Funzioni Complesse

Funzioni elementari in $\mathbb{C}$, funzioni olomorfe e armoniche

Richiami di teoria.

- **Esponenziale complesso**:

Funzione esponenziale in $\mathbb{C}$

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$$

Vediamo le principali proprietà:

- $|e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
- $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- $(e^z)^n = e^{nz} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}$;
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ (periodicità dell'esponenziale complesso).

- **Funzioni trigonometriche** con argomento complesso:

Funzioni trigonometriche in $\mathbb{C}$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

Le funzioni trigonometriche in campo complesso godono di molte delle proprietà delle loro controparti reali. In particolare:

- Sono funzioni periodiche di periodo 2π, e cioè $\sin(z+2\pi) = \sin(z)$ e $\cos(z+2\pi) = \cos(z)$;
- vale la relazione fondamentale della trigonometria: $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$;
- si ha $\cos(z) = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $\sin(z) = 0 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C'è però una grande differenza: seno e coseno di argomento reale sono funzioni limitate tra -1 e 1; ciò non è vero per seno e coseno complesso, che risultano essere funzioni <u>non limitate</u>. Infatti, è abbastanza facile provare che $|\sin(z)| = \sqrt{\sin^2(x) + \sinh^2(y)}$, e quindi:

$$|\sin(z)| = \sqrt{\sin^2(x) + \sinh^2(y)} \geq \sqrt{\sinh^2(y)} = |\sinh(y)| \to \infty \text{ per } y \to \infty$$

Lo stesso ragionamento può essere usato per mostrare la non limitatezza del coseno complesso.

- **Funzioni iperboliche** con argomento complesso sinh e $\cosh(z)$:

Funzioni iperboliche in $\mathbb{C}$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- $\cosh(z) = 0 \iff z = \frac{\pi}{2}i + k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ e $\sinh(z) = 0 \iff z = k\pi i, k \in \mathbb{Z}$;
- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Esercizio 1. Risolvere: $\dfrac{2\cosh(z) - e^z - 1}{z^2 + i} = 0.$

Soluzione. Innanzitutto poniamo le condizioni di esistenza:

$$z^2 \neq -i \implies z^2 \neq e^{\frac{3}{2}\pi i} \implies z \notin \{e^{\frac{3}{4}\pi i}, e^{\frac{7}{4}\pi i}\}.$$

A questo punto, annulliamo il numeratore usando la formula per il $\cosh(z)$, ottenendo

$$2\cosh(z) - e^z - 1 = 0 \implies e^z + e^{-z} - e^z - 1 = 0 \implies e^{-z} = 1 \implies e^{-x}e^{-yi} = e^{0i}.$$

quindi deve valere:

$$\begin{cases} e^{-x} &= 1 \\ -y &= 0 + 2k\pi \end{cases} \implies \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Possiamo concludere che tutte le soluzioni sono date da $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Potevamo arrivare allo stesso risultato anche separando parte reale e immaginaria:

$$e^{-x}e^{-iy} = 1 \implies e^{-x}\cos(-y) + ie^{-x}\sin(-y) = e^{-x}\cos(y) - ie^{-x}\sin(y) = 1,$$

e riscriviamo l'equazione come un sistema di due equazioni, una per parte reale ed una per parte immaginaria, otteniamo:

$$\begin{cases} e^{-x}\cos(y) = 1 \\ e^{-x}\sin(y) = 0 \implies y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Considerando il caso k pari abbiamo che la prima equazione diventa

$$e^{-x}\cos(2k\pi) = e^{-x} = 1 \implies x = 0.$$

Ottenendo le soluzioni $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Se k è dispari abbiamo invece che la prima equazione diventa

$$e^{-x}\cos((2k+1)\pi) = -e^{-x} = 1 \implies \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Tutte le soluzioni sono quindi $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Richiami di teoria:

Considerata una funzione $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, essa è detta *olomorfa* (derivabile o analitica) se, preso $h \in \mathbb{C}$, esiste $\forall\, z \in \mathcal{A}$ il limite

