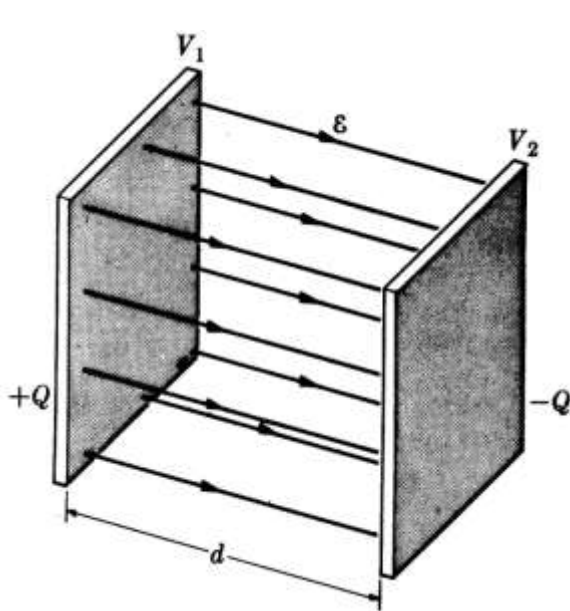


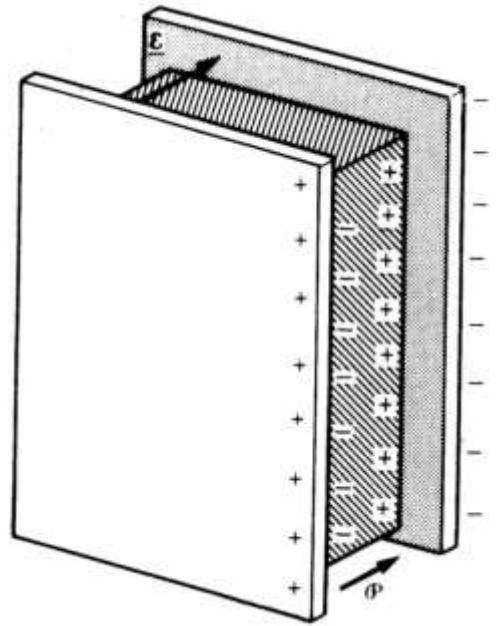
CENNI AL CAMPO ELETTROSTATICO NELLA MATERIA

- **Polarizzazione della materia posta in un campo elettrico;**
- **Il vettore polarizzazione;**
- **Il vettore spostamento elettrico;**
- **Isolanti in campo elettrico (susceptività e permittività elettrica della materia)**

Condensatori in presenza di un dielettrico



caso (a)



caso (b)

Prendiamo un condensatore a facce piane e parallele

Caso (a) nel vuoto

Caso (b) con un dielettrico interposto tra le armature

Se sulle facce poniamo le cariche $+Q$ e $-Q$, le isoliamo e misuriamo sperimentalmente la differenza di potenziale $V_{\text{caso a}}$ $V_{\text{caso b}}$ tra le armature otteniamo:

$$\frac{V_{\text{caso a}}}{V_{\text{caso b}}} = \text{costante dipendente dal materiale}$$

$$\frac{V_{caso\ a}}{V_{caso\ b}} = \varepsilon_r \quad \text{costante dielettrica relativa}$$

Fu merito di Faraday notare che se al posto del vuoto (aria) era inserito un materiale dielettrico (un isolante) tra le armature del condensatore, la capacita' aumentava di un fattore ε_r , detta *costante dielettrica relativa* ($\varepsilon_r=1$ per il vuoto):

$$C_{dielettrico} = \varepsilon_r C_{vuoto}$$

Il campo elettrico massimo, corrispondente a una tensione massima, che un dielettrico puo' sopportare e' detto *rigidita' dielettrica*. Valori tipici sono MV/m.

Piu' in generale, in una regione riempita da dielettrico, la costante dielettrica del vuoto viene sostituita da

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_r \varepsilon_0 \equiv \varepsilon$$

Polarizzazione della materia

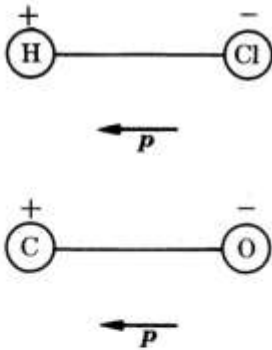


Figura 25.17 Molecole biatomiche polari.

Nella materia non conduttrice costituita da atomi, e quindi da un insieme di cariche positive (nuclei) e negative (elettroni), ci troviamo in presenza di una situazione di neutralità elettrica a livello macroscopico.

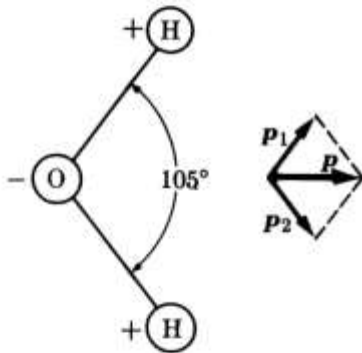


Figura 25.18 Dipolo elettrico della molecola di H_2O .

A livello microscopico possiamo avere due situazioni:

- (i) i baricentri della carica negativa e di quella positiva non coincidono;
- (ii) il baricentro della carica positiva e di quella negativa coincidono.

