Serie di Laurent e Residui

Serie di Laurent su dischi e corone, Classificazione di singolarità, Calcolo dei residui

Richiami di teoria. Sia $f(z) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione olomorfa a meno di singolarità isolate. Data una sua singolarità isolata z_0, allora risulta possibile esprimere $f(z)$ come una serie di potenze all'interno di un cerchio bucato con centro in z_0, o più genericamente in una corona circolare centrata in z_0 del tipo $\mathcal{C}_{r_1,r_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ (con $0 < r_1 < r_2$) attraverso la **serie di Laurent**, facendo ricorso a potenze negative:

Serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

dove

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}z \qquad \text{con } \gamma \text{ curva di Jordan con supp}(\gamma) \text{ nel cerchio o corona}$$

Il coefficiente a_{-1} della serie è detto *residuo* di $f(z)$ in z_0 e si indica con $\operatorname{Res}(f, z_0)$. In base alla formula vista sopra si ha:

Residuo

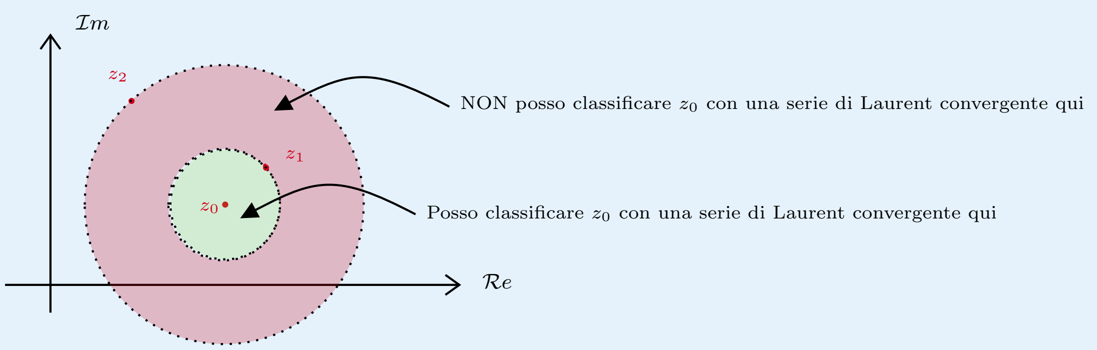
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \Longrightarrow \oint_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) \; .$$

Alcune considerazioni:

- Le dimensioni del cerchio o della corona in cui è possibile fare gli sviluppi sono i massimi possibili. Dunque il raggio è la distanza tra z_0 e la singolarità più vicina. Quindi se z_0 è l'unica singolarità si ha $r_2 = \infty$.
- Se $f(z)$ presenta più di una singolarità, per ogni singolarità vi sarà un diverso sviluppo in serie di Laurent nelle corone attorno alla singolarità.
- La serie di Laurent generalizza quella di Taylor nel senso che i due sviluppi coincidono in ogni punto dove la funzione è olomorfa.

Classificazione delle singolarità isolate

La natura di alcuni punti, in particolare zeri e singolarità isolate, viene stabilita in base ai coefficienti degli sviluppi di Laurent centrati nelle singolarità e *validi nell'intorno di essa.*



Dato $z_0 \in \Omega$ e $f(z)$ olomorfa per $z \in B_r(z_0)$ eccetto che in z_0, possiamo considerare il suo sviluppo di Laurent nel disco bucato $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Si ha che:

- Se $f(z)$ è olomorfa in z_0, le serie di Laurent e Taylor coincidono. z_0 è detto **zero** di $f(z)$ di ordine k, se a_k è il primo coefficiente non nullo della serie. Notiamo che se z_0 è un zero di ordine k, si ha che $f(z)$ è infinitesima di ordine k per $z \to z_0$, cioè:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = a_k \neq 0$$

Naturalmente, essendo in questo caso $f(z)$ olomorfa in z_0, per il teorema di Cauchy-Goursat si ha che:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$$

- Se z_0 è una singolarità e i coefficienti associati ad indici negativi sono tutti nulli, lo sviluppo di Laurent coincide con quello di Taylor e la singolarità è una **singolarità eliminabile**. Notiamo che in questo caso si ha che

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$$

pertanto si può estendere $f(z)$ su z_0 ed ottenere una funzione olomorfa su tutto il disco $B_r(z_0)$. Anche in questo caso si ha che:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$$

