

## Assunti fino alla lezione di oggi

- la nuova teoria deve contenere la fisica classica (principio di corrispondenza)
- esiste una costante universale  $\hbar$
- le grandezze fisiche variano nel discreto
- i sistemi fisici sono descritti (nella formulazione di Schrodinger) da una funzione  $\Psi(\mathbf{r},t)$  a valori complessi che per masse puntiformi a  $v \ll c$  e soggette a forze conservative di potenziale  $V$  è soluzione della equazione

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r},t)$$

- Secondo Born (inter. di Copenaghen o ortodossa)  $\Psi$  :
  - ha un significato probab.  $|\Psi(\vec{r},t)|^2 d\vec{r}$
  - soddisfa al principio di sovrapposizione

frazione di volte  
in cui misuro la  
particella nel  
volume  $d\vec{r}$  intorno  
a  $\vec{r}$

$$\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$$

$$a, b \in \mathbb{C}$$

da  $\Psi(\vec{r},t)$  si devono poter estrarre tutte le informazioni fisiche

- Quindi, tutte le particelle quantistiche possono essere descritte da un campo d'onda.

Questa è l'idea che è alla base della formulazione di Schrodinger della MECCANICA QUANTISTICA.

L'ampiezza di questo campo d'onda deve essere una funzione del posto  $\vec{r}$  e del tempo  $t$ .

Tale ampiezza è detta FUNZIONE D'ONDA  $\Psi(\vec{r}, t)$

Nella funzione  $\Psi$  devono essere nascoste tutte le informazioni fisiche del sistema quantistico in esame.

## Significato della funzione d'onda $\Psi(\mathbf{r},t)$

La funzione d'onda  $\Psi(\mathbf{r},t)$  di un sistema quantistico è tale per cui

$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r}$  = frazione di volte in cui  
sperimentalmente trovo la particella nel  
volume  $d\vec{r}$  intorno a  $\vec{r}$  = probabilità di trovare il  
sistema nel volume  $d\vec{r}$  intorno a  $\vec{r}$

**Cioè nel volume dove si trova il sistema:**

$$\int_{vol} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$$

**deve essere normalizzata alla unità**

## Proprietà della funzione d'onda $\Psi(\mathbf{r},t)$

- La funzione  $\Psi(\mathbf{r},t)$  potrà essere in generale una funzione a valori complessi.
- Se il sistema quantistico è contenuto nel volume  $\Omega$

$$\Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad \vec{r} \notin \Omega$$

$$\Psi(\vec{r}, t) \text{ continua e finita se } \vec{r} \in \Omega$$

$\Psi(\vec{r}, t)$  deve essere una funzione a quadrato sommabile nel suo dominio  $\Omega \subset R^3$

$$\Psi(\vec{r}, t) \in L^2(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = 1$$

- Deve valere il principio di sovrapposizione:  
se  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  sono due funzioni che descrivono un sistema quantistico, il sistema è anche descritto da una qualsiasi combinazione lineare

$$\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$$

$$a, b \in \mathbb{C}$$

In conclusione le funzioni  $\Psi$ ,  
che descrivono un sistema quantistico,  
costituiscono uno **spazio vettoriale lineare**

somma  $\Psi_1, \Psi_2 \in L^2(\Omega), \quad a, b \in \mathbb{C}$

$$\Psi = (a\Psi_1 + b\Psi_2) \in L^2(\Omega)$$

prodotto scalare

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{\Omega} \Psi_1^* \Psi_2 d\vec{r} \in \mathbb{C}$$

# VALOR MEDIO DI UNA QUALSIASI GRANDEZZA FISICA

Se  $\Psi(\vec{r}, t)$  è la funzione d'onda di un qualsiasi sistema fisico quantistico,

dopo quanto visto

- i) sul significato di  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$   
 ii) sul valor medio del vettore posizione  $\langle \vec{r} \rangle$   
 iii) sul valor medio del vettore impulso  $\langle \vec{p} \rangle$

viene naturale associare

ad ogni grandezza fisica classica	$F$
un operatore quantistico	$\hat{F}$

## La costruzione dell'operatore associato

alla grandezza fisica  $F = F(\vec{r}, \vec{p}, t)$

avviene attraverso la sostituzione nella  $F$  classica  
(funzione della posizione, dell'impulso e del tempo)  
degli operatori    posizione     $\vec{r} \rightarrow \hat{\vec{r}}$ .

e impulso  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ .

