PROPRIETÀ DI $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$

1) LINEARITÀ:

$$\mathbb{E}[aX+bY+c \mid \mathcal{G}] = a\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\,\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] + c \quad \text{q.o.}$$

2) MONOTONIA:

$$X \leq Y \ \text{q.o.} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \ \text{q.o.}$$

3) "TEOREMI LIMITE"

4) TOWER PROPERTY

$$\Theta \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mid \Theta\big] = \mathbb{E}[X|\Theta] \ \text{q.o.}$$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}[X]$$

5) DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{G}] \ \text{q.o.} \qquad \varphi \text{ convessa}$$

6) CONTRATTIVITÀ

$$\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{G}] : L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \longrightarrow L^p(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}) \qquad 1 \leq p \leq \infty$$
$$X \rightsquigarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$$

è una contrazione "in senso lato"

7) CARATTERIZZAZIONE

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \ \text{q.o.} \qquad Y \ \mathcal{G}\text{-misurabile}$$

$\hat{X} = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ è l'unica (q.o.) v.a. $\mathcal{G}$-misurabile t.c. $\forall\, Y$ $\mathcal{G}$-misurabile

(per cui tutto è ben definito)

vale $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\hat{X}Y]$

8) Se $\underline{X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}$ $\underset{\text{per } ⑥}{\Rightarrow}$ $\underline{\hat{X} = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})}$

$\Rightarrow$ $\underline{\forall\, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})}$ $\Rightarrow$ per ⑦ abbiamo che

$$\underset{\langle X, Y\rangle}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}[XY]}} = \underset{\langle \hat{X}, Y\rangle}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}[\hat{X} Y]}} \quad \text{ovvero} \quad \underline{\langle X - \hat{X}, Y\rangle = 0}$$

Quindi $\hat{X} = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ è la proiezione ortogonale di $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sul sottospazio chiuso $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$

Allora in particolare $\| X - \hat{X} \|_{L^2} \leq \| X - Z \|_{L^2}$ $\forall\, Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$

ovvero $\boxed{\mathbb{E}[(X - \hat{X})^2] \leq \mathbb{E}[(X - Z)^2]}$ ⊛

Osserviamo che $\mathbb{E}[\hat{X}] = \mathbb{E}[X]$ $\Rightarrow$ se prendo $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X]$ allora la ⊛ diventa

$$\boxed{\mathrm{var}(X - \hat{X}) \leq \mathrm{var}(X - Z)}$$

$\hat{X}$ = la miglior stima <u>non distorta</u> di X note le informazioni contenute in $\mathcal{G}$

con la stessa media

esempio

Trasmettiamo un segnale X

riceviamo un segnale $Y = X + W$ "rumore"

le informazioni in nostro possesso sono date dalla

σ-algebra $\mathcal{G} = \sigma(Y)$

la miglior stima possibile del segnale trasmesso

è $h(Y) = \mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)]$

In realtà noi riceviamo il segnale $y \in \mathbb{R}$

e la miglior stima del segnale trasmesso è

$$h(y) = \mathbb{E}[X \mid Y = y] \in \mathbb{R}$$

VARIANZA CONDIZIONATA

Sia $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Y v.a.

① Si definisce varianza di X condizionata all'evento $(Y=y)$ la varianza calcolata rispetto alla legge $\mathbb{P}_{X|Y=y}$:

$$\boxed{Var(X|Y=y) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X|Y=y])^2 \mid Y=y\right] = g(y)}$$

dove $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile

② Si definisce varianza di X condizionata a Y la v.a.:

$$\boxed{Var(X|Y) = g(Y) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X|\underset{\sigma(Y)}{Y}])^2 \mid \underset{\sigma(Y)}{Y}\right]} \quad q.o.$$

③ Si definisce varianza di X condizionata a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ la v.a. $\mathcal{G}$-misurabile:

$$\boxed{Var(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2 \mid \mathcal{G}\right]} \quad q.o.$$

Proposizione:

1) $\boxed{\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,]}$

2) $\boxed{\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) + \mathbb{E}[\,\mathrm{var}(X|\mathcal{G})]}$

dim 2)

