OSSERVAZIONE che sarà utile in seguito

Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$

Avremo che

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

e

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \quad : T_q \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{g(f(q))} \mathbb{R}^k$$

Più precisamente, se $V \in T_q \mathbb{R}^n$,

$$(g \circ f)_* (V) = g_{*_{f(q)}}\left(f_{*_q} (V) \right).$$

MAPPA DI GAUSS

Sia $P : (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow P(u, v) \in \mathbb{R}^3$

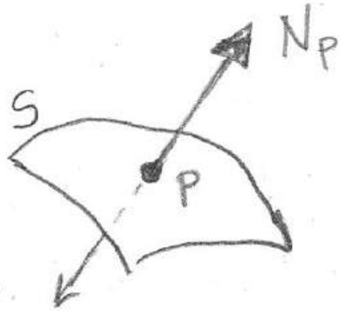
una superficie parametrizzata. Sia $S = \operatorname{Im} P$.

DEF: Definiamo l'applicazione

$$N : p \in S \longrightarrow N_p \in T_p \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$$

dove N_p è un versore unitario ortogonale ad S.

Di tali versori in teoria ce ne sarebbero 2.



Nei nostri ragionamenti ne sceglieremo uno.

Sfruttando la parametrizzazione $P(u,v)$, possiamo definire la seguente

$$N^P : (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \frac{P_u \times P_v}{\| P_u \times P_v \|} \in T_{P(u,v)} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$$

Notiamo che

$$\boxed{N^P = N \circ P}$$

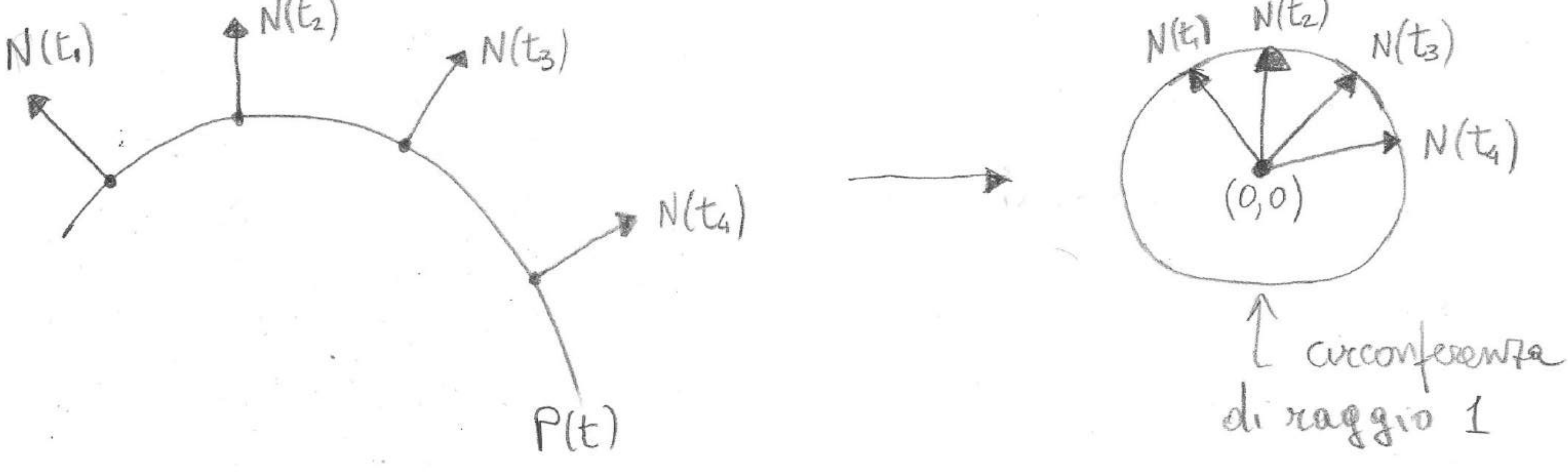
N^P è detta <u>Mappa di Gauss</u> per la superficie parametrizzata $P : (u,v) \in \Omega \longrightarrow P(u,v)$

INTERPRETAZIONE / VISUALIZZAZIONE GEOMETRICA

Abbiamo che $\| N^P(u,v) \| = 1 \quad \forall \ (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Quindi N^P può essere interpretata come una mappa da $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, con S^2 sfera di centro l'origine e raggio unitario.