## Quindi riassumendo

- la nuova teoria deve contenere la fisica classica (principio di corrispondenza)
- esiste una costante universale  $\hbar$
- le grandezze fisiche variano nel discreto
- i sistemi fisici sono descritti (nella formulazione di Schrodinger) da una funzione  $\Psi(\mathbf{r},t)$  a valori complessi che per masse puntiformi a  $v \ll c$  e soggette a forze conservative di potenziale  $V$  è soluzione della equazione

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r},t)$$

- Secondo Born (inter. di Copenaghen o ortodossa)  $\Psi$  :
  - ha un significato probab.  $|\Psi(\vec{r},t)|^2 d\vec{r}$
  - soddisfa al principio di sovrapposizione
  - è definibile una operazione  $\int_{\Omega} \Psi_1^* \Psi_2 d\vec{r} \in \mathbb{C}$

frazione di volte  
in cui misuro la  
particella nel  
volume  $d\vec{r}$  intorno  
a  $\vec{r}$

$\Psi(\vec{r},t) \in L^2(\Omega)$  è un elemento di un insieme che soddisfa all'algebra degli spazi vettoriali

Per ogni sistema quantistico  
alla grandezza fisica  $F$ , funzione dei vettori  
posizione e impulso e del tempo,  
che lo descrive corrisponde un operatore

$$\hat{F} = \hat{F}(\hat{\vec{r}}, -i\hbar\vec{\nabla}, t)$$

che opera sulle funzioni d'onda del sistema.

Il valor medio della grandezza fisica diventa:

$$\langle F \rangle = \langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^*(\vec{r}, t) \left[ \hat{F} \cdot \Psi(\vec{r}, t) \right] d\vec{r}$$



# PROPRIETA' DEGLI OPERATORI QUANTISTICI

- Nella meccanica quantistica sono importanti solo gli operatori lineari.

$\hat{F}$  è un operatore lineare che agisce sulle funzioni  $\Psi$  di stato del sistema quantistico.

$\Psi$  sono funzioni a valori complessi e a quadrato sommabile nel loro dominio di definizione  $\Omega \in R^3$

$$\Psi \in L^2(\Omega)$$

cioè

$$\hat{F}(a\Psi_1 + b\Psi_2) = a(\hat{F}\Psi_1) + b(\hat{F}\Psi_2) \in L^2(\Omega)$$

$$\Psi_1, \Psi_2 \in L^2(\Omega)$$

$$a, b \in C$$

•Gli operatori lineari associabili a grandezze fisiche sono **autoaggiunti o hermitiani**.

$\hat{F}$  è autoaggiunto o hermitiano se

$$\int_{\Omega} \Psi^* (\hat{F} \Psi) d\vec{r} = \int_{\Omega} (\hat{F} \Psi)^* \Psi d\vec{r}$$

Se  $\hat{F}$  è autoaggiunto

$$\langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^* (\hat{F} \Psi) d\vec{r} \in R$$

condizione necessaria visto che  $\langle F \rangle$   
è la media di una grandezza fisica.

## Siamo arrivati ad enunciare:

- principio di corrispondenza
- esiste una costante universale  $\hbar$
- le grandezze fisiche variano nel discreto
- i sistemi fisici sono descritti (nella formulazione di Schrodinger) da una funzione  $\Psi(\mathbf{r},t)$  a valori complessi che per masse puntiformi a  $v \ll c$  e soggette a forze conservative di potenziale  $V$  è soluzione della equazione

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t)$$

- Secondo Born (inter. di Copenaghen o ortodossa)  $\Psi$  :

- frazione di volte  
in cui misuro la  
particella nel  
volume  $d\vec{r}$  intorno  
a  $\vec{r}$*
- ha un significato probab.  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r}$
  - soddisfa al principio di sovrapposizione
  - è definibile una operazione  $\int_{\Omega} \Psi_1^* \Psi_2 d\vec{r} \in \mathbb{C}$

$\Psi(\vec{r}, t) \in L^2(\Omega)$  spazio vettoriali

- Le grandezze fisiche sono operatori costruibili dalla relazione classica attraverso la regola

$$F_{CL} = F(\vec{r}, \vec{p}; t) \qquad \hat{F}_q = \hat{F}(\hat{\vec{r}}, -i\hbar \vec{\nabla}, t)$$

