1

Numeri complessi e funzioni elementari

1.1 Numeri complessi

È ben noto che non tutte le equazioni algebriche

$$p(x) = 0$$

(dove p è un polinomio di grado n nella variabile x) ammettono soluzioni in campo reale. Ad esempio la semplice equazione $x^2 + 1 = 0$, ossia

$$x^2 = -1\,, \tag{1.1}$$

corrispondente all'estrazione della radice quadrata del numero negativo -1, non è risolubile in $\mathbb{R}$; lo stesso accade per la generica equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.2}$$

qualora il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ sia negativo. Tanto nella matematica pura quanto in quella applicata, risulta utile poter garantire l'esistenza di soluzioni, opportunamente definite, di ogni equazione algebrica. A tale scopo, l'insieme dei numeri reali dotato delle operazioni di somma e prodotto può essere ampliato, introducendo il cosiddetto insieme dei numeri complessi, estendendo nel contempo tali operazioni e conservandone le proprietà formali. È rimarchevole il fatto che è sufficiente effettuare tale ampliamento in modo da garantire la risolubilità dell'equazione (1.1) per ottenere, attraverso un profondo risultato noto come Teorema Fondamentale dell'Algebra, la risolubilità di ogni equazione algebrica.

1.1.1 Operazioni algebriche

Un **numero complesso** z può essere definito come una coppia ordinata $z = (x, y)$ di numeri reali x e y. Indicheremo con $\mathbb{C}$ l'insieme di tali coppie, che quindi può essere identificato con l'insieme $\mathbb{R}^2$. I numeri reali x e y sono detti rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** di z e indicati con

$$x = \mathcal{R}e\, z \qquad \text{e} \qquad y = \mathcal{I}m\, z\,.$$

Il sottoinsieme dei numeri complessi della forma $(x, 0)$ può essere identificato con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$; in tal senso, scriviamo $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Numeri complessi della forma $(0, y)$ sono invece detti **immaginari puri**.

Diremo che due numeri complessi $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono uguali se hanno le stesse parti reali e immaginarie, ossia

$$z_1 = z_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2\,.$$

In $\mathbb{C}$, definiamo le operazioni di somma e prodotto come

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1.3}$$

$$z_1\, z_2 = (x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2, x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\,. \tag{1.4}$$

Osserviamo che

$$(x, 0) + (0, y) = (x, y)\,, \qquad (0, 1)\,(y, 0) = (0, y)$$

e quindi

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)\,(y, 0)\,. \tag{1.5}$$

Inoltre le (1.3) e (1.4) diventano le usuali operazioni di somma e prodotto quando sono ristrette ai numeri reali:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \qquad \text{e} \qquad (x_1, 0)\,(x_2, 0) = (x_1\, x_2, 0)\,.$$

In tal senso, l'insieme dei numeri complessi è un'estensione naturale dell'insieme dei numeri reali.

Denotiamo con i il numero immaginario puro $(0, 1)$. Identificando il numero complesso $(r, 0)$ con il numero reale r, possiamo riscrivere la (1.5) nella forma

$$\boxed{z = x + iy\,,}$$

detta **forma cartesiana** o **algebrica** del numero complesso $z = (x, y)$.

Osserviamo che

$$\boxed{i^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0) = -1\,,}$$

e quindi il numero complesso i è soluzione dell'equazione (1.1). Usando la forma cartesiana di un numero complesso, le operazioni di somma e prodotto (1.3) e (1.4) diventano

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)\,,} \tag{1.6}$$

$$\boxed{z_1\, z_2 = (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) = x_1\, x_2 - y_1\, y_2 + i(x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\,;} \tag{1.7}$$

come si vede è sufficiente operare con le usuali regole dell'algebra, tenendo conto della relazione $i^2 = -1$.

Elenchiamo di seguito alcune proprietà della somma e del prodotto, lasciando la facile verifica al lettore; per ogni $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ si ha

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 = z_2 + z_1\,, && z_1\,z_2 = z_2\,z_1\,,\\ &(z_1+z_2)+z_3 = z_1 + (z_2+z_3)\,, && (z_1\,z_2)\,z_3 = z_1\,(z_2\,z_3)\,,\\ &z_1\,(z_2+z_3) = z_1\,z_2 + z_1\,z_3\,. \end{aligned}$$

I numeri $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$ sono rispettivamente l'identità additiva e moltiplicativa, in quanto soddisfano

$$z + 0 = 0 + z = z \qquad \text{e} \qquad z\,1 = 1\,z = z\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

L'**opposto** (additivo) di $z = (x,y)$ è il numero $-z = (-x,-y)$; ovvero si ha $z + (-z) = 0$. Utilizzando tale nozione possiamo definire, per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la **sottrazione**:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

ovvero

$$x_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)\,.$$

Il **reciproco** (moltiplicativo) di un numero $z \neq 0$, indicato con $\frac{1}{z}$ oppure z^{-1}, è definito dalla relazione $zz^{-1} = 1$; non è difficile verificare che

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}\,.$$

Definiamo dunque la **divisione**, per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_2 \neq 0$, come

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\,z_2^{-1} = \frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2\,y_1 - x_1\,y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Osservazione 1.1 Si noti che l'usuale ordinamento dei numeri reali non è estendibile all'insieme dei numeri complessi. Infatti se fosse possibile definire una relazione d'ordine compatibile con le operazioni di somma e prodotto, si dovrebbe avere $z_1 w \leq z_2 w$ se $z_1 \leq z_2$ e $w \geq 0$. In particolare si avrebbe $z^2 \geq 0$ per ogni z. Ne seguirebbe allora che $1 = 1 \cdot 1 > 0$ e allo stesso tempo che $-1 = i \cdot i > 0$. □

1.1.2 Coordinate cartesiane

È naturale associare al numero $z = (x,y) = x + iy$ il punto del piano cartesiano di coordinate x e y (si veda la Figura 1.1). Il numero z può anche essere pensato come il vettore applicato nell'origine e avente tale punto come estremo. L'asse x è detto **asse reale** e l'asse y **asse immaginario**. Osserviamo che, dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la somma $z_1 + z_2$ corrisponde al vettore somma ottenuto mediante la regola del parallelogramma (si veda la Figura 1.2, a sinistra), mentre la differenza $z_1 - z_2$ è rappresentata dal vettore differenza (si veda la Figura 1.2, a destra).

Il **modulo** (o **valore assoluto**) di $z = x + iy$, denotato con $|z|$, è il numero positivo

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

che rappresenta la distanza del punto (x, y) dall'origine; si osservi che tale definizione coincide con quella di modulo del vettore $\boldsymbol{v}$ associato a z, vale a dire $|z| = \|\boldsymbol{v}\|$. Si osservi inoltre che il modulo di un numero complesso coincide con il valore assoluto quando il numero è reale, il che giustifica la notazione usata. Notiamo che, mentre l'affermazione $z_1 < z_2$ non ha in generale significato, la diseguaglianza $|z_1| < |z_2|$ significa che il punto corrispondente a z_1 è più vicino all'origine del punto corrispondente a z_2. La distanza tra i punti corrispondenti a z_1 e z_2 è data da $|z_1 - z_2|$.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ottengono facilmente le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&|z| \geq 0\,; \quad |z| = 0 \text{ se e solo se } z = 0\,;\\
&|z|^2 = (\mathcal{R}e\, z)^2 + (\mathcal{I}m\, z)^2\,;\\
&\mathcal{R}e\, z \leq |\mathcal{R}e\, z| \leq |z|\,, \quad \mathcal{I}m\, z \leq |\mathcal{I}m\, z| \leq |z|\,;\\
&\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.
\end{aligned}$$

Il **complesso coniugato**, o semplicemente il coniugato, di un numero complesso $z = x + iy$, indicato con $\bar{z}$, è definito come

$$\boxed{\bar{z} = x - iy\,.} \tag{1.8}$$

Graficamente il coniugato $\bar{z}$ è rappresentato dal punto $(x, -y)$ che si ottiene mediante riflessione rispetto all'asse reale del punto (x, y). Per ogni $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar{z}} = z\,, && |\bar{z}| = |z|\,, && z\,\bar{z} = |z|^2\,,\\
&\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\,, && \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2\,,\\
&\overline{z_1\, z_2} = \bar{z}_1\, \bar{z}_2\,, && \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)\,.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

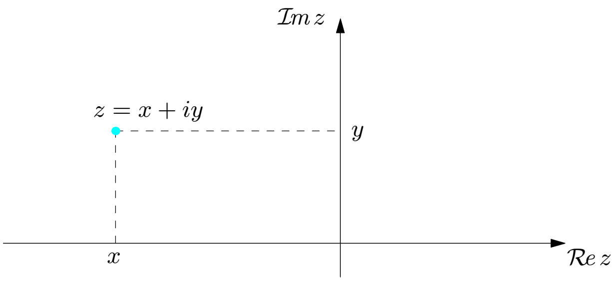

Figura 1.1. Coordinate cartesiane del numero complesso $z = x + iy$

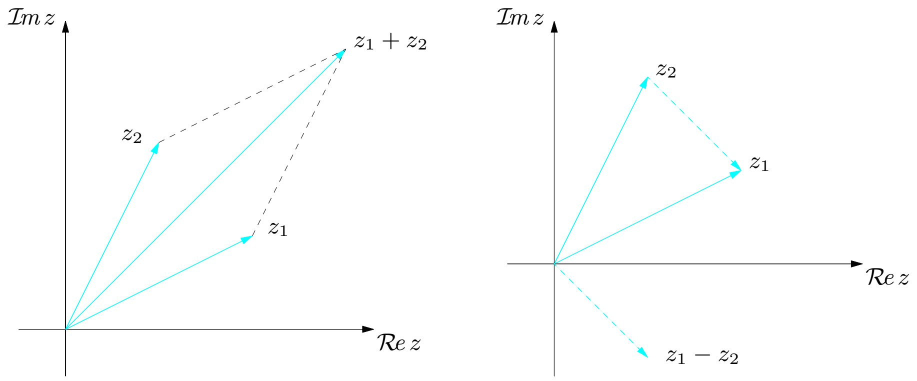

Figura 1.2. Rappresentazione grafica della somma (a sinistra) e della differenza (a destra) di due numeri complessi z_1 e z_2

