Trasformata di Fourier di Distribuzioni

Funzioni Rapidamente Decrescenti, Distribuzioni Temperate, Formula di Inversione, Trasformata di Distribuzioni Temperate

E' utile studiare la trasformata di Fourier su una particolare sottoclasse di funzioni sommabili, dette *funzioni rapidamente decrescenti*. L'insieme delle funzioni rapidamente decrescenti forma uno spazio vettoriale ed è definito come:

Spazio delle funzioni rapidamente decrescenti

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) : \lim_{x \to \pm\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0, \quad \forall\, p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Intuitivamente, una funzione è rapidamente decrescente se la funzione stessa e le sue derivate decrescono più velocemente di qualsiasi polinomio. Notiamo che per come sono definite le funzioni test $\phi \in \mathcal{D}$ (infinitamente regolari e a supporto compatto), esse sono contenute nello spazio delle funzioni rapidamente decrescenti, ovvero: $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$.

La trasformata di Fourier di una funzione rapidamente decrescente è ancora una funzione rapidamente decrescente, ovvero:

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathcal{F}(f)(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

L'importanza delle funzioni rapidamente decrescenti sta nel fatto che, su tale classe di funzioni, l'*antitrasformata di Fourier*, è esattamente l'operazione inversa della trasformata, cioè si ha:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(f)\right) = f, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Per come è definita l'antitrasformata di Fourier, il risultato presentato sopra implica l'importante formula di inversione:

Formula di inversione

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

A questo punto, al fine di poter estendere la trasformata di Fourier anche a funzioni non sommabili, è importante definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e per fare questo ci torna ancora una volta utile lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definito prima. Le distribuzioni su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ saranno definite come al solito come i funzionali $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineari e continui; l'insieme di tali distribuzioni, denotato con $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, è uno spazio vettoriale detto spazio delle *distribuzioni temperate*. In particolare, evidenziamo che, per la struttura di spazio vettoriale, la combinazione lineare di distribuzioni temperate è ancora una distribuzione temperata.

Vale la pena osservare che le distribuzioni temperate sono un sottoinsieme delle usuali distribuzioni definite su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ che abbiamo visto fino a ora, cioè si ha: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. In altre parole, un funzionale T potrebbe essere una distribuzione su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ma potrebbe non essere una distribuzione temperata, cioè potrebbe non essere una distribuzione su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Diventa allora fondamentale chiedersi quando una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è anche una distribuzione temperata; valgono i seguenti risultati:

Condizioni sufficienti per distribuzioni temperate

- Se $f \in \mathcal{R}^1$ o se f è limitata, allora T_f è una distribuzione temperata;
- Se $f(x) \in R^1_{loc}$ è a crescita lenta (i.e., $|f(x)| \leq A(1+|x|^p)$, per qualche $A > 0$ e $p \in \mathbb{N}$) allora T_f è una distribuzione temperata. Si noti che le funzioni limitate e i polinomi sono a crescita lenta;
- Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è a supporto compatto, allora T è una distribuzione temperata.

Vale la pena sottolineare che i risultati riportati sopra forniscono condizioni solo sufficienti e le implicazioni contrarie non sono vere in generale (ad esempio, se $f \in R^1_{loc}$ non è a crescita lenta, T_f potrebbe comunque essere temperata).

L'importanza delle distribuzioni temperate sta nel fatto che per esse ha senso definire la trasformata di Fourier come

Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

$$\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle, \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Ricordando che $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha che la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata è ancora una distribuzione temperata.

La formula per la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata diventa particolarmente semplice per alcune distribuzioni regolari, vale infatti:

$$\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}, \qquad f(x) \in \mathcal{R}^1$$

Quindi la trasformata di Fourier in questo caso è una distribuzione regolare indotta da $F(f)$. Se invece f non fosse sommabile, si dovrà usare la formula generale vista sopra ed eventualmente le proprietà della trasformata di Fourier che avevamo visto per le funzioni e che continuano a valere anche per le distribuzioni temperate.

Esercizio 1. Si stabilisca se la funzione $f(x) = e^{x^2}$ induce o meno una distribuzione temperata.

