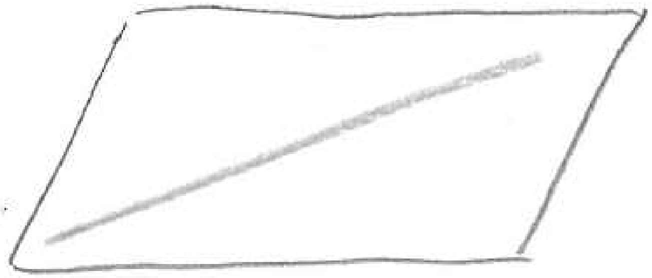
INTRODUZIONE

Lo scopo principale del corso è lo studio di curve e superfici di $\mathbb{R}^3$.

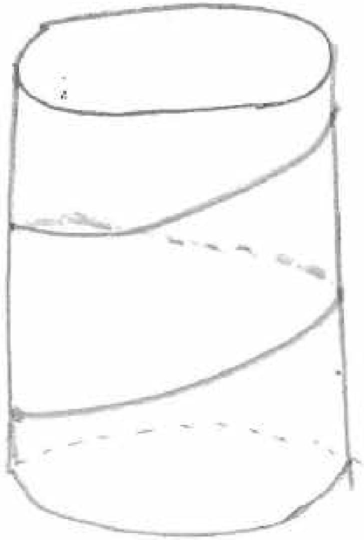
In particolare sarà analizzato il concetto di curvatura e torsione di una curva e vari concetti di curvatura di una superficie

Facciamo degli esempi:



Retta: è una curva piana che ha curvatura = 0

Questa curva è piana ma non è una retta:
Avrà curvatura ≠ 0
e torsione = 0



Questa curva è un'elica:
Non è una curva piana
Avrà curvatura ≠ 0
e torsione ≠ 0

In un senso che poi specificheremo in seguito, curvatura e torsione caratterizzano univocamente la curva, da qui la loro importanza.

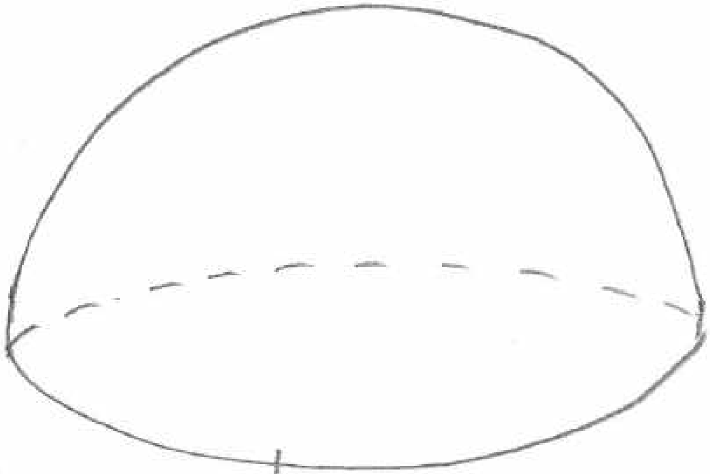
<u>Cosa possiamo dire sulle superfici?</u>

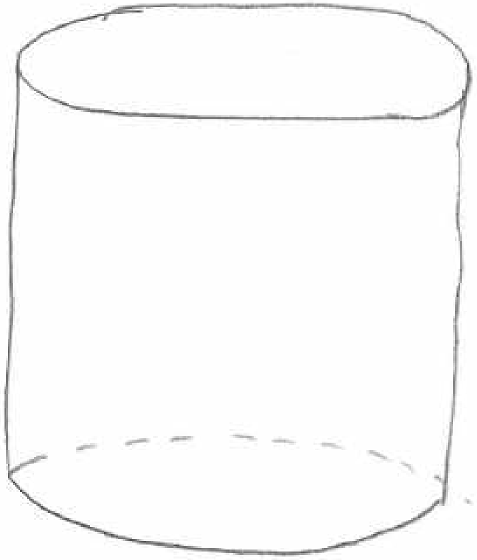
Ci sono molti "tipi" di curvature di una superficie. Noi analizzeremo le seguenti:

- <u>Curvature principali</u>
- <u>Curvatura media</u>
- <u>Curvatura Gaussiana</u>

Facciamo un esempio intuitivo.

