Esercitazione 1

correzione test di ingresso

ES 1

$\sqrt{x^2}$

Quando estraiamo una radice vi è una differenza nel caso in cui l'indice sia PARI o DISPARI

In particolare abbiamo che:

- per n PARI: $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$ con $a \geq 0, b \geq 0$
- per n DISPARI: $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$ con $a, b \in \mathbb{R}$

Nel nostro caso $n = 2$

↓

Essendo $\sqrt{x^2}$ un'espressione letterale è necessario utilizzare il modulo quando si estrae la radice per garantire la non negatività richiesta → $b \geq 0$

↓

S = soluzione

Quindi: S: $\sqrt{x^2} = |x|$

NB

$$\boxed{|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -[A(x)] & \text{se } A(x) < 0 \end{cases}}$$

ES 2

$x^4 + x^2 - 2 = 0$ → equazione di IV° grado

↓

non esiste una formula risolutiva diretta:

TECNICA

[Ricondursi a tipologie di equazioni che si è in grado di risolvere : I° grado, II° grado

$\Rightarrow$ Utilizziamo una variabile ausiliaria:

$t = x^2$

L'equazione diventa così:

$x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$\nearrow -2 = t_2$

$\searrow 1 = t_1$

- $t_1 = 1 \Rightarrow t = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- $t_2 = -2 \Rightarrow t = x^2 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow$ IMPOSSIBILE $\rightarrow$ nessun numero elevato al quadrato restituisce un numero negativo

S: $x = -1 \vee x = 1$

es 3

$p(x) = x^4 + 1 \rightarrow$ ATTENZIONE: NON è x^2+1

$\downarrow$

il metodo di scomposizione necessario è quello del COMPLETAMENTO DEL QUADRATO:

$p(x)$ può essere visto come la somma di due quadrati:

$p(x) = x^4 + 1 = A^2 + B^2$ dove $A = x^2$ e $B = 1$

$\hookrightarrow$ Come sappiamo il quadrato di un binomio ha il seguente sviluppo:

$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

Abbiamo quindi nel nostro caso che:

$(A+B)^2 = (x^2+1)^2 = x^4 + 1 + 2x^2 \rightarrow$ è quello che ci manca

$\downarrow$

NB Se sommiamo e sottraiamo una stessa "quantità" il polinomio p(x) rimane lo stesso quindi:

$$p(x) = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2$$

Possiamo ora vedere p(x) come una differenza di quadrati:

$p(x) = C^2 - D^2$ se poniamo $C = x^2+1$ $D = \sqrt{2}\,x$

la scomposizione della differenza di quadrati è la seguente:

$$C^2 - D^2 = (C+D)(C-D)$$

Possiamo quindi riscrivere p(x) come:

$$p(x) = (C+D)(C-D) = (x^2+1+\sqrt{2}\,x)(x^2+1-\sqrt{2}\,x)$$

$$S: \; P(x) = (x^2+1+\sqrt{2}\,x)(x^2+1-\sqrt{2}\,x)$$

es 4.

$x^2+1 > 2|x+1|$ → è una DISEQUAZIONE CON IL MODULO

DISEQUAZIONI CON IL MODULO

In generale:

$$|A(x)| \gtrless B(x)$$

Per risolverla dobbiamo risolvere i seguenti sistemi ed UNIRNE le soluzioni

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) \gtrless B(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) < 0 \\ -[A(x)] \gtrless B(x) \end{cases}$$

Nel nostro caso:

$x^2+1 > 2|x+1|$ $\rightarrow$ lo riscriviamo nella forma:

$|A(x)| \gtrless B(x)$

$\rightarrow$ $|x+1| < \frac{1}{2}(x^2+1)$ dove $A(x) = x+1$ e $B(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$

Applichiamo il metodo risolutivo:

$$\begin{cases} \overbrace{x+1}^{A(x)} \geq 0 \\ \underbrace{(x+1)}_{A(x)} < \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+1)}_{B(x)} \end{cases} \cup \begin{cases} \overbrace{x+1}^{A(x)} < 0 \\ \underbrace{-(x+1)}_{-A(x)} < \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+1)}_{B(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2(x+1) < x^2+1 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -1 \\ -2(x+1) < x^2+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+1-2x-2 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -1 \\ x^2+1+2x+2 > 0 \end{cases}$$

$$① \begin{cases} x \geq -1 \quad a. \\ x^2-2x-1 > 0 \quad b. \end{cases} \cup \begin{cases} x < -1 \quad c. \\ x^2+2x+3 > 0 \quad d. \end{cases} ②$$

b. $x^2-2x-1 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \quad \rightarrow \left[\sqrt{8} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 8 = 2\sqrt{2} \right.$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{2})}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{2}$$

