ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 11

1. Siano H_1 e H_2 spazi di Hilbert su $\mathbb{F}$. Sia $U : H_1 \to H_2$ un isomorfismo isometrico. Sia $T \in \mathcal{B}(H_1)$ e poniamo $S = UTU^{-1}$.
   (a) Dimostrare che $S \in \mathcal{B}(H_2)$ e $\|S\|_{\mathrm{op}} = \|T\|_{\mathrm{op}}$.
   (b) Dimostrare che S è normale, autoaggiunto o unitario se e solo se T lo è.
   (c) Dimostrare che $\sigma(S) = \sigma(T)$.
   (d) Dimostrare che $\sigma_p(S) = \sigma_p(T)$, $\sigma_r(S) = \sigma_r(T)$, $\sigma_c(S) = \sigma_c(T)$.
   (e) Dimostrare che $S \in \mathcal{K}(H_2)$ se e solo se $T \in \mathcal{K}(H_1)$.
2. Siano X e Y spazi normati e sia $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.
   (a) Dimostrare che, se $T : X \to Y$ è un operatore compatto, allora, per ogni sottospazio vettoriale $V \subseteq X$, anche la restrizione $T|_V : V \to \overline{T(V)}$ è un operatore compatto. Qui $\overline{T(V)}$ è la chiusura di $T(V)$ in Y; inoltre V e $\overline{T(V)}$ sono spazi normati con le norme indotte da X e Y.
   (b) Dimostrare che, se esiste un sottospazio vettoriale $V \subseteq X$ di dimensione infinita tale che $T|_V : V \to \overline{T(V)}$ è un isomorfismo, allora T non è compatto.
   (c) Supponiamo che X sia uno spazio di Banach. Dimostrare che, se esiste un sottospazio vettoriale chiuso $V \subseteq X$ di dimensione infinita tale che $T|_V$ è coercivo in norma, allora T non è compatto.
   (d) Vale il risultato del punto (c) se non si assume che il sottospazio V sia chiuso?
3. Sia H uno spazio di Hilbert. Sia $P \in \mathcal{B}(H)$ una proiezione ortogonale. Dimostrare che $P \in \mathcal{K}(H)$ se e solo se P ha rango finito.
4. Sia $h \in C[0, 1]$ e sia $T_h \in \mathcal{B}(L^2(0, 1))$ l'operatore di moltiplicazione per h (vedi esercitazione 5, esercizio 5).
   (a) Dimostrare che, se $h(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$, allora T_h è un isomorfismo.

   Supponiamo che $0 \leq a < b \leq 1$.
   (b) Dimostrare che l'insieme
   $$V_{a,b} = \{f \in L^2(0, 1) : f|_{(0,1)\setminus(a,b)} = 0 \text{ q.o.}\} \tag{†}$$
   è un sottospazio vettoriale chiuso di $L^2(0, 1)$ di dimensione infinita, isometricamente isomorfo a $L^2(a, b)$.
   [Suggerimento: dimostrare che la mappa di *estensione per zeri* $\Phi : L^2(a, b) \to L^2(0, 1)$, data da
   $$\Phi g(t) = \begin{cases} g(t) & \text{se } t \in (a, b), \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
   per ogni $g \in L^2(a, b)$, è un'isometria lineare, la cui immagine è $V_{a,b}$.]
   (c) Dimostrare che, se $\inf_{t\in[a,b]} |h(t)| > 0$, allora $T_h|_{V_{a,b}}$ è coercivo in norma, dove $V_{a,b}$ è definito in (†).
   (d) Dimostrare che $T_h \in \mathcal{K}(L^2(0, 1))$ se e solo se $h(t) = 0$ per ogni $t \in [0, 1]$.
   [Suggerimento: esercizio 2.(c).]
5. Sia $T : L^2(0, \pi) \to L^2(0, \pi)$ definito da
   $$Tf(t) = \begin{cases} if(t) & \text{se } t \in (0, \pi/2), \\ t \int_{\pi/2}^{\pi} f(s)\, ds & \text{se } t \in [\pi/2, \pi). \end{cases}$$
   (a) Dimostrare che $T \in \mathcal{B}(L^2(0, \pi))$.
   (b) Determinare se T è invertibile.
   (c) Determinare se T è compatto.
   (d) Determinare l'aggiunto T^*.
   (e) Determinare $\sigma_p(T)$.

6. Sia H uno spazio di Hilbert complesso separabile di dimensione infinita, e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sua base ortonormale. Poniamo
$$Te_k = \frac{e_{k+1}}{k+1} - e_k \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$
   (a) Dimostrare che T si estende a un unico operatore in $\mathcal{B}(H)$.
   (b) Denotando con T l'estensione suddetta, scrivere una formula per Tx per ogni $x \in H$.
   (c) Determinare se T è compatto.
   (d) Determinare se T è autoaggiunto e se T è normale.
   (e) Determinare $\sigma_p(T)$.
7. Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert separabili.
   (a) Siano $\{e_j\}_{j\in J}$ e $\{f_k\}_{k\in K}$ basi ortonormali di H_1 e H_2 rispettivamente. Dimostrare che, per ogni $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,
$$\sum_{j\in J} \|Te_j\|_{H_2}^2 = \sum_{k\in K} \|T^* f_k\|_{H_1}^2.$$
   [Suggerimento: con il teorema di Pitagora esprimere $\|Te_j\|_{H_2}^2$ rispetto alla b.o.n. $\{f_k\}_k$.]
   (b) Dimostrare che, per $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, la quantità (finita o infinita)
$$\sqrt{\sum_{j\in J} \|Te_j\|_{H_2}^2} \tag{‡}$$
   è indipendente dalla base ortonormale $\{e_j\}_{j\in J}$ di H_1.

