INTEGRALI

Letizia SCUDERI

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

letizia.scuderi@polito.it

A.A. 2022/2023

Formule di quadratura interpolatorie

Consideriamo il seguente problema: il calcolo dell'integrale definito su un intervallo chiuso e limitato di una funzione continua $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Ricordiamo che non è sempre possibile calcolare analiticamente un integrale. Per esempio,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

non è risolvibile mediante il calcolo della funzione primitiva con funzioni elementari.

Ma anche quando la via analitica è percorribile, può risultare complicato calcolare l'integrale per la complessità dell'espressione finale. Per esempio, l'integrale coincide con la somma di una serie oppure è definito mediante funzioni elementari e non, che devono poi venire valutate e, quindi, approssimate.

In queste situazioni e quando f è nota solo per punti oppure è valutabile per ogni valore di x mediante un algoritmo, si rende allora necessario l'utilizzo di un metodo numerico in grado di restituire un valore approssimato dell'integrale, indipendentemente dalla complessità della funzione integranda.

Definizione

Si definisce **formula di quadratura** un metodo numerico per il calcolo di un integrale. Essa assume la seguente espressione

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

I punti distinti $x_j \in [a, b]$ sono detti **nodi di quadratura** e i numeri $w_j \in \mathbb{R}$ **coefficienti** o **pesi** della formula di quadratura.

Definizione

Fissati n nodi distinti $x_1, \dots, x_n$ nell'intervallo $[a, b]$, si definiscono **interpolatorie** le formule di quadratura che si ottengono approssimando l'integrale assegnato con l'integrale del polinomio di grado $n-1$ interpolante la funzione integranda nei suddetti nodi.

Per costruire una formula di quadratura interpolatoria per l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ si procede nel seguente modo: si sostituisce $f(x)$ con il polinomio $p_{n-1}(f;x)$ di grado $n-1$ interpolante f nei punti fissati $x_1,\ldots,x_n$ e si approssima l'integrale di f con l'integrale di p_{n-1}, cioè

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \quad &\approx \int_a^b p_{n-1}(f;x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=1}^n \ell_j(x) f(x_j)\,dx \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b \ell_j(x)\,dx \right) f(x_j) = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j)\end{aligned}$$

ove

$$w_j = \int_a^b \ell_j(x)\,dx \quad j = 1,\ldots,n$$

ed $\ell_j(x)$, $j = 1, ..., n$ sono i polinomi fondamentali di Lagrange associati ai nodi fissati.

Osservazione

Una formula interpolatoria è esatta, cioè

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

ogniqualvolta $f(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale a $n-1$. Infatti, per l'unicità del polinomio di interpolazione $f(x) \equiv p_{n-1}(f;x)$ e dunque $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p_{n-1}(f;x)\,dx$. In particolare, scegliendo $f(x) = x^k$ per $k = 0, ..., n-1$ si ha

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j^k = \int_a^b x^k\,dx =: m_k, \quad k = 0, 1, ...n-1$$

... continua osservazione

Otteniamo così il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}$$

la cui matrice dei coefficienti è una matrice di Vandermonde associata al vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$. Poiché i nodi x_j sono distinti, la matrice dei coefficienti è non singolare e i pesi w_j sono univocamente definiti.
Pertanto, fissati i nodi x_j distinti, la corrispondente formula interpolatoria è unica e la soluzione del sistema w_j, per ogni j, è necessariamente definita da

$$w_j = \int_a^b \ell_j(x)\, dx \quad j = 1, \dots, n$$

Definizione

Le formule di quadratura interpolatorie associate ai nodi x_j equispaziati in $[a, b]$, cioè $x_j = a + (j-1)h$ con $j = 1, \ldots, n$ e $h = (b-a)/(n-1)$, sono dette **formule di Newton-Cotes**.

Esempi

- per $n = 1$ e, per esempio, $x_1 = a$ si ha la **formula del rettangolo**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_0(f;x)\,dx = \int_a^b f(a)\,dx = f(a)(b-a)$$

... continua esempi

- per $n = 1$ e $x_1 = (a+b)/2$ si ha la **formula del punto medio**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a);$$

- per $n = 2$, $x_1 = a$ e $x_2 = b$ si ha la **formula del trapezio**:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \int_a^b p_1(f;x)\,dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right]\,dx \\ &= \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]\end{aligned}$$

... continua esempi

- per $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = (a+b)/2$ e $x_3 = b$ si ha la **formula di Simpson**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_2(f;x)\,dx$$

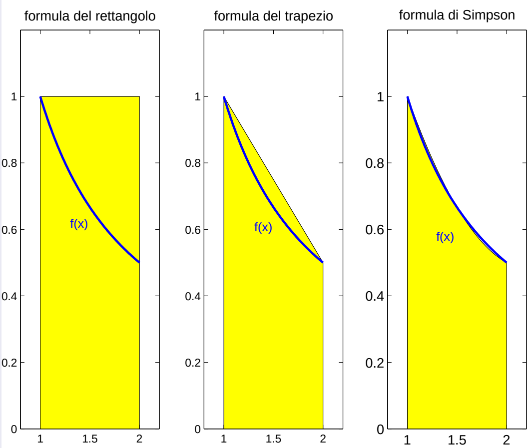
$$= \int_a^b \left[\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})} f(b) \right] dx$$

$$= \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Osservazione

Il nome delle prime due formule (rettangolo e trapezio) discende dal loro significato geometrico.



