# Serie di Numeri Complessi

## Serie di Taylor e MacLaurin

**Richiami di teoria.** Data una funzione $f(z)$ analitica in un dominio $\Omega$, $z_0 \in \Omega$ e un cerchio di raggio $R$ centrato in $z_0$, $\mathcal{B}_R(z_0) \in \Omega$, allora $\forall\, z \in \mathcal{B}_R(z_0)$ la seguente uguaglianza è verificata:

**Serie di Taylor**

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k,$$

dove il termine alla destra dell'uguale è detto sviluppo in **serie di Taylor** della funzione $f(z)$ centrata in $z_0$. Quando $z_0 = 0$ parleremo di sviluppo in **serie di MacLaurin**.

**Esercizio 1.** Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $z_0 = i$ di

$$f(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2.$$

determinandone il raggio di convergenza.

*Soluzione.* Innanzitutto osserviamo che, essendo $f(z)$ intera (i.e., olomorfa su tutto $\mathbb{C}$), allora la serie di Taylor converge su tutto $\mathbb{C}$. Per scrivere lo sviluppo in serie di Taylor ci occorre calcolare le derivate di $f(z)$:

$$\begin{array}{ll} f^{(1)}(z) = 3z^2 - 6z + 4 & \qquad f^{(1)}(i) = 1 - 6i \\ f^{(2)}(z) = 6z - 6 & \qquad f^{(2)}(i) = -6 + 6i \\ f^{(3)}(z) = 6 & \Longrightarrow \quad f^{(3)}(i) = 6 \\ f^{(k)}(z) = 0, \quad \forall\, k > 3. & \qquad f^{(k)}(i) = 0, \quad \forall\, k > 3. \end{array}$$

Di conseguenza scriviamo

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(i)}{k!}(z-i)^k = f(i) + f^{(1)}(i)(z-i) + \frac{1}{2}f^{(2)}(i)(z-i)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(i)(z-i)^3 \\ &= 1 + 3i + (1-6i)(z-i) + (-3+3i)(z-i)^2 + (z-i)^3. \end{aligned}$$

**Esercizio 2.** Scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione

$$f(z) = \sin z,$$

determinandone i raggi di convergenza.

*Soluzione.* Innanzitutto osserviamo che, essendo $f(z)$ intera, allora la serie di Taylor converge su tutto $\mathbb{C}$. Una via per calcolare lo sviluppo in serie di Taylor consiste nel calcolare esplicitamente le derivate di $f(z)$.

Un metodo alternativo per ottenere lo sviluppo in serie di MacLaurin di $\sin z$ consiste nello sfruttare la definizione di seno come combinazione di esponenziali e lo sviluppo di MacLaurin della funzione esponenziale, ovvero

$$e^z = \sum_k \frac{z^k}{k!}.$$

Scriviamo dunque

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{\displaystyle\sum_k \frac{(iz)^k}{k!} - \sum_k \frac{(-iz)^k}{k!}}{2i} = \frac{\displaystyle\sum_k \frac{(iz)^k-(-iz)^k}{k!}}{2i} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_h \frac{(iz)^{2h}-(iz)^{2h}}{(2h)!} + \sum_h \frac{(iz)^{2h+1}-(-iz)^{2h+1}}{(2h+1)!}}{2i} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_h \frac{2(iz)^{2h+1}}{(2h+1)!}}{2i} = \sum_h \frac{i^{2h}}{(2h+1)!} z^{2h+1} = \sum_h \frac{(-1)^h}{(2h+1)!} z^{2h+1}.
\end{aligned}$$

**Esercizio 3.** Scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin di

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

determinandone in raggio di convergenza.

*Soluzione.* Dall'esercizio precedente sappiamo che

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

di conseguenza

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}.$$

Verifichiamo che il raggio di convergenza è tutto $\mathbb{C}$:

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 0.$$

Osserviamo quindi che che la funzione $f(z)$ è analitica su tutto $\mathbb{C}$, ammettendo uno sviluppo in serie di Taylor con raggio $\infty$. Infatti, sebbene possa sembrare che essa possegga una singolarità nell'origine, questa è solo apparente, essendo possibile definire $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = 1$.

---

## Esercizi aggiuntivi svolti.

**Esercizio 4.** Scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin di

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

e determinarne il raggio di convergenza.

*Soluzione.* Innanzitutto osserviamo che $f(z)$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, quindi può essere sviluppata in serie di MacLaurin ed il massimo raggio di convergenza sarà 1. Il calcolo delle derivate di $f(z)$ è possibile, ma lungo, quindi è preferibile sfruttare un'altra strategia. Difatti, sfruttando l'unicità della serie di Taylor, possiamo ricordare la somma della serie geometrica: chiamiamo quindi $w = -z^2$ e sfruttiamo la somma della serie geometrica vista in precedenza, osservando che per $|w| < 1 \iff |-z^2| \iff |z| < 1$ possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_k (-z^2)^k = \sum_k (-1)^k z^{2k}.$$

In conclusione il raggio di convergenza è esattamente 1.

**Esercizio 5.** Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $z_0 = 3$ di

$$f(z) = ze^z$$

e determinarne il raggio di convergenza

*Soluzione.* Notiamo che $f(z)$ è intera e allora la serie di Taylor converge su tutto $\mathbb{C}$. Per scrivere lo sviluppo in serie di Taylor ci occorrono le derivate di $f(z)$:

$$\begin{aligned}
&f^{(1)}(z) = e^z + ze^z \\
&f^{(2)}(z) = e^z + e^z + ze^z \\
&f^{(3)}(z) = e^z + e^z + e^z + ze^z \\
&\vdots \\
&f^{(k)}(z) = ke^z + ze^z \Longrightarrow f^{(k)}(3) = e^3(k+3)
\end{aligned}$$

Di conseguenza scriviamo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(3)}{k!}(z-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^3(k+3)}{k!}(z-3)^k$$

---

## Esercizi da svolgere a casa.

1. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor di $g(z) = 4z^3 - 2z + 1$ centrato in $1 + i$.
2. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $z_0 = 0$ e $z_0 = \pi/2$ di $\cos z$.
3. Scrivere gli sviluppi di MacLaurin di $\sinh z$ e $\cosh z$.
4. Scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin di $g(z) = \frac{\sinh(z)}{z}$.
5. Scrivere lo sviluppo di Taylor in $z_0 = \pi/2$ di $h(z) = \frac{\cos(z)}{(z-\pi/2)}$.
6. Scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin di $g(z) = \frac{2}{z^4-1}$ e determinarne il raggio di convergenza.