Fisica II

Esercitazione 4

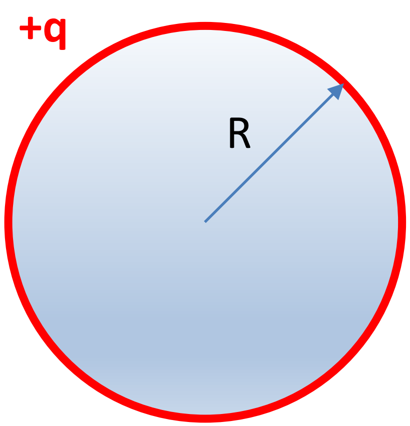
Alessandro Pedico
alessandro.pedico@polito.it

10/10/2022

Capacità conduttore isolato

La **capacità** di un conduttore è definita come il rapporto tra la sua carica e il suo potenziale (concetto ben definito per i conduttori in elettrostatica).

Come esempio, calcoliamo la capacità di un ***conduttore sferico, carico, isolato***.



$r > R$ $\quad \vec{E}(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r \qquad V(r) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r}$

$0 < r < R$ $\quad \vec{E}(r) = 0 \qquad V(r) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R}$

$$C = \frac{q}{V} = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R$$

La capacità dipende solo dalla geometria (raggio della sfera)

Capacità conduttore isolato

L'unità di misura della capacità è il Farad (F), definito come Coulomb/Volt.

Nelle condizioni generalmente incontrate durante gli esperimenti, i valori di capacità sono svariati ordini di grandezza più piccoli rispetto al Farad. Utilizziamo ad esempio la formula precedentemente ricavata per il conduttore sferico isolato.

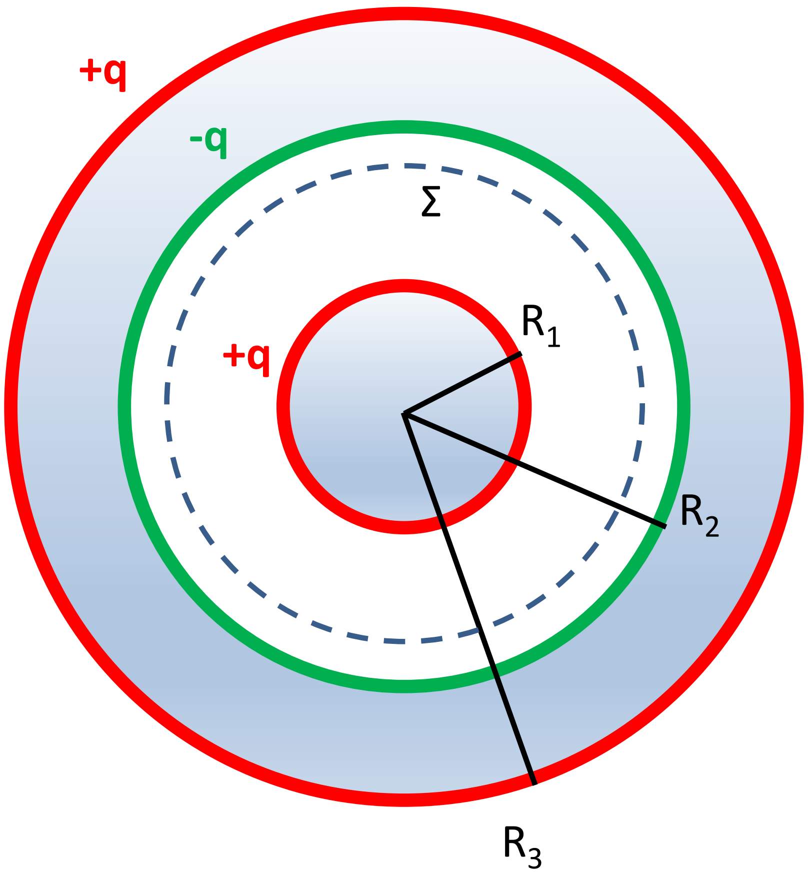
$$C = \frac{q}{V} = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R$$

Tenendo conto del fatto che $\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$ F/m, vediamo che:

