EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE CON CONDIZIONI AI LIMITI

Letizia SCUDERI

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

letizia.scuderi@polito.it

A.A. 2022/2023

Problemi differenziali con condizioni ai limiti

Finora abbiamo considerato equazioni differenziali con condizioni iniziali assegnate in un unico punto $x = a$.

Vogliamo ora affrontare la risoluzione numerica di equazioni differenziali con condizioni ai limiti assegnate in due punti distinti; per esempio,

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \;\; a \leq x \leq b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Le condizioni ai limiti possono essere separate, oppure non, come nel seguente esempio:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), \;\; a \leq x \leq b \\ g(u(a), u(b)) = 0 \end{cases}$$

Tali problemi matematici sono detti **problemi ai limiti**.

Problemi con condizioni su due punti sono tutt'altro che rari. Descriviamo a tale scopo alcuni problemi modello.

Esempio 1: modello del filo elastico

Il problema

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\mu(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

rappresenta il modello di un filo elastico sottile, di lunghezza L e con coefficiente elastico $\mu(x)$. In particolare, la soluzione $u(x)$ di tale problema ai limiti rappresenta lo spostamento che un filo elastico, fissato alle estremità, subisce quando viene sollecitato da una forza $f(x)$ ortogonale al filo.

Esempio 2: modello della sbarra termica

L'equazione

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = \rho(x)q(x), \quad 0 \le x \le L$$

rappresenta il modello di una sbarra metallica sottile, il cui asse occupa la posizione dell'intervallo $[0, L]$ sull'asse delle x. La soluzione $u(x)$ di tale equazione rappresenta la temperatura che il punto di ascissa x della sbarra raggiunge quando la sbarra è soggetta a un apporto di calore $q(x)$ (per unità di massa e di lunghezza); $\rho(x)$ è la densità di massa per unità di lunghezza e $\kappa(x)$ il coefficiente di conducibilità termica.

L'equazione della sbarra termica può essere accompagnata dalle seguenti condizioni al bordo

$$u(0) = \alpha \quad \text{e} \quad u(L) = \beta$$

quando è assegnata la temperatura ai due estremi della sbarra, oppure dalle condizioni

$$u(0) = \alpha \quad \text{e} \quad u'(L) = \gamma$$

quando si vogliono prescrivere la temperatura a un estremo e il valore del flusso di calore nell'altro.

La determinazione di condizioni che garantiscano l'esistenza e l'unicità di soluzioni di problemi con valori ai limiti risulta ben più complessa che nel caso dei problemi a valori iniziali.
Mentre per questi ultimi la regolarità del dato f garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione, per i problemi con valori ai limiti questa non basta.

Esempio

Il problema

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = 0, \quad a \leq x \leq b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

ammette come integrale generale la funzione $u(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.
Se le condizioni ai limiti sono, ad esempio,

- $u(0) = 0$ e $u(\pi/2) = 1$ allora esiste un'unica soluzione $u(x) = \sin x$;
- $u(0) = 0$ e $u(\pi) = 1$ allora non esiste alcuna soluzione;
- $u(0) = 0$ e $u(\pi) = 0$ allora esistono infinite soluzioni $u(x) = c \sin x$ per ogni valore reale di c.

Nel caso particolare di un problema lineare del secondo ordine vale il seguente teorema di esistenza e unicità.

Teorema

Per il seguente problema

$$\begin{cases} u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x), \quad a \leq x \leq b \\ a_0 u(a) - a_1 u'(a) = \alpha \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = \beta \end{cases}$$

con $p(x), q(x), r(x) \in C^0([a, b])$, le condizioni

- $q(x) > 0 \quad \text{per} \quad a \leq x \leq b$
- $a_0 a_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad b_0 b_1 \geq 0$
- $|a_0| + |a_1| \neq 0 \quad \text{e} \quad |b_0| + |b_1| \neq 0 \quad \text{e} \quad |a_0| + |b_0| \neq 0$

garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema.

Definizioni

Le condizioni ai bordi sono dette di **Dirichlet** quando viene prescritto il valore della soluzione $u(x)$ ai bordi; per esempio,

$$u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta$$

Le condizioni ai bordi sono dette di **Neumann** quando viene prescritto il valore della derivata della soluzione $u'(x)$ ai bordi; per esempio,

$$u'(a) = \alpha \quad u'(b) = \beta$$

Definizioni

Si possono avere anche condizioni **miste**, quando viene prescritto il valore della soluzione $u(x)$ in un estremo e della sua derivata nell'altro; per esempio,

$$u(a) = \alpha \quad u'(b) = \beta$$

Infine le condizioni ai bordi sono dette di **Robin** se sono del tipo

$$a_0 u(a) - a_1 u'(a) = \alpha \quad \text{oppure} \quad b_0 u(b) + b_1 u'(b) = \beta$$

Quando i valori prescritti ai bordi sono nulli, le condizioni si dicono **omogenee**.

