DEFINIZIONI: Sia $P : t \in I \longrightarrow P(t) \in \mathbb{R}^3$ una curva regolare. Definiamo

1) Vettore tangente all'istante t_0 (quindi nel punto $P(t_0)$) : $P'(t_0) = \left.\frac{dP}{dt}\right|_{t_0}$

Il versore tangente sarà dunque

$\frac{P'(t_0)}{\|P'(t_0)\|}$ dove $\|P'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2}$

Ricordare: $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$

2) Traiettoria di P : È l'immagine di P

3) Ascissa curvilinea : È la funzione

$$s : t \in I \longrightarrow s(t) = \int_{t_0}^{t} \|P'(t)\|\, dt$$

<u>Osservazione</u>: $\frac{ds}{dt} = \|P'(t)\|$

4) <u>Lunghezza d'arco</u>: È la funzione

$$l : t \longrightarrow l(t) = |s(t)|$$

<u>Ex:</u> Calcolare l'ascissa curvilinea della curva

$$P : t \in [-\pi, \pi) \longrightarrow (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \in \mathbb{R}^2$$

Abbiamo che

$$\frac{dP}{dt} = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)) \longrightarrow \|P'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

Quindi $S(t) = \int_{t_0}^{t} \|P'(t)\| \, dt = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$

In questo caso l'ascissa curvilinea coincide con il concetto di radiante

Oss: In molti testi la lunghezza di un arco di una curva viene definita come

$$(\star) \qquad \int_{t_0}^{t} \| P'(t) \| \, dt \qquad \text{con } t > t_0$$

In questo caso, essendo $(\star)$ sempre positivo, non c'è bisogno del valore assoluto. Se usiamo questa definizione, a pag. 11 avremmo che, con $t > t_0$

$$\int_{t_0}^{t} \| P'(t) \| \, dt = \int_{\tau_0}^{\tau} \left\| \frac{dQ}{d\tau} \right\| d\tau \qquad \text{se } \tau \text{ è crescente}$$

e

$$\int_{t_0}^{t} \| P'(t) \| \, dt = \int_{\tau}^{\tau_0} \left\| \frac{dQ}{d\tau} \right\| d\tau \qquad \text{se } \tau \text{ è decrescente}$$

Ex: Calcolare l'ascissa curvilinea di

$$P : t \in (-5,5) \longrightarrow (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$$

Abbiamo che

$$\|P'(t)\| = \|(1,2t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

Quindi

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1+4t^2} = \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\underbrace{\ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right)}_{= \operatorname{arcsenh}(2t)}$$

CURVE EQUIVALENTI

Sia $P : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva di classe C^k.

Sia $J \subseteq \mathbb{R}$ un altro intervallo di $\mathbb{R}$.

Sia $\tau : I \longrightarrow J$ un' applicazione invertibile

1. di classe C^k
2. con inversa di classe C^k

} cioè richiediamo la stessa regolarità della curva $P(t)$

Poniamo $Q := P \circ \tau^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Possiamo fare riferimento al diagramma

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathbb{R}^3 \\ J \arrow[ur, "P \circ \tau^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>DEF:</u> P e Q sono dette <u>curve (parametrizzate) C^k-equivalenti</u>

Oss.: Curve equivalenti hanno la stessa traiettoria

Notare: La proprietà (2) di pag. 4 implica che τ è strettamente crescente o decrescente. Infatti si ha che $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$ su I in quanto se si annullasse per qualche t_0, l'inverso di τ avrebbe una derivata che va all'infinito. Poiché I è connesso, $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$ implica $\frac{d\tau}{dt} > 0$ oppure $\frac{d\tau}{dt} < 0$

DEF: Possiamo definire curva non parametrizzata di classe C^k come la classe d'equivalenza individuata da una curva parametrizzata di classe C^k

<u>Ex:</u> Sia $P : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $t \in I = \mathbb{R}$

Consideriamo $\tau : t \in \mathbb{R} \longrightarrow t^3 \in \mathbb{R}$

Allora la curva $Q(s) = P(\tau^{-1}(s))$

non è equivalente a $P(t)$.

