Def. Data una PDE del tipo

$$F\left(\{D^\alpha u\}_\alpha, u, x, t\right) = 0$$

diciamo che essa è:

(i) lineare se $\forall u, v$ funzioni incognite e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$F\left(\{D^\alpha(\lambda u+\mu v)\}_\alpha, \lambda u+\mu v, x, t\right) = \lambda F\left(\{D^\alpha u\}_\alpha, u, x, t\right) + \mu F\left(\{D^\alpha v\}_\alpha, v, x, t\right);$$

(ii) quasi-lineare se F è lineare rispetto alle derivate di u di ordine più elevato. Dunque F ha la forma seguente:

$$F\left(\{D^\alpha u\}_\alpha, u, x, t\right) = \sum_{|\alpha|=N} c_\alpha D^\alpha u + G\left(\{D^\alpha u\}_{|\alpha|<N}, u, x, t\right)$$

dove N è l'ordine di derivazione, $\{c_\alpha\}_{|\alpha|=N}$ sono coefficienti dipendenti eventualmente da $x, t, u, \{D^\alpha u\}_{|\alpha|<N}$ e G è una relazione variamente non lineare dei propri argomenti;

(iii) semi-lineare se è quasi-lineare e inoltre i coefficienti $\{c_\alpha\}_{|\alpha|=N}$ non dipendono da u né da alcuna sua derivata

$(c_\alpha = c_\alpha(x,t))$.

<u>Esempio</u> Tutti gli esempi di PDE visti finora sono lineari. Invece l'equazione dei mezzi porosi

$$\partial_t u - D\Delta(u^\gamma) = 0 \qquad \text{con } D, \gamma > 0 \text{ costanti}$$

è non lineare $\forall \gamma \neq 1$ (per $\gamma = 1$ è l'equazione del calore).

$\rightsquigarrow$ Discutere, al variare di γ, la classificazione di questa PDE.

Equazioni del trasporto

Sono equazioni che modellizzano il trasporto di una quantità $u = u(x,t)$ ad opera di un campo di velocità assegnato.

Equazione del trasporto lineare

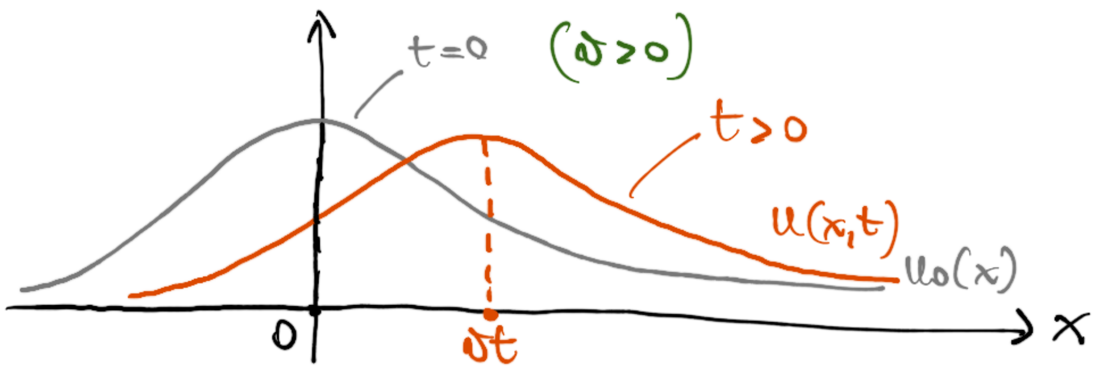
Prendiamo $\Omega = \mathbb{R}$ $(n=1)$, quindi $Q = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Dato una costante $v \in \mathbb{R}$, l'equazione del trasporto lineare è:

$$\partial_t u + v\,\partial_x u = 0 \qquad \text{in } Q.$$

<u>Teorema</u> Sia $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ (funzione di <u>una</u> variabile) t.c. $u(x,0) = u_0(x)$. Allora

$$u(x,t) = u_0(x - vt), \quad \forall t > 0. \qquad (*)$$



Dim. (i) Verifichiamo che $(*)$ è una soluzione:

$$\partial_t u = u_0'(x - vt) \cdot (-v)$$

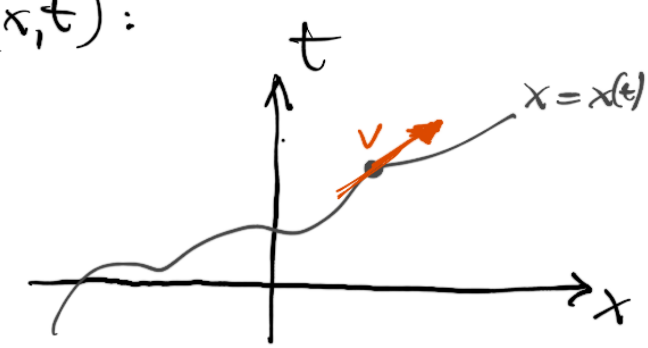
$$\partial_x u = u_0'(x - vt)$$

allora: $\partial_t u + v \partial_x u = u_0'(x - vt)(-v) + v\, u_0'(x - vt) = 0.$

