Serie di Numeri Complessi

Serie di Potenze e Geometriche

Richiami di teoria. Una successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{C}$. La somma di tutti gli infiniti termini di una successione è detta **serie**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Si dice che una serie *converge* se $\exists\, l \in \mathbb{C} : \lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = l$, altrimenti la serie *diverge*.

Per studiare la convergenza di una serie abbiamo alcuni strumenti fondamentali:

- **Principio del confronto**: se $\sum a_k$ converge e $0 \leq b_k \leq a_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, allora anche $\sum b_k$ converge.
- **Convergenza assoluta**: se $\sum |a_k|$ converge, allora anche $\sum a_k$ converge.
- **Criterio del rapporto**: se $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$, allora $\sum a_k$ converge.
- **Criterio della radice**: se $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, allora $\sum a_k$ converge.
- **Criterio del confronto asintotico**: se a_k è infinitesima di ordine > 1 per $k \to \infty$ allora $\sum a_k$ converge.

Le serie di potenze hanno la forma

Serie di potenze

$$\sum_k a_k (z - z_0)^k$$

dove $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri complessi e z_0 è il centro della serie. Le serie di potenze convergono all'interno di un cerchio, centrato nel centro, e divergono al i fuori. Il raggio R di tale cerchio e dato da $R = 1/l$, dove l può essere calcolato come

$$l = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \qquad \text{o} \qquad l = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

con la convenzione che, nei casi degeneri $l = 0$ ed $l = \infty$ si ha, rispettivamente, che la serie converge su tutto $\mathbb{C}$ e che converge solo in z_0 (se a_k diverge, si ha sempre $R = 0$). La convergenza sulla frontiera del cerchio è sempre studiata separatamente, utilizzando la proprietà di convergenza assoluta e per sostituzione.

Una particolare ma importante famiglia di serie di potenze è dato dalle serie geometriche, che sono del tipo

Serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad \text{che converge per } |z| < 1 \text{ e diverge per } |z| \geq 1$$

Esercizio 1. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_k \frac{3^k - k^2}{k^2+1} z^k$$

Soluzione. Osserviamo che la serie di potenze è centrata nell'origine $z_0 = 0$ e il termine generale, è

$$a_k = \frac{3^k - k^2}{k^2+1}$$

Di conseguenza il raggio di convergenza della serie sarà dato da

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{3^{k+1} - (k+1)^2}{(k+1)^2+1}}{\dfrac{3^k - k^2}{k^2+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3\cdot 3^k - (k+1)^2}{3^k - k^2} \cdot \frac{k^2+1}{(k+1)^2+1} \tag{1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{3 - 3^{-k}(k+1)^2}{1 - 3^{-k}k^2} \cdot \frac{1+k^{-2}}{1+k^{-2}(2k+2)} = 3 \tag{2}$$

Per cui la serie di potenze converge in $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{3}\right\}$. Studiamo quindi il comportamento della serie sulla frontiera della circonferenza, utilizzando la convergenza assoluta:

$$\sum_k \left| \frac{3^k - k^2}{k^2+1} z^k \right| = \sum_k \frac{3^k - k^2}{k^2+1} \left|z^k\right| = \sum_k \frac{3^k - k^2}{k^2+1} |z|^k = \sum_k \frac{3^k - k^2}{k^2+1} \cdot \frac{1}{3^k} \quad \text{converge}$$

La convergenza della serie scritta sopra si può verificare con il criterio del rapporto o anche notando che il termine generale è infinitesimo di ordine 2, infatti: $\frac{3^k-k^2}{k^2+1} \cdot \frac{1}{3^k} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \to \infty$.

Concludiamo quindi che la serie di potenze converge in $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{3}\right\}$.