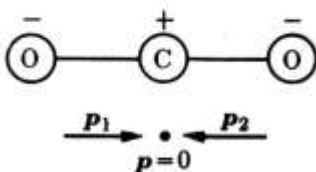


Figura 25.19 La molecola di CO_2 non ha dipolo elettrico.

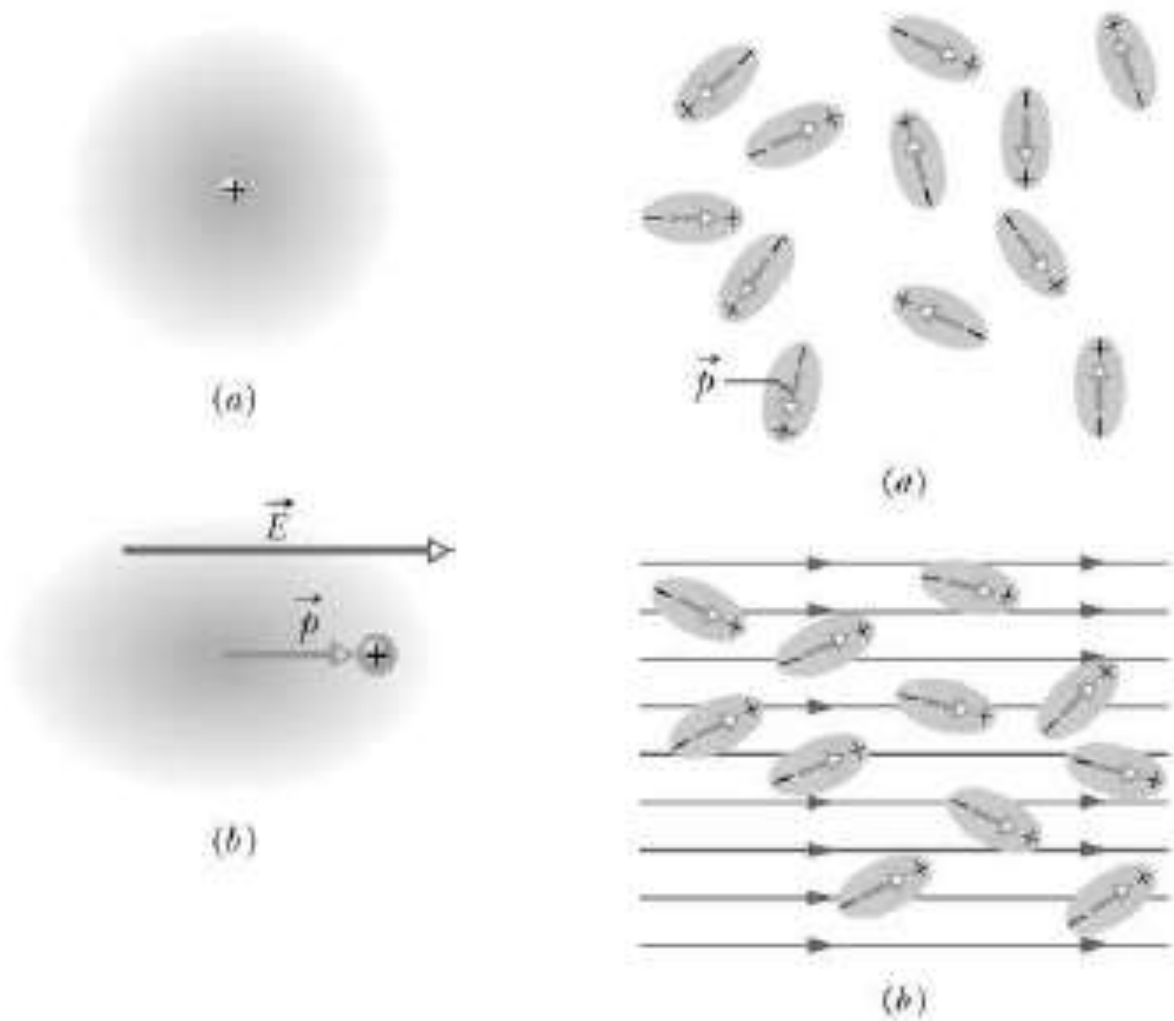
Nel primo caso la materia presenta dipoli microscopici. Nel secondo caso non abbiamo dipoli microscopici.

Alcuni dielettrici, come l'acqua, hanno già un momento di dipolo permanente. Questi sono detti *dielettrici polari*. In presenza di campo elettrico essi tendono ad allinearsi al campo. A basse temperature si può avere anche un allineamento completo. Altri dielettrici non hanno un momento di dipolo permanente, ma questo può essere indotto da un campo elettrico applicato, poiché il campo elettrico tende a *stirare* la distribuzione di carica delle molecole. Questo tipo di dielettrici sono detti *dielettrici non polari*.

