Politecnico di Torino

DISAT

Department of Applied Science and Technology

Fisica II

Esercitazione 13

Alessandro Pedico

alessandro.pedico@polito.it

10/11/2022

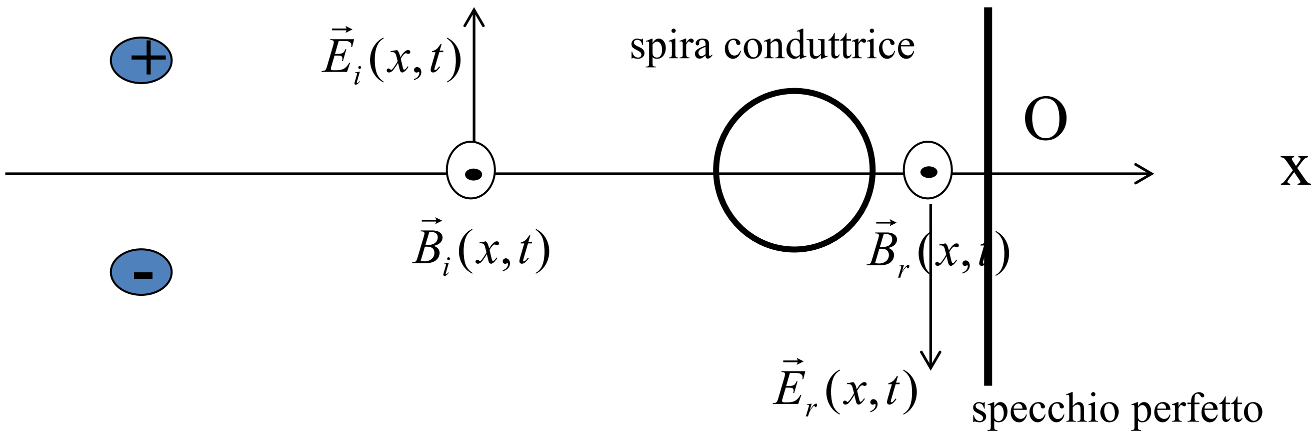
Esperimento di Hertz

1888: H.R. Hertz progetta un esperimento con **lo scopo di verificare l'esistenza delle onde elettromagnetiche** precedentemente teorizzate da Maxwell 20 anni prima e di **misurarne la velocità**. All'epoca, tramite misure astronomiche e calcoli terrestri era già stato possibile stimare la velocità di propagazione della luce visibile ed il suo range di frequenze, tuttavia l'esistenza delle onde elettromagnetiche (e l'appartenenza della luce ad esse) era ancora da dimostrare.

Per fare ciò, Hertz costruì un dispositivo costituito da **due sfere metalliche** collegate ad un trasformatore, la cui funzione era generare una scintilla che trasformi le due sfere in un **generatore di onde elettromagnetiche a frequenza nota** (la frequenza è determinata dal circuito elettrico ad esse collegato). All'atto pratico, questo dispositivo può essere schematizzato come un **dipolo elettrico oscillante**.

Ad una certa distanza dal generatore, Hertz sistemò **una lastra metallica**, che essendo costituita da materiale conduttore, assume la funzione di **specchio totalmente riflettente** per le onde elettromagnetiche. Infine, tra specchio e dipolo, Hertz posizionò **una spira metallica**.

Esperimento di Hertz



Un dipolo oscillante genera una onda e.m. di pulsazione **ω** nota. L'onda così generata si propaga lungo l'asse **x** e si riflette sullo specchio in **O**:

Onda progressiva   Onda regressiva

$$E(x,t) = E(x-ct) = E_{0,i}e^{i(kx-\omega t)} + E_{0,r}e^{-i(kx+\omega t)}$$

$$B(x,t) = B(x-ct) = B_{0,i}e^{i(kx-\omega t)} + B_{0,r}e^{-i(kx+\omega t)}$$

Esperimento di Hertz

Dato che specchio in **O** è un conduttore, sulla sua superficie non può esistere un campo elettrico ad esso parallelo, quindi il campo **E** risultante sullo specchio deve essere nullo.

