CONVENZIONE DI EINSTEIN

Quando in una sommatoria ci sono indici ripetuti, il simbolo di sommatoria può essere omesso.

Esempi:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \, l_i \implies V_i \, l_i$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \, l_i^* \implies a_i \, l_i^*$$

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \, l_i^* \otimes l_j^* \implies g_{ij} \, l_i^* \otimes l_j^*$$

$$g\left(\sum V_i l_i , \sum w_j l_j \right) \implies g\left(V_i l_i , w_j l_j \right) = V_i w_j \, g(l_i, l_j)$$

$$= V_i w_j \, g_{ij}$$

PROP: Sia $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una metrica su V.

Sia $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ con $(e_1, \dots, e_n)$ base di V.

Allora la matrice (g_{ij}) è invertibile.

Dim

Poiché g è una metrica, in particolare abbiamo che

$$g(v, v) \neq 0 \quad \forall\, v \neq 0 \qquad (\bullet)$$

Se per assurdo (g_{ij}) fosse non invertibile, avremo che $\det(g_{ij}) = 0$, cioè (g_{ij}) avrebbe un Ker non banale.

Sia $v \neq 0$ un vettore di $\mathrm{Ker}(g_{ij})$. Avremo che

$$g_{ij} v_j = 0 \quad (\text{con } v_j \text{ componenti di } v \text{ nelle base } (e_1, \dots, e_n))$$

che implica

$$g_{ij} v_i v_j = 0, \quad \text{cioè } g(v, v) = 0, \text{ che contraddice } (\bullet)$$

<u>PROP</u>: Sia g una metrica su V. Sia $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ dove $(e_1, \dots, e_n)$ è una base di V.

Sia v un autovettore di g relativo all'autovalore λ

Allora $g(v,v) = \lambda \sum_i v_i^2$ (dove v_i sono le componenti di v nella base $(e_1, \dots, e_n)$)

<u>DIM</u>

Innanzitutto notiamo che essendo la matrice g_{ij} simmetrica è diagonalizzabile. Se v è un autovettore di g abbiamo che

$$(\star) \qquad g_{ij} v_j = \lambda v_i$$ (dove v_i sono le componenti di v nella base $(e_1, \dots, e_n)$)

Infatti la condizione $(\star)$ è semplicemente

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(Ricordarsi che la matrice (g_{ij}) è simmetrica)

Riscrivo (☆) di pag. precedente

$$g_{ij} V_j = \lambda V_i$$

da cui abbiamo

$$g_{ij} V_j V_i = \lambda V_i V_i \quad , \text{ cioè}$$

(ricordarsi sempre la convenzione di Einstein)

$$g(V, V) = \lambda \sum_i V_i^2 \qquad (\circ)$$

COROLLARIO

Sia g una metrica su V. Sia $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ dove $(e_1, \dots, e_n)$ è una base di V. $\boxed{1}$

Allora $\det(g_{ij}) > 0$.

DIM

Se per assurdo $\det(g_{ij}) < 0$ (zero non può essere per le prop. di pagina 0b) avremo almeno un autovalore λ della metrica (g_{ij}) negativo. Se ciò accadesse, per la $(\circ)$, un corrispettivo autovettore avrebbe norma < 0 che è assurdo

CONSIDERAZIONI - TENSORI

Abbiamo visto che l'insieme $\left(e_i^* \otimes e_j^*\right)_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$

è una base di $Bil(V)$, spazio vettoriale delle applicazioni bilineari

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Tale spazio viene denotato anche con $\underline{V^* \otimes V^*}$

$$V^* \otimes V^* = Bil(V)$$

Più in generale posso considerare l'applicazione multilineare

$$T: \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{p\text{ - volte}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{q\text{ - volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

e chiamare T <u>Tensore di tipo (p,q)</u> sullo spazio vettoriale V.

L'insieme dei tensori di tipo (p,q) è uno spazio vettoriale che viene denotato anche da

$$T^{p,q}(V) \in \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{p\text{-volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q\text{-volte}}$$

<u>Esempio</u>

Una metrica g su V è un tensore di tipo $(0,2)$.

Infatti

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g \in V^* \otimes V^*$$

Più in generale un elemento di $Bil(V)$ è un tensore di tipo $(0,2)$.

Esempio

Un elemento di V^* è un tensore di tipo $(0,1)$ in quanto è un'applicazione lineare $: V \longrightarrow \mathbb{R}$.

