Ex: Sia (u,v) il sistema di coordinate cartesiano standard di $\mathbb{R}^2$. Scrivere il campo vettoriale

$$X = u\,\partial_u + v\,\partial_v$$

nelle coordinate (ξ, η) date da

$$\xi = \ln(u+v) \,, \quad \eta = \operatorname{sen}(v)$$

Dobbiamo calcolare $f_*(X)$ dove

$$f : (u,v) \in \Omega \rightarrow \left(\ln(u+v) \,,\ \operatorname{sen}(v) \right) = \left(\xi(u,v) \,, \eta(u,v) \right)$$

Ci servirà anche la trasformazione inversa

$$f^{-1} : (\xi, \eta) \longrightarrow \left(u(\xi,\eta) \,, v(\xi,\eta) \right) = \left(e^{\xi} - \operatorname{arcsen}(\eta) \,,\ \operatorname{arcsen}(\eta) \right)$$

La trasformazione inversa si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \xi = \ln(u+v) \\ \eta = \operatorname{sen}(v) \end{cases}$$ rispetto a (u,v)

La matrice Jacobiana di f è

$$Jac(f)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u+v} & \frac{1}{u+v} \\ 0 & \cos(v) \end{pmatrix}$$

che ha determinante $\neq 0$ se $v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Quindi siamo sicuri (vedi lezione 12, pag. 13 b)

che per qualsiasi $q_0 = (u_0, v_0)$ con $v_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

esiste un aperto $\mathcal{U}$ contenente q_0 tale che

$f|_{\mathcal{U}}$ è biunivoca. Possiamo supporre di lavorare

su quest' aperto.

Avremo che

$$\mathrm{Jac}(f)_{(u,v)} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\substack{\text{componenti di } X \\ \text{nella base } \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u+v} & \frac{1}{u+v} \\ 0 & \cos(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ v\cos(v) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{componenti di } f_*(X) \\ \text{nella base } \left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}\right)}}$$

In definitiva

$$f_*(X) = \frac{\partial}{\partial \xi} + v\cos(v)\frac{\partial}{\partial \eta} \qquad (\bullet)$$

ed esprimendo v rispetto a (ξ, η) (vedi f^{-1} pag. 1)

abbiamo che $(\bullet)$ è uguale a

$$\frac{\partial}{\partial \xi} + \operatorname{arcsen}(\eta)\cos(\operatorname{arcsen}(\eta))\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \operatorname{arcsen}(\eta)\sqrt{1-\eta^2}\,\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$= f_*(X) \circ f^{-1}$$

Ex: Sia (u,v) il sistema di coordinate standard cartesiano di $\mathbb{R}^2$. Si consideri il campo vettoriale

$$X = \partial_u + v\,\partial_v$$

Trovare

$$f : (u,v) \longrightarrow \left(\xi(u,v),\ \eta(u,v)\right)$$

tale che $f_*(X) = \frac{\partial}{\partial \xi}$ (più precisamente $f_*(X) \circ f^{-1} = \frac{\partial}{\partial \xi}$)

Equivalentemente potevo chiedere di trovare delle coordinate (ξ, η) (definite su qualche aperto) nelle quali il campo X assumeva la forma $\frac{\partial}{\partial \xi}$.

La Jacobiana di f è

$$\mathrm{Jac}(f)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathrm{Jac}(f)_{(u,v)} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_u + v\,\xi_v \\ \eta_u + v\,\eta_v \end{pmatrix}$$

Componenti di X nella base (∂_u, ∂_v)

Componenti di $f_*(X)$ nelle base $(\partial_\xi, \partial_\eta)$

Vogliamo che

$$\begin{cases} \xi_u + v\,\xi_v = 1 \\ \eta_u + v\,\eta_v = 0 \end{cases}$$

Risolvere sistemi del genere può essere molto difficoltoso e va oltre lo scopo di questo corso

In ogni modo nelle pagina seguente vi fornisco di una soluzione

$$\xi = u + v e^{-u}, \quad \eta = v e^{-u}$$

Potete verificare infatti che

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} + v \frac{\partial \xi}{\partial v} = 1 \quad e \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} + v \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0$$

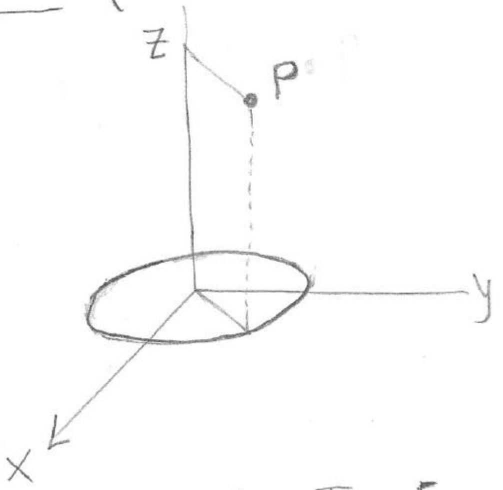
Giusto come ulteriore verifica vediamo che