Soluzione. Intuitivamente, f non è una funzione a crescita lenta, quindi possiamo aspettarci che non induca una distribuzione temperata. Per dimostrarlo è sufficiente far vedere che, data $g(x) = e^{-x^2}$, osserviamo che $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e che

$$T_{e^{-x^2}} = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 1\,\mathrm{d}x = \infty$$

da cui si deduce che T_f non è una distribuzione temperata poiché l'integrale non risulta ben definito per ognni funzione test.

Esercizio 2. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$, $a > 0$.

Soluzione. Osserviamo che $f \notin \mathcal{R}^1$ tuttavia possiamo considerarne la distribuzione indotta. $f(x)$ è limitata, quindi la distribuzione regolare T_f è una distribuzione temperata. Ricordiamo che

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}]}(x)\right) = \frac{\sin(b\pi\omega)}{\pi\omega}$$

Utilizziamo quindi la formula di inversione:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right) = \pi\mathcal{F}\left(\frac{\sin\left(\frac{a}{\pi}\pi x\right)}{\pi x}\right) = \pi\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2\pi},\frac{a}{2\pi}]}(x)\right)\right) = \pi\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2\pi},\frac{a}{2\pi}]}(-\omega) = \pi\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2\pi},\frac{a}{2\pi}]}(\omega)$$

Esercizio 3. Si calcoli la trasformata di Fourier della delta di Dirac δ_t.

Soluzione. Innanzitutto la distribuzione δ_t è una distribuzione temperata poiché abbiamo già dimostrato che è una distribuzione a supporto compatto. Abbiamo quindi che, considerata $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha:

$$\langle \mathcal{F}(\delta_t), \phi \rangle = \langle \delta_t, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \left\langle \delta_t, \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega x} \phi(x) \, \mathrm{d}x \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t x} \phi(x) \, \mathrm{d}x = \langle T_{e^{-2\pi i t x}}, \phi(x) \rangle$$

Possiamo quindi concludere che

$$\mathcal{F}(\delta_t(x)) = T_{e^{-2\pi i t x}}$$

Possiamo inoltre applicare la trasformata di Fourier ad ambo i membri di questa identità e tramite la formula di inversione otteniamo:

$$\mathcal{F}(T_{e^{-2\pi i t x}}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\delta_t(x))) = \delta_t(-x) = \delta_{-t}(x)$$

e questo implica:

$$\mathcal{F}(T_{e^{2\pi i t x}}) = \delta_t(x)$$

Notiamo che per $t = 0$, in base a queste formule, si ottiene immediatamente $\mathcal{F}(\delta_0(x)) = T_1$ e $\mathcal{F}(T_1) = \delta_0(x)$.

Esercizio 4. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione $\delta_0'(x)$.

Soluzione. Innanzitutto la distribuzione $\delta_0'(x)$ è una distribuzione temperata. Per la regola della derivata di una distribuzione e della trasformata di Fourier, abbiamo quindi che

$$\langle \mathcal{F}(\delta_0'(x)), \phi \rangle = \langle \delta_0'(x), \mathcal{F}(\phi) \rangle = -\langle \delta_0(x), \mathcal{F}(\phi)' \rangle = 2\pi i \langle \delta_0(x), \mathcal{F}(x\phi) \rangle$$

$$= 2\pi i \langle \mathcal{F}(\delta_0(x)), x\phi \rangle = 2\pi i \langle T_1, x\phi \rangle = 2\pi i \langle T_x, \phi \rangle = \langle T_{2\pi i x}, \phi \rangle$$

dove si è utilizzato la regola di derivazione. In conclusione $\mathcal{F}(\delta_0') = T_{2\pi i x}$. Si poteva arrivare subito al risultato usando la regola della trasformata della derivata di una funzione/distribuzione con trasformata nota.

