APPLICAZIONE INDOTTA SUGLI SPAZI DUALI

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare.

Quest'applicazione induce un'applicazione lineare

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*$$

definita come segue. Sia $\theta \in W^*$. Allora, per definizione

$$f^*(\theta) : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longrightarrow \theta(f(v))$$

È facile vedere che f^* è un'applicazione lineare,

cioè che

$$f^*(a\theta + b\phi) = a f^*(\theta) + b f^*(\phi)$$

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad \theta, \phi \in W^*$$

PROP: Sia $(e_1, \dots, e_n)$ una base di V e $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m)$ una di W

Sia $f: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e A la sua matrice rappresentativa rispetto alle suddette basi.

Allora la matrice rappresentativa A^* di $f^*: W^* \longrightarrow V^*$ nelle basi $(\tilde{e}^*_1, \dots, \tilde{e}^*_m)$ e $(e^*_1, \dots, e^*_n)$ è la trasposta di A, cioè $A^* = A^T$.

DIM

per def. di matrice rappr. A^* — per definizione di f^*

$$f^*(\tilde{e}_i^*) \overset{\downarrow}{=} A^*_{Ji}\, e^*_J \Longrightarrow A^*_{Ji} = f^*(\tilde{e}_i^*)(e_J) \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \tilde{e}_i^*\big(f(e_J)\big) \underset{\uparrow}{=} \tilde{e}_i^*\left(A_{KJ}\,\tilde{e}_K\right) \underset{\uparrow}{=} A_{KJ}\,\tilde{e}_i^*(\tilde{e}_K) = A_{KJ}\,\delta_{iK} = A_{iJ}$$

Per def. di matrice rappr. A — Per linearità di $\tilde{e}_i^*$

Cioè $A^*_{Ji} = A_{iJ}$, in altre parole $A^* = A^T$ come volevamo dimostrare

QUALCHE NOZIONE DI TOPOLOGIA DI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^n$

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

Un punto $p_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice <u>interno</u> a Ω se esiste una sfera di centro p_0

$$B_r(p_0) = \{ p \in \mathbb{R}^n \,/\, \|p - p_0\| < r \}$$

contenuta in Ω.

Un punto $p_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice <u>esterno</u> a Ω se è interno a $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Un punto $p_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice <u>di bordo</u> (o di <u>frontiera</u>) per Ω se non è né interno né esterno a Ω.

L'insieme dei punti interni di Ω viene denotato con $\mathring{\Omega}$

L'insieme dei punti di frontiera per Ω viene denotato con $\partial\Omega$

La chiusura $\bar{\Omega}$ di Ω è definita da $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$

Un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^n$ è detto <u>aperto</u> se $\Omega = \mathring{\Omega}$, cioè se tutti i suoi punti sono interni

Ω verrà detto <u>chiuso</u> se $\Omega = \bar{\Omega}$, cioè se Ω contiene il suo bordo

Ω verrà detto <u>regione</u> se è l'unione di un insieme aperto connesso A e di una parte di ∂A

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è <u>connesso</u> se presi due punti si posso sempre congiungere con una spezzata inclusa nell'insieme

DERIVATE PARZIALI E DIREZIONALI E LORO SIGNIFICATO GEOMETRICO

Consideriamo una funzione $F : (u, v) \in \Omega \to F(u,v) \in \mathbb{R}$ dove Ω è un aperto.

Sia $p_0 = (u_0, v_0)$ un punto fissato, interno a Ω.