Infatti $P(t)$ è una curva C^1 (anzi C^∞...)

mentre $\tau^{-1} : s \in J \longrightarrow s^{\frac{1}{3}}$, $J = \mathbb{R}$

che non è C^1 su tutto $\mathbb{R}$ in quanto

$\frac{d\tau^{-1}}{ds} = \frac{1}{3 s^{2/3}}$, che non è definito per $s = 0$

Le curve sono equivalenti se consideriamo

$I = (1, \infty)$. In questo caso $J = (1, \infty)$.

Ex: Consideriamo la curva $P(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \end{cases}$

con $t \in I = (-\pi, \pi)$

La traiettoria di P è la circonferenza unitaria di centro $(0,0)$ privata del punto $(-1,0)$: $S^1 \setminus (-1,0)$

Consideriamo $\tau : t \in I \longrightarrow \tan\left(\frac{t}{2}\right) \in J = (-\infty, \infty)$

Avremo che $\tau(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ e $t = 2\arctan(\tau)$

Andando a sostituire nell'equazioni di $P(t)$ otteniamo

$$Q(\tau) : \begin{cases} x = \cos\left(2\arctan(\tau)\right) = \dfrac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \\[2ex] y = \operatorname{sen}\left(2\arctan(\tau)\right) = \dfrac{2\tau}{1+\tau^2} \end{cases}$$

Riscrivo:

$$Q(\tau) = \left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \, , \, \frac{2\tau}{1+\tau^2} \right)$$

Le curve $P(t)$ e $Q(\tau)$ sono equivalenti.

<u>Notare</u>: la traiettoria di $P(t)$ è

$x^2+y^2=1$ privata del punto $(-1,0)$

<u>La traiettoria di $Q(\tau)$ è la stessa</u>:

$$\left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{2\tau}{1+\tau^2}\right)^2 = 1 .$$

Il punto $(-1,0)$ che corrisponderebbe a $\lim\limits_{t \to \mp\pi} P(t)$

corrisponde a

$\lim\limits_{\tau \to \infty} Q(\tau)$

<u>Domanda</u> : Ci sono oggetti geometrici che non cambiano per curve equivalenti ?

Abbiamo visto, per esempio, che curve equivalenti <u>hanno le stesse traiettorie</u>.

Possiamo trovare altri "invarianti" ?

"INVARIANTI" DI CURVE EQUIVALENTI

PROP: La lunghezza di curve equivalenti è la stessa.

DIM: Siano $P(t) = Q(\tau(t)) = Q(\tau)$ $(\star)$

due curve equivalenti, con $\tau : t \in I \to \tau(t) \in J$

P ha parametro t e Q parametro τ

Abbiamo che

$$\int_{t_0}^{t} \| P'(t) \| \, dt = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{dP}{dt} \right\| dt \overset{(\star)}{=} \int_{\tau(t_0)}^{\tau(t)} \left\| \frac{dQ}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right\| \frac{dt}{d\tau} \, d\tau$$

$$= \int_{\tau_0 = \tau(t_0)}^{\tau = \tau(t)} \left\| \frac{dQ}{d\tau} \right\| \left| \frac{d\tau}{dt} \right| \frac{dt}{d\tau} \, d\tau .$$

Poiché $\left| \frac{d\tau}{dt} \right| \frac{dt}{d\tau} = \mp 1$ abbiamo in definitiva

$$\int_{t_0}^{t} \| P'(t) \| \, dt = \mp \int_{\tau_0}^{\tau} \left\| \frac{dQ}{d\tau} \right\| d\tau$$

Poiché per la lunghezza si considera il valore assoluto (vedi definizione pag. 2) abbiamo che

$$\left| \int_{t_0}^{t} \| P'(t) \| \, dt \right| = \left| \int_{\tau_0}^{\tau} \left\| \frac{dQ}{d\tau} \right\| d\tau \right|$$

<u>PROP</u> : Il vettore tangente, in generale, non è lo stesso per curve equivalenti, <u>ma la sua direzione sì</u>

