(ESERCIZI DEL FOGLIO 1 SUI VETTORI ALEATORI)

Esercizio 1. *Si estraggano $n = 3$ palline da un'urna, senza reinserimento. Si supponga che l'urna contenga 3 palline bianche, 4 palline nere e 5 rosse e si indichino con X e Y il numero di palline estratte di colore bianco e nero, rispettivamente.*

a) *Si determini la densità congiunta discreta di (X, Y).*

b) *Si determinino le densità discrete marginali di X e Y.*

c) *Con quale probabilità il numero di palline bianche estratte è inferiore al numero di palline nere estratte?*

Soluzione:

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ $\quad X =$ n° palline bianche estratte

$Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ $\quad Y =$ n° palline nere estratte

$Z = (X, Y) \qquad Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$Y(\Omega)$

$i \backslash j$	0	1	2	3	p_X
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1				0	
2			0	0	
3		0	0	0	
p_Y					1

$X(\Omega)$

(completare la tabella)

1)
$$p_Z(i,j) = P(X=i, Y=j) = \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{5}{3-i-j}}{\binom{12}{3}}$$

$\forall (i,j) \in Z(\Omega)$

ad esempio:

$$p_Z(0,0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{0}\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}$$

2) $\forall i \in X(\Omega)$
$$p_X(i) = \sum_{j=0}^{3} p_Z(i,j) \underset{\text{direttamente}}{=} \frac{\binom{3}{i}\binom{9}{3-i}}{\binom{12}{3}}$$

esempio $p_X(0) = p_Z(0,0) + p_Z(0,1) + p_Z(0,2) + p_Z(0,3)$

$$= \frac{10}{220} + \frac{40}{220} + \frac{30}{220} + \frac{4}{220} = \frac{84}{220}$$

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} \quad (X \text{ ha legge ipergeometrica})$$

Analogamente

$$\forall j \in Y(\Omega) \qquad p_Y(j) = \sum_{i=0}^{3} p_Z(i,j) = \frac{\binom{4}{j}\binom{8}{3-j}}{\binom{12}{3}}$$

(Y ha legge ipergeometrica)

3) $\mathbb{P}(X<Y) = \mathbb{P}\big((X,Y) \in C\big) = \mathbb{P}_Z(C)$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x<y\}$

$$= \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i,j)\in C}}^{3} p_Z(i,j) =$$

$$= p_Z(0,1) + p_Z(0,2) + p_Z(0,3)$$

$$+ p_Z(1,2) + \underbrace{\cancel{p_Z(1,3)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{p_Z(2,3)}}_{=0} = \dots$$

VETTORI ALEATORI ASSOLUTAMENTE CONTINUI

Definizione

Un vettore aleatorio $Z = (X, Y)$ si dice **assolutamente continuo** se la sua legge (congiunta) è una misura su $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue $\underline{m} = m \otimes m$: $\boxed{\mathbb{P}_Z \ll \underline{m}}$

La derivata di Radon-Nikodym $\boxed{f_Z = \frac{d\mathbb{P}_Z}{d\underline{m}}}$ si dice **funzione di densità congiunta**

$f_Z \geq 0$ misurabile (anzi integrabile)

e $\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ $\boxed{\mathbb{P}_Z(C) = \mathbb{P}(Z \in C) = \int_C f_Z \, d\underline{m}}$

Inoltre

$$1 = \mathbb{P}_Z(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} f_Z \, d\underline{m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x, y) \, dx dy$$

abuso di notazione

Proposizione

Sia $Z = (X, Y)$ un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità congiunta f_Z. Allora X e Y sono v.a. assolutamente continue e le **densità marginali f_X e f_Y**

Si ottengono da f_Z nel modo seguente:

$$\boxed{\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y)\,dy && \forall x\in\mathbb{R} \\ f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y)\,dx && \forall y\in\mathbb{R} \end{aligned}}$$

osservazione:

non vale il viceversa (non so neanche se Z è un vettore assolutamente continuo).

dim

Sia $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P_X(A) = P(X\in A) = P(X\in A,\ Y\in\mathbb{R}) = P(Z\in A\times\mathbb{R})$$

$$= P_Z(A\times\mathbb{R}) = \int_{A\times\mathbb{R}} f_Z\,dm = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x)\, f_Z(x,y)\,dx\,dy$$

$P_Z \ll m$

$f_Z = \dfrac{dP_Z}{dm}$

misurabile, ≥ 0 (anche integrabile)

Fubini-Tonelli

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_A \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x,y)\,dy\right)}_{f_X(x)} dx = \int_A f_X(x)\,dx = \int_A f_X\,dm$$

$\Rightarrow$ ho trovato una funzione f_X definita da

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x,y)\,dy \quad \text{t.c.}$$

$f_X \geq 0$, misurabile (per Tonelli) e $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X \, dm$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}_X \ll m$ e $f_X = \dfrac{d\mathbb{P}_X}{dm}$ q.o.