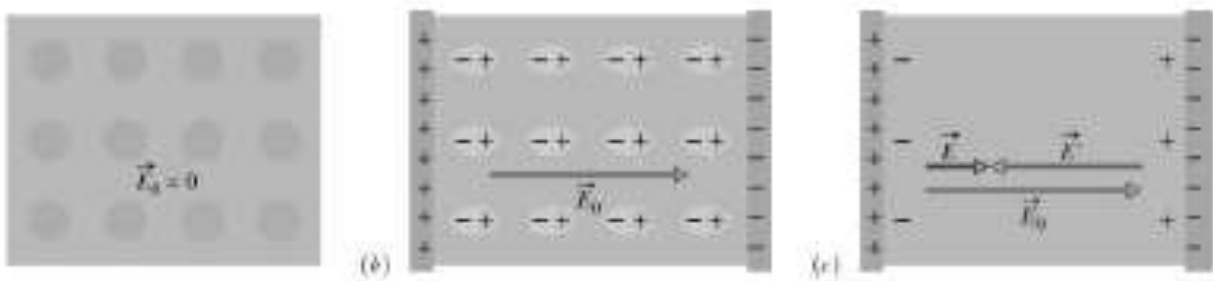
Comunque, quando una regione in cui è presente un campo elettrico \mathbf{E}_0 , quale può essere la regione tra i piatti di un condensatore, viene riempita di dielettrico, i momenti di dipolo si allineano al campo. I dipoli esterni tendono a formare una piccola distribuzione di cariche che genera un campo elettrico \mathbf{E}' che si oppone al campo inducente. Il campo totale \mathbf{E} viene ad essere così ridotto rispetto a \mathbf{E}_0 ...

Pertanto, l'effetto di un dielettrico (polare o non) è quello di indebolire (di un fattore pari alla costante dielettrica relativa) il campo nel quale essi sono immersi.

Dielettrico (a) senza e (b) con campo elettrico



Dielettrico in un condensatore a facce piane

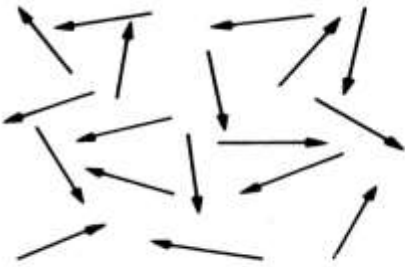
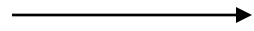
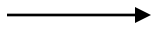


I dipoli elettrici della materia posti in un campo elettrico

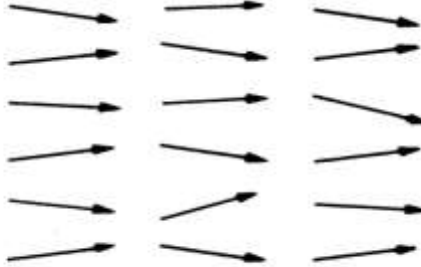
$E=0$

E

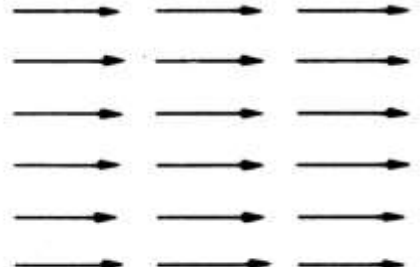
E



(a)

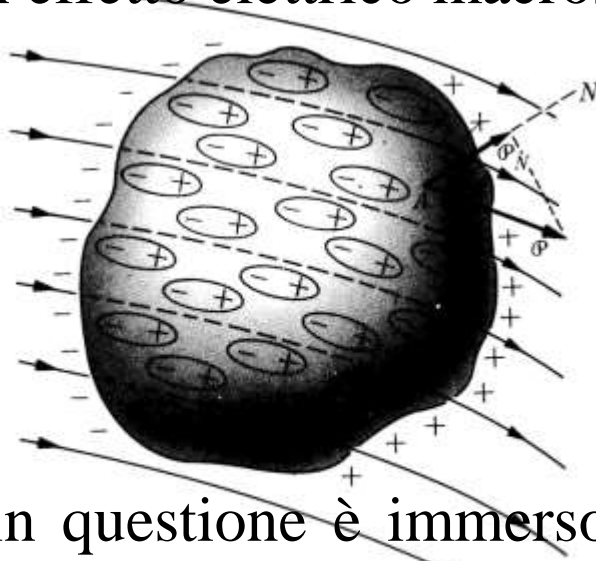


(b)



(c)

Nei materiali comuni costituiti da dipoli elettrici microscopici in assenza di campo elettrico esterno i dipoli sono orientati in modo casuale, come conseguenza dell'agitazione termica, e non si manifesta nessun effetto elettrico macroscopico.



Se il materiale in questione è immerso in un campo elettrico esterno, i dipoli cominciano ad orientarsi nella direzione del campo elettrico dando origine ad un effetto elettrico macroscopico.

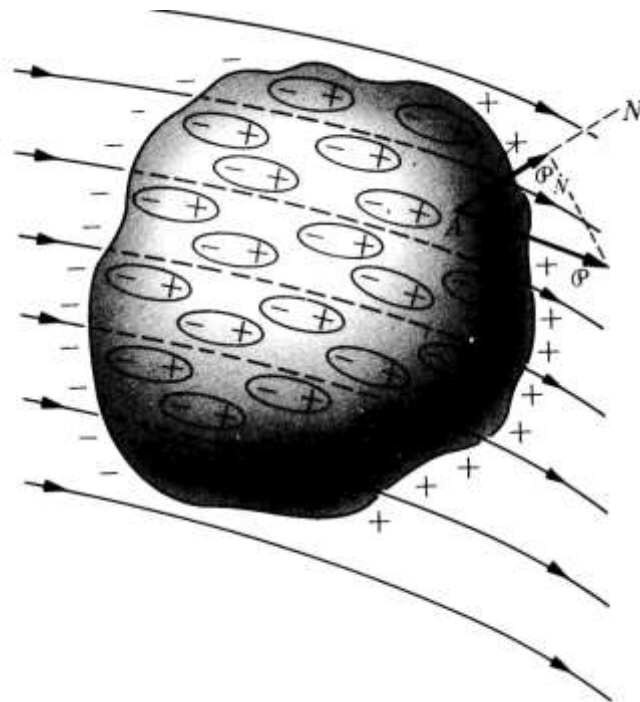
Materiali privi di dipoli elettrici microscopici