Vediamo l'analogo nel caso 2-dimensionale



Osservazioni

Da pag. 3 abbiamo che $N^P = N \circ P \; : (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Da pag. 1 ricaviamo

$$N^P_* = N_* \circ P_* \quad : T_q \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{N(P(q))} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$$

Abbiamo che

$$\left.\begin{aligned} N^P_*(\partial_u) &= N_*(P_*(\partial_u)) = N_*(P_u) \\ N^P_*(\partial_v) &= N_*(P_*(\partial_v)) = N_*(P_v) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Ricordarsi che} \\ &P_*(\partial_u) = P_u \\ &P_*(\partial_v) = P_v \end{aligned}$$

Notiamo che

$$N_* : T_p S \longrightarrow T_{N(p)} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \qquad (\bullet)$$

o, per quello detto a pag. 4,

$$N_* : T_p S \longrightarrow T_{N(p)} S^2 \subseteq T_{N(p)} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \quad (\bullet\bullet)$$

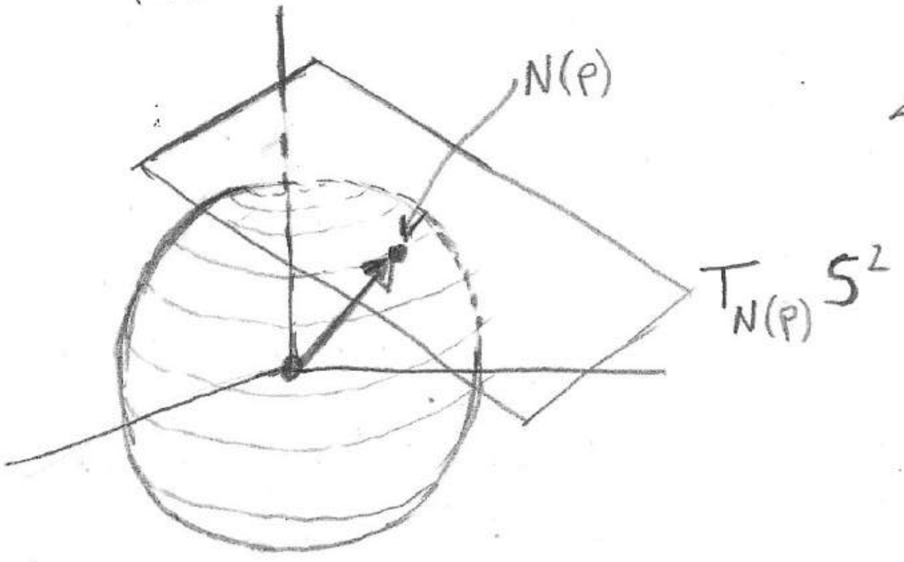
PROP: N_{*p} è un endomorfismo: $N_{*p} : T_p S \to T_p S$

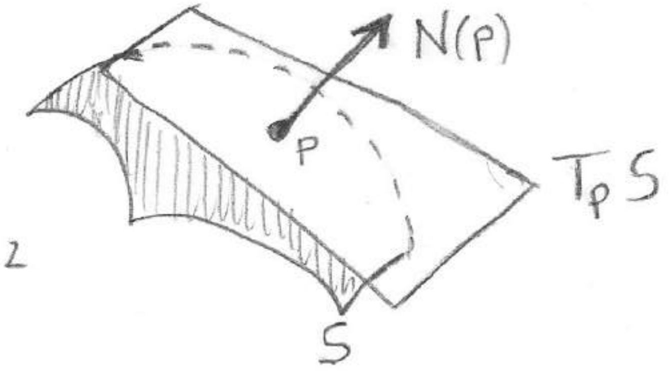
nel senso, in qualunque modo si veda la mappa N_{*p} (vedi (•), (••)), $N_{*p}(T_p S)$ è un sottospazio parallelo a $T_p S$.

DIM

Dimostrazione geometrica (intuitiva)

Abbiamo visto che $N_* : T_p S \longrightarrow T_{N(p)} S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$





Si vede facilmente che $T_{N(p)} S^2$ è parallelo a $T_p S$

DIMOSTRAZIONE ALGEBRICA

Proveremo che l'immagine di N_{*P_0} sta in $T_{P_0}S$

o, equivalentemente, che è ortogonale a $N_{P_0} = N^P(u_0, v_0)$

(in quanto $T_{P_0}S$ è il complemento ortogonale di N_{P_0} e viceversa)

dove $P_0 = P(u_0, v_0)$.