Supponiamo ora che la funzione integranda $f(x)$ sia una funzione integrabile, ma non abbastanza regolare. Supponiamo, per esempio, che $f(x)$ o una delle sue prime derivate presenti delle singolarità o punti di discontinuità in $[a, b]$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia fattorizzabile nella forma

$$f(x) = w(x)g(x)$$

ove $w(x)$ è una funzione di forma semplice contenente le singolarità di $f(x)$, detta **funzione peso**, mentre $g(x)$ rappresenta la parte regolare della funzione integranda.

Esempio

Nel caso di una funzione integranda del tipo

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x-a}}$$

abbiamo

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}} \quad \text{e} \quad g(x) = xe^{-x}$$

Nelle condizioni poste, una buona approssimazione della funzione integranda si ottiene approssimando con un polinomio soltanto la parte regolare di $f(x)$.

Generalizzando la costruzione delle formule di quadratura interpolatorie, si ottengono le cosiddette **formule interpolatorie pesate**.

Esse si ottengono approssimando $g(x)$ mediante il corrispondente polinomio interpolante $p_{n-1}(g;x)$ nei nodi x_j, $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b w(x)g(x)\,dx &\approx \int_a^b w(x)p_{n-1}(g;x)\,dx \\
&= \int_a^b w(x)\sum_{j=1}^{n} \ell_j(x)g(x_j)\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b w(x)\ell_j(x)\,dx\right) g(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j)
\end{aligned}$$

ove

$$\bar{w}_j = \int_a^b w(x)\ell_j(x)\,dx \quad j = 1, \dots, n$$

Osservazione

La funzione peso $w(x)$ deve essere tale da garantire l'esistenza degli integrali coinvolti e permettere la costruzione dei pesi $\bar{w}_j$.

Generalmente $w(x)$ ha segno costante in $[a, b]$.

Una funzione $w(x)$ definita in $[a, b]$ e tale che

- $w(x) \geq 0$ e $w(x) \not\equiv 0$
- $\displaystyle\int_a^b w(x)x^k \, dx < \infty, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$

può essere assunta come funzione peso.

Tali condizioni definiscono univocamente, a meno di fattori costanti, un sistema di polinomi ortogonali $\{P_n\}$ in $[a, b]$ rispetto alla funzione peso $w(x)$:

$$\int_a^b w(x)P_n(x)P_m(x)\, dx \begin{cases} = 0 & \text{per } n \neq m \\ \neq 0 & \text{per } n = m \end{cases}$$

Esempio

Sia $[a, b] = [-1, 1]$ e $w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$. Tale funzione è detta **peso di Jacobi** e i corrispondenti polinomi ortogonali sono detti **polinomi di Jacobi**.

I polinomi ortogonali P_n godono di numerose proprietà e il ruolo che essi assumono in molte applicazioni è fondamentale.

Tra le varie caratteristiche, ricordiamo che P_n, per ogni intero n, possiede esattamente n zeri, tutti reali, distinti e appartenenti ad (a, b).

Pertanto gli zeri dei polinomi ortogonali possono essere scelti come nodi per costruire formule di quadratura interpolatorie.

Definizione

Le formule di quadratura interpolatorie pesate

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j), \quad \bar{w}_j = \int_a^b w(x)\ell_j(x)\,dx$$

e associate a nodi x_j coincidenti con gli zeri di polinomi ortogonali, rispetto alla funzione peso $w(x)$ in $[a, b]$, sono dette **formule Gaussiane**.

Osservazione

Il calcolo efficiente degli zeri dei polinomi ortogonali non utilizza l'espressione esplicita dei polinomi. Infatti una riformulazione di questo problema consente di ottenere **i nodi e i pesi** delle formule Gaussiane mediante la risoluzione di un problema agli autovalori-autovettori di una matrice tridiagonale e simmetrica.

Esempio

Le formule di quadratura interpolatorie pesate associate agli zeri x_j^J, $j = 1, ..., n$, dei polinomi di Jacobi, ortogonali in $[-1, 1]$ rispetto alla funzione peso di Jacobi $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ sono così definite:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta g(x)\, dx \approx \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j^J g(x_j^J)$$

$$\bar{w}_j^J = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \ell_j(x)\, dx \quad j = 1, \ldots, n.$$

e sono dette **formule di Gauss-Jacobi**.

Osservazione

È possibile utilizzare una formula di Gauss-Jacobi anche per il calcolo del seguente integrale

$$I = \int_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta g(x)\, dx$$

Occorre a tale scopo trasformare il generico intervallo di integrazione $[a, b]$ nell'intervallo $[-1, 1]$ mediante il seguente cambiamento di variabile

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

e riscrivere I nella forma

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha+\beta+1} \int_{-1}^{1} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta g\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}\right) dt \\ &\approx \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha+\beta+1} \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j^J g\left(\frac{b-a}{2} x_j^J + \frac{b+a}{2}\right) \end{aligned}$$

Consideriamo alcune particolari formule Gaussiane.

- Siano $[a, b] = [-1, 1]$ e $w(x) = 1$.
  La funzione $w(x)$ è detta **peso di Legendre** e rappresenta un caso particolare del peso di Jacobi per $\alpha = \beta = 0$.
  I polinomi ortogonali associati sono detti **polinomi di Legendre**.
  Le formule di quadratura interpolatorie pesate associate agli zeri x_j^L, $j = 1, ..., n$, dei polinomi di Legendre sono così definite:

$$\int_{-1}^{1} g(x)\, dx \approx \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j^L g(x_j^L)$$

  con

$$\bar{w}_j^L = \int_{-1}^{1} \ell_j(x)\, dx \quad j = 1, \ldots, n,$$

  e sono dette **formule di Gauss-Legendre**.