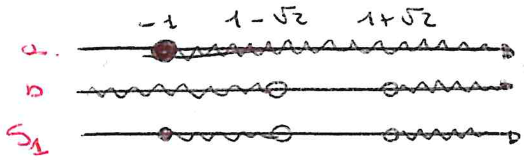
vuoti perché è > stretto e non ≥

S_b: $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$

$\downarrow$

Soluzione di b.

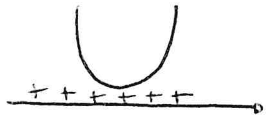
Risolviamo quindi il sistema ①:



S_1: $-1 \leq x < 1-\sqrt{2}$

d. $x^2+2x+3>0$

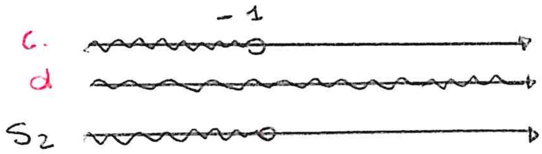
$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow \Delta < 0 \rightarrow$



↓

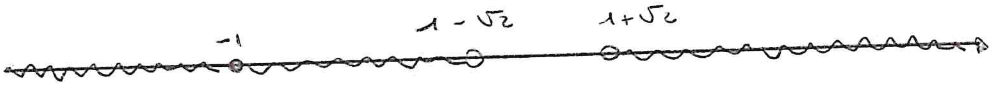
non interseca mai l'asse

Risolviamo il secondo sistema:



$S_2: \; x < -1$

UNIONE: uniamo le due soluzioni sulle stesse rette



$S: \; x < 1-\sqrt{2} \;\cup\; x > 1+\sqrt{2}$

NB
- quando UNISCO, fra compreso e non compreso "vince" compreso
- quando INTERSECO, fra compreso e non compreso "vince" non compreso

es) 4. $\dfrac{2x-1}{5-x} < 2 \rightarrow$ DISEQUAZIONE FRATTA

DISEQUAZIONE FRATTA

In generale:

$\dfrac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0 \Rightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ TAB dei segni $\rightarrow$ + se chiede $>$, − se chiede $<$

$\dfrac{2x-1}{5-x} < 2 \rightarrow \dfrac{2x-1}{5-x} - 2 < 0 \rightarrow \dfrac{2x-1-10+2x}{5-x} < 0 \rightarrow \dfrac{\overbrace{4x-11}^{A(x)}}{\underbrace{5-x}_{B(x)}} < 0$

$A(x) > 0 \quad 4x-11>0 \quad x > 11/4$

$B(x) > 0 \quad 5-x>0 \quad -x>-5 \quad x<5$

	11/4		5	
−		+		+
+		+		−
−		+		−

$S: \; x < 11/4 \;\cup\; x > 5$

es 6

$\sqrt{x+1} \geq 1-x$ → DISEQUAZIONE IRRAZIONALE

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

In generale:

$$\sqrt[n]{A(x)} \gtrless B(x)$$

- Se n è DISPARI: $\boxed{\sqrt[n]{A(x)} \gtrless B(x) \Rightarrow A(x) \gtrless [B(x)]^n}$
- Se n è PARI:

CASO MAGGIORE

$$\sqrt[n]{A(x)} \geq B(x)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq [B(x)]^n \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

CONDIZIONE DI ESISTENZA

CASO MINORE

$$\sqrt[n]{A(x)} \leq B(x)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^n \end{cases}$$

$\sqrt{x+1} \geq 1-x$ $\quad A(x) = x+1 \quad B(x) = 1-x$

$n = 2$ → PARI

$>$ → due sistemi

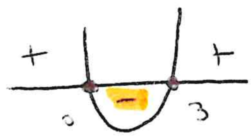
$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+1 \geq (1-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-x < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$① \begin{cases} x \leq 1 & a. \\ x^2-3x \leq 0 & b. \end{cases} \cup ② \begin{cases} x > 1 & c. \\ x \geq -1 & d. \end{cases}$$

