# Analisi Funzionale

# Duale di uno spazio normato

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino
a.a. 2023/2024

# Funzionali lineari e spazio duale

**Def.** Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Un *funzionale lineare* su $X$ è una mappa lineare $\varphi : X \to \mathbb{F}$. Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(X, \mathbb{F})$ dei funzionali lineari su $X$ è detto *duale algebrico* di $X$.

**Def.** Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{F}$. Lo *spazio duale* (o *duale topologico*) di $X$ è lo spazio $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{F})$ dei funzionali lineari continui su $X$.

**Oss.** Se $X$ è uno spazio normato, il duale $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{F})$ è a sua volta uno spazio normato con la norma operatoriale:

$$\|\varphi\|_{X'} = \|\varphi\|_{\mathrm{op}} = \inf\{C \in [0, \infty) : |\varphi(x)| \leq C\|x\|_X\} \qquad \forall \varphi \in X'.$$

In effetti il duale $X'$ è uno spazio di Banach per ogni spazio normato $X$.

**Oss.** Se $\dim X < \infty$, allora $\mathcal{L}(X, \mathbb{F}) = \mathcal{B}(X, \mathbb{F}) = X'$.

**Oss.** Se $X = \mathbb{F}^n$ con la norma euclidea, allora

- gli elementi di $X$ sono vettori colonna, cioè matrici $n \times 1$,
- gli elementi di $X'$ si rappresentano come matrici riga $1 \times n$;

in particolare $X'$ si identifica con $X$ mediante la mappa di trasposizione.

# Esempi di funzionali lineari continui

1. Sia $M$ uno spazio metrico compatto. Per ogni $p \in M$, l'operatore di valutazione $V_p : f \mapsto f(p)$ soddisfa $V_p \in C(M)'$ e $\|V_p\|_{C(M)'} = \|V_p\|_{\mathrm{op}} = 1$.
2. Sia $H$ uno spazio pre-hilbertiano. Per ogni $y \in H$, la mappa $\langle \cdot, y \rangle : H \to \mathbb{F}$ soddisfa $\langle \cdot, y \rangle \in H'$ e $\|\langle \cdot, y \rangle\|_{H'} = \|y\|_H$.
3. Siano $p, q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati. Allora, per ogni $\underline{y} \in \ell^q$, la mappa $\varphi_{\underline{y}} : \ell^p \to \mathbb{F}$, definita da
$$\varphi_{\underline{y}}(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \qquad \forall \underline{x} \in \ell^p,$$
soddisfa $\varphi_{\underline{y}} \in (\ell^p)'$ e $\|\varphi_{\underline{y}}\|_{(\ell^p)'} \leq \|\underline{y}\|_{\ell^q}$.
4. Più in generale, se $p, q \in [1, \infty]$ sono esponenti coniugati e $(M, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura, per ogni $g \in L^q(M, \mathcal{M}, \mu)$ la mappa $\varphi_g : L^p(M, \mathcal{M}, \mu) \to \mathbb{F}$ data da
$$\varphi_g(f) = \int_M fg \, d\mu \qquad \forall f \in L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$$
soddisfa $\varphi_g \in L^p(M, \mathcal{M}, \mu)'$ e $\|\varphi_g\|_{L^p(M,\mathcal{M},\mu)'} \leq \|g\|_{L^q(M,\mathcal{M},\mu)}$.

# Duale di uno spazio di Hilbert

**Teor. (di rappresentazione di Riesz–Frechet)** Sia $H$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{F}$. Allora la mappa $\Phi : H \to H'$, definita da

$$\Phi(y) = \langle \cdot, y \rangle \qquad \forall y \in H,$$

è una *isometria antilineare suriettiva*, cioè:

(a) $\|\Phi(y)\|_{H'} = \|y\|_H \quad \forall y \in H$ *($\Phi$ è un'isometria)*;

(b) $\Phi(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1}\Phi(y_1) + \overline{\alpha_2}\Phi(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in H,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ *($\Phi$ è antilineare)*;

(c) $\Phi(H) = H'$ *($\Phi$ è suriettiva)*.

**Oss.** Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\Phi : H \to H'$ è lineare, dunque un *isomorfismo isometrico*. Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, invece, $\Phi : H \to H'$ non è lineare, ma antilineare; dunque $\Phi$ si dice un *anti-isomorfismo isometrico*.

