Fisica II

Esercitazione 14

Alessandro Pedico
alessandro.pedico@polito.it

10/11/2022

Relatività ristretta

Nella **fisica classica**, per descrivere il punto di vista di osservatori in moto tra loro, si usano le **trasformazioni di Galileo**.

TRASFORMAZIONI DI GALILEO

$$\begin{cases} x = x' + v_x t \\ y = y' + v_y t \\ z = z' + v_z t \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - v_x t \\ y' = y - v_y t \\ z' = z - v_z t \\ t' = t \end{cases}$$

OSSERVATORE 1 **OSSERVATORE 2**

In queste trasformazioni, è implicita la **indistinguibilità di due sistemi di rifermento inerziali**, cioè dati due sistemi di riferimento in moto relativo tra loro, non è possibile stabilire chi si stia muovendo e chi sia fermo.

Relatività ristretta

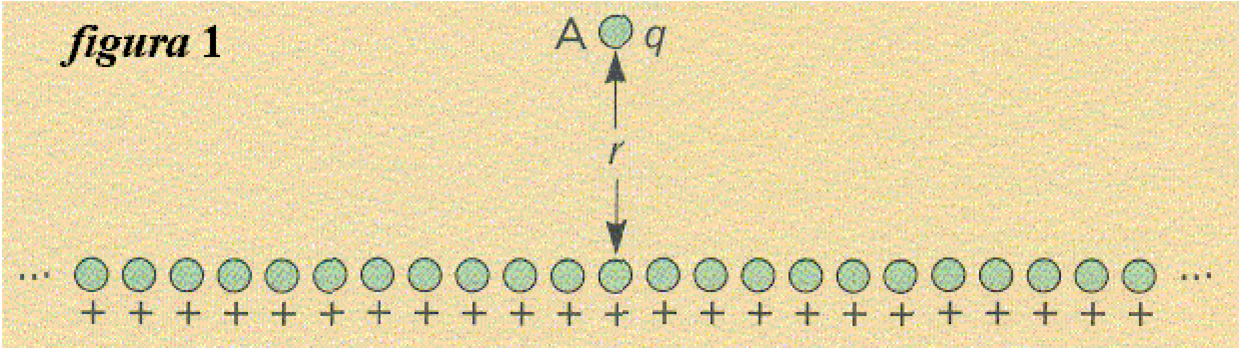
Nell'ambito dell'elettromagnetismo, la fisica dei fenomeni è descritta dalle **equazioni di Maxwell**. Tuttavia, queste equazioni **non sono invarianti** per sistemi di riferimento in moto relativo tra loro se si usano le trasformazioni di Galileo.

Questo ha come conseguenza diretta che si potrebbero osservare fenomeni elettromagnetici diversi in base alla scelta del sistema di riferimento, arrivando quindi a **violare il postulato di equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali**.

Analizziamo alcuni semplici esempi per capire da dove nasca questo problema e come le **trasformazioni di Lorentz** possano porvi rimedio, andando poi ad analizzare le conseguenze di ciò, che vengono riassunte nella teoria della **relatività ristretta** di Einstein.

Prendiamo in considerazione una distribuzione di cariche come mostrato in figura 1. L'interazione della carica q con la distribuzione continua è descritta dalle leggi dell'elettrostatica. Possiamo facilmente calcolare la forza di Coulomb che agisce su di essa.