Ricordiamo che $N^P : (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow N^P(u,v) \in \mathbb{R}^3$.

Quindi, proprio come succede per $P : (u,v) \in \Omega \to P(u,v) \in \mathbb{R}^3$,

Se $N^P(u,v) = \left(N_1^P(u,v) , N_2^P(u,v) , N_3^P(u,v) \right)$

allora

$$N_*^P(\partial_u) = N_u^P = \left(\frac{\partial N_1^P}{\partial u} , \frac{\partial N_2^P}{\partial u} , \frac{\partial N_3^P}{\partial u} \right)$$

$$N_*^P(\partial_v) = N_v^P = \left(\frac{\partial N_1^P}{\partial v} , \frac{\partial N_2^P}{\partial v} , \frac{\partial N_3^P}{\partial v} \right)$$

In particolare, per quello visto a pag. 5,

$$N_*^P(\partial_u) = N_u^P = N_*(P_u) \qquad (\star)$$

$$N_*^P(\partial_v) = N_v^P = N_*(P_v)$$

$\underline{N_*(P_u)}$ è ortogonale ad N^P $\left(\begin{array}{l}\text{più precisamente} \\ N_*(P_u(u_0,v_0)) \text{ ortogonale a } N^P(u_0,v_0)\end{array}\right)$

in quanto

$\|N^P(u,v)\| = 1 \quad \forall\, u,v \in \Omega \iff N^P(u,v) \cdot N^P(u,v) = 1 \Rightarrow$

$(N^P \cdot N^P)_u = 0 \xRightarrow{\text{Leibniz}} N_u^P \cdot N^P = 0 \Rightarrow$ $\underline{N_u^P(u_0,v_0)}$ ortogonale a $N^P(u_0,v_0)$

$\overset{(\star)}{\Longrightarrow}$ $N_*(P_u(u_0,v_0))$ ortogonale a N_{P_0}
Un discorso analogo ci porta a dire
$N_*(P_v(u_0,v_0))$ ortogonale a N_{P_0}

$\Big\}$ $N_*(v)$, $\forall\, v \in T_{P_0}S$, è ortogonale a N_{P_0}

PROP: $N_{*p_0} : T_{p_0}S \longrightarrow T_{p_0}S$ è un endomorfismo simmetrico rispetto alla prima forma fondamentale di S.

DIM:

Dobbiamo dimostrare che

$$g_S\left(N_{*p_0}(v), w\right) = g_S\left(v, N_{*p_0}(w)\right) \quad \forall v, w \in T_{p_0}S$$

Cioè, dalla definizione di g_S,

$$\underbrace{N_{*p_0}(v) \cdot w = v \cdot N_{*p_0}(w)}_{\text{Prodotto scalare standard di } \mathbb{R}^3} \quad \forall v, w \in T_{p_0}S$$

Sarà sufficiente mostrare che (dimostrare il perché)

$$N_{*p_0}(P_u) \cdot P_v = P_u \cdot N_{*p_0}(P_v)$$

(cioè dimostrare perché è sufficiente farlo vedere sui vettori di una base)

Abbiamo che

$$N_*(P_u) \cdot P_v \overset{(\star)\ \text{pag.}8}{=} N^P_u \cdot P_v = -N^P \cdot P_{uv}$$

Ricordare che P_u e P_v sono ortogonali a N^P

In quanto $N^P \cdot P_v = 0 \implies (N^P \cdot P_v)_u = 0 \overset{\text{Leibniz}}{\implies}$

$$\implies N^P_u \cdot P_v + N^P \cdot P_{uv} = 0$$

cioè $N^P_u \cdot P_v = -N^P \cdot P_{uv}$

Riscrivo quello che ho ottenuto a pag. 10 :

$$N_*(P_u) \cdot P_v = -N^P \cdot P_{uv} \qquad (\bullet)$$

Facendo lo stesso ragionamento su $N_*(P_v) \cdot P_u$ ottengo

$$N_*(P_v) \cdot P_u = -N^P \cdot P_{vu} \qquad (\bullet\bullet)$$

ma poiché $P_{uv} = P_{vu}$ (regola di Schwarz)

$(\bullet)$ e $(\bullet\bullet)$ sono uguali

$$N_*(P_u) \cdot P_v = N_*(P_v) \cdot P_u = P_u \cdot N_*(P_v)$$

come volevasi dimostrare