2

Funzioni analitiche

2.1 Derivabilità

Iniziamo introducendo il concetto di derivata in un punto di una funzione $w = f(z)$.

Definizione 2.1 *Sia f una funzione definita in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$. Essa si dice* **derivabile in** z_0*, e la sua derivata si indica $f'(z_0)$, se esiste finito il limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \,. \tag{2.1}$$

Altri simboli spesso usati per indicare la derivata in z_0 sono $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$, $\mathrm{D}f(z_0)$.

Posto $\Delta z = z - z_0$, la (2.1) si può riscrivere nella forma

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \,. \tag{2.2}$$

È immediato verificare che se una funzione è derivabile in un punto z_0 allora è ivi anche continua. Infatti

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \Big(f(z) - f(z_0) \Big) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, (z - z_0) \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0 \,, \end{aligned}$$

ovvero $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Esempi 2.2

i) Consideriamo $f(z) = z^2$ e $z_0 \in \mathbb{C}$; usando la (2.2), si ha

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z_0 + \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0\,.$$

Pertanto $f'(z_0) = 2z_0$.

ii) Sia $f(z) = |z|^2$ e $z_0 \in \mathbb{C}$; risulta

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)\overline{(z_0 + \Delta z)} - z_0\overline{z_0}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0\overline{\Delta z} + \overline{z_0}\Delta z + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \left(z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z} \right).\end{aligned}$$

Se $z_0 = 0$, si ha $f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = 0$; mentre se $z_0 \neq 0$, il limite non esiste. Infatti, avvicinandosi a z_0 lungo direzioni differenti si ottengono valori diversi; ad esempio, se $\Delta z \to 0$ lungo l'asse reale, allora $\overline{\Delta z} = \Delta z$ e

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left(z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z} \right) = z_0 + \overline{z_0}\,,$$

mentre se $\Delta z \to 0$ lungo l'asse immaginario, $\overline{\Delta z} = -\Delta z$ e

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left(z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z} \right) = \overline{z_0} - z_0\,.$$

In conclusione, la funzione $f(z) = |z|^2$ è derivabile solo in $z_0 = 0$. □

Definizione 2.3 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto; se una funzione f è derivabile per ogni $z \in \Omega$, si dice che f è* **analitica** *o* **olomorfa** *in Ω.*
Si dice che f è **analitica in un punto** *$z_0 \in \Omega$ se è analitica in tutto un intorno $B_r(z_0)$ di z_0.*
Infine, si dice che f è **intera** *se è analitica per ogni $z \in \mathbb{C}$.*

Per le funzioni prima considerate, possiamo affermare che $f(z) = z^2$ è intera, mentre $f(z) = |z|^2$ non è analitica in alcun punto in quanto la sua derivata esiste solo in $z = 0$.

Talvolta diremo che una funzione è analitica in una regione $\mathcal{R}$ (non necessariamente aperta) intendendo con questo che è analitica su un qualche insieme aperto Ω contenente $\mathcal{R}$.

Si osservi che la definizione di derivata è formalmente identica a quella introdotta per funzioni reali di variabile reale. In effetti, le regole di derivazione e le derivate di funzioni elementari sono formalmente analoghe a quelle delle funzioni di variabile reale. È possibile dimostrare che valgono i seguenti risultati.

Teorema 2.4 *Siano f e g due funzioni derivabili in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Allora sono ivi derivabili le funzioni $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ e, se $g(z_0) \neq 0$, la funzione $\dfrac{f(z)}{g(z)}$. Inoltre si ha*

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(z_0) &= f'(z_0) \pm g'(z_0),\\ (f\,g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.\end{aligned}$$

Teorema 2.5 *Sia $f(z)$ una funzione derivabile in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Sia poi $g(w)$ una funzione derivabile nel punto $w_0 = f(z_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f(z) = g(f(z))$ è derivabile in z_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Infine è possibile verificare, direttamente dalla definizione, che le funzioni elementari introdotte nel capitolo precedente sono derivabili nel loro dominio. In particolare, si ha

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}P_n(z) = \mathrm{D}(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}\,,\\ &\mathrm{D}\,\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z\,,\\ &\mathrm{D}\sin z = \cos z\,, \qquad \mathrm{D}\cos z = -\sin z\,,\\ &\mathrm{D}\sinh z = \cosh z\,, \qquad \mathrm{D}\cosh z = \sinh z\,;\end{aligned}$$

quindi i polinomi, la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche e iperboliche sono funzioni intere. Si può facilmente verificare che ogni funzione razionale è analitica nel suo dominio di definizione.

2.2 Condizioni di Cauchy-Riemann

La derivabilità complessa si può riformulare, come accadeva nel caso reale, come un'approssimazione al primo ordine della funzione. In effetti se $f : D \to \mathbb{C}$ derivabile nel punto $z_0 \in D$ si può scrivere

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

Nel linguaggio dei simboli di Landau (che si possono usare senza problemi anche in ambito complesso), questo si può riscrivere dicendo che, per $z \to z_0$,

$$f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = o(z - z_0)$$

o anche che

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \tag{2.3}$$

La funzione affine $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ gioca il ruolo dell'equazione della retta tangente nel caso di funzioni di variabile reale. D'altra parte se, per $z \to z_0$, vale una relazione del tipo

$$f(z) = f(z_0) + l(z - z_0) + o(z - z_0) \tag{2.4}$$

dove $l \in \mathbb{C}$, allora vale che (farlo per esercizio) f risulta derivabile in z_0 e $l = f'(z_0)$.

L'obbiettivo è ora quello di esprimere la condizione di derivabilità complessa in termini della parte reale ed immaginaria della funzione f. Scriviamo, come al solito, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Poichè'e l'approssimazione al primo ordine per una funzione di due variabili reali è equivalente al concetto di differenziabilià, sarebbe lecito aspettarci che la derivabilità complessa della f corrisponda alla differenziabilità delle funzioni u e v; questo sarebbe in perfetta sintonia con i risultati sui limiti e sulla continuità visti precedentemente. Il seguente risultato ci dice che le cose non sono così semplici e che nella derivabilità complessa intervengono degli aspetti completamente nuovi.

Teorema 2.6 *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) f è derivabile nel punto z_0.
(2) u e v sono differenziabili nel punto (x_0, y_0) e valgono le relazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{2.5}$$

Inoltre vale la relazione:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{2.6}$$

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): Esprimiamo nelle coordinate cartesiane la relazione (2.3) che sappiamo essere equivalente alla derivabilità nel punto z_0. Inoltre ci tornerà utile dare un nome concreto al termine $o(z - z_0)$ che compare nel secondo membro: chiamiamolo $\omega(x, y)$. Sostituendo, otteniamo:

$$\begin{cases} u(x, y) = u(x_0, y_0) + \mathcal{Re}\, f'(z_0)(x - x_0) - \mathcal{Im}\, f'(z_0)(y - y_0) + \mathcal{Re}\ \omega(x, y) \\ v(x, y) = v(x_0, y_0) + \mathcal{Im}\, f'(z_0)(x - x_0) + \mathcal{Re}\, f'(z_0)(y - y_0) + \mathcal{Im}\ \omega(x, y) \end{cases} \tag{2.7}$$

Poichè'e, per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ vale

$$|\omega(x, y)| = o\left(|z - z_0|\right) = o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

e valgono le diseguaglianze $|\mathcal{Re}\ \omega(x, y)| \leq |\omega(x, y)|$ e $|\mathcal{Im}\ \omega(x, y)| \leq |\omega(x, y)|$, si ha anche che

