1. La dinamica di una popolazione di individui è descritta dal seguente problema

$$\begin{cases} \partial_t n - D\Delta n = f(t)\, n, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \nabla n(x,t) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ n(x,0) = n_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

dove $D > 0$ e $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. L'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ modella la regione spaziale occupata dalla popolazione in oggetto ed è un insieme limitato e connesso il cui bordo consta di una superficie liscia $\partial\Omega$, mentre $\boldsymbol{\nu}$ è il versore normale a $\partial\Omega$ che punta verso l'esterno di $\Omega$. La funzione $n(x,t) \geq 0$ rappresenta la densità di individui alla posizione $x$ all'istante di tempo $t$.

(a) Si discuta il possibile significato fisico dei termini $-D\Delta n$ e $f(t)\, n$.

(*) $\partial_t n = f(t) n + D \Delta n, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$

- $f(t) n$ : variazione della densità di individui all'interno del sistema a seguito di fenomeni di proliferazione e morte ( $f(t)$ è il tasso netto di crescita della densità / tasso netto di proliferazione degli individui alla posizione $x \in \Omega$ al tempo $t \in (0,\infty)$ );

- $D \Delta n$ : variazione della densità di individui a seguito del moto degli stessi, il quale è modellato come un processo di diffusione lineare con diffusività $D$.

---

(b) Sia $N(t)$ la funzione che modella il numero di individui presenti all'istante di tempo $t$ all'interno della regione spaziale rappresentata da $\Omega$. Si ricavi un'equazione differenziale per $N(t)$ e, alla luce di tale equazione, si discuta il significato fisico delle condizioni al contorno assegnate.

Essendo $n(x,t)$ la densità di individui in $(x,t)$, si avrà

$$N(t) := \int_\Omega n(x,t)\,dx\,.$$

Quindi,

$$\frac{d}{dt}N(t) = \frac{d}{dt}\int_\Omega n(x,t)\,dx$$

$$= \int_\Omega \partial_t n(x,t)\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \int_\Omega f(t)\,n(x,t)\,dx + \int_\Omega D\,\Delta n(x,t)\,dx$$

$$= f(t)\underbrace{\int_\Omega n(x,t)\,dx}_{=N(t)} + D\underbrace{\int_\Omega \Delta n(x,t)\,dx}_{(**)\,=\,0}$$

$$= f(t)\,N(t)$$

(**) $$\int_\Omega \Delta n(x,t)\,dx \underset{\Delta n = \mathrm{div}(\nabla n)}{=} \int_\Omega \mathrm{div}(\nabla n(x,t))\,dx$$

Teorema della Divergenza

$$= \int_{\partial\Omega} \nabla n(x,t)\cdot\underline{\nu}\,d\sigma \overset{\text{delle condizioni al bordo}}{=} 0$$

In definitiva:

$$(**) \quad \frac{d}{dt} N(t) = f(t)\, N(t), \qquad t > 0 .$$

Oss. 1 Sotto le condizioni al bordo assegnate, il moto degli individui non comporta alcuna variazione al numero totale degli stessi (ossia, si ha flusso nullo di individui attraverso il bordo $\partial\Omega$ / gli individui non possono abbandonare il dominio spaziale valicando $\partial\Omega$).

Oss. 2 Possiamo chiudere la ODE $(**)$ imponendo la seguente condizione iniziale, che segue dalla condizione iniziale per la PDE $(*)$:

$$N(0) = N_0 =: \int_\Omega n^0(x)\, dx .$$

(c) Si discuta il possibile significato fisico delle seguenti definizioni

$$f(t) \equiv 0, \quad f(t) \equiv \alpha, \quad f(t) \equiv -\alpha \quad \text{con} \quad \alpha > 0.$$

Inoltre, si studi il comportamento asintotico di $N(t)$ per $t \to \infty$ nei casi corrispondenti a ciascuna delle suddette definizioni della funzione $f(t)$.

- Se $f(t) \equiv 0$ (tasso netto di proliferazione nullo), dalla ODE $(**)$ si trova

$$\frac{d}{dt} N(t) = 0 \qquad \forall t > 0$$

$\Rightarrow$ il numero di individui è costante ($N(t) = N_0 \quad \forall t \geq 0$).

