Analisi Funzionale

Spazi di successioni e spazi L^p

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino
a.a. 2023/2024

Spazi di successioni

Notazione: $\mathbb{F}$ denota il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ o dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Poniamo $\mathbb{F}^{\mathbb{N}} := \{\underline{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{F}\ \forall k \in \mathbb{N}\}$ (successioni a valori in $\mathbb{F}$)

Oss. $\mathbb{F}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{F})$ è uno sp. vett. su $\mathbb{F}$ con le op. comp. per componente:

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_k + y_k)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha\underline{x} = (\alpha x_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

per ogni $\underline{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\underline{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$.

Def. Per ogni $\underline{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiamo $\|\underline{x}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.
Poniamo inoltre $\ell^\infty = \{\underline{x} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \|\underline{x}\|_\infty < \infty\} = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}, \mathbb{F})$ (successioni limitate)

Prop. ℓ^∞ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ e $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su ℓ^∞.

Def. $c_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}$ (successioni infinitesime)
$c_{00} = \{\underline{x} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N} : x_k = 0\ \forall k > N\}$ (successioni definitivamente nulle)

Prop.
(i) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.
(ii) c_0 è un sottospazio vettoriale chiuso di ℓ^∞;
in particolare $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.
(iii) c_{00} è un sottospazio vettoriale denso e non chiuso in c_0.

Successioni p-sommabili

Def. Per $p \in [1, \infty)$ e $\underline{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiamo $\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$.
Poniamo inoltre $\ell^p = \{\underline{x} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \|\underline{x}\|_p < \infty\}$ (successioni p-sommabili)

Prop. Per ogni $p \in [1, \infty)$, ℓ^p è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$.
Inoltre $\|\underline{x}\|_p = 0$ se e solo se $\underline{x} = \underline{0}$. $\|\cdot\|_p$ è una norma su ℓ^p?

Def. Sia $p \in [1, \infty]$. L'elemento $q \in [1, \infty]$ tale che $1/p + 1/q = 1$ è detto *esponente coniugato* di p (qui si intende che $1/\infty = 0$).

Prop. (disug. di Young) Siano $p, q \in (1, \infty)$ esponenti coniugati. Allora

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall a, b \in [0, \infty).$$

Prop. (disug. di Hölder) Siano $p, q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati. Allora

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|\underline{x}\|_p \, \|\underline{y}\|_q \qquad \forall \underline{x} \in \ell^p, \ \forall \underline{y} \in \ell^q,$$

ove la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k$ converge assolutamente.

Prop. (disug. di Minkowski) Sia $p \in [1, \infty]$. Allora

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|_p \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p \qquad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}.$$

Coroll. $\|\cdot\|_p$ è una norma su ℓ^p per ogni $p \in [1, \infty)$.

Proprietà degli spazi ℓ^p

Prop. Valgono le seguenti proprietà.

(i) Per ogni $p \in [1, \infty]$, $\underline{x} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ e $k \in \mathbb{N}$, si ha
$$|x_k| \leq \|\underline{x}\|_p.$$

(ii) Per ogni $p, q \in [1, \infty]$, se $p < q$ allora
$$\|\underline{x}\|_q \leq \|\underline{x}\|_p \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}.$$
In particolare $\ell^p \subseteq \ell^q$, e inoltre l'inclusione è propria.

(iii) Per ogni $p \in [1, \infty)$, si hanno le inclusioni
$$c_{00} \subseteq \ell^p \subseteq c_0.$$
Tali inclusioni sono proprie.
Inoltre c_{00} è denso in $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$
e ℓ^p è denso in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Teor. $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach per ogni $p \in [1, \infty]$.

Lemma (Fatou). (caso $(M, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$)
Se $(x_k^{(n)})_k$ sono a valori in $[0, \infty]$ e $x_k = \liminf_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$,
allora $\sum_{k=0}^{\infty} x_k \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(n)}$.