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\, \omega(x,y) &= o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right) \\ \mathcal{I}m\, \omega(x,y) &= o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Le due relazioni (2.7) e la (2.8) asseriscono esattamente che u e v sono differenziabili nel punto (x_0, y_0) e che vale

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \mathcal{R}e\, f'(z_0)\,, & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\mathcal{I}m\, f'(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \mathcal{I}m\, f'(z_0)\,, & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = \mathcal{I}m\, f'(z_0) \end{array}$$

Questo prova (2) incluse le relazioni (2.5) and (2.11).
(2) $\Rightarrow$ (1): Poniamo $l = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$. La differenziabilità di u and v insieme alle relazioni (2.5) permette di scrivere

$$\begin{cases} u(x,y) = u(x_0,y_0) + \mathcal{R}e\, l(x-x_0) - \mathrm{Im} l(y-y_0) + \omega_1(x,y) \\ v(x,y) = v(x_0,y_0) + \mathrm{Im} l(x-x_0) + \mathcal{I}m\, l(y-y_0) + \omega_2(x,y) \end{cases} \tag{2.9}$$

for some $\omega_i(x,y) = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$ for $i = 1, 2$ and $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Le relazioni (2.9) possono essere riassemblate nel formalismo della variabile complessa, ottenendo così

$$f(z) = f(z_0) + l(z-z_0) + \omega(z)$$

dove $\omega(z) = \omega_1(x,y) + i\omega_2(x,y) = o(z-z_0)$ per $z \to z_0$. In virtù della condizione equivalente (2.4), questo dimostra (1). □

Le condizioni (2.5) sono note come condizioni di Cauchy-Riemann (che abbrevieremo come CR). Per avere la derivabilità complessa non è sufficiente avere la differenziabilità delle componenti u e v; sono necessarie le condizioni CR che impongono un accoppiamento non banale tra le due funzioni u e v.

Esempi 2.7

i) Si consideri la funzione $f(z) = z^2$. Sappiamo già che essa è derivabile in ogni punto z_0 del piano complesso, ma cerchiamo di ottenere questo risultato con l'ausilio del Teorema 2.6. In coordinate cartesiane $z = x + iy$, possiamo scrivere, $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$. E' immediato verificare che $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$ sono entrambe ovunque differenziabili (in realtà sono di classe C^∞). Inoltre vale

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0\,, & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y_0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = 2y_0\,, & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = 2x_0 \end{array}$$

Le condizioni CR sono dunque soddisfatte in ogni punto e quindi $f(z) = z^2$ è ovunque derivabile.

ii) Si consideri la funzione $f(z) = \bar{z}$. In coordinate cartesiane $z = x+iy$, possiamo scrivere, $f(z) = x - iy$. Le funzioni $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$ sono come prima entrambe di classe C^∞) e vale

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = 1\,, & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = 0\,, & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = -1 \end{array}$$

Una delle due condizioni CR non è dunque mai soddisfatta in nessun punto del piano complesso. La conclusione è quindi che $f(z) = \bar{z}$ non è derivabile in nessun punto.

iii)Si consideri la funzione $f(z) = |z|^2$. In coordinate cartesiane $z = x + iy$, possiamo scrivere, $f(z) = x^2 + y^2$. Le funzioni $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$ sono come prima entrambe di classe C^∞) e vale

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0\,, & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = 0\,, & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{array}$$

Le condizioni CR sono in questo caso equivalenti a $2x_0 = 0$ e $2y_0 = 0$ e sono entrambe soddisfatte se e soltanto se $x_0 = y_0 = 0$. Dunque la funzione $f(z) = z^2$ è derivabile nel solo punto 0 del piano complesso.

Una proprietà fondamentale della derivabilità complessa, nettamente differente dal caso reale, è il fatto che la funzione derivata acquisisce automaticamente regolarità. Vale infatti il seguente:

Teorema 2.8 *Sia $f : D \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su D. Allora la funzione derivata f' è continua su D.*

Non dimostreremo questo difficile risultato in questa sede rimandando il lettore a [] per una dimostrazione. Vedremo più avanti che partendo da questo risultato potremo addirittura dimostrare che una funzione olomorfa è derivabile un numero infinito di volte. Per il momento ci limitiamo a proporre una versione globale del Teorema 2.6:

Teorema 2.9 *Sia $f : D \to \mathbb{C}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) f è olomorfa su D.
(2) u e v sono di classe C^1 su D e valgono su D le relazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.10}$$

Inoltre vale la relazione:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.11}$$

Dimostrazione. (1) ⇒ (2) segue da (1) ⇒ (2) del Teorema 2.6 e dal Teorema 2.8. (2) ⇒ (1): poichè'e u e v sono C^1 su D, sono ivi ovunque differenziabili. Il risultato segue dunque dall'implicazione (2) ⇒ (1) del Teorema 2.6. □

2.3 Funzioni analitiche e armoniche

Diamo innanzitutto la seguente definizione

Definizione 2.10 *Una funzione reale di due variabili reali $h : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice* **funzione armonica** *in Ω se è di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ e soddisfa in Ω l'equazione differenziale*

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0\,. \tag{2.12}$$

Tale equazione è nota in letteratura come equazione di Laplace e l'operatore

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

è detto operatore di Laplace o laplaciano. Possiamo quindi riscrivere l'equazione (2.12) nella forma

$$\Delta h(x, y) = 0 \qquad \text{per ogni } (x, y) \in \Omega\,.$$

Il legame tra funzioni armoniche e funzioni analitiche è espresso dal seguente risultato.

Teorema 2.11 *Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitica in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Allora le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono armoniche in Ω.*

Dimostrazione. Utilizziamo un risultato che verrà dimostrato nel seguito (si veda il Paragrafo 2.7) il quale garantisce che, se una funzione di variabile complessa f è analitica, allora le funzioni parte reale u e parte immaginaria v sono di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$.
Per dimostrare il teorema è sufficiente dunque verificare che le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ soddisfano l'equazione di Laplace in Ω. In effetti, dalle condizioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, derivando entrambe le equazioni rispetto a x e a y, otteniamo

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yx} = -v_{xx} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} u_{xy} = v_{yy} \\ u_{yy} = -v_{xy} \,. \end{cases}$$

Per il Teorema di Schwartz[1] applicato alle funzioni u e v, si ha

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0\,, \qquad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

e quindi u e v sono armoniche in Ω. □

Se due funzioni u e v sono armoniche in Ω e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann in Ω, si dice che v è una **funzione armonica coniugata di** u. Chiaramente se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è una funzione analitica in Ω, allora $v(x,y)$ è un'armonica coniugata di u. Viceversa, se v è un'armonica coniugata di u in Ω, necessariamente la funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica in Ω (Teorema 2.9).

Si osservi che se v è un'armonica coniugata di u in Ω, non è in generale vero che u è un'armonica coniugata di v. Ad esempio, si consideri

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \text{e} \qquad v(x,y) = 2xy\,.$$

Poiché $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = z^2$ è una funzione intera, v è un'armonica coniugata di u. Ma u non è un'armonica coniugata di v in quanto, scambiando i ruoli di u e v, non valgono le (2.5). Notiamo che se u e v sono una la coniugata dell'altra allora necessariamente sono funzioni costanti. Infatti, se valgono contemporaneamente

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} v_x = u_y \\ v_y = -u_x \,, \end{cases}$$

si ha $u_x = -u_x$ e $u_y = -u_y$, ossia $u_x = u_y = 0$. Quindi $u(x,y)$ è costante; analogamente si ottiene che $v(x,y)$ è costante.

