OSSERVAZIONI NOTAZIONALI

In molti testi N_* viene denotato da dN, ma questo lo avevamo già osservato.

Noi abbiamo distinto $N : p \in S \to N_p \in T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ da $N^P : (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to N^P(u,v) = N_{P(u,v)}$

ma in molti testi, poiché s'intende la parametrizzazione P fissata dall'inizio, si "identifica" N^P con N.

Noi non l'abbiamo fatto per una questione di chiarezza

OPERATORE FORMA (o SHAPE OPERATOR)

DEF: $-N_* : T_pS \to T_pS$ è chiamato

operatore forma o anche shape operator

Il segno meno è di natura convenzionale.

Notiamo che la matrice rappresentativa di N_* si costruisce come segue. Ricordando che una base di T_pS è (P_u, P_v) dove $P : (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to P(u,v) \in \mathbb{R}^3$, abbiamo che

$$N_*(P_u) = \sigma_{11} P_u + \sigma_{21} P_v$$

$$N_*(P_v) = \sigma_{12} P_u + \sigma_{22} P_v$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$ matrice rappresentativa di N_*

$2^{\underline{a}}$ FORMA FONDAMENTALE

È per definizione la forma bilineare associata all' operatore forma $-N_*$ (vedere anche Lezione 10)

Quindi, se $P = P(u,v)$ dove $P : (u,v) \in \Omega \longrightarrow P(u,v) \in \mathbb{R}^3$ è una superficie parametrizzata, la forma bilineare sopracitata è definita da

$$(b_S)_p : T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R} \qquad S = \operatorname{Im} P$$

$$(v\ ,\ w) \longrightarrow b_p(v, w) = g_S(-N_*(v), w) =$$

$$= -N_*(v) \cdot w$$

Molte delle considerazioni fatte per una metrica su S valgono anche per $(b_S)_p$ in quanto entrambe sono tensori di tipo $(0, 2)$.

Come per la prima forma fondamentale (vedi pag. 18 della Lezione 19), se $(u,v) \in \Omega$,

$$(b_S)_{P(u,v)} : T_{P(u,v)} S \times T_{P(u,v)} S \to \mathbb{R}$$

e, come per la prima forma fondamentale g_S,

$$b_S = b_S(P_u, P_u)\, P_u^* \odot P_u^* + 2\, b_S(P_u, P_v)\, P_u^* \odot P_v^* + b_S(P_v, P_v)\, P_v^* \odot P_v^*$$

$$= (b_S)_{11}\, P_u^* \odot P_u^* + 2 (b_S)_{12}\, P_u^* \odot P_v^* + (b_S)_{22}\, P_v^* \odot P_v^*$$

e per discorsi del tutto analoghi a quelli fatti per la 1ª forma fondamentale g_S, scriveremo b_S nel seguente modo

$$b_S = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

con $L = b_S(P_u, P_u)$ $\quad M = b_S(P_u, P_v)$ $\quad N = b_S(P_v, P_v)$

Cioè la matrice rappresentativa di b_S è (rispetto alla base (P_u, P_v))

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_S)_{11} & (b_S)_{12} \\ (b_S)_{12} & (b_S)_{22} \end{pmatrix}$$

CALCOLO DEI COEFFICIENTI DELLA 2ª FORMA FONDAMENTALE

Calcoliamo $L = (b_S)_{11} = b_S(P_u, P_u)$. Abbiamo che

$$b_S(P_u, P_u) \overset{\text{pag.}3}{=} -N_*(P_u) \cdot P_u \overset{\substack{\text{Lezione } 20 \\ \text{pag. } 8}}{=} -N_u^P \cdot P_u$$

$$= N^P \cdot P_{uu}$$

Quest' ultima uguaglianza segue in quanto

$$N^P \cdot P_u = 0 \Longrightarrow (N^P \cdot P_u)_u = 0 \Longrightarrow N_u^P \cdot P_u + N^P \cdot P_{uu} = 0$$

$$\Longrightarrow -N_u^P \cdot P_u = N^P \cdot P_{uu}$$

In quanto N^P è ortogonale a $\mathrm{Span}\{P_u, P_v\}$

Quindi, in definitiva,

$$L = (b_S)_{11} = N^P \cdot P_{uu}$$

e analogamente

$$M = (b_S)_{12} = N^P \cdot P_{uv} \qquad N = (b_S)_{22} = N^P \cdot P_{vv}$$

In definitiva la matrice che rappresenta b_S nella base (P_u, P_v) è

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_S)_{11} & (b_S)_{12} \\ (b_S)_{12} & (b_S)_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^P \cdot P_{uu} & N^P \cdot P_{uv} \\ N^P \cdot P_{uv} & N^P \cdot P_{vv} \end{pmatrix}$$