Di seguito l'algoritmo in linguaggio MATLAB per il calcolo del seguente integrale mediante una formula di Gauss-Legendre:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\,dt$$
$$\approx \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j^L g\left(\frac{b-a}{2}x_j^L + \frac{b+a}{2}\right)$$

Function MATLAB

```
function t = GaussLegendre(g,a,b,xL,wL)
% xL = vettore colonna contenente i nodi della formula di
Gauss-Legendre
% wL = vettore colonna contenente i pesi della formula di
Gauss-Legendre
x = (b-a)/2*xL+(b+a)/2;
y = g(x);
t = (b-a)/2*sum(wL.*y);
```

- Siano $[a, b] = [-1, 1]$ e $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
  La funzione $w(x)$ è detta **peso di Chebyshev di prima specie** e rappresenta un caso particolare del peso di Jacobi per $\alpha = \beta = -1/2$.
  I polinomi ortogonali associati sono detti **polinomi di Chebyshev di prima specie**.
  Le formule di quadratura interpolatorie pesate associate agli zeri x_j^C, $j = 1, \dots, n$, dei polinomi di Chebyshev sono così definite:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j^C g(x_j^C)$$

con

$$\bar{w}_j^C = \frac{\pi}{n}, \quad x_j^C = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right), \quad j = 1, \dots, n,$$

e sono dette **formule di Gauss-Chebyshev di prima specie**.

Di seguito l'algoritmo in linguaggio MATLAB per il calcolo del seguente integrale mediante una formula di Gauss-Chebyshev di prima specie:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{1}{(b-x)^{1/2}(x-a)^{1/2}} g(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-t)^{1/2}(1+t)^{1/2}} g\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \\
&\approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} g\left(\frac{b-a}{2}x_j^C + \frac{b+a}{2}\right)
\end{aligned}$$

Function MATLAB

```
function t = GaussChebyshev(g,a,b,n)
xC = cos((2*[1:n]-1)/(2*n)*pi);
x = (b-a)/2*xC+(b+a)/2;
y = g(x);
t = pi/n*sum(y);
```

- Siano $[a, b] = [-1, 1]$ e $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
  La funzione $w(x)$ è detta **peso di Chebyshev di seconda specie** e rappresenta un caso particolare del peso di Jacobi per $\alpha = \beta = 1/2$.
  I polinomi ortogonali associati sono detti **polinomi di Chebyshev di seconda specie**.
  Le formule di quadratura interpolatorie pesate associate agli zeri x_j^{C2}, $j = 1, ..., n$, dei polinomi di Chebyshev sono così definite:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} g(x)\, dx \approx \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j^{C2} g(x_j^{C2})$$

  con

$$\bar{w}_j^{C2} = \frac{\pi}{n+1} \sin^2(\theta_j), \quad x_j^{C2} = \cos(\theta_j),\ \theta_j = \left(\frac{j}{n+1} \pi \right),\ j = 1, \ldots, n,$$

  e sono dette **formule di Gauss-Chebyshev di seconda specie**.

Di seguito riportiamo alcune formule Gaussiane definite su intervalli illimitati:

- $\int_0^\infty e^{-x} g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^n \bar{w}_j^{GL} g(x_j^{GL})$ i cui nodi coincidono con gli zeri del polinomio di Laguerre ortogonale in $(0, \infty)$ rispetto alla funzione peso e^{-x}. Le formule sono dette **formule di Gauss-Laguerre**.
- $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^n \bar{w}_j^{GLG} g(x_j^{GLG})$ i cui nodi coincidono con gli zeri del polinomio di Laguerre ortogonale in $(0, \infty)$ rispetto alla funzione peso $x^\alpha e^{-x}$. Le formule sono dette **formule di Gauss-Laguerre generalizzate**.
- $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^n \bar{w}_j^{GH} g(x_j^{GH})$ i cui nodi coincidono con gli zeri del polinomio di Hermite ortogonale in $(-\infty, \infty)$ rispetto alla funzione peso e^{-x^2}. Le formule sono dette **formule di Gauss-Hermite**.

Definizioni

Si definisce **errore di quadratura** della formula

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j)$$

la quantità

$$R_n(g) = \int_a^b w(x)g(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j)$$

Una formula di quadratura si dice **convergente** se

$$\lim_{n\to\infty} R_n(g) = 0$$

Per le formule di quadratura interpolatorie pesate, denotando con $E_n(g;x)$ l'errore di interpolazione che si commette quando si approssima $g(x)$ con $p_{n-1}(g;x)$, cioé $E_n(x) = g(x) - p_{n-1}(g;x)$, si ha

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)g(x)\,dx &= \int_a^b w(x)(p_{n-1}(g;x) + E_n(g;x))\,dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j) + \int_a^b w(x)E_n(g;x)\,dx\end{aligned}$$

da cui

$$R_n(g) = \int_a^b w(x)E_n(g;x)\,dx$$

Definizione

Una formula di quadratura

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j)$$

si dice **"esatta"** quando

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j)$$

cioè quando l'errore di quadratura

$$R_n(g) = \int_a^b w(x)g(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j) = 0$$

Definizione

Si dice che una formula di quadratura interpolatoria pesata

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j)$$

ha **grado di precisione d** se:

- essa è esatta, cioè $R_n(g) = 0$, quando la funzione g è un qualsiasi polinomio di grado minore o uguale a d;
- esiste almeno un polinomio di grado $d+1$, tipicamente $p(x) = x^{d+1}$, per il quale la formula non è esatta, cioè $R_n(p) \neq 0$

Osservazione

Osserviamo che, fissato n, le formule interpolatorie (pesate e non) hanno grado di precisione **almeno** $n-1$, ovvero sono esatte ogniqualvolta $g(x)$ è un polinomio di grado almeno $n-1$.