- Le grandezze fisiche relative al sistema si estraggono dalla funzione d'onda attraverso

$$\langle F \rangle = \int_{\Omega} \Psi^*(\vec{r}, t) [\hat{F} \cdot \Psi(\vec{r}, t)] d\vec{r}$$

# **AUTOVALORI E AUTOFUNZIONI DEGLI OPERATORI MISURA DI GRANDEZZE FISICHE**

- Autovalori e autofunzioni di un operatore quantistico;
- Misura di una grandezza fisica;
- Significato fisico degli autovalori.
- Misura contemporanea di più grandezze fisiche:
  - \* Operatori con autofunzioni comuni;
  - \* Principio di indeterminazione di Heisenberg;
  - \* Parentesi di commutazione;
  - \* Principio di complementarità;

# TEORIA DELLA MISURE: AUTOVALORI E AUTOFUNZIONI DI UN OPERATORE QUANTISTICO

Eseguiamo adesso il ragionamento percorso da Bohr e Heisenberg, che va sotto il nome di interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica.

Dato un generico stato fisico di un sistema quantistico descritto dalla funzione d'onda

$$\Psi(\vec{r}, t) \in L^2(\Omega), \quad \vec{r} \in \Omega \subset R^3$$

soluzione della equazione di Schrodinger

e data una grandezza fisica  $F$  del sistema a cui è associato l'operatore autoaggiunto (o hermitiano)  $\hat{F}$ ,

Sappiamo, dal significato di Born della funzione d'onda, che il valor medio di  $F$  è

$$\langle F \rangle_{th.quant} = \langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^*(\vec{r}, t) \left[ \hat{F} \cdot \Psi(\vec{r}, t) \right] d\vec{r}$$

Da un punto di vista sperimentale il valore della grandezza fisica  $F$  si ottiene attraverso la media su un grande numero di misure e corrisponde a

$$\langle F \rangle_{sper} = \left[ \begin{array}{l} \text{la media di un} \\ \text{grande numero di misure} \\ \text{della grandezza fisica} \end{array} \right]$$

Se  $N$  sono le misure sperimentali con  $N$  molto grande ed  $f_i$  i risultati delle singole misure:

$$\langle F \rangle_{sper} = \sum_{i=1}^{N \rightarrow \infty} \frac{f_i}{N}$$

Se tutto è corretto, calcolo e misura:

$$\langle F \rangle_{sper} = \langle F \rangle_{quant}$$

Dalla teoria della misura si sa che sperimentalmente si commettono alcune indeterminazioni (errori) nella determinazione sperimentale di  $F$ :

- incertezza casuale  $\Delta F_{\text{cas}}$
- incertezza sistematica  $\Delta F_{\text{sist}}$
- incertezza strumentale  $\Delta F_{\text{strm}}$

$$(\Delta F) = (\Delta F)_{\text{cas}} + (\Delta F)_{\text{sist}} + (\Delta F)_{\text{strm}}$$

$$(\Delta F)_{\text{sper}}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(f_i - \langle F \rangle)^2}{N} = \langle (F - \langle F \rangle)^2 \rangle$$

Dal significato probabilistico di  $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  che sostituisce la traiettoria classica di una massa puntiforme, si può prevedere la comparsa di una ulteriore incertezza che chiameremo ‘incertezza quantistica’.

Da un punto di vista quantistico possiamo estendere la definizione classica di incertezza sostituendo i significati quantistici ai vari termini:

$$(\Delta F)_{quant}^2 = \left\langle \left( \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \right)^2 \right\rangle$$

Quindi, se il sistema quantistico si trova in uno stato descritto dalla funzione d'onda  $\Psi$  soluzione dell'equazione di Schrodinger il valor medio della grandezza fisica  $F$  vale:

$$\langle F \rangle_{quant} = \langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^*(\vec{r}, t) \left[ \hat{F} \cdot \Psi(\vec{r}, t) \right] d\vec{r}$$

La sua incertezza (indeterminazione) quantistica può essere definita:

$$\begin{aligned} (\Delta F)_{quant}^2 &= \left\langle \left( \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \right)^2 \right\rangle = \\ &= \int_{\Omega} \Psi^*(\vec{r}, t) \left[ \left( \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \right)^2 \cdot \Psi(\vec{r}, t) \right] d\vec{r} \end{aligned}$$



