Appunti di Equazioni alle Derivate Parziali

versione: 1.5 — anno accademico 2023-2024

Marco Morandotti
Politecnico di Torino
Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"

Segnalare eventuali errori a marco.morandotti@polito.it.

18 marzo 2024

Indice

Bibliografia

[1] R. A. Adams: *Sobolev spaces*. Academic Press, 1975.

[2] H. Brézis: *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni*. Liguori, 1986.

[3] H. Brézis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[4] R. Choksi: *Partial differential equations—a first course*. Pure Appl. Undergrad. Texts volume 54. American Mathematical Society, 2022.

[5] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, volume 19. American Mathematical Society, 1997.

[6] G. Gilardi: *Analisi tre*. Mc Graw Hill, 2014.

[7] D. Gilbarg e N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics, Springer, 2001.

[8] G. Leoni: *A First Course in Sobolev Spaces*. Graduate Studies in Mathematics, volume 105. American Mathematical Society, 2009.

[9] W. P. Ziemer: *Weakly Differentiable Functions*. Springer Verlag, 1989.

Gli elementi sopra citati sono tra i più noti testi di base per lo studio degli argomenti trattati in questo corso: equazioni differenziali alle derivate parziali e spazi di Sobolev. Le referenze di base per la trattazione delle funzioni armoniche sono [5, Sezione 2.2] e [7, Capitoli 2 e 3] (quest'ultima referenza contiene anche risultati più avanzati di quelli che verranno presentati nel corso). Suggerisco [6, Capitoli III e VI] come referenza per le distribuzioni e la convoluzione, rispettivamente. Una buona fonte sull'equazione del calore è [5, Sezione 2.3]. Per gli spazi di Sobolev seguo [5, Capitolo 5], così come per la formulazione debole delle equazioni alle derivate parziali [5, Capitolo 6].
Gli altri testi sono segnalati come complementi o come presentazioni alternative (ciascuno ha i suoi gusti...) degli argomenti trattati nel corso. Alcune sono referenze più classiche, altre sono referenze più moderne, ma la sostanza resta. Per ulteriori referenze o curiosità, non esitate a contattarmi.

Capitolo 1

Alcuni risultati preliminari

In questo capitolo richiamiamo alcuni risultati che saranno utili nelle dimostrazioni che seguiranno.

1.1 Integrazione per parti in più dimensioni; formule di Green

1.2 Il Teorema di Ascoli–Arzelà

Il Teorema 1.2.6 di Ascoli–Arzelà è uno strumento importante per poter estrarre, da successioni di funzioni con certe proprietà di continuità e limitatezza, sottosuccessioni uniformemente convergenti ad una funzione continua. Ricordiamo alcune definizioni di base.

Definizione 1.2.1 (spazio metrico: compattezza e totale limitatezza)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico.*

- *X si dice* compatto *se da ogni ricoprimento aperto di X si può estrarre un sottoricoprimento finito.*
- *X si dice* totalmente limitato *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di punti $x_1, \dots, x_J \in X$ tali che $X \subset \bigcup_{j=1}^{J} B_\varepsilon(x_j)$.*

Susiste il seguente teorema (che non dimostreremo) di caratterizzazione della compattezza per uno spazio metrico.

Teorema 1.2.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora sono equivalenti:*

1. *X è completo e totalmente limitato;*
2. *X è compatto;*
3. *X è sequenzialmente compatto.*

Definizione 1.2.3. *Una successione $\{f_n\}$ di funzioni a valori reali definite su un insieme X si dice* puntualmente limitata *se per ogni $x \in X$ la successione (numerica) $\{f_n(x)\}$ è limitata; si dice* uniformemente limitata *se*

$$\text{esiste } M > 0 \text{ tale che } |f_n(x)| < M \text{ per ogni } x \in X \text{ e per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Definizione 1.2.4 (equi-continuità). *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni a valori reali definite su uno spazio metrico (X, d).*

1. *La famiglia $\mathcal{F}$ si dice* equi-continua *in $x \in X$ se*

$$\begin{cases} \text{per ogni } \varepsilon > 0, \text{ esiste } \delta_{\varepsilon,x} > 0 \text{ tale che, per ogni } f \in \mathcal{F} \text{ e per ogni } x' \in X, \\ \text{se } d(x,x') < \delta_{\varepsilon,x} \text{ allora } |f(x') - f(x)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{1.2}$$

   La famiglia $\mathcal{F}$ è equi-continua su X se lo è in ogni suo punto.

2. *La famiglia $\mathcal{F}$ si dice* uniformemente equi-continua *se*

$$\begin{cases} \text{per ogni } \varepsilon > 0, \text{ esiste } \delta_{\varepsilon} > 0 \text{ tale che, per ogni } f \in \mathcal{F} \text{ e per ogni } x, x' \in X, \\ \text{se } d(x,x') < \delta_{\varepsilon} \text{ allora } |f(x') - f(x)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{1.3}$$

Lemma 1.2.5. *Sia (X, d) uno spazio metrico separabile e sia $\{f_n\} \subset C^0(X)$ una successione equi-continua e puntualmente limitata. Allora esiste una sottosuccessione di $\{f_n\}$ che converge puntualmente ad una funzione $f : X \to \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Siccome X è separabile, esiste un sottoinsieme $D \subset X$ numerabile e denso; sia $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ un'enumerazione di D. Osserviamo che per l'ipotesi di limitatezza puntuale delle f_n, la successione $n \mapsto f_n(x_1)$ è limitata in $\mathbb{R}$; allora, per il Teorema di Bolzano–Weierstrass (♥), essa ammette una sottosuccessione convergente, ovvero esistono una successione strettamente crescente di interi $n \mapsto s(1, n)$ ed un numero $a_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} f_{s(1,n)}(x_1) = a_1.$$

Analogamente, la successione $n \mapsto f_{s(1,n)}(x_2)$ è limitata e quindi esistono una sottosuccessione strettamente crescente $\{s(2, n)\} \subset \{s(1, n)\}$ e $a_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} f_{s(2,n)}(x_2) = a_2.$$

Per induzione, otteniamo una famiglia numerabile di successioni strettamente crescenti $\{s(i, n)\}_{i=1}^{\infty}$ ed una successione $\{a_i\} \subset \mathbb{R}$ tali che

$$\{s(i + 1, n)\} \subset \{s(i, n)\} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} f_{s(j,n)}(x_j) = a_j.$$

Costruiamo la funzione limite $f : X \to \mathbb{R}$ ponendo $f(x_i) = a_i$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ e ora, diagonalizzando, cioè scegliendo $n_k := s(k, k)$, abbiamo che[1]

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_i) = a_i = f(x_i).$$

Abbiamo dunque dimostrato che la successione $\{f_{n_k}\}_k$ converge puntualmente su D a f – e siccome la sottosuccessione è stata individuata, la possiamo denotare con $\{f_n\}$ (per evitare doppi pedici). Ora dobbiamo sfruttare la densità di D in X. Sia dunque $x_0 \in X$ un punto qualunque: concludiamo la dimostrazione se dimostriamo che $\{f_n(x_0)\}$ è di Cauchy. Per verificarlo, fissiamo $\varepsilon > 0$ e dalla (1.2) otteniamo che esiste $\delta = \delta_{\varepsilon,x_0} > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dalla densità di D, esiste un punto $x_j \in D$ tale che $d(x_j, x_0) < \delta$. Infine, siccome

[1] Notiamo che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, la successione $\{n_k\}_{k=i}^{\infty}$ è una sottosuccessione di $\{s(i, n)\}$.

$\{f_n(x_j)\}_n$ converge, essa è di Cauchy[2] e dunque possiamo scegliere $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ grande a sufficienza tale che $|f_n(x_j) - f_m(x_j)| < \varepsilon$ per ogni $n, m > \nu_\varepsilon$.
Raccogliendo tutte queste informazioni, abbiamo

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \le |f_n(x_0) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_m(x_0)| \le 3\varepsilon,$$

sancendo che $\{f_n(x_0)\}_n$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, la cui completezza garantisce l'esistenza di un limite, che possiamo chiamare $f(x_0)$. La funzione f è ora definita per ogni punto di X e risulta il limite puntuale della successione data. □

Teorema 1.2.6 (Ascoli–Arzelà)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $\{f_n\} \subset C^0(X)$ una successione di funzioni uniformemente equi-continue ed equi-limitate. Allora $\{f_n\}$ ammette una sottosuccessione uniformemente convergente ad una funzione $f \in C^0(X)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che siccome (X, d) è uno spazio metrico, allora esso è separabile. Il Lemma 1.2.5 garantisce allora che che esiste una sottosuccessione di $\{f_n\}$ (che non rinomineremo) che converge puntualmente in X ad una funzione $f : X \to \mathbb{R}$. La convergenza puntuale di $\{f_n\}$ a f e l'uniforme equi-continuità (1.3) ci permetteranno di stabilire che $\{f_n\}$ è di Cauchy in $(C^0(X), \|\cdot\|_\infty)$ e quindi che ammette un limite uniforme in questo spazio.
Fissiamo $\varepsilon > 0$ e dalla (1.3) otteniamo che esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valga $|f_n(x') - f_n(x)| < \varepsilon$ per ogni $x, x' \in X$ con $d(x, x') < \delta_\varepsilon$. La compattezza di X implica, per il Teorema 1.2.2, che X sia totalmente limitato, ovvero che esistono punti $\{x_1, \dots, x_J\} \subset X$ tali che

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{J} B_{\delta_\varepsilon}(x_j).$$

La convergenza puntuale della successione $\{f_n(x_j)\}_n$ ci dice anche che essa è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $j = 1, \dots, J$ e quindi esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m > \nu_\varepsilon$ si ha che $|f_n(x_j) - f_m(x_j)| < \varepsilon$. Inoltre, per ogni $x \in X$ esiste $j \in \{1, \dots, J\}$ tale che $x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_j)$.
Raccogliendo tutte queste informazioni, abbiamo

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_m(x)| \le 3\varepsilon,$$

da cui, prendendo l'estremo superiore rispetto a $x \in X$, si ha che $\|f_n - f_m\|_\infty < 3\varepsilon$, ovvero che la successione è di Cauchy nello spazio metrico completo $(C^0(x), \|\cdot\|_\infty)$: esiste quindi una funzione $f \in C^0(X)$ tale che $f_n \to f$ uniformemente. □

1.3 I teoremi di Lebesgue, Fubini e Tonelli

Ricordiamo qui tre teoremi tra i più importanti della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

Teorema 1.3.1 (Lebesgue, convergenza dominata)**.** *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni a valori reali (o complessi) integrabili convergente quasi ovunque ad una funzione f definita quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$. Se esiste una funzione $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) integrabile tale che*

$$|f_n(x)| \le \varphi(x) \qquad \textit{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}^N \textit{ e per ogni } n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

[2] Si ricordi la caratterizzazione della convergenza in $\mathbb{R}$.

allora f è integrabile e valgono le formule

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.5}$$

Teorema 1.3.2 (Fubini)**.** *Sia $f\colon \mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $(x,y)\mapsto f(x,y)$, una funzione integrabile in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$. Allora*

1. *per quasi ogni $y\in\mathbb{R}^N$ la funzione $x\mapsto f(x,y)$ è integrabile in $\mathbb{R}^M$;*
2. *la funzione $y\mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ è integrabile in $\mathbb{R}^N$;*
3. *vale la formula*

$$\int_{\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{1.6}$$

Chi legge è invitato a confrontare il teorema con quello di riduzione per integrali multipli che vale per la teoria dell'integrazione di Riemann.

Teorema 1.3.3 (Tonelli)**.** *Sia $f\colon \mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto f(x,y)$, una funzione (reale) non negativa e misurabile in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$. Se valgono le proprietà 1. e 2. del Teorema 1.3.2 di Fubini, allora f è integrabile in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$.*

Osservazione 1.3.4. L'ipotesi sul segno della funzione richiesta dal Teorema 1.3.3 di Tonelli è fondamentale, come mostra la funzione $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x/(x^2+y^2)^2$, per la quale valgono le condizioni 1. e 2. del Teorema 1.3.2, mentre essa non risulta integrabile. Lasciamo i dettagli come esercizio. □

1.4 Multi-indici e il teorema multinomiale

Definizione 1.4.1 (multi-indice)**.** *Si dice multi-indice un elemento $\alpha\in\mathbb{N}^N$, in componenti $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$. La* lunghezza *di α è definita come $|\alpha| := \alpha_1+\cdots+\alpha_N$.*

Useremo i multi-indici principalmente per indicare un'operazione di derivazione generica di ordine $|\alpha|$. Dato un insieme $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ e data una funzione $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$, che solo per questo istante assumeremo differenziabile quante volte sia necessario, faremo uso della notazione compatta

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial_{x_1}^{\alpha^1}\cdots\partial_{x_N}^{\alpha_N}}$$

per indicare l'operazione di derivata parziale.
I multi-indici possono essere usati per scrivere una generalizzazione della formula del binomio di Newton, formula che sarà valida più avanti. A tal scopo, definiamo dati $\alpha\in\mathbb{N}^N$ e $x\in\mathbb{R}^N$,

$$\alpha! := \alpha_1!\cdots\alpha_N!, \qquad x^\alpha := x_1^{\alpha_n}\cdots x_N^{\alpha_N}, \qquad \binom{|\alpha|}{\alpha} := \frac{|\alpha|!}{\alpha!} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\cdots\alpha_N!}; \tag{1.7}$$

infine, diciamo che $\beta\le\alpha$ se $\beta_i\le\alpha_i$, per ogni $i=1\ldots,N$ e definiamo la differenza di due multi-indici termine a termine; definiamo anche

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Teorema 1.4.2 (multinomiale). *Dati* $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *e* $k \in \mathbb{N}$*, si ha*

$$(x_1 + \cdots + x_N)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_N!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}. \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su N. Per $N = 1$ abbiamo $\alpha = \alpha_1$ e $|\alpha| = k$ dà $\alpha_1 = k$. Allora abbiamo

$$x_1^k = \binom{k}{k} x_1^{\alpha_1} = x_1^k,$$

che è la (1.8) con $N = 1$.

Sia ora $N > 1$ e supponiamo valida la (1.8); vogliamo dimostrare che la formula vale anche per $N + 1$. Manipoliamo i simboli

$$\begin{aligned}
(x_1 + \cdots + x_{N+1})^k &= \underbrace{(x_1 + \cdots + x_{N-1} + (x_N + x_{N+1}))^k}_{N \text{ addendi}} \\
&= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{N-1}+K=k} \binom{|(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, K)|}{(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, K)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{N-1}^{\alpha_{N-1}} (x_N + x_{N+1})^K \\
&= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{N-1}+K=k} \binom{|(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, K)|}{(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, K)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{N-1}^{\alpha_{N-1}} \quad \times \\
&\qquad \times \sum_{\alpha_N+\alpha_{N+1}=K} \binom{K}{(\alpha_N, \alpha_{N+1})} x_N^{\alpha_N} x_{N+1}^{\alpha_{N+1}} \\
&= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{N-1}+\alpha_N+\alpha_{N+1}=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_{N-1}! K!} \frac{K!}{\alpha_N! \alpha_{N+1}!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{N-1}^{\alpha_{N-1}} x_N^{\alpha_N} x_{N+1}^{\alpha_{N+1}} \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il passo induttivo e la formula del binomio di Newton. □

Esercizio 1.4.3. La dimostrazione delle formule seguenti è un semplice esercizio.

- **(formula di Leibniz)**

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v. \tag{1.9}$$

- **(formula di Taylor)**

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \begin{cases} o(|x|^k) & \text{resto di Peano,} \\ \dfrac{D^\beta f(\xi)}{\beta!} (x - x_0)^\beta & \text{resto di Lagrange,} \end{cases} \tag{1.10}$$

dove $|\beta| = k + 1$ e ξ è un certo punto fra x_0 e x.

Capitolo 2

Introduzione alle equazioni a derivate parziali

2.1 Definizioni di base

Iniziamo dando la definizione astratta di equazione alle derivate parziali.

Definizione 2.1.1. *Una* equazione alle derivate parziali *di ordine $k \in \mathbb{N}$ è una relazione funzionale che coinvolge una funzione, la sua variabile indipendente e le derivate della funzione fino all'ordine k, ovvero una scrittura della forma*

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \ldots, D^k u(x)) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in \Omega, \tag{2.1}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto e dove $F\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N^k} \to \mathbb{R}$ è una funzione data. La relazione (2.1) si può scrivere anche in forma compatta come

$$F(x, D^\alpha u(x)) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in \Omega \text{ e per } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ con } |\alpha| \le k. \tag{2.2}$$

Segnaliamo fin da subito che una teoria omnicomprensiva che permetta di risolvere tutte le equazioni alle derivate parziali nella forma (2.1) è vana speranza, quindi occorre capire da un lato se ci sono tipologie di equazioni che sono più facili da risolvere di altre e dall'altro se ci sono tipologie di equazioni per le quali esista un metodo comune di risoluzione. Una possibile classificazione è la seguente, in base al grado di linearità dell'equazione nelle derivate di ordine massimo.

Definizione 2.1.2 (classificazione delle equazioni alle derivate parziiali)**.** *Un'equazione alle derivate parziali (2.1) si dice*

- ***lineare** se si può scrivere nella forma*

$$\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x), \tag{2.3}$$

per certe funzioni $a_\alpha, f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ e si dice omogenea *se $f \equiv 0$ (l'enorme vantaggio in questo caso è che lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale e la soluzione dell'equazione completa si scrivono come $\mathrm{sol}_c = \mathrm{sol}_h + \mathrm{sol}_p$, dove sol_h è la soluzione dell'equazione omogenea, mentre sol_p è una soluzione dell'equazione completa si ricordi il metodo per risolvere le equazioni ordinarie del second'ordine a coefficienti costanti); osserviamo che l'equazione è lineare rispetto alle derivate di tutti gli ordini;*

- ***semilineare*** *se si può scrivere nella forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1}u(x)) = 0;$$

  osserviamo che l'equazione è lineare rispetto alle derivate di ordine massimo con coefficienti che dipendono solo dal punto;
- ***quasilineare*** *se si può scrivere nella forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1}u(x)) D^\alpha u(x) \\ + a_0(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1}u(x)) = 0;$$

  osserviamo che l'equazione è lineare rispetto alle derivate di ordine massimo con coefficienti che dipendono dalle derivate di ordine inferiore;
- ***completamente non lineare*** *se dipende in modo non lineare dalle derivate di ordine massimo.*

Le Definizioni 2.1.1 e 2.1.2 si possono generalizzare al caso di sistemi di equazioni alle derivate parziali, situazione che si incontra quando la funzione incognita è a valori vettoriali, $\boldsymbol{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^M$.

Definizione 2.1.3. *Una* sistema di equazioni alle derivate parziali *di ordine* $k \in \mathbb{N}$ *è una relazione funzionale che coinvolge una funzione, la sua variabile indipendente e le derivate della funzione fino all'ordine* k*, ovvero una scrittura della forma*

$$\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{u}(x), D\boldsymbol{u}(x), D^2\boldsymbol{u}(x), \dots, D^k\boldsymbol{u}(x)) = \boldsymbol{0} \qquad \text{per ogni } x \in \Omega, \tag{2.4}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *è un aperto e dove* $\boldsymbol{F}\colon \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{MN} \times \mathbb{R}^{MN^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{MN^k} \to \mathbb{R}^M$ *è una funzione data. La relazione* (2.1) *si può scrivere anche in forma compatta come*

$$\boldsymbol{F}(x, D^\alpha \boldsymbol{u}(x)) = \boldsymbol{0} \qquad \text{per ogni } x \in \Omega \text{ e per } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ con } |\alpha| \le k.$$

Provare a dare la Definizione 2.1.2 per i sistemi.
Presentiamo alcune equazioni alle derivate parziali ed alcuni sistemi con qualche commento sui modelli che descrivono. inserire

2.2 Concetti di soluzione – idee generali

Per come è stata scritta la Definizione 2.1.1, l'equazione alle derivate parziali (2.1) deve essere verificata puntualmente per ogni $x \in \Omega$. Ciò comporta che devono esistere tutte le derivate parziali fino all'ordine k della funzione incognita u, pertanto, dovremmo cercare soluzioni $u \in C^k(\Omega)$, che chiameremo *soluzioni forti* o *classiche*. Tale richiesta di differenziabilità è alcune volte troppo forte e talvolta impossibile da ottenere, pertanto avrà senso (ed è qui che nasce nuova matematica!) dare un concetto più debole di soluzione, richiedendo meno regolarità alla funzione u. La strategia per poter dare concetti più deboli di soluzione è di cercare di riscrivere l'equazione in forma integrale, moltiplicandola per delle *funzioni test*. È ben noto che un'identità tra integrali è più debole della corrispondente identità tra le funzioni integrande, quindi sarà possibile estendere la validità della formulazione integrale ad una classe più ampia di funzioni. In generale daremo una nozione di *soluzione*

debole quando si richiede alla soluzione u meno regolarità (potremmo dire, la metà delle derivate richieste nella forma forte), mentre parleremo di *soluzione distribuzionale* quando non richiederemo alla soluzione u alcuna derivabilità. Questi concetti, che in realtà dipendono dalla famiglia di funzioni test usata per la trasformazione della (2.1) in forma integrale, sono volutamente vaghi a questo livello e verranno precisati meglio più avanti.
Una famiglia di funzioni test di particolare rilevanza è quella delle funzioni lisce a supporto compatto in Ω

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{spt}(\varphi) = K \Subset \Omega, K \text{ compatto}\} \tag{2.5}$$

Ricordare la costruzione del mollificatore di Friedrich.

Lemma 2.2.1 (lemma fondamentale del calcolo delle variazioni). *Sia $f \in C^0(a,b)$ tale che*

$$\int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \textit{per ogni } h \in C_c^\infty(a,b). \tag{2.6}$$

Allora $f \equiv 0$ in (a,b).

Dimostrazione. Si fa per assurdo, sfruttando la continuità di f ed il teorema della permanenza del segno. □

Notare che bastano meno richieste sulla funzione h: è sufficiente che $h \in C_c^1(a,b)$: come si costruisce questa h?
Vale un analogo del Lemma 2.2.1 in dimensione superiore, nel qual caso si può usare il mollificatore di Friedrich come funzione test nella dimostrazione per assurdo. riscrivere direttamente in dimensione N oppure rimandare a quando sarà fatto in modo generale.