Osservazione 1

Il seguente problema

$$\begin{cases} u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x), \quad a \leq x \leq b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

con $p(x), q(x), r(x) \in C^0([a, b])$, $q(x) > 0$ e condizioni ai limiti di Dirichlet, ammette una e una sola soluzione in virtù del precedente teorema ($a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $|a_0| + |a_1| = 1$, $|b_0| + |b_1| = 1$, $|a_0| + |b_0| = 2$).

... continua osservazione 1

Il seguente problema

$$\begin{cases} u''(x) = q(x)u(x) + r(x), \quad a \leq x \leq b \\ u'(a) = \alpha \\ u'(b) = \beta \end{cases}$$

con $q(x), r(x) \in C^0([a, b])$, $q(x) > 0$ e condizioni ai limiti di Neumann, ammette una e una sola soluzione. Tale risultato non discende però dal teorema precedente (perché $|a_0| + |b_0| = 0$), le cui condizioni sono sufficienti ma in generale non necessarie. Per esempio, anche il problema, nel quale $|a_0| + |b_0| = 0$,

$$\begin{cases} u''(x) = u(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 1 \end{cases}$$

ammette l'unica soluzione $u(x) = \frac{e}{e^2-1}(e^x + e^{-x})$.

Osservazione 2

L'equazione

$$-u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x), \quad a \leq x \leq b$$

è nota come **equazione di diffusione-trasporto-reazione**; la funzione incognita $u(x)$ rappresenta la densità di una grandezza fisica nel punto x. Questa grandezza può essere, ad esempio, la massa di una sostanza chimica disciolta in un ambiente pieno d'aria oppure di acqua.

- La funzione $r(x)$ rappresenta la produzione (o distruzione, se negativa) della grandezza in x.
- Il termine $u''(x)$ è detto **termine di diffusione** e rappresenta la diffusione della grandezza in x.
- Il termine $p(x)u'(x)$ è detto **termine di trasporto** ed è presente se la sostanza è diluita in un fluido che si muove con velocità $p(x)$ e viene trasportata da questo fluido.
- Il termine $q(x)u(x)$ è detto **termine di reazione** ed è presente se la sostanza con densità $u(x)$ partecipa a una reazione chimica, che ne aumenta o diminuisce la concentrazione.

Metodo delle differenze finite

Supponiamo di voler risolvere numericamente il problema:

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \quad a \leq x \leq b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Per definire un metodo delle differenze finite si eseguono i seguenti passi.

1) Si discretizza l'intervallo $[a, b]$ in N parti, per semplicità uguali e di ampiezza $h = (b - a)/N$:

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N \equiv b, \quad x_n = x_0 + nh, \; n = 0, 1, ..., N$$

Tali nodi formano la **griglia computazionale**.

2) Si colloca l'equazione differenziale sul generico nodo interno x_n, $n = 1, ..., N - 1$:

$$u''(x_n) = f(x_n, u(x_n), u'(x_n))$$

3) Supponendo u sufficientemente regolare, $u \in C^4([a, b])$, si sostituiscono le seguenti formule di derivazione:

$$u'(x_n) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_{n-1})}{2h} + O(h^2)$$
$$u''(x_n) = \frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1})}{h^2} + O(h^2)$$

nell'equazione collocata e si ottiene

$$\frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1})}{h^2} + O(h^2)$$
$$= f\left(x_n, u(x_n), \frac{u(x_{n+1}) - u(x_{n-1})}{2h} + O(h^2)\right)$$

4) Si trascurano infine gli errori $O(h^2)$ e si denota con u_n l'approssimazione di $u(x_n)$ definita dalla corrispondente equazione discretizzata:

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = f\left(x_n, u_n, \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}\right)$$

5) Si risolve infine il problema approssimato:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = f\left(x_n, u_n, \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}\right), \quad n = 1, ..., N-1 \\ u_0 \equiv u(x_0) = \alpha \\ u_N \equiv u(x_N) = \beta \end{cases}$$

rappresentato da un sistema, in generale, non lineare.

Se si utilizza il metodo di Newton, lo Jacobiano del sistema sarà tridiagonale, poiché ogni equazione coinvolge tre sole incognite u_{n-1}, u_n, u_{n+1}.

Se le condizioni ai limiti sono di tipo Robin, per esempio

$$u'(a) + \gamma u(a) = 0$$
$$u'(b) + \delta u(b) = 0$$

per mantenere l'ordine $O(h^2)$ nelle approssimazioni delle singole derivate possiamo sostituire $u'(a)$ e $u'(b)$ con le seguenti formule:

$$u'(a) = \frac{u(x_1) - u(x_{-1})}{2h} + O(h^2)$$
$$u'(b) = \frac{u(x_{N+1}) - u(x_{N-1})}{2h} + O(h^2)$$

Occorre pertanto introdurre i due nodi esterni "fittizi" x_{-1} e x_{N+1} e collocare l'equazione differenziale anche su x_0 e su x_N.

Così facendo otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = f\left(x_n, u_n, \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}\right), \quad n = 0, ..., N \\ u_{-1} = u_1 + 2h\gamma u_0 \\ u_{N+1} = u_{N-1} - 2h\delta u_N \end{cases}$$

nelle incognite $u_0, u_1, ..., u_N$. Osserviamo che i valori della funzione incognita nei nodi x_{-1} e x_{N+1} sono definiti dalle condizioni ai limiti e non entrano in gioco nella risoluzione del sistema. Per questo motivo i nodi esterni x_{-1} e x_{N+1} sono detti "fittizi".

