(...)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} V(t) = \left(\sum_{i=1}^{I} y_i \delta_i - 1 \right)(N - \bar{N}) + \sum_{i=1}^{I} \left[\frac{1}{\delta_i}(\sigma_i - \delta_i) - y_i N \right](\delta_i - \bar{\delta}_i)$$

Si noti che vale la relazione

$$\sum_{i=1}^{I} y_i \bar{\delta}_i = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \sum_{i=1}^{I} y_i \bar{\delta}_i \, ;$$

quindi

$$\frac{d}{dt} V(t) = \sum_{i=1}^{I} y_i (\delta_i - \bar{\delta}_i)(\cancel{N} - \bar{N}) + \sum_{i=1}^{I} \left[\frac{1}{\delta_i}(\sigma_i - \delta_i) - \cancel{y_i N} \right](\delta_i - \bar{\delta}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{I} y_i (\delta_i - \bar{\delta}_i)(-\bar{N}) + \sum_{i=1}^{I} \left[\frac{1}{\delta_i}(\sigma_i - \delta_i) \right](\delta_i - \bar{\delta}_i)$$

Si noti inoltre che

$$\bar{\delta}_i = \frac{\sigma_i}{1 + y_i \bar{N}} \quad \Rightarrow \quad -y_i \bar{N} = 1 - \frac{\sigma_i}{\bar{\delta}_i} \, ;$$

quindi

$$\frac{d}{dt} V(t) = \sum_{i=1}^{I} (\cancel{\delta_i} - \bar{\delta}_i)\left(1 - \frac{\sigma_i}{\bar{\delta}_i}\right) + \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{\delta_i}(\sigma_i - \cancel{\delta_i})(\delta_i - \bar{\delta}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \sigma_i (\delta_i - \bar{\delta}_i)\left(\frac{1}{\delta_i} - \frac{1}{\bar{\delta}_i}\right) =$$

$$= - \sum_{i=1}^{I} \frac{\sigma_i}{\bar{\delta}_i \delta_i} (\delta_i - \bar{\delta}_i)^2$$

Dando per assunto che $S_i(t) > 0$ per $i = 1, \dots, I$ per ogni $t \geq 0$, si ha che, per ogni traiettoria uscente da $(N_0, S_{10}, \dots, S_{I0}) \in Q \setminus \{\bar{N}, \bar{S}_1, \dots, \bar{S}_I\}$,

$$\frac{d}{dt} V\big(N(t), S_1(t), \dots S_I(t)\big) < 0 .$$

Quindi, (iv) è verificata $\boxtimes$

Di qui è sufficiente usare il secondo teorema di Lyapunov per dimostrare che

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \bar{N}, \quad \lim_{t\to\infty} S_i(t) = \bar{S}_i, \quad i = 1, \dots, I$$

per ogni $N_0 > 0$ e $S_{0i} > 0$, $i = 1, \dots, I$.

3. La dinamica di un sistema preda-predatore è descritta dalle seguenti equazioni di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) = \alpha\, u(t) - \beta\, u(t) v(t), \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = \gamma\, u(t) v(t) - \eta v(t), \end{cases} \qquad t \geq 0.$$

La funzione $u(t) \geq 0$ rappresenta il numero di prede presenti all'istante di tempo $t \geq 0$, mentre la funzione $v(t) \geq 0$ rappresenta il numero di predatori. Il parametro $\alpha > 0$ modella il tasso pro capite di riproduzione delle prede. Inoltre, il parametro $\beta > 0$ modella il tasso a cui l'interazione tra una preda e un predatore porta all'uccisione della preda, mentre il parametro $\gamma > 0$ modella il tasso a cui l'interazione tra un predatore e una preda porta alla proliferazione del predatore a seguito dell'uccisione della preda. Infine, il parametro $\eta > 0$ modella il tasso pro capite di morte dei predatori.

(a) Si trovino i punti di equilibrio fisicamente rilevanti di tale sistema di equazioni differenziali.

Cerco $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2_+$ tali che:

$$\begin{cases} \alpha \bar{u} - \beta \bar{u}\bar{v} = 0 \\ \gamma \bar{u}\bar{v} - \eta \bar{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}(\alpha - \beta \bar{v}) = 0 \\ \bar{v}(\gamma \bar{u} - \eta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\bar{u}_1, \bar{v}_1) = (0,0), \quad (\bar{u}_2, \bar{v}_2) = \left(\eta/\gamma, \alpha/\beta\right).$$

(c) Si studi la stabilità in prima approssimazione dei punti di equilibrio trovati al punto (a).