Esempio 2.2.2 (l'equazione di Poisson). Come esempio di indebolimento del concetto di soluzione, vediamo il prototipo di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, l'equazione di Poisson. (È lineare e la funzione $a_\alpha(x)$ della (2.3) è rappresentata dalla matrice costante identità... dire precisamente.)
Per semplificare ancora di più l'esempio, partiamo dal caso semplice in dimensione $N = 1$. Il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$ deve essere un aperto connesso e limitato (per convenienza), quindi sarà un intervallo della forma $(a,b) \subset \mathbb{R}$, in cui l'equazione di Poisson si scrive

$$-u''(t) = f(t) \qquad \text{per ogni } t \in (a,b), \tag{2.7}$$

per la quale cercheremmo soluzioni $u \in C^2(a,b)$. Moltiplichiamo l'equazione per una funzione test $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ e integriamo in (a,b), ottenendo

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b (-u''(t) - f(t))\varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b u'(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t - [u'(t)\varphi(t)]_a^b - \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u'(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

siccome $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Affinché l'ultima equazione scritta abbia senso, basta che $u \in C^1(a,b)$: abbiamo dunque ridotto le pretese di regolarità sulla soluzione u a costo che l'equazione sia verificata in senso integrale. Soluzioni in questo senso integrale daranno lo spunto per definire le *soluzioni deboli*. Ora, grazie al Lemma 2.2.1, *se* l'equazione precedente vale *per ogni* $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$, allora si deve avere

che $-u''(t) - f(t) = 0$ per ogni $t \in (a, b)$, che è la (2.7). Facciamo notare che in questo caso c'è anche un fenomeno di guadagno di regolarità: si parte con il richiedere che la soluzione $u \in C^1(a, b)$ e, se si ottiene che la (2.7) è soddisfatta, si è ricavato che in realtà $u \in C^2(a, b)$.
È facile vedere che possiamo continuare con il procedimento di integrazione per parti e ottenere

$$\begin{aligned}
0 = \int_a^b (-u''(t) - f(t))\varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b u'(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [u(t)\varphi'(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_a^b u(t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

perché $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$. Ora, affinché l'ultima equazione abbia senso, basta che $u \in C^0(a, b)$ (in realtà anche meno: basta che abbia senso l'integrale del prodotto $u\varphi''$), senza richieste di differenziabilità. Soluzioni in questo senso integrale daranno lo spunto per definire le ***soluzioni distribuzionali***. *Se* ora questa equazione vale ***per ogni*** $\varphi \in C_c^\infty$, sempre grazie al Lemma 2.2.1 possiamo affermare che la (2.7) è soddisfatta; pure in questo caso, si è di fronte ad un fenomeno di guadagno di regolarità: si parte con il richiedere che la soluzione $u \in C^0(a, b)$ e, se si ottiene che la (2.7) è soddisfatta, si è ricavato che in realtà $u \in C^2(a, b)$.

Vediamo ora il caso in dimensione generale $N > 1$. L'idea è sempre quella di applicare l'integrazione per parti e per fare ciò occorre ricordare le formule di Green (excursus sulle formule di Green, caso mai in appendice). □

2.3 Buona positura secondo Hadamard

Considerando un'equazione alle derivate parziali nella forma (2.1) oppure (2.2) di ordine k, la soluzione dipende naturalmente da k "costanti" di integrazione. Se per le equazioni alle derivate ordinarie si tratta di k costanti numeriche (come siamo abituati), per le equazioni alle derivate parziali si tratta invece di k funzioni. Si mantiene tuttavia l'idea che tali k funzioni siano determinate dalle condizioni iniziali o al contorno. Data l'equazione nella forma (2.2), un problema con le condizioni al contorno è un problema della forma

$$\begin{cases} F(x, D^\alpha u) = 0 & \text{in } \Omega \text{ e con } |\alpha| \le k \\ \mathcal{B}(D^\beta u) = 0 & \text{su } \partial\Omega \text{ e con } |\beta| < k, \end{cases} \tag{2.8}$$

dove $\mathcal{B}$ è un'opportuna funzione (che non stiamo a specificare qui) che agisce, tipicamente, sulla funzione u e su alcune delle sue derivate, ***tranne*** che quelle di ordine massimo (pensare all'analogia con i problemi di Cauchy per le equazioni alle derivate ordinarie: le condizioni al contorno sono fino alla derivata di ordine massimo presente nell'equazione diminuita di uno).
Espressioni tipiche di $\mathcal{B}(D^\beta u)$ sono:

1. (**condizione di Dirichlet**) $\mathcal{B}(D^\beta u) = u - g$, per una funzione g assegnata sul bordo di Ω: questo significa che $u = g$ su $\partial\Omega$, ovvero si assegna il valore della funzione al bordo (e si ha $|\beta| = 0$);

2. **(condizione di Neumann)** $\mathcal{B}(D^\beta u) = \partial_\nu u - g$, per una funzione g assegnata sul bordo di Ω: questo significa che $\partial_\nu u = g$ su $\partial\Omega$, ovvero si assegna il valore della derivata normale al bordo (e si ha $|\beta| = 1$);
3. **(condizione di Robin)** $\mathcal{B}(D^\beta u) = au + b\partial_\nu u - g$, per una funzione g assegnata sul bordo di Ω: questo significa che $au + b\partial_\nu u = g$ su $\partial\Omega$, ovvero si assegna il valore di una combinazione tra il valore della funzione e della sua derivata normale al bordo (e si ha $|\beta| \leq 1$);
4. **(condizioni di Navier)** $\mathcal{B}(D^\beta u) = (u, \Delta u)$; uguagliando a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ il secondo membro si ottengono le due condizioni $u = \Delta u = 0$, una condizione al bordo tipica di problemi del quart'ordine (per esempio, quando l'EDP è modellata sull'operatore $-\Delta(-\Delta) =: \Delta^2$, il bilaplaciano);
5. **(condizioni iniziali)** più tipiche di equazioni in cui una variabile (t, nella notazione usuale) ha la funzione di tempo: si assegnano i valori della funzione e di alcune delle sue derivate al tempo $t = 0$ o ad un tempo $t = T$.

Esempio 2.3.1. Vediamo con un esempio come si manifesta la dipendenza dalle k funzioni indeterminate e come queste possano venire fissate dalle condizioni al contorno. In questo esempio abbiamo $k = 3$ e consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^3 u(x,y,t)}{\partial t^3} = \partial^3_{ttt} u(x,y,t) = u_{ttt}(x,y,t) = 0,$$

dove abbiamo scritto la derivata terza rispetto alla variabile t con tre notazioni equivalenti. Siccome si tratta di tre derivate rispetto ad una sola variabile, il problema si può risolvere con le tecniche dell'analisi in una variabile, considerando x e y come parametri. Si ottiene così che

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = \partial^2_{tt} u(x,y,t) = u_{tt}(x,y,t) = \text{costante in } t = a(x,y)$$

e, a cascata,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \partial_t u(x,y,t) = u_t(x,y,t) &= a(x,y)t + b(x,y),\\ u(x,y,t) &= a(x,y)\frac{t^2}{2} + b(x,y)t + c(x,y),\end{aligned}$$

con le funzioni a, b, c delle (sole) variabili x e y da determinare. Se ora diamo condizioni al contorno per $t = 0$, lo possiamo fare imponendo

$$\begin{cases} \partial^3_{ttt} u(x,y,t) = 0,\\ u(x,y,0) = f(x,y),\\ \partial_t u(x,y,0) = g(x,y),\\ \partial^2_{tt} u(x,y,0) = h(x,y), \end{cases} \tag{2.9}$$

ed in questo modo otteniamo che

$$u(x,y,t) = h(x,y)\frac{t^2}{2} + g(x,y)t + f(x,y).$$

La soluzione u del sistema(2.9) è quindi stata determinata unicamente dalle condizioni iniziali (del tipo 4. nell'elenco precedente).

Può capitare che le condizioni al contorno di tipo Dirichlet o più tipicamente Neumann forniscano anche una *condizione di compatibilità* per i termini noti, come mostriamo nel seguente esempio.

Esempio 2.3.2. Si consideri il problema di Neumann per l'equazione di Poisson con forzante f e dato (di Neumann) al bordo g

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Integrando l'equazione, utilizzando il teorema della divergenza e la condizione al bordo, otteniamo

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = -\int_{\partial\Omega} g(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

La relazione appena trovata ci dice che la funzione f e la funzione g non possono essere scelte arbitrariamente: affinché la catena di uguaglianze appena scritta sia valida, si sta assumendo che u sia una soluzione del problema (2.10). Detto altrimenti, affinché una soluzione esista è necessario che $\int_\Omega f = \int_{\partial\Omega} g$. Se, ad esempio, avessimo $g = 0$, la condizione di compatibilità diventa $\int_\Omega f = 0$: dunque, se la forzante ***non*** ha media nulla (dividendo per $|\Omega|$ si ottiene la media di f sul volume Ω), non può esistere una soluzione al problema (2.10). Al contrario, se f ha media nulla su Ω allora una soluzione esiste... ma non è unica! Aggiungendo ad una soluzione u di (2.10) una costante c, anche la funzione $u + c$ è ancora soluzione di (2.10) e si ottengono ∞^1 soluzioni, se volessimo dirlo emulando il linguaggio dei sistemi lineari (sono tante!). □

Gli esempi visti ora mettono in evidenza come sia importante avere un concetto di *buona positura* di un problema differenziale. Il concetto che introdurremo dà una delle possibili definizioni di quando un problema è *buono*; noi adottiamo questa prospettiva perché è quella utile in vista delle applicazioni modellistiche.

Definizione 2.3.3 (buona positura secondo Hadamard)**.** *Un problema del tipo* (2.8) *si dice ben posto secondo Hadamard se sono verificate le seguenti tre condizioni:*

1. *il problema ammette (almeno) una soluzione;*
2. *la soluzione è unica;*
3. *la soluzione dipende con continuità dai dati iniziali.*

Possiamo offrire un esempio di dipendenza continua dai dati iniziali (che essenzialmente vuol dire che se alla stessa equazione vengono abbinati due dati iniziali "vicini" – in un senso da precisare – allora le soluzioni corrispondenti sono "vicine" – idealmente nello stesso senso) per l'equazione di Laplace con condizioni di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Se $g \in C^0(\partial\Omega)$ e se $u \in C^2(\Omega)$ è una soluzione, si ha dipendenza continua dai dati se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u\|_\infty \leq C\|g\|_\infty\,; \tag{2.12}$$

e questo solitamente si applica al problema di Poisson (con $f \in C^0(\Omega)$) con dato di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

considerando due dati $g_1, g_2 \in C^0(\partial\Omega)$ vicini in norma $\|\cdot\|_\infty$; in caso di buona positura, la differenza $u = u_1 - u_2$ delle soluzioni corrispondenti soddisfa la (2.12) con $g = g_1 - g_2$.

Esempio 2.3.4 (Hadamard)**.** Vediamo con un esempio concreto un caso in cui *non* si ha buona positura secondo Hadamard. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \dfrac{\sin(nx)}{n} & \text{per } x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare che la funzione

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n}\sin(nx)\cosh(ny)$$

è soluzione del problema; notare che il dato al bordo per u tende a zero quando $n \to \infty$, uniformemente rispetto ad x. Osservare che, però, per n dispari e $x = \pi/2$ la soluzione esplode esponenzialmente. □

2.4 Classificazione delle equazioni differenziali del secondo ordine

Scrivere esplicitamente l'equazione in questo caso, con i coefficienti $a_{ij}(x)$ che formano una matrice simmetrica, con i coefficienti $b_i(x)$ a moltiplicare gli elementi del gradiente di u e con $a_0(x)$ il coefficiente di u, essendo $f(x)$ la forzante.
Classificazione in equazioni ellittiche, paraboliche, iperboliche, a seconda del segno degli autovalori della matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$; esempi prototipici.

Capitolo 3

Funzioni armoniche

Ci concentreremo sull'equazione modello per le equazioni ellittiche, ovvero l'equazione con il laplaciano.

Definizione 3.0.1 (funzione armonica)**.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto connesso. Una funzione* $u \in C^2(\Omega)$ *soluzione dell'equazione* $-\Delta u = 0$ *in* Ω *si dice* funzione armonica.

Quanto vale il flusso del gradiente ∇u attraverso una qualunque superficie ∂A regolare (quanto?) di un sottoinsieme $A \subset \Omega$?
Caratterizzazione delle funzioni armoniche di una variabile reale: sono le funzioni affini.
Invarianza dell'armonicità per: traslazione, riscalamento, trasformazione ortogonali.
Siccome le rotazioni sono trasformazioni ortogonali, ha senso chiedersi quali siano le funzioni armoniche a simmetria radiale.

- Scrittura del laplaciano per funzioni radiali $u(x) = v(|x|) = v(r)$. Come si scrive Δu in termini di v?
- Soluzione dell'equazione corrispondente per v.
- Caratterizzazione delle funzioni armoniche a simmetria radiale.

3.1 Proprietà delle funzioni armoniche

Studio della proprietà di media con il calcolo esplicito in dimensione $N = 1$: proprietà di media di "volume" (integrale sull'intervallo) e "superficiale" (media dei valori agli estremi). Sarà utile introdurre la seguente notazione: dato $x \in \Omega$, la funzione $d_{\partial\Omega} \colon \Omega \to [0, +\infty)$ definita da $d_{\partial\Omega}(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ è la distanza del punto x dal bordo $\partial\Omega$.

Lemma 3.1.1. *Sia* u *una funzione armonica in* Ω*. Allora, per ogni* $x \in \Omega$ *e per ogni* $\rho \in (0, d_{\partial\Omega}(x))$*, vale la* proprietà di media di superficie

$$u(x) = \fint_{\partial B_\rho(x)} u(y)\, \mathrm{d}\sigma(y). \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita dal membro destro della (3.1). Mostreremo che è costante e questo sarà sufficiente per concludere la dimostrazione. Scrivendo esplicitamente la media integrale ed effettuando il cambio di variabili

$$y = x + \rho z, \qquad \text{che porta alle sostituzioni } \begin{cases} \mathrm{d}\sigma(y) = \rho^{N-1}\mathrm{d}\sigma(z), \\ \partial B_\rho(x) \to \partial B_1(0), \end{cases} \tag{3.2}$$

abbiamo

$$f(\rho) = \frac{1}{\sigma_{N-1}\rho^{N-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sigma_{N-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x+\rho z)\,\mathrm{d}\sigma(z)$$

tSiccome la funzione u è regolare, possiamo derivare sotto il segno di integrale e, usando il cambiamento di variabile in (3.2) al contrario, otteniamo

$$\begin{aligned} f'(\rho) &= \frac{1}{\sigma_{N-1}} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+\rho z)\cdot z\,\mathrm{d}\sigma(z) \\ &= \frac{1}{\sigma_{N-1}\rho^{N-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} \nabla u(y)\cdot \underbrace{\frac{y-x}{\rho}}_{\nu}\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\sigma_{N-1}\rho^{N-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} \partial_\nu u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\sigma_{N-1}\rho^{N-1}} \int_{B_\rho(x)} \Delta u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

dove la penultima uguaglianza segue dal Teorema della divergenza e l'ultima dal fatto che u è armonica. Allora la funzione f è costante, ma siccome u è regolare si ha $u(x) = \lim_{\rho\to 0^+} f(\rho)$, da cui si conclude che $f(\rho) = u(x)$ per ogni ρ come nelle ipotesi. Ciò conclude la dimostrazione. □

Lemma 3.1.2. *Sia $u \in C^0(\Omega)$ una funzione che soddisfa (3.1). Allora, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\rho \in (0, d_{\partial\Omega}(x))$, la funzione u soddisfa la* proprietà di media di volume

$$u(x) = \fint_{B_\rho(x)} u(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3.4}$$

Dimostrazione. È sufficiente scrivere l'integrale di volume in (3.4) per gusci e usare la (3.1) e la proprietà $\sigma_{N-1} = N\omega_N$; infatti

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x)} u(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^\rho \left(\int_{\partial B_s(x)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \right) \mathrm{d}s = \int_0^\rho \sigma_{N-1} s^{N-1} u(x)\,\mathrm{d}s \\ &= \sigma_{N-1}\left[\frac{s^N}{N}\right]_0^\rho u(x) = \frac{\sigma_{N-1}\rho^N}{N} u(x) = \omega_N \rho^N u(x) = |B_\rho(x)| u(x), \end{aligned} \tag{3.5}$$

da cui segue la (3.4). □

Lemma 3.1.3. *Sia $u \in C^0(\Omega)$. Allora le proprietà di media di superficie (3.1) e di volume (3.4) sono equivalenti.*

Dimostrazione. Alla luce del Lemma 3.1.2, basta mostrare che la (3.4) implica la (3.1). Come per la dimostrazione del Lemma 3.1.2, si giunge alla conclusione integrando per gusci. Derivando rispetto a ρ l'uguaglianza tra il secondo ed il penultimo termine nella (3.5) si ottiene

$$\int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = N\omega_N \rho^{N-1} u(x) = \sigma_{N-1}\rho^{N-1}u(x),$$

che è precisamente la (3.1). □

Lemma 3.1.4. *Sia $u \in C^0(\Omega)$ una funzione che soddisfa una qualunque delle proprietà di media, (3.1) o (3.4). Allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Dimostrazione. Si ottiene il risultato mollificando ed usando la proprietà di media di superficie (3.1). Per fare ciò, consideriamo una successione $\{\psi_\varepsilon\}_\varepsilon$ di mollificatori (si veda la Definizione 4.2.1 più avanti), che possiamo prendere radiali, ovvero $\psi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(|x|)$. Allora, la funzione $u * \psi_\varepsilon$ data dal prodotto di convoluzione tra u e ψ_ε è una funzione di classe $C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ (si veda il Teorema 4.1.9), dove $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Usando le proprietà dei mollificatori si ottiene

$$\begin{aligned}(u * \psi_\varepsilon)(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} u(y)\varphi_\varepsilon(|x-y|)\,\mathrm{d}y = \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\varphi_\varepsilon(\rho)\,\mathrm{d}\sigma(y)\right)\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(\rho)\sigma_{N-1}\rho^{N-1}u(x)\,\mathrm{d}\rho = u(x)\int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(\rho)\sigma_{N-1}\rho^{N-1}\,\mathrm{d}\rho \\ &= u(x)\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = u(x).\end{aligned}$$

Ciò significa che la funzione u è uguale ad una funzione di classe C^∞ e la tesi è dimostrata. □

Lemma 3.1.5. *Sia $u \in C^0(\Omega)$ una funzione chesoddisfa una qualunque proprietà di media, (3.1) o (3.4). Allora u è armonica.*

Dimostrazione. Considerando la stessa funzione $\rho \mapsto f(\rho)$ introdotta per la dimostrazione del Lemma 3.1.1, abbiamo che $f(\rho) = u(x)$ per ogni $\rho \in (0, d_{\partial\Omega}(x))$. Allora, derivando rispetto a ρ come nella (3.3) otteniamo che

$$⨍_{B_\rho(x)} \Delta u(y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{per ogni } \rho \in (0, d_{\partial\Omega}(x)).$$

Applicando il Lemma 2.2.1 fondamentale del calcolo delle variazioni, otteniamo che $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$. □

Finora abbiamo lavorato con funzioni u almeno continue. Vediamo come è possibile rilassare le richieste sulla regolarità considerando funzioni solamente localmente integrabili. Come prima cosa è necessario dire quando una funzione $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ soddisfa la proprietà di media.

Definizione 3.1.6. *Data $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si dice che essa soddisfa la proprietà di media di volume se per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\rho \in (0, d_{\partial\Omega}(x))$ vale la (3.4).*

Lemma 3.1.7. *Sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ una funzione che soddisfa la proprietà di media di volume nel senso della Definizione 3.1.6. Allora esiste una funzione $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ armonica tale che $u = v$ quasi ovunque in Ω.*

Dimostrazione. Consideriamo $\varepsilon > 0$ e costruiamo, per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$, la funzione

$$x \mapsto v_\varepsilon(x) := \fint_{B_\varepsilon(x)} u(y)\,\mathrm{d}y,$$

che risulta continua. Infatti, sia $\{x_n\}$ una successione che converge ad x: dalla definizione abbiamo

$$v_\varepsilon(x_n) = \fint_{B_\varepsilon(x_n)} u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^N} \int_\Omega u(y)\chi_{B_\varepsilon(x_n)}(y)\,\mathrm{d}y,$$

da cui segue che

$$|v_\varepsilon(x_n) - v_\varepsilon(x)| \le \frac{1}{\omega_N \varepsilon^N} \int_\Omega |u(y)|\cdot|\chi_{B_\varepsilon(x_n)}(y) - \chi_{B_\varepsilon(y)}|\,\mathrm{d}y \to 0$$

per $n \to \infty$ per convergenza dominata. Allora possiamo affermare che $v_\varepsilon \in C^0(\Omega_\varepsilon)$ e $v_\varepsilon(x) = u(x)$ per quasi ogni $x \in \Omega_\varepsilon$. Inoltre, v_ε soddisfa la proprietà dei media di volume su Ω_ε. Infatti, per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$ e per ogni $\rho \in (0, d_{\partial\Omega_\varepsilon}(x))$ si ha

$$\fint_{B_\rho(x)} v_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = \fint_{B_\rho(x)} u(y)\,\mathrm{d}y = u(x) = v_\varepsilon(x),$$

dove la seconda uguaglianza è vera per le ipotesi su u e la terza è verificata per quasi ogni $x \in \Omega_\varepsilon$ ed in realtà per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$ per la continuità di v_ε. Dal Lemma 3.1.5 segue che v_ε è armonica in Ω_ε e la tesi segue mandando $\varepsilon \to 0$. □

Data una funzione armonica u su un dominio Ω che non sia tutto $\mathbb{R}^N$, è possibile dare delle stime *a priori* sulle derivate di tutti gli ordini. Si tratta di un risultato di regolarità interna (ovvero valido per punti $x \in \Omega$), da abbinare a quello del Lemma 3.1.4.

