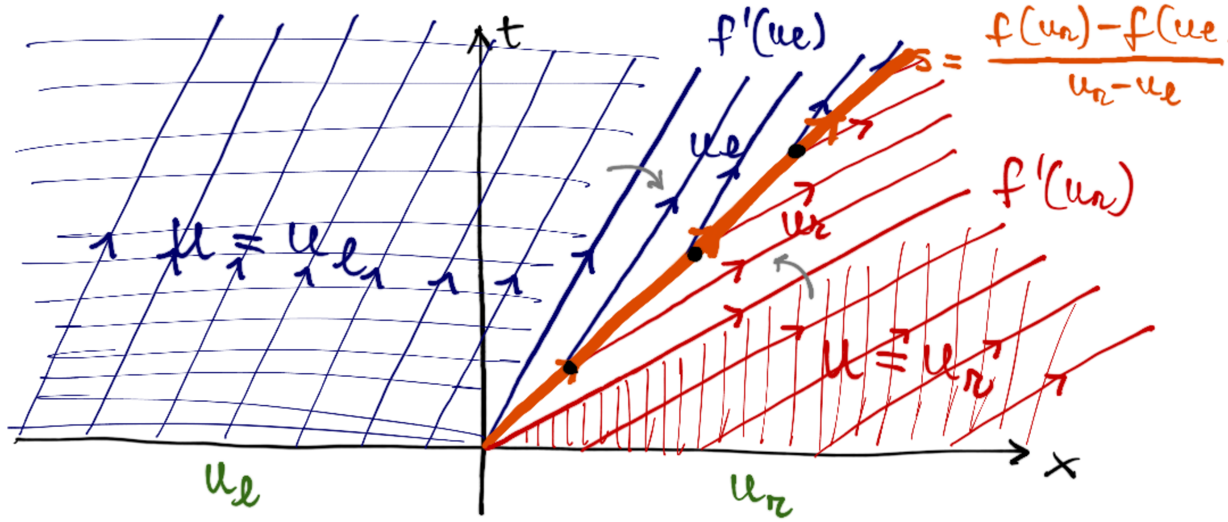
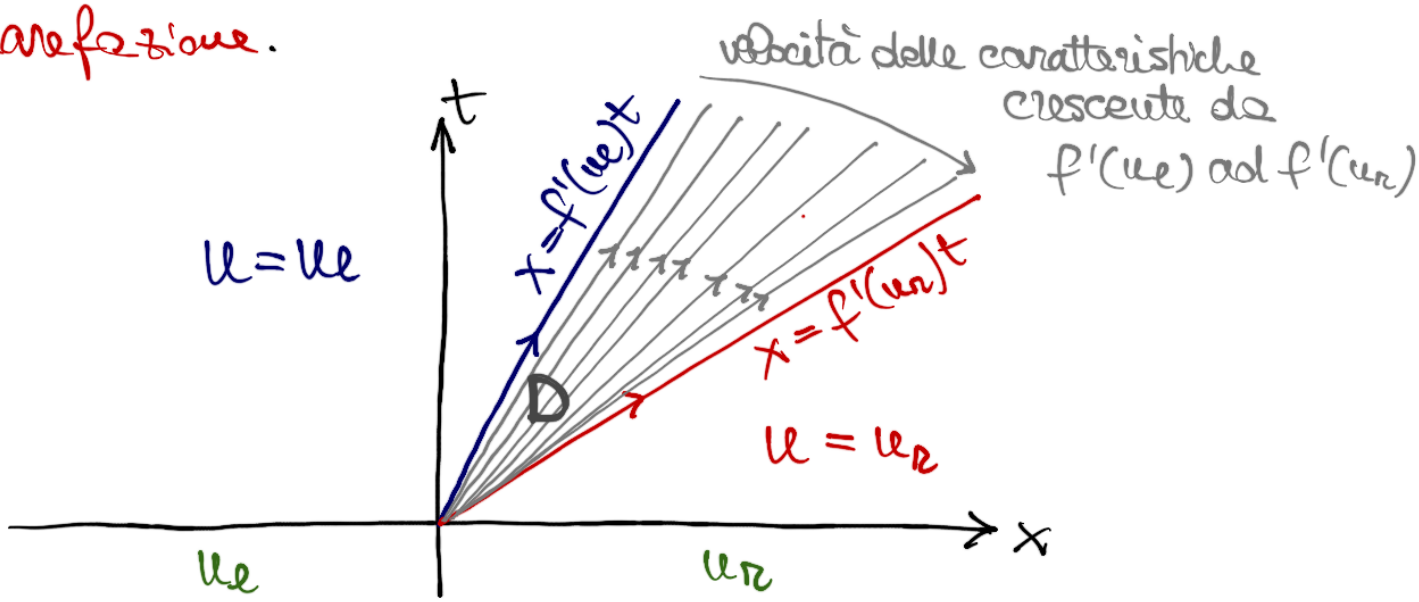


È anche possibile estendere la soluzione in D "spacchettando" l'urto in una molteplicità di urti più piccoli e scegliendo i valori di u a destra e a sinistra di ciascuno di essi in modo che le condizioni di R.-H. (una per ciascun urto) siano soddisfatte ⇝ Esercizio: provare con due e con tre urti.