- Se un numero finito di coefficienti associati ad indici negativi sono non nulli, la singolarità è detta **polo**. L'**ordine** del polo coincide con il valore assoluto dell'indice dell'ultimo coefficiente non nullo. Notiamo che se z_0 è un polo di ordine k, si ha che $f(z)$ è un infinito di ordine k per $z \to z_0$, cioè:

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k |f(z)| = a_{-k} \neq 0$$

Per calcolare il residuo associato ad un polo di ordine k di $f(z)$ senza scrivere esplicitamente la sua serie di Laurent, si può ricorrere alla formula:

Residui di poli di ordine k

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]$$

Questa formula può essere provata facilmente tramite la formula di Cauchy per le derivate successive. Una funzione olomorfa a meno di poli isolati è detta anche funzione *meromorfa*.

- Se infiniti coefficienti associati ad indici negativi sono non nulli, la singolarità è detta **singolarità essenziale**. In questo caso si ha che:

$$\nexists \lim_{z \to z_0} |f(z)|$$

dove la non esistenza del limite significa che esso assume valori diversi a seconda delle direzioni con cui ci si avvicina a z_0. In questo caso non esistono "scorciatoie" per calcolarsi il residuo e l'unico modo (escludendo il calcolo esplicito dell'integrale) è quello di provare a scrivere lo sviluppo in serie di Laurent e identificare il coefficiente a_{-1}.

In generale se consideriamo

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

con $g(z)$ e $h(z)$ olomorfe su uno stesso insieme aperto Ω, allora possiamo dire che se z_0 è uno zero di ordine n per $g(z)$ e uno zero di ordine m per $h(z)$, allora si ha:

$$\begin{cases} \text{se } n-m \geq 0 & \Longrightarrow f(z) \text{ ha una singolarità eliminabile in } z_0 \\ \text{se } n-m < 0. & \Longrightarrow f(z) \text{ ha un polo in } z_0 \text{ di ordine } k = m-n \end{cases}$$

Esercizio 1. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

attorno a $z_0 = 0$ e stabilire il carattere della singolarità.

Soluzione. Osserviamo che $z_0 = 0$ è l'unica singolarità di $f(z)$, di conseguenza la serie di Laurent è definita in tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ricordiamo lo sviluppo in serie di Taylor del seno complesso

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Di conseguenza

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1}.$$

Riscrivendo gli indici, coerentemente con la definizione data di serie di Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, abbiamo che

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n < -1 \\ 1 & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{se } n > 0, \text{ pari} \\ \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{(n+2)!} & \text{se } n > 0, \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si osserva dunque che $z = 0$ è un polo di ordine 1.
Notiamo che si poteva concludere la stessa cosa osservando che per $z \to 0$ si ha che $\sin z$ è infinitesima di ordine 1 (equivalentemente, z_0 è uno zero di ordine 1 del numeratore) in virtù del limite notevole del seno ($\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$) mentre il denominatore è banalmente un infinitesimo di ordine 2. Per quanto detto sopra sulle funzioni fratte si ha allora che $z_0 = 0$ è un polo di ordine 2 - 1 = 1. Si vede subito dallo sviluppo in serie che il residuo è $\operatorname{Res}(f, 0) = a_{-1} = 1$.

Esercizio 2. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3} - z + 1$$

attorno a $z_0 = 0$ e stabilire il carattere della singolarità.

Soluzione. Osserviamo che possiamo immediatamente scrivere lo sviluppo di Laurent intorno all'origine:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^3} - \frac{1}{z^3} - z + 1 = -\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + 1.$$

Essendo l'unica singolarità di $f(z)$, la serie di Laurent è definita su tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La singolarità è un polo di ordine 3. Si vede subito dallo sviluppo in serie che il residuo è $\operatorname{Res}(f, 0) = a_{-1} = 1$.

Esercizio 3. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z}$$

attorno alle sue singolarità e stabilirne il carattere.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che $f(z)$ ha due singolarità, rispettivamente in $z_0 = 0$ e $z_1 = -1$. La distanza tra le due singolarità è 1, di conseguenza entrambi i cerchi in cui è possibile effettuare lo sviluppo di Laurent hanno raggio pari a 1. L'idea per trovare gli sviluppi di Laurent, è quella di ricondurci alla somma di una serie geometrica. Per quanto riguarda $z_0 = 0$, scriviamo che $\forall\, z \in \mathbb{C} : |z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k = \sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}z^k.$$

Di conseguenza l'origine è un polo di ordine 1 e si ha che $\mathrm{Res}\,(f, 0) = 1$

Per quanto riguarda $z_0 = -1$, scriviamo che $\forall\, z \in \mathbb{C} : |z+1| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{-1}{1-(z+1)} = -\frac{1}{z+1}\sum_{k=0}^{\infty}(z+1)^k = \sum_{k=-1}^{\infty} -(z+1)^k.$$

Di conseguenza $z_1 = -1$ è un polo di ordine 1 e si ha che $\mathrm{Res}\,(f, -1) = -1$.