$$0 = E_i(0,t) + E_r(0,t) = E_{0,i}e^{i(-\omega t)} + E_{0,r}e^{i(-\omega t)}$$

$$0 = E_{0,i}(\cos \omega t - i \sin \omega t) + E_{0,r}(\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

$$0 = E_{0,i} + E_{0,r} \Rightarrow E_{0,r} = -E_{0,i}$$

$$B_{0,r} = B_{0,i}$$

Con questa condizione abbiamo:

$$E(x,t) = E(x - ct) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} - E_0 e^{-i(kx + \omega t)}$$

$$B(x,t) = B(x - ct) = B_0 e^{i(kx - \omega t)} + B_0 e^{-i(kx + \omega t)}$$

Esperimento di Hertz

Ricordando:

$$e^{i(A+B)} = \cos(A+B) + i\sin(A+B)$$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$$

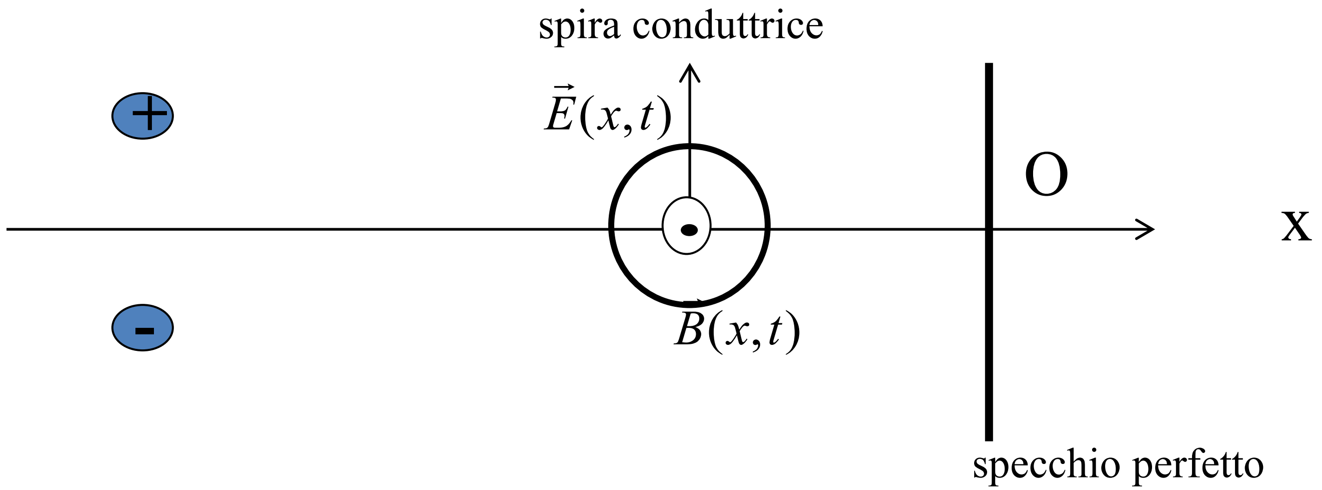
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin B\sin A$$

I campi risultanti diventano:

$$E(x,t) = 2E_0\sin(kx)\cos(\omega t)$$

$$B(x,t) = 2B_0\cos(kx)\cos(\omega t)$$

Esperimento di Hertz



Avendo una spira conduttrice mobile sul piano contenente **E**, la variazione del campo **B** induce una corrente secondo la legge di Faraday-Henry.
Se la spira è piccola il campo **B** è quasi uniforme.

$$B(x,t) = 2B_0 \cos(kx)\cos(\omega t)$$

Il campo **B** presenta punti di annullamento permanenti lungo l'asse **x**. In tali punti, cos(kx) = 0, quindi al variare di t, il campo **B** non varia e di conseguenza non si osserva una corrente indotta.
Questi punti distano tra loro **λ/2**, con **λ** lunghezza d'onda dell'onda e.m.

Esperimento di Hertz

Misurato λ e conoscendo ω si può dedurre la velocità dell'onda generata dal dipolo dalla relazione

$$\frac{\lambda\omega}{2\pi} = velocità = c$$

Con questa esperienza a fine ottocento Hertz in un sol colpo dimostrò **l'esistenza delle onde e.m.** previste dalle equazioni di Maxwell e determinò per la prima volta la loro **velocità di propagazione**.

Vettore di Poynting

Vettore di Poynting $\vec{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu}}\, \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ $[\mathrm{S}] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Il modulo del vettore di Poynting rappresenta l'energia elettromagnetica nell'unità di tempo che attraversa l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione; può quindi essere inteso come potenza irradiata per unità di superficie.

