Istituzioni di A & G — ALGEBRA, lezione 15-16

26-10-22

Scanned with CamScanner

Esercizi dai fogli 4 e 5

5.15. Sia $H < G$. Per ogni $g \in G$ definiamo

$$gHg^{-1} = \{ ghg^{-1} / h \in H \} \quad \text{sottogruppo coniugato}$$

a) $gHg^{-1} \neq \emptyset \qquad e \in H \Rightarrow \qquad e = geg^{-1} = g \cdot g^{-1}$

Criterio di sottogruppo: siano $gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1} \in gHg^{-1}$

Allora: $gh_1g^{-1}(gh_2g^{-1})^{-1} = gh_1g^{-1} g h_2^{-1} g^{-1} = g \underbrace{h_1 h_2^{-1}}_{\in H} g^{-1}$

Quindi $gh_1g^{-1}(gh_2g^{-1}) \in gHg^{-1}$

b) H normale $(H \lhd G) \Rightarrow gHg^{-1} = H$

c) $Core_G(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$

i) $Core_G(H)$ è sottogruppo (intersezione di sottogruppi è sottogruppo)

ii) $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} \subseteq uHu^{-1} = H$

Scanned with CamScanner

iii) $Core_G(H)$ normale: usiamo criterio: sia $x \in G$

$$x\, Core_G(H)\, x^{-1} = x\left(\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}\right)x^{-1} = \bigcap_{g \in G} xgHg^{-1}x^{-1} =$$

$$= \bigcap_{g \in G} xgH(xg)^{-1} \underset{\uparrow}{=} \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = Core_G(H)$$

$G \xrightarrow{x} G$ biezione.
$g \rightarrow xg$

d) $N \triangleleft G$, $N \subseteq H \Rightarrow N \subseteq Core_G(H)$:

dim: $N \subseteq H \Rightarrow \forall g,\ N \underset{\uparrow}{=} gNg^{-1} \subseteq gHg^{-1} \Rightarrow$

N normale

$$N \subseteq \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = Core_G(H)$$

osserv: quindi, $Core_G(H)$ è il più grande sottogruppo normale contenuto in H.

Scanned with CamScanner

5.18. Sia G un gruppo. $\forall a, b \in G$

$$[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$$ (commutatore di a e b)

Sia $[G,G] = \langle \{[a,b] \mid a,b \in G\} \rangle$ il sottogruppo generato da tutti gli elementi commutatori.

a) $[G,G] \trianglelefteq G$

dim: sia $x \in G$, $[a,b]$ commutatore, allora:

$$x[a,b]x^{-1} = xaba^{-1}b^{-1}x^{-1} = (xax^{-1})(xbx^{-1})(xa^{-1}x^{-1})(xb^{-1}x^{-1})$$
$$= (xax^{-1})(xbx^{-1})(xax^{-1})^{-1}(xbx^{-1})^{-1} = [xax^{-1}, xbx^{-1}] \in [G,G]$$

b) $G/[G,G]$ abeliano:

$G/[G,G]$ abeliano $\iff \forall \bar{a}, \bar{b} \in G/[G,G]$ $\quad \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$

$\iff \forall \bar{a}, \bar{b} \in G/[G,G]$ $\quad \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1} = \bar{u} \iff aba^{-1}b^{-1} \in [G,G]$

$\square$

Scanned with CamScanner

c) $H \trianglelefteq G$, dimostrare che $G/_H$ abeliano se e solo se $[G,G] \subseteq H$

dim: $G/_H$ abeliano $\Leftrightarrow$ $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G/_H$

$\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1} = \bar{u} \in G/_H \Leftrightarrow \forall a, b \in G \quad aba^{-1}b^{-1} \in H$

$\Leftrightarrow [G,G] \subseteq H$

$\square$

Foglio 4, es 10. G, H gruppi finiti, $\varphi : G \to H$ om.

a) $\forall g \in G \quad ord(\varphi(g)) \mid ord(g)$

a) $u_H = \varphi(g)^{ord(g)} = \varphi(g^{ord(g)}) = \varphi(u_G) = u_H$

$\Rightarrow ord\, \varphi(g) \mid ord\,(g)$

b) φ iniettivo:

$\varphi(g^{ord(\varphi(g))}) = \varphi(g)^{ord(\varphi(g))} = u_H \underset{\varphi \text{ iniett}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow g^{ord(\varphi(g))} = u_G \Rightarrow \quad ord(g) \mid ord(\varphi(g))$

Scanned with CamScanner

Foglio 4, es 4 $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $f_{a,b}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to ax+b$

a) se $f_{a,b}$ iniettiva $\Rightarrow a \neq 0$

se $a \neq 0$, $f_{a,b}$ biettiva:

$y = f_{a,b}(x) = ax+b \Rightarrow x = a^{-1}(y-b) = a^{-1}y - ba^{-1}$

quindi $f_{a,b}^{-1} = f_{a^{-1},-ba^{-1}}$

b) $\mathrm{Aff}_1(\mathbb{R}) = \{ f_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ è sottog.

- $Id = f_{1,0} \in \mathrm{Aff}_1(\mathbb{R})$
- criterio per i sottogruppi:

$f_{a,b}, f_{c,d} \in \mathrm{Aff}_1(\mathbb{R})$

$f_{ab} \circ (f_{c,d})^{-1}(x) = f_{ab} \circ f_{c^{-1},-dc^{-1}}(x) =$

$f_{ab}(c^{-1}x - dc^{-1}) = a(c^{-1}x - dc^{-1}) + b =$

$= ac^{-1}x + b - adc^{-1} = f_{ac^{-1}, b-adc^{-1}}(x)$

Scanned with CamScanner

Quindi $f_{a,b} \circ (f_{c,d})^{-1} \in Aff_1(\mathbb{R})$

c) $Aff_1(\mathbb{R})$ non è abeliano:

$$f_{a,b} \circ f_{c,d}(x) = f_{ab}(cx+d) = acx + ad + b$$

$$\neq$$

$$f_{c,d} \circ f_{ab}(x) = f_{cd}(ax+b) = acx + cb + d$$

d), e) $\quad \varphi : Aff_1(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$$f_{a,b} \longrightarrow a$$

φ omo: $\quad \varphi(f_{ab} \cdot f_{cd}) = \varphi(f_{ac,\, ad+b}) = ac =$

$$= \varphi(f_{ab}) \cdot \varphi(f_{cd})$$

φ epi: ovvio

Ker φ? $\quad f_{a,b} \in \ker \varphi \iff 1 = \varphi(f_{ab}) = a$

$$\ker \varphi = \{ f_{1,b} \mid b \in \mathbb{R} \} \trianglelefteq Aff_1(\mathbb{R})$$

Scanned with CamScanner