Infatti, in tal caso, per l'unicità del polinomio interpolante, g e il corrispondente polinomio interpolante $p_{n-1}(g)$ in n nodi distinti coincidono e, di conseguenza, $E_n(g;x) \equiv 0$ e $R_n(g) \equiv 0$.

Pertanto, mediante le formule interpolatorie pesate con n nodi distinti, è possibile calcolare esattamente gli integrali del tipo $\int_a^b w(x)g(x)\,dx$, in cui g è un qualsiasi polinomio di grado $n-1$.

Teorema

Le formule di Newton-Cotes a n nodi e chiuse (ovvero quelle che includono anche gli estremi di integrazione tra i loro nodi) hanno grado di precisione

$$d = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

In particolare,

- la formula del trapezio ha grado di precisione $d = 1$, poiché il numero dei nodi $n = 2$ è pari e la formula è chiusa;
- la formula di Simpson ha grado di precisione $d = 3$, poiché il numero dei nodi $n = 3$ è dispari e la formula è chiusa.

Teorema

Non esistono formule di quadratura con n nodi reali che siano esatte per tutti i polinomi di grado $2n$, ovvero il massimo grado di precisione per una formula di quadratura con n nodi reali è $2n-1$.

Dimostrazione

Se per assurdo esistesse una formula di quadratura con n nodi reali ed esatta per tutti i polinomi di grado $2n$, allora sarebbe esatta anche per il seguente polinomio di grado $2n$:

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 \geq 0$$

Si ha allora per $w(x) \geq 0$ e $w(x) \neq 0$

$$\int_a^b w(x) Q(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} w_i Q(x_i) + R_n(Q) = 0 + 0 = 0$$

ma ciò è impossibile perché l'integrale al primo membro è sempre positivo, essendo w e Q non negativi e non identicamente nulli.

Pertanto $2n-1$ rappresenta il massimo grado del polinomio per il quale una formula interpolatoria pesata a n nodi risulti esatta.
Quali sono allora le formule interpolatorie pesate a n nodi con il massimo grado di precisione, cioè $2n-1$?

Teorema

Le **uniche** formule interpolatorie pesate, con n nodi reali e grado di precisione $2n-1$, sono le formule Gaussiane.

Dimostrazione

Consideriamo la seguente formula di quadratura:

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j) + R_n(g)$$

e dimostriamo la seguente equivalenza:

la formula è Gaussiana $\iff$ è esatta per tutti i polinomi di grado $\leq 2n-1$.

$\Rightarrow$ Supponiamo che la formula sia Gaussiana; poiché è interpolatoria, è esatta per tutti i polinomi di grado $\leq n-1$.

... continua dimostrazione

Verifichiamo allora che la formula sia esatta anche per i polinomi $d_m(x)$ di grado $n \le m \le 2n-1$. Denotiamo con $P_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$; P_n è allora ortogonale in $[a, b]$ rispetto a $w(x)$ e, in particolare, per ogni polinomio $q(x)$ di grado $n-1$ soddisfa la relazione $\int_a^b w(x)P_n(x)q(x)\, dx = 0$.
Ciò premesso, dividiamo $d_m(x)$ per $P_n(x)$ e abbiamo

$$d_m(x) = P_n(x)q_{m-n}(x) + r_{n-1}(x)$$

ove $q_{m-n}(x)$ e $r_{n-1}(x)$ denotano rispettivamente il polinomio quoziente, di grado $m-n \le n-1$, e il polinomio resto della divisione, di grado $\le n-1$. Tenendo conto che il funzionale errore R_n è lineare si ha

$$R_n(d_m) = R_n(P_n\, q_{m-n}) + R_n(r_{n-1})$$

Osserviamo che $R_n(r_{n-1}) = 0$ perchè per ipotesi la formula è esatta per tutti i polinomi di grado $\le n-1$.

Inoltre,

$$R_n(P_n\, q_{m-n}) = \int_a^b w(x)P_n(x)\, q_{m-n}(x)\, dx - \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j P_n(x_j)\, q_{m-n}(x_j) = 0 - 0 = 0$$

ove il primo addendo è nullo perché P_n è ortogonale in $[a, b]$ rispetto a $w(x)$ e q_{m-n} ha grado $\leq n-1$; il secondo addendo è nullo perché $P_n(x_j) = 0$. Abbiamo così dimostrato che $R_n(d_m) = 0$ per ogni polinomio d_m di grado $n \leq m \leq 2n-1$.

$\Leftarrow$ Supponiamo ora che la formula sia esatta per tutti i polinomi di grado $\leq 2n-1$. Allora, essendo esatta in particolare per tutti i polinomi di grado $\leq n-1$, è certamente interpolatoria.

Inoltre, per $P_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, si ha $R_n(P_n x^k) = 0$ per ogni $k = 0, 1, ..., n-1$, perché la formula ha grado di precisione $2n-1$; d'altra parte,

$$0 = R_n(P_n x^k) = \int_a^b w(x)P_n(x)x^k\, dx - \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j P_n(x_j)\, x_j^k = \int_a^b w(x)P_n(x)x^k\, dx$$

e questa relazione definisce univocamente il polinomio ortogonale $P_n(x)$ in $[a, b]$ rispetto a $w(x)$. Dunque la formula considerata è certamente Gaussiana.

