Analisi Funzionale

Spazi normati e spazi di Banach

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino
a.a. 2023/2024

Spazi normati

Notazione: $\mathbb{F}$ denota il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ o dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Def. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Si dice *norma* su X una funzione $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ tale che, per ogni $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{F}$:

(a) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$ (proprietà di separazione);

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (1-omogeneità);

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare).

Uno spazio vettoriale $(X, \|\cdot\|)$ dotato di una norma si dice *spazio normato*.

Def. Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato, definiamo la *distanza* $d : X \times X \to [0,\infty)$ *indotta dalla norma* $\|\cdot\|$ ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X.$$

Prop. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. La distanza d indotta dalla norma $\|\cdot\|$ è una distanza sull'insieme X.

Dunque ogni spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è anche uno spazio metrico, con la distanza indotta dalla norma.

Def. Si dice *spazio di Banach* uno spazio normato completo.

Esempi di spazi normati

(a) Siano $n \in \mathbb{N}_+$ e $p \in [1, \infty]$. Allora $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$ è uno spazio normato, ove

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} & \text{se } p < \infty, \\ \max\{|x_j| : j = 1, \dots, n\} & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

per ogni $x \in \mathbb{F}^n$. La distanza indotta è la distanza d_p già discussa.
Per $p = 2$, sappiamo che $(\mathbb{F}^n, d_2)$ è uno spazio metrico completo e separabile, dunque $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Banach separabile.

(b) Se M è uno spazio metrico compatto, allora $(C_{\mathbb{F}}(M), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato, ove $\|\cdot\|_\infty$ è la *norma dell'estremo superiore*:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)| \qquad \forall f \in C_{\mathbb{F}}(M).$$

La distanza indotta è la distanza d_∞. Sappiamo che $(C_{\mathbb{F}}(M), d_\infty)$ è uno sp. metrico completo, dunque $(C_{\mathbb{F}}(M), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

(c) Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato e Y è un sottospazio vettoriale di X, allora la restrizione a Y della norma $\|\cdot\|$ è una norma su Y (detta *norma indotta*), che denotiamo ancora con $\|\cdot\|$.

(d) Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati. Allora il prodotto diretto $X \times Y$ è uno spazio normato con la *norma prodotto*:

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \qquad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Se X e Y sono spazi di Banach, anche $X \times Y$ è uno spazio di Banach.

Proprietà degli spazi normati

Prop. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

(i) La norma $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ è 1-lipschitziana:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X.$$

(ii) Le operazioni di somma e prodotto scalare-vettore sono continue:

(a) se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ in X, allora $x_n + y_n \to x + y$ in X;

(b) se $x_n \to x$ in X e $\alpha_n \to \alpha$ in $\mathbb{F}$, allora $\alpha_n x_n \to \alpha x$ in X.

(iii) Per ogni $x \in X$ e $r > 0$, le palle $B(x,r)$ e $\overline{B}(x,r)$ sono convesse.

(iv) Un sottoinsieme E di X è limitato se e solo se

$$\sup_{x\in E} \|x\| < \infty.$$

Dunque, una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in X è limitata se e solo se

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty.$$

Norme equivalenti

Def. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Due norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ su X si dicono *equivalenti* se esistono costanti $A, B \in (0, \infty)$ tali che

$$\|x\| \leq A\|x\|' \qquad \text{e} \qquad \|x\|' \leq B\|x\| \qquad \text{per ogni } x \in X.$$

Oss. La relazione di equivalenza fra norme è riflessiva, simmetrica e transitiva (cioè, è una "relazione di equivalenza").

Prop. Due norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ sullo spazio X sono equivalenti se e solo se $\mathrm{id}_X : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|')$ è *bilipschitziana* (lipschitziana con inversa lipschitziana).

Coroll. Siano $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ norme equivalenti sullo spazio X.

