Dim. (del primo teorema di Lyapunov)

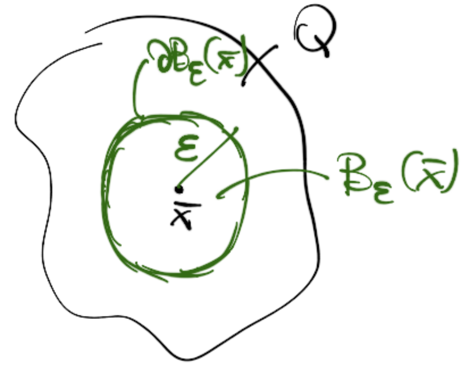
Dobbiamo mostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$$

dove $x(t)$ è la traiettoria di $\dot{x} = f(x)$ uscente da x_0, cioè t.c. $x(0) = x_0$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset Q$ $\left(B_\varepsilon(\bar{x}) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \varepsilon \} \right)$.

La frontiera $\partial B_\varepsilon(\bar{x}) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| = \varepsilon \}$ è un compatto, V è continua su Q e quindi, per il teorema di Weierstrass, V raggiunge valore minimo su $\partial B_\varepsilon(\bar{x})$:



$$m := \min_{x \in \partial B_\varepsilon(\bar{x})} V(x) > 0$$

perché V è > 0 in $Q \setminus \{\bar{x}\}$

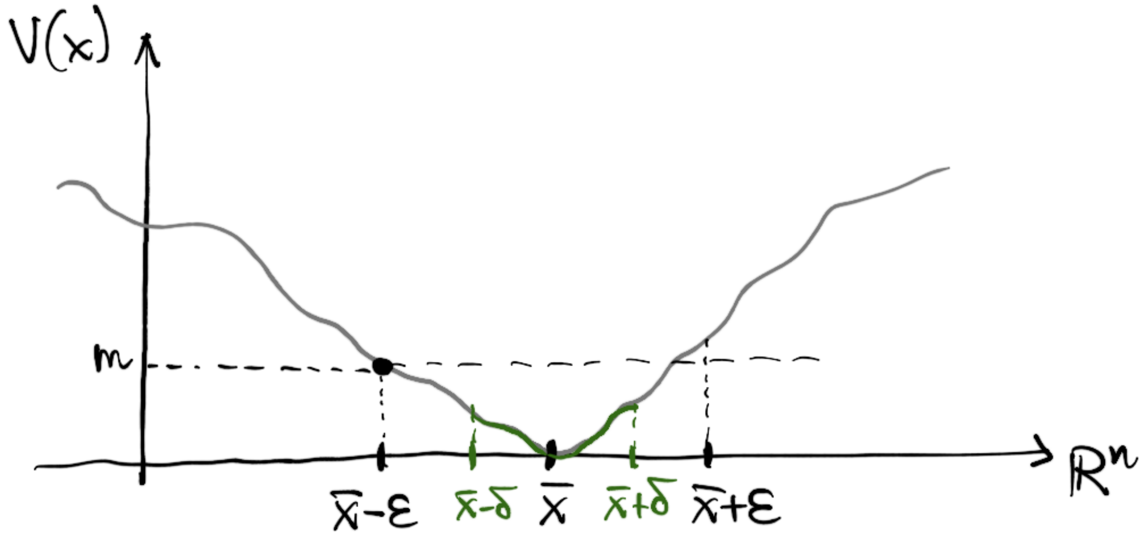
Per la continuità di V in Q, quindi in particolare in $\bar{x}$, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow V(x) < m$$

(basta prendere $\varepsilon = m$ nella definizione di continuità di V in $\bar{x}$).

V continua nel punto $\bar{x}$ significa che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \underbrace{|V(x) - \underbrace{V(\bar{x})}_{=0}| < \varepsilon}_{V(x) < \varepsilon}$$



Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ t.c. la soluzione di $\dot{x} = f(x)$ uscente da x_0 non rimane in $B_\varepsilon(\bar{x})$ per ogni $t > 0$. Esiste allora un istante $t^* > 0$ t.c. $x(t^*) \in \partial B_\varepsilon(\bar{x})$, cioè $\| x(t^*) - \bar{x} \| = \varepsilon$.

Ma:

(i) $V(x_0) < m$, perché $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$;

(ii) $V(x(t^*)) \geq m$, perché m è il min di V su $\partial B_\varepsilon(\bar{x})$ e $x(t^*) \in \partial B_\varepsilon(\bar{x})$,

cioè $V(\underbrace{x(0)}_{= x_0}) < V(x(t^*))$ $(t^* > 0)$, il che contraddice l'ipotesi che V sia non crescente lungo le traiettorie del sistema.

Allora: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. $x_0 \in B_\delta(\bar{x}) \Rightarrow x(t) \in B_\varepsilon(\bar{x})$ $\forall t > 0$, cioè $\bar{x}$ è stabile.