È immediato verificare che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\mathcal{R}e\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}\,, \qquad \mathcal{I}m\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,.}$$

1.1.3 Forma trigonometrica e forma esponenziale

Dato il punto (x, y), siano r e θ le sue coordinate polari; poiché

$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\sin\theta\,,$$

il numero complesso $z = (x, y)$ può essere rappresentato nella **forma polare** o **trigonometrica** come

$$\boxed{z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,.} \tag{1.10}$$

Si ha $r = |z|$; il numero θ è detto **argomento** di z e indicato con $\theta = \arg z$. Geometricamente, $\arg z$ è un qualsiasi angolo (misurato in radianti) formato dalla semiretta dei reali positivi e dal vettore individuato da z (si veda la Figura 1.3). Pertanto può assumere infiniti valori che differiscono per multipli interi di 2π. Chiameremo **valore principale** di $\arg z$, denotandolo con $\operatorname{Arg} z$, quell'unico valore θ di $\arg z$ tale che $-\pi < \theta \le \pi$; esso è definito dalla formula

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}\,, & \text{se } x > 0\,, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi\,, & \text{se } x < 0,\ y \ge 0\,, \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi\,, & \text{se } x < 0,\ y < 0\,, \\ \dfrac{\pi}{2}\,, & \text{se } x = 0,\ y > 0\,, \\ -\dfrac{\pi}{2}\,, & \text{se } x = 0,\ y < 0\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

Osserviamo che due numeri complessi $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ sono uguali se e solo se $r_1 = r_2$ e θ_1, θ_2 differiscono per un multiplo intero di 2π.

La rappresentazione polare risulta molto utile per esprimere in maniera semplice il prodotto di due numeri complessi; di conseguenza, fornisce un'espressione elementare per il calcolo delle potenze e delle radici di un numero complesso. Più precisamente, siano

$$z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad \text{e} \qquad z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,;$$

allora, ricordando le formule di addizione per le funzioni trigonometriche, si ha

$$\begin{aligned} z_1\,z_2 &= r_1\,r_2\,\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\big] \\ &= r_1\,r_2\,\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big]\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Vale dunque la relazione

$$\arg\,(z_1\,z_2) = \arg z_1 + \arg z_2\,. \tag{1.13}$$

Si osservi che tale identità non vale se sostituiamo arg con Arg; ad esempio, se $z_1 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$ e $z_2 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ risulta

$$z_1\,z_2 = -i = \cos\big(-\frac{\pi}{2}\big) + i\sin\big(-\frac{\pi}{2}\big)$$

ovvero

$$\mathrm{Arg}\,z_1 = \pi\,, \qquad \mathrm{Arg}\,z_2 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2 = \frac{3}{2}\pi \neq \mathrm{Arg}\,z_1\,z_2 = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Talvolta è comodo esprimere un numero complesso attraverso la cosiddetta **forma esponenziale**. A tale scopo, estendiamo la definizione di funzione esponenziale al caso di un esponente immaginario puro, ponendo per ogni $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,.} \tag{1.14}$$

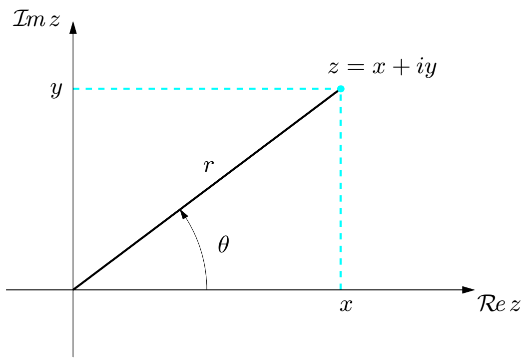

Figura 1.3. Coordinate polari del numero complesso $z = x + iy$

Tale relazione, nota come **formula di Eulero**, trova una giustificazione (anzi è oggetto di dimostrazione) nell'ambito della teoria delle serie in campo complesso. Accontentiamoci qui di prenderla come definizione. L'espressione (1.10) di un numero complesso z diventa allora

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta}\,, \tag{1.15}$$

che è, appunto, la forma esponenziale di z. Il complesso coniugato di z si esprime come

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = r\mathrm{e}^{-i\theta}\,.$$

La relazione (1.12) fornisce immediatamente l'espressione del prodotto di due numeri complessi $z_1 = r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2\mathrm{e}^{i\theta_2}$, come

$$\boxed{z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}\,;} \tag{1.16}$$

dunque, per moltiplicare due numeri complessi è sufficiente moltiplicare i moduli e sommare gli argomenti. Per quanto riguarda il quoziente, notiamo che dalla (1.12) con $r_1 = r_2 = 1$, si ottiene

$$\mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2} = \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}\,. \tag{1.17}$$

In particolare,

$$\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-i\theta} = 1$$

e dunque $\mathrm{e}^{-i\theta}$ è il reciproco di $\mathrm{e}^{i\theta}$; pertanto il reciproco di un numero complesso $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$ è dato da

$$z^{-1} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}\,. \tag{1.18}$$

Combinando tale formula con quella del prodotto, otteniamo l'espressione del quoziente di due numeri complessi $z_1 = r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2\mathrm{e}^{i\theta_2} \neq 0$, data da

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}\,.} \tag{1.19}$$

1.1.4 Potenze e radici

Iterando le relazioni (1.16) e (1.18), per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ottiene

$$\underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ volte}} = z^n = r^n\,\mathrm{e}^{in\theta}\,; \tag{1.20}$$

in particolare, quando $r = 1$, si ottiene la cosiddetta **formula di De Moivre**

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,.} \tag{1.21}$$

Mediante la (1.20) possiamo affrontare il problema del calcolo della radice n-esima di un numero complesso. Fissato un intero $n \geq 1$ e un numero complesso

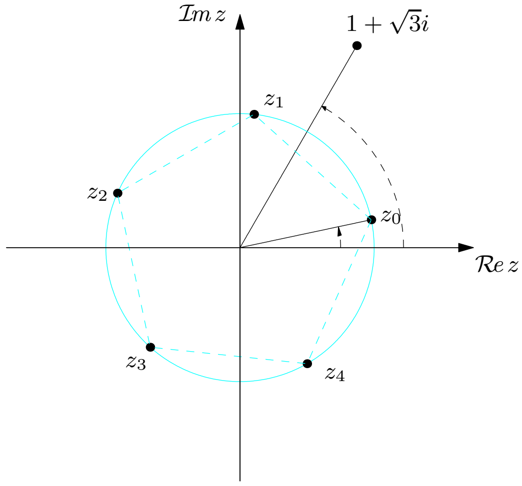

Figura 1.4. Rappresentazione grafica del punto $1+\sqrt{3}i$ e delle sue radici quinte, z_j, $j=0,\dots,4$

$w = \rho\, \mathrm{e}^{i\varphi}$, vogliamo determinare i numeri complessi $z = r\, \mathrm{e}^{i\theta}$ soddisfacenti $z^n = w$. Dalla (1.20), si ha

$$z^n = r^n\, \mathrm{e}^{in\theta} = \rho\, \mathrm{e}^{i\varphi} = w$$

e dunque, ricordando la condizione di uguaglianza tra due numeri complessi, dovranno essere verificate le condizioni

$$\begin{cases} r^n = \rho\,, \\ n\theta = \varphi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases}$$

ovvero

$$\boxed{\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}\,, \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}}$$

Si noti che l'espressione di θ non fornisce necessariamente i valori principali degli argomenti delle radici.
Ricordando la periodicità del seno e del coseno, risultano quindi determinate n soluzioni distinte del nostro problema, date da

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\, \mathrm{e}^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\,,} \tag{1.22}$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Geometricamente tali punti si trovano sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e sono i vertici di un poligono regolare di n lati (si veda la Figura 1.4). Nel seguito, useremo il simbolo $\sqrt[n]{w}$ per indicare l'insieme delle soluzioni z dell'equazione $z^n = w$.