<u>DIM</u>

Come per pagina 10, consideriamo 2 curve equivalenti

$$P(t) = Q(\tau(t)) = Q(\tau) \quad , \quad \tau : I \longrightarrow J$$

Abbiamo che

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t_0} = \left.\frac{dQ}{d\tau}\right|_{\tau(t_0)} \cdot \left.\frac{d\tau}{dt}\right|_{t_0}$$

Ricordiamo che $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$ in quanto stiamo considerando curve equivalenti

Quindi, in generale,

$P'(t_0) \neq Q'(\tau_0)$, ma la retta tangente in $P(t_0) = Q(\tau_0)$ <u>è la stessa</u>

Ex: Consideriamo l'esempio di pag. 7

Abbiamo visto che

$$① \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \end{cases} \quad t \in (-\pi, \pi] \qquad ② \begin{cases} x = \dfrac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \\ y = \dfrac{2\tau}{1+\tau^2} \end{cases} \quad \tau \in (-\infty, \infty)$$

sono equivalenti. $\boxed{\tau = \tan\left(\frac{t}{2}\right)}$

Calcoliamo il vettore tangente in $(1,0)$.

Questo corrisponderà all'istante $t = 0$ nella parametrizzazione ① e a $\tau = \tan\left(\frac{0}{2}\right) = 0$ nella parametrizzazione ②

Avremo che

$$P'(0) = \left(-\operatorname{sen}(0),\ \cos(0)\right) = (0,\ 1) \quad \text{e}$$

$$Q'(0) = \left(-\frac{4\tau}{(1+\tau^2)^2},\ \frac{2-2\tau^2}{(1+\tau^2)^2}\right)_{\tau=0} = (0,\ 2)$$

Quindi $Q'(0) = 2\,P'(0)$,

in accordo con la formula di pag. 12

$$P'(t_0) = Q'(\tau(t_0)) \cdot \tau'(t_0)$$

in quanto in questo caso $t_0 = 0$, $\tau = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

$\tau_0 = \tau(0) = 0$ e

$$\tau'(0) = \frac{d\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{dt}\Bigg|_0 = \frac{1}{1+\cos(t)}\Bigg|_0 = \frac{1}{2}$$

Possiamo fare lo stesso procedimento per calcolare il vettore tangente all'istante $t_0 = \frac{\pi}{4}$, cioè nel punto $P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

In questo caso $\tau_0 = \tan\left(\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

Andando a sostituire questi valori abbiamo che

$$P'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$Q'\left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{4\tau}{(1+\tau^2)^2}, \frac{2-2\tau^2}{(1+\tau^2)^2}\right)_{\tau = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Infine $\tau'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}+2}$ e $P'\left(\frac{\pi}{4}\right) = Q'\left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) \cdot \tau'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Domanda : La derivata seconda (o la direzione individuata dal suo vettore) è un invariante per curve equivalenti ?

In generale NO . Vediamo perché.

Considariamo due curve equivalenti $P(t)$ e $Q(\tau)$:

$$P(t) = Q(\tau(t)) \quad , \quad \tau : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow J \subseteq \mathbb{R}$$

Abbiamo che

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,Q(\tau(t))}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{d\tau}(\tau(t))\;\frac{d\tau(t)}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{d\tau}(\tau(t))\right)\frac{d\tau}{dt} + \frac{dQ}{d\tau}(\tau(t))\;\frac{d^2\tau}{dt^2} =$$

$$= \frac{d^2Q}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \frac{dQ}{d\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2}.$$ In definitiva

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2Q}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \frac{dQ}{d\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2} \qquad (\star)$$

Abbiamo che $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$ in quanto P e Q sono curve equivalenti (vedi pag. 5)

D'altra parte

$\frac{dQ}{d\tau}$ è proporzionale a $P'(t)$ (vedi pagina 12)

Quindi la $(\star)$ ci dice che $\boxed{\frac{d^2Q}{d\tau^2} \in \mathrm{Span}\{P'(t), P''(t)\}}$

cioè è combinazione lineare di $P'(t)$ e $P''(t)$

<u>Conclusione</u>: La derivata seconda di una curva parametrizzata $P(t)$, in generale, non è invariante se cambiamo parametrizzazione $t \to \tau(t)$. Non lo è neanche la sua direzione. Lo è invece $\text{Span}\{P'(t), P''(t)\}$

<u>DEF</u>: Un punto $P_0 = P(t_0)$ di una curva $P(t)$ si dice <u>biregolare</u> se $P'(t_0)$ e $P''(t_0)$ sono linearmente indipendenti.

