$\langle T_f, \varphi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \|\varphi_n\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0. \tag{5.29}$$

Esempio 5.20 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile. Se f è *a crescita lenta*, cioè

$$\exists A > 0,\ p \in \mathbb{N} \ :\ |f(t)| \leq A(1+|t|)^p \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{5.30}$$

allora $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
La condizione (5.30) dice in il modulo di f è più piccolo del modulo di un polinomio. Si osservi che un caso particolare di funzioni a crescita lenta è fornito dalle funzioni limitate e dai polinomi. Vediamo la dimostrazione. Se $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi_n\rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq A \int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^p |\varphi_n|\,\mathrm{d}t \\
&= A \int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^{p+2} |\varphi_n(t)| \frac{(1+|t|)^p}{(1+|t|)^{p+2}}\,\mathrm{d}x \\
&\leq A \|(1+|t|)^{p+2}\varphi_n(t)\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|t|)^p}{(1+|t|)^{p+2}}\,\mathrm{d}t \to 0.
\end{aligned}$$

Esempio 5.21 Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è a supporto compatto allora $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
Per vederlo consideriamo $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ e supponiamo che il supporto di T sia contenuto in $[-R, R]$. Se $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vale 1 in $[-R, R]$ allora

$$\langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \psi\varphi_n \rangle \to 0 \tag{5.31}$$

perché $\psi\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, infatti supp $(\psi\varphi_n) \subseteq [-R, R]$ e usando la formula di Leibniz per la derivata di un prodotto

$$\|D^p(\psi\varphi_n)\|_\infty \leq \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \|\psi^{(q)}\|_\infty \|\varphi_n^{(p-q)}\|_\infty \to 0.$$

Un altro esempio di distribuzione temperata è fornito dal treno di impulsi $T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k$, che sulle funzioni $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ è definita da

$$\left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k, \varphi \right\rangle := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k).$$

Infatti abbiamo la seguente

Proposizione 5.22 *Il treno di impulsi è una distribuzione temperata.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k)$ è convergente, perché $|\varphi(k)| \leq 1/|k|^2$ per k sufficientemente grande, essendo φ a decrescenza rapida. La linearità di T è facile. Per vedere la continuità di T sia $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{S}$. Allora abbiamo che $|\varphi_n(k)| = |(1+k^2)\varphi_n(k)|/(1+k^2)$ per ogni k, quindi

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi_n \rangle| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_n(k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_n(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|(1+k^2)\varphi_n(k)|}{1+k^2} \\ &\leq \|(1+x^2)\varphi_n(x)\|_\infty \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \right) \to 0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

per $n \to \infty$ perché $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{S}$.

5.5 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Definizione 5.23 *Se* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ *si dice* trasformata di Fourier di T *il funzionale* $\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *definito da*

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}). \tag{5.33}$$

Un'altra notazione usata è $\widehat{T} := \mathcal{F}(T)$, *per cui* $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$ *per ogni* $\varphi \in \mathscr{S}$.

Proposizione 5.24 *Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}(T) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. La linearità è evidente. Per mostrare la continuità supponiamo che $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Allora grazie alla Proposizione 5.11-(iv) si ha che $\mathcal{F}(\varphi_n) \to \mathcal{F}(\varphi)$ per $n \to \infty$ per cui

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi_n \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi_n) \rangle \to \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle$$

per $n \to \infty$ ed abbiamo concluso.

Proposizione 5.25 *Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è sommabile allora*

$$\mathcal{F}(T_g) = T_{\mathcal{F}(g)},$$

in altri termini la distribuzione $\mathcal{F}(T_g)$ è regolare ed è associata alla funzione

$$\mathcal{F}(g)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}t, \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Dal Teorema 5.9(i) si ha che $\hat{g}$ è continua, quindi localmente sommabile. Quindi per ogni $\varphi \in \mathscr{S}$ si ha, grazie al Teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(T_g), \varphi \rangle = \langle T_g, \mathcal{F}(\varphi) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} g(\nu) \mathcal{F}(\varphi)(\nu)\, \mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} g(\nu) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(\nu) e^{-2\pi i \nu t}\, \mathrm{d}\nu \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g)(t) \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \langle \mathcal{F}(g), \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Proposizione 5.26 *Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ allora*

(i) $[\mathcal{F}(T(t))]^{(p)} = (-2\pi i)^p \mathcal{F}(t^p T(t))$ *per ogni $p \in \mathbb{N}$.*
(ii) $\mathcal{F}(T^{(p)})(\nu) = (2\pi i)^p \nu^p \mathcal{F}(T)(\nu)$ *per ogni $p \in \mathbb{N}$.*

Le derivate sono intese nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione.
(i) Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha che