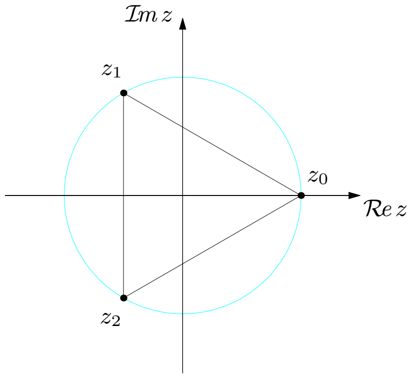

Figura 1.5. Radici dell'unità: terze (a sinistra) e seste (a destra)

Esempi 1.2

i) Si consideri, per $n \geq 1$, l'equazione

$$z^n = 1\,.$$

Scrivendo $1 = 1\mathrm{e}^{i0}$, si ottengono le n radici distinte

$$z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

dette **le radici n-esime dell'unità**. Si noti che per n dispari, si ha un'unica radice reale $z_0 = 1$, mentre per n pari si hanno due radici reali $z_0 = 1$ e $z_{n/2} = -1$ (si veda la Figura 1.5).

ii) Verifichiamo che l'equazione

$$z^2 = -1$$

ammette, come ci si aspetta, le due radici $z_\pm = \pm i$. Scriviamo $-1 = 1\mathrm{e}^{i\pi}$, da cui otteniamo

$$z_+ = z_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \text{e} \quad z_- = z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi+2\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\,. \qquad \square$$

Notiamo infine che la (1.14) permette di definire l'esponenziale di un qualunque numero complesso $z = x + iy$, ponendo

$$\boxed{\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)\,.} \tag{1.23}$$

Con tale definizione, usando la (1.17), è facile verificare, che la proprietà fondamentale $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ continua a valere in campo complesso. Si noti che si ha

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathcal{R}e\, z} > 0\,, \qquad \arg \mathrm{e}^z = \mathcal{I}m\, z\,;$$

la prima relazione mostra in particolare che $\mathrm{e}^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Inoltre, la periodicità delle funzioni trigonometriche implica che

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi i} = \mathrm{e}^z\,, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}\,; \tag{1.24}$$

infatti

$$e^{z+2\pi i} = e^z \, e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z \,, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \,.$$

Esempio 1.3

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione $e^z = 1$. Dalla periodicità dell'esponenziale complesso (1.24) e dal fatto che 2π è il periodo minimo delle funzioni trigonometriche reali seno e coseno, segue che

$$e^z = 1 \iff e^z = e^0 \iff z = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In alternativa, si pone $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, e si riscrive l'equazione come

$$e^x e^{iy} = e^{i0};$$

essa è equivalente a

$$\begin{cases} e^x = 1 \\ y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff z = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.1.5 Equazioni algebriche

Mostriamo ora che l'equazione di secondo grado a coefficienti reali

$$az^2 + bz + c = 0$$

ammette due soluzioni complesse coniugate nel caso in cui il discriminante Δ sia negativo. Non è restrittivo supporre $a > 0$. Ricordando lo sviluppo del quadrato di un binomio, possiamo scrivere

$$0 = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = \left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \,,$$

ossia

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} < 0 \,;$$

dunque otteniamo

$$z + \frac{b}{2a} = \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

cioè

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \,.$$

Tale espressione può essere scritta come $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, in analogia con il caso di discriminante ≥ 0.

Notiamo che il procedimento seguito può essere applicato anche nel caso in cui i coefficienti $a \neq 0$, b e c siano numeri complessi. Pertanto l'espressione

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

definisce le due soluzioni dell'equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$, nella situazione più generale possibile. Per quanto visto nel Paragrafo 1.1.4, e' possibile omettere il simbolo $\pm$ davanti alla radice, in quanto è implicito nel simbolo $\sqrt{\ }$.

Le equazioni algebriche di terzo e quarto grado ammettono rispettivamente tre e quattro soluzioni (contate con le opportune molteplicità) che sono esprimibili in forma esplicita mediante le operazioni algebriche e l'estrazione di radici quadrate e cubiche[1]. Non esiste invece una espressione analitica per le soluzioni di equazioni di ordine superiore al quarto. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra garantisce però che ogni equazione algebrica $p(z) = 0$, dove p è un polinomio di grado n a coefficienti reali o complessi, ammette esattamente n soluzioni in campo complesso, ciascuna con l'opportuna molteplicità. L'enunciato preciso è il seguente.

Teorema 1.4 *Sia $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, con $a_n \neq 0$, un polinomio di grado $n \geq 1$ avente coefficienti $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq n$. Allora esistono $m \leq n$ numeri complessi $z_1, \ldots, z_m$, distinti tra loro, ed m numeri interi $\mu_1, \ldots, \mu_m$ maggiori o uguali a 1 e soddisfacenti $\mu_1 + \ldots + \mu_m = n$, tali che $p(z)$ si fattorizza come*

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{\mu_1} \ldots (z - z_m)^{\mu_m} .$$

I numeri z_k sono le radici del polinomio p, ossia le uniche soluzioni dell'equazione $p(z) = 0$; l'esponente μ_k è la molteplicità della radice z_k. Una radice si dice semplice se la sua molteplicità è 1, doppia se la sua molteplicità è 2, e così via.

È opportuno osservare che se i coefficienti di p sono reali e se z_0 è una radice complessa del polinomio, allora anche $\bar{z}_0$ è una radice di p. Infatti se $p(z_0) = 0$, allora, prendendo il coniugato di ambo i membri e usando le proprietà del passaggio al coniugato in una somma o in un prodotto (vedasi le (1.9)), otteniamo

$$0 = \bar{0} = \overline{p(z_0)} = \bar{a}_n \bar{z}_0^n + \ldots + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_0 = a_n \bar{z}_0^n + \ldots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = p(\bar{z}_0) .$$

Pertanto $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$, che risulta essere un trinomio di secondo grado a coefficienti reali.

[1] Ad esempio, l'equazione di terzo grado $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ si riduce con la sostituzione $x = y - \frac{a}{3}$ all'equazione $y^3 + py + q = 0$ per opportuni coefficienti p e q facilmente calcolabili. Le soluzioni di tale equazione sono espresse dalla formula

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} ,$$

nota come formula di Cardano. Poiché ogni estrazione di radice fornisce un numero di soluzioni (eventualmente coincidenti) pari all'ordine (2 o 3) della radice, apparentemente tale formula fornisce fino a 12 soluzioni; tuttavia, è possibile verificare che le soluzioni distinte sono al più 3.

1.2 Elementi di topologia

Allo scopo di studiare limiti e continuità delle funzioni di variabile complessa, introduciamo vari concetti relativi a sottoinsiemi di $\mathbb{C}$.

Mediante il concetto di distanza, possiamo definire gli intorni di un punto in $\mathbb{C}$.

Definizione 1.5 *Sia* $z_0 \in \mathbb{C}$ *e sia* $r > 0$ *un numero reale. Chiamiamo* **intorno** *di* z_0 *di raggio* r *l'insieme*

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

costituito da tutti i punti di $\mathbb{C}$ *che distano meno di* r *da* z_0.

Dunque $B_r(z_0)$ è il cerchio di centro z_0 e raggio r (si veda la Figura 1.6).

Sia ora $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme di numeri complessi. Ricordiamo che $\mathscr{C}\Omega = \Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ indica il complementare di Ω.

Definizione 1.6 *Un punto* $z \in \mathbb{C}$ *dicesi*

i) **punto interno** *a* Ω *se esiste un intorno* $B_r(z)$ *contenuto in* Ω*;*
ii) **punto esterno** *a* Ω *se è punto interno al complementare* $\mathscr{C}\Omega$*;*
iii) **punto di frontiera** *di* Ω *se non è né interno né esterno a* Ω*.*

Si veda la Figura 1.7 per una rappresentazione grafica delle varie situazioni descritte nella definizione precedente.

Un punto di frontiera può essere definito, in modo equivalente, come un punto tale che ogni suo intorno contiene sia punti di Ω sia punti di $\mathscr{C}\Omega$. Da ciò segue in particolare che i punti di frontiera di Ω e del suo complementare coincidono.

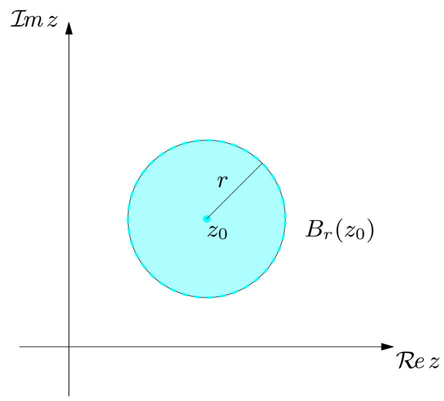

Figura 1.6. Intorno $B_r(z_0)$ di centro z_0 e raggio $r > 0$

Esempio 1.7

Si consideri il disco unitario $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ allora tutti i punti z di modulo < 1 sono interni a Ω e tutti i punti della circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sono punti di frontiera. □

Definizione 1.8 *L'insieme dei punti interni a Ω costituisce l'***interno** *di Ω e viene indicato con $\overset{\circ}{\Omega}$ oppure $\operatorname{int}\Omega$. Similmente l'insieme dei punti di frontiera di Ω costituisce la* **frontiera** *di Ω e viene indicato con $\partial\Omega$. L'insieme dei punti esterni a Ω costituisce l'***esterno** *di Ω e viene indicato con $\operatorname{est}\Omega$. Infine, l'insieme $\Omega \cup \partial\Omega$ costituisce la* **chiusura** *di Ω e viene indicato con $\overline{\Omega}$.*

Segue facilmente dalla definizione che, in generale,

$$\overset{\circ}{\Omega} \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega}\,.$$

Quando una delle due inclusioni è una uguaglianza, si ha un caso notevole, precisato nella seguente definizione.

Definizione 1.9 *L'insieme Ω è* **aperto** *se ogni suo punto è interno, cioè se $\overset{\circ}{\Omega} = \Omega$. L'insieme Ω è* **chiuso** *se contiene la sua frontiera, cioè se $\Omega = \overline{\Omega}$.*

Notiamo che un insieme è aperto se e solo se contiene un intorno di ogni suo punto, vale a dire se e solo se non contiene punti della sua frontiera. Conseguentemente, un insieme è chiuso se e solo se il complementare è aperto, in quanto, come abbiamo osservato sopra, un insieme e il suo complementare hanno la stessa frontiera.

