Osservazione / Chiarimento

Consideriamo $f : (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \left(\xi(u,v) \, , \, \eta(u,v) \right) \in \mathbb{R}^2$

Sappiamo che, se $q \in \Omega$,

$$f_\star \ \underline{\text{agisce}} \text{ su } \ a \, \partial_u\big|_q + b \, \partial_v\big|_q \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Più precisamente

$$f_\star \left(a \, \partial_u\big|_q + b \, \partial_v\big|_q \right) = \left(a \, \xi_u(q) + b \, \xi_v(q) \right) \partial_\xi \Big|_{f(q)} + \\ + \left(a \, \eta_u(q) + b \, \eta_v(q) \right) \partial_\eta \Big|_{f(q)}$$

in quanto

$$\left(J_q f \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_u(q) & \xi_v(q) \\ \eta_u(q) & \eta_v(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \, \xi_u(q) + b \, \xi_v(q) \\ a \, \eta_u(q) + b \, \eta_v(q) \end{pmatrix}$$

L'applicazione f^* si comporta al contrario, cioè

f^* <u>agisce</u> su $\alpha (d\xi)_{f(q)} + \beta (d\eta)_{f(q)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Più precisamente

$$f^*\left(\alpha (d\xi)_{f(q)} + \beta (d\eta)_{f(q)}\right) = \left(\alpha\, \xi_u(q) + \beta\, \eta_u(q)\right) (du)_q + \\ + \left(\alpha\, \xi_v(q) + \beta\, \eta_v(q)\right) (dv)_q$$

in quanto

$$(J_q f)^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_u(q) & \eta_u(q) \\ \xi_v(q) & \eta_v(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, \xi_u(q) + \beta\, \eta_u(q) \\ \alpha\, \xi_v(q) + \beta\, \xi_v(q) \end{pmatrix}$$

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Sia W una forma differenziale su $\mathbb{R}^m$, cioè

$$W : p \in \mathbb{R}^m \longrightarrow W_p \in T_p^* \mathbb{R}^m$$

Allora <u>$f^*(W)$ è una forma differenziale su Ω</u> definita come segue: per ogni $q \in \Omega$,

$$\left(f^*(W)\right)_q = f^*\left(W_{f(q)}\right) \in T_q^* \Omega \qquad (\circledcirc)$$

(vedi definizione lezione precedente)

La forma differenziale $f^*(W)$ si chiama <u>pull-back</u> di W tramite f.

La definizione di $f^*(W)$ di (•) pag. 3 può essere data anche in termini di commutatività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f^*(W)"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "W"] \\ T^*\mathbb{R}^n & T^*\mathbb{R}^m \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

$$f^*(W) = f^* \circ W \circ f$$

OSSERVAZIONI

Abbiamo visto che se $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e X è un campo vettoriale su Ω, allora $P_* X$ è un campo lungo P e tangente ad $S = \operatorname{Im} P$. In particolare se $X = a\,\partial_u + b\,\partial_v$, a, b funzioni su Ω,

$$P_*(a\,\partial_u + b\,\partial_v) = a\,P_*(\partial_u) + b\,P_*(\partial_v) = a\,P_u + b\,P_v$$

Una cosa analoga succede con le forme differenziali. In questo caso, <u>supponendo P iniettiva</u>, quindi $P : \Omega \longrightarrow \operatorname{Im} P = S$ biunivoca, abbiamo che

$$P^{-1} : S \longrightarrow \Omega \quad , \text{ quindi}$$

$$P^{-1*} : T^*_{P^{-1}(s)}\Omega \longrightarrow T^*_s S \quad , \quad \text{con } s \in S$$

e abbiamo che, se (P_u^*, P_v^*) è la base di $T_s^* S$ duale a (P_u, P_v), dove $s = P(u,v)$,

$$P^{-1*}(du) \circ P = P_u^* \quad , \quad P^{-1*}(dv) \circ P = P_v^*$$

Cioè dobbiamo dimostrare che

$$\left(P^{-1*}(du)\right)_{P(u,v)} = P_u^*(u,v) \qquad \text{(analogamente)}$$

Infatti, senza star a scrivere i punti di applicazione per non appesantire la notazione,

$$\left(P^{-1*}(du)\right)(P_u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dalla def. di } P^{-1*}}}{=} du\left(P_*^{-1}(P_u)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Inquanto } P_*(\partial_u) = P_u}}{=} du\left(P_*^{-1}(P_*(\partial_u))\right) = du(\partial_u) = 1$$

Analogamente $\left(P^{-1*}(du)\right)(P_v) = 0$

Quindi, $P^{-1*}(du)$ è una forma differenziale su S

mentre $$P^{-1*}(du) \circ P$$

è una forma differenziale lungo P

Stesso discorso per $P^{-1*}(dv)$.

In generale, se $W : q \in \Omega \to W_q \in T_q^*\Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

è una forma differenziale su Ω, allora

$P^{-1*}(W)$ è una forma differenziale su S

$(P^{-1*}(W)) \circ P$ è una forma differenziale lungo P

vedi (•) pag. 3

Per chiarezza

$$(P^{-1*}(W)) \circ P : (u_0, v_0) \longrightarrow (P^{-1*}(W))_{P(u_0,v_0)} \stackrel{\downarrow}{=} P^{-1*}(W_{(u_0,v_0)})$$

<u>RICAPITOLANDO</u>, se a, b sono funzioni su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$,

$X = a\,\partial_u + b\,\partial_v$ è un campo vettoriale su Ω

$P_* X = a P_u + b P_v$ è un campo vettoriale lungo P

$(P_* X) \circ P^{-1} = (a P_u + b P_v) \circ P^{-1}$ è un campo vettoriale su S

$$S = \operatorname{Im} P$$

<u>ANALOGAMENTE</u>, se f, h sono funzioni su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$,

