Esistenza e unicità delle soluzioni di un modello alle ODE

$x : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $n \in \mathbb{N}$ numero di componenti della soluzione di un sistema di ODE

Forma generale:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t,x)} \qquad (*)$$

dove $f: [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funzione nota delle componenti della soluzione x ed eventualmente anche del tempo t.

Esempio (SIR)

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

$$x = (\overset{x_1}{S}, \overset{x_2}{I}, \overset{x_3}{R}) \in \mathbb{R}^3$$

$x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} -\beta x_1 x_2 \\ \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 \\ \gamma x_2 \end{pmatrix}$$

Con questa x e questa f il modello SIR è nella forma $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$.

Def. Il sistema $(*)$ si dice **autonomo** se f non dipende da t (cioè è costante in t). In caso contrario, il sistema $(*)$ si dice non autonomo.

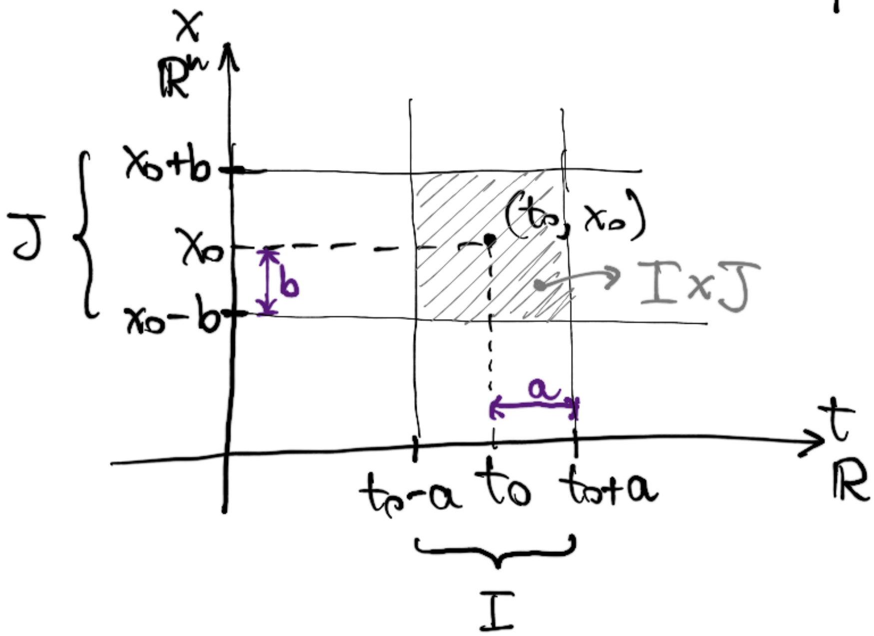
<u>Teorema (di Cauchy)</u>

Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione definita in un intorno

$t \in \mathbb{R}$ di un punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ avente la seguente forma:

$$I \times J := \left\{ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \ \|x - x_0\| \leq b \right\}$$

dove $a, b > 0$ e $\|\cdot\|$ è una norma qualsiasi di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.



Supponiamo che f sia:

(i) continua in $I \times J$;

(ii) lipschitziana in x uniformemente in t dentro $I \times J$:

$$\exists L > 0 : \|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq L \, \|x_2 - x_1\|$$

$\forall x_1, x_2 \in J,\ \forall t \in I,$

Allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ \boxed{x(t_0) = x_0} \longrightarrow \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $x = x(t)$ definita in un intorno del punto t_0.

Dim.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{d\tau}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x)\, d\tau, \qquad t \text{ istante generico}$$

$$x(t) - \underbrace{x(t_0)}_{= x_0} = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau}$$ rappresentazione integrale della ODE

Introduciamo la mappa

$$F:\ x \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

Possiamo scrivere:

$$x(t) = F(x(t))$$

da cui vediamo che la soluzione x cercata è un punto fisso di F.

Per dimostrare che F ammette un unico punto fisso useremo il teorema delle contrazioni di Banach.

Richiamo:

<u>Def.</u> Sia (X, d) uno spazio metrico. Una contrazione su X è una funzione $g: X \to X$ tale che:

$$\exists\, c \in (0,1) \text{ t.c. } d(g(x_1), g(x_2)) \leq c\, d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

<u>Teorema (di Banach)</u>

Sia (X, d) uno spazio metrico non vuoto. Sia $g: X \to X$ una contrazione su X. Allora g ammette un unico punto fisso in X, cioè:

$$\exists!\, x_* \in X \text{ t.c. } x_* = g(x_*).$$

Per applicare il teorema di Banach nel nostro caso seguiamo alcuni passi intermedi:

(i) Definiamo lo spazio su cui far agire F.

Fissiamo:

$$M := \sup_{(t,x)\in I\times J} \|f(t,x)\| = \|f\|_\infty < +\infty$$

$$\delta < \min\left\{ a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M} \right\}.$$

Consideriamo l'intervallo:

$$I_\delta := [t_0-\delta, t_0+\delta_0] \subseteq I$$

e lo spazio:

$$X := \left\{ g \in C^0(I_\delta; \mathbb{R}^n) : \|g - x_0\|_\infty \leq b \right\}.$$

Osserviamo che X è un sottospazio chiuso dello spazio metrico $\left(C^0(I_\delta;\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty \right)$, che è completo. Dunque anche X è completo.

(ii) Mostriamo che F manda X in sé:

- la continuità delle funzioni di X è preservata da F, perché f è continua per ipotesi in J e l'integrale di una funzione continua è ancora una funzione continua;

- Sia $g \in X$ e calcoliamo:

$$\|F(g) - x_0\|_\infty = \|\underbrace{\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, g(\tau))d\tau}_{F(g)} - \cancel{x_0}\|_\infty$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(\tau, x(\tau))\|_\infty}_{M} d\tau \right|$$

$$= M\,|\underset{\substack{\cap \\ I_\delta}}{t} - t_0| \leq M\delta < b.$$

(iii) Verifichiamo che F è una contrazione su X:

$$\|F(\underset{\substack{\cap \\ X}}{g_2}) - F(\underset{\substack{\cap \\ X}}{g_1})\|_\infty = \|\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, g_2(\tau))d\tau - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^{t} f(\tau, g_1(\tau))d\tau\|_\infty$$

$$= \| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, g_2(\tau)) - f(\tau, g_1(\tau))\right) d\tau \|_\infty$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \| f(\tau, g_2(\tau)) - f(\tau, g_1(\tau)) \|_\infty \, d\tau \right. \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \| g_2 - g_1 \|_\infty \, d\tau \right| \\
&= L \, |\underset{\in I_\delta}{t} - t_0| \, \| g_2 - g_1 \|_\infty \\
&\leq \underbrace{L\delta}_{<1} \| g_2 - g_1 \|_\infty ,
\end{aligned}
$$

perciò F è una contrazione su X. Dal teorema di Banach segue la tesi.

$\emptyset$