ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 5

1. Ricordiamo che $E = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, dove
$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \qquad \text{per ogni } t \in (-\pi,\pi) \text{ e } n \in \mathbb{Z}, \tag{\#}$$
è una base ortonormale di $L^2(-\pi,\pi)$.
   (a) Calcolare la norma di $\mathbf{1}_{[0,\pi)}$ in $L^2(-\pi,\pi)$.
   (b) Calcolare i coefficienti della funzione $\mathbf{1}_{[0,\pi)} \in L^2(-\pi,\pi)$ rispetto alla base ortonormale E.
   (c) Dimostrare che
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$
   [Suggerimento: esprimere la norma calcolata in (a) in termini dei coefficienti calcolati in (b).]
   (d) Dimostrare che
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
   [Suggerimento: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$.]
   (e) Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$ data da $f(t) = t^2$ per $t \in (-\pi,\pi)$. Calcolare la norma di f in $L^2(-\pi,\pi)$ e i coefficienti di f rispetto ad E.
   (f) Dimostrare che
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$
2. Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo limitato.
   (a) Trovare un omeomorfismo $p : (a,b) \to (-\pi,\pi)$ dato da un polinomio di primo grado.
   (b) Trovare una costante $\lambda > 0$ tale che la mappa $\Phi : L^2(-\pi,\pi) \to L^2(a,b)$ definita da
$$\Phi f = \lambda f \circ p \qquad \forall f \in L^2(-\pi,\pi)$$
   è un *isomorfismo isometrico* tra spazi di Hilbert, cioè Φ è lineare, invertibile e
$$\langle \Phi f, \Phi g\rangle_{L^2(a,b)} = \langle f, g\rangle_{L^2(-\pi,\pi)} \qquad \forall f, g \in L^2(-\pi,\pi)$$
   (c) Costruire, usando Φ, una base ortonormale di $L^2(a,b)$ a partire dalla base ortonormale $E = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $L^2(-\pi,\pi)$ definita in (#).
3. Dato $\underline{w} \in \ell^\infty$, definiamo la mappa $D_{\underline{w}} : \ell^2 \to \ell^2$ ponendo $D_{\underline{w}}\underline{x} = (w_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ per ogni $\underline{x} \in \ell^2$ (in altre parole, $D_{\underline{w}}$ è l'operatore di moltiplicazione per $\underline{w}$).
   (a) Dimostrare che $D_{\underline{w}}$ è un operatore lineare.
   (b) Dimostrare che $D_{\underline{w}}$ è limitato.
   (c) Determinare la norma $\|D_{\underline{w}}\|_{\mathrm{op}}$ di $D_{\underline{w}}$.
   (d) Dimostrare che $D_{\underline{w}}$ è iniettivo se e solo se $w_k \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
   (e) Dimostrare che $D_{\underline{w}} : \ell^2 \to \ell^2$ è invertibile (con inversa limitata) se e solo se $\inf_{k\in\mathbb{N}} |w_k| > 0$.
4. Sia $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Sia $S_N : \ell^2 \to \ell^2$ definito da
$$(S_N\underline{x})_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k < N, \\ k^{-1/2} x_{k-N} & \text{se } k \geq N, \end{cases}$$
   per ogni $\underline{x} \in \ell^2$.
   (a) Dimostrare che $S_N \in \mathcal{B}(\ell^2)$.
   (b) Determinare la norma di S_N.
   (c) Determinare se S_N è invertibile.
5. Data $h \in C[0,1]$, sia $T_h : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definito da $T_h f = hf$ per ogni $f \in L^2(0,1)$ (in altre parole, T_h è l'operatore di moltiplicazione per h).
   (a) Dimostrare che $T_h \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$.
   (b) Determinare la norma $\|T_h\|_{\mathrm{op}}$ di T_h.
   (c) Esibire $h \in C[0,1]$ non costante tale che T_h è invertibile (con inversa limitata).
   (d) Esibire $h \in C[0,1]$ non costante tale che T_h non è iniettivo.
   Supponiamo ora che $h(t) = t$ per ogni $t \in [0,1]$.

(e) Dimostrare che T_h è iniettivo, ma non è suriettivo.
(f) Dimostrare che l'immagine di T_h è densa in $L^2(0,1)$, ma non chiusa.
[Suggerimento: dimostrare che $C_c(0,1) \subseteq \operatorname{Im} T$.]

