Unicità della soluzione dell'equazione del calore

Teorema Il problema ai valori iniziale e al bordo

$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\ u = u_0 & \text{in } \Omega \times \{0\} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h & \text{su } \partial\Omega \times (0,+\infty) \end{cases}$$

ammette al più una soluzione $u \in C^1(0,+\infty; C^2(\Omega))$.

Oss. In generale, per una funzione $u = u(x,t)$ con $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $t \in (0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ si usa la notazione $u \in C^1(0,+\infty; C^2(\Omega))$ per significare che per ogni $t \in (0,+\infty)$ fissato la funzione $u(\cdot,t)$ è di classe C^2 in Ω e inoltre, al variare di t, è di classe C^1 su $(0,+\infty)$.

Dim. Supponiamo che $u, \tilde{u} \in C^1(0,+\infty; C^2(\Omega))$ siano soluzioni e poniamo $w := u - \tilde{u}$. Allora:

$$\begin{cases} \partial_t w - D\Delta w = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\ w = 0 & \text{in } \Omega \times \{0\} \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0,+\infty). \end{cases}$$

Da qui abbiamo:

$$\int_\Omega \underbrace{\partial_t w\, w}_{=\frac{1}{2}\partial_t(w^2)} dx - D\int_\Omega \underbrace{\Delta w\, w}_{\substack{= \mathrm{div}(\nabla w) w \\ = \mathrm{div}(w\nabla w) - |\nabla w|^2}} dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dx - D\underbrace{\int_\Omega \mathrm{div}(w\nabla w)dx}_{= \int_{\partial\Omega} w(\nabla w\cdot \underline{n})d\sigma} + D\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = 0$$

$$= \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega \times (0,+\infty)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dx + D\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dx = -2D\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \le 0$$

$\Rightarrow \int_\Omega w^2(x,t)dx$ come funzione di t è non crescente:

$$\int_\Omega w^2(x,t)dx \le \int_\Omega w^2(x,0)dx \quad \forall t>0$$

$= 0$ (per la condizione iniziale su w)

da cui
$$\int_\Omega w^2(x,t)\,dx = 0 \qquad \forall t > 0$$

e infine $w^2(x,t) = 0$ per (q.o.) $x \in \Omega$ e $\forall t > 0$.
Questo dice che $u = \tilde{u}$ per (q.o.) $x \in \Omega$ e $\forall t > 0$. $\boxtimes$