Lemma 3.1.8. *Sia u una funzione armonica su $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$. Allora, per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, si ha*

$$|D^\alpha u(x)| \le \left(\frac{N|\alpha|}{d_{\partial\Omega}(x)}\right)^{|\alpha|} \sup_{y\in\Omega} |u(y)|. \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Si procede per induzione sulla lunghezza $|\alpha|$ del multi-indice. Siano $|\alpha| = 1$ e $\rho \in (0, d_{\partial\Omega}(x))$. Siccome la funzione $D_i u$ è armonica, essa soddisfa la proprietà di media di volume (Lemmi 3.1.1 e 3.1.2), per cui

$$D_i u(x) = \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{B_\rho(x)} D_i u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\nu_i(y)\,\mathrm{d}\sigma(y),$$

grazie al teorema della divergenza. Dall'espressione appena trovata segue che

$$|D_i u(x)| \le \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{\partial B_\rho(x)} |u(y)|\,\mathrm{d}\sigma(y) \le \frac{\sigma_{N-1}\rho^{N-1}}{\omega_N \rho^N} \sup_{y\in\Omega}|u(y)| \le \frac{N}{\rho} \sup_{y\in\Omega}|u(y)|.$$

Prendendo ora il limite per $\rho \to d_{\partial\Omega}(x)$, otteniamo la formula (3.6) con $|\alpha| = 1$. Notiamo che la stima appena fatta, se da un lato permette di ottenere la tesi (3.6) immediatamente, dall'altro può essere raffinata nel seguente modo

$$|D_i u(x)| \le \frac{N}{d_{\partial\Omega}(x)} \sup_{y\in B_{d_{\partial\Omega}(x)}} |u(y)|. \tag{3.7}$$

Sia ora $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tale che $|\alpha| = |\beta| + 1$, da cui segue che esiste un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $D^\alpha u = D_i D^\beta u$. Scegliendo $\lambda \in (0, 1)$ e applicando la (3.7) con $\lambda d_{\partial\Omega}(x)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x)| = |D_i D^\beta u(x)| &\leq \frac{N}{\lambda d_{\partial\Omega}(x)} \sup_{y \in B_{\lambda d_{\partial\Omega}(x)}} |D^\beta u(y)| \\
&\leq \frac{n}{\lambda d_{\partial\Omega}(x)} \left(\frac{N}{d_{\partial\Omega}(y)} \right)^{|\beta|} |\beta|^{|\beta|} \sup_{y\in\Omega} |u(y)|, \\
&\leq \frac{n}{\lambda d_{\partial\Omega}(x)} \left(\frac{N}{(1-\lambda) d_{\partial\Omega}(x)} \right)^{|\beta|} |\beta|^{|\beta|} \sup_{y\in\Omega} |u(y)|,
\end{aligned}$$

dove si sono usate la base dell'induzione nella prima disuguaglianza, il passo induttivo nella seconda, ed il fatto che $d_{\partial\Omega}(y) \geq (1-\lambda) d_{\partial\Omega}(x)$ per ogni $y \in B_{\lambda d_{\partial\Omega}(x)}(x)$ nella terza. Scegliendo ora $\lambda = 1/|\alpha|$, si ottiene $1 - \lambda = (|\alpha| - 1)/|\alpha| = |\beta|/|\alpha|$ e

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{N^{|\alpha|} |\alpha|}{(d_{\partial\Omega}(x))^{|\alpha|}} \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|} \right)^{|\beta|} |\beta|^{|\beta|} \sup_{y\in\Omega} |u(y)| = \left(\frac{N|\alpha|}{d_{\partial\Omega}(x)} \right)^{|\alpha|} \sup_{y\in\Omega} |u(y)|,$$

che è la (3.6). □

La prima conseguenza della stima (3.6) è l'analiticità delle funzioni armoniche.

Lemma 3.1.9. *Sia u una funzione armonica su $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$. Allora essa è analitica, ovvero si può scrivere in serie di potenze.*

Dimostrazione. È sufficiente stimare il resto di Lagrange di ordine m della serie di Maclaurin (considerando, senza perdita di generalità, $x_0 = 0$) della funzione u (si veda la (1.10)). Abbiamo, per $y \in B_\rho(0)$ con $\rho \in (0, d_{\partial\Omega}(0)/2)$ e per un certo punto ξ tra 0 e y,

$$\begin{aligned}
|R_m(y)| &= \left| \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(\xi)}{\alpha!} y^\alpha \right| \leq C \left(\frac{2N}{d_{\partial\Omega}(0)} \right)^m m^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{|y_1|^{\alpha_1} \cdots |y_N|^{\alpha_N}}{\alpha_1! \cdots \alpha_N!} \\
&= C \left(\frac{2N}{d_{\partial\Omega}(0)} \right)^m m^m \frac{(|y_1| + \cdots + |y_N|)^m}{m!} =: C a_m,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la stima a priori (3.6) (che dà la costante $C > 0$) per ottenere la disuguaglianza ed il Teorema 1.4.2 multinomiale per ottenere l'ultima uguaglianza (si veda la (1.8)).
La strategia per concludere che a_m è infinitesimo per $m \to \infty$ è quella di mostrare che esso è il termine generale di una serie, la convergenza della quale si dimostra con il criterio del rapporto. La condizione necessaria per la convergenza delle serie numeriche permetterà di concludere. Studiamo

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \left(\frac{2N}{d_{\partial\Omega}(0)} \right) \left(\frac{m+1}{m} \right)^m (|y_1| + \cdots + |y_N|) \to \left(\frac{2N}{d_{\partial\Omega}(0)} \right) (|y_1| + \cdots + |y_N|) e$$

per $m \to \infty$, ed è sufficiente scegliere $\rho < \frac{d_{\partial\Omega}(0)}{2N^{3/2} e}$ affinché $\lim_{m\to\infty} a_{m+1}/a_m < 1$, e ciò conclude la dimostrazione. □

Vediamo ora alcuni risultati di convergenza sulle successioni di funzioni armoniche. Dati un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^N$ e $\varepsilon > 0$, introduciamo la notazione

$$A_\varepsilon := \{x \in A : d_{\partial A}(x) > \varepsilon\}.$$

Lemma 3.1.10. *Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni armoniche in Ω tale che $u_n \to u$ uniformemente, per una certa funzione $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Allora u è armonica e per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ si ha che $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ uniformemente sui compatti di Ω.*

Dimostrazione. Fissati $x \in \Omega$ e $\rho \in (0, d_{\partial\Omega}(x))$, scriviamo la proprietà di media di volume (3.4) su ogni u_n e notiamo che essa passa al limite per convergenza uniforme, ottenendo che la funzione limite u pure soddisfa la (3.4). Per il Lemma 3.1.5, la funzione u è armonica.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, le funzioni $u_n - u$ sono ora armoniche, pertanto possiamo applicare la stima a priori (3.6) e ottenere, per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$ e per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$|D^\alpha(u_n - u)(x)| \leq \left(\frac{N|\alpha|}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|} \sup_{y\in\Omega}|u_n(y) - u(y)| \to 0, \tag{3.8}$$

dove la convergenza a zero dell'estremo superiore è garantita dalla convergenza uniforme. Da ciò segue che

$$\sup_{x\in\Omega_\varepsilon} |D^\alpha(u_n - u)(x)| \to 0 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0,$$

che implica la tesi (siccome, dato un qualunque compatto $K \subset \Omega$, esiste un certo $\varepsilon > 0$ tale che $K \subset \Omega_\varepsilon$). □

Osservazione 3.1.11. Notiamo che è necessario considerare $x \in \Omega_\varepsilon$ (e non direttamente in Ω), per poter sostituire $d_{\partial\Omega}(x)$ con ε nel denominatore nella (3.8). La convergenza a zero è ottenuta perché l'estremo superiore nella (3.8) si può maggiorare, definitivamente in n, con $\varepsilon^{|\alpha|+1}$ (per esempio), poiché a questo punto ε è fissato. □

Ci si rende conto che la proprietà di media passa al limite sotto condizioni ben più deboli della convergenza uniforme. Quindi è lecito chiedersi se si possano dare risultati in cui si indeboliscono le ipotesi. È possibile indebolirle sia sulla nozione di convergenza sia sulla regolarità delle funzioni, come vediamo nei prossimi due lemmi.

Lemma 3.1.12. *Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni armoniche in Ω tali che $u_n \to u$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, per una certa funzione $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Allora esiste $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ armonica tale che $v = u$ quasi ovunque in Ω e per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ si ha che $D^\alpha u_k \to D^\alpha v$ uniformemente sui compatti di Ω.*

Dimostrazione. Fissati $x \in \Omega$ e $\rho \in (0, d_{\partial\Omega}(x))$, scriviamo la proprietà di media di volume (3.4) su ogni u_n e notiamo che essa passa al limite anche in ipotesi di convergenza $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ottenendo che la funzione limite u pure soddisfa la (3.4). Per il Lemma 3.1.7, esiste una funzione $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ armonica tale che $u = v$ quasi ovunque in Ω.
Siccome le funzioni $u_n - v$ sono armoniche per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo usare ancora la proprietà di media di volume (3.4) e stimare, per ogni $x \in \Omega_{2\varepsilon}$,

$$|u_n(x) - v(x)| = \left|\frac{1}{\omega_N\varepsilon^N}\int_{B_\varepsilon(x)} (u_n(y) - v(y))\,\mathrm{d}y\right| \leq \frac{1}{\omega_N\varepsilon^N}\int_{\Omega_\varepsilon} |u_n(y) - v(y)|\,\mathrm{d}y,$$

da cui si ottiene che

$$\sup_{x\in\Omega_{2\varepsilon}} |u_n(x) - v(x)| \le \frac{1}{\omega_N \varepsilon^N} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_n(y) - v(y)|\, \mathrm{d}y.$$

Ora possiamo considerare $x \in \Omega_{3\varepsilon}$ e usare l'ultima disuguaglianza ottenuta in combinazione con la stima a priori (3.6) per ottenere

$$|D^\alpha(u_n - v)(x)| \le \left(\frac{N|\alpha|}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\omega_N \varepsilon^N} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_n(y) - v(y)|\, \mathrm{d}y;$$

siccome la convergenza implica che l'integrale al membro destro può essere reso piccolo a piacere definitivamente in n, lo si può rendere minore di $\varepsilon^{|\alpha|+N+1}$ (per esempio) e quindi

$$\sup_{x\in\Omega_{3\varepsilon}} |D^\alpha(u_n - v)(x)| \to 0 \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0,$$

che implica la tesi. □

Lemma 3.1.13. *Sia $\{u_n\} \subset L^1(\Omega)$ una successione di funzioni armoniche tali che $u_n \rightharpoonup u$ in $L^1(\Omega)$, per una certa funzione $u \in L^1(\Omega)$. Allora esiste una funzione $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ armonica tale che $u = v$ quasi ovunque in Ω.*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $x \in \Omega_{2\varepsilon}$ e per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, la stima a priori (3.6) e la proprietà di media di volume (3.4) forniscono

$$\sup_{x\in\Omega_{2\varepsilon}} |D^\alpha u_n(x)| \le \left(\frac{N|\alpha|}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\omega_N \varepsilon^N} \int_{\Omega} |u_n(y)|\, \mathrm{d}y,$$

e l'integrale a membro destro è limitato uniformemente rispetto ad $n \in \mathbb{N}$ per la convergenza debole. Si può allora applicare il Teorema 1.2.6 di Ascoli–Arzelà ed ottenere che le derivate α-esime convergono uniformemente (a meno di sottosuccessioni). Questo si applica anche ad u_n stessa, siccome $u_n = D^\alpha u_n$ con $|\alpha| = 0$ ed il Lemma 3.1.10 permette di concludere. □

Esercizio 3.1.14. Si può dire qualcosa sui limiti delle derivate $D^\alpha u_n$ con $|\alpha| > 0$?

Lemma 3.1.15 (Weyl)**.** *Sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ una soluzione distribuzionale dell'equazione di Laplace, ovvero $-\Delta u = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Allora esiste una funzione armonica v tale che $u = v$ quasi ovunque in Ω.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione $\{\rho_\varepsilon\}$ di mollificatori e definiamo $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$. Allora $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e $-\Delta u_\varepsilon = (-\Delta u) * \rho_\varepsilon = 0$ in Ω_ε, da cui segue che u_ε è armonica in Ω_ε e $u_\varepsilon \to u$ in $L^1(\Omega_\eta)$ per ogni $\eta > \varepsilon$. Per il Lemma 3.1.12, esiste quindi una funzione $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ armonica tale che $v = u$ quasi ovunque in Ω (vale su Ω_η e poi si passa al limite per $\eta \to 0$). □

Teorema 3.1.16 (Liouville)**.** *Sia u una funzione armonica e limitata in $\mathbb{R}^n$. Allora u è costante.*

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^n$, un raggio $R > 0$ e consideriamo $\Omega = B_R(x)$. Allora, per la (3.6), per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$\left|\partial_{x_i} u(x)\right| \leq \frac{n}{R} \sup_{y \in B_R(x)} |u(y)| \leq \frac{Cn}{R}. \tag{3.9}$$

Prendendo il limite per $R \to +\infty$, si ottiene che $\left|\partial_{x_i} u(x)\right| = 0$, da cui si ottiene che u è costante. □

Osservazione 3.1.17. Dalla dimostrazione del Teorema di Liouville 3.1.16, ci si rende conto che per ottenere che una funzione armonica definita su tutto $\mathbb{R}^n$ sia costante non serve la limitatezza, ma basta che la funzione cresca meno che linearmente. Infatti, se

$$|u(x)| \leq A + B|x|^\alpha \qquad \text{con } \alpha < 1,$$

ripetendo la stima (3.9), si ottiene

$$\left|\partial_{x_i} u(x)\right| \leq \frac{n}{R} \sup_{y \in B_R(x)} |u(y)| \leq \frac{n}{R} \sup_{y \in B_R(x)} (A + B|y|^\alpha) \leq \frac{n}{R}(A + B(|x| + R)^\alpha)$$

che tende a zero quando $R \to +\infty$ siccome $\alpha < 1$.
Inoltre, se la funzione u ha crescita lineare, ovvero

$$|u(x)| \leq A + B|x|,$$

dalla (3.6) applicata alle derivate seconde, si ottiene

$$\left|\partial^2_{x_i x_j} u(x)\right| \leq \frac{4n^2}{R^2} \sup_{y \in B_R(x)} |u(y)| \leq \frac{4n^2}{R^2} \sup_{y \in B_R(x)} (A + B|y|) \leq \frac{4n^2}{R^2}(A + B(|x| + R)),$$

che tende a zero quando $R \to +\infty$. Le derivate seconde sono nulle, pertanto la funzione u è un polinomio di grado 1 nelle variabili, ovvero è una funzione affine.

3.1.1 Connessione con le funzioni olomorfe

Una funzione $f\colon \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa ha parte reale e parte immaginaria che sono funzioni armoniche, come conseguenza delle equazioni di Cauchy–Riemann. Viceversa, data una funzione armonica u su Ω semplicemente connesso, è sempre possibile trovare una funzione olomorfa f di cui u è la parte reale. Per dimostrare questa seconda implicazione, si nota che imporre le condizioni di Cauchy–Riemann per la funzione v che sarà la parte immaginaria di f è equivalente ad integrare una forma differenziale. Si deve applicare il Lemma di Poincaré (la chiusura della forma segue dall'armonicità di u).

3.2 Il principio del massimo

Il principio del massimo è una notevole proprietà delle funzioni armoniche (ed in generale delle soluzioni di equazioni differenziali del second'ordine, sotto opportune ipotesi) che mette in relazione i valori assunti da una funzione armonica all'interno del dominio Ω con i valori assunti sul bordo $\partial\Omega$.

Teorema 3.2.1 (principio del massimo debole)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ una funzione armonica in Ω. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \tag{3.10}$$

ovvero le funzioni armoniche assumono il loro massimo sul bordo del dominio.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $-\Delta u \leq 0$ implica la (3.10). Notiamo che la disuguaglianza $\max_{\overline{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$ è ovvia. Supponiamo che

$$-\Delta u(x) < 0 \quad \text{per ogni } x \in \Omega \tag{3.11}$$

e assumiamo che $\max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$ (ovvero che il massimo è assunto all'interno di Ω: vogliamo incorrere in una contraddizione). Da questa ipotesi assurda, segue che il punto di massimo x_0 deve essere interno ad Ω, dove $u \in C^2$, pertanto la matrice hessiana $Hu(x_0)$ è semidefinita negativa. Ciò implica che $-\Delta u(x_0) \geq 0$, che è un assurdo con la (3.11). Abbiamo quindi dimostrato la tesi nel caso in cui la (3.11) valga. Se ora abbiamo $-\Delta u(x) \leq 0$ per ogni $x \in \Omega$, possiamo procedere per approssimazione: definiamo $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x^2|$; dalla limitatezza di Ω (esiste $M > 0$ tale che $\Omega \subset B_M$), sappiamo immediatamente che $u_\varepsilon(x) \leq u(x) + \varepsilon M^2$. Abbiamo

$$-\Delta u_\varepsilon(x) = -\Delta u(x) - 2\varepsilon n < 0,$$

per cui possiamo applicare il ragionamento precedente ed ottenere la seguente catena di disuguaglianze

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon M^2$$

e concludiamo prendendo il limite per $\varepsilon \to 0$. □

Osservazione 3.2.2. La limitatezza è cruciale, si veda il controesempio di $\Omega = (0, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$ e $u(x, y) = \Re(e^{x+iy}) = e^x \cos y$. □

Esercizio 3.2.3. Enunciare e dimostrare il principio del minimo.

Teorema 3.2.4 (principio del massimo forte)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia u una funzione armonica in Ω. Se u ha un punto di massimo interno ad Ω, allora è costante.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un punto di massimo x_0 interno ad Ω e che la funzione u non sia costante. Definiamo i due sottoinsiemi di Ω

$$A := \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\} \qquad \text{e} \qquad B := \{x \in \Omega : u(x) < u(x_0)\}.$$

Mostrando che A è aperto (che B lo sia è ovvio), si contraddice la connessione di Ω. □

Una delle conseguenze immediate del principio del massimo è l'unicità delle soluzioni del problema di Poisson.

Corollario 3.2.5 (unicità della soluzione del problema di Poisson)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Date due funzioni $f \in C^0(\Omega)$ e $g \in C^0(\partial\Omega)$, sia $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Poisson*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.12}$$

Allora tale soluzione è unica.

Dimostrazione. Supponiamo che esistano due soluzioni distinte u_1 e u_2 e studiamo che problema risolve la loro differenza $w := u_1 - u_2$. Si tratta di una funzione armonica che assume valore nullo al bordo. Usando il principio del massimo e quello del minimo, si ottiene che $w = 0$, da cui la tesi. □

Osservazione 3.2.6. Senza la limitatezza del dominio Ω, oltre a non valere il principio del massimo, non vale nemmeno un risultato di unicità, come mostra l'esempio del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus B_1, \\ u = 0 & \text{su } \partial B_1. \end{cases}$$

Si vede che il massimo non è assunto al bordo (perché non esiste) e che sua $u(x) = \log|x|$ che la funzione nulla $u = 0$ risolvono l'equazione.

Lezione 5: 10 marzo 2023

3.3 La soluzione fondamentale

Ricordare la forma generale delle funzioni armoniche radiali. Definiamo

$$G(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log|x| & \text{se } n = 2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \cdot \dfrac{1}{|x|^{n-2}} & \text{se } n > 2. \end{cases} \tag{3.13}$$

La funzione G è la *soluzione fondamentale* del laplaciano in $\mathbb{R}^n$ ovvero la funzione che risolve

$$-\Delta u = \delta_0 \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{3.14}$$

Per ogni dimensione $n \geq 2$, è facile vedere che $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dunque è possibile associarle in modo naturale rimandare alla parte sulle distribuzioni la distribuzione di tipo funzione T_G definita da

$$\langle T_G, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} G(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Ricordando le proprietà di derivazione delle distribuzioni, de $T_{\Delta G}$ è la distribuzione associata alla funzione ΔG, abbiamo $\langle T_{\Delta G}, \varphi \rangle = \langle T_G, \Delta\varphi \rangle$, quindi basta dimostrare che

$$\langle T_G, \Delta\varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi \rangle = -\varphi(0)$$

per dimostrare che G è la soluzione di (3.14). Per fare ciò, fissiamo $\varepsilon > 0$ e scriviamo

$$\langle T_G, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} G(x)\Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} G(x)\Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{B_\varepsilon} G(x)\Delta\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'ultimo integrale tende a zero per $\varepsilon \to 0$ in tutte le dimensioni. L'integrale sul dominio esterno si scrive, grazie alla formula di Green, come la somma di due integrali di bordo (quello di volume contiene ΔG e quindi si annulla); l'integrale contenente $G\partial_\nu\varphi$ va a zero, mentre quello contenente $\varphi\partial_\nu G$ tende a $-\varphi(0)$ per $\varepsilon \to 0$.

Lezione 6: 16 marzo 2023

3.4 Formule di rappresentazione

Una volta nota la soluzione fondamentale G, è possibile utilizzarla per dimostrare formule di rappresentazione delle soluzioni dell'equazione di Poisson in un dominio Ω. In prima battuta, derivano dalle proprietà della funzione δ_0 relativamente alla (3.14). Dato $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo la funzione

$$G^x(y) \coloneqq G(y-x), \tag{3.15}$$

la soluzione fondamentale centrata in $x \in \Omega$, che risolve l'equazione

$$-\Delta_y G(y-x) = \delta_x \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 3.4.1 (formula di rappresentazione)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e con bordo di classe C^1 e sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora, per ogni $x \in \Omega$ vale*

$$u(x) = -\int_\Omega G^x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega}\left(G^x(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y)u(y)\right)\mathrm{d}\sigma(y). \tag{3.16}$$

Dimostrazione. Come quella della soluzione fondamentale. □

Osservazione 3.4.2. La formula (3.16) ci dice che per conoscere la funzione u è necessario conoscerne:

1. il laplaciano in Ω (e questo è okay se u risolve un problema di Poisson);
2. la derivata normale al bordo (okay se u risolve un problema con condizioni di Neumann);
3. il valore al bordo (okay se u risolve un problema con condizioni di Dirichlet).

Nei tipici problemi con dati al bordo, abbiamo visto che usualmente si dà o la condizione di Dirichlet o quella di Neumann. Sarebbe pertanto utile cercare di avere fare a meno di una delle due. Nel processo che descriviamo, ci sbarazzeremo della condizione di Neumann per u, ovvero troveremo un modo per non avere il primo integrale di bordo nella (3.16). A tale proposito, introduciamo la funzione $v^x \in C^2(\Omega)$ la regolarità è ovvia che risolve il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

$$\begin{cases} -\Delta_y v^x(y) = 0 & \text{in } \Omega, \\ v^x(y) = G^x(y) & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.17}$$

assumendo che la soluzione esista per ogni $x \in \Omega$. Allora possiamo scrivere il primo integrale di bordo in (3.16) come

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} G^x(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) &= \int_{\partial\Omega} v^x(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \int_\Omega \left(v^x(y)\Delta_y u(y) - u(y)\Delta_y v^x(y)\right)\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v^x}{\partial \nu}(y)u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \int_\Omega v^x(y)\Delta_y u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v^x}{\partial \nu}(y)u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y), \end{aligned} \tag{3.18}$$

dove abbiamo usato la condizione al bordo del problema (3.17) nella prima uguaglianza, la formula di Green nella seconda e l'equazione in (3.17) nella terza.

