Fisica II

Esercitazione 6

Alessandro Pedico
alessandro.pedico@polito.it

17/10/2022

Forza di Lorentz

Forza esercitata da un campo magnetico su una carica puntiforme q

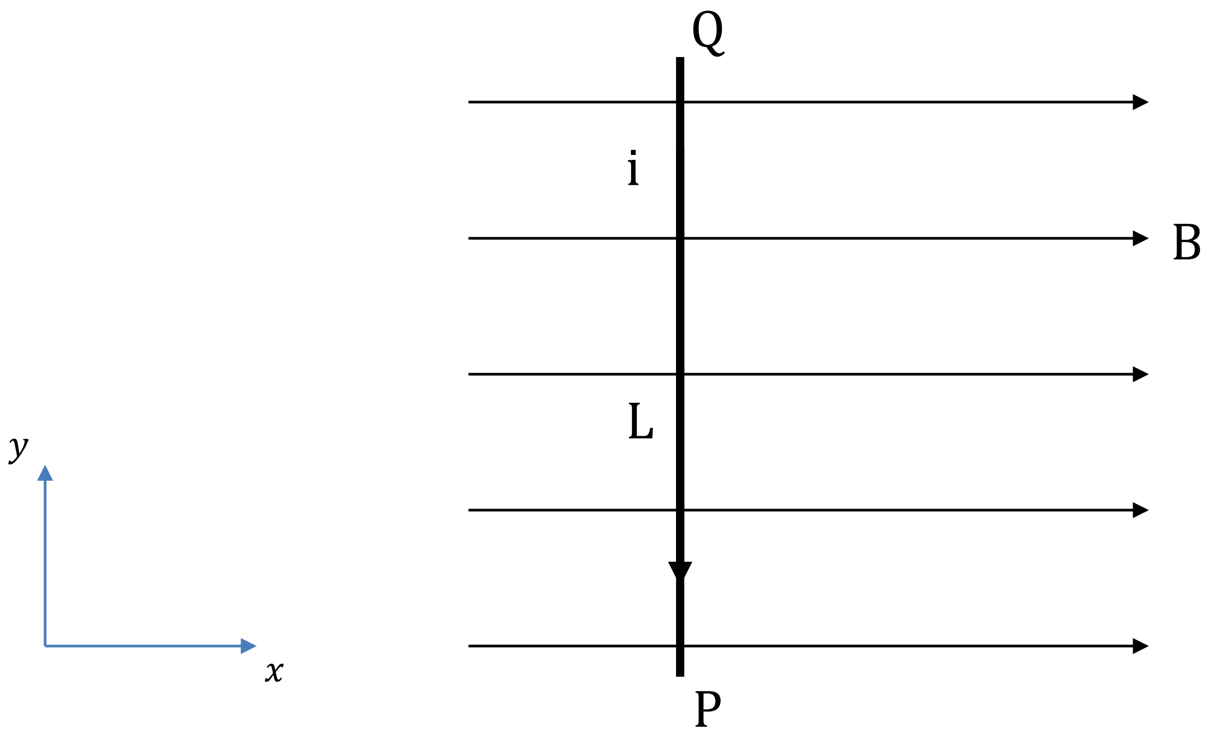
Forza di Lorentz $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

Se posizioniamo un conduttore percorso da corrente all'interno di una regione in cui è presente un campo magnetico, la forza di Lorentz agisce sui portatori di carica e di conseguenza viene trasmessa al conduttore stesso.

Nel caso di corrente stazionaria vale:

$$\vec{F} = i \int_{P}^{Q} \overrightarrow{ds} \times \vec{B}$$

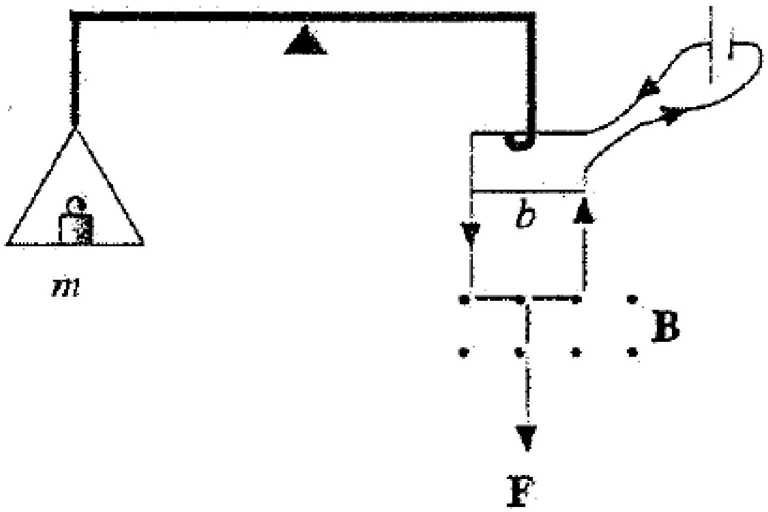
Forza di Lorentz



$$d\vec{F} = i\,\overrightarrow{ds} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = i \int_P^Q \overrightarrow{ds} \times \vec{B} = i\,\vec{L} \times \vec{B} = i\,L\,B\,\sin\theta\,\hat{u}_z = i\,L\,B\,\hat{u}_z$$