Osservazione

La scelta del passo h costante non è sempre efficiente, soprattutto quando il comportamento della soluzione $u(x)$ non è uniforme su tutto l'intervallo $[a, b]$. In questo caso conviene utilizzare formule di derivazione a passo non costante.

Applicazione 1: equazione di diffusione o del filo elastico

Applichiamo il metodo delle differenze finite al problema modello del filo elastico.

Supponiamo per semplicità $\mu = 1$ e $L = 1$. L'equazione differenziale che definisce lo spostamento diventa quindi:

$$-u''(x) = f(x),\ 0 \leq x \leq 1$$

Per risolvere numericamente il problema ai limiti del filo elastico con un metodo delle differenze finite, introduciamo preliminarmente una griglia (*mesh*) di punti equispaziati nell'intervallo $[0, 1]$:

$$0 \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_N \equiv 1, \quad x_n = nh, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Collochiamo l'equazione differenziale sui nodi interni della mesh

$$-u''(x_n) = f(x_n), \qquad n = 1 \ldots, N - 1$$

Sostituendo $u''(x_n)$ con la formula di derivazione alle differenze centrate (del secondo ordine se $u \in C^4([0,1])$), e i valori $u(x_n)$ con le corrispondenti approssimazioni u_n, otteniamo il seguente schema alle differenze finite

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = f(x_n), \quad n = 1, \dots, N-1 \\ u_0 = 0 \\ u_N = 0 \end{cases}$$

Si osserva che, poiché sono assegnate le condizioni di Dirichlet $u_0 = u(0)$ e $u_N = u(1)$, le uniche incognite sono i valori $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}$.

Pertanto, occorre risolvere un sistema lineare di $N-1$ equazioni in $N-1$ incognite che in forma matriciale può essere scritto

$$\mathbf{A}_h \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

dove

$$\mathbf{A}_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}_h$ del sistema è tridiagonale e simmetrica.

Si dimostra che la matrice $\mathbf{A}_h$ è anche definita positiva (il sistema lineare ammette dunque una e una sola soluzione) e il suo numero di condizionamento aumenta al diminuire del passo h di discretizzazione.

Si dimostra inoltre che se il dato $f \in C^2([0,1])$, e quindi $u \in C^4([0,1])$, si ha

$$\max_n |u(x_n) - u_n| = O(h^2)$$

Pertanto, l'errore tra la soluzione analitica del problema e la soluzione dello schema numerico definita dal sistema, converge quadraticamente a zero al tendere del parametro di discretizzazione h a zero.

Esempio

Risolviamo numericamente il problema del filo elastico con $\mu = 1$ e $L = 1$:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

La soluzione esatta è nota ed è data da:

$$u(x) = x \int_0^1 (1-s) f(s)\, ds - \int_0^x (x-s) f(s)\, ds$$

Pertanto, per $f(x) = 1$ la soluzione è $u(x) = 1/2\, x(1-x)$. In questo caso particolare, l'errore di discretizzazione dello schema delle differenze finite è nullo, cioè il problema può essere risolto esattamente con un metodo alle differenze finite, perché la formula di derivazione utilizzata dal metodo, nel caso di funzioni polinomiali $u(x)$ di grado 2, è esatta, ovvero comporta errore nullo.

... continua esempio

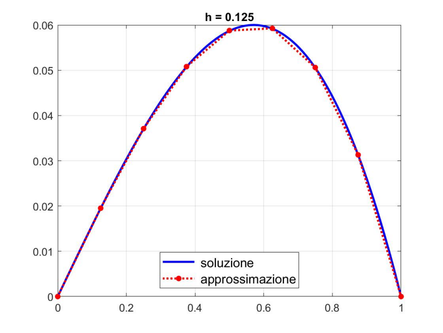
Per $f(x) = \sin x$, la soluzione è $u(x) = \sin x - x \sin 1$. Applicando il metodo alle differenze finite, per $h = 1/N$, $N = 2^k$, $k = 2, 3, ..., 12$, si ottengono gli errori riportati in tabella.

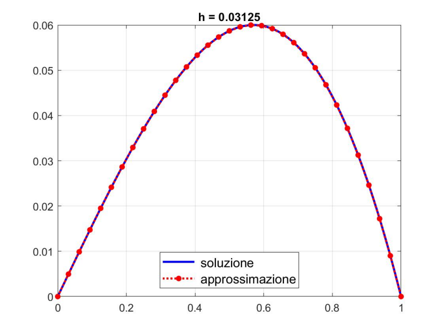
N	h	$\|\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|\|_\infty$	EOC
4	$2.5000e-01$	$3.0663e-04$	–
8	$1.2500e-01$	$7.7115e-05$	1.99
16	$6.2500e-02$	$1.9527e-05$	1.98
32	$3.1250e-02$	$4.8810e-06$	2.00
64	$1.5625e-02$	$1.2203e-06$	2.00
128	$7.8125e-03$	$3.0514e-07$	2.00
256	$3.9063e-03$	$7.6286e-08$	2.00
512	$1.9531e-03$	$1.9071e-08$	2.00
1024	$9.7656e-04$	$4.7678e-09$	2.00
2048	$4.8828e-04$	$1.1919e-09$	2.00
4096	$2.4414e-04$	$2.9791e-10$	2.00

... continua esempio

Dal valore dell'ordine sperimentale di convergenza, EOC$=\log_2(||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h||_\infty/||\mathbf{u}-\mathbf{u}_{h/2}||_\infty)$, si evince che il metodo ha l'ordine di convergenza quadratico atteso.