Consideriamo una calotta sferica e un cilindro



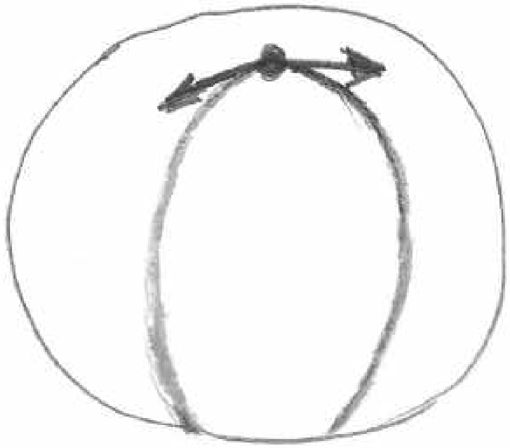


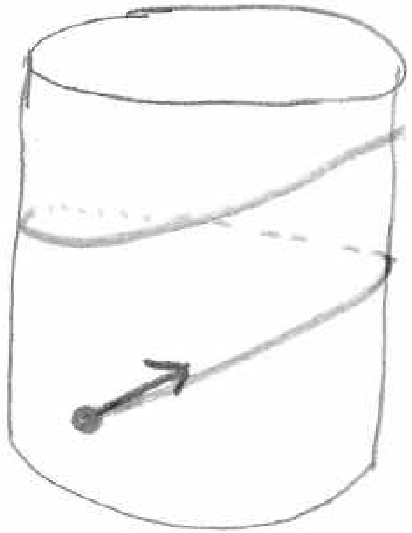
Domanda:
Quale delle due superfici (magari dopo opportuni tagli) riuscite a "srotolare" su un piano?

Risposta: Il cilindro. Non a caso:

- Curvatura della calotta sferica è una costante > 0
- Curvatura cilindro è $= 0$

Osservazione : moto spontaneo di una particella.