$$\begin{aligned}\langle [\mathcal{F}(T)]^{(p)}, \varphi \rangle &= (-1)^p \langle \mathcal{F}(T), \varphi^{(p)} \rangle && \text{(definizione di derivata in } \mathscr{D}') \\ &= (-1)^p \langle T, \mathcal{F}(\varphi^{(p)}) \rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathscr{S}') \\ &= (-1)^p \langle T, (2\pi i)^p \nu^p \mathcal{F}(\varphi) \rangle && \text{(Proposizione 5.11-(ii))} \\ &= (-1)^p (2\pi i)^p \langle T, \nu^p \mathcal{F}(\varphi) \rangle && \text{(linearità di } T) \\ &= (-1)^p (2\pi i)^p \langle \nu^p T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle && \text{(moltiplicazione per funzioni } C^\infty) \\ &= (-1)^p (2\pi i)^p \langle \mathcal{F}(\nu^p T), \varphi \rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathscr{S}') \\ &= \langle (-2\pi i)^p \mathcal{F}(\nu^p T), \varphi \rangle\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\langle [\mathcal{F}(T^{(p)})], \varphi\rangle &= \langle T^{(p)}, \mathcal{F}(\varphi)\rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathscr{S}'\text{)}\\
&= (-1)^p \langle T, (\mathcal{F}(\varphi))^{(p)}\rangle && \text{(definizione di derivata in } \mathscr{D}'\text{)}\\
&= (-1)^p \langle T, (-2\pi i)^p \mathcal{F}(t^p\varphi)\rangle && \text{(Proposizione 5.11-(i))}\\
&= (-1)^p (-2\pi i)^p \langle T, \mathcal{F}(t^p\varphi)\rangle && \text{(linearità di } T\text{)}\\
&= (2\pi i)^p \langle \mathcal{F}(T), t^p\varphi\rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathscr{S}'\text{)}\\
&= (2\pi i)^p \langle t^p\mathcal{F}(T), \varphi\rangle && \text{(moltiplicazione per funzioni } C^\infty\text{)}\\
&= \langle (2\pi i)^p t^p \mathcal{F}(T), \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Allo stesso modo, cioè scaricando la trasformata sulla funzione test ed utilizzando le analoghe proprietà in $\mathscr{S}$, si prova la seguente

Proposizione 5.27 *Siano $T, S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\nu_0, t_0, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Allora*

(i) $\mathcal{F}(\lambda T + \mu S) = \lambda\mathcal{F}(T) + \mu\mathcal{F}(S)$.
(ii) $\mathcal{F}(e^{2\pi i\nu_0 t}T(t))(\nu) = \mathcal{F}(T(t))(\nu - \nu_0)$.
(iii) $\mathcal{F}(T(t-t_0))(\nu) = e^{-2\pi i t_0\nu}\mathcal{F}(T(t))(\nu)$.
(iv) $\mathcal{F}(T(at))(\nu) = \dfrac{1}{|a|}\mathcal{F}(T(t))\left(\dfrac{\nu}{a}\right)$.
(v) $\mathcal{F}(T(-t))(\nu) = \mathcal{F}(T(t))(-\nu)$.

Passiamo ora alla nozione di antitrasformata in ambito distribuzionale.

Definizione 5.28 *Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ si dice* antitrasformata di Fourier di T *la distribuzione $\check{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ definita da*

$$\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}). \tag{5.34}$$

Un'altra notazione usata è $\mathcal{F}^{-1}(T) := \check{T}$, perché, come vedremo, in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ essa è effettivamente la trasformazione inversa di $\mathcal{F}$. Allora $\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi\rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle$ per ogni $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Si osservi che se $\varphi \in \mathscr{S}$ allora

$$
\begin{aligned}
\langle \check{T}, \varphi \rangle &= \langle T, \check{\varphi} \rangle && \text{(definizione di } \check{T}) \\
&= \langle T(t), \check{\varphi}(t) \rangle && \text{(inseriamo una variabile indipendente)} \\
&= \langle T(t), \hat{\varphi}(-t) \rangle && \text{(definizione di } \check{\varphi}) \\
&= \langle T(-t), \hat{\varphi}(t) \rangle && \text{(definizione di } T(-t)) \\
&= \langle T(-t), \hat{\varphi} \rangle && \\
&= \langle \widehat{T(-t)}, \varphi \rangle && \text{(definizione di } \widehat{T(-t)}) \\
&= \langle \widehat{T(t)}(-\nu), \varphi(\nu) \rangle && \text{(Proposizione 5.27(v)).}
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

Abbiamo quindi mostrato che

$$\boxed{\check{T}(t) = \hat{T}(-t),} \tag{5.36}$$

oppure, usando la notazione con la $\mathcal{F}$,

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(T)(t) = \mathcal{F}(T)(-t).} \tag{5.37}$$

Vediamo ora che l'uso del simbolo $\mathcal{F}^{-1}$ è giustificato dal fatto che l'antitrasformata è effettivamente la trasformazione inversa della trasformata in $\mathscr{S}'$.

Teorema 5.29 (Formula di inversione in $\mathscr{S}'$) *La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}'$ è invertibile e la sua inversa è l'antitrasformata di Fourier, cioè $\check{\hat{T}} = T = \hat{\check{T}}$, o in altri termini*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) \qquad \forall T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}). \tag{5.38}$$

Usando (5.37) *si può riscrivere la formula come*

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(T))(t) = T(-t). \tag{5.39}$$

Dimostrazione. Per ogni φ si ha

$$
\begin{aligned}
\langle \check{\hat{T}}, \varphi \rangle &= \langle \hat{T}, \check{\varphi} \rangle && \text{(definizione di antitrasformata in } \mathscr{S}') \\
&= \langle T, \hat{\check{\varphi}} \rangle && \text{(definizione di trasformata in } \mathscr{S}') \\
&= \langle T, \varphi \rangle && \text{(formula di inversione in } \mathscr{S}).
\end{aligned}
$$

La verifica che $T = \hat{\check{T}}$ è del tutto analoga.

Come corollario otteniamo una formula di inversione puntuale, che mostra un'elegante analogia con lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica.

Corollario 5.30 *Se $g \in C(\mathbb{R})$ è sommabile e se $\hat{g}$ è sommabile, allora*

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} \, \mathrm{d}\nu \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.40}$$

Dimostrazione. Dalla formula di inversione in $\mathscr{S}'$ segue che $T_g = \check{\hat{T}}_g$, quindi, utilizzando anche il Teorema di Fubini, si deduce che

$$\begin{aligned}
\langle T_g, \varphi \rangle = \langle \check{\hat{T}}_g, \varphi \rangle = \langle \hat{T}_g, \check{\varphi} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) \check{\varphi}(\nu) \, \mathrm{d}\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{2\pi i \nu t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} \, \mathrm{d}\nu \varphi(t) \, \mathrm{d}t = \left\langle T_{\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} \, \mathrm{d}\nu}, \varphi(t) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Quindi $T_g = T_{\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} \, \mathrm{d}\nu}$, ma per la Proposizione 5.13(i) la funzione (di t) $\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} \, \mathrm{d}\nu$ è continua, quindi $f = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i \nu t} \, \mathrm{d}\nu$, che è la tesi del Teorema (si ricordi che se $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R})$ e $T_{f_1} = T_{f_2}$, allora $f_1 = f_2$).