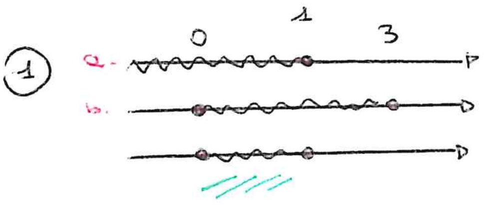
b. $x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

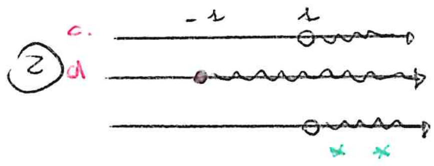
poiché:

$x^2-3x = x(x-3)$



$S_b: \quad 0 \leq x \leq 3$





UNIONE

es 7. **S: $x \geq 0$**

$\operatorname{sen} x > \cos x$ → **DISEQUAZIONE LINEARE IN seno e coseno**

entrambi sono al primo grado e non compaiono termini misti

TECNICA: [Si moltiplica a Dx e a Sx per un coefficiente che ci permette di ricondurci ad un'equazione elementare]

$\operatorname{sen} x - \cos x > 0$ → i coefficienti sono $+1$ e -1

↓

In questo caso va moltiplicato per $\sqrt{2}/2$

↓

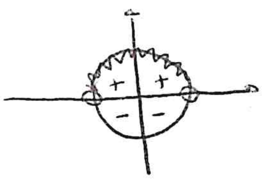
$$\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} \cos x > 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x > 0$$

NB [Formula di sottrazione del seno : $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

Nel nostro caso $\alpha = x$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$ quindi:

$$\operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x = \operatorname{sen}\underbrace{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}_{\gamma} \Rightarrow$$

$\operatorname{sen}\gamma > 0$



$\Rightarrow \; 0 + 2k\pi < \gamma < \pi + 2k\pi$

$0 + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi$

S: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$

ALTRI ESEMPI DI LINEARI IN SENO E COSENO

1. $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x + \cos x > 0$ → moltiplico per $1/2$ →

$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sen}\,x + \frac{1}{2}\cos x > 0$ → $\mathrm{sen}\,x \cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\cos x > 0$ →

$\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$

2. $\sqrt{3}\cos x - \mathrm{sen}\,x > 0$ → moltiplico per $1/2$ →

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x > 0$ → $\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\,\mathrm{sen}\,x > 0$

→ $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) > 0$

es 8

$$\frac{\underbrace{x}_{N_1}\,\overbrace{\log(x+2)}^{N_2}}{\underbrace{x-3}_{D}} \leq 0$$

→ DISEQUAZIONE CON ALL'INTERNO LOGARITMI

* I° COSA DA FARE !!! → mettere subito le condizione di esistenze del logaritmo altrimenti cerchiamo la soluzione in un insieme più grande dove il fattore $\log(x+2)$ non ha significato

[In generale: $\log_a B(x)$ ⇒ C.E: $B(x) > 0$]

C.E: $x+2 > 0$ → $x > -2$ → ha senso risolvere la disequazione solamente per le $x > -2$ poiché per $x \leq -2$ $\log(x+2)$ non esiste

$N_1 \geq 0$ $\quad x \geq 0$

$N_2 \geq 0$ $\quad \log(x+2) \geq 0$ → DISEQUAZIONE LOGARITMICA ELEMENTARE

DISEQUAZIONE LOGARITMICA ELEMENTARE

[$\log_a B(x) \geq 0$ → vogliamo avere il logaritmo sia a DX che a SX per poi "passare agli argomenti"]

RICORDA

* $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$

In particolare: $a^0 = 1 \Rightarrow 0 = \log_a 1$

$a^1 = a \Rightarrow 1 = \log_a a$

* Inoltre: preso un qualsiasi numero c si ha che:

$$c = c \cdot 1 = c \log_a a = \log_a a^c$$

NB

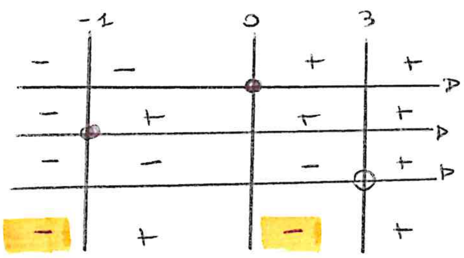
Quando "passo agli argomenti" devo osservare la base:

* se la base è maggiore di 1 il verso della disequazione è invariato
* se la base è minore di 1 devo "rovesciarlo"

