Analisi Funzionale

Operatori compatti
Teoria di Fredholm
Il teorema spettrale

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino

a.a. 2023/2024

Operatori compatti

Def. Siano X, Y spazi normati.

(a) Un operatore $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ è detto *compatto* se,
per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in X,
la successione $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente in Y.

(b) Denotiamo con $\mathcal{K}(X, Y)$ l'insieme degli operatori compatti da X a Y.
Scriviamo anche $\mathcal{K}(X)$ invece di $\mathcal{K}(X, X)$.

Prop. Siano X, Y spazi normati, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Sono equivalenti:

(i) T è un operatore compatto;

(ii) $\overline{T(A)}$ è un sottoinsieme compatto di Y
per ogni sottoinsieme limitato A di X;

(iii) $\overline{T(B_X(0, 1))}$ è un sottoinsieme compatto di Y.

Coroll. Siano X, Y spazi normati e $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Allora $\overline{\operatorname{Im} T}$ è separabile.

Prop. Siano X, Y spazi normati. Sia $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ un operatore di *rango finito*, cioè tale che $\dim \operatorname{Im} T < \infty$. Allora $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Coroll. Siano X, Y spazi normati. Se $\dim X < \infty$ oppure $\dim Y < \infty$, allora $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$.

Proprietà degli operatori compatti

Prop. Siano X, Y, Z spazi normati. Siano $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Se T è un operatore compatto, oppure S è un operatore compatto, allora ST è un operatore compatto.

Prop. Siano X, Y spazi normati con $\dim X = \infty$.

(i) $\mathrm{id}_X \notin \mathcal{K}(X)$.

(ii) Se $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ è un isomorfismo, allora $T \notin \mathcal{K}(X, Y)$.

Teor. Siano X, Y spazi normati.

(i) $\mathcal{K}(X, Y)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}(X, Y)$.

(ii) Se Y è uno spazio di Banach, allora $\mathcal{K}(X, Y)$ è un sottoinsieme chiuso di $(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$.

Coroll. Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach.

(i) $(\mathcal{K}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ è uno spazio di Banach.

(ii) Se $(T_n)_n$ è una successione in $\mathcal{B}(X, Y)$ di operatori di rango finito, e $T_n \to T$ in $\mathcal{B}(X, Y)$ per $n \to \infty$, allora $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Esempi di operatori compatti e non compatti

1. Sia $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ l'operatore di shift verso sinistra. Allora né S né S^* sono operatori compatti su ℓ^2.
2. Siano $\underline{w} \in \ell^\infty$ e $D_{\underline{w}} \in \mathcal{B}(\ell^2)$ l'operatore di moltiplicazione per $\underline{w}$. Allora:
   - $D_{\underline{w}}$ ha rango finito se e solo se $\underline{w} \in c_{00}$;
   - $D_{\underline{w}}$ è compatto se e solo se $\underline{w} \in c_0$.
3. Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli con la misura di Lebesgue. Siano $K \in L^2(I \times J)$ e $T_K \in \mathcal{B}(L^2(J), L^2(I))$ l'operatore integrale con nucleo integrale K. Allora $T_K \in \mathcal{K}(L^2(J), L^2(I))$.
   In particolare, se $I = J$, l'operatore identità $\mathrm{id}_{L^2(I)}$ non è un operatore integrale.
4. Siano $[a, b], [c, d] \subseteq \mathbb{R}$. Sia $K \in C([a, b] \times [c, d])$ e $T_K \in \mathcal{B}(C[c, d], C[a, b])$ l'operatore integrale con nucleo integrale K. Allora $T_K \in \mathcal{K}(C[c, d], C[a, b])$.

Operatori compatti in spazi di Hilbert

Teor. Siano X uno spazio normato e H uno spazio di Hilbert. Se $T \in \mathcal{K}(X, H)$, allora esiste una successione $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}(X, H)$ di operatori di rango finito tale che $T_n \to T$ in $\mathcal{B}(X, H)$ per $n \to \infty$.

Oss. Dalla dimostrazione si vede che, se H è separabile, per ogni $T \in \mathcal{B}(X, H)$ esiste una successione $(T_n)_n$ di operatori di rango finito tali che $T_n x \to Tx$ per ogni $x \in H$.
Se T non è compatto, tuttavia, non si ha $\|T_n - T\|_{\mathrm{op}} \to 0$.

Coroll. Siano X uno spazio normato e H uno spazio di Hilbert. Sia $T \in \mathcal{B}(X, H)$. Sono equivalenti:

(i) $T \in \mathcal{K}(X, H)$;

(ii) esiste una successione $(T_n)_n$ in $\mathcal{B}(X, H)$ di operatori di rango finito tale che $T_n \to T$ in $\mathcal{B}(X, H)$.

