Analisi Funzionale

Biduale e convergenze deboli

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino
a.a. 2023/2024

Biduale e spazi riflessivi

Def. Sia X uno spazio normato. Il *biduale* X'' dello spazio X è il duale del duale di X.

Oss. Se $p, q \in (1, \infty)$ sono esponenti coniugati, allora

$$(\ell^p)' \underset{\text{isom.}}{\cong} \ell^q,$$

dunque anche

$$(\ell^p)'' \underset{\text{isom.}}{\cong} (\ell^q)' \underset{\text{isom.}}{\cong} \ell^p.$$

Vale una relazione simile fra X e X'' per altri spazi normati?

Prop. Sia X uno spazio normato. Definiamo $J : X \to X''$ ponendo

$$J(x)(\varphi) = \varphi(x) \qquad \forall x \in X, \ \varphi \in X'.$$

Allora $J : X \to X''$ è un'isometria lineare, detta *immersione canonica di X nel suo biduale*.

Def. Uno spazio normato X si dice *riflessivo* se l'immersione canonica $J : X \to X''$ è suriettiva.

Esempi e non-esempi di spazi riflessivi

Def. Uno spazio normato X si dice *riflessivo* se l'immersione canonica $J : X \to X''$ è suriettiva.

Oss. Sia X uno spazio normato.

- Se X è riflessivo, allora $X \underset{\text{isom.}}{\cong} X''$ (e in particolare X è di Banach).
- Tuttavia non basta che $X \underset{\text{isom.}}{\cong} X''$ per concludere che X sia riflessivo.
- Se $\dim X < \infty$, allora X è riflessivo: infatti $\dim X'' = \dim X' = \dim X$, dunque la mappa lineare iniettiva $J : X \to X''$ è anche suriettiva.

Prop.

(i) Ogni spazio di Hilbert H è riflessivo.

(ii) Se $(M, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura σ-finito e $p \in (1, \infty)$, allora $L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ è riflessivo.

(iii) Se $p \in (1, \infty)$, allora ℓ^p è riflessivo.

(iv) Gli spazi c_0, ℓ^1 e ℓ^∞ <u>non</u> sono riflessivi.

(v) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo di misura di Lebesgue positiva. Allora $L^1(I)$ e $L^\infty(I)$ non sono riflessivi.

Prop. Sia X uno spazio di Banach. Allora X è riflessivo se e solo se X' lo è.

Convergenza debole

Per una successione $(x_n)_n$ a valori in uno spazio normato X, abbiamo già introdotto la nozione di *convergenza in norma*:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \text{ in } X \qquad \iff \qquad \|x_n - x\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Def. Siano X uno spazio normato, $(x_n)_n$ una successione a valori in X e $x \in X$. Diciamo che $(x_n)_n$ *converge debolmente* a x, scritto $x \xrightharpoonup[n\to\infty]{} x$, se

$$\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(x) \qquad \forall \varphi \in X'.$$

Prop. Siano X uno spazio normato e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X. Siano $x, x' \in X$.

(i) *(unicità del limite debole)* Se $x_n \rightharpoonup x$ e $x_n \rightharpoonup x'$ in X, allora $x = x'$.

(ii) *(conv. in norma $\Rightarrow$ conv. debole)* Se $x_n \to x$ in X, allora $x_n \rightharpoonup x$ in X.

Oss. In $\mathbb{F}^d$ con la norma euclidea sono equivalenti:
• conv. in norma, • conv. debole, • conv. componente per componente.
Più in generale, se $\dim X < \infty$, allora convergenza in norma e convergenza debole in X sono equivalenti.

Oss. Se $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la base ortonormale canonica di ℓ^2, allora $\underline{e}^{(n)} \rightharpoonup \underline{0}$ in ℓ^2, ma $\underline{e}^{(n)} \not\to \underline{0}$ in ℓ^2.

Convergenza debole in spazi di Hilbert e L^p

Prop. Sia H uno spazio di Hilbert. Siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in H e $x \in H$. Allora

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \text{ in } H \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle x_n, y\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, y\rangle \quad \forall y \in H.$$

Prop. Valgono le seguenti proprietà.