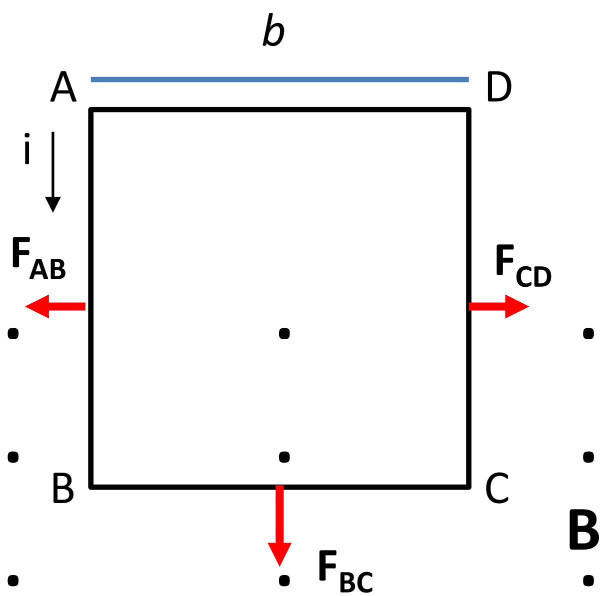
Dinamometro a bilancia



- spira di lato b = 5 cm, corrente i = 1 A
- campo **B** uniforme uscente applicato alla metà inferiore della spira
- massa da bilanciare m = 0.5 g

Calcolare il valore del campo magnetico **B**

$$\vec{F} = i \int_P^Q \overrightarrow{ds} \times \vec{B}$$



forza magnetica totale

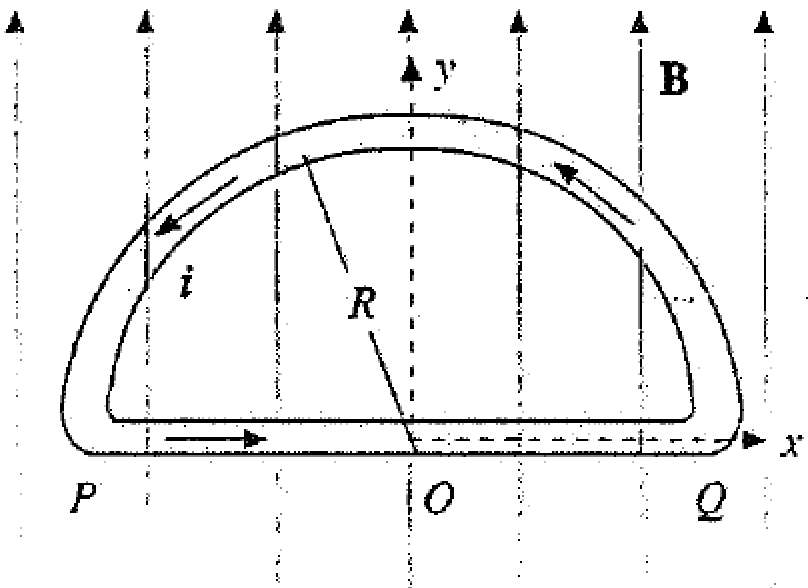
$$\vec{F} = \cancel{\vec{F}_{AB}} + \vec{F}_{BC} + \cancel{\vec{F}_{CD}} = -i\, b\, B\, \hat{u}_z$$

Affinché sia bilanciata deve valere: $m\, g = i\, b\, B$

$$B = \frac{m\, g}{i\, b} = 9.8 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T}$$

Forza su spira: semicirconferenza

Spira semicircolare



- raggio *R*, corrente *i*
- campo magnetico **B** uniforme e orientato lungo y

Calcolare la forza magnetica sia sul tratto rettilineo che sul tratto curvo.

TRATTO RETTILINEO PQ

$$\vec{F} = i\int_P^Q \overrightarrow{ds} \times \vec{B} = i\int_{-R}^{R} dx\, \hat{u}_x \times B\, \hat{u}_y = i\, 2R\, B\, \hat{u}_z$$