Prop. Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert. Sia $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

(i) T ha rango finito se e solo se T^* ha rango finito, e in tal caso
$$\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im}(T^*).$$

(ii) $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ se e solo se $T^* \in \mathcal{K}(H_2, H_1)$.

Teoria di Fredholm

Nel seguito H è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{F}$. Scriviamo $I = \mathrm{id}_H$.

Oss. Per ogni $T \in \mathcal{B}(H)$ si ha $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim H$;
in particolare, se $\dim H < \infty$, si ha

$$T \text{ iniettivo} \iff T \text{ suriettivo} \iff T \text{ biiettivo.}$$

Nel caso $\dim H = \infty$, queste equivalenze in generale non valgono.

Def. Un operatore della forma $I - K$, dove $K \in \mathcal{K}(H)$, si dice *perturbazione compatta dell'identità*.

Teor. Sia $T \in \mathcal{B}(H)$ una perturbazione compatta dell'identità. Allora:

(i) $\operatorname{Im} T$ è un sottospazio vettoriale chiuso di H. In particolare, si ha la decomposizione ortogonale $H = \operatorname{Ker}(T^*) \oplus \operatorname{Im} T$.

(ii) $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker}(T^*) < \infty$.

Coroll. Sia $T \in \mathcal{B}(H)$ una perturbazione compatta dell'identità. Allora

$$T \text{ iniettivo} \iff T \text{ suriettivo} \iff T \text{ biiettivo} \iff T \text{ isomorfismo.}$$

Coroll. (alternativa di Fredholm) Sia $T \in \mathcal{B}(H)$ una perturbazione compatta dell'identità. Allora, si verifica uno e uno solo dei casi seguenti:

(a) l'equazione $Tx = y$ ha un'unica soluzione $x \in H$ per ogni dato $y \in H$;

(b) l'equazione $Tx = 0$ ha almeno una soluzione non nulla $x \in H$.

Spettro di operatori compatti, autoaggiunti e normali

Nel seguito $H \neq \{0\}$ è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{F}$.
Scriviamo $I = \mathrm{id}_H$.

Prop. Sia $T \in \mathcal{K}(H)$.

(i) Se $\dim H = \infty$, allora $0 \in \sigma(T)$.

(ii) $0 < \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda I) < \infty$ per ogni $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$.

(iii) $\sigma(T) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_p(T)$.

(iv) Per ogni $t > 0$, $\sharp\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq t\} < \infty$.

(v) $\sigma(T)$ è finito o numerabile, e nel secondo caso 0 è l'unico punto di accumulazione di $\sigma(T)$ in $\mathbb{F}$.

Prop. Sia $T \in \mathcal{B}(H)$.

(i) Se T è autoaggiunto, allora $\|T\|_{\mathrm{op}} \in \sigma(T)$ oppure $-\|T\|_{\mathrm{op}} \in \sigma(T)$.

(ii) Supponiamo che $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e che T sia compatto e normale. Allora esiste $\mu \in \sigma(T)$ con $|\mu| = \|T\|_{\mathrm{op}}$.

Il teorema spettrale per operatori compatti normali

Prop. Sia $T \in \mathcal{K}(H)$ normale. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, assumiamo $T = T^*$. Allora

$$\operatorname{Ker} T = \left(\bigcup_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} E_T(\lambda) \right)^{\perp}, \qquad \text{ove } E_T(\lambda) := \operatorname{Ker}(T - \lambda I).$$

Teor. (spettrale) Sia $T \in \mathcal{K}(H)$ normale. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, assumiamo $T = T^*$. Allora:

(i) $\sigma(T)$ è finito o numerabile, e nel secondo caso 0 è l'unico punto di accumulazione di $\sigma(T)$.

(ii) Per ogni $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, si ha $n_\lambda := \dim E_T(\lambda) < \infty$.

Sia $B_\lambda = \{e_1^\lambda, \dots, e_{n_\lambda}^\lambda\}$ una b.o.n. di $E_T(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Allora:

(iii) $B := \bigcup_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} B_\lambda$ è una base ortonormale di $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T}$.

(iv) Per ogni $x \in H$,

$$Tx = \sum_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} \lambda \sum_{j=1}^{n_\lambda} \langle x, e_j^\lambda \rangle e_j^\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} \lambda P_{E_T(\lambda)} x,$$

con convergenza incondizionata in H.

Coroll. Nelle stesse ipotesi del teorema, se H è separabile, allora H ha una base ortonormale fatta di autovettori di T.