Nelle figure sotto riportiamo la rappresentazione grafica della soluzione analitica e della soluzione numerica per $h=1/8$ (figura a sinistra) e per $h=1/32$ (figura a destra) .





Applicazione 2: equazione di diffusione-trasporto-reazione

Applichiamo il metodo delle differenze finite all'equazione di diffusione-trasporto-reazione con condizioni di Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x), \quad a \leq x \leq b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Eseguendo tutti i passaggi del metodo delle differenze finite, si ha per $n = 1, ..., N-1$:

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + p(x_n)\dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + q(x_n)u_n = r(x_n) \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

da cui si deduce il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}\left[-\left(1+\frac{h}{2}p(x_n)\right)u_{n-1}+(2+h^2q(x_n))u_n-\left(1-\frac{h}{2}p(x_n)\right)u_{n+1}\right]=r(x_n) \\ \hfill n=1,\ldots,N-1 \\ u_0=\alpha \\ u_N=\beta \end{cases}$$

Ponendo

$$c_n := -\left(1+\frac{h}{2}p(x_n)\right)$$

$$d_n := (2+h^2q(x_n))$$

$$e_n := -\left(1-\frac{h}{2}p(x_n)\right)$$

$$g_n := r(x_n)$$

il sistema sopra si riscrive nella seguente forma matriciale:

$$
\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{N-2} & d_{N-2} & e_{N-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & c_{N-1} & d_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 - \frac{\alpha}{h^2} c_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{N-2} \\ g_{N-1} - \frac{\beta}{h^2} e_{N-1} \end{pmatrix}
$$

Scegliendo $h < 2/||p||_\infty$ e ricordando la condizione $q(x) > 0$ che garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema, si dimostra che la matrice tridiagonale dei coefficienti è a diagonale dominante:

$$
|d_n| > |c_n| + |e_n| \Leftrightarrow 2 + h^2 q(x_n) > 1 + \cancel{\frac{h}{2} p(x_n)} + 1 - \cancel{\frac{h}{2} p(x_n)} = 2
$$

Il sistema lineare ammette pertanto una e una sola soluzione.

Applicazione 3: equazione di diffusione-reazione

Consideriamo ora il seguente problema modello diffusione-reazione:

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \; a \leq x \leq b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

con $q, f \in C^0([a, b])$ e $q > 0$.

Eseguendo tutti i passaggi che definiscono il metodo delle differenze finite si ha

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + q(x_n)u_n = f(x_n), \quad n = 1, ..., N-1 \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

da cui si deduce il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}\left(-u_{n-1} + (2 + h^2 q(x_n))u_n - u_{n+1}\right) = f(x_n), \quad n = 1, ..., N-1 \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

Ponendo,

$$d_n := 2 + h^2 q(x_n)$$

in forma matriciale si ha:

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} d_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & d_2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & d_{N-2} & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & d_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

Esempio

Risolviamo con il metodo delle differenze finite il problema modello diffusione-reazione

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = -x, \; 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $u(x) = (e^x - e^{-x})/(e - e^{-1}) - x$.

... continua esempio

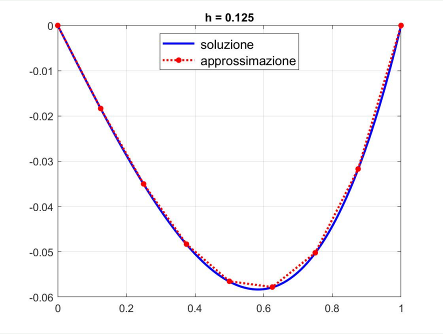
In tabella il comportamento della norma infinito dell'errore generato dal metodo.

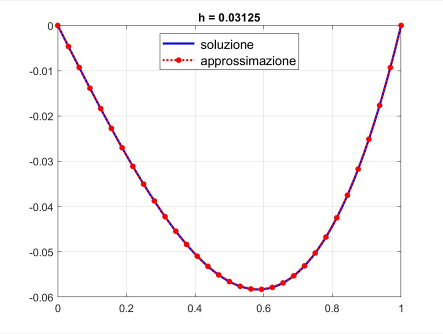
N	h	$\|\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}(x_n)\|\|_\infty$	EOC
4	$2.5000e-01$	$2.6473e-04$	–
8	$1.2500e-01$	$6.8577e-05$	1.95
16	$6.2500e-02$	$1.7205e-05$	1.99
32	$3.1250e-02$	$4.3176e-06$	1.99
64	$1.5625e-02$	$1.0795e-06$	2.00
128	$7.8125e-03$	$2.6988e-07$	2.00
256	$3.9063e-03$	$6.7474e-08$	2.00
512	$1.9531e-03$	$1.6869e-08$	2.00
1024	$9.7656e-04$	$4.2171e-09$	2.00
2048	$4.8828e-04$	$1.0542e-09$	2.00
4096	$2.4414e-04$	$2.6356e-10$	2.00
8192	$1.2207e-04$	$6.5675e-11$	2.00

Come mostra la tabella, l'ordine di convergenza è quadratico.