C'è un'ulteriore possibilità: mettere in D una cosiddetta onda di rarefazione.



Imponiamo in D:

$$\boxed{f'(u) = \frac{x}{t}}$$

velocità delle caratteristiche definita dalla legge di conservazione

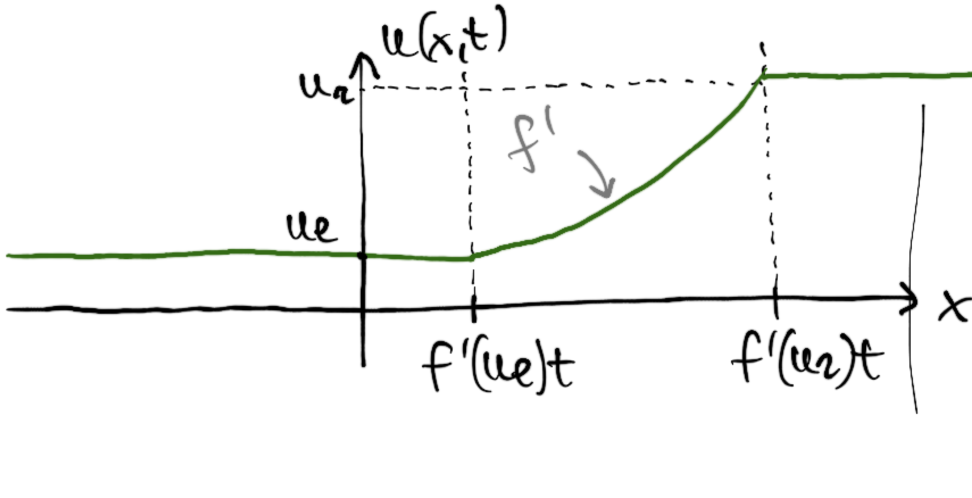
velocità delle caratteristiche definita dalla geometria delle caratteristiche inserite in D

Poiché f' è monotòna (in particolare, crescente se $f''>0$), essa è invertibile, cioè esiste $(f')^{-1}$ come funzione.
Allora:

$$u(x,t) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) \qquad \text{per } (x,t) \in D.$$

Di conseguenza, possiamo definire la soluzione u su tutto $Q = \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ come:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{per } -\infty < x < f'(u_l)t \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{per } f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & \text{per } x > f'(u_r)t \end{cases}$$



Una soluzione di questo tipo si chiama un'onda di rarefazione. Osserviamo che, in generale, è una soluzione continua (a differenza dell'onda d'urto) anche se non derivabile $\Rightarrow$ è comunque una soluzione debole e non classica.

Verifichiamo che in $D = \{(x,t) \in Q : f'(u_l)t < x < f'(u_r)t\}$ la $u(x,t) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)$, che qui è C^1, soddisfaccia la formulazione classica (=puntuale) della PDE:

poniamo per comodità $g(u) := (f')^{-1}(u)$ e calcoliamo

$$\partial_t u(x,t) = g'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \partial_t\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$= g'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{-x}{t^2}$$

$$\partial_x u(x,t) = g'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \partial_x\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$= g'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{1}{t}$$

allora

$$\partial_t u(x,t) + f'(u(x,t))\,\partial_x u(x,t)$$

$$= -g'\left(\frac{x}{t}\right)\cdot\frac{x}{t^2} + \underbrace{g^{-1}\left(g\left(\frac{x}{t}\right)\right)}_{=x/t}\cdot g'\left(\frac{x}{t}\right)\cdot\frac{1}{t}$$

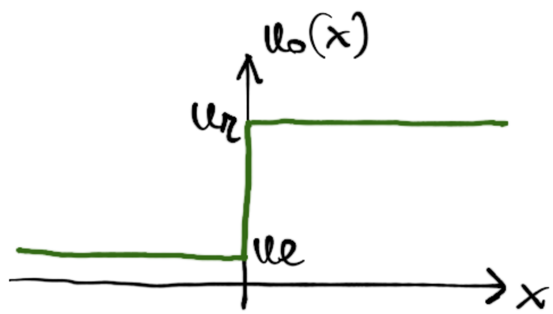
$$= -g'\left(\frac{x}{t}\right)\cdot\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t}\cdot g'\left(\frac{x}{t}\right)\cdot\frac{1}{t} = 0. \checkmark$$

Esempio

$$f(u) = \frac{u^2}{2} \Rightarrow \partial_t u + \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \quad \text{equazione di Burgers}$$