(i) Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Siano $p, q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati con $p < \infty$. Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $L^p(M)$ e $f \in L^p(M)$. Allora

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ in } L^p(M) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_M f_n\, g\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_M f\, g\, d\mu \;\; \forall g \in L^q(M).$$

(ii) Siano $p, q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati con $p < \infty$. Siano $(\underline{x^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in ℓ^p e $\underline{x} \in \ell^p$. Allora

$$\underline{x^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x} \text{ in } \ell^p \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(n)} y_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \;\; \forall \underline{y} \in \ell^q.$$

(iii) Siano $(\underline{x^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in c_0 e $\underline{x} \in c_0$. Allora

$$\underline{x^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x} \text{ in } c_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(n)} y_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \;\; \forall \underline{y} \in \ell^1.$$

Convergenza debole e limitatezza

Prop. Sia X uno spazio normato. Siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X e $x \in X$. Se $x_n \rightharpoonup x$ in X per $n \to \infty$, allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in X e

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X .$$

Prop. (caratterizzazione della convergenza debole)
Sia X uno spazio normato. Sia $\Delta \subseteq X'$ tale che

$$\overline{\operatorname{span}\Delta}^{X'} = X'.$$

Siano $(x_n)_n$ una successione a valori in X e $x \in X$.
Sono equivalenti:

(i) $x_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} x$ in X;

(ii) la successione $(x_n)_n$ è limitata in X
e $\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(x)$ per ogni $\varphi \in \Delta$.

Coroll. Sia $p \in (1, \infty)$.

(i) Siano $(\underline{x^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in ℓ^p e $\underline{x} \in \ell^p$. Allora

$$\underline{x^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x} \text{ in } \ell^p \quad \iff \quad \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\underline{x^{(n)}}\|_p < \infty, \\ x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) Siano $(\underline{x^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in c_0 e $\underline{x} \in c_0$. Allora

$$\underline{x^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x} \text{ in } c_0 \quad \iff \quad \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\underline{x^{(n)}}\|_\infty < \infty, \\ x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(iii) Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $L^p(M)$ e $f \in L^p(M)$. Allora

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ in } L^p(M) \quad \iff \quad \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(M)} < \infty, \\ \int_E f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E f \, d\mu \\ \quad \text{per ogni } E \in \mathcal{M} \text{ con } \mu(E) < \infty. \end{cases}$$

(iv) Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$, dotato della misura di Lebesgue. Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $L^p(I)$ e $f \in L^p(I)$. Allora

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ in } L^p(I) \quad \iff \quad \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(I)} < \infty, \\ \int_a^b f_n(t) \, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t) \, dt \\ \quad \text{per ogni intervallo limitato } [a, b] \subseteq I. \end{cases}$$

Convergenza debole$*$ sul duale

Per una successione $(\varphi_n)_n$ a valori nel duale X' di uno spazio di Banach X abbiamo già introdotto due nozioni di convergenza:

- conv. in norma: $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ in $X' \iff \|\varphi_n - \varphi\|_{X'} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- conv. debole: $\varphi_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} \varphi$ in $X' \iff \Lambda(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda(\varphi) \quad \forall \Lambda \in X''$

Def. Siano X uno spazio di Banach, $(\varphi_n)_n$ una successione in X' e $\varphi \in X'$. Diciamo che $(\varphi_n)_n$ *converge debolmente$*$* a φ, scritto $\varphi_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{*} \varphi$, se

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(x) \quad \forall x \in X.$$

Oss. La convergenza debole$*$ $\varphi_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{*} \varphi$ non è altro che la <u>convergenza puntuale</u> dei funzionali φ_n al funzionale φ.

Prop. Siano X uno spazio di Banach e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X'. Siano $\varphi, \varphi' \in X'$.

(i) *(unicità del limite debole$*$)* Se $\varphi_n \xrightharpoonup{*} \varphi$ e $\varphi_n \xrightharpoonup{*} \varphi'$ in X', allora $\varphi = \varphi'$.

(ii) *(conv. debole $\Rightarrow$ conv. debole$*$)* Se $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ in X', allora $\varphi_n \xrightharpoonup{*} \varphi$ in X'. L'implicazione opposta vale se X è riflessivo.

Convergenza debole$*$ in L^∞, ℓ^∞ e ℓ^1

Possiamo parlare di convergenza debole$*$ in $L^\infty(M)$, ℓ^∞ e ℓ^1, identificandoli con i duali di $L^1(M)$, ℓ^1 e c_0 tramite gli isomorfismi isometrici Ψ già discussi.

Prop. Valgono le seguenti proprietà.

