Fisica II

Esercitazione 5

Alessandro Pedico
alessandro.pedico@polito.it

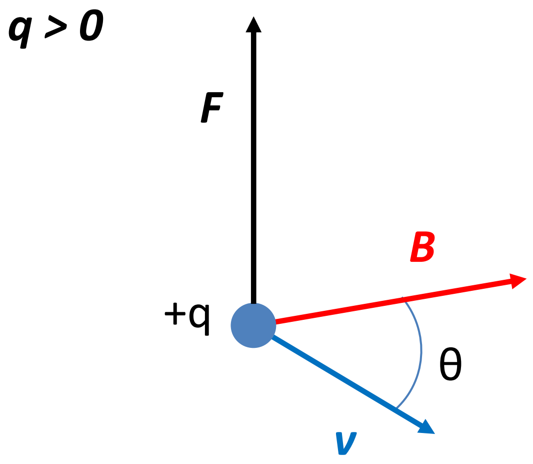
17/10/2022

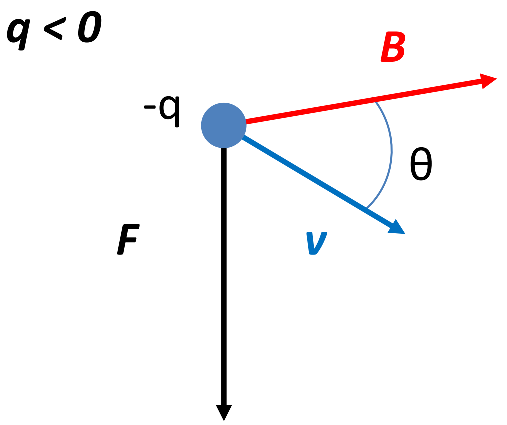
Forza di Lorentz

Forza esercitata da un campo magnetico su una carica puntiforme q

Forza di Lorentz $$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

- È sempre perpendicolare sia al campo magnetico che alla velocità della particella
- Non compie lavoro sulla particella
- Modifica la direzione della velocità della particella, ma non il modulo

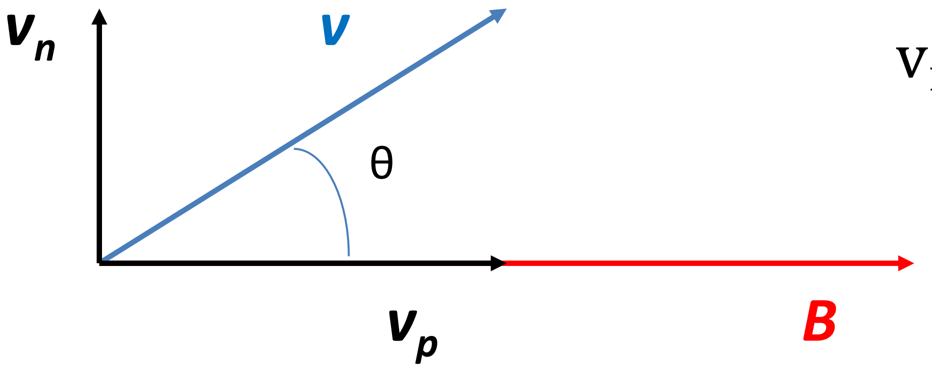




Moto particella carica in B uniforme

Consideriamo una particella carica *q* in moto con velocità **v**, in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme **B**. Il campo magnetico forma un angolo θ con il vettore velocità.

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B} = q\left(\vec{v}_n + \vec{v}_p\right) \times \vec{B} = q\,\vec{v}_n \times \vec{B}$$