Esercizio 4. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

attorno all'origine e stabilirne la natura e calcolarne il residuo.

Soluzione. Utilizzando lo sviluppo di MacLaurin di $\cos z$ (che è una funzione intera, quindi lo sviluppo converge su tutto $\mathbb{C}$) scriviamo

$$\cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{-4k}.$$

Quindi, intorno a $z_0 = 0$ possiamo sviluppare

$$f(z) = z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{-4k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{-4k+1}.$$

Riscrivendo gli indici, coerentemente con la definizione data di serie di Laurent, abbiamo che

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(\frac{1-h}{2}\right)!} & \text{se } h = -4k+1,\ k = 0, 2, 4, \dots \\ \dfrac{-1}{\left(\frac{1-h}{2}\right)!} & \text{se } h = -4k+1,\ k = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I coefficienti non nulli della serie di Laurent sono quindi gli infiniti termini $a_1,\ a_{-3},\ a_{-7}, \dots$ e di conseguenza l'origine è una singolarità essenziale. Dallo sviluppo in serie si vede che $\mathrm{Res}\,(f, 0) = 0$.

Esercizio 5. Si calcoli lo sviluppo di Laurent in $z_0 = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1},$$

per $|z| < 1$ e $|z| > 1$, rispettivamente.

Soluzione. L'unica singolarità di $f(z)$ è in $z_0 = 1$. Nel cerchio $|z| < 1$, la funzione è olomorfa, di conseguenza scriviamo

$$f(z) = 1 - \frac{2}{1-z} = 1 - 2\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Si noti che questa serie coincide coerentemente con lo sviluppo di Taylor della funzione centrato nell'origine.

Nella corona circolare $|z| > 1$ ($r_2 = \infty$), ossia $|\frac{1}{z}| < 1$, si ha che

$$f(z) = 1 + \frac{2}{z-1} = 1 + \frac{2}{z(1-\frac{1}{z})} = 1 + \frac{2}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{z^{k+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{z^n}.$$

e possiamo riscriverla come

$$f(z) = z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^{-n} = z^0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 2z^n$$

Quindi i coefficienti si possono riassumere così

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \leq -1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 6. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2(z+2i)}$$

nelle corone circolari $\mathcal{C}_{0,2}(0)$ e in $\mathcal{C}_{2,\infty}(0)$. Si classifichi la singolarità nell'origine e se ne determini il residuo.

Soluzione. Prima di tutto, notiamo che la funzione ha uno zero in $z = 1$ e due singolarità, in $z_0 = 0$ e $z_1 = -2i$. Per $z \in \mathcal{C}_{0,2}(0)$ abbiamo che $|z| < 2$, di conseguenza possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2(z+2i)} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) \frac{1}{2i\left(1 - \frac{i}{2}z\right)} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}z\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k-1}}{2^{k+1}} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k-1}}{2^{k+1}} \left(z^{k-1} - z^{k-2}\right)$$

Volendo semplificare l'ultima serie, posto per semplicità $b_k = \frac{i^{k-1}}{2^{k+1}}$, si può vedere che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(z^{k-1} - z^{k-2}\right) = b_0 z^{-1} - b_0 z^{-2} + b_1 z^0 - b_1 z^{-1} + b_2 z - b_2 z^0 + b_3 z^2 - b_3 z + \dots$$

$$= -b_0 z^{-2} + (b_0 - b_1)\, z^{-1} + (b_1 - b_2)\, z^0 + + (b_2 - b_3)\, z + \dots$$

$$= -b_0 z^{-2} + \sum_{k=-1}^{\infty} (b_{k+1} - b_{k+2})\, z^k$$

Usando questo risultato con la serie che volevamo semplificare si ottiene:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k-1}}{2^{k+1}} \left(z^{k-1} - z^{k-2}\right) = \frac{i}{2z^2} + \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(2-i)i^k}{2^{k+3}} z^k$$