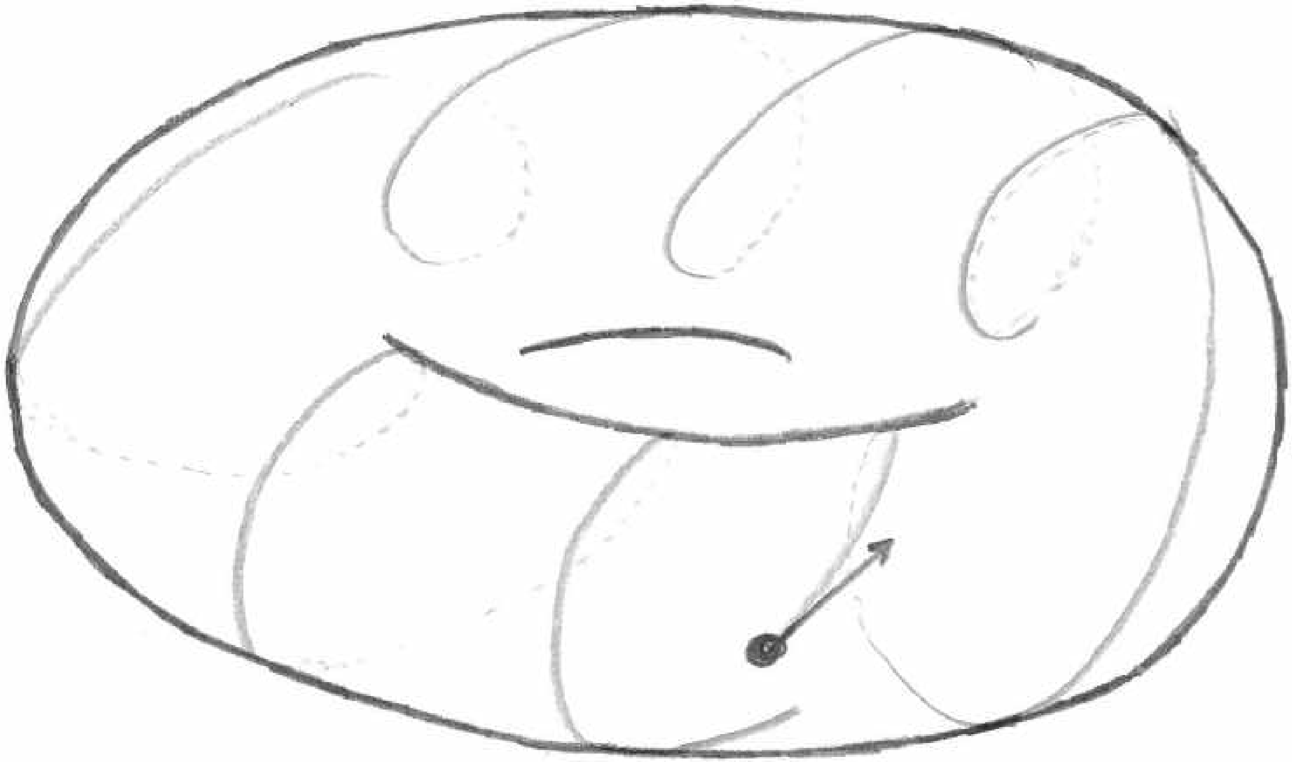


Se pensiamo ad una particella vincolata ad una sfera e gli diamo un "impulso", questa particella si muoverà lungo un equatore.

Se pensiamo ad una particella vincolata ad un cilindro, il suo moto spontaneo sarà un'elica.

La "semplicità" di questi moti spontanei risiede nel fatto che le superfici sono di curvatura Gaussiana costante

Se consideriamo il toro



la situazione diventa molto più complicata.
Questo riflette il fatto che il toro
non ha curvatura Gaussiana costante

PROGRAMMA DEL CORSO

<u>Curve</u> :
- Curve parametrizzate
- Triedro di Frenet
- Formule di Frenet : curvatura e torsione
- Eliche ed eliche generalizzate
- Esempi di calcolo di curvatura e torsione

<u>Superfici</u> :
- Richiami di algebra lineare : endomorfismi simmetrici e spazio duale.
- Superfici parametrizzate
- Analisi locale su superfici parametrizzate
- Prima e seconda forma fondamentale
- Operatore forma
- Curvature

CURVE (PARAMETRIZZATE)

Una curva <u>regolare</u> in $\mathbb{R}^3$ è un'applicazione

$$P : t \in I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

con I intervallo di $\mathbb{R}$ tale che

1. $P(t) \in C^1(I)$, cioè tutte le componenti di $P(t) = \underbrace{\big(x(t), y(t), z(t)\big)}_{\text{Componenti di } P(t)}$

   sono funzioni $C^1 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2. $P'(t) = \dfrac{dP}{dt} := \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \neq (0,0,0) \ \forall\, t \in I$

Le equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Sono dette <u>equazioni parametriche</u> della curva $P(t)$

<u>Esempio</u>: Nel corso di Algebra lineare e Geometria avete visto che

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 \cdot t \\ y = y_0 + v_2 \cdot t \\ z = z_0 + v_3 \cdot t \end{cases}$$

è una retta (quindi una particolarissima curva) passante per (x_0, y_0, z_0) e con direzione $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

<u>Notare</u> : Di solito la regolarità minima richiesta ad una curva è C^1 (cioè con componenti derivabili su I e con derivata continua su I)

Ma la regolarità può essere maggiore. Infatti per calcolare la curvatura supporremo la curva C^2 e per la torsione C^3

Il vettore $P'(t)$ è tangente alla curva all'istante t (da un punto di vista fisico è il vettore velocità)

La condizione (2) di pag. 8 significa dunque che la curva, in ogni istante $t \in I$, ha vettore tangente non nullo.

Esempio: La curva $P : t \in \mathbb{R} \longrightarrow (t^2, t^2, t^2)$ non è regolare in quanto
$P'(t) = (2t, 2t, 2t)$
che si annulla per $t = 0$.
Sarebbe regolare, per esempio, con $I = [1, +\infty)$

Esempio : Consideriamo la curva

$$P : t \in \mathbb{R} \longrightarrow (\operatorname{sen}(t), t^2) \in \mathbb{R}^2$$

