

allora:

$$\begin{aligned}\delta L^{(a)} &= \underline{F}_e \cdot \delta \underline{P} = k [(x_0 - x) \underline{i} + (y_0 - y) \underline{j} + (z_0 - z) \underline{k}] \cdot (\delta x \underline{i} + \delta y \underline{j} + \delta z \underline{k}) \\ &= k(x_0 - x) \delta x + k(y_0 - y) \delta y + k(z_0 - z) \delta z\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}Q_x &= k(x_0 - x) &\Rightarrow \partial_x U &= k(x_0 - x) \\ Q_y &= k(y_0 - y) &\Rightarrow \partial_y U &= k(y_0 - y) \\ Q_z &= k(z_0 - z) &\Rightarrow \partial_z U &= k(z_0 - z).\end{aligned}$$

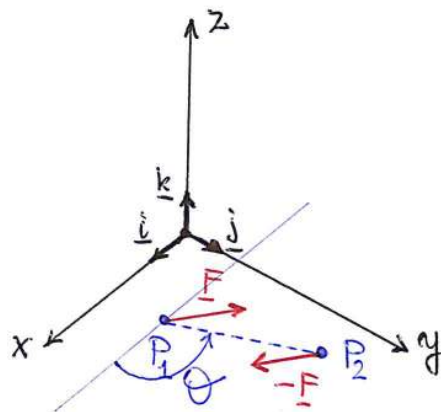
Allora i potenziali di \underline{F}_e hanno la forma

$$\begin{aligned}U(x, y, z) &= -\frac{1}{2} k [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2] + C \\ &= -\frac{1}{2} k |\underline{P}_0 - \underline{P}|^2 + C\end{aligned}$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante.

- Coppia su un sistema rigido piano

Consideriamo due punti materiali (P_1, m_1) , (P_2, m_2) vincolati rigidamente tra loro e vincolati a giacere nel piano Oxy . Su di essi agisca una coppia di forze $\{(\underline{F}, P_1), (-\underline{F}, P_2)\}$ di momento \underline{M} (indipendente dal polo rispetto a cui è calcolato).



Allora $\underline{M} = M \underline{k}$, $M \in \mathbb{R}$, e per il vincolo di rigidità il lavoro virtuale della coppia sarà:

$$\delta L^{(a)} = \underline{M} \cdot \delta \underline{\varepsilon} = M \underline{k} \cdot \delta \underline{\varepsilon}$$

essendo $\delta \underline{\varepsilon}$ una rotazione virtuale. Se Θ è l'angolo di rotazione (istantanea) del sistema rigido formato dai due punti avremo:

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{\Omega} dt = \underline{\Omega} dt \underline{k} = \delta \Theta \underline{k},$$

essendo $\underline{\Omega} = \Omega \underline{k}$ una velocità angolare virtuale compatibile con il vincolo di planarità del sistema. In definitiva:

$$\delta L^{(a)} = M \underline{k} \cdot \delta \Theta \underline{k} = M \delta \Theta,$$

per cui $Q_{\Theta}^{(a)} = M$ e così i potenziali della coppia sono della forma

$$U(\Theta) = \int M(\Theta) d\Theta.$$

In particolare, se il momento della coppia è costante allora:

$$U(\Theta) = M\Theta + C_1,$$

mentre se il momento della coppia è proporzionale a Θ del tipo

$$M(\Theta) = -\tau \Theta, \quad \tau > 0$$

allora

$$U(\Theta) = -\frac{1}{2} \tau \Theta^2 + C_1,$$

dove $C_1 \in \mathbb{R}$ è una costante. Un momento di quest'ultimo tipo tende a riportare i punti nella configurazione $\Theta = 0$. In questo senso, esso è la controparte rotazionale della forza elastica. Un dispositivo che lo

realizza si chiama una molla torsionale. La costante di proporzionalità $\tau > 0$ è detta la costante torsionale della molla.

