

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE CON CONDIZIONI INIZIALI

Letizia SCUDERI

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

letizia.scuderi@polito.it

A.A. 2022/2023

Problemi differenziali a valori iniziali

Molti fenomeni fisici sono descrivibili con modelli matematici che richiedono la soluzione di una o più equazioni differenziali ordinarie del tipo

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) \\ \vdots \\ y_m'(x) = f_m(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) \end{cases}$$

con condizioni in un unico punto $x = a$

$$\begin{cases} y_1(a) = y_{1,0} \\ y_2(a) = y_{2,0} \\ \vdots \\ y_m(a) = y_{m,0} \end{cases}$$

Tale problema matematico è detto **problema a valori iniziali o di Cauchy** e consiste nella determinazione di funzioni con derivate prime continue $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ soluzione del sistema e passanti per i punti definiti dalle condizioni iniziali.

Se introduciamo la notazione vettoriale:

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \\ f_2(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \\ \vdots \\ f_m(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{m,0} \end{pmatrix}$$

il precedente sistema può essere riformulato nella forma più compatta

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

e trattato almeno formalmente come se fosse costituito da un'unica equazione.

Tale rappresentazione è detta **forma canonica** del problema di Cauchy.

Osserviamo che il sistema è costituito da equazioni differenziali tutte del **primo ordine**.

Osservazione

Un'equazione differenziale di **ordine m**

$$y^{(m)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x))$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(a) = y_{1,0} \\ y'(a) = y_{2,0} \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) = y_{m,0} \end{cases}$$

può essere ricondotta facilmente a un problema a valori iniziali del primo ordine.

Consideriamo per esempio il seguente problema di ordine 2:

$$\begin{cases} y''(x) = g(x, y(x), y'(x)) \\ y(a) = y_{1,0} \\ y'(a) = y_{2,0} \end{cases}$$

Ponendo

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \end{aligned}$$

e derivando ambedue i membri di queste due uguaglianze, otteniamo il seguente sistema del primo ordine in forma canonica e nelle funzioni incognite $z_1(x)$ e $z_2(x)$:

$$\begin{cases} z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = g(x, z_1(x), z_2(x)) \\ z_1(a) = y_{1,0} \\ z_2(a) = y_{2,0} \end{cases}$$

Esempi

- Consideriamo la seguente equazione differenziale di ordine 2:

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \implies \quad \begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = 3z_2(x) - 2z_1(x) \\ z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = 1 \end{cases} \quad \implies \quad \begin{aligned} \mathbf{z}(x) &= (z_1(x), z_2(x))^T \\ \mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x)) &= (z_2(x), 3z_2(x) - 2z_1(x))^T \\ \mathbf{z}_0 &= (1, 1)^T \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x)) \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \end{cases}$$

... continua esempi

- Similmente un sistema di due equazioni differenziali di ordine 2 può essere ricondotto a un sistema di 4 equazioni differenziali di ordine 1:

$$\begin{cases} y''(x) = g_1(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) \\ z''(x) = g_2(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) \\ y(a) = y_{1,0} \\ y'(a) = y_{2,0} \\ z(a) = z_{1,0} \\ z'(a) = z_{2,0} \end{cases}$$

Ponendo $u_1(x) = y(x)$, $u_2(x) = y'(x)$, $u_3(x) = z(x)$, $u_4(x) = z'(x)$ e derivando ambedue i membri di queste quattro uguaglianze, otteniamo il seguente sistema del primo ordine nelle incognite $u_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$:

... continua esempi

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(x) = u_2(x) \\ u_2'(x) = g_1(x, u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)) \\ u_3'(x) = u_4(x) \\ u_4'(x) = g_2(x, u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)) \\ u_1(a) = y_{1,0} \\ u_2(a) = y_{2,0} \\ u_3(a) = z_{1,0} \\ u_4(a) = z_{2,0} \end{array} \right.$$

che in forma vettoriale diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)) \\ \mathbf{u}(a) = \mathbf{u}_0 \end{array} \right.$$

con ovvio significato per i vettori coinvolti \mathbf{u} , \mathbf{f} ed \mathbf{u}_0 .

È importante saper ricondurre un qualsiasi problema differenziale a valori iniziali di ordine m a un problema differenziale a valori iniziali di ordine 1 e nella forma canonica precedentemente introdotta, in quanto i metodi numerici per la risoluzione di problemi differenziali sono definiti, e quindi applicabili, solo a problemi di ordine 1 e posti in forma canonica.

Prima di procedere allo studio dei metodi numerici, è importante discutere dell'esistenza e dell'unicità della soluzione del problema, nonché del suo comportamento.

Esistono condizioni sulla funzione \mathbf{f} che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy.

Teorema

Sia \mathbf{f} definita e continua nella striscia infinita

$$S = \{(x, \mathbf{y}) : -\infty < \alpha \leq x \leq \beta < \infty, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\}$$

Se \mathbf{f} è lipschitziana nella variabile \mathbf{y} uniformemente rispetto a x , cioè se esiste una costante $L > 0$, detta costante di Lipschitz, tale che (rispetto a una qualunque norma in \mathbb{R}^m)

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \quad \forall x \in [\alpha, \beta], \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^m,$$

allora per ogni $a \in [\alpha, \beta]$ e per ogni $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ esiste una e una sola funzione $\mathbf{y}(x)$ tale che

- ① $\mathbf{y}(x) \in C^1([\alpha, \beta])$
- ② $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$
- ③ $\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0$

Osservazioni

- Osserviamo che se le derivate parziali $\partial f_i / \partial y_j$, $i, j = 1, \dots, m$, esistono in S e sono ivi continue e limitate allora \mathbf{f} è certamente lipschitziana. Per esempio, per $m = 1$, se $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq L$ in S , per il teorema di Lagrange si ha

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \xi)| |y_1 - y_2| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in S$$

e quindi f è lipschitziana con costante di Lipschitz L .

- Se per qualche $i, j = 1, \dots, m$, la derivata parziale $\partial f_i / \partial y_j$ esiste ma non è limitata in S allora la funzione \mathbf{f} non può essere lipschitziana in tutto S .
- La continuità della funzione \mathbf{f} assicura l'esistenza della soluzione del problema; la lipschitzianità assicura l'unicità della soluzione. Se \mathbf{f} è continua ma non è lipschitziana allora il problema potrebbe ammettere infinite soluzioni.

Esempi

- Il problema

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

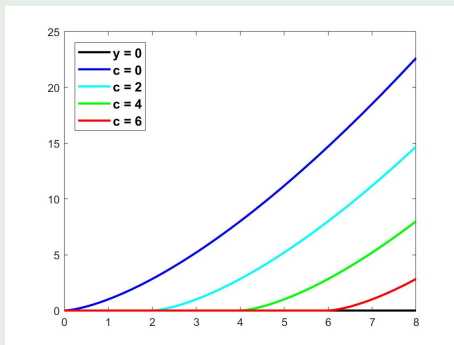
ammette una e una sola soluzione, $y(x) = y_0 e^{\lambda(x-a)}$ in qualunque intervallo $[\alpha, \beta]$, con $a \in [\alpha, \beta]$.

Osserviamo che è immediato dimostrare che $f(x, y) = \lambda y(x)$ è lipschitziana, mediante la definizione stessa oppure osservando che $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda$ è continua e limitata.

- Il problema

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni: $y \equiv 0$, $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$ e tutte le funzioni continue costituite da una porzione della retta $y = 0$ per $x < c$ e da una della funzione $y(x) = (x - c)^{\frac{3}{2}}$ per $x \geq c$. Nel grafico sottostante alcune di queste, rappresentate per $x > 0$.



... continua esempi

Osserviamo che $\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}(x)$ non è lipschitziana rispetto a y (basta prendere nella definizione, per esempio, $y_2 = 0$ oppure osservare che $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}y^{-\frac{2}{3}}$ non è definita per $y = 0$ e non è limitata né in $(0, \beta)$ e né in $(\alpha, 0)$).

Per individuare un'unica soluzione occorre allora fissare una condizione aggiuntiva; per esempio, se si impone $y'(x) > 0$ per $x > 0$, allora l'unica soluzione del problema è $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

... continua esempi

- Il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione $y(x) = 1/(1-x)$ di classe C^1 solo per $x < 1$. Osserviamo che $f(x, y) = y^2$ non è una funzione lipschitziana rispetto a y , per $y \in (-\infty, \infty)$. D'altra parte $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ non è limitata in S , in particolare non è limitata per $|y| \rightarrow \infty$.

In questo caso, l'esistenza e l'unicità della soluzione è garantita solo in un intorno del punto iniziale $x = 0$, e non in un qualsiasi intervallo $[\alpha, \beta]$, con $0 \in [\alpha, \beta]$, fissato a priori. Nel caso assegnato la soluzione esiste ed è unica solo in $(-\infty, 1)$.

Nelle ipotesi del teorema precedente, è possibile dimostrare che un problema a valori iniziali è anche **ben posto**, in quanto esso ammette un'unica soluzione che dipende con continuità dai dati iniziali \mathbf{y}_0 . Vale infatti il seguente teorema.

Teorema

Sia \mathbf{f} definita e continua nella striscia infinita

$$S = \{(x, \mathbf{y}) : -\infty < \alpha \leq x \leq \beta < \infty, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\}$$

Se \mathbf{f} è lipschitziana nella variabile \mathbf{y} uniformemente rispetto a x , cioè se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \quad \forall x \in [\alpha, \beta], \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^m,$$

allora per l'unica soluzione $y(x) \equiv y(x; \mathbf{y}_0)$ del problema $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$, $\mathbf{y}(a; \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$, vale

$$\|\mathbf{y}(x; \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(x; \bar{\mathbf{y}}_0)\| \leq e^{L|x-a|} \|\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0\|, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

... continua osservazione

Quest'ultima disuguaglianza esprime una dipendenza continua della soluzione dai dati. In particolare, se $\mathbf{y}(x; \mathbf{y}_0)$ è la soluzione del problema:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ \mathbf{y}(a; \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

e $\mathbf{y}(x; \mathbf{y}_0 + \varepsilon)$ è la soluzione del problema con condizione iniziale perturbata di ε :

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ \mathbf{y}(a; \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 + \varepsilon \end{cases}$$

allora, fissata una tolleranza $\delta > 0$, è sempre possibile avere

$$\|\mathbf{y}(x; \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(x; \mathbf{y}_0 + \varepsilon)\| \leq \delta, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

purché la perturbazione ε sia sufficientemente piccola.

... continua osservazione

Tale dipendenza è sicuramente importante nelle applicazioni, dal momento che i dati \mathbf{y}_0 possono essere affetti da errori. Tuttavia, non è sufficiente ad assicurare che gli errori trasmessi dai dati sulla soluzione siano piccoli.

Infatti, quando la costante di Lipschitz L della funzione $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ è grande, la perturbazione dovuta agli errori sul valore iniziale \mathbf{y}_0 aumenta esponenzialmente per x che cresce.

Condizionamento dei problemi differenziali a valori iniziali

Poiché generalmente non conosceremo esattamente l'ordinata \mathbf{y}_0 , ma avremo solo una sua approssimazione $\mathbf{y}_0 + \epsilon$, e la perturbazione ϵ per piccola che sia non tenderà a zero, è importante sapere di quanto la soluzione $\mathbf{y}(x, \mathbf{y}_0 + \epsilon)$ del problema perturbato si discosta da quella del problema $\mathbf{y}(x, \mathbf{y}_0)$.

Pertanto, prima di procedere con lo studio dei metodi numerici, esaminiamo il condizionamento di un problema a valori iniziali, ovvero la reazione di quest'ultimo quando si perturba il dato iniziale \mathbf{y}_0 .

Caso 1. Singola equazione differenziale lineare.