Nota: $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\qquad \hat{X} = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[((X - \hat{X}) + (\hat{X} - \mathbb{E}[X]))^2]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[(X-\hat{X})^2]}_{①} + \underbrace{\mathbb{E}[(\hat{X} - \mathbb{E}[X])^2]}_{②}$$

$$\cancel{+ 2\,\mathbb{E}[(X-\hat{X})(\underbrace{\hat{X} - \mathbb{E}[X]}_{Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})})^2]} = 0$$

$$= \mathbb{E}[(X-\hat{X})Y] = \langle X-\hat{X}, Y \rangle = 0$$

① $\mathbb{E}[(X-\hat{X})^2] \underset{\text{proprietà 1)}}{=} \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[(X-\hat{X})^2 | \mathcal{G}]\,]$

$$= \mathbb{E}[\,\underbrace{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2 | \mathcal{G}]}_{\mathrm{var}(X|\mathcal{G})}\,] = \mathbb{E}[\mathrm{var}(X|\mathcal{G})]$$

② $\mathbb{E}[(\hat{X} - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[(\hat{X} - \mathbb{E}[\hat{X}])^2] = \mathrm{var}(\hat{X})$

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\hat{X}]$ proprietà 1) $\qquad = \mathrm{var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$

$\Rightarrow \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{var}(X|\mathcal{G})] + \mathrm{var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$

CVD

ESEMPIO

$Z \sim \Gamma(2,\lambda)$

$X \sim U(0,Z)$ cioè $X|_{Z=z} \sim U(0,z) \quad \forall z>0$

$\mathbb{E}[X]$? $\quad var(X)$?

soluzione

$\mathbb{E}[X|Z=z] = \frac{a+b}{2} = \frac{z}{2}$

$Var(X|Z=z) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{z^2}{12}$

$\nwarrow U(a,b)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X|Z] = \frac{Z}{2}$

$Var(X|Z) = \frac{Z^2}{12}$

$\Downarrow$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z]] = \mathbb{E}\left[\frac{Z}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

se $U \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ allora
$$\begin{cases} \mathbb{E}[U] = \frac{\alpha}{\lambda} \\ var(U) = \frac{\alpha}{\lambda^2} \end{cases}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Z)] + var(\mathbb{E}[X|Z])$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{Z^2}{12}\right] + var\left(\frac{Z}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\mathbb{E}[Z^2] + \frac{1}{4}var(Z) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(var(Z) + \mathbb{E}[Z]^2\right) + \frac{1}{4}var(Z)$$

$$= \frac{1}{3}var(Z) + \frac{1}{12}\mathbb{E}[Z]^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{\lambda^2} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{12}\right) \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Esercizio 2

Siano X una variabile di Poisson di parametro $\lambda > 0$ e Y una variabile aleatoria di legge non nota.
Si sa che, condizionatamente all'evento $(X = n)$, la v.a. Y segue una legge Binomiale di parametri n e p.

a) Calcolare $\mathbb{E}[Y|X]$ e $\mathbb{E}[Y]$.

b) Determinare la legge di Y e ritrovare il valore atteso.

c) Determinare la legge di X condizionata a $(Y = k)$.

d) Calcolare $\mathbb{E}[X|Y]$ (calcolare prima $\mathbb{E}[X - Y|Y]$)

Soluzione

$X \sim P(\lambda) \qquad Y|_{(X=n)} \sim B(n,p)$ ovvero $Y \sim B(X,p)$

1) $\mathbb{E}[Y|X=n] = np = h(n)$

$\mathbb{E}[Y|X] = h(X) = Xp$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Xp] = p\,\mathbb{E}[X] = \lambda p$

2) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$p_Y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{(X,Y)}(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{Y|X=n}(k) \cdot p_X(n)$$

$$\left(\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n, Y=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k|X=n)\,\mathbb{P}(X=n) \right)$$

prob. totale applicata a $\{(X=n)\}_{n=0}^{\infty}$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{se } k \le n \text{ altrimenti ho } 0} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{k!\,(n-k)!}\, p^{k} (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n}}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{1}{k!}\, p^{k} e^{-\lambda} \lambda^{k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$n-k=h$

$$= \frac{1}{k!} (\lambda p)^{k} e^{-\lambda} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{h}}{h!} =$$

$$= \frac{1}{k!} (\lambda p)^{k} e^{-\cancel{\lambda}} e^{\lambda(\cancel{1}-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^{k}}{k!} = f_Y(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow Y \sim P(\lambda p) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Y] = \lambda p$$