UN' INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA SECONDA FORMA FONDAMENTALE

Sappiamo che la 2ª forma fondamentale agisce come segue:

$$(b_S)_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad p \in S$$

$$(v, w) \longrightarrow (b_S)_p(v,w) := g_S(-N_*(v), w) =$$

$$= -N_*(v) \cdot w$$

dove $S = \operatorname{Im} P$ con $P : (u,v) \to P(u,v)$ superficie parametrizzata.

Prendiamo una curva $\alpha : s \in I \to S$ parametrizzata tramite l'ascissa curvilinea tale che $\alpha(0) = p$

Calcoliamo $(b_S)_p(\alpha'(0), \alpha'(0))$

$$(b_S)_p\left(\alpha'(0), \alpha'(0)\right) = -N_*\left(\alpha'(0)\right) \cdot \alpha'(0)$$ = per def. di applicazione tangente

$$= -(N \circ \alpha)'(0) \cdot \alpha'(0) =$$ Ricordando che $N(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0$ $\forall s$ in quanto N è ortogonale a $T_{\alpha(s)}S$, allora

$$= N_{\alpha(0)} \cdot \alpha''(0)$$

$$\left((N \circ \alpha) \cdot \alpha'\right)' = 0 \implies$$

$$(N \circ \alpha)' \cdot \alpha' + (N \circ \alpha) \cdot \alpha'' = 0$$

$$= N_{\alpha(0)} \cdot K n$$

dove K è la curvatura di α all'istante $s = 0$
e n è il versore normale ad α all'istante $s = 0$.

(in generale $b_S\left(\alpha'(s), \alpha'(s)\right) = N_{\alpha(s)} \cdot K(s)\, n(s)$)

Andando a disegnare:

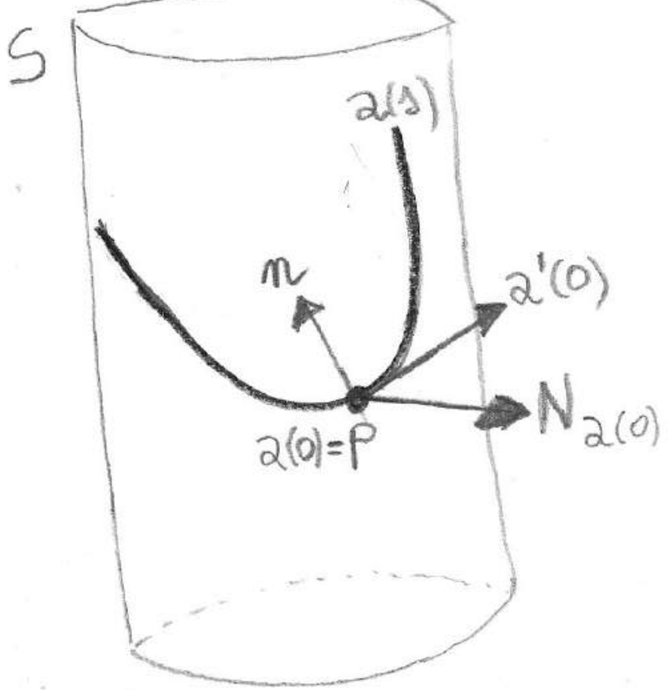

fig. 1

Il piano osculatore della curva $\alpha(s)$ nel punto p, in generale, non è parallelo a $N_{\alpha(0)}$. In altre parole, $N_{\alpha(0)}$ non è, in generale, contenuto nel piano osculatore.

Posso però sempre scegliere una curva tale che $N_{\alpha(0)} \in \mathrm{Span}\{\alpha'(0), \eta\}$, cioè tale che $N_{\alpha(0)}$ e η risultino paralleli (vedi fig. 2)

In questo caso, essendo versori, $N_{\alpha(0)} \cdot \eta = \mp 1$ e la formula di pagina precedente diventa

$$(b_S)_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) = \mp K \qquad (*)$$

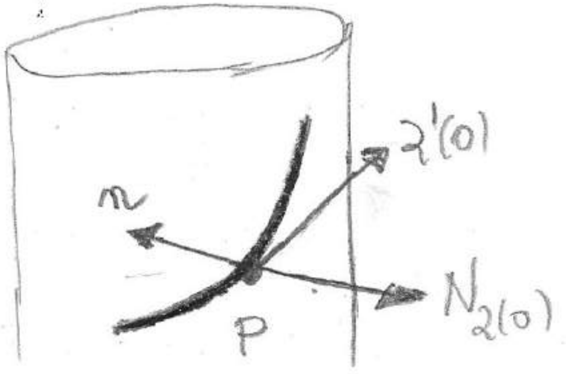

fig. 2

Si può dimostrare (non lo faremo) che le curvature principali nel punto $p \in S$ sono il massimo e il minimo del valore (•) di pagina 3 al variare della curva α in quelle del tipo

$$\alpha = S \cap \Pi_p$$

dove $\Pi_{\alpha(0)}$ è un piano passante per p e contenente N_p.

Notare: Pensare al caso del cilindro: le curvature principali erano $-\frac{1}{r}$ (la curvatura, a meno del segno, della curva ottenuta intersecando il cilindro con un piano parallelo al piano xy) e 0 (curvatura della curva ottenuta intersecando il cilindro con un piano parallelo a N_p e all'asse z)

<u>Ex:</u> Calcolare mappa di Gauss, operatore forma, curvature ecc. della superficie data dal grafico di una funzione $f(u,v)$.