Sia $y(x)$ la soluzione di un problema differenziale lineare e $z(x)$ la soluzione del corrispondente problema perturbato associato a una perturbazione della condizione iniziale:

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) + g(x) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} z'(x) = \lambda z(x) + g(x) \\ z(a) = y_0 + \varepsilon \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni e posto $\delta(x) := z(x) - y(x)$ si ha:

$$\begin{cases} \delta'(x) = \lambda \delta(x) \\ \delta(a) = \varepsilon \end{cases}$$

Risolvendo quest'ultimo problema abbiamo:

$$\delta(x) = \varepsilon e^{\lambda(x-a)}$$

Ne deduciamo che:

- se $\lambda \leq 0$, la perturbazione $\delta(x)$ sarà limitata da una costante piccola per ε . In questo caso, il problema è **ben condizionato** e la soluzione del problema $y(x)$ si dice **asintoticamente stabile**;
- se invece $\lambda > 0$, la perturbazione $|\delta(x)| \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow \infty$ e la soluzione del problema $y(x)$ si dice **asintoticamente instabile**.

Esempio

Il problema

$$\begin{cases} y'(x) = 100y(x) - 101e^{-x}, & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

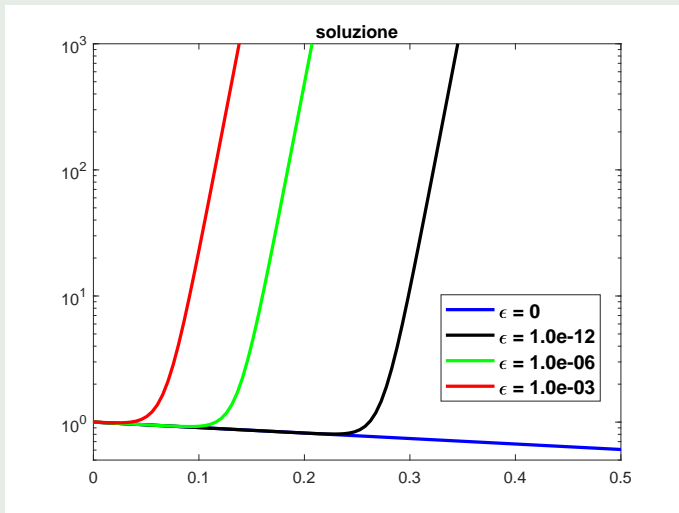
ha soluzione $y(x) = e^{-x}$. Il problema perturbato

$$\begin{cases} z'(x) = 100z(x) - 101e^{-x}, & x > 0 \\ z(0) = 1 + \varepsilon \end{cases}$$

ha soluzione $z(x) = e^{-x} + \varepsilon e^{100x}$, che si discosta rapidamente dalla soluzione del problema non perturbato all'aumentare di ε , come mostra la figura sottostante.

... continua esempio

Pertanto il problema assegnato è mal condizionato.



... continua esempio

Il problema

$$\begin{cases} y'(x) = -100y(x) + 99e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

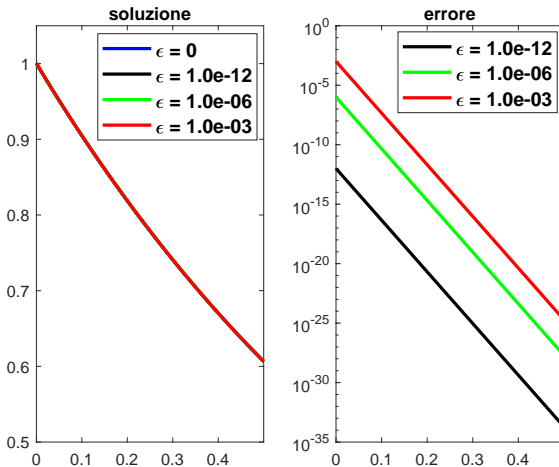
ha soluzione $y(x) = e^{-x}$. Il problema perturbato

$$\begin{cases} z'(x) = -100z(x) + 99e^{-x} \\ z(0) = 1 + \varepsilon \end{cases}$$

ha soluzione $z(x) = e^{-x} + \varepsilon e^{-100x}$, in cui la perturbazione $\delta(x) = \varepsilon e^{-100x}$ decresce molto rapidamente all'aumentare di x .

... continua esempio

Pertanto il problema assegnato è ben condizionato.



Caso 2. Singola equazione differenziale non lineare.

Per generalizzare quanto detto al caso di un problema costituito da una singola equazione differenziale non necessariamente lineare, consideriamo i problemi

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) \\ z(a) = y_0 + \varepsilon \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni e, per $f \in C^2(S)$, sviluppando in serie di Taylor la funzione $f(x, z)$ in un intorno del punto (x, y) , abbiamo che la perturbazione $\delta(x) := z(x) - y(x)$ è soluzione del problema:

$$\begin{cases} \delta'(x) = f(x, z) - f(x, y) = f_y(x, y)\delta(x) + O((\delta(x))^2) \\ \delta(a) = \varepsilon \end{cases}$$

Assumendo $z(x)$ sufficientemente vicino a $y(x)$, e ciò è ammissibile su piccoli intervalli $[\alpha, \beta]$ e per piccoli valori di ε , trascurando $O((\delta(x))^2)$ e risolvendo il problema approssimato si ha

$$\delta(x) = \varepsilon e^{\int_a^x f_y(t, y(t)) dt}$$

Pertanto, se $\int_a^x f_y(t, y(t)) dt \leq 0$ oppure è limitato da una costante piccola, la perturbazione $\delta(x)$ sarà limitata da una costante piccola per ε e il problema è **ben condizionato**.

In particolare, se $f_y(t, y(t)) \leq 0$ il problema è ben condizionato.

Se invece $\int_a^x f_y(t, y(t)) dt > 0$ oppure $f_y(t, y(t)) > 0$ il problema è mal condizionato.

Osservazione

Nel caso in cui $f_y(t, y(t)) \leq 0$ ma è grande in modulo, allora $\delta(x)$ decade rapidamente a zero al crescere di x . Tali equazioni sono considerate ben condizionate ma sono “difficili” da risolvere numericamente e per questo vengono dette equazioni **stiff**.

Caso 3. Sistema di equazioni differenziali lineari.

Consideriamo ora il caso di un sistema di m equazioni differenziali del primo ordine e di tipo lineare. Denotiamo con $\mathbf{y}(x)$ la soluzione del problema con dato iniziale \mathbf{y}_0 , con $\mathbf{z}(x)$ la soluzione del problema con dato iniziale $\mathbf{y}_0 + \varepsilon$:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x) \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{z}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{z}(x) + \mathbf{g}(x) \\ \mathbf{z}(a) = \mathbf{y}_0 + \varepsilon \end{cases}$$

e definiamo $\delta(x) := \mathbf{z}(x) - \mathbf{y}(x)$ la perturbazione associata alla soluzione. Essa soddisfa il sistema:

$$\begin{cases} \delta'(x) = \mathbf{A}\delta(x) \\ \delta(a) = \varepsilon \end{cases}$$

Se \mathbf{A} è diagonalizzabile e λ_i sono i suoi autovalori con autovettori \mathbf{v}_i , $i = 1, \dots, m$, si ha per opportune costanti c_j :

$$\delta(x) = c_1 e^{\lambda_1(x-a)} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2(x-a)} \mathbf{v}_2 + \dots + c_m e^{\lambda_m(x-a)} \mathbf{v}_m$$

da cui si deduce che:

- se $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ per ogni indice $i = 1, \dots, m$, allora $\|\delta(x)\| \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$, il problema è **ben condizionato** e la soluzione si dice **asintoticamente stabile**;
- se $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ per ogni indice $i = 1, \dots, m$ e $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ per almeno un indice i , allora $\|\delta(x)\|$ è limitato e la soluzione si dice **stabile**;
- se $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ per almeno un indice i , allora $\|\delta(x)\| \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow \infty$ e la soluzione si dice **asintoticamente instabile**.

Caso 4. Sistema di equazioni differenziali non lineare.

Nel caso di problemi non lineari, scriviamo

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{z}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x)) \\ \mathbf{z}(a) = \mathbf{y}_0 + \varepsilon \end{cases}$$

Se definiamo $\delta(x) := \mathbf{z}(x) - \mathbf{y}(x)$ la perturbazione associata alla soluzione $\mathbf{y}(x)$ e, supponendo $f \in C^2(S)$, utilizziamo lo sviluppo in serie di Taylor per $\mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x))$ in un intorno del punto (x, \mathbf{y}) , abbiamo

$$\begin{cases} \delta'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x)) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) = \mathbf{J}_f(x, \mathbf{y}(x))\delta(x) + O(\|\delta(x)\|^2) \\ \delta(a) = \varepsilon \end{cases}$$

Supponendo trascurabile il termine $O(\|\delta(x)\|^2)$ e assumendo che lo Jacobiano \mathbf{J}_f soddisfi la relazione $\mathbf{J}_f(x, \mathbf{y}(x)) \approx \mathbf{J}_f(a, \mathbf{y}_0)$, segue che la soluzione è **in prima approssimazione asintoticamente stabile** se gli autovalori della matrice $\mathbf{J}_f(x, \mathbf{y}_0)$ hanno tutti parte reale negativa.

Osserviamo che, se queste ipotesi non sono verificate, il comportamento di $\delta(x)$ può non essere validamente rappresentato dagli autovalori di $\mathbf{J}_f(a, \mathbf{y}_0)$.

Metodi numerici: classificazione

Per definire i metodi numerici per la risoluzione di un problema di Cauchy, partiamo dal problema differenziale posto in forma canonica:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) & x > a \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

e consideriamo una suddivisione dell'intervallo di integrazione

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

con $x_{n+1} = x_n + h$ e $h = h(n)$ (passo variabile) oppure $h \neq h(n)$ (passo costante).

Il generico metodo fornisce i valori \mathbf{y}_n che sono approssimazioni della soluzione $\mathbf{y}(x)$ nei punti x_n della partizione.

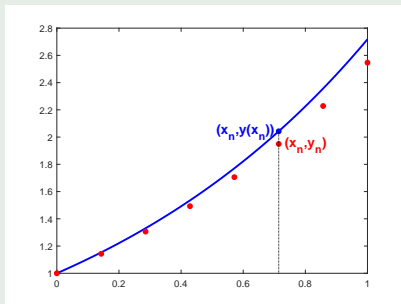
Noti i valori \mathbf{y}_n , per determinare approssimazioni della soluzione $\mathbf{y}(x)$ in punti diversi dagli x_n della partizione, si possono utilizzare le tecniche di interpolazione.

Esempio

Supponiamo di voler risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione analitica è $y(x) = e^x$ ed è rappresentata nel grafico sottostante in linea continua blu. Le approssimazioni y_n della soluzione $y(x)$ nei punti equispaziati x_n , ottenute mediante un certo metodo numerico, sono rappresentate con i pallini rossi.



I metodi numerici vengono classificati nel seguente modo:

- a un passo (one-step) $\begin{cases} \text{esplicito} \\ \text{implicito} \end{cases}$
- a più passi (multi-step) $\begin{cases} \text{esplicito} \\ \text{implicito} \end{cases}$

Definizione

Si definiscono **a un passo** quei metodi per i quali l'approssimazione \mathbf{y}_{n+1} dipende unicamente dall'approssimazione \mathbf{y}_n .

L'espressione

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\phi(x_n, \mathbf{y}_n; h, \mathbf{f}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

definisce un **metodo a un passo esplicito**; l'espressione

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\phi(x_n, x_{n+1}, \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n+1}; h, \mathbf{f}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

definisce un **metodo a un passo implicito**.

Definizione

Si definiscono a **k passi** quei metodi per i quali l'approssimazione \mathbf{y}_{n+1} dipende dalle approssimazioni $\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \dots, \mathbf{y}_{n-k+1}$, calcolate nei k passi precedenti. L'espressione

$$\mathbf{y}_{n+1} = \psi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}, \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \dots, \mathbf{y}_{n-k+1}; h, \mathbf{f})$$

$$n = k-1, k, k+1, \dots$$

definisce un **metodo a k passi esplicito**; l'espressione

$$\mathbf{y}_{n+1} = \psi(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}, \mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \dots, \mathbf{y}_{n-k+1}; h, \mathbf{f})$$

$$n = k-1, k, k+1, \dots$$

definisce un **metodo a k passi implicito**.

