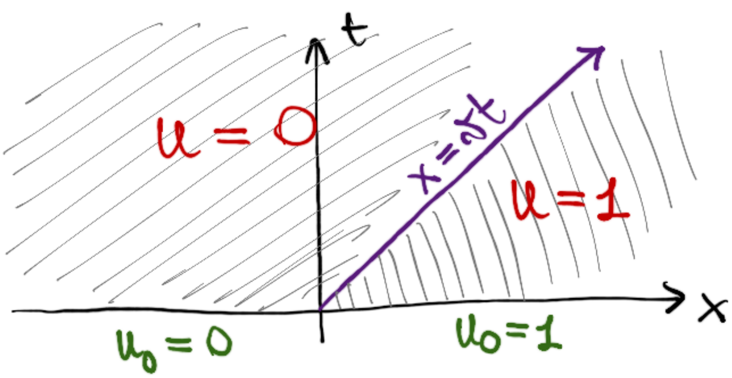
Soluzioni classiche e deboli dell'equazione del trasporto

$$\begin{cases} \partial_t u + v\partial_x u = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ u(x,0) = H(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad (v>0)$$

Metodo delle caratteristiche: $\quad u(x,t) = H(x-vt)$



Introduciamo una formulazione alternativa a quella puntuale della PDE, che permette di avere soluzioni non necessariamente derivabili in senso classico.

Sia $\varphi = \varphi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$ una funzione test sul dominio della PDE (ricordiamo: $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$ e $\operatorname{supp}\varphi$ è compatto in $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$).

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \partial_t u\,\varphi\,dx\,dt + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} v\,\partial_x u\,\varphi\,dx\,dt = 0$$

Integrando per parti:

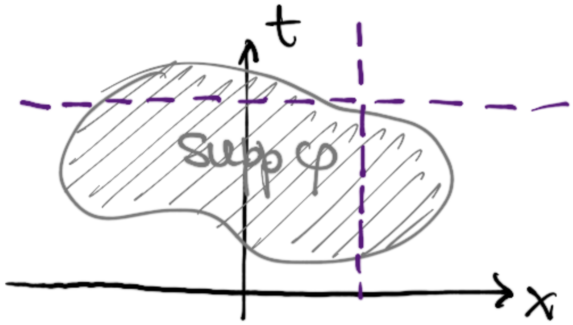
supp φ compatto

$$-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_t\varphi\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Big[u(x,t)\varphi(x,t)\Big]_{t=0}^{t=+\infty}}_{\to 0} dx$$

$$+\,\vartheta\left\{-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_x\varphi\,dx\,dt + \int_0^{+\infty} \underbrace{\Big[u(x,t)\varphi(x,t)\Big]_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{\to 0} dt\right\}$$

supp φ compatto

$$= 0$$



$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_t\varphi\,dx\,dt + \vartheta\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_x\varphi\,dx\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\,\left(\partial_t\varphi + \vartheta\,\partial_x\varphi\right) dx\,dt = 0.$$

Def. Chiamiamo **soluzione debole** della PDE $\partial_t u + \vartheta\,\partial_x u = 0$ in $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ una funzione $u = u(x,t)$ tale che:

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\left(\partial_t\varphi + \vartheta\,\partial_x\varphi\right) dx\,dt = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}\big(\mathbb{R}\times(0,+\infty)\big).$$

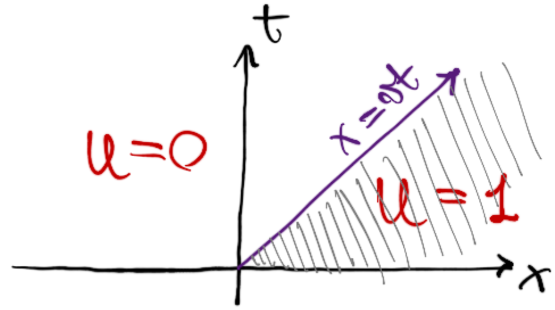
Questa è detta **formulazione debole** dell'equazione del trasporto.

Def. Chiamiamo **soluzione classica** dell'equazione del trasporto una funzione $u \in C^1\big(\mathbb{R}\times(0,+\infty)\big)$ t.c.

$$\partial_t u(x,t) + v\,\partial_x u(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty).$$

Questa è detta formulazione classica (o puntuale) della PDE.

Esempio Facciamo vedere che $u(x,t) = H(x - vt)$ è una soluzione debole dell'equazione del trasporto. Supponiamo $v > 0$.