La superficie di cui sopra ammette la seguente parametrizzazione:

$$P(u,v) = (u, v, f(u,v)) \in \mathbb{R}^3$$

Avremo quindi

$$P_u = (1, 0, f_u) \qquad P_v = (0, 1, f_v)$$

<u>Mappa di Gauss:</u>

Per definizione è

$$N^P : (u,v) \longrightarrow N^P(u,v) = \frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

$1^{\underline{o}}$ forma fondamentale:

Dalla definizione

$$\left.\begin{aligned}(g_S)_{11} &= P_u \cdot P_u = 1 + f_u^2\\ (g_S)_{12} &= P_u \cdot P_v = f_u \cdot f_v\\ (g_S)_{22} &= P_v \cdot P_v = 1 + f_v^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow (g_S)_{ij} = \begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1+f_v^2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow g_S = (1+f_u^2)\, du^2 + 2 f_u f_v \, du\, dv + (1+f_v^2)\, dv^2$$

$2^{\underline{o}}$ forma fondamentale:

Dalla definizione,

$$(b_S)_{11} = N^P \cdot P_{uu} = f_{uu} \Big/ \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$$

$$(b_S)_{12} = N^P \cdot P_{uv} = f_{uv} \Big/ \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$$

$$(b_S)_{22} = N^P \cdot P_{vv} = f_{vv} \Big/ \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$$

Quindi

$$(b_S)_{ij} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}$$

cioè

$$b_S = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \cdot \left(f_{uu}\, du^2 + 2 f_{uv}\, du\, dv + f_{vv}\, dv^2 \right)$$

Operatore forma

Calcoliamo la matrice rappresentativa (rispetto alla base (P_u, P_v)) dell'operatore forma.

Abbiamo che

$$(-N_*)_{ij} = (g_s^{-1})_{ik} (b_s)_{kj} =$$

$$\frac{1}{1+f_u^2+f_v^2} \begin{pmatrix} 1+f_v^2 & -f_u f_v \\ -f_u f_v & 1+f_u^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} (1+f_v^2) f_{uu} - f_u f_v f_{uv} & (1+f_v^2) f_{uv} - f_u f_v f_{vv} \\ - f_u f_v f_{uu} + (1+f_u^2) f_{uv} & - f_u f_v f_{uv} + (1+f_u^2) f_{vv} \end{pmatrix}$$

CURVATURA GAUSS

È il determinante dell'operatore forma.
Quindi si potrebbe calcolare il determinante della matrice a fine di pagina 8 oppure, ricordando che

$$(-N_*)_{ij} = g_S^{-1} \cdot b_S$$

Prodotto tra matrici

allora $$K = \det(-N_*) = \frac{\det b_S}{\det g_S} = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$$

CURVATURA MEDIA

È uguale a $\frac{1}{2}$ traccia $(-N_*)$, quindi

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+f_v^2) f_{uu} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1+f_u^2) f_{vv}}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}$$

<u>Ex:</u> Calcolare mappa di Gauss, operatore forma, curvatura ecc. del piano $z = x + y$.

Una parametrizzazione del suddetto piano è

$$P(u,v) = (u, v, u+v)$$

Quindi $P_u = (1, 0, 1)$ e $P_v = (0, 1, 1)$ da cui

$$(g_S)_{ij} = \begin{pmatrix} P_u \cdot P_u & P_u \cdot P_v \\ P_u \cdot P_v & P_v \cdot P_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_S = 2\,du^2 + 2\,du\,dv + 2\,dv^2$$

<u>Mappa di Gauss</u>

$$N^P : (u,v) \to N^P(u,v) = \frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|} = \frac{(-1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$$

<u>2ª forma fondamentale</u>

$$(b_S)_{ij} = \begin{pmatrix} N^P \cdot P_{uu} & N^P \cdot P_{uv} \\ N^P \cdot P_{uv} & N^P \cdot P_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_S = 0$$

Di conseguenza anche l'operatore forma $-N_*$ è nullo:

$$(-N_*)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi sia la curvatura Gaussiana che quella media sono nulle.

Sono nulle anche le curvature principali

$\Longrightarrow$ ogni punto è ombelicale

0 è autovalore doppio e l'autospazio ad esso associato è tutto il piano, cioè $\mathrm{Span}\{P_u, P_v\}$

$\Longrightarrow$ ogni direzione passante per un punto p del piano è principale

Ex: Calcolare mappa di Gauss, operatore forma, curvature ecc della superficie parametrizzata

$$P(u,v) = (u+v,\ u-v,\ u^2-v^2)$$

Abbiamo che

$$P_u = (1, 1, 2u) \qquad P_v = (1, -1, -2v)$$

quindi la mappa di Gauss è

$$N^P(u,v) = \frac{P_u \times P_v}{\| P_u \times P_v \|} = \frac{1}{\sqrt{1+2u^2+2v^2}} (u-v,\ u+v,\ -1)$$

La prima forma fondamentale è

$$g_S = P_u \cdot P_u \, du^2 + 2 P_u \cdot P_v \, du\, dv + P_v \cdot P_v \, dv^2$$
$$= (4u^2+2)\, du^2 - 8uv \, du\, dv + (4v^2+2)\, dv^2$$

La seconda forma fondamentale è

$$b_S = N^P \cdot P_{uu}\, du^2 + 2N^P \cdot P_{uv}\, du\, dv + N^P \cdot P_{vv}\, dv^2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+2u^2+2v^2}} \left(-du^2 + dv^2\right)$$

La matrice rappresentativa dell'operatore forma è

$$(-N_*)_{i,j} = g_S^{-1} \cdot b_S = \dots = \frac{1}{(1+2u^2+2v^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -1-2v^2 & 2uv \\ -2uv & 1+2u^2 \end{pmatrix}$$

La curvatura Gaussiana è $= -\frac{1}{(1+2u^2+2v^2)^2}$

La curvatura media è $= \frac{u^2-v^2}{(1+2u^2+2v^2)^{\frac{3}{2}}}$