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Un modo semplice per verificare se una funzione è olomorfa consiste nel verificare le *condizioni di Cauchy-Riemann*, cioè, separate parte reale e parte immaginaria di f

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

(nota che u e v sono funzioni a variabili reali) se, $\forall\, z = x + iy \in \mathcal{A}$, vale

Condizioni di Cauchy - Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Si può verificare che la derivata di $f(z)$ può essere espressa come

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Parte reale e immaginaria di una funzione olomorfa sono collegate ad una particolare famiglia di funzioni di due variabili reali dette funzioni armoniche. Vediamone la definizione.

Definizione. Una funzione reale di due variabili $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è detta *armonica* se è di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ e $\forall\,(x, y) \subseteq \Omega$ soddisfa l'*equazione differenziale di Laplace*, ovvero:

Equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \Longrightarrow \Delta u(x, y) = 0$$

dove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ è detto operatore Laplaciano.

Teorema. Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione a variabile complessa olomorfa in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, allora le funzioni di due variabili reali $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono armoniche in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definizione. Data una funzione di due variabili reali $u(x, y)$ armonica in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, è possibile trovare una funzione di due variabili reali $v(x, y)$ armonica in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ detta funzione *armonica coniugata* in modo tale che $f(z) := f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$risulti essere olomorfa in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

Nota. Vale la pena sottolineare che l'implicazione contraria del Teorema appena dimostrato non è vera in generale: cioè, se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono armoniche, non è detto che la funzione di variabile complessa $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia olomorfa. Un semplice controesempio è dato infatti dalle funzioni $u = x$ e $v = 1$.

Esercizio 2. Stabilisci se $f(z) = z^3$ è olomorfa su $\mathbb{C}$, sia usando la definizione, sia verificando le condizioni di Cauchy-Riemann.

Soluzione. Applicando la definizione di derivata si ha:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{(z + h)^3 - z^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{z^3} + h^3 + 3z^2 h + 3zh^2 - \cancel{z^3}}{h} = 3z^2$$

Notiamo che il valore del limite non può dipendere in nessun modo dalla direzione con cui $h \to 0$. Ne concludiamo che f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Per verificare che f è olomorfa usando le condizioni di Cauchy-Riemann, dobbiamo esprimere la funzione come $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Si ha che:

$$f(x + iy) = (x + iy)^3 = \underbrace{x^3 - 3xy^3}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(3x^2 y - y^3)}_{v(x,y)}$$

Calcoliamo quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -6xy \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 6xy \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \end{cases}$$

e quindi le condizioni di Cauchy-Riemann diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy = -6xy \end{cases}$$

Le due equazioni sono identicamente soddisfatte $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ne concludiamo di nuovo che f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$; in particolare, questo fa di f una funzione intera.

Esercizio 3. Stabilisci se $f(z) = |z|^2$ è olomorfa su $\mathbb{C}$, sia usando la definizione, sia verificando le condizioni di Cauchy-Riemann.

Soluzione. Innanzitutto esprimiamo f utilizzando la forma algebrica di $z = x + iy$, ottenendo così

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Per verificare che $f(z)$ non è olomorfa basta dimostrare che il limite del rapporto incrementale dipende dalla direzione con cui $h \to 0$. Infatti, consideriamo $h \to 0$ lungo l'asse reale (cioè $h \in \mathbb{R}$), allora

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{h} = 2x$$

Si noti che, essendo l'incremento h un numero reale, esso incrementa solo la coordinata x del numero z. Invece se consideriamo $h \to 0$ lungo l'asse immaginario (cioè $h = ik, k \in \mathbb{R}$), allora

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{x^2 + (y+k)^2 - x^2 - y^2}{ik} = \frac{2y}{i} = -2iy$$

Essendo i due limiti diversi $\forall\, (x, y) \neq (0, 0)$, concludiamo che f non è olomorfa su $\mathbb{C}$.