N2: $\log(x+2) \geq 0 \rightarrow \log(x+2) \geq \log 1 \rightarrow x+2 \geq 1 \rightarrow x \geq -1$

D: $x > 3$

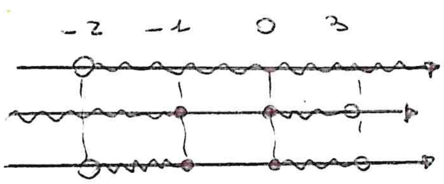
La nostra disequazione è una disequazione fratta quindi TAB DEI SEGNI:



$\underbrace{x \leq -1 \quad \vee \quad 0 \leq x < 3}$

questa va intersecata con le condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} x > -2 & a. \\ x \leq -1 \vee 0 \leq x < 3 & b. \end{cases}$$



S: $-2 < x \leq -1 \vee 0 \leq x < 3$

es 9

$|x^2-8x+16|>0$ → DISEQUAZIONE CON IL MODULO

↓

Il significato del modulo è quello di rendere non negativo il suo argomento

↓

dobbiamo però considerare il fatto che l'argomento di un modulo possa essere nullo

↓

La disequazione richiede il maggiore stretto

↓

Vanno quindi esclusi gli x che annullano il modulo:

$x^2-8x+16 \neq 0 \Rightarrow (x-4)^2 \neq 0$ $x \neq 4$

NB Se fosse stato $|x^2-8x+16| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

es 10

$e^{2x}+e^x-3>0$ → DISEQUAZIONE ESPONENZIALE

↓

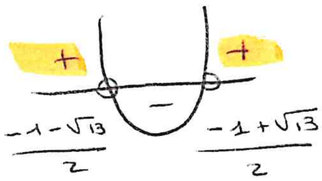
Somma algebrica di termini aventi tutti la stessa base

↓

TECNICA: [sostituzione per ricondurci a formulazioni conosciute]

Poniamo $e^x=t \rightarrow t^2+t-3>0$ $t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$t<\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \vee t>\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$



$\underbrace{e^x<\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}}$ $\vee$ $e^x>\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

Non da nessun contributo perché un esponenziale è ... di non

→ può essere < di un numero neg.

$e^x > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ → non possiamo avere la stessa base da entrambe le parti

↓

$x > \log\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

↳ non giro il verso perché la base e è > 1

VERO O FALSO

1. $2 \leq 3$ → $\leq$ = minore o uguale → genera una proposizione "doppia"

$\boxed{V}$

$2 < 3$ o $2 = 3$

↓

Con la congiunzione "o" si ha che è vera se anche solo una delle due è vera:

$2 < 3$ (V) $2 = 3$ (F) ⇒ $2 < 3$ o $2 = 3$ (V)

2. $\log(a+b) = \log a \cdot \log b$ $\boxed{F}$

La proprietà dei logaritmi dice che:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$

altre proprietà

- $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$
- $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

3. $a^2+b^2 \le (a+b)^2$ F

Sviluppando il quadrato:

$a^2+b^2 \le a^2+b^2+2ab$

Essendo a e b espressioni letterali non ne conosciamo il segno:

* Se a e b sono concordi 2ab è positivo
* Se a e b sono discordi 2ab è negativo

L'affermazione è quindi falsa poiché se a e b sono discordi stiamo togliendo qualcosa ad a^2+b^2 quindi diminuisce

CONTROESEMPIO: $a=2$, $b=-3$

$2^2+3^2 \le (2-3)^2$

$4+9 \le 1$

NB Per dimostrare la falsità di un'affermazione è sufficiente trovare un esempio per cui non "funziona"

4. $a^b = e^{b\log a}$ V

↓ Applichiamo il logaritmo da entrambe le parti:

$\log a^b = \log e^{b\log a} \to b\log a = b\log a \cdot \underbrace{\log e}_{=1}$

$\to b\log a = b\log a$ ✓

5. $|a|+|b| \le |a+b|$ F

CONTROESEMPIO

$a=3$ $b=-2$

$|3|+|-2| \le |3-2|$

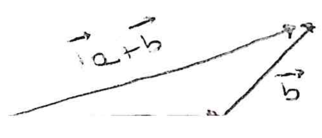
$|3|+2 \le 1$

$5 \le 1$

La disuguaglianza vera è:

$\Rightarrow$ $|a+b| \le |a|+|b|$ I° DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

↓ Geometricamente: MODULO = LUNGHEZZA



→ perché sia un triangolo ogni lat deve essere < ... della