Esercizio 5. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione indotta da $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Osserviamo che T_f è una distribuzione temperata, essendo f a crescita lenta. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(T_{x^n}), \phi \rangle &= \langle T_{x^n}, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \langle T_1, x^n \mathcal{F}(\phi) \rangle = \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle T_1, \mathcal{F}\left(\phi^{(n)}\right) \right\rangle \\
&= \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle \mathcal{F}(T_1), \phi^{(n)} \right\rangle = \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle \delta_0(x), \phi^{(n)} \right\rangle = \tfrac{1}{(-1)^n} \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle \delta_0^{(n)}(x), \phi \right\rangle \\
&= \left(\tfrac{i}{2\pi}\right)^n \left\langle \delta_0^{(n)}(x), \phi \right\rangle = \left\langle \left(\tfrac{i}{2\pi}\right)^n \delta_0^{(n)}(x), \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

In conclusione $\mathcal{F}(x) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \delta_0^{(n)}$.

Esercizio 6. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{2xe^{\pi i x}}{(1+x^2)^2}$$

Soluzione. L'idea è di ricondurci a trasformate note. Possiamo scrivere:

$$\mathcal{F}\left(\frac{2xe^{\pi i x}}{(1+x^2)^2}\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{2xe^{2\pi i \frac{x}{2}}}{(1+x^2)^2}\right)(\omega) \xrightarrow{\text{modulazione}} \mathcal{F}\left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)\left(\omega - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{(1+x^2)}\right)\left(\omega - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\text{derivazione}} -2\pi i \left(\omega - \frac{1}{2}\right)\left[\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)}\right)\left(\omega - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= -2\pi i \left(\omega - \frac{1}{2}\right) \pi e^{-2\pi|\omega - \frac{1}{2}|} = -2\pi^2 i \left(\omega - \frac{1}{2}\right) e^{-2\pi|\omega - \frac{1}{2}|}$$

Esercizi aggiuntivi svolti.

Esercizio 7. Si stabilisca se il treno di impulsi è una distribuzione temperata.

Soluzione. Ricordiamo che la distribuzione treno di impulsi T è data da

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k$$

Preso un generico $\phi \in \mathcal{S}$, osserviamo che $\langle T, \phi\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k)$ converge poiché essendo $\phi(k)$ rapidamente decrescente, possiamo dire che $|\phi(k)| \leq 1/|k|^2$, per k sufficientemente grande. Di Di conseguenza, è immediato mostrare che T è lineare:

$$\langle T, a\phi + b\psi\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\phi(k) + b\psi(k) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k) + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(k) = a\langle T, \phi\rangle + b\langle T, \psi\rangle$$

Per finire, proviamo la continuità in zero. Dato $\phi_n \to 0$ in $\mathcal{S}$. Allora

$$|\langle T, \phi_n\rangle| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_n(k)\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi_n(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\left|\left(1+k^2\right)\phi_n(k)\right|}{1+k^2}$$

$$\leq \left\|\left(1+x^2\right)\phi_n(x)\right\|_\infty \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}}_{\text{converge}} \to 0 \quad \text{poiché } \phi_n(x) \to 0$$

Esercizio 8. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione indotta da $f(x) = \sin x$.

Soluzione. Osserviamo che f è una funzione limitata, quindi T_f è temperata. Ricordiamo che

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Calcoliamo quindi la trasformata:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}\left(T_{\sin x}\right), \phi\rangle &= \langle T_{\sin x}, \mathcal{F}(\phi)\rangle = \frac{1}{2i}\left[\langle T_{e^{ix}}, \mathcal{F}(\phi)\rangle - \langle T_{e^{-ix}}, \mathcal{F}(\phi)\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\langle \mathcal{F}\left(T_{e^{ix}}\right), \phi\rangle - \langle \mathcal{F}\left(T_{e^{-ix}}\right), \phi\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\left\langle \mathcal{F}\left(T_{e^{2\pi i x \frac{1}{2\pi}}}\right), \phi\right\rangle - \left\langle \mathcal{F}\left(T_{e^{2\pi i x\left(-\frac{1}{2\pi}\right)}}\right), \phi\right\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\left\langle \delta_{\frac{1}{2\pi}}, \phi\right\rangle - \left\langle \delta_{-\frac{1}{2\pi}}, \phi\right\rangle\right] = \left\langle \frac{1}{2i}\left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}\right), \phi\right\rangle
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\mathcal{F}(\sin x) = \frac{1}{2i}\left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}\right)$$