CURVATURE E LINEE DI CURVATURA

Curvature principali : autovalori di $-N_*$

Direzioni principali : autospazi di $-N_*$

Curvatura media H : traccia di $-N_*$ diviso 2 : $H = \frac{1}{2}$ traccia $(-N_*)$

Curvatura Gaussiana (o totale) K : determinante di $-N_*$

Linea di Curvatura : è una curva sulla superficie che in ogni punto ha come retta tangente una direzione principale. Quindi $\gamma(t)$ è una linea di curvatura se $\gamma'(t)$ è autovettore di $-N_*$ $\forall t$

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$: Per il teorema spettrale (vedi Lezione 10) le direzioni principali in un punto $p \in S$, se sono distinte, sono tra loro ortogonali

PUNTO ELLITICO : è un punto in cui la curvatura Gaussiana è maggiore di zero

PUNTO PARABOLICO : è un punto in cui la curvatura Gaussiana è uguale a zero

PUNTO IPERBOLICO : è un punto in cui la curvatura Gaussiana è minore di zero

PUNTO OMBELICALE : è un punto in cui le curvature principali coincidono

CURVATURA GAUSSIANA

Ricordiamo che per definizione la curvatura Gaussiana K è il determinante di $-N_*$:

$$K = \det(-N_*)$$

Poiché $-N_*$ è un endomorfismo simmetrico, per quello detto sugli endomorfismi simmetrici (Lezione 10) avremo che la matrice rappresentativa di $-N_*$ (rispetto alla base (P_u, P_v) di $T_{P(u,v)}S$) è

$$(-N_*)_{iJ} = \underbrace{(g_S^{-1})_{iK}}_{\text{Inversa della 1ª forma fondamentale}} \underbrace{(b_S)_{KJ}}_{\text{2ª forma fondamentale}} \Longrightarrow \det(-N_*) = \frac{\det(b_S)}{\det(g_S)} = $$

$$= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$$

CURVATURA MEDIA

Come per pagina precedente abbiamo che

$$(-N_*)_{ij} = (g_s^{-1})_{ik}\, b_{kj}$$ (Ricordare sempre la convenzione di Einstein)

$$= \frac{\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}}{EG - F^2} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix}}{EG - F^2}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} \operatorname{traccia}(-N_*)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}$$

Ex: Calcolare mappa Gauss, operatore forma, curvature, linee di curvatura ecc. del cilindro $x^2+y^2=r^2$, $r\in\mathbb{R}$.

Una parametrizzazione del cilindro è

$$P(u,v) = \big(r\cos(u),\ r\,\mathrm{sen}(u),\ v\big) \qquad (\star)$$

Mappa di Gauss: Da $(\star)$ abbiamo che

$$P_u = \big(-r\,\mathrm{sen}(u),\ r\cos(u),\ 0\big) \qquad P_v = \big(0,\ 0,\ 1\big)$$

La mappa di Gauss è quindi

$$N^P(u,v) = \frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|} = \frac{\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -r\,\mathrm{sen}(u) & r\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{r} = \big(\cos(u), \mathrm{sen}(u), 0\big)$$

<u>1º forma fondamentale</u> : dobbiamo calcolare E, F e G, cioè i coefficienti della 1º forma fondamentale g_S

Abbiamo che

$$E = P_u \cdot P_u = r^2 \qquad F = P_u \cdot P_v = 0 \qquad G = P_v \cdot P_v = 1$$

Quindi possiamo scrivere g_S come segue

$$\boxed{g_S = r^2 \, du^2 + dv^2}$$

<u>2º forma fondamentale</u> : dobbiamo calcolare L, M, N, cioè i coefficienti della 2º forma fondamentale. Abbiamo che

$$L = N^P \cdot P_{uu} = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0) \cdot (-r\cos(u), -r\operatorname{sen}(u), 0) = -r$$
$$M = N^P \cdot P_{uv} = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0) \cdot (0, 0, 0) = 0$$
$$N = N^P \cdot P_{vv} = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), 0) \cdot (0, 0, 0) = 0$$

Cioè $\boxed{b_S = -r \, du^2}$

<u>Operatore forma</u> : Per calcolare la matrice rappresentativa dell'operatore forma $-N_*$ possiamo calcolare tale operatore sulle base (P_u, P_v) di $T_{P(u,v)}S$, con S il cilindro.

