Ex: Calcolare mappa di Gauss, operatore forma, curvature ecc. della sfera S di centro l'origine e raggio r.

L'equazione cartesiana di tale sfera è

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

e una sua parametrizzazione è data da

$$P: (u, v) \in \Omega \to (r\,\mathrm{sen}(u)\cos(v),\ r\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(v),\ r\cos(u))$$

da cui

$$P_u = (r\cos(u)\cos(v),\ r\cos(u)\,\mathrm{sen}(v),\ -r\,\mathrm{sen}(u))$$

$$P_v = (-r\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(v),\ r\,\mathrm{sen}(u)\cos(v),\ 0)$$

Mappa di Gauss

È un conto un po' lungo. Avremo che

$$N^P = \frac{P_u \times P_v}{\| P_u \times P_v \|} = \dots = \Big(sen(u) \cos(v) \, , \ sen(u) \, sen(v) \, , \ \cos(u) \Big)$$

Potete verificare che N^P è ortogonale a $\mathrm{Span}\{P_u, P_v\}$ e di norma 1.

1º forma fondamentale

$$(g_S)_{ij} = \begin{pmatrix} P_u \cdot P_u & P_u \cdot P_v \\ P_u \cdot P_v & P_v \cdot P_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 sen^2(u) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g_S = r^2 du^2 + r^2 sen^2(u) \, dv^2$$

2ª forma fondamentale

Abbiamo che

$$P_{uu} = \left(-r\, sen(u)\cos(v)\ ,\ -r\, sen(u)\, sen(v)\ ,\ -r\cos(u)\right)$$

$$P_{uv} = \left(-r\cos(u)\, sen(v)\ ,\ r\cos(u)\cos(v)\ ,\ 0\right)$$

$$P_{vv} = \left(-r\, sen(u)\cos(v)\ ,\ -r\, sen(u)\, sen(v)\ ,\ 0\right)$$

Da cui

$$(b_S)_{ij} = \begin{pmatrix} N^P \cdot P_{uu} & N^P \cdot P_{uv} \\ N^P \cdot P_{uv} & N^P \cdot P_{vv} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r\, sen^2(u) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad b_S = -r\, du^2 - r\, sen^2(u)\, dv^2$$

Operatore forma

Abbiamo che

$$\left(g_S^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(u)} \end{pmatrix} \qquad \left(b_S\right) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \operatorname{sen}^2(u) \end{pmatrix}$$

e poiché la matrice rappresentativa dell'operatore forma è $g_S^{-1} \cdot b_S$, abbiamo che

$$\left(-N_*\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \qquad (\bullet)$$

Curvatura Gaussiana e media

Da $(\bullet)$ abbiamo che $K = \frac{1}{r^2}$ e $H = -\frac{1}{r}$

Osservazioni

Le curvature principali coincidono in ogni punto della sfera e sono uguali a $-\frac{1}{r}$ che, a meno del segno, è la curvatura di ogni equatore (cerchio massimo) della sfera.
Tale cerchio massimo è l'intersezione della sfera con il piano passante per il punto considerato p e contenente N_p, versore normale alla sfera in p.

Tutte le direzioni sono principali: l'autospazio dell'operatore forma relativo all'autovalore $-\frac{1}{r}$ è tutto lo spazio tangente alla sfera in p.

Osservazione

Come ulteriore riprova del fatto che nel caso della sfera tutte le direzioni sono principali, verifichiamo che

$$(\star) \qquad -N_*\left(a P_u + b P_v\right) = -\frac{1}{r}\left(a P_u + b P_v\right) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

Infatti

$$N_*(P_u) = N_u^P = \left(\cos(u)\cos(v),\ \cos(u)\operatorname{sen}(v),\ -\operatorname{sen}(u)\right)$$
$$= \frac{1}{r} P_u$$

e

$$N_*(P_v) = N_v^P = \left(-\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v),\ \operatorname{sen}(u)\cos(v),\ 0\right)$$
$$= \frac{1}{r} P_v$$

da cui segue $(\star)$

Ex: Calcolare mappa di Gauss, operatore forma, curvature, linee di curvatura del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Notiamo che tale superficie è il grafico della funzione $f(u,v) = u^2 + v^2$, quindi una parametrizzazione è

$$P : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow P(u,v) = (u, v, u^2+v^2) \in \mathbb{R}^3$$

Possiamo applicare i ragionamenti fatti per le superfici che sono il grafico di una funzione (vedi Lezione 22).
In ogni modo facciamo i conti.