Data una funzione armonica $u(x,y)$ in Ω ci poniamo il problema di trovare una funzione armonica coniugata $v(x,y)$ di u in Ω; ovvero ci chiediamo se sia possibile individuare una funzione analitica la cui parte reale sia assegnata. Vediamo con un esempio come si può procedere.

[1] **Teorema di Schwartz**. Sia $h(x,y)$ di classe $\mathcal{C}^2$ su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$; allora le derivate parziali miste h_{xy} e h_{yx} coincidono.

Sia $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$, con $u_x(x,y) = -6xy$ e $u_y(x,y) = 3y^2 - 3x^2$. Dalla condizione $u_x = v_y$, si dovrà avere $v_y(x,y) = -6xy$; possiamo concludere, integrando rispetto alla variabile y, che

$$v(x,y) = -3xy^2 + \phi(x)$$

dove $\phi(x)$ è una funzione (al momento arbitraria) della variabile x. Poiché $v_x(x,y) = -3y^2 + \phi'(x)$, dalla condizione $u_y = -v_x$, si dovrà avere

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - \phi'(x)\,.$$

Pertanto $\phi'(x) = 3x^2$ e, integrando rispetto a x, si ha $\phi(x) = x^3 + c$, dove c è un'arbitraria costante. In definitiva, $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + c$ è un'armonica coniugata di u e la funzione

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + c) = i(z^3 + c)$$

è analitica in $\mathbb{C}$.

2.4 Richiami su archi e cammini

Ricordiamo alcune nozioni riguardanti archi e cammini che utilizzeremo nel seguito.

Sia I un qualunque intervallo della retta reale e sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una funzione. Indichiamo con $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2$ il punto immagine di $t \in I$ attraverso γ.

> **Definizione 2.12** *Dicesi* **curva** *(nel piano) una funzione continua* $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. *L'immagine* $C = \gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ *viene detta* **sostegno** *della curva.*

Notiamo che una curva è una funzione di variabile reale mentre il sostegno di una curva è un insieme nello spazio. Una curva definisce un modo di parametrizzare il suo sostegno associando ad ogni valore del parametro $t \in I$ uno e un solo punto del sostegno. Tuttavia l'insieme C può essere il sostegno di curve diverse, ovvero può essere parametrizzato in modi diversi.

Ad esempio la curva $\gamma(t) = (t,t)$ con $t \in [0,1]$ ha come sostegno il segmento di estremi $A = (0,0)$ e $B = (1,1)$. Tale segmento è anche il sostegno della curva $\delta(t) = (t^2, t^2)$, $t \in [0,1]$; le curve γ e δ costituiscono due parametrizzazioni del segmento AB. Ad esempio, il punto medio di AB è individuato dal parametro $t = \frac{1}{2}$ nel primo caso e $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nel secondo.

Una curva è dunque una corrispondenza continua $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ dove x e y sono funzioni continue della variabile reale t. Usando l'identificazione $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, scriveremo

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)\,, \qquad t \in I\,,$$

e diremo che $z(t)$ è continua poiché $x(t)$ e $y(t)$ lo sono.

La **curva** γ si dice **semplice** se γ è un'applicazione iniettiva, ossia se valori diversi del parametro individuano punti diversi del sostegno.

Se l'intervallo $I = [a, b]$ è chiuso e limitato, come negli esempi precedenti, la curva γ si chiamerà **arco**. Un **arco** si dice **chiuso** se $\gamma(a) = \gamma(b)$; ovviamente un arco chiuso non è una curva semplice. Tuttavia, si parla di **arco chiuso e semplice** (o **arco di Jordan**) se il punto $\gamma(a) = \gamma(b)$ è l'unico punto del sostegno ad essere immagine di due valori diversi del parametro.

Esempi 2.13

i) La curva
$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (1 + \cos t, 3 + \sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]$$
ovvero
$$z(t) = 1 + \cos t + i(3 + \sin t) = 1 + 3i + \mathrm{e}^{it}\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$
ha come sostegno la circonferenza di centro $1+3i$ e raggio 1; infatti $\big(x(t)-1\big)^2 + \big(y(t)-3\big)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Si tratta di un arco chiuso e semplice e costituisce il modo più naturale per parametrizzare tale circonferenza percorrendola in senso antiorario a partire dal punto $2 + 3i$.
In generale l'arco chiuso e semplice
$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$
ovvero
$$z(t) = x_0 + iy_0 + r\mathrm{e}^{it} = z_0 + r\mathrm{e}^{it}\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$
ha come sostegno la circonferenza centrata in $z_0 = x_0 + iy_0$ di raggio r.
Si osservi che se t varia in un intervallo di tipo $[0, 2k\pi]$, con k intero positivo ≥ 2, l'arco ha ancora come sostegno la circonferenza ma essa viene percorsa k volte; dunque l'arco non è semplice.
Se invece t varia nell'intervallo $[0, \pi]$, la corrispondente curva è un arco (di circonferenza) semplice ma non chiuso.
ii) Similmente, assegnati $a, b > 0$, l'arco chiuso e semplice
$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (a\cos t, b\sin t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$
ovvero
$$z(t) = a\cos t + ib\sin t\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$
parametrizza l'ellisse centrato nell'origine e con semiassi a e b.
iii) La curva
$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t\cos t, t\sin t)\,, \qquad t \in [0, +\infty]\,,$$
ovvero
$$z(t) = t\cos t + it\sin t = t\mathrm{e}^{it}\,, \qquad t \in [0, +\infty]\,,$$
ha come sostegno la spirale rappresentata in Figura 2.1, che viene percorsa in senso antiorario a partire dall'origine. Infatti il punto $z(t)$ ha distanza dall'origine uguale a $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = t$ che cresce al crescere di t. La curva è semplice.
iv) Siano $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ punti distinti del piano. La curva semplice
$$\gamma(t) = P + (Q - P)t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$
ha come sostegno la retta passante per P e Q. Infatti $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$ e il vettore $\gamma(t) - P$ ha direzione costante essendo parallelo a $Q - P$.
Una più generale parametrizzazione della stessa retta è data da
$$\gamma(t) = P + (Q - P)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{2.13}$$
con $t_0 \neq t_1$; in tal caso si ha $\gamma(t_0) = P$, $\gamma(t_1) = Q$.

Diremo che una **curva** $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ è **derivabile** se le sue componenti $x, y : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili su I (ricordiamo che una funzione è derivabile su un intervallo I se è derivabile in tutti i punti interni ad I ed è derivabile unilateralmente negli eventuali estremi appartenenti ad I). Indichiamo con γ' :

$I \to \mathbb{R}^2$ la funzione derivata $\gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$ e scriveremo anche $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Definizione 2.14 *Una* **curva** $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *dicesi* **regolare** *se è derivabile su* I *con derivata continua (cioè se le componenti sono funzioni di classe* $\mathcal{C}^1$ *su* I*) e se* $\gamma'(t) \neq (0,0)$*, per ogni* $t \in I$*. Una* **curva** $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *dicesi* **regolare a tratti** *se* I *è unione di un numero finito di intervalli su cui* γ *è regolare. Un* **cammino** *è un arco regolare a tratti.*

Dall'identità $|z'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$, possiamo esprimere la lunghezza di un arco regolare attraverso la formula

$$L = \int_a^b |z'(t)|\, dt\,.$$

La lunghezza non dipende dalla parametrizzazione scelta (si veda l'Esercizio 11).