Un elemento $v \in V$ è un tensore di tipo $(1,0)$ in quanto si può identificare con la seguente applicazione lineare

$$\begin{aligned} v : V^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow f(v) \end{aligned}$$

Sotto questo punto di vista, $(e_1, \dots, e_n)$ è una base per l'insieme delle applicazioni lineari da $V^* \rightarrow \mathbb{R}$. Un elemento e_i della base agisce su V^* nel seguente modo

$$\begin{aligned} e_i : V^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow f(e_i) = f_i \end{aligned}$$

Componente i-esima di f nella base $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$

Analogamente a quanto fatto per $Bil(V) = V^* \otimes V^*$, è facile mostrare che l'insieme

$$\left(e_i \otimes e_J^* \right)_{\substack{i=1\dots n \\ J=1\dots n}}$$

dove $(e_1, \dots, e_n)$ è una base di V

forma una base dello spazio $T^{1,1}(V)$.

Un elemento $e_i \otimes e_J^* \in T^{1,1}(V)$ è definito come segue:

$$\left(e_i \otimes e_J^* \right) \Big(\underset{V^*}{\underset{\cap}{f}}, \underset{V}{\underset{\cap}{v}} \Big) = e_i(f) \cdot e_J^*(V) =$$

$$= f_i \cdot V_J$$

Componente i-esima di f nella base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$

Componente J-esima di V nella base $(e_1, \dots, e_n)$

Più in generale una base dello spazio $T^{p,q}(V)$ è

$$\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes e^*_{j_2} \otimes \dots \otimes e^*_{j_q} \right)$$

$$i_k = 1 \dots n \quad \forall k \ , \quad j_h = 1 \dots n \quad \forall h$$

dove $(e_1, \dots, e_n)$ è una base di V

Quindi, seguendo la convenzione di Einstein, un tensore $T \in T^{p,q}(V)$ si può scrivere nel seguente modo:

$$T = T_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \; e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \dots \otimes e^*_{j_q}$$

Osservazione :

Fino ad ora non abbiamo dato importanza alla "posizione" degli indici. In realtà la loro posizione (in alto o in basso) ha un suo valore.

Di solito una base di V è scritta come

$$(e_1, \dots, e_n) \quad \underline{\text{indici sotto}}$$

e un vettore generico v è scritto nel seguente modo

$$v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i = v^i e_i$$

<u>indici sopra</u>

Al contrario una base di V^* è scritta come segue

$$(e_1^*, \dots, e_n^*) =: (e^1, \dots, e^n) \quad \underline{\text{indici sopra}}$$

in modo tale che un generico covettore $f \in V^*$ sia scritto nel seguente modo:

$$f = f_1 e^1 + \dots + f_n e^n = f_i e^i$$

indici sotto

Rispettando questa convenzione (che non sempre useremo per non generare confusione) un generico tensore $T \in T^{p,q}(V)$ può essere scritto come segue (vedi anche pag. 6)

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$$

DEF: Definiamo il prodotto simmetrico $e_i^* \odot e_J^*$ tra e_i^* e e_J^* come segue:

$$e_i^* \odot e_J^* = \frac{1}{2}\left(e_i^* \otimes e_J^* + e_J^* \otimes e_i^* \right)$$

Oss: In molti testi il simbolo del prodotto simmetrico viene omesso in quanto l'ordine dei fattori è ininfluente:

$$e_i^* \odot e_J^* = e_J^* \odot e_i^* \approx e_i^* e_J^* \approx e_J^* e_i^*$$

L'insieme $\left(e_i^* \odot e_j^*\right)_{\underline{\underline{i \leq j}}}$ è una base delle applicazioni bilineari simmetriche che così formano uno spazio vettoriale di dimensione $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + n$ dove n è la dimensione di V.

Ricordiamo che un prodotto scalare, essendo un' applicazione bilineare simmetrica, può essere espresso come combinazione lineare di elementi del tipo $e_i^* \odot e_j^*$.

La matrice rappresentativa di un prodotto scalare g è $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ ed è simmetrica.

Ex : Prodotto scalare su uno spazio V di dimensione 2

Sia (e_1, e_2) una base di V.