$$v_n = v\sin\theta$$

Moto particella carica in B uniforme

Nel piano perpendicolare a **B**

$$\vec{F} = q\,\vec{v}_n \times \vec{B}$$

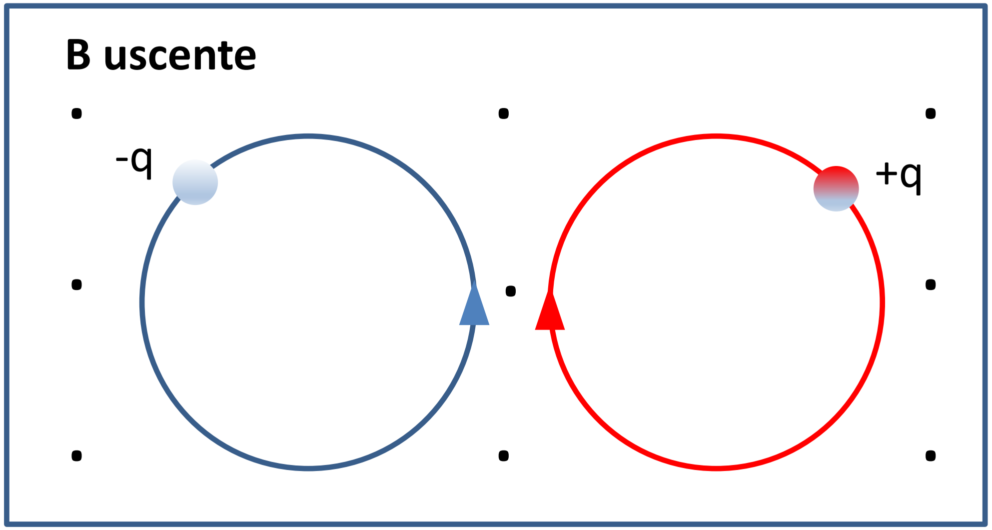
$$\Downarrow$$

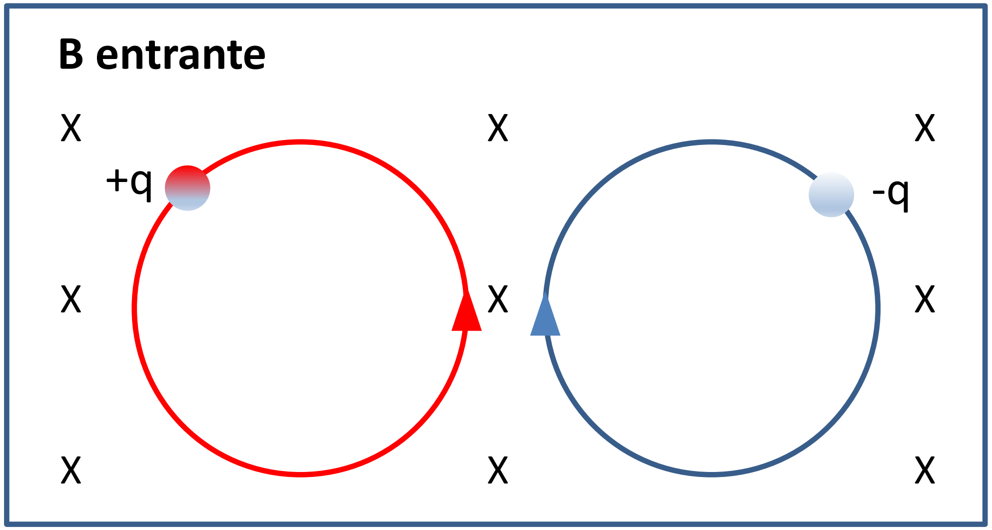
$$F = q\,v\,B\sin\theta$$

$$F = m\,a = m\,\frac{(v\sin\theta)^2}{r}$$

$$r = \frac{m\,v\,\sin\theta}{q\,B}$$

$$\omega = \frac{v\,\sin\theta}{r} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$





Moto particella carica in B uniforme

Nel piano perpendicolare a **B**

$$\vec{F} = q\,\vec{v}_n \times \vec{B}$$

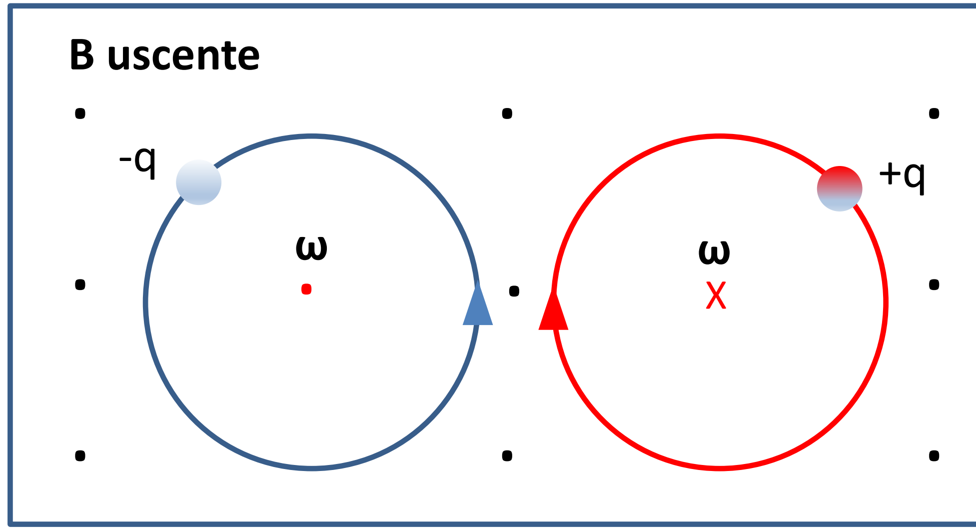
$$\vec{F} = m\,\vec{\omega} \times \vec{v}_n$$

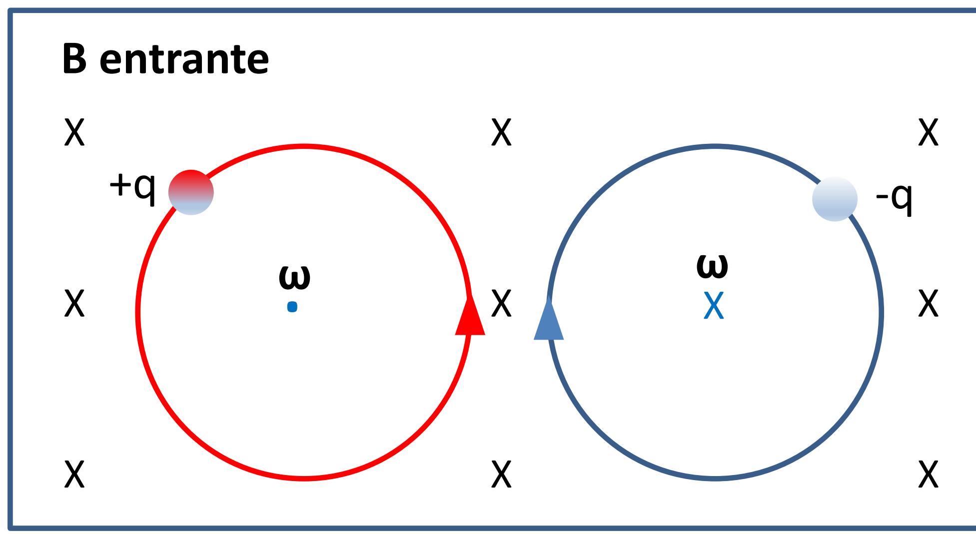
$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\,\vec{B}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$r = \frac{m\,v\,\sin\theta}{q\,B}$$