$R = 0.1$ m $\longrightarrow$ **$C \approx 10^{-11}$ F**

$R = 6 \cdot 10^{6}$ m $\longrightarrow$ **$C \approx 6 \cdot 10^{-4}$ F**

Condensatore sferico



All'interno della cavità per la ***legge di Gauss*** il campo elettrostatico è:

$$\mathbf{R_1 < r < R_2} \qquad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\hat{u}_r$$

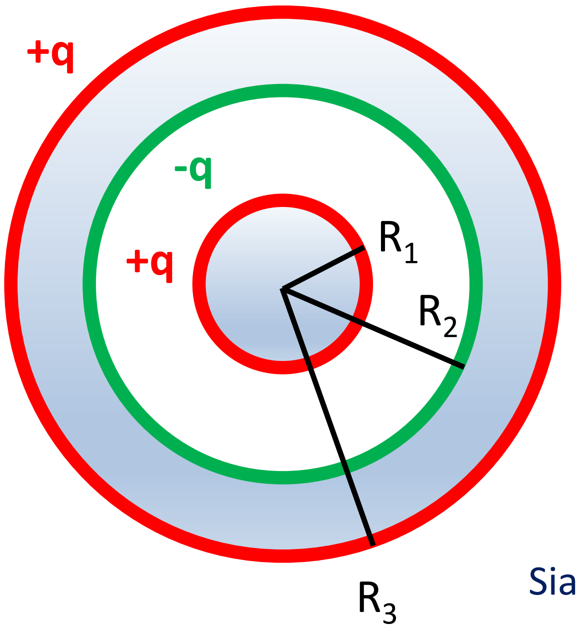
La differenza di potenziale tra i due conduttori è:

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Capacità condensatore sferico

$$\boxed{C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1\,R_2}{R_2 - R_1}}$$

Condensatore sferico



Capacità condensatore sferico

$$C = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1\,R_2}{R_2\,-\,R_1}$$

Siamo interessati a vedere cosa succede in due casi limite:

1) armatura di raggio R_2 posta a **distanza molto grande**:

$$\lim_{R_2 \to \infty} C = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1$$

Capacità conduttore sferico isolato

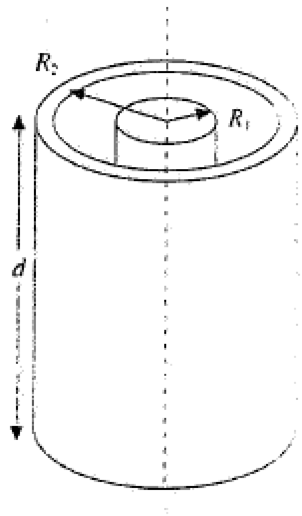
2) distanza tra le armature $h = R_2 - R_1$ **molto piccola** ($R_1\,R_2 \approx R^2$):

$$C = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,\frac{R^2}{h} = \frac{\varepsilon_0\,\mathbf{A}}{\mathbf{h}}$$