$\square$

Def. Una funzione $V: Q \to \mathbb{R}$ si dice funzione di Lyapunov in senso stretto relativa a $\bar{x}$ se:

(i) $V \in C^1(Q)$;

(ii) $V(\bar{x}) = 0$;

(iii) $V(x) > 0 \quad \forall x \in Q \setminus \{\bar{x}\}$;

(iv) $\dfrac{d}{dt} V(x(t)) < 0$ per ogni traiettoria x uscente da $x_0 \in Q \setminus \{\bar{x}\}$.

Teorema (secondo teorema di Lyapunov)

Un punto di equilibrio $\bar{x}$ è asintoticamente stabile sse esiste una V di Lyapunov in senso stretto relativa a $\bar{x}$.

Dim.

Dimostriamo solo l'implicazione:

$\exists\, V$ di Lyapunov in senso stretto $\Rightarrow \bar{x}$ asintoticamente stabile.

Osserviamo che la stabilità di $\bar{x}$ segue dal primo teorema di Lyapunov in quanto una V di Lyapunov in senso stretto è in particolare una funzione di Lyapunov.

Per stabilità:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

Non è restrittivo considerare in particolare gli $\varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset Q$.

Facciamo vedere che $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}$.

Poniamo:

$$g(t) := V(x(t)) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Allora $g(t) \geq 0 \ \forall t \geq 0$, $g'(t) = \frac{d}{dt} V(x(t)) < 0$ (possiamo prendere, senza perdita di generalità, $x_0 \neq \bar{x}$). Segue che g è monotone e quindi che esiste

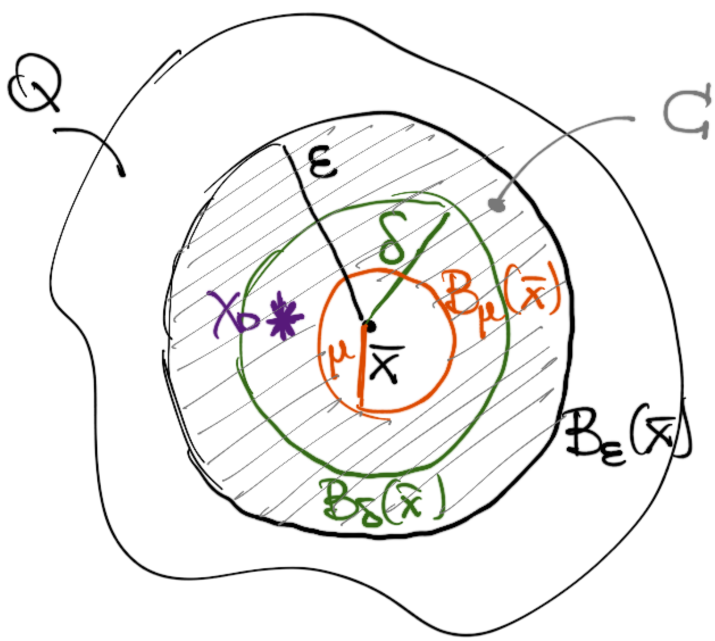
$$l := \lim_{t \to +\infty} g(t).$$

(i) Facciamo vedere che $l = 0$.

Supponiamo che $l > 0$. Per continuità di V in $\bar{x}$ esiste $\mu > 0$ t.c.

$$\|x - \bar{x}\| < \mu \Rightarrow V(x) < l.$$

D'altra parte, abbiamo $V(x_0) = g(0) \geq l$ (perché g è decrescente) e quindi necessariamente $x_0 \notin B_\mu(\bar{x})$, cioè $\|x_0 - \bar{x}\| \geq \mu$. Inoltre, per stabilità di $\bar{x}$ dovrà essere $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$, cioè $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$.



Introduciamo l'insieme

$$C := \overline{B_\varepsilon(\bar{x})} \setminus B_\mu(\bar{x})$$

$$= \{x \in Q : \mu \leq \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\}.$$

e sia

$$M := \max_{x \in C} \left(\nabla V(x) \cdot f(x)\right).$$

Osserviamo che M è ben definito, in particolare è finito, in quanto $\nabla V(x) \cdot f(x)$ è continua su C che è compatto ($\rightarrow$ teorema di Weierstrass).

Osserviamo inoltre che $M < 0$ perché $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ $\forall x \in Q \setminus \{\bar{x}\}$ (per il fatto che V è di Lyapunov in senso stretto) e inoltre $\bar{x} \notin C$.

Osserviamo infine che $x(t) \in C$ $\forall t \geq 0$. Infatti $x(0) = x_0 \in B_\delta(\bar{x}) \subseteq C$; inoltre sappiamo che $g(t) = V(x(t)) \geq \ell$ $\forall t \geq 0$ e quindi $x(t)$ non può entrare in $B_\mu(\bar{x})$ perché altrimenti avremmo $V(x(t)) < \ell$.

Allora:

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)\,ds$$

$$= V(x_0) + \int_0^t \underbrace{\frac{d}{ds} V(x(s))}_{\leq M} ds$$

$$\leq V(x_0) + Mt \qquad (M<0)$$

$$\xrightarrow{t\to+\infty} -\infty$$

da cui $\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$, il che contraddice il fatto che $g(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$.

Allora è assurdo supporre $l > 0$ e quindi deve essere $l = 0$.