DATA UN'ELICA, come CALCOLARE la "generatrice" $\vec{g}$ DETTA ANCHE ASSE DELL'ELICA e l'angolo α DETTO ANCHE PENDENZA DELL'ELICA.

PENDENZA α : Dalla lezione precedente sappiamo che per un'elica $P(t)$ si ha che $\frac{K(t)}{\tau(t)} = -\tan(\alpha)$, quindi

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{K(t)}{\tau(t)}\right)$$

(Vedi pag. 10 della lezione precedente
La formula vale rispetto a qualsiasi parametrizzazione

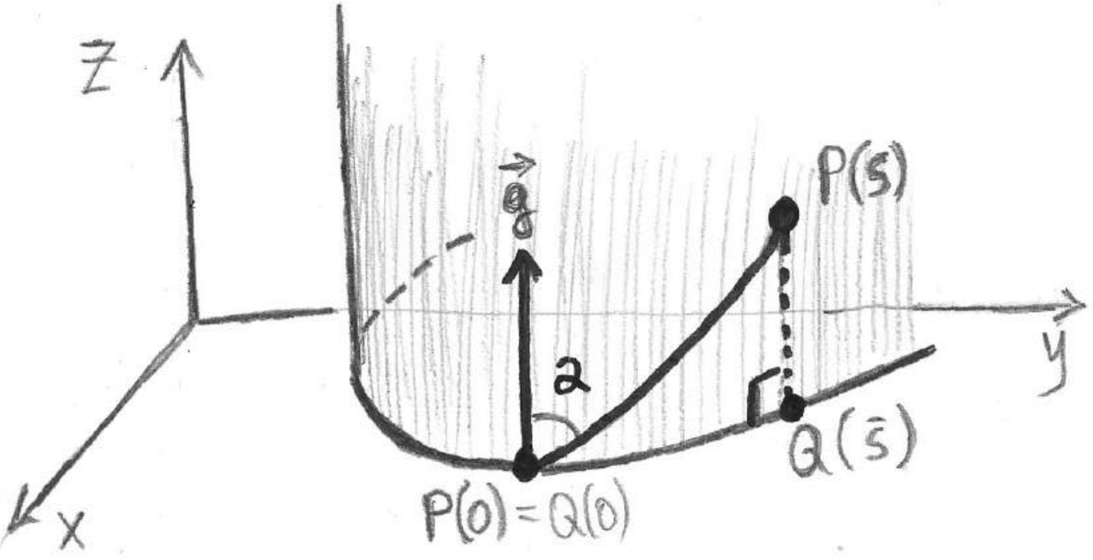
ASSE $\vec{g}$. Andando a vedere pag. 8 della lezione precedente abbiamo che

$$\vec{g} = \cos(\alpha)\, T(t) + \operatorname{sen}(\alpha)\, B(t)$$

con α dato da sopra

EQUAZIONI PARAMETRICHE DELL'ELICA CILINDRICA CON "GENERATRICE" $\vec{g}$ parallela all'asse Z

Sia $\vec{g}$ il versore che determina la direzione della generatrice del cilindro su cui giace l'elica.
Sia α l'angolo costante che $\vec{g}$ forma con l'elica
Senza ledere le generalità posso supporre la curva su cui è costruito il cilindro contenuta nel piano $\{X,Y\}$



Voglio trovare l'equazione parametrica $P(s)$ dell'elica cilindrica con s <u>ascissa curvilinea</u>

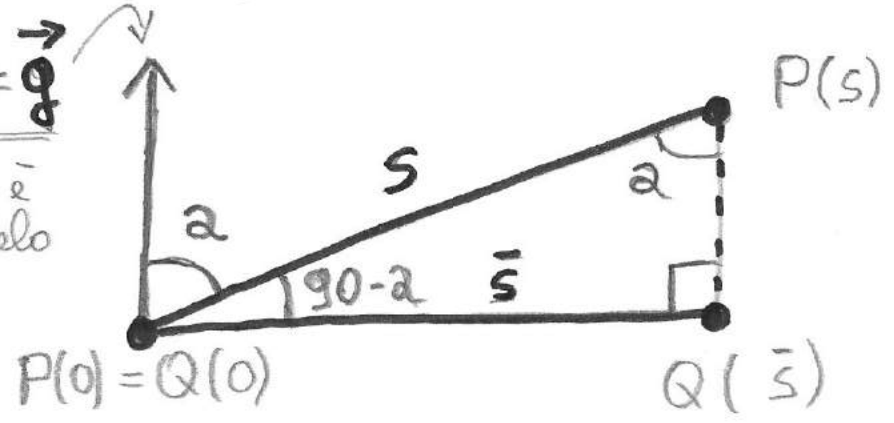
$P(s)$ si proietta sulla curva $Q(\bar{s})$ del piano $\{X,Y\}$, con <u>$\bar{s}$ ascissa curvilinea</u> di Q