Esempi

- $y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$ definisce un metodo a 2 passi esplicito;
- $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ definisce un metodo a 1 passo implicito.

Costruiamo alcuni metodi a un passo. Per semplicità consideriamo il generico problema di Cauchy in forma canonica composto da una singola equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) & x > x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e una partizione uniforme (a passo costante) dell'intervallo di integrazione

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

con $x_{n+1} = x_n + h = x_0 + nh$, $h \neq h(n)$.

Valutiamo l'equazione differenziale nel generico punto x_n della partizione

$$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$$

e, tenendo conto che

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h},$$

scriviamo

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx f(x_n, y(x_n))$$

Sostituiamo in quest'ultima \approx con $=$ e denotiamo con y_n l'approssimazione di $y(x_n)$ definita dall'equazione risultante

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n) \quad \implies \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Quest'ultima espressione definisce il **metodo di Eulero esplicito**.

Di seguito la function MATLAB che implementa il metodo di Eulero esplicito per la risoluzione di un problema di Cauchy costituito da una singola equazione differenziale della forma $y'(x) = f(x, y(x))$ con $x \in [x_0, x_N]$ e con condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. L'intervallo di integrazione $[x_0, x_N]$ viene suddiviso in N sottointervalli di uguale ampiezza $h = (x_N - x_0)/N$.

Function MATLAB

```
[x,y] = eulero(f,x0,y0,xN,N)
h = (xN-x0)/N;
x = (x0:h:xN)';
y = zeros(N+1,1);
y(1) = y0;
for n = 1:N
    fn = f(x(n),y(n));
    y(n+1) = y(n)+h*fn;
end
```

Esempio

Applichiamo il metodo di Eulero esplicito al problema

$$\begin{cases} y'(x) = y & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^x$ per determinare un'approssimazione della soluzione in 0.2. A tale scopo consideriamo una partizione dell'intervallo $[0, 0.2]$ con passo costante $h = 0.1$.

... continua esempio

Osserviamo che nel caso assegnato il metodo è definito da

$$y_{n+1} = y_n + hy_n = (1 + h)y_n$$

Pertanto, possiamo scrivere

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.1
2	0.2	1.21

Poiché $e^{0.2} = 1.2214\dots$, si ha

$$|y_2 - y(x_2)| \approx 0.11e - 01.$$

Costruiamo un altro metodo. Valutiamo l'equazione differenziale $y'(x) = f(x, y(x))$ nel punto x_{n+1} di una partizione uniforme dell'intervallo di integrazione

$$y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

Tenendo conto che

$$y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h},$$

analogamente a quanto fatto in precedenza, ricaviamo

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Quest'ultima espressione definisce il **metodo di Eulero implicito**.

Osserviamo che il valore incognito $z := y_{n+1}$ si ottiene risolvendo l'equazione, in generale non lineare,

$$g(z) := z - hf(x_{n+1}, z) - y_n = 0$$

Di seguito la function MATLAB che implementa il metodo di Eulero implicito per la risoluzione di un problema di Cauchy costituito da una singola equazione differenziale lineare della forma

$$y'(x) = g_1(x)y(x) + g_2(x):$$

$$y_{n+1} = y_n + h(g_1(x_{n+1})y_{n+1} + g_2(x_{n+1}))$$

$$\Rightarrow (1 - hg_1(x_{n+1}))y_{n+1} = y_n + hg_2(x_{n+1}) \Rightarrow y_{n+1} = \frac{y_n + hg_2(x_{n+1})}{1 - hg_1(x_{n+1})}$$

Function MATLAB

```
[x,y] = eulero_implicito_lineare(g1,g2,x0,y0,xN,N)
h = (xN-x0)/N;
x = (x0:h:xN)';
y = zeros(N+1,1);
y(1) = y0;
for n = 1:N
    g1np1 = g1(x(n+1));
    g2np1 = g2(x(n+1));
    y(n+1) = (y(n)+h*g2np1)/(1-h*g1np1);
end
```

Esempio

Applichiamo il metodo di Eulero implicito al problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^x$, per determinare un'approssimazione della soluzione in 0.2. A tale scopo consideriamo una partizione dell'intervallo $[0, 0.2]$ con passo costante $h = 0.1$.

... continua esempio

Osserviamo che nel caso (lineare) assegnato il metodo è definito da un'equazione di tipo lineare che può essere risolta analiticamente:

$$y_{n+1} = y_n + hy_{n+1} \implies (1 - h)y_{n+1} = y_n \implies y_{n+1} = \frac{1}{1 - h}y_n$$

Pertanto, possiamo scrivere

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.111...
2	0.2	1.2345...

Poiché $e^{0.2} = 1.2214\dots$, si ha

$$|y_2 - y(x_2)| \approx 0.13e - 01.$$

Costruiamo ora un altro metodo a un passo. Dimostriamo preliminarmente che se $g \in C^2$ in un intorno del punto x_n , allora

$$g(x_{n+1/2}) = \frac{g(x_{n+1}) + g(x_n)}{2} + O(h^2), \quad h \rightarrow 0$$

con $x_{n+1/2} := x_n + h/2$, punto intermedio tra i punti x_n e $x_{n+1} = x_n + h$. Pertanto, approssimando $g(x_{n+1/2})$ con la media aritmetica dei valori $g(x_{n+1})$ e $g(x_n)$, si commette un errore quadratico per $h \rightarrow 0$. Questa relazione si ottiene a partire dai seguenti sviluppi di Taylor

$$g(x_n) = g(x_{n+1/2}) - g'(x_{n+1/2})\frac{h}{2} + O(h^2)$$

$$g(x_{n+1}) = g(x_{n+1/2}) + g'(x_{n+1/2})\frac{h}{2} + O(h^2)$$

e dalla loro somma membro a membro

$$g(x_n) + g(x_{n+1}) = 2g(x_{n+1/2}) + O(h^2)$$

Ciò premesso, valutiamo l'equazione differenziale nel punto $x_{n+1/2} := x_n + h/2$,

$$y'(x_{n+1/2}) = f(x_{n+1/2}, y(x_{n+1/2}))$$

e sostituiamo $f(x_{n+1/2}, y(x_{n+1/2}))$ con la media aritmetica dei valori $f(x_n, y(x_n))$ e $f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$. Per $y \in C^3$ si ha:

$$y'(x_{n+1/2}) = \frac{f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f(x_n, y(x_n))}{2} + O(h^2)$$

Tenendo conto che

$$y'(x_{n+1/2}) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + O(h^2),$$

trascurando in entrambe le formule $O(h^2)$ possiamo scrivere

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx \frac{f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f(x_n, y(x_n))}{2}$$

Sostituiamo in quest'ultima \approx con $=$ e denotiamo con y_n l'approssimazione di $y(x_n)$ definita da

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

Quest'ultima espressione definisce il **metodo dei trapezi**.

Osservazione

Una costruzione alternativa si ottiene a partire dall'identità fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = y(x_{n+1}) - y(x_n) \implies y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx$$

Approssimando l'integrale al secondo membro con la formula del trapezio:

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx &\approx \frac{x_{n+1} - x_n}{2} [y'(x_n) + y'(x_{n+1})] \\ &= \frac{h}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))] \end{aligned}$$

otteniamo il metodo dei trapezi

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]$$

sostituendo in quest'ultima \approx con $=$ e $y(x_n)$ con y_n .

Di seguito la function MATLAB che implementa il metodo dei trapezi per la risoluzione di un problema di Cauchy costituito da una singola equazione differenziale lineare della forma $y'(x) = g_1(x)y(x) + g_2(x)$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[g_1(x_n)y_n + g_2(x_n) + g_1(x_{n+1})y_{n+1} + g_2(x_{n+1})] \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{h}{2}g_1(x_{n+1})\right) y_{n+1} &= \left(1 + \frac{h}{2}g_1(x_n)\right) y_n + \frac{h}{2}(g_2(x_n) + g_2(x_{n+1})) \\ \Rightarrow y_{n+1} &= \frac{\left(1 + \frac{h}{2}g_1(x_n)\right) y_n + \frac{h}{2}(g_2(x_n) + g_2(x_{n+1}))}{1 - \frac{h}{2}g_1(x_{n+1})} \end{aligned}$$

Function MATLAB

```
[x,y] = trapezi_lineare(g1,g2,x0,y0,xN,N)
h = (xN-x0)/N;
x = (x0:h:xN)';
y = zeros(N+1,1);
y(1) = y0;
for n = 1:N
    g1n = g1(x(n));
    g2n = g2(x(n));
    g1np1 = g1(x(n+1));
    g2np1 = g2(x(n+1));
    y(n+1) = ((1+h/2*g1n)*y(n)+h/2*(g2n+g2np1))/(1-h/2*g1np1);
end
```

Esempio

Applichiamo il metodo dei trapezi al problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^x$, per determinare un'approssimazione della soluzione in 0.2. A tale scopo consideriamo una partizione dell'intervallo $[0, 0.2]$ con passo costante $h = 0.1$.

... continua esempio

Osserviamo che nel caso assegnato il metodo è definito da

$$\begin{aligned}y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1}) &\implies \left(1 - \frac{h}{2}\right)y_{n+1} = \left(1 + \frac{h}{2}\right)y_n \\&\implies y_{n+1} = \frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}}y_n\end{aligned}$$

Pertanto, possiamo scrivere

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.1052...
2	0.2	1.2216...

Poiché $e^{0.2} = 1.2214\dots$, si ha

$$|y_2 - y(x_2)| \approx 0.2e - 03.$$

Metodi Runge-Kutta espliciti

Un'altra importante classe di metodi a un passo è quella dei metodi Runge-Kutta.

Il generico **metodo Runge-Kutta esplicito a r stadi** ha la seguente forma:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^r a_i K_i \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_i = f \left(x_n + b_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} K_j \right), \quad i = 2, \dots, r \end{cases}$$

Osserviamo che per i metodi Runge-Kutta $\phi(x_n, y_n; h, f) = \sum_{i=1}^r a_i K_i$ è una media pesata di valori di $y'(x)$ in un intorno destro di x_n .

I coefficienti a_i , b_i e c_{ij} vengono scelti in modo tale che il metodo risulti “convergente”, con un “ordine di convergenza” che sia il più elevato possibile.

Un metodo Runge-Kutta a 2 stadi molto utilizzato è il **metodo di Heun**:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \end{cases}$$

che si ottiene ponendo $r = 2$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 1$, $c_{21} = 1$ nella forma generale precedentemente definita.

Di seguito la function MATLAB che implementa il metodo di Heun per la risoluzione di un problema di Cauchy costituito da una singola equazione differenziale della forma $y'(x) = f(x, y(x))$.

Function MATLAB

```
[x,y] = heun(f,x0,y0,xN,N)
h = (xN-x0)/N;
x = (x0:h:xN)';
y = zeros(N+1,1);
y(1) = y0;
for n = 1:N
    K1 = f(x(n),y(n));
    K2 = f(x(n)+h,y(n)+h*K1);
    y(n+1) = y(n)+h/2*(K1+K2);
end
```

Fra i metodi **Runge-Kutta a 4 stadi**, molto utilizzato è il seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{array} \right.$$

che si ottiene ponendo $r = 4$, $a_1 = a_4 = \frac{1}{6}$, $a_2 = a_3 = \frac{2}{6}$, $b_2 = b_3 = \frac{1}{2}$, $b_4=1$, $c_{21} = \frac{1}{2}$, $c_{31} = 0$, $c_{32} = \frac{1}{2}$, $c_{41} = c_{42} = 0$, $c_{43} = 1$ nella forma generale precedentemente definita.

Di seguito la function MATLAB che implementa il metodo Runge-Kutta a 4 stadi sopra definito per la risoluzione di un problema di Cauchy costituito da una singola equazione differenziale della forma $y'(x) = f(x, y(x))$.