Si può quindi dire che la trasformata di Fourier è una versione "continua" della serie di Fourier, dove la serie è sostituita dall'integrale, mentre i coefficienti di Fourier sono sostituiti da $\hat{g}(\nu)$.

Osservazione 5.31 *Esistono altre versioni della formula di inversione puntuale* (5.40). *Ad esempio è possibile dimostrare la seguente implicazione:*

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ sommabile, } C^0 \text{ a tratti} \\ \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} \, \mathrm{d}\nu \text{ convergente} \end{cases} \implies \frac{g(t+) + g(t-)}{2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} \, \mathrm{d}\nu. \tag{5.41}$$

Si osservi che non è richiesta la sommabilità di $\hat{g}$, ma soltanto la convergenza dell'integrale improprio $\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} \, \mathrm{d}\nu$. Se si rinuncia a chiedere anche la convergenza di tale integrale, allora si deve esigere più regolarità dalla g e si ottiene comunque una formula un po' più debole, infatti si può provare che se g è sommabile, continua a tratti e con derivata continua a tratti, allora vale la formula

$$\frac{g(t+) + g(t-)}{2} = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \hat{g}(\nu) e^{2\pi i t \nu} \, \mathrm{d}\nu. \tag{5.42}$$

Ricordiamo che il limite a secondo membro dell'equazione precedente può esistere anche quando l'integrale improprio è divergente (ripassare la definizione).

Concludiamo questo paragrafo con qualche cenno alla trasformata della convoluzione. È possibile provare che

$$T, S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}), \quad \text{supp } (T) \text{ compatto} \quad \implies \begin{cases} \mathcal{F}(T) \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S) \end{cases} \tag{5.43}$$

La scrittura $\mathcal{F}(T) \in C^\infty(\mathbb{R})$ significa che $\mathcal{F}(T)$ è una distribuzione regolare associata ad una funzione di classe C^∞. Questo permette di dare un senso alla moltiplicazione $\mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$. Per quanto riguarda la convoluzione tra due funzioni f e g, un'estensione del Teorema 5.48 permette di dimostrare che $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ ogni volta che i due membri di tale equazione hanno senso.

5.6 Calcolo di trasformate

Negli esempi di questo paragrafo calcoliamo alcune trasformate notevoli e svolgiamo un certo numero di esercizi. Cominciamo con trasformate di funzioni sommabili che quindi sono definite nel modo classico. Si noti tuttavia che per alcune di esse si farà comunque ricorso al teorema di inversione della trasformata di Fourier che noi abbiamo presentato nel più generale ambito distribuzione.

Esempio 5.32 Calcolare la trasformata della funzione sommabile $g(t) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}$, $a > 0$.
Essendo g sommabile, è anche temperata e la definizione classica coincide con quella delle per le ditribuzioni. Sappiamo che se $b > 0$ allora

$$\mathcal{F}(e^{-b|t|})(\nu) = \frac{2b}{b^2 + 4\pi^2\nu^2} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Allora applicando $\mathcal{F}$ ad ambo i membri ed utilizzando la formula di inversione

$$\mathcal{F}\left(\frac{2b}{b^2 + 4\pi^2\nu^2}\right)(t) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(e^{-b|t|}))(t) = e^{-b|-t|} = e^{-b|t|},$$

quindi, scambiando t con ν,

$$\mathcal{F}\left(\frac{2b}{b^2 + 4\pi^2 t^2}\right)(\nu) = e^{-b|\nu|} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R} \tag{5.44}$$

Allora per ottenere la trasformata della funzione $g(t)$ scriviamo

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right)(\nu) = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{a}\frac{2(2\pi a)}{(2\pi a)^2 + 4\pi^2 t^2}\right)(\nu) = \frac{\pi}{a}\mathcal{F}\left(\frac{2(2\pi a)}{(2\pi a)^2 + 4\pi^2 t^2}\right)(\nu) = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\nu|}$$

dove abbiamo applicato la formula (5.44) con $b = 2\pi a$. Riassumendo

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right)(\nu) = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\nu|} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \tag{5.45}$$

Esempio 5.33 Posto $g(t) = te^{-t}H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, calcolare $\mathcal{F}(g(t))$.
Si ha che g è una funzione sommabile. Utilizzando la Proposizione 5.26(i) si trova

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(tH(t)e^{-t})(\nu) &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\mathcal{F}(H(t)e^{-t})(\nu) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{1}{1+2\pi i\nu}\right)\\ &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{-2\pi i}{(1+2\pi i\nu)^2} = \frac{1}{(1+2\pi i\nu)^2}.\end{aligned}$$

Esempio 5.34 Calcolare $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{t^2+t+1}\right)$.
Si osservi che $g(t) = 1/(t^2+t+1)$ è sommabile. Grazie alla Proposizione (5.27)(iii) e alla formula (5.47) si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right)(\nu) &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{(t+1/2)^2+3/4}\right)(\nu) = e^{-2\pi i\nu(-1/2)}\mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+3/4}\right)(\nu)\\ &= e^{\pi i\nu}\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-2\pi(\sqrt{3}/2)|\nu|} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\pi(i\nu-\sqrt{3}|\nu|)}.\end{aligned}$$