area

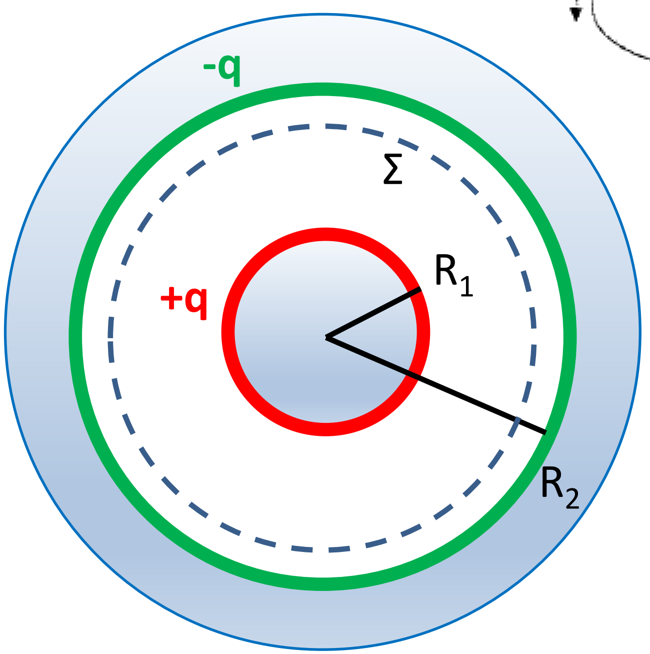
separazione armature

Condensatore cilindrico

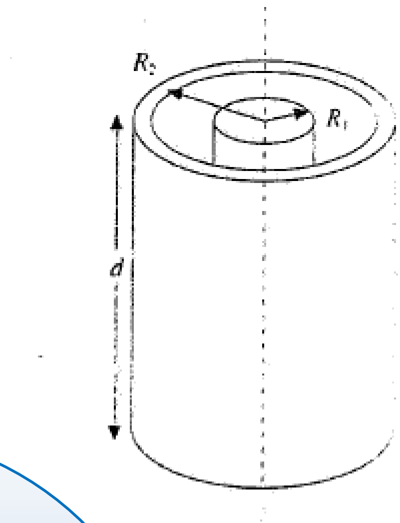


All'interno della cavità per la ***legge di Gauss*** il campo elettrostatico è:

$\mathbf{R_1 < r < R_2}$ $$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\ \pi\ \varepsilon_0\ r}\ \hat{u}_r$$



Condensatore cilindrico

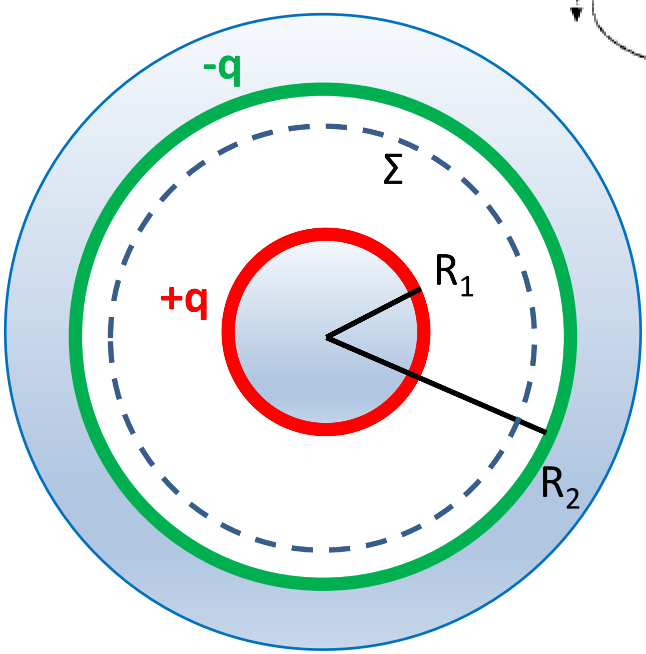


All'interno della cavità per la ***legge di Gauss*** il campo elettrostatico è:

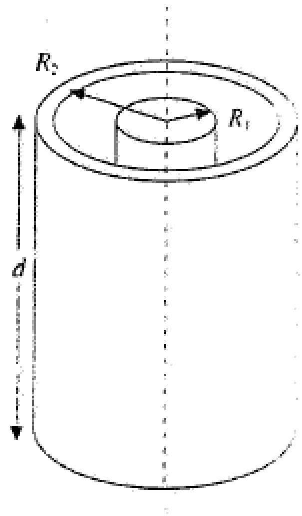
$$\frac{q}{d}$$

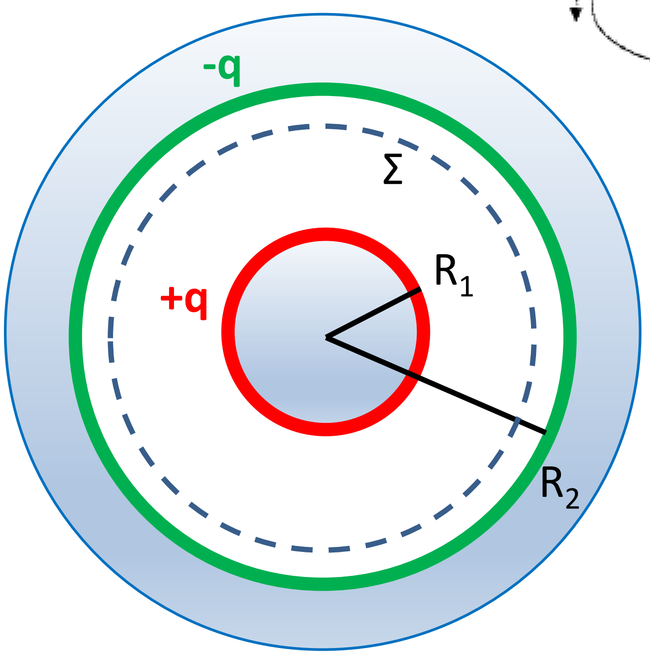
$R_1 < r < R_2$

$$\vec{E}(r) = \frac{\boxed{\lambda}}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\hat{u}_r$$



