Leggi di conservazione con flusso a concavità variabile

Consideriamo

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{in } Q = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

con $f \in C^2(\mathbb{R})$ che possiede un punto di flesso:

$$\exists \bar{u} \in \mathbb{R} : f''(\bar{u}) = 0$$

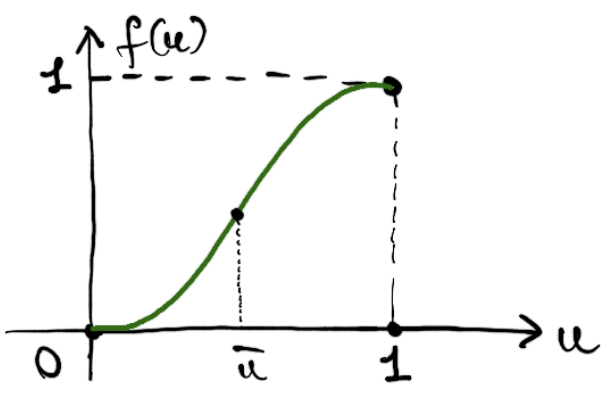
e inoltre $f''(u) > 0$ per $u < \bar{u}$, $f''(u) < 0$ per $u > \bar{u}$ (oppure viceversa).

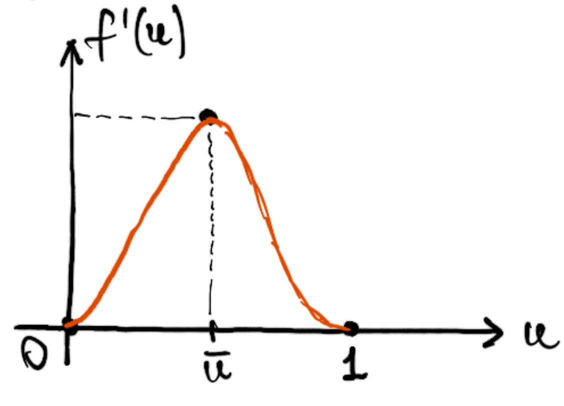
Consideriamo come prototipo l'equazione di Buckley-Leverett:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \qquad f(u) = \frac{u^2}{u^2 + a(1-u)^2}, \quad a > 0 \text{ costante}$$

- $u(x,t)$ = frazione di acqua presente in x al tempo t

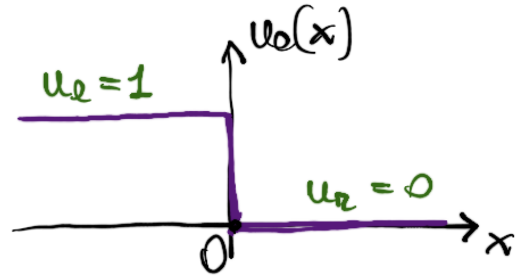
  ↳ $1 - u(x,t)$ = frazione di petrolio presente in x al tempo t



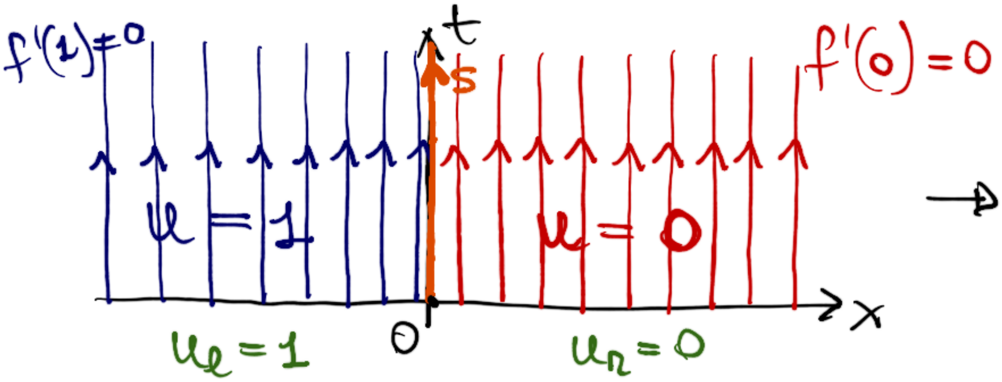


Consideriamo il seguente dato iniziale:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \quad (\text{acqua}) \\ 0 & \text{per } x > 0 \quad (\text{petrolio}) \end{cases}$$