Abbiamo quindi una indeterminazione complessiva che tiene conto di:

Indeterminazione classica sperimentale	Ind. quantistica
ind. casuale; ind. sistematico; ind. strumentale	legata a $\Psi(\mathbf{r},\mathbf{t})$
$(\Delta F)_{class}^2$	$(\Delta F)_{quant}^2$

L'indeterminazione classica può essere analizzata e limitata (è una indeterminazione epistemica, cioè dipende dai limiti della nostra conoscenza, non dipende dalla natura):

- ind. casuale si limita con  $N \rightarrow$  infinito;
- ind. sistematica si limita con l'attenta analisi;
- ind. strumentale si limita con strumenti sofisticati

**SI PUO' ELIMINARE L'INDERMINAZIONE QUANTISTICA ?**

No, perché è intrinseca alla descrizione del sistema attraverso la funzione  $\Psi$  che ha un significato probabilistico.

Cioè l'indeterminazione quantistica è intrinseca nella natura, è non epistemica (non dipende dai nostri limiti cognitivi).

Ci chiediamo però se esistono stati del sistema in cui l'indeterminazione di  $\mathbf{F}$  si può annullare:

$$(\Delta F)_{quant}^2 = \left\langle \left( \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \right)^2 \right\rangle = 0$$
$$\int_{\Omega} \Psi^*(\vec{r}, t) \left[ \left( \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \right)^2 \cdot \Psi(\vec{r}, t) \right] d\vec{r} = 0$$

Dalla definizione di operatori hermitiani:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \right) \cdot \Psi(\vec{r}, t) \right]^* \left[ \left( \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \right) \cdot \Psi(\vec{r}, t) \right] d\vec{r} = 0$$

$$\int_{\Omega} \left| \left[ \left( \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \right) \cdot \Psi(\vec{r}, t) \right] \right|^2 d\vec{r} = 0$$

Che implica l'annullamento della funzione integranda:

$$\left(\hat{F} - \langle \hat{F} \rangle\right) \cdot \Psi = 0$$

Da cui

$$\hat{F} \cdot \Psi - \langle \hat{F} \rangle \Psi = 0$$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \nwarrow \\ \hat{F} \cdot \Psi & = & \langle \hat{F} \rangle \Psi \\ \text{operatore} & & \text{scalare} \end{array}$$

Quindi, se la funzione d'onda  $\Psi$  del sistema soddisfa ad una equazione del tipo

$$\hat{F} \cdot \Psi = f\Psi$$

l'indeterminazione del valore della grandezza fisica  $F$  si annulla:

$$\langle F \rangle = f \qquad (\Delta F) = 0$$

Una equazione del tipo

$$\hat{F} \cdot \Psi_i = f_i \Psi_i \qquad \text{è detta equazione agli autovalori di } F}$$

$$i = 1, 2, \dots, n \qquad \Psi_i \in L^2(\Omega) \qquad f_i \in R$$

La risoluzione di tale eq. differenziale permette di trovare  $\Psi_i(r, t)$  dette autofunzioni

e i valori  $f_i$  detti autovalori

Si può dimostrare che:

i) qualsiasi funzione  $\Psi(\vec{r}, t) \in L^2(\Omega)$

può essere scritta come sviluppo in serie delle soluzioni  $\Psi_i(\vec{r}, t)$  autofunzioni dell'equazione agli autovalori dell'operatore  $F$ .

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^n a_i \Psi_i(\vec{r}, t)$$

$$a_i \in \mathbb{C}$$

ii) le autofunzioni  $\Psi_i(\vec{r}, t)$  sono ortonormali.

$$\text{Cioè: } \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \int_{\Omega} \Psi_i^*(\vec{r}, t) \Psi_j(\vec{r}, t) d\vec{r} = \delta_{i,j}$$

$$\delta_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{bmatrix} \text{ delta di Kronecker}$$

$$\text{quindi } a_i = \int_{\Omega} \Psi_i^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) d\vec{r}$$