La serie è già scritta con gli indici coerenti con la serie di Laurent. Nello specifico, si ha:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k < -2 \\ \dfrac{i}{2} & \text{se } k = -2 \\ \dfrac{(2-i)i^k}{2^{k+3}} & \text{se } k > -2 \end{cases}$$

Questa serie vale nell'intorno della singolarità, pertanto possiamo usarla per classificare z_0. Notiamo che z_0 è un polo di ordine 2. Possiamo poi ottenere il residuo nell'origine $\text{Res}\,(f,0) = a_{-1} = -\frac{1}{4} - \frac{i}{2}$.

Per $z \in \mathcal{C}_{2,\infty}(0)$ abbiamo che $|z| > 2$, di conseguenza possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2(z+2i)} = \frac{z-1}{z^3}\frac{1}{1-\left(-\frac{2i}{z}\right)} = \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-2i)^k\left(\frac{1}{z^{k+2}} - \frac{1}{z^{k+3}}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=3}^{\infty}\left((-2i)^{k-2} - (-2i)^{k-3}\right)z^{-k} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=-\infty}^{-3}(-2-2i)(-2i)^{-k-3}z^k$$

dove per semplificare la serie si è usato lo stesso tipo di ragionamento visto precedentemente. I coefficienti della serie di Laurent sono quindi:

$$a_k = \begin{cases} (-2-2i)(-2i)^{-k-3} & \text{se } k < -2 \\ 1 & \text{se } k = -2 \\ 0 & \text{se } k > -2 \end{cases}$$

Vale la pena ricordare che non possiamo utilizzare questa serie di Laurent per classificare la singolarità z_0 o calcolarne il residuo, poiché questo sviluppo non vale in un intorno della singolarità.

Esercizi aggiuntivi svolti.

Esercizio 7. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = ize^z$$

attorno all'origine e stabilire la natura del punto e calcolarne il residuo.

Soluzione. Osserviamo che l'origine non è una singolarità. Lo sviluppo di Laurent coincide quindi con quello di MacLaurin

$$f(z) = iz\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i}{(k-1)!}z^k$$

Il primo coefficiente non nullo dello sviluppo è a_1. Di conseguenza l'origine è uno zero di $f(z)$ di ordine 1. Ovviamente $\text{Res}\,(f,0) = 0$.

Esercizio 8. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$$

attorno all'origine, stabilire la natura del punto e calcolarne il residuo.

Soluzione. Si potrebbe pensare che il numeratore sia un infinitesimo di ordine 1 nell'origine (poiché somma algebrica di infinitesimi di ordine 1) e quindi concludere che l'origine sia un polo di ordine $3 - 1 = 2$ ma è bene ricordare che la somma algebrica di infinitesimi restituisce un infinitesimo il cui ordine, in generale, non è deducibile a partire dagli ordini di infinitesimo delle funzioni di partenza con semplici considerazioni algebriche (la stessa cosa vale con gli infiniti).

Fatta questa premessa, troviamo la serie di Laurent. Notiamo che l'origine è l'unica singolarità della funzione, pertanto lo sviluppo di Laurent vale per $0 < |z| < \infty$. Si ha:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = \frac{1}{z^2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-2}$$

$$= \cancel{\frac{1}{z^2}} - \left(\cancel{\frac{1}{z^2}} - \frac{z^0}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots\right) = \frac{z^0}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}z^{2k-2}$$

Si vede subito che i coefficienti associati agli indici negativi sono tutti nulli, quindi l'origine è una singolarità apparente. Volendo sistemare gli indici in accordo alla serie di Laurent si può scrivere:

$$a_h = \begin{cases} \dfrac{-1}{(h+3)!} & \text{se } h = 2(k-1),\ k = 2,4,6,\dots \\ \dfrac{1}{(h+3)!} & \text{se } h = 2(k-1),\ k = 1,3,5,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo $z_0 = 0$ una singolarità apparente si ha ovviamente $\operatorname{Res}(f,0) = 0$.

Esercizio 9. Considerata la funzione

$$f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

stabilire la natura della singolarità nell'origine sia calcolando la serie di Laurent sia utilizzando la caratterizzazione delle singolarità viste nei richiami di teoria.

