Curve e Integrali Curvilinei in $\mathbb{C}$

Parametrizzazione di curve, Curve di Jordan e Teorema di Cauchy - Goursat

Richiami di teoria. Una **curva** nel campo complesso è una funzione continua $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che manda $t \in [a; b] \to (x(t); y(t))$, ovvero:

Curva in $\mathbb{C}$

$$\gamma : t \in [a, b] \to z(t) = x(t) + y(t)i$$

Data la curva $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, chiamiamo *supporto o sostegno* della curva l'immagine di $[a, b]$ tramite γ, ovvero

$$\text{supp}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \exists t \in [a, b] \text{ tale che } \gamma(t) = z\}.$$

Ipotizziamo $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva C^1 a tratti, allora

- γ è *semplice* se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)\, \forall t_1 \neq t_2$ (iniettiva)
- γ è *chiusa*, se $\gamma(a) = \gamma(b)$
- γ è detta *di Jordan* se è chiusa e se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1, t_2 \in \{a, b\}$.

Alcune parametrizzazioni comuni:

- *Segmento di estremi z_0 e z_1*: $\gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$ con $t \in [0, 1]$;
- *Circonferenza di centro z_0 e raggio r*: $\gamma(t) = z_0 + re^{it} = z_0 + r(\cos(t) + i\sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$;
- *Ellisse di centro z_0 e semiassi a e b:* $\gamma(t) = z_0 + a\cos(t) + ib\sin(t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1. Data la curva $\gamma(t) = 5\cos(t) + 3 + i(\sin(t) - 1)$, $t \in [0, 2\pi]$, determina se è di Jordan, se è C^1 e, nel caso, calcolane la curva derivata.

Soluzione. Osserviamo che il supporto di γ è contenuto nell'ellisse centrato in $z_0 = 3 - i$ con semiasse maggiore 5 parallelo all'asse reale e semiasse minore 1 parallelo all'asse immaginario.

Per verificare che la curva è semplice, occorre mostrare che $\gamma(t) = \gamma(s)$, $t, s \in [0, 2\pi)$, non ha soluzioni per $s \neq t$. Separando parte reale ed immaginaria otterremmo

$$\begin{cases} 5\cos(t) + 3 & = 5\cos(s) + 3 \\ \sin(t) - 1 & = \sin(s) - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \cos(t) & = \cos(s) \\ \sin(t) & = \sin(s) \end{cases}$$

Ci sono vari modi per mostrare che il sistema appena scritto non ha soluzioni per $(s, t) \in [0, 2\pi)$ con $s \neq t$; possiamo ad esempio usare le formule di sottrazione:

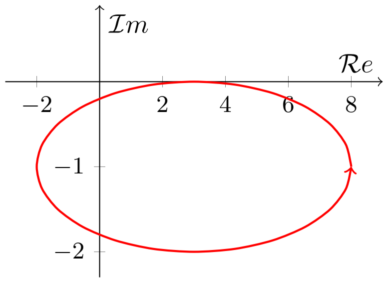
$$\begin{cases} \cos(t) - \cos(s) & = -2\sin\left(\frac{t+s}{2}\right)\sin\left(\frac{t-s}{2}\right) = 0 \\ \sin(t) - \sin(s) & = 2\cos\left(\frac{t+s}{2}\right)\sin\left(\frac{t-s}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

visto che seno e coseno non possono annullarsi contemporaneamente, le equazioni scritte sopra sono soddisfatte se e solo se

$$\sin\left(\frac{t-s}{2}\right) = 0 \implies \frac{t-s}{2} = k\pi \implies t = s + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e ciò mostra che non esistono soluzioni distinte in s e t in $[0, 2\pi)$.

Per verificare che la curva è chiusa, banalmente $\gamma(0) = 5\cos(0) + 3 + i(\sin(0) - 1) = 8 - i$, $\gamma(2\pi) = 5\cos(2\pi) + 3 + i(\sin(2\pi) - 1) = 8 - i$. In conclusione $\gamma(t)$ è una curva di Jordan.



Essendo $\sin(t)$ e $\cos(t)$ funzioni regolari, la curva è chiaramente C^1. La sua derivata può essere facilmente ottenuta considerando separatamente parte reale e parte immaginaria e calcolandone separatamente la derivata rispetto a t:

$$\begin{cases} x(t) = 5\cos(t) + 3 \\ y(t) = \sin(t) - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x'(t) = -5\sin(t) \\ y'(t) = \cos(t) \end{cases} \implies \gamma'(t) = -5\sin(t) + i\cos(t).$$

Esercizio 2. Determinare una parametrizzazione della circonferenza di centro $z_0 = 2 - i$ e raggio $\rho = 3$, tale $|\gamma'| = 2$.

