DIFFERENZIALE di K-forme

Abbiamo visto che è possibile definire il differenziale df di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, cioè il differenziale di una 0-forma differenziale.

In realtà possiamo definire il differenziale di qualsiasi K-forma differenziale.

Differenziale di 0-forme

Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una 0-forma, allora

$$(df)_p : T_p\Omega \to \mathbb{R}$$
$$v \longrightarrow v(f)$$

In coordinate $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Quindi il differenziale di una 0-forme è una 1-forme

Differenziale di una 1-forma

Sia θ una 1-forma su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

In coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ abbiamo che

$$\theta = \theta_i \, dx_i \qquad \theta_i : \Omega \to \mathbb{R} \qquad (\bullet)$$

Il differenziale $d\theta$ della 1-forma θ è una 2-forma, la seguente:

$$d\theta = d(\theta_i \, dx_i) \overset{\text{Per definizione}}{:=} d\theta_i \wedge dx_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial x_J} dx_J \wedge dx_i$$

Esempio:

Il differenziale della 1-forma $\theta = x\,dx + xy\,dy + xz^2\,dz$ è

$$d\theta = d(x\,dx + xy\,dy + xz^2\,dz) = \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + d(xy) \wedge dy + d(xz^2) \wedge dz =$$

$$= y\,dx \wedge dy + x \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} + z^2\,dx \wedge dz + 2zx \underbrace{dz \wedge dz}_{=0}$$

$$= y\,dx \wedge dy + z^2\,dx \wedge dz$$

Esempio:

Il differenziale del differenziale di una funzione è zero, cioè $d(df)=0$. Infatti

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \overset{\text{pag. 2}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_J} dx_J \wedge dx_i = 0 \qquad (\bullet)$$

in quanto $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_J}$ è simmetrico rispetto a $i \longleftrightarrow J$

mentre $dx_J \wedge dx_i$ è antisimmetrico rispetto a $i \longleftrightarrow J$.

Per rendersi conto di queste ultime osservazioni facciamo il conto nel caso $n=2$. In questo caso abbiamo che $(\bullet)$ è uguale a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \underbrace{dx_1 \wedge dx_1}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 \wedge dx_1}_{} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \underbrace{dx_2 \wedge dx_2}_{=0}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\underbrace{dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_1}_{=0} \right)$$

Osservazione / Proposizione

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione e θ una 1-forma su Ω.

Allora

$$d(f \cdot \theta) = df \wedge \theta + f \wedge d\theta = df \wedge \theta + f\, d\theta$$

cioè vale la "regola di Leibniz".

Dimostriamolo in coordinate. Sia $\theta = \theta_i \, dx_i$

$$d(f \cdot \theta) = d(f\, \theta_i \, dx_i) \overset{\text{DEF. pag. 2}}{=} \frac{\partial (f \cdot \theta_i)}{\partial x_J} dx_J \wedge dx_i$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_J} \theta_i + f \frac{\partial \theta_i}{\partial x_J} \right) dx_J \wedge dx_i$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_J} dx_J \wedge \theta_i \, dx_i + f \frac{\partial \theta_i}{\partial x_J} dx_J \wedge dx_i = $$ Vedi definizione pag. 2

$$= df \wedge \theta + f\, d\theta$$

Differenziale di 2-forme

Sia ω una 2-forma su Ω.

In coordinate, $\omega = \omega_{iJ}\, dx_i \wedge dx_J$.

Per definizione, il differenziale $d\omega$ di ω è una <u>3-forma</u>, la seguente

$$d\omega \overset{def}{=} \frac{\partial \omega_{iJ}}{\partial x_K}\, dx_K \wedge dx_i \wedge dx_J$$

<u>Esempio</u>

Il differenziale della 2-forma su $\mathbb{R}^3$ $\omega = x\, dy \wedge dz + yz\, dx \wedge dz$

è

$$d\omega = d(x\, dy \wedge dz + yz\, dx \wedge dz) =$$

$$= dx \wedge dy \wedge dz + d(yz) \wedge dx \wedge dz =$$

$$= dx \wedge dy \wedge dz + z\, \underbrace{dy \wedge dx \wedge dz}_{= -dx \wedge dy \wedge dz} + \underbrace{y\, dz \wedge dx \wedge dz}_{=0} = (1-z)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

Esempio:

Il differenziale del differenziale di una 1-forma θ è zero, cioè $d(d\theta) = 0$ ($d(d\theta)$ è la 3-forma nulla).