$W = f\,du + h\,dv$ è una forma differenziale su Ω

$P^{-1*}(W) \circ P = f P_u^* + h P_v^*$ è una forma differenziale lungo P

$P^{-1*}(W) = (f P_u^* + h P_v^*) \circ P^{-1}$ è una forma differenziale su S

PROP: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Allora

$f_\star : T_q\Omega \rightarrow T_{f(q)}\mathbb{R}^m$ iniettiva (rispettivamente suriettiva) $\Longleftrightarrow$

$f^\star : T^\star_{f(q)}\mathbb{R}^m \longrightarrow T^\star_q\Omega$ suriettiva (rispettivamente iniettiva)

DIM

È una diretta conseguenza del fatto che $f_\star$ è rappresentata dalla matrice Jacobiana di f calcolata in q $(J_q f)$ mentre $f^\star$ da $(J_q f)^T$.

Nota che la precedente proposizione si applica nel caso in cui $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sia una superficie parametrizzata

Ex: Sia (u,v) il sistema di coordinate cartesiano standard di $\mathbb{R}^2$. Scrivere la forma differenziale $W = du + v\,dv$ in coordinate polari (r,φ)

1° Metodo: La relazione tra (u,v) e (r,φ) è la seguente:

$u = r\cos(\varphi)$, $v = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$. Andando a sostituire in W otteniamo:

$$du + v\,dv = d\big(r\cos(\varphi)\big) + r\,\mathrm{sen}(\varphi)\, d\big(r\,\mathrm{sen}\,\varphi\big) =$$

$$\overset{\text{Leibniz}}{=} dr\cdot\cos(\varphi) - r\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi + r\,\mathrm{sen}(\varphi)\big(dr\cdot\mathrm{sen}(\varphi) + r\cos(\varphi)\,d\varphi\big)$$

$$= \big(\cos(\varphi) + r\,\mathrm{sen}^2(\varphi)\big)\,dr - r\,\mathrm{sen}(\varphi)\big(1 - r\cos(\varphi)\big)\,d\varphi \quad (\bullet)$$

La regola di Leibniz, per sua natura, si applica anche al differenziale, cioè $d(f\cdot g) = df\cdot g + f\cdot dg$

$2^{\underline{o}}$ **Metodo**: devo calcolare $f^*(W) = f^*(du + v\,dv)$ dato

$$f : (r, \varphi) \longrightarrow \big(u(r,\varphi), v(r,\varphi)\big) = \big(r\cos(\varphi), r\,\text{sen}(\varphi)\big)$$

La trasposta della matrice Jacobiana di f è

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \text{sen}(\varphi) \\ -r\,\text{sen}(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) + v\,\text{sen}(\varphi) \\ -r\,\text{sen}(\varphi) + r v \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Trasposta della Jacobiana di f — Componenti di W nella base (du, dv) — componenti di $f^*(W)$ nella base $(dr, d\varphi)$

Cioè

$$f^*(W) = \big(\cos(\varphi) + v\,\text{sen}(\varphi)\big)\,dr + \big(-r\,\text{sen}(\varphi) + r v \cos(\varphi)\big)\,d\varphi .$$

Sostituendo $v = r\,\text{sen}(\varphi)$ in ottengo $(\bullet)$ di pagina precedente

Ex: Sia $P:(u,v) \longrightarrow P(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ una superfice parametrizzata. Calcolare

$$P^*(dx + dy + dz).$$

1º Metodo: Sarà sufficiente calcolare

$$d(x(u,v)) + d(y(u,v)) + dz(u,v) =$$

$$= x_u\,du + x_v\,dv + y_u\,du + y_v\,dv + z_u\,du + z_v\,dv$$

$$= (x_u + y_u + z_u)\,du + (x_v + y_v + z_v)\,dv \qquad (\bullet)$$

$\underline{2^{\underline{o}}\text{ Metodo}}$: Tramite la trasposta della matrice Jacobiana di P:

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u + y_u + z_u \\ x_v + y_v + z_v \end{pmatrix}$$

Trasposta della matrice Jacobiana di P

Componenti di $dx + dy + dz$ nella base (dx, dy, dz)

Componenti di $P^*(dx+dy+dz)$ nella base (du, dv)

Cioè

$$P^*(dx + dy + dz) = (x_u + y_u + z_u)\,du + (x_v + y_v + z_v)\,dv$$

che coincide con $(\bullet)$ di pagina precedente

Ex: Sia $P:(u,v) \longrightarrow (u^2+v,\ u-v,\ u\cdot v) \in \mathbb{R}^3$

una superfice parametrizzata. Calcolare $P^*(W)$

dove $W = y\,dx + x\cdot z\,dy + \text{sen}(x)\,dz$

Avremo che, andando a sostituire $x = u^2+v$, $y = u-v$, $z = uv$ in obbiamo

$$P^*(W) = (u-v)\,d(u^2+v) + (u^2+v)\,uv\,d(u-v) + \text{sen}(u^2+v)\,d(uv)$$

$$= (u-v)(2u\,du + dv) + (u^2+v)\,uv\,(du - dv) + \text{sen}(u^2+v)(v\,du + u\,dv)$$

= facendo i conti $= \left(u^3v + uv^2 + 2u^2 - 2uv + \text{sen}(u^2+v)v\right) du$

$+ \left(-u^3v - uv^2 + u - v + u\,\text{sen}(u^2+v)\right) dv$

Nota che lo Jacobiano di P è singolare in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Vederlo anche col 2º Metodo