Allora un prodotto scalare su V si scrive come segue:

$$g = g_{11}\, e_1^* \otimes e_1^* + g_{12}\, e_1^* \otimes e_2^* + g_{21}\, e_2^* \otimes e_1^* + g_{22}\, e_2^* \otimes e_2^* \quad (\star)$$

dove $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

$(\star)$, in virtù di $g_{12} = g_{21}$, è uguale a

$$= g_{11}\, e_1^* \otimes e_1^* + g_{12}\left(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*\right) + g_{22}\, e_2^* \otimes e_2^*$$

$$= g_{11}\, e_1^* \odot e_1^* + 2 g_{12}\, e_1^* \odot e_2^* + g_{22}\, e_2^* \odot e_2^*$$

La matrice rappresentativa è $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$

Sia V uno spazio vettoriale con una metrica g

DEF: Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ è detto autoaggiunto (o simmetrico) rispetto alla metrica g se $g(f(v), w) = g(v, f(w)) \quad \forall\, v, w \in V$

In maniera più concisa, se non dà luogo a confusione possiamo scrivere

$$f(v) \cdot w = v \cdot f(w)$$

Prodotto scalare dato da g

DEF: Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo simmetrico rispetto ad una metrica g su V.

Definiamo l'applicazione bilineare simmetrica b associata ad f nel seguente modo

$$b(v,w) = g(f(v), w) \qquad (\star)$$

Notare che b è simmetrica in quanto f è simmetrico rispetto a g. Infatti

$$b(v,w) = g\big(f(v), w\big) \overset{f \text{ è simmetrico}}{=} g\big(v, f(w)\big)$$

$$\overset{g \text{ è simmetrico}}{=} g\big(f(w), v\big) \overset{(\star)}{=} b(w,v)$$

TEOREMA SPETTRALE

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo simmetrico (rispetto ad una metrica g su V)

Allora f è diagonalizzabile e gli autospazi sono ortogonali rispetto a g.

MATRICE RAPPRESENTATIVA DI UN ENDOMORFISMO SIMMETRICO

Abbiamo innanzitutto la seguente proposizione

PROP Sia V uno spazio vettoriale con una metrica g. Allora esiste una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V rispetto a g, cioè tale che

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad (\text{Simbolo di Kronecker})$$

DIM: Essenzialmente si dimostra col processo di ortogonalizzazione di Gram - Schmidt

PROP: Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo simmetrico rispetto a g. Allora f è rappresentato da una matrice simmetrica rispetto a quelsiasi base ortonormale di V.

DIM: Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V (rispetto a g). Sia A la matrice che rappresenta f in questa base. Abbiamo che (ricordando la convenzione di Einstein)

ricordarsi

$$f(e_i) = A_{Ji}\, e_J \implies f(e_i) \cdot e_K = A_{Ji}\, e_J \cdot e_K = A_{Ji}\, \delta_{JK} = A_{Ki}$$

D'altra parte, poiché f è simmetrico,

$$f(e_i) \cdot e_K \underset{\uparrow}{=} f(e_K) \cdot e_i = \dots = A_{iK}.$$ Concludiamo che $A_{Ki} = A_{iK}$

Questo perché f è simmetrico

RELAZIONE CON L'APPLICAZIONE BILINEARE ASSOCIATA

Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo simmetrico rispetto ad una metrica g su V.

Sia $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $b(v, w) = g(f(v), w) = f(v) \bullet w$ l'applicazione bilineare simmetrica associata a f.

Sia $(e_1, \ldots, e_n)$ una base di V <u>non necessariamente ortonormale</u>.

Abbiamo che

Per definizione di matrice rappresentativa A di f nella base $(e_1 \ldots e_n)$

$$b_{iJ} = b(e_i, e_J) \overset{\text{per def. di } b}{=} f(e_i) \bullet e_J = A_{Ki} e_K \bullet e_J$$

$$= A_{Ki}\, g_{KJ} \quad \left(\text{ricordarsi che } g_{KJ} = g(e_K, e_J) = e_K \bullet e_J\right)$$

$$= g_{JK} A_{Ki}$$

Poiché la matrice (b_{ij}) è simmetrica in quanto b è simmetrica, dall'equazione di pag. 17

$$b_{ij} = g_{jk} A_{ki}$$

abbiamo

$$b_{ji} = g_{jk} A_{ki}$$

cioè

$$\boxed{b = g \circ A} \qquad (\star)$$

dove $(\star)$ si intende nel seguente modo:

b è la matrice (b_{ij})

g " " " (g_{ij})

A " " " (A_{ij}) e è il prodotto tra matrici

Poiché g è invertibile abbiamo anche

$$\boxed{A = g^{-1} \circ b}$$

<u>Oss:</u> Anche se A è moltiplicazione di due matrici simmetriche, in generale, non è una matrice simmetrica.

Per esempio

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{Simmetrica}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{Simmetrica}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{non simmetrica}}}$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Quello che abbiamo scritto a pag. 17-18 suggerisce la seguente domanda:

Se su uno spazio vettoriale V abbiamo una metrica g e un'applicazione bilineare b, come possiamo costruire canonicamente (cioè senza l'uso di basi) un endomorfismo f?