Esempio

Il seguente integrale

$$I = \int_{-1}^{1} \underbrace{(x^3+1)}_{g(x)}\, dx = 2$$

può essere calcolato esattamente mediante la formula di Simpson:

$$I = \frac{b-a}{6}\left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right] = \frac{1}{3}(0+4+2) = 2$$

oppure mediante la formula di Gauss Legendre con $n = 2$ nodi, per la quale $\bar{w}_i^L = 1$, $i = 1, 2$, $x_1^L = -1/\sqrt{3}$ e $x_2^L = 1/\sqrt{3}$:

$$I = \bar{w}_1^L g(x_1^L) + \bar{w}_2^L g(x_2^L) = \cancel{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3} + 1 + \cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3} + 1 = 2$$

Un risultato di convergenza è fornito dal seguente teorema.

Teorema

Sia

$$R_n(g) = \int_a^b w(x)g(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j g(x_j)$$

l'errore associato a una formula di quadratura interpolatoria pesata. Se

1. $g \in C^0([a,b])$
2. $\sum_{j=1}^{n} |\bar{w}_j| \leq M$ con M indipendente da n

allora

$$\lim_{n\to\infty} R_n(g) = 0$$

Inoltre, se $g \in C^{k,\mu}([a,b])$, $k \geq 0$ e $0 \leq \mu \leq 1$, allora

$$|R_n(g)| = O\left(\frac{1}{n^{k+\mu}}\right), \ \ n \to \infty$$

Dimostrazione

Denotiamo con $q^*_{n-1}(x)$ il polinomio di migliore approssimazione uniforme algebrica, ovvero il polinomio di grado $n-1$ che minimizza la norma $||g - q_{n-1}||_\infty$, al variare di q_{n-1} polinomio di grado $n-1$. Tenendo conto che la formula è interpolatoria ed è esatta per tutti i polinomi di grado $\leq n-1$, si ha

$$
\begin{aligned}
R_n(g) &= \int_a^b w(x)\,(g(x) - p_{n-1}(x))\;dx \\
&= \int_a^b w(x)\left(g(x) - q^*_{n-1}(x) + q^*_{n-1}(x) - p_{n-1}(x)\right)\;dx \\
&= \int_a^b w(x)\left(g(x) - q^*_{n-1}(x)\right)\;dx + \int_a^b w(x)\left(q^*_{n-1}(x) - p_{n-1}(x)\right)\;dx \\
&= \int_a^b w(x)\left(g(x) - q^*_{n-1}(x)\right)\;dx + \sum_{j=1}^n \bar{w}_j\left(q^*_{n-1}(x_j) - p_{n-1}(x_j)\right) \\
&= \int_a^b w(x)\left(g(x) - q^*_{n-1}(x)\right)\;dx + \sum_{j=1}^n \bar{w}_j\left(q^*_{n-1}(x_j) - g(x_j)\right)
\end{aligned}
$$

... continua dimostrazione

Da cui deduciamo

$$
\begin{aligned}
|R_n(g)| &\leq \int_a^b w(x) \left| g(x) - q_{n-1}^*(x) \right| \, dx + \sum_{j=1}^{n} |\bar{w}_j| \left| q_{n-1}^*(x_j) - g(x_j) \right| \\
&\leq \left(\int_a^b w(x) \, dx + \sum_{j=1}^{n} |\bar{w}_j| \right) ||g - q_{n-1}^*||_\infty \\
&\leq \left(\int_a^b w(x) \, dx + M \right) ||g - q_{n-1}^*||_\infty
\end{aligned}
$$

In virtù dei teoremi di Jackson, che garantiscono la convergenza $||g - q_{n-1}^*||_\infty \to 0$ per $n \to \infty$ per ogni funzione g continua e forniscono una stima dell'errore di migliore approssimazione uniforme algebrica, possiamo concludere che:

$$|R_n(g)| \to 0 \text{ per } n \to \infty$$

$$|R_n(g)| = O\left(\frac{1}{n^{k+\mu}} \right) \text{ per } n \to \infty, \text{ per } g \in C^{k,\mu}([a, b])$$

Osservazione 1

Il teorema precedente assicura che più regolare è la funzione più rapida è la convergenza della formula di quadratura al valore esatto dell'integrale; ecco perché è importante individuare la parte regolare della funzione integranda.

Osservazione 2

I coefficienti di una formula di quadratura dipendono unicamente dai nodi x_i scelti. In generale si ha

$$\sum_{i=1}^{n} |w_i| \to \infty, \ \ n \to \infty$$

Se $\sum_{i=1}^{n} |w_i| = O(n^r)$, $n \to \infty$, $r > 0$, allora

$$|R_n(g)| = O\left(\frac{1}{n^{k+\mu-r}}\right), \ \ n \to \infty$$

Pertanto, per $r > k + \mu$, le formule interpolatorie divergono.
Se $r = 0$, $k = 0$, $0 \leq \mu \leq 1$, allora

$$|R_n(g)| = \begin{cases} o(1) & \text{se } \mu = 0 \\ O\left(\frac{1}{n^{\mu}}\right) & \text{se } \mu > 0 \end{cases}$$

Il precedente teorema ci consente di dimostrare il seguente risultato.

Teorema

Le formule Gaussiane convergono per ogni funzione continua $g \in C^0([a,b])$. Inoltre, Inoltre, $|R_n(g)| = O\left(\frac{1}{n^{k+\mu}}\right)$, $n \to \infty$ per ogni $g \in C^{k,\mu}([a,b])$, $k \geq 0$ e $0 \leq \mu \leq 1$.