Function MATLAB

```
[x,y] = RK4(f,x0,y0,xN,N)
h = (xN-x0)/N;
x = (x0:h:xN)';
y = zeros(N+1,1);
y(1) = y0;
for n = 1:N
    K1 = f(x(n),y(n));
    K2 = f(x(n)+h/2,y(n)+h/2*K1);
    K3 = f(x(n)+h/2,y(n)+h/2*K2);
    K4 = f(x(n)+h,y(n)+h*K3);
    y(n+1) = y(n)+h/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
```

Esempio

Applichiamo il metodo di Heun e quello di Runge-Kutta a 4 stadi al problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^x$ per determinare un'approssimazione della soluzione in 0.2. A tale scopo consideriamo una partizione dell'intervallo $[0, 0.2]$ con passo costante $h = 0.1$.

... continua esempio

Osserviamo che, nel caso assegnato, il metodo di Heun è definito da

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = y_n \\ K_2 = y_n + hK_1 \end{cases}$$

e quello di Runge-Kutta a 4 stadi da

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = y_n \\ K_2 = y_n + \frac{h}{2}K_1 \\ K_3 = y_n + \frac{h}{2}K_2 \\ K_4 = y_n + hK_3 \end{cases}$$

... continua esempio

Pertanto, possiamo scrivere

n	x_n	y_n^{RK2} (Heun)	y_n^{RK4} (R-K a 4 stadi)
0	0	1	1
1	0.1	1.1050	1.105170833...
2	0.2	1.221025...	1.221402570...

Poiché $e^{0.2} = 1.221402758 \dots$, per il metodo di Heun si ha

$$|y_2^{RK2} - y(x_2)| \approx 0.38e - 03$$

e per il metodo Runge-Kutta a 4 stadi

$$|y_2^{RK4} - y(x_2)| \approx 0.19e - 06$$

Convergenza dei metodi a un passo

Dato il problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & a < x \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

un metodo numerico può essere preso in considerazione per la sua risoluzione se garantisce che, fissato un qualunque punto $\bar{x} \in (a, b]$ e detto y_N il valore fornito dal metodo come approssimazione di \bar{x} mediante N passi di ampiezza $h = (\bar{x} - a)/N$, l'**errore globale**

$$|y_N - y(\bar{x})|$$

possa essere reso piccolo a piacere per $h \rightarrow 0$, cioè suddividendo $[a, \bar{x}]$ in un numero sempre più grande di parti e di ampiezza sempre più piccola. In questo caso si dice che il metodo è **convergente**.

Per illustrare il concetto di metodo convergente, consideriamo il seguente esempio numerico.

Esempio

Applichiamo il metodo di Eulero esplicito al problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^x$, per determinare un'approssimazione della soluzione in $\bar{x} = 0.2$.

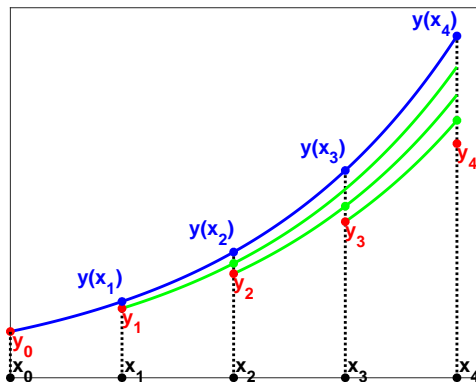
... continua esempio

Se scegliamo, come passo h della partizione dell'intervallo $[0, 0.2]$, valori sempre più piccoli abbiamo errori sempre più piccoli. Pertanto, possiamo affermare che il metodo di Eulero converge in quanto l'errore si riduce per $h \rightarrow 0$. Ricordiamo che $e^{0.2} = 1.221402758 \dots$

h	n	x_n	y_n	$ y_n - y(x_n) $
0.1	2	0.2	1.21	$0.11e - 01$
0.1/2	4	0.2	1.215506...	$0.59e - 02$
0.1/4	8	0.2	1.218402...	$0.30e - 02$
0.1/10	20	0.2	1.220190...	$0.12e - 02$
0.1/100	200	0.2	1.221280...	$0.12e - 03$
0.1/1000	2000	0.2	1.221390...	$0.12e - 04$

Rappresentiamo graficamente le prime 4 iterate del metodo di Eulero applicato al generico problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & a < x \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



Osserviamo che, eseguendo il primo passo, si ottiene l'approssimazione $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ di $y(x_1)$, commettendo un errore pari a $|y(x_1) - y_1|$.

Eseguendo il secondo passo, a partire da (x_1, y_1) , si ottiene il valore $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, che approssima $y(x_2)$ con il valore che si otterrebbe applicando il metodo di Eulero al problema

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) & x_1 < x \leq b \\ u(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Dunque y_2 rispetto a $y(x_2)$ è affetto da un errore che tiene conto dell'**errore locale** $|y_2 - u(x_2)|$ introdotto dal metodo di Eulero per avanzare da x_1 a x_2 , ma anche della propagazione dell'errore precedente $|y(x_1) - y_1|$.

Allo stesso modo l'errore $|y(x_3) - y_3|$ è determinato dall'errore locale $|y_3 - u(x_3)|$, con u soluzione del problema $u'(x) = f(x, u(x))$ e soddisfacente la condizione iniziale $u(x_2) = y_2$, e dalla propagazione dell'errore precedente $|y(x_2) - y_2|$.

Pertanto, come si evince anche dalla figura, a ogni passo l'applicazione del metodo introduce un errore locale e questo successivamente si propaga.

Al generico passo x_{n+1} l'errore globale è il risultato dell'accumulo successivo degli errori locali precedenti più l'errore locale che si commette nel passaggio da x_n a x_{n+1} .

Per la convergenza è dunque necessario che l'errore locale sia infinitesimo con il passo h e che l'accumulo degli errori non esploda quando il passo h diventa piccolo.

Se la prima condizione è soddisfatta il metodo si dice **consistente**; se la seconda condizione è soddisfatta il metodo si dice **zero-stabile**.

Se entrambe le condizioni sono soddisfatte allora la convergenza è garantita; viceversa, se il metodo converge, esso è necessariamente consistente e zero-stabile. Precisamente, vale la seguente equivalenza:

$$\text{convergenza} \quad \Leftrightarrow \quad \text{consistenza} + \text{zero-stabilità}$$

Diamo ora la definizione di errore locale per un generico metodo one-step. A tale scopo, dato il generico punto $(x^*, y^*) \in S$, consideriamo **il problema di riferimento associato al problema assegnato**

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x^*) = y^* \end{cases}$$

Osserviamo che la soluzione (di riferimento) $u(x)$ soddisfa la stessa equazione differenziale del problema assegnato e passa per il punto (x^*, y^*) .

L'applicazione del metodo a un passo fornisce il valore approssimato

$$y_h = y^* + h\phi(x^*, y^*; h) = u(x^*) + h\phi(x^*, u(x^*); h)$$

Definizione

L'errore introdotto dal metodo nel passaggio da x^* a $x^* + h$, ovvero la quantità

$$\tau(x^*, y^*; h) = u(x^* + h) - y_h = u(x^* + h) - [u(x^*) + h\phi(x^*, u(x^*); h)]$$

è definita **errore locale di troncamento**.

La quantità

$$t(x^*, y^*; h) = \frac{\tau(x^*, y^*; h)}{h}$$

è definita **errore locale unitario di troncamento**.

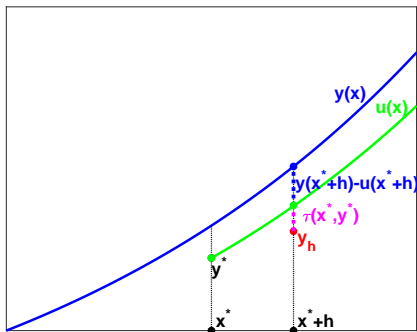
Essa rappresenta una misura dell'accuratezza della formula perché fornisce una misura di come la soluzione esatta dell'equazione differenziale verifica l'equazione discreta.

Avendo definito l'errore locale di troncamento, possiamo riscrivere l'errore globale nella forma

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = [y(x_{n+1}) - u(x_{n+1})] + [u(x_{n+1}) - y_{n+1}]$$

Il termine $y(x_{n+1}) - u(x_{n+1})$ rappresenta la propagazione da x_n a x_{n+1} dell'errore accumulato al passo x_n ed è legato al condizionamento del problema; il termine $u(x_{n+1}) - y_{n+1}$ rappresenta l'errore locale di troncamento relativo al passo $x_n \rightarrow x_{n+1}$.

Per $x_n = x^*$ e $x_{n+1} = x^* + h$ graficamente si ha:



Per definire il concetto di consistenza, denotiamo con $F_N(S)$ la classe delle funzioni $f(x, y)$ le cui derivate parziali di ordine $\leq N$ esistono in S e sono continue e limitate, cioè

$$F_N(S) = \left\{ f(x, y) : \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}, i + j = k, 0 \leq k \leq N, \text{continue e limitate in } S \right\}$$

Osserviamo che se $f \in F_N(S)$ allora $y \in C^{N+1}([\alpha, \beta])$

Definizione

Il metodo ϕ si dice **consistente** se per ogni $(x^*, y^*) \in S$ e qualunque $f \in F_1(S)$ risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} t(x^*, y^*; h) = 0$$

Inoltre, si dice che il metodo ϕ ha **ordine di consistenza p** se per ogni $(x^*, y^*) \in S$ e qualunque $f \in F_p(S)$ risulta

$$t(x^*, y^*; h) = O(h^p), \quad h \rightarrow 0$$

e p è l'intero più grande per cui vale quest'ultima relazione.

Teorema

Il metodo di Eulero esplicito è consistente e ha ordine di consistenza $p = 1$ qualunque sia $f \in F_1(S)$.

Dimostrazione

Lo strumento per determinare l'ordine di un metodo è lo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del punto (x^*, y^*) . Per l'errore locale di troncamento del metodo di Eulero esplicito, abbiamo

$$\begin{aligned}\tau(x^*, y^*; h) &= u(x^* + h) - [u(x^*) + hf(x^*, u(x^*))] \\ &= u(x^*) + hu'(x^*) + \frac{1}{2}h^2u''(\eta) - [u(x^*) + hf(x^*, u(x^*))] \\ &= \cancel{u(x^*)} + \cancel{hu'(x^*)} + \frac{1}{2}h^2u''(\eta) - [\cancel{u(x^*)} + \cancel{hf(x^*, u(x^*))}] \end{aligned}$$

essendo $f(x^*, u(x^*)) = u'(x^*)$ e con $x^* < \eta < x^* + h$. Pertanto,

$$t(x^*, y^*; h) = \frac{\tau(x^*, y^*; h)}{h} = \frac{1}{2}hu''(\eta)$$

... continua dimostrazione

Tenendo conto che $f \in F_1(S)$ e che

$$u'(x) = f(x, u(x)) \Rightarrow u''(x) = f_x(x, u(x)) + f_u(x, u(x))f(x, u(x))$$

si ha

$$|u''(x)| \leq M \quad \text{in } S$$

e, pertanto,

$$t(x^*, y^*; h) = O(h), \quad h \rightarrow 0$$

Teorema

Il metodo di Eulero implicito è consistente e ha ordine di consistenza $p = 1$ qualunque sia $f \in F_1(S)$.