Condensatore cilindrico





All'interno della cavità per la ***legge di Gauss*** il campo elettrostatico è:

$R_1 < r < R_2$ $$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\ \pi\ \varepsilon_0\ r}\ \hat{u}_r$$

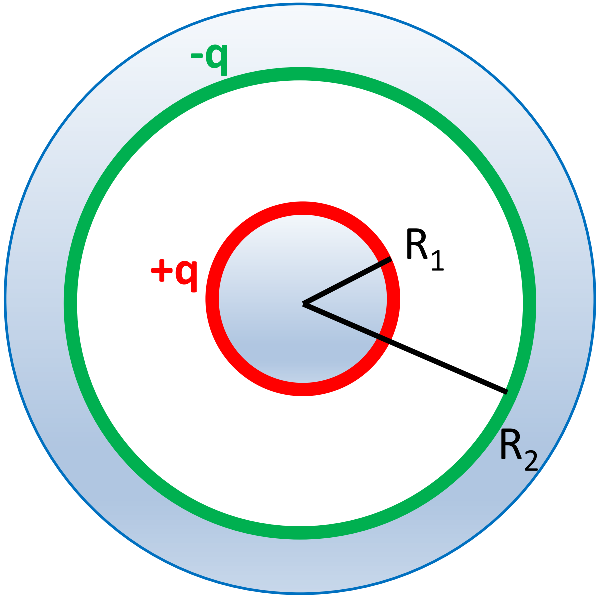
La differenza di potenziale tra i due conduttori è:

$$V_1 - V_2 = -\int_{V_2}^{V_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

Capacità condensatore cilindrico

$$\boxed{C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\ \pi\ \varepsilon_0\ d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}$$

Condensatore cilindrico



Capacità condensatore cilindrico

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

Quando la distanza tra le armature h = $R_2 - R_1$ è molto piccola ($R_1 R_2 \approx R^2$):

$$\ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\left(\frac{R_2 - R_1 + R_1}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{h}{R}\right) \approx \frac{h}{R}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 d R}{h} = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{A}}{\mathbf{h}}$$

$\mathbf{A}$ → area

$\mathbf{h}$ → separazione armature

Energia elettrostatica

Il processo di ***carica*** di un condensatore richiede lavoro e comporta quindi un immagazzinamento di energia elettrostatica, che può essere «recuperata» sotto forma di corrente elettrica collegando elettricamente le due armature del condensatore. L'energia elettrostatica può essere calcolata in due modi:

Energia elettrostatica di un condensatore

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

Energia elettrostatica del campo elettrico

$$U_e = \int dU_e = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, d\tau$$

Energia elettrostatica

Il processo di ***carica*** di un condensatore richiede lavoro e comporta quindi un immagazzinamento di energia elettrostatica, che può essere «recuperata» sotto forma di corrente elettrica collegando elettricamente le due armature del condensatore. L'energia elettrostatica può essere calcolata in due modi:

Energia elettrostatica di un condensatore

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

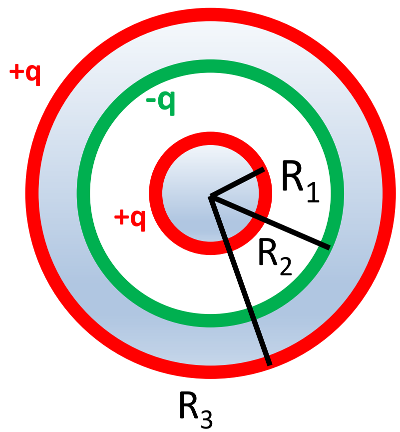
Energia elettrostatica del campo elettrico

$$U_e = \int dU_e = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, d\tau$$

densità di energia

Energia elettrostatica

Consideriamo il **condensatore sferico**, analizzato in precedenza; calcoliamo l'energia elettrostatica del condensatore.