Introduciamo ora la *funzione di Green per Ω con polo in x*

$$G_\Omega^x(y) := G^x(y) - v^x(y), \tag{3.19}$$

per la quale è facile vedere che

1. è armonica in $\Omega \setminus \{x\}$;
2. è di classe $C^2(\overline{\Omega} \setminus B_\rho(x))$ per ogni $\rho > 0$ piccolo a sufficienza;
3. risolve l'equazione $\Delta G_\Omega^x = \delta_x$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$;
4. è di classe $L^1(\Omega)$ e inoltre $G_\Omega^x(y) = 0$ per ogni $y \in \partial\Omega$;
5. è non negativa per ogni $y \in \Omega \setminus \{x\}$ per il principio del massimo e $\partial_\nu G_\Omega^x(y) \leq 0$ per ogni $y \in \partial\Omega$.

Combinando la (3.16) e la (3.19) si ottiene

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_\Omega G^x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(G^x(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y)u(y) \right) \mathrm{d}\sigma(y) \\ &= -\int_\Omega G^x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y + \int_\Omega v^x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v^x}{\partial \nu}(y)u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y)u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &= -\int_\Omega G_\Omega^x(y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_\Omega^x}{\partial \nu}(y)u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y), \end{aligned} \tag{3.20}$$

dove abbiamo usato la (3.19) nell'ultimo passaggio e dove vediamo che ora rappresentiamo la funzione u tramite il suo laplaciano in Ω ed il suo valore sul bordo $\partial\Omega$. Affinché si possa scrivere la (3.20) è necessario conoscere la funzione di Green G_Ω^x.

3.4.1 Costruzione della funzione di Green per la palla B_R

Presentiamo la costruzione per $n > 2$, ma ci renderemo conto che si potrà estendere anche al caso $n = 2$. Ricordando l'espressione di G in questo caso, la corrispondente G^x definita nella (3.15) diventa

$$G^x(y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \cdot \frac{1}{|y-x|^{n-2}}.$$

Cerchiamo la funzione v^x soluzione del problema (3.17) della stessa forma, ovvero

$$v^x(y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \cdot \frac{\gamma_x^{n-2}}{|y-x^*|^{n-2}},$$

dove γ_x è un coefficiente da determinare ed il punto x^* è da cercarsi in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R$. La scelta strutturale della v^x è arbitraria, tuttavia è sensata alla luce della forma di G^x. Affinché una tale funzione sia soluzione del problema (3.17), la condizione al bordo detta che deve essere verificata l'uguaglianza

$$|y - x^*| = \gamma_x |y - x| \qquad \text{per ogni } y \in \partial B_R. \tag{3.21}$$

Si tratta di un problema di tangenza che risale ad Apollonio di Perga e la soluzione è fornita dalla condizione $|x| \cdot |x^*| = R^2$, ovvero

$$x^* = R^2 \frac{x}{|x|^2} \qquad \text{per ogni } x \neq 0 \tag{3.22}$$

(per $x = 0$ si ha che $G^0(y)$ è costante su ∂B_R per simmetria e quindi anche $y^0(y)$ risulta costante su ∂B_R per la condizione di Dirichlet del problema (3.17)). Sostituendo la (3.22) nella (3.21), si ottiene facilmente che

$$\left| y - R^2 \frac{x}{|x|^2} \right|^2 = \gamma_x^2 |y - x|^2 \qquad \text{per ogni } y \in \partial B_R,$$

da cui si ricava che $\gamma_x = R/|x|$ ed infine

$$\begin{aligned} G^x_{B_R}(y) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \left[\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \left(\frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \frac{1}{|y - x^*|^{n-2}} \right] \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \left[\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{[|x^2| \cdot |y^2| - 2R^2 \langle x, y \rangle + R^4]^{(n-2)/2}} \right] \end{aligned} \tag{3.23a}$$

per $n > 2$ (e notiamo che è valida anche per $x = 0$), mentre la formula per $n = 2$ è

$$G^x_{B_R}(y) = \frac{1}{2\pi} \left[\log \frac{1}{|y-x|} - \frac{1}{2} \log \frac{R^2}{|x^2| \cdot |y^2| - 2R^2 \langle x, y \rangle + R^4} \right]. \tag{3.23b}$$

Siccome nella (3.20) serve la derivata normale di $G^x_{B_R}$, un calcolo dà la seguente formula, valida per ogni $n \geq 2$

$$\frac{\partial G^x_{BR}}{\partial \nu}(y) = \frac{1}{R\sigma_{n-1}} \cdot \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^n} =: k_R(x, y), \tag{3.24}$$

che chiamiamo *nucleo di Poisson per la palla*, e che è una funzione definita per $x \in B_R$ e $y \in \partial B_R$. Dalla formula di rappresentazione (3.20), otteniamo la seguente informazione: se $u \in C^2(\overline{B}_R)$ ed è una funzione armonica in B_R, allora si ha

$$u(x) = \int_{\partial B_R} k_R(x, y) u(y) \, \mathrm{d}\sigma(y). \tag{3.25}$$

3.4.2 Il nucleo di Poisson per la palla B_R

In questa sezione mettiamo in evidenza alcune proprietà del nucleo di Poisson introdotto nella (3.24).

Proposizione 3.4.3. *Il nucleo di Poisson $k_R : B_R \times \partial B_R \to \mathbb{R}$ definito nella (3.24) gode delle seguenti proprietà:*

(i) è una funzione di classe C^∞;

(ii) per ogni $(x, y) \in B_R \times \partial B_R$ si ha $k_R(x, y) > 0$;

(iii) è una funzione armonica nella variabile $x \in B_R$, ovvero $\Delta_x k_R(x, y) = 0$;

(iv) si ha

$$\int_{\partial B_R} k_R(x, y) \, \mathrm{d}\sigma(y) = 1 \qquad \textit{per ogni } x \in B_R; \tag{3.26}$$

(v) dato $x \in \partial B_R \setminus \{y\}$ e data una successione $\overline{B}_R \ni x_k \to x$, si ha

$$\lim_{k \to \infty} k_R(x_k, y) = 0; \tag{3.27}$$

(vi) fissato $y \in \partial B_R$, si ha

$$\liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \partial B_R}} k_R(x, y) = 0, \qquad \limsup_{\substack{x \to y \\ x \in B_R}} k_R(x, y) = +\infty. \tag{3.28}$$

Dimostrazione. La definizione (3.24) implica immediatamente la regolarità (i), siccome $y - x \neq 0$ per ogni $(x, y) \in B_R \times \partial B_R$, e la positività (ii).
Per dimostrare l'armonicità rispetto alla variabile $x \in B_R$, osserviamo che, dato $y \in B_R$ la funzione $x \mapsto G^x_\Omega(y)$ è armonica in $B_R \setminus \{y\}$: infatti, si ha che $G^x_{B_R}(y) = G^y_{B_R}(x)$, come si può notare dalla simmetria in x e y delle formule in (3.23), e tali funzioni sono armoniche rispetto alla variabile tra parentesi. Allora, data una successione $\{y_k\} \subset B_R$ che converge ad un punto $y \in \partial B_R$, si ha che $\{x \mapsto G^x_{B_R}(y_k)\}$ è una successione di funzioni armoniche che converge alla funzione $x \mapsto G^x_{B_R}(y)$ uniformemente sui compatti di B_R. Allora, per il Lemma 3.1.10, anche la funzione limite è armonica e tale è, in particolare, il suo gradiente. Segue che la funzione $x \mapsto \partial_\nu G^x_{B_R}(y) = \langle \nabla_y G^x_{B_R}(y), y/R \rangle$ è armonica in $B_R \setminus \{y\}$, per ogni $y \in \partial B_R$. La proprietà (iii) è così dimostrata.
La formula (3.26) è una conseguenza immediata della formula di rappresentazione (3.25), applicata alla funzione armonica $u(x) \equiv 1$ per ogni $x \in B_R$; la (iv) è così dimostrata.
La dimostrazione della proprietà (v) è immediata: se $x \in \partial B_R$, si ha $|x| = R$. Per il fatto che $x \neq y$, si ha, definitivamente per $k \to \infty$, che $|y - x_k| \geq |y - x|/2 > 0$ mentre $|x_k|$ sarà arbitrariamente vicino al valore R. Passiamo ora alla proprietà (vi): se $x \in \partial B_R$, si ha $|x| = R$ e dunque il numeratore della (3.24) è identicamente nullo, dimostrando così la prima uguaglianza nella (3.28); al contrario, una particolare successione $\{x_k\}$ di punti interni a B_R che tende a $y \in \partial B_R$ è data da $x_k = (1 - 1/k)y$, lungo la quale si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to \infty} k_R(x_k, y) &= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{R\sigma_{n-1}} \frac{R^2 - |x_k|^2}{|y - x_k|^n} = \lim_{k \to \infty} \frac{R}{\sigma_{n-1}} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2}{R^n / k^n} \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{R^{n-2}\sigma_{n-1}} k^n \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k^2} \right) = +\infty,
\end{aligned}$$

dimostrando così la seconda uguaglianza nella (3.28). □

Nel prossimo teorema dimostriamo che la formula (3.25), quando utilizzata per definire una funzione u a partire da una funzione g definita al bordo, definisce una funzione armonica che assume valore al bordo proprio uguale alla g data.

Teorema 3.4.4. *Sia $g \in C^0(\partial B_R)$ e si definisca*

$$u(x) := \int_{\partial B_R} k_R(x, y) g(y) \, \mathrm{d}\sigma(y). \tag{3.29}$$

Allora $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B}_R)$, è armonica in B_R e $u(x) = g(x)$ per ogni $x \in \partial B_R$.

Dimostrazione. Siccome il nucleo di Poisson è una funzione di classe C^∞ per la Proposizione 3.4.3(i), si ha immediatamente che $u \in C^\infty(B_R)$ e inoltre

$$\Delta_x u(x) = \int_{\partial B_R} \Delta_x k_R(x, y) g(y) \, \mathrm{d}\sigma(y) = 0,$$

per la Proposizione 3.4.3(iii)[1]. Per dimostrare che

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in B_R}} u(x) = g(x_0) \qquad \text{per ogni } x_0 \in \partial B_R \tag{3.30}$$

procediamo nel seguente modo: dimostriamo che

$$\liminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in B_R}} u(x) \geq u(x_0) \qquad \text{per ogni } x_0 \in \partial B_R; \tag{3.31}$$

la disuguaglianza opposta per il $\limsup$ sarà ottenuta in maniera analoga e quindi si otterrà la (3.30) concatenando le due. Fissiamo dunque $x_0 \in \partial B_R$ e sfruttiamo la continuità della funzione g: fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $g(y) \geq g(x_0) - \varepsilon$ per ogni $y \in \partial B_R$ tale che $|y - x_0| \leq \delta$. Allora possiamo scrivere attenzione, la dimostrazione fatta a lezione conteneva un errore, questa è quella corretta

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial B_R \cap \{|y-x_0|\leq\delta\}} k_R(x,y)g(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) + \int_{\partial B_R \cap \{|y-x_0|>\delta\}} k_R(x,y)g(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\
&\geq (g(x_0)-\varepsilon)\int_{\partial B_R \cap \{|y-x_0|\leq\delta\}} k_R(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\
&\quad + \int_{\partial B_R \cap \{|y-x_0|>\delta\}} k_R(x,y)g(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\
&= (g(x_0)-\varepsilon)\int_{\partial B_R} k_R(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\
&\quad + \int_{\partial B_R \cap \{|y-x_0|>\delta\}} k_R(x,y)[g(y)-g(x_0)+\varepsilon]\,\mathrm{d}\sigma(y)\\
&= g(x_0) - \varepsilon + \int_{\partial B_R \cap \{|y-x_0|>\delta\}} k_R(x,y)[g(y)-g(x_0)+\varepsilon]\,\mathrm{d}\sigma(y)
\end{aligned}$$

dove, nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la (3.26), mentre in quella precedente abbiamo aggiunto e sottratto il termine $\int_{\partial B_R \cap \{|y-x_0|>\delta\}} k_R(x,y)[g(x_0)-\varepsilon]\,\mathrm{d}\sigma(y)$. Grazie alla (3.27), se $B_R \ni x \to x_0$, la funzione $k_R(x,y)$ risulta uniformemente convergente a zero in $\partial B_R \cap \{|y-x_0| > \delta\}$ (mentre il termine $g(y) - g(x_0) + \varepsilon$ è limitato per la continuità di g), quindi passando al $\liminf$ per $B_R \ni x \to x_0$ e poi al limite per $\varepsilon \to 0$ otteniamo la (3.31). □

3.5 La disuguaglianza di Harnack

In questa sezione riportiamo una serie di risultati che vanno sotto il nome di *disuguaglianza di Harnack*: affermano la possibilità di stimare il massimo (o l'estremo superiore in certe condizioni) di una funzione armonica in termini del suo minimo (o dell'estremo inferiore), stabilendo risultati di rigidità delle funzioni armoniche, che quindi devono avere oscillazione controllata (inserire qualcosa sull'oscillazione). Il primo risultato che daremo sarà per funzioni armoniche non negative su una palla e servirà come disuguaglianza elementare per dimostrare la proprietà su domini generali.

[1] Osserviamo che la condizione $g \in L^1(\partial B_R)$ sarebbe sufficiente per concludere.

Teorema 3.5.1 (disuguaglianza di Harnack). *Sia u una funzione armonica in B_R e tale che $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in B_R$. Se $x \in B_R$ e $|x| = r$, allora si ha*

$$\frac{1 - \frac{r}{R}}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 + \frac{r}{R}}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{n-1}} u(0). \tag{3.32}$$

Dimostrazione. Utilizzando la formula di rappresentazione (3.25) sulla palla di raggio $R' \in (r, R)$, otteniamo

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{R'\sigma_{n-1}} \int_{\partial B_{R'}} \frac{(R')^2 - |x|^2}{|x - y|^n} u(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) \\ &\leq \frac{1}{R'\sigma_{n-1}} \int_{\partial B_{R'}} \frac{(R')^2 - r^2}{(R' - r)^n} u(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) \\ &= (R')^{n-2} \frac{R' + r}{(R' - r)^{n-1}} \fint_{\partial B_{R'}} u(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1 + \frac{r}{R}}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{n-1}} u(0), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza triangolare inversa per stimare $|x - y| \geq |y| - |x| = R' - r$ congiuntamente alla non negatività di u per ottenere la disuguaglianza, moltiplicato e diviso per $(R')^{n-1}\sigma_{n-1}$ per far comparire l'integrale di media ed infine usato la proprietà di media di superficie (3.1). Passando a limite per $R' \to R$ si ottiene la disuguaglianza a destra nella (3.32); per la disuguaglianza a sinistra, si usa la disuguaglianza triangolare $|x - y| \leq |y| + |x| = R' + r$. □

Osservazione 3.5.2. Notiamo che è necessario passare attraverso il raggio $R' < R$ perché non abbiamo la garanzia che la funzione u sia definita su ∂B_R, mentre lo è sicuramente su $\partial B_{R'}$, i cui valori sono necessari per calcolare l'integrale della formula di rappresentazione. □

La disuguaglianza di Harnack per le palle (3.32) permette di dimostrare un altro teorema di Liouville.

Teorema 3.5.3 (Liouville). *Sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$ limitata dal basso (ovvero esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $u(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$). Allora la funzione u è costante.*

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di Harnack 3.5.1 alla funzione $u - m$, che risulta armonica e non negativa. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, sia $r = |x|$ e sia $R > r$. Allora la (3.32) fornisce

$$\frac{1 - \frac{r}{R}}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^{n-1}} (u(0) - m) \leq u(x) - m \leq \frac{1 + \frac{r}{R}}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{n-1}} (u(0) - m),$$

da cui, passando a limite per $R \to +\infty$, si ottiene

$$u(0) - m \leq u(x) - m \leq u(0) - m,$$

cioè $u(x) = u(0)$. L'arbitrarietà del punto $x \in \mathbb{R}^n$ implica che u è costante. □

Vediamo ora come generalizzare la disuguaglianza di Harnack a domini generici. Serviranno alcuni lemmi preliminari.

Lemma 3.5.4. *Dato $r \in (0, R)$, esiste una costante $c(r, R) > 0$ tale che per ogni funzione armonica u non negativa in B_R vale la disuguaglianza*

$$\sup_{B_R} u \leq c(r, R) \inf_{B_R} u. \tag{3.33}$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Harnack (3.32) dà le seguenti disuguaglianze

$$\sup_{B_R} u \leq \frac{1 + \dfrac{r}{R}}{\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)^{n-1}} u(0) \qquad \text{e} \qquad \inf_{B_R} u \geq \frac{1 - \dfrac{r}{R}}{\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)^{n-1}} u(0)$$

che concatenate (ricavando $u(0)$ dalla seconda) dànno a loro volta

$$\sup_{B_R} u \leq \frac{1 + \dfrac{r}{R}}{\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)^{n-1}} \frac{\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)^{n-1}}{1 - \dfrac{r}{R}} \inf_{B_R} u = \frac{(R + r)^n}{(R - r)^n} \inf_{B_R} u,$$

che è la (3.33) con la costante $c(r, R) = (R + r)^n/(R - r)^n$. □

Osservazione 3.5.5. Notiamo due fatti interessanti:

(i) scegliendo $r = R/2$, otteniamo $c(r, R) = (3/2)^n/(1/2)^n = 3^n$, valore che useremo nei lemmi successivi;

(ii) la costante $c(r, R)$ dipende da due cose: dalla scelta del raggio r e dal dominio $\Omega = B_R$ in cui si considera la funzione armonica. In questo caso, in cui il dominio ha una forma "semplice", la dipendenza è descritta solo dal parametro R; in casi di geometrie più complesse, in cui sia la forma del dominio Ω sia quella del "dominio di controllo" K saranno generiche, non si potrà fare a meno di avere la dipendenza generica nella forma $c(K, \Omega)$, come si vede nel prossimo lemma.

Lemma 3.5.6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $K \subset \Omega$ un compatto. Allora esiste una costante $c(K, \Omega) > 0$ tale che, per ogni funzione armonica u non negativa in Ω si ha*

$$\max_K u \leq c(K, \Omega) \min_K u. \tag{3.34}$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che K sia anche connesso: in caso contrario, esiste un insieme connesso e compatto contenuto in Ω e che contiene K e possiamo ragionare su quello. Sia $R > 0$ tale che

$$B_R(x) \subset \Omega \quad \text{per ogni } x \in K \qquad \Rightarrow \qquad \bigcup_{x \in K} B_{R/2}(x) \supset K.$$

Abbiamo dunque trovato un ricoprimento aperto di K, dal quale, per la compattezza di K, possiamo estrarre un sotto-ricoprimento finito $B_1, \ldots, B_m$ fatto di m palle di raggio $R/2$; abbiamo quindi che $K \subset \bigcup_{i=1}^m B_i$.

A ciascuna di queste palle, possiamo applicare il Lemma 3.5.4, ottenendo che

$$\sup_{B_i} u \leq 3^n \inf_{B_i} u \qquad \text{per } i = 1, \dots, m, \tag{3.35}$$

dove abbiamo anche usato l'Osservazione 3.5.5(i).
Siano ora $x, y \in K$ due punti distinti. Esistono $i_1, \dots, i_k$ (con $k \leq m$) indici tali che

$$x \in B_{i_1}, \quad y \in B_{i_k} \quad \text{e} \quad B_{i_j} \cap B_{i_{j-1}} \neq \emptyset \quad \text{per ogni } j = 2, \dots, k. \tag{3.36}$$

Stiamo dicendo che è possibile trovare un cammino fatto di palle della famiglia $\{B_i\}_{i=1}^m$ che congiunge i punti x e y di K. Allora possiamo affermare che esiste una costante $c(K, \Omega) > 0$ tale che

$$u(x) \leq c(K, \Omega) u(y). \tag{3.37}$$

Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} u(x) &\overset{(1)}{\leq} \sup_{B_{i_1}} u \overset{(3.35)}{\leq} 3^n \inf_{B_{i_1}} u \overset{(2)}{\leq} 3^n u(x_{i_2}) \overset{(1)}{\leq} 3^n \sup_{B_{i_2}} u \overset{(3.35)}{\leq} 3^{2n} \inf_{B_{i_2}} u \overset{(3)}{\leq} 3^{2n} u(x_{i_3}) \\ &\overset{(1)}{\leq} 3^{2n} \sup_{B_{i_3}} u \overset{(3.35)}{\leq} \cdots \overset{(3.35)}{\leq} 3^{kn} \inf_{B_{i_k}} u \overset{(k+1)}{\leq} 3^{kn} u(y) \overset{(m)}{\leq} 3^{mn} u(y), \end{aligned}$$

dove le disuguaglianze (1) sono banali; le disuguaglianze (j) con $j = 2, \dots, k$, seguono dalla terza proprietà in (3.36): il fatto che l'intersezione $B_{i_j} \cap B_{i_{j-1}}$ sia non vuota garantisce che essa contenga un punto x_{i_j}; la disuguaglianza $(k + 1)$ segue dal fatto che $y \in B_{i_k}$, per la seconda proprietà in (3.36), mentre la disuguaglianza (m) è da un lato banale (perché $k \leq m$), dall'altro necessaria affinché la stima non dipenda dal percorso di palle $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ scelto. Abbiamo quindi dimostrato la (3.37), con $c(K, \Omega) = 3^{mn}$ (dove notiamo che sia la geometria di K che quella di Ω contribuiscono alla determinazione del numero m).
Passando ora al massimo per $x \in K$ e al minimo per $y \in K$ nella (3.37), si ottiene la tesi (3.34). □

Siamo pronti per enunciare e dimostrare il Teorema di Harnack per un dominio generico.

Teorema 3.5.7 (Harnack)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sua $\{u_k\}$ una successione di funzioni armoniche in Ω tali che*

$$u_k \leq u_{k+1} \qquad \text{in } \Omega, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}. \tag{3.38}$$

Supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ in cui le u_k siano uniformemente limitate, ovvero

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} u_k(x_0) = M < +\infty.$$

Allora esiste una funzione u armonica in Ω tale che $u_k \longrightarrow u$ uniformemente sui compatti di Ω.