Esempio 5.35 Calcolare $\mathcal{F}(e^{-|2t|}\operatorname{sign}(t))$.
Si ha $e^{-|2t|}\operatorname{sign}(t) = H(t)e^{-2t} + H(-t)e^{2t}$, quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-|2t|}\operatorname{sign}(t))(\nu) &= \mathcal{F}(H(t)e^{-2t})(\nu) + \mathcal{F}(H(-t)e^{2t})(\nu)\\ &= \mathcal{F}(H(2t)e^{-2t})(\nu) + \mathcal{F}(H(-2t)e^{2t})(\nu)\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}(H(t)e^{t})\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(H(-t)e^{t})\left(\frac{\nu}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}(H(t)e^{t})\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(H(t)e^{-t})\left(-\frac{\nu}{2}\right)\\ &= \frac{1}{1+\pi i\nu} + \frac{1}{1-\pi i\nu} = \frac{2}{1+\pi^2\nu^2}.\end{aligned}$$

Esempio 5.36 Calcolare $\mathcal{F}\left(\dfrac{t}{(9+4t^2)^2}\right)$.
Osserviamo innanzi tutto che $t/(9+4t^2)^2$ è una funzione sommabile. Possiamo ricondurci a trasformate note osservando che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{(9+4t^2)} = -\frac{8t}{(9+4t^2)^2},$$

quindi, utilizzando nell'ordine la Proposizione 5.26(ii), la Proposizione 5.27(iv) e la formula (5.47), troviamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{t}{(9+4t^2)^2}\right)(\nu) &= \mathcal{F}\left(-\frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{(9+4t^2)}\right)(\nu) = -\frac{1}{8}2\pi i\nu\mathcal{F}\left(\frac{1}{(9+4t^2)}\right)(\nu)\\ &= -\frac{\pi i\nu}{4}\mathcal{F}\left(\frac{1}{(9+(2t)^2)}\right)(\nu) = -\frac{\pi i\nu}{4}\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{1}{(9+t^2)}\right)\left(\frac{\nu}{2}\right)\\ &= -\frac{\pi i\nu}{8}\frac{\pi}{3}e^{-2\pi 3|\nu/2|} = \frac{\pi^2\nu}{24i}e^{-3\pi|\nu|}.\end{aligned}$$

Mostriamo ora un calcolo di trasformata di Fourier per una funzione non sommabile che però può essere interpretata come una distribuzione temperata.

Esempio 5.37 Calcolare la trasformata di $g(t) = \dfrac{\sin(at)}{t}$, $a > 0$.
La funzione g non è sommabile, tuttavia essendo limitata si può considerare come una distribuzione temperata. Sappiamo che se $b > 0$ allora

$$\mathcal{F}(p_b(t))(\nu) = \frac{\sin(b\pi\nu)}{\pi\nu} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Allora utilizzando la formula di inversione

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(b\pi\nu)}{\pi\nu}\right)(t) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(p_b(t)))(t) = p_b(-t) = p_b(t),$$

quindi, scambiando t con ν,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(b\pi t)}{\pi t}\right)(\nu) = p_b(\nu) \qquad \forall \nu \in \mathbb{R}. \tag{5.46}$$

Allora per ottenere la trasformata della funzione $g(t)$ scriviamo

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(at)}{t}\right)(\nu) = \mathcal{F}\left(\pi\frac{\sin(\frac{a}{\pi}\pi t)}{\pi t}\right)(\nu) = \pi\mathcal{F}\left(\frac{\sin(\frac{a}{\pi}\pi t)}{\pi t}\right)(\nu) = \pi p_{a/\pi}(\nu)$$

dove abbiamo applicato la formula (5.44) con $b = a/\pi$. Riassumendo

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{\sin(at)}{t}\right)(\nu) = \pi p_{\frac{a}{\pi}}(\nu) \qquad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (a > 0).} \tag{5.47}$$

Veniamo ora ad un esempio che coinvolge distribuzioni non regolari.

Esempio 5.38 Cominciamo col calcolare la trasformata della δ di Dirac. Se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varphi \in \mathscr{S}$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(\delta_{x_0}), \varphi\rangle &= \langle \delta_{x_0}(\nu), \mathcal{F}(\varphi)(\nu)\rangle = \left\langle \delta_{x_0}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t\right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i\nu x_0}\,\mathrm{d}t = \langle T_{e^{-2\pi i\nu x_0}}, \varphi(t)\rangle,\end{aligned}$$

quindi

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_{x_0})(\nu) = e^{-2\pi i x_0\nu} \qquad \forall \nu \in \mathbb{R}.} \tag{5.48}$$

Applicando $\mathcal{F}$ ad ambo i membri di (5.48) ed usando la formula di inversione (5.39), si ottiene

$$\mathcal{F}(e^{-2\pi i\nu x_0})(t) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\delta_{x_0}))(t) = \delta_{x_0}(-t) = \delta_{-x_0}(t),$$

cioè

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{2\pi i x_0 t}) = \delta_{x_0}} \tag{5.49}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$. Per $x_0 = 0$ otteniamo le formule

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_0)(\nu) = 1, \qquad \mathcal{F}(1) = \delta_0.} \tag{5.50}$$

Esempio 5.39 Calcolare $\mathcal{F}(t^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Il polinomio t^n è a crescita lenta, quindi si può calcolarne la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni temperate e si ha

$$\mathcal{F}(t^n)(\nu) = \mathcal{F}(t^n 1)(\nu) = \left(\frac{1}{-2\pi i}\right)^n [\mathcal{F}(1)]^{(n)}(\nu) = \left(\frac{1}{-2\pi i}\right)^n \delta_0^{(n)}.$$

Esempio 5.40 Calcolare $\mathcal{F}(\sin t)$.
La funzione sin è limitata, quindi è una distribuzione temperata e si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sin t)(\nu) &= \mathcal{F}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)(\nu) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}(e^{it})(\nu) - \mathcal{F}(e^{-it})(\nu)\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}\left(e^{2\pi i(1/2\pi)t}\right)(\nu) - \mathcal{F}\left(e^{2\pi i(-1/2\pi)t}\right)(\nu)\right] = \frac{1}{2i}(\delta_{1/2\pi} - \delta_{-1/2\pi}).\end{aligned}$$

Per il calcolo delle prossime trasformate ci servono le nozioni di distribuzione pari e dispari.

