TEORIA DELLA MISURA

① σ-ALGEBRA

Sia $\mathcal{X}$ un insieme non vuoto

Sia $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'insieme delle parti di $\mathcal{X}$

Definizione

Una σ-algebra di parti di $\mathcal{X}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, che indicheremo con $\mathcal{Q}$ t.c.

1) $\mathcal{X} \in \mathcal{Q}$

2) se $A \in \mathcal{Q} \Rightarrow A^c \in \mathcal{Q}$ (chiusura per complementazione)

3) se $(A_n)_{n \geq 1}$ sono elementi di $\mathcal{Q}$, allora $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{Q}$ (chiusura per unioni numerabili)

esempi (banali)

- $\{\mathcal{X}, \phi\}$ è una σ-algebra, detta banale
- $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ è una σ-algebra

osservazione

- $\underset{1)}{\mathcal{X} \in \mathcal{Q}} \underset{2)}{\Rightarrow} \mathcal{X}^c = \phi \in \mathcal{Q}$
- Se $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{Q} \Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n^c\right)^c \in \mathcal{Q}$ 2), 3)

(chiusura per intersezioni numerabili)

La coppia $(\mathcal{X}, \mathcal{Q})$ si dice spazio misurabile
e gli elementi $A \in \mathcal{Q}$ si dicono insiemi misurabili

Osservazione
Se la proprietà 3) vale solo per unioni finite, ovvero
se $\forall A, B \in \mathcal{Q} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{Q}$ (e quindi $A \cap B \in \mathcal{Q}$)
allora $\mathcal{Q}$ si dice un'algebra

esempi:
1) Sia $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{Q}_1 = \{ \mathcal{X}, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$$
$$\mathcal{Q}_2 = \{ \mathcal{X}, \phi, \{a\}, \{b, c\} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$$

Sono σ-algebre? $\mathcal{Q}_1$ No $(\{a\}^c = \{b, c\} \notin \mathcal{Q}_1)$
$\mathcal{Q}_2$ SI

NOTA:
Se $\mathcal{X}$ è finito $\mathcal{Q}$ algebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{Q}$ σ-algebra
In generale invece $\mathcal{Q}$ algebra $\not\Rightarrow$ $\mathcal{Q}$ σ-algebra
$\Leftarrow$

② $\mathcal{X} = [0,1)$

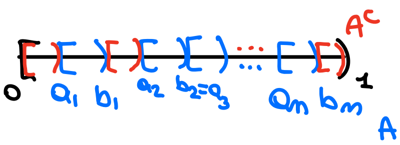
$$\boxed{\mathcal{Q} = \left\{ A = \bigcup_{i=1}^{m} I_i \;:\; I_i = [a_i,b_i) \subset [0,1) \,,\; I_i \cap I_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \right\}}$$

$\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$

$\mathcal{Q}$ è un'algebra:

1) $\mathcal{X} = [0,1) \in \mathcal{Q} \qquad \left(\emptyset = [a,a) \quad a \in [0,1) \right)$

2) Sia $A = \bigcup_{j=1}^{m} I_j \in \mathcal{Q} \Rightarrow A^c \in \mathcal{Q}$? SI



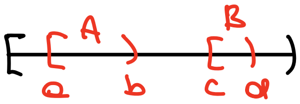
$A = [a_1,b_1) \cup [a_2,b_2) \cup \ldots \cup [a_m,b_m)$

$A^c = [0,a_1) \cup [b_1,a_2) \cup \ldots \cup [b_m,1)$

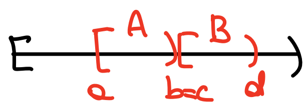
3) Siano $A = \bigcup_{i=1}^{m} \overset{[a_i,b_i)}{I_i}$ e $B = \bigcup_{j=1}^{m} \underset{[c_j,d_j)}{J_j}$ elementi di $\mathcal{Q}$

$A \cup B \in \mathcal{Q}$? SI

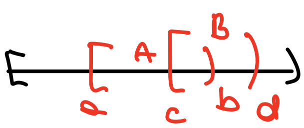
Per prima cosa prendiamo $A = [a,b)$ e $B = [c,d)$



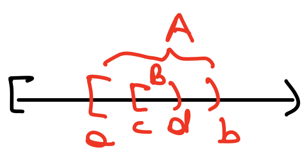
$A \cup B = [a,b) \cup [c,d) \in \mathcal{Q}$



$A \cup B = [a,d) \in \mathcal{Q}$



$A \cup B = [a,d) \in \mathcal{Q}$



$A \cup B = [a,b) \in \mathcal{Q}$

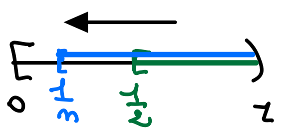
In generale $A \cup B = \bigcup_{k=1}^{\ell} [x_k, y_k) = \bigcup_{k=1}^{\ell} K_k \in \mathcal{Q}$

opportuni intervalli disgiunti

$\Rightarrow \mathcal{Q}$ è un' algebra

Però $\mathcal{Q}$ non è una σ algebra :