Stabilità (in senso statico) delle configurazioni di equilibrio

Consideriamo una configurazione di equilibrio (ordinaria o di confine) $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ di un sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$. Siano

$$q^* := (q_1^*, \dots, q_n^*) \in \mathbb{R}^n$$

le coordinate lagrangiane che identificano la configurazione $\{P_i^*\}_{i=1}^N$, ossia:

$$P_i^* - O = \underline{r}_i(q_1^*, \dots, q_n^*), \quad i = 1, \dots, N.$$

Def. Si dice che la configurazione di equilibrio $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ è stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |P_i(t) - P_i^*| < \delta \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\Rightarrow |P_i(t) - P_i^*| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall t > 0.$$

Una definizione di stabilità di una configurazione di equilibrio, che fa uso del concetto di lavoro delle forze attive, è la seguente:

Def. Una configurazione di equilibrio individuata dalle coordinate lagrangiane $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ si dice stabile in senso statico se il lavoro effettivo compiuto dalle forze attive per portare il sistema in un'altra configurazione identificata da $q = (q_1, \dots, q_n) \neq q^*$ è strettamente negativo $\forall q \in B_\varepsilon(q^*) \setminus \{q^*\} \subseteq \mathbb{R}^n$. In simboli:

$$\int_{q^*}^q dL^{(a)} < 0 \quad \forall q \in B_\varepsilon(q^*) \setminus \{q^*\},$$

dove $B_\varepsilon(q^*) \setminus \{q^*\}$ è l'intorno puntato di centro q^* e raggio $\varepsilon > 0$ in \mathbb{R}^n

Questa definizione si poggia sul concetto intuitivo secondo cui un lavoro positivo è sinonimo di capacità delle relative forze di far compiere un determinato spostamento al sistema, mentre un lavoro negativo è sintomo di incapacità.

Il lavoro elementare effettivo $dL^{(a)}$ delle forze attive che compare nella precedente definizione può essere o non essere una forma differenziale esatta delle coordinate lagrangiane. Se non lo è, l'integrale

$$\int_{q^*}^q dL^{(a)}$$

deve essere calcolato esplicitamente lungo la traiettoria seguita effettivamente dal sistema per andare dalla configurazione $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ con $r_i = r_i(q^*)$ alla configurazione $\{P_i\}_{i=1}^N$ con $r_i = r_i(q)$. Ciò richiede tuttavia la conoscenza della funzione $t \mapsto q(t)$, cioè del moto del sistema.

Se invece $dL^{(a)}$ è una forma differenziale esatta delle coordinate lagrangiane allora esiste un potenziale $U = U(q)$ tale che

$$dL^{(a)} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k$$

e quindi la condizione della precedente definizione diventa:

$$\begin{aligned} 0 > \int_{q^*}^q dL^{(a)} &= \int_{q^*}^q \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k \\ &= \int_{t^*}^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_k} \dot{q}_k dt', \end{aligned}$$

essendo $t^* \geq 0$ l'istante di tempo in cui $q(t^*) = q^*$ e $t > t^*$ l'istante generico in cui $q(t) = q$. Ma:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{d}{dt} U(q(t)) = \frac{d}{dt} U(q_1(t), \dots, q_n(t)),$$

perciò la condizione precedente diventa

$$\begin{aligned} 0 &> \int_{t^*}^t \frac{d}{dt} U(q(t)) dt \\ &= U(q(t)) - U(q(t^*)) \end{aligned}$$

ossia

$$U(q) < U(q^*).$$

Poiché questo deve valere per ogni $q \in B_\varepsilon(q^*) \setminus \{q^*\}$, ne concludiamo che quando il lavoro virtuale delle forze attive è un differenziale esatto, cioè esiste un potenziale U , una configurazione di equilibrio $q^* \in \mathbb{R}^n$ è stabile se U è localmente massimo in q^* .

Prop. Una configurazione di equilibrio $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ di un sistema olonomo individuata dalle coordinate lagrangiane $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*) \in \mathbb{R}^n$ è stabile in senso statico se un generico potenziale U del sistema, ammesso che esista, ha in q^* un punto di massimo locale isolato.

Se il potenziale U è di classe almeno C^2 sullo spazio delle configurazioni del sistema e se q^* è un punto interno a questo spazio (cioè individua una configurazione di equilibrio ordinaria) allora la stabilità di q^* in senso statico può essere studiata considerando la matrice hessiana di U :

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \partial_{q_1}^2 U & \partial_{q_1 q_2}^2 U & \dots & \partial_{q_1 q_n}^2 U \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \partial_{q_k q_n}^2 U & \partial_{q_2 q_n}^2 U & \dots & \partial_{q_n}^2 U \end{pmatrix},$$

cioè la matrice (simmetrica) delle derivate seconde di U . Il punto q^* è un massimo locale di U se $\underline{H}(q^*)$ risulta definita negativa, ossia se tutti i suoi autovalori sono strettamente negativi. Infatti dallo sviluppo di Taylor di U centrato in q^* si deduce

$$U(q) = U(q^*) + \nabla_q U(q^*) \cdot (q - q^*) + \frac{1}{2} (\underline{H}(q^*)(q - q^*)) \cdot (q - q^*) + o(|q - q^*|)$$

e quindi, considerando che $\nabla_q U(q^*) = 0$ perché q^* è una configurazione di equilibrio (cfr. il Teorema di stazionarietà del potenziale),

$$U(q) - U(q^*) = \frac{1}{2} (\underline{H}(q^*)(q - q^*)) \cdot (q - q^*) + o(|q - q^*|).$$