Definizione 5.41 *Una distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ si dice* pari *se $T(-t) = T(t)$.*
Una distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ si dice dispari *se $T(-t) = -T(t)$.*

Esempio 5.42

a. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è pari allora T_f è pari.
b. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è dispari allora T_f è dispari.
c. δ_0 è pari, infatti se $\varphi \in \mathscr{D}$ si ha $\langle \delta_0(-t), \varphi(t) \rangle = \langle \delta_0(t), \varphi(-t) \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0(t), \varphi(t) \rangle$.
d. v.p. $\frac{1}{t}$ è dispari: infatti tramite il cambio di variabile $s = -t$ si trova che per ogni φ

$$\begin{aligned}\langle \text{v.p.}\, \frac{1}{t}(-t), \varphi(t) \rangle = \langle \text{v.p.}\, \frac{1}{t}(t), \varphi(-t) \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(-t)}{t}\, \mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-t)}{t}\, \mathrm{d}t \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} -\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{s}\, \mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(s)}{s}\, \mathrm{d}s = -\langle \text{v.p.}\, \frac{1}{t}(t), \varphi(t) \rangle.\end{aligned}$$

e. Se T è dispari, allora $\mathcal{F}(T)$ è dispari. Ciò segue subito dalla Proposizione 5.27(v).
f. Se T è pari, allora $\mathcal{F}(T)$ è pari. Ciò segue subito dalla Proposizione 5.27(v).

Come per le funzioni di una variabile reale, si ha la seguente relazione tra parità e derivata che ci è tornata utile nello svolgimento degli esercizi.

Proposizione 5.43

(i) *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è dispari, allora T' è pari.*
(ii) *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è pari, allora T' è dispari.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'affermazione (i) e lasciamo per esercizio la (ii). Per ogni funzione test φ si ha

$$\begin{aligned}\langle T'(-t), \varphi(t)\rangle &= \langle T'(t), \varphi(-t)\rangle = -\langle T(t), -\varphi'(-t)\rangle = \langle T(t), \varphi'(-t)\rangle \\ &= \langle T(-t), \varphi'(t)\rangle = \langle T(t), \varphi'(t)\rangle = -\langle T(t), \varphi(t)\rangle.\end{aligned}$$

Vogliamo ora calcolare la trasformata di Fourier di v.p. $\frac{1}{t}$. Osserviamo prima che, siccome $t(\frac{1}{t}) = 1$, è ragionevole congetturare che

$$t\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right) = 1. \tag{5.51}$$

La congettura è vera, infatti per ogni funzione test φ abbiamo

$$\begin{aligned}\left\langle t\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right)\ ,\ \varphi(t)\right\rangle &= \left\langle \text{v.p.}\,\frac{1}{t}\ ,\ t\varphi(t)\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{t\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \langle 1, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Allora calcolando la trasformata di Fourier di ambo i membri di (5.51) si ha

$$\mathcal{F}\left(t\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right)\right) = \delta_0$$

quindi per la Proposizione 5.26(i) si trova

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left[\mathcal{F}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right)\right]' = \delta_0$$

cioè, poiché $2\delta_0 = \text{sign}'$,

$$\left[\pi i\,\text{sign} + \mathcal{F}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right)\right]' = 0$$

e quindi esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\pi i \operatorname{sign} + \mathcal{F}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right) = C$$

Poiché v.p. $\frac{1}{t}$ è dispari, la sua trasformata è dispari. Anche sign è dispari, quindi la distribuzione nel primo membro dell'equazione precedente è dispari, e ciò è possibile solo se $C = 0$. Abbiamo allora trovato che

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right)(\nu) = -\pi i \operatorname{sign}(\nu).} \tag{5.52}$$

Applichiamo allora la formula di inversione: troviamo che

$$-\pi i \mathcal{F}(\operatorname{sign}(\nu))(t) = \left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right)(-t) = -\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{t}\right)(t)$$

oppure, scambiando ν con t,

$$\boxed{\mathcal{F}(\operatorname{sign}(t))(\nu) = \frac{1}{\pi i}\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}.} \tag{5.53}$$

Ora, poiché $H(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(t) + \frac{1}{2}$ si trova anche che

$$\boxed{\mathcal{F}(H(t))(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\left(\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\delta_0.} \tag{5.54}$$

Vogliamo ora calcolare la trasformata del treno d'impulsi. A tale scopo utilizziamo il prossimo risultato, noto come *formula di sommazione di Poisson.*

Teorema 5.44 *Per ogni $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ si ha*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) \tag{5.55}$$

Dimostrazione. Sia $f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t-n)$, che è ottenuta sommando ad ogni passo $n \in \mathbb{N}$ la traslata di n di φ. poiché φ è a decrescenza rapida, non è difficile vedere che $f(t)$ è convergente per ogni t. Inoltre f è C^∞ e periodica di periodo 1. Possiamo allora applicare la teoria sulle serie di Fourier e scrivere

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t}$$

dove i coefficienti di Fourier c_k sono dati da

$$c_k = \int_{-1/2}^{1/2} f(s)e^{-2\pi iks}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(s-n)e^{-2\pi iks}\,\mathrm{d}s$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2-n}^{1/2-n} \varphi(\sigma)e^{-2\pi ik\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\sigma)e^{-2\pi ik\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = \hat{\varphi}(k), \tag{5.56}$$

quindi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k)e^{2\pi ikt}$$

e la tesi segue prendendo $t = 0$.