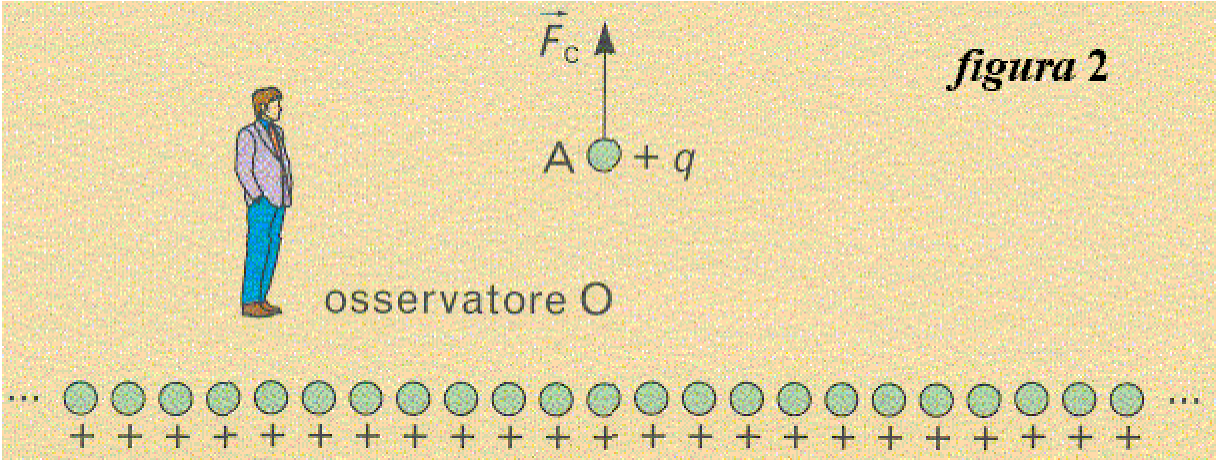
$$F_C = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