   La quantità (‡) è detta *norma di Hilbert–Schmidt* dell'operatore T e si denota con $\|T\|_{\mathrm{HS}}$. Un operatore $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ si dice *operatore di Hilbert–Schmidt* se $\|T\|_{\mathrm{HS}} < \infty$. L'insieme degli operatori di Hilbert–Schmidt da H_1 a H_2 è denotato con $\mathrm{HS}(H_1, H_2)$; se $H_1 = H_2$, tale insieme è anche denotato con $\mathrm{HS}(H_1)$.
   (c) Dimostrare che $\mathrm{HS}(H_1, H_2)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}(H_1, H_2)$.
   (d) Dimostrare che $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ è una norma su $\mathrm{HS}(H_1, H_2)$.
   (e) Dimostrare che, per ogni $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,
$$\|T\|_{\mathrm{op}} \le \|T\|_{\mathrm{HS}} = \|T^*\|_{\mathrm{HS}}.$$
   (f) Sia H_3 un altro spazio di Hilbert separabile. Dimostrare che, per ogni $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ e $T \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$, si ha
$$\|TS\|_{\mathrm{HS}} \le \|T\|_{\mathrm{op}} \|S\|_{\mathrm{HS}} \qquad \text{e} \qquad \|TS\|_{\mathrm{HS}} \le \|T\|_{\mathrm{HS}} \|S\|_{\mathrm{op}}.$$
   (g) Dimostrare che gli operatori di rango finito sono operatori di Hilbert–Schmidt.
   (h) Dimostrare che l'insieme degli operatori di rango finito è un sottoinsieme denso dello spazio $(\mathrm{HS}(H_1, H_2), \|\cdot\|_{\mathrm{HS}})$.
   (i) Dimostrare che $\mathrm{HS}(H_1, H_2) \subseteq \mathcal{K}(H_1, H_2)$.
   (j) Dimostrare che $(\mathrm{HS}(H_1, H_2), \|\cdot\|_{\mathrm{HS}})$ è uno spazio di Banach.
   (k) Sia $\{e_j\}_{j\in J}$ una base ortonormale di H_1. Dimostrare che, per ogni $T, S \in \mathrm{HS}(H_1, H_2)$,
$$\sum_{j\in J} |\langle Te_j, Se_j\rangle_{H_2}| \le \|T\|_{\mathrm{HS}} \|S\|_{\mathrm{HS}}.$$
   (l) Sia $\{e_j\}_{j\in J}$ una base ortonormale di H_1. Per ogni $T, S \in \mathrm{HS}(H_1, H_2)$, poniamo
$$\langle T, S\rangle_{\mathrm{HS}} = \sum_{j\in J} \langle Te_j, Se_j\rangle_{H_2}. \tag{$\star$}$$
   Dimostrare che $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{HS}}$ è un prodotto scalare su $\mathrm{HS}(H_1, H_2)$, la cui norma indotta è $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$.
   (m) Siano $T, S \in \mathrm{HS}(H_1, H_2)$. Dimostrare che il valore del membro destro di ($\star$) non dipende dalla base ortonormale $\{e_j\}_{j\in J}$ di H scelta.
   (n) Dimostrare che $(\mathrm{HS}(H_1, H_2), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{HS}})$ è uno spazio di Hilbert.
8. Per $\underline{w} \in \ell^\infty$, sia $D_{\underline{w}} \in \mathcal{B}(\ell^2)$ l'operatore di moltiplicazione per $\underline{w}$.
   (a) Dimostrare che $\|D_{\underline{w}}\|_{\mathrm{HS}} = \|\underline{w}\|_{\ell^2}$, e che dunque $D_{\underline{w}} \in \mathrm{HS}(\ell^2)$ se e solo se $\underline{w} \in \ell^2$.
   (b) Esibire un operatore $T \in \mathrm{HS}(\ell^2)$ tale che $\|T\|_{\mathrm{HS}} > \|T\|_{\mathrm{op}}$.
9. Sia $K \in L^2((a,b)\times(c,d))$, ove $-\infty < a < b < \infty$ e $-\infty < c < d < \infty$. Sia $T_K \in \mathcal{B}(L^2(c,d), L^2(a,b))$ l'operatore integrale con nucleo K. Dimostrare che $T_K \in \mathrm{HS}(L^2(c,d), L^2(a,b))$ e che $\|T_K\|_{\mathrm{HS}} = \|K\|_{L^2}$.
   [Suggerimento: come nella dimostrazione che T_K è compatto, sviluppare K rispetto a una base ortonormale della forma $\{\phi_n \otimes \psi_m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$.]