Vediamolo in coordinate. Sia $\theta = \theta_i \, dx_i$. Allora

$$d(d\theta) = d(d(\theta_i \, dx_i)) = d\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_J} dx_J \wedge dx_i \right)$$

$$= \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_J \, \partial x_K} dx_K \wedge dx_J \wedge dx_i$$

$= 0$ per lo stesso ragionamento fatto a pag. 3

IN GENERALE

Il differenziale di una K - forma

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_K} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$$

è uguale a

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_K}}{\partial x_m} \, dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$$

e

$$d^2(\omega) = d(d\omega) = 0$$

per ogni K - forma ω.

Per mostrare questo basta applicare lo stesso ragionamento/procedimento di pag. 6.

FORME ESATTE E CHIUSE

DEF: Una K-forma ω si dice esatta se è il differenziale di una $(K-1)$-forma θ, cioè se $\omega = d\theta$. In questo caso chiamiamo θ il potenziale di ω.

ω si dice chiusa se $d\omega = 0$

Esempio la 1-forma su $\mathbb{R}^3$ $\theta = x\,dx + yz\,dy + \frac{y^2}{2}\,dz$ è chiusa in quanto

$$d\theta = \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \underbrace{z\,dy \wedge dy}_{=0} + \underbrace{y\,dz \wedge dy + y\,dy \wedge dz}_{=0} = 0$$

ed è anche esatta in quanto

$\theta = df$ dove $f = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 z$

PROPOSIZIONE : Una forma esatta è chiusa

DIM : Questo è una conseguenza diretta del fatto che $d^2(\theta) = d(d\theta) = 0$ per ogni K-forma differenziale θ.
Abbiamo visto la dimostrazione solo nel caso in cui θ sia una 0-forma o una 1-forma, ma i ragionamenti a pag. 6-7, come detto, sono facilmente generalizzabili.

L'implicazione inversa della precedente proposizione non è vera, nel senso che una forma chiusa non è detto che sia esatta

Esempio: Consideriamo la forma su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

La forma θ è chiusa: infatti

$$d\theta = -d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\wedge dx + d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\wedge dy$$

$$= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\underbrace{dx\wedge dx}_{=0} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\wedge dx$$

$$- \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\wedge dy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\underbrace{dy\wedge dy}_{=0}$$

$$= 0$$

<u>La forma θ non è esatta</u> : Questo perché non riusciamo a trovare una funzione f <u>definita su tutto Ω</u> tale che $df = \theta$.

Infatti, andiamo a calcolare le f per cui

$$df = \theta$$

Abbiamo che $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ che uguagliata a

$$\theta = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

dà le condizioni

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \Longrightarrow f = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

Ora la funzione $f = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$ non è definita su tutto Ω, ma solo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{asse delle } y\}$

Concludiamo che θ è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{asse delle } y\}$ ma non su Ω.

L'implicazione forma chiusa $\rightarrow$ forma esatta dipende fortemente dalla topologia dell'insieme Ω su cui la forma è definita

Le seguenti proposizioni sono motivate dal precedente esempio

PROP: Una forma chiusa è localmente esatta.

Cioè se ω è una K-forma definita su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ / $d\omega = 0$, allora esiste un aperto $A \subseteq \Omega$ su cui ω è esatta (cioè esiste una (K-1) forma θ su A tale che $d\theta = \omega$ su A).

OSS: L'esempio di pag. 9, infatti, ci dice che θ non è esatta su Ω ma su un aperto di Ω

PROP: (Lemma di Poincaré)

Se una K-forma ω è definita su un insieme Ω semplicemente connesso ed è chiusa, allora ω è esatta su Ω.

In ogni modo condizione <u>necessaria</u> affinché una K-forma ω sia esatta è che $d\omega = 0$.

<u>Oss:</u> Spesso una K-forma ω chiusa, cioè tale che $d\omega = 0$, viene detta (localmente) <u>integrabile</u>.

Calcoliamo le condizioni di integrabilità di una K-forma ω, cioè le condizioni sulle componenti di ω per le quali $d\omega = 0$

CONDIZIONI INTEGRABILITÀ PER 1-FORME

Una 1-forma θ è chiusa se $d\theta = 0$

In coordinate, se $\theta = \theta_i \, dx_i$, allora

$$d\theta = d(\theta_i \, dx_i) = \frac{\partial \theta_i}{\partial x_J} dx_J \wedge dx_i \overset{(\circ)}{=} \sum_{J<i} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_J} - \frac{\partial \theta_J}{\partial x_i} \right) dx^J \wedge dx^i$$

Attenzione che qui la sommatoria è su tutti gli indici, cioè $i = 1, \dots, n$ e $J = 1, \dots, n$.