campo elettrico tra le armature

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\hat{u}_r$$

energia elettrostatica

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\, E^2\, d\tau$$

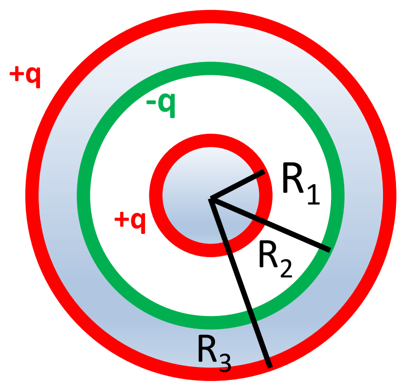
$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\frac{q^2}{16\,\pi^2\,\varepsilon_0^2\, r^4}\,4\,\pi\, r^2\, dr =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{q^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] = \frac{q^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1\, R_2}\right]$$

Energia elettrostatica

$$\boxed{U_e = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]}$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando una delle seguenti formule:



$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

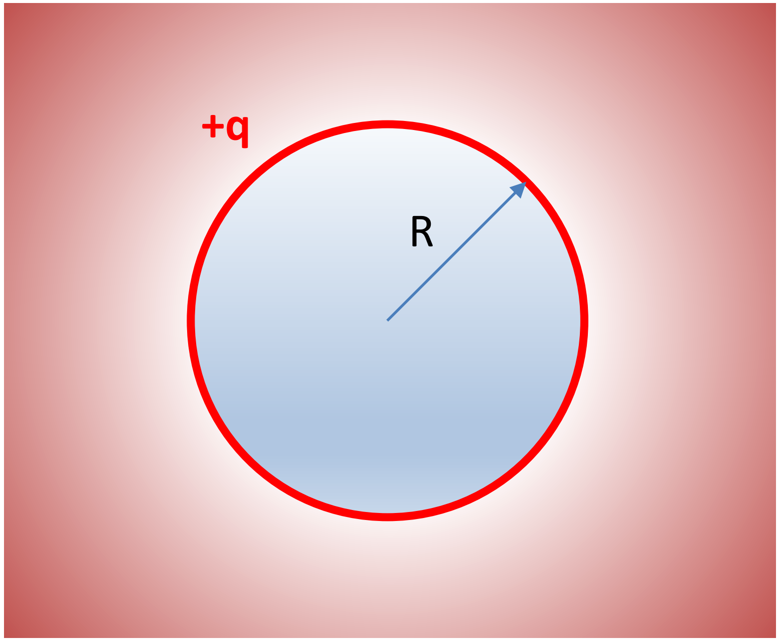
$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}}$$

Energia elettrostatica condensatore sferico

$$U_e = \frac{1}{2}q^2\frac{R_2 - R_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2 R_1} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]$$

Sfera conduttrice in dielettrico



Sfera di materiale conduttore di raggio ***R*** con carica ***+q***, immersa in un materiale dielettrico indefinito lineare e omogeneo, con costante dielettrica relativa $\boldsymbol{\varepsilon_r}$

Calcolare il ***campo elettrico*** nel dielettrico, la ***polarizzazione*** e ***la carica di polarizzazione*** sulla superficie a contatto con il conduttore.