Allora avremo $U(q) < U(q^*)$ in tutto un intorno puntato di q^* se

$$\frac{1}{2} (\underline{H}(q^*)\xi) \cdot \xi < 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

cioè se $\underline{H}(q^*)$ è definita negativa.

Si osservi infine che per studiare la matrice hessiana \underline{H} di U non è necessario conoscere esplicitamente il potenziale U . Ricordando infatti che

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^{(a)}, \quad k = 1, \dots, n$$

si ottiene subito

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} = \frac{\partial Q_k^{(a)}}{\partial q_h} \quad \begin{array}{l} k=1, \dots, n \\ h=1, \dots, n \end{array}$$

perciò $H(q^*)$ può essere scritta a partire dalle derivate prime delle forze attive generalizzate.

Energia cinetica

Per un punto materiale (P, m) , $m > 0$, che si muove alla velocità $\underline{v}_P \in \mathbb{R}^3$ definiamo l'energia cinetica come la quantità scalare

$$T := \frac{1}{2} m |\underline{v}_P|^2.$$

Per un sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$ l'energia cinetica è definita in modo additivo come

$$T := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{v}_i|^2.$$

Se la distribuzione di massa è continua con densità $\rho = \rho(\underline{x})$ su un dominio $B \subseteq \mathbb{R}^3$ allora l'energia cinetica del corpo B è

$$T := \frac{1}{2} \int_B \rho(\underline{x}) |\underline{v}|^2 d\underline{x}. \quad \text{dove in generale anche } \underline{v} = \underline{v}(\underline{x})$$

Come al solito, per semplicità nel seguito faremo riferimento a distribuzioni di massa discrete. Tuttavia le dimostrazioni possono essere ripetute usando le stesse idee anche nel caso di distribuzioni di massa continue.

Vediamo innanzitutto un risultato di decomposizione dell'energia cinetica per un sistema qualsiasi, non necessariamente rigido.

Teorema (di König)

Per un sistema materiale qualsiasi di massa $M > 0$ l'energia cinetica si scrive:

$$T = \frac{1}{2} M |\underline{v}_G|^2 + T^{(G)},$$

dove \underline{v}_G è la velocità del baricentro e $T^{(G)}$ è l'energia cinetica nel moto relativo al baricentro.

Oss. Con il concetto di moto relativo al baricentro intendiamo il moto rispetto ad un sistema di riferimento (osservatore) avente origine in G e traslante con il baricentro. Dunque gli assi del sistema di riferimento mobile sono fissi, ossia la velocità angolare $\underline{\omega}$ del sistema di riferimento mobile rispetto a quello fisso è zero.

Dim. Dal teorema di Galileo abbiamo, per ogni punto P_i ,

$$\underline{v}_{i,a} = \underline{v}_{i,r} + \underline{v}_{i,\tau},$$

dove $\underline{v}_{i,a}$ è la velocità di P_i rispetto all'osservatore fisso, $\underline{v}_{i,r}$ è la velocità di P_i rispetto all'osservatore mobile (baricentrico) e $\underline{v}_{i,\tau} = \underline{v}_G + \underline{\omega} \times (P_i - G)$ è la velocità di trascinamento. Poiché $\underline{\omega} = \underline{0}$ per definizione di osservatore baricentrico, risulta $\underline{v}_{i,\tau} = \underline{v}_G$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Allora:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{v}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{v}_{i,r} + \underline{v}_G) \cdot (\underline{v}_{i,r} + \underline{v}_G) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{v}_{i,r}|^2}_{T^{(G)}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_{i,r} \cdot \underline{v}_G + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_G \cdot \underline{v}_{i,r} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{v}_G|^2 \\ &= T^{(G)} + \underline{v}_G \cdot \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_{i,r} + \frac{1}{2} M |\underline{v}_G|^2. \end{aligned}$$

Ma $\sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_{i,r} = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{v}_i - \underline{v}_G) = \underline{Q} - M \underline{v}_G = \underline{0}$, quindi il teorema è dimostrato. \square

Energia cinetica di un sistema rigido

Così come già constatato per il momento delle quantità di moto \underline{K}_Q , anche per l'energia cinetica si possono dare espressioni particolari nel caso in cui il sistema materiale considerato sia rigido.