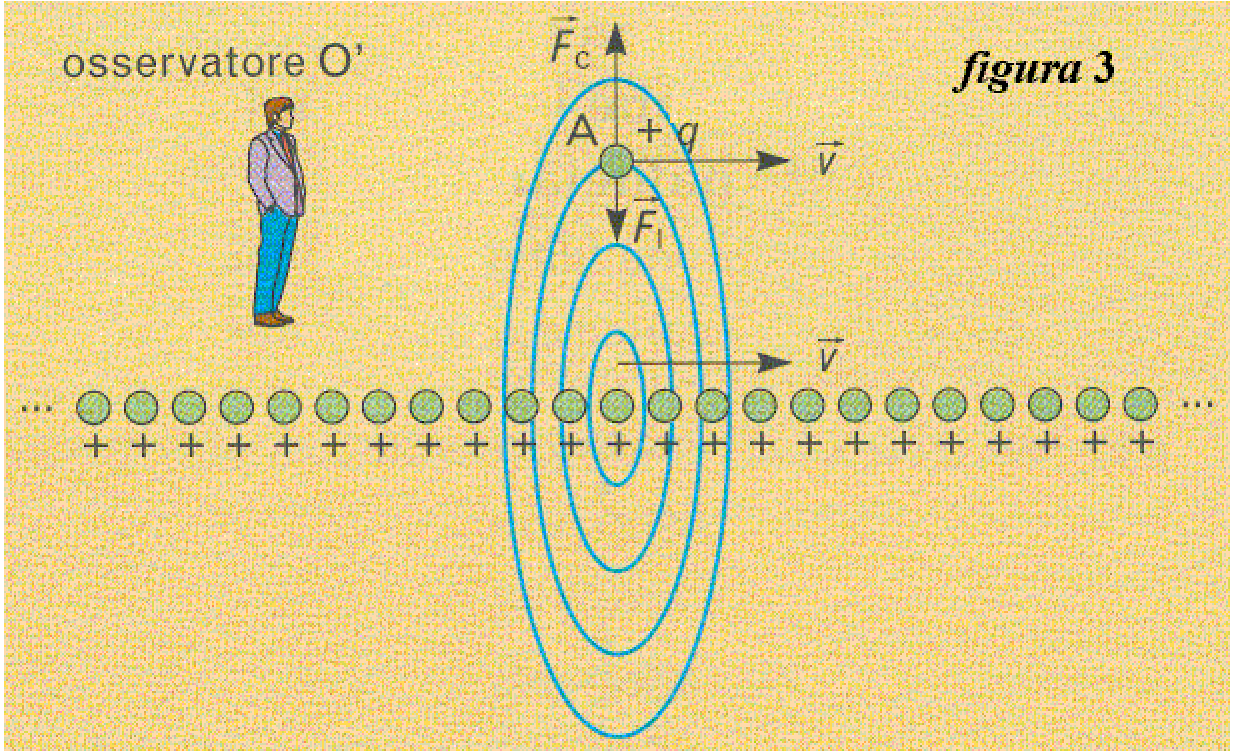
Relatività ristretta

Tuttavia, questo ragionamento è valido solo se l'osservatore (O) è solidale con la distribuzione di cariche (figura 2). Infatti, se l'osservatore fosse in moto relativo rispetto al sistema, la situazione sarebbe nettamente diversa.

Prendiamo il caso di un altro osservatore (O') che si sposti parallelamente alla distribuzione di carica, con velocità costante v verso sinistra. L'osservatore vedrà il sistema muoversi verso destra con velocità v.



In figura 3 è raffigurata la situazione corrente. Essendo la distribuzione di carica in movimento approssimabile ad una corrente elettrica, si genererà un campo magnetico che andrà ad interagire con la carica q in moto anch’essa, secondo l’interazione descritta dalla forza di Lorentz.



Relatività ristretta

$$F_C = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

OSSERVATORE SOLIDALE

$$F_{TOT} = F_C - F_L = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - qvB$$

OSSERVATORE IN MOTO RELATIVO

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$i = \frac{qN}{\Delta t} = \frac{q(nv\Delta t)}{\Delta t} = qnv = \lambda v$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$F_{TOT} = F_C - F_L = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q\lambda v^2}{2\pi\varepsilon_0 r c^2} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Relatività ristretta

Questa conclusione implica che le **forze agenti sulla carica q sono diverse in base al sistema di riferimento inerziale scelto**. Andrebbe a decadere postulato di equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali. Infatti, si potrebbe stabilire quale dei due osservatori sia fermo e quale dei due osservatori sia in movimento, andando semplicemente ad osservare in quale dei due casi compare la forza magnetica.

Il problema viene risolto andando a riconsiderare la fisica dei sistemi inerziali. In questo panorama, risulta immediato che le trasformazioni di Galileo non siano sufficienti a descrivere la fisica dell'elettromagnetismo, rendendo necessario il passaggio alle **trasformazioni di Lorentz**.

TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ \mathrm{t} = \gamma\left(t' + \dfrac{vx'}{\mathrm{c}^2}\right) \end{cases}$$

OSSERVATORE 1

$$\begin{cases} \mathrm{x}' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ \mathrm{t}' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{\mathrm{c}^2}\right) \end{cases}$$

OSSERVATORE 2

FATTORE DI LORENTZ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}$$

Relatività ristretta

Si nota subito dalle trasformazioni di Lorentz che **il tempo non è una costante**, ma dipende anch’esso (insieme allo spazio) dal sistema di riferimento scelto. Questo è uno dei concetti chiave che distingue la relatività galileiana dalla **relatività ristretta** di Einstein.
La teoria proposta da Einstein agli inizi del 1900 è basata su due postulati:

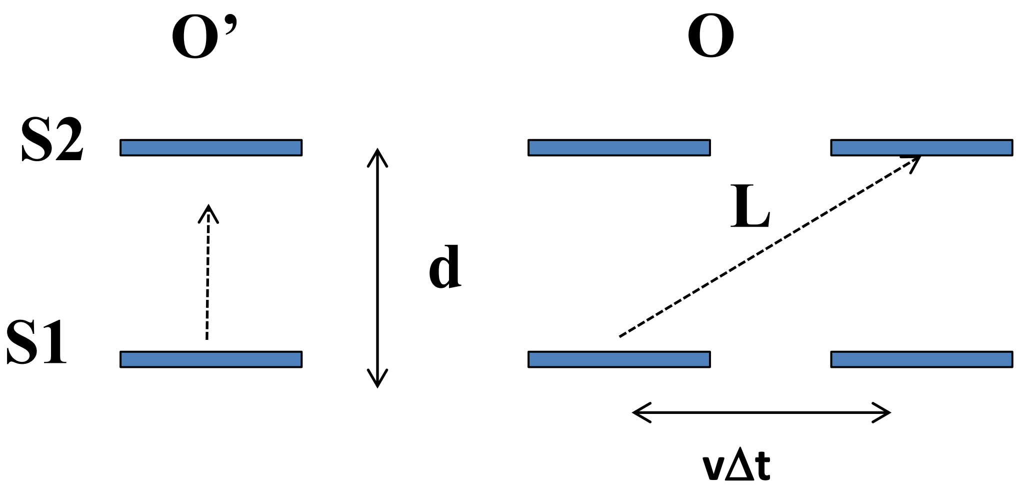
1. Le leggi della Fisica sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

2. La velocità della luce nel vuoto è la stessa per tutti gli osservatori, indipendentemente dal moto della sorgente.

Andiamo a capire quali sono le implicazioni di ciò e poi torneremo sul problema precedente per darne la soluzione.

Relatività ristretta

Prendiamo due specchi come in figura. Un osservatore O’ è solidale al sistema degli specchi, mentre un osservatore O è solidale ad un sistema esterno, rispetto al quale gli specchi sono in moto con velocità costante v.



Supponiamo che un’onda emessa dallo specchio 1 raggiunga lo specchio 2 in un intervallo di tempo Δt’ percorrendo uno spazio d nel sistema di riferimento di O’. Nel sistema di riferimento O, avrà percorso lo spazio L in un intervallo di tempo Δt.

Relatività ristretta

Secondo la teoria della relatività ristretta, al velocità della luce è una costante in qualsiasi sistema di riferimento. Ciò implica:

O'

$$d = c\Delta t'$$

O

$$L = c\Delta t$$

$$L^2 = d^2 + (v\Delta t)^2$$

$$(c\Delta t)^2 = (c\Delta t')^2 + (v\Delta t)^2$$

$$(\Delta t)^2 = (\Delta t')^2 + \left(\frac{v}{c}\Delta t\right)^2$$

DILATAZIONE DEI TEMPI

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t'$$

Gli intervalli di tempo che separano 2 eventi dipendono dal moto relativo dei due sistemi in cui vengono descritti gli eventi.

Relatività ristretta

Conseguenza diretta di ciò è che anche la misura delle distanze dipende dal moto relativo dei due sistemi.

O'

$$L' = c\Delta t'$$

O

$$L = c\Delta t$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

$$L = c\gamma\Delta t' = \gamma L'$$

CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

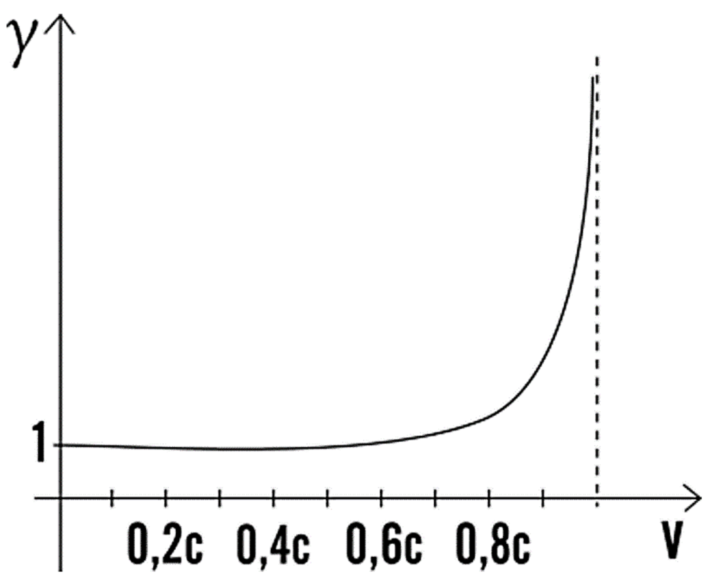
$$L' = \frac{L}{\gamma}$$

La misura della distanza tra 2 punti dello spazio dipende dal moto relativo dei due sistemi in cui vengono descritti gli eventi.