Spazi di funzioni misurabili

Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura.
(M insieme, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$ σ-algebra su M, $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ misura su M)

$f : M \to \mathbb{F}$ è *misurabile* se $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ per ogni $A \subseteq \mathbb{F}$ aperto.
$\mathscr{L}^0 = \mathscr{L}^0(M, \mathcal{M}, \mu)$ è l'insieme delle funzioni misurabili $f : M \to \mathbb{F}$.

Oss. $\mathscr{L}^0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(M, \mathbb{F})$.

Per $f \in \mathscr{L}^0$ poniamo
$\|f\|_p = \left(\int_M |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$,
$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \mu\{x \in M : |f(x)| > \lambda\} = 0\}$.

Definiamo $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(M, \mathcal{M}, \mu) = \{f \in \mathscr{L}^0 : \|f\|_p < \infty\}$ per $p \in [1, \infty]$.

Oss. Se $(M, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$, si ha $\mathscr{L}^p = \ell^p$.

Teor.

(i) $\mathscr{L}^p$ è un sottospazio vettoriale di $\mathscr{L}^0$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

(ii) (dis. di Hölder) $\left| \int_M f \, g \, d\mu \right| \leq \int_M |f \, g| \, d\mu \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$
se $p, q \in [1, \infty]$ sono esponenti coniugati e $f \in \mathscr{L}^p$, $g \in \mathscr{L}^q$.

(iii) (dis. di Minkowski) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ se $p \in [1, \infty]$ e $f, g \in \mathscr{L}^0$.

Spazi di Lebesgue L^p

$$\mathscr{L}^p = \{f \in \mathscr{L}^0 : \|f\|_p < \infty\}, \qquad \|f\|_p = \begin{cases} \operatorname{ess\,sup} |f|, & p = \infty, \\ \left(\int_M |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & p \in [1, \infty). \end{cases}$$

Oss. $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ μ-quasi ovunque.
Dunque in generale $\|\cdot\|_p$ non è una norma su $\mathscr{L}^p$:
la proprietà di separazione può fallire (!) (se esiste $\emptyset \neq E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = 0$).

Def. Per $p \in [1, \infty]$, poniamo $L^p(M, \mathcal{M}, \mu) = \mathscr{L}^p(M, \mathcal{M}, \mu)/\sim$
ove $\sim$ è la relazione di equivalenza definita da

$$f \sim g \iff f = g \ \ \mu\text{-quasi ovunque.}$$

Lemma Siano $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{L}^0$ e $p \in [1, \infty]$. Se $f \sim \tilde{f}$ e $g \sim \tilde{g}$, allora:

$$f + g \sim \tilde{f} + \tilde{g}, \qquad f \cdot g \sim \tilde{f} \cdot \tilde{g}, \qquad \|f\|_p = \|\tilde{f}\|_p$$

Per $[f], [g] \in L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ possiamo allora definire

$$[f] + [g] = [f + g], \qquad \alpha[f] = [\alpha f], \qquad \|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

Prop. $L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ è uno sp. vettoriale con queste operazioni
e $\|\cdot\|_p$ è una norma su $L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

Teor. $(L^p(M, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach per ogni $p \in [1, \infty]$.

Proprietà degli spazi L^p

Per $p \in [1, \infty]$, $\quad L^p(M, \mathcal{M}, \mu) = \mathscr{L}^p(M, \mathcal{M}, \mu)/\sim$

ove $f \sim g \iff f = g$ μ-quasi ovunque

- Nella pratica si tende a non distinguere nella notazione la funzione $f \in \mathscr{L}^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ dalla sua classe di equivalenza $[f] \in L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$.
- $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#) = \ell^p$.
- Scriviamo anche $L^p(M, \mu)$ o $L^p(M)$ invece di $L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ se la σ-algebra $\mathcal{M}$ e/o la misura μ sono chiare dal contesto.
- Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, scriviamo $L^p(I)$ sottintentendo la misura di Lebesgue.
- Se $I = [a, b]$ scriviamo anche $L^p(a, b)$ invece di $L^p(I)$.
  $I = (a, b)$ dà lo stesso spazio $L^p(a, b)$, siccome $\{a, b\}$ è Lebesgue-trascurabile.
  Per $p < \infty$ e $f \in L^p(a, b)$ si ha $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$.
- Se $f, g \in C[a, b]$ e $f \sim g$ (rispetto alla misura di Lebesgue) allora $f = g$ e inoltre $\sup |f| = \operatorname{ess\,sup} |f|$.
  Quindi la notazione $\|f\|_\infty$ non è ambigua per $f \in C[a, b]$ e $C[a, b]$ si può pensare come sottospazio di $L^\infty(a, b)$ con la norma indotta.