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) = \alpha\, u(t) - \beta\, u(t) v(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = \gamma\, u(t) v(t) - \eta v(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(t) = f(u(t), v(t)) \\ \dfrac{d}{dt} v(t) = g(u(t), v(t)) \end{cases}$$

con

$$f(u,v) := \alpha u - \beta u v, \qquad g(u,v) := \gamma u v - \eta v.$$

Matrice Jacobiana:

$$\underline{\underline{J}}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}.$$

Studiamo gli autovalori di $\underline{\underline{J}}(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ e $\underline{\underline{J}}(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$ per caratterizzare la natura dei pti di equilibrio.

Si ha:

$\frac{\partial}{\partial u} f(u,v) = \alpha - \beta v$, $\quad \frac{\partial}{\partial v} f(u,v) = -\beta u$

$\frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = \gamma v$, $\quad \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = \gamma u - \eta$

da cui:

i)
$$\underline{\underline{J}}(\overline{u}_1, \overline{v}_1) = \underline{\underline{J}}(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\eta \end{pmatrix}.$$

Dunque, gli autovalori di $\underline{\underline{J}}(\overline{u}_1, \overline{v}_1)$ saranno

$$\lambda^+ = \alpha \in \mathbb{R}^*_+ \quad \wedge \quad \lambda^- = -\eta \in \mathbb{R}^*_-$$

e, di conseguenza, il pto di equilibrio $(\overline{u}_1, \overline{v}_1)$ sarà, in prima approssimazione, instabile;

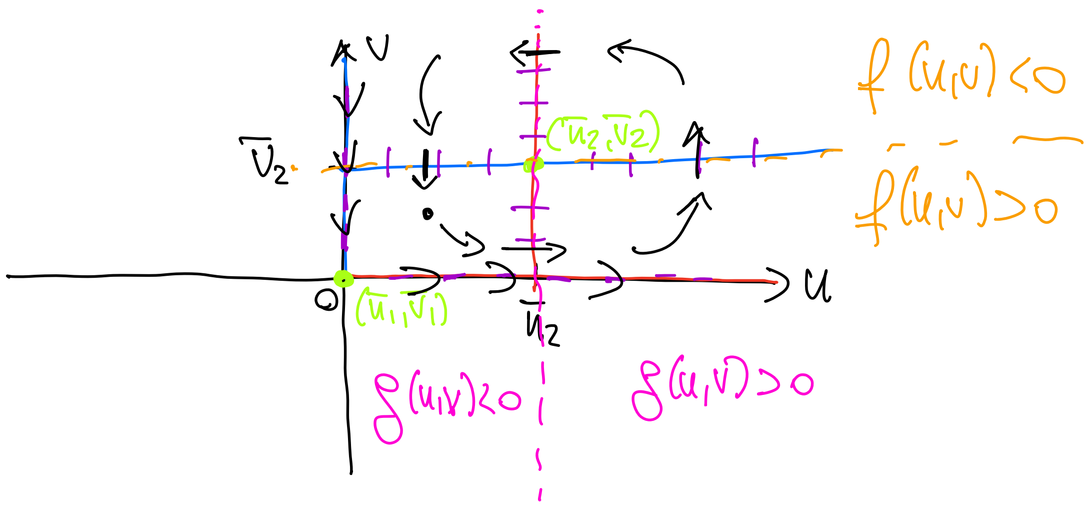
ii) $$\underline{\underline{J}}(\overline{u}_2, \overline{v}_2) = \underline{\underline{J}}\left(\eta/\gamma, \alpha/\beta\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\eta/\gamma \\ \gamma\alpha/\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, gli autovalori di $\underline{\underline{J}}(\overline{u}_2, \overline{v}_2)$ saranno

$$\lambda^{\pm} = \pm i\sqrt{\alpha\eta}.$$

Essendo $\lambda^{\pm}$ puramente immaginari, il Teorema di stabilità in prima approssimazione non ci permette di giungere a una conclusione riguardo la stabilità/instabilità del pto di equilibrio $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$.

(b