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v e^{-u} & e^{-u} \\ -v e^{-u} & e^{-u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notare che il determinante di J è e^{-u}

che è sempre $\neq 0$

Ex: (Coordinate cilindriche). Sia (x, y, z) il sistema cartesiano di $\mathbb{R}^3$.



Le coordinate cilindriche (r, φ, z) di un punto P sono date dalle coordinate polari (r, φ) della sua proiezione sul piano xy e dalla sua coordinata in z

Se $I = [0, +\infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$

le coordinate cilindriche sono definite come segue

$r : \mathbb{R}^3 \setminus I \to (0, +\infty) \qquad \varphi : \mathbb{R}^3 \setminus I \to (0, 2\pi) \qquad z : \mathbb{R}^3 \setminus I \to \mathbb{R}$

e si ottengono come inversa di

$$(r, \varphi, z) \longrightarrow \left(r\cos(\varphi),\ r\,\mathrm{sen}(\varphi),\ z\right) = (x, y, z)$$

Quindi abbiamo

$$(x, y, z) \longrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ z\right) = (r, \varphi, z) \quad (\star)$$

e

$$(r, \varphi, z) \longrightarrow \left(r\cos(\varphi),\ r\,\mathrm{sen}(\varphi),\ z\right) = (x, y, z)$$

Osservazione

Valgono le stesse considerazioni di pag. 13 b-c delle lezione precedente. Quando dico che $(\star)$ è "l'inversa" dell'applicazione di fine pag. 7, devo stare attento ai domini.

Ex: Sia $P(t) = \left(R\cos(t),\ R\,\mathrm{sen}(t),\ Kt \right)$, $R, K \in \mathbb{R}$

un'elica circolare.

Scrivere $P'(t)$ in coordinate cilindriche.

Sappiamo che

$$P'(t) = \left(-R\,\mathrm{sen}(t),\ R\cos(t),\ K \right) \qquad (\bullet)$$

e per quello che abbiamo detto nelle lezioni precedenti, $P'(t)$ lo si può identificare con un elemento di $T_{P(t)}\mathbb{R}^3$ nel seguente modo

$$P'(t) = -R\,\mathrm{sen}(t) \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{P(t)} + R\cos(t) \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{P(t)} + K \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{P(t)} \qquad (\star)$$

RISPOSTA "FURBA"

Possiamo riscrivere l'elica nelle coordinate (r, φ, z)

Avremo che

$$\begin{cases} r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = R \\ \varphi(t) = \arctan\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right) = t \\ z(t) = Kt \end{cases}$$

e quindi considerare la derivata rispetto a t ed ottenere

$$\Big(r'(t),\ \varphi'(t),\ z'(t)\Big) = \underbrace{(0, 1, K)}_{\text{Queste sono le componenti rispetto a } \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)} \left(\begin{array}{c}\text{calcolati in} \\ r(t), \varphi(t), z(t)\end{array}\right)$$

RISPOSTA UTILIZZANDO QUELLO CHE ABBIAMO FATTO

NELLE LEZIONI PRECEDENTI

Dobbiamo calcolare $f_\star(P'(t))$ con $P'(t)$ dato da $(\star)$ pag. 9

dove $f : (x, y, z) \longrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ z\right) = (r, \varphi, z)$

La matrice Jacobiana di f calcolata nel punto

$P(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = \big(R\cos(t), R\,\mathrm{sen}(t), Kt\big)$ è

$$\mathrm{Jac}(f)_{P(t)} = \begin{pmatrix} \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} & \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} & 0 \\ -\frac{y(t)}{x^2(t)+y^2(t)} & \frac{x(t)}{x^2(t)+y^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) & 0 \\ -\frac{\mathrm{sen}(t)}{R} & \frac{\cos(t)}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora moltiplico $Jac(f)_{P(t)}$ per il vettore $(\bullet)$ di pag. 9 messo in colonna. Abbiamo che

$$Jac(f)_{P(t)} \cdot \begin{pmatrix} -R\,\mathrm{sen}(t) \\ R\cos(t) \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ K \end{pmatrix}$$

Componenti di $P'(t)$ nella base $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ (calcolati in $P(t)$)

componenti di $f_\star(P'(t))$ nella base $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ (calcolati in $f(P(t)) = r(t), \varphi(t), z(t)$)

Cioè

$$f_\star(P'(t)) = \left.\frac{\partial}{\partial \varphi}\right|_{f(P(t))} + K \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{f(P(t))}$$

come ottenuto a pag. 10

CURVE INTEGRALI DI CAMPI VETTORIALI

Domanda:

Sia X un campo vettoriale su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$.
Possiamo trovare le curve $P : I \to \Omega$ tali che

$$P'(t) = X_{P(t)} \quad ? \qquad (*)$$

La risposta è si e si chiamano curve integrali del campo X.