Data l'elevata frequenza che possono raggiungere le onde elettromagnetiche, sperimentalmente viene misurato il **valore medio** del vettore di Poynting:

$$\langle \vec{\mathbf{S}} \rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} \vec{\mathbf{S}}\ \mathbf{dt}$$

Vettore di Poynting – onda piana

Onda piana $$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right) = \operatorname{Im} \vec{E}_0\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)}$$

Vettore di Poynting $$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B} \qquad S = \frac{E^2}{\mu v}$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E^2}{\mu v}\hat{u}_k\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0^2}{\mu v}\left[\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)\right]^2 \hat{u}_k\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{E_0^2}{\mu v}\hat{u}_k \int_0^T \left[\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\frac{E_0^2}{\mu v}\hat{u}_k T\,\frac{1}{2} =$$

$$a = \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi$$

$$y = a - \omega t$$

$$dy = -\omega\,dt$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$-\frac{T}{2\pi}\int_a^{a-2\pi} \sin^2 y\,dy = -\frac{T}{2\pi}\left[\overbrace{\cancel{-\frac{1}{2}\sin(y)\cos(y)\Big|_a^{a-2\pi}}}^{0} + \overbrace{\frac{1}{2}y\Big|_a^{a-2\pi}}^{-\pi}\right]$$

Vettore di Poynting – onda piana

Onda piana $$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right) = \mathrm{Im}\, \vec{E}_0\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)}$$

Vettore di Poynting $$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B} \qquad S = \frac{E^2}{\mu v}$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E^2}{\mu v}\hat{u}_k\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0^2}{\mu\, v}\left[\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)\right]^2 \hat{u}_k\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{E_0^2}{\mu v}\hat{u}_k \int_0^T \left[\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\frac{E_0^2}{\mu v}\hat{u}_k T\, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\, E_0^2\, \vec{v}$$

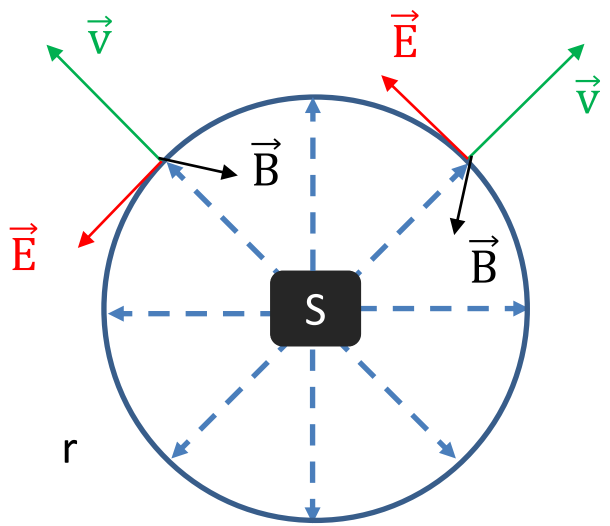
$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$$

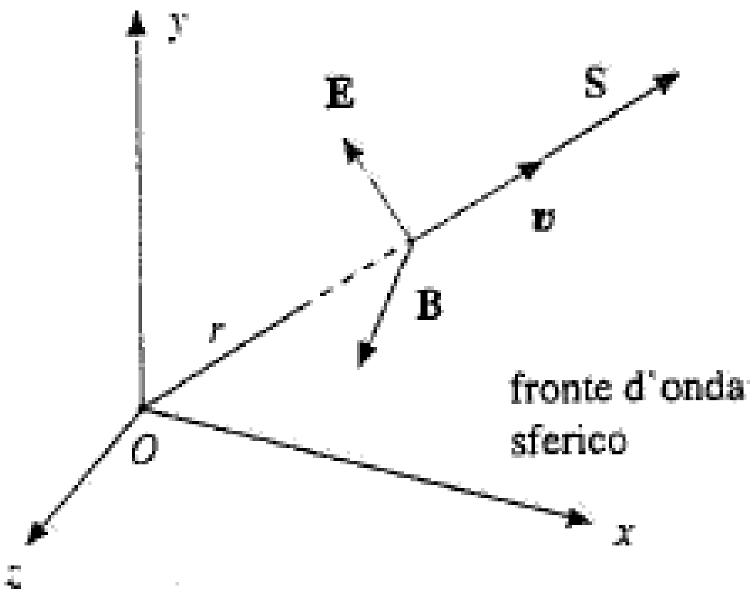
$$\varepsilon v = \frac{1}{\mu v}$$

Intensità onda piana $$\boxed{\langle|\vec{S}|\rangle = \frac{1}{2}\,\varepsilon\, E_0^2\, v = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{v\,\mu}}$$

Vettore di Poynting – onda sferica

Consideriamo una onda i cui fronti d'onda siano delle superficie sferiche: ci aspettiamo che la sua fase non dipenda dalla direzione, ma solo dalla distanza dall'origine, in cui immaginiamo di porre la sorgente della radiazione.