Per rendersi conto dell'uguaglianza $(\circ)$ facciamo un esempio.

Sia $\theta = \theta_1 \, dx + \theta_2 \, dy$ una 1-forme su $\mathbb{R}^2$. Allora

$$d\theta = \frac{\partial \theta_1}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} dy \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

In virtù di quello detto a pag. 15, una 1-forme

$$\theta = \theta_i \, dx_i$$

è chiusa (ovvero localmente integrabile) se

$$\boxed{\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall\, i, j} \qquad (\bullet)$$

Esempio: La 1-forma dell'esempio di pag. 8

$$\theta = x\,dx + yz\,dy + \frac{y^2}{2}\,dz$$

è chiusa. Infatti le condizioni $(\bullet)$ in questo caso sono

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial yz}{\partial x} = 0 \,, \qquad \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_3}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial \frac{y^2}{2}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial z} - \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = \frac{\partial yz}{\partial z} - \frac{\partial \frac{y^2}{2}}{\partial y} = y - y = 0$$

CONDIZIONI INTEGRABILITÀ PER 2-forme

Per questioni di chiarezza espositiva, scriveremo le condizioni di integrabilità di una 2-forma ω definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$ (Voi provate a farlo in generale).

Localmente scrivo ω come segue:

$$\omega = a\, dx \wedge dy + b\, dx \wedge dz + c\, dy \wedge dz \,,$$ a, b, c funzioni su Ω

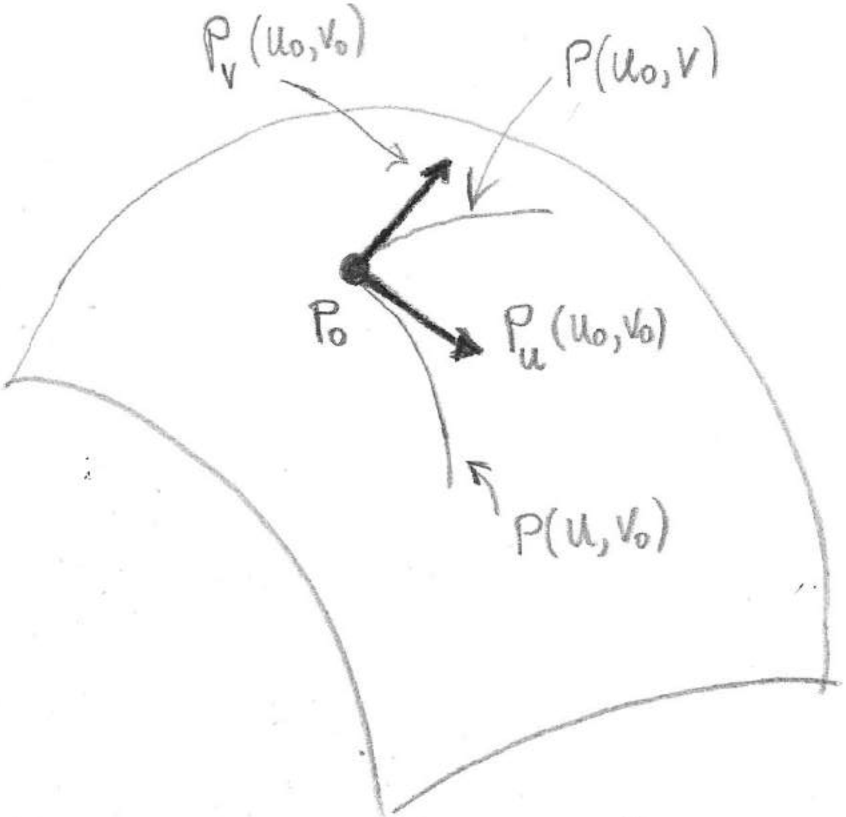
Quindi

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial c}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz$$