Anche se teoricamente è sempre possibile trovare le curve integrali, praticamente può risultare piuttosto laborioso visto che presuppone la soluzione di un sistema di equazioni differenziali

Scrivendo in coordinate la condizione (★) di pagina precedente abbiamo che

$$P(t) = \left(x_1(t), \dots, x_n(t) \right)$$

$$P'(t) = \left(x_1'(t), \dots, x_n'(t) \right)$$

$$X_{P(t)} = \left(a_1(P(t)), \dots, a_n(P(t)) \right)$$

Componenti rispetto alla base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ tutti calcolati in $P(t)$

Quindi, uguagliando componente per componente,

$$x_k'(t) = a_k(P(t)) = a_k\left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right) \quad , \quad k = 1 \dots n$$

che è un sistema di n equazioni differenziali ordinarie

Facciamo degli esempi

Ex: Sia (u,v) il sistema cartesiano standard su $\mathbb{R}^2$

Trovare le curve integrali del campo $X = u\,\partial_u + v\,\partial_v$

Abbiamo che le componenti di $P'(t)$ sono

$$(u'(t),\ v'(t))$$

mentre le componenti di $X_{P(t)}$ sono

$$(u(t),\ v(t))$$

e andando ad uguagliare ottengo il sistema

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = v(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = u_0 e^t \\ v = v_0 e^t \end{cases}$$

$(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ è il punto in cui "la particella" si trova all'istante $t = 0$

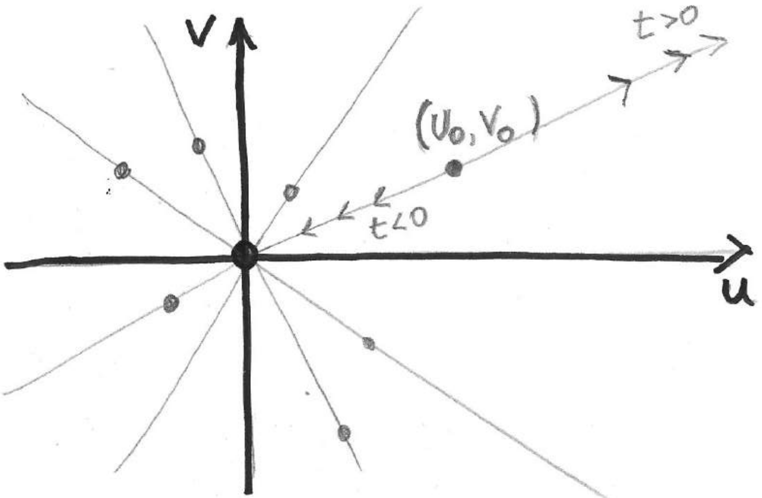
Andiamo a disegnare le traiettorie delle curve $\begin{cases} u = u_0 e^t \\ v = v_0 e^t \end{cases}$ al variare di (u_0, v_0)

L'origine è un punto stazionario del campo in quanto $X_{(0,0)} = (0,0)$, quindi di "velocità" nulla. Se una particella all'istante $t=0$ si trova nell'origine allora non si muove

Notiamo che $\frac{u}{v} = \frac{u_0}{v_0}$ = costante.

Quindi le traiettorie saranno delle semirette per l'origine $(0,0)$ con coefficiente angolare $\frac{v_0}{u_0}$

(l'origine è esclusa)



La particella che all'istante $t=0$ si trova in (u_0, v_0) si muove verso "l'esterno" se $t>0$ e si avvicina asintoticamente a $(0,0)$ se $t<0$.

Osservazione

Già avevamo visto che il campo $X = u\,\partial_u + v\,\partial_v$ è un campo di tipo "radiale" come testimonia il disegno delle curve integrali del campo a pagina precedente

Ex: Sia (u,v) il sistema cartesiano standard di $\mathbb{R}^2$.