Relatività ristretta

FATTORE DI LORENTZ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

$$L' = \frac{L}{\gamma}$$

DILATAZIONE DEI TEMPI

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Lunghezze e tempi propri sono gli stessi per tutti gli osservatori. Le differenze si hanno solo quando le misurazioni sono effettuate da un osservatore in moto relativo!

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

In questo modo, la **velocità della luce** misurata dai due osservatori **è invariante**. Il tempo, a differenza delle trasformazioni di Galileo, non è più una costante. Per $v << c$, $\gamma \approx 1$ e si ottengono le trasformazioni di Galileo.

Relatività ristretta

Tornando ora al problema iniziale, l’osservatore O’ misurerà lunghezze diverse rispetto all’osservatore O. La conseguenza diretta è che la densità lineare di carica sarà anch’essa dipendente dal sistema in cui viene calcolata.

$$\lambda' = \frac{qN}{L'} = \frac{qN}{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

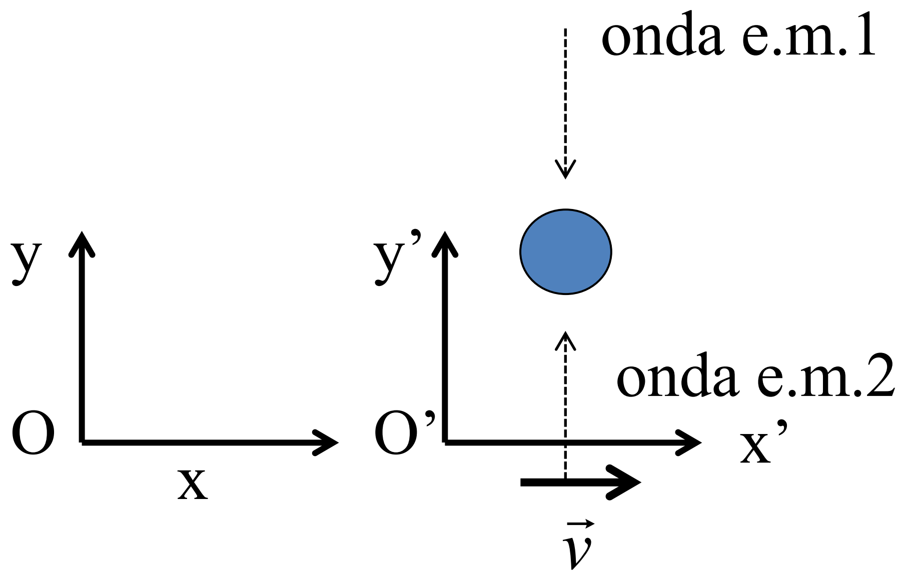
Unendo questa considerazione alla dilatazione dei tempi, possiamo ora calcolare la variazione della quantità di moto per i due osservatori, dimostrando l’invarianza dei due sistemi.

$$\Delta p = F_C \Delta t = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\Delta t$$

$$\Delta p' = F_{TOT}\Delta t' = \frac{q\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t' = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\Delta t$$