... continua esempio

In figura sono riportati i grafici della soluzione ottenuta per $h = 1/8$ (figura a sinistra) e per $h = 1/32$ (figura a destra).





Applicazione 4: equazione di diffusione-traporto

Consideriamo il seguente problema modello diffusione-trasporto:

$$\begin{cases} -du''(x) + pu'(x) = 0, \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

con $d > 0$ e $p > 0$ costanti. Il problema ammette una e una sola soluzione data da

$$u(x) = \frac{e^{\frac{p}{d}x} - 1}{e^{\frac{p}{d}} - 1}$$

Osservazione

Se $p \ll d$, cioè se il termine dominante è quello diffusivo, la soluzione del problema è vicina a quella del problema di pura diffusione

$$\begin{cases} u''(x) = 0, \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $u(x) = x$. Infatti, si ha

$$u(x) = \frac{e^{\frac{p}{d}x} - 1}{e^{\frac{p}{d}} - 1} = \frac{\cancel{1} + \frac{p}{d}x + \ldots - \cancel{1}}{\cancel{1} + \frac{p}{d} + \ldots - \cancel{1}} \approx \frac{\cancel{\frac{p}{d}}x}{\cancel{\frac{p}{d}}} = x$$

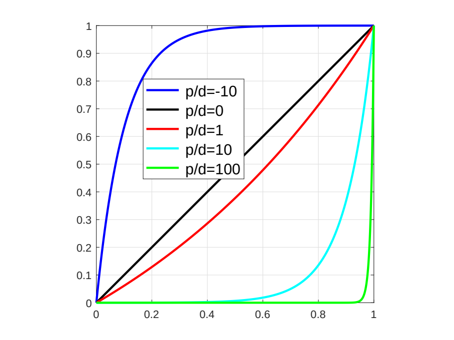
Pertanto, la soluzione del problema dipendente da un parametro piccolo $\frac{p}{d} \ll 1$ converge alla soluzione del problema con $\frac{p}{d} = 0$ al diminuire di questo parametro.

... continua osservazione

Nel caso in cui il termine dominante sia quello di trasporto $d \ll p$, abbiamo

$$u(x) = \frac{e^{\frac{p}{d}x} - 1}{e^{\frac{p}{d}} - 1} \approx \frac{e^{\frac{p}{d}x}}{e^{\frac{p}{d}}} = e^{\frac{p}{d}(x-1)}$$

Questa soluzione è vicina a 0 in quasi tutto l'intervallo $(0, 1)$ tranne che nelle strette vicinanze di 1, come mostra la figura.



... continua osservazione

Vicino a 1 c'è uno **strato limite**: la derivata u' è molto grande e u salta improvvisamente, per soddisfare la condizione al bordo, da un valore molto piccolo a 1.

La risoluzione numerica di uno strato limite può risultare **problematica**.

... continua osservazione

Fisicamente possiamo pensare a $u(x)$ come la temperatura nel punto x di un fluido che si muove in un condotto isolato (a, b) con velocità p e con coefficiente di diffusione termica d. Il movimento del fluido è verso destra poiché p è positivo. Le condizioni al bordo impongono due temperature diverse ai due estremi del tubo.

Se la velocità è bassa e la diffusione domina sul trasporto ($p \ll d$), allora la condizione al bordo all'estremo di uscita $b = 1$ ha effetto all'interno del condotto.

Se la velocità è alta ($p \gg d$) allora possiamo aspettarci che il valore della temperatura all'interno del tubo sia uguale a quella dell'estremo di entrata, tranne che in un piccolo intorno dell'estremo opposto.

Definizione

Un importante parametro adimensionale per il problema modello diffusione-trasporto:

$$\begin{cases} -du''(x) + pu'(x) = 0, \ \ a \leq x \leq b \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

è il **numero di Péclet globale**:

$$\mathrm{Pe}_{\mathrm{glo}} = \frac{|p|(b-a)}{2d}$$

Questo termine rappresenta una misura di quanto il termine convettivo o di trasporto pu' domini quello diffusivo $-du''$ e diremo a **trasporto dominante** un problema in cui $\mathrm{Pe}_{\mathrm{glo}} \gg 1$.

Risolviamo il problema

$$\begin{cases} -du''(x) + pu'(x) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$$

con uno schema delle differenze finite.