Esempi 2.15

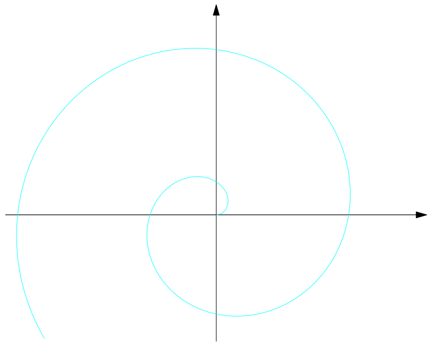

Figura 2.1. Rappresentazione della spirale definita nell'Esempio 2.13 iii)

i) È facile verificare che tutte le curve considerate negli Esempi 2.13 sono regolari.
ii) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con continuità sull'intervallo I; la curva

$$\gamma(t) = \big(t, f(t)\big)\,, \qquad t \in I\,,$$

ovvero $z(t) = t + if(t)\,,\ t \in I$, è una curva regolare avente come sostegno il grafico della funzione f. Si osservi infatti che

$$\gamma'(t) = \big(1, f'(t)\big) \neq (0,0)\,, \qquad \text{per ogni } t \in I\,.$$

iii) L'arco $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,1)\,, & t \in [0,1)\,, \\ (t,t)\,, & t \in [1,2]\,, \end{cases}$$

ovvero

$$z(t) = \begin{cases} t + i\,, & t \in [0,1)\,, \\ (1+i)t\,, & t \in [1,2]\,, \end{cases}$$

è una parametrizzazione della poligonale ABC (si veda la Figura 2.2, a sinistra); invece l'arco

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,1)\,, & t \in [0,1)\,, \\ (t,t)\,, & t \in [1,2)\,, \\ \big(t, 2 - \frac{1}{2}(t-2)\big)\,, & t \in [2,4] \end{cases}$$

ovvero

$$z(t) = \begin{cases} t + i\,, & t \in [0,1)\,, \\ (1+i)t\,, & t \in [1,2]\,, \\ t + (3 - \frac{1}{2}t)i\,, & t \in [2,4]\,, \end{cases}$$

è una parametrizzazione della poligonale $ABCA$ (si veda la Figura 2.2, a destra). Entrambe le curve sono regolari a tratti, in particolare l'ultima poligonale è un cammino chiuso e semplice.

Enunciamo ora un risultato intuitivamente vero, detto Teorema di Jordan, la cui dimostrazione è tutt'altro che immediata.

Teorema 2.16 *Associati ad ogni arco o cammino C di Jordan vi sono due domini ognuno dei quali ha la frontiera coincidente con il sostegno di C. Uno di questi domini, detto l'***interno** *di C, è limitato; l'altro, l'***esterno** *di C, è non limitato.*

2.5 Integrali di linea

In questo paragrafo si vuole definire l'integrale di una funzione di variabile complessa lungo un cammino.

Iniziamo considerando una funzione f a valori complessi ma dipendente dalla variabile reale t che varia su un intervallo $[a, b]$. Possiamo scrivere

$$f(t) = u(t) + iv(t)\,, \qquad a \le t \le b$$

con u e v funzioni reali che supponiamo continue a tratti in $[a, b]$. Definiamo l'integrale di f su $[a, b]$ come

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt\,. \tag{2.14}$$

Non è difficile verificare che

$$\mathcal{R}e \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathcal{R}e\, f(t)\,dt\,, \qquad \mathcal{I}m \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathcal{I}m\, f(t)\,dt\,,$$
$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt\,, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Estendiamo ora la nozione all'integrazione di una funzione di variabile complessa lungo un cammino. Sia dunque $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ continua (o eventualmente continua a tratti) su C, cammino individuato dalla parametrizzazione $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$. Questo equivale a richiedere la continuità (o la continuità a tratti) delle funzioni $u(x(t), y(t))$ e $v(x(t), y(t))$ definite in $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$.

Definizione 2.17 *Si definisce* **integrale di linea** *di f lungo C la quantità*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt\,. \tag{2.15}$$

Poiché

$$\begin{aligned} f(z(t))z'(t) &= \big(u(x(t), y(t)) + iu(x(t), y(t))\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big) \\ &= u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) + \\ &\qquad + i\big(v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\big)\,, \end{aligned}$$

l'integrale è ben definito grazie alle ipotesi richieste sulla funzione f e sulla regolarità (almeno a tratti) di $x'(t)$ e $y'(t)$ (si ricordi che C è un cammino). Possiamo riscrivere la (2.15) come

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \big(u\,dx - v\,dy\big) + i\int_C \big(v\,dx + u\,dy\big)\,, \tag{2.16}$$

espressione che può anche essere formalmente dedotta dalla (2.15) sostituendo f con $u + iv$ e dz con $dx + idy$.

Associato al cammino C vi è il cammino indicato con $-C$ che coincide con C come insieme di punti ma è percorso in senso inverso. Se $\alpha = z(a)$ e $\beta = z(b)$, il cammino $-C$ unisce il punto β con α ed è descritto dalla parametrizzazione $z = z(-t)$ dove $-b \le t \le -a$.

Proposizione 2.18 *Sia C un cammino e siano f e g due funzioni continue a tratti su C. Allora*

a) per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$\int_C \big(\lambda f(z) + \mu g(z)\big)\,dz = \lambda\int_C f(z)\,dz + \mu\int_C g(z)\,dz\,;$$

b)
$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz\,;$$

c) sia $M \ge 0$ tale che $|f(z)| \le M$ su C e sia L la lunghezza di C; si ha

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML\,; \tag{2.17}$$

d) se C è l'unione di due cammini C_1, da α_1 a β_1, e C_2, da $\alpha_2 = \beta_1$ a β_2, risulta

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz\,.$$

Esempi 2.19

i) Calcoliamo $\int_C \bar{z}\,dz$, dove C è descritto dall'equazione $z = z(t) = 2t + it$, $0 \le t \le 2$. Poiché $z'(t) = 2 + i$, dalla (2.15), si ha

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_0^2 (2t - it)(2+i)\,dt = (2-i)(2+i)\int_0^2 t\,dt = 10\,.$$

ii) Calcoliamo $\int_C \bar{z}\,dz$, dove C è l'unione dei cammini C_1 e C_2 descritti rispettivamente dalle equazioni $z_1(t) = t$, $t \in [0,4]$, e $z_2(t) = 4 + it$, $t \in [0,2]$. Poiché $z_1'(t) = 1$ e $z_2'(t) = i$,

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_{C_1} \bar{z}\,dz + \int_{C_2} \bar{z}\,dz = \int_0^4 t\,dt + \int_0^2 (4 - it)i\,dt = 10 + 8i\,.$$

iii) Calcoliamo $\int_C \mathrm{e}^z\,dz$, dove C è il cammino descritto in a). Poiché $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y)$, si ha

$$\int_C \mathrm{e}^z\,dz = \int_0^2 \mathrm{e}^{2t}\big(\cos t + i\sin t\big)(2+i)\,dt = \ldots = \mathrm{e}^{4+2i} - 1\,.$$

iv) Calcoliamo $\int_C \mathrm{e}^z\,dz$, dove C è il cammino descritto in b). Risulta

$$\int_C \mathrm{e}^z\,dz = \int_0^4 \mathrm{e}^t\,dt + \int_0^2 \mathrm{e}^4\big(\cos t + i\sin t\big)i\,dt = \ldots = \mathrm{e}^{4+2i} - 1\,.$$