Materiali privi di dipoli elettrici microscopici (baricentro della carica positiva coincide con il baricentro della carica negativa),

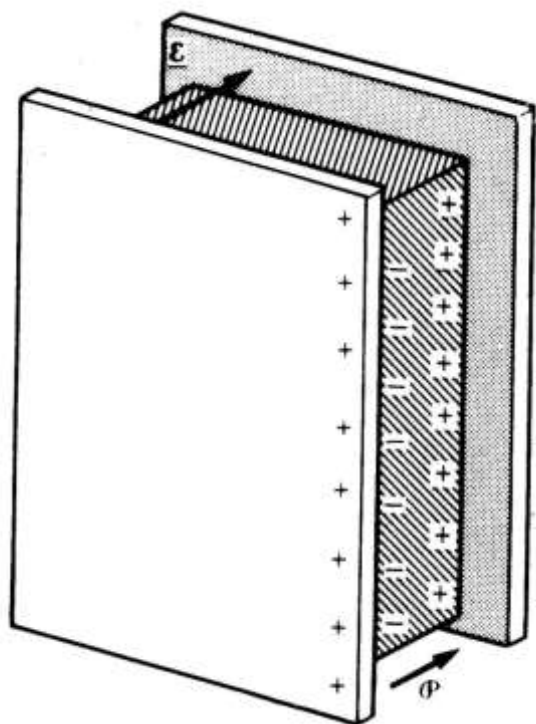
se posti in un campo elettrico esterno,

manifestano uno spostamento in senso opposto dei baricentri delle due cariche.

Questo provoca la creazione di dipoli elettrici microscopici orientati in direzione del campo elettrico esterno, che creano un effetto elettrico macroscopico.



Il vettore polarizzazione



Se inseriamo un parallelepipedo di materiale non conduttore (dielettrico) in un campo elettrico, la sua polarizzazione crea la comparsa di una carica positiva da un lato e una carica negativa dall'altro.

Definiamo la **POLARIZZAZIONE** \vec{P} di un materiale come il vettore che indica il momento di dipolo per unità di volume.

Se \vec{p} è il momento di dipolo indotto negli atomi o quello molecolare, e n è il numero di dipoli elementari per unità di volume

$$\vec{P} = n\vec{p}$$

in genere (per materiali isotropi) la Polarizzazione è parallela al campo elettrico.

Se la lastra di materiale ha spessore l e superficie S , posta perpendicolarmente al campo E , la polarizzazione parallela a E è perpendicolare a S .

Il momento di dipolo totale è P per volume:

$$P(Sl) = (PS)l$$

l è la distanza tra le due cariche sulle superfici S del parallelepipedo.

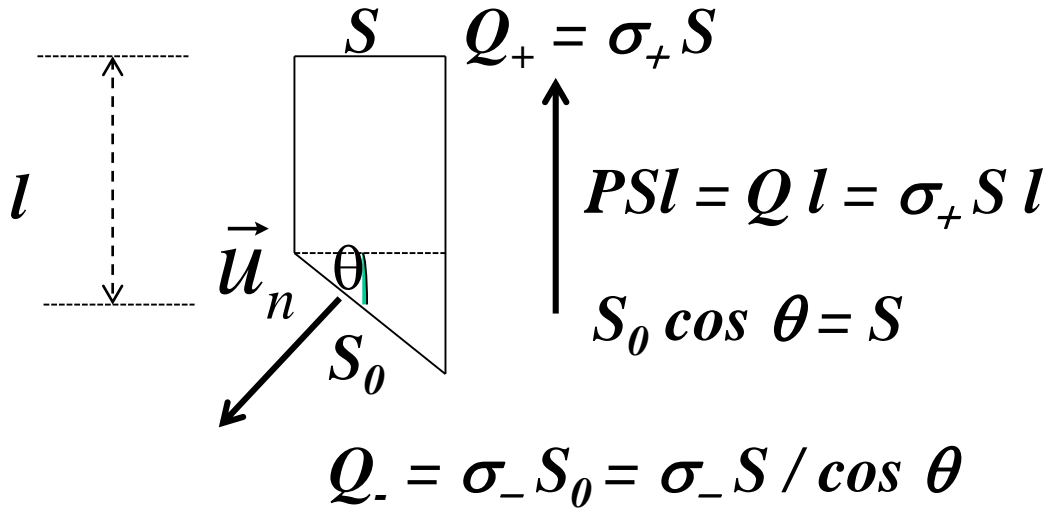
Essendo (PS) dimensionalmente una carica, dalla definizione di

$$(\text{momento di dipolo}) = (\text{carica per distanza})$$

$$P(Sl) = (PS)l = Ql$$

Abbiamo che $PS=Q$ è la carica sulle superfici S .