Abbiamo che

$$-N_*(P_u) = -N_u^P = (\operatorname{sen}(u), -\cos(u), 0) = -\frac{1}{r} P_u + 0 P_v$$

$$-N_*(P_v) = -N_v^P = (0, 0, 0) = 0 \cdot P_u + 0 \cdot P_v$$

Quindi, <u>dalla definizione di matrice rappresentativa</u>,

$$(-N_*)_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Alternativamente</u> tale matrice poteva essere ottenuta come segue:

$$(-N_*)_{ij} = (g_S^{-1} \cdot b_S)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Curvatura media H</u> : Per definizione, $H = \frac{1}{2}\,\text{traccia}(-N_*)$

$$= -\frac{1}{2r}$$

<u>CURVATURA GAUSSIANA</u> : Per definizione, $K = \det(-N_*) = 0$

<u>CURVATURE PRINCIPALI</u> : Per definizione, sono gli autovalori di $-N_*$, quindi sono $-\frac{1}{r}$ e 0

<u>Direzioni PRINCIPALI</u> : Per definizione, sono gli autospazi di $-N_*$.
A pag. 14 abbiamo visto che
$-N_*(P_u) = -\frac{1}{r} P_u$ e $-N_*(P_v) = 0$
Quindi le direzioni principali sono quelle individuate da P_u e P_v

<u>Osservazione</u> : gli autospazi della <u>matrice rappresentativa</u> di $-N_*$ sono generati da $(1,0)$ e $(0,1)$. Queste sono le <u>componenti</u> degli autovettori di $-N_*$ <u>nella base</u> (P_u, P_v).

Quindi gli autovettori di $-N_*$ sono P_u e P_v

<u>OSSERVAZIONE</u> : Per il teorema spettrale, P_u e P_v risultano essere ortogonali. Infatti $P_u \cdot P_v = 0$

Linee di curvatura

In generale, se $P : (u,v) \in \Omega \to P(u,v) \in \mathbb{R}^3$ è una superficie parametrizzata e $S = \operatorname{Im} P$, una curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to S$ è data da

$$\gamma : t \in I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow P(u(t), v(t)) \in S \qquad (\bullet)$$

$$\alpha : t \longrightarrow (u(t), v(t)) \in \Omega \quad \text{curva arbitraria in } \Omega.$$

In altre parole, le curve che cerchiamo sono del tipo $\boxed{\gamma(t) = P(\alpha(t))}$

Quindi, per trovare le linee di curvatura di S, devo trovare le curve del tipo $(\bullet)$ tali che $\gamma'(t)$ sia uguale ad un autovettore di $-N_*$ calcolato in $\gamma(t)$, per qualsiasi $t \in I$.

Nel nostro caso sappiamo che gli autovettori di $-N_*$ sono P_u e P_v, quindi trovare le linee di curvatura significa trovare le curve $\gamma(t)$ del tipo $(\bullet)$ di pag. 17 tali che

$$\gamma'(t) = P_u(u(t), v(t)) = P_u(\alpha(t))$$

<u>oppure</u> $(\star)$

$$\gamma'(t) = P_v(u(t), v(t)) = P_v(\alpha(t))$$

<u>CONSIDERAZIONE</u>:

Poiché $\gamma = P \circ \alpha$ (vedi pagina 17) allora $(\star)$ possono essere scritte come segue

$$P_*(\alpha'(t)) = P_u(\alpha(t))$$

<u>oppure</u>

$$P_*(\alpha'(t)) = P_v(\alpha(t))$$

Nel nostro caso

$$\gamma(t) = \left(r\cos(u(t)),\ r\,\mathrm{sen}(u(t)),\ v(t) \right) \qquad (\star)$$

$$P_u(u(t), v(t)) = \left(-r\,\mathrm{sen}(u(t)),\ r\cos(u(t)),\ 0 \right)$$

$$P_v(u(t), v(t)) = \left(0,\ 0,\ 1 \right)$$

Quindi, considerando $P_u(u(t))$, abbiamo che

$$\gamma'(t) = P_u(u(t), v(t)) \iff$$

$$\left(-r\,\mathrm{sen}(u(t))\,u'(t),\ r\cos(u(t))\,u'(t),\ v'(t) \right) = \left(-r\,\mathrm{sen}(u(t)),\ r\cos(u(t)),\ 0 \right)$$

$$\Rightarrow\ u'(t) = 1,\ v'(t) = 0 \ \Rightarrow\ u(t) = t + K_1,\ v(t) = K_2,\ K_i \in \mathbb{R}$$

