12/10/2022

Formula di Taylor al II ordine

Sia $f(x_1, \dots, x_n)$ una funzione di classe C^2.

L'oggetto rilevante (la "vera derivata seconda" di f) è la matrice $n \times n$ (matrice "Hessiana")

$$H_f(P) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) \right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(P) & f_{x_1 x_2}(P) & \cdots & f_{x_1 x_n}(P) \\ f_{x_2 x_1}(P) & f_{x_2 x_2}(P) & \cdots & f_{x_2 x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(P) & f_{x_n x_2}(P) & \cdots & f_{x_n x_n}(P) \end{pmatrix}$$

$P = (x_1, \dots, x_n)$

(si trova anche indicata come $D_f^2(P)$, $\nabla^2 f(P)$).

N.B. $H_f(P)$ è simmetrica, perché $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ grazie al teorema di Schwarz.

Se $n = 2$ e $f = f(x,y)$,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

N.B. Ogni matrice simmetrica $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}^{n}$ individua la forma quadratica

$$g(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_i \cdot x_j \,,$$

ad esempio $(n=2)$ $g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ è associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$.

Possiamo ora enunciare:

Teorema (Sviluppo al II ordine) Se f è di classe C^2 in un intorno di $P_0 \in \mathbb{R}^n$, allora

$$f(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(P-P_0) + \frac{1}{2}(P-P_0)^t H_f(P_0)(P-P_0) + o(\|P-P_0\|^2)$$

per $P \to P_0$.

questa parte è l'$o(\|P-P_0\|)$ che compare nello sviluppo a ordine I

Significato: se f è C^2, allora

$$f(P) = T_{P_0}(P) + o(\|P-P_0\|^2) \text{ per } P \to P_0,$$

dove $T_{P_0}(P) = T_{P_0}(x_1, \dots, x_n)$ è un polinomio di grado 2, ed è l'unico polinomio che approssima $f(P)$, quando $P \to P_0$, con un errore che è $o(\|P-P_0\|^2)$.

Esercizio Verificare che il polinomio $T_{P_0}(P)$ ha le seguenti proprietà:

0) $T_{P_0}(P_0) = f(P_0)$ ("passa per il punto")

1) $\nabla T_{P_0}(P_0) = \nabla f(P_0)$ ("il grafico di T_{P_0} è tangente al grafico di f in $(P_0, f(P_0))$")

2) $H_{T_{P_0}}(P_0) = H_f(P_0)$ ("il grafico di T_{P_0} è tangente al secondo ordine")

Vediamo come si concretizza lo sviluppo nel caso di due variabili:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} (x-x_0, y-y_0) \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$+ o\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right) \text{ per } (x,y) \to (x_0,y_0)$$

In concreto, se svolgo i prodotti, ottengo (N.B. tutte le derivate si intendono calcolate nel punto (x_0,y_0)):

$\to$ cioè $f_x(x_0,y_0)$ ecc.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x \cdot (x-x_0) + f_y \cdot (y-y_0) +$$

$$\frac{1}{2} \left(f_{xx} \cdot (x-x_0)^2 + 2 f_{xy} \cdot (x-x_0)(y-y_0) + f_{yy} \cdot (y-y_0)^2 \right)$$

$$+ o\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right) \text{ per } (x,y) \to (x_0,y_0)$$

MASSIMI E MINIMI LOCALI

Sia $f(x_1, \dots, x_n)$ definita (almeno) in un intorno di $P_0 \in \mathbb{R}^n$.

Def. P_0 si dice "punto di $\overset{\text{max}}{\text{min}}$ locale per f" se $\exists$ un suo intorno I_{P_0} tale che

$$\forall P \in I_{P_0} \qquad f(P) \overset{\leq}{\geq} f(P_0).$$

D

Come si trovano gli eventuali punti di min/max locale?