Consideriamo allora il treno di impulsi $T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ e dimostriamo che

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n.} \tag{5.57}$$

Infatti grazie alla formula di sommazione di Poisson, si ha che per ogni funzione test

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta_n, \hat{\varphi}\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \hat{\delta}_n, \varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e^{2\pi in\nu}, \varphi\rangle$$

cioè

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi in\nu}.$$

Applicando ad ambo i membri la trasformata di Fourier otteniamo allora che

$$\mathcal{F}(T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(e^{2\pi in\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$$

che è la tesi. Si osservi che si è usata la continuità della trasformata in $\mathscr{S}'$, cioè il seguente lemma, la cui semplice dimostrazione è lasciata per esercizio.

Lemma 5.45 *Supponiamo che $T_n, T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ e che $T_n \to T$ in $\mathscr{S}'$, che significa che*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Allora $\mathcal{F}(T_n) \to \mathcal{F}(T)$, cioè $\lim_{n\to\infty}\langle \mathcal{F}(T_n), \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle$ per ogni φ.

Concludiamo con un breve cenno alla cosiddetta *teoria quadratica della trasformata di Fourier*. Una funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile in $\mathbb{R}$ si dice *a quadrato sommabile (in $\mathbb{R}$)* se $|g|^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è sommabile. Denotiamo con

$L^2(\mathbb{R})$ le funzioni a quadrato sommabile. Si può dimostrare il seguente risultato. Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è sia sommabile sia a quadrato sommabile, allora $\hat{g}$ è a quadrato sommabile e

$$\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2$$

dove $\|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2}$. La relazione precedente è nota col nome di *uguaglianza di Parseval.*

È anche possibile dimostrare che ogni funzione g a quadrato sommabile (non necessariamente sommabile) è una distribuzione temperata (più precisamente $T_g \in \mathscr{S}'$ se $g \in L^2$). Allora ha senso farne la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni. Utilizzando un'estensione dell'integrale di Riemann, chiamato *integrale di Lebesgue*, è possibile mostrare che $\mathcal{F}(g)$ è ancora una funzione è soddisfa ancora l'uguaglianza di Parseval e la formula di inversione in un opportuno senso generalizzato.

5.7 L'equazione del calore

All'inizio del capitolo abbiamo motivato lo studio della trasformata $\mathcal{F}$ con l'esigenza di disporre di uno strumento per l'analisi dei segnali non periodici. Tuttavia storicamente Fourier ha introdotto la trasformata per studiare problemi di diffusione del calore. Vediamo di cosa si tratta considerando l'equazione del calore in una dimensione spaziale x nell'incognita $u(t,x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \mathbb{R} \tag{5.58}$$

soggetta alla condizione iniziale

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{5.59}$$

dove $u_0(x)$ è una funzione assegnata e $t \geq 0$ ha il significato di variabile temporale. Da un punto di vista fisico, il problema (5.58)-(5.59) descrive le temperatura $u(t,x)$ nel punto x all'istante t di un corpo unidimensionale che all'istante iniziale $t = 0$ presenta una temperatura $u_0(x)$ nel punto x. L'idea è quella di applicare ad ambo i membri dell'equazione la trasformata di Fourier nella variabile x, pensando t come un parametro fissato. Trattandosi di una sorta di trasformata di Fourier parziale, alcuni dei passaggi seguenti andrebbero giustificati in questo nuovo contesto. Noi non ci preoccupiamo di questo ed inoltre assumiamo che il dato u_0 e la soluzione che cerchiamo siano abbastanza regolari da poter giustificare i conti che seguono. Trasformando otteniamo allora

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,\nu) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t,\nu). \tag{5.60}$$

Ossrviamo che per il il primo membro si ha

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-2\pi i\nu x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)e^{-2\pi i\nu x}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u)(t,\nu).$$

Utilizzando le proprietà della trasformata possiamo riscrivere l'equazione ottenuta come

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,\nu) = -4\pi^2\nu^2\mathcal{F}(u)(t,\nu) \tag{5.61}$$

Trasformando la condizione iniziale si trova invece

$$\mathcal{F}(u(0,x))(\nu) = \mathcal{F}(u_0)(\nu). \tag{5.62}$$

Se per semplificare la scrittura poniamo $v(t,\nu) := \mathcal{F}(u)(t,\nu)$, abbiamo trasformato il problema nel sistema

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t,\nu) = -4\pi^2\nu^2 v(t,\nu), \tag{5.63}$$
$$v(0,\nu) = \mathcal{F}(u_0)(\nu). \tag{5.64}$$

Questo è un semplice problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria avente come soluzione

$$v(t,\nu) = e^{-4\pi^2\nu^2 t}\mathcal{F}(u_0)(\nu).$$

Sappiamo però che $\mathcal{F}(e^{-x^2/4t})(\nu) = \sqrt{4\pi t}e^{-4\pi^2\nu^2 t}$, quindi

$$v(t,\nu) = e^{-4\pi^2\nu^2 t}\mathcal{F}(u_0)(\nu) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}\right)\mathcal{F}(u_0)(\nu)$$
$$= \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t} * u_0(x)\right) \tag{5.65}$$

dove $*$ indica il prodotto di convoluzione. Infine antitrasformando troviamo che la soluzione dell'equazione del calore con condizione iniziale $u_0(x)$ è

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/4t}u_0(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{5.66}$$

La formula ottenuta è di grande importanza nello studio di fenomeni di diffusione del calore.