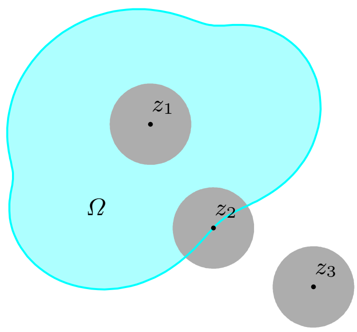

Figura 1.7. Punto interno, z_1, di frontiera, z_2, ed esterno, z_3, per un insieme Ω

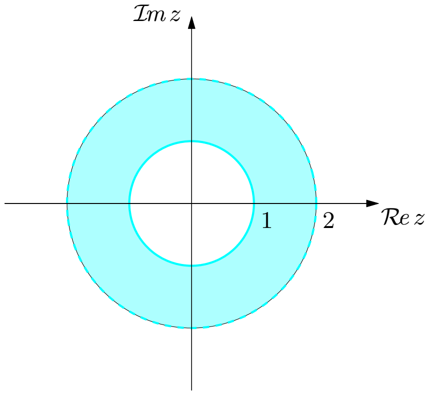

Figura 1.8. Corona circolare $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$

Esempi 1.10

i) Si osservi che ogni intorno $B_r(z_0)$ è un insieme aperto.

ii) Il disco unitario Ω_1 considerato nell'Esempio 1.7 è un insieme chiuso.

iii) L'insieme $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$, che rappresenta la corona circolare (o anello) delimitato dalle circonferenze di centro l'origine e di raggio rispettivamente 1 e 2, non è né aperto né chiuso (si veda la Figura 1.8). Si osservi che la circonferenza esterna non appartiene a Ω_2 e che $\partial\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.

iv) L'insieme $\mathbb{C}$ è sia aperto sia chiuso (ed è l'unico insieme non vuoto con tale proprietà) e la frontiera è vuota. □

Definiamo ora alcune proprietà degli insiemi che saranno utili nel seguito.

Definizione 1.11 *Un insieme Ω dicesi* **limitato** *se esiste un numero reale $R > 0$ tale che*

$$|z| \leq R\,, \qquad \forall z \in \Omega\,,$$

ossia Ω è contenuto in un intorno chiuso $\overline{B}_R(0)$ dell'origine.

Definizione 1.12 *Un insieme Ω dicesi* **compatto** *se è chiuso e limitato.*

Siano z_1, z_2 punti distinti in $\mathbb{C}$; indichiamo con $S[z_1, z_2]$ il **segmento** (chiuso) di estremi z_1 e z_2, cioè l'insieme dei punti appartenenti alla retta passante per z_1 e z_2 e compresi tra z_1 e z_2; esso può essere descritto come

$$
\begin{aligned}
S[z_1, z_2] &= \{z = z_1 + t(z_2 - z_1) : 0 \le t \le 1\} \\
&= \{z = (1-t)z_1 + tz_2 : 0 \le t \le 1\}\,.
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

Definizione 1.13 *Un insieme Ω dicesi* **convesso** *se il segmento che unisce due punti qualsiasi di Ω è tutto contenuto in Ω.*

Dati poi $r+1$ punti in $\mathbb{C}$, z_0, $z_1, \ldots, z_r$, distinti (eccetto eventualmente $z_0 = z_r$), dicesi **poligonale** di vertici z_0, $z_1, \ldots, z_r$ l'unione degli r segmenti $S[z_{i-1}, z_i]$, $1 \le i \le r$, aventi gli estremi a due a due concatenati:

$$P[z_0, \ldots, z_r] = \bigcup_{i=1}^{r} S[z_{i-1}, z_i]\,.$$

Definizione 1.14 *Un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice* **connesso** (*per archi*) *se, presi comunque due punti z_1 e z_2 in A, esiste una poligonale che li congiunge interamente contenuta in A.*

Si veda la Figura 1.9 per un esempio.

Definizione 1.15 *Un insieme aperto e connesso si dice* **dominio**. *Chiamiamo* **regione** *ogni sottoinsieme Ω di $\mathbb{C}$ formato dall'unione di un aperto connesso non vuoto A e di una parte della sua frontiera, ossia*

$$\Omega = A \cup Z \qquad \textit{con} \qquad \emptyset \subseteq Z \subseteq \partial A\,.$$

Se $Z = \emptyset$, avremo una regione aperta, se invece $Z = \partial A$ avremo una regione chiusa.

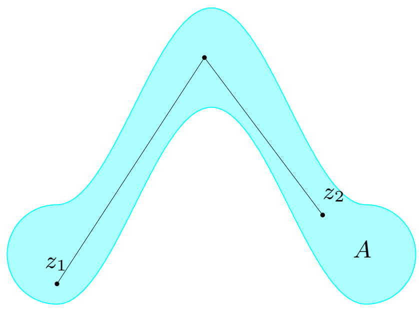

Figura 1.9. Insieme A connesso (ma non convesso)

Esempi 1.16

i) Ogni intorno $B_r(z_0)$ è un dominio limitato.

ii) L'anello Ω_2 descritto nell'Esempio 1.10 iii) è un insieme connesso, mentre il suo complementare $\Omega_2^c = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ oppure } |z| \geq 2\}$ non lo è.

iii) L'insieme Ω_1 descritto nell'Esempio 1.10 ii) è una regione compatta.

iv) Il semipiano $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, z > 0\}$ è un dominio non limitato (si veda la Figura 1.10, a sinistra); il settore $\Omega_4 = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}\}$ è una regione chiusa non limitata (si veda la Figura 1.10, a destra). □

1.3 Funzioni elementari

Una funzione $w = f(z)$ che associa a un numero complesso z un numero complesso w viene detta **funzione di variabile complessa**. Si osservi che il suo dominio di definizione $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{C}$ non è necessariamente un dominio ovvero insieme aperto e connesso, come inteso nella Definizione 1.15. Se il dominio di definizione non è esplicitamente indicato, la funzione si intende definita sull'insieme più ampio possibile, compatibile con l'espressione della funzione.

Esempi 1.17

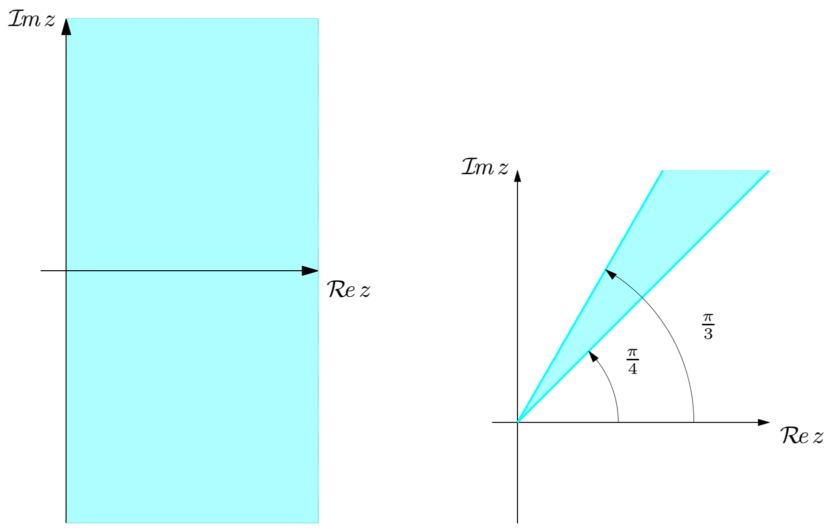

Figura 1.10. Insieme Ω_3, a sinistra, e insieme Ω_4, a destra

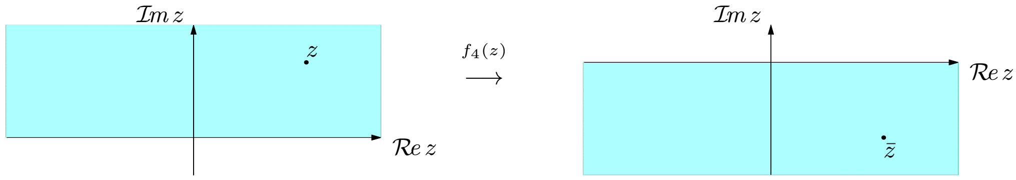

Figura 1.11. Dominio e immagine della funzione $f_4(z) = \bar{z}$ ristretta al semipiano superiore $\mathcal{I}m\, z > 0$

i) La funzione $f_1(z) = z$ è definita su tutto $\mathbb{C}$.

ii) La funzione $f_2(z) = \frac{1}{z}$ ha dominio $\operatorname{dom} f_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

ii) La funzione $f_3(z) = \frac{1}{|z|-1}$ è definita in $\mathbb{C}$ esclusa la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e quindi l'insieme non è un dominio secondo la Definizione 1.15 in quanto non è connesso. □

Poiché sia l'insieme di partenza sia quello di arrivo sono 2-dimensionali, non è in generale possibile disegnare il grafico della funzione $w = f(z)$. Ci limiteremo ad individuare il dominio e l'immagine (quando possibile) della funzione disegnandoli separatamente.

Esempi 1.18

i) Si consideri $f_4(z) = \bar{z}$ ristretta al semipiano superiore $\mathcal{I}m\, z > 0$. Allora la sua immagine è il semipiano inferiore $\mathcal{I}m\, z < 0$ (si ricordino la (1.8) e le considerazioni successive e si veda la Figura 1.11).

ii) Sia ora $f_5(z) = z^2$ ristretta a $\mathcal{I}m\, z \geq 0$. Allora, usando la rappresentazione polare $z = r\, e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < \pi$, del generico z appartenente al dominio di definizione di f_4, si vede che $w = z^2 = r^2\, e^{2i\theta} = Re^{i\varphi}$ avendo posto $R = r^2$ e $\varphi = 2\theta$. Pertanto l'immagine è tutto il piano complesso in quanto $R \geq 0$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$ (si veda la Figura 1.12). □

Ogni funzione $w = f(z)$ di variabile complessa può essere naturalmente pensata come una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. In effetti, posto $z = x + iy$ e $w = u + iv$, $f(z)$ può essere scritta come

$$\boxed{w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)}$$

dove u, v sono due funzioni reali delle due variabili reali x e y.