<u>Oss</u>: $P_0 = P(t_0)$ è biregolare $\longleftrightarrow$

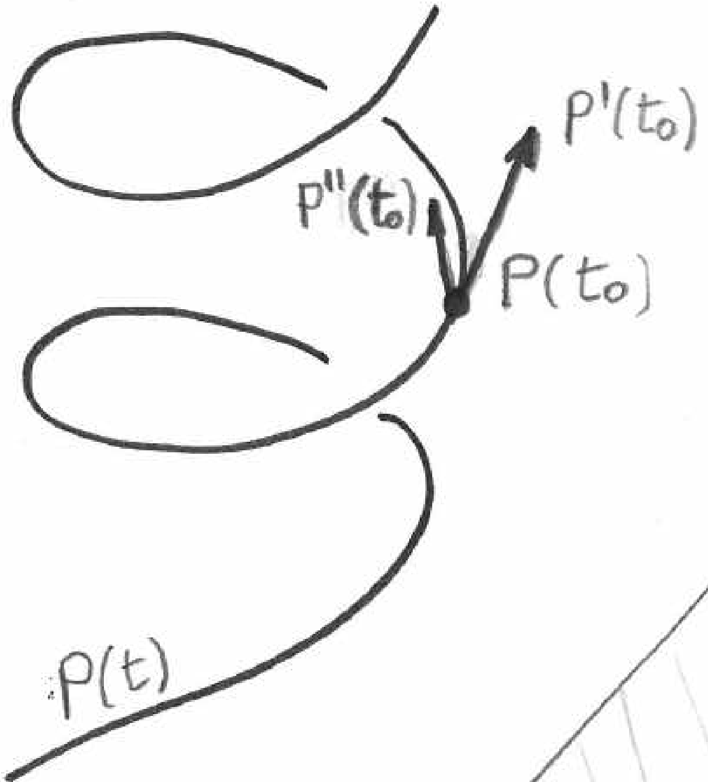
$$P'(t_0) \times P''(t_0) \neq 0$$

Prodotto vettoriale

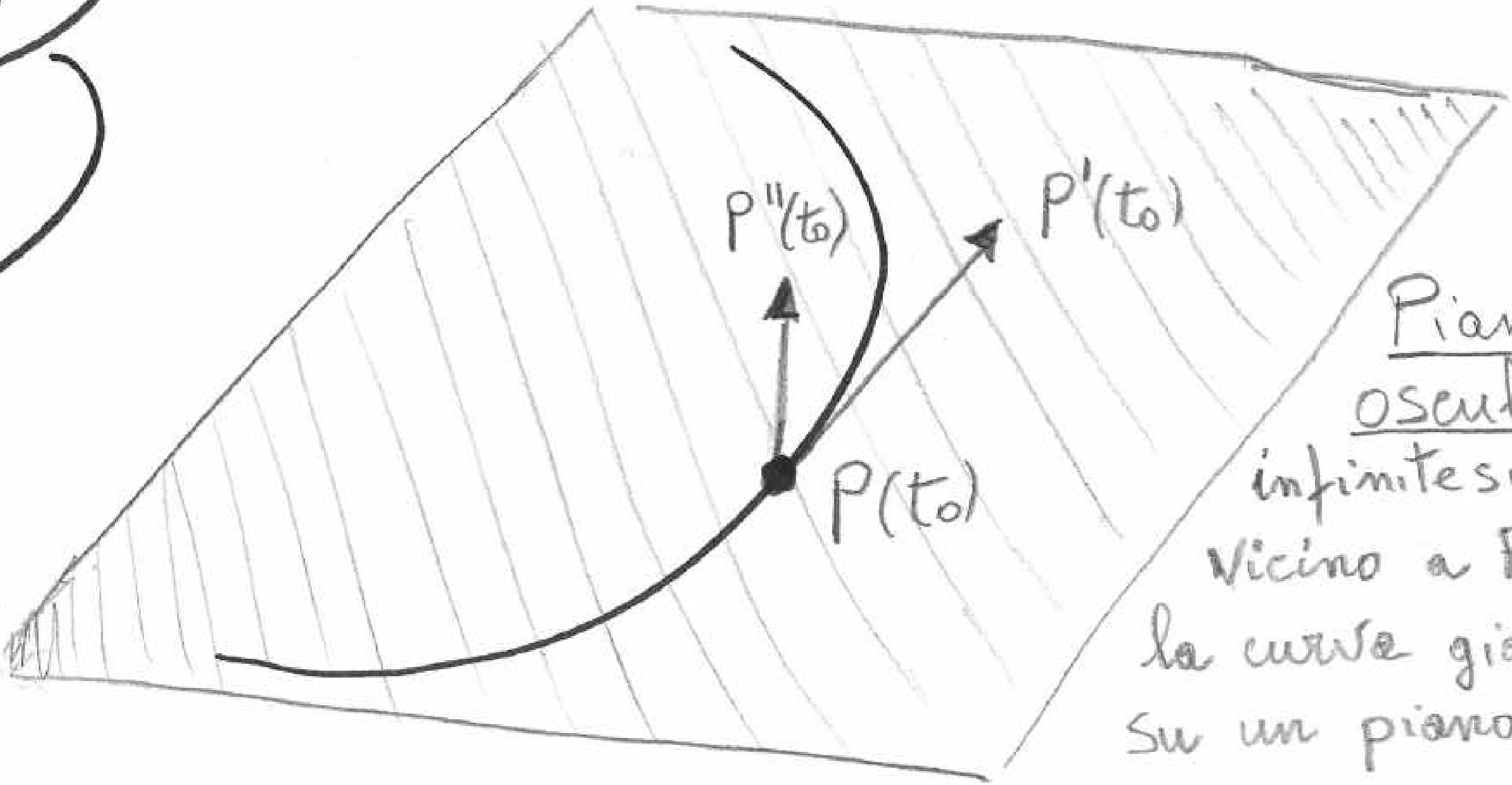
DEF: Sia $P_0 = P(t_0)$ un punto biregolare
Il piano passante per P_0 e parallelo
a $\mathrm{Span}\{P'(t_0), P''(t_0)\}$ è detto
<u>piano osculatore</u> della curva $P(t)$
nel punto P_0 (o all'istante t_0)

Tale piano è ben definito per curve
parametrizzate equivalenti.

Spiegazione intuitiva del piano osculatore
(poi lo faremo rigorosamente)



andando ad "ingrandire" ⟶ ⟶



Piano osculatore: infinitesimalmente vicino a $P(t_0)$, la curva giace su un piano.

<u>Oss:</u> Se $P(t)$ è una curva piana, allora il piano osculatore, in ogni punto $P(t_0)$ della curva, è il piano che la contiene

<u>Ex:</u> Calcolare il piano osculatore della curva $P : t \in I \longrightarrow (t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3$ nel punto $(1, 1, 1)$

Abbiamo già osservato nella lezione precedente che questa curva non è piana.

Abbiamo che

$P'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ e $P''(t) = (0, 2, 6t)$

Poiché si ha che $P(1) = (1,1,1)$

(cioè P passa nel punto $(1,1,1)$ all'istante $t=1$)

andiamo a calcolare

$P'(1) = (1,2,3)$ e $P''(1) = (0,2,6)$

$P'(1)$ e $P''(1)$ sono indipendenti quindi il punto

$(1,1,1)$ è biregolare.

La giacitura (cioè un vettore ortogonale al piano) è

$P'(1) \times P''(1) = 2(3,-3,1) \Longrightarrow$ il piano osculatore

è del tipo $3x - 3y + z = d$. Andando ad

imporre il passaggio per il punto $(1,1,1)$ otteniamo

che $d = 1$. In definitiva il piano cercato è $3x-3y+z=1$ $\boxed{22}$