Caratteristiche:



$$\rightarrow u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

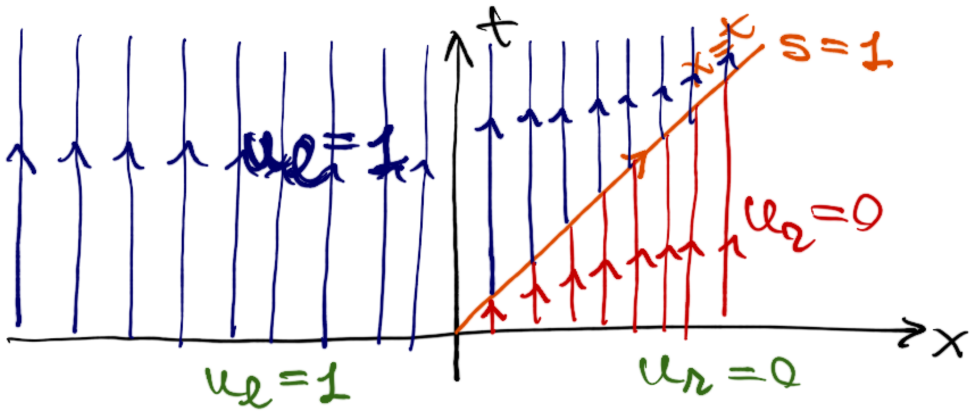
$\forall t > 0$

Questa è un'onda d'urto con velocità $s=0$. Verifichiamo la condizione di R.-H.:

$$0 = \frac{f(0)-f(1)}{0-1} = \frac{0-1}{0-1} = 1 \quad \times$$

La condizione non è soddisfatta, quindi questa u non è soluzione della legge di conservazione.

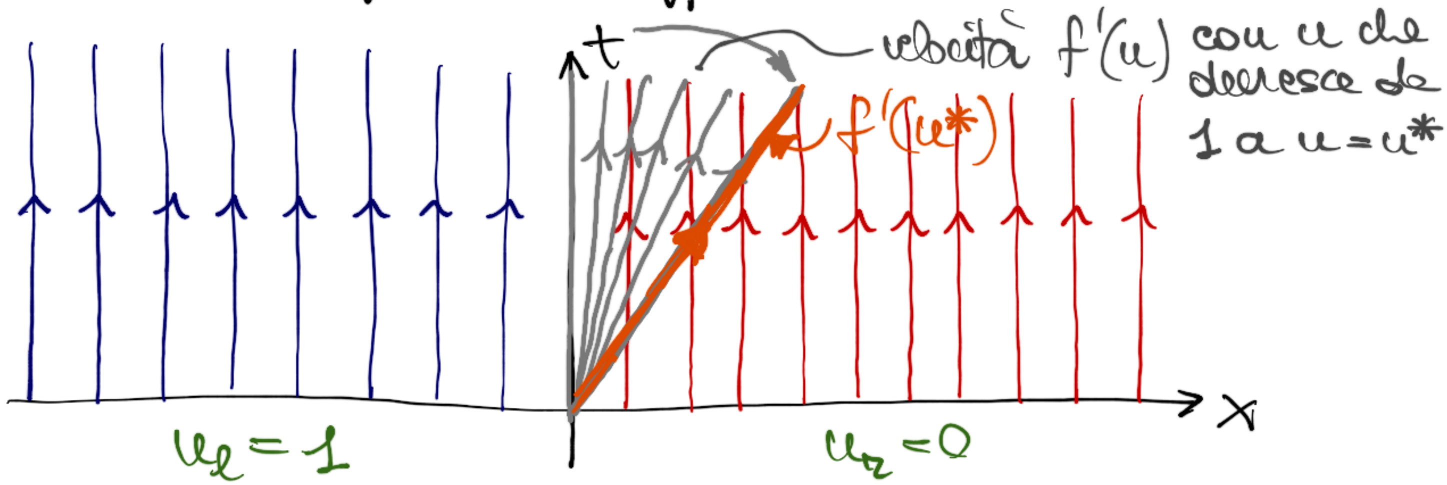
Costruiamo allora un'onda d'urto che propaghi con velocità $s=1$:

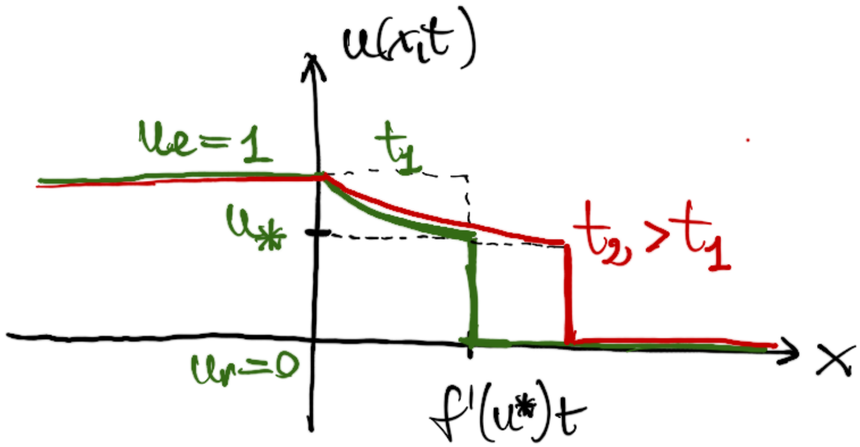


$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{per } \; x < t \\ 0 & \text{per } \; x > t \end{cases}$$

Questa è una soluzione (per costruzione, perché soddisfa la condizione di R.-H.), ma non è entropica (perché non tutte le caratteristiche entrano nell'urto).

Cerchiamo di costruire una funzione u che sia soluzione entropica della legge di conservazione:

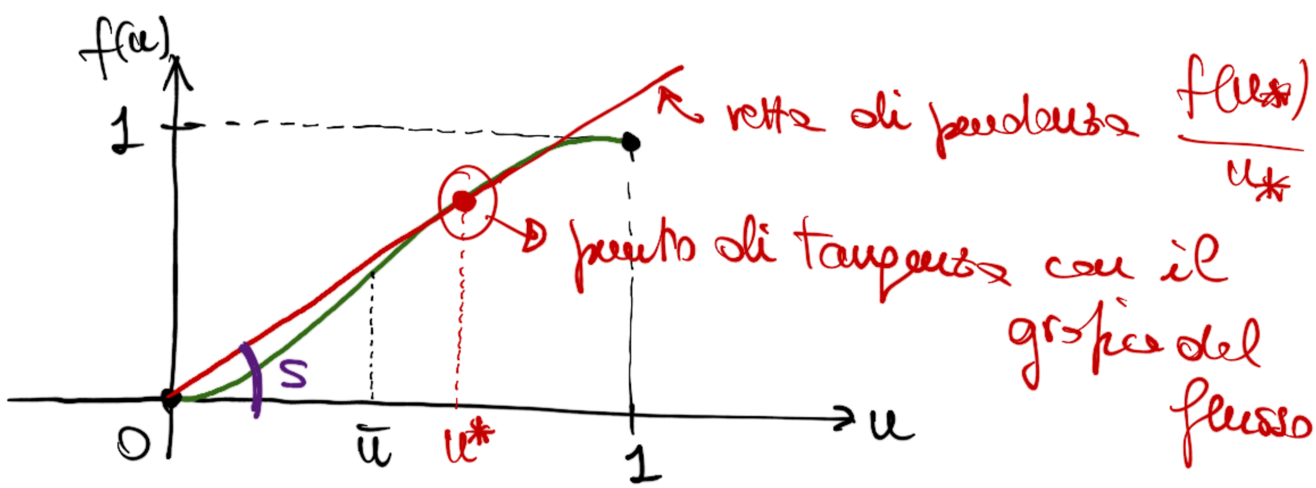




Affinché l'onda d'urto che segue la rarefazione sia una soluzione della legge di conservazione deve soddisfare la condizione di R.-H.:

$$f'(u^*) = \frac{f(u^*) - f(u_r)}{u^* - u_r}$$

$$= \frac{f(u^*)}{u^*}.$$



<u>Teorema</u> (Principio del massimo)

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 & \text{in } Q \\ u = u_0 & \text{per } t=0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sia u la soluzione entropica. Allora:

$$\min_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) \leq u \leq \max_{x\in\mathbb{R}} u_0(x), \quad \forall (x,t) \in Q.$$