Perciò se ritorniamo ad un sistema nello stato generico  $\Psi$  e valutiamo la media della grandezza fisica  $F$  del nostro sistema quantistico:

$$\begin{aligned}
 \langle F \rangle_{quant} &= \langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^*(\vec{r}, t) [\hat{F} \cdot \Psi(\vec{r}, t)] d\vec{r} = \\
 &= \int_{\Omega} \left[ \sum_i a_i^* \Psi_i^*(\vec{r}, t) \right] \hat{F} \cdot \left[ \sum_j a_j \Psi_j(\vec{r}, t) \right] d\vec{r} = \\
 &= \sum_{i,j} a_i^* \left[ \int_{\Omega} \Psi_i^* \hat{F} \cdot \Psi_j d\vec{r} \right] a_j = \sum_{i,j} a_i^* \left[ \int_{\Omega} \Psi_i^* f_j \Psi_j d\vec{r} \right] a_j \\
 &= \sum_i |a_i|^2 f_i \\
 \langle F \rangle_{quant} &= \sum_i |a_i|^2 f_i
 \end{aligned}$$

Sperimentalmente abbiamo

gruppi di misure con  
lo stesso risultato

frazione delle volte in  
cui ottengo lo stesso  
risultato

$$\langle F \rangle_{sper} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{N} = \sum_j \frac{f_j n_j}{N} = \sum_j f_j \left( \frac{n_j}{N} \right)$$

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_{sper} &= \sum_j \left( \frac{n_j}{N} \right) f_j = \sum_{i=1}^M (prob. \text{ autoval.} - i) f_i = \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &= \langle F \rangle_{quant} = \sum_i |a_i|^2 f_i \end{aligned}$$

Accettando l'eguaglianza tra le due procedure:

$|a_i|^2$       pesi statistici

$f_i$       valori della grandezza fisica

Quindi ritornando al nostro problema di una misurazione della grandezza fisica  $F$ ,

quando si effettua una misura di  $F$  sul sistema descritto dalla funzione d'onda  $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})$

si ottiene come risultato

uno degli  $f_i$  autovalori reali della equazione agli autovalori di  $F$ .

# COSA SUCCEDDE QUANDO SI EFFETTUANO TANTE MISURAZIONI ?

Facendo tante misurazioni (con  $n$  molto grande)  
si ottengono tutti i valori  $f_i \quad i=1,2,\dots,n$   
degli autovalori dell'operatore  $F$

con una frequenza proporzionale ai coefficienti  
 $|a_i|^2$  dello sviluppo della funzione d'onda del  
sistema.

Essendo 
$$\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Psi^* \Psi d\vec{r} &= 1 = \int_{\Omega} \sum_i a_i^* \Psi_i \sum_j a_j \Psi_j d\vec{r} = \\ &= \sum_i |a_i|^2 \end{aligned}$$

si può concludere che  $|a_i|^2$  è la probabilità che  
in una misurazione si ottenga il valore  $f_i$ .



# SIGNIFICATO FISICO DEGLI AUTOVALORI

Quando si effettua una singola misura di una grandezza fisica  $F$  su un sistema quantistico descritto dalla funzione d'onda  $\Psi$  soluzione della equazione di Schrodinger caratteristica del sistema in questione,

si otterrà come risultato uno degli autovalori  $f_i$  dell'operatore  $F$ .

Potremo quindi dire con certezza che dopo la misura il sistema si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda  $\Psi_i$

autostato  $i$ -esimo dell'equazione agli autovalori

$$\hat{F} \cdot \Psi_i = f_i \Psi_i$$

- PRINCIPIO DEL COLLASSO DELLA FUNZIONE D'ONDA

Facendo molte misure (**n**) della grandezza fisica F per il sistema sempre nello stato iniziale di funzione d'onda  $\Psi$

otterremo per ogni misura valori distinti  $f_i$  **i=1,2...n**

con una probabilità di ottenere il valore  $f_i$  dato da

$$|a_i|^2 = |\langle \Psi_i | \Psi \rangle|^2$$

Infatti sperimentalmente abbiamo

gruppi di misure con  
lo stesso risultato

frazione delle volte in  
cui ottengo lo stesso  
risultato

$$\langle F \rangle_{\text{sper}} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{N} = \sum_j \frac{f_j n_j}{N} = \sum_j f_j \left( \frac{n_j}{N} \right)$$


$$\begin{aligned} \langle F \rangle_{\text{sper}} &= \sum_j \left( \frac{n_j}{N} \right) f_j = \sum_{i=1}^M (\text{prob. autoval.} - i) f_i = \\ &= \langle F \rangle_{\text{quant}} = \sum_i |a_i|^2 f_i \end{aligned}$$

A questo punto possiamo anche confrontare le diverse formulazioni della meccanica quantistica.