$$\omega = \frac{q\,B}{m} \qquad T = \frac{2\,\pi\,m}{q\,B}$$

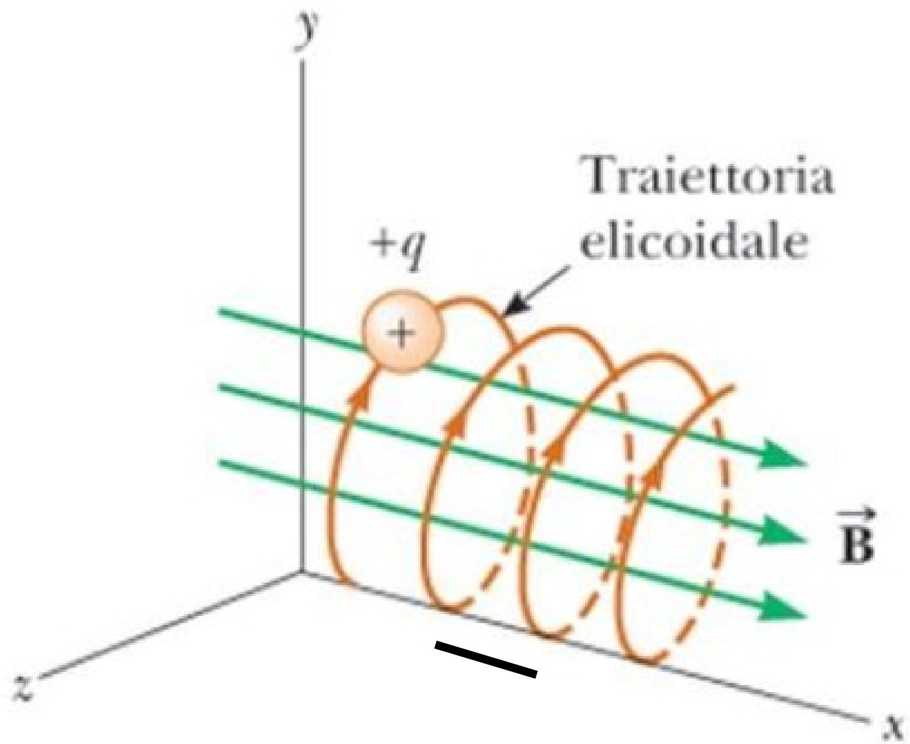


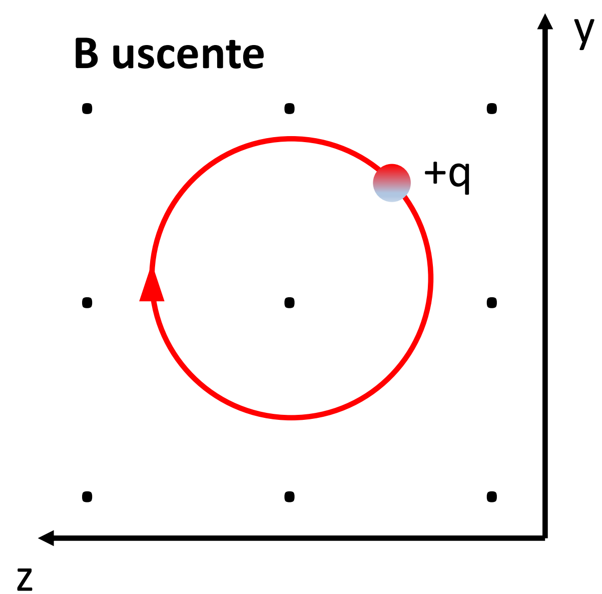


Moto particella carica in B uniforme

Nella direzione <u>parallela</u> a **B** $\vec{F} = 0$ **MOTO RETTILINEO UNIFORME**

Nel piano <u>perpendicolare</u> a **B** $\vec{F} = q\,\vec{v}_n \times \vec{B}$ **MOTO CIRCOLARE UNIFORME**





passo: $v_p\,T = \dfrac{2\,\pi\,m\,v\,\cos\theta}{q\,B}$

Spazio percorso in direzione parallela a **B** dopo un periodo di moto circolare uniforme

Forza di Lorentz

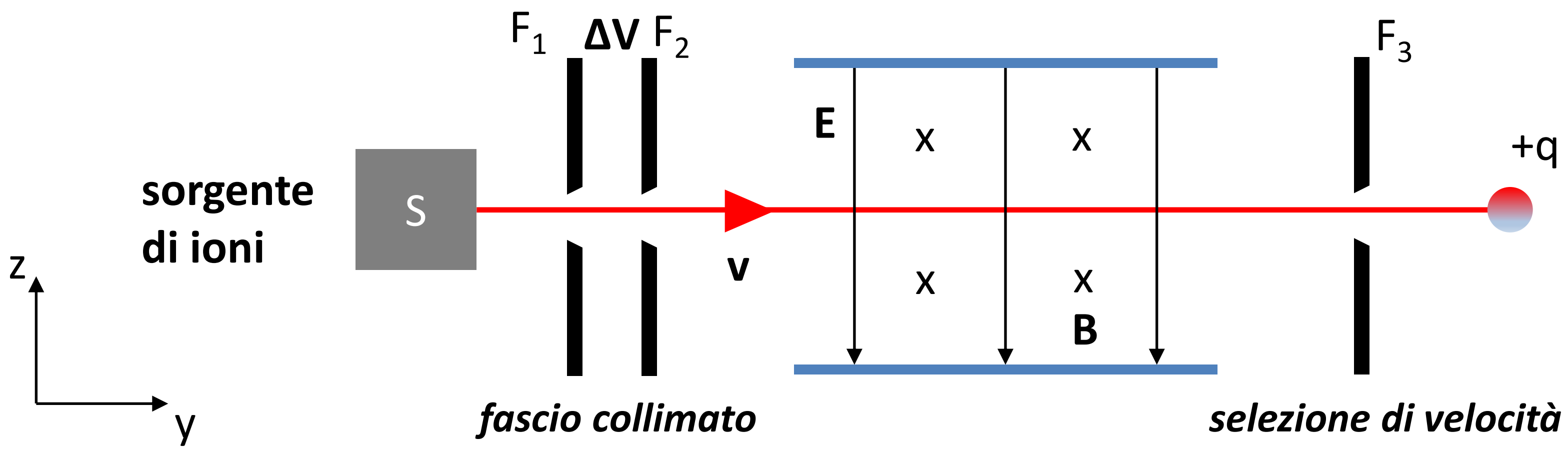
Se, oltre alla presenza del **campo magnetico**, ipotizziamo la presenza di un **campo elettrico**, la forza di Lorentz assume la forma più generale:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Vedremo nel seguito alcuni esempi di applicazioni della forza di Lorentz:

- Selettore di velocità
- Spettrometro di massa
- Ciclotrone

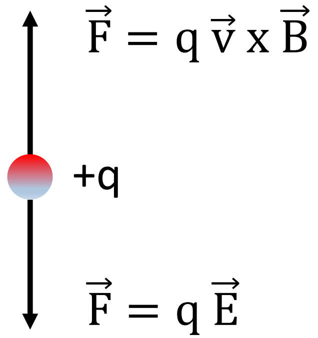
Selettore di velocità



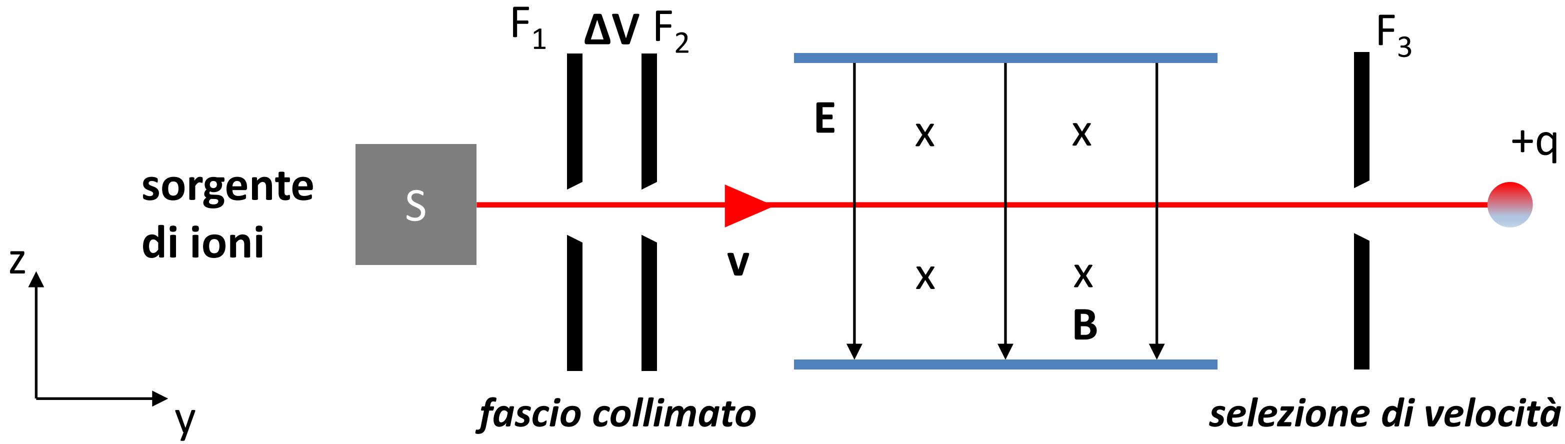
L'unico modo per far passare una particella del fascio di ioni attraverso la terza fenditura $\boldsymbol{F_3}$, è che la forza totale che subisce la particella sia **nulla**.

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad qvB = qE$$



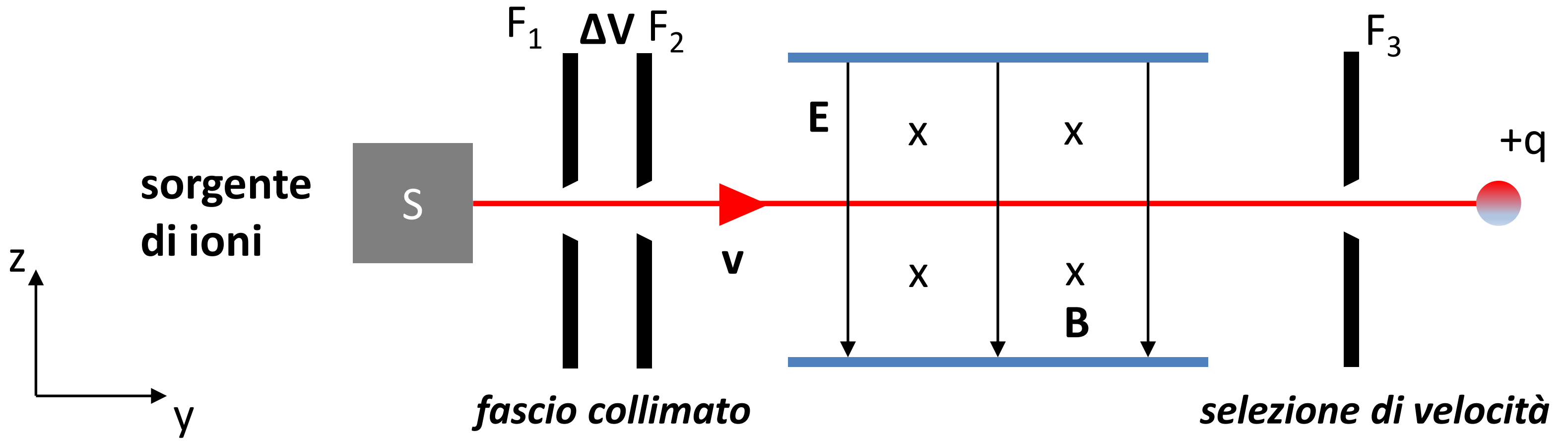
Selettore di velocità



$$v = \frac{E}{B}$$

Variando i valori di E e B selezioniamo solo particelle la cui velocità rispetta questa condizione