Dimostrazione. Sia $K \subset \Omega$ un compatto che contiene x_0; inoltre, per $k > h$ abbiamo $u_k - u_h \geq 0$, per la monotonia (3.38). Per stimare la convergenza uniforme sui compatti, dobbiamo verificare che $\{u_k\}$ è una successione di Cauchy (ricordare la definizione di successione di Cauchy) e possiamo procedere in questo modo

$$\max_K |u_k - u_h| = \max_K (u_k - u_h) \overset{(3.34)}{\leq} c(K, \Omega) \min_K (u_k - u_h) \leq c(K, \Omega)(u_k(x_0) - u_h(x_0)),$$

dove abbiamo applicato il Lemma 3.5.6 alla funzione armonica non negativa $u_k - u_h$ sul compatto K. Siccome la successione $\{u_k(x_0)\}_k$ è di Cauchy, la catena di disuguaglianze appena scritta è la condizione di Cauchy per la successione $\{u_k\}$, che quindi risulta essere uniformemente convergente in K ad un limite u. Allora, per il Lemma 3.1.10, anche la funzione u è armonica. Portando al limite $K \uparrow \Omega$, si costruisce una funzione armonica u in Ω. □

Esercizio 3.5.8. Calcolare gli integrali

$$\int_{B_2(0,0)} e^{2x}\cos(2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{e} \qquad \int_{\partial B_2(0,0)} e^{y}\cos x\,\mathrm{d}\sigma(x,y).$$

Esercizio 3.5.9. Date $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, per $n \geq 2$,

1. calcolare $\Delta(uv)$;
2. se $\Delta u = \Delta v = \Delta(uv) = 0$, quale condizione verificano i gradienti ∇u e ∇v?
3. dare esempi di due funzioni u e v armoniche tali che anche uv sia armonica.

Esercizio 3.5.10. Dimostrare che se u e u^2 sono armoniche in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, allora u è costante.

Esercizio 3.5.11 (Evans Capitolo 2 ???)**.** Sia $B^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x < 1|, x_n > 0\}$ e sia $u \in C(\overline{B^+})$ una funzione armonica in B^+ tale che $u = 0$ su $\partial B^+ \cap \{x_n = 0\}$. Infine, sia

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x_n < 0, \end{cases}$$

definita per ogni $x \in B_1$. Dimostrare che v è armonica in B_1.

Esercizio 3.5.12 (GT ???)**.** Trovare la funzione di Green per l'anello $A_{r,R} := B_R \setminus \overline{B}_r$.

Esercizio 3.5.13 (GT ???)**.** Sia $L_n u = a_{ij}\partial^2_{x_i x_j} u = 0$, con $a_{ij} = \delta_{ij} + g(r)x_i x_j / r^2$. Dimostrare che $L_n u = 0$ ha una soluzione radiale $(0, +\infty) \ni r \mapsto u(r)$ tale che

$$\frac{u''}{u'} = \frac{1-u}{r(1+g)}.$$

Lezione 8: 23 marzo 2023

Teorema 3.5.14 (principio del massimo di Hopf, forma forte)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso limitato con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ una funzione armonica e non costante in Ω. Sia $x_0 \in \partial\Omega$ un punto tale che $u(x_0) \geq u(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$*[2]*. Supponiamo che esista una palla aperta $B \subset \Omega$ tale che $x_0 \in \partial B$. Allora $\partial_\nu u(x_0) > 0$.*

Con poco sforzo è possibile dimostrare una versione più generale del principio del massimo di Hopf.

[2] Sappiamo che questa condizione implica che $u(x_0) > u(x)$ per ogni $x \in \Omega$, per il principio del massimo forte, Teorema 3.2.4

Teorema 3.5.15 (principio del massimo di Hopf, forma debole)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia u una funzione armonica in Ω. Sia $x_0 \in \partial\Omega$ tale che esista il limite*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) =: u(x_0)$$

e supponiamo che $u(x) < u(x_0)$ per ogni $x \in \Omega$. Supponiamo inoltre che esista una palla aperta $B \subset \Omega$ tale che $x_0 \in \partial B$ e sia ν la normale esterna a B in x_0. Allora

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{u(x_0 - t\nu) - u(x_0)}{-t} > 0. \tag{3.39}$$

Dimostrazione. La dimostrazione sarà fatta in dimensione $n > 2$, ma con le ovvie modifiche si può adattare alla dimensione $n = 2$. Senza perdita di generalità (si può ottenere tramite una traslazione), possiamo supporre che $B = B_R$ sia una palla centrata nell'origine. Definiamo la funzione

$$v(x) := u(x_0) - \varepsilon\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right),$$

che chiaramente è una funzione armonica in $B_R \setminus \overline{B}_{R/2}$. Siccome $u \in C^0(B_R \setminus \overline{B}_{R/2})$ e su ∂B_R abbiamo che $v(x) = u(x_0)$ e $u(x) < u(x_0)$ (si veda la Nota 2), segue che

$$u \leq v \text{ su } \partial B_R. \tag{3.40a}$$

Su $\partial B_{R/2}$ abbiamo invece che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $u(x) \leq c < u(x_0)$ (segue dall'ipotesi) e un calcolo diretto fornisce che $v(x) = u(x_0) - \varepsilon(2^{n-2} - 1)/R^{n-2}$. Allora è possibile scegliere $\varepsilon > 0$ (sufficientemente piccolo) tale che $v > c$ su $\partial B_{R/2}$, e quindi segue che

$$u \leq v \text{ su } \partial B_{R/2}. \tag{3.40b}$$

Allora possiamo applicare il principio del massimo debole (Teorema 3.2.1) alla funzione $u - v$ e ottenere, grazie alle (3.40), che $u \leq v$ su tutto l'anello $B_R \setminus \overline{B}_{R/2}$. Allora, per $t > 0$ piccolo a sufficienza, si ha che $u(x_0 - t\nu) \leq v(x_0 - t\nu)$, da cui, ricordando che $u(x_0) = v(x_0)$ (segue dalla definizione di v), si ottiene

$$\frac{u(x_0 - t\nu) - u(x_0)}{-t} \geq \frac{v(x_0 - t\nu) - v(x_0)}{-t};$$

prendendo ora il $\liminf$ per $t \to 0^+$ e notando che per la funzione v si tratta di un limite, otteniamo

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{u(x_0 - t\nu) - u(x_0)}{-t} \geq \lim_{t \to 0^+} \frac{v(x_0 - t\nu) - v(x_0)}{-t} = \partial_\nu v(x_0) > 0,$$

dove la positività della derivata direzionale segue dal segno meno prima di ε nella definizione di v. Il teorema è così dimostrato. □

3.6 Il principio di Dirichlet

Il teorema che presentiamo ora è di estrema rilevanza perché mette in relazione due aspetti complementari: l'essere soluzione di un'equazione alle derivate parziali e la minimalità di un funzionale. Date due funzioni $f \in C^0(\Omega)$ e $g \in C^0(\partial\Omega)$ definiamo il funzionale di energia $\mathcal{E}\colon C^2(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ tramite

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.41}$$

e l'insieme dei competitori

$$\mathcal{A} := \left\{ w \in C^2(\overline{\Omega}) : w = g \text{ su } \partial\Omega \right\}. \tag{3.42}$$

Teorema 3.6.1 (principio di Dirichlet)**.** *Una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ risolve il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson (3.12) se e solo se*

$$\mathcal{E}(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(w). \tag{3.43}$$

Dimostrazione. Dimostreremo le due implicazioni.
Sia $u \in \arg\min_{w\in\mathcal{A}} \mathcal{E}(w)$ e sia $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ una funzione tale che $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$. Tale funzione prende il nome di *variazione*. Siccome $u \in \mathcal{A}$, succede che anche $u + t\varphi \in \mathcal{A}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dunque è una possibile funzione cui calcolare l'energia $\mathcal{E}$ nella competizione per il minimo. La minimalità di u implica che $\mathcal{E}(u) \le \mathcal{E}(u + t\varphi)$, ovvero, usando la definizione (3.41) di $\mathcal{E}$ ed espandendo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \\
\le{}& \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)(u(x) + t\varphi(x))\,\mathrm{d}x \\
={}& \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + t\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x + t^2\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x - t\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

da cui si ottiene che, per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni φ variazione ammissibile,

$$0 \le t\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x + t^2\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x - t\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.44}$$

Dividendo la (3.44) per $t > 0$ e prendendo il limite per $t \to 0^+$ otteniamo che

$$0 \le \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x;$$

dividendo la (3.44) per $t < 0$ e prendendo il limite per $t \to 0^-$ otteniamo che

$$0 \ge \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Queste due condizioni forzano ad avere

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

da cui, integrando per parti e ricordando che $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$, si ottiene che

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{per ogni } \varphi \text{ variazione.}$$

Allora, per il Corollario 4.2.5 (Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni), deve essere che $-\Delta u = f$ in Ω. La condizione al bordo $u = g$ su $\partial\Omega$ è automaticamente soddisfatta perché $u \in \mathcal{A}$. Allora u risolve il problema (3.12).
Viceversa, sia u una soluzione del problema (3.12) e sia $w \in \mathcal{A}$ un competitore. Siccome $(u-w)|_{\partial\Omega} = 0$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (-\Delta u(x) - f(x))(u(x) - w(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \big(- f(x)(u(x) - w(x)) + \nabla u(x) \cdot \nabla(u(x) - w(x))\big)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

da cui, riordinando i termini ed usando le disuguaglianze di Schwarz e di Young,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)u(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)w(x)\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)w(x)\,\mathrm{d}x; \end{aligned}$$

Ma non abbiamo scritto altro che $\mathcal{E}(u) \le \mathcal{E}(w)$, da cui la minimalità di u. □

Il principio di Dirichlet Teorema 3.6.1 si rivela essere un *principio di selezione*: se $u \in \mathcal{A}$, risolvere il problema differenziale (3.12) o il problema di minimo (3.43) sono equivalenti. Abbiamo appena visto l'applicazione di una tecnica variazionale, che tuttavia trova l'ambiente naturale di applicazione negli Spazi di Sobolev, in cui sarà possibile ridurre le pretese di regolarità sulle funzioni.

Lezione 10: 30 marzo 2023

3.7 Alcuni esercizi

Esercizio 3.7.1. Siano $\Omega = (0,1)^2$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tali che

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = -xy & \text{in } \Omega, \\ u(x,y) = x^2 + y^2 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrare che $u(x,y) = u(y,x)$ per ogni $(x,y) \in \Omega$.

Esercizio 3.7.2. (a) Siano $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tali che

$$\begin{cases} -\Delta u = -\Delta v & \text{in } \Omega, \\ u = v & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrare che $u = v$ in Ω.
(b) La tesi vale ancora se le funzioni u e v sono soluzioni del problema

$$\begin{cases} -\Delta w = -x_2 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

che per comodità possiamo considerare per $\Omega \subset \mathbb{R}^2$?

Esercizio 3.7.3 (un teorema di confronto)**.** Siano $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tali che

$$\begin{cases} -\Delta u \geq -\Delta v & \text{in } \Omega, \\ u \geq v & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrare che $u > v$ in Ω, a meno che non si abbia $u \equiv v$ in Ω.

Esercizio 3.7.4 (unicità per il problema di Neumann)**.** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso che verifica la condizione della palla interna (la stessa delle ipotesi del Teorema 3.5.15). Siano $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tali che

$$\begin{cases} -\Delta u = -\Delta v & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrare che u e v differiscono per una costante.

Esercizio 3.7.5. Trovare una soluzione esplicita di $-\Delta u = x_2$ in $\mathbb{R}^2$ e usare il teorema di confronto per stimare $u(0, 1/2)$.

Esercizio 3.7.6. Mostrare che se $u(x_1, x_2)$ risolve

$$\begin{cases} -\Delta u = -x_2 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

allora anche $\tilde{u}(x_1, x_2) := u(-x_1, x_2)$ è soluzione. Dall'unicità delle soluzioni, che cosa si può dedurre?

Capitolo 4

La convoluzione

La *convoluzione* – o meglio, il *prodotto di convoluzione* – tra due funzioni è un'operazione binaria che gode di alcune interessanti proprietà. In un contesto opportuno, si comporta come un prodotto (con le proprietà note del prodotto) e tra le sue conseguenze di maggiore utilità vi sono l'approssimazione di funzioni tramite funzioni più regolari (come stabilito nel Teorema 4.2.3 e nel Corollario 4.2.4) e la rappresentazione di soluzioni di equazioni alle derivate parziali. Presentiamo un esempio semplice di questo secondo fatto.

Esempio 4.0.1. In dimensione $n = 1$, consideriamo l'equazione

$$-u'' + u = f,$$

con $u, f \in L^2(\mathbb{R})$. Indicando con $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$ e $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ le trasformate di Fourier di u e f, rispettivamente, e con ξ la variabile di Fourier, passando in trasformata abbiamo

$$\xi^2\hat{u} + \hat{u} = \hat{f}, \quad \text{da cui} \quad \hat{u} = \frac{\hat{f}}{1+\xi^2} = \hat{f} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{e^{-|x|}}{2}\right) = \mathcal{F}\left(f * \frac{e^{-|x|}}{2}\right),$$

dove abbiamo indicato con $*$ il prodotto di convoluzione tra le funzioni. Da qui si ottiene, anti-trasformando, che la soluzione u dell'equazione è data da

$$u(x) = \left(f * \frac{e^{-|\cdot|}}{2}\right)(x).$$

Applicando la disuguaglianza di Young (si veda anche il Teorema 4.1.4 più sotto), si ottiene che $u \in L^2(\mathbb{R})$. □

Definizione 4.0.2 (prodotto di convoluzione)**.** *Il prodotto di convoluzione tra due funzioni f e g misurabili su $\mathbb{R}^n$ è definito come*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.1}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ tale per cui l'integrale al secondo membro della (4.1) abbia senso.

4.1 Proprietà del prodotto di convoluzione

In questa sezione raccogliamo alcune proprietà del prodotto di convoluzione che è utile tenere a mente. Esse riguarderanno questioni strutturali della funzione prodotto di convoluzione così come alcune questioni legate alla regolarità.

Proposizione 4.1.1. *Il prodotto di convoluzione definito tramite la (4.1) è commutativo ed associativo.*

Dimostrazione. Si tratta di un semplice calcolo applicando il teorema di cambiamento di variabili. Abbiamo

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z = (g * f)(x),$$

dove la seconda uguaglianza è ottenuta tramite il cambiamento di variabile $z = x - y$, che ha (modulo del) determinante jacobiano pari ad 1. La seconda parte della dimostrazione è lasciata per esercizio (si veda l'Esercizio 4.1.3). □

Osservazione 4.1.2. Si noti che il fatto che l'integrale di convoluzione (4.1) sia definito su tutto $\mathbb{R}^n$ ha reso la dimostrazione precedente estremamente facile ed immediata. Sarà necessaria un po' più di accortezza nel caso in cui si considerassero integrali di convoluzione definiti su domini Ω che non sono tutto lo spazio euclideo; in questo caso, sarà molto importante prestare attenzione alla condizione *per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ tale per cui l'integrale al secondo membro della* (4.1) *abbia senso* che abbiamo incluso nella Definizione 4.0.2. □

Esercizio 4.1.3. Dimostrare l'associatività del prodotto di convoluzione.

Teorema 4.1.4 (Young)**.** *Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p \le \infty$. Allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione*

$$y \mapsto f(x-y)g(y) \qquad \textit{è integrabile su } \mathbb{R}^n \tag{4.2}$$

ed il prodotto di convoluzione $f * g$ tra f e g è definito dalla (4.1)*. Inoltre, si ha che*

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \qquad e \qquad \|f * g\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_p. \tag{4.3}$$

Osservazione 4.1.5. Notiamo che la tesi del Teorema 4.1.4 di Young è che il prodotto di convoluzione eredita la migliore integrabilità tra quella delle due funzioni convolvende f e g (quella di g, in questo caso, poiché $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sempre). □

Dimostrazione. Consideriamo tre differenti situazioni per il valore di p.
• $p = \infty$. In questo caso, abbiamo la facile stima

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y \le \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}y = \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1,$$

ancora grazie al cambiamento di variabile $z = x - y$, come nella dimostrazione della Proposizione 4.1.1. La (4.2) è dimostrata. Per ottenere la (4.3), osserviamo che la stima appena dimostrata dà la stima

$$|(f * g)(x)| \le \|g\|_\infty \|f\|_1 \quad \text{da cui} \quad \|f * g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| \le \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1 .$$

Il teorema è dunque dimostrato nel caso $p = \infty$.

• $p = 1$. Consideriamo la funzione $F(x, y) := |f(x - y)g(y)|$ (alla quale vogliamo applicare i Teoremi di Fubini e Tonelli). Per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|\cdot|g(y)|\,\mathrm{d}x = |g(y)|\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{|g(y)|}_{<+\infty}\cdot\underbrace{\|f\|_1}_{<+\infty} < +\infty,\end{aligned}$$

dove $|g(y)|$ è costante rispetto all'integrazione in x e f è integrabile. Allora, integrando rispetto ad $y \in \mathbb{R}^n$ si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,\mathrm{d}y = \|f\|_1\cdot\|g\|_1 < +\infty. \tag{4.4}$$

Allora, per il Teorema di Tonelli si ha che $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, mentre per il Teorema di Fubini si ha che $\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\,\mathrm{d}y < +\infty$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (che dimostra la (4.2)) e che l'ordine di integrazione si può scambiare, dando la (4.3): infatti,

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)f(y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &\overset{(F)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \overset{(4.4)}{=} \|f\|_1\cdot\|g\|_1.\end{aligned}$$

Il teorema è dunque dimostrato nel caso $p = 1$.

• $1 < p < \infty$. La dimostrazione di questo caso si ottiene riconducendoci al caso $p = 1$, con un opportuna scrittura degli esponenti di integrabilità. Siano dunque $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$; la seconda condizione è equivalente a chiedere che la funzione $x \mapsto |g(x)|^p$ appartenga ad $L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora, fissato $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione

$$y \mapsto |f(x - y)|\cdot|g(y)|^p \quad \text{è integrabile in } \mathbb{R}^n,$$

ovvero abbiamo

$$|f(x - y)|^{1/p}\cdot|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^n),$$

dove con L^p_y indichiamo lo spazio delle funzioni L^p quando si considera l'integrazione rispetto alla variabile y. Detto p' l'esponente coniugato di p, l'integrabilità di f dà immediatamente che $|f(x - y)|^{1/p'} \in L^{p'}_y(\mathbb{R}^n)$, da cui, usando la disuguaglianza di Hölder,

$$|f(x - y)|\cdot|g(y)| = \underbrace{|f(x - y)|^{1/p'}}_{\in L^{p'}_y(\mathbb{R}^n)}\cdot\underbrace{|f(x - y)|^{1/p}\cdot|g(y)|}_{\in L^p_y(\mathbb{R}^n)} \in L^1_y(\mathbb{R}^n)$$

(che prova la (4.2)) e di conseguenza

$$\begin{aligned}|(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|\cdot|g(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|f\|_1^{1/p'}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|\cdot|g(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\ &= \|f\|_1^{1/p'}\cdot\left[(|f| * |g|^p)(x)\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

Prendendo le potenze p-esime, abbiamo la stima

$$|(f * g)(x)|^p \le \underbrace{\|f\|_1^{p/p'}}_{<+\infty} \cdot \underbrace{[(|f| * |g|^p)(x)]}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.5}$$

dove la finitezza del primo fattore segue dal fatto che $\|f\|_1 < +\infty$ e l'appartenenza ad $L^1(\mathbb{R}^n)$ del secondo fattore segue dal caso $p = 1$. Abbiamo allora ottenuto che $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (prima parte della (4.3)) e, integrando la (4.5), si ha, usando la (4.3) sul secondo fattore

$$\|f * g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p \, dx \le \|f\|_1^{p/p'} \cdot \|f\|_1 \cdot \|g\|_p^p,$$

da cui, prendendo le radici p-esime e ricordando che $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, si ottiene la stima della (4.3). La dimostrazione del teorema è così completata. □

Proposizione 4.1.6. *Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \le p \le \infty$. Allora,*

$$\operatorname{spt}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g}. \tag{4.6}$$

Ricordare l'operazione di somma tra insiemi.

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata per esercizio. □

Osservazione 4.1.7. Dalla Proposizione 4.1.6 segue che se sia f che g hanno supporto compatto, allora anche $f * g$ ha supporto compatto. La compattezza del supporto di solamente una tra le due funzioni convolvende non è sufficiente a garantire la compattezza del supporto del loro prodotto di convoluzione. □

Nella seguente proposizione esploriamo con più dettaglio la questione della regolarità del prodotto di convoluzione. Dimostriamo che, se una delle due funzioni convolvende è continua a supporto compatto, allora anche se l'altra funzione è piuttosto "brutta" (in L^1_{loc}), è possibile dimostrare che il loro prodotto di convoluzione è una funzione continua.

Proposizione 4.1.8. *Siano $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Allora la funzione $f * g$ definita nella (4.1) è ben definita* per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ *e $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$ (ovvero è una funzione continua).*

Dimostrazione. Siccome la funzione f è continua a supporto compatto, la funzione $y \mapsto f(x - y)g(y)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (basta infatti che $x - y \in \operatorname{spt} f$) ed è integrabile su $\mathbb{R}^n$, perché il supporto di f è compatto e quindi, fissato $x \in \mathbb{R}^n$, solo gli $y \in x - \operatorname{spt} f$ (che è un insieme compatto) renderanno $f(x - y)$ non nulla. Allora il prodotto $(f * g)(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
Per verificare la continuità del prodotto di convoluzione, consideriamo una successione di punti $x_k \to x$ ed un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ tale che $x_k - \operatorname{spt} f \subset K$ (è possibile trovare tale compatto K perché $\operatorname{spt} f$ è compatto). Allora, $f(x_k - y) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \notin K$; stante l'uniforme continuità di f (segue dal Teorema di Heine–Cantor), abbiamo

$$|f(x_k - y) - f(x - y)| \le \varepsilon_k \chi_K(y) \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ e per ogni } y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $\varepsilon_k \to 0$ per $k \to \infty$. Ma allora possiamo usare questa stima per stimare la continuità di $f * g$; infatti,

$$|(f*g)(x_k)-(f*g)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x_k-y)-f(x-y)|\cdot|g(y)|\,\mathrm{d}y \le \varepsilon_k \underbrace{\int_K |g(y)|\,\mathrm{d}y}_{<+\infty} \to 0$$

per $k \to \infty$. □

Lezione 9: 24 marzo 2023

La Proposizione 4.1.8 si può migliorare, ottenendo che il prodotto di convoluzione ha sempre la regolarità massima tra quelle delle funzioni convolvende.