$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\,(\partial_t \varphi + v\,\partial_x \varphi)\,dx\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{x}{v}} 1\cdot(\partial_t\varphi + v\,\partial_x\varphi)\,dt\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x/v}\partial_t\varphi\,dt\right)dx + v\int_0^{+\infty}\int_0^{x/v}\partial_x\varphi\,dt\,dx$$

scambio dell'ordine di integrazione

$$= \int_0^{+\infty}\left[\varphi\right]_{t=0}^{t=x/v} dx + v\int_0^{+\infty}\left(\int_{vt}^{+\infty}\partial_x\varphi\,dx\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\varphi\left(x,\frac{x}{v}\right) - \varphi(x,0)\right)dx$$

$\varphi(x,0) \to 0$: supp φ compatto

$$+\; v\int_0^{+\infty}\left[\varphi\right]_{x=vt}^{x=+\infty} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi\left(x, \frac{x}{v}\right) dx + v \int_0^{+\infty} \Big(\underbrace{\varphi(+\infty, t)}_{\lim_{x \to +\infty} \varphi(x,t) = 0 \ (\text{supp}\,\varphi \text{ compatto})} - \varphi(vt, t) \Big) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} \varphi\left(x, \frac{x}{v}\right) dx}_{t := x/v} - v \int_0^{+\infty} \varphi(vt, t)\, dt$$

$$\underset{\text{cambio variabile}}{=} \int_0^{+\infty} \varphi(vt, t)\, v\, dt - v \int_0^{+\infty} \varphi(vt, t)\, dt = 0 .$$

Per l'arbitrarietà di φ, concludiamo che $H(x - vt)$ è una soluzione debole dell'equazione del trasporto. Non è invece una soluzione classica in quanto non è di classe C^1 su $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

<u>Teorema</u> Se $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ è soluzione classica dell'equazione del trasporto allora essa è anche soluzione debole.

<u>Dim.</u> Facciamo vedere che u soddisfa la definizione di soluzione debole:

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \left(\partial_t \varphi + v \partial_x \varphi \right) dx\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_t\varphi\,dx\,dt + v\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_x\varphi\,dx\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{+\infty} u\,\partial_t\varphi\,dt\right)dx + v\int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_x\varphi\,dx\right)dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(-\int_0^{+\infty}\partial_t u\,\varphi\,dt + \underbrace{\left[u\varphi\right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{\to 0}\right)dx$$

(supp φ compatto)

$$+ v\int_0^{+\infty}\left(-\int_{\mathbb{R}}\partial_x u\,\varphi\,dx + \underbrace{\left[u\varphi\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{\to 0}\right)dt$$

esistono in senso classico perché $u \in C^1(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$ per ipotesi

$$= -\int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty}\partial_t u\,\varphi\,dt\,dx - v\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\partial_x u\,\varphi\,dx\,dt$$

$$= -\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\underbrace{\left(\partial_t u + v\,\partial_x u\right)}_{=0\ \forall (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)}\varphi\,dx\,dt = 0.$$

perché u è sol. classica per ipotesi

Per l'arbitrarietà di φ, u è quindi sol. debole. $\square$

Regolarità necessaria della soluzione debole

Vogliamo che

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\left(\partial_t\varphi+v\partial_x\varphi\right)dx\,dt$$

sia ben definito $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$. Chiediamo:

$$\left|\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u\left(\partial_t\varphi+v\partial_x\varphi\right)dx\,dt\right|<+\infty$$

$$\Uparrow$$

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \left|u\left(\partial_t\varphi+v\partial_x\varphi\right)\right|dx\,dt<+\infty$$

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \left|u\left(\partial_t\varphi+v\partial_x\varphi\right)\right|dx\,dt$$

$$=\iint_{\operatorname{supp}\varphi}\left|u\left(\partial_t\varphi+v\partial_x\varphi\right)\right|dx\,dt$$

$$\leq\iint_{\operatorname{supp}\varphi}|u|\cdot\Big(\underbrace{|\partial_t\varphi|}_{\leq\|\partial_t\varphi\|_\infty}+|v|\cdot\underbrace{|\partial_x\varphi|}_{\leq\|\partial_x\varphi\|_\infty}\Big)dx\,dt$$

$$\leq \underbrace{\left(\|\partial_t \varphi\|_\infty + |v| \cdot \|\partial_x \varphi\|_\infty\right)}_{\text{quantità finita (per la limitatezza di } \partial_t\varphi, \partial_x\varphi \text{, che sono a propria volta funzioni test)}} \underbrace{\iint_{\operatorname{supp}\varphi} |u| \, dx\,dt}$$

quantità finita (per la limitatezza di $\partial_t \varphi, \partial_x \varphi$, che sono a propria volta funzioni test)

Se richiediamo $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ otteniamo che anche questa quantità è finita.

→ Una richiesta naturale di regolarità per la soluzione debole dell'equazione del trasporto è

$$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times (0, +\infty)),$$

cioè in particolare una regolarità integrale anziché puntuale.