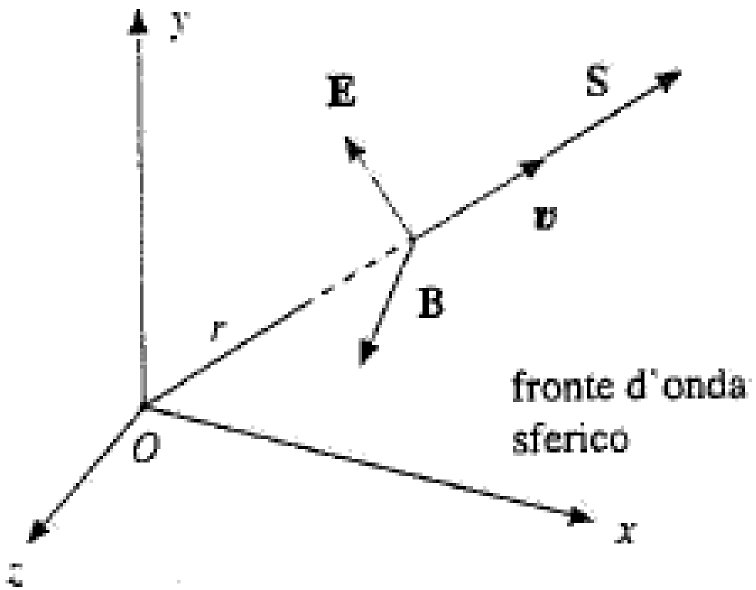




Ipotizziamo quindi una espressione per la radiazione:

$$\vec{\mathbf{E}}\,(\mathbf{r}) = \vec{\mathbf{E}}_0\,\mathbf{sin}(\mathbf{k}\,\mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{t})$$

Vettore di Poynting – onda sferica



$$\vec{\mathbf{E}}\,(\mathbf{r}) = \vec{\mathbf{E}}_0\,\mathbf{sin}(\mathbf{k}\,\mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{t})$$

Possiamo calcolare il vettore di Poynting in funzione della distanza dalla sorgente come:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} = \frac{E_0^2}{\mu\, v}\,[\sin(k\,r - \omega\,t)]^2\,\hat{u}_v$$

Vettore di Poynting – onda sferica

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} = \frac{E_0^2}{\mu\, v} [\sin(k\, r - \omega\, t)]^2 \hat{u}_v$$

A partire dal significato fisico del vettore di Poynting, possiamo calcolare la potenza istantanea irradiata attraverso una superficie sferica con centro coincidente con la sorgente.

$$P(r) = \int_\Sigma \vec{S} \cdot \hat{u}_n\, d\Sigma = \int_\Sigma \frac{E_0^2}{\mu\, v} [\sin(k\, r - \omega\, t)]^2\, d\Sigma =$$

$$d\Sigma = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= r^2 \frac{E_0^2}{\mu\, v} [\sin(k\, r - \omega\, t)]^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{4\, \pi\, r^2}{\mu\, v} E_0^2 [\sin(k\, r - \omega\, t)]^2$$

Vettore di Poynting – onda sferica

Calcoliamo quindi l'energia totale irradiata in un periodo attraverso una superficie sferica di raggio r come:

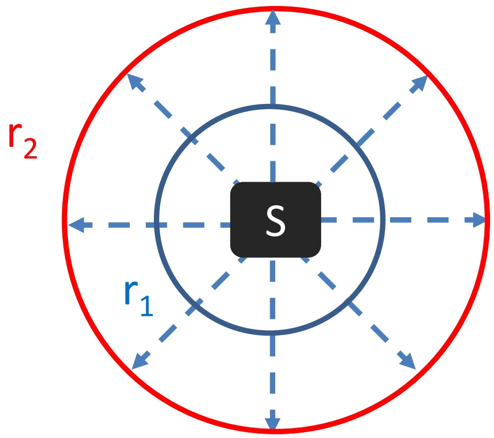
$$E_n(\mathrm{r}) = \int_0^T \frac{4\,\pi\,\mathrm{r}^2}{\mu\,\mathrm{v}} \mathrm{E}_0^2 [\sin(\mathrm{k\,r} - \omega\,\mathrm{t})]^2\,\mathrm{dt} = \frac{4\,\pi\,\mathrm{r}^2}{\mu\,\mathrm{v}} \mathrm{E}_0^2 \int_0^T [\sin(\mathrm{k\,r} - \omega\,\mathrm{t})]^2\,\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{4\,\pi\,\mathrm{r}^2}{\mu\,\mathrm{v}} \mathrm{E}_0^2 \left| \frac{1}{2}\mathrm{t} - \frac{\mathrm{k\,r}}{2\,\omega} + 2\sin(\mathrm{k\,r} - \omega\,\mathrm{t})\cos(\mathrm{k\,r} - \omega\,\mathrm{t}) \right|_0^T = \frac{2\,\pi\,\mathrm{r}^2}{\mu\,\mathrm{v}} \mathrm{E}_0^2\,\mathrm{T}$$