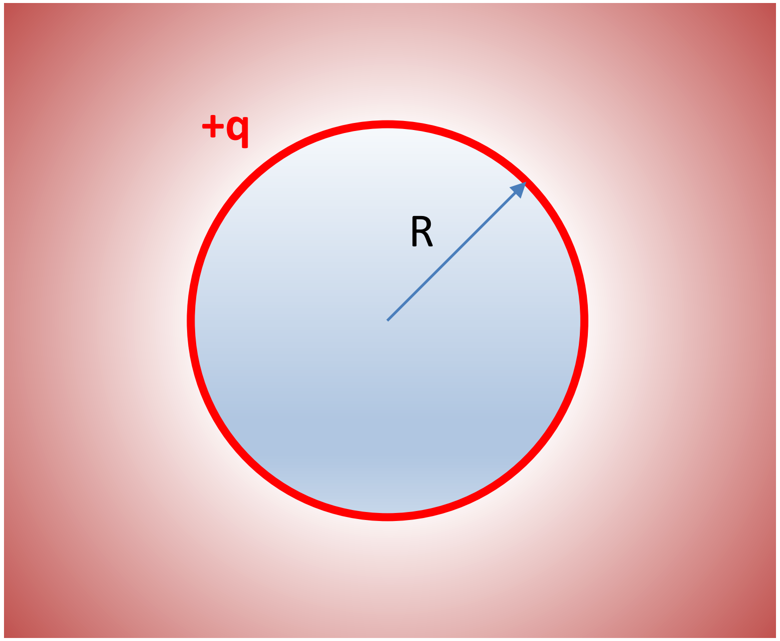
Procediamo per il calcolo del campo elettrico all'interno del dielettrico; in **vuoto**, il campo elettrico sarebbe:

$$\mathbf{r > R} \qquad \vec{E}_0(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\hat{u}_r$$

Nel **dielettrico**, utilizzando legge di Gauss per vettore **E** e relazione $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}/\varepsilon_r$:

$$\boxed{\mathbf{r > R} \qquad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0\, r^2}\,\hat{u}_r}$$

Sfera conduttrice in dielettrico



CAMPO ELETTRICO

r > R $\vec{E}(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0\, r^2}\,\hat{u}_r$

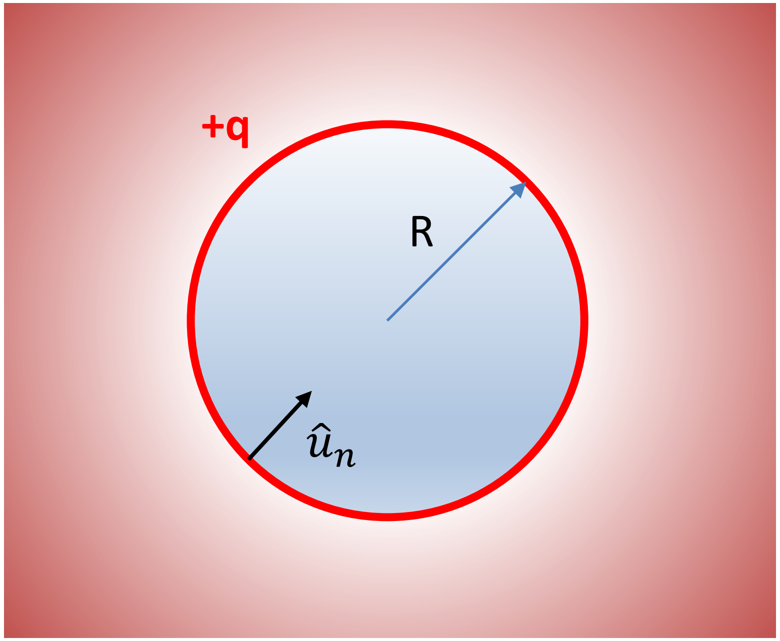
Dato che il dielettrico è lineare e omogeneo, campo elettrico e polarizzazione sono legati da:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\,\chi\,\vec{E} = \varepsilon_0\,(\varepsilon_r - 1)\,\vec{E} =$$

$$= \varepsilon_0\,(\varepsilon_r - 1)\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0\, r^2}\,\hat{u}_r$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{P}(r) = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\,\frac{q}{4\,\pi\,\, r^2}\,\hat{u}_r}$$

Sfera conduttrice in dielettrico



CAMPO ELETTRICO

r > R $$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0\, r^2}\,\hat{u}_r$$

POLARIZZAZIONE

r > R $$\vec{P}(r) = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\,\frac{q}{4\,\pi\,r^2}\,\hat{u}_r$$

Possiamo utilizzare la relazione tra polarizzazione e densità di carica di polarizzazione

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{u}_n$$

$$\sigma_p = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\,\frac{q}{4\,\pi\,r^2}$$

$$q_p = \sigma_p\,4\,\pi\,R^2$$
$$= -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\,\frac{q}{4\,\pi\,r^2}\,4\,\pi\,R^2$$

$$\boxed{q_p = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\,q}$$

r = R