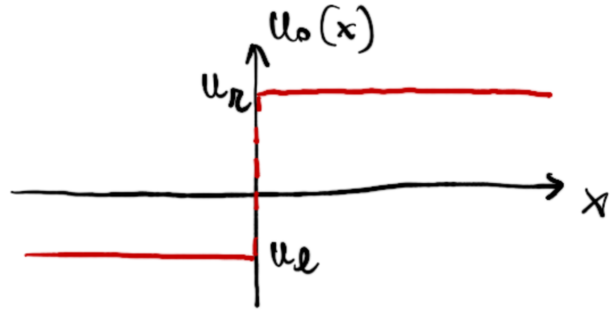
<u>Def.</u> Data una legge di conservazione $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, chiamiamo problema di Riemann un problema di Cauchy (= problema ai valori iniziali) del tipo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 & \text{in } Q = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u = u_0 & \text{per } x \in \mathbb{R},\ t = 0 \end{cases}$$

dove u_0 è della forma

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{per } x < 0 \\ u_r & \text{per } x > 0 \end{cases}$$



con $u_l, u_r \in \mathbb{R}$ e $u_l \neq u_r$.

Impostiamo la ricerca della soluzione di un problema di Riemann.

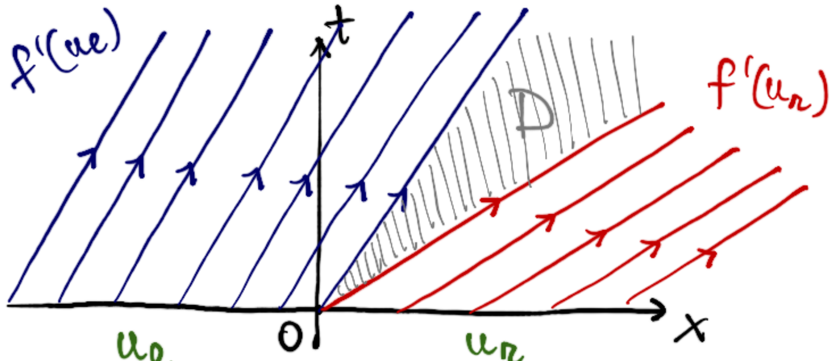
Ricordiamo che lavoriamo sotto le seguenti ipotesi:

(i) $f \in C^2(\mathbb{R})$

(ii) flusso con concavità costante su $\mathbb{R}$ — o sempre convesso ($f'' > 0$) — o sempre concavo ($f'' < 0$)

→ Per fissare le idee, supponiamo $f'' > 0 \Rightarrow f'$ strettamente crescente

Diagramma delle caratteristiche per il problema di Riemann:



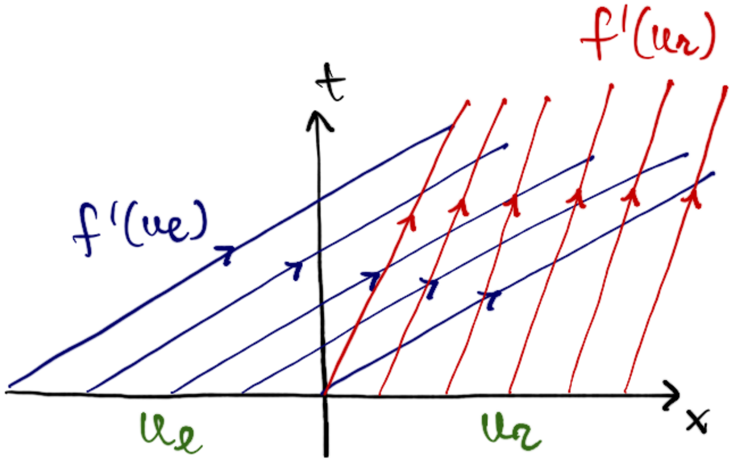
$x = \boxed{f'(u_l)}t + x_0$ $\qquad$ $x = \boxed{f'(u_r)}t + x_0$

$$x = f'(u_0(x_0))t + x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$u_l < u_r$