Teorema 4.1.9. *Siano $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, per un certo $k \ge 1$, e $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e*

$$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g \qquad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \le k. \tag{4.7}$$

In particolare, se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. La dimostrazione si può effettuare per induzione sulla lunghezza del multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, quindi è sufficiente farla per $|\alpha| = k = 1$. Date quindi $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e dato $x \in \mathbb{R}^n$, affermiamo che $f * g$ è differenziabile in x e che

$$\nabla(f*g)(x) = \big((\nabla f) * g\big)(x). \tag{4.8}$$

Dimostreremo queste proprietà verificando la definizione di differenziabilità in x: vedremo che per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ piccolo a sufficienza vale

$$\Big|(f*g)(x+h) - (f*g)(x) - h\cdot\big((\nabla f)*g\big)(x)\Big| = o(|h|). \tag{4.9}$$

La (4.9), in una sola volta, dimostra la differenziabilità di $f * g$ in x e la (4.8), che è la tesi (4.7) nel caso $k = 1$.
Come nella dimostrazione della Proposizione 4.1.8, dovremo lavorare sulla funzione f (in fondo è quella che ha le proprietà di regolarità), quindi iniziamo a manipolare la differenziabilità di f (nel punto $x - y$ (che è l'espressione nella definizione 4.1 del prodotto di convoluzione)), scrivendo

$$\begin{aligned} &|f(x+h-y) - f(x-y) - h\cdot\nabla f(x-y)| \\ =&\left|\int_0^1 [h\cdot\nabla f(x+sh-y) - h\cdot\nabla f(x-y)]\,\mathrm{d}s\right| \le |h|\varepsilon(|h|) \to 0 \end{aligned}$$

per $h \to 0$. L'uguaglianza è dovuta al fatto che si può scrivere $f(x+h-y)-f(x-y)$ come integrale di linea del gradiente di f tra i punti $x-y$ e $x+h-y$ lungo il segmento che va dal primo punto al secondo, e al fatto che il termine $h\cdot\nabla f(x-y)$ è costante in s; la disuguaglianza è ottenuta raccogliendo h, usando la disuguaglianza di Schwarz e l'uniforme continuità di ∇f ($f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ implica che $\nabla f \in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$; poi si invoca il Teorema di Heine–Cantor).
Siccome h deve tendere a zero, non è restrittivo supporre che $|h| < 1$; dunque, fissando un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ abbastanza grande tale che $x + B_1 - \operatorname{spt} f \subset K$, abbiamo che

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h\cdot\nabla f(x-y) = 0 \qquad \text{per ogni } y \notin K \text{ e } h \in B_1,$$

il che implica che

$$|f(x+h-y)-f(x-y)-h\cdot\nabla f(x-y)| \le |h|\varepsilon(|h|)\chi_K(y) \quad \text{per ogni } y\in\mathbb{R}^n \text{ e } h\in B_1.$$

Allora, moltiplicando per $g(y)$ ed integrando rispetto ad y, otteniamo

$$\left|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)-h\cdot\big((\nabla f)*g\big)(x-y)\right| \le |h|\varepsilon(|h|)\underbrace{\int_K |g(y)|\,\mathrm{d}y}_{<+\infty} \to 0$$

per $h\to 0$. Abbiamo dunque ottenuto la (4.9) e concluso la dimostrazione. □

4.2 Applicazioni della convoluzione

In questa sezione vediamo qualche applicazione della convoluzione, in particolare alcune proprietà di convergenza di funzioni generare convolvendone una data con una successione di funzioni in C_c^∞ dotate di opportune proprietà.

Definizione 4.2.1 (mollificatori)**.** *Una successione di mollificatori è una qualunque successione $\{\rho_k\}_k$ di funzioni $\rho_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tali che, per ogni $k\in\mathbb{N}$,*

(M1) $\rho_k\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(M2) $\operatorname{spt}\rho_k\subset\overline{B}_{1/k}$;

(M3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$;

(M4) $\rho_k(x)\ge 0$ *per ogni* $x\in\mathbb{R}^n$.

Un modo di costruire una successione di funzioni di questo tipo è per riscalamento di una funzione che verifica le proprietà (M1)–(M4). Come esempio di una successione di funzioni con queste caratteristiche, mostriamo la costruzione del mollificatore di Friedrich.
I prossimi due risultati riguardano la convergenza di funzioni definite in $\mathbb{R}^n$ in senso uniforme e rispetto alla norma L^p con $1\le p<\infty$. Come corollario, tramite un processo di estensione a zero, si otterrà un risultato di convergenza per funzioni definite su un insieme aperto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

Proposizione 4.2.2. *Data una funzione $f\in C(\mathbb{R}^n)$, si ha che $\rho_k*f\to f$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Sia $K\subset\mathbb{R}^n$ un compatto fissato. Siccome le funzioni ρ_k hanno buone proprietà, sarà necessario sfruttare le proprietà della funzione f per ottenere la tesi. Fissiamo $\varepsilon>0$ e subordinatamente (anche a K) troviamo che esiste $\delta=\delta_{\varepsilon,K}>0$ tale che

$$|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon \qquad \text{per ogni } x\in K \text{ e per ogni } y\in B_\delta \tag{4.10}$$

(altro non è che la definizione di continuità). Allora, per ogni $x\in\mathbb{R}^n$ abbiamo

$$(\rho_k*f)(x)-f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}[f(x-y)-f(x)]\rho_k(y)\,\mathrm{d}y=\int_{B_{1/k}}[f(x-y)-f(x)]\rho_k(y)\,\mathrm{d}y$$

dove abbiamo usato la definizione di convoluzione e la proprietà (M3) per la prima uguaglianza e la proprietà (M2) per la seconda uguaglianza. Ora, nel caso in cui $x \in K$ e $k > 1/\delta$ (cosicché $y \in B_\delta$), prendendo i valori assoluti e stimando, otteniamo

$$|(\rho_k * f)(x) - f(x)| \leq \int_{B_{1/k}} |f(x-y) - f(x)|\rho_k(y)\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon \int_{B_{1/k}} \rho_k(y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon,$$

dove abbiamo usato la (M4) e ancora la (M3). Passando prima all'estremo superiore al variare di $x \in K$ e poi mandando $\varepsilon \to 0$, si ottiene la tesi. □

Teorema 4.2.3 (densità di $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$)**.** *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Allora $\rho_k * f \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Come prima cosa, ricordiamo che lo spazio $C_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $1 \leq p < \infty$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\|f_1 - f\| \leq \varepsilon. \tag{4.11a}$$

Dalla Proposizione 4.2.2, sappiamo che $\rho_k * f_1 \to f_1$ uniformemente sui compatti di$\mathbb{R}^n$. D'altra parte, per la (4.6) abbiamo che

$$\operatorname{spt}(\rho_k * f_1) \subset \overline{\operatorname{spt}\rho_k + \operatorname{spt} f_1} \subset \overline{B}_{1/k} + \overline{\operatorname{spt} f_1},$$

ma quest'ultimo insieme è compatto (ricordare l'Osservazione 4.1.7). Allora

$$\|\rho_k * f_1 - f_1\|_p \to 0 \qquad \text{per } k \to \infty. \tag{4.11b}$$

Scriviamo ora

$$\rho_k * f - f = (\rho_k * (f - f_1)) + (\rho_k * f_1 - f_1) + (f_1 - f),$$

da cui possiamo stimare, usando la (4.3), le (M3)–(M4) e le (4.11),

$$\begin{aligned}
\|\rho_k * f - f\|_p &\leq \|\rho_k * (f - f_1)\|_p + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_p + \|f_1 - f\|_p \\
&\leq \|f - f_1\|_p \cdot \underbrace{\|\rho_k\|_1}_{=1} + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_p + \|f - f_1\|_p \\
&= 2\|f - f_1\|_p + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_p \leq 2\varepsilon + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_p \to 0
\end{aligned}$$

quando $k \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$. □

Corollario 4.2.4 (densità di $C^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p < \infty$.*

Dimostrazione. Ci vogliamo ricondurre alla situazione del Teorema di densità 4.2.3. Per fare ciò, occorre estendere una funzione $f \in L^p(\Omega)$ a tutto $\mathbb{R}^n$. Perciò, data una tale f, definiamo

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Segue che $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sia ora $\{K_k\}_k$ una successione di compatti di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} K_k = \Omega \qquad \text{e} \qquad \operatorname{dist}(K_k, \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \geq \frac{2}{k} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Una tale successione è fatta per invadere Ω (ovvero $K_k \uparrow \Omega$ per $k \to \infty$) e può essere costruita come

$$K_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq k, \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \geq \frac{2}{k} \right\}.$$

Definiamo ora $g_k := \tilde{f}\chi_{K_k}$ e $f_k := \rho_k * g_k$ e notiamo immediatamente che

$$\operatorname{spt} f_k \subset \overline{B}_{1/k} + K_k \Subset \Omega;$$

per cui, dall'Osservazione 4.1.7 e dal Teorema 4.1.9, segue che $f_k \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} &= \|f_k - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho_k * g_k - \rho_k * \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_k * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|g_k - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_k * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \end{aligned}$$

per $k \to \infty$. Il primo $\leq$ segue dalla disuguaglianza di Minkowski, il secondo segue dal Teorema 4.1.4 di Young applicando la (4.3) e le proprietà (M3)–(M4). La convergenza a zero del primo addendo dell'ultima riga segue dal Teorema di convergenza dominata (la funzione $\tilde{f}$ è una dominante) e quella del secondo addendo dal Teorema 4.2.3. La dimostrazione è conclusa. □

Chiudiamo con la versione generale del Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (di cui una versione particolare era stata dimostrata nel Lemma 2.2.1).

Corollario 4.2.5 (lemma fondamentale del calcolo delle variazioni)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ una funzione tale che*

$$\int_\Omega u(x) f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \textit{per ogni } f \in C_c^\infty(\Omega). \tag{4.12}$$

Allora $u = 0$ quasi ovunque in Ω.

Dimostrazione. Sia $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione a supporto compatto contenuto in Ω e sia $g_k := \rho_k * g \in C_c^\infty(\Omega)$ (si noti che questo segue dalla (M1) e vale per $k \in \mathbb{N}$ grande a sufficienza). Allora tali g_k sono funzioni candidate per la (4.12) e dunque,

$$\int_\Omega u(x) g_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{per } k \in \mathbb{N} \text{ sufficientemente grande.} \tag{4.13}$$

Per il Teorema 4.2.3 di densità, abbiamo che $g_k \to g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e dunque esiste una sottosuccessione (che non rinomineremo) tale che $g_k \to g$ puntualmente quasi ovunque. Inoltre, sempre per il Teorema 4.1.4 di Young e per le (M3)–((M4)), abbiamo che $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, per cui si può passare al limite per convergenza dominata nell'integrale (4.13) ed ottenere $\int_\Omega u(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Considerato ora un compatto $K \subset \Omega$, si può scegliere la funzione $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} u & \text{se } x \in K, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus K, \end{cases}$$

che fa si che l'ultimo integrale diventi $\int_K |u(x)|\,\mathrm{d}x = 0$. Segue che $u = 0$ quasi ovunque in K e, per l'arbitrarietà di K, si ottiene che $u = 0$ quasi ovunque in Ω, come si voleva dimostrare. □

Capitolo 5

Cenni sulle distribuzioni

Lezione 10: 30 marzo 2023

La teoria delle distribuzioni è stata introdotta alla fine degli anni Quaranta dal matematico francese Laurent Schwartz (gli valse la medaglia Fields), come sistematizzazione del concetto di funzione generalizzata.

5.1 Gli spazi $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$; relative convergenze

Le distribuzioni sono oggetti "deboli" e si conoscono attraverso la loro azione sulle funzioni, nel senso della dualità. Per formalizzare questo concetto, richiamiamo lo spazio

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{spt}(\varphi) = K \Subset \Omega, K \text{ compatto}\}$$

delle funzioni lisce a supporto compatto e osserviamo che è uno spazio vettoriale (è una facile verifica) non normato. È comunque possibile dare una nozione di convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definizione 5.1.1. *Diciamo che una successione $\{\varphi_k\}_k \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge, per $k \to \infty$, ad una funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se*

1. $\operatorname{spt}(\varphi_k) \subseteq K \subset \Omega$*, con K compatto, per ogni $k \in \mathbb{N}$;*
2. $D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$ *per $k \to \infty$ uniformemente in K, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indice.*

[Notiamo che il compatto K della proprietà 1. è lo stesso per tutte le funzioni e che nel punto 2. si richiede la convergenza uniforme in K delle derivate di tutti gli ordini, quindi anche quella delle funzioni $\varphi_k \to \varphi$.]

È immediato notare che la nozione di convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$ è una nozione estremamente forte.

Esempio 5.1.2. Data $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, consideriamo le seguenti successioni:

$$\varphi_k(x) := 2^{-k}\varphi(x), \qquad \psi_k(x) := \varphi(x/k), \qquad \text{e} \qquad \tau_k(x) := \varphi(x-k).$$

La prima successione converge alla funzione nulla in $\mathcal{D}(\Omega)$, secondo la Definizione 5.1.1. La seconda successione non converge in $\mathcal{D}(\Omega)$, perché la proprietà 1. risulta violata. Infatti, se $K = \operatorname{spt}(\varphi) \ni 0$, allora $\operatorname{spt}(\psi_k) = kK \to \mathbb{R}^n$ per $k \to \infty$;

se $K = \mathrm{spt}(\varphi) \not\ni 0$, allora $\mathrm{spt}(\psi_k) = kK$ "scappa" all'infinito per $k \to \infty$. Infine, anche nel caso di τ_k, si ha che $\mathrm{spt}(\tau_k) = \mathrm{spt}(\varphi) + k$, che pure "scappa" all'infinito per $k \to \infty$: anche in questo caso la condizione 1. è violata.

Possiamo ora definire le distribuzioni su Ω.

Definizione 5.1.3. *L'insieme delle distribuzioni su Ω è l'insieme dei funzionali lineari e continui su $\mathcal{D}(\Omega)$, ovvero l'insieme delle applicazioni $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tali che*

1. $\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle T, \varphi\rangle + \beta\langle T, \psi\rangle$, *per ogni* $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *e per ogni* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi_k \to \varphi$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *per* $k \to \infty$ *implica che* $\langle T, \varphi_k\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ *per* $k \to \infty$.

Notiamo che grazie alla linearità, è sufficiente verificare la continuità sulle successioni infinitesime: possiamo quindi riscrivere la condizione 2. come

2'. $\varphi_k \to 0$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *per* $k \to \infty$ *implica che* $\langle T, \varphi_k\rangle \to 0$ *per* $k \to \infty$.

L'insieme delle distribuzioni su Ω si denota con $\mathcal{D}'(\Omega)$ ed è il duale di $\mathcal{D}(\Omega)$.

È possibile avere un'idea di quanto grande sia $\mathcal{D}'(\Omega)$ ricordando come si comportano gli insiemi duali rispetto all'inclusione: dati due spazi vettoriali normati o topologici $X \subset Y$, si ha $Y' \subset X'$ (dove l'inclusione si ottiene nel seguente modo: dato $F \in Y'$, allora la restrizione $F|_X \in X'$). Dai risultati di densità sappiamo che $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e, identificando $(L^2(\Omega))' \simeq L^2(\Omega)$ (perché sono entrambi spazi di Hilbert), otteniamo la catena di inclusioni

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \simeq (L^2(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega). \tag{5.1}$$

Inoltre, vale l'inclusione[1] $L^2(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Affermiamo che ad ogni funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è possibile associare una distribuzione T_f, ovvero un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$. Definiamo $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tramite la legge

$$\varphi \mapsto \langle T_f, \varphi\rangle := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

La linearità segue immediatamente dalla definizione tramite l'integrale. Per verificare la continuità, verifichiamo la proprietà 2'. della Definizione 5.1.3. Sia dunque $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ per $k \to \infty$ e stimiamo

$$\begin{aligned}|\langle T_f, \varphi_k\rangle| &= \left| \int_\Omega f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_\Omega |f(x)|\cdot|\varphi_k(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_K |f(x)|\cdot|\varphi_k(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \|\varphi_k\|_{L^\infty(\Omega)} \underbrace{\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\le C < +\infty} \le C\|\varphi_k\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad \text{per } k \to \infty,\end{aligned}$$

dove $K \subset \Omega$ è il compatto che contiene i supporti di φ_k per ogni $k \in \mathbb{N}$ (Definizione 5.1.1-1.) e la limitatezza dell'ultimo integrale tramite la costante $C > 0$ è garantita dal fatto che $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Da questa dimostrazione segue che $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e

[1] La dimostrazione di questo fatto è una semplice applicazione della disuguaglianza di Hölder: siano $f \in L^2(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ un compatto e stimiamo

$$\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \sqrt{|K|} \cdot \left(\int_K |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \le \sqrt{|K|} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

quindi che ad ogni funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ è associata in maniera naturale la distribuzione $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tramite la (5.2). Allora lo spazio delle distribuzioni $\mathcal{D}'(\Omega)$ è ancora più grande dello spazio $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e la catena di inclusioni (5.1) si può arricchire con

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \simeq (L^2(\Omega))' \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega). \tag{5.3}$$

Con un abuso di notazione, si suole dire che se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, allora $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (senza usare la notazione T_f). Questo è giustificato di volta in volta dal contesto (se non origina confusione) e a maggior ragione dal fatto che tale scrittura, benché impropria, non è ambigua e permette di identificare $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con un sottoinsieme di $\mathcal{D}'(\Omega)$ (che potremmo chiamare il sottoinsieme delle distribuzioni di tipo funzione). Infatti, vale il seguente fatto.

Proposizione 5.1.4. *Se $T_{f_1} = T_{f_2}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ sono due distribuzioni di tipo funzione, allora segue che $f_1 = f_2$ quasi ovunque in Ω.*

Dimostrazione. Usiamo la definizione

$$T_{f_1} = T_{f_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle T_{f_1}, \varphi\rangle = \langle T_{f_2}, \varphi\rangle \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

da cui, usando la (5.2), abbiamo che questo equivale ad avere, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_1(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f_2(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ovvero} \quad \int_\Omega (f_1(x) - f_2(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Applicando il Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, Corollario 4.2.5, otteniamo che deve essere $f_1 - f_2 = 0$ quasi ovunque in Ω, come desiderato. □

Osserviamo che l'inclusione $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ in (5.3) è stretta: questo ci dice che ci sono distribuzioni che non sono rappresentate da funzioni di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, per cui non possono essere scritte con il membro destro della (5.2).

Esempio 5.1.5. L'esempio tipico che si fa di una distribuzione non di tipo funzione è la delta di Dirac: dato un punto $x_0 \in \Omega$, definiamo l'applicazione $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tramite la legge

$$\varphi \mapsto \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle := \varphi(x_0).$$

Come prima cosa, mostriamo che si tratta di una distribuzione. La linearità segue applicando la definizione: date $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si ha

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi + \psi\rangle = (\varphi + \psi)(x_0) = \varphi(x_0) + \psi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle + \langle \delta_{x_0}, \psi\rangle.$$

Data la linearità, si ottiene la continuità se si dimostra che il punto 2'. della Definizione 5.1.3 è soddisfatto. A tal fine, consideriamo una successione infinitesima $\{\varphi_k\}_k \subset \mathcal{D}(\Omega)$ e otteniamo

$$\lim_{k\to\infty} \langle \delta_{x_0}, \varphi_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_0) = 0.$$

Ora vediamo che $\delta_{x_0} \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ovvero dimostriamo che non esiste alcuna funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che $\delta_{x_0} = T_f$. Se, per assurdo, tale funzione esistesse, avremmo

$$\varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{5.4}$$

ed in particolare avremmo che

$$0 = \int_\Omega f(x)\varphi(x), \mathrm{d}x \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{x_0\})$$

(ovvero per ogni φ tale per cui $x_0 \notin \operatorname{spt}(\varphi)$). Allora il Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, Corollario 4.2.5, implica che $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$, da cui (siccome x_0 è solo un punto) otteniamo che $f = 0$ quasi ovunque in Ω. Ora, tornando alla (5.4), otteniamo che $\varphi(x_0) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il che è impossibile. □

Dopo avere dato un'idea dello spazio delle distribuzioni, è opportuno definire la convergenza in distribuzione.

Definizione 5.1.6. *Si dice che la successione di distribuzioni $\{T_k\}_k \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge alla distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e si indica con $T_k \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \qquad \textit{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.5}$$

Notiamo come questa sia una definizione di convergenza di tipo debole – e ce lo aspettiamo, siccome quello delle distribuzioni è uno spazio duale.

Esempio 5.1.7. Vediamo un esempio in cui è facile stabilire la convergenza di distribuzioni, quello delle distribuzioni di tipo funzione. Infatti, non è difficile dimostrare che se $f_k \to f$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ allora $T_{f_k} \to T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dobbiamo dimostrare la (5.5); usando la (5.2), la condizione in (5.5) è equivalente ad avere che

$$\int_\Omega (f_k(x) - f(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \text{per } k \to \infty \text{ per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Usando la definizione di limite, è equivalente ad avere che il valore assoluto dell'integrale converge a zero. Allora stimiamo, indicando $K = \operatorname{spt}(\varphi)$,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (f_k(x) - f(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_\Omega |f_k(x) - f(x)|\cdot|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_K |f_k(x) - f(x)|\cdot|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \|\varphi\|_\infty \int_K |f_k(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \text{per } k \to \infty.\end{aligned}$$

Questo dimostra che l'inclusione $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ è continua, ovvero l'applicazione $i\colon L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ definita da $f \mapsto i(f) = T_f$ è continua, nel senso appena studiato: $f_k \to f$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ implica che $T_{f_k} \to T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. □

Lezione 11: 31 marzo 2023

5.2 Proprietà delle distribuzioni

Riportiamo ora alcune proprietà sia strutturali che di regolarità delle distribuzioni e vediamo alcune loro conseguenze.

Definizione 5.2.1 (supporto di una distribuzione)**.** *Il supporto* $\operatorname{spt}(T)$ *di una distribuzione* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *è il più piccolo chiuso* $C \subset \overline{\Omega}$ *tale che*

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \qquad \textit{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus C).$$

Dalla definizione è facile vedere che $\operatorname{spt}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$ e che se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ha supporto $\operatorname{spt}(f) = K \subset \Omega$, allora $\operatorname{spt}(T_f) = K$.