5.8 Tabelle

Proprietà

$\mathcal{F}(e^{2\pi i\nu_0 t}T(t))(\nu) = \mathcal{F}(T(t))(\nu - \nu_0)$	$(\nu_0 \in \mathbb{R})$
$\mathcal{F}(T(t - t_0))(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu}\mathcal{F}(T(t))(\nu)$	$(t_0 \in \mathbb{R})$
$\mathcal{F}(T(at))(\nu) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\mathcal{F}(T(t))\left(\frac{\nu}{a}\right)$	$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
$\mathcal{F}(T(-t))(\nu) = \mathcal{F}(T(t))(-\nu)$	
$[\mathcal{F}(T(t))]^{(p)} = (-2\pi i)^p \mathcal{F}(t^p T(t))$	$(p \in \mathbb{N})$
$\mathcal{F}(T^{(p)})(\nu) = (2\pi i)^p \nu^p \mathcal{F}(T)(\nu)$	$(p \in \mathbb{N})$

Trasformate $(a > 0)$

$T(t)$	$\mathcal{F}(T(t))(\nu)$
$H(t)e^{-at}$	$\dfrac{1}{a+2\pi i\nu}$
$e^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$
$p_a(t)$	$\dfrac{\sin(a\pi\nu)}{\pi\nu}$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\nu^2/a}$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-2\pi a\|\nu\|}$

$T(t)$	$\mathcal{F}(T(t))(\nu)$
$\dfrac{\sin(at)}{t}$	$\pi p_{\frac{a}{\pi}}(\nu)$
δ_{x_0}	$e^{-2\pi i x_0\nu}$
$e^{2\pi i x_0\nu}$	δ_{x_0}
v.p. $\frac{1}{t}$	$-\pi i\,\mathrm{sign}(\nu)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\dfrac{1}{\pi i}$ v.p. $\dfrac{1}{\nu}$
$H(t)$	$\dfrac{1}{2\pi i}$ v.p. $\dfrac{1}{\nu}+\dfrac{\delta_0}{2}$

5.9 Esercizi

Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni e distribuzioni.

1. $g(t) = te^{-t^2}$
2. $g(t) = e^{-2t^2+4t}$
3. $g(t) = \cos t$
4. $g(t) = \cos(2t+1)$
5. $g(t) = \cos t\ e^{-3t}H(t)$
6. $g(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$
7. $g(t) = |t|e^{-|t|}$
8. $g(t) = p_T(t-t_0)$ (dove $t_0 \in \mathbb{R}$ e $T > 0$)
9. $g(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}$ (dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$)
10. $g(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1 < t < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
    (suggerimento: scrivere g come somma di opportune funzioni porta).
11. $g(t) = te^{-|t+2|/2}$
12. $g(t) = \dfrac{t\sin(2t)}{(t^2+4)^2}$ (suggerimento: procedere come nell'esempio 5.36)
13. $g(t) = tH(t)$
14. $g(t) = |t|$ (procedere come fatto a lezione oppure osservando che $|t| = t\,\mathrm{sign}\,t$)
15. $g(t) = H(t-2)e^{-2t}$
16. $g(t) = p_{2\pi}(t)\sin t$
17. $g(t) = e^{-5t}\sin tH(t)$
18. $g(t) = p_\pi(t)\cos t$
19. $g(t) = \mathbb{1}_{[1,2]}(t)\sin t$ (per abbreviare il conto si può utilizzare l'esercizio 9)

20.* $g(t) = \arctan t$

21.* $g(t) = \log(t^2+1) - 2\log|t|$

Risposte:

1. $-i\pi\sqrt{\pi}\nu e^{-\pi^2\nu^2}$
2. $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^2 e^{\pi\nu(2i-\pi\nu/2)}$
3. $\dfrac{1}{2}(\delta_{1/2\pi} + \delta_{-1/2\pi})$
4. $\dfrac{1}{2}(e^i\delta_{1/\pi} + e^{-i}\delta_{-1/\pi})$
5. $\dfrac{3+2\pi i\nu}{(3+2\pi i\nu)^2+1}$
6. $-\pi e^{-2\pi|\nu|} + \delta_0$
7. $\dfrac{-8\pi i\nu}{(1+4\pi^2\nu^2)^2}$
8. $e^{-2\pi i\nu t_0}\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu}$