Prop. $C[a, b]$ è un sottospazio chiuso proprio di $L^\infty(a, b)$.

Convergenza monotona e convergenza dominata

Teor. (convergenza monotona) Siano $f_n : M \to [0, \infty]$ misurabili tali che:

- $f_n \to f$ puntualmente μ-quasi ovunque;
- $f_n \leq f_{n+1}$ μ-quasi ovunque per ogni n.

Allora $f : M \to [0, \infty]$ è misurabile e $\int_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu$.

Teor. (convergenza dominata) Siano $f_n \in L^1(M)$ tali che:

- $f_n \to f$ puntualmente μ-quasi ovunque;
- esiste $g \in L^1(M)$ tale che $|f_n| \leq g$ μ-quasi ovunque per ogni n.

Allora $f \in L^1(M)$ e $\int_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu$.

Coroll. (convergenza dominata in L^p) Sia $p \in [1, \infty)$. Siano $f_n \in L^p(M)$ tali che:

- $f_n \to f$ puntualmente μ-quasi ovunque;
- esiste $g \in L^p(M)$ tale che $|f_n| \leq g$ μ-quasi ovunque per ogni n.

Allora $f \in L^p(M)$ e $f_n \to f$ in $L^p(M)$.

Inclusioni fra spazi L^p

Prop. Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura *finito* ($\mu(M) < \infty$). Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$, allora $L^q(M) \subseteq L^p(M)$ e $\|f\|_p \leq \mu(M)^{1/p-1/q}\|f\|_q$ per ogni $f \in L^q(M)$.

Nota: inclusioni opposte rispetto agli ℓ^p (!)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Coroll. $C[a, b] \subseteq L^\infty(a, b) \subseteq L^q(a, b) \subseteq L^p(a, b)$ se $1 \leq p < q < \infty$.

Domande:

- le inclusioni sono proprie?
- $C[a, b]$ è chiuso in $L^p(a, b)$ per $p < \infty$?

Def. Poniamo $C_c(a, b) = \{f \in C[a, b] : \operatorname{supp} f \subseteq (a, b)\}$ ove $\operatorname{supp} f = \overline{\{t \in [a, b] : f(t) \neq 0\}}$ è il *supporto* di f.

Oss. $C_c(a, b)$ è un sottospazio vettoriale di $C[a, b]$.

Prop. Sia $p \in [1, \infty)$. Per ogni intervallo $[c, d] \subseteq (a, b)$,

$$\mathbf{1}_{[c,d]} \in \overline{C_c(a, b)}^{L^p(a,b)}.$$

In particolare, $C_c(a, b)$ e $C[a, b]$ non sono chiusi in $L^p(a, b)$.

Sottospazi densi di L^p

Teor.

(i) Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora l'insieme

$$\operatorname{span}\{\mathbf{1}_E : E \in \mathcal{M},\ \mu(E) < \infty\}$$

è denso in $L^p(M)$ per ogni $p \in [1, \infty)$.

(ii) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Allora l'insieme

$$\operatorname{span}\{\mathbf{1}_{[c,d]} : [c, d] \subseteq I\}$$

è denso in $L^p(I)$ per ogni $p \in [1, \infty)$.

(iii) Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Allora $C_c(a, b)$ e $C[a, b]$ sono densi in $L^p(a, b)$ per ogni $p \in [1, \infty)$.

Coroll. $L^p(a, b)$ è separabile per ogni $p \in [1, \infty)$.

Oss. I risultati sopra non valgono per $p = \infty$.