Selettore di velocità



ESEMPIO:

Ar^+ m ≈ 39.9 u.m.a

u.m.a. = $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg

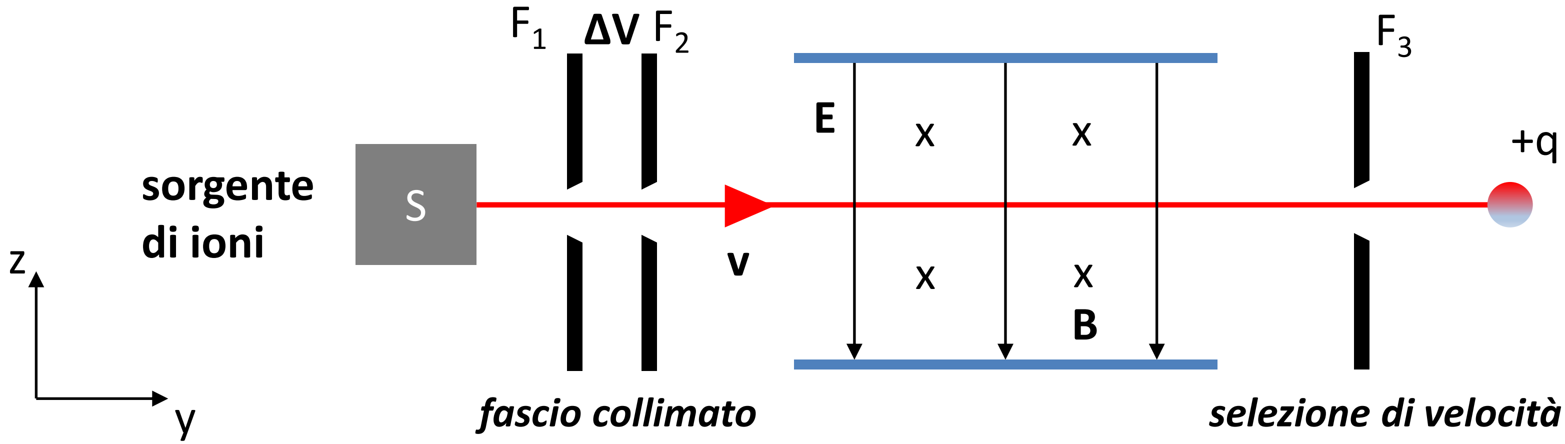
q = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C

ΔV = 10^3 V

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = q\, \Delta V$$

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3}{39.9 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}} \approx 7 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Selettore di velocità



ESEMPIO:

Ar^+ m ≈ 39.9 u.m.a

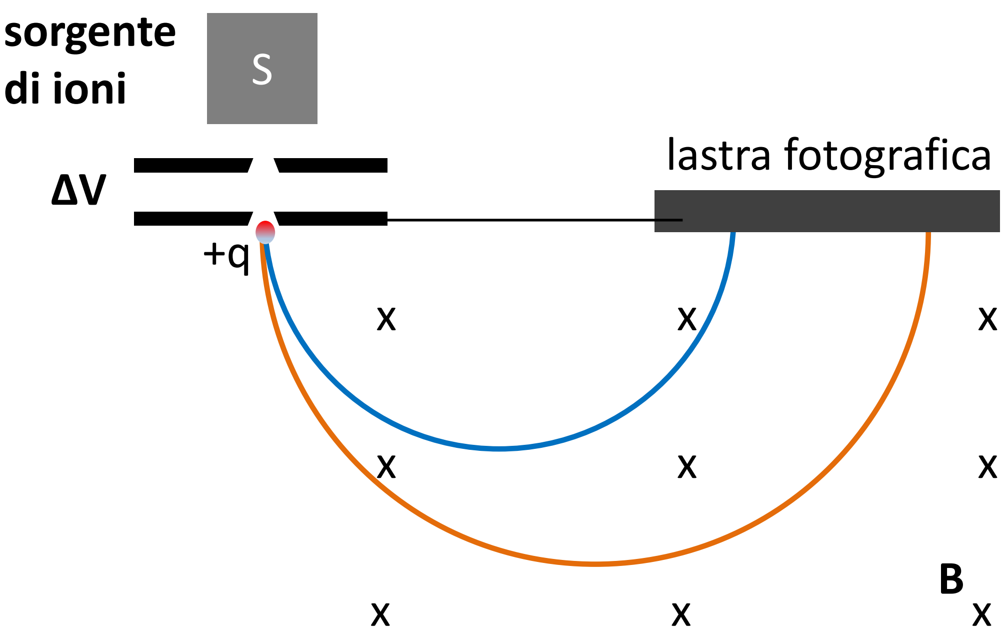
u.m.a. = $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg

q = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$\Delta V = 10^3$ V → $\boxed{v \approx 7 \cdot 10^4 \text{ m/s}}$