<u>Mappa di Gauss</u>

Abbiamo che

$P_u = (1, 0, 2u)$

$P_v = (0, 1, 2v)$

$$\Longrightarrow \quad N^P(u,v) = \frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|} = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$1^{\underline{o}}$ forma fondamentale

$$(g_S) = \begin{pmatrix} P_u \cdot P_u & P_u \cdot P_v \\ P_u \cdot P_v & P_v \cdot P_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$g_S = (1+4u^2)\, du^2 + 8uv\, du\, dv + (1+4v^2)\, dv^2$$

$2^{\underline{o}}$ forma fondamentale

$$(b_S) = \begin{pmatrix} N^P \cdot P_{uu} & N^P \cdot P_{uv} \\ N^P \cdot P_{uv} & N^P \cdot P_{vv} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad b_S = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \left(du^2 + dv^2\right)$$

Operatore forma

La matrice che rappresenta (nella base (P_u, P_v)) l'operatore forma è

$$(-N_*) = (g_s^{-1}) \cdot (b_s) = \frac{1}{1+4u^2+4v^2}\begin{pmatrix} 1+4v^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 1+4v^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4u^2 \end{pmatrix}$$

Curvatura Gaussiana

è uguale a $\det(-N_*) = \frac{\det b_s}{\det g_s} = \frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}$

Curvatura media

è uguale a $\frac{1}{2}\,\text{traccia}(-N_*) = \frac{2(1+2u^2+2v^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{3/2}}$

Osservazione

Abbiamo visto che la curvatura Gaussiana è $\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}$. Questo significa che la curvatura Gaussiana nel punto $(u, v, P(u,v)) = (u, v, u^2+v^2)$ del paraboloide è uguale a $\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}$.

Stessa cosa per la curvatura media, curvature principali ecc.

Possiamo per esempio definire la funzione $K(u,v)$ che ad ogni (u,v) associa la curvatura Gaussiana nel punto $(u, v, P(u,v))$ di S.

Punti ombelicali

Per definizione sono quei punti $p \in S$ (in questo caso il paraboloide) tali che $K_1(p) = K_2(p)$ con K_1, K_2 curvature principali in p.

Possiamo procedere in questo modo.

Voglio trovare i punti $p \in S$ / $K_1(p) = K_2(p) =: \mathcal{K}(p)$.

Poiché $\text{traccia}(-N_*) = K_1 + K_2 = 2\mathcal{K} = \dfrac{4(1+2u^2+2v^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}}$

(Vedi pag. 9), avremo che

$$\mathcal{K}(u,v) = \frac{2(1+2u^2+2v^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (\bullet)$$

D'altra parte sappiamo che $\mathcal{K}^2(u,v)$ coincide con la curvatura Gaussiana (prodotto degli autovalori).

Quindi, andando a vedere la curvatura Gaussiana che abbiamo calcolato a pag. 9, abbiamo che

$$\mathcal{K}^2(u,v) = \left(\frac{2\left(1+2u^2+2v^2\right)}{\left(1+4u^2+4v^2\right)^{3/2}} \right)^2 = \frac{4}{\left(1+4u^2+4v^2\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4\left(1+2u^2+2v^2\right)^2}{\left(1+4u^2+4v^2\right)^3} = \frac{4}{\left(1+4u^2+4v^2\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(1+2u^2+2v^2\right)^2 = \left(1+4u^2+4v^2\right) \Rightarrow 4\left(u^2+v^2\right)^2$$

$$= 0 \quad \longleftrightarrow \quad u = v = 0 .$$

Quindi l'unico punto ombelicale è $(0,0,P(0,0)) = (0,0,0)$

Linee di curvatura e curvature principali

Calcoliamo le curvature principali. Ricordiamo che l'operatore forma (vedi pag. 9) è

$$(-N_*) = \frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1+4v^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4u^2 \end{pmatrix}$$

Quindi per calcolare gli autovalori di $(-N_*)$ basterà calcolare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} 1+4v^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4u^2 \end{pmatrix} \qquad (\bullet)$$

e poi moltiplicarli per $\frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}}$. Gli autovalori della matrice $(\bullet)$ sono

$$1 \quad \text{e} \quad 1+4u^2+4v^2 \qquad (\bullet\bullet)$$

Quindi gli autovalori della matrice $(-N_*)$ sono

$$K_1 = \frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad e \quad K_2 = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \qquad (\bigstar)$$

<u>Notare</u> che i valori $(\bigstar)$ o equivalentemente $(\bullet\bullet)$ di pag. 13 sono uguali se e solo se $u=v=0$, ritrovando così il risultato sui punti ombelicali delle pagine precedenti.