<u>controesempio</u> :



$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \emptyset \\ A_2 = [\frac{1}{2}, 1) \\ A_3 = [\frac{1}{3}, 1) \\ \vdots \\ A_n = [\frac{1}{n}, 1) \end{array}\right\} \in \mathcal{Q} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n = (0,1) \notin \mathcal{Q}$$

$\Rightarrow \mathcal{Q}$ non è una σ algebra

③ Sia $\mathcal{X}$ un insieme infinito

$$\boxed{\mathcal{Q} = \{ A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : A \text{ è finito oppure } A^c \text{ è finito} \}}$$

$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ <u>è un' algebra</u> :

① $\mathcal{X} \in \mathcal{Q}$ perché $\mathcal{X}^c = \emptyset$ è finito

② $A \in \mathcal{Q} \Rightarrow A = (A^c)^c$ è finito oppure A^c è finito

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{Q}$

③ $A, B \in \mathcal{Q} \rightarrow A \cup B \in \mathcal{Q}$?

- Se A e B sono finiti $\Rightarrow A \cup B$ finito $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{Q}$
- Se almeno uno non è finito (supponiamo A non finito $\Rightarrow A^c$ finito) $\Rightarrow A \cup B$ non è finito

Ma $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subseteq A^c$ è finito $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{Q}$

$\Rightarrow \mathcal{Q}$ è un'algebra

In generale $\mathcal{Q}$ non è una σ-algebra:

controesempio:

$X = \mathbb{N}$

Siano $A_n = \{2n\}$, $n \in \mathbb{N}$

$A_n \in \mathcal{Q}$ perché è finito

$$\left.\begin{array}{l} \bigcup_n A_n = \{\text{numeri pari}\} \text{ non è finito} \\ \left(\bigcup_n A_n\right)^c = \{\text{numeri dispari}\} \text{ non è finito} \end{array}\right\} \bigcup_n A_n \notin \mathcal{Q}$$

4. X insieme più che numerabile

$$\mathcal{Q} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ finito o numerabile oppure } A^c \text{ finito o numerabile}\}$$

$\Rightarrow \mathcal{Q}$ è una σ-algebra (provare per esercizio)

osservazione

Sia $(\mathcal{Q}_i)_{i \in I}$ una famiglia di σ-algebre, allora

a) $\bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}$ è una σ-algebra.

b) $\bigcup_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ non è neanche un'algebra (in generale) infatti:

a) sia $\mathcal{Q} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$

- $\mathcal{X} \in \mathcal{Q}_i \quad \forall i \in I \Rightarrow \mathcal{X} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$
- Sia $A \in \mathcal{Q} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i \rightarrow A \in \mathcal{Q}_i \;\; \forall i \in I \Rightarrow$

  $A^c \in \mathcal{Q}_i \quad \forall i \in I \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$
- Sia $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{Q} \Rightarrow \forall n \geq 1 \quad A_n \in \mathcal{Q} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$

  $\Rightarrow A_n \in \mathcal{Q}_i \;\; \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{Q}_i \;\; \forall i \in I$

  $\Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{Q}$ è una σ-algebra

b) $\bigcup_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ non è nemmeno un'algebra:

se $A, B \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{Q}_i \Rightarrow \exists \, i, j \in I$ t.c. $A \in \mathcal{Q}_i$ e $B \in \mathcal{Q}_j$

se $i \neq j$ non posso andare avanti

esempio:

$\mathcal{X} = \{a, b, c\} \qquad \mathcal{Q}_1 = \{\phi, \mathcal{X}, \{a\}, \{b, c\}\}$

$\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \mathcal{Q}_2 = \{\phi, \mathcal{X}, \{b\}, \{a, c\}\}$

$\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 = \{\phi, \mathcal{X}, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$

siano $A = \{a\} \in Q_1 \Rightarrow A \in Q_1 \cup Q_2$

$B = \{b\} \in Q_2 \Rightarrow B \in Q_1 \cup Q_2$

però $A \cup B = \{a, b\} \notin Q_1 \cup Q_2$

Definizione

Se $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice σ-algebra generata da $\mathcal{E}$ è l'intersezione di tutte le σ-algebre che contengono gli elementi di $\mathcal{E}$.

Si indica con $\sigma(\mathcal{E})$ ed è la più piccola σ-algebra che contiene gli elementi di $\mathcal{E}$.

NOTA: $\sigma\left(\bigcup_{i \in I} Q_i\right)$ si denota con $\bigvee_{i \in I} Q_i$