la forza è uscente

Forza su spira: semicirconferenza

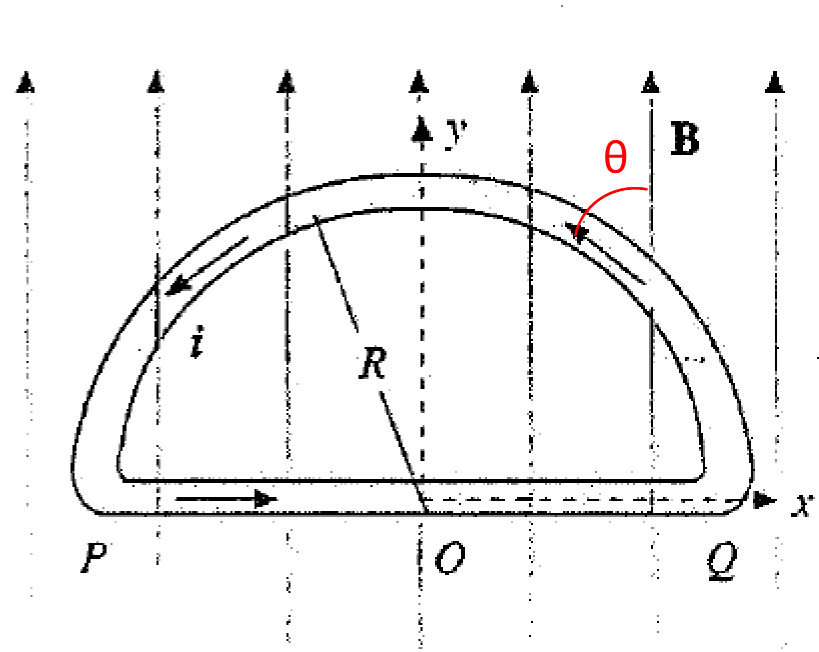
TRATTO CURVILINEO QP

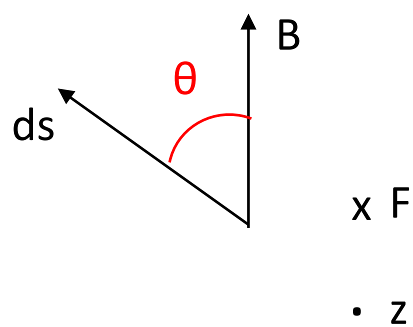
coordinate polari

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta$$

$$\vec{F} = i\int_Q^P \overrightarrow{ds} \times \vec{B}$$

$$\overrightarrow{ds} \times \vec{B} = -\,ds\,B\,\sin\theta\,\hat{u}_z$$



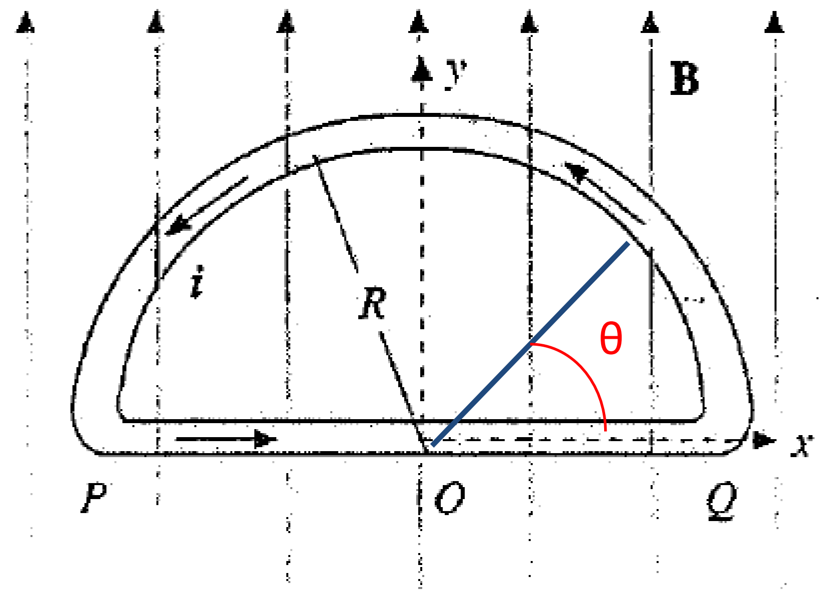


Forza su spira: semicirconferenza

TRATTO CURVILINEO QP

coordinate polari

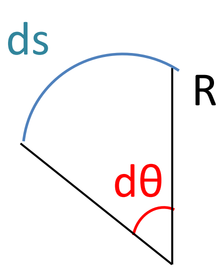
$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta$$



$$\vec{F} = i\int_Q^P \overrightarrow{ds} \times \vec{B}$$

$$\overrightarrow{ds} \times \vec{B} = -\,ds\,B\,\sin\theta\,\hat{u}_z$$

$$ds = R\,d\theta$$



Politecnico di Torino

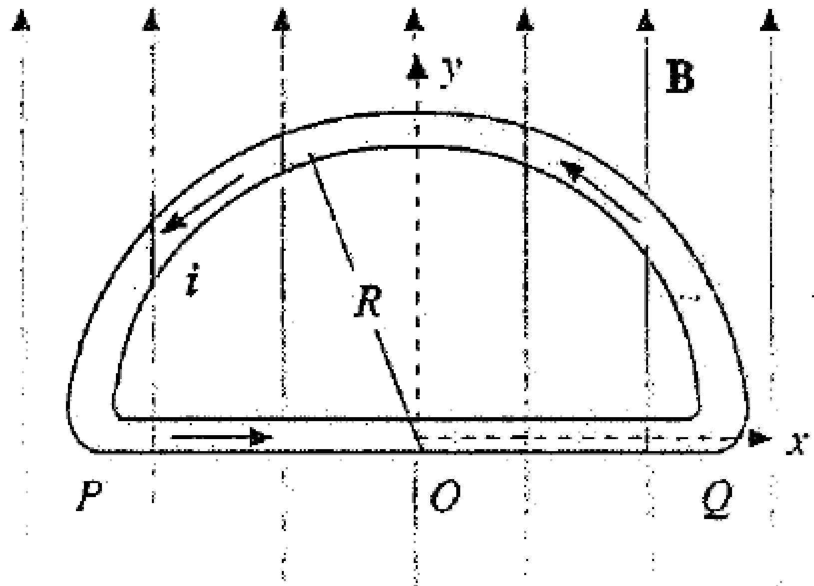
Forza su spira: semicirconferenza

TRATTO CURVILINEO QP

coordinate polari

$$x = R\ \cos\theta$$
$$y = R\ \sin\theta$$

$$\vec{F} = i \int_Q^P \overrightarrow{ds}\ x\ \vec{B}$$

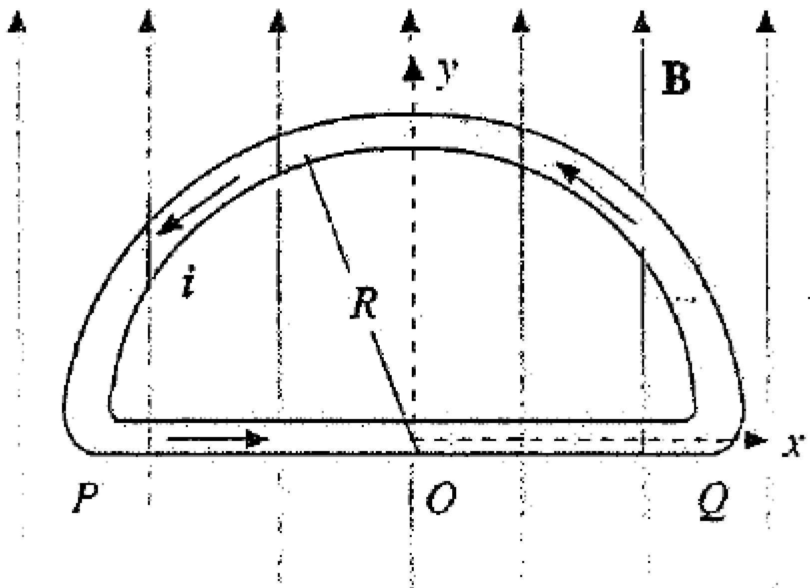


$$\overrightarrow{ds}\ x\ \vec{B} = -\ ds\ B\ \sin\theta\ \hat{u}_z$$
$$ds = R\ d\theta$$