**Oss.** Se $H = L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$, si ha $\Phi(g)(f) = \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_M f\, \overline{g}\, d\mu \ \forall f, g \in H$. Se $\Psi : L^2(M) \to L^2(M)'$ è data da $\Psi(g) = \Phi(\overline{g})$, cioè

$$\Psi(g)(f) = \int_M f\, g\, d\mu \qquad \forall f, g \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu),$$

allora $\Psi$ è un isomorfismo isometrico. Dunque

$$L^2(M, \mathcal{M}, \mu)' \underset{\text{isom.}}{\cong} L^2(M, \mathcal{M}, \mu), \qquad (\ell^2)' \underset{\text{isom.}}{\cong} \ell^2.$$

# Duale degli spazi $\ell^p$

**Teor.** Siano $p, q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati $(1/p + 1/q = 1)$. Sia $\Psi : \ell^q \to (\ell^p)'$ definita da

$$\Psi(\underline{y})(\underline{x}) = \varphi_{\underline{y}}(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \qquad \forall \underline{y} \in \ell^q,\ \underline{x} \in \ell^p.$$

Allora:

(i) $\Psi : \ell^q \to (\ell^p)'$ è un'isometria lineare.

(ii) Se $p \neq \infty$, allora $\Psi : \ell^q \to (\ell^p)'$ è un isomorfismo isometrico.

**Oss.** Nel caso $p = \infty$, sappiamo solo che $\Psi(\ell^1)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $(\ell^\infty)'$. Vedremo in seguito che $\Psi(\ell^1) \neq (\ell^\infty)'$.

**Teor.** La mappa $\Psi : \ell^1 \to (c_0)'$, definita da

$$\Psi(\underline{y})(\underline{x}) = \varphi_{\underline{y}}|_{c_0}(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \qquad \forall \underline{y} \in \ell^1,\ \underline{x} \in c_0,$$

è un isomorfismo isometrico da $\ell^1$ a $(c_0)'$.

**Oss.** Informalmente diciamo che

- "il duale di $\ell^p$ è $\ell^q$" (dove $q$ è esponente coniugato di $p < \infty$),
- "il duale di $c_0$ è $\ell^1$".

# Duale degli spazi $L^p$

**Teor.** Siano $p, q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati $(1/p + 1/q = 1)$.
Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura $\sigma$-finito.
Sia $\Psi : L^q(M) \to L^p(M)'$ definita da

$$\Psi(g)(f) = \varphi_g(f) = \int_M f\, g\, d\mu \qquad \forall g \in L^q(M),\ f \in L^p(M).$$

Allora $\Psi : L^q(M) \to L^p(M)'$ è un'isometria lineare;
se poi $p < \infty$, allora $\Psi$ è un isomorfismo isometrico.

**Oss.** Informalmente diciamo che
"il duale di $L^p(M)$ è $L^q(M)$" se $p < \infty$ e $(M, \mathcal{M}, \mu)$ è $\sigma$-finito.

**Coroll.** Siano $p, q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati. Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura $\sigma$-finito. Allora, per ogni $f \in L^p(M)$,

$$\|f\|_{L^p(M)} = \sup \left\{ \left| \int_M f\, g\, d\mu \right| : g \in L^q(M),\ \|g\|_{L^q(M)} \le 1 \right\}$$
$$= \sup_{g \in L^q(M) \setminus \{0\}} \frac{\left| \int_M f\, g\, d\mu \right|}{\|g\|_{L^q(M)}}.$$

# Forme sesquilineari continue

**Def.** Siano $X, Y$ spazi vettoriali su $\mathbb{F}$.
Una mappa $F : X \times Y \to \mathbb{F}$ è detta *forma sesquilineare* se:

(a) $F(\cdot, y) : X \to \mathbb{F}$ è lineare per ogni $y \in Y$, cioè
$F(\alpha x + \alpha' x', y) = \alpha F(x, y) + \alpha' F(x', y) \quad \forall x, x' \in X \, \forall y \in Y \, \forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{F}$.

(b) $F(x, \cdot) : Y \to \mathbb{F}$ è antilineare per ogni $x \in X$, cioè
$F(x, \alpha y + \alpha' y') = \overline{\alpha} F(x, y) + \overline{\alpha'} F(x, y') \quad \forall x \in X \, \forall y, y' \in Y \, \forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{F}$.

Nel caso $X = Y$, diciamo $F$ una forma sesquilineare *su* $X$.

**Oss.** Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, sarebbe più appropriato parlare di *forma bilineare*.

**Prop.** Siano $X, Y$ spazi normati e $F : X \times Y \to \mathbb{F}$ una forma sesquilineare.
Sono equivalenti:

(i) $F : X \times Y \to \mathbb{F}$ è continua;

(ii) $\|F\| := \sup\{|F(x, y)| : x \in X, \, y \in Y, \, \|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1\} < \infty$.