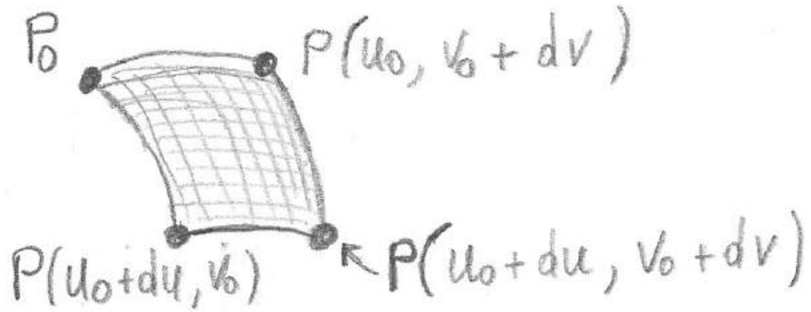
$$= \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz = 0 \iff \boxed{\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0}$$

2 - FORME DIFFERENZIALI SU SUPERFICI (PARAMETRIZZATE)

Sia $P : (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow P(u,v) \in \mathbb{R}^3$
una superficie parametrizzata. Sia $P_0 = P(u_0, v_0)$



L'area infinitesima della porzione di superficie



è l'area del parallelogramma individuato a $P_u(u_0,v_0)$ e $P_v(u_0,v_0)$.

Tale area è uguale a $\| P_u(u_0,v_0) \times P_v(u_0,v_0) \|$

Cosa succede se cambio parametrizzazione?

$\| P_u \times P_v \|$ <u>non è</u> invariante per cambi di parametrizzazioni. Infatti se considero il cambio di parametrizzazione

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad , \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v}) \qquad (\circ)$$

e considero

$$Q(\tilde{u}, \tilde{v}) = P\big(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})\big)$$

ho che

$$Q_{\tilde{u}} = P_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + P_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \quad , \quad Q_{\tilde{v}} = P_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + P_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}$$

e andando a calcolare $Q_{\tilde{u}} \times Q_{\tilde{v}}$ avremo che

$$Q_{\tilde{u}} \times Q_{\tilde{v}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) \cdot P_u \times P_v$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \cdot P_u \times P_v$$

$$= \det(J) \; P_u \times P_v$$

dove $\det(J)$ è il determinante dello Jacobiano di $(\tilde{u}, \tilde{v}) \to (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$ (cambio di parametrizzazione (•) di pag. 19)

$$\Longrightarrow P_u \times P_v = \frac{1}{\det(J)} Q_{\tilde{u}} \times Q_{\tilde{v}}$$

Invece quello che è quasi invariante è la seguente 2-forma differenziale su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\| P_u \times P_v \| \, du \wedge dv$$

Infatti, se considero il cambio di coordinate (∘) di pag. 19 ho che

$$\| P_u \times P_v \| = \left| \frac{1}{\det(J)} \right| \| Q_{\tilde{u}} \times Q_{\tilde{v}} \| \qquad (\circ)$$

e:

$$du \wedge dv = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} d\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} d\tilde{v} \right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} d\tilde{u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} d\tilde{v} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) d\tilde{u} \wedge d\tilde{v} = \det(J) \, d\tilde{u} \wedge d\tilde{v} \qquad (\circ\circ)$$

Mettendo insieme (•) e (••) di pag. 21 ho che

$$\|P_u \times P_v\| \, du \wedge dv = \frac{\det(J)}{|\det(J)|} \|Q_{\tilde{u}} \times Q_{\tilde{v}}\| \, d\tilde{u} \times d\tilde{v}$$

La forma $\|P_u \times P_v\| \, du \wedge dv$ si chiama <u>elemento d'area</u> (infinitesimo) della superficie parametrizzata $P(u,v)$.

<u>Notare</u> che $(\|P_u \times P_v\| \, du \wedge dv)(\partial u, \partial v) = \|P_u \times P_v\|$

Quindi, in un certo senso,

$\|P_u \times P_v\|$ è un fattore "di correzione":

$$\text{Area}(\partial u, \partial v) \xrightarrow{P} \text{Area}(P_u, P_v)$$

PROP $\|P_u \times P_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\det(g_S)}$

dove g_S è la 1ª forma fondamentale.

DIM

È un conto diretto. Abbiamo che

$$\|P_u \times P_v\|^2 = \det\begin{pmatrix} P_u \cdot P_u & P_u \cdot P_v \\ P_u \cdot P_v & P_v \cdot P_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

da cui segue la proposizione.

Quindi

$$\boxed{\|P_u \times P_v\| \, du \wedge dv = \sqrt{\det(g_S)} \, du \wedge dv}$$