Esercizio 9. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione indotta da

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Soluzione. Per alleggerire la notazione, in questo esercizio identificheremo la distribuzione regolare indotta da f con la funzione stessa, cioè $T_f = f$, tenendo comunque a mente quanto detto nella nota sopra. Osserviamo che $f \notin \mathcal{R}^1$ ma usando la regola di moltiplicazione per polinomi si ha:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \mathcal{F}\left(x\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\pi e^{-2\pi|\omega|}\right] = -i\pi e^{-2\pi|\omega|}\operatorname{sign}(\omega)$$

Esercizio 10. Posto $g(x) = x^2 e^{ix+6\pi i}$ e $T = T_g + x^3\delta_2(x+3) + \mathcal{F}(x\delta_1')$, calcolare $\mathcal{F}(T)$.

Soluzione. Utilizziamo anche qui la notazione "leggera", in particolare $T_g = g$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(T) &= \mathcal{F}\left(x^2 e^{ix+6\pi i}\right) + \mathcal{F}\left(x^3\delta_2(x+3)\right) + \mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(x\delta_1'\right)\right) \\
&= \mathcal{F}\left(x^2 e^{ix} \underbrace{e^{6\pi i}}_{=1}\right) + \mathcal{F}\left(\underbrace{x^3\delta_{-1}(x)}_{=-\delta_{-1}(x)}\right) + \mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(x\delta_1'\right)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\mathcal{F}\left(e^{ix}\right)(\omega) + \mathcal{F}\left(-\delta_{-1}(x)\right) - \omega\delta_1'(-\omega) \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\delta''_{\frac{1}{2\pi}}(\omega) - e^{2\pi i\omega} - \omega\delta_1'(-\omega)
\end{aligned}$$

Esercizio 11. (esercizio d'esame) Posto $g(x) = H(x+2)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$, verificare che la distribuzione

$$T = T_g + x\delta_5(x-3)$$

è temperata e calcolare la sua trasformata di Fourier.

Soluzione. La distribuzione T è definita come somma di due distribuzioni; sapendo che la somma di distribuzioni temperate è una distribuzione temperata, dobbiamo mostrare che le due distribuzioni sono temperate. Cominciamo notando che T_g è la distribuzione regolare indotta dalla funzione g che è limitata, infatti si vede subito che $g(x) = H(x+2)e^{-x} \leq e^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (alternativamente, si può notare che g è sommabile.). Quindi, T_g è una distribuzione temperata.
Per quanto riguarda l'altra distribuzione, si ha:

$$\langle x\delta_5(x-3), \phi(x)\rangle = \langle \delta_8(x), x\phi(x)\rangle = 8\phi(8) = 8\delta_8(x)$$

Sapendo che la delta di Dirac è una distribuzione temperata (poiché a supporto compatto), concludiamo che $x\delta_5(x-3)$ è temperata. Essendo T la somma di due distribuzioni temperate essa è temperata.
Calcoliamo a questo punto la trasformata di Fourier (utilizziamo la notazione leggera):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(T)(\omega) &= \mathcal{F}\left(H(x+2)e^{-x}\right)(\omega) + \mathcal{F}\left(x\delta_5(x-3)\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(H(x+2)e^{-(x+2)}e^2\right)(\omega) + 8\mathcal{F}\left(\delta_8(x)\right)(\omega) \\
&= e^2\mathcal{F}\left(H(x+2)e^{-(x+2)}\right)(\omega) + 8e^{-16\pi i\omega} = e^2 e^{4\pi i\omega}\mathcal{F}\left(H(x)e^{-x}\right)(\omega) + 8e^{-16\pi i\omega} \\
&= e^{2+4\pi i\omega}\frac{1}{1+2\pi i\omega} + 8e^{-16\pi i\omega}
\end{aligned}$$

Esercizi da svolgere a casa.

1. Determinare la trasformata di Fourier di δ_a', $a \in \mathbb{R}$. Determinare la trasformata di Fourier di $\delta_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Si calcoli la trasformata di Fourier della distribuzione regolare indotta da un generico polinomio $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.
3. Si calcolino le trasformate di Fourier delle distribuzioni regolari indotte da $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin^2 x$.