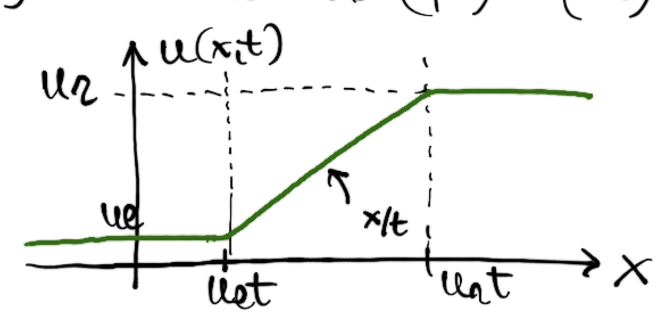
$$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$$

Se scegliamo $u_l < u_r$ possiamo costruire una soluzione nella forma di onda di rarefazione:

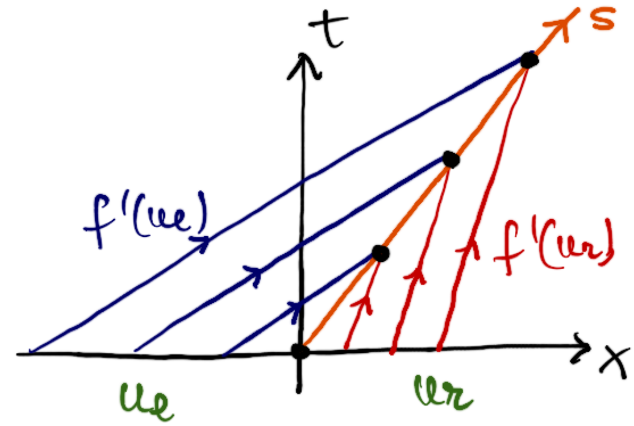


$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{per } x \le u_l t \\ \frac{x}{t} & \text{per } u_l t < x \le u_r t \\ u_r & \text{per } x > u_r t \end{cases}$$

Poiché $f'(u) = u$ abbiamo $(f')^{-1}(u) = u$.

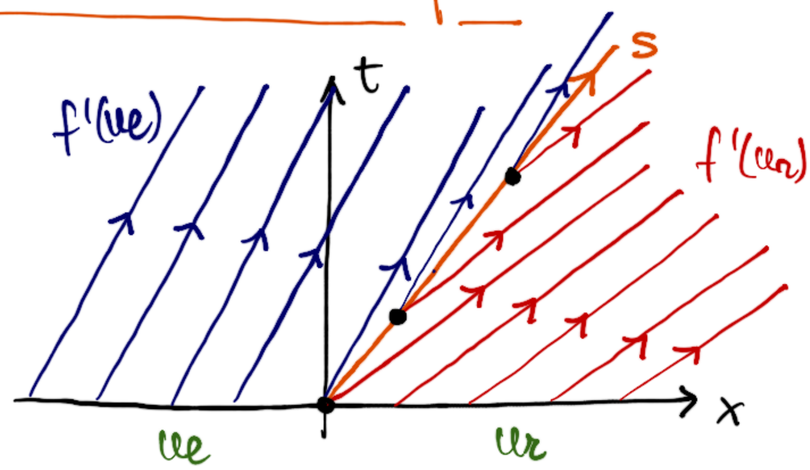


Non unicità della soluzione e criterio di entropia



$u_\ell > u_r$

$(f'(u_\ell) > f'(u_r))$



$u_\ell < u_r$

$(f'(u_\ell) < f'(u_r))$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell & \text{per } x < st \\ u_r & \text{per } x > st \end{cases}$$

dove $s = \dfrac{f(u_r) - f(u_\ell)}{u_r - u_\ell}$.

Formuliamo un criterio che ci permetta di dire che l'urto nel primo caso $(u_\ell > u_r)$ è fisicamente ammissibile mentre nel secondo caso $(u_\ell < u_r)$ non lo è.

Def. Consideriamo una funzione $\eta = \eta(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ e $\eta'' > 0$ in $\mathbb{R}$ (convessa). Consideriamo poi una seconda funzione $q = q(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione:

$$q'(u) = \eta'(u) f'(u).$$

La coppia (η, q) è detta coppia entropia-flusso di entropia della legge di conservazione $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$.

Supponiamo che $u \in C^1(Q)$ sia soluzione classica della legge di conservazione:

$$\underbrace{\eta'(u)\partial_t u}_{=\partial_t \eta(u)} + \underbrace{\underbrace{\eta'(u) f'(u)}_{=q'(u)}\partial_x u}_{=\partial_x q(u)} = 0 \qquad \text{in } Q$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) = 0 \qquad \text{in } Q.$$

Se u è soluzione classica, una qualsiasi entropia η soddisfa a propria volta una legge di conservazione in Q con flusso q.