Se l'applicazione $u \longrightarrow F(u, v_0)$ è derivabile in u_0 diciamo che F ammette <u>derivata parziale</u> <u>rispetto ad u</u> in (u_0, v_0) e sarà denotata indifferentemente da

$$F_u(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} := \left.\frac{d}{du}\right|_{u_0} F(u, v_0)$$

Analogo ragionamento rispetto alla variabile v:

$$F_v(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial F}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} := \left.\frac{d}{dv}\right|_{v_0} F(u_0, v)$$

Il gradiente di F nel punto (u_0, v_0) è il vettore $\left(F_u(u_0, v_0), F_v(u_0, v_0)\right)$ ed è denotato da

$$\mathrm{GRAD}(F)(u_0, v_0) \quad \text{oppure} \quad \nabla F(u_0, v_0)$$

Se il gradiente di F esiste in tutti i punti di $\mathring{\Omega}$ e se le derivate parziali

$$F_u(u,v) \quad e \quad F_v(u,v) \qquad (*)$$

sono funzioni continue in Ω.

diciamo che F è C^1 in Ω e scriviamo $\underline{F \in C^1(\Omega)}$

Diremo che $\underline{F \in C^2(\Omega)}$ se $(*)$ appartengono a $C^1(\Omega)$.

Iterativamente, possiamo definire cosa significa che $F \in C^k(\Omega)$

La derivata direzionale di $F(u,v)$ nel punto $q_0 = (u_0, v_0)$ lungo il vettore w è definita come segue

$$D_w F(q_0) := \lim_{t \to 0} \frac{F(q_0 + t w) - F(q_0)}{t} \quad , \quad \underline{\underline{w = (a, b)}}$$

Se $F \in C^1(\Omega)$ allora possiamo scrivere

$$D_w F(q_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 F\left(q_0 + t w\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 F(u_0 + t a, v_0 + t b)$$

$$= F_u(u_0, v_0) \cdot a + F_v(u_0, v_0) \cdot b = \nabla F(u_0, v_0) \cdot w$$

<u>Notare</u> che in questo caso potevamo restringere F a <u>qualsiasi</u> curva $\alpha(t) = \big(u(t), v(t)\big) \ / \ \alpha(0) = q_0$ e $\alpha'(0) = w$.
Il risultato non sarebbe cambiato.

Infatti

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 F(\alpha(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 F(u(t), v(t)) =$$

$$= F_u(u_0, v_0) \cdot u'(0) + F_v(u_0, v_0) \cdot v'(0) =$$

$$= \nabla F(u_0, v_0) \bullet w$$

in quanto $w = \alpha'(0) = (u'(0), v'(0))$

SUPERFICI (PARAMETRIZZATE) di $\mathbb{R}^3$

È un' applicazione

$$P : (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow$$

$$P(u,v) = \big(x(u,v)\,,\ y(u,v)\,,\ z(u,v) \big) \in \mathbb{R}^3$$

dove Ω è una regione di $\mathbb{R}^2$, tale che

1) $P(u,v) \in C^K(\mathring{\Omega})$ nel senso che $\qquad K \geq 1$

$x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v) \in C^K(\mathring{\Omega})$

2) La matrice $\begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \\ z_u(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$ ha rango 2 $\forall\,(u_0,v_0) \in \mathring{\Omega}$

Andiamo a studiare meglio la condizione 2) di pag. 7.

Innanzitutto definiamo

$$P_u = (x_u, y_u, z_u), \quad P_v = (x_v, y_v, z_v)$$

La condizione 2) di pag. 7 ci dice che i vettori

$P_u(u_0, v_0)$ e $P_v(u_0, v_0)$ <u>sono linearmente indipendenti</u>

per ogni $(u_0, v_0) \in \mathring{\Omega}$.

<u>Geometricamente</u>, $P_u(u_0, v_0)$ e $P_v(u_0, v_0)$ sono vettori tangenti nel punto $P_0 = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ <u>all'immagine</u> di $\mathbf{P}$

(chiamata anche <u>sostegno o traccia</u> della superficie parametrizzata)

