Esempi di modelli con ODE

1) Crescita malthusiana (Malthus, 1798)

- $x = x(t)$ quantità di individui al tempo t
- $t \in [0, +\infty)$

Legge di Malthus: la variazione nel tempo del numero di individui è proporzionale al numero corrente di individui.

$\frac{dx}{dt}$

x

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = r x}, \quad r > 0 \text{ costante}$$

$\rightarrow \quad x(t) = C_1 e^{rt}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$ costante arbitraria di integrazione

Per $t = 0$, $x(0) = C_1$ quantità di individui inizialmente presenti

$\rightsquigarrow x_0$

allora: $\quad x(t) = x_0 e^{rt}, \quad t \geq 0.$

condizione iniziale

2) Modello di Verhulst (1838)

Crescita di una popolazione in presenza di risorse limitate.

$$\frac{dx}{dt} = r(x)\,x$$

tasso di riproduzione non costante

$$r(x) = r_0\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = r_0\left(1 - \frac{x}{K}\right)x}$$

capacità del sistema

$$\frac{dx}{dt} = r_0 x - \frac{r_0}{K}x^2$$

La soluzione (provare per esercizio) è:

$$x(t) = x_0 \frac{K e^{r_0 t}}{K + x_0\left(e^{r_0 t} - 1\right)}$$

Notiamo: $x(0) = x_0$, $\lim_{t \to +\infty} x(t) = K \Rightarrow$ per tempi lunghi il numero di individui satura alla capacità del sistema.

3) Modello SIR (Kermack-McKendrik, 1927)

- $S(t)$ = n° di individui suscettibili al tempo t
- $I(t)$ = n° di individui infetti al tempo t
- $R(t)$ = n° di individui rimossi al tempo t

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S I, & \beta > 0 \text{ costante} \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I, & \gamma > 0 \text{ costante} \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

$\dfrac{d}{dt}(S+I+R) = 0 \Rightarrow$ n° totale di individui costante nel tempo.

$$S(t) + I(t) + R(t) = N_0$$

$$\Rightarrow \quad R(t) = N_0 - \left(S(t) + I(t) \right)$$