(Analogo per f_Y)

CVD

Esercizio 2. *Siano X e Y due variabili aleatorie con funzione di densità congiunta*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 2e^{-(x+2y)}\, \mathbf{1}_D(x,y),$$

dove $D = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

a) Calcolare $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$.

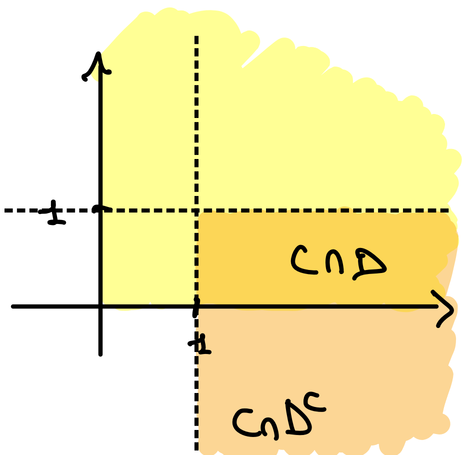
b) Calcolare $\mathbb{P}(X < Y)$.

c) Determinare le leggi marginali di X e Y. X e Y sono indipendenti?

Soluzione

a) $\mathbb{P}(X>1, Y<1) = \mathbb{P}((X,Y)\in C) = \int_C f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

dove $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1,\ y<1\}$



$$= \int_{C\cap D} 2e^{-(x+2y)}\,dx\,dy$$

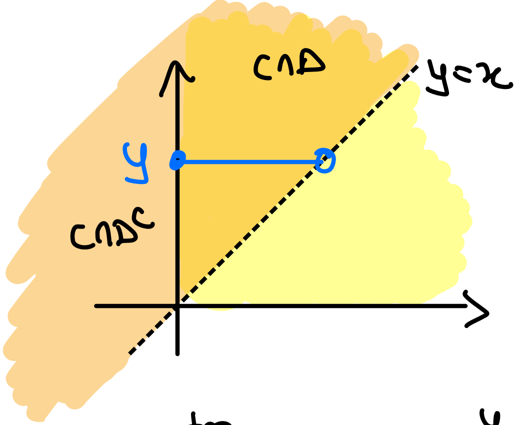
$$= \int_0^1 \left(\int_1^{+\infty} 2e^{-(x+2y)}\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 2e^{-2y} \underbrace{\left(\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx \right)}_{\substack{T\sim Exp(1) \\ S_T(1)=e^{-1}}} dy = e^{-1} \underbrace{\int_0^1 2e^{-2y}\,dy}_{\substack{U\sim Exp(2) \\ F_U(1)=1-e^{-2}}}$$

$$= e^{-1}(1-e^{-2})$$

b) $\mathbb{P}(X<Y) = \mathbb{P}((X,Y)\in C) = \int_C f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy$

dove $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y\}$



$$= \int_{C\cap D} 2e^{-(x+2y)}\,dxdy$$

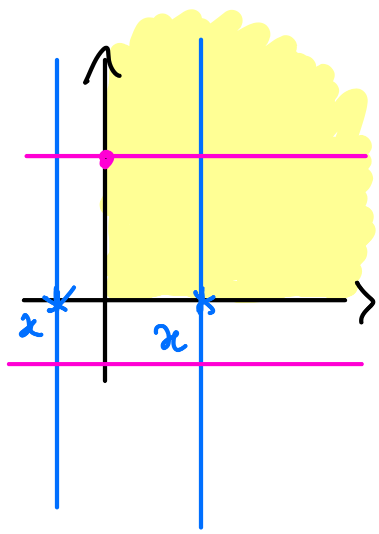
$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y} 2e^{-(x+2y)}\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\Big(\underbrace{\int_0^{y} e^{-x}\,dx}_{T\sim Exp(1)}\Big)dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\left(1-e^{-y}\right)dy$$

$F_T(y) = 1-e^{-y}$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\,dy}_{\substack{U\sim Exp(2)\\ =1}} - \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^{+\infty} 3e^{-3y}\,dy}_{\substack{V\sim Exp(3)\\ =1}} = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

c)



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

se $x\le 0$ $\quad f_X(x)=0$

se $x>0$ $\quad f_X(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-(x+2y)}\,dy$

$$= e^{-x}\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\,dy = e^{-x}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = e^{-x}\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \Rightarrow X\sim Exp(1)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

$f_Y(y) = 0$ se $y \leq 0$

se $y > 0$ $\quad f_Y(y) = \int_0^{+\infty} 2e^{-(x+2y)}\,dx = 2e^{-2y}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 2e^{-2y}$

$$\Rightarrow f_Y(y) = 2e^{-2y}\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y) \rightarrow Y \sim \mathrm{Exp}(2)$$