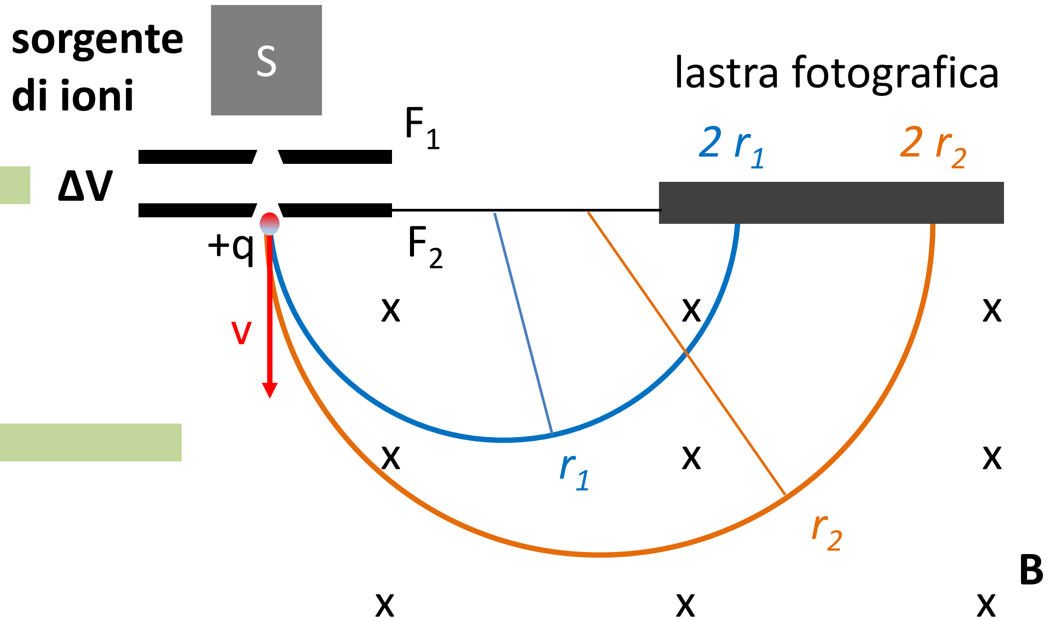
$$v = \frac{E}{B}$$ → $E \approx 7 \cdot 10^3$ V/m, $B \approx 0.1$ T

Spettrometro di massa



Supponiamo che gli ioni abbiano **la stessa energia** (ad esempio dopo averli accelerati con una differenza di potenziale nota e trascurando l'energia iniziale). Il fascio attraversa una regione in cui è presente il campo magnetico **B uniforme e ortogonale** alla velocità degli ioni.

Spettrometro di massa



$$\frac{1}{2} m v^2 = q \Delta V$$

$$r = \frac{m v}{q B}$$

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

$$r = \frac{m}{q B}\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2\,\Delta V}{B^2}\,\frac{m}{q}}$$

Il raggio di curvatura della traiettoria circolare che gli ioni percorrono dipende solo dal rapporto *m/q*. Quindi, la **posizione sulla lastra** alla quale vengono rivelati ci permette di misurare il **rapporto *m/q***.

Spettrometro di massa

Esempio di applicazione: uno spettrometro di questo tipo è utilizzabile per distinguere **ISOTOPI**, ovvero atomi dello stesso elemento (**quindi stesso numero atomico Z**) con un diverso numero di neutroni.

Una volta ionizzati gli atomi di interesse, possiamo analizzarli nello spettrometro di massa e differenziarli in base al rapporto m/q, permettendoci di riconoscere i vari isotopi.

^{40}Ar $m_1 \approx 39.9$ u.m.a

^{38}Ar $m_2 \approx 37.9$ u.m.a

u.m.a. = $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg

$\Delta V = 10^3$ V

$B = 0.1T$

$v \approx 7 \cdot 10^4$ m/s

$$r_1 = \sqrt{\frac{2\,\Delta V}{B^2}\frac{m_1}{q}} = 28.8 \text{ cm}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{2\,\Delta V}{B^2}\frac{m_2}{q}} = 28.0 \text{ cm}$$