(i) Le norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ inducono la stessa topologia su X. Dunque
   - convergenza di successioni,
   - continuità di funzioni,
   - sottoinsiemi aperti, chiusi, compatti, densi

   rimangono invariati se si rimpiazza $\|\cdot\|$ con $\|\cdot\|'$.

(ii) $E \subseteq X$ è limitato in $(X, \|\cdot\|)$ se e solo se E è limitato in $(X, \|\cdot\|')$.

(iii) Una succ. $(x_n)_n$ è di Cauchy in $(X, \|\cdot\|)$ se e solo se lo è in $(X, \|\cdot\|')$.

(iv) $(X, \|\cdot\|)$ è di Banach se e solo se $(X, \|\cdot\|')$ è di Banach.

Equivalenza delle norme, completezza e chiusura

Teor. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Siano $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ norme su X. Se $\dim X < \infty$, allora $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ sono equivalenti.

Coroll. Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita. Ogni norma $\|\cdot\|$ su X induce la stessa topologia, e rispetto a tale norma:

(i) $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach separabile;

(ii) ogni sottoinsieme chiuso e limitato di X è compatto.

Prop. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e Y un sottospazio vettoriale di X.

(i) Se $(Y, \|\cdot\|)$ è completo, allora Y è chiuso in X.

(ii) Se $\dim Y < \infty$, allora Y è chiuso in X.

(iii) Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach, allora Y è chiuso in X se e solo se $(Y, \|\cdot\|)$ è completo.

Serie convergenti e assolutamente convergenti

Def. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X, e $x \in X$. Diciamo che:

(a) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge* a x se $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n = x$ (in tal caso scriviamo anche $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$ e chiamiamo x la *somma della serie*);

(b) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge assolutamente* se $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Prop. Siano X uno spazio di Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. a valori in X. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge assolutamente, allora converge a qualche $x \in X$.

Prop. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $(x_n)_n$ una successione a valori in X. Se $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$ e la convergenza è assoluta, allora la convergenza è *incondizionata*, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x$ per ogni biiezione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Oss.

- Diciamo che una serie *converge incondizionatamente* se la serie converge e il valore della somma non dipende dall'ordine degli addendi.
- Per serie a valori reali, la convergenza incondizionata è equivalente alla convergenza assoluta.
- Vedremo che, in spazi normati di dimensione infinita, possono esistere serie che convergono incondizionatamente senza convergere assolutamente.

Compattezza in spazi normati

Lemma (Riesz). Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $Y \subseteq X$ un sottospazio chiuso *proprio* (cioè $Y \neq X$). Allora esiste $w \in X$ tale che $\|w\| = 1$ e $d(w, Y) \geq 1/2$.

Oss. Una variante della dimostrazione permette, per ogni $\epsilon > 0$, di trovare un $w \in X$ con $\|w\| = 1$ e $d(w, Y) \geq 1/(1 + \epsilon)$.

Teor. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato di dimensione infinita. Allora $\overline{B}(0, 1)$ e $S(0, 1) := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ non sono compatti.

Coroll. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Sono equivalenti:

(i) ogni successione limitata in X ha una sottosuccessione convergente;

(ii) tutti i sottoinsiemi chiusi e limitati di X sono compatti in X;

(iii) $\overline{B}(0, 1)$ è compatta in X;

(iv) $\dim X < \infty$.

Oss. Vedremo che in dimensione infinita si può recuperare un analogo della proprietà (i) del corollario utilizzando opportune nozioni di "convergenze deboli".

Separabilità in spazi normati

Prop. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Sono fatti equivalenti:

(i) X è separabile;

(ii) esiste un sottoinsieme $E \subseteq X$ al più numerabile tale che $X = \overline{\operatorname{span} E}$.

Teor. (Stone–Weierstrass) Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$. Se $f \in C[a, b]$, allora esiste una successione di polinomi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}$ tale che $p_n|_{[a,b]} \rightrightarrows f$.

Coroll. Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$. Lo spazio normato $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ è separabile.