Dimostrazione

Dimostriamo anzitutto che i pesi di una formula gaussiana sono tutti positivi. Infatti, ricordando che le formule Gaussiane a n nodi sono esatte per tutti i polinomi di grado $2n-1$ e che i polinomi fondamentali di Lagrange $\ell_i(x)$ associati ai nodi x_i, $i = 1, \dots, n$, hanno grado $n-1$, si ha

$$0 < \int_a^b w(x)\ell_i^2(x)\,dx = \sum_{j=1}^n \bar{w}_j \ell_i^2(x_j) = \bar{w}_i, \ \forall i$$

Pertanto, la tesi discende dal precedente teorema, osservando che

$$\sum_{j=1}^n |\bar{w}_j| = \sum_{j=1}^n \bar{w}_j = \int_a^b w(x)\,dx = M$$

Esempio

Calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^1 x^3 \exp(x)\, dx = -2\exp(1) + 6 \approx 0.5634363430819089$$

mediante la formula di Gauss-Legendre I_n^L con n nodi di quadratura.

n	I_n^L	$\lvert I - I_n^L \rvert$
2	0.5455654680350162	$1.79e-02$
3	0.5632949402651373	$1.41e-04$
4	0.5634359430067241	$4.00e-07$
5	0.5634363425156966	$5.66e-10$
6	0.5634363430814328	$4.76e-13$
7	0.5634363430819096	$6.66e-16$

Osservazione

A differenza delle formule Gaussiane la cui convergenza è garantita per qualunque funzione g continua nell'intervallo di integrazione, la convergenza delle formule di Newton-Cotes non è invece garantita neppure per funzioni integrande di classe C^∞!

Inoltre, a differenza delle formule Gaussiane, i pesi di quadratura delle formule di Newton-Cotes non hanno segno costante e divergono a $\pm\infty$ rapidamente quando $n \to \infty$. Conseguentemente, $\sum_{i=1}^{n} |w_i| \to \infty, \; n \to \infty$.

... continua osservazione

Per questo motivo le formule di Newton-Cotes non vengono applicate direttamente per approssimare integrali. Quelle con pochi nodi vengono utilizzate per costruire schemi di calcolo di tipo composto.

Quelle più utilizzate sono:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi_1)$$

con $a < \xi_1 < b$ e per $f \in C^2([a,b])$;

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\,\frac{a+b}{2}+f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2^5\,90} f^{(4)}(\xi_2)$$

con $a < \xi_2 < b$ e per $f \in C^4([a,b])$.

Formule di quadratura composte

Per costruire una **formula di quadratura composta** per il calcolo numerico dell'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

occorre eseguire i seguenti passi:

1) scegliere una formula di quadratura (formula base) di cui si vuole costruire la versione composta (per esempio, la formula del trapezio, la formula di Gauss-Legendre ad n nodi,...);

2) suddividere l'intervallo di integrazione in m sottointervalli mediante i punti x_i, $i = 1, \ldots, m+1$, con $a \equiv x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1} \equiv b$ (se i sottointervalli hanno ampiezza costante h allora $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 1, \ldots, m$ e $h = (b-a)/m$, altrimenti $x_{i+1} - x_i = h_i$, $i = 1, \ldots, m$);

3) utilizzare la proprietà additiva degli integrali:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx;$$

4) approssimare l'integrale su ciascun sottointervallo mediante la formula scelta al passo 1).

Osservazione

La strategia delle formule composte non prevede la presenza di una funzione peso.

Esempio

Scriviamo la versione composta della formula del trapezio, detta **formula dei trapezi**, utilizzando una partizione uniforme, ovvero con passo costante, dell'intervallo di integrazione. A tale scopo poniamo $h = (b - a)/m$, consideriamo i punti

$$a \equiv x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} \equiv b$$

$$x_i = a + (i - 1)h, \ i = 1, \ldots, m + 1$$

e approssimiamo, mediante la formula del trapezio, l'integrale esteso all'intervallo di integrazione $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m$:

... continua esempio

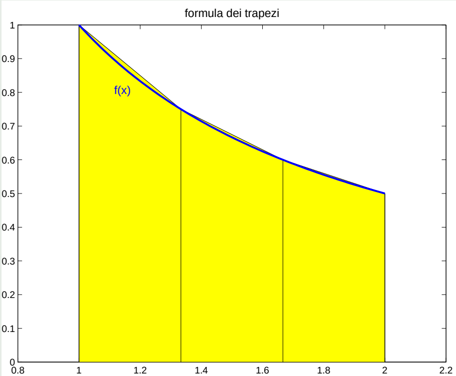
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_m)+f(x_{m+1})]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_1)+2\sum_{i=2}^{m} f(x_i)+f(x_{m+1})\right]$$

... continua esempio

Graficamente si ha:



Di seguito l'algoritmo in linguaggio MATLAB per il calcolo del seguente integrale mediante la formula dei trapezi I_m^{TT} definita con $m+1$ nodi di quadratura e con una partizione in m sottointervalli:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m^{TT}$$

$$I_m^{TT} = \frac{b-a}{2m}\left[f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{m} f(x_i) + f(x_{m+1})\right]$$

Function MATLAB

```
function t = trapezi(f,a,b,m)
x = linspace(a,b,m+1);
y = f(x);
t = (b-a)/(2*m)*(y(1)+2*sum(y(2:m))+y(m+1));
```

Esempio

Calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^1 x^3 \exp(x)\, dx = -2\exp(1) + 6 \approx 0.5634363430819089$$

mediante la formula dei trapezi I_m^{TT} con $m = 2^n$ e $n = 2, \dots, 15$.