Definizione 1.19 *Chiameremo* **funzione parte reale** *di f la funzione $u(x, y) = \mathcal{R}e\, f(z)$ e* **funzione parte immaginaria** *di f la funzione $v(x, y) = \mathcal{I}m\, f(z)$.*

Esempi 1.20

Per le funzioni sopra considerate avremo

$$
\begin{array}{lll}
f_1(z) = z = x + iy\,, & u(x,y) = x\,, & v(x,y) = y \\
f_2(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}\,, & u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\,, & v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\
f_3(z) = \dfrac{1}{|z|-1} & u(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-1} & v(x,y) = 0 \\
f_4(z) = \bar{z} = x - iy\,, & u(x,y) = x\,, & v(x,y) = -y \\
f_5(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy\,, & u(x,y) = x^2 - y^2\,, & v(x,y) = 2xy\,.
\end{array}
$$

Passiamo ora in rassegna le principali funzioni elementari.

1.3.1 Polinomi e funzioni razionali

Fissato un intero $n \in \mathbb{N}$ e $n+1$ costanti complesse $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, la funzione

$$\boxed{P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}$$

si dice **polinomio**; se $a_n \neq 0$, n indica il grado del polinomio. Essa è definita su tutto $\mathbb{C}$.

Una **funzione razionale** è il quoziente di due polinomi $P(z)$ e $Q(z)$

$$\boxed{R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}}$$

ed è definita per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $Q(z) \neq 0$.

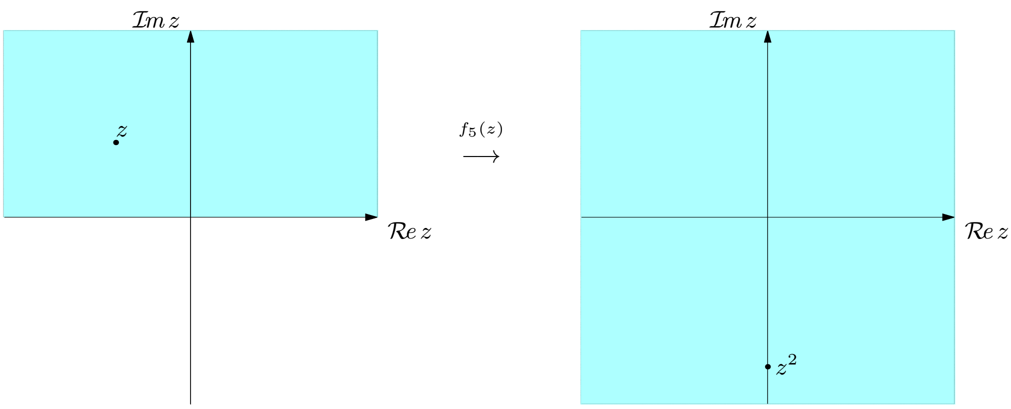

Figura 1.12. Dominio e immagine della funzione $f_5(z) = z^2$ ristretta al semipiano superiore $\mathcal{I}m\, z \geq 0$

Esempi 1.21

Esempi di funzioni razionali con i loro relativi domini di definizione:

$$f_1(z) = \frac{z+2}{z^2+1} \ \mathrm{dom}\, f_1 = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$$
$$f_2(z) = \frac{z^2-1}{z^2+z} \ \mathrm{dom}\, f_2 = \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$$
$$f_3(z) = \frac{z^3+5}{z^8} \ \mathrm{dom}\, f_3 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Esempi 1.22

Esempi di funzioni non razionali:

$$f_1(z) = \frac{z}{|z!}$$
$$f_2(z) = \frac{1}{\bar{z}+1}$$
$$f_3(z) = \frac{z-1}{|z|+1}$$

Esempio 1.23

Un'importante famiglia di funzioni razionali è costituita dalle cosiddette funzioni *conformi*: le funzioni razionali del tipo

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

dove a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ con $ad - bc \neq 0$. Quest'ultima condizione serve ad evitare dei casi degeneri (ad esempio c e d non possono sere entrambi nulli) e garantisce che invertendo f si ottenga ancora una trasformazione conforme. In effetti,

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \ \Rightarrow \ w(cz+d) = az+b \ \Rightarrow \ z = f^{-1}(w) = \frac{cw-a}{dw-b}$$

Le funzioni conformi godono di importanti proprietà geometriche (ad esempio mantengono invariati gli angoli) che per non verranno analizzate nella loro generalità in questa sede. Qui ci limiteremo a studiare alcune speciali funzioni conformi che ci saranno utili nel seguito.

Funzioni affini: Nel caso in cui $c = 0$ e $d = 1$, otteniamo le cosiddette funzioni *affini*: $f(z) = az + b$. Nel caso in cui $a = 1$, otteniamo le *traslazioni*: ogni vettore $z \in \mathbb{C}$ subisce una traslazione del vettore fisso b venendo trasformato in $f(z) = z + b$. Consideriamo ora il caso in cui $b = 0$: la funzione $f(z) = az$ è una trasformazione lineare del piano. Per capirne il tipo conviene analizzarla attraverso la rappresentazione esponenziale. Scrivendo $a = re^{i\tau}$, otteniamo

$$z = \rho e^{i\theta} \mapsto f(z) = r\rho e^{i(\theta+\tau)}$$

La moltiplicazione per a dunque agisce in due modi: con una dilatazione (o contrazione) radiale dettata da r il modulo di a; e con una rotazione di un angolo dato dall'argomento di a. Le dilatazioni prendono il nome di *omotetie* in geometria e queste trasformazioni lineari vengono dette *roto-omotetie*. Riassumendo, le funzioni affini si possono pensare, geometricamentete, come la composizione di una roto-omotetia seguita da una traslazione:

$$z \mapsto az \mapsto az + b$$

Nel caso in cui $|a| = 1$, si tratta della composizione di una rotazione e di una traslazione: questo tipo di trasformazioni, come è facile constatare, mantengono inalterate le distanze tra punti del piano complesso, e vengono per questo motivo chiamate *isometrie*. Vedremo più avanti che non tutte le isometrie del piano sono di questo tipo.

La funzione di Moebius: Consideriamo la seguente trasformazione conforme:

$$f(z) = \frac{1-z}{1+z}$$

Essa è definita in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ ed ha uno zero in $z = 1$. Scriviamola in coordinate cartesiane ponendo $z = x + iy$,

$$f(z) = \frac{(1-z)(1+\bar{z})}{|1+z|^2} = \frac{1-|z|^2+\bar{z}-z}{|1+z|^2} = \frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2} - i\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$$

Si possono fare alcune osservazioni:

- Se $|z| = 1$ ($x^2+y^2 = 1$), si ha che $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$. Questo significa che la circonferenza unitaria centrata in 0 viene trasformata dalla f nell'asse immaginario, con il punto 1 che va in 0 ed il punto -1 che va verso ∞.
- Se $|z| < 1$, si ha che $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$: il cerchio unitario aperto viene trasformato nel semipiano destro $\{z \,|\, \mathrm{Re} z > 0\}$.
- Se $|z! > 1$, si ha che $\mathrm{Re}(f(z)) < 0$: l'esterno del cerchio unitario viene trasformato nel semipiano sinistro $\{z \,|\, \mathrm{Re} z < 0\}$.

Determiniamo l'inversa della funzione di Moebius:

$$w = \frac{1-z}{1+z} \;\Rightarrow\; w(1+z) = 1-z; \Rightarrow\; z = \frac{1-w}{1+w}$$

L'inversa della trasformata di Moebius, è ancora la trasformata di Moebius! Questo significa che le considerazioni precedenti possono essere invertite

- L'asse immaginario viene trasformato da f nella circonferenza unitaria
- Il semipiano destro $\{z \,|\, \mathrm{Re} z > 0\}$ viene trasformato da f nel cerchio unitario aperto.
- Il semipiano sinistro $\{z \,|\, \mathrm{Re} z < 0\}$ viene trasformato da f nell'esterno del cerchio unitario.

1.3.2 Funzione esponenziale

Ricordando la (1.15), poniamo

$$\boxed{f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)\,.} \tag{1.26}$$

Allora $u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$ e $v(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$ e si vede immediatamente che f è definita su tutto $\mathbb{C}$. Direttamente dalla (1.26) si ottiene che, per ogni $z = x + iy$, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\begin{array}{lll} \mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}\,, & (\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}\,, & \mathrm{e}^0 = 1\,, \\ |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x\,, & \arg \mathrm{e}^z = y\,, & \overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar z}\,. \end{array}$$

1.3.3 Funzioni trigonometriche

Se $x \in \mathbb{R}$, dalle formule

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x\,, \qquad \mathrm{e}^{-ix} = \cos x - i \sin x\,,$$

ne segue che

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\,, \qquad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\,.$$

È dunque naturale definire le funzioni **seno** e **coseno** della variabile complessa z come

$$\boxed{\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}\,, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}\,.} \tag{1.27}$$

Le altre funzioni trigonometriche sono definite in termini delle funzioni seno e coseno secondo le usuali relazioni:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}\,, & \operatorname{cotan} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}\,, \\[2ex] \sec z = \dfrac{1}{\cos z}\,, & \operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{\sin z}\,. \end{array}} \tag{1.28}$$

Tutte le usuali identità trigonometriche seguono direttamente dalle definizioni; ad esempio, per ogni z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, si ha

$$\begin{aligned} &\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \\ &\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1\, \cos z_2 + \cos z_1\, \sin z_2\,. \end{aligned}$$

