Abbiamo visto:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\|x(t)\| \le C\|x_0\| e^{\alpha t}, \qquad \forall t \ge 0$$

dove

$$\alpha > \alpha_0 := \max_{i=1,\dots,n} \{ Re(\lambda_i) : \lambda_i \text{ autovalore di } A \}$$

Consideriamo il caso $\alpha_0 = 0 \rightsquigarrow$ c'è almeno un autovalore di A con parte reale nulla.

$$|(e^{tB})_{ij}| = |c_{ij} t^{m_{ij}} e^{\lambda_{ij} t}|$$

lemma: $t^m < k e^{\varepsilon t}$ con $m \in \mathbb{N}$, $k, \varepsilon > 0$

$$t^{m_{ij}} < k e^{(\alpha - \alpha_0)t}$$

$$|e^{\lambda_{ij} t}| = e^{Re(\lambda_{ij})t} \le e^{\alpha_0 t}$$

Osserviamo che il fattore $t^{m_{ij}}$ compare solo se il corrispondente blocco di Jordan di B <u>non</u> è diagonale. Se invece il blocco è diagonale allora i fattori della forma $t^{m_{ij}}$ non compaiono.
Un blocco di Jordan relativo ad un certo autovalore λ è diagonale quando le molteplicità algebrica e geometrica di λ coincidono $\rightsquigarrow$ λ semplice.

Se $\alpha_0 = 0$ e gli autovalori con parte reale nulla sono semplici allora:

- i termini $|c_{ij} t^{m_{ij}} e^{\lambda_{ij} t}|$ corrispondenti a λ_{ij} t.c. $Re(\lambda_{ij})<0$ si stimano con $e^{\alpha t}$ e si può prendere $\alpha<0$;
- i termini corrispondenti a λ_{ij} t.c. $Re(\lambda_{ij})=0$ e λ_{ij} è semplice sono della forma $|c_{ij} e^{\lambda_{ij} t}|$ e si stimano direttamente con $e^{\alpha_0 t} \rightsquigarrow \alpha_0 = 0 \rightsquigarrow$ si stimano con 1 (ovvero una costante).

Complessivamente, se gli autovalori di A con parte reale nulla sono semplici possiamo stimare:

$$|(e^{tB})_{ij}| \leq C_1 \quad (\text{costante})$$

e quindi

$$\|x(t)\| \leq C_1 \|x_0\|.$$

Di conseguenza, $x(t)$ si mantiene limitata per $t \to +\infty$.

Configurazioni di equilibrio di un sistema di ODE

Def. Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si chiama punto (o configurazione) di equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$ se

$$\boxed{f(\bar{x}) = 0}.$$

Oss. Se $\bar{x}$ è un punto di equilibrio di $\dot{x} = f(x)$ allora la funzione costante $x(t) = \bar{x}$ è soluzione del sistema di ODE.

Esempi

1) Modello di Malthus: $\dot{x} = rx$, $f(x) = rx$

punti di equilibrio: $f(\bar{x}) = 0 \iff \bar{x} = 0$.

2) Modello di Verhulst: $\dot{x} = r_0 x\left(1 - \frac{x}{k}\right)$, $f(x) = r_0 x\left(1 - \frac{x}{k}\right)$

punti di equilibrio: $f(\bar{x}) = 0 \iff \bar{x} = 0,\ \bar{x} = k$

3) sistema lineare: $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$f(x) = Ax$$

punti di equilibrio: $f(\bar{x}) = 0 \iff \bar{x} \in \operatorname{Ker} A$

Oss. $\bar{x} = 0$ è sempre un punto di equilibrio per il sistema $\dot{x} = Ax$. Se poi A è singolare ce ne sono infiniti altri con un grado di infinito che dipende dal rango di A.

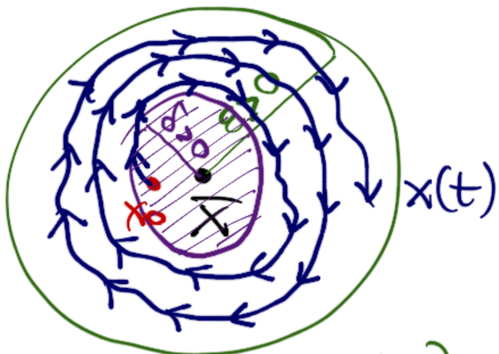
Consideriamo in generale

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

e sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto di equilibrio.