Supponiamo $0 \leq \alpha \leq 180°$

Cioè ho questa situazione

$(0,0,1) = \vec{g}$

Ricordare: $\vec{g}$ è versore parallelo all'asse z



Ho che $\dfrac{s}{\text{sen}(90)} = \dfrac{\bar{s}}{\text{sen}(a)}$

$\Longrightarrow s = \bar{s} / \text{sen}(a)$

Le coordinate del punto $P(s)$ nel sistema $\{x, y, z\}$ sono

$$P(s) = \left(Q_x(\bar{s}),\ Q_y(\bar{s}),\ \mp \| P(s) - Q(\bar{s}) \| \right)$$

Coordinata in x della curva $Q(\bar{s})$

coordinata in y della curva $Q(\bar{s})$

Coordinata in z della curva $P(s)$

Avremo che

$\| P(s) - Q(\bar{s}) \| = | \cot(a)\, \bar{s} |$ più precisamente $P(s) - Q(\bar{s}) = \cot(a)\, \bar{s} \cdot \vec{g}$

$$\Longrightarrow \boxed{P(s) = Q(s \cdot \text{sen}(a)) + \cos(a)\, s\, \vec{g}}$$

Vado a riscrivere l'ultima equazione

$$P(s) = Q(\operatorname{sen}(\alpha)\, s) + \cos(\alpha)\, s\, \vec{g}$$ ($\vec{g}$ è il versore dell'asse z)

Equivalentemente, poiché $s = \bar{s}/\operatorname{sen}(\alpha)$

$$P\left(\frac{\bar{s}}{\operatorname{sen}(\alpha)}\right) = Q(\bar{s}) + \cot(\alpha)\, \bar{s}\, \vec{g} \qquad (\bullet)$$

<u>Esempio</u>: Abbiamo visto che le equazioni dell'elica circolare sono $E(t) = (r\cos(t),\ r\operatorname{sen}(t),\ \cot(\alpha)\, r t)$ ma t <u>non è</u> l'ascisse curvilinea della curva base. Lo è $\bar{s} = rt$. Andando a sostituire $t = \frac{\bar{s}}{r}$ in

otteniamo

$$\tilde{P}(\bar{s}) = E\left(\frac{\bar{s}}{r}\right) = \left(r\cos\left(\frac{\bar{s}}{r}\right),\ r\operatorname{sen}\left(\frac{\bar{s}}{r}\right),\ \cot(\alpha)\, \bar{s}\right) \qquad (\bullet\bullet)$$

che è del tipo $(\bullet)$

Se volevamo esprimere $E(t)$ tramite la sua ascissa curvilinea s dovevamo fare nel seguente modo.

Calcolare $s(t)$:

$$s(t) = \int_0^t \| E'(t) \| \, dt = \int \sqrt{r^2 \cos^2(t) + r^2 \operatorname{sen}^2(t) + \cot^2(a) r^2}$$

$$= \int_0^t \sqrt{r^2 + r^2 \frac{\cos^2(a)}{\operatorname{sen}^2(a)}} \, dt = \int_0^t \frac{r}{\operatorname{sen}(a)} \, dt = \frac{r t}{\operatorname{sen}(a)}$$

(Abbiamo $\operatorname{sen}(a) > 0$ se supponiamo $0 < a < 180^\circ$)

$$\Rightarrow \quad s = \frac{r t}{\operatorname{sen}(a)} \quad \text{cioè} \quad \underline{r t = s \operatorname{sen}(a)} \quad (\bullet)$$

A pagina precedente avevamo $\bar{s} = r t \overset{(\bullet)}{=} s \operatorname{sen}(a)$ in accordo con quello scritto all'inizio di pag. 4