Metodo 1

Discretizziamo l'intervallo di interesse $[0,1]$ mediante i punti equispaziati $0 \equiv x_0 < x_1 < ... < x_N \equiv 1$, collochiamo l'equazione sul generico punto x_n e approssimiamo le derivate con delle formule di derivazione numerica del secondo ordine. L'approssimazione $(u_1, u_2, ..., u_{N-1})$ della soluzione $u(x)$ nei punti x_n, $n = 1, ..., N-1$, è soluzione del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -d \ \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + p\dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = 0, & n = 1, ..., N-1 \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

che riscriviamo nella seguente forma

$$\begin{cases} \frac{\cancel{d}}{\cancel{h}^2}\left[-\left(1+\frac{ph}{2d}\right)u_{n-1}+2u_n-\left(1-\frac{ph}{2d}\right)u_{n+1}\right]=0, \quad n=1,\dots,N-1 \\ u_0=\alpha \\ u_N=\beta \end{cases}$$

Definendo

$$\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} := \frac{|p|h}{2d}$$

il **numero di Péclet locale** e ponendo

$$\begin{aligned} c &:= -\left(1+\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}\right) \\ s &:= 2 \\ e &:= -\left(1-\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}\right) \end{aligned}$$

il sistema sopra si riscrive nella seguente forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} s & e & 0 & \cdots & 0 \\ c & s & e & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c & s & e \\ 0 & \cdots & \cdots & c & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -e\beta \end{pmatrix}$$

Scegliendo $\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} < 1$, ovvero $h < 2d/p$, si dimostra che la matrice tridiagonale dei coefficienti è a diagonale dominante, ma non in senso stretto:

$$|s| \geq |c| + |e| \Leftrightarrow 2 \geq 1 + \cancel{\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}} + 1 - \cancel{\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}} = 2$$

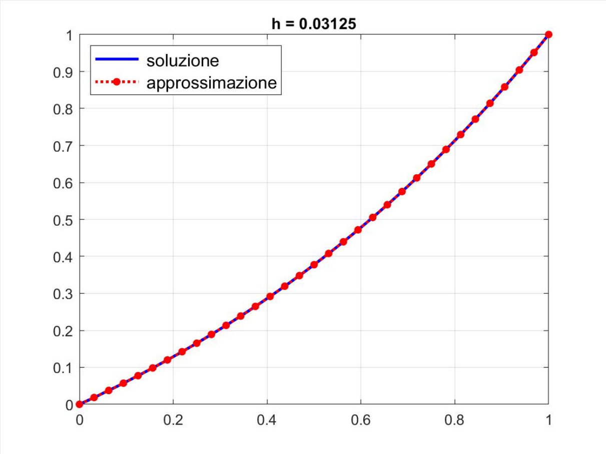
Il sistema lineare in tal caso ammette certamente una e una sola soluzione.

Si può dimostrare che lo schema è stabile se $\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} \leq 1$.

Per mostrare quanto affermato riportiamo il seguente esempio.

Esempio

Risolviamo il problema modello diffusione-traporto con $p = 1$, $d = 1$ ($\frac{p}{d} = 1$), $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Per $h = 1/32$, graficamente si ha:

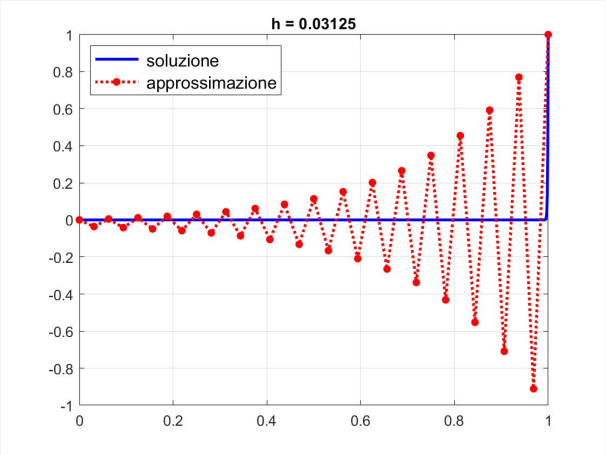


... continua esempio

Inoltre, per $h = 1/2^k$, $k = 2, 3, ..., 13$, ovvero $N = 2^k$, si ha

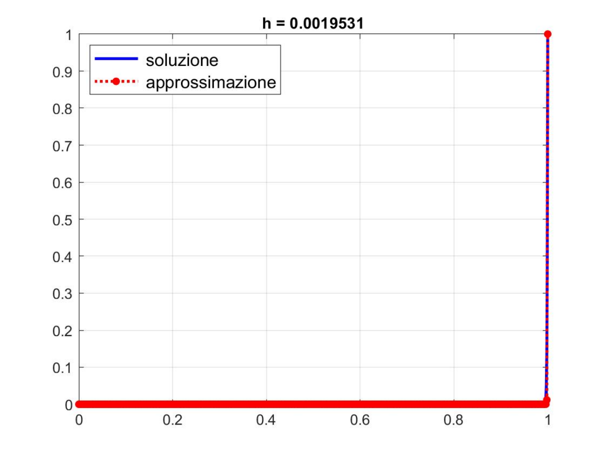
N	h	$\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}$	$\|\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}(x_n)\|\|_\infty$	EOC
4	$2.5000e-01$	$1.2500e-01$	$6.1759e-04$	–
8	$1.2500e-01$	$6.2500e-02$	$1.5638e-04$	1.98
16	$6.2500e-02$	$3.1250e-02$	$3.9287e-05$	1.99
32	$3.1250e-02$	$1.5625e-02$	$9.8275e-06$	2.00
64	$1.5625e-02$	$7.8125e-03$	$2.4579e-06$	2.00
128	$7.8125e-03$	$3.9063e-03$	$6.1447e-07$	2.00
256	$3.9063e-03$	$1.9531e-03$	$1.5363e-07$	2.00
512	$1.9531e-03$	$9.7656e-04$	$3.8406e-08$	2.00
1024	$9.7656e-04$	$4.8828e-04$	$9.6014e-09$	2.00
2048	$4.8828e-04$	$2.4414e-04$	$2.4011e-09$	2.00
4096	$2.4414e-04$	$1.2207e-04$	$6.0281e-10$	2.00
8192	$1.2207e-04$	$6.1035e-05$	$1.5074e-10$	2.00