Cosa succede su S non è perpendicolare a \mathbf{P} ?



$$PSl = \sigma_+ Sl = \sigma_- S_0 l = \sigma_- \frac{S}{\cos \theta} l$$

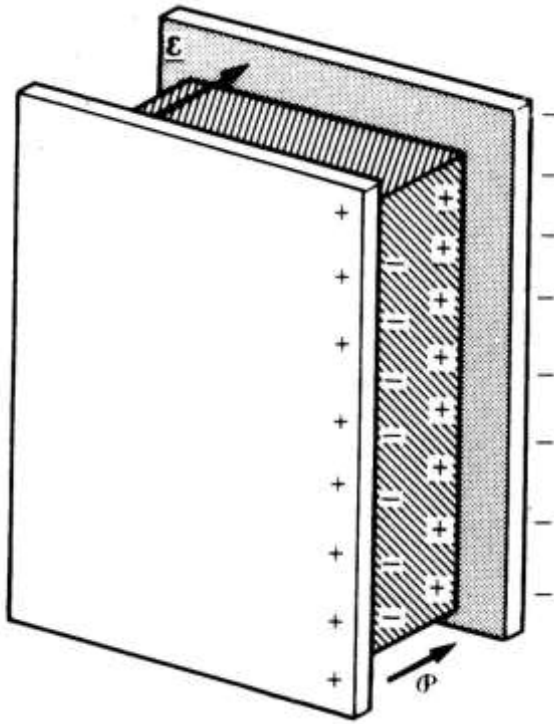
$$P \cos \theta = \sigma_-$$

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{u}_n \quad \vec{u}_n \text{ versore normale alla superficie}$$

Possiamo generalizzare il risultato:

la carica per unità di superficie di un pezzo di materiale polarizzato è uguale alla componente della polarizzazione P nella direzione della normale alla superficie del corpo dielettrico.

Vettore spostamento elettrico



Se inseriamo tra due piani carichi con uguale densità di carica σ_{LIB} una lastra di dielettrico, sulle sue superfici affacciate ai piani carichi viene indotta una carica di polarizzazione per unità di area pari a

$$\sigma_{POL} = P$$

Il campo elettrico dentro alla lastra sarà il risultato della carica totale nei piani e sulle facce della lastra:

$$\sigma = \sigma_{LIB} + \sigma_{POL} = \sigma_{LIB} - P$$

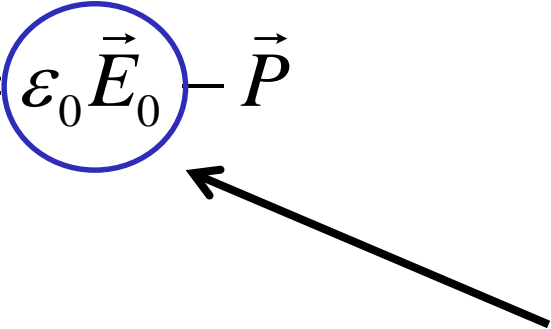
Quindi il campo nel dielettrico E_D vale:

$$E_D = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_{LIB} - P) \quad \epsilon_0 E_D = \sigma_{LIB} - P$$

Chiamando E_0 il campo elettrico senza dielettrico a parità di cariche libere:

$$\varepsilon_0 E_D = \varepsilon_0 E_0 - P$$

In forma vettoriale

$$\varepsilon_0 \vec{E}_D = \varepsilon_0 \vec{E}_0 - \vec{P}$$


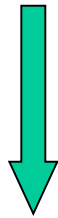
Si può definire un vettore Spostamento Elettrico \vec{D} , detto anche Induzione Dielettrica

tale per cui la componente di D lungo la normale alla superficie di un conduttore immerso in un dielettrico è uguale alla densità di carica libera superficiale sul conduttore

$$\varepsilon_0 \vec{E}_D = \vec{D} - \vec{P}$$

$$\sigma_{LIB} = \vec{D} \cdot \vec{u}_n \quad \sigma_{POL} = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$$

$$\sigma_{LIB} = \varepsilon_0 E_D + P$$



Da cui, generalizzando il risultato in forma vettoriale

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_D + \vec{P}$$

L'unità di misura dello spostamento elettrico nel S.I. è

$$[D] = C \, m^{-2}$$

(la stessa della polarizzazione \mathbf{P})

Suscettività e permittività elettrica

In molti materiali (omogenei e isotropi) il vettore polarizzazione è parallelo al vettore campo elettrico risultante nel materiale:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_D$$

Dove χ_e è una costante adimensionata detta **suscettività elettrica**, che dipende dal materiale.

Quindi se riprendiamo la definizione di vettore spostamento elettrico otteniamo:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E}_D + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}_D + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_D = \\ &= (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E}_D\end{aligned}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_D$$

La costante $\varepsilon = (1 + \chi_e) \varepsilon_0$ è detta
permittività o costante dielettrica del mezzo.