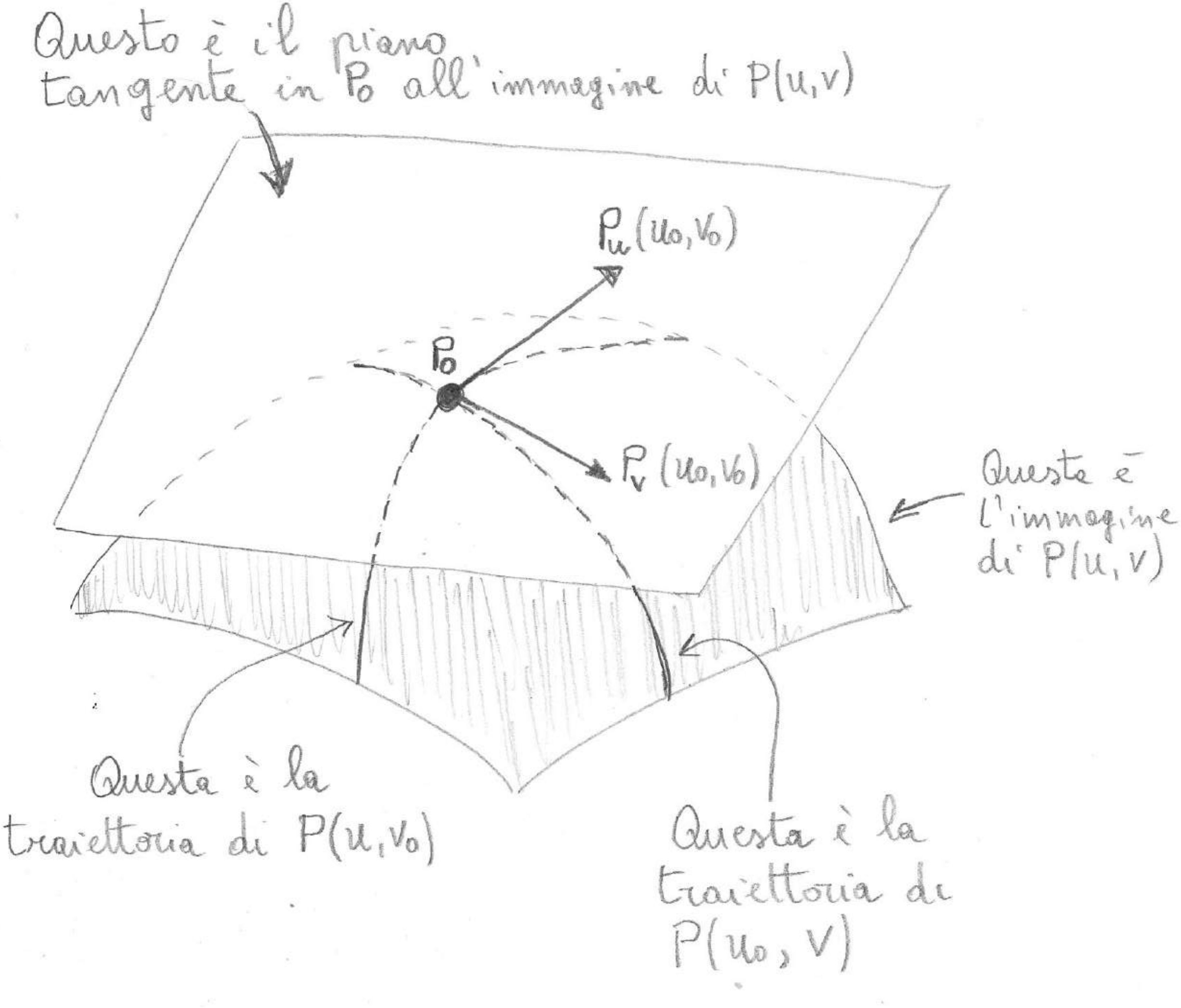
Quindi la condizione 2) di pag. 7 ci dice che è ben definito il piano tangente (al sostegno della superficie) nel punto $P(u_0, v_0)$ per ogni (u_0, v_0).