Analogamente, scrivendo $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, osserviamo che $u(x, y) = x^2 + y^2$, mentre $v(x, y) = 0$. E' immediato vedere che le condizioni di Cauchy-Riemann diventano:

$$2x = 0 \quad \text{e} \quad 2y = 0$$

che sono soddisfatte solo per $(x, y) = (0, 0)$. Coerentemente con il risultato precedente, concludiamo che f non è olomorfa su $\mathbb{C}$ ed è derivabile solo nell'origine.

Esercizio 4. Determina se la funzione $f(x, y) = x^3 - i(y-1)^3$ è olomorfa.

Soluzione. Osserviamo che le componenti di f sono

$$u(x, y) = x^3, \quad v(x, y) = -(y-1)^3$$

Per determinare se f è olomorfa, possiamo imporre le condizioni di Cauchy-Riemann. Calcoliamo per cui le derivate parziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -3(y-1)^2 \end{cases}$$

La seconda condizione di C-R è facilmente verificata, mentre la prima condizione è verificata solo se $x^2 + (y-1)^2 = 0$, ossia solo se $x = 0$ e $y = 1$. Dunque possiamo concludere che f non è olomorfa ed è derivabile solo in $z = i$.

Esercizio 5. Considera una funzione f olomorfa in Ω. Sia $\bar{f(z)}$ anch'essa olomorfa in Ω. Verifica che f è necessariamente costante.

Soluzione. Poichè le funzioni

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$
$$g(x, y) = \bar{f(x, y)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

sono olomorfe in Ω, dovranno valere per entrambe le condizioni di Cauchy-Riemann, per cui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Allora deve valere

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

per ogni $(x,y) \in \Omega$, per cui $u(x,y)$ è costante in Ω e lo stesso ragionamento è valido per $v(x,y)$. Abbiamo pertanto dimostrato che f è costante.

Esercizio 6. Determina per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $u(x,y) = \sin(x)(e^{-\alpha y} + e^{y})$ può essere considerata parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$ e trova tale funzione.

Soluzione. Dal teorema che abbiamo visto prima, affinché $u(x,y)$ sia parte reale di una funzione olomorfa, essa deve essere armonica e cioè deve soddisfare l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Longrightarrow \left(\alpha^2 - 1\right)\sin(x)e^{-\alpha y} = 0 \Longrightarrow \alpha = \pm 1$$

Una volta trovati i valori ammissibili di α, possiamo determinare $v(x,y)$ (che è quello che ci manca per determinare $f(z)$) tramite le condizioni di Cauchy-Riemann. Distinguiamo quindi due casi a seconda del valore di α.

Per $\alpha = 1$ si ha che $u(x,y) = \sin(x)(e^{-y} + e^{y}) = 2\sin(x)\cosh(y)$; dalla prima equazione di Cauchy-Riemann si ricava:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2\cos(x)\cosh(y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \Longrightarrow v(x,y) = \int 2\cos(x)\cosh(y)\mathrm{d}y = 2\cos(x)\sinh(y) + c(x)$$

e dalla seconda equazione di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -2\sin(x)\sinh(y) + c'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2\sin(x)\sinh(y) \Longrightarrow c'(x) = 0 \Longrightarrow c(x) = k$$

Quindi in definitiva: $f(x+iy) = \sin(x)(e^{-y} + e^{y}) + i(2\cos(x)\sinh(y) + k)$. Sostituendo le funzioni trigonometriche e iperboliche con le loro espressioni in termini di esponenziali complessi, non è difficile verificare che $f(z) = 2\sin(z) + ki$.

Per $\alpha = -1$si ha che $u(x,y) = 2\sin(x)e^{y}$; dalla prima equazione di Cauchy-Riemann si ricava:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2\cos(x)e^{y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \Longrightarrow v(x,y) = \int 2\cos(x)e^{y}\mathrm{d}y = 2\cos(x)e^{y} + c(x)$$

e dalla seconda equazione di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -2\sin(x)e^{y} + c'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2\sin(x)e^{y} \Longrightarrow c'(x) = 0 \Longrightarrow c(x) = k$$

Quindi in definitiva: $f(z) = f(x+iy) = 2\sin(x)e^{y} + i(2\cos(x)e^{y} + k) = 2ie^{y}(\cos(x) - i\sin(x)) + ki = 2ie^{y}e^{-ix} + ki = 2ie^{-iz} + ki, k \in \mathbb{R}$

Esercizi aggiuntivi svolti.