È sicuramente una curva regolare in quanto

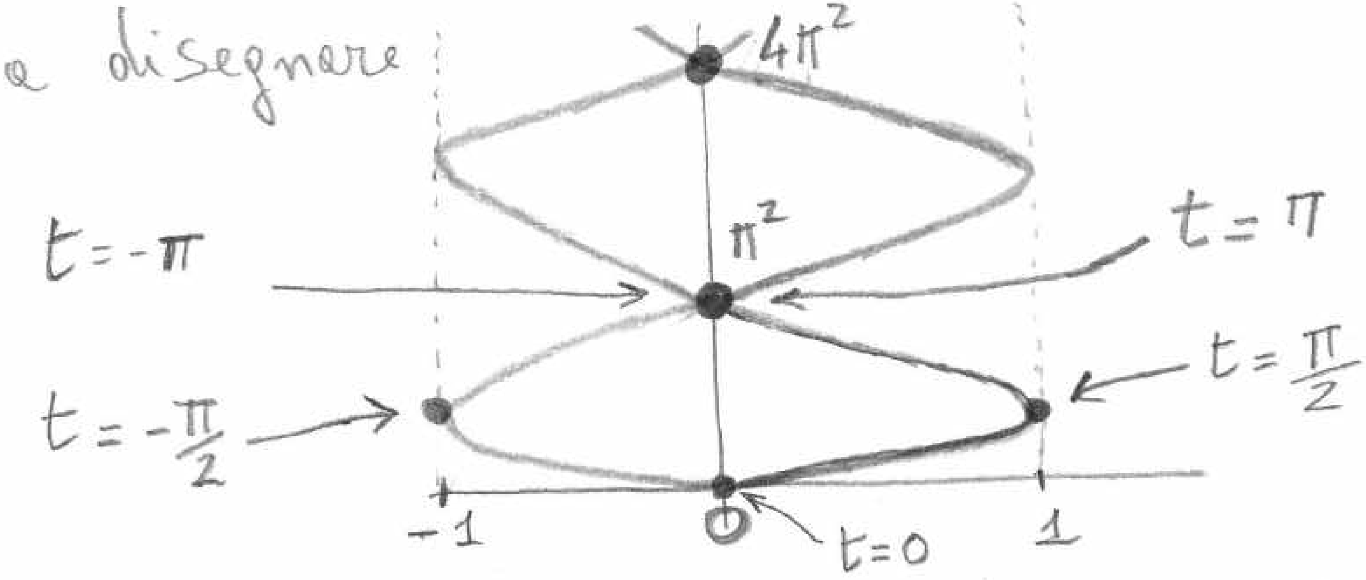
$$P'(t) = (\cos(t), 2t) \neq (0,0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

D' altra parte ci sono autointersezioni.

Per esempio $P(-\pi) = P(\pi) = (0, \pi^2)$

$P(-2\pi) = P(2\pi) = (0, 4\pi^2)$ e così via

Andandola a disegnare



CURVA CHIUSA: è una curva $P:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ tale che $P(a) = P(b)$

CURVA SEMPLICE: è una curva $P: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tale che per qualsiasi t_1, t_2 distinti di cui almeno uno sia interno ad I, si ha che $P(t_1) \neq P(t_2)$.

In poche parole la curva non ha autointersezioni con l'unica eventuale eccezione $P(a) = P(b)$ se $I = [a,b]$

CURVA PIANA: una curva $P(t)$ è piana se esiste un piano π tale che $P(t) \in \pi \ \forall t$

Ex : Dimostrare che la curva

$$P(t) : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

non è piana

Vediamo se esiste un piano π che contiene la curva

L'equazione di un generico piano di $\mathbb{R}^3$ è

$$\pi : \quad ax + by + cz + d = 0 \quad , \quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

Andando a sostituire l'equazioni parametriche di $P(t)$ nel piano π otteniamo

$$at + bt^2 + ct^3 + d = 0$$

che, dovendo valere $\forall\, t \in \mathbb{R}$, per il principio d'identità dei polinomi, ci dà $a = b = c = d = 0$

Quindi non esistono piani contenenti la curva

Ex: Dimostrare che la curva

$$P(t): \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \\ z = t \end{cases}$$

non è piana

Come per l'esercizio di pag. 14, dobbiamo dimostrare che non esiste un piano che la contiene.

L'equazione generica di un piano π è

$$\pi: ax + by + cz + d = 0 \quad , \quad (a, b, c) \neq (0,0,0)$$

Andando a sostituire l'equazioni parametriche di $P(t)$ in π otteniamo

$$a\cos(t) + b\operatorname{sen}(t) + ct + d = 0 \qquad (\bullet)$$

Ora la (•) di pag. 15 non è propriamente un polinomio, quindi non possiamo usare il principio d'identità dei polinomi.

Idea: Possiamo dare 4 valori arbitrari a t, per esempio 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$ all'equazione (•) di pag. 15
Otteniamo così un sistema di 4 equazioni nelle incognite a, b, c, d.
L'unica soluzione di questo sistema è quella nulla