Consideriamo ora:

$$\Delta u \, u^- = \operatorname{div}(\nabla u)\, u^-$$

$$= \operatorname{div}(u^- \nabla u) - \nabla u^- \cdot \nabla u$$

$$= \operatorname{div}(u^- \nabla u) \underbrace{- \nabla u^- \cdot \nabla(-u^-)}_{= |\nabla u^-|^2}$$

Abbiamo quindi:

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\left((u^-)^2\right) dx - D \int_\Omega \left[\operatorname{div}(u^- \nabla u) + |\nabla u^-|^2\right] dx = 0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^-)^2 dx \underbrace{- D \int_{\partial\Omega} u^- \underbrace{\nabla u \cdot \underline{n}}_{= \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega} d\sigma}_{=0} - D \int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^-)^2 dx + D \int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^-)^2 dx = -2D \int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx \leq 0$$

$\Rightarrow \int_\Omega (u^-)^2 dx$ è una funzione non crescente di t:

$$\int_\Omega \left(u^-(x,t)\right)^2 dx \leq \int_\Omega \left(u^-(x,0)\right)^2 dx$$

$$= \int_\Omega \Big(\underbrace{u_0^-(x)}_{\equiv 0 \text{ in } \Omega \text{ perché } u_0 \geq 0 \text{ in } \Omega \text{ per ipotesi}}\Big)^2 dx = 0 \qquad \forall t > 0$$

Dunque:

$$\int_\Omega \left(u^-(x,t)\right)^2 dx \leq 0 \qquad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \left(u^-(x,t)\right)^2 dx = 0 \qquad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow u^-(x,t) = 0 \quad \text{per (q.o.) } x \in \Omega, \ \forall t > 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) \geq 0 \quad \text{per (q.o.) } x \in \Omega, \ \forall t > 0.$$

$\square$

Risoluzione per serie

$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\ u = u_0 & \text{in } \Omega \times \{0\} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0,+\infty) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k(t)\psi_k(x)$$

Introduciamo gli autovalori e le autofunzioni di $-\Delta$ in Ω con condizione al bordo di Neumann omogenea:

$$\begin{cases} -\Delta\psi_k = \lambda_k \psi_k & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial \psi_k}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

Vale:

<u>Teorema</u> Esistono coppie (λ_k, ψ_k) di autovalori - autofunzioni del problema $(*)$, con $\psi_k \not\equiv 0$ e $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_k \geq 0$ $\forall k = 0, 1, \dots$ Le ψ_k, in particolare, formano una base di $L^2(\Omega)$.

Inseriamo lo sviluppo in serie di u nell'equazione del calore:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k'(t)\psi_k(x) - D\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k(t)\,\Delta\psi_k(x) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k'(t)\psi_k(x) + D\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k(t)\,\lambda_k\psi_k(x) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\hat{u}_k'(t) + D\lambda_k\hat{u}_k(t)\right]\psi_k(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}_k' + D\lambda_k \hat{u}_k = 0, \quad k = 0,1,2,\dots$$

$$e^{D\lambda_k t}\hat{u}_k' + D\lambda_k e^{D\lambda_k t}\hat{u}_k = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{D\lambda_k t}\hat{u}_k\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{D\lambda_k t}\hat{u}_k(t) = \hat{u}_k(0) = \hat{u}_{k,0}$$

Promemoria: $u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_{k,0}\,\varphi_k(x)$ dove $\hat{u}_{k,0} = \hat{u}_k(0)$.

da cui

$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_{k,0}\, e^{-D\lambda_k t}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

Osserviamo che:

- $\lambda_0 = 0$ è autovalore con autofunzione associata $\varphi_0 \equiv 1$ (calcolo diretto dal problema (*));
- $\lambda_k > 0 \quad \forall k > 0$

quindi:

$$\hat{u}_k(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0 \quad \forall k > 0, \qquad \hat{u}_0(t) = \hat{u}_{0,0}.$$

Di conseguenza:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_{k,0}\, e^{-D\lambda_k t}\varphi_k(x)$$

$$= \hat{u}_{0,0} \underbrace{\varphi_0(x)}_{\equiv 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_{k,0} e^{-D\lambda_k t} \varphi_k(t)$$

$$\xrightarrow{t \to +\infty} \hat{u}_{0,0} .$$

Questo implica che u tende ad una costante asintoticamente in tempo. Stante l'interpretazione probabilistica di u, deduciamo che la soluzione dell'equazione del calore in un dominio spaziale limitato e con $\partial u / \partial n = 0$ su $\partial \Omega$ tende alla distribuzione uniforme $\longrightarrow$ effetto della diffusione.

Riprendiamo lo sviluppo in serie del dato iniziale:

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_{k,0} \varphi_k(x) .$$

Osserviamo che:

$$1 = \int_\Omega u_0(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_{k,0} \int_\Omega \varphi_k(x)\, dx$$

$$\hat{u}_{0,0} |\Omega| + \sum_{k=\_}^{\infty} \hat{u}_{k,0} \int_\Omega \varphi_k(x)\, dx$$

$$= \hat{u}_{0,0}|\Omega| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_{k,0}}{\lambda_k} \int_\Omega \underbrace{\Delta \varphi_k}_{= \operatorname{div}(\nabla \varphi_k)} dx$$

$$= \hat{u}_{0,0}|\Omega| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_{k,0}}{\lambda_k} \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla \varphi_k \cdot \underline{n}}_{= \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega} d\sigma$$

$$= \hat{u}_{0,0}|\Omega|$$

da cui $\hat{u}_{0,0} = \dfrac{1}{|\Omega|}$. Questo è coerente con il fatto che u tende asintoticamente in tempo sempre alla distribuzione di probabilità uniforme in Ω:

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = \hat{u}_{0,0} = \frac{1}{|\Omega|}.$$