La costante $\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$ è detta
permittività relativa o costante dielettrica relativa.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_D = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_D = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

Riprendendo la legge di Gauss

$$\oint_S \vec{E}_D \cdot d\vec{S} = \frac{q_{LIB} + q_{POL}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_D \cdot d\vec{S} = q_{LIB}$$

$$\oint_S \vec{E}_D \cdot d\vec{S} = \frac{q_{LIB}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

In forma differenziale

$$div \vec{E}_D = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_D = \frac{\rho_{LIB}}{\varepsilon_o \varepsilon_r}$$

$$div \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{LIB}$$

$$\oint_S \vec{E}_D \cdot d\vec{S} = \frac{q_{LIB}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Per una carica puntiforme q il campo nel vuoto risulta

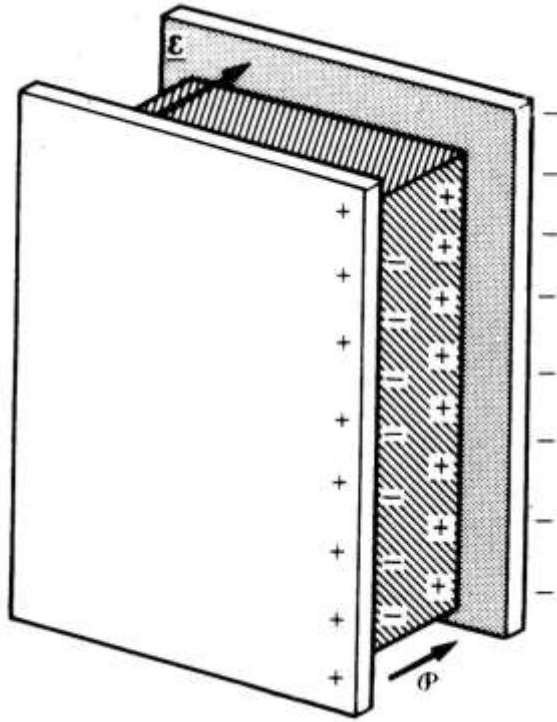
$$E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La stessa carica in un dielettrico ha campo

$$E_D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad \text{Cioè smorzato di un fattore } \epsilon_r \text{ rispetto al vuoto.}$$

Lo smorzamento del campo elettrico di una carica in un mezzo, rispetto alla stessa carica nel vuoto, è una conseguenza degli effetti di schermatura dei dipoli elettrici indotti o orientati dal campo elettrico sorgente.

Per una piastra con densità di carica superfic.
libera σ_{LIB} e di polarizzazione σ_{POL}



$$\oint_S \vec{E}_D \cdot d\vec{S} = \frac{q_{LIB}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \longrightarrow E_D = \frac{\sigma_{LIB}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Senza dielettrico tra le
piastre risulterebbe

$$E_0 = \frac{\sigma_{LIB}}{\epsilon_0}$$

E risulta smorzato di un fattore ϵ_r rispetto al vuoto.

La suscettività elettrica descrive la risposta di un mezzo al campo elettrico applicato.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_D$$

C'è da aspettarsi una differenza se il campo è stazionario o variabile, e c'è da aspettarsi una variazione con la temperatura

$$\chi_e = A + \frac{B}{T} \qquad \textit{Legge di Curie}$$

Dove: A dipende dallo spostamento dei baricentri delle cariche + e -;
B dall'orientazione dei dipoli microscopici, che peggiora con l'agitazione termica.

IL CAMPO ELETTROSTATICO NELLA MATERIA

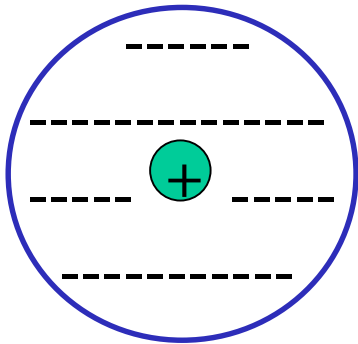
- **Un modello semplice per il calcolo della suscettività elettrica della materia**

VEDIAMO DI COSTRUIRE UN MODELLO DELLA STRUTTURA DEI MATERIALI ISOLANTI PER VERIFICARE LA RELAZIONE

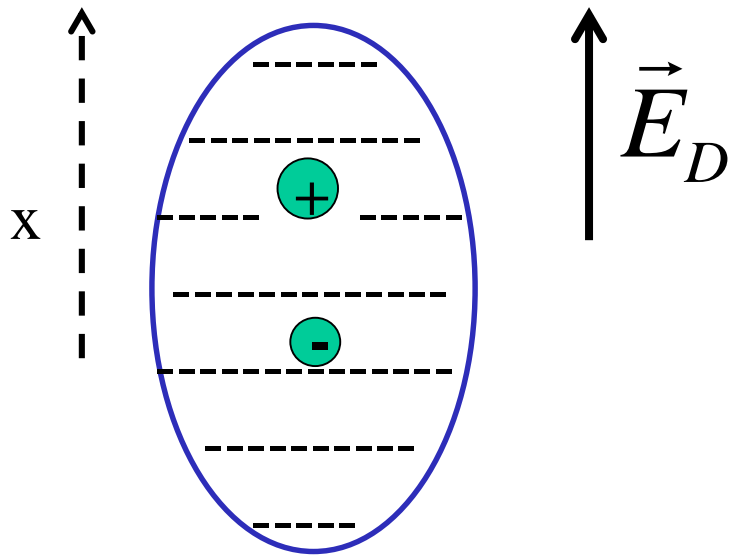
$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_D$$

Materiali apolari (senza dipoli microscopici)