La periodicità di $\sin z$ e $\cos z$ segue dalla definizione e dalla periodicità di e^z:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z\,, \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos z\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,,$$

così come quella delle altre funzioni trigonometriche; ad esempio, dove la funzione tangente è definita, vale

$$\tan(z + \pi) = \tan z\,.$$

Esempi 1.24

i) Esplicitiamo la parte reale e quella immaginaria della funzione $f(z) = \sin z$; per $z = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{\mathrm{e}^{i(x+iy)} - \mathrm{e}^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{\mathrm{e}^{-y}(\cos x + i\sin x)}{2i} - \frac{\mathrm{e}^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} \\ &= \sin x\,\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2} + i\cos x\,\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2} \\ &= \sin x\,\cosh y + i\cos x\,\sinh y\end{aligned}$$

e dunque

$$u(x,y) = \sin x\,\cosh y \qquad \text{e} \qquad v(x,y) = \cos x\,\sinh y\,. \tag{1.29}$$

Analogamente si ottiene

$$\cos z = \cos x\,\cosh y - i\sin x\,\sinh y\,. \tag{1.30}$$

ii) Cerchiamo ora gli zeri della funzione coseno. Dalla definizione si ha che $\cos z = 0$ se e solo se $e^{iz} = -e^{-iz}$. Poiché $-e^{-iz} = e^{i\pi}e^{-iz} = e^{i(\pi - z)}$, si tratta allora di risolvere l'equazione

$$e^{iz} = e^{i(\pi - z)}$$

che sappiamo essere equivalente a

$$iz = i(\pi - z) + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo allora trovato che

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.31}$$

In modo analogo analogo si ottiene

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.32}$$

iii) Le (1.31) e (1.32) permettono di ricavare il dominio di definizione delle funzioni trigonometriche definite in (1.28); ad esempio, la funzione tangente è definita su $\mathbb{C}$ tranne i punti $z = \big(k + \frac{1}{2}\big)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Dalle (1.29) e (1.30), ricordando che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ricavano immediatamente le seguenti formule

$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z}\,, \qquad \overline{\cos z} = \cos \bar{z} \tag{1.33}$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y\,, \qquad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y\,. \tag{1.34}$$

1.3.4 Funzioni iperboliche

Anche in questa situazione generalizziamo le formule

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,,$$

valide per ogni $x \in \mathbb{R}$, ponendo in modo naturale

$$\boxed{\sinh z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}\,, \qquad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}\,.} \tag{1.35}$$

Analogamente al caso reale è possibile definire le funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante iperbolica. Seguono dalle definizioni le usuali relazioni iperboliche quali, ad esempio,

$$\boxed{\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,.}$$

Il seno e coseno iperbolico sono funzioni periodiche di periodo $2\pi i$, mentre la tangente iperbolica lo è di periodo πi.

Le funzioni seno e coseno iperbolico sono strettamente legate alle analoghe funzioni trigonometriche; infatti, dalle (1.27) e (1.35) si ottiene immediatamente che

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sinh iz = i\sin z\,, & \cosh iz = \cos z\,, \\ \sin iz = i\sinh z\,, & \cos iz = \cosh z\,. \end{array}}$$

Inoltre, posto $z = x + iy$, si ha

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sinh z = \sinh x\,\cos y + i\cosh x\,\sin y\,, & \cosh z = \cosh x\,\cos y + i\sinh x\,\sin y\,, \\ |\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y\,, & |\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y\,. \end{array}}$$

Infine

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sinh z = 0 & \text{se e solo se} & z = k\pi i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,; \\ \cosh z = 0 & \text{se e solo se} & z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{array}}$$

1.3.5 Multifunzioni? Radici?

1.3.6 Funzione logaritmo

Indichiamo con $\operatorname{Log} r$ il logaritmo naturale di un numero reale e positivo r; considerato $z = r\,e^{i\theta} \neq 0$, utilizzando formalmente le note proprietà del logaritmo, poniamo

$$\boxed{\log z = \log re^{i\theta} = \operatorname{Log} r + i\theta\,, \qquad \text{con} \quad r = |z| \quad \text{e} \quad \theta = \arg z\,.} \tag{1.36}$$

Poiché $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la (1.36) non definisce una funzione univoca ma multivoca, cioè ad ogni $z \neq 0$, corrispondono infiniti valori di $\log z$ aventi tutti la stessa parte reale ($\mathcal{R}e \log z = \operatorname{Log} r$) e parte immaginaria che differisce per un multiplo intero di 2π. Chiameremo **valore principale** di $\log z$ il valore ottenuto ponendo $\theta = \operatorname{Arg} z$ nella (1.36). Tale valore si denota $\operatorname{Log} z$ ed è quindi dato dall'equazione

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|r| + i\operatorname{Arg} z\,.} \tag{1.37}$$

La mappa $w = \operatorname{Log} z$ è una funzione il cui dominio di definizione è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e la cui immagine è la striscia $-\pi < \mathcal{I}m\, w \leq \pi$. Osserviamo che $\operatorname{Log} z$ si riduce all'usuale logaritmo naturale di una variabile reale quando il dominio di definizione è ristretto al semiasse dei reali positivi.

Occorre una certa cautela nell'estendere le note proprietà dei logaritmi. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1.25 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti formule*

$$\mathrm{e}^{\log z} = z\,, \qquad \log \mathrm{e}^z = z + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{1.38}$$

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2\,, \qquad \log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2\,. \tag{1.39}$$

Dimostrazione. Per verificare la prima delle (1.38), scriviamo $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ e $\log z = \operatorname{Log} r + i\theta$; allora

$$\mathrm{e}^{\log z} = \mathrm{e}^{\operatorname{Log} r + i\theta} = \mathrm{e}^{\operatorname{Log} r}\, \mathrm{e}^{i\theta} = r\mathrm{e}^{i\theta} = z\,.$$

Per la seconda, sia $z = x + iy$, allora si ha

$$\log \mathrm{e}^z = \operatorname{Log} |\mathrm{e}^z| + i \arg \mathrm{e}^z = x + i(y + 2k\pi) = z + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Per verificare la prima delle (1.39), poniamo $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$; ricordando la (1.13), si ha

$$\begin{aligned} \log z_1 z_2 &= \log r_1 r_2 \mathrm{e}^{i(\theta_1 + \theta_2)} = \operatorname{Log} r_1 r_2 + i(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \operatorname{Log} r_1 + i\theta_1 + \operatorname{Log} r_2 + i\theta_2 = \log z_1 + \log z_2\,. \end{aligned}$$

In modo analogo si dimostra la seconda delle (1.39). □

Si osservi che la prima delle (1.38), significa che indipendentemente dal valore di $\log z$ che scegliamo, il numero $\mathrm{e}^{\log z}$ sarà sempre z. Le uguaglianze (1.39) sono da intendersi nel senso che, ad esempio, ogni valore di $\log z_1 z_2$ può essere espresso come la somma di un valore di $\log z_1$ e di un valore di $\log z_2$; viceversa, ogni valore di $\log z_1$ sommato a un valore di $\log z_2$ è un valore di $\log z_1 z_2$.

Si noti infine che le (1.39) non valgono sostituendo $\log$ con Log. Ad esempio, per $z_1 = z_2 = -1 = \mathrm{e}^{i\pi}$ si ha $\operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log} z_2 = \pi i$ mentre $\operatorname{Log} z_1 z_2 = 0$ e dunque

$$\operatorname{Log} z_1 z_2 = 0 \neq 2\pi i = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2\,.$$

1.4 Limiti e continuità

I concetti di limite e di continuità sono simili a quelli già studiati per funzioni di variabile reale e pertanto la nostra trattazione sarà concisa. Nel seguito consideriamo funzioni definite su domini e punti z_0 contenuti nella loro chiusura.

Diamo la seguente definizione.

Definizione 1.26 *Si dice che* f **ha limite** $\ell \in \mathbb{C}$ *(o* **tende a** ℓ*)* **per** z **tendente a** z_0 *e si scrive*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che*

$$\forall z \in \Omega\,, \qquad 0 < |z - z_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon\,. \tag{1.40}$$

Con il linguaggio degli intorni: per ogni intorno $B_\varepsilon(\ell)$ di ℓ esiste un intorno $B_\delta(z_0)$ di z_0 tale che

$$\forall z \in \Omega\,, \qquad z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} \quad \Longrightarrow \quad f(z) \in B_\varepsilon(\ell)\,.$$

La definizione di limite è illustrata graficamente nella Figura 1.13.