Definizione 5.2.2 (derivata di una distribuzione)**.** *Siano* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *una distribuzione e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *un multi-indice. La derivata di ordine* α *di* T *è la distribuzione* $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *tale che*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \qquad \textit{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.6}$$

Dalla definizione appena data si intuisce che le distribuzioni sono infinitamente derivabili, siccome è possibile scaricare la derivata sulla funzione test.

Esempio 5.2.3. Usando la definizione (5.6), è immediato vedere che valgono le seguenti relazioni:

- $\partial_{x_i} T$ è la distribuzione tale che $\langle \partial_{x_i} T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_{x_i} \varphi \rangle$;
- $\partial^2_{x_i x_j} T$ è la distribuzione tale che $\langle \partial^2_{x_i x_j} T, \varphi \rangle = \langle T, \partial^2_{x_i x_j} \varphi \rangle$, da cui si nota che il Teorema di Schwarz sulla commutatività delle derivate parziali miste è immediato per le distribuzioni, perché vale per le funzioni test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
- se $f \in C^1(\Omega)$, allora $\partial_{x_i}(T_f) = T_{\partial_{x_i} f}$, come si vede facilmente combinando la (5.6) e la (5.2) e integrando per parti. La distribuzione ha allora una derivata classica.

Enunciamo ora il primo teorema sulle proprietà di regolarità delle distribuzioni. Esso afferma la stessa proprietà valida per le funzioni: una distribuzione a derivata nulla è (uguale alla distribuzione) costante. Stabiliamo il teorema per distribuzioni in $\mathcal{D}'(a, b)$, ma si intende che vale la generalizzazione in dimensione superiore.

Teorema 5.2.4 (della derivata nulla)**.** *Sia* $u \in \mathcal{D}'(a, b)$ *una distribuzione con derivata prima nulla. Allora* u *è una distribuzione costante. Quindi,*

$$u' = 0 \quad \textit{in } \mathcal{D}'(a, b) \quad \textit{se e solo se} \quad u = c \quad \textit{in } \mathcal{D}'(a, b),$$

per qualche costante $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Usando la (5.6), abbiamo che

$$\langle u', \varphi \rangle = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad \langle u, \varphi' \rangle = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(a, b). \tag{5.7}$$

Fissiamo ora una funzione test $\varphi_0 \in \mathcal{D}(a, b)$ tale che

$$\int_a^b \varphi_0(x)\, \mathrm{d}x = 1 \tag{5.8}$$

e sia $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ una funzione test qualunque. Definiamo

$$\overline{\varphi}(x) \coloneqq \varphi(x) - \varphi_0(x) \int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t \tag{5.9}$$

ed è facile vedere che $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}(a, b)$. Infine, poniamo

$$\psi(x) \coloneqq \int_a^x \overline{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{5.10}$$

per la quale si ha $\psi(a) = 0$ e, tenendo conto della (5.9) e della (5.8),

$$\psi(b) = \int_a^b \overline{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \left(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\underbrace{\int_a^b \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t}_{=1} = 0.$$

Siccome, per il teorema fondamentale del calcolo, $\psi' = \overline{\varphi} \in \mathcal{D}(a,b)$, deduciamo che $\psi \in \mathcal{D}(a,b)$ e quindi la possiamo usare come funzione per testare la (5.7). Allora

$$0 = \langle u, \psi' \rangle = \langle u, \overline{\varphi} \rangle = \langle u, \varphi \rangle - \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,\underbrace{\langle u, \varphi_0 \rangle}_{=:c}$$

da cui otteniamo che

$$\langle u, \varphi \rangle = c\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b c\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \langle c, \varphi \rangle \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(a,b),$$

che è la tesi che volevamo dimostrare. □

Corollario 5.2.5. *Dara una distribuzione $f \in \mathcal{D}'(a,b)$, se $\bar{u}$ risolve*

$$u' = f \qquad \textit{in } \mathcal{D}'(a,b), \tag{5.11}$$

allora ogni altra soluzione dell'equazione (5.11) è data da $u = \bar{u} + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Se $u \in \mathcal{D}'(a,b)$ è un'altra soluzione dell'equazione (5.11), abbiamo che $u - \bar{u}$ risolve l'equazione (5.11) con $f = 0$ in $\mathcal{D}'(a,b)$: infatti, $(u-\bar{u})' = u' - \bar{u}' = f - f = 0$ in $\mathcal{D}'(a,b)$. Allora, per il Teorema 5.2.4 della derivata nulla, abbiamo che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $u - \bar{u} = c$, e la dimostrazione è conclusa. □

Il corollario appena dimostrato dice che ogni soluzione di un'equazione del prim'ordine in $\mathcal{D}'(a,b)$ forzata è data da una soluzione dell'equazione omogenea (la costante c) più una soluzione particolare (la funzione $\bar{u}$). Questo fatto si generalizza ad operatori lineari L: se $Lu = f$, allora ogni soluzione distribuzionale è data da $u = u_h + u_p$, con u_h e u_p che risolvono, rispettivamente $Lu_h = 0$ e $Lu_p = f$. Si noti il parallelo con le equazioni differenziali ordinarie lineari del second'ordine a coefficienti costanti, che sono state studiate nel corso di Analisi 1.

5.3 Convoluzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Torniamo ora all'ambientazione in dimensione superiore per occuparci della convoluzione tra distribuzioni. Ciò darà uno strumento utile per trovare formule risolutive per equazioni alle derivate parziali di alcuni tipi.
Consideriamo due funzioni $u, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (interpretiamo u come una distribuzione di tipo funzione (liscia) e ψ come funzione test). Affermiamo che $u * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e, per la catena di inclusioni (5.3), si ha anche $u * \psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $u * \psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: pertanto $u * \psi$ è una distribuzione di tipo funzione. Introduciamo la notazione

$$\check{\psi}(x) := \psi(-x).$$

Il fatto che $u * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ segue dalla Proposizione 4.1.6 e dal Teorema 4.1.9. Inoltre,

$$\begin{aligned}\langle u * \psi, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (u * \psi)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\psi(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \check{\psi}(y-x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\check{\psi} * \varphi)(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \langle u, \check{\psi} * \varphi\rangle,\end{aligned} \tag{5.12}$$

dove abbiamo messo in evidenza in colore blu che quell'integrale sembra una convoluzione (e lo è se si cambia il segno a $x - y$ e si usa $\check{\psi}$) e dove l'uguaglianza (1) è giustificata dall'applicazione del Teorema di Fubini–Tonelli. Si deduce dunque che

$$\langle u * \psi, \varphi\rangle = \langle u, \check{\psi} * \varphi\rangle \qquad \text{per ogni } u, \psi, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{5.13}$$

Ispirandoci ora alla (5.13) appena dimostrata, possiamo pensare di definire la convoluzione tra $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tramite la stessa formula, ovvero $u * \psi$ è la distribuzione che agisce come in (5.13):

$$\langle u * \psi, \varphi\rangle := \langle u, \check{\psi} * \varphi\rangle \qquad \text{per ogni } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ e per ogni } \psi, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{5.14}$$

Che $\check{\psi} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è conseguenza della Proposizione 4.1.6 e del Teorema 4.1.9. Nella (5.14) abbiamo che

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{implica che} \qquad u * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n); \tag{5.15}$$

infatti, la regolarità C^∞ discende dal Teorema 4.1.9, mentre il fatto che sia una distribuzione di tipo funzione (quindi una funzione, in questo caso) è conseguenza delle considerazioni seguenti[2]

$$\begin{aligned}\langle u * \psi, \varphi\rangle_x &= \langle u, \check{\psi} * \varphi\rangle_y = \left\langle u, \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y-x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right\rangle_y = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\langle u, \psi(\cdot - y)\rangle_y}_{=:g(x)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle g, \varphi\rangle_x,\end{aligned}$$

dove il cambio di variabili mute nella pima uguaglianza è come nei passaggi (5.12).

Esempio 5.3.1. Consideriamo $u = \delta_0$. Allora

$$\begin{aligned}\langle \delta_0 * \psi, \varphi\rangle_x &= \langle \delta_0, \check{\psi} * \varphi\rangle_y = \left\langle \delta_0, \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right\rangle_y = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \langle \psi, \varphi\rangle_x \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

dove nella terzia uguaglianza l'azione di δ_0 ha forzato $y = 0$. Abbiamo allora ottenuto che

$$\delta_0 * \psi = \psi, \tag{5.16}$$

ovvero la convoluzione tra la delta nell'origine e una funzione liscia a supporto compatto è la funzione stessa. □

[2] Indichiamo, nelle formule che stiamo per scrivere, $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ o $\langle\cdot,\cdot\rangle_y$ a seconda che la variabile di integrazione nella dualità sia x o y, rispettivamente.

Ora possiamo finalmente definire il prodotto di convoluzione tra due distribuzioni $u, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, con w a supporto compatto ($w \in \mathcal{D}'_c(\mathbb{R}^n)$). Come nella (5.14), poniamo

$$\langle u * w, \varphi \rangle := \langle u, \check{w} * \varphi \rangle \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{5.17}$$

con

$$\langle \check{w}, \varphi \rangle = \langle w, \check{\varphi} \rangle \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Notiamo che la definizione (5.17) è ben posta perché $\check{w} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, grazie alla (5.15).

Esempio 5.3.2. Anche in questo caso, vediamo come si comporta la convoluzione quando $w = \delta_0$ (che è a supporto compatto, come osservato immediatamente dopo la Definizione 5.2.1). Innanzitutto osserviamo che

$$\langle \check{\delta}_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \check{\varphi} \rangle = \varphi(-x)|_{x=0} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \qquad \text{da cui } \check{\delta}_0 = \delta_0.$$

Infine, abbiamo

$$\langle u * \delta_0, \varphi \rangle = \langle u, \check{\delta}_0 * \varphi \rangle = \langle u, \delta_0 * \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

dove abbiamo usato la (5.16). Segue che

$$u * \delta_0 = u \qquad \text{per ogni } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{5.18}$$

Tale proprietà della distribuzione δ_0 sarà utile nel seguito. □

Proposizione 5.3.3. *Per ogni $u, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, con w a supporto compatto e per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vale*

$$D^\alpha(u * w) = (D^\alpha u) * w = u * (D^\alpha w). \tag{5.19}$$

Dimostrazione. È una verifica usando le definizioni e le proprietà. □

5.4 Applicazioni alla soluzione di EDP

Prima di mostrare le applicazioni delle distribuzioni alla soluzione di equazioni alle derivate parziali, occorre fare una premessa sugli operatori differenziali, ed in particolare introdurre l'operatore aggiunto. Dati $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $c_\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti definito da

$$L := \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha$$

al quale, ricordando la (5.6), associamo l'operatore aggiunto

$$L^* := \sum_{|\alpha| \leq N} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D^\alpha \tag{5.20}$$

tramite il quale possiamo scrivere l'uguaglianza

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle u, L^* \varphi \rangle \qquad \text{per ogni } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ e } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Esempio 5.4.1. Esempi semplici di operatori aggiunti sono i seguenti:

- $L = \Delta$; la (5.20) dà $L^* = \Delta = L$.
- $L = \partial_t - \Delta$ (operatore del calore); la (5.20) dà $L^* = -\partial_t - \Delta$.
- $L = \Box = \partial^2_{tt} - \Delta$ (il dalambertiano, o operatore delle onde); la (5.20) dà $L^* = \Box$.

Gli operatori laplaciano e dalambertiano sono dunque auto-aggiunti. □

Definizione 5.4.2 (soluzione fondamentale)**.** *Una distribuzione $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ che risolve $LU = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si dice* soluzione fondamentale *di L in $\mathbb{R}^n$.*

Proposizione 5.4.3. *Si consideri l'equazione*

$$Lu = f \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \tag{5.21}$$

con $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ oppure $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto. Una soluzione è data da $\bar{u} = U * f$.

Dimostrazione. Verifichiamo che la distribuzione $\bar{u}$ risolve l'equazione:

$$L\bar{u} = L(U * f) = (LU) * f = \delta_0 * f = f,$$

dove abbiamo usato la Proposizione 5.3.3, la Definizione 5.4.2 di soluzione fondamentale e la (5.16) o (5.18), a seconda della necessità. □

La Proposizione 5.4.3 altro non dice che una soluzione particolare dell'equazione (5.21) si ottiene convolvendo la soluzione fondamentale U di L in $\mathbb{R}^n$ con la forzante f.

Esempio 5.4.4. Il seguente esempio, benché in dimensione $n = 1$, è illuminante. Consideriamo l'equazione

$$U'' = \delta_0 \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Essa è verificata se e solo se, ricordando la funzione di Heaviside H,

$$U'' = H' \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad (U' - H)' = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

e ciò si verifica, per il Teorema 5.2.4 della derivata nulla, se e solo se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $U' - H = a$. Ma ciò equivale ad avere

$$U' = H + a = (xH(x) + ax)' \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad (U - xH(x) - ax)' = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

e questo è soddisfatto, applicando un'altra volta il Teorema 5.2.4 della derivata nulla, se e solo se esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che

$$U - xH(x) - ax = b.$$

Allora la soluzione fondamentale è data da

$$U(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < 0, \\ (1+a)x + b & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Scegliendo $b = 0$ e $a = -1/2$, si ottiene

$$U(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x/2 & \text{se } x < 0 \\ x/2 & \text{se } x \geq 0 \end{array} \right\} = \frac{|x|}{2},$$

che pertanto è una soluzione fondamentale (dell'opposto) del laplaciano in una dimensione. Data una funzione f a supporto compatto, l'equazione $u'' = f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ha una soluzione particolare $\bar{u}$ così ottenuta

$$\bar{u} = \frac{|\cdot|}{2} * f.$$

Se, ad esempio, $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$, l'integrale generale dell'equazione

$$u'' = f = \chi_{[-1,1]}$$

si ottiene trovando la soluzione particolare $\bar{u} = \frac{|\cdot|}{2} * \chi_{[-1,1]}$ e sommando u_h soluzione di $u'' = 0$.

Lezione 12: 13 aprile 2023

Esercizi (didattica innovativa).

Lezione 13: 14 aprile 2023

Esercizi (didattica innovativa).

Capitolo 6

L'equazione del calore

Lezione 14: 4 maggio 2023

Lezione 15: 5 maggio 2023

6.1 Ricerca della soluzione fondamentale

In questo capitolo studiamo l'equazione del calore, ovvero l'equazione parabolica prototipica

$$\partial_t u - \Delta_x u = f, \tag{6.1}$$

con $u, f : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ che denotano la temperatura e la sorgente di calore in funzione dello spazio e del tempo. Più precisamente, per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$, la funzione $u(x, t)$ restituisce la temperatura misurata nel punto $x \in \mathbb{R}^n$ dello spazio all'istante di tempo $t \in (0, +\infty)$, mentre la funzione $f(x, t)$ descrive la sorgente di calore. Notiamo che l'equazione (6.1) è lineare. Come fatto per l'equazione di diffusione, ed alla luce delle tecniche di convoluzione del Capitolo 4 e della Proposizione 5.4.3, cerchiamo la soluzione fondamentale dell'equazione del calore (6.1), o meglio dell'operatore del calore $L = \partial_t - \Delta_x$, ovvero una funzione $U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$LU = \partial_t U - \Delta_x U = \delta_{(\mathbf{0},0)} \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}), \tag{6.2}$$

dove indichiamo con $(\mathbf{0}, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ l'origine dello spazio-tempo. Risolvere la (6.2) significa risolvere, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$\langle LU, \varphi\rangle = \langle \partial_t U - \Delta_x U, \varphi\rangle = \langle U, -\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi\rangle = \langle U, L^* \varphi\rangle = \varphi(\mathbf{0}, 0), \tag{6.3}$$

dove le uguaglianze seguono dalla (5.6) e dove abbiamo ricordato la definizione di operatore aggiunto (si vedano la (5.20) e l'Esempio 5.4.1).
Notiamo che se la funzione φ che si usa come test è nello spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(\mathbf{0}, 0)\})$, allora si ha $\varphi(\mathbf{0}, 0) = 0$ e la (6.3) diventa

$$\langle \partial_t U - \Delta_x U, \varphi\rangle = 0; \tag{6.4}$$

se inoltre $\partial_t U, \Delta_x U \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, allora per la Proposizione 5.1.4 la (6.4) dà l'uguaglianza

$$\partial_t U - \Delta_x U = 0 \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}^{n+1}, \tag{6.5}$$

che sarà nostra cura risolvere esplicitamente. Come prima cosa, notiamo che se una funzione $u(x,t)$ risolve la (6.5), allora anche la funzione

$$v_\lambda(x,t) \coloneqq u(\lambda x, \lambda^2 t), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{6.6}$$

ne è soluzione. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \partial_t v_\lambda(x,t) &= \partial_t u(\lambda x, \lambda^2 t)\lambda^2, \\ \Delta_x v_\lambda(x,t) &= \Delta_x u(\lambda x, \lambda^2 t)\lambda^2, \end{aligned}$$

da cui $\partial_t v_\lambda - \Delta_x v_\lambda = \lambda^2(\partial_t u - \Delta_x u) = 0$.
Il cambiamento di variabili in (6.6) si chiama *riscalamento parabolico* ed è immediato osservare che, dette $(y,s) = (\lambda x, \lambda^2 t)$ le nuove variabili, rimane costante il rapporto

$$\frac{\|y\|^2}{s} = \frac{\|\lambda x\|^2}{\lambda^2 t} = \frac{\lambda^2\|x\|^2}{\lambda^2 t} = \frac{\|x\|^2}{t};$$

ciò ci suggerisce di cercare soluzioni che dipendano dal rapporto $\|x\|/\sqrt{t}$ e sarà conveniente cercarle fattorizzate, ovvero della forma

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} v\left(\frac{\|x\|}{\sqrt{t}}\right), \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in (0,+\infty). \tag{6.7}$$

Il motivo della scelta $t^{-n/2}$ a moltiplicare la funzione $v\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è conveniente per un certo cambiamento di variabili. Vogliamo ora imporre che la funzione u introdotta nella (6.7) risolva la (6.5) e di conseguenza trovare la forma esplicita per la funzione v. Con pazienza, calcoliamo le derivate parziali necessarie, ricordando la formula per la parte radiale del laplaciano in coordinate polari $\Delta f(r) = f_{rr}(r) + \frac{n-1}{r} f_r(r)$ dove poniamo $r = \|x\|$ e $y = \|x\|/\sqrt{t}$,

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_t \left(t^{-n/2} v(\|x\| t^{-1/2})\right) = \frac{n}{2} t^{-\frac{n+2}{2}} v(\|x\| t^{-1/2}) - \frac{1}{2} t^{-\frac{n+3}{2}} v'(\|x\| t^{-1/2})\|x\| \\ &= -\frac{1}{2t^{(n+2)/2}}\left[nv\left(\frac{\|x\|}{\sqrt{t}}\right) + \frac{\|x\|}{\sqrt{t}} v'\left(\frac{\|x\|}{\sqrt{t}}\right)\right] = -\frac{1}{2t^{(n+2)/2}}[nv(y) + yv'(y)], \\ \Delta_x u(x,t) &= \frac{1}{t^{n/2}} v''\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{t} + \frac{n-1}{r} v'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{t^{(n+2)/2}}\left[v''\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) + \frac{(n-1)\sqrt{t}}{r} v'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\right] = \frac{1}{t^{(n+2)/2}}\left[v''(y) + \frac{n-1}{y} v'(y)\right], \end{aligned}$$

da cui la (6.5) dà

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \cdot (\partial_t u - \Delta_x u) = \frac{1}{t^{(n+2)/2}}\left[nv(y) + yv'(y) + 2v''(y) + 2\frac{n-1}{y} v'(y)\right] \cdot r^{n+2} \\ &= y^{n+2}\left[2v''(y) + 2\frac{n-1}{y} v'(y) + yv'(y) + nv(y)\right] \cdot \frac{1}{y^3} \\ &= 2(\underbrace{y^{n-1}v''(y) + (n-1)y^{n-2}v'(y)}_{=(y^{n-1}v'(y))'}) + \underbrace{y^n v'(y) + ny^{n-1}v(y)}_{=(y^n v(y))'} \\ &= \left(2y^{n-1}v'(y) + y^n v(y)\right)'. \end{aligned}$$

Integrando, otteniamo immediatamente che, per qualche costante $c \in \mathbb{R}$, si ha

$$2y^{n-1}v'(y) + y^n v(y) = c, \tag{6.8}$$

ed imponendo le condizioni al contorno $v(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $v'(0) = 0$, si ottiene $c = 0$. Semplificando la (6.8) con questa scelta di c, si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$v'(y) + \frac{y}{2}v(y) = 0,$$

che risolta tenendo conto della condizione iniziale dà

$$v(y) = \alpha e^{-y^2/4} = \alpha e^{-\|x\|^2/4t}.$$

Definiamo allora la funzione

$$U(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\|x\|^2/4t} & \text{per } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in (0, +\infty), \\ 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{6.9}$$

e la chiamiamo *soluzione fondamentale dell'equazione del calore*. provare a fare un'analisi del grafico di U per valori fissati di x e t. Notiamo il seguente comportamento

$$\begin{aligned} x \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad U(x,t) \to 0 \quad \text{per } t \to 0^+ \\ x = 0 \quad &\Rightarrow \quad U(x,t) \to +\infty \quad \text{per } t \to 0^+ \end{aligned}$$

che è simile al comportamento della distribuzione $\delta_{(\mathbf{0},0)}$ (cosa che ci aspettiamo). Nel lemma che segue, dimostriamo una proprietà di normalizzazione ed una di integrabilità della soluzione fondamentale U definita nella (6.9).

Lemma 6.1.1. *Per ogni $t > 0$ si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(x,t)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{6.10}$$

Inoltre, $U \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Dimostrazione. Si verifica con un calcolo, usando il cambiamento di variabile $z = x/\sqrt{t}$, che vale la (6.10)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|x\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|z\|^2}}{\pi^{n/2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2}\,\mathrm{d}z_i = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\pi^{n/2}} = 1.$$

Dalla (6.10) otteniamo che, per ogni $t > 0$, la funzione $x \mapsto U(x,t)$ è in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e ciò implica che se $K \subset \mathbb{R}^n \times [-T,T]$ è un compatto, allora

$$\int_K |U(x,t)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \int_{-T}^{T} \left(\int_{\mathbb{R}^n} U(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} 1\,\mathrm{d}t = 2T < +\infty,$$

da cui segue la seconda affermazione della tesi. □

Vediamo ora qualche altra proprietà della soluzione fondamentale.