m	num. nodi	I_m^{TT}	$\lvert I - I_m^{TT} \rvert$
4	5	0.6196008380528142	$5.62e-02$
8	9	0.5775647957738439	$1.41e-02$
16	17	0.5669739416442370	$3.54e-03$
32	33	0.5643210859879768	$8.85e-04$
64	65	0.5636575502692232	$2.21e-04$
128	129	0.5634916462201426	$5.53e-05$
256	257	0.5634501689503072	$1.38e-05$
512	513	0.5634397995542489	$3.46e-06$
⋮	⋮	⋮	⋮
32768	32769	0.5634363439257720	$8.44e-10$

Esempio

Scriviamo la versione composta della formula di Simpson utilizzando una partizione uniforme dell'intervallo di integrazione. A tale scopo poniamo $h = (b-a)/(2m)$, consideriamo i punti

$$a \equiv x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2m-1} < x_{2m} < x_{2m+1} \equiv b$$

$$x_i = a + (i-1)h, \; i = 1, \ldots, 2m+1$$

e approssimiamo, mediante la formula di Simpson, l'integrale esteso all'intervallo di integrazione $[x_{2i-1}, x_{2i+1}]$, $i = 1, \ldots, m$:

... continua esempio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x)\,dx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{2i+1} - x_{2i-1}}{6} \left[f(x_{2i-1}) + 4f(x_{2i}) + f(x_{2i+1}) \right]$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2m-1}) + 4f(x_{2m}) + f(x_{2m+1}) \right]$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_1) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i+1}) + f(x_{2m+1}) \right]$$

Di seguito l'algoritmo in linguaggio MATLAB per il calcolo del seguente integrale mediante la formula composta di Simpson I_m^{SS} definita con $2m+1$ nodi di quadratura e con una partizione in m sottointervalli:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m^{SS}$$

$$I_m^{SS} = \frac{b-a}{6m}\left[f(x_1) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i+1}) + f(x_{2m+1})\right]$$

Function MATLAB

```
function t = simpson(f,a,b,m)
x = linspace(a,b,2*m+1);
y = f(x);
t = (b-a)/(6*m)*(y(1)+4*sum(y(2:2:2*m))+...
      2*sum(y(3:2:2*m-1))+y(2*m+1));
```

Esempio

Calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^1 x^3 \exp(x)\, dx = -2\exp(1) + 6 \approx 0.5634363430819089$$

mediante la formula di Simpson composta I_m^{SS} con $m = 2^n$ e $n = 2, \ldots, 9$.

m	num. nodi	I_m^{SS}	$\lvert I - I_m^{SS}\rvert$
4	9	0.5652626052259124	$1.16e-04$
8	17	0.5634436569343680	$7.31e-06$
16	33	0.5634368007692234	$4.58e-07$
32	65	0.5634363716963053	$2.86e-08$
64	129	0.5634363448704489	$1.79e-09$
128	257	0.5634363431936954	$1.12e-10$
256	513	0.5634363430888960	$6.99e-12$
512	1025	0.5634363430823461	$4.37e-13$

Esempio

Scriviamo la versione composta della seguente formula di Gauss-Legendre con $n = 2$ nodi:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

utilizzando una partizione uniforme dell'intervallo di integrazione. A tale scopo poniamo $h = (b - a)/m$, consideriamo i punti

$$a \equiv x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} \equiv b$$

$$x_i = a + (i - 1)h,\ \ i = 1, \ldots, m + 1$$

e approssimiamo, mediante la suddetta formula di Gauss-Legendre, l'integrale esteso all'intervallo di integrazione $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m$:

... continua esempio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}t + \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\,dt$$

$$= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}t + \frac{x_{i+1}-x_i}{2} + x_i\right)\,dt$$

$$= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}(1+t) + x_i\right)\,dt$$

$$\approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{m} \left[f\left(\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + x_i\right) + f\left(\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + x_i\right)\right]$$

Osservazioni

- Osserviamo che l'utilizzo di una formula composta non comporta il calcolo dei nodi e dei pesi al variare di m.
- Se la formula base è esatta per tutti i polinomi di grado d, anche la formula composta è esatta per tutti i polinomi di grado d, ovvero la formula base e la formula composta hanno lo stesso grado di precisione.
- Le formule composte convergono qualunque sia la funzione integranda continua.
- L'errore di una formula composta coincide con la somma degli errori di quadratura corrispondenti a ogni singolo intervallo.

In particolare valgono i seguenti teoremi.

Teorema

- La formula composta dei trapezi converge per $m \to \infty$, ovvero per $h \to 0$, per ogni $f \in C^0([a,b])$.
- Se $f \in C^2([a,b])$ l'errore della formula del trapezio vale

$$R_1^T(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \text{ con } \xi \in (a,b), \ h = b-a$$

  e quello associato alla formula composta del trapezio vale

$$R_m^{TT}(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\bar{\xi}), \text{ con } \bar{\xi} \in (a,b), \ h = \frac{b-a}{m}$$

  Pertanto, se $f \in C^2([a,b])$ si ha $|R_m^{TT}(f)| = O(h^2), \quad h \to 0.$
- Se f è periodica in $[a,b]$ e il periodo coincide con $b-a$ (o è un sottomultiplo intero di $b-a$) e, inoltre, $f \in C^{2k+1}([a,b])$ e $f^{(2j-1)}(a) = f^{(2j-1)}(b), \ j = 1, \dots, k$, allora l'ordine di convergenza dell'errore di quadratura è superiore a $O(h^2)$ e vale

$$|R_m^{TT}(f)| = O(h^{2k+1}), \quad h \to 0$$

Osservazione

L'errore della formula composta dei trapezi è dato da

$$R_m^{TT}(f) = \sum_{i=1}^{m} R_i^T(f) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)h^2}{12} \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} f''(\xi_i)}{m} \right)$$