La formulazione di Dirac, quella di Schrodinger e quella di Heisenberg.

Esse nascono dall'isomorfismi agli spazi vettoriali con la stessa dimensione.


$$\begin{aligned}
 \langle F \rangle_{quant} &= \\
 \langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle &= \int_{\Omega} \Psi^*(\vec{r}, t) [\hat{F} \cdot \Psi(\vec{r}, t)] d\vec{r} = \\
 &= \int_{\Omega} \left[ \sum_i a_i^* \Psi_i^*(\vec{r}, t) \right] \hat{F} \cdot \left[ \sum_j a_j \Psi_j(\vec{r}, t) \right] d\vec{r} = \\
 &= \sum_{i,j} a_i^* \left[ \int_{\Omega} \Psi_i^* \hat{F} \cdot \Psi_j d\vec{r} \right] a_j = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix}^* M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



formulazione di Dirac



formulazione di Schrodinger



formulazione di Heisenberg

## Schrodinger

$$L^2(\Omega)$$

$$\hat{F}$$

$$\Psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \Phi(\vec{r}, t) = \hat{F} \cdot \Psi$$

Le grandezze fisiche sono degli operatori di molt. e deriv. nello spazio che agiscono su funzioni

$$\langle F \rangle_q = \int_{\Omega} \Psi^* [\hat{F} \cdot \Psi] d\vec{r}$$

## Heisenberg

spazio dei vettori colonna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \xrightarrow{M} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M(n \times n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Le grandezze fisiche sono matrici che agiscono su vettori colonna

$$\langle F_q \rangle = (a_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad a_n)^* M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

## Dirac

spazio vett. astratto

$$|\Psi\rangle \Rightarrow |\Phi\rangle = \hat{F} |\Psi\rangle$$

Le grandezze fisiche sono operatori astratti che agiscono su vettori astratti di stato

$$\langle F \rangle_q = \langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle$$

# MISURA CONTEMPORANEA DI PIU' GRANDEZZE FISICHE DI UN SISTEMA QUANTISTICO

Chiediamoci adesso se esistono condizioni in cui il sistema fisico quantistico ha indeterminazione nulla per diverse grandezze fisiche.

Prendiamo due grandezze fisiche **F** e **G**.

Affinchè possa annullarsi l'indeterminazione del sistema nello stato  $\Psi$  deve valere contemporaneamente

$$\left\langle \left( \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \right)^2 \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{F} \cdot \Psi = f \Psi$$

$$\left\langle \left( \hat{G} - \langle \hat{G} \rangle \right)^2 \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{G} \cdot \Psi = g \Psi$$

Dove  $f$  e  $g$  sono degli scalari.

Cioè  $\Psi$  deve essere contemporaneamente autofunzione degli operatori  $\hat{F}$  e  $\hat{G}$

Se gli operatori  $\hat{F}$  e  $\hat{G}$  hanno le stesse autofunzioni  $\Psi_n$

$$\hat{F}\Psi_n = f_n \Psi_n$$

$$\hat{G}\Psi_n = g_n \Psi_n$$

Il sistema nello stato  $\Psi_n$  avrà valori

$$\langle \hat{F} \rangle = f_n \qquad (\Delta F) = 0$$

$$\langle \hat{G} \rangle = g_n \qquad (\Delta G) = 0$$

Se  $\hat{F}$  e  $\hat{G}$  non hanno le stesse autofunzioni

$$\hat{F}\Psi_n = f_n \Psi_n$$

$$\hat{G}\Phi_j = g_j \Phi_j$$

quando avviene la misura di  $F$  nello stato  $\Psi_n$   
si ottiene l'autovalore  $f_n$

la misura di  $G$  farà passare il sistema in un autostato di  $G$   $\Phi_j$  di autovalore  $g_j$ .

L'autostato di  $G$  a cui il sistema transirà sarà dato con una probabilità  $p_j = |b_j|^2$

tale per cui 
$$\Psi_n = \sum_j b_j \Phi_j$$

Quindi non si potranno determinare le due grandezze fisiche con l'accuratezza desiderata.

L'accuratezza con cui si determina l'una influenzerà quella dell'altra.