Esercizio 7. Risolvi l'equazione $\cos(z) = i$.

Soluzione. Usando l'espressione per $\cos(z)$ e scrivendo z in forma algebrica otteniamo

$$\cos(z) = i \implies e^{ix-y} + e^{-ix+y} = 2i. \implies e^{-y}[\cos(x) + i\sin(x)] + e^{y}[\cos(-x) + i\sin(-x)] = 2i,$$

riscrivendo l'equazione come un sistema di due equazioni, una per la parte reale e una per la parte immaginaria, otteniamo

$$\begin{cases} \cos(x)(e^{-y} + e^{y}) = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin(x)(e^{-y} - e^{y}) = 2. \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda, per k pari otteniamo

$$(e^{-y} - e^{y}) = 2 \implies \sinh(y) = -1 \implies y = \text{arcsinh}(-1),$$

mentre per k dispari otteniamo

$$-(e^{-y} - e^{y}) = 2 \implies \sinh(y) = 1 \implies y = \text{arcsinh}(1).$$

In conclusione $z = \frac{\pi}{2} + k\pi + i\text{arcsinh}((-1)^{k+1})$.

Nota. $\sinh(y) = 1$ può essere risolto esplicitamente risolvendo $e^{y} - e^{-y} = 2$, ponendo $t = e^{y}$.

Esercizio 8. Risolvi l'equazione $e^{-\mathcal{I}mz} = \cos(z) + i\sin(z)$.

Soluzione. Usando l'espressione per le funzioni trigonometriche otteniamo

$$e^{-\mathcal{I}mz} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \implies e^{-\mathcal{I}mz} = e^{iz}.$$

Scrivendo il numero complesso in forma algebrica si ottiene l'equazione

$$e^{-y} = e^{ix-y} \implies e^{-y} = e^{-y}e^{ix} \implies e^{ix} = 1 \implies \cos(x) + i\sin(x) = 1,$$

che può essere scritta, separando parte reale e parte immaginaria, come

$$\begin{cases} \cos(x) = 1 \\ sin(x) = 0 \end{cases} \implies x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La soluzione è quindi l'insieme di tutte le rette verticali $\{z : \mathcal{R}e(z) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 9. Verifica che $f(z) = \sin(z)$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e calcolane la derivata.

Soluzione. Ricordiamo che $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ e poniamo $z = x + iy$.

$$f(z) = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i} = -\frac{i}{2}e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) + \frac{i}{2}e^{y}(\cos(x) - i\sin(x))$$

Isolando parte reale e immaginaria si ha:

$$f(z) = \underbrace{\sin(x)\left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right)}_{u(x,y)} + i\underbrace{\cos(x)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)}_{v(x,y)}$$

Non ci resta che calcolare le derivate parziali per controllare le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\left(\dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \sin(x)\left(\dfrac{-e^{-y} + e^{y}}{2}\right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\sin(x)\left(\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\left(\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) \end{cases}$$

Si vede subito che le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte identicamente in ogni punto, quindi f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. La derivata di f è quindi:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right) - i\sin(x)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) = \cos(z)$$

Esercizio 10. Verifica che $f(z) = e^z$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e calcolane la derivata.
Soluzione. Scriviamo

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos(y)}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin(y)}_{v(x,y)}.$$

Le condizioni di Cauchy-Riemann sono verificate $\forall\, z \in \mathbb{C}$, infatti:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin(y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \sin(y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \cos(y). \end{cases}$$