Si osservi come gli integrali della funzione $f(z) = \bar{z}$ lungo due cammini, entrambi aventi come estremi i punti 0 e $4 + 2i$, abbiano valori differenti, mentre per la funzione $f(z) = \mathrm{e}^z$ essi assumano lo stesso valore. □

Esempio 2.20

Calcoliamo $\int_C z^n\,dz$ dove $n \in \mathbb{Z}$ e C è il cammino percorso in senso antiorario, il cui sostegno è la circonferenza $\{|z| = 1\}$. Usiamo la parametrizzazione (??) $z = z(t) = \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; allora $z'(t) = i\mathrm{e}^{it}$ e dunque

$$\int_C z^n\,dz = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{int} i\,\mathrm{e}^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n+1)t}\,dt$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\mathrm{e}^{i(n+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0 & n \ne -1, \\ 2\pi i & n = -1\,. \end{cases}$$

Un analogo risultato vale se C è il cammino, percorso in senso antiorario, il cui sostegno è la circonferenza centrata in $z_0 \in \mathbb{C}$ e avente raggio $r > 0$. Precisamente si ha

$$\int_C \big(z - z_0\big)^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \ne -1, \\ 2\pi i & n = -1\,. \end{cases} \tag{2.18}$$

2.6 Teorema di Cauchy-Goursat

Il teorema che ora enunciamo vale per funzioni analitiche ed è stato dimostrato da Cauchy con l'ipotesi aggiuntiva di continuità della derivata e, in un secondo tempo, da Goursat nella sua forma più generale. Forniremo l'enunciato generale e la dimostrazione solo nel caso esaminato da Cauchy. Per questo richiamiamo dapprima la definizione di regione e dominio semplicemente connesso e il Teorema di Green per funzioni di due variabili reali.

Definizione 2.21 *Un* **dominio (regione) semplicemente connesso** D *è un dominio (regione) tale che l'interno di ogni cammino di Jordan è interamente contenuto in* D*.*

Intuitivamente, un dominio semplicemente connesso è un insieme senza buchi. Sono, ad esempio, semplicemente connessi gli intorni e i poligoni, mentre non lo è una corona circolare.

Teorema 2.22 **(di Green)** *Siano* $u, v : \varOmega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *di classe* $\mathcal{C}^1$ *sull'aperto* $\varOmega$*. Sia* A *un aperto limitato contenuto in* $\varOmega$ *con la sua frontiera; supponiamo che la frontiera di* A *sia il sostegno di un cammino semplice e chiuso* C *percorso in senso antiorario. Vale allora la seguente identità*

$$\int_C \big(u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy\big) = \int_A \big(v_x(x,y) - u_y(x,y)\big)\,dxdy\,.$$

Teorema 2.23 **(di Cauchy-Goursat)** *Sia* f *una funzione analitica nell'aperto* $\varOmega \subseteq \mathbb{C}$ *e sia* D *un dominio semplicemente connesso contenuto in* $\varOmega$*. Allora per ogni cammino semplice e chiuso* C *con sostegno contenuto in* D *si ha*

$$\int_C f(z)\,dz = 0\,.$$

Dimostrazione. Presentiamo la dimostrazione con l'ipotesi che la derivata $f'(z)$ non solo esista ma sia anche continua. In questo caso le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ soddisfano le ipotesi del Teorema di Green (2.22) e quindi, indicato con $\operatorname{int} C$ l'interno del cammino C, e ricordando la (2.16), risulta

$$\mathcal{R}e \int_C f(z)\,dz = \int_C \big(u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\big) = -\int_{\operatorname{int} C} \big(v_x(x,y) + u_y(x,y)\big)\,dxdy\,,$$
$$\mathcal{I}m \int_C f(z)\,dz = \int_C \big(v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\big) = \int_{\operatorname{int} C} \big(u_x(x,y) - v_y(x,y)\big)\,dxdy\,.$$

Poiché f è analitica, le funzioni u e v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann (2.5) su $\operatorname{int} C$ e dunque si ha

$$\int_{\operatorname{int} C} \big(v_x(x,y)+u_y(x,y)\big)\, dxdy = \int_{\operatorname{int} C} \big(u_x(x,y)-v_y(x,y)\big)\, dxdy = 0$$

ossia

$$\int_C f(z)\, dz = 0\,. \qquad \square$$

Osserviamo che il cammino considerato può essere sostituito da un cammino chiuso non necessariamente semplice. Infatti, se C interseca sé stesso solo un numero finito di volte, allora è formato da un numero finito di cammini semplici e chiusi. È dunque possibile applicare il teorema ad ognuno di essi e ottenere il risultato per il cammino C.

Il teorema può essere esteso a domini non semplicemente connessi. Iniziamo con l'introdurre la nozione di dominio con bordo.

Definizione 2.24 *Chiameremo* **dominio con bordo** *un dominio Ω la cui frontiera $\partial\Omega$ è l'unione di un numero finito di sostegni, a due a due disgiunti, di cammini chiusi e semplici, $C_1, C_2, \ldots, C_n$.*

Ciascuno di questi cammini è orientato in modo tale che un osservatore ideale che percorre la frontiera vede Ω alla sua sinistra. Chiameremo tale orientamento **orientamento positivo**.

Esempio 2.25 Ogni anello $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ è un dominio con bordo la cui frontiera è l'unione dei sostegni $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r_1\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r_2\}$ relativi ai cammini $-C_1$ e C_2 dove C_1 e C_2 ammettono parametrizzazioni $z_1(t) = z_0 + r_1 e^{it}$ e $z_2(t) = z_0 + r_2 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Si noti che la circonferenza esterna è percorsa in senso antiorario, mentre la circonferenza interna in senso orario (si veda la Figura 2.3). $\square$

Teorema 2.26 *Sia Ω un dominio con bordo e sia C l'unione dei cammini i cui sostegni coincidono con la frontiera di Ω orientata positivamente. Sia f analitica nella regione R individuata dall'unione di Ω con la sua frontiera; allora*

$$\int_C f(z)\, dz = 0\,.$$

Dimostrazione. Indichiamo con C_0 il cammino esterno e $C_1, \ldots, C_n$ quelli contenuti nell'interno di C_0 (si veda la Figura 2.4). Consideriamo un cammino che decomponga Ω in due parti Ω_1 e Ω_2 per mezzo di cammini $L_1, \ldots, L_{n+1}$ congiungenti rispettivamente C_0 a C_1, C_1

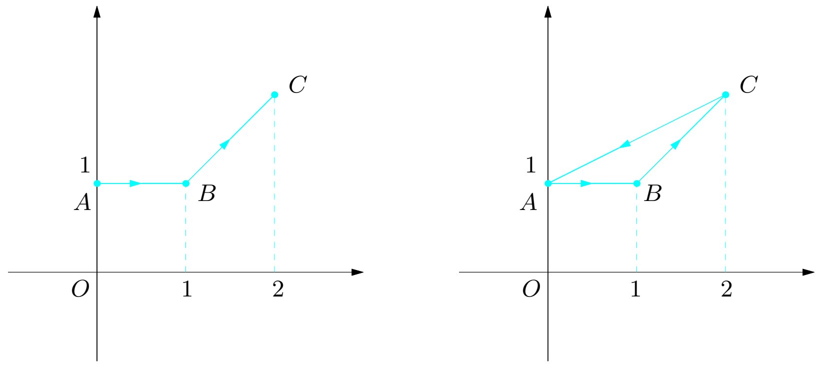

Figura 2.2. Poligonale ABC, a sinistra e $ABCA$, a destra, definite nell'Esempio 2.15 iii)