In tal caso si ha anche

$$|F(x, y)| \leq \|F\| \, \|x\|_X \|y\|_Y \qquad \forall x \in X, \; y \in Y.$$

# Forme sesquilineari e operatori lineari

**Prop.** Siano $X$ uno spazio normato e $H$ uno spazio pre-hilbertiano. Per ogni $A \in \mathcal{L}(X, H)$ definiamo $F_A : X \times H \to \mathbb{F}$ ponendo

$$F_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle_H \qquad \forall x \in X, \ y \in H. \tag{$\dagger$}$$

Allora $F_A : X \times H \to \mathbb{F}$ è una forma sesquilineare e

$$\|F_A\| = \|A\|_{\mathrm{op}}.$$

In particolare $F_A$ è continua se e solo $A$ è limitato.

**Def.** Siano $X$ uno spazio normato e $H$ uno spazio pre-hilbertiano. La forma $F_A : X \times H \to \mathbb{F}$ definita in $(\dagger)$ è detta *forma sesquilineare associata* all'operatore $A \in \mathcal{L}(X, H)$.

**Prop.** Siano $X$ uno spazio normato e $H$ uno spazio di Hilbert. Per ogni forma sesquilineare continua $F : X \times H \to \mathbb{F}$, esiste un unico operatore $A \in \mathcal{B}(X, H)$ tale che $F = F_A$.

# Il teorema di Lax–Milgram

**Def.** Sia $X$ uno spazio normato. Una forma sesquilineare $F : X \times X \to \mathbb{F}$ si dice *coerciva* se esiste $m \in (0, \infty)$ tale che

$$F(x, x) \geq m\|x\|_X^2 \qquad \forall x \in X.$$

**Prop.** Sia $H$ uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{B}(H)$. Se la forma sesquilineare $F_A : H \times H \to \mathbb{F}$ associata ad $A$ è coerciva, allora $A$ è un isomorfismo.

**Teor. (Lax–Milgram)** Sia $H$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{F}$. Sia $F : H \times H \to \mathbb{F}$ una forma sesquilineare continua e coerciva. Allora, per ogni $\varphi \in H'$, esiste un unico $y \in H$ tale che

$$\varphi = F(\cdot, y).$$

# Estensione di funzionali: il teorema di Hahn–Banach

**Teor. (Hahn–Banach)** Sia $X$ uno spazio normato. Sia $V$ un sottospazio vettoriale di $X$; dotiamo $V$ della norma indotta da $X$. Sia $\varphi \in V'$. Allora esiste $\widetilde{\varphi} \in X'$ tale che $\widetilde{\varphi}|_V = \varphi$ e $\|\widetilde{\varphi}\|_{X'} = \|\varphi\|_{V'}$

**Coroll.** Sia $X$ uno spazio normato.

(i) Per ogni $x \in X \setminus \{0\}$, esiste $\varphi \in X'$ tale che $\|\varphi\|_{X'} = 1$ e $\varphi(x) = \|x\|_X$.

(ii) Per ogni $x \in X$,
$$\|x\|_X = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in X', \|\varphi\|_{X'} \leq 1\}$$
e, se $X \neq \{0\}$, si ha anche
$$\|x\|_X = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in X', \|\varphi\|_{X'} = 1\}.$$

(iii) Se $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 \neq x_2$, allora esiste $\varphi \in X'$ tale che $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$; in altre parole, i funzionali $\varphi \in X'$ *separano i punti* di $X$.

(iv) Se $X \neq \{0\}$, allora $X' \neq \{0\}$.

**Oss.** Il punto (ii) va confrontato con la caratterizzazione
$$\|\varphi\|_{X'} = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$$
della norma operatoriale.

# Conseguenze del teorema di Hahn–Banach

**Coroll.** Sia $X$ uno spazio normato. Sia $V$ un sottospazio vettoriale di $X$.

(i) Per ogni $x \in X$ tale che $d(x, V) > 0$, esiste $\varphi \in X'$ tale che $\|\varphi\|_{X'} = 1$, $\varphi|_V = 0$ e $\varphi(x) = d(x, V)$.

(ii) Se $V$ è un sottospazio vettoriale chiuso proprio di $X$, esiste $\varphi \in X'$ con $\|\varphi\|_{X'} = 1$ e $\varphi|_V = 0$.

**Coroll.** Sia $X$ uno spazio normato.
Se $X'$ è separabile, allora anche $X$ è separabile.

**Prop.**

(i) $\ell^\infty$ non è separabile.

(ii) Se $p \in [1, \infty)$, $\ell^p$ è separabile.

(iii) $c_0$ è separabile.

**Coroll.** Il duale di $\ell^\infty$ non è isomorfo a $\ell^1$.

**Oss.** Analoghi risultati valgono per $L^p(M)$ per opportuni spazi $(M, \mathcal{M}, \mu)$.
Ad esempio, se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo di misura di Lebesgue positiva, allora:

- $L^p(I)$ è separabile se e solo se $p < \infty$;
- il duale di $L^\infty(I)$ non è isomorfo a $L^1(I)$.