Se andiamo a sostituire $t = \frac{sen(\alpha)}{r} s$ nell' equazioni parametriche dell'elica circolare otteniamo

$$P(s) = E(t(s)) = \left(r \cos\left(\frac{sen(\alpha)}{r} s \right), \; r\, sen\left(\frac{sen(\alpha)\, s}{r} \right), \cos(\alpha)\, s \right)$$

Ulteriore verifica:

$$\tilde{P}(\bar{s}) = P\left(\frac{\bar{s}}{sen(\alpha)} \right) = \left(r \cos\left(\frac{\bar{s}}{r} \right), \; r\, sen\left(\frac{\bar{s}}{r} \right), \; \cot(\alpha)\, \bar{s} \right)$$

in accordo con la formula finale di pag. 4

vedi (•) e (••)
pag. 4

PROP: Una curva (sghemba) ha curvatura e torsione costanti $\Longleftrightarrow$ è un' elica circolare (sghemba)

Stessa cosa se la curva ha torsione $=0$

DIM: Se la curva ha torsione $=0$ la proposizione è di facile dimostrazione.

Quindi sia s l'ascissa curvilinea della curva $P(s)$ e $K(s)$ e $\tau(s)$ la curvatura e la torsione con $\tau(s) \neq 0$

$\Longleftarrow$ Già abbiamo dimostrato in qualche lezione precedente che un' elica circolare ha curvatura e torsione costanti.

$\Longrightarrow$ Supponiamo che $K(s)$ e $\tau(s)$ siano costanti con $\tau \neq 0$.

Poiché $\frac{K}{\tau}$ è una costante, per quello detto a lezione precedente la curva $P(s)$ è un' elica cilindrica.

Dimostremo che è un' elica circolare.

Chiamiamo $\vec{g}$ l'asse dell'elica. Senza ledere le generalità posso considerare un sistema di riferimento in cui $\vec{g}$ sia parallelo all'asse z.

Per quanto detto a pag. 2-4 posso scrivere, nel sopracitato sistema di riferimento, $P(s)$ come segue:

$$P(s) = Q(\bar{s}) + \cot(\alpha)\, \bar{s} \cdot \vec{g} \quad , \quad \bar{s} = \operatorname{sen}(\alpha)\, s$$

e andando a derivare rispetto ad s otteniamo

$$T(s) = \frac{dP}{ds} = \frac{dQ}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} + \cot(\alpha) \frac{d\bar{s}}{ds} \cdot \vec{g} = \text{in virtù di}$$

$$= \frac{dQ}{d\bar{s}} \operatorname{sen}(\alpha) + \cos(\alpha)\, \vec{g}$$

Andando a derivare ulteriormente otteniamo

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dQ}{d\bar{s}}\right) sen(\alpha) + \underbrace{\frac{d}{ds}\left(\cos(\alpha)\,\vec{g}\right)}_{=0} = \frac{d^2Q}{d\bar{s}^2}\, sen^2(\alpha)$$

Da una parte abbiamo, per la 1ª formula di Frenet,

$$\frac{dT}{ds} = K^P N^P$$ (K^P e N^P sono curvatura e vettore normale della curva $P(s)$)

Dall'altra, sempre per la 1ª formula di Frenet,

$$\frac{d^2Q}{d\bar{s}^2}\, sen^2(\alpha) = K^Q \cdot N^Q \cdot sen^2(\alpha)$$ (K^Q e N^Q sono curvatura e vettore normale della curva $Q(\bar{s})$)

Andando ad uguagliare:

$$K^P N^P = K^Q N^Q sen^2(\alpha) \Longrightarrow \| K^P N^P \| = \| K^Q N^Q sen^2(\alpha) \| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow K^P = K^Q sen^2(\alpha) \Longrightarrow K^Q = \text{costante}$$ ed essendo $Q(\bar{s})$ una curva piana, descrive una parte di circonferenza

TEOREMA (senza dimostrazione)

Una curva è determinata, a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$ (isometrie di $\mathbb{R}^3$) da curvatura e torsione.

In altre parole due curve con stessa curvatura e torsione sono sovrapponibili

TEOREMA (senza dimostrazione)

Siano $f(s)$ e $g(s)$ due funzioni continue su $I \subseteq \mathbb{R}$

Supponiamo $f(s) > 0 \quad \forall\, s \in I$.