Poiché $f \in C^2([a,b])$ si ha

$$\begin{aligned}
& \min_x f''(x) \le f''(\xi_i) \le \max_x f''(x) \quad \forall i \\
\Rightarrow \ & \sum_{i=1}^{m} \min_x f''(x) \le \sum_{i=1}^{m} f''(\xi_i) \le \sum_{i=1}^{m} \max_x f''(x) \\
\Rightarrow \ & m \min_x f''(x) \le \sum_{i=1}^{m} f''(\xi_i) \le m \max_x f''(x) \\
\Rightarrow \ & \min_x f''(x) \le \frac{\sum_{i=1}^{m} f''(\xi_i)}{m} \le \max_x f''(x)
\end{aligned}$$

Per la continuità di f'' esiste $\bar{\xi} \in (a,b)$ tale che $f''(\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^{m} f''(\xi_i)/m$ e dunque $R_m^{TT}(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\bar{\xi})$.

Teorema

- La formula composta di Simpson converge per $m \to \infty$, ovvero per $h \to 0$, per ogni $f \in C^0([a,b])$.
- Se $f \in C^4([a,b])$ l'errore della formula di Simpson vale

$$R_1^S(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \text{ con } \xi \in (a,b), \; h = \frac{b-a}{2}$$

e quello associato alla formula composta di Simpson vale

$$R_m^{SS}(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\bar{\xi}), \text{ con } \bar{\xi} \in (a,b), \; h = \frac{b-a}{2m}$$

Pertanto, se $f \in C^4([a,b])$ si ha $|R_m^{SS}(f)| = O(h^4), \quad h \to 0.$

Teorema

Se $g \in C^{2k}([a, b])$, l'errore della formula composta di Gauss-Legendre di ordine k vale

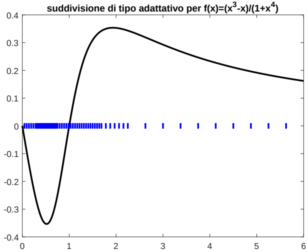
$$R_m^{GL}(g) = O(h^{2k-1}), \ h \to 0, \ h = \frac{b-a}{m}$$

Quando la funzione integranda è sufficientemente regolare, per esempio

- è dotata di derivata continua di ordine k con $k >> 1$
- non ha brusche variazioni
- non ha un comportamento eccessivamente oscillante
- non presenta singolarità in campo complesso troppo vicine all'intervallo di integrazione

conviene considerare una formula Gaussiana.

Quando invece la funzione integranda presenta delle irregolarità conviene procedere con una **strategia di tipo adattativo** che suddivida l'intervallo di integrazione in sottointervalli di ampiezza diversa e applichi a questi ultimi una formula base, per esempio Gaussiana, con pochi nodi.
La strategia deve addensare i punti là dove la funzione presenta irregolarità e collocare pochi nodi là dove invece la funzione è regolare.



Con una suddivisione uniforme, le irregolarità della funzione f richiedendo un addensamento di nodi nelle loro vicinanze impongono contemporaneamente lo stesso addensamento in tutto l'intervallo anche là dove è superfluo.

Comandi MATLAB

- `[q,N] = quad(f,a,b,toll)` calcola, mediante la formula composta di Simpson e una partizione di tipo adattativo, il valore approssimato `q` dell' integrale $\int_a^b$ `f`$(x)\,dx$ con una tolleranza assoluta `toll` e utilizzando `N` valutazioni di funzione. Se `toll = []` allora di default `toll`$= 10^{-6}$.
- `q = integral(f,a,b,'RelTol',rt,'AbsTol',at)` calcola il valore approssimato `q`, mediante una formula di quadratura di tipo adattativo con tolleranza assoluta `a` e tolleranza relativa `r`. Il significato delle rimanenti variabili è il medesimo della `function` `quad`.
- `t = trapz(x,y)` calcola mediante la formula dei trapezi il valore $\int_a^b f(x)\,dx$ e richiede in input i punti x_i (equispaziati o non) e i valori $y_i = f(x_i)$, memorizzati nei vettori `x` e `y`, rispettivamente.

Esempio

Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^1 x^3 e^x \, dx = -2exp(1) + 6 \approx 0.5634363430819089$$

mediante la function quad.

```
>> f = @(x) x.^3.*exp(x);
>> format long e
>> [q,N] = quad(f,0,1)
q =
 5.634363476367893e-01
N =
 29
>> errore = abs(-2*exp(1)+6-q)
errore =
 4.554880361773428e-09
```

... continua esempio

```
>> [q,N] = quad(f,0,1,1.0e-14)
q =
 5.634363430819095e-01
N =
 1025
>> errore = abs(-2*exp(1)+6-q)
errore =
 5.551115123125783e-16
```

... continua esempio

Usiamo ora il comando `integral` senza specificare i valori per la tolleranza assoluta e relativa.

```
>> q = integral(f,0,1)
q =
 5.634363430819096e-01
>> err_ass = abs(-2*exp(1)+6-q)
err_ass =
 6.661338147750939e-16
>> err_rel = abs(-2*exp(1)+6-q)/abs(-2*exp(1)+6)
err_rel =
 1.182269874767832e-15
```

... continua esempio

Usiamo infine il comando `trapz`, definendo 1000 punti equispaziati nell'intervallo di integrazione $[0, 1]$ e valutando la funzione f nei suddetti punti.

```
>> x = linspace(0,1,1000);
>> y = f(x);
>> q = trapz(x,y);
>> errore = abs(-2*exp(1)+6-q)
errore =
 9.079087326391289e-07
```