(ii) Facciamo vedere che se $u(x,0) = u_0(x)$ allora la soluzione ha necessariamente la forma $(*)$. Usiamo il metodo delle caratteristiche.

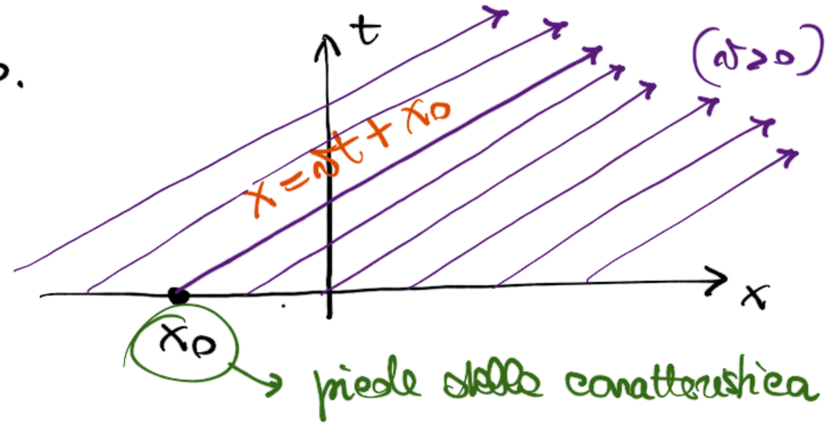
Introduciamo le curve caratteristiche della PDE nel cilindro Q, che in questo caso è il piano (x,t):

$$x = x(t) \quad : \quad \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{velocità della curva}} = \underbrace{v}_{\text{velocità di trasporto data dalla PDE}}$$



Abbiamo: $x(t) = vt + x_0$.

Facciamo vedere che u è **costante** sulle curve caratteristiche della PDE:

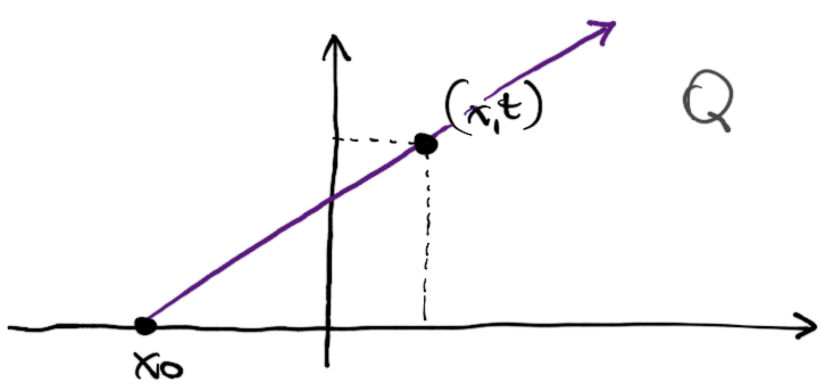


$$\hat{u}(t) := u(vt + x_0, t)$$ restrizione di u alla caratteristica uscente da $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \partial_x u(vt+x_0, t) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v} + \partial_t u(vt+x_0,t)$$

$$= v\,\partial_x u(vt+x_0,t) + \partial_t u(vt+x_0,t) = 0$$ per la PDE.

Possiamo così costruire la soluzione u in un punto (x,t) qualsiasi del dominio Q della PDE nel modo seguente:



$$u(x,t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$$

dove x_0 è il piede della caratteristica che passa per (x,t).

Queste quantità sono legate dall'equazione della caratteristica:

$$x = \vartheta t + x_0 \Rightarrow x_0 = x - \vartheta t$$

da cui

$$u(x,t) = u_0(x - \vartheta t). \qquad \boxtimes$$

<u>Oss.</u> La funzione $u_0(x)$ assegnata come "valore" di u al tempo $t=0$ si chiama condizione iniziale della PDE.

Il problema di determinare u sapendo che

$$\begin{cases} \partial_t u + \vartheta \partial_x u = 0 & \text{in } Q = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u = u_0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

si chiama problema di Cauchy (per la PDE del trasporto lineare).