Risolviamo il problema modello diffusione-traporto con $p = 1$, $d = 0.001$ ($\frac{p}{d} = 1000$), $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Per $h = 1/32$, si ha $\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} \approx 16$ e graficamente la soluzione fornita dal metodo delle differenze finite presenta delle ampie oscillazioni, dette "spurie" perché non presenti nella soluzione analitica.



... continua esempio

Se risolviamo con $h = 1/512$, allora $\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} \approx 0.98$ e le oscillazioni spariscono come mostra il grafico sottostante.



Il metodo in questo caso non presenta fenomeni di instabilità.

... continua esempio

Questa relazione vincola però a scegliere un passo h molto piccolo in dipendenza del rapporto $\frac{p}{d}$:

$$\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{ph}{2d} \leq 1 \;\Rightarrow\; h \leq \frac{2d}{p}$$

Per esempio, per $\frac{p}{d} = 1000$, deve essere $h \leq 2.0e - 03$.

... continua esempio

Per quanto riguarda la norma infinito degli errori generati dal Metodo 1 per $\frac{p}{d} = 1000$ si ha

N	h	Pe_{loc}	$\|\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}(x_n)\|\|_\infty$	EOC
4	$2.5000e-01$	$1.2500e+02$	$3.1004e+01$	$-$
8	$1.2500e-01$	$6.2500e+01$	$7.7150e+00$	$-$
16	$6.2500e-02$	$3.1250e+01$	$2.0235e+00$	$-$
32	$3.1250e-02$	$1.5625e+01$	$9.1132e-01$	$-$
64	$1.5625e-02$	$7.8125e+00$	$7.7305e-01$	$-$
128	$7.8125e-03$	$3.9063e+00$	$5.9276e-01$	$-$
256	$3.9063e-03$	$1.9531e+00$	$3.4287e-01$	$-$
512	$1.9531e-03$	$9.7656e-01$	$1.2997e-01$	0.79
1024	$9.7656e-04$	$4.8828e-01$	$3.2771e-02$	1.99
2048	$4.8828e-04$	$2.4414e-01$	$7.5043e-03$	2.13
4096	$2.4414e-04$	$1.2207e-01$	$1.8388e-03$	2.03
8192	$1.2207e-04$	$6.1035e-02$	$4.5744e-04$	2.00

Metodo 2 - Metodo upwind

Per ovviare al fenomeno di instabilità, che si presenta quando $\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} > 1$, basta approssimare la derivata prima con un rapporto incrementale all'indietro se $p \geq 0$ oppure in avanti se $p \leq 0$, anziché con il rapporto incrementale centrato, cioè basta utilizzare una delle seguenti formule:

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} + O(h) \quad \text{se } p \geq 0$$
$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + O(h) \quad \text{se } p \leq 0$$

In questo modo, si perde in accuratezza (la formula comporta un errore maggiore in quanto lineare, e non quadratico, rispetto a h), ma si guadagna in stabilità. Infatti, il corrispondente schema delle differenze finite risulta stabile per qualunque valore di $\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}$.

Trascurando gli errori delle formule di derivazione per l'approssimazione di u'' e di u', per $p > 0$ si ha

$$\begin{cases} -d \ \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + p\dfrac{u_n - u_{n-1}}{h} = 0, \quad n = 1, ..., N-1 \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

da cui si deduce il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dfrac{\cancel{d}}{\cancel{h}^2}\left[-\left(1 + \dfrac{ph}{d}\right) u_{n-1} + \left(2 + \dfrac{ph}{d}\right) u_n - u_{n+1}\right] = 0, \quad n = 1, ..., N-1 \\ u_0 = \alpha \\ u_N = \beta \end{cases}$$

Ponendo

$$\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} := \frac{ph}{2d}$$

e

$$\begin{aligned} c &:= -\left(1 + 2\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}\right) \\ s &:= 2 + 2\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} \\ e &:= -1 \end{aligned}$$

il sistema sopra si riscrive nella seguente forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} s & e & 0 & \cdots & 0 \\ c & s & e & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c & s & e \\ 0 & \cdots & \cdots & c & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -e\beta \end{pmatrix}$$

Questo metodo delle differenze finite è detto **metodo upwind**.

