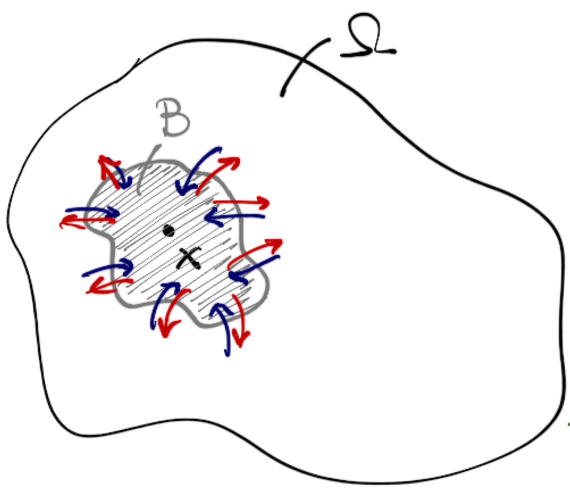
Leggi di conservazione

$u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \; t > 0$

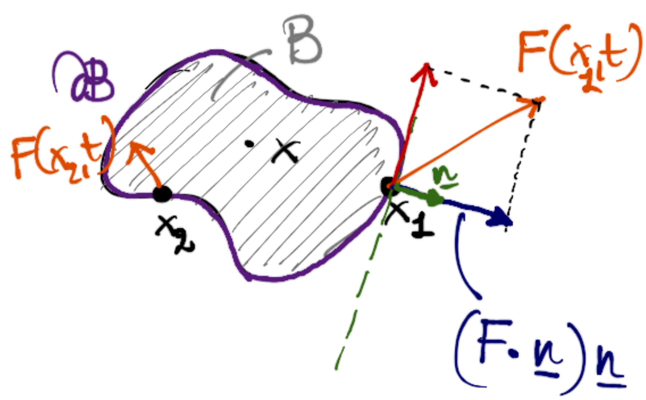
domínio spaziale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Def. Diciamo che u è conservata localmente in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se la variazione nel tempo della quantità totale di u presente in ogni sotto insieme $B \subseteq \Omega$ dipende esclusivamente dal flusso netto di u attraverso ∂B.



$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_B u(x,t)\,dx = -\int_{\partial B} F\cdot \underline{n}\, d\sigma}$$

dove $F = F(x,t) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore flusso di u al tempo t nel punto x ed $\underline{n} \in \mathbb{R}^n$ è il versore normale a ∂B uscente da B.



$\underline{n}$ versore normale a ∂B uscente da B

Manipolando ulteriormente la legge di conservazione abbiamo:

$$\int_B \partial_t u(x,t)\,dx \underset{\text{teorema di Gauss}}{=} -\int_B \operatorname{div} F\, dx$$

Oss. $\quad \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$.

Quindi:

$$\int_B \left(\partial_t u + \operatorname{div} F \right) dx = 0, \quad \forall B \subseteq \Omega.$$

Per l'arbitrarietà di B, e supponendo formalmente che u, F siano sufficientemente regolari ($u, F \in C^1$), questo implica

$$\boxed{\partial_t u + \operatorname{div} F = 0} \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty).$$

Questa è la formulazione puntuale della legge di conservazione.

Relazione costitutiva Supponiamo che F sia una funzione nota di u:

$$F = F(u).$$

$$\to \qquad \boxed{\partial_t u + \operatorname{div} F(u) = 0} \qquad \text{in } \Omega \times (0, +\infty)$$

Oss. La relazione costitutiva può essere non lineare e quindi la PDE per u può a propria volta essere non lineare.

Legge di conservazione in 1D

$n = 1, \quad \Omega = \mathbb{R}$

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione di flusso. Supporremo sempre che $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Se u è sufficientemente regolare, possiamo scrivere:

$$\boxed{\partial_t u + \boxed{f'(u)}\, \partial_x u = 0} \qquad (*)$$

che si presenta nella forma di un'equazione del trasporto ma con velocità di trasporto in generale dipendente da u.

Il metodo delle caratteristiche

Def. Chiamiamo linee caratteristiche dell'equazione $(*)$ le curve $x = x(t)$ in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ t.c.

$$\frac{dx}{dt} = f'(u)\Big|_{x = x(t)}$$

$$= f'(u(x(t), t)). \qquad (**)$$

Studiamo il comportamento di u lungo le caratteristiche:

$$\hat{u}(t) := u(x(t),t)$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \partial_x u(x(t),t) \cdot \boxed{\frac{dx(t)}{dt}} + \partial_t u(x(t),t)$$

$$= f'(u(x(t),t))$$

$$= \partial_x u(x(t),t) \cdot f'(u(x(t),t)) + \partial_t u(x(t),t)$$

$$\underset{\text{per } (*)}{=} 0$$

$\Rightarrow$ u è costante lungo le caratteristiche

$$\Rightarrow u(x(t),t) = u(x(0),0)$$

$$= u_0(\overbrace{x(0)}^{x_0})$$

x_0 piede della caratteristica (condizione iniziale di (**))

$u_0(x) := u(x,0)$ condizione iniziale della PDE (*)

$$= u_0(x_0)$$

Ritornando a (**):

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{f'(u_0(x_0))}$$

costante in t

da cui: le caratteristiche sono ancora **rette** nel piano $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ ma in generale **non parallele** perché dx/dt dipende da x_0 (cioè dal punto da cui ciascuna caratteristica esce).