Dimostrazione

Per l'errore locale di troncamento del metodo di Eulero implicito, abbiamo

$$\begin{aligned}\tau(x^*, y^*; h) &= u(x^* + h) - [u(x^*) + hf(x^* + h, u(x^* + h))] \\ &= u(x^*) + hu'(x^*) + \frac{1}{2}h^2 u''(\eta) - [u(x^*) + hf(x^* + h, u(x^*) + hu'(\xi))] \\ &= \cancel{u(x^*)} + \cancel{hu'(x^*)} + \frac{1}{2}h^2 u''(\eta) \\ &\quad - [\cancel{u(x^*)} + \cancel{hf(x^*, u(x^*))}] + h^2 f_x(\xi_x, \xi_y) + h^2 f_y(\xi_x, \xi_y)f(\xi, u(\xi))\end{aligned}$$

Pertanto, per $f \in F_1(S)$

$$t(x^*, y^*; h) = \frac{\tau(x^*, y^*; h)}{h} = O(h), \quad h \rightarrow 0$$

Per i metodi Runge-Kutta espliciti a r stadi, dipendenti dai parametri $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ e $\{c_{ij}\}$, la condizione

$$\sum_{i=1}^r a_i = 1$$

garantisce la consistenza del metodo. Di solito viene anche imposta la condizione

$$\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} = b_i, \quad i = 2, 3, \dots, r$$

I rimanenti parametri vengono poi utilizzati per massimizzare l'ordine del metodo. Questo problema ha tuttavia infinite soluzioni!

Esempio

Per i metodi Runge Kutta a 2 stadi e per $f \in F_2(S)$, si ha

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(a_1 K_1 + a_2 K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + b_2 h, y_n + h c_{21} K_1) \end{cases}$$

I coefficienti a_1, a_2, b_2 vengono determinati in modo che lo sviluppo in serie di Taylor di $\tau(x^*, y^*; h)$ nell'intorno di $(x^*, y^*; 0)$ cominci con la potenza di h massima. Si ha per $c_{21} = b_2$:

$$\begin{aligned} \tau(x^*, y^*; h) &= u(x^* + h) - \{u(x^*) + h[a_1 f(x^*, y^*) + a_2 f(x^* + b_2 h, y^* + b_2 h K_1)]\} \\ &= \cancel{u(x^*)} + hu'(x^*) + \frac{1}{2}h^2 u''(x^*) + O(h^3) \\ &\quad - \{\cancel{u(x^*)} + ha_1 u'(x^*) + ha_2 [f(x^*, y^*) \\ &\quad + hb_2 f_x(x^*, y^*) + hb_2 f(x^*, y^*) f_y(x^*, y^*) + O(h^2)]\} \end{aligned}$$

Pertanto,

$$t(x^*, y^*; h) = \frac{\tau(x^*, y^*; h)}{h} = (1 - a_1 - a_2)u'(x^*) + h\left(\frac{1}{2} - a_2 b_2\right)u''(x^*) + O(h^2)$$

... continua esempio

Affinché il metodo abbia ordine di consistenza almeno $p = 2$, deve essere

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Questo sistema ammette infinite soluzioni. Una di queste è

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = 1,$$

da cui si ottiene il metodo di Heun con ordine di consistenza $p = 2$.

Per la scelta

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2},$$

si ottiene il **metodo di Eulero modificato** con ordine $p = 2$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \end{cases}$$

Osservazione

Fissati il numero di stadi $r \geq 1$ del metodo Runge Kutta, i parametri b_i , c_{ij} e a_i devono essere determinati in modo che lo sviluppo di $t(x^*, y^*; h)$ in serie di potenze di h inizi con il termine di ordine il più elevato possibile. Denotiamo con $p = p^*(r)$ tale ordine massimo; è stato dimostrato che:

$$p^*(r) = r \quad \text{se } r = 1, 2, 3, 4$$

$$p^*(r) = r - 1 \quad \text{se } r = 5, 6, 7$$

$$p^*(r) = r - 2 \quad \text{se } r = 8, 9$$

$$p^*(r) \leq r - 3 \quad \text{se } r \geq 10$$

La costruzione di metodi Runge Kutta di ordine superiore a 3, soprattutto nel caso di sistemi di equazioni differenziali, è assai laboriosa e richiede la risoluzione numerica di sistemi non lineari con un numero di incognite superiore al numero di equazioni.

Per la convergenza non basta che il problema sia ben condizionato e il metodo risulti consistente, occorre anche che il metodo sia **stabile** ovvero sia tale per cui in un intervallo limitato e fissato, piccole perturbazioni sui dati producano perturbazioni sulla soluzione limitate quando $h \rightarrow 0$.

Tale richiesta è suggerita dalla necessità di tenere sotto controllo gli inevitabili errori che la precisione finita di calcolo introduce.

Definizione

Un metodo a un passo

$$y_0, \quad y_{n+1} = y_n + h_n \phi(x_n, y_n; h_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

si dice **zero-stabile** se, denotata con \tilde{y}_{n+1} l'approssimazione calcolata in precisione finita di calcolo al passo $x_n \rightarrow x_{n+1}$ e a partire dal dato perturbato $\tilde{y}_0 = y_0 + \epsilon$, risulta per $h \rightarrow 0$

$$|y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}| \leq C\epsilon$$

ove C è una costante che può dipendere dall'ampiezza dell'intervallo di integrazione.

Per un metodo a un passo consistente si può dimostrare che la zero-stabilità discende dall'ipotesi che f sia continua e lipschitziana rispetto al suo secondo argomento.

Quindi un metodo a un passo consistente, applicato a un problema con $f(x, y)$ continua e lipschitziana rispetto a y , è certamente zero-stabile.

Convergenza di un metodo

Diamo ora la definizione di convergenza per un metodo numerico a un passo.

Definizione

Un metodo a un passo si dice **convergente** se, qualunque sia il problema di Cauchy $y'(x) = f(x, y(x))$ con $y(a) = y_0$ e $f \in F_1(S)$, per ogni $x \in [a, b]$ e $x = a + Nh$, risulta

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (h \rightarrow 0)}} |y_N - y(x)| = 0$$

Il teorema che segue, di cui ometteremo la dimostrazione, riguarda la convergenza di un metodo a un passo esplicito della forma

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h)$$

per il generico problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Teorema

Sia $\phi(x^*, y^*; h)$ continua in $D = S \times [0, h_0]$, $h_0 > 0$ e uniformemente lipschitziana nella variabile y^* in D .

Allora il metodo converge se e solo se è consistente e zero-stabile.

Inoltre, se $f \in F_p(S)$ e l'ordine di consistenza del metodo è p , allora per ogni $x \in [a, b]$ e $x = a + Nh$, risulta

$$|y_N - y(x)| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0$$

Osservazioni

- Tutte le definizioni e i teoremi enunciati valgono sostanzialmente anche per un sistema di equazioni differenziali di ordine 1 e i corrispondenti metodi. In tal caso, nella definizione di errore, al posto del valore assoluto, occorre considerare una norma di vettore. Inoltre, i precedenti risultati valgono anche per i metodi a un passo di tipo implicito e per passi $h = h(n)$ non costanti.
- Si dimostra che per i metodi precedentemente introdotti si hanno i seguenti ordini di convergenza:
 - $p = 1$ per il metodo di Eulero esplicito e per $f \in F_1(S)$;
 - $p = 1$ per il metodo di Eulero implicito e per $f \in F_1(S)$;
 - $p = 2$ per il metodo dei trapezi e per $f \in F_2(S)$;
 - $p = 2$ per il metodo di Heun e per $f \in F_2(S)$;
 - $p = 4$ per il metodo Runge-Kutta a 4 stadi e per $f \in F_4(S)$.

Esempio

Applichiamo i metodi di Eulero esplicito, di Heun e Runge-Kutta a 4 stadi al problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^x$ per determinare un'approssimazione della soluzione in 1. A tale scopo consideriamo una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ con passo costante $h = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots, 9$ e riportiamo in tabella l'errore $|y_N - y(1)|$.

... continua esempio

Si ha

	$ y_N - y(1) $		
h	Eulero esplicito	Heun	R-K a 4 stadi
2^{-1}	$4.68e - 01$	$7.77e - 02$	$9.36e - 04$
2^{-2}	$2.77e - 01$	$2.34e - 02$	$7.19e - 05$
2^{-3}	$1.52e - 01$	$6.44e - 03$	$4.98e - 06$
2^{-4}	$8.04e - 02$	$1.69e - 03$	$3.28e - 07$
2^{-5}	$4.13e - 02$	$4.32e - 04$	$2.10e - 08$
2^{-6}	$2.09e - 02$	$1.09e - 04$	$1.33e - 09$
2^{-7}	$1.05e - 02$	$2.75e - 05$	$8.38e - 11$
2^{-8}	$5.29e - 03$	$6.89e - 06$	$5.26e - 12$
2^{-9}	$2.65e - 03$	$1.73e - 06$	$3.29e - 13$

... continua esempio

Osserviamo che

- per il metodo di Eulero esplicito si ha $|y_N - y(x_N)| = O(h)$ e, pertanto, per h sufficientemente piccolo, dimezzando il passo l'errore viene diviso all'incirca per 2;
- per il metodo di Heun $|y_N - y(x_N)| = O(h^2)$ e quindi, per h sufficientemente piccolo, dimezzando il passo l'errore viene diviso all'incirca per 4;
- per il metodo Runge-Kutta a 4 stadi si ha $|y_N - y(x_N)| = O(h^4)$ e, per h sufficientemente piccolo, dimezzando il passo l'errore viene diviso all'incirca per 16.

Metodi a più passi

Il generico metodo multistep lineare a k passi ha la forma:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y_{n+1} + \alpha_1 y_n + \dots + \alpha_k y_{n+1-k} \\ &= h [\beta_0 f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \beta_1 f(x_n, y_n) + \dots + \beta_k f(x_{n-k+1}, y_{n-k+1})] \end{aligned}$$

per $n = k - 1, k, \dots$

Il metodo è **implicito** se $\beta_0 \neq 0$, **esplicito** se $\beta_0 = 0$.

Per poter utilizzare un metodo a k passi, occorre conoscere i k valori iniziali y_0, y_1, \dots, y_{k-1} . Poiché il problema fornisce soltanto y_0 , i restanti $k - 1$ valori devono essere determinati con metodi numerici.

È possibile utilizzare, per esempio, metodi a un passo oppure a più passi che utilizzano i valori y_i che di volta in volta si rendono disponibili.

Osserviamo esplicitamente che, per garantire l'ordine di convergenza del metodo multistep scelto, i valori y_0, y_1, \dots, y_{k-1} devono essere determinati con metodi almeno dello stesso ordine di convergenza del metodo multistep.

Una vasta classe di metodi multistep espliciti e impliciti può essere costruita a partire dall'identità fondamentale del calcolo integrale

$$y(x^* + h) = y(x^* - mh) + \int_{x^* - mh}^{x^* + h} y'(x) dx$$

e discretizzando l'integrale al secondo membro con una formula di quadratura di tipo interpolatorio.

In questa classe particolare rilievo assumono le **formule di Adams** che si ottengono con il suddetto procedimento, dopo aver scelto $m = 0$.

Precisamente, a partire dall'identità

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx$$

e discretizzando l'integrale al secondo membro con una formula di quadratura di tipo interpolatorio che utilizza come nodi di quadratura i punti della partizione

$$x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}$$

si ottengono i **metodi di Adams a k passi di tipo esplicito**.

Se si aggiunge ai suddetti punti anche x_{n+1} , cioè si considerano i nodi di quadratura

$$x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}$$

si ottengono in corrispondenza i **metodi di Adams a k passi di tipo implicito**.

Costruiamo i metodi di Adams di tipo esplicito. Tenendo conto che

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx \approx \sum_{i=1}^k w_i y'(x_{n-i+1}) = \sum_{i=1}^k w_i f(x_{n-i+1}, y(x_{n-i+1}))$$

ove

$$w_i = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_i(x) dx = h\beta_i \quad i = 1, \dots, k$$

con

$$\ell_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^k \frac{x - x_{n-j+1}}{x_{n-i+1} - x_{n-j+1}} \quad i = 1, \dots, k,$$

abbiamo

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h \sum_{i=1}^k \beta_i f(x_{n-i+1}, y(x_{n-i+1}))$$

Quindi sostituiamo in quest'ultima \approx con $=$ e denotiamo con y_n l'approssimazione di $y(x_n)$ definita da

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^k \beta_i f(x_{n-i+1}, y_{n-i+1})$$

Quest'ultima espressione definisce il **metodo di Adams-Bashforth a k passi di tipo esplicito**.

