Teorema Se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ allora $\bar{x} = 0$ non è stabile.

Dim. Ricordiamo che la stabilità di $\bar{x} = 0$ implicherebbe:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0.$$

Supponiamo che $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A sia t.c. $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.
Osserviamo che

$$x(t) = e^{\lambda t} \frac{v}{\|v\|},$$

dove $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ è un autovettore relativo a λ, è soluzione di $\dot{x} = Ax$. Infatti:

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \frac{v}{\|v\|}, \qquad Ax(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{1}{\|v\|} \underbrace{Av}_{= \lambda v} = \lambda e^{\lambda t} \frac{v}{\|v\|}.$$

Segue che qualunque

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \frac{v}{\|v\|}, \quad c_1 \in \mathbb{C} \text{ arbitrario}$$

è soluzione.
Se prendiamo $c_1 = \frac{\delta}{2}$, dove $\delta > 0$ è quello della def. di stabilità, e consideriamo quindi:

$$x(t) = e^{\lambda t} \frac{\delta v}{2\|v\|}$$

abbiamo:

$$\underbrace{\|x(0)\|}_{x_0 \text{ e.i.}} = \left\| \frac{\delta v}{2\|v\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

e ciononostante:

$$\|x(t)\| = \left\| e^{\lambda t} \frac{\delta v}{2\|v\|} \right\| = \frac{\delta}{2} |e^{\lambda t}| = \frac{\delta}{2} e^{\overbrace{Re(\lambda)}^{>0} t} \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty .$$

Quindi $\|x(t)\| > \varepsilon$, qualunque sia $\varepsilon > 0$ fissato, da un certo t in poi. Dunque $\bar{x} = 0$ non può essere stabile. $\boxtimes$

Oss. La dimostrazione ci dice che se $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A con $Re(\lambda) > 0$ allora $\bar{x} = 0$ non è neppure attrattivo.

Teorema Se tutti gli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ di A sono t.c. $Re(\lambda) \leq 0$ e inoltre tutti quelli con $Re(\lambda) = 0$ sono semplici ($\rightsquigarrow$ molt. alg. = molt. geom.) allora $\bar{x} = 0$ è stabile.

Dim. Dalle stime asintotiche sappiamo che in questo caso vale

$$\|x(t)\| \leq C_1 \|x_0\|, \quad \forall t \geq 0 .$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Abbiamo:

$$\|x(t)\| < \varepsilon \Leftarrow C_1\|x_0\| < \varepsilon \iff \|x_0\| < \frac{\varepsilon}{C_1}.$$

Fissato $\delta < \frac{\varepsilon}{C_1}$ otteniamo quindi $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$.
Per l'arbitrarietà di ε, $\bar{x} = 0$ è stabile. $\varnothing$

<u>Oss.</u> Se A è diagonalizzabile, cioè se $\exists P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ non singolare t.c. $\Lambda := P^{-1}AP$ è diagonale, allora possiamo riscrivere il sistema di ODE nella forma seguente:

$$P^{-1}\dot{x} = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I}x \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(P^{-1}x\right)}_{y\in\mathbb{C}^n} = \underbrace{\left(P^{-1}AP\right)}_{\Lambda}\left(P^{-1}x\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \dot{y} = \Lambda y.$$

Nella variabile y, il sistema è diagonale e le proprietà di stabilità dell'origine non cambiano:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = \lambda_n y_n \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y_1(t) = y_{1,0}\, e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = y_{n,0}\, e^{\lambda_n t}. \end{cases}$$

Riassumendo:

Teorema $\bar{x} = 0$ è stabile per $\dot{x} = Ax$ se e solo se (sse):

(i) tutti gli autovalori di A hanno parte reale ≤ 0;

(ii) gli eventuali autovalori con parte reale $= 0$ sono semplici.

Stabilità degli equilibri di un sistema di ODE non lineare autonomo

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \; f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo che $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sia un punto di equilibrio, cioè che $f(\bar{x}) = 0$. Supponiamo inoltre che le soluzioni siano globalmente definite in tempo.

Teoria di Lyapunov

Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un intorno di $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Def. Una funzione $V : Q \to \mathbb{R}$ è detta funzione di Lyapunov relativa ad $\bar{x}$ se:

(i) $V \in C^1(Q)$;

(ii) $V(\bar{x}) = 0$;

(iii) $V(x) > 0 \quad \forall x \in Q \setminus \{\bar{x}\}$;

(iv) detta $x = x(t)$ una soluzione di $\dot{x} = f(x)$ uscente da un qualsiasi punto di Q (cioè t.c. $x(0) \in Q$), risulta:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0.$$

In altre parole, V deve essere non crescente lungo le traiettorie del sistema uscenti da Q.

Oss. Per verificare la proprietà (iv) non è necessario conoscere le soluzioni $x(t)$ di $\dot{x} = f(x)$ esplicitamente:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot \underbrace{\dot{x}(t)}_{= f(x(t))} = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t))$$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0 \iff \underbrace{\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \quad \forall x \in Q.}$$

in questa forma, la condizione (iv) non richiede di conoscere le soluzioni esplicite del sistema

<u>Teorema</u> (Primo teorema di Lyapunov)

Se esiste una V di Lyapunov relativa a $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è stabile.