Consideriamo l'equazione delle onde:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } Q = \Omega \times (0,+\infty) \\ \left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ \partial_t u &= u_1 \end{aligned}\right\} \text{in } \Omega, t=0 \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ aperto limitato

condizione al bordo di Dirichlet omogenea

Cerchiamo una soluzione per serie:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k(t)\,\psi_k(x) \qquad (*)$$

dove:

- $\psi_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dipendono solo dalla variabile spaziale $x \in \Omega$;
- $\hat{u}_k : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dipendono solo dalla variabile temporale $t \in (0,+\infty)$.

$(*)$ esprime lo sviluppo di u rispetto ad una base formata dalle ψ_k con coefficienti dello sviluppo in serie dati dagli $\hat{u}_k$.

(i) Imponiamo il soddisfacimento della condizione al bordo $u=0$ richiedendo che le ψ_k verifichino la condizione

$$\psi_k = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots;$$

(ii) Imponiamo che lo sviluppo in serie di u verifichi l'equazione differenziale:

$$\partial_t^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k(t) \psi_k(x) \right) - c^2 \Delta \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k(t) \psi_k(x) \right) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k''(t) \psi_k(x) - c^2 \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k(t) \Delta \psi_k(x) = 0. \quad (**)$$

Se le funzioni ψ_k sono tali che:

$$-\Delta \psi_k = \lambda_k \psi_k,$$

cioè se il loro laplaciano è proporzionale alle ψ_k stesse attraverso opportuni coefficienti $\lambda_k \in \mathbb{R}$, allora la $(**)$ diventa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\hat{u}_k''(t) + \lambda_k c^2 \hat{u}_k(t) \right) \psi_k(x) = 0.$$

A questo punto, se le ψ_k formano una base di un opportuno spazio vettoriale, quest'ultima relazione ci dice:

$$\hat{u}_k'' + \lambda_k c^2 \hat{u}_k = 0 , \qquad \forall k = 0,1,2,\dots$$

Riassumendo, possiamo caratterizzare gli elementi dello sviluppo in serie di u mediante questi due problemi:

(i) $\begin{cases} -\Delta\psi_k = \lambda_k \psi_k & \text{in } \Omega \\ \psi_k = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

$k = 0,1,2,\dots$

(ii) $\hat{u}_k'' + \lambda_k c^2 \hat{u}_k = 0 , \; t \in (0,+\infty).$

Questa ODE richiede due condizioni iniziali, che possiamo ricavare da quelle imposte su u:

- $u = u_0 \qquad \text{in } \Omega, t=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k(0)\psi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_{k,0}\psi_k(x) \Rightarrow \hat{u}_k(0) = \hat{u}_{k,0}$$

- $\partial_t u = u_1 \qquad \text{in } \Omega, t=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k'(0)\varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_{k,1}\varphi_k(x) \Rightarrow \hat{u}_k'(0) = \hat{u}_{k,1}$$

Queste evidenziate diventano le condizioni iniziali da imporre all'equazione differenziale nell'incognita $\hat{u}_k$.

Esaminiamo il problema (i):

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k & \text{in } \Omega \\ \varphi_k = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad (***)$$

questo problema si interpreta come la ricerca degli autovalori λ_k e delle autofunzioni φ_k (con condizione al bordo di Dirichlet omogenea) dell'operatore $-\Delta$.

<u>Teorema</u> Esistono coppie (λ_k, φ_k), $k = 0, 1, 2, \dots$, con $\varphi_k \not\equiv 0$ che risolvono il problema $(***)$. Queste coppie sono dette coppie autovalore – autofunzione di $-\Delta$ con condizione al bordo di Dirichlet omogenea.

In particolare:

- i λ_k formano una successione di numeri reali non negativi t.c. $\lambda_k \to +\infty$ quando $k \to \infty$;
- le auto-funzioni φ_k formano una base dello spazio $L^2(\Omega)$;
- ciascun λ_k ha molteplicità algebrica e geometrica unitaria.

Esempio Consideriamo $n=1$, $\Omega = (0,1)$. Cerchiamo autovalori e autofunzioni di $-\Delta$ in dimensione 1 con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee:

$$\begin{cases} -\varphi_k'' = \lambda_k \varphi_k & \text{in } (0,1) \\ \varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0 \end{cases}$$

$\to$ $\varphi_k'' + \lambda_k \varphi_k = 0$

$\hookrightarrow$ integrale generale: $\varphi_k(x) = C_{1,k} e^{\sqrt{-\lambda_k}\, x} + C_{2,k} e^{-\sqrt{-\lambda_k}\, x}$

($C_{1,k}$, $C_{2,k}$ costanti di integrazione)

Poiché sappiamo che $\lambda_k \geq 0$ abbiamo:

$$\psi_k(x) = c_{1,k}\, e^{i\sqrt{\lambda_k}\, x} + c_{2,k}\, e^{-i\sqrt{\lambda_k}\, x}.$$

$\hookrightarrow$ condizioni al bordo: $\begin{cases} c_{1,k} + c_{2,k} = 0 \\ c_{1,k}\, e^{i\sqrt{\lambda_k}} + c_{2,k}\, e^{-i\sqrt{\lambda_k}} = 0 \end{cases}$

ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\sqrt{\lambda_k}} & e^{-i\sqrt{\lambda_k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Affinché $\psi_k \not\equiv 0$ la matrice dei coefficienti di questo sistema lineare deve essere singolare (altrimenti esiste solo la soluzione $c_{1,k} = c_{2,k} = 0 \Rightarrow \psi_k \equiv 0$):

$$e^{-i\sqrt{\lambda_k}} - e^{i\sqrt{\lambda_k}} = 0$$

$$-2i \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda_k} = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \lambda_k = k^2\pi^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Questo è la successione degli autovalori di $-\Delta$ su

$(0,1)$ con annullamento al bordo.

Tornando al sistema lineare, con questi λ_k otteniamo:

$$C_{1,k} + C_{2,k} = 0 \Rightarrow C_{2,k} = -C_{1,k}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= C_{1,k}\, e^{ik\pi x} - C_{1,k}\, e^{-ik\pi x} \\ &= C_{1,k}\left(e^{ik\pi x} - e^{-ik\pi x}\right) \\ &= 2i\, C_{1,k} \sin(k\pi x). \end{aligned}$$

La costante (arbitraria) tiene conto del fatto che ciascun autovalore λ_k ha molteplicità algebrica e geometrica unitaria. Se scegliamo $C_{1,k} = \frac{1}{2i}$ abbiamo

$$\psi_k(x) = \sin(k\pi x).$$