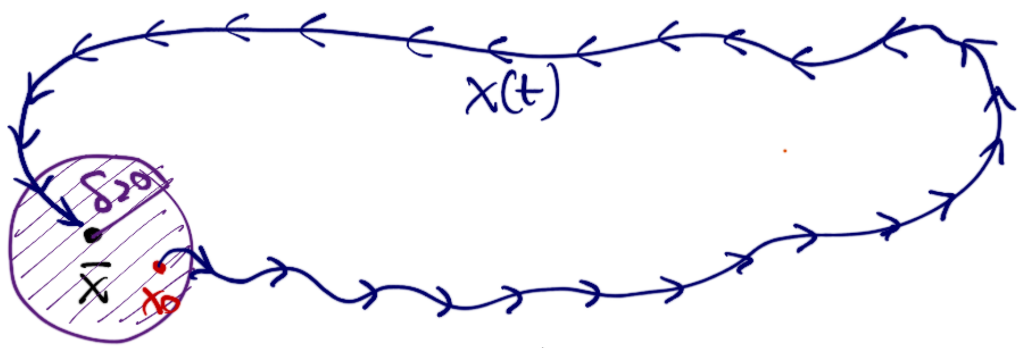
<u>Def.</u> Diciamo che $\bar{x}$ è stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall t > 0.$$



<u>Def.</u> Diciamo che $\bar{x}$ è (localmente) attrattivo se:

$$\exists \delta > 0 : \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}.$$



<u>Oss.</u> Non c'è alcuna relazione a priori tra la stabilità e l'attrattività di un punto di equilibrio $\bar{x}$.

Def. Se $\bar{x}$ è attrattivo e $\delta > 0$ si può prendere arbitrariamente grande allora diciamo che $\bar{x}$ è globalmente attrattivo.

Oss. In questo caso:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Def. Se $\bar{x}$ è sia stabile sia attrattivo diciamo che è asintoticamente stabile.
(localmente)

Def. Se $\bar{x}$ è sia stabile sia globalmente attrattivo diciamo che è globalmente asintoticamente stabile.

Stabilità dell'equilibrio di un sistema di ODE lineare autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \ t > 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \qquad f(x) = Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Poiché $\bar{x} = 0$ è sempre un punto di equilibrio, studieremo le proprietà di stabilità e attrattività dell'origine.

Oss. Supponiamo che esista un altro punto di equilibrio

$\tilde{x} \neq 0$. Allora:

$$\dot{x} = Ax \longrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}(x - \tilde{x})}_{\frac{d}{dt}\tilde{x}=0} = \underbrace{A(x - \tilde{x})}_{A\tilde{x}=0}$$

Ponendo: $y(t) := x(t) - \tilde{x}$ otteniamo

$$\dot{y} = Ay$$

e quindi la stabilità e attrattività di $\tilde{x}$ si possono studiare come stabilità e attrattività di $\tilde{y} = 0$.

<u>Teorema</u> Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negative allora $\bar{x} = 0$ è globalmente asintoticamente stabile.

<u>Dim.</u> Sappiamo in generale che

$$\|x(t)\| \leq C_i \|x_0\| e^{\alpha t}$$

dove $\alpha > \alpha_0 = \max_i \{ Re(\lambda_i) : \lambda_i \text{ autovalore di } A \}$.

Poiché $\alpha_0 < 0$ per ipotesi, possiamo prendere $\alpha < 0$ e ottenere:

$$\|x(t)\| \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \iff x(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$\Longrightarrow$ attrattività globale di $\bar{x}=0$.

Vediamo che $\bar{x}=0$ è anche stabile. Fissiamo $\varepsilon>0$ e consideriamo:

$$\|x(t)\| < \varepsilon \Longleftarrow C_1\|x_0\| \underbrace{e^{\overset{<0}{\alpha} t}}_{\leq 1} < \varepsilon \Longleftarrow C_1\|x_0\| < \varepsilon$$

perciò se fisso $\delta < \frac{\varepsilon}{C_1}$ e poi prendo $\|x_0\| < \delta < \frac{\varepsilon}{C_1}$ ottengo $\|x(t)\| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$. Quindi $\bar{x}=0$ è stabile.

$\boxtimes$