$$\vec{F} = i \int_0^{\pi} -R\,B \sin\theta\ d\theta\ \hat{u}_z\ =$$
$$= i\,R\,B\,(\cos\pi - \cos 0)\ \hat{u}_z = i\,R\,B\,(-2)\ \hat{u}_z$$

la forza è entrante

Forza su spira: semicirconferenza



TRATTO RETTILINEO PQ

$$\vec{F} = i\,2R\,B\,\hat{u}_z$$

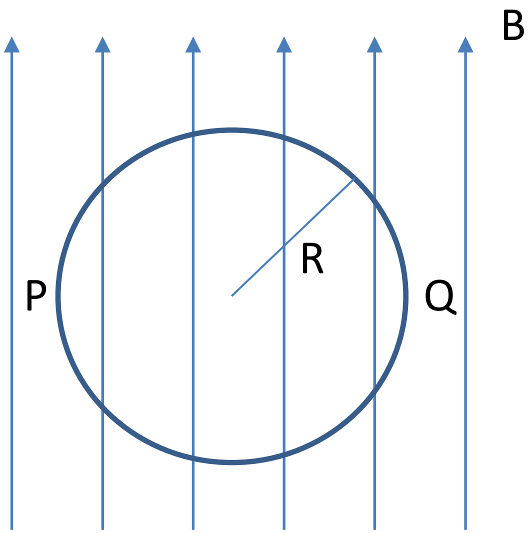
TRATTO CURVILINEO QP

$$\vec{F} = -\,i\,2R\,B\,\hat{u}_z$$

- Indipendentemente dal fatto che il tratto di conduttore sia rettilineo o curvo, la forza che agisce su esso **dipende solo dalla distanza dei due estremi** (in questo caso 2R)
- Coerentemente con questo, la forza che agisce su tutto il circuito è **NULLA**, come si vede sommando i risultati per il tratto rettilineo e quello curvo
- Verifichiamo tali considerazioni studiando una spira circolare

Forza su spira: circonferenza

Spira circolare



TRATTO CURVILINEO SUPERIORE

$$\overrightarrow{ds} \times \vec{B} = -\, ds\, B\, \sin\theta\, \hat{u}_z$$

$$ds = R\, d\theta$$

TRATTO CURVILINEO INFERIORE

$$\overrightarrow{ds} \times \vec{B} = ds\, B\, \sin\theta\, \hat{u}_z$$

$$ds = R\, d\theta$$

TRATTO CURVILINEO SUPERIORE

$$\vec{F} = i \int_Q^P \overrightarrow{ds} \times \vec{B} = i \int_0^{\pi} -R\, B \sin\theta\, d\theta\, \hat{u}_z = -\, i\, 2R\, B\, \hat{u}_z$$

la forza è entrante

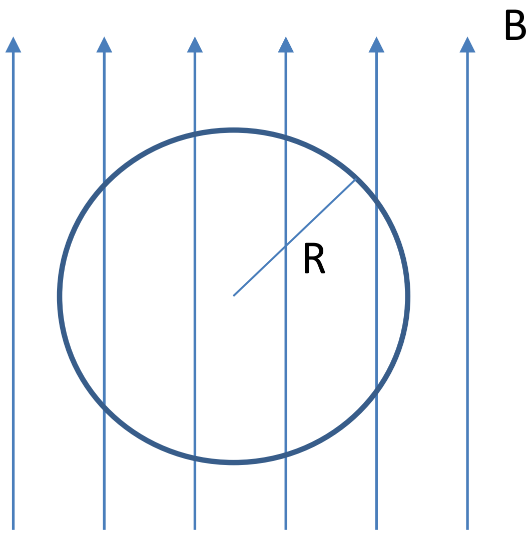
TRATTO CURVILINEO INFERIORE

$$\vec{F} = i \int_P^Q \overrightarrow{ds} \times \vec{B} = i \int_0^{\pi} R\, B \sin\theta\, d\theta\, \hat{u}_z = i\, 2R\, B\, \hat{u}_z$$

la forza è uscente

Forza su spira: circonferenza

Spira circolare



TRATTO CURVILINEO INFERIORE

$$\vec{F} = i\,2R\,B\,\hat{u}_z$$

TRATTO CURVILINEO SUPERIORE

$$\vec{F} = -\,i\,2R\,B\,\hat{u}_z$$

$$\vec{F}_{tot} = 0$$

infatti

$$\vec{F}_{tot} = i\int_P^P \overrightarrow{ds}\times\vec{B} = i\int_0^{2\pi} -R\,B\sin\theta\;d\theta\,\hat{u}_z \;=\; i\,R\,B\,(1-1)\,\hat{u}_z = 0$$

Sebbene la **forza totale** che agisce sulla spira **sia nulla** (e quindi non vi sia moto traslazionale), puntualmente la forza non è nulla: questo induce un **momento** delle forze, responsabile di un **moto rotazionale** della spira.

Sorgenti del campo magnetico

Le **cariche in movimento** sono sorgenti del campo magnetico. In particolare, le **correnti elettriche** possono essere utilizzate per la generazione di campi magnetici.