Soluzione. Una circonferenza può essere parametrizzata come $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) + 2 \\ y(t) = 3\sin(t) - 1 \end{cases} \implies \gamma(t) = 3\cos(t) + 2 + i(3\sin(t) - 1) = 3e^{it} + 2 - i, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calcoliamo la curva derivata

$$\gamma'(t) = 3ie^{it} \implies |\gamma'(t)| = |3ie^{it}| = 3.$$

Per avere una curva γ tale che $|\gamma'| = 2$, operiamo sulla curva mediante una riparametrizzazione $\xi(s) : I \subseteq \mathbb{R} \to [0, 2\pi]$ continua e monotona crescente. Definiamo quindi

$$\gamma(\xi(s)) = 3e^{i\xi(s)} + 2 - i, \quad s \in \left[\xi^{-1}(0), \xi^{-1}(2\pi)\right],$$

per cui, calcolando la derivata e ponendone modulo uguale a 2:

$$\gamma'(s) = 3\xi'(s)ie^{i\xi(s)} \implies |\gamma'(s)| = |3\xi'(s)| = 2 \implies \xi'(s) = \frac{2}{3} \implies \xi(s) = \frac{2}{3}s.$$

Si noti che $\xi^{-1}(0) = 0$ e $\xi^{-1}(2\pi) = 3\pi$. Una curva desiderata è quindi:

$$\gamma(s) = 3e^{i\frac{2}{3}s} + 2 - i, \qquad s \in [0, 3\pi].$$

Si osservi che esiste un'altra curva con la medesima proprietà: quella in cui la circonferenza è percorsa in senso orario: $\gamma(s) = 3e^{-i\frac{2}{3}s} + 2 - i$.

Richiami di teoria. Data la funzione a valori complessi $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua e la curva $\gamma(t) \in C^1([a, b])$, definiamo l'*integrale curvilineo* di f lungo γ la quantità:

Integrale curvilineo in $\mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'integrale si può riscrivere equivalentemente in termini della parte reale $u(x, y)$ e immaginaria $v(x, y)$ (che devono essere funzioni continue o continue a tratti su Ω) di $f(x+iy)$ nel modo seguente:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\gamma (u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y) - i\int_\gamma (v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y)$$

Teorema (Cauchy-Goursat)**.** Data una funzione olomorfa $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dove Ω è un dominio semplicemente connesso, e una curva chiusa e regolare a tratti γ contenuta in Ω, allora

Teorema di Cauchy-Goursat

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Il teorema si generalizza e continua a valere nel caso in cui Ω sia un dominio con bordo.

Esercizio 3. Calcola l'integrale di linea della funzione $f(z) = e^z$ lungo il segmento da πi a 1.

Soluzione. Innanzitutto, la parametrizzazione del segmento è

$$\gamma(t) = \pi i + t(1-\pi i), \quad t \in [0,1] \implies \gamma(t) = t + i(\pi - \pi t), \quad t \in [0,1].$$

La cui derivata è

$$\gamma'(t) = 1 - i\pi.$$

Possiamo usare la definizione di integral curvilineo lungo γ

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 e^{\gamma(t)}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{t(1-i\pi)}e^{\pi i}(1-i\pi)\,\mathrm{d}t = e^{i\pi}\left[e^{t(1-i\pi)}\right]_0^1 \\ &= -(e^{1-i\pi} - 1) = -ee^{-i\pi} + 1 = -e(-1) + 1 = 1 + e.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcola l'integrale di linea della funzione $f(z) = \bar{z}$ lungo la semicirconferenza superiore centrata nell'origine e di raggio 3.