La derivata di f è quindi

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = e^x e^{iy} = e^z.$$

Esercizio 11. Dopo aver verificato che è olomorfa, calcola la derivata di $f(z) = az^2 + bz + c$.
Soluzione. Scriviamo

$$f(z) = ax^2 - ay^2 + bx + c + i(2axy + by)$$

e verifichiamo che le condizioni di Cauchy-Riemann valgono $\forall\, z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2ax + b \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2ay \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2ay \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2ax + b. \end{cases}$$

La derivata di f è quindi

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2ax + b + i2ay = 2az + b.$$

Esercizio 12. Dopo aver verificato che è olomorfa, calcola la derivata di $f(z) = 1/z$.
Soluzione. Innanzitutto scriviamo la funzione $f(z)$ separando parte reale e parte immaginaria:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Verifichiamo a questo punto le condizioni di Cauchy-Riemann calcolando:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases}$$

Si vede subito che la funzione soddisfa quindi le condizioni di Cauchy-Riemann $\forall\,(x,y) \neq (0,0)$. La derivata si può ottenere come

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2 z^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Esercizio 13. Determina tutte le funzioni olomorfe tali che $\mathcal{R}e(f(z)) = -1 + \mathcal{I}m(z)$.
Soluzione. Innanzitutto osserviamo che

$$u(x,y) := \mathcal{R}e(f(z)) = -1 + \mathcal{I}m(z) = -1 + y.$$

Poniamo ora le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \implies \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \implies \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -1. \end{cases} \implies v(x,y) = -x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = -1 + y + i(-x+k) \implies f(z) = -iz - 1 + ik.$$

Esercizio 14. Determina tutte le funzioni olomorfe tali che $\mathcal{I}m(f(z)) = \mathcal{R}e(z)$ e $f(0) = 1$.
Soluzione. Innanzitutto osserviamo che

$$v(x,y) := \mathcal{I}m(f(z)) = \mathcal{R}e(z) = x.$$

Poniamo ora le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \implies \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \implies \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -1. \end{cases} \implies u(x,y) = -y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = -y + k + ix = iz + k.$$

In conclusione, usando $f(0) = 0$, concludiamo che $k = 1$, quindi $f(z) = iz + 1$.

Esercizio 15. Verifica l'armonicità di $u(x,y) = 2xy$ e, nel caso, calcolane la relativa armonica coniugata, scrivendo esplicitamente la funzione olomorfa $f(z)$.
Soluzione. Verifichiamo l'armonicità di $u(x,y)$:

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 + 0 = 0$$

Per calcolarne l'armonica coniugata $v(x,y)$, iniziamo dalla prima equazione di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2y \Longrightarrow v(x,y) = \int 2y\mathrm{d}y = y^2 + c(x)$$

Utilizziamo ora la seconda equazione:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2x \Longrightarrow c'(x) = -2x \Longrightarrow c(x) = -x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

In conclusione

$$v(x) = y^2 - x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

e

$$\begin{aligned} f(z) = u(x,y) + iv(x,y) &= 2xy + i\left(y^2 - x^2 + k\right) \\ &= \frac{1}{i}\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) + ki \\ &= \frac{1}{i}(x+iy)^2 + \frac{k}{i} = \frac{1}{i}\left(z^2 + k\right), \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Esercizio 16. Determina le condizioni di armonicità per un generico polinomio di secondo grado in due variabili.

Soluzione. Innanzitutto scriviamo il generico polinomio di secondo grado come

$$P(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f, \quad a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}.$$

Poniamo ora la condizioni di armonicità:

$$\Delta P(x,y) := \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0 \implies 2a + 2b = 0 \implies \underline{a = -b}.$$

In conclusione un generico polinomio armonico di secondo grado è

$$P(x,y) = ax^2 - ay^2 + bxy + cx + dy + e, \quad a,b,c,d,e \in \mathbb{R}.$$

Un'immediata conseguenza è che tutti i polinomi di primo grado sono armonici.

Esercizio 17. Verifica l'armonicità di $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ e, nel caso, calcolane la relativa armonica coniugata, scrivendo esplicitamente la funzione olomorfa $f(x+iy)$.