Legge di Ampere-Laplace

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 \, i}{4 \, \pi} \frac{\overrightarrow{ds} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

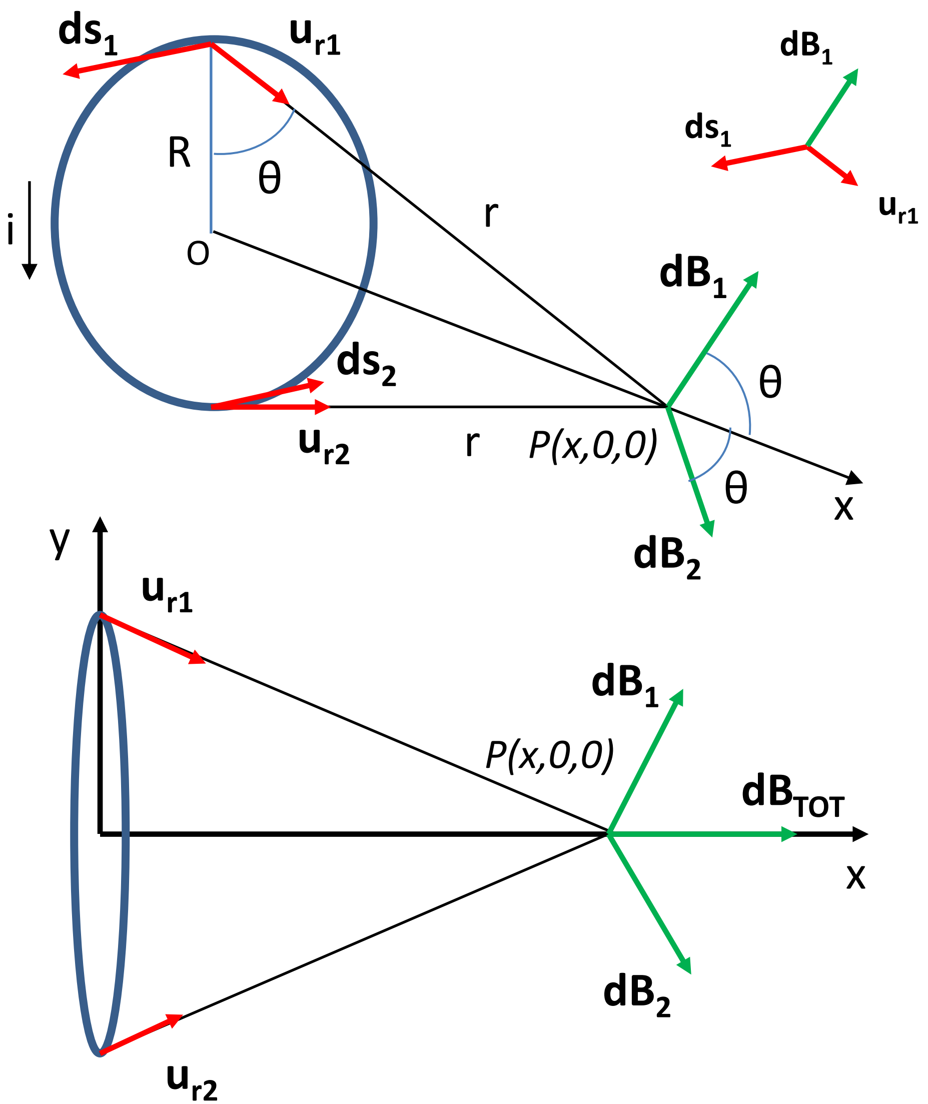
Campo magnetico generato da un tratto infinitesimo di conduttore in un punto P distante r

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, i}{4 \, \pi} \oint \frac{\overrightarrow{ds} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Campo magnetico generato da un circuito chiuso percorso da corrente in un punto P

Campo magnetico di una spira circolare

Spira circolare



Calcolare il campo magnetico generato da una spira circolare (raggio *R*, corrente *i*) sul suo asse.

Ogni tratto infinitesimo contribuisce con un termine:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0\, i}{4\,\pi}\,\frac{\overrightarrow{ds} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

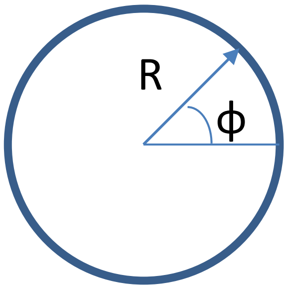
A causa della simmetria del problema, le componenti trasverse si cancellano a due a due e il **campo totale è orientato lungo x.** Inoltre, notare che **ds** e **u_r** sono sempre perpendicolari tra loro.

Quindi, il campo generato da ogni elemento infinitesimo va proiettato lungo x **moltiplicando per il cos θ**

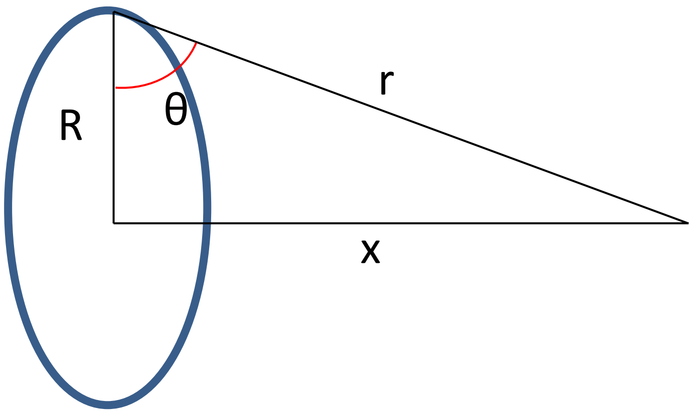
Campo magnetico di una spira circolare

Ogni tratto infinitesimo, tenendo conto della simmetria, contribuisce con un termine:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0\, i}{4\,\pi}\,\frac{|\,\overrightarrow{ds} \times \hat{u}_r\,|}{r^2}\cos\theta\,\hat{u}_x = \frac{\mu_0\, i}{4\,\pi}\,\frac{ds\ \cos\theta}{r^2}\,\hat{u}_x = \frac{\mu_0\, i}{4\,\pi}\,\frac{R\,d\varphi\ \cos\theta}{r^2}\,\hat{u}_x$$



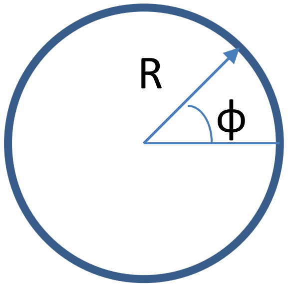
$$ds = R\,d\phi$$



$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0\, i}{4\,\pi}\,\frac{1}{[R^2 + x^2]}\,\frac{R}{[R^2 + x^2]^{1/2}}\,R\,d\varphi\,\hat{u}_x$$