Relatività ristretta

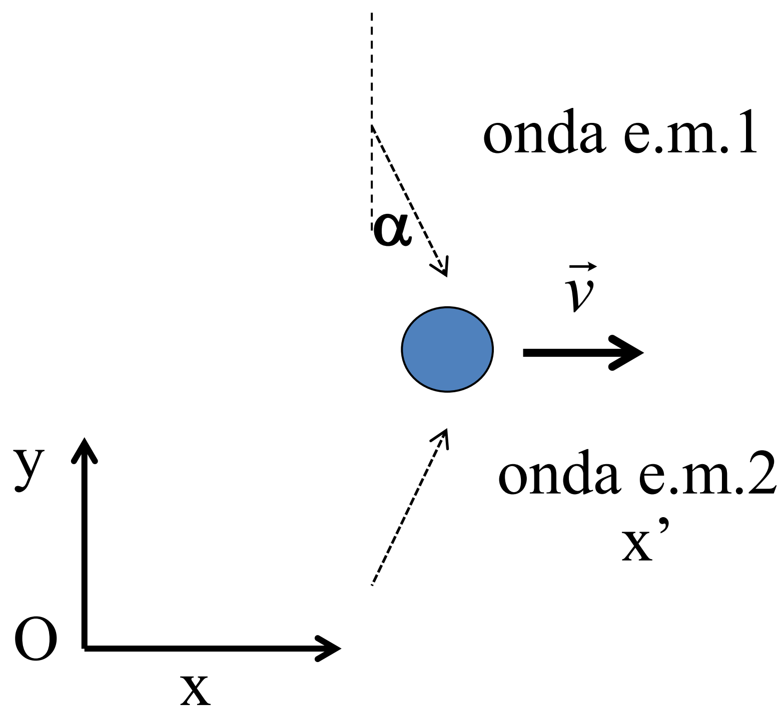
Consideriamo infine la seguente situazione, in cui vi sono due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo con velocità v. Nel sistema O’ è presente una massa su cui vengono fatte incidere due onde elettromagnetiche come in figura.



Relatività ristretta

Nel sistema di riferimento O, le onde elettromagnetiche avranno un'angolazione rispetto all'asse y. Considerando il fatto che le onde trasportano una certa quantità di moto e che la massa assorba un'energia E_n da loro trasportata, allora si ottiene che la quantità di moto p trasferita da ogni onda è:

$$p = \frac{E_n}{c}$$



Relatività ristretta

Andiamo ora a scrivere la componente della quantità di moto lungo x per i due sistemi.

O' $\quad p_i = p_f = 0$

O $\quad p_i = Mv_i + 2\frac{E_n}{c}\sin\alpha \qquad p_f = Mv_f$

Tuttavia, la velocità iniziale e finale nel sistema O deve essere uguale, perché nel sistema O' non vi è alcun cambiamento della legge del moto. Questo porta però ad un assurdo.

$$Mv_i = Mv_i + 2\frac{E_n}{c}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad 0 = 2\frac{E_n}{c}\sin\alpha$$

Relatività ristretta

L'unica possibilità è suppore che ci sia una variazione della massa prima e dopo l'urto.

$$M_f v = M_i v + 2\frac{E_n}{c}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{c}$$

$$M_f v = M_i v + 2\frac{E_n v}{c^2}$$

$$M_f = M_i + 2\frac{E_n}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad E_n = mc^2$$

Dove m rappresenta l'aumento di massa dovuto all'assorbimento di ciascuna onda.

Relatività ristretta

Conseguenza diretta di ciò che abbiamo appena dedotto è che qualunque corpo che vari la sua velocità vedrà variare anche la sua massa.

$$v_i = 0$$

$$m_i = \mathrm{m}_0$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v_f^2$$

$$m_f = m_0 + \frac{E_k}{c^2} = m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v_f^2}{c^2}$$

Se $v_f \ll c$

Sviluppo in serie

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$$

In generale, i fenomeni descritti dalla teoria della relatività ristretta diventano importanti quando i sistemi o i corpi raggiungono velocità confrontabili con quella della luce. Al di sotto, sono spesso trascurabili ed è per questo motivo che non sono mai stati osservati in precedenza.