Esercizio 2. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_n \frac{i^n}{2n+1} z^{3n}$$

Soluzione. Innanzitutto, notiamo che la serie non è scritta come una serie di potenze per via del $3n$ all'esponente di z. Per riscriverla come una serie di potenze abbiamo due strade equivalenti. Possiamo notare, ad esempio, che è possibile riscriverla, ponendo $3n = k$ (si noti che k scorre solo sui multipli di 3 al variare di n tra gli interi positivi), come

$$\sum_k a_k z^k$$

dove

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{i^{\frac{k}{3}}}{\frac{2}{3}k+1} & k = 0, 3, 6, 9, \dots \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Di conseguenza, il raggio di convergenza della serie potrà essere calcolato solo mediante la radice (il rapporto tra due termini consecutivi della successione a_k non è ben definito):

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left| \frac{i^{\frac{k}{3}}}{\frac{2}{3}k+1} \right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{||i^{\frac{k}{3}}|}{\left|\frac{2}{3}k+1\right|}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\frac{2}{3}k+1}} = 1$$

Ergo, la serie di potenze converge per $|z| < 1$.

Potevamo ottenere lo stesso risultato ponendo $w = z^3$ e riscrivendo la serie come:

$$\sum_k \frac{i^k}{2k+1} w^k$$

che è scritta in forma di serie di potenze. In questo modo possiamo usare il criterio del rapporto e quindi scrivere:

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{i^{k+1}}{2(k+1)+1} \right| \cdot \left| \frac{2k+1}{i^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+3} = 1$$

Quindi la serie converge per $|w| < 1 \implies |z^3| < 1 \implies |z| < 1$, che è lo stesso risultato ottenuto prima.
Valutiamo ora il comportamento della serie sulla frontiera, cioè per $|z| = 1$. Usiamo il criterio della convergenza assoluta:

$$\sum_k \left| \frac{i^k}{2k+1} z^{3k} \right| = \sum_k \frac{1}{2k+1} |z|^{3k} = \sum_k \frac{1}{2k+1} \quad \text{diverge}$$

Ricordiamo che se la serie dei moduli diverge non è detto che lo faccia anche la serie di partenza, quindi il criterio della convergenza assoluta è inconclusivo in questo caso. Possiamo però trovare almeno un punto nel quale la serie data non converge sul bordo, infatti prendendo $z = i$ si ha che:

$$\sum_k \frac{i^k}{2k+1} z^{3k} \bigg|_{z=i} = \sum_k \frac{i^{4k}}{2k+1} = \sum_k \frac{1}{2k+1} \quad \text{diverge}$$

Possiamo allora concludere che la serie di potenze converge in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Esercizio 3. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_k \left(-\frac{z-1}{2} \right)^k$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che la serie è una geometrica, infatti, per $|-\frac{z-1}{2}| < 1 \iff z \in \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\}$, abbiamo che la serie converge a

$$\sum_k \left(-\frac{z-1}{2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{2}{z+1}$$

Esercizio 4. Sia

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^{2k}$$

Determinare l'insieme di convergenza della serie che definisce $f(z)$ e trovare l'espressione esplicita di $f(z)$.

Soluzione. Come prima, l'idea è quella di di ricondurci a una serie geometrica, di cui sappiamo calcolare la somma. In questo caso però, ricondurci direttamente alla serie geometrica non è possibile ma possiamo sfruttare la sua derivata, infatti, per $|w| < 1$, si ha:

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w} \implies g'(w) = \sum_{k=1}^{\infty} k w^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \left[\frac{1}{1-w} \right] = \frac{1}{(1-w)^2}$$

Riconduciamo allora la nostra serie alla derivata della geometrica:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{2k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(z^2 \right)^{k-1}$$

Notiamo che nel nostro caso $w = z^2$ e la convergenza della serie si ha se e solo se $\left|z^2\right| < 1 \Longrightarrow |z| < 1$. Possiamo ora calcolarci la somma sfruttando la formula per la somma della derivata della geometrica vista sopra:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(z^2\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-z^2\right)^2} \quad z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Esercizio 5. Sia

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{3^{k+1}} z^{3k-2}$$

Determinare l'insieme di convergenza della serie che definisce $f(z)$ e trovare l'espressione esplicita di $f(z)$.