Prop. Per un sistema rigido l'energia cinetica si scrive:

$$T = \frac{1}{2} M |\underline{v}_Q|^2 + \underline{v}_Q \cdot \underline{\omega} \times M(G-Q) + \frac{1}{2} \underline{I}_Q \underline{\omega} \cdot \underline{\omega},$$

dove $Q \in \mathbb{R}^3$ è un punto qualsiasi dello spazio solidale e $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^3$ è la velocità angolare del sistema rigido.

Dim. Poiché il sistema è rigido e Q è un punto dello spazio solidale potremo scrivere:

$$\underline{v}_i = \underline{v}_Q + \underline{\omega} \times (\underline{P}_i - Q), \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

da cui:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{v}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{v}_Q + \underline{\omega} \times (\underline{P}_i - Q)) \cdot (\underline{v}_Q + \underline{\omega} \times (\underline{P}_i - Q)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{v}_Q|^2 + \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_Q \cdot (\underline{\omega} \times (\underline{P}_i - Q)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{(\underline{\omega} \times (\underline{P}_i - Q))}_{\underline{a}} \cdot \underbrace{(\underline{\omega} \times (\underline{P}_i - Q))}_{\underline{c}_i} \\ &= \frac{1}{2} M |\underline{v}_Q|^2 + \underline{v}_Q \cdot \underline{\omega} \times \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\underline{P}_i - Q)}_{\underline{0}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{a} \times \underline{b}_i) \cdot \underline{c}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\underline{P}_i - \underline{0}) + \sum_{i=1}^N m_i (\underline{0} - Q) \\ &= M(G - \underline{0}) + M(\underline{0} - Q) = M(G - Q) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} M |\underline{v}_Q|^2 + \underline{v}_Q \cdot \underline{\omega} \times M(G-Q) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{b}_i \times \underline{c}_i) \cdot \underline{a},$$

dove nell'ultimo termine abbiamo utilizzato la proprietà di permutazione del prodotto misto in base alla quale $(\underline{a} \times \underline{b}_i) \cdot \underline{c}_i = -(\underline{c}_i \times \underline{b}_i) \cdot \underline{a} = (\underline{b}_i \times \underline{c}_i) \cdot \underline{a}$.

Se analizziamo in particolare quest'ultimo termine troviamo:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{b}_i \times \underline{c}_i) \cdot \underline{a} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N m_i (\underline{P}_i - Q) \times (\underline{\omega} \times (\underline{P}_i - Q)) \right] \cdot \underline{a}.$$

Ricordando ora la dimostrazione dell'espressione di \underline{K}_Q per un sistema rigido vediamo che, come abbiamo già calcolato,

$$\sum_{i=1}^N m_i (\underline{P}_i - Q) \times (\underline{\omega} \times (\underline{P}_i - Q)) = \underline{I}_Q \underline{\omega},$$

per cui in definitiva

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N m_i (\underline{P}_i - Q) \times (\underline{\omega} \times (\underline{P}_i - Q)) \right] \cdot \underline{a} = \frac{1}{2} \underline{I}_Q \underline{\omega} \cdot \underline{a},$$

dove \underline{I}_Q è la matrice di inerzia del sistema rispetto ad una base ortonormale di \mathbb{R}^3 con assi aventi origine in Q . Come al solito, in questo termine $\underline{\omega}$ deve essere pensata espresso in componenti rispetto alla medesima base di \mathbb{R}^3 scelta per \underline{I}_Q . X

L'espressione dell'energia cinetica per un sistema rigido è utile per individuare i punti Q dello spazio solido che più conviene prendere come riferimento per il calcolo.

Prendendo ad esempio $Q = G$ troviamo:

$$T = \frac{1}{2} M |\underline{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \underline{I}_G \underline{\omega} \cdot \underline{\omega},$$

che, confrontata con il Teorema di König, permette di dedurre

$$T^{(G)} = \frac{1}{2} \underline{I}_G \underline{\omega} \cdot \underline{\omega}.$$

Inoltre, poiché $\underline{K}_G = \underline{I}_G \underline{\omega}$, abbiamo ulteriormente $T^{(G)} = \frac{1}{2} \underline{K}_G \cdot \underline{\omega}$.