<u>L'autospazio</u> <u>della matrice</u> $(-N_*)$ relativo all'autovalore K_1 è generato dal vettore (u,v), quindi l'autospazio <u>dell'operatore forma</u> $-N_*$ relativo all'autovalore K_1 è generato da

$$u P_u + v P_v$$

Analogamente, l'autospazio <u>della matrice</u> $(-N_*)$ relativo all'autovalore K_2 è generato dal vettore $(v, -u)$, quindi l'autospazio <u>dell'operatore forma</u> $-N_*$ relativo a K_2 è generato da

$$v P_u - u P_v$$

Calcoliamo le linee di curvatura relative all'autospazio generato da $u P_u + v P_v$.

Una curva $\gamma(t)$ la cui traiettoria giace sul paraboloide è del tipo

$$\gamma(t) = \left(u(t), v(t), u^2(t) + v^2(t) \right) \qquad (\bullet)$$

La condizione affinché $\gamma(t)$ sia una linea di curvatura di $u P_u + v P_v$ è $\gamma'(t) = u(t)\, P_u(u(t), v(t)) + v(t)\, P_v(u(t), v(t))$

Riscrivo l'ultimo passaggio

$$\gamma'(t) = u(t)\, P_u\big(u(t), v(t)\big) + v(t)\, P_v\big(u(t), v(t)\big)$$

che in virtù di (•) di pag. 15 e delle espressioni di P_u e P_v diventa

$$\big(u'(t),\ v'(t),\ 2u(t)u'(t) + 2v(t)v'(t)\big) = u(t)\,\big(1, 0, 2u(t)\big) + v(t)\,\big(0, 1, 2v(t)\big)$$

andando ad uguagliare componente per componente abbiamo

$$(\star)\ \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = v(t) \end{cases}$$

(uguagliare le terze componenti ci dà una relazione superflua).

andando ad integrare

$$u(t) = u_0 e^t, \quad v(t) = v_0 e^t, \quad \text{da cui}$$

$$\gamma(t) = \left(u_0 e^t,\ v_0 e^t,\ u_0^2 e^{2t} + v_0^2 e^{2t}\right)$$

Analogamente le linee di curvatura $\gamma(t) = (u(t), v(t), u^2(t)+v^2(t))$ relative all'altra direzione principale $v P_u - u P_v$ è tale che

$$\left(u'(t), v'(t), 2u(t)u'(t) + 2v(t)v'(t)\right) = v(t)\left(1, 0, 2u(t)\right) - u(t)\left(0, 1, 2v(t)\right) = \left(v(t), -u(t), 0\right)$$

cioè

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -u(t) \end{cases}$$

(uguagliare le terze componenti ci dà una relazione superflua)

andando ad integrare

$$u(t) = v_0 \operatorname{sen}(t) + u_0 \cos(t) \qquad v(t) = v_0 \cos(t) - u_0 \operatorname{sen}(t)$$

da cui

$$\gamma(t) = \left(u_0 \cos(t) + v_0 \operatorname{sen}(t), v_0 \cos(t) - u_0 \operatorname{sen}(t), u_0^2 + v_0^2\right)$$

Ex: Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata con ascissa curvilinea s, con curvatura costante $\kappa \neq 0$ e torsione τ strettamente positiva. Indichiamo con (T, N, B) il riferimento di Frenet di α e consideriamo l'applicazione

$$P : (s, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \alpha(s) + \frac{1}{K} N(s) + v\, B(s)$$

1) Verificare che P è una superficie parametrizzata. Calcolare la mappa di Gauss, 1ª e 2ª forma fondamentale, operatore forma, curvature

2) Determinare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in modo che

$$\gamma : s \longrightarrow P(s, f(s))$$

Sia una linea di curvatura della superficie

DOMANDA 1

$$P_s = \frac{d\alpha(s)}{ds} + \frac{1}{K}\frac{dN(s)}{ds} + v\frac{dB(s)}{ds} = \text{per le formule di Frenet}$$

$$= T(s) + \frac{1}{K}\left(-K\,T(s) - \tau(s)\,B(s)\right) + v\,\tau(s)\,N(s)$$

$$= -\frac{\tau(s)}{K}\,B(s) + v\,\tau(s)\,N(s)$$

$$P_v = B(s)$$

Abbiamo quindi

$$P_s \times P_v = \det \begin{pmatrix} T(s) & N(s) & B(s) \\ 0 & v\,\tau(s) & -\frac{\tau(s)}{K} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = v\,\tau(s)\,T(s) \qquad (\bullet)$$

da cui si ricava che $P_s(s,v) \times P_v(s,v) \neq 0$ $\forall\,(s,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ in quanto $v \in \mathbb{R}^+$ e $\tau(s) > 0$ in quanto stiamo supponendo la torsione strettamente positiva