(i) Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $L^\infty(M)$ e $f \in L^\infty(M)$. Allora

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{*} f \text{ in } L^\infty(M) \iff \int_M f_n\, g\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_M f\, g\, d\mu \;\; \forall g \in L^1(M).$$

(ii) Siano $(\underline{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in ℓ^∞ e $\underline{x} \in \ell^\infty$. Allora

$$\underline{x}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{*} \underline{x} \text{ in } \ell^\infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(n)} y_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \;\; \forall \underline{y} \in \ell^1.$$

(iii) Siano $(\underline{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in ℓ^1 e $\underline{x} \in \ell^1$. Allora

$$\underline{x}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{*} \underline{x} \text{ in } \ell^1 \iff \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(n)} y_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \;\; \forall \underline{y} \in c_0.$$

Oss. Allo stesso modo si può parlare di convergenza debole$*$ in $L^q(M)$ e ℓ^q per $q \in (1, \infty)$, che però qui coincide con la convergenza debole.

Convergenza debole$*$ e limitatezza

Prop. Sia X uno spazio di Banach. Siano $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X' e $\varphi \in X'$. Se $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ in X' per $n \to \infty$, allora la successione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in X' e

$$\|\varphi\|_{X'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{X'} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X'}.$$

Prop. (caratterizzazione della convergenza debole$*$)
Sia X uno spazio di Banach. Sia $\Delta \subseteq X$ tale che

$$\overline{\operatorname{span}\Delta}^{X} = X.$$

Siano $(\varphi_n)_n$ una successione a valori in X' e $\varphi \in X'$.
Sono equivalenti:

(i) $\varphi_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{*} \varphi$ in X';

(ii) la successione $(\varphi_n)_n$ è limitata in X' e $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(x)$ per ogni $x \in \Delta$.

Coroll. Valgono le seguenti proprietà.

(i) Siano $(\underline{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in ℓ^∞ e $\underline{x} \in \ell^\infty$. Allora

$$\underline{x}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{*} \underline{x} \text{ in } \ell^\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\underline{x}^{(n)}\|_\infty < \infty, \\ x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(ii) Siano $(\underline{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in ℓ^1 e $\underline{x} \in \ell^1$. Allora

$$\underline{x}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{*} \underline{x} \text{ in } \ell^1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\underline{x}^{(n)}\|_1 < \infty, \\ x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(iii) Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $L^\infty(M)$ e $f \in L^\infty(M)$. Allora

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{*} f \text{ in } L^\infty(M) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^\infty(M)} < \infty, \\ \int_E f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_E f \, d\mu \\ \quad \text{per ogni } E \in \mathcal{M} \text{ con } \mu(E) < \infty. \end{cases}$$

(iv) Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$, dotato della misura di Lebesgue. Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $L^\infty(I)$ e $f \in L^\infty(I)$. Allora

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{*} f \text{ in } L^\infty(I) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^\infty(I)} < \infty, \\ \int_a^b f_n(t) \, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t) \, dt \\ \quad \text{per ogni intervallo limitato } [a, b] \subseteq I. \end{cases}$$

Il teorema di Banach–Alaoglu

Teor. (Banach–Alaoglu) Siano X uno spazio di Banach separabile e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in X'. Allora $(\varphi_n)_n$ ha una sottosuccessione convergente debolmente$*$ a qualche $\varphi \in X'$.

Oss. In altre parole, "la palla unitaria chiusa $\overline{B}^{X'}(0,1)$ nel duale di uno spazio di Banach separabile è debolmente$*$ sequenzialmente compatta". Tuttavia, se $\dim X' = \infty$, sappiamo già che la palla $\overline{B}^{X'}(0,1)$ <u>non è compatta</u> nella topologia indotta dalla norma.

Coroll. Sia X uno spazio di Banach separabile e <u>riflessivo</u>. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in X. Allora $(x_n)_n$ ha una sottosuccessione convergente debolmente a qualche $x \in X$.

Prop. Sia X uno spazio di Banach riflessivo e separabile. Sia $F : X \to \mathbb{R}$ tale che:

(a) $\{x \in X : F(x) \le c\}$ è non vuoto e limitato in X per qualche $c \in \mathbb{R}$;

(b) per ogni successione $(x_n)_n$ a valori in X e $x \in X$, se $x_n \rightharpoonup x$ in X, allora $F(x) \le \liminf_{n\to\infty} F(x_n)$.

Allora F ha un punto di minimo in X.