9. $e^{-\pi i\nu(a+b)}\frac{\sin(\pi\nu(b-a))}{\pi\nu}$
10. $\dfrac{1}{\pi\nu}(2e^{\pi i\nu}\sin(\pi\nu)-e^{-2\pi i\nu}\sin(2\pi\nu))$
11. $8ie^{4\pi i\nu}\dfrac{i(1+16\pi^2\nu^2)-8\pi\nu}{(1+16\pi^2\nu^2)^2}$
12. $\dfrac{\pi}{4}\left[(1-\pi\nu)e^{-4\pi|\nu-1/\pi|}+(1+\pi\nu)e^{-4\pi|\nu+1/\pi|}\right]$.
13. $\dfrac{1}{4\pi}\left[\dfrac{1}{\pi}\left(\text{v.p.}\,\dfrac{1}{\nu}\right)'+i\delta_0'\right]$
14. $\dfrac{1}{2\pi^2}\left(\text{v.p.}\,\dfrac{1}{\nu}\right)'$
15. $\dfrac{e^{-4(1+\pi i\nu)}}{2+2\pi i\nu}$
16. $\dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{\sin(2\pi^2(\nu-1/2\pi))}{\pi(\nu-1/2\pi)}-\dfrac{\sin(2\pi^2(\nu+1/2\pi))}{\pi(\nu+1/2\pi)}\right]$
17. $\dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{1}{5+2\pi i(\nu-1/2\pi)}-\dfrac{1}{5+2\pi i(\nu+1/2\pi)}\right]$
18. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(\pi^2(\nu-1/2\pi))}{\pi(\nu-1/2\pi)}+\dfrac{\sin(\pi^2(\nu+1/2\pi))}{\pi(\nu+1/2\pi)}\right]$
19. $\dfrac{1}{2i}\left[e^{-3\pi i(\nu-1/2\pi)}\dfrac{\sin(\pi(\nu-1/2\pi))}{\pi(\nu-1/2\pi)}-e^{-3\pi i(\nu+1/2\pi)}\dfrac{\sin(\pi(\nu+1/2\pi))}{\pi(\nu+1/2\pi)}\right]$
20. Poiché $g'(t)=\frac{1}{1+t^2}$ si ha $\widehat{g'}(\nu)=\mathcal{F}(1/(1+t^2))(\nu)=\pi e^{-2\pi|\nu|}$. Ma $\widehat{g'}(\nu)=2\pi i\nu\hat{g}(\nu)$, quindi $2i\nu\hat{g}(\nu)=e^{-2\pi|\nu|}$. Non possiamo dividere per ν perchè $\hat{g}$ è una distribuzione, quindi ricordando che $\nu\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}=1$, scriviamo $2i\nu\hat{g}(\nu)=e^{-2\pi|\nu|}\nu\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}$, cioè $\nu(2i\hat{g}(\nu)-e^{-2\pi|\nu|}\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu})=0$. Ricordiamo ora dalla teoria che $\nu T(\nu)=0$ implica che $T(\nu)=c\delta_0$ per una qualche costante c. Troviamo allora che $2i\hat{g}(\nu)-e^{-2\pi|\nu|}\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}=c\delta_0$. Ora abbiamo che $e^{-2\pi|\nu|}$ è pari e v.p. $\frac{1}{\nu}$ è dispari, ne segue che $e^{-2\pi|\nu|}\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}$ è dispari (esercizio). Inoltre $g(t)$ è dispari, quindi $\hat{g}(\nu)$ è dispari. Ne segue allora che è dispari $2i\hat{g}(\nu)-e^{-2\pi|\nu|}\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}$, che però è uguale a $c\delta_0$ che è pari, quindi $c=0$. In definitiva abbiamo $\hat{g}(\nu)=\frac{1}{2i}e^{-2\pi|\nu|}\,\text{v.p.}\,\frac{1}{\nu}$.
21. La funzione $g(t)$ risulta sommabile su $\mathbb{R}$, infatti per $t\to 0$ $g(t)\sim 2\log|t|$, mentre per $t\to\pm\infty$ $g(t)=\log(1+1/t^2)\sim 1/t^2$. Si ha $g'(t)=\frac{2t}{1+t^2}-2\,\text{v.p.}(\frac{1}{t})$, quindi trasformando ambo i membri otteniamo che $\widehat{g'}(\nu)=2\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left[\mathcal{F}(\frac{1}{1+t^2})\right]'(\nu)+2\pi i\,\text{sign}(\nu)=\frac{i}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}(e^{-2\pi|\nu|})+2\pi i\,\text{sign}(\nu)=\frac{i}{\pi}(-2\pi)e^{-2\pi|\nu|}\,\text{sign}(\nu)+2\pi i\,\text{sign}(\nu)=2\pi i\,\text{sign}(\nu)(1-\frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi})$. D'altra parte $\widehat{g'}(\nu)=2\pi i\nu\hat{g}(\nu)$, quindi $2\pi i\nu\hat{g}(\nu)=2\pi i\,\text{sign}(\nu)(1-\frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi})$, da cui segue che $\nu\hat{g}(\nu)=\text{sign}(\nu)(1-\frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi})$ e quindi $\hat{g}(\nu)=\frac{\text{sign}(\nu)}{\nu}(1-\frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi})=\frac{1}{|\nu|}(1-\frac{e^{-2\pi|\nu|}}{\pi})$, infatti essendo g è sommabile, si ha che $\hat{g}\in C(\mathbb{R})$, cioè $\hat{g}$ è ancora una funzione).

5.10 Appendice: teoremi sull'integrazione

In questa appendice enunciamo senza dimostrazione l'estensione al caso degli integrali impropri di alcuni teoremi dell'Analisi II riguardanti gli integrali doppi e gli integrali dipendenti da un parametro. Nell'ambito del nostro corso non è indispensabile conoscere a mente gli enunciati di tali teoremi, tuttavia è bene essere consapevoli che le operazioni di passaggio al limite o di derivazione sotto il segno di integrale non sono lecite in generale, ma necessitano di alcune ipotesi.

Teorema 5.46 (Convergenza dominata) *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia* $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *una funzione sommabile tale che per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *esista* $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) \in \mathbb{C}$. *Supponiamo che* f *sia sommabile e che esista* $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ *sommabile tale che* $|f_n(t)| \leq g(t)$ *per ogni* t. *Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Teorema 5.47 *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *una funzione di classe* C^1 *tale che per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *sia convergente l'integrale*

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Se esiste una funzione sommabile $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ *tale che* $|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x,t)| \leq g(t)$. *Allora* F *è derivabile e*

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Teorema 5.48 (Fubini) *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *una funzione integrabile su* $\mathbb{R}^2$. *Allora*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{5.67}$$

dove si suppone che i due membri hanno senso.

Per quanto riguarda il Teorema di Fubini, è possibile dimostrare che non è necessario supporre che i due membri di (5.67) abbiano senso: l'integrabilità di F su $\mathbb{R}^2$ implica l'esistenza dei due integrali iterati, purché F sia modificata in un opportuno insieme "piccolo", cioè che non altera il valore di tali integrali.