Soluzione. Notiamo subito che $f(z) = \bar{z}$ non è olomorfa e quindi non possiamo utilizzare il Teorema di Cauchy Goursat. Usiamo quindi la definizione, innanzitutto, parametrizziamo la semicirconferenza come

$$\gamma(t) = 3\cos(t) + 3i\sin(t) = 3e^{it}, \quad t \in [0, \pi],$$

La cui derivata è

$$\gamma'(t) = 3ie^{it}.$$

Ergo

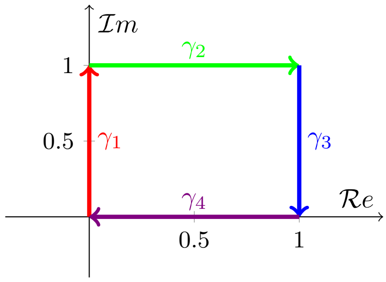
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi \bar{\gamma}(t)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi 3e^{-it}3ie^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi 9i\,\mathrm{d}t = 9\pi i.$$

Esercizio 5. Calcola l'integrale di linea della funzione $f(z) = e^{\pi\bar{z}}$ lungo la frontiera del quadrato di lato 1 con un vetrice in 0 e uno in $1 + i$, percorso in verso orario.

Soluzione. Innanzitutto, la curva γ può essere scritta come la concatenazione di in quattro curve, una per ogni lato del quadrato:

Parametrizziamo $\gamma_1(t) = it$, $t \in [0, 1]$ e, di conseguenza, $\gamma_1' = i$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 e^{-i\pi t}i\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-i\pi t}}{\pi}\right]_0^1 = -\frac{e^{-\pi i}}{\pi} + \frac{1}{\pi} = -\frac{-1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$



Parametrizziamo $\gamma_2(t) = i + t$, $t \in [0,1]$ e, di conseguenza, $\gamma_2' = 1$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 e^{-\pi i} e^{\pi t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 e^{\pi t}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{e^{\pi t}}{\pi}\right]_0^1 = -\left(\frac{e^{\pi}}{\pi} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} - \frac{e^{\pi}}{\pi}.$$

Parametrizziamo $\gamma_3(t) = 1 + i(1-t)$, $t \in [0,1]$ e, di conseguenza, $\gamma_3' = -i$. Quindi

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 e^{\pi} e^{-\pi i} e^{\pi i t}(-i)\,\mathrm{d}t = e^{\pi}\int_0^1 e^{\pi i t} i\,\mathrm{d}t = -e^{\pi}\left[\frac{e^{i\pi t}}{\pi}\right]_0^1 = e^{\pi}\left(\frac{-1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{2e^{\pi}}{\pi}.$$

Parametrizziamo $\gamma_4(t) = 1 - t$, $t \in [0,1]$ e, di conseguenza, $\gamma_3' = -1$. Quindi

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 e^{\pi} e^{-\pi t}(-1)\,\mathrm{d}t = e^{\pi}\int_0^1 -e^{-\pi t}\,\mathrm{d}t = e^{\pi}\left[\frac{e^{-\pi t}}{\pi}\right]_0^1 = e^{\pi}\left(\frac{e^{-\pi}}{\pi} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} - \frac{e^{\pi}}{\pi}$$

In conclusione

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{4}{\pi}\left(1 - e^{\pi}\right).$$

Esercizio 6. Si calcoli l'integrale di linea della funzione $f(z) = z^2$ lungo la curva $\gamma(t) = \dfrac{e^{it}}{1+t}$, $t \in [0,\pi]$.

Soluzione. Non è difficile verificare che la curva γ è regolare e il suo sostegno va dal punto $A = \gamma(0) = (1,0)$ al punto $B = \gamma(\pi) = \left(-\frac{1}{1+\pi}, 0\right)$. Se volessimo usare la definizione di integrale di linea, dovremmo calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{e^{2it}}{(1+t)^2}\frac{ie^{it}(t+1+i)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{ie^{3it}(t+1+i)}{(1+t)^4}\mathrm{d}t$$

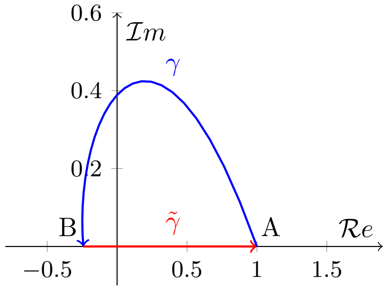
L'ultimo integrale appare complicato da svolgere. Possiamo però usare il Teorema di Cauchy-Goursat a nostro vantaggio. Il teorema afferma che, su domini semplicemente connessi in cui f è olomorfa, l'integrale di f (che è olomorfa addirittura su tutto $\mathbb{C}$) su una qualsiasi curva regolare chiusa deve essere nullo. Possiamo allora "chiudere" la curva γ nel modo più semplice possibile, ovvero concatenandola con una curva $\tilde{\gamma}$ il cui sostegno è il segmento che va dal punto B al punto A. Ovvero, definiamo:

$$\tilde{\gamma}(t) = B + (A - B)t = -\frac{1}{1+\pi} + \frac{2+\pi}{1+\pi}t, \quad t \in [0,1]$$