In maniera analoga a quanto fatto per il metodo di Adams a k passi di tipo esplicito, possiamo ottenere il seguente **metodo di Adams-Moulton a k passi di tipo implicito**:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^k \beta_i^* f(x_{n-i+1}, y_{n-i+1})$$

ove

$$h\beta_i^* = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_i(x) dx \quad i = 0, \dots, k,$$

con

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{x - x_{n-j+1}}{x_{n-i+1} - x_{n-j+1}} \quad i = 0, \dots, k.$$

Osservazioni

- Utilizzando la formula del rettangolo

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx \approx hy'(x_n) = hf(x_n, y(x_n))$$

si ottiene il metodo di Adams-Bashforth a un passo

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

che corrisponde a $k = 1$ e $\beta_1 = 1$ nella formulazione generale.

Esso, in particolare, è il metodo di Eulero esplicito.

... continua osservazioni

- Utilizzando la formula del trapezio

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx &\approx \frac{h}{2}[y'(x_n) + y'(x_{n+1})] \\ &= \frac{h}{2}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]\end{aligned}$$

si ottiene il metodo di Adams-Moulton a un passo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

che corrisponde a $k = 1$ e $\beta_0^* = 1/2$ e $\beta_1^* = 1/2$ nella formulazione generale.

Esso, in particolare, è il metodo dei trapezi.

Osservazione

Quando si utilizza un metodo di Adams a k passi implicito, per determinare y_{n+1} a ogni passo occorre risolvere l'equazione

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= h\beta_0^* f(x_{n+1}, y_{n+1}) + [y_n + h \sum_{i=1}^k \beta_i^* f(x_{n-i+1}, y_{n-i+1})] \\ &= h\beta_0^* f(x_{n+1}, y_{n+1}) + g_n \end{aligned}$$

Osserviamo che se f è lineare in y_{n+1} , allora l'equazione può essere risolta analiticamente; altrimenti si deve procedere numericamente con il metodo di Newton o del punto fisso.

Convergenza dei metodi a più passi

Analogamente a quanto fatto per i metodi a un passo, per i metodi a più passi è possibile dare la definizione di errore locale di troncamento, di consistenza, di zero-stabilità e di convergenza. In particolare, vale la seguente definizione.

Definizione

Un metodo multistep a k passi si dice **convergente** in $[a, b]$ se, qualunque sia il problema di Cauchy $y'(x) = f(x, y(x))$ con $y(a) = y_0$ e $f \in F_1(S)$, per ogni $x \in [a, b]$ e $x = a + Nh$, risulta

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (h \rightarrow 0)}} |y_N - y(x)| = 0$$

qualunque siano i valori iniziali y_0, y_1, \dots, y_{k-1} , purché $y_i \rightarrow y(a)$ per $h \rightarrow 0, i = 1, \dots, k-1$.

Anche per i metodi a più passi vale l'equivalenza

convergenza \Leftrightarrow **consistenza + zero-stabilità**

In particolare, l'errore locale unitario di troncamento si definisce come

$$t(x^*, y^*; h) = \frac{1}{h} \left[\sum_{i=0}^k \alpha_i u(x^* + (1-i)h) - h \sum_{i=0}^k \beta_i u'(x^* + (1-i)h) \right]$$

Il metodo multistep è **consistente** se per ogni $(x^*, y^*) \in S$ e qualunque $f \in F_1(S)$ risulta $\lim_{h \rightarrow 0} t(x^*, y^*; h) = 0$. Inoltre, il metodo multistep ha **ordine di consistenza p** se per ogni $(x^*, y^*) \in S$ e qualunque $f \in F_p(S)$ risulta $t(x^*, y^*; h) = O(h^p)$, $h \rightarrow 0$ e p è l'intero più grande per cui vale quest'ultima relazione.

I metodi di Adams sono consistenti e si ha

- $p = k$ per i metodi espliciti di Adams-Bashforth a k passi e per $f \in F_k(S)$;
- $p = k + 1$ per i metodi impliciti di Adams-Moulton a k passi e per $f \in F_{k+1}(S)$.

Per i metodi a più passi la lipschitzianità di f non è però sufficiente per garantire la zero-stabilità.

Esiste tuttavia una condizione molto semplice che consente di verificare la zero-stabilità di un metodo a più passi definito nella forma:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y_{n+1} + \alpha_1 y_n + \dots + \alpha_k y_{n+1-k} \\ &= h[\beta_0 f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \beta_1 f(x_n, y_n) + \dots + \beta_k f(x_{n-k+1}, y_{n-k+1})] \end{aligned}$$

Si può infatti dimostrare il seguente teorema.

Teorema

Un metodo multistep lineare a k passi è zero-stabile se e solo se le radici dell'**equazione caratteristica**

$$\alpha_0 t^k + \alpha_1 t^{k-1} + \dots + \alpha_k = 0$$

hanno tutte modulo ≤ 1 e quelle di modulo unitario sono semplici.

La condizione del teorema sopra, necessaria e sufficiente per la zero-stabilità, è nota sotto il nome di **condizione delle radici**.

Per i metodi di Adams, l'equazione caratteristica è data da:

$$t^k - t^{k-1} = 0$$

le cui radici (0 con molteplicità $k - 1$ e 1 con molteplicità 1) soddisfano la condizione delle radici.

Osservazione

Per i metodi a un passo, l'equazione caratteristica è semplicemente

$$t - 1 = 0$$

la cui unica radice ha modulo unitario ed è semplice. Pertanto anche i metodi a un passo soddisfano la condizione delle radici.

Per i metodi a più passi lineari vale pertanto il seguente teorema.

Teorema

Un metodo multistep lineare è convergente se e solo se è consistente ed è zero stabile. Inoltre, se il metodo ha ordine di consistenza p e i valori y_i con $i = 1, \dots, k - 1$ sono stati determinati con un errore di ordine $O(h^p)$, $h \rightarrow 0$, allora

$$|y_N - y(x)| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0$$

per ogni $x \in [a, b]$ e $x = a + Nh$.

Questa proprietà ci garantisce che, prendendo h sufficientemente piccolo e supponendo di operare con precisione di calcolo infinita, è possibile approssimare la soluzione del problema a valori iniziale in un punto x dell'intervallo di integrazione con la precisione desiderata.

La convergenza di un metodo numerico per la risoluzione di un problema di Cauchy assicura che l'errore globale in un generico punto tende a zero quando $h \rightarrow 0$.

Nella pratica però h assume un valore fissato, seppure piccolo a piacere; si pone allora il problema di quanto piccolo debba essere h affinché il metodo fornisca risultati numerici accettabili.

In alcuni problemi per ottenere approssimazioni ragionevoli occorre scegliere un passo di integrazione h molto piccolo.

Esempio

Applichiamo il metodo di Eulero esplicito al problema

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^{\lambda x}$ per determinare un'approssimazione della soluzione in $x = 1$. A tale scopo consideriamo una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ con passo costante $h = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots, 15$ e riportiamo in tabella l'errore relativo $|y_N - y(1)|/y(1)$ per tre diversi valori di $\lambda = -10^2, 1, 10^2$.

... continua esempio

Si ha

		$ y_N - y(1) /y(1)$		
k	h	$\lambda = -10^2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10^2$
1	5.0e-01	6.45e + 46	2.39e - 02	1.00e + 00
2	2.5e-01	8.92e + 48	1.22e - 02	1.00e + 00
3	1.3e-01	8.22e + 51	6.18e - 03	1.00e + 00
4	6.3e-02	8.95e + 54	3.11e - 03	1.00e + 00
5	3.1e-02	8.03e + 53	1.56e - 03	1.00e + 00
6	1.6e-02	2.74e + 27	7.80e - 04	1.00e + 00
7	7.8e-03	1.00e + 00	3.90e - 04	1.00e + 00
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
12	2.4e-04	7.11e - 01	1.22e - 05	6.99e - 01
13	1.2e-04	4.60e - 01	6.10e - 06	4.54e - 01
14	6.1e-05	2.64e - 01	3.05e - 06	2.62e - 01
15	3.1e-05	1.42e - 01	1.53e - 06	1.41e - 02

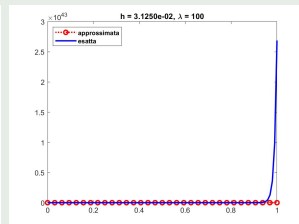
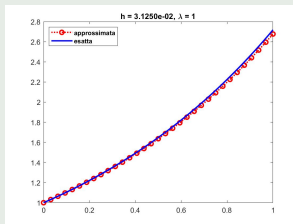
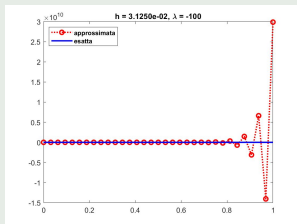
Nella tabella dell'esempio precedente si osserva che, per i primi valori di h e per il problema con $\lambda = -10^2$, l'errore **inizialmente aumenta anziché diminuire**, e decresce solo per valori di h al di sotto di una soglia h_0 . Questo problema non si manifesta invece quando $\lambda = 1$ oppure quando $\lambda = 10^2$ (in generale, quando $\lambda > 0$).

Un esame attento del problema ci permette di osservare che le soluzioni analitiche del problema di Cauchy $y'(x) = \lambda y(x)$ con $\lambda < 0$ e con $\lambda > 0$ hanno un comportamento diametralmente opposto per $x \rightarrow \infty$; precisamente, per $\lambda < 0$ la soluzione $y(x) = e^{\lambda x}$ converge a zero, per $\lambda > 0$ la soluzione diverge.

Nel caso $\lambda > 0$ la soluzione numerica y_n ha lo stesso comportamento della soluzione esatta $y(x)$, cioè diverge. Nel caso $\lambda < 0$, invece, per i primi valori di h , y_n non ha lo stesso comportamento di $y(x)$ in quanto non converge a zero.

... continua esempio

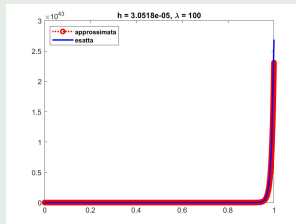
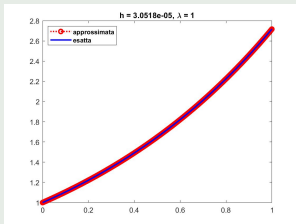
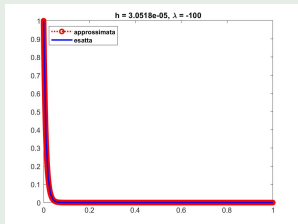
Nelle figure sotto sono riportati i grafici della soluzione esatta (in blu) e della soluzione approssimata (in rosso) calcolata con il metodo di Eulero esplicito per $h = 3.1250e - 02$ e per $\lambda = -10^2, 1, 10^2$ rispettivamente.



All'aumentare di x , nella prima figura la soluzione esatta decresce rapidamente mentre quella numerica cresce rapidamente; nella seconda figura la soluzione esatta e quella numerica hanno lo stesso comportamento; nella terza figura la soluzione esatta cresce rapidamente mentre quella numerica cresce più lentamente.

... continua esempio

Nelle figure sotto sono riportati i grafici della soluzione esatta (in blu) e della soluzione approssimata (in rosso) calcolata con il metodo di Eulero esplicito per un valore fissato di h molto più piccolo ($h = 3.0518e - 05$) e per $\lambda = -10^2, 1, 10^2$ rispettivamente.



In tutte e tre le figure la soluzione esatta $y(x)$ e quella numerica y_n hanno lo stesso comportamento.

Ci si domanda allora:

nel caso $\lambda < 0$ come deve essere scelto il passo h affinché y_n abbia lo stesso comportamento di $y(x)$?