$\Rightarrow f'(u_l) < f'(u_r)$

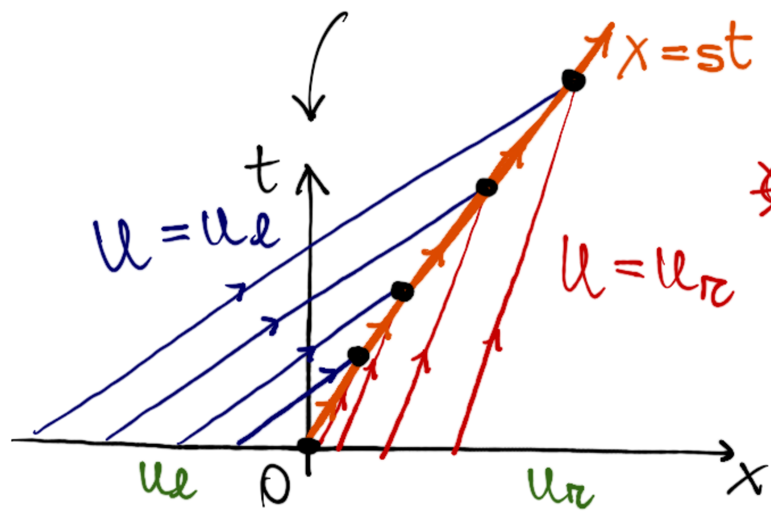
⇝ caso in cui si forma la regione D non raggiunta dalle caratteristiche



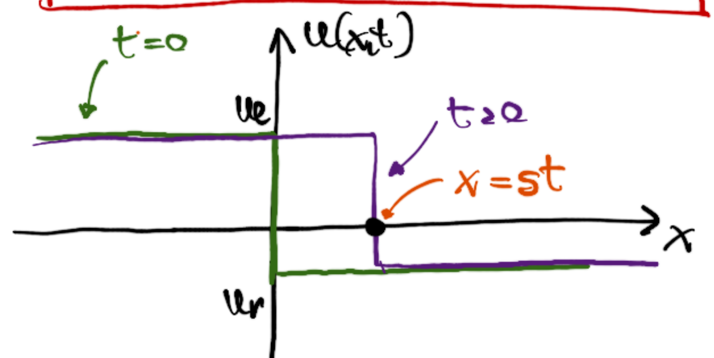
$u_l > u_r$

$\Rightarrow f'(u_l) > f'(u_r)$

⇝ caso in cui le caratte= ristiche si intersecano



$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{per } x < st \\ u_r & \text{per } x > st \end{cases}$$



Def. Chiamiamo questo tipo di soluzione un'onda d'urto.

Determiniamo il valore di s.

Imponiamo che ❋ sia una soluzione (necessariamente debole) della legge di conservazione:

$$0 = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \left(u\partial_t\varphi + f(u)\partial_x\varphi\right) dx\, dt.$$

Per fissare le idee, consideriamo esplicitamente il caso $s \geq 0$ ($\rightsquigarrow$ caso $s<0$ esercizio per casa):

$$0 = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{st} \left(u_\ell\partial_t\varphi + f(u_\ell)\partial_x\varphi\right) dx\, dt$$

$$+ \int_0^{+\infty}\int_{st}^{+\infty} \left(u_r\partial_t\varphi + f(u_r)\partial_x\varphi\right) dx\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_0^{+\infty} u_\ell\partial_t\varphi\, dt\, dx + \int_0^{+\infty}\int_{x/s}^{+\infty} u_\ell\partial_t\varphi\, dt\, dx$$

$$+ \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{st} f(u_\ell)\partial_x\varphi\, dx\, dt$$

$$+ \int_0^{+\infty}\int_0^{x/s} u_r\partial_t\varphi\, dt\, dx + \int_0^{+\infty}\int_{st}^{+\infty} f(u_r)\partial_x\varphi\, dx\, dt$$

$$= u_l \int_{-\infty}^{0} \Big(\underbrace{\varphi(x,+\infty)}_{=0} - \underbrace{\varphi(x,0)}_{=0} \Big)\, dx + u_l \int_{0}^{+\infty} \Big(\underbrace{\varphi(x,+\infty)}_{=0} - \varphi\big(x,\tfrac{x}{s}\big) \Big)\, dx$$