Soluzione. Calcoliamo la serie di Laurent. Utilizzando lo sviluppo di MacLaurin di $\cos z$ scriviamo

$$f(z) = z^3 \cos\frac{1}{z} = z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k+2}$$

Si vede subito che abbiamo infiniti coefficienti associati a indici negativi e quindi l'origine deve essere una singolarità essenziale. Volendo scrivere gli indici in accordo alla serie di Laurent si ha:

$$a_h = \begin{cases} \dfrac{1}{(3-h)!} & \text{se } h = -2k+2, k = 0,2,4,\dots \\ \dfrac{-1}{(3-h)!} & \text{se } h = -2k+2, k = 1,3,5,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dalla sviluppo in serie si vede che $\operatorname{Res}(f,0) = 0$.

Volendo usare la caratterizzazione della singolarità, dovremmo mostrare che $\nexists \lim_{z\to 0} |f(z)|$. Se ci avviciniamo all'origine dalla retta reale si ha:

$$\lim_{x\to 0} \left| x^3 \sin\frac{1}{x} \right| = 0$$

d'altra parte, se ci avviciniamo dalla retta degli immaginari puri con parte immaginaria positiva si ha:

$$\lim_{y\to 0^+} f(iy) = \lim_{y\to 0^+} \left| y^3 \sin\frac{1}{iy} \right| = \lim_{y\to 0^+} y^3 \left| \frac{e^{-\frac{1}{y}} - e^{\frac{1}{y}}}{2} \right| = \lim_{y\to 0^+} y^3 e^{\frac{1}{y}} \left| \frac{e^{-\frac{2}{y}} - 1}{2} \right| = \lim_{y\to 0^+} y^3 e^{\frac{1}{y}} \frac{1 - e^{-\frac{2}{y}}}{2} = +\infty$$

Avendo ottenuto due limiti diversi, il limite non esiste e la singolarità è essenziale.

Esercizio 10. Si classifichino, senza ricorrere alla serie di Laurent, le singolarità e gli zeri di

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z + 4}{(z^2 + 2z + 2)\, z^2 \,(z^2 - 4)^3}$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che il numeratore $z^2 + 4z + 4 = (z+2)^2$ ha uno zero doppio in $z = -2$. Il denominatore ha una coppia di zeri semplici in $z = -1 \pm i$, uno zero doppio in $z = 0$ e una coppia di zeri tripli in $z = \pm 2$.

Per quanto detto nei richiami di teoria, l'ordine di un punto z_0 è determinato dalla differenza tra l'ordine di z_0 come zero del numeratore e l'ordine di z_0 come zero del denominatore: se tale differenza risulta maggiore di 0, allora z_0 è uno zero, se risulta pari a 0 allora z_0 è una singolarità apparente, altrimenti è un polo. In conclusione è immediato osservare che $z = -1 \pm i$ sono poli semplici, $z = 0$ è un polo doppio, $z = -2$ è un polo semplice e $z = 2$ è un polo triplo.

Esercizio 11. Senza ricorrere alla serie di Laurent, si classifichino le singolarità, gli zeri e si calcolino i residui di

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che il numeratore non ha zeri. Il denominatore ha una coppia di zeri doppi in $z = \pm i$ che saranno quindi poli del secondo ordine. Infatti, è immediato verificare che:

$$\lim_{z\to i} f(z)(z-i)^2 = -\frac{1}{4e} \quad \text{e} \quad \lim_{z\to -i} f(z)(z+i)^2 = -\frac{e}{4}$$

Per calcolarci i residui, utilizziamo la formula per i poli

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[f(z)(z-i)^2\right] = \lim_{z\to i} \frac{ie^{iz}(z+3i)}{(z+i)^3} = -\frac{i}{2e}$$

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[f(z)(z+i)^2\right] = \lim_{z\to -i} \frac{e^{iz}(z+i)}{(1+iz)^3} = 0$$

Esercizi da svolgere a casa.

1. Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di $g(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$ intorno alle sue singolarità e se ne stabilisca il carattere.

2. Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di $g(z) = \frac{3z^5+3z^3-z+i}{z^4}$ intorno alle sue singolarità e se ne stabilisca il carattere.

3. Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di $g(z) = -\frac{1}{z^2-3z+2}$ intorno alle singolarità e se ne stabilisca il carattere.

4. Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$ in $\mathcal{C}_{0,6}(3i)$ e in $\mathcal{C}_{6,\infty}(3i)$, classificare le singolarità e trovare i residui.

5. Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ in $\mathcal{C}_{1,\infty}(0)$.