<u>Oss</u>: $P_u(u_0, v_0)$ è un vettore tangente in $P_0 = P(u_0, v_0)$ (all'immagine di $P(u,v)$) in quanto è tangente alla curva

$$u \longrightarrow P(u, v_0) \qquad (\star)$$

nel punto P_0. D'altra parte l'immagine della curva $(\star)$ è contenuta nell'immagine di $P(u,v)$

Possiamo riassumere tramite il seguente disegno



Analogamente a quanto fatto a pag. 5 - 6
per una funzione scalare $F(u,v)$, possiamo
introdurre una sorta di "derivata direzionale" della
funzione vettoriale $P(u,v)$ lungo un vettore $w = (a,b)$

Il procedimento è lo stesso.
Prendiamo una curva $\alpha(t)$ / $\alpha(0) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$.
Restringiamo $P(u,v)$ e calcoliamo la derivata in $t=0$:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 P(u(t), v(t)) = P_u(u_0, v_0)\, u'(0) + P_v(u_0, v_0)\, v'(0)$$

$$= a\, P_u(u_0, v_0) + b\, P_v(u_0, v_0)$$

Come notato a pag. 5c, senza ledere le generalità, potevamo
scegliere $(u(t), v(t)) = (u_0 + at,\ v_0 + bt)$

Tornando alla definizione di superficie di pag. 7, la condizione 2) può essere anche espressa nel seguente modo

$$P_u(u_0, v_0) \times P_v(u_0, v_0) \neq 0 \quad \forall (u_0, v_0) \in \mathring{\Omega}$$

In molti testi una superficie viene definita solo tramite 1) di pag. 7 mentre se viene soddisfatta anche 2) si parla di <u>superficie regolare</u>.

Quindi, se non altrimenti specificato, con il termine superficie intendiamo una superficie regolare.

D'ora in poi denotiamo con S l'immagine di $P : (u,v) \longrightarrow P(u,v) \in \mathbb{R}^3$

Lo spazio tangente ad S nel punto $P(u_0, v_0)$ è per definizione

$$(\star) \quad T_{P_0} S = T_{P(u_0,v_0)} S = \mathrm{Span}\left\{ P_u(u_0,v_0),\ P_v(u_0,v_0) \right\}$$

Osserviamo che, come per le curve, parlare di spazio tangente in un punto può essere inappropriato in quanto la superficie S potrebbe avere autointersezioni.

È più appropriato, per superfici parametrizzate, parlare di piano tangente in (u_0, v_0). Cioè, come in $(\star)$, i parametri vanno sempre specificati

Molte considerazioni fatte per le curve possono essere tradotte direttamente anche per le superfici. In particolare

1) Due superfici (parametrizzate)

$P : \Omega \to \mathbb{R}^3$ e $\tilde{P} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ sono <u>equivalenti</u>

se esiste $\alpha : \Omega \to \tilde{\Omega}$ (cambio di parametrizzazione)

invertibile, di classe $C^k(\mathring{\Omega})$ (la regolarità è quella delle superfici)

tale che

$$Jac(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

dove $\alpha : (u,v) \in \Omega \to (\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$

(Jacobiano di α) è non-singolare.

e $P = \tilde{P} \circ \alpha$

$$\begin{tikzcd} \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathbb{R}^3 \\ \tilde{\Omega} \arrow[ur, "\tilde{P}"'] & \end{tikzcd}$$

2) Lo spazio tangente è ben determinato (vedi anche considerazioni di pag. 13)

nel senso che se cambio parametrizzazione, lo spazio tangente non cambia. Infatti, seguendo le notazioni di pag. 14, siano P e $\tilde{P}$ due superfici parametrizzate equivalenti con $\alpha(u,v) = \left(\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v)\right)$ cambio di parametrizzazione:

$$P(u,v) = \tilde{P}\left(\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v)\right)$$

Sta nelle ipotesi di α

Abbiamo che

$$P_u = \tilde{P}_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \tilde{P}_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}, \quad P_v = \tilde{P}_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \tilde{P}_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}$$

Poiché $\det \mathrm{Jac}(\alpha) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$, $\Rightarrow \mathrm{Span}\{P_u, P_v\} = \mathrm{Span}\{\tilde{P}_{\tilde{u}}, \tilde{P}_{\tilde{v}}\}$