Problema: l'energia irradiata dipende dal raggio della superficie sferica scelta, anche se la radiazione proviene sempre dalla **stessa sorgente**.

$$E_n(\mathrm{r}_1) = \frac{2\,\pi\,\mathrm{r}_1^2}{\mu\,\mathrm{v}} \mathrm{E}_0^2\,\mathrm{T}$$

$$E_n(\mathrm{r}_2) = \frac{2\,\pi\,\mathrm{r}_2^2}{\mu\,\mathrm{v}} \mathrm{E}_0^2\,\mathrm{T}$$



Vettore di Poynting – onda sferica

L'unico modo per rendere l'energia irradiata in un periodo indipendente dalla distanza dalla sorgente è quello di ipotizzare una **dipendenza della ampiezza della radiazione dalla distanza**:

$$\vec{E}_0(r) = \frac{\vec{A}_0}{r} \quad \Longrightarrow \quad E_n = \frac{2\,\pi\, r^2}{\mu\, v}\,\frac{A_0^2}{r^2}\, T = \frac{2\,\pi}{\mu\, v}\, A_0^2\, T$$

onda sferica $$\vec{\mathbf{E}}\,(\mathbf{r}) = \frac{\vec{\mathbf{A}}_0}{\mathbf{r}}\sin(\mathbf{k\,r} - \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{t})$$

Esercizio 3

Il campo elettrico del segnale raccolto da un ricevitore radio ha una ampiezza massima $\mathbf{E_0 = 0.1\ V/m}$; approssimando l'onda ricevuta con una onda piana, calcoliamo:

1. l'intensità media dell'onda
2. la potenza della stazione se questa irradia isotropicamente ed è posta a distanza **d = 500 m** dal ricevitore.

PUNTO 1

Per definizione, l'intensità media dell'onda è data dal valore medio del modulo del vettore di Poynting.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\,\vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

$$B = \frac{E}{v}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{S}| = \frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{\mu} = \frac{E\,B}{\mu} = \frac{E^2}{v\,\mu}$$

Esercizio 3

Rivelatore posto nell'origine

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \cancel{\vec{k} \cdot \vec{r}}) \Longrightarrow |\vec{S}| = \frac{{E_0}^2}{v\mu} [\sin \omega t]^2$$

Facciamo la media temporale del modulo del vettore di Poynting:

$$\langle|\vec{S}|\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{v\,\mu} E_0^2 [\sin \omega t]^2 \, dt = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{v\,\mu}$$

Nel caso specifico, abbiamo come mezzo l'aria, quindi in prima approssimazione:

$$v \approx c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$
$$\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$I = \langle|\vec{S}|\rangle = 1.33 \cdot 10^{-5} \frac{W}{m^2}$$

Esercizio 3

PUNTO 2

Sappiamo che la stazione irradia **isotropicamente**.

Calcoliamo quindi la potenza emessa come flusso del campo vettoriale di Poynting su una superficie sferica di raggio r = 500 m.

$$\langle \mathrm{P} \rangle = \int_{\Sigma} \langle \vec{\mathrm{S}} \rangle \cdot \, \hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{n}} \; \mathrm{d}\Sigma = \int_{\Sigma} \langle |\vec{\mathrm{S}}| \rangle \, \mathrm{d}\Sigma = \langle |\vec{\mathrm{S}}| \rangle \int_{\Sigma} \mathrm{d}\Sigma \; = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{E}_0^2}{\mathrm{v}\, \mu} 4\pi \mathrm{r}^2 = 41.7 \ \mathrm{W}$$