Allora esiste sempre una curva $P(s)$ con ascissa curvilinea definita su I tale che $K(s) = f(s)$ e $\tau(s) = g(s)$

Il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} = f(s)\,N \\[2ex] \dfrac{dN}{ds} = -f(s)\,T - g(s)\,B \\[2ex] \dfrac{dB}{ds} = g(s)\,N \end{cases} \qquad (\star)$$

è un sistema del 1º ordine di 9 equazioni nelle 9 incognite $\underbrace{T_1, T_2, T_3}_{\text{componenti di } T}, \underbrace{N_1, N_2, N_3}_{\text{componenti di } N}, \underbrace{B_1, B_2, B_3}_{\text{componenti di } B}$

Le equazioni $(\star)$ sono chiamate anche equazioni intrinseche.

Ex: Si consideri la curva

$$P(t) = (e^{t}, e^{-t}, \sqrt{2}\, t)$$

1) Scrivere il riferimento di Frenet
2) Calcolare curvatura e torsione
3) Dire se $P(t)$ è un'elica motivando la risposta
4) Nel caso di risposta affermativa alla 3), calcolare asse e pendenza della curva
5) Calcolare la proiezione della curva sul piano $x - y = 0$
6) Calcolare la proiezione della curva sul piano $x - y - 1 = 0$

1) Abbiamo che

$$\| P'(t) \| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^{t} + e^{-t})^2} = e^{t} + e^{-t} \quad (*)$$

Quindi

$$T(t) = \frac{P'(t)}{\| P'(t) \|} = \frac{1}{e^{t} + e^{-t}} \left(e^{t}, -e^{-t}, \sqrt{2} \right)$$

Calcoliamo ora $N(t) = T'(t) / \| T'(t) \|$

Abbiamo che

$$T'(t) = \frac{1}{(e^{t} + e^{-t})^3} \Big(2e^{t}(e^{-2t} + 1),\ 2e^{-t}(e^{2t} + 1),\ -\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-2t}) \Big)$$

Poiché un conto diretto dà

$$\|T'(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{e^t + e^{-t}} \qquad (\circ)$$

abbiamo che

$$N(t) = \frac{1}{(e^t + e^{-t})^2} \left(\sqrt{2}\, e^t (e^{-2t} + 1),\ \sqrt{2}\, e^{-t} (e^{2t} + 1),\ -e^{2t} + e^{-2t} \right)$$

Ricordandosi che $B(t) = T(t) \times N(t)$, abbiamo che

$$B(t) = \frac{1}{(e^t + e^{-t})} \left(-e^{-t},\ e^t,\ \sqrt{2} \right)$$

Il riferimento dato da $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ è il riferimento cercato.

2) <u>Curvatura</u> : Posso utilizzare la formula

$$K(t) = \| P'(t) \times P''(t) \| \Big/ \| P'(t) \|^3$$

Tenendo in considerazione che

$P'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ e $P''(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$

Un conto (semplice) diretto dà

$$K(t) = \sqrt{2} \Big/ (e^t + e^{-t})^2$$

In alternativa, potevamo sfruttare la prima formula di Frenet : $T'(t) = \| P'(t) \| \, K(t) \, N(t) \Rightarrow K(t) = \dfrac{\| T'(t) \|}{\| P'(t) \|}$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{Vedi } (\bullet) \text{ pag. } 12 \\ \text{e } (\star) \text{ pag. } 11 \end{array} \right) = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$$

Torsione: Posso utilizzare la formula generale

$$\tau(t) = -\frac{\left(P'(t) \times P''(t)\right) \cdot P'''(t)}{\| P'(t) \times P''(t) \|^2}$$

Poiché ho che

$$P'(t) \times P''(t) = \left(-\sqrt{2}\, e^{-t},\ \sqrt{2}\, e^{t},\ 2\right) \quad e$$

$$P'''(t) = \left(e^{t},\ -e^{-t},\ 0\right)$$

un conto diretto mi dà

$$\tau(t) = \frac{\sqrt{2}}{\left(e^{t} + e^{-t}\right)^2}$$

Alternativamente,
potevo sfruttare la formula di Frenet $\frac{dB}{dt} = \|P'(t)\|\, \tau(t)\, N(t)$