Teorema. Se f è differenziabile in P_0 (questo presuppone che f sia definita almeno in un intorno di P_0) e P_0 è punto di max o min locale, allora P_0 è un **punto critico** per f, cioè

$$\nabla f(P_0) = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

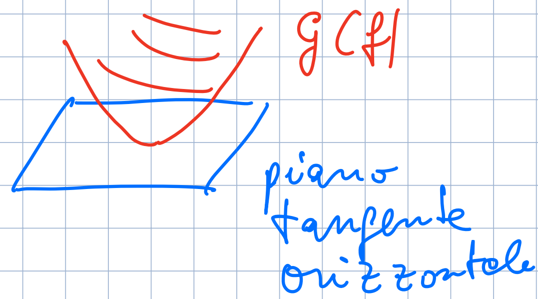
Dim. Se fosse $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \neq 0$ (cioè la i-esima componente di $\nabla f(P_0)$ diversa da 0), allora (ANALISI I) avrei che, facendo variare la componente di indice i (a partire da P_0), avrei che f sale (o scende) strettamente ~~...~~ P_0 non potrebbe essere punto di max o min locale.

N.B. Se f è C^1, cercare i punti critici vuol dire risolvere il sistema (non lineare) di n eq. in n incognite

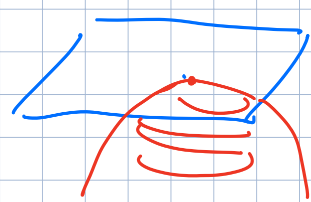
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Se P_0 è punto critico, allora il piano tangente (nel punto $(P_0, f(P_0))$) è orizzontale, e sono possibili tre scenari:

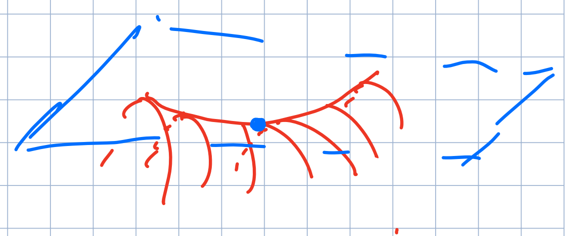
1) P_0 è min locale



2) P_0 è max locale



3) P_0 è punto di SELLA, cioè in <u>ogni</u> intorno di P_0, esistono punti P dove $f(P) > f(P_0)$, e punti P dove $f(P) < f(P_0)$

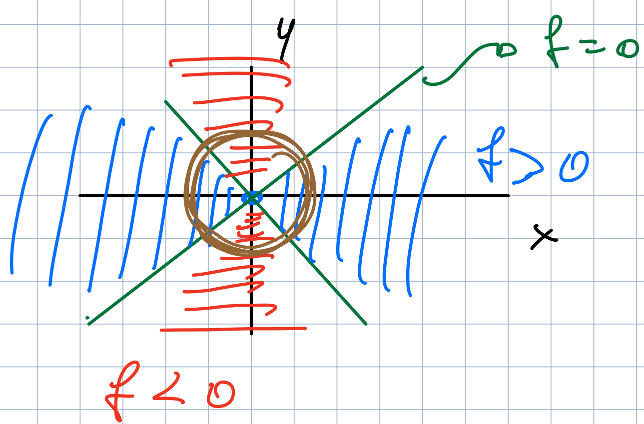


Esempi. 1) Se $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f_x = 2x$ e $f_y = 2y$ $\leadsto$ l'unico p. crit. è $(0,0)$,

che è punto di minimo.

2) Se $f(x,y) = -x^2-y^2$, $(0,0)$ è punto di massimo.

3) Se $f(x,y) = x^2-y^2$, allora $(0,0)$ è (l'unico) punto critico, ma è punto di SELLA:



$f(0,0) = 0$

Anticipiamo il seguente criterio (condizioni sufficienti perché un punto critico sia di min o di max)

Teorema Se f è di classe C^2 in un intorno di P_0 e P_0 è punto critico, allora:

1) Se la matrice $H_f(P_0)$ è definita positiva, allora P_0 è min. locale

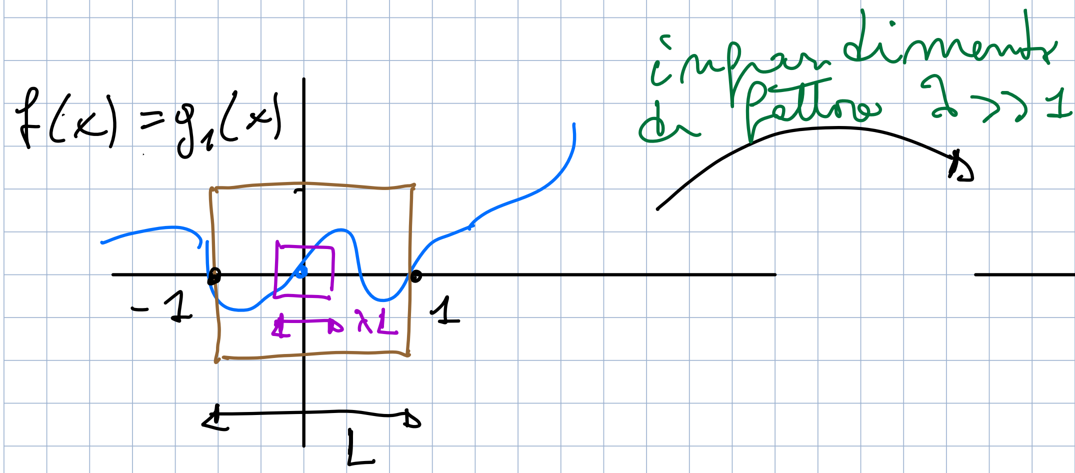
2) Se $H_f(P_0)$ è definita negativa allora P_0 è max locale

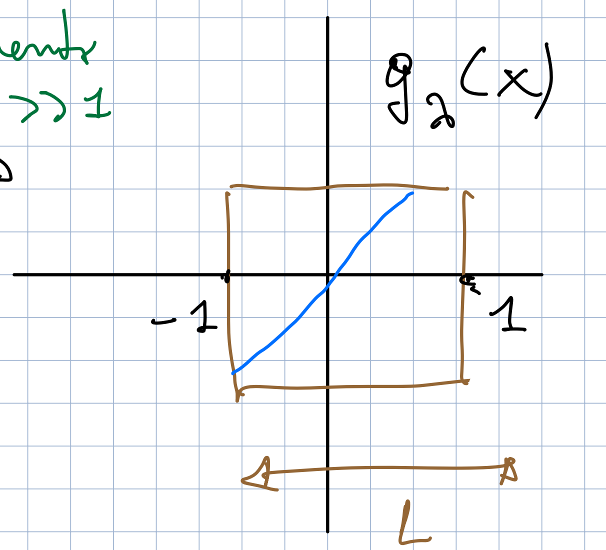
3) Se $H_f(P_0)$ ha almeno due autovalori uno > 0 e uno < 0, allora P_0 è una sella

4) In tutti gli altri casi, P_0 può essere max, min o sella, a seconda dei casi...

DELIRIO DEL PROF

Per studiare $f(x)$ in un intorno di 0, potrei "ingrandire di un fattore $\frac{1}{\lambda}$ il grafico di f vicino $x_0 = 0$ $(\lambda << 1)$ cioè (suppongo anche $f(0)$)





$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} f(\lambda x)$$

per λ piccolo, SE f è diff. in $x_0 = 0$, le funzioni $g_\lambda(x)$ CONVERGONO (per $\lambda \to 0^+$) alla retta $y = f'(x_0) \cdot x$

Quindi, la differenziabilità (C^1) corrisponde a vedere rette (o piani, in più variabili) quando faccio il "limite degli zoom del grafico"

Con gli zoom, le derivate seconde si "vedono" studiando ingrandimenti non di $f(x)$, ma dello scarto $f(x) - f'(0) \cdot x$ cioè (sempre supponendo $f(0) = 0$)

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2}\left[f(\lambda x) - f'(0) \cdot \lambda x \right]$$

N.B. Se f è C^2, allora

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2}\Big[\underbrace{f(0)}_{=0} + \cancel{f'(0) \cdot \lambda x} + \frac{1}{2} f''(0)\lambda^2 x^2 + o(\lambda^2 x^2) - \cancel{f'(0) \cdot \lambda x} \Big]$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{1}{2} f''(0) \cdot \lambda^2 x^2 + o(\lambda^2 x^2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \frac{o(\lambda^2 x^2)}{\lambda^2 x^2} \cdot x^2$$

se (con x fissato) $\lambda \to 0$, $g_\lambda(x) \to \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2$, cioè nel limite VEDO la parabola $\frac{f''(0)}{2}x^2$, cioè VEDO la derivata 2ª.