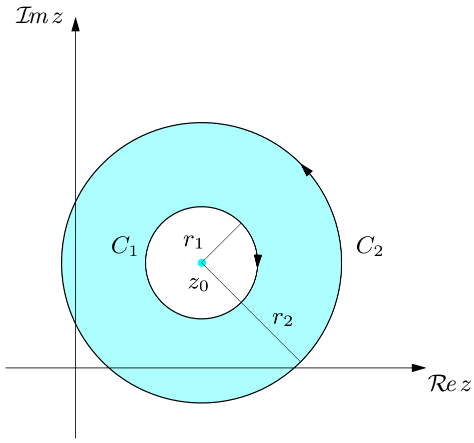

Figura 2.3. Anello $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$

a $C_2, \ldots, C_{n-1}$ a C_n e C_n a C_0 (aventi sostegno in Ω). Indichiamo con K_j il cammino il cui sostegno coincide con la frontiera di Ω_j, $j = 1, 2$. K_1 e K_2 consistono di cammini L_j o $-L_j$ e di parti di C. Il Teorema di Cauchy-Goursat 2.23 può essere applicato a f su K_1 e K_2 e la somma degli integrali su questi cammini è nulla. Poiché gli integrali in direzioni opposte lungo L_j si elidono, risulta

$$0 = \int_{K_1} f(z)\, dz + \int_{K_2} f(z)\, dz = \int_C f(z)\, dz\,. \qquad \square$$

Osservazione 2.27 *Se f è analitica in Ω, dominio semplicemente connesso, allora, per ogni $z_1, z_2 \in \Omega$, risulta ben definito* $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$*. Esso è quell'unico numero*

Figura 2.4. ?????????????????

corrispondente al valore dell'integrale di f lungo un qualsiasi cammino, con sostegno in Ω, congiungente z_1 a z_2. Infatti, se C_1 e C_2 sono due cammini congiungenti z_1 a z_2, l'integrale di f lungo il cammino chiuso ottenuto unendo C_1 a $-C_2$ è nullo; dunque

$$0 = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz$$

e quindi

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz\,. \qquad \square$$

Osservazione 2.28 *Supponiamo che Ω sia un dominio con bordo la cui frontiera sia l'unione di due sostegni di cammini chiusi C_1 e C_2 (si veda la Figura 2.5). Sia f analitica su $\Omega \cup \partial\Omega$, allora*

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

dove i cammini C_1 e C_2 sono percorsi in senso antiorario. $\square$

È possibile dimostrare un risultato che può considerarsi il viceversa del Teorema di Cauchy-Goursat. Vale infatti il seguente teorema dovuto a Morera.

Teorema 2.29 (di Morera) *Se f è una funzione continua in un dominio semplicemente connesso D e se, per ogni cammino semplice e chiuso C il cui sostegno sia contenuto in D, risulta*

$$\int_C f(z)\,dz = 0\,,$$

allora f è analitica in D.

Figura 2.5. ?????????????????

2.7 Formula integrale di Cauchy

Stabiliamo ora il seguente fondamentale risultato.

Teorema 2.30 (**formula integrale di Cauchy**) *Sia f analitica in una regione $R = \Omega \cup \partial\Omega$, con Ω dominio e $\partial\Omega$ sostegno di un cammino chiuso e semplice C percorso in verso antiorario. Se $z_0 \in \Omega$, allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,. \tag{2.19}$$

Dimostrazione. Poiché Ω è aperto, esiste $r_0 > 0$ tale che $B_{r_0}(z_0) \subset \Omega$. Indichiamo con C_0 il cammino chiuso e semplice percorso in verso antiorario il cui sostegno è la circonferenza $\{|z - z_0| = r_0\}$ (si veda la Figura **??**). Consideriamo la funzione $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$; essa è analitica in $\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big) \cup \partial\Omega$ e dunque, per l'Osservazione 2.28, risulta

$$\int_C g(z)\, dz = \int_{C_0} g(z)\, dz = f(z_0) \int_{C_0} \frac{1}{z - z_0}\, dz + \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\,.$$

Ricordando la (2.18), si ha

$$\int_C g(z)\, dz = 2\pi i f(z_0) + \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\,.$$

Verifichiamo ora che l'ultimo integrale è nullo, ottenendo così la (2.19). Poiché f è continua, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $z \in \Omega$ con $|z - z_0| < \delta$ si ha $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Non è restrittivo supporre che $r_0 \le \delta$. Pertanto, grazie alla (2.17), si ha

$$\left|\int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le \sup_{z\in C_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \cdot 2\pi r_0$$
$$= 2\pi \sup_{z\in C_0} |f(z)-f(z_0)| < 2\pi\varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, otteniamo l'asserto. □

Esempio 2.31 Si voglia calcolare

$$\int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\,dz$$

dove C è il cammino (verso antiorario) il cui sostegno coincide con la circonferenza $\{|z|=2\}$.

La funzione $f(z) = \dfrac{z}{9-z^2}$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$ tranne nei punti $z = \pm 3$ e quindi, in particolare, sull'insieme $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ unito alla frontiera $\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$. Possiamo pertanto applicare la formula integrale di Cauchy (2.19) con $z_0 = -i$ e ottenere

$$f(-i) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z+i}\,dz = -\frac{i}{10}\,.$$

In definitiva

$$\int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z+i}\,dz = \frac{\pi}{5}\,.$$ □

Usando il Teorema 2.30, possiamo dimostrare che se una funzione è analitica in un punto z_0 allora esistono (in z_0) le derivate di ogni ordine, ovvero le derivate successive sono anch'esse funzioni analitiche in z_0. Precisamente vale il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 2.32 *Sia f analitica in z_0, allora le sue derivate di ogni ordine esistono in z_0. Inoltre, per ogni intero $n \ge 1$ e per ogni cammino C semplice e chiuso (verso antiorario) il cui sostegno sia contenuto nell'intorno di z_0 in cui f è derivabile, si ha*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,. \tag{2.20}$$

Esempio 2.33 Sia $f(z) = 1$, allora $f^{(n)}(z) = 0$, per ogni $n \ge 1$. Dunque, applicando la (2.20) a f per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, ritroviamo la (2.18):

$$\int_{C_0} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 0\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

dove C_0 è, ad esempio, il sostegno di una circonferenza di raggio $r_0 > 0$ e centro z_0. □

Osservazione 2.34 *Ricordando il Teorema 2.26, è immediato verificare che le formule* (2.19) *e* (2.20) *possono essere estese al caso in cui il cammino chiuso e semplice C è sostituito dalla frontiera orientata di un dominio con bordo.*

2.8 Risultati globali

Diamo ora una serie di risultati che si riferiscono al comportamento di una funzione in una regione (o anche in tutto il piano complesso).