Soluzione. Dall'esercizio 1 risulta immediato che la funzione è armonica. Per calcolarne l'armonica coniugata $v(x,y)$ scriviamo esplicitamente le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \implies \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x - 2y - 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \implies \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y + 2x - 3. \end{cases}$$

Integrando la prima in y otteniamo $v(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + c(x)$ e osserviamo che, per verificare la seconda

$$2y + c'(x) = 2y + 2x - 3. \implies c(x) = x^2 - 3x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

In conclusione

$$v(x) = x^2 - y^2 + 2xy - 3x - 2y + k$$

e

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = (1+i)z^2 - (2+3i)z + ki.$$

Esercizio 18. Verifica l'armonicità di $u(x,y) = e^{kx}\cos(ky)$, $k \in \mathbb{R}$, e calcolane la relativa armonica coniugata, scrivendo esplicitamente la funzione olomorfa $f(x+iy)$.

Soluzione. Calcoliamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = ke^{kx}\cos(ky) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[ke^{kx}\cos(ky)\right] = k^2 e^{kx}\cos(ky) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -ke^{kx}\sin(ky) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[-ke^{kx}\sin(ky)\right] = -k^2 e^{kx}\cos(ky) \end{cases}$$

A questo punto, verifichiamo l'equazione di Laplace:

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = k^2 e^{kx}\cos(ky) - k^2 e^{kx}\cos(ky) = 0.$$

Per calcolarne l'armonica coniugata $v(x,y)$ scriviamo esplicitamente le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \implies \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = ke^{kx}\cos(ky) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \implies \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = ke^{kx}\sin(ky) \end{cases}$$

Dalla prima si ricava che

$$v(x,y) = \int ke^{kx}\cos(ky)\,\mathrm{d}y = e^{kx}\sin(ky) + c(x)$$

sostituiamo ora nella seconda

$$ke^{kx}\sin(ky) + c'(x) = ke^{kx}\sin(ky) \implies c(x) = h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

In conclusione

$$v(x) = e^{kx}\sin(ky) + h$$

e

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = e^{kx}\cos(ky) + ie^{kx}\sin(ky) + hi = e^{kz} + hi.$$

Esercizi da svolgere a casa.

1. * Considera $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ (*mappa di Cayley*) e dimostra che $|f(z)| < 1 \Leftrightarrow Im(z) > 0$.
2. Risolvi $\sin(x) = 1$, $\cos(z) = 2$, $\sinh(z) = 0$ e $\cosh(z) = 0$.
3. Risolvi $\sin(z) + \cos(z) = -i$.
4. Determina tutte le funzioni olomorfe tali che $\mathcal{R}e(f(z)) = \mathcal{R}e(z)$.
5. Determina tutte le funzioni olomorfe tali che $\mathcal{R}e(f(z)) = \mathcal{I}m(z)$.
6. Determina tutte le funzioni olomorfe tali che $\mathcal{R}e(f(z)) = 2 - \mathcal{I}m(z)$ e $f(0) = 2 + i$.
7. Determina se la trasformazione di Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ è olomorfa e, nel caso, calcolane la derivata.
8. Determina se $f_1(z) = 2 - |z|^2 z$ e $f_2(x,y) = x(i-2x) + y(1-2y)$ sono olomorfe in qualche sottoinsieme di $\mathbb{C}$.

9. Considera $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ funzione olomorfa, dimostra che se vale una qualsiasi delle seguenti condizioni, f è necessariamente una costante.
   - $Re(f(z)) = 0, \quad \forall z \in \mathcal{C}$.
   - $Im(f(z)) = 0, \quad \forall z \in \mathcal{C}$.
   - $Re(f(z)) = Im(f(z)), \quad \forall z \in \mathcal{C}$.
   - * $|f(z)| = 1, \quad \forall z \in \mathcal{C}$.
10. Determina per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $u(x, y) = \alpha x^2 + y^2$ può essere considerata parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$ e trova tale funzione.
11. Determina le condizioni di armonicità per un generico polinomio di terzo grado.

* Esercizi non standard.