Atomo/molecola neutra
senza campo E

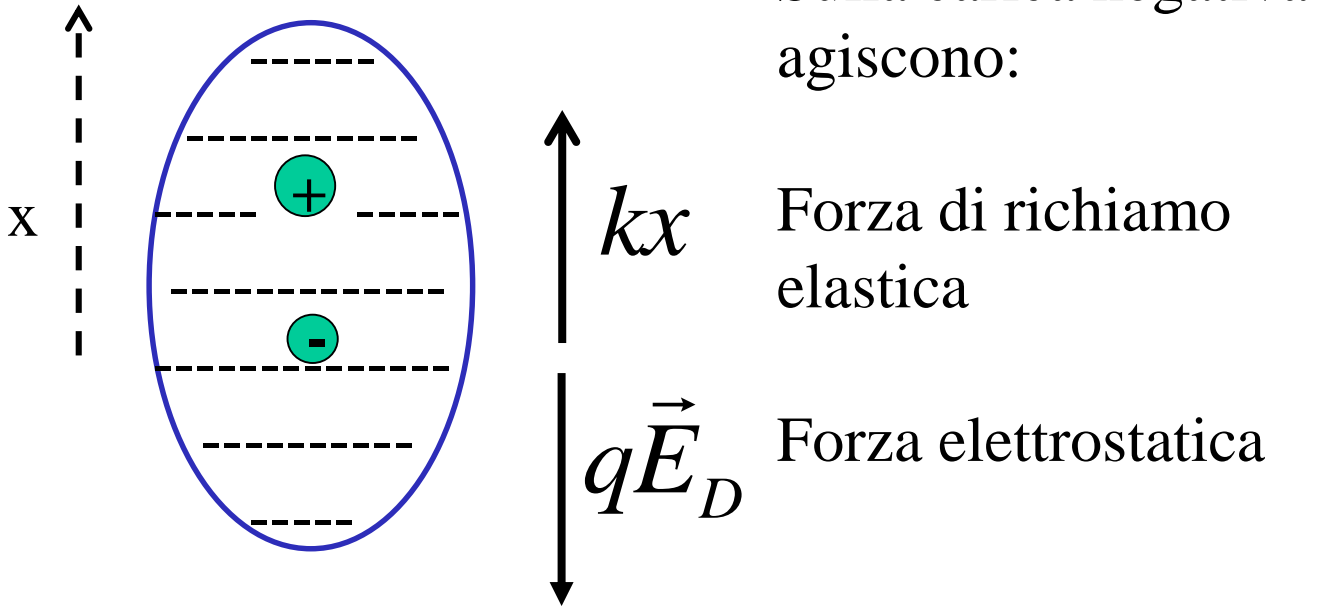


Atomo/molecola neutra
con campo E



I baricentri delle due
distribuzioni di carica
coincidono

x è la distanza dei baricentri
delle due distribuzioni di carica



All' equilibrio

$$qE_D = kx = \frac{k}{m}mx = \omega_0^2 mx$$

$$x = \frac{q}{\omega_0^2 m} E_D$$

In forma vettoriale

$$\vec{x} = \frac{q}{\omega_0^2 m} \vec{E}_D$$

Per definizione il momento di dipolo elementare

$$\vec{p} = q\vec{x} = \frac{q^2}{\omega_0^2 m} \vec{E}_D$$

Se ci sono N strutture elementari per unità di volume il momento di dipolo per unità di volume vale

$$\vec{P} = N\vec{p} = Nq\vec{x} = \frac{Nq^2}{\omega_0^2 m} \vec{E}_D$$

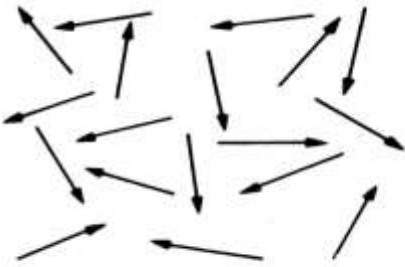
$$\vec{P} = N\vec{p} = Nq\vec{x} = \varepsilon_0 \left(\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 \omega_0^2 m} \right) \vec{E}_D$$

$\chi_{e,apolare}$ suscettività elettrica
apolare

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_D$$

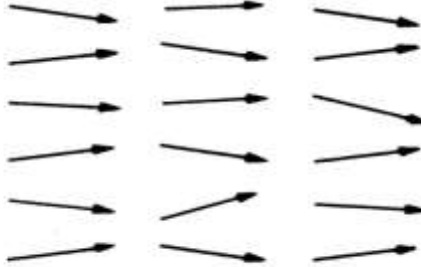
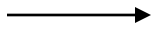
Materiali polari (con dipoli microscopici)

$E=0$



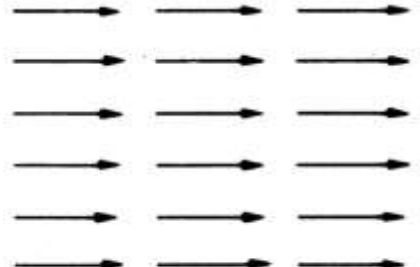
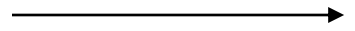
(a)

E

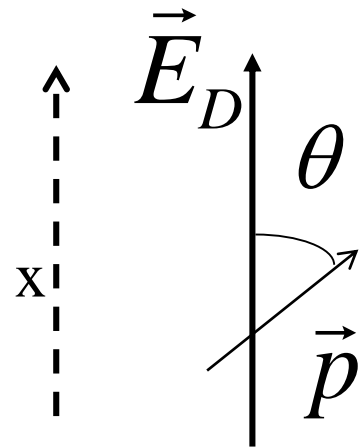


(b)