Trovare le curve integrali del campo $X = u^2 \partial_u + v \partial_v$

Procedendo come nell'esercizio precedente dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} u'(t) = u^2(t) \\ v'(t) = v(t) \end{cases}$$

La soluzione è

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{u_0}{1-u_0 t} \\ v(t) = v_0 e^t \end{cases}$$

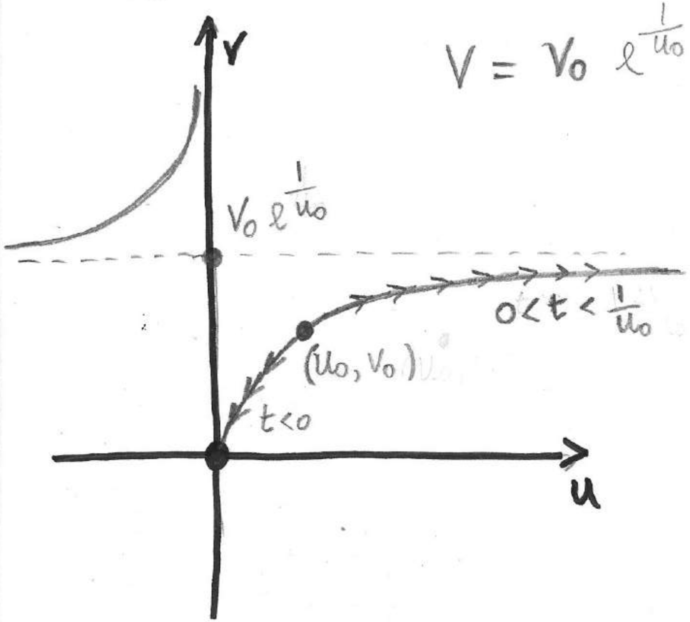
dove $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ è il punto in cui "la particella" si trova all'istante $t=0$

Se andiamo a ricavare t dalla prima equazione

$$u - \frac{u_0}{1-u_0 t} = 0 \longrightarrow t = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u}$$

e l'andiamo a sostituire nella seconda otteniamo le traiettorie delle curve integrali

$$V = V_0 \, e^{\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u}}$$



Valgono considerazioni del tutto analoghe all'esempio precedente. Per $t=0$ la particella si trova in (u_0, V_0) che per fissare le idee supponiamo $u_0 > 0$, $V_0 > 0$. Per $0 < t < \frac{1}{u_0}$ la particella si muove verso l'esterno, mentre per $t<0$ si avvicina asintoticamente all'origine.

Ex: Sia (u,v) il sistema cartesiano standard di $\mathbb{R}^2$

Trovare le curve integrali del campo $X = v\,\partial_u - u\,\partial_v$

Procedendo come negli esercizi precedenti dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} u'(t) = v \\ v'(t) = -u \end{cases}$$

La soluzione è

$$\begin{cases} u(t) = u_0 \cos(t) + v_0 \,\mathrm{sen}(t) \\ v(t) = -u_0 \,\mathrm{sen}(t) + v_0 \cos(t) \end{cases}$$

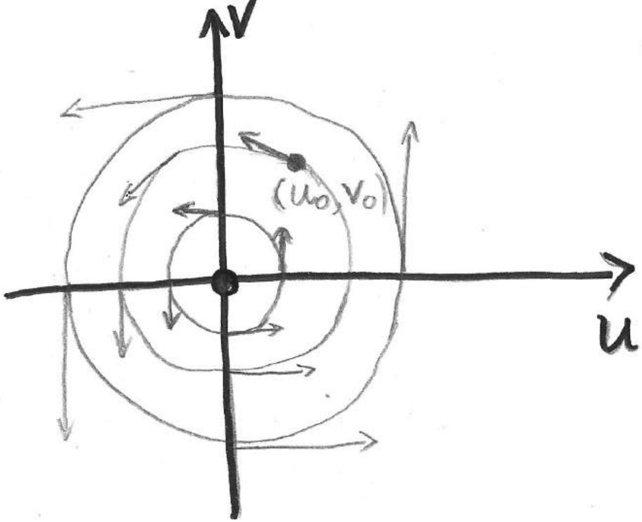
dove $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ è il punto in cui "la particella" si trova all' istante $t=0$

Si verifica facilmente che

$$u^2(t) + v^2(t) = u_0^2 + v_0^2$$

cioè le traiettorie sono circonferenze concentriche

Più precisamente, la traiettoria passante per il punto (u_0, v_0) è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$. D'altra parte avevamo già visto che il campo era di tipo "rotazionale".



Il punto $(0,0)$ è un punto stazionario: se una particella all'istante $t=0$ si trova in $(0,0)$ vi rimane $\forall\, t$