- Se $f(t) \equiv \alpha > 0$ (tasso netto di proliferazione positivo), dalla ODE $(\ast\ast)$ si trova

$$\frac{d}{dt} N(t) = \alpha N(t) \qquad \forall t > 0$$

$\Rightarrow$ il numero di individui cresce esponenzialmente a tasso $\alpha > 0$ ($N(t) \to \infty$ per $t \to \infty$).

- Se $f(t) \equiv -\alpha < 0$ (tasso netto di proliferazione negativo), dalla ODE $(\ast\ast)$ si trova

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\alpha N(t) \qquad \forall t > 0$$

$\Rightarrow$ il numero di individui decade esponenzialmente a tasso $\alpha > 0$ ($N(t) \to 0$ per $t \to \infty$).

2. Si consideri un tubo lungo e sottile di lunghezza $L > 0$ in cui siano contenute delle molecole di glucosio. Si assuma che le molecole diffondano con coefficiente di diffusione costante $\beta > 0$ e non vadano incontro ad alcun fenomeno di creazione o distruzione all'interno del tubo. Si rappresenti matematicamente il tubo come l'intervallo $[0, L] \subset \mathbb{R}$.

   (a) Si scriva un'equazione differenziale alle derivate parziali che descriva la dinamica della densità di molecole alla posizione $x \in [0, L]$ all'istante di tempo $t \geq 0$.

Detta $n(x,t)$ la funzione che descrive la densità di molecole a $(x,t) \in [0,L] \times (0,\infty)$, si ha:

$$\partial_t n = \beta\, \partial^2_{xx} n, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty).$$

   (b) Considerando il caso in cui il numero di molecole nel tubo all'istante di tempo $t = 0$ sia pari a $N_0 > 0$, si identifichino opportune condizioni iniziali per la densità di molecole corrispondenti ai seguenti scenari:

      i. le molecole sono inizialmente distribuite in modo uniforme;

      ii. la densità iniziale di molecole decresce in modo monotono allontanandosi dal centro del tubo ed è nulla agli estremi del tubo.

i) Detta $C \in \mathbb{R}^*_+$ la concentrazione uniforme di interesse, si avrà

$$n(x,0) = n_0(x) \equiv C$$

e, inoltre,

$$N(0) = \int_0^L n(x,0)\, dx = \int_0^L n_0(x)\, dx = N_0$$

$$\Rightarrow \int_0^L C\, dx = N_0 \Rightarrow C = \frac{N_0}{L}.$$

ii) Usando una notazione analoga al punto precedente

$$n(0,x) = n_0(x) = C \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

e, inoltre,

$$N(0) = \int_0^L n(x,0)\,dx = \int_0^L n_0(x)\,dx = N_0$$

$$\Rightarrow \int_0^L C \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx = N_0$$

$$\Rightarrow C = N_0 \frac{\pi}{2L} .$$

(c) Si identifichino delle opportune condizioni al contorno per la densità di molecole corrispondenti ai casi seguenti:

i. gli estremi del tubo in $x = 0$ e $x = L$ sono connessi a due serbatoi in cui la concentrazione di glucosio è mantenuta costante e pari, rispettivamente, a $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$;

ii. l'estremo del tubo in $x = 0$ è sigillato, mentre l'altro estremo è connesso a una pompa che rimuove, in modo istantaneo, ogni molecola che raggiunge il punto $x = L$.

i) $n(x=0,t) = C_1 \quad \wedge \quad n(x=L,t) = C_2 \quad \forall t \geq 0.$

Queste sono condizioni al bordo di Dirichlet in quanto specificano il valore della soluzione nei punti di bordo.

ii) $\partial_x n(x=0,t)=0 \quad \wedge \quad n(x=L,t)=0 \quad \forall t \geq 0.$

Queste sono condizioni al bordo di Neumann in quanto specificano il valore di una derivata (rispetto alla variabile spaziale) della soluzione nei punti di bordo.