In conclusione, in un sistema quantistico posso conoscere due grandezze fisiche **F** e **G** con indeterminazione nulla se:

$$\hat{F}\Psi_n = f_n \Psi_n$$

$$\hat{G}\Psi_n = g_n \Psi_n$$

Ovviamente  $\Psi_n$  devono soddisfare l'eq. di Schrodinger per il sistema in questione.

Applicando l'operatore **G** alla prima e l'operatore **F** alla seconda:

$$\hat{G} \cdot (\hat{F} \cdot \Psi_n) = \hat{G} \cdot (f_n \Psi_n) = f_n g_n \Psi_n$$

$$\hat{F} \cdot (\hat{G} \cdot \Psi_n) = \hat{F} \cdot (g_n \Psi_n) = g_n f_n \Psi_n$$



Sottraendo membro a membro le due equazioni (la seconda dalla prima):

$$\begin{aligned}\hat{F} \cdot (\hat{G} \cdot \Psi_n) - \hat{G} \cdot (\hat{F} \cdot \Psi_n) &= 0 \\ (\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}) \cdot \Psi_n &= 0 \\ (\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}) &= 0\end{aligned}$$

In conclusione, due operatori associati a grandezze fisiche possono essere conosciuti contemporaneamente con indeterminazione nulla se e solo se

$$(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}) = 0$$

che equivale a dire che gli operatori hanno le stesse autofunzioni.

# PARENTESI DI COMMUTAZIONE

## COMMUTATORI

Due operatori lineari

$\hat{F}$  e  $\hat{G}$  hanno autofunzioni comuni se  
e solo se l'operatore

$$\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = 0$$

L'operatore  $\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = [\hat{F}, \hat{G}]$  è detto  
*commutatore*.

Se  $\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = [\hat{F}, \hat{G}] \neq 0$

le autofunzioni dei due operatori non sono  
comuni.

# PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG

In conclusione:  $K$  diverse grandezze fisiche  $A_i$  ( $i=1,2,\dots,K$ ) di un sistema quantistico possono essere misurate con precisione desiderata se e solo se il loro commutatore è nullo.

Cioè  $[\hat{A}_j, \hat{A}_m] = 0 \quad j \neq m \quad j, m = 1, 2, \dots K$

Se il commutatore non è nullo la precisione

$\Delta A_i \quad i = 1, 2, \dots K$  con cui si possono

determinare le grandezze fisiche si influenza vicendevolmente, si può dimostrare (vedi ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA. INTRODUZIONE ALLA MECCANICA QUANTISTICA Cesare Rossetti. (LIBRERIA UNIVERSITARIA LEVROTTO E BELLA, Torino) che

$$\Delta A_j \Delta A_m \geq \left| \frac{1}{2} \langle \Psi | [\hat{A}_j, \hat{A}_m] | \Psi \rangle \right|$$
$$j \neq m \quad j, m = 1, 2, \dots K$$

Tale relazione è detto

**Principio di Indeterminazione di Heisenberg**

Cosa succederà se, essendo il sistema fisico in un generico stato  $\Psi$ , vogliamo misurare insieme la grandezza fisica  $F$  e la grandezza fisica  $G$  ?

Se  $G$  è rappresentata quantisticamente da un operatore che ha le stesse autofunzioni di  $F$ :

- 1) il sistema è inizialmente nello stato  $\Psi$ ;
- 2) misurando  $F$   $\Psi \rightarrow \Psi_n$  con autovalore  $f_n$ ;
- 3) misurando  $G$  lo stato rimane  $\Psi_n$  con autovalore  $g_n$ ;

perchè  $\hat{G}\Psi_n = g_n \Psi_n$

Quindi si possono misurare due grandezze fisiche senza indeterminazione se e solo se hanno le autofunzioni comuni:

$$\hat{F}\Psi_n = f_n \Psi_n$$

$$\hat{G}\Psi_n = g_n \Psi_n$$

# PRINCIPIO DI COMPLEMENTARIETA'

In meccanica quantistica lo stato di un sistema è determinato da

*un insieme completo di grandezze fisiche*

cioè dall'insieme costituito dal massimo numero di grandezze fisiche corrispondenti a operatori mutuamente commutanti.

Per un dato sistema fisico la scelta dell'insieme completo di grandezze fisiche che ne permettono una descrizione completa non è unica, ma sono permessi stati caratterizzati da un insieme completo di grandezze fisiche diverse.