3) La curva $P(t)$ in quanto il rapporto tra curvatura e torsione è costante: $\frac{K(t)}{\tau(t)} = 1$

<u>Non è</u> un'elica circolare in quanto $K(t)$ e $\tau(t)$ non sono entrambi costanti

4) <u>Pendenza</u>: sarebbe l'angolo (costante) che l'elica forma con la generatrice (o asse) $\vec{g}$. Ricordiamo che in questo caso

$$\frac{K}{\tau} = -\tan(\alpha) \qquad \text{(Vedi pag. 1)}$$

dove α è l'angolo cercato. Poiché $\frac{K}{\tau} = 1$,

$\alpha = \frac{3}{4}\pi$

ASSE: Basta applicare la formula di pag. 1 con $\alpha = \frac{3}{4}\pi$. Avremo che

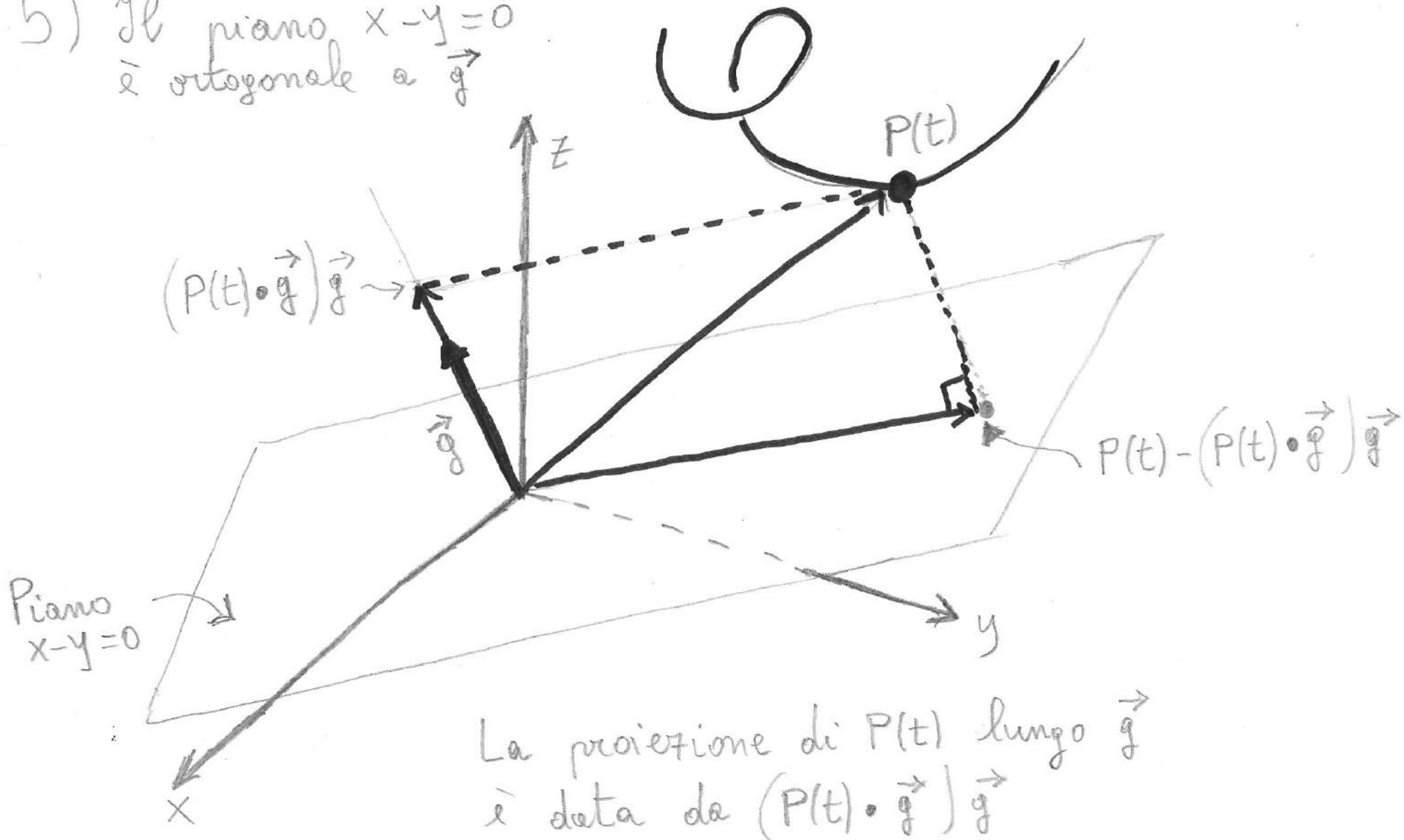
$$\vec{g} = \cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) T(t) + \operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{4}\right) B(t) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} T(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} B(t) =$$ andando a guardare pag. 11 e 12

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{e^t + e^{-t}} \left(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{e^t + e^{-t}} \left(-e^{-t}, e^t, \sqrt{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

5) Il piano $x-y=0$ è ortogonale a $\vec{g}$



La proiezione di $P(t)$ lungo $\vec{g}$
è data da $\left(P(t)\cdot\vec{g}\right)\vec{g}$

La proiezione di $P(t)$ sul piano $x-y=0$
è data da $P(t)-\left(P(t)\cdot\vec{g}\right)\vec{g}$

Quindi in definitiva la proiezione della curva $P(t)$ sul piano $x-y=0$ è

$$P(t) - \left(P(t) \cdot \vec{g}\right) \vec{g} =$$

$$\left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t\right) - \left(\left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$= \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} e^t + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-t}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^{-t} + e^t}{2}, \sqrt{2}\, t\right)$$

Notare, come verifica dei conti, che questa è una curva piana. È facile vedere che il piano che la contiene è proprio $x-y=0$

6) Lo lascio come esercizio da fare.

Suggerimento.

La proiezione di un punto generico $P(t)$ su un piano generico è data dall'intersezione del piano π con la retta ortogonale al piano π e passante per $P(t)$.

Ex: Si consideri la curva

$$P(t) = \left(\cosh(t),\ \frac{\sqrt{2}}{2}t + \operatorname{senh}(t),\ \frac{\sqrt{2}}{2}t - \operatorname{senh}(t) \right)$$

Rispondere alle domande
1) 2) 3) 4) 5) 6) di pagina 10.

Lo schema è lo stesso di quello delle pagine 10 - 19

1) $$P'(t) = \left(\operatorname{senh}(t),\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \cosh(t),\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \cosh(t) \right)$$

$$\|P'(t)\| = \sqrt{3}\cosh(t)$$

$$\Longrightarrow T(t) = \left(\frac{\tanh(t)}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}\cosh(t)} + \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}\cosh(t)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Facendo i soliti conti

$$N(t) = \left(\frac{1}{\cosh(t)} , -\frac{\sqrt{2}}{2} \tanh(t) , -\frac{\sqrt{2}}{2} \tanh(t) \right)$$

$$B(t) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3} \tanh(t) , \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3\cosh(t)} , -\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3\cosh(t)} \right)$$

2) $K(t) = \dfrac{1}{3\cosh^2(t)}$ $\qquad \tau(t) = -\dfrac{1}{3} \dfrac{\sqrt{2}}{\cosh^2(t)}$

3) La curva è un' elica (cilindrica ma non circolare)

in quanto $\dfrac{K(t)}{\tau(t)}$ = costante = $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4) La pendenza è $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

L'asse è

$$\vec{g} = \cos\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) T(t) + \operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) B(t)$$

Ricordando le formule

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad \operatorname{sen}(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

abbiamo che

$$\vec{g} = \left(0 \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} \, , \, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Potete provare a fare anche 5) e 6)

Questa volta il piano $x - y = 0$ non è ortogonale $\vec{g}$.

Ex: Dimostrare che la curva

$$P(t) = (t, t^2, t^3)$$

non è un'elica.

Abbiamo già visto in qualche lezione precedente che

$$K(t) = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\tau(t) = -\frac{3}{1+9t^2+9t^4}$$

Quindi

$$\frac{K(t)}{\tau(t)} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1+9t^2+9t^4}{1+4t^2+9t^4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

che non è una costante. Questo implica che $P(t)$ non è un'elica

Ex: Sia $P : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata tramite l'ascissa curvilinea s con curvatura $K^P(s) = \text{costante} \neq 0$ e torsione $\tau^P(s)$ strettamente negativa. Sia (T^P, N^P, B^P) il triedro di Frenet di $P(s)$.

Si consideri l'applicazione

$$Q : s \in I \longrightarrow P(s) + \frac{1}{K^P} N^P(s) \in \mathbb{R}^3$$

Dimostrare che Q è una curva biregolare con riferimento di Frenet $(T^Q, N^Q, B^Q) = (B^P, -N^P, T^P)$ con curvatura $K^Q(s)$ costante uguale a K^P

Ricordiamo le formule di Frenet per $P(s)$:

$$\frac{dT^P}{ds} = K^P N^P \quad , \quad \frac{dN^P}{ds} = -K^P T^P - \tau^P B^P \quad , \quad \frac{dB^P}{ds} = \tau^P N^P \qquad (\ast)$$

Dalla definizione di Q abbiamo che $\left(\text{Ricordiamo } T^P = \frac{dP}{ds}\right)$

$$\frac{dQ}{ds} = \frac{dP}{ds} + \frac{1}{K^P}\frac{dN^P}{ds} \overset{(\ast)}{=} T^P + \frac{1}{K^P}\left(-K^P T^P - \tau^P B^P\right)$$

$$= -\frac{\tau^P}{K^P} B^P$$

Quindi $\frac{dQ(s)}{ds} = -\frac{\tau^P(s)}{K^P} B^P(s)$ che è $\neq 0 \ \forall s$ in

quanto $B^P(s) \neq 0 \ \forall s$ e $\tau^P(s) \neq 0 \ \forall s$

in quanto la stiamo supponendo <u>strettamente negativa</u>

Quindi la curva $Q(s)$ <u>è regolare</u>

Oss: Abbiamo dimostrato che

$$\frac{dQ(s)}{ds} = -\frac{\tau^P(s)}{K^P} B^P(s) \qquad (\star)$$

s è ascissa curvilinea di $P(s)$ ma non di $Q(s)$.

In particolare $\frac{dQ(s)}{ds}$ non è un versore.

Il modulo della velocità di $Q(s)$ è $-\frac{\tau^P(s)}{K^P}$ $\left(\begin{array}{c}\text{Ricordarsi che} \\ \tau^P(s) < 0 \\ \forall s\end{array}\right)$

In ogni modo la $(\star)$ ci dice che il versore tangente $T^Q(s)$ è

$$\boxed{T^Q(s) = B^P(s)} \qquad (\star\star)$$

Per calcolare il riferimento di Frenet di Q dobbiamo derivare la $(\star\star)$:

$$T^Q(s) = B^P(s) \implies \frac{dT^Q(s)}{ds} = \frac{dB^P(s)}{ds} = \begin{pmatrix}\text{formule di Frenet} \\ \text{per } P(s)\end{pmatrix}$$

$$= \tau^P(s) N^P(s) \quad (\star)$$

D'altra parte, per le formule di Frenet per $Q(s)$,

$$\left.\frac{dT^Q(s)}{ds} = -\frac{\tau^P(s)}{K^P} K^Q(s)\, N^Q(s)\right\}$$

Ricordiamo che s <u>non è</u> l'ascissa curvilinea di Q quindi le formule di Frenet vanno corrette col modulo della velocità di Q che è $= -\frac{\tau^P(s)}{K^P}$ (pag. 26)

che uguagliato a $(\star)$ ci dà

$$-\frac{\tau^P(s)}{K^P} K^Q(s)\, N^Q(s) = \tau^P(s) N^P(s)$$

$$\implies -\frac{K^Q(s)}{K^P} N^Q(s) = N^P(s)$$

che implica $\boxed{K^Q(s) = K^P}$ e $\boxed{N^Q(s) = -N^P(s)}$

(Ricordarsi che le curvature sono sempre ≥ 0. In questo caso per ipotesi > 0

In conclusione, mettendo insieme le formule in riquadro di pag. 26 e 27, abbiamo che

$$T^Q(s) = B^P(s) \quad , \quad N^Q(s) = -N^P(s)$$

e quindi $B^Q(s) = T^Q(s) \times N^Q(s) = -B^P(s) \times N^P(s) = T^P(s)$

Cioè il riferimento di Frenet di Q è

$$\left(B^P(s) \,,\, -N^P(s) \,,\, T^P(s) \right)$$

come volevamo dimostrare.

In particolare la curva è biregolare.

La curvatura $K^Q(s)$ è uguale a K^P (pag. 27)