Se invece prendiamo come Q un punto istantaneamente fermo, cioè un punto appartenente all'asse di istantanea rotazione, allora $\underline{v}_Q = \underline{0}$ e quindi:

$$T = \frac{1}{2} \underline{I}_Q \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{K}_Q \cdot \underline{\omega}$$

poiché vale nuovamente $\underline{K}_Q = \underline{I}_Q \underline{\omega}$.

Infine, se il sistema è piano e Q coincide con il centro di istantanea rotazione C allora

$$T = \frac{1}{2} \underline{I}_C \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2} I_{z,C} \omega^2$$

con $\underline{\omega} = \omega \underline{k}$ e $I_{z,C}$ momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse z (ortogonale al piano del sistema) passante per C .

Energia cinetica di un sistema olonomo

Consideriamo ora in generale un sistema vincolato in modo olonomo, per il quale cioè la posizione di un qualsiasi punto P_i sia esprimibile mediante un numero finito di coordinate lagrangiane indipendenti q_1, \dots, q_n ed eventualmente del tempo (in caso di vincoli reonomi). Scriviamo:

$$\underline{P}_i - 0 = \underline{z}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

e quindi

$$\underline{\dot{v}}_i = \dot{\underline{z}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{z}_i}{\partial t}.$$

Allora l'energia cinetica potrà scriversi come:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\underline{\dot{v}}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{\dot{v}}_i \cdot \underline{\dot{v}}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{h=1}^n \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_h} \right) \dot{q}_k \dot{q}_h \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_h} \right) \dot{q}_h \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Se definiamo:

$$a_{kh} := \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_h}$$

$$b_k := \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$$

$$c := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right|^2$$

abbiamo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_{kh} \dot{q}_k \dot{q}_h + \sum_{k=1}^n b_k \dot{q}_k + c,$$

ossia, introducendo la matrice

$$\underline{A} := [a_{kh}]_{k,h=1}^n$$

e il vettore

$$\underline{b} := (b_1, \dots, b_n)$$

nonché il vettore delle coordinate lagrangiane $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$,

$$T = \frac{1}{2} (\underline{A} \dot{\underline{q}}) \cdot \dot{\underline{q}} + \underline{b} \cdot \dot{\underline{q}} + c.$$

La matrice \underline{A} è detta la matrice di massa. Osserviamo che se i vincoli sono scleronomi allora $\partial_t \underline{r}_i = \underline{0}$ per ogni $i = 1, \dots, N$ e quindi $\underline{b} = \underline{0}$ e $c = 0$.

In tal caso:

$$T = \frac{1}{2} (\underline{A} \dot{\underline{q}}) \cdot \dot{\underline{q}}$$

è una forma quadratica nelle velocità lagrangiane.

Osserviamo che \underline{A} è una matrice simmetrica, infatti

$$a_{kh} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = a_{hk}$$

per ogni $k, h = 1, \dots, n$. Come tale, essa ha autovalori reali ed è diagonalizzabile. Inoltre:

Prop. La matrice di massa \underline{A} è definita positiva.

Dim. Consideriamo per semplicità il caso di vincoli scleronomi. Per definizione, $T \geq 0$ con $T = 0$ sse $\dot{\underline{r}}_i = \underline{0}$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Allora:

$$\frac{1}{2} (\underline{A} \dot{\underline{q}}) \cdot \dot{\underline{q}} \geq 0$$

per ogni $\dot{\underline{q}} \in \mathbb{R}^n$ e l'uguaglianza vale solo se $\dot{\underline{q}} = \underline{0}$. Quindi \underline{A} è definita positiva. \square

Notiamo che questa proprietà garantisce che \underline{A} sia invertibile.

Potenza di forze e conservazione dell'energia meccanica

Def. Sia $\underline{F} \in \mathbb{R}^3$ una forza agente su un punto materiale (P, m) che si muove con velocità \underline{v} . Si chiama potenza sviluppata da \underline{F} la quantità scalare

$$\Pi := \underline{F} \cdot \underline{v}.$$

Il concetto di potenza è strettamente legato a quello di energia cinetica di un sistema. Infatti:

Teorema (dell'energia cinetica)

Sia Π la potenza espressa da tutte le forze (attive esterne, attive interne, vincolari) di un sistema. Allora:

$$\dot{T} = \Pi.$$

Dim. Sia (P_i, m_i) il generico punto materiale del sistema e sia \underline{R}_i il risultante di tutte le forze agenti su di esso. Per la seconda equazione della meccanica vale $m_i \underline{a}_i = \underline{R}_i$, da cui, moltiplicando scalarmente entrambi i membri per \underline{v}_i ,