La determinazione effettiva dello stato di un sistema quantistico è fornita da un insieme massimale di misure contemporanee di variabili fisiche indipendenti:

i risultati di tali misure forniscono i valori dell'insieme completo di grandezze fisiche scelte per caratterizzare lo stato del sistema.

Ovviamente i valori delle grandezze fisiche sono *autovalori* dei corrispondenti

*operatori quantistici mutuamente commutanti.*

Quindi lo stato di un sistema sarà definito da una funzione d'onda  $\Psi$

che dipende dalla posizione e dal tempo

$$\Psi(\vec{r}, t)$$

ma anche da un insieme (che sarà chiamato “set”) di parametri (detti numeri quantici)  $a_1, a_2, \dots, a_N$  corrispondenti agli autovalori dell'insieme completo di grandezze fisiche scelto per descrivere il sistema

$$\Psi(\vec{r}, t, a_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

## *Principio di Complementarietà di Bohr*

Una possibile enunciazione dice che:

la completa descrizione dello stato di un sistema fisico avviene attraverso la conoscenza di un “set” di grandezze fisiche associate ad un “set” completo di operatori mutuamente commutanti.

Il set di grandezze fisiche con operatori commutanti non è unico, esistono cioè più set detti **complementari**,

nel senso che lo stato del sistema può essere descritto in modi mutuamente esclusivi scegliendo un “set” di grandezze fisiche commutanti o uno qualunque dei “set” equivalenti.



# RIASSUNTO dei PRINCIPI:

- principio di corrispondenza
- i sistemi fisici sono descritti da un vettore di stato che nella formulazione di Schrodinger è una funzione  $\Psi(\mathbf{r},t)$  a valori complessi

• Secondo Born (inter. di Copenaghen o ortodossa)  $\Psi$  :

- frazione di volte in cui misuro la particella nel volume  $d\vec{r}$  intorno a  $\vec{r}$*
- ha un significato probab.  $|\Psi(\vec{r},t)|^2 d\vec{r}$
  - soddisfa al principio di sovrapposizione
  - è definibile una operazione  $\int_{\Omega} \Psi_1^* \Psi_2 d\vec{r} \in \mathbb{C}$

$\Psi(\vec{r},t) \in L^2(\Omega)$  spazio vettoriali

- Le grandezze fisiche sono operatori costruibili dalla relazione classica attraverso la regola

$$F_{CL} = F(\vec{r}, \vec{p}; t) \qquad \hat{F}_q = \hat{F}(\hat{\vec{r}}, -i\hbar \vec{\nabla}, t)$$

- Le grandezze fisiche relative al sistema si estraggono dalla funzione d'onda attraverso

$$\langle F \rangle = \int_{\Omega} \Psi^*(\vec{r},t) [\hat{F} \cdot \Psi(\vec{r},t)] d\vec{r}$$

- principio del collasso di  $\Psi(\mathbf{r},t)$  (teoria della misura)
- principio di indeterminazione
- principio di complementarità

# PRINCIPI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Della Meccanica Quantistica si può dare una fondazione assiomatica con tre principi:

## 1° Assioma - L'osservabile.

Esiste un «vettore»  $\psi$  il quale contiene in sé tutte le informazioni che su di una particella si possono conoscere, precisamente esso permette di calcolare per ogni grandezza fisica, detta secondo Dirac *osservabile*, i valori possibili risultanti da una misura (che sono ovviamente reali) e le corrispondenti probabilità che la grandezza ha di assumere tali valori ad un generico istante di tempo.

## 2° Assioma - L'operatore.

Ad ogni osservabile si fa corrispondere, nella formulazione matematica, un operatore hermitiano il quale ha autovalori reali, l'insieme di tutti gli autovalori costituisce l'insieme di tutti i valori numerici che si possono trovare in una misura dell'osservabile corrispondente, mentre l'insieme degli autovettori corrispondenti rappresentano gli autostati del sistema (la particella) relativi a tali risultati di un processo di misura.

## 3° Assioma - L'evoluzione.

L'evoluzione spazio-temporale di un sistema fisico è regolata dall'equazione di Schroedinger, purché all'istante iniziale lo stato di un sistema fisico sia determinato mediante una osservazione del maggior numero possibile di osservabili tra loro compatibili ed indipendenti; tale osservazione è detta osservazione massima.