2. Determinare l'integrale generale del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_1(t) = u_1(t), \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2(t) = u_1(t) + 2\,u_2(t) + u_3(t), \qquad t \geq 0. \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_3(t) = -u_1(t) + 2\,u_3(t), \end{cases}$$

Procedendo come nell'esercitazione scorsa, usiamo la formula risolutiva

$$\underline{u}(t) = \underline{\underline{P}}\, e^{\underline{\underline{B}}t}\, \underline{c}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad (*)$$

con $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{P}}$.

- Autovalori di $\underline{\underline{A}}$

$\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2

$\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica 1

- Autovettori associati a λ_1

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1$ ha molteplicità geometrica 1 $\Rightarrow$ dobbiamo introdurre un autovettore generalizzato

Scegliendo $\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ trovo l'autovettore generalizzato (associato a λ_1 e discendente da $\underline{v}^{(1)}$):

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scegliamo, per esempio, $\underline{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- <u>Autovettori associati a λ_2</u>

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Scegliamo, per esempio, $\underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- <u>Calcolo di $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{B}}$ ed $e^{\underline{\underline{B}}t}$</u>

$$\underline{\underline{P}} = \left(\underline{v}^{(1)}, \underline{w}^{(1)}, \underline{v}^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

La matrice $\underline{\underline{B}}$ consiste di 2 blocchi di Jordan:

$$\underline{\underline{J}}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{J}}_2 \equiv J_2 = 1 .$$

Chiaramente, si ha

$$e^{\underline{\underline{J}}_2 t} \equiv e^{J_2 t} = e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \boxed{e^{\underline{\underline{J}}_2 t} = e^{t} .}$$

Inoltre, dal momento che il blocco di Jordan $\underline{\underline{J}}_1$ è di ordine $n=2$, si ha:

$$e^{\underline{\underline{J}}_1 t} = e^{\lambda_1 t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \underline{\underline{N}}^k$$

con

$$\underline{\underline{N}}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \underline{\underline{I}}, \qquad \underline{\underline{N}}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Di conseguenza,

$$\boxed{e^{\underline{\underline{J}}_1 t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} .}$$

In definitiva,

$$e^{\underline{\underline{B}}t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} .$$

Sostituendo nella formula risolutiva (✱) si trova:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{P}}\, e^{\underline{\underline{B}} t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 e^{t} \\ (c_1 + c_2 t) e^{2t} - 2 c_3 e^{t} \\ c_2 e^{2t} + c_3 e^{t} \end{pmatrix}$$

1. Sia data una popolazione in cui il numero di individui all'istante di tempo $t \geq 0$ sia descritto dalla funzione $N(t) \geq 0$, la cui evoluzione temporale sia governata dal seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) = \rho \left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right) N(t), \quad t > 0, \\ \\ N(0) = N_0 > 0, \end{cases}$$

ove $\rho > 0$ e $K > 0$.

(a) Si trovino i punti di equilibrio fisicamente rilevanti dell'equazione differenziale per $N(t)$.

I punti di equilibrio fisicamente rilevanti saranno le soluzioni reali e non-negative dell'equazione algebrica che si ottiene imponendo che il secondo membro della ODE di cui sopra, essere la funzione

$$f(N) = \rho \left(1 - \frac{N}{K}\right) N,$$

si annulli in corrispondenza dei punti di equilibrio, che denoteremo con $\overline{N}$. Quindi:

$$f(\overline{N}) = 0 \implies \rho \left(1 - \frac{\overline{N}}{K}\right) \overline{N} = 0$$

e, di conseguenza, i punti di equilibrio fisicamente rilevanti sono

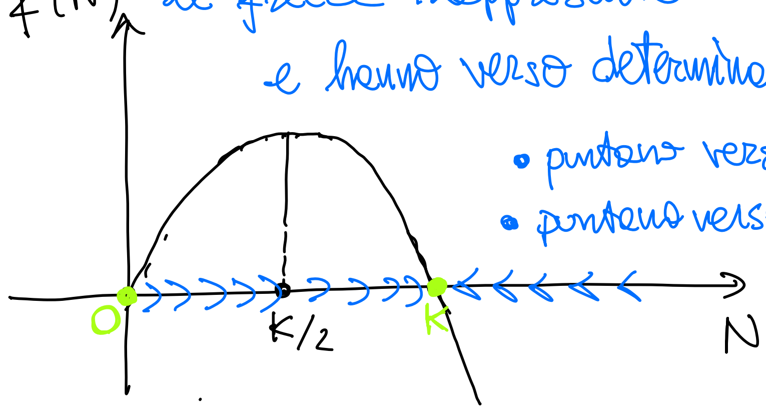
$$\bar{N}_1 = 0, \quad \bar{N}_2 = K.$$

(b) Utilizzando il grafico della funzione $f(N) := \rho\left(1 - \frac{N}{K}\right)N$, si studi in modo euristico la stabilità dei punti di equilibrio trovati al punto (a).

Si ha:

le frecce "rappresentano" la traiettoria di $N(t)$ e hanno verso determinato dal segno di $f(N)$:

- puntano verso destra se $f(N) > 0$;
- puntano verso sinistra se $f(N) < 0$.



Quindi, euristicamente, ci aspettiamo che il punto di equilibrio $\bar{N}_1 = 0$ sia instabile mentre il punto di equilibrio $\bar{N}_2 = K$ sia asintoticamente stabile.

(c) Utilizzando la funzione $V(N) := (N-K)^2$, si dimostri che $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$ per ogni $N_0 > 0$.

Verifichiamo che la funzione $V(N)$ assegnata è una funzione di Lyapunov in senso stretto relativa al punto di equilibrio $\bar{N} = K$ definita su $\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Nello specifico verifichiamo che:

(i) $V \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$

(ii) $V(K) = 0$

(iii) $V(N) > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{K\}$

(iv) $\frac{d}{dt} V(N) < 0$ per ogni traiettoria uscente da N_0 con $N_0 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{K\}$.

Chiaramente, $V(N)$ soddisfa le proprietà (i)-(iii). Per verificare che $V(N)$ soddisfa anche la proprietà (iv) procediamo come segue:

$$\frac{d}{dt} V(N) = \frac{dV}{dN} \overbrace{\frac{dN}{dt}}^{= f(N)} = 2(N-K)\,\rho\left(1 - \frac{N}{K}\right) N$$

$$= 2\frac{\rho}{K} N (N-K)(K-N)$$

$$= -2\frac{\rho}{K} N (N-K)^2$$

Dal momento che $N_0 > 0$ allora $\forall t \geq 0$ si ha $N(t) > 0$. Inoltre, $(N-K)^2 > 0$ per ogni $N \neq K$. Quindi, l'equazione differenziale di cui sopra ci permette di concludere che anche la proprietà (iv) è soddisfatta.

In definitiva, essendo $V : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ una funzione di Lyapunov in senso stretto relativa al punto di equilibrio $\bar{N} = K$, il secondo teorema di Lyapunov garantisce che il punto di equilibrio in oggetto è asintoticamente stabile; di conseguenza $\lim_{t \to \infty} N(t) = K$ per ogni $N_0 \in \mathbb{R}_+^*$.