<u>Mappa di Gauss</u>

In virtù di $(\bullet)$ la mappa di Gauss è

$$N^P(s,v) \doteq \frac{P_s \times P_v}{\| P_s \times P_v \|} = T(s)$$

1ª forma fondamentale

I coefficienti della 1ª forma fondamentale sono

$$\left(g_S\right) = \begin{pmatrix} P_s \cdot P_s & P_s \cdot P_v \\ P_s \cdot P_v & P_v \cdot P_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(v^2 + \frac{1}{K^2}\right) \tau^2(s) & -\frac{\tau(s)}{K} \\ -\frac{\tau(s)}{K} & 1 \end{pmatrix}$$

(Ricordarsi che $(T(s), N(s), B(s))$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ $\forall s$)

2^a forma fondamentale

I coefficienti della 2^a forma fondamentale sono

$$(b_s) = \begin{pmatrix} N^P \cdot P_{ss} & N^P \cdot P_{sv} \\ N^P \cdot P_{sv} & N^P \cdot P_{vv} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} N^P_s \cdot P_s & N^P_s \cdot P_v \\ N^P_s \cdot P_v & N^P_v \cdot P_v \end{pmatrix} \qquad (\bullet)$$

(questo deriva dal fatto che $N^P \cdot P_s = 0$, $N^P \cdot P_v = 0$)

(Notiamo inoltre che $N^P_s \cdot P_v = N^P_v \cdot P_s$ in quanto l'endomorfismo N_* è simmetrico, quindi $N^P_s \cdot P_v = N_*(P_s) \cdot P_v \overset{\text{simmetria}}{=} P_s \cdot N_*(P_v)$
$= P_s \cdot N^P_v$)

Un calcolo diretto basato sul fatto che
$N^P_s = T'(s) = K\,N(s)$ ci dà (sfruttando la matrice destra di $(\bullet)$)

$$(b_s) = \begin{pmatrix} -Kv\,\tau(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Ricordare sempre che $(T(s), N(s), B(s))$ è una base ortonormale)

Operatore forma

La matrice che rappresenta l'operatore forma $-N_*$ è

$$(-N_*) = (g_s^{-1}) \cdot (b_s) =$$

$$= -\frac{1}{\tau^2(s)\, V^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\tau(s)}{K} \\ \frac{\tau(s)}{K} & \left(V^2 + \frac{1}{K^2}\right) \tau^2(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K\, V\, \tau(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{K}{V\tau(s)} & 0 \\ -\frac{1}{V} & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza la curvatura Gaussiana della superficie è nulla mentre la curvatura media è $-\frac{1}{2}\frac{K}{V\tau(s)}$

DOMANDA 2

$\gamma(s)$ è una linea di curvatura per la superficie se e solo se $\gamma'(s)$ è un autovettore dell'operatore forma, cioè $\mathrm{Span}\{\gamma'(s)\}$ deve essere una direzione principale $\forall s$

Abbiamo che

$$\gamma'(s) = P_s + P_v f' \quad \left(\text{più precisamente } = P_s(s, f(s)) + f'(s) P_v(s, f(s))\right)$$

Quindi

$$-N_*(\gamma'(s)) = -N_*(P_s + f' P_v) = -N_*(P_s) + f'(-N_*)(P_v)$$

$$= -N_s^P - f' N_v^P = -K N(s)$$

in quanto $N^P(s,v) = T(s)$ (vedi pag. 20)

$$\Rightarrow \quad N_s^P = T'(s) = K N(s) \quad \text{e} \quad N_v^P = 0$$

Riscrivo quello che ho ottenuto a pag. 24:

$$-N_*(\gamma'(s)) = -K N(s) \qquad (\bullet)$$

Quindi $\gamma'(s)$ è un autovettore di $-N_*$ se e solo se $\exists\, \lambda(s) /$

$$-N_*(\gamma'(s)) \overset{(\bullet)}{=} -K N(s) = \lambda(s)\, \gamma'(s) = \lambda(s)\left(P_s + f'(s)\, P_v \right)$$

più precisamente (vedi pag. 24) $= \lambda(s)\left(P_s(s, f(s)) + f'(s)\, P_v(s, f(s)) \right)$

vedi pag. 19 $\;=\; \lambda(s)\left(-\frac{\tau(s)}{K} B(s) + f(s)\,\tau(s)\, N(s) + f'(s)\, B(s) \right)$

$$\Longrightarrow \quad -K = \lambda(s)\, f(s)\, \tau(s) \qquad \text{(uguagliando le componenti di } N(s))$$

$$-\frac{\tau(s)}{K} + f'(s) = 0 \Rightarrow f(s) = \frac{1}{K}\int \tau(s)\, ds \qquad \text{(uguagliando le componenti di } B(s))$$