Allora, essendo la concatenazione $\gamma \cup \tilde{\gamma}$ una curva chiusa e regolare, per il teorema si ha che:

$$\oint_{\gamma\cup\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \Longrightarrow \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

In conclusione, l'integrale di linea di una funzione olomorfa non dipende dalla curva ma solo da punto di partenza e di arrivo, pertanto è possibile sostituire una curva complicata con un segmento.



Ora non ci resta che calcolarci l'integrale di f su $\tilde{\gamma}$, che è:

$$-\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^0 \left(-\frac{1}{1+\pi}+\frac{2+\pi}{1+\pi}t\right)^2 \frac{2+\pi}{1+\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{1+\pi}+\frac{2+\pi}{1+\pi}t\right)^3\right]_1^0$$
$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3(1+\pi)^3}$$

Esercizi aggiuntivi svolti.

Esercizio 7. Calcola l'integrale di linea della funzione $f(z) = \mathcal{I}m(z^2)$ lungo la curva $\gamma(t) = t + i(4t - t^2)$, $t \in [0, 2]$.

Soluzione. Innanzitutto, la derivata della curva è

$$\gamma'(t) = 1 + i(4 - 2t).$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^2 \mathcal{I}m(\gamma(t)^2)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \mathcal{I}m(t^2 - (4t-t^2)^2 + 2it(4t-t^2))(1+i(4-2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 2t(4t-t^2)(1+i(4-2t))\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (8t^2 - 2t^3 + 32it^2 - 24it^3 + 4it^4)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{8}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{32}{3}it^3 - 6it^4 + \frac{4}{5}it^5\right]_0^2 = \frac{64}{3} - 8 + \frac{256}{3}i - 96i + \frac{128}{5}i = \frac{40}{3} + \frac{224}{15}i.
\end{aligned}$$

Esercizio 8. Si calcoli l'integrale di linea della funzione $f(z) = 3i - z$ lungo la curva $\gamma(t) = t + i(t - t^2)$, $t \in [0, 1]$.

Soluzione. La funzione $f(z)$ è olomorfa su $\mathbb{C}$. La curva γ tuttavia non è una curva di Jordan, in quanto non è chiusa ($A = 0$, $B = 1$). Tuttavia, se considerassimo la concatenazione di curve $\gamma \cup \tilde{\gamma}$ con $\tilde{\gamma} = 1 - t$ (ovvero segmento da B ad A), la curva così ottenuta sarebbe una curva di Jordan.

$$\oint_{\gamma\cup\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \implies \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Calcoliamo quindi l'integrale di $f(z)$ sul segmento da A a B, ovvero $\bar{\gamma} = t$, $t \in [0, 1]$:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\bar{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(\bar{\gamma}(t))\bar{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3i - t\,\mathrm{d}t = \left[3it - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 3i - \frac{1}{2}.$$

Esercizi da svolgere a casa.

1. Date le curve $\delta(t) = 2cos(t) + 1 + 3i\sin(-t)$, $t \in [-\pi, \pi]$ e $\sigma(t) = -\cos(2t) + 2i(\sin(2t) - 3)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, determinare se sono di Jordan e regolari e nel caso calcolarne la derivata.
2. Determinare una parametrizzazione γ della circonferenza di centro $z_0 = -3i$ e raggio $\rho = \frac{1}{2}$ percorsa in senso orario, tale $|\gamma'(t)| = 3$.
3. Determinare una parametrizzazione δ del segmento che collega i punti $A = 2 + i$ e $B = -3i$, tale $|\delta'(t)| = \frac{1}{3}$.
4. Calcola l'integrale di linea delle funzioni $g(z) = z$, $h(z) = |z|$ e $p(z) = \arg z$ lungo la semicirconferenza superiore centrata nell'origine e di raggio 3.
5. Calcola l'integrale delle funzioni $f(z) = 3i - z$ e $g(z) = ie^{-iz}$ sul triangolo con vertici 0, $-i$ e 1, percorso in senso antiorario.
6. Calcola l'integrale di linea della funzione $f(z) = 1/(z + 2)$ lungo la spezzata che da 0 ad 1 ad i a -1.