Mostriamo innanzitutto che il valore di una funzione al centro di un cerchio sul quale essa è analitica dipende soltanto dai valori della funzione sulla frontiera di tale cerchio. Precisamente, si ha

Teorema 2.35 (**Proprietà della media**) *Sia f analitica su un insieme semplicemente connesso D unito alla sua frontiera. Sia $z_0 \in D$ e $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subset D$. Allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt\,.$$

Dimostrazione. Sia C il cammino semplice e chiuso percorso in senso antiorario descritto dalla parametrizzazione $z = z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Allora, applicando la (2.19), si ottiene

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}\, rie^{it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt\,. \end{aligned}$$

□

Enunciamo ora il cosidetto principio del massimo che si può dedurre dalla proprietà della media.

Teorema 2.36 (**Principio del massimo**) *Sia f analitica e non costante in un dominio Ω, sia inoltre continua in $\Omega \cup \partial\Omega$. Allora $|f(z)|$ raggiunge il suo valore massimo sulla frontiera $\partial\Omega$.* □

Analoghe proprietà si possono dedurre per le funzioni armoniche $u(x, y) = \mathcal{R}e\, f(z)$ e $v(x, y) = \mathcal{I}m\, f(z)$.

Teorema 2.37 **(di Liouville)** *Sia f intera e limitata per ogni $z \in \mathbb{C}$, allora $f(z)$ è costante.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $r_0 > 0$ e C_0 il cammino parametrizzato da $z = z(t) = z_0 + r_0 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Per ipotesi, esiste $M > 0$ tale che $|f(z)| \leq M$ per ogni z. Dalla formula (2.20) con $n = 1$, usando la (2.17), si ha

$$
\begin{aligned}
|f'(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in C_0} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right| \cdot 2\pi r_0 \\
&= \frac{1}{r_0} \sup_{z \in C_0} |f(z)| \leq \frac{M}{r_0} .
\end{aligned}
$$

Poiché r_0 è arbitrario e $f'(z_0)$ è un numero fissato, la disuguaglianza $|f'(z_0)| \leq \dfrac{M}{r_0}$ può valere solo se $f'(z_0) = 0$. Quindi $f'(z) = 0$, per ogni $z \in \mathbb{C}$ e dunque $f(z)$ è costante. $\square$

Un'interessante conseguenza del Teorema di Liouville è il Teorema fondamentale dell'algebra. Esso afferma che ogni polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, ha almeno uno zero; ossia esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$. In effetti, procedendo per assurdo, se $P(z)$ fosse non nullo per ogni $z \in \mathbb{C}$ allora la funzione $f(z) = 1/P(z)$ sarebbe intera e limitata in $\mathbb{C}$. Si giunge così ad un assurdo in quanto, per il Teorema di Liouville, ne segue che $f(z)$ è costante e conseguentemente anche il polinomio $P(z)$ lo è.

2.9 Esercizi

1. *Dire se le seguenti funzioni soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann nel loro dominio:*

   a) $f(z) = |z|$ $\boxed{\text{b)}}$ $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $\boxed{\text{c)}}$ $f(z) = z^n , \quad n = 1, 2, \ldots$

2. *Dire dove esiste la derivata delle seguenti funzioni e trovarne il valore:*

   a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $\boxed{\text{b)}}$ $f(z) = x^2 + iy^2$ $\boxed{\text{c)}}$ $f(z) = z \, \mathcal{I}m \, z$

$\boxed{4.}$ Sia $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$; allora $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 3x^2$. Perché $f'(z) = 3x^2$ solo nel punto $z = i$?

5. *Dire se le seguenti funzioni sono analitiche nel loro dominio:*

a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ b) $f(z) = xy + iy$

c) $f(z) = e^{-y}e^{ix}$ d) $f(z) = e^{y}e^{ix}$

e) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ f) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

6. Verificare che la funzione $f(z) = \operatorname{Log} r + i\theta$ definita in $\Omega = \{z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ è analitica in Ω e $f'(z) = \frac{1}{z}$.

7. *Verificare che le seguenti funzioni $u(x, y)$ sono armoniche nel loro dominio e trovare la corrispondente funzione armonica coniugata $v(x, y)$:*

a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$ b) $u(x, y) = y^2 - x^2$

c) $u(x, y) = \sinh x \sin y$ $\boxed{\text{d)}}$ $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

8. *Sia f analitica in Ω; verificare che f è necessariamente costante se:*

$\boxed{\text{a)}}$ la funzione $\overline{f(z)}$ è anch'essa analitica in Ω;

b) $\mathcal{I}m\, f(z) = 0$ in Ω.

$\boxed{11.}$ Sia $z = z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a, b]$, un arco regolare. Verificare che se $t = \phi(r),\ c \le r \le d$, con $\phi : [c, d] \to [a, b]$, $\phi \in \mathcal{C}^1([c, d])$ e $\phi'(r) > 0$, allora

$$L = \int_a^b |z'(t)|\, dt = \int_c^d |Z'(r)|\, dr$$

dove $Z(r) = z(\phi(r))$.

12. Calcolare, direttamente dalla definizione (2.15), l'integrale di linea delle seguenti funzioni lungo il cammino indicato:

a) $f(z) = z^2$ C=segmento che unisce l'origine a $2 + i$;

$\boxed{\text{b)}}$ $f(z) = \bar{z}$ C=circonferenza unitaria centrata nell'origine;

$\boxed{\text{c)}}$ $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ C=semicirconferenza superiore con $r = 2$ e centro 0;

d) $f(z) = e^{z}$ C=segmento che unisce πi a 1;

e) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2+i)^2}$ C=circonferenza con $r = 4$ e centro $-2 - i$.

13. Sia C il cammino percorso in verso antiorario il cui sostegno è la frontiera del quadrato con vertici nei punti $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$, $z = i$. Calcolare

$$\int_C e^{\pi \bar{z}}\, dz\,.$$

$\boxed{14.}$ Verificare che, se C è la frontiera di un triangolo con vertici nei punti $z = 0$, $z = 3i$, $z = -4$ orientato in verso antiorario, allora

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z})\, dz \right| \leq 60\,.$$

$\boxed{15.}$ Sia C la frontiera della circonferenza $\{|z| = R\}$ percorsa in senso antiorario. Verificare che

$$\lim_{R \to +\infty} \int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\, dz = 0\,.$$

16. Calcolare i seguenti integrali di linea lungo i cammini C indicati (percorsi in senso antiorario, se chiusi):

a) $\displaystyle\int_C z e^{-z}\, dz$ sostegno $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;

b) $\displaystyle\int_C e^{\pi z}\, dz$ sostegno C= segmento da i a $i/2$;

c) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)}\, dz$ sostegno $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$;

$\boxed{\text{d)}}$ $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2}\, dz$ sostegno $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$;

$\boxed{\text{e)}}$ $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\, dz$ sostegno C= frontiera del quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$;

f) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4 - 1}\, dz$ sostegno $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 1\}$;

g) $\displaystyle\int_C \frac{e^z (z^2 - 3)}{2z^2 + 3}\, dz$ sostegno $C = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + \frac{2}{3}\big(y - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\big)^2 = 1\}$.

2.9.1 Soluzioni

1. *Condizioni di Cauchy-Riemann:*

a) No

b) Poiché, per $z \neq 0$,

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

si ha

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2}\,, & u_x(x,y) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,, & u_y(x,y) &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \\ v(x,y) &= -\frac{y}{x^2+y^2}\,, & v_x(x,y) &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, & v_y(x,y) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Pertanto le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte per ogni $z \neq 0$.

c) È possibile procedere come nell'esercizio precedente, esplicitando le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$. In alternativa, osserviamo che la funzione $f(z) = z$ è intera e, per il Teorema 2.4, anche $f(z) = z \cdot z \cdots z = z^n$ lo è. Dunque soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann.