La definizione di limite può essere estesa in modo ovvio al caso in cui z_0 oppure ℓ oppure entrambi siano il punto all'infinito ∞, utilizzando la formulazione con gli intorni. Ad esempio,

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$$

equivale a dire che per ogni intorno $B_\varepsilon(\ell)$ di ℓ esiste un intorno $B_R(\infty)$ di ∞ tale che

$$\forall z \in \Omega\,, \qquad z \in B_R(\infty) \quad \Longrightarrow \quad f(z) \in B_\varepsilon(\ell)\,;$$

ovvero, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $R > 0$ tale che

$$\forall z \in \Omega\,, \qquad |z| > R \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon\,. \tag{1.41}$$

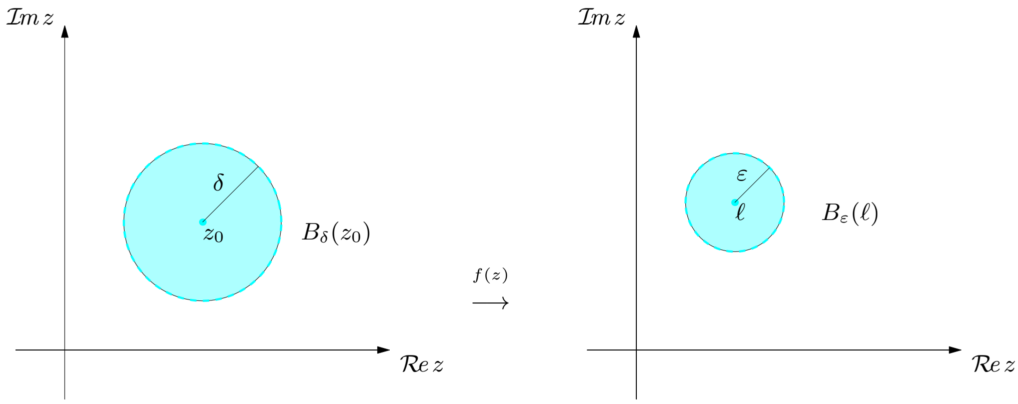

Figura 1.13. Rappresentazione grafica della definizione di limite

Esempi 1.27

i) Verifichiamo che $\lim_{z\to 1} iz = i$. Per ogni $\varepsilon > 0$, la condizione

$$|f(z) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{equivale a} \qquad |iz - i| = |z-1| < \varepsilon\,.$$

Allora la (1.40) è verificata con $\delta = \varepsilon$.

ii) Verifichiamo che $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2} = 0$. Poiché

$$\left|\frac{1}{z^2} - 0\right| < \varepsilon \qquad \text{equivale a} \qquad |z| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,.$$

la (1.41) è soddisfatta con $R = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. □

Lasciamo al lettore la facile verifica dell'unicità del limite, quando esiste, e delle seguenti proprietà.

Teorema 1.28 *Supponiamo che*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\,, \qquad z_0 = x_0 + iy_0\,, \qquad \ell = \ell_{re} + i\ell_{im}\,.$$

Allora

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \ell_{re} \\[2ex] \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \ell_{im}\,. \end{cases}$$

Teorema 1.29 *Supponiamo che*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell \qquad e \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) = m\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to z_0} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m, \\ &\lim_{z\to z_0} [f(x)\,g(x)] = \ell\, m, \\ &\lim_{z\to z_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}\,, \qquad m \neq 0\,. \end{aligned}$$

Teorema 1.30 *Vale l'implicazione*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = |\ell|\,.$$

Utilizzando la definizione di limite e i risultati appena enunciati si ha immediatamente che, se $P(z)$ e $Q(z)$ sono due polinomi, allora

$$\lim_{z\to z_0} P(z) = P(z_0)\,, \qquad \lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)} \quad (Q(z_0) \neq 0)\,.$$

1.4.1 Continuità

Consideriamo ora la nozione di continuità.

Definizione 1.31 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una regione e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Si dice che f è* **continua in** $z_0 \in \Omega$ *se*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\,.$$

Diremo che f è **continua in una regione** Ω *se è continua in ogni punto $z_0 \in \Omega$.*

Ricordando il Teorema 1.29, se due funzioni sono continue in un punto z_0 allora anche la somma, la differenza, il prodotto sono funzioni continue in z_0; il quoziente è continuo purché la funzione a denominatore non sia nulla in z_0. È inoltre possibile verificare, direttamente dalla definizione, che la composizione di funzioni continue è continua. Infine, dal Teorema 1.28, segue che una funzione f di variabile complessa è continua in $z_0 = (x_0, y_0)$ se e solo se le sue parti reale e immaginaria u e v sono continue in (x_0, y_0). Riassumendo e utilizzando le definizioni date nella Sezione 1.3, vale il seguente risultato.

Teorema 1.32 *Tutte le funzioni elementari (polinomi, funzioni razionali, funzione esponenziale, funzioni trigonometriche e iperboliche, funzione logaritmo) sono continue nel loro dominio di definizione.*

1.5 Esercizi

1. *Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:*

   a) $(2-3i)(-2+i)$ b) $(3+i)(3-i)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\right)$

   c) $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i}$ d) $\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

2. *Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:*

a) $z = -i$ b) $z = -1$

c) $z = 1 - i$ d) $z = (1+i)(1-i)$

e) $z = \dfrac{1+i}{1-i}$ f) $z = \sin\varphi + i\cos\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$

3. *Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi:*

a) $z = \dfrac{1+\sqrt{7}i}{\sqrt{3}-i}\, e^{2+i\frac{\pi}{8}}$ b) $z = -\dfrac{1}{i} + \dfrac{2i}{3-i}$

$\boxed{4.}$ *Verificare che se* $|z| = 2$ *allora*

$$\mathrm{Re}(z - 5 - \overline{z}) + i3\mathrm{Im}(\overline{z} + 1 - z) = (\overline{z} - 3)(z + 3)$$

5. *Risolvere le seguenti equazioni:*

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$ $\boxed{\text{b)}}$ $z^2 + 3iz + 1 = 0$

$\boxed{\text{c)}}$ $z|z| - 2z + i = 0$ d) $e^z = e^{\overline{z}}$

e) $z^2 + i\overline{z} = 1$ $\boxed{\text{f)}}$ $z^3 = |z|^4$

$\boxed{6.}$ *Verificare che* $1 + i$ *è radice del polinomio* $z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$ *e trovare le altre radici.*

7. *Calcolare* z^2, z^9, z^{20} *per*

a) $z = \dfrac{1+i}{i}$ $\boxed{\text{b)}}$ $z = i\sqrt{3} + \dfrac{2}{i\sqrt{3}+1}$

8. *Calcolare e rappresentare graficamente i seguenti numeri complessi:*

a) $z = \sqrt[3]{-i}$ $\boxed{\text{b)}}$ $z = \sqrt[5]{1}$ c) $z = \sqrt{2-2i}$

9. *Rappresentare graficamente i seguenti sottoinsiemi del piano complesso; di ognuno di essi si dica se è aperto, chiuso, connesso e se ne indichi la frontiera:*

a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| \le 1\}$

b) $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |2z + 3| > 4\}$

c) $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : |\mathcal{I}m\, z| > 2\}$

d) $\Omega_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\,,\ \dfrac{\pi}{6} \le \mathrm{Arg}\, z \le \dfrac{\pi}{3}\}$

10. *Trovare il dominio di definizione delle seguenti funzioni:*

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ b) $f(z) = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

$\boxed{\text{c)}}$ $f(z) = \dfrac{z}{z+\overline{z}}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{9-|z|^2}$

11. *Per le seguenti funzioni $f(z)$ si trovino $u(x,y) = \mathcal{R}e\, f(z)$, $v(x,y) = \mathcal{I}m\, f(z)$ e $g(z) = |f(z)|$.*

a) $f(z) = z^3 + z + 1$ $\boxed{\text{b)}}$ $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$

$\boxed{\text{c)}}$ $f(z) = \dfrac{3z}{z-\overline{z}}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{|z|^2+3}$

12. *Data $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + 2ix(1-y)$ esprimerla in funzione della variabile complessa $z = x + iy$.*

1.5.1 Soluzioni

1. *Forma algebrica numeri complessi:*

a) $-1+8i$; b) $2+i$; c) $-\frac{2}{5}$; d) $\frac{1}{2}i$.

2. *Forma trigonometrica e esponenziale numeri complessi:*

a) $z = \cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi = e^{i\frac{3}{2}\pi}$; b) $z = \cos\pi + i\sin\pi = \mathrm{e}^{i\pi}$;
c) $z = \sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; d) $z = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2e^{i0}$;
e) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$; f) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$.

3. *Modulo numeri complessi:*

a) $\sqrt{2}e^2$; b) $\sqrt{\frac{13}{5}}$.

4. Poiché $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}z$, si ha

$$\mathrm{Re}(z-5-\overline{z}) + i3\mathrm{Im}(\overline{z}+1-z) = -5 - 6\mathrm{Im}z$$

e

$$(\overline{z}-3)(z+3) = |z|^2 + 3(\overline{z}-z) - 9 = |z|^2 - 6\mathrm{Im}z - 9,$$

quindi l'equazione assegnata è equivalente a

$$-5 = |z|^2 - 9,$$

che è sempre verificata grazie all'ipotesi $|z| = 2$.

5. *Risoluzione equazioni:*

a) $z = 1 \pm i$;
b) Applichiamo la formula risolutiva per equazioni di secondo grado e otteniamo

$$z = \frac{-3i \pm \sqrt{-9-4}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{13}i}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} i \,.$$

c) Scrivendo $z = x + iy$, l'equazione diventa

$$(x+iy)\sqrt{x^2+y^2} - 2x - 2iy + i = 0 \,,$$

ovvero

$$x\sqrt{x^2+y^2} - 2x + i\left(y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1\right) = 0 \,.$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria del primo e del secondo membro, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x\left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right) = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, dovrà essere $x = 0$ oppure $\sqrt{x^2+y^2} = 2$. Quest'ultima relazione inserita nella seconda equazione del sistema dà un risultato impossibile. Pertanto le uniche soluzioni possibili saranno

$$\begin{cases} x = 0 \\ y|y| - 2y + 1 = 0 \,. \end{cases}$$

Distinguendo i due casi $y \geq 0$ e $y < 0$, otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \,, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 - 2y + 1 = 0 \,, \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \pm \sqrt{2} \,. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono $z = i$, $z = i(-1 \pm \sqrt{2})$.
d) L'insieme delle soluzioni è $\{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ y = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$.
e) L'insieme delle soluzioni è $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - i| = 3\} \cup \{i\}$.
f) Ricordando che $|z|^2 = z\bar{z}$, l'equazione diventa

$$z^3 = z^2 \bar{z}^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^2(z - \bar{z}^2) = 0 \,.$$