6. Ricordiamo che un sottoinsieme di uno spazio metrico è detto *limitato* se è contenuto in una palla. Siano X e Y spazi normati, $\bar{x} \in X$ e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:
   (i) $T : X \to Y$ è un operatore limitato;
   (ii) $T : X \to Y$ è continuo in $\bar{x}$;
   (iii) esiste una palla aperta A in X tale che $T(A)$ è un insieme limitato in Y;
   (iv) esiste una palla chiusa C in X tale che $T(C)$ è un insieme limitato in Y;
   (v) per ogni sottoinsieme limitato D di X, l'insieme $T(D)$ è limitato in Y.
7. Siano $[a,b],[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ intervalli chiusi e limitati. Sia $K \in C([a,b] \times [c,d])$ e sia $T_K : C[c,d] \to C[a,b]$ l'operatore integrale con nucleo integrale K.
   (a) Dimostrare che, per ogni $x \in [a,b]$ e $\epsilon > 0$, la funzione $f_{x,\epsilon} : [c,d] \to \mathbb{C}$ definita da
   $$f_{x,\epsilon}(y) = \frac{\overline{K(x,y)}}{|K(x,y)| + \epsilon} \qquad \forall y \in [c,d]$$
   è continua e $\|f_{x,\epsilon}\|_\infty \leq 1$.
   (b) Dimostrare che, per ogni $x \in [c,d]$ e $\epsilon > 0$,
   $$\|T_K f_{x,\epsilon}\|_\infty \geq \int_c^d \frac{|K(x,y)|^2}{|K(x,y)| + \epsilon}\, dy$$
   (c) Dimostrare che
   $$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_c^d \frac{|K(x,y)|^2}{|K(x,y)| + \epsilon}\, dy = \int_c^d |K(x,y)|\, dy$$
   (d) Dimostrare che
   $$\|T_K\|_{\text{op}} = \sup_{x \in [a,b]} \int_c^d |K(x,y)|\, dy.$$
8. Siano $(a,b),(c,d) \subseteq \mathbb{R}$ intervalli limitati, dotati della misura di Lebesgue. Sia $K : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile tale che
   $$M_K := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (a,b)} \int_c^d |K(x,y)|\, dy < \infty, \qquad N_K := \operatorname*{ess\,sup}_{y \in (c,d)} \int_a^b |K(x,y)|\, dx < \infty \tag{$\dagger$}$$
   (a) Dimostrare che, per ogni $f \in L^2(c,d)$,
   $$\int_a^b \left| \int_c^d |K(x,y) f(y)|\, dy \right|^2 dx < \infty.$$
   [Suggerimento: scrivere $|K(x,y)f(y)| = |K(x,y)|^{1/2}(|K(x,y)|^{1/2}|f(y)|)$ e applicare la disuguaglianza di Hölder con $p = 2$ all'integrale in y.]
   (b) Dimostrare che, per ogni $f \in L^2(c,d)$ la funzione
   $$y \mapsto K(x,y) f(y)$$
   è in $L^1(c,d)$ per quasi ogni $x \in (a,b)$.

   In base ai punti precedenti, per ogni $f \in L^2(c,d)$ l'espressione
   $$T_K f(x) = \int_c^d K(x,y)\, f(y)\, dy \tag{$\ddagger$}$$
   è ben definita per quasi ogni $x \in (a,b)$ e definisce una funzione misurabile $T_K f$.
   (c) Dimostrare che l'operatore integrale $T_K : L^2(c,d) \to L^2(a,b)$ con nucleo integrale K definito da ($\ddagger$) è lineare e limitato e che
   $$\|T_K\|_{\text{op}}^2 \leq M_K N_K,$$
   dove M_K e N_K sono le quantità in ($\dagger$).

   Supponiamo ora che $(a,b) = (c,d) = (0,1)$.
   (d) Dimostrare che la funzione K data da
   $$K(x,y) = \begin{cases} |x-y|^{-1/2} & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
   per ogni $x,y \in (0,1)$ soddisfa la condizione ($\dagger$), ma $K \notin L^2((0,1) \times (0,1))$.
   (e) Dimostrare che la funzione K data da $K(x,y) = (xy)^{-1/3}$ per ogni $x,y \in (0,1)$ non soddisfa la condizione ($\dagger$), ma $K \in L^2((0,1) \times (0,1))$.

   [Questo esercizio dà una condizione alternativa sul nucleo integrale K, rispetto alla condizione $K \in L^2((a,b) \times (c,d))$ discussa a lezione, che garantisce la limitatezza su L^2 del corrispondente operatore integrale T_K. La condizione in ($\dagger$) è un caso particolare del cosiddetto *test di Schur*.]