Campo magnetico di una spira circolare

INTEGRAZIONE



ds = R dϕ

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0\, i}{4\,\pi} \frac{1}{[R^2 + x^2]} \frac{R}{[R^2 + x^2]^{1/2}}\, R\, d\varphi\, \hat{u}_x$$

$$\vec{B} = \int \overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0\, i}{4\pi} \frac{1}{[R^2 + x^2]} \frac{R^2}{[R^2 + x^2]^{1/2}} \int_0^{2\,\pi} d\varphi\, \hat{u}_x = \frac{2\pi\, \mu_0\, i\, R^2}{4\pi\, [R^2 + x^2]^{3/2}}\, \hat{u}_x$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\, i\, R^2}{2\, [R^2 + x^2]^{3/2}}\, \hat{u}_x}$$

Campo magnetico di una spira circolare

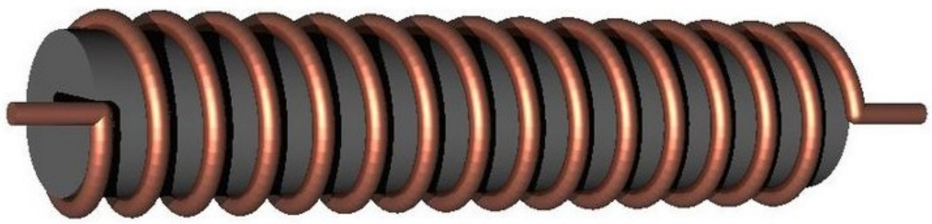
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, i \, R^2}{2\,[R^2 + \, x^2]^{3/2}} \, \hat{u}_x$$

- La formula è valida anche per **x < 0**
- Per **x = 0**, il campo è **massimo** e vale: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 \, i}{2\,R} \, \hat{u}_x$
- Per grandi valori di x, il campo decresce fino a annullarsi asintoticamente a infinito

Campo magnetico di un solenoide

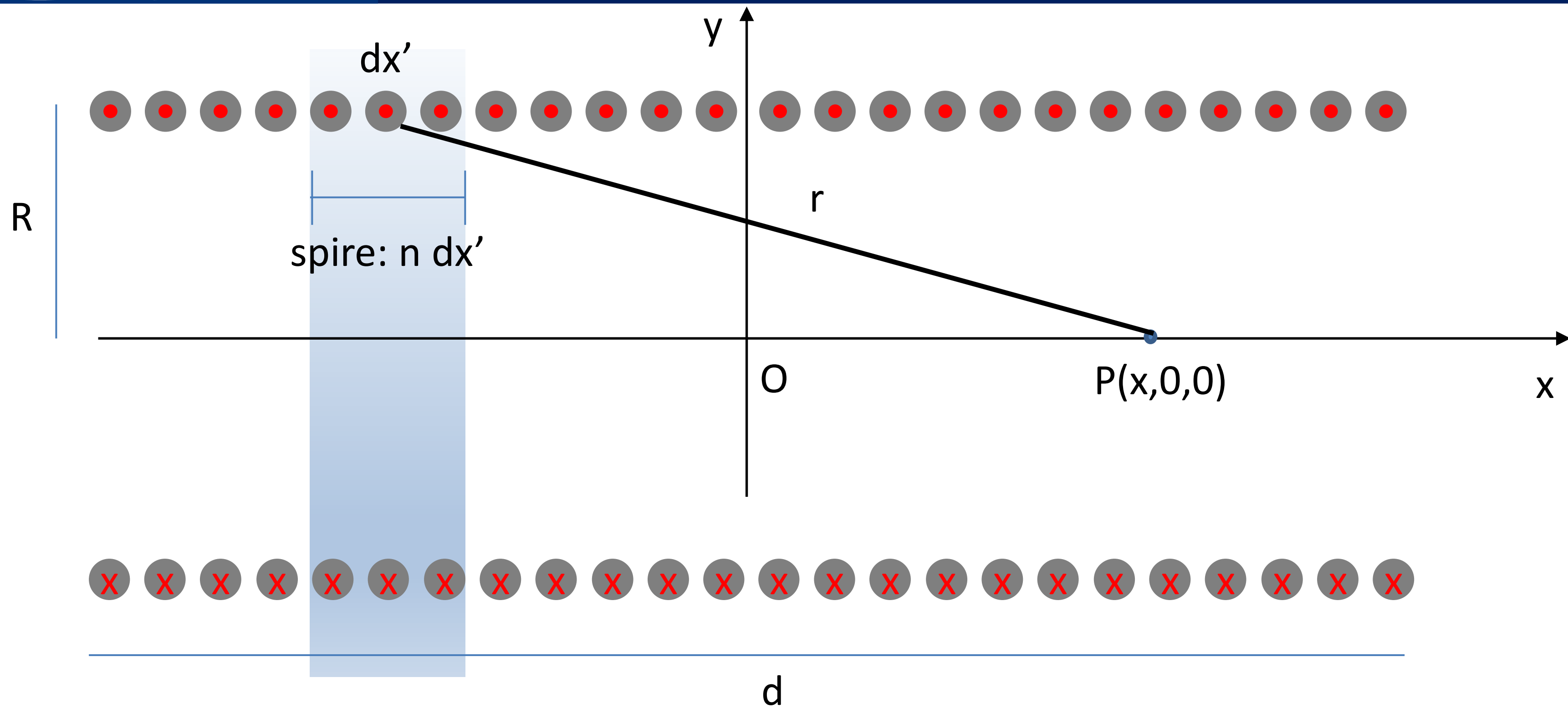
Solenoide

Un **solenoide** è un filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica con passo piccolo e di conseguenza spire molto fitte.



Consideriamo un solenoide di lunghezza d, raggio R, densità lineare di spire costante $n = N/d$, percorso da una corrente i. Vogliamo calcolare il **campo magnetico** generato sull'asse del solenoide.