Nel seguente modo.

Sappiamo che

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

e a quest'applicazione possiamo associare la seguente applicazione lineare che per semplicità continueremo a chiamare g:

$$g : v \in V \longrightarrow g(v, \cdot) \in V^* \qquad (\star)$$

dove $g(v, \cdot) : w \in V \longrightarrow g(v, w) \in \mathbb{R}$

Analogamente possiamo fare la stessa cosa con b: associamo a $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la seguente applicazione lineare che continueremo a chiamare b

$$b : v \in V \longrightarrow b(v, \cdot) \in V^*$$

$$(\star\star)$$

dove $b(v, \cdot) : w \in V \rightarrow b(v, w) \in \mathbb{R}$

Ora $\underline{g^{-1} \circ b : V \rightarrow V}$, dove g e b devono intendersi tramite $(\star)$ e $(\star\star)$,

$\underline{\text{è l'endomorfismo cercato}}$, in accordo con le formule a fine di pag. 18, dove A era la matrice rappresentativa di tale endomorfismo.

INVARIANTI DI UN ENDOMORFISMO

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo.

Gli "invarianti" di f sono tutte quelle quantità e/o oggetti geometrici che sono canonicamente associati ad f, cioè definiti/costruiti senza l'utilizzo di una base di V.

Per esempio $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono sottospazi di V che sono definiti senza l'utilizzo di una base.

Se invece utilizziamo una base $(e_1, \dots, e_n)$ di V, allora f viene rappresentata tramite una matrice A, detta rappresentativa di f nella base scelta

Ricordiamo che l'endomorfismo f viene rappresentato ~~da~~ rispetto a due basi diverse da matrici simili

$$\tilde{A} = B^{-1} A B \qquad (\bullet)$$

La matrice A rappresenta f in $(e_1, \dots, e_n)$

La matrice $\tilde{A}$ rappresenta f nella base $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$

Quindi un invariante è una quantità che rimane, appunto, invariante per matrici simili.

Esempio: Il determinante è un invariante di un endomorfismo. Infatti da $(\bullet)$ abbiamo che

$$\det(\tilde{A}) = \det(B^{-1} A B) \overset{\text{BINET}}{=} \det(B^{-1}) \det(A) \det(B)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det(B)}} \det(A) \cancel{\det(B)} = \det(A)$$

Canonicamente, il determinante di un endomorfismo f può essere definito come il prodotto degli autovalori:

$$\det(f) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(A) \qquad (\bullet)$$

dove λ_i sono gli autovalori di f e A la matrice rappresentativa rispetto ad una qualsiasi base (Nota che $(\bullet)$ è sempre un numero reale, anche se ci sono autovalori complessi)

Ci sono altri invarianti oltre il determinante?

Per esempio anche il rango di A è un invariante: infatti coincide con la dimensione di $\Im f$

Anche <u>la somma</u> degli autovalori di un endomorfismo $f: V \to V$ è un invariante. Per definizione la chiamiamo <u>traccia</u> di f:

$$\text{traccia}(f) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{traccia}(A)$$

dove λ_i sono gli autovalori di f, A la matrice rappresentativa di f rispetto ad una qualsiasi base e

$$\text{traccia}(A) = \text{somma degli elementi della diagonale principale} = \sum_i A_{ii}$$

In generale il polinomio caratteristico di A

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \, Id)$$

è un invariante, <u>quindi sono invarianti tutti i coefficienti di $p(\lambda)$</u>

Esempio: Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo dove $\dim V = 2$.

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matrice rappresentativa

di f in qualche base (e_1, e_2) di V.

Abbiamo che

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$$

$\Longrightarrow$ $tr(A)$ e $\det(A)$

sono invarianti dell'endomorfismo f, come abbiamo visto nelle pagine precedenti

PROP: Sia $f: V \to V$ un endomorfismo simmetrico rispetto ad una metrica g su V.
Sia $b: V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare (simmetrica) associata ad f. Allora

$$\left.\begin{aligned} \det(f) &= \det(b)/\det(g) = \det(A) \\ \text{e} \quad tr(f) &= \text{traccia}(g^{-1} \circ b) = tr(A) \end{aligned}\right\} \text{dove } A \text{ è qualsiasi matrice che rappresenta } f$$

<u>Nel caso dim $V = 2$</u> abbiamo che (svolgere questo conto)

$$tr(f) = \frac{1}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \left(g_{22} b_{11} - 2 g_{12} b_{12} + g_{11} b_{22} \right)$$