Soluzione. Cerchiamo di ricondurre la serie a una geometrica, di cui sappiamo calcolare la somma:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{3^{k+1}} z^{3k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+3}}{3^{k+2}} z^{3k+1} = \frac{i^3}{3^2} z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{3^k} z^{3k} = -\frac{i}{9} z \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^3\right)^k$$

Sappiamo che la serie converge se e soltanto se si ha:

$$\left|-\frac{1}{3} z^3\right| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{3}|z|^3 < 1 \Longrightarrow |z| < \sqrt[3]{3}$$

A questo punto possiamo calcolarci la somma della serie, e quindi l'espressione esplicita di $f(z)$:

$$f(z) = -\frac{i}{9} z \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^3\right)^k = -\frac{i}{9} z \frac{1}{1 + \frac{1}{3} z^3} = -\frac{iz}{3z^3 + 9}, \quad z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt[3]{3}\}$$

Esercizi aggiuntivi svolti.

Esercizio 6. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_k \frac{z^k}{k^2\sqrt{k}}$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che la serie di potenze è centrata nell'origine $z_0 = 0$ e che il termine generale a_k è

$$a_k = \frac{1}{k^2\sqrt{k}}.$$

Di conseguenza il raggio di convergenza della serie sarà dato da

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2\sqrt{k+1}}}{\frac{1}{k^2\sqrt{k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2\sqrt{k}}{(k+1)^2\sqrt{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2\sqrt{k}}{k^2\sqrt{k} + o(k^{5/2})} = 1.$$

Per cui la serie di potenze converge in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Studiamo ora il comportamento della serie sulla frontiera della circonferenza, utilizzando la convergenza assoluta:

$$\sum_k \left|\frac{z^k}{k^2\sqrt{k}}\right| = \sum_k \frac{|z^k|}{k^2\sqrt{k}} = \sum_k \frac{|z|^k}{k^2\sqrt{k}} = \sum_k \frac{1}{k^2\sqrt{k}} = \sum_k \frac{1}{k^{5/2}} \quad \text{converge}$$

in quanto serie armonica con parametro $5/2$. Concludiamo quindi che la serie di potenze converge in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Esercizio 7. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_k \frac{(z-2i)^k}{\sqrt[3]{2k}}$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che la serie di potenze è centrata in $z_0 = 2i$ e che il termine generale è

$$a_k = \frac{1}{\sqrt[3]{2k}}.$$

Di conseguenza il raggio di convergenza della serie sarà dato da

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2k+2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[3]{\frac{2k}{2k+2}} = \sqrt[3]{1+o(1)} = 1.$$

Per cui la serie di potenze converge in $\{z \in \mathbb{C} : |z-2i| < 1\}$.
Studiamo ora il comportamento della serie sulla frontiera della circonferenza, utilizzando la convergenza assoluta:

$$\sum_k \frac{|z-2i|^k}{\sqrt[3]{2k}} = \sum_k \frac{1}{\sqrt[3]{2k}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sum_k \frac{1}{k^{1/3}} \quad \text{diverge.}$$

Anche in questo caso, il criterio della convergenza assoluta non porta a nessuna conclusione sulla serie che stiamo studiando. Tuttavia è immediato trovare un controesempio sulla frontiera per cui la serie di potenze non converge, in $z = 2i + 1$, ottenendo esattamente quanto visto sopra. Concludiamo quindi che la serie di potenze converge in $\{z \in \mathbb{C} : |z-2i| < 1\}$.

Esercizio 8. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_k k!(z+1+i)^k$$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che la serie di potenze è centrata in $z_0 = -1-i$ e che il termine generale è

$$a_k = k!.$$

Risulta immediato osservare che la successione a_k diverge, di conseguenza $R = 0$. La serie di potenze converge solo nel suo centro $z_0 = -1-i$.

Esercizi da svolgere a casa.

Determina l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

1. $\sum_k \frac{z^{2k}}{2^{k^2}}$,
2. $\sum_k \frac{\sin k}{k^4} z^k$,
3. $\sum_k \frac{\ln k}{k\sqrt{k}}(x-i)^k$,
4. $\sum_k \frac{\ln k}{k}(z-3+i)^k$,
5. $\sum_k 2^{2k}(z-2)^k$,
6. $\sum_k \frac{k!}{k^2}(z+2i)^k$