Campo magnetico di un solenoide



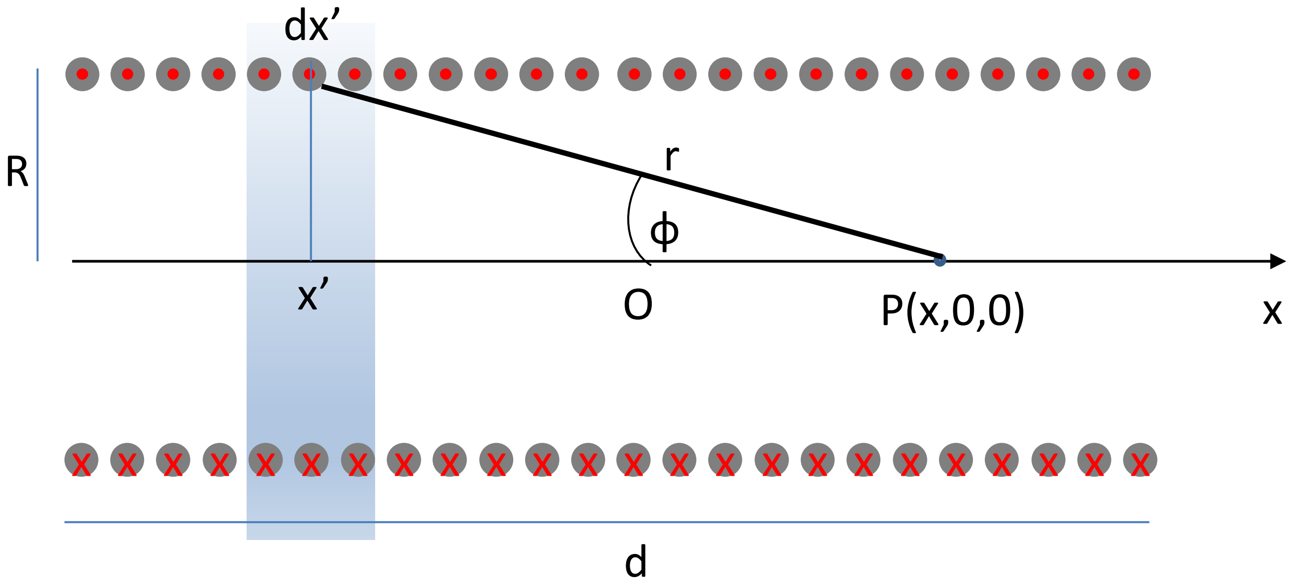
SPIRA CIRCOLARE

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, i \, R^2}{2 \, r^3} \, \hat{u}_x$$

ELEMENTO INFINITESIMO DEL SOLENOIDE

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 \, i \, R^2}{2 \, r^3} \, {\color{red} n \, dx'} \, \hat{u}_x$$

Campo magnetico di un solenoide



$$x - x' = r \cos\varphi$$

$$R = r \sin\varphi$$

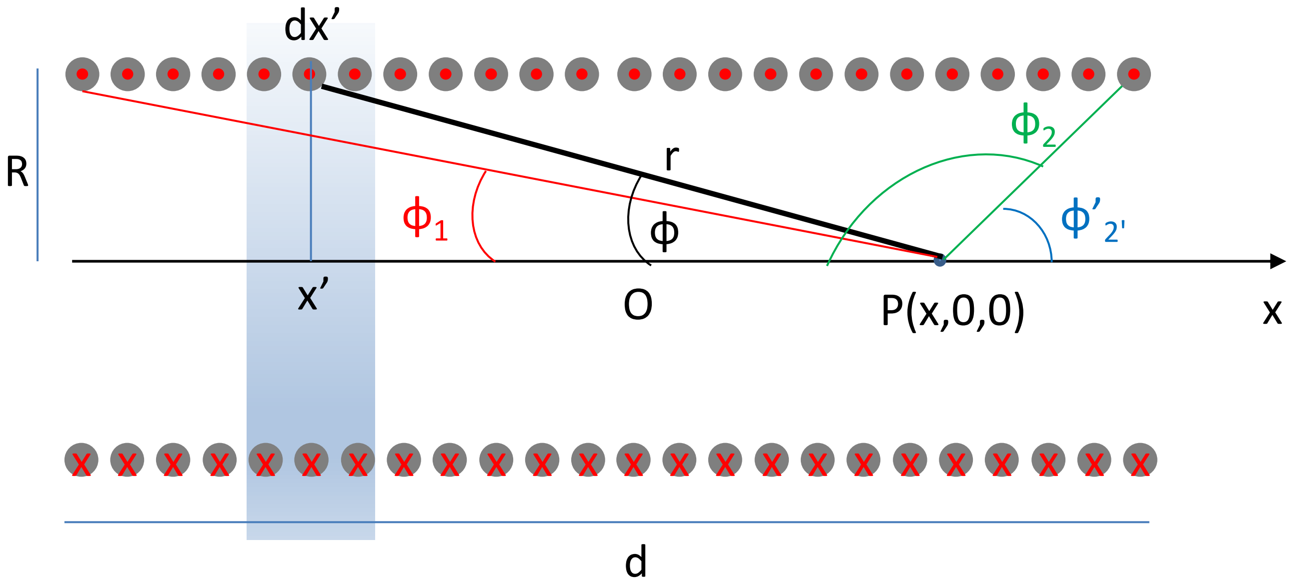
$$x - x' = R \cot\varphi$$

DERIVATA

$$dx' = \frac{R}{(\sin\varphi)^2} d\varphi$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 \, i \, R^2 n}{2 \, r^3} dx' \;\, \hat{u}_x \xrightarrow{r = \frac{R}{\sin\varphi}} \boxed{\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 \, n \, i}{2} \sin\varphi \; d\varphi \, \hat{u}_x}$$