E



(c)



Il campo E tende ad allineare i dipoli elementari in configurazione di minimo dell'energia ma l'agitazione termica si oppone fornendo energia

Energia di ogni dipolo

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_D$$

Maxwell e Boltzmann a fine ottocento (vedremo il ragionamento di Maxwell nella seconda parte del corso) hanno dedotto che, per un gas ideale di N strutture elementari debolmente interagenti e in equilibrio termodinamico alla temperatura T , la frazione di strutture elementari che hanno energia U_i vale

$$\text{frazione}(U_i) \propto e^{-\frac{U_i}{kT}}$$

Quindi il numero delle strutture elementari che hanno energia U_i vale

$$n(U_i) = N A e^{-\frac{U_i}{kT}}$$

Dove A è la costante che garantisce la condizione:

$$N = \sum_{i=1, \dots, N} N A e^{-\frac{U_i}{kT}}$$

$$A = \frac{1}{\sum_{i=1, \dots, N} e^{-\frac{U_i}{kT}}}$$

Quindi

$$frazione(U_i) = \frac{e^{-\frac{U_i}{kT}}}{\sum_{i=1,..N} e^{-\frac{U_i}{kT}}}$$

L'energia totale del gas ideale vale

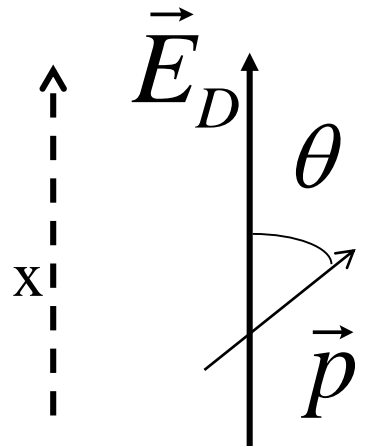
$$EnergiaTotale = \sum_{j=1...N} \frac{U_j N e^{-\frac{U_j}{kT}}}{\sum_{i=1,..N} e^{-\frac{U_i}{kT}}}$$

L'energia media di un singolo dipolo immerso nel campo elettrico E_D vale

$$\frac{EnergiaTotale}{N} = \langle U \rangle = \sum_{j=1,..N} \frac{U_j e^{-\frac{U_j}{kT}}}{\sum_{i=1,..N} e^{-\frac{U_i}{kT}}}$$

Se N è molto grande tipo Numero di Avogadro,
possiamo trasformare la sommatoria in un integrale:

$$\langle U \rangle = \frac{\int_{-pE}^{+pE} U e^{-\frac{U}{kT}} dU}{\int_{-pE}^{+pE} e^{-\frac{U}{kT}} dU} = \langle -pE_D \cos \theta \rangle$$

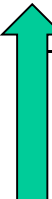


$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{\int_{-pE}^{+pE} U e^{-\frac{U}{kT}} dU}{\int_{-pE}^{+pE} e^{-\frac{U}{kT}} dU} = \langle -p \cos \theta \rangle E_D = \\ &= p_x E_D \end{aligned}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_D = -pE_D \cos\theta$$

Calcoliamo

$$\int_{-pE_D}^{+pE_D} U e^{-\frac{U}{kT}} dU \approx \int_{-pE_D}^{+pE_D} U \left(1 - \frac{U}{kT} \right) dU =$$



 se $pE_D \ll kT$

$$= \left[\frac{U^2}{2} - \frac{U^3}{3kT} \right]_{-pE}^{+pE} = \frac{2}{3} \frac{p^3 E_D^3}{kT}$$

Calcoliamo

$$\int_{-pE_D}^{+pE_D} e^{-\frac{U}{kT}} dU \approx \int_{-pE_D}^{+pE_D} \left(1 - \frac{U}{kT}\right) dU =$$

$$= \left[U - \frac{U^2}{2kT} \right]_{-pE}^{+pE} = 2pE_D$$

Quindi

$$\langle U \rangle = \frac{\int_{-pE_D}^{+pE_D} U e^{-\frac{U}{kT}} dU}{\int_{-pE_D}^{+pE_D} e^{-\frac{U}{kT}} dU} = \langle -pE_D \cos \theta \rangle =$$

$$= -\frac{\frac{2}{3} \frac{p^3 E_D^3}{kT}}{2pE_D} = -\frac{p^2}{3kT} E_D^2$$

$$\langle -pE \cos \theta \rangle = -\frac{p^2}{3kT} E_D^2$$

$$\langle p \cos \theta \rangle = \frac{p^2}{3kT} E_D = p_x$$

$$P_x = Np_x = \varepsilon_0 N \frac{p^2}{3kT \varepsilon_0} E_D$$

$$\chi_{e,polare} = N \frac{p^2}{3kT \varepsilon_0}$$

La suscettività elettrica descrive la risposta di un mezzo al campo elettrico applicato.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_D$$

C'è da aspettarsi una differenza se il campo è stazionario o variabile, e c'è da aspettarsi una variazione con la temperatura

$$\chi_{e,totale} = \chi_{e,apolare} + \chi_{e,polare} = A + \frac{B}{T}$$

Legge di Curie

Dove: A dipende dalla componente apolare, cioè lo spostamento dei baricentri delle cariche + e -;

B dipende dalla componente polare, cioè l'orientazione dei dipoli microscopici, che è influenzata dall'agitazione termica.