$$\boxed{\Delta r = 2r_1 - 2r_2 = 1.6 \text{ cm}}$$

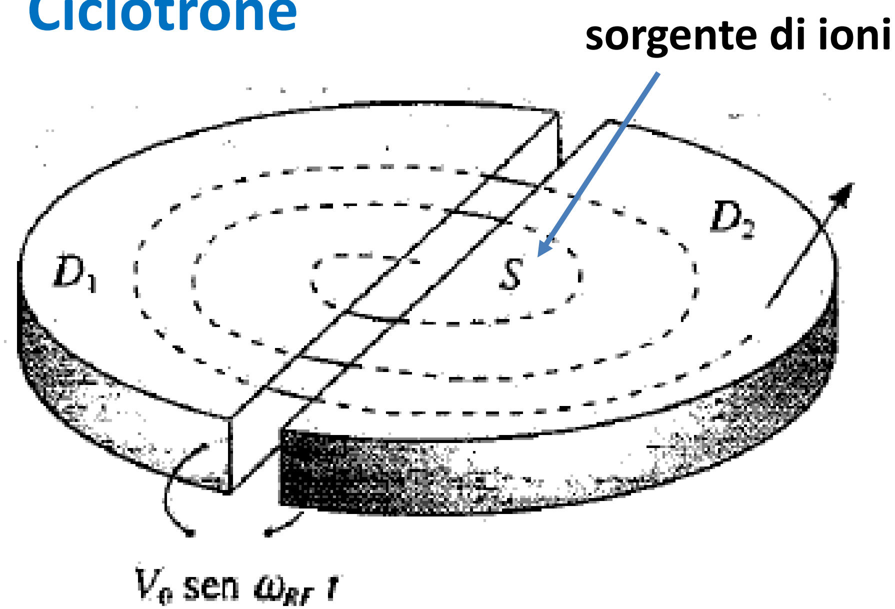
Ciclotrone

Cavità metalliche: D_1, D_2, immerse in campo magnetico uniforme B ortogonale

DIFFERENZA DI POTENZIALE

$$V = V_0 \sin \omega_{RF} t$$

Ciclotrone



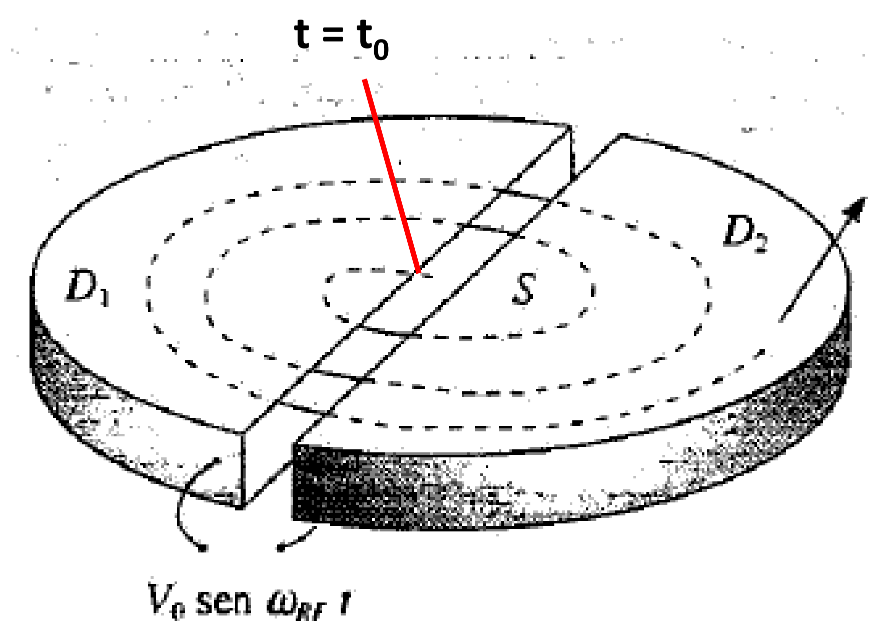
1. Uno ione di massa *m* e carica *q* viene iniettato al centro del sistema da una sorgente *S*
2. Viene accelerato da V in quel dato istante verso una delle cavità metalliche
3. Supponiamo che entri in D_1, dove il campo elettrico è nullo; si muove quindi di moto circolare uniforme, $r = mv_1/qB$
4. Viene accelerato da V (se V ha cambiato segno) e passa nella cavità D_2 dove nuovamente si muove di moto circolare uniforme, $r = mv_2/qB$
5. Per iterare il processo e accelerare sempre di più lo ione, bisogna sincronizzare il cambiamento di segno di V con il passaggio dello ione da una cavità all'altra

Ciclotrone

$$\frac{1}{2} m\, v_1^2 \quad = q\, V(t)$$

$\boldsymbol{t = t_0}$

$$r_1 = \frac{m\, v_1}{q\, B}$$



Ciclotrone

$$\frac{1}{2} m\, v_1^2 \quad = q\, V(t)$$

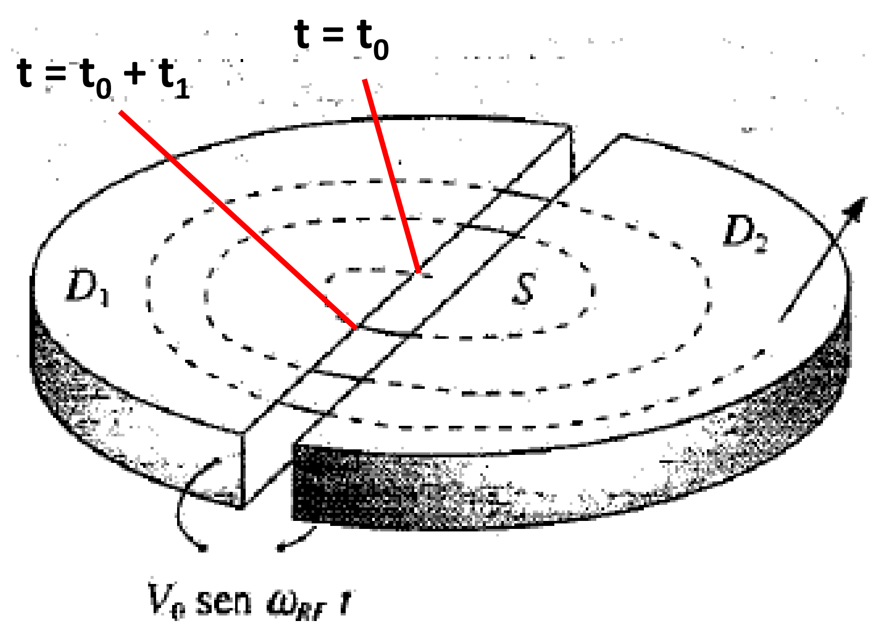
$\boldsymbol{t = t_0}$

$$r_1 = \frac{m\, v_1}{q\, B}$$

$\boldsymbol{t = t_1 + \ t_0}$ $\quad\quad \boldsymbol{t_1 = \frac{T}{2} = \frac{\pi\, m}{q\, B}}$