Allora una soluzione è $z = 0$ e le altre soddisfano $z - \bar{z}^2 = 0$. Ponendo $z = x + iy$, si perviene al sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ 2xy + y = 0 \,. \end{cases}$$

Riscrivendo la seconda equazione come $y(2x+1)=0$, si ottengono i due sistemi

$$\begin{cases} y=0 \\ x(x-1)=0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y^2=\frac{3}{4}\,. \end{cases}$$

In definitiva, le soluzioni sono

$$z=0\,; \qquad z=1\,; \qquad z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

6. Poiché il polinomio è a coefficienti reali, oltre alla radice $z=1+i$, vi è anche la radice coniugata $\bar{z}=1-i$. Pertanto il polinomio è divisibile per $(z-1-i)(z-1+i)=z^2-2z+2$ e si ha

$$z^4-5z^3+10z^2-10z+4=(z^2-2z+2)(z^2-3z+2)=(z^2-2z+2)(z-1)(z-2)\,.$$

Le radici sono quindi

$$z=1+i\,, \qquad z=1-i\,, \qquad z=1\,, \qquad z=2\,.$$

7. *Potenze di numeri complessi:*

a) $z^2=-2i\,, \qquad z^9=16(1-i)\,, \qquad z^{20}=-2^{10}\,.$

b) Si ha che

$$z=i\sqrt{3}+\frac{2(1-i\sqrt{3})}{4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}},$$

quindi

$$\begin{aligned} z^2 &= e^{i\frac{2}{3}\pi}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z^9 &= e^{i\frac{9}{3}\pi}=e^{i\pi}=-1, \\ z^{20} &= e^{i\frac{20}{3}\pi}=e^{i\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

8. *Calcolo e rappresentazione grafica di numeri complessi:*

a) $z_1=\frac{1}{2}\big(\sqrt{3}-i\big)\,, \qquad z_2=i\,, \qquad z_3=-\frac{1}{2}\big(\sqrt{3}+i\big)\,.$
I numeri sono rappresentati nella Figura 1.14, a sinistra.

b) Scriviamo il numero 1 in forma esponenziale $1=\mathrm{e}^{0\pi i}$. Allora, ricordando che $\mathrm{e}^{a+2\pi i}=\mathrm{e}^{a}$, si ottiene

$$z_1=1\,, \quad z_2=\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi i}\,, \quad z_3=\mathrm{e}^{\frac{4}{5}\pi i}\,, \quad z_4=\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}\pi i}\,, \quad z_5=\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}\pi i}\,.$$

I numeri sono rappresentati nella Figura 1.14, al centro.

c) $z_1=\sqrt[4]{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\pi i}\,, \qquad z_2=\sqrt[4]{8}\mathrm{e}^{\frac{7}{8}\pi i}\,.$
I numeri sono rappresentati nella Figura 1.14, a destra.

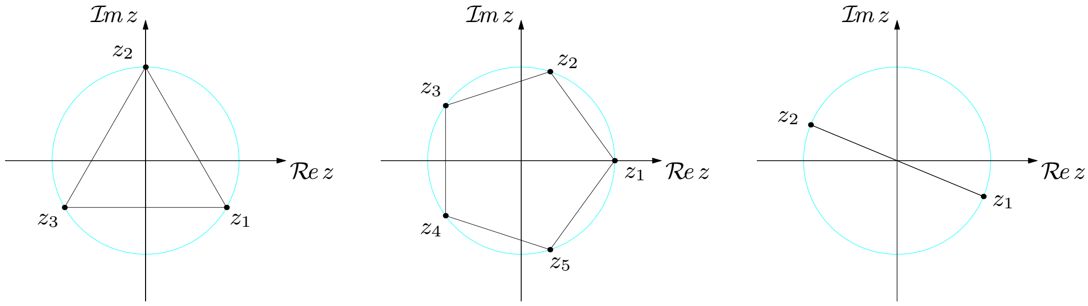

Figura 1.14. Radici cubiche di $-i$, a sinistra, radici quinte di 1, al centro, e radici quadrate di $2-2i$, a destra

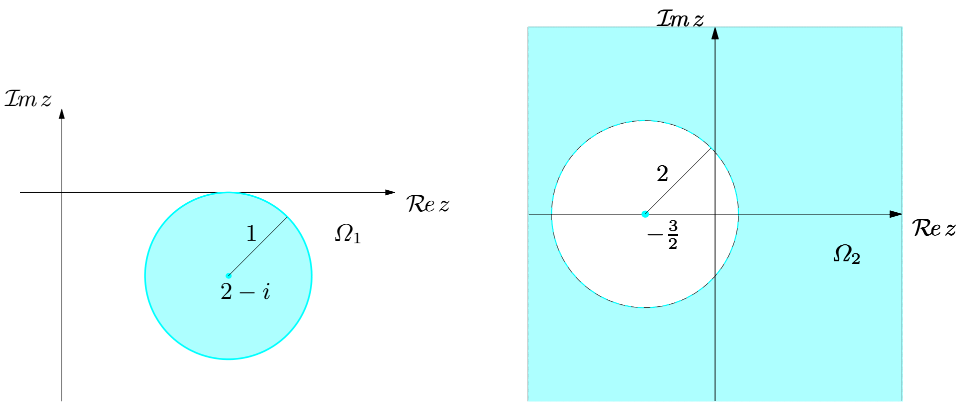

Figura 1.15. Insiemi Ω_1, a sinistra, e Ω_2, a destra , relativi all'Esercizio 9

9. *Studio sottoinsiemi:*

a) L'insieme Ω_1, rappresentato in Figura 1.15 a sinistra, è chiuso, connesso e la sua frontiera è $\partial\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2+i| = 1\}$, circonferenza di centro $2-i$ e raggio 1.
b) L'insieme Ω_2, rappresentato in Figura 1.15 a destra, è aperto, connesso e la sua frontiera è $\partial\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |2z+3| = 4\}$, circonferenza di centro $-\frac{3}{2}$ e raggio 2.
c) L'insieme Ω_3, rappresentato in Figura 1.16 a sinistra, è aperto, non connesso e la sua frontiera è $\partial\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : |\mathcal{I}m\, z| = 2\}$, coppia di rette parallele all'asse reale.
d) L'insieme Ω_4, rappresentato in Figura 1.16 a destra, non è né aperto né chiuso, è connesso e la sua frontiera è $\partial\Omega_4 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{6}\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{3}\} \cup \{0\}$.

10. *Dominio funzioni:*

a) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$; b) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
c) Poiché $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e\, z$, risulta $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\mathcal{R}e\, z = 0\}$.

d) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{|z| = 3\}$.

11. *Parte reale, immaginaria e modulo di funzioni:*

a) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x + 1\,, \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3 + y\,,$
$|f(z)| = \sqrt{(x^3 - 3xy^2 + x + 1)^2 + (3x^2y - y^3 + y)^2}\,.$

b) Posto $z = x + iy$ si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(x+iy)^2+1} = \frac{1}{x^2-y^2+1+2ixy} \\ &= \frac{x^2-y^2+1-2ixy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}\,, \end{aligned}$$

pertanto

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}\,, \qquad v(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}\,,$$
$$|f(z)| = \frac{\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}}\,.$$

c) Ricordando che $z - \bar{z} = 2iy$, si ha

$$f(z) = \frac{3x+3iy}{2iy} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\frac{x}{y}i\,;$$

pertanto

$$u(x,y) = \frac{3}{2}\,, \qquad v(x,y) = -\frac{3}{2}\frac{x}{y}\,, \qquad |f(z)| = \frac{3}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,.$$

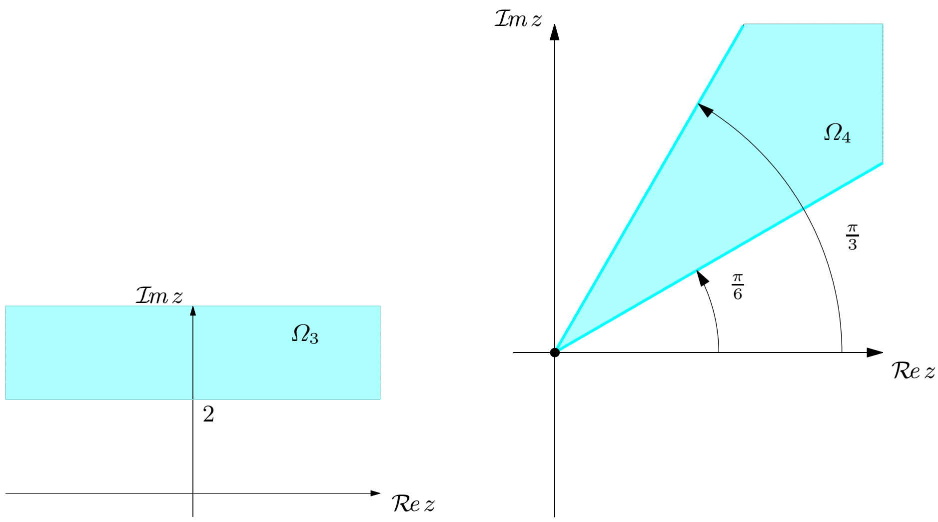

Figura 1.16. Insiemi Ω_3, a sinistra, e Ω_4, a destra , relativi all'Esercizio 9

d) $u(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+3}\,, \quad v(x,y) = 0\,, \quad |f(z)| = \dfrac{1}{x^2+y^2+3}\,.$

12. Posto $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z+\bar{z})^2}{4} + \frac{(z-\bar{z})^2}{4} + i(z-\bar{z}) + i(z+\bar{z}) - \frac{1}{2}(z+\bar{z})(z-\bar{z}) \\ &= \bar{z}^2 + 2iz\,. \end{aligned}$$