2. *Derivate:*

a) $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}\,,\ z \neq 0$.

b) Risulta

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2\,, & u_x(x,y) &= 2x\,, & u_y(x,y) &= 0\,, \\ v(x,y) &= y^2\,, & v_x(x,y) &= 0\,, & v_y(x,y) &= 2y\,; \end{aligned}$$

le condizioni (2.5) sono verificate se $x = y$ e dunque per ogni $z = x+ix\,,\ x \in \mathbb{R}$. In tali punti si ha

$$f'(x+ix) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 2x\,.$$

c) Poiché $f(z) = (x+iy)y = xy + iy^2$, si ha

$$\begin{aligned} u(x,y) &= xy\,, & u_x(x,y) &= y\,, & u_y(x,y) &= x\,, \\ v(x,y) &= y^2\,, & v_x(x,y) &= 0\,, & v_y(x,y) &= 2y\,; \end{aligned}$$

e dunque le (2.5) sono verificate solo in $z = 0$ dove risulta

$$f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0\,.$$

4. Poiché

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^3\,, & u_x(x,y) &= 3x^2\,, & u_y(x,y) &= 0\,, \\ v(x,y) &= -(y-1)^3\,, & v_x(x,y) &= 0\,, & v_y(x,y) &= -3(y-1)^2\,, \end{aligned}$$

la condizione $u_x = v_y$ è verificata solo se $x^2 + (y-1)^2 = 0$, ossia se $x = 0$ e $y = 1$. Dunque le (2.5) sono verificate solo in $z = i$ e la funzione f è derivabile solo in $z = i$ dove vale $f'(i) = 0$.

5. *Funzioni analitiche:*

a) Si con $f(z) = (3-i)z$; b) No ; c) Si con $f(z) = e^{iz}$.
d) No ; e) Si in $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}$; f) Si in $\mathbb{C} \setminus \{2, -1 \pm i\}$.

7. *Funzioni armoniche:*

a) $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y + c$; b) $v(x,y) = -2xy + c$.
c) $v(x,y) = -\cosh x \cos y + c$.
d) Poiché

$$u_x(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \qquad u_{xx}(x,y) = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$
$$u_y(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \qquad u_{yy}(x,y) = -\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

la funzione $u(x,y)$ è armonica. Per determinare $v(x,y)$, imponiamo l'uguaglianza $u_x = v_y$, da cui

$$v_y(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \phi(x)\,.$$

Cosí

$$v_x(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \phi'(x)\,;$$

dall'uguaglianza $v_x = -u_y$, si ottiene $\phi'(x) = 0$, ossia $\phi(x) = c$. In definitiva, un'armonica coniugata di $u(x,y)$ è $v(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + c$.

8. *Funzioni analitiche:*

a) Poiché le funzioni $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e $g(z) = \overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ sono analitiche in Ω, dovranno valere per entrambe le condizioni di Cauchy-Riemann; dunque

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} u_x(x,y) = -v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = v_x(x,y)\,. \end{cases}$$

Allora $u_x = -u_x$ e $u_y = -u_y$, ossia $u_x = u_y = 0$ in Ω e quindi $u(x,y)$ è costante in Ω. Analogamente, $v_x = v_y = 0$ e anche la funzione $v(x,y)$ è costante in Ω.

11. Poiché $Z(r) = z\big(\phi(r)\big)$, si ha

$$Z'(r) = z'\big(\phi(r)\big)\phi'(r) \qquad \text{e} \qquad |Z'(r)| = |z'\big(\phi(r)\big)|\phi'(r)$$

in quanto $\phi'(r) > 0$. Pertanto, con la sostituzione $t = \phi(r)$ da cui $dt = \phi'(r)\,dr$, si ottiene

$$\int_c^d |Z'(r)|\,dr = \int_c^d |z'\big(\phi(r)\big)|\phi'(r)\,dr = \int_a^b |z'(t)|\,dt\,.$$

12. *Integrali di linea:*

a) $\frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$.
b) Parametrizziamo la circonferenza unitaria con $z = \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, da cui $dz = i\mathrm{e}^{it}\, dt$ e dunque

$$\int_C \overline{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-it} i\, \mathrm{e}^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i\,.$$

c) La semicirconferenza può essere descritta dall'equazione $z = 2\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Così $z'(t) = 2i\mathrm{e}^{it}$ e

$$\int_C \frac{z+2}{z}\, dz = \int_0^{\pi} \frac{2\mathrm{e}^{it}+2}{2\mathrm{e}^{it}} 2i\mathrm{e}^{it}\, dt = 2i \int_0^{\pi} (1 + \mathrm{e}^{it})\, dt = 2\pi i + 4\,.$$

d) $1 + \mathrm{e}$; e) 0 .

13. $\frac{4}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi} - 1)$.

14. Utilizziamo la (2.17), ottenendo

$$\left| \int_C (\mathrm{e}^z - \overline{z})\, dz \right| \le ML$$

con $|\mathrm{e}^z - \overline{z}| \le M$ per $z \in C$ e L è la lunghezza di C. Non è difficile verificare che $L = 12$, in quanto i lati del triangolo hanno lunghezza rispettivamente 3, 5 e 4. Per determinare una costante M soddisfacente la relazione $|\mathrm{e}^z - \overline{z}| \le M$, osserviamo che

$$|\mathrm{e}^z - \overline{z}| \le |\mathrm{e}^z| + |z| = \mathrm{e}^x + |z| \le \mathrm{e}^0 + 4 = 5\,.$$

Pertanto vale la disuguaglianza desiderata.

15. Usando la (2.17), si ha

$$\left| \int_C \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2}\, dz \right| \le 2\pi R \max_{|z|=R} \left| \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2} \right| .$$

Ma

$$\max_{|z|=R} \left| \frac{\log z}{z^2} \right| = \frac{1}{R^2} \max_{|z|=R} |\mathrm{Log}\, |z| + i\mathrm{Arg}\, z| \le \frac{1}{R^2}(\log R + \pi)\,.$$

Allora

$$\left| \int_C \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2}\, dz \right| \le \frac{2\pi(\mathrm{Log}\, R + \pi)}{R}$$

e, per $R \to +\infty$, la quantità la secondo membro tendo a 0. Dunque

$$\lim_{r \to +\infty} \left| \int_C \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2}\, dz \right| = 0,$$

da cui l'asserto.

16. *Integrali di linea:*

a) 0;   b) $\frac{1}{\pi}(i+1)$;   c) $\frac{\pi}{4}i$.

d) All'interno della circonferenza C, la funzione $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$ ha un unico punto di non analiticità $z = 2i$. Usando la (2.20) con $n = 1$ e $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$, risulta

$$\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz = 2\pi i \, \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+2i)^2}\bigg|_{z=2i} = \frac{\pi}{16}\,.$$

e) Nel quadrato in esame, la funzione $g(z) = \frac{\cosh z}{z^4}$ ha un unico punto di non analiticità $z = 0$. Sempre usando la (2.20) con $n = 3$ e $f(z) = \cosh z$, si ha

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\, dz = \frac{2\pi i}{3!} \, \frac{d^3}{dz^3} \cosh z\bigg|_{z=0} = 0\,.$$

f) $\frac{\pi}{2}$;   g) $-\sqrt{\frac{3}{2}}\pi \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{3}{2}}i}$.