$$\frac{1}{2} m\, v_2^2 \quad = \frac{1}{2} m\, v_1^2 + \ q\, V(t)$$

$$r_2 = \frac{m\, v_2}{q\, B}$$



Ciclotrone

$$\frac{1}{2} \mathrm{m}\, \mathrm{v}_1^2 = \mathrm{q}\, \mathrm{V(t)}$$

$$\boldsymbol{t = t_0}$$

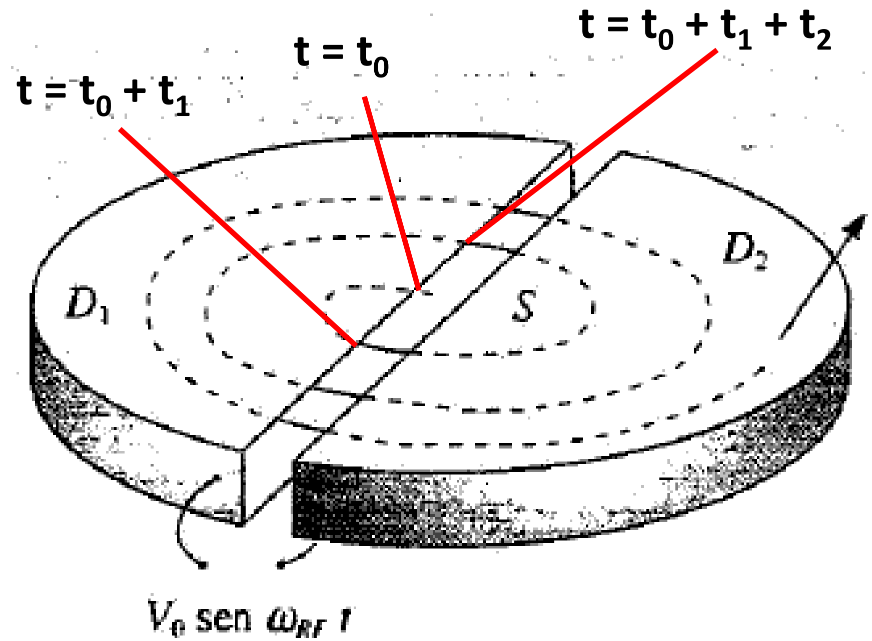
$$\mathrm{r}_1 = \frac{\mathrm{m}\, \mathrm{v}_1}{\mathrm{q}\, \mathrm{B}}$$

$$\boldsymbol{t = t_1 + t_0} \qquad \boldsymbol{t_1 = \frac{T}{2} = \frac{\pi\, m}{q\, B}}$$

$$\frac{1}{2} \mathrm{m}\, \mathrm{v}_2^2 = \frac{1}{2} \mathrm{m}\, \mathrm{v}_1^2 + \mathrm{q}\, \mathrm{V(t)}$$

$$\mathrm{r}_2 = \frac{\mathrm{m}\, \mathrm{v}_2}{\mathrm{q}\, \mathrm{B}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t = t_2 + t_1 + t_0} \qquad \boldsymbol{t_2 = \frac{T}{2} = \frac{\pi\, m}{q\, B}}}$$

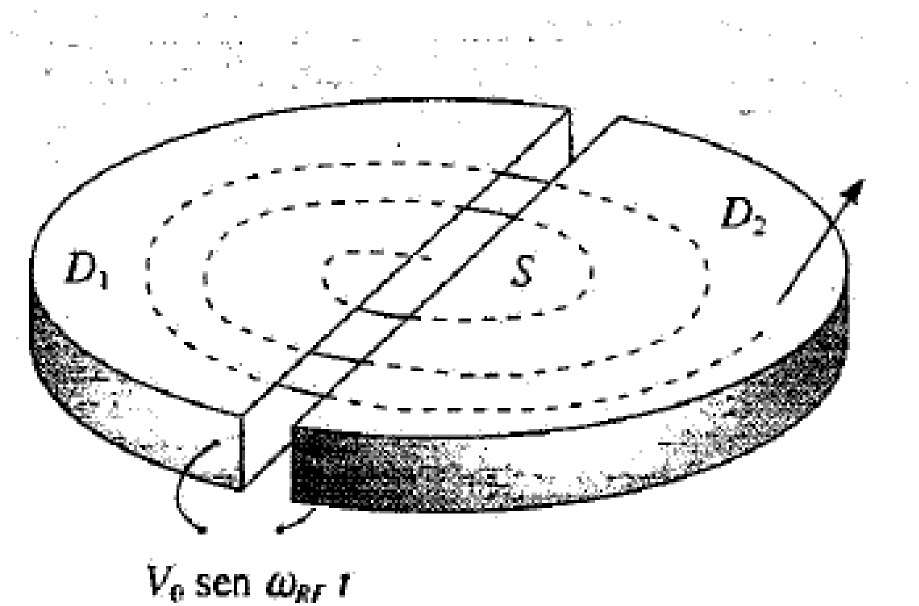


Nota: indipendentemente dalla velocità, lo ione ci mette sempre lo stesso tempo a fare mezzo giro. Quindi, è possibile **sincronizzare** la tensione alternata con il moto dello ione, in modo da ottenere sempre l’accelerazione massima.

Ciclotrone

Inoltre, facciamo in modo di avere che il periodo del moto circolare coincida con quello della tensione alternata:

$$\boxed{\omega_{RF} = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{q\,B}{m}}$$



In questo modo, ad ogni passaggio la particella guadagna qV_0 in energia cinetica.

Inoltre, possiamo definire la velocità massima raggiungibile, per il fatto che l'orbita massima può avere raggio *R* pari al raggio delle cavità *D*.

$$v_{max} = \frac{q\,B\,R}{m} \quad \Rightarrow \quad E_{k,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{q^2\,B^2\,R^2}{2\,m}$$