Per rispondere alla domanda, esaminiamo il comportamento della soluzione numerica calcolata con il **metodo di Eulero esplicito applicato al problema** $y'(x) = \lambda y(x)$:

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n$$

Tenendo conto che questa relazione vale per ogni valore di n e quindi anche per $n-1, n-2, \dots, 1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (1 + h\lambda)y_n = (1 + h\lambda)^2 y_{n-1} = \dots = (1 + h\lambda)^{n+1} y_0 \\ \implies y_{n+1} &= (1 + h\lambda)^{n+1} y_0 \end{aligned}$$

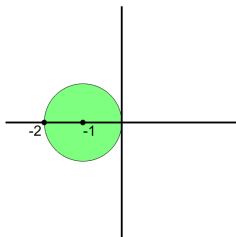
Pertanto, per $y_0 \neq 0$ e λ reale, se $\lambda > 0$ si ha $y_n \rightarrow \infty$ qualunque sia la scelta di h ; se $\lambda < 0$ si ha $y_n \rightarrow 0$ solo se

$$\begin{aligned} |1 + h\lambda| < 1 &\implies -1 < 1 + h\lambda < 1 \implies -2 < h\lambda < 0 \\ &\implies 0 < h < 2/|\lambda| \implies h < h_0 = 2/|\lambda| \end{aligned}$$

Nel caso $\lambda = -10^2$ precedentemente considerato, deve dunque essere $h < 2 \cdot 10^{-2}$.

Se $h > 2/|\lambda|$ il metodo è “instabile”, perché la soluzione y_n non si comporta come la soluzione analitica $y(x)$!

Per un generico λ , eventualmente complesso, la condizione $|1 + h\lambda| < 1$ definisce nel piano complesso il cerchio di centro $(-1, 0)$ e raggio 1. Tale regione, che denoteremo H_a viene chiamata **regione di stabilità assoluta**. I valori di h , per i quali $h\lambda \in H_a$, rendono il metodo di Eulero esplicito **assolutamente stabile**.



Per il metodo di Eulero esplicito $H_a = \{h\lambda : |1 + h\lambda| < 1\}$.

Ci si domanda allora:

qual è il comportamento degli altri metodi quando vengono applicati al problema $y'(x) = \lambda y(x)$ con $\lambda < 0$?

Esempio

Applichiamo il metodo di Eulero implicito, dei trapezi e di Heun al problema

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^{\lambda x}$ per determinare un'approssimazione della soluzione in $x = 1$. A tale scopo consideriamo una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ con passo costante $h = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots, 15$ e riportiamo in tabella l'errore relativo $|y_N - y(1)|/y(1)$ solo per $\lambda = -10^2$.

... continua esempio

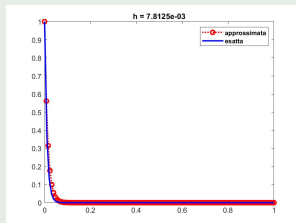
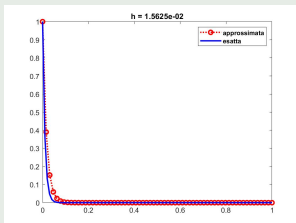
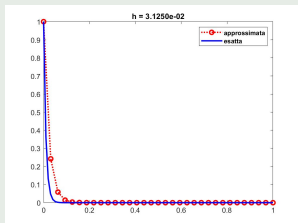
Si ha

		$ y_N - y(1) /y(1), \lambda = -10^2$		
k	h	E. implicito	trapezi	Heun
1	5.0e-01	1.0335e + 40	2.2905e + 43	3.8773e + 49
2	2.5e-01	5.8824e + 37	1.4155e + 43	1.8622e + 53
3	1.3e-01	2.4366e + 34	2.0324e + 42	1.0436e + 58
4	6.3e-02	4.6136e + 29	6.6131e + 38	8.0484e + 61
5	3.1e-02	5.4435e + 23	2.2705e + 22	3.3691e + 57
6	1.6e-02	1.8835e + 17	1.0000e + 00	6.3751e + 31
7	7.8e-03	2.1710e + 11	9.9634e - 01	3.1331e + 07
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
13	1.2e-04	8.3204e - 01	1.2410e - 03	2.5095e - 03
14	6.1e-05	3.5519e - 01	3.1039e - 04	6.2393e - 04
15	3.1e-05	1.6448e - 01	7.7607e - 05	1.5559e - 04

Osserviamo che, al diminuire di h , per il metodo di Heun l'errore decade per $h < h_0$, mentre per i metodi impliciti (Eulero e trapezi) l'errore decade per ogni scelta di h .

... continua esempio

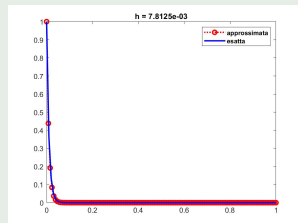
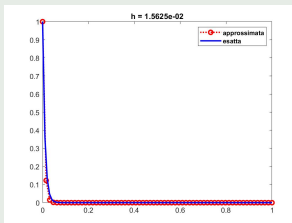
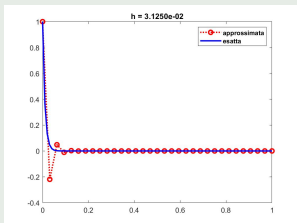
Nelle figure sotto sono riportati i grafici della soluzione esatta (in blu) e della soluzione approssimata (in rosso) calcolata con il metodo di Eulero implicito e per alcuni dei valori di h sopra considerati, $h = 2^{-k}$, $k = 5, 6, 7$.



In queste figure possiamo osservare che, fissato h , all'aumentare di x , il comportamento della soluzione numerica, calcolata con il metodo di Eulero implicito, è stabile per ogni considerata scelta del passo di integrazione h .

... continua esempio

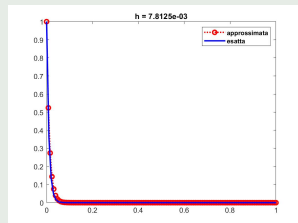
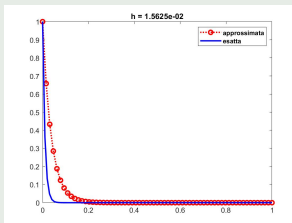
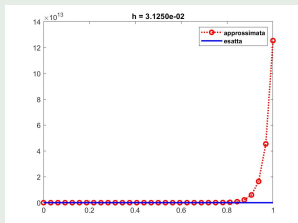
Nelle figure sotto sono riportati i grafici della soluzione esatta (in blu) e della soluzione approssimata (in rosso) calcolata con il metodo dei trapezi e per alcuni dei valori di h sopra considerati, $h = 2^{-k}$, $k = 5, 6, 7$.



In queste figure possiamo osservare che il comportamento della soluzione numerica, calcolata con il metodo dei trapezi, è stabile per ogni considerata scelta del passo di integrazione h .

... continua esempio

Nelle figure sotto sono riportati i grafici della soluzione esatta (in blu) e della soluzione approssimata (in rosso) calcolata con il metodo di Heun per i valori di h , $h = 2^{-k}$, $k = 5, 6, 7$.



Nelle prima figura il comportamento “esplosivo” della soluzione numerica calcolata con il metodo di Heun è dovuto al fatto che, per il corrispondente passo di integrazione h , il metodo non risulta assolutamente stabile.

Esaminiamo il comportamento della soluzione numerica calcolata con il metodo di Eulero implicito applicato al problema $y'(x) = \lambda y(x)$:

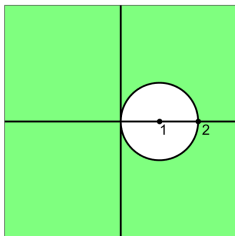
$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + h\lambda y_{n+1} \implies y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n \\ \implies y_{n+1} &= \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^2 y_{n-1} = \dots = \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^{n+1} y_0 \\ \implies y_{n+1} &= \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^{n+1} y_0\end{aligned}$$

Pertanto, per $y_0 \neq 0$ e λ reale, se $\lambda < 0$ si ha $y_n \rightarrow 0$ qualunque sia la scelta del passo h .

La regione di stabilità assoluta del metodo di Eulero implicito è data da:

$$\frac{1}{|1 - h\lambda|} < 1 \implies |1 - h\lambda| > 1$$

ovvero dalla regione esterna al cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1.



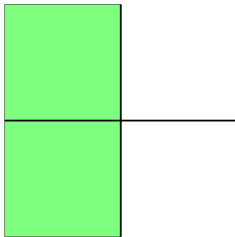
Per il metodo di Eulero implicito $H_a = \{h\lambda : |1 - h\lambda| > 1\}$.

Per il metodo dei trapezi applicato al problema $y'(x) = \lambda y(x)$ si ha:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_{n+1} + \lambda y_n) \implies y_{n+1} = \frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda} y_n \\ \implies y_{n+1} &= \left(\frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda} \right)^2 y_{n-1} = \dots = \left(\frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda} \right)^{n+1} y_0 \\ \implies y_{n+1} &= \left(\frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda} \right)^{n+1} y_0\end{aligned}$$

Pertanto, per $y_0 \neq 0$ e λ reale, se $\lambda < 0$ si ha $y_n \rightarrow 0$ qualunque sia la scelta del passo h .

La regione di stabilità assoluta del metodo dei trapezi è dunque
 $H_a = \{h\lambda : \operatorname{Re}(h\lambda) < 0\}$.



Definizione

Un metodo numerico si dice **A-stabile** se la sua regione di stabilità contiene l'intero semipiano $\{h\lambda : \operatorname{Re}(h\lambda) < 0\}$.

In base a questa definizione il metodo di Eulero implicito e il metodo dei trapezi sono A-stabili. Si può dimostrare che i metodi A-stabili sono necessariamente impliciti e hanno soltanto ordine di convergenza $p \leq 2$.

Esaminiamo infine il comportamento della soluzione numerica calcolata con il **metodo di Heun applicato al problema $y'(x) = \lambda y(x)$** :

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda(y_n + h\lambda y_n)) \implies y_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right)y_n \\ \implies y_{n+1} &= \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right)^2 y_{n-1} = \dots = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right)^{n+1} y_0 \\ \implies y_{n+1} &= \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right)^{n+1} y_0\end{aligned}$$

Pertanto, la successione y_n convergerà a zero se $|1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2| < 1$, mentre divergerà se $|1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2| > 1$. La regione di stabilità assoluta del metodo di Heun è dunque $H_a = \{h\lambda : |1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2| < 1\}$.

L'applicazione del generico metodo Runge-Kutta a r stadi al problema $y'(x) = \lambda y(x)$ comporta la relazione

$$y_{n+1} = (p_r(h\lambda))^{n+1} y_0$$

dove $p_r(h\lambda)$ è un polinomio di grado r nella variabile $h\lambda$. Pertanto, la successione y_n prodotta dal metodo è assolutamente stabile quando $|p_r(h\lambda)| < 1$.

Nel caso di un metodo multistep lineare a k passi, si ottiene

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i - h\lambda\beta_i) y_{n+1-i} = 0$$

Questa rappresenta un'equazione alle differenze lineare, omogenea e a coefficienti costanti, di ordine k . Si dimostra che la successione y_n prodotta dal metodo è assolutamente stabile se e solo se tutte le radici dell'equazione caratteristica

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i - h\lambda\beta_i) t^{k-i} = 0$$

hanno modulo minore di 1.

Lo studio della stabilità assoluta di un metodo e la determinazione della sua regione di stabilità non è in generale un problema semplice e talvolta richiede anche l'utilizzo di tecniche numeriche.

Nel caso di una generica equazione $y'(x) = f(x, y(x))$, $x > a$, per studiare la stabilità del metodo quando h è fissato e $n \rightarrow \infty$, si applica il metodo al problema approssimato $y'(x) = \lambda y(x)$ con $\lambda = f_y(a, y_0)$; per questo motivo il problema $y'(x) = \lambda y(x)$ è detto problema test. Pertanto, per $f_y(a, y_0) < 0$, il passo h dovrà essere scelto in modo tale che $hf_y(a, y_0) \in H_a$.

Nel caso di un generico sistema di equazioni $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$, per la stabilità del metodo quando h è fissato e $n \rightarrow \infty$, si considerano gli autovalori della matrice $\mathbf{J}_f(a, \mathbf{y}_0)$ e, nel caso abbiano tutti parte reale negativa, l'autovalore più grande in modulo fornisce la restrizione sulla scelta del passo h .