Osservazione

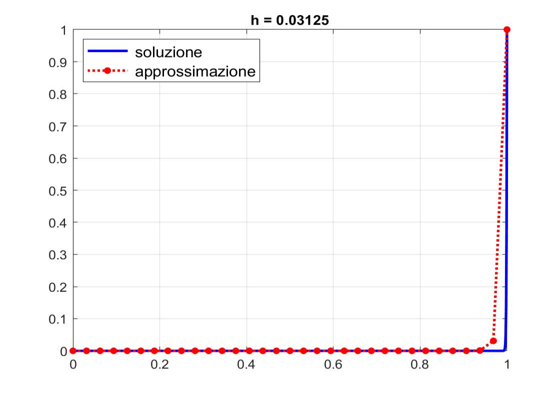
Da dove viene il termine upwind o, letteralmente, “sopravento” o “controvento”?

Se interpretiamo, nel termine di trasporto, p come la velocità del fluido con temperatura u, per $p > 0$ abbiamo che il fluido scorre verso destra.

Pertanto nel punto x_n il valore di u_n sarà maggiormente influenzato dal valore di u_{n-1}, a sinistra o sopravento rispetto a x_n, e non da u_{n+1}, a destra o sottovento rispetto a x_n.
Per includere questa informazione e, al contempo, ignorare quella proveniente da sottovento, occorre usare $(u_n - u_{n-1})/h$ invece di $(u_{n+1} - u_{n-1})/(2h)$.

Esempio

Risolviamo il problema modello diffusione-traporto precedentemente considerato con $\frac{p}{d} = 1000$. Per $h = 1/32$, graficamente si ha:



A differenza del Metodo 1, per il medesimo valore di h precedentemente considerato, non si osservano fenomeni di instabilità, ovvero oscillazioni "spurie".

... continua esempio

Inoltre, come mostra la tabella, l'ordine di convergenza dell'errore in norma infinito è lineare.

N	h	$\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}$	$\|\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}(x_n)\|\|_\infty$	EOC
4	$2.5000e-01$	$1.2500e+02$	$3.9841e-03$	–
8	$1.2500e-01$	$6.2500e+01$	$7.9365e-03$	–
16	$6.2500e-02$	$3.1250e+01$	$1.5748e-02$	–
32	$3.1250e-02$	$1.5625e+01$	$3.1008e-02$	–
64	$1.5625e-02$	$7.8125e+00$	$6.0150e-02$	–
128	$7.8125e-03$	$3.9063e+00$	$1.1307e-01$	–
256	$3.9063e-03$	$1.9531e+00$	$1.8371e-01$	–
512	$1.9531e-03$	$9.7656e-01$	$1.9679e-01$	0.61
1024	$9.7656e-04$	$4.8828e-01$	$1.2933e-01$	0.79
2048	$4.8828e-04$	$2.4414e-01$	$7.4868e-02$	0.88
4096	$2.4414e-04$	$1.2207e-01$	$4.0767e-02$	0.93
8192	$1.2207e-04$	$6.1035e-02$	$2.1357e-02$	0.93

Osservazione

Nel caso del Metodo 1, le oscillazioni della soluzione numerica nascono dal fatto che si è utilizzato uno schema alle differenze finite centrate per la discretizzazione del termine del trasporto. Tale scelta appare del tutto naturale se si vuole preservare l'ordine quadratico di convergenza.
Lo schema upwind invece utilizza un rapporto incrementale in avanti se $p > 0$.
Osserviamo che

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} - \frac{h}{2}\,\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

ovvero il rapporto incrementale si può scrivere come la somma di un rapporto incrementale centrato per l'approssimazione della derivata prima e di un termine proporzionale al rapporto incrementale centrato per la discretizzazione della derivata seconda. Pertanto, lo schema upwind si può reinterpretare come uno schema alle differenze finite centrate in cui è stata aggiunta una **diffusione artificiale** proporzionale ad h.

Infatti le equazioni dello schema upwind

$$-d\ \frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}+p\frac{u_n-u_{n-1}}{h}=0,\ \ n=1,...,N-1$$

sono equivalenti a

$$-d\left(1+\frac{ph}{2d}\right)\ \frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}+p\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h}=0,\ \ n=1,...,N-1$$

che riscriviamo nel seguente modo:

$$-d_h\ \frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}+p\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h}=0,\ \ n=1,...,N-1$$

con $d_h := d(1+\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}})$.
Osserviamo che quest'ultimo schema corrisponde alla discretizzazione con il Metodo 1 del problema:

$$-d_h u''(x)+pu'(x)=0$$

La correzione della viscosità $d_h - d = d\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}} = ph/2$ è detta viscosità numerica o anche viscosità artificiale.

... continua osservazione

Il nuovo numero di Péclet locale, associato allo schema reinterpretato è

$$\mathrm{Pe}^*_{\mathrm{loc}} = \frac{ph}{2d_h} = \frac{ph}{2d(1+\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}})} = \frac{\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}}{1+\mathrm{Pe}_{\mathrm{loc}}}$$

e pertanto $\mathrm{Pe}^*_{\mathrm{loc}} < 1$ per ogni valore di $h > 0$.