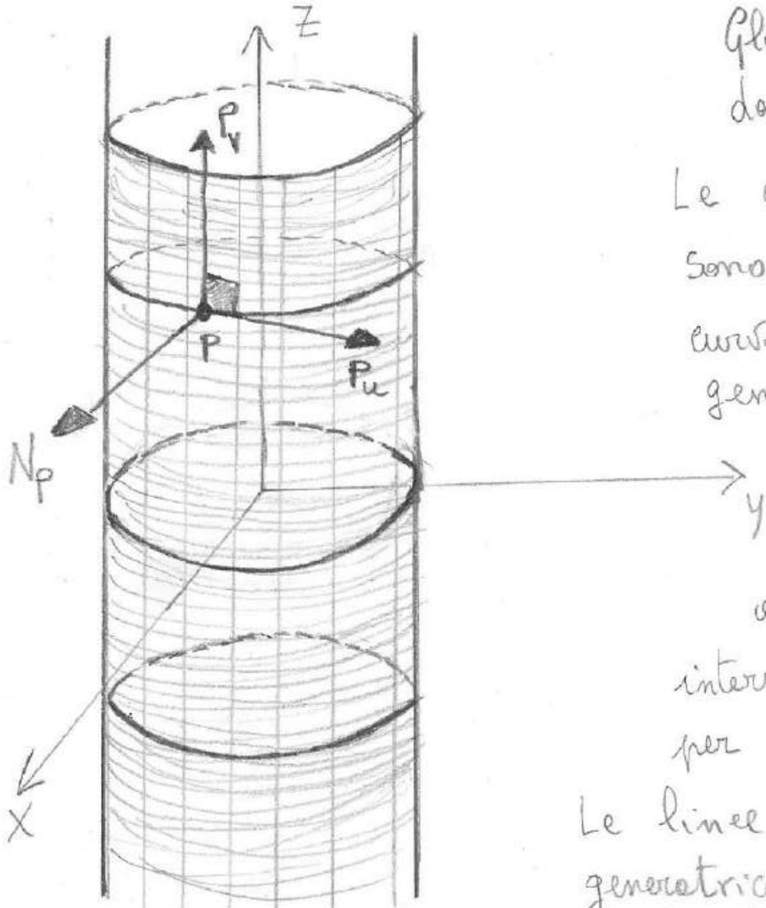
Andando a sostituire nella curva $(\star)$ otteniamo

$$\gamma(t) = \left(r\cos(t+K_1),\ r\,\mathrm{sen}(t+K_1),\ K_2 \right)$$

Facendo lo stesso ragionamento per $P_v(u(t), v(t))$ otteniamo

$$\gamma(t) = \left(r\cos(K_1),\ r\,\mathrm{sen}(K_1),\ t + K_2 \right)$$

Riassumiamo con un disegno:



Gli autospazi di $-N_*$ sono generati da P_u e P_v che sono ortogonali

Le curvature principali nel punto P sono 0 e $-\frac{1}{r}$. Coincidono con le curvature (a meno del segno) delle generatrice del cilindro passante per P (che è l'intersezione del cilindro col piano passante per P e parallelo a P_v e N_p) e della circonferenza intersezione del cilindro col piano passante per P e parallelo a P_u e N_p.

Le linee di curvatura sono proprio tali generatrici e tali circonferenze, che sono, essenzialmente, curve integrali, rispettivamente, dei campi P_v e P_u

TEOREMA (EGREGIO di GAUSS)

La curvatura Gaussiana dipende <u>solo</u> dalla <u>1ª forma fondamentale</u> (è indipendente dalla 2ª forma fondamentale)

Quindi è un invariante isometrico.

<u>DEF:</u> Siano $\tilde{\Omega}$ e Ω due aperti di $\mathbb{R}^n$. Una metrica $\tilde{g}$ su $\tilde{\Omega}$ e una metrica g su Ω si dicono <u>isometriche</u> se esiste una funzione $f: \tilde{\Omega} \to \Omega$ biunivoca tale che $\tilde{g} = f^*(g)$.

Per esempio abbiamo già visto (e lo vedremo nelle prossime pagine) che la metrica $du^2 + dv^2$ e $r^2 d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2$ sono isometriche

Osservazioni sul Teorema Egregio

Supponiamo che $g_S = du^2 + dv^2$ sia la 1ª forma fondamentale di qualche superficie S, per esempio il piano $z=0$ che parametricamente è descritto per esempio da $P(u,v) = (u, v, 0)$.

È facile vedere che la curvatura Gaussiana è nulla.

Se cambiamo coordinate, per esempio

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \to (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) = (r\tilde{u}, \tilde{v})$$

allora $g_S = du^2 + dv^2 \longrightarrow r^2 d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2$

cioè è la metrica sul cilindro.

Infatti abbiamo visto che la curvatura Gaussiana del cilindro è nulla.

In generale, se considero il cambio di coordinate

$$f : (x, y) \longrightarrow (u(x,y),\ v(x,y))$$

e calcolo $f^*(du^2 + dv^2)$ ottengo $\begin{pmatrix} f^*(du) = u_x\,dx + u_y\,dy \\ f^*(dv) = v_x\,dx + v_y\,dy \end{pmatrix}$

$$\left(u_x^2 + v_x^2\right) dx^2 + 2\left(u_x u_y + v_x v_y\right) dx\,dy + \left(u_y^2 + v_y^2\right) dy^2 \quad (\bullet)$$

Una superficie parametrizzata da $P : (x,y) \to P(x,y) \in \mathbb{R}^3$ che abbia $(\bullet)$ come 1ª forma fondamentale ha curvatura Gaussiana nulla