Osservazione

Scegliere il passo h in modo che il metodo numerico risulti assolutamente stabile ha senso solo quando la soluzione $y(x)$ del problema è asintoticamente stabile.

Nel caso per esempio del problema $y' = \lambda y$ ha senso quando $\lambda < 0$; nel caso del problema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ quando gli autovalori della matrice \mathbf{A} hanno tutti parte reale negativa; più in generale, nel caso del problema $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ quando gli autovalori della matrice Jacobiana \mathbf{J}_f hanno tutti parte reale negativa. Diversamente è sufficiente avere una propagazione delle perturbazioni relative limitata per $n \rightarrow \infty$.

I problemi

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), & a < x < b \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

per i quali la matrice Jacobiana $\mathbf{J}_f(x, \mathbf{y})$ ha autovalori $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$ con ordini di grandezza molto diversi tra loro, sono difficili da integrare in quanto richiedono per la loro risoluzione un passo di integrazione dettato dall'autovalore più grande in modulo.

Definizione

Un problema si dice **stiff** quando:

- agli eventuali autovalori λ_i con parte reale positiva corrispondono quantità $(b - a)\text{Re}(\lambda_i)$ non grandi;
- esiste almeno un autovalore λ_j con parte reale negativa e $(b - a)\text{Re}(\lambda_j) \ll -1$.

La quantità $S_M = (b - a) \max_{\text{Re}(\lambda_i) < 0} |\text{Re}(\lambda_i)|$ rappresenta una misura del grado di stiffness del problema; esistono problemi per i quali $10^6 \leq S_M \leq 10^{10}$.

Osserviamo che in un sistema stiff almeno un autovalore ha parte reale negativa molto grande; ciò significa che anche la costante di Lipschitz del sistema è molto grande in quanto

$$L \geq ||\mathbf{J}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})|| \geq \rho(\mathbf{J}_f) = \max_{1 \leq l \leq m} |\lambda_l|$$

Esaminiamo le difficoltà che insorgono quando si risolve un problema di tipo stiff. Poiché $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ per almeno un autovalore, per evitare una esplosione degli errori globali prodotti dal metodo numerico, occorre scegliere il passo h in modo tale che $h\lambda_i$ con $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ appartenga alla regione di stabilità assoluta del metodo.

Metodi con regioni di stabilità assoluta piccole impongono scelte di passi h che possono risultare eccessivamente piccole rispetto all'ampiezza dell'intervallo. Per evitare queste limitazioni occorrerebbe avere a disposizione metodi con regioni di stabilità contenenti l'intero semipiano $\text{Re}(h\lambda) < 0$.

Per la risoluzione numerica di tali problemi occorre applicare dunque metodi numerici A-stabili.

Esempio

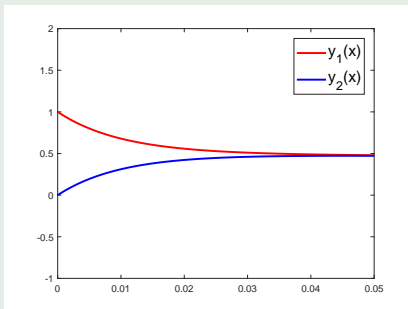
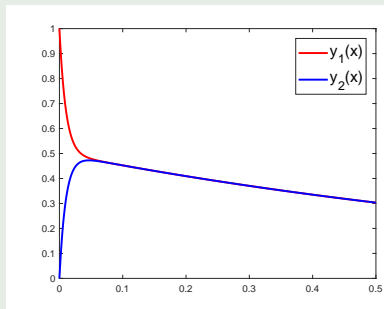
Consideriamo il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = -\frac{101}{2}y_1(x) + \frac{99}{2}y_2(x), & x \in [0, 10] \\ y_2'(x) = \frac{99}{2}y_1(x) - \frac{101}{2}y_2(x) \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

del tipo $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x)$. La matrice \mathbf{A} ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -100$. Poiché gli autovalori sono reali e negativi, la soluzione del problema è asintoticamente stabile.

... continua esempio

La soluzione è $\mathbf{y} = (y_1(x), y_2(x))^T$ con $y_1(x) = e^{-x}/2 + e^{-100x}/2$ e $y_2(x) = e^{-x}/2 - e^{-100x}/2$. Rappresentiamo graficamente $y_1(x)$ e $y_2(x)$.



Osservando il grafico (figura a sinistra), si nota che c'è un transitorio iniziale piccolo (figura a destra (zoom)), ove la soluzione ha una grande variazione, seguito da una evoluzione più lenta.

... continua esempio

Se si vuole risolvere il problema con il metodo di Eulero esplicito, per motivi di stabilità, occorre allora scegliere un passo h sufficientemente piccolo.

Precisamente:

$$h < \frac{2}{|-100|} = \frac{1}{50} = 2.00e - 2$$

... continua esempio

Per risolvere il problema assegnato, scriviamo dapprima la formula del metodo di Eulero nel caso di un sistema di equazioni differenziali $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ con $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$. Essa è data da:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$$

Esplicitando la notazione vettoriale, si ha

$$y_{1,n+1} = y_{1,n} + hf_1(x_n, y_{1,n}, y_{2,n})$$

$$y_{2,n+1} = y_{2,n} + hf_2(x_n, y_{1,n}, y_{2,n})$$

Si osserva che l'applicazione del metodo di Eulero consiste in pratica nell'applicazione del metodo stesso a ciascuna equazione differenziale del problema assegnato.

... continua esempio

Scriviamo allora la function MATLAB che implementa il metodo di Eulero per un sistema di equazioni differenziali.

Function MATLAB

```
[x,y] = eulero_system(f,x0,y0,xN,N)
m = length(y0);
h = (xN-x0)/N;
x = (x0:h:xN)';
y = zeros(m,N+1);
y(:,1) = y0;
for n = 1:N
    fn = f(x(n),y(:,n));
    y(:,n+1) = y(:,n)+h*fn;
end
y = y';
```

... continua esempio

Applicando il suddetto algoritmo con vari passi h al problema assegnato, si trovano i seguenti risultati numerici, che confermano l'assoluta stabilità del metodo per valori di $h < 2.00e - 02$.

h	$\ y_n - y\ _\infty$
$2.00e - 01$	$4.33e + 63$
$1.00e - 01$	$1.33e + 95$
$5.00e - 02$	$1.29e + 120$
$2.50e - 02$	$1.37e + 70$
$1.25e - 02$	$2.68e - 01$
$6.25e - 03$	$8.01e - 02$
$3.13e - 03$	$3.33e - 02$
$1.56e - 03$	$1.54e - 02$

... continua esempio

Se invece si risolve il problema mediante il metodo dei trapezi

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2} (\mathbf{A}\mathbf{y}_n + \mathbf{A}\mathbf{y}_{n+1}) \implies \left(\mathbf{I} - \frac{h}{2}\mathbf{A}\right) \mathbf{y}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2}\mathbf{A}\right) \mathbf{y}_n$$
$$\implies \mathbf{y}_{n+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{h}{2}\mathbf{A}\right)^{-1} \left(\left(\mathbf{I} + \frac{h}{2}\mathbf{A}\right) \mathbf{y}_n\right)$$

si ottengono i seguenti valori numerici, che confermano l'assoluta stabilità del metodo dei trapezi per qualunque scelta del passo h .

h	$\ \mathbf{y}_n - \mathbf{y}\ _\infty$
$2.00e-01$	$4.09e-01$
$1.00e-01$	$3.33e-01$
$5.00e-02$	$2.18e-01$
$2.50e-02$	$9.66e-02$
$1.25e-02$	$2.79e-02$
$6.25e-03$	$6.06e-03$
$3.13e-03$	$1.51e-03$
$1.56e-03$	$3.74e-04$

Esistono vari comandi MATLAB per la risoluzione di un problema di Cauchy posto in forma canonica:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x_0 \leq x \leq x_N \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Poiché la sintassi di utilizzo è la stessa per ciascuno di essi, nella descrizione useremo il generico nome di solutore.

Comando MATLAB

`[x,y] = solutore(f,[x_0,x_N],y_0)` risolve il problema a valori iniziali $y' = f(x, y(x))$ nell'intervallo $[x_0, x_N]$ e soddisfacente la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

In output `solutore` restituisce un vettore colonna `x` contenente i punti nei quali la soluzione numerica è stata valutata e un vettore colonna `y` contenente i valori della soluzione nel corrispondente punto definito in `x`.

Se si vogliono conoscere valutazioni della soluzione numerica in specifici punti, per esempio in x_0, x_1, \dots, x_N , occorre allora sostituire `[x_0,x_N]` con `[x_0,x_1,...,x_N]`.

Osservazione

Con solutore abbiamo denominato una delle *function* presenti in MATLAB per la risoluzione di un problema a valori iniziali, per esempio, ode45, ode113, ode23, ode23t, ode15s, ode23s.

Tali *function* implementano metodi di tipo esplicito e di tipo implicito. Per esempio,

- ode45 è basata su una coppia di metodi Runge-Kutta espliciti di ordine 4 e 5; tale *function* generalmente viene utilizzata come primo tentativo per risolvere un problema nuovo;
- ode23t utilizza la formula dei trapezi;
- ode15s, ode23s sono idonee per la risoluzione di problemi stiff.

Esempio

Applichiamo la function MATLAB ode45 al problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^x$, per determinare un'approssimazione della soluzione in $x = 0.2$. A tale scopo definiamo la funzione $f(x, y)$ e poi richiamiamo il solutore:

```
>> f = @(x,y) y;  
>> [x,y] = ode45(f,[0,0.2],1);
```


... continua esempio

```
>> format short e
>> [x y]
ans =
           0  1.0000e+00
 5.0000e-03  1.0050e+00
 1.0000e-02  1.0101e+00
 1.5000e-02  1.0151e+00
 2.0000e-02  1.0202e+00
 2.5000e-02  1.0253e+00
 .....
 1.9500e-01  1.2153e+00
 2.0000e-01  1.2214e+00
>> abs(exp(0.2)-y(end))
ans =
 2.0983e-13
```

Osserviamo che la partizione dell'intervallo di integrazione $[0, 0.2]$ è uniforme con passo costante $h = 0.005$.

Le *function* MATLAB `ode...` possono essere utilizzate anche per risolvere sistemi di equazioni differenziali. In questo caso, in input `f` è una funzione vettoriale che dipende da due argomenti: il primo è uno scalare, il secondo è un vettore colonna. Inoltre, `y_0` è un vettore colonna contenente i valori iniziali. In output, `y` è una matrice, il cui numero di righe coincide con la lunghezza del vettore `x` e il cui numero di colonne coincide con la dimensione del sistema. Ogni riga di `y` contiene i valori della soluzione nel corrispondente punto definito in `x`.

Esempio

Applichiamo la *function* MATLAB ode45 al problema

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = 3z_2(x) - 2z_1(x) \\ z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = 1 \end{cases}$$

con soluzione $y(x) = e^x$, per determinare un'approssimazione della soluzione in $x = 0.2$. A tale scopo definiamo la funzione

$\mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x)) = (z_2(x), 3z_2(x) - 2z_1(x))^T$ e poi richiamiamo la *function* ode45.

```
>> f = @(x,z) [z(2); 3*z(2)-2*z(1)];
```

```
>> [x,y] = ode45(f,[0,0.2],[1;1]);
```

... continua esempio

```
>> [x y(:,1)]  
ans =  
          0 1.0000e+00  
5.0000e-03 1.0050e+00  
1.0000e-02 1.0101e+00  
1.5000e-02 1.0151e+00  
2.0000e-02 1.0202e+00  
2.5000e-02 1.0253e+00  
.....  
1.9500e-01 1.2153e+00  
2.0000e-01 1.2214e+00  
>> abs(exp(0.2)-y(end,1))  
ans =  
2.0983e-13
```