Proposizione 6.1.2 (proprietà della soluzione fondamentale)**.** *La funzione U risolve*

$$\partial_t U - \Delta_x U = \delta_{(\mathbf{0},0)} \qquad \textit{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}); \tag{6.11}$$

$$U(x,0) = \delta_{\mathbf{0}} \qquad \textit{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{6.12}$$

Dimostrazione. Entrambe le proprietà si dimostrano testando, ma le funzioni test sono in due spazi diversi, a seconda che si tratti dell'equazione o della condizione al bordo.
Dimostriamo la (6.11) considerando una funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Usando le regole di derivazione per le distribuzioni (5.6), abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t U - \Delta_x U, \varphi \rangle &= -\langle U, \partial_t \varphi \rangle - \langle U, \Delta_x \varphi \rangle \\
&\overset{(1)}{=} -\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} U(x,t)\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} U(x,t)\Delta_x\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\overset{(2)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Bigg[-\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} U(x,t)\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&\qquad - \int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} U(x,t)\Delta_x\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\Bigg] \\
&\overset{(3)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Bigg[\int_{\mathbb{R}^n} U(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t U(x,t)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&\qquad + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} -\Delta_x U(x,t)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\Bigg] \\
&\overset{(4)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n} U(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x \overset{(5)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\|x\|^2/4t}}{(4\pi\varepsilon)^{n/2}}\varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(6)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\|z\|^2}}{\pi^{n/2}}\varphi(\sqrt{4\varepsilon}z,\varepsilon)\,\mathrm{d}z \overset{(7)}{=} \varphi(\mathbf{0},0) = \langle \delta_{(\mathbf{0},0)}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Le uguaglianze sopra sono giustificate nel modo seguente: (1) $U \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, per il Lemma 6.1.1 e quindi definisce una distribuzione di tipo funzione, per la quale vale la rappresentazione tramite l'integrale; (2) scriviamo gli integrali iterati (Fubini–Tonelli); (3) nel primo termine, integriamo per parti in tempo e sfruttiamo la compattezza del supporto di φ, pertanto "$\varphi(x,+\infty) = 0$"; nel secondo termine, integriamo per parti in spazio due volte e sfruttiamo sempre la compattezza del supporto di φ per non avere i termini di bordo; (4) i termini in blu nella riga precedente sono l'operatore del calore applicato ad U: siccome siamo fuori da $t = 0$, l'espressione vale zero (si veda la (6.5)); (5) usiamo la formula esplicita di U in (6.9); (6) eseguiamo il cambio di variabile $z = x/\sqrt{4\varepsilon}$; (7) passiamo al limite per convergenza dominata: abbiamo convergenza puntuale a $\varphi(\mathbf{0},0)$ quando $\varepsilon \to 0^+$ e $e^{-\|z\|^2}\|\varphi\|_\infty$ è una dominante in $L^1(\mathbb{R}^n)$; usiamo anche la (6.10).
Notiamo ora che la (6.12) è equivalente a chiedere che

$$\lim_{t\to 0^+} U(x,t) = \delta_{\mathbf{0}} \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Ricordando che fuori da $t = 0$ il Lemma 6.1.1 garantisce che $U \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, essa definisce una distribuzione di tipo funzione e dunque, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}\langle U(\cdot,t),\varphi\rangle &= \lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n} U(x,t)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\|x\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\|z\|^2}}{\pi^{n/2}}\varphi(\sqrt{4t}z)\,\mathrm{d}z = \varphi(\mathbf{0}) = \langle \delta_{\mathbf{0}},\varphi\rangle,
\end{aligned}$$

dove si è usato il cambio di variabile $z = x/\sqrt{4t}$ e dove il limite è stato calcolato per convergenza dominata, come sopra. □

6.2 Formule di rappresentazione

In questa sezione vediamo come rappresentare le soluzioni dei seguenti due problemi per l'equazione del calore. Nel primo consideriamo l'equazione forzata (6.1) ed il problema associato con dato al bordo omogeneo

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{P_0^f}$$

mentre nel secondo consideriamo l'equazione omogenea con dato al bordo non banale

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{$P_{u_0}^0$}$$

per una data forzante $f : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ed un dato al bordo $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Stante la linearità dell'operatore del calore, una soluzione del problema completo

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{$P_{u_0}^f$}$$

sarà ottenuta per sovrapposizione delle soluzioni dei problemi (P_0^f) e ($P_{u_0}^0$).

Teorema 6.2.1 (formula di rappresentazione per il problema (P_0^f))**.** *Data*

$$f \in C_c^2(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)), \tag{6.13}$$

la funzione

$$u(x,t) := (U *_{(x,t)} f)(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|y\|^2/4s}}{(4\pi s)^{n/2}} f(x-y, t-s)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}s \tag{6.14}$$

è una soluzione classica del problema (P_0^f).

Nella (6.14), con la notazione $*_{(x,t)}$ indichiamo la convoluzione rispetto al(complesso del)le variabili x e t.

Dimostrazione. Come prima cosa estendiamo la forzante f ai tempi negativi, ponendo

$$\bar{f}(x,t) := \begin{cases} f(x,t) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

ottenendo che $\bar{f} \in C_c^2(\mathbb{R}^{n+1})$ (e ricordando che $\operatorname{spt} \bar{f} = \operatorname{spt} f \Subset \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$). In virtù del fatto che $\bar{f}$ risulta una distribuzione a supporto compatto (perché $C_c^2 \subset \mathcal{D}_c'$), la funzione

$$\bar{u}(x,t) := (U *_{(x,t)} \bar{f})(x,t)$$

risulta ben definita (si veda la (5.17)) e per la Proposizione 5.3.3 verifica

$$\partial_t \bar{u} - \Delta_x \bar{u} = (\partial_t U - \Delta_x U) *_{(x,t)} \bar{f} = \delta_{(\mathbf{0},0)} *_{(x,t)} \bar{f} = \bar{f} \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}),$$

grazie alla (6.11) ed alla (5.18). Oltre ad essere una soluzione distribuzionale dell'equazione con forzante $\bar{f}$, ricordando ancora una volta la Proposizione 5.3.3, otteniamo che $\bar{u} \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ e quindi è una soluzione classica. Infine, siccome

$\bar f(x,t) = f(x,t)$ se $t > 0$, la funzione $\bar u$ è soluzione classica della prima equazione in (P_0^f). Ci resta solo da vedere che vale la formula (6.14); a tal fine, calcoliamo

$$\begin{aligned}\bar u(x,t) = (U *_{(x,t)} t)(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} U(y,s)\bar f(x-y,t-s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} U(y,s) f(x-y,t-s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|y\|^2/4s}}{(4\pi s)^{n/2}} f(x-y,t-s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

come desiderato. Per il passaggio tra la prima e la seconda riga, abbiamo sfruttato il fatto che $U(y,s) = 0$ per $s < 0$ (che porta l'estremo inferiore di integrazione da $-\infty$ a 0) e il fatto che $\bar f(x-y,t-s) = 0$ per $t-s < 0$, ovvero per $s > t$ (che porta l'estremo superiore di integrazione da $+\infty$ a t).
Infine, dobbiamo mostrare che il dato al bordo per $t = 0$ viene recuperato. Osserviamo che

$$\begin{aligned}|\bar u(x,t)| &\le \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} U(y,s)|f(x-y,t-s)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &\le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty))}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} U(y,s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s = t\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty))}\,,\end{aligned}$$

che tende a zero per $t \to 0^+$. Il teorema è così dimostrato. □

Teorema 6.2.2 (formula di rappresentazione per il problema ($P^0_{u_0}$)). *Data*

$$u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{6.15}$$

una soluzione classica del problema ($P^0_{u_0}$) *è data dalla funzione*

$$u(x,t) := (U *_x u_0)(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-y\|^2/4t}u_0(y)\,\mathrm{d}y. \tag{6.16}$$

Tale funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty))$ *e*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = u_0(x_0) \qquad \textit{per ogni } x_0\in\mathbb{R}^n. \tag{6.17}$$

Dimostrazione. Dalla (6.15) abbiamo immediatamente che $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ed è facile vedere, ricordando la Proposizione 5.3.3, che la funzione u definita nella (6.16) risolve l'equazione del calore

$$\partial_t u - \Delta_x u = \partial_t(U*_x u_0) - \Delta_x(U*_x u_0) = (\partial_t U - \Delta_x U)*_x u_0 = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)),$$

per la (6.11). Dimostriamo ora che la tale

$$u \text{ recupera il dato al bordo } u_0 \text{ in senso distribuzionale.} \tag{6.18}$$

Essendo la U di classe L^1 in spazio (per la (6.10)) e la u_0 di classe $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (per l'ipotesi (6.15)), il Teorema 4.1.4 di Young garantisce che $u(\cdot,t) = (U *_x u_0)(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $t > 0$ e dunque è anche in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $t > 0$. In questo modo, $u(\cdot,t)$ è una distribuzione di tipo funzione e la (6.18) equivale a mostrare che

$$\langle U *_x u_0, \varphi\rangle \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \langle u_0,\varphi\rangle \qquad \text{per ogni } \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

ovvero che

$$\int_{\mathbb{R}^n} (U *_x u_0)(x,t)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Applicando la definizione di convoluzione, invocando il Teorema di Fubini–Tonelli ed effettuando il cambio di variabile $x - y = z$, l'integrale a sinistra nella formula precedente si riscrive come

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} U(x-y,t)u_0(y)\,\mathrm{d}y \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} U(x-y,t)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} U(z,t)\varphi(z+y)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \xrightarrow{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\langle \delta_0, \varphi(\cdot + y)\rangle_z\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

come desiderato. Nel passaggio al limite abbiamo usato la (6.12); abbiamo anche indicato con $\langle \cdot, \cdot \rangle_z$ la dualità nella variabile muta z, ad indicare che in tale prodotto di dualità la variabile y nell'argomento di φ è un parametro.
La regolarità C^∞ della soluzione fondamentale U in $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ e la Proposizione 5.3.3 garantiscono che la funzione u definita nella (6.16) sia di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$ e pertanto è una soluzione classica dell'equazione del calore (la prima in $(P^0_{u_0})$). Resta da dimostrare la (6.17), ovvero che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} u_0(y)\,\mathrm{d}y - u_0(x_0) \right) = 0,$$

che, ricordando la (6.10), è equivalente a dimostrare che

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} (u_0(y) - u_0(x_0))\,\mathrm{d}y = 0. \tag{6.19}$$

È venuto il momento di sfruttare la continuità di u_0 che avevamo assunto in (6.15): fissati $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, troviamo $\delta = \delta_{x_0,\varepsilon} > 0$ tale che $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$ ogniqualvolta $\|x - x_0\| < \delta$. Prendendo il valore assoluto nell'integrale di sinistra nella (6.19), abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} |u_0(y) - u_0(x_0)|\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\{y\in\mathbb{R}^n : \|y-x_0\|<\delta\}} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} |u_0(y) - u_0(x_0)|\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{\{y\in\mathbb{R}^n : \|y-x_0\|\geq\delta\}} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} |u_0(y) - u_0(x_0)|\,\mathrm{d}y =: I_\delta + II_\delta\,.
\end{aligned}$$

Per stimare il termine I_δ, usiamo la continuità di u_0 e la (6.10) e otteniamo

$$I_\delta \leq \varepsilon \int_{\{y\in\mathbb{R}^n : \|y-x_0\|<\delta\}} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} = \varepsilon; \tag{6.20a}$$

per stimare il termine II_δ, usiamo la disuguaglianza triangolare inversa per avere

$$\|x - y\| \geq \|y - x_0\| - \|x - x_0\| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},$$

dove la seconda disuguaglianza segue dalla definizione del dominio di integrazione di II_δ e imponendo che $\|x - x_0\| < \delta/2$ (condizione che è soddisfatta definitivamente siccome $x \longrightarrow x_0$). Allora abbiamo

$$\begin{aligned} II_\delta &\leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\{y\in\mathbb{R}^n : \|x-y\|\geq\delta/2\}} \frac{e^{-\|x-y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}\,\mathrm{d}y \\ &= 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\{z\in\mathbb{R}^n : \|z\|\geq\delta/4\sqrt{t}\}} e^{-\|z\|^2}\,\mathrm{d}z \xrightarrow{t\to 0^+} 0. \end{aligned} \tag{6.20b}$$

Nella seconda riga abbiamo fatto il solito cambio di variabili $z = (x - y)/\sqrt{4t}$ ed il limite è stato calcolato per convergenza dominata (verificare i dettagli). Grazie alle (6.20), la (6.19) è dimostrata e la dimostrazione è conclusa. □

Osservazione 6.2.3. Facciamo qualche osservazione sul Teorema 6.2.2 appena dimostrato.

1. L'ipotesi di continuità in (6.15) è necessaria solamente per dimostrare il recupero del dato al bordo (6.17).
2. Dalla formula di rappresentazione (6.16) si nota che se $u_0 \geq 0$ e $u_0 \not\equiv 0$, allora $u(x,t) > 0$ per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$. L'interpretazione fisica di questo fenomeno è che se $u_0 > 0$ anche su un insieme piccolissimo in $\mathbb{R}^n$, allora la soluzione è *tutta* staccata da zero per ogni $t > 0$: la velocità di propagazione dell'informazione (la stretta positività di u_0 da qualche parte) è infinita.
3. Il fatto che la soluzione u definita in (6.16) sia di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$ manifesta la proprietà regolarizzante dell'equazione del calore: anche partendo da dati irregolari, la soluzione è liscia per ogni tempo $t > 0$.
4. L'ipotesi di limitatezza in (6.15) può essere indebolita. Analizzando la formula di rappresentazione (6.16), si vede che essa ha senso quando la funzione integranda è effettivamente integrabile, cioè quando il prodotto dell'esponenziale per u_0 lo è. A tal fine, è sufficiente che esistano $a, A > 0$ tali che

$$|u_0(x)| \leq A e^{a\|x\|^2} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.21}$$

Se questo è il caso, allora la formula di rappresentazione fornisce una funzione $(x,t) \mapsto u(x,t)$ che risulta ben definita per ogni $t \in (0, 1/4a)$. Infatti,

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-y\|^2/4t} |u_0(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{A}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-y\|^2/4t} e^{a\|y\|^2}\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

che risulta finito se la funzione $y \mapsto e^{a\|y\|^2 - \|x-y\|^2/4t}$ è integrabile. Completando il quadrato all'esponente, la condizione di integrabilità si traduce nel fatto che il segno del termine $\|y\|^2$ deve essere negativo, e ciò è verificato qualora $t < 1/4a$.

Il seguente teorema è ora un corollario dei Teoremi 6.2.1 e 6.2.2.

Teorema 6.2.4 (formula di rappresentazione per il problema $(P^f_{u_0})$)**.** *Siano f e u_0 funzioni che verificano le condizioni (6.13) e (6.15) e siano u_1 la funzione definita nella (6.14) e u_2 la funzione definita nella (6.16). Allora una soluzione classica del problema $(P^f_{u_0})$ è data da $u(x,t) := u_1(x,t) + u_2(x,t)$.*

Dimostrazione. La tesi è immediata per linearità. □

Osservazione 6.2.5. Notiamo che finora non abbiamo condizioni per sancire l'unicità della soluzione ai problemi (P_0^f) e ($P_{u_0}^0$).

6.3 Alcuni esercizi

Lezione 16: 11 maggio 2023

Esercizi 6.3.1. Risolvere i seguenti esercizi, motivando esaustivamente i passaggi e l'applicazione dei teoremi.

1. Sia u la soluzione dell'equazione del calore $\partial_t u - \partial^2_{xx} u = 0$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Mostrare che anche la funzione $w(x,t) = xu_x(x,t) + 2tu_t(x,t)$ è soluzione dell'equazione del calore. Che cosa si può dire nel caso n-dimensionale con $n > 1$?
2. Dato il problema
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = e^{-3x^2} & \text{per } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
calcolare il valore della soluzione $u(4, 1/4)$ tramite la formula di rappresentazione. Che cosa si può dire della regolarità di u?
3. Dato il problema
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = e^{-2x} & \text{per } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
calcolare la soluzione u tramite la formula di rappresentazione.
4. Dato il problema
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = x^2 & \text{per } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
calcolare la soluzione u tramite la formula di rappresentazione, discutendone l'applicabilità.
5. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ e $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, si consideri il problema
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - au_x - bu = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Determinare una formula di rappresentazione per la soluzione. [Suggerimento: può essere conveniente considerare la funzione $v(x,t) = e^{hx+kt}u(x,t)$ e vedere per quali valori di h e k essa risolve l'equazione del calore $v_t - v_{xx} = 0$.]
6. Si consideri il problema
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \arctan(\|x\|) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$
   (a) Calcolare la soluzione $\bar{u}$ tramite la formula di rappresentazione e calcolare il limite $\lim\limits_{t \to +\infty} \bar{u}(0,t)$.
   (b) Dato un vettore $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ verificare che la funzione $w(x,t) = t(\boldsymbol{a} \cdot x)$ risolve l'equazione del calore con forzante $\boldsymbol{a} \cdot x$.

(c) Scrivere una soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = x_1 - x_3 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \arctan(\|x\|) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

7. Dato $a \neq 0$, si consideri il problema

$$\begin{cases} w_t - w_{zz} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ w(z,0) = 1/(1+(az)^2) & \text{per } z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Trovare una soluzione con la formula di rappresentazione.
(b) Trovare una formula di rappresentazione per il problema

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 1/(1+x^2) & \text{per } z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6.4 Altri risultati sull'equazione del calore

Lezione 17: 12 maggio 2023

In questa sezione vediamo due proprietà delle soluzioni dell'equazione del calore analoghe a quelle viste per le funzioni armoniche. Dimostreremo una proprietà di media di volume ed un principio del massimo.

6.4.1 Proprietà di media

Consideriamo un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un orizzonte temporale $T > 0$ e denotiamo con

$$\Omega_T := \Omega \times (0, T]$$

il *cilindro parabolico* e con

$$\Gamma_T := \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$$

la *frontiera parabolica*, notando che la "faccia" superiore $\Omega \times \{T\}$ fa parte del cilindro parabolico, ma non della frontiera, che a sua volta contiene la "faccia" inferiore $\Omega \times \{0\}$.

La proprietà di media per le funzioni armoniche era stabilita su insiemi sferici (palle o loro bordi) che sono i sottografici o le superfici di livello della soluzione fondamentale. È dunque ragionevole che il tentativo di poter scrivere una formula analoga alla (3.4) passi dai sottografici della soluzione fondamentale U dell'equazione del calore. Siccome c'è una relazione tra la variabile spaziale e quella temporale, ci si aspetta che la forma della "sfera" in questo caso sia leggermente diversa dal caso armonico.

Definiamo la *palla di calore* di raggio $r > 0$

$$E(x,t;r) := \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, U(x-y, t-s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}. \tag{6.22}$$

Allora la frontiera $\partial E(x,t;r)$ è un insieme di livello di $U(x-y,t-s)$. Una rapida osservazione porta alla conclusione che $E(x,t;r)$ ha una forma ovale e che (x,t) appartiene a $\partial E(x,t;r)$ ed è "in alto".

Teorema 6.4.1. *Sia $u\colon \Omega_T \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 rispetto alla variabile spaziale e di classe C^1 rispetto alla variabile temporale e risolva l'equazione del calore omogenea (la (6.1) con forzante $f = 0$). Allora vale la formula*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{\|x-y\|^2}{(t-s)^2} \, \mathrm{d}y \mathrm{d}s, \tag{6.23}$$

per ogni $E(x,t;r) \subset \Omega_T$.

Dimostrazione. presto, vd. Evans, Sezione 2.3.2, Teorema 3 (pag. 52). □

6.4.2 Principio del massimo

Teorema 6.4.2. *Sia $u\colon \Omega_T \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 rispetto alla variabile spaziale e di classe C^1 rispetto alla variabile temporale e risolva l'equazione del calore omogenea (la (6.1) con forzante $f = 0$). Si supponga inoltre che $u \in C^0(\overline{\Omega}_T)$. Allora*

1. *(principio del massimo debole) $\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$;*
2. *(principio del massimo forte) se Ω è connesso ed esiste $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ tale che $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u$, allora u è costante in $\overline{\Omega}_{t_0}$ (ovvero u è costante per tutti i tempi precedenti a t_0).*

Dimostrazione. presto, vd. Evans, Sezione 2.3.3, Teorema 4 (pag. 54). □

Come nel caso delle equazioni ellittiche, il principio del massimo può essere usato per dimostrare l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione del calore non omogenea. In quello che segue, dimostreremo l'unicità in due modi, il secondo dei quali è detto *metodo energetico* (e l'analogia con la fisica è chiara).

Proposizione 6.4.3 (unicità)**.** *La soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = f & \text{in } \Omega_T, \\ u(\cdot, 0) = g & \text{su } \Gamma_T \end{cases} \tag{DP_g^f}$$

è unica (sotto ipotesi sensate sui dati f e g).

Dimostrazione. Come annunciato, dimostreremo l'asserto in due modi. Siano $u, \tilde{u}$ due soluzioni di (DP_g^f) e si definisca la funzione $w := u - \tilde{u}$, che risolve il problema (DP_0^0).
1 (principio del massimo) Applicando il principio del massimo Teorema 6.4.2 alle funzioni $\pm w$, si ottiene che il massimo ed il minimo di w sono assunti al bordo; siccome su Γ_T abbiamo che $w = 0$, segue che $u = \tilde{u}$, come volevamo.
2 (metodo energetico) Definiamo l'energia $e\colon [0,T] \to [0,+\infty)$ tramite

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega |w(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x$$

e calcoliamone la derivata (rispetto al tempo). Abbiamo

$$\dot{e}(t) = \int_\Omega w(x,t) \partial_t w(x,t) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega w(x,t) \Delta_x w(x,t) \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega |\nabla w(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x \leq 0,$$

da cui segue che la funzione energia è decrescente e dunque $e(t) \leq e(0) = 0$. Allora $e(t) = 0$ per ogni $t \in [0,T]$ e dunque $u = \tilde{u}$, come volevamo. □

Per il resto del corso, ho seguito l'Evans: Capitolo 5 (per gli spazi di Sobolev – tutto tranne qualche omissione nelle dimostrazioni delle disuguaglianze di immersione continua, alcune sottosezioni della Sezione 5.8 e la Sezione 5.9.2) e Capitolo 6 (per le formulazioni deboli dei problemi ellittici Sezioni 6.1–6.3).

Lezione 18: 18 maggio 2023

Lezione 19: 19 maggio 2023

Lezione 20: 25 maggio 2023

Lezione 21: 26 maggio 2023

Lezione 22: 1 giugno 2023

Lezione 23: 8 giugno 2023

Lezione 24: 9 giugno 2023