Campo magnetico di un solenoide



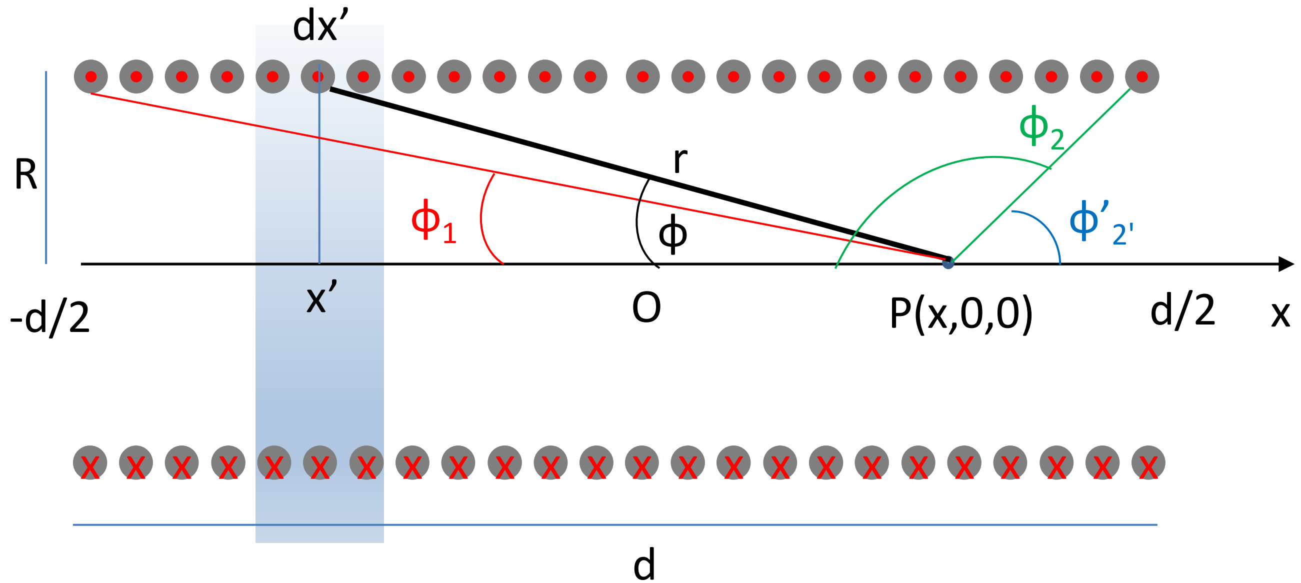
dx': -d/2 < x' < d/2

dϕ: ϕ1 < ϕ < ϕ2

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0\, n\, i}{2} \sin\varphi \; d\varphi \; \hat{u}_x \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0\, n\, i}{2} \sin\varphi \; d\varphi \; \hat{u}_x$$

$$\vec{B} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0\, n\, i}{2} \sin\varphi \; d\varphi \; \hat{u}_x = \frac{\mu_0\, n\, i}{2} [\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2]\hat{u}_x = \frac{\mu_0\, n\, i}{2} [\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2']\, \hat{u}_x$$

Campo magnetico di un solenoide

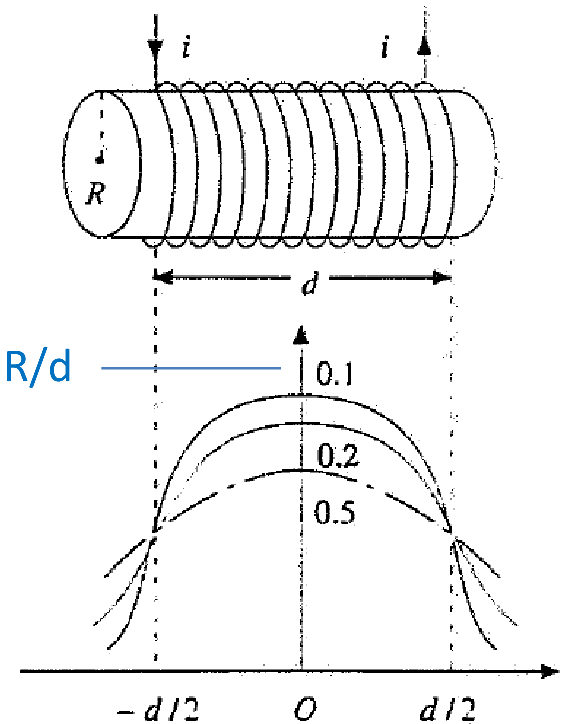


$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, n\, i}{2}\left[\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2'\right]\hat{u}_x$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, n\, i}{2}\left[\frac{\frac{d}{2}+x}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}+x\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{d}{2}-x}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}-x\right)^2 + R^2}}\right]\hat{u}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\, n\, i}{2}\left[\frac{d+2x}{\sqrt{(d+2x)^2 + 4R^2}} + \frac{d-2x}{\sqrt{(d-2x)^2 + 4R^2}}\right]\hat{u}_x}$$

Campo magnetico di un solenoide



$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, n\, i}{2}\left[\frac{d+2x}{\sqrt{(d+2x)^2+4\,R^2}} + \frac{d-2x}{\sqrt{(d-2x)^2+4\,R^2}}\right]\hat{u}_x$$

- Per **x = 0**, il campo assume il **valore massimo**:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, n\, i\, d}{\sqrt{d^2+4R^2}}\,\hat{u}_x$$

- limite **solenoide infinito** (ϕ1 ≈ ϕ2 ≈ 0):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, n\, i}{2}\left[\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2'\right]\hat{u}_x \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{B} = \mu_0\, n\, i\, \hat{u}_x}$$

Solenoide finito

L’espressione che abbiamo ricavato per il campo magnetico generato dal solenoide indefinito è approssimativamente soddisfatta anche dal **solenoide finito** intorno al centro.

L’approssimazione è più accurata per solenoidi caratterizzati da un rapporto **R/d molto piccolo**.