$$+ f(u_l) \int_{0}^{+\infty} \Big(\varphi(st,t) - \underbrace{\varphi(-\infty,t)}_{=0} \Big)\, dt$$

$$+ u_r \int_{0}^{+\infty} \Big(\varphi\big(x,\tfrac{x}{s}\big) - \underbrace{\varphi(x,0)}_{=0} \Big)\, dx + f(u_r) \int_{0}^{+\infty} \Big(\underbrace{\varphi(+\infty,t)}_{=0} - \varphi(st,t) \Big)\, dt$$

$$= - u_l \int_{0}^{+\infty} \varphi\big(x,\tfrac{x}{s}\big)\, dx + f(u_l) \int_{0}^{+\infty} \varphi(st,t)\, dt$$

$$+ u_r \int_{0}^{+\infty} \varphi\big(x,\tfrac{x}{s}\big)\, dx - f(u_r) \int_{0}^{+\infty} \varphi(st,t)\, dt$$

$$= (u_r - u_l) \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \varphi\big(x,\tfrac{x}{s}\big)\, dx}_{\frac{x}{s} =: t \quad s\int_{0}^{+\infty} \varphi(st,t)\, dt} + \big(f(u_l) - f(u_r)\big) \int_{0}^{+\infty} \varphi(st,t)\, dt$$

$$= \Big[s(u_r - u_l) + \big(f(u_l) - f(u_r)\big) \Big] \int_{0}^{+\infty} \varphi(st,t)\, dt.$$

Per l'arbitrarietà di $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$, concludiamo che deve risultare:

$$s(u_r-u_l)+f(u_l)-f(u_r)=0.$$

Da qui:

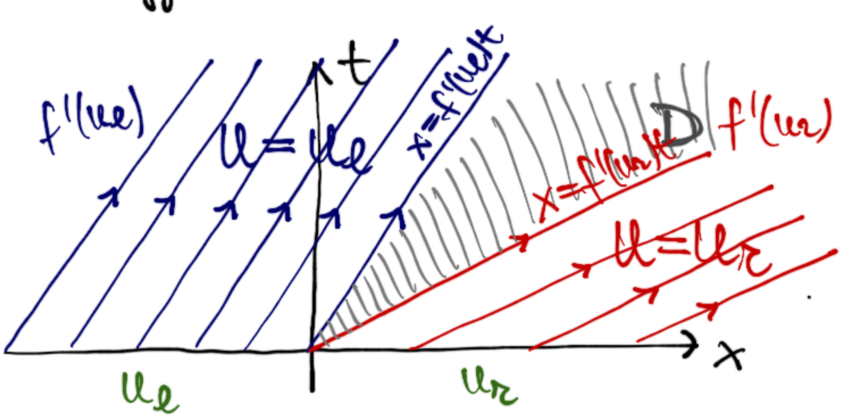
$$\boxed{s=\frac{f(u_r)-f(u_l)}{u_r-u_l}}.$$

Questa condizione si chiama condizione di Rankine–Hugoniot.

In conclusione, abbiamo dimostrato che:

<u>Teorema</u> Un'onda d'urto tra due stati u_l e u_r che propaga con velocità s è soluzione della legge di conservazione se e solo se s soddisfa la condizione di Rankine-Hugoniot.

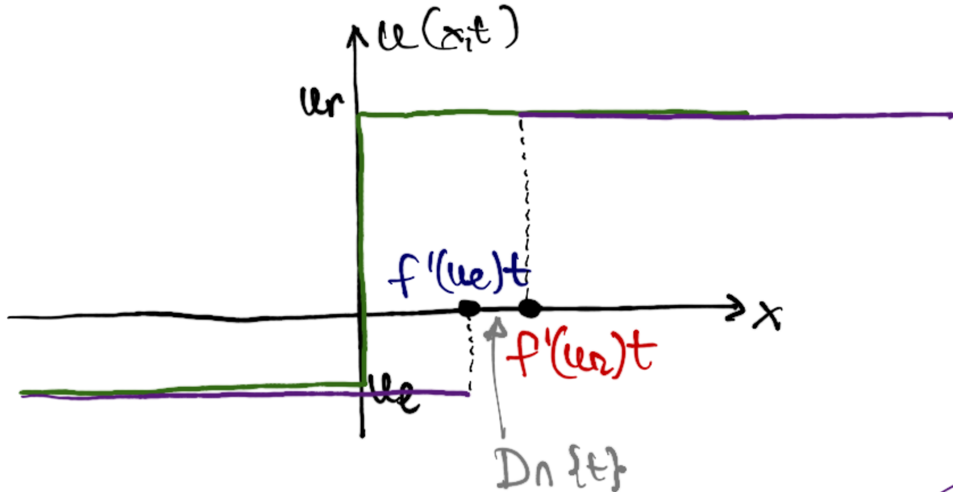
Consideriamo ora il caso in cui si forma la regione $D\subset Q$ non raggiunta dalle caratteristiche:



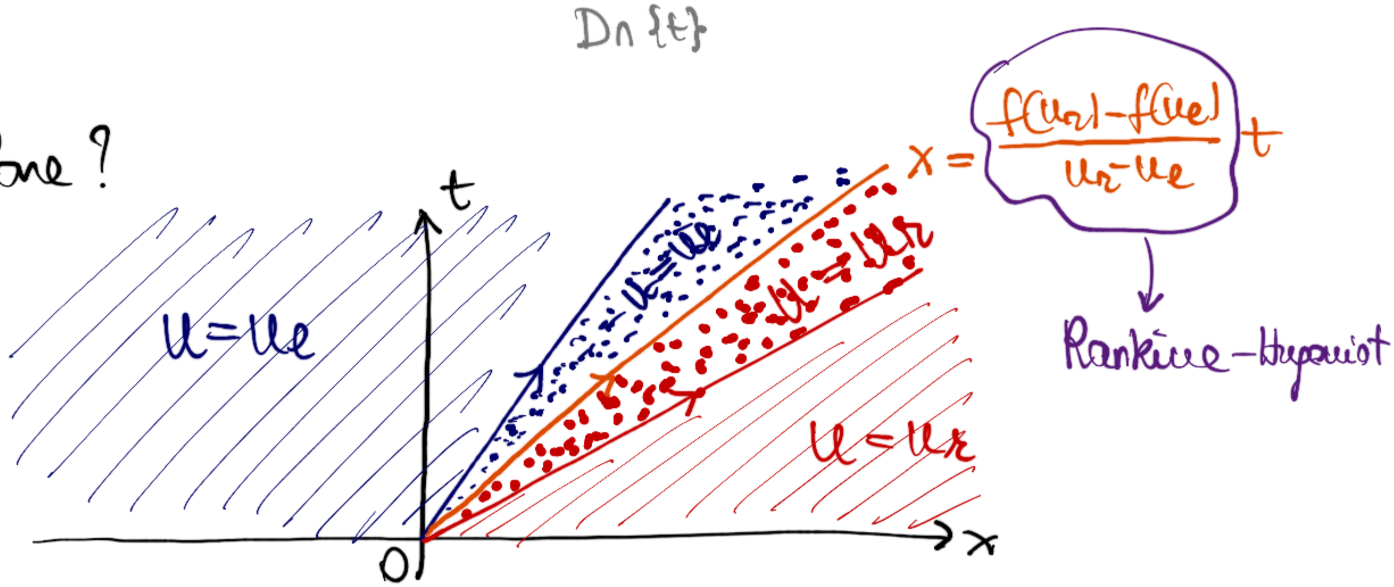
$u_l<u_r$

$\Rightarrow f'(u_l)<f'(u_r)$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell & \text{per } x < f'(u_\ell)t \\ u_r & \text{per } x > f'(u_r)t \end{cases}$$



Che fare?



Possiamo costruire l'onda d'urto

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell & \text{per } x < st \\ u_r & \text{per } x > st \end{cases}$$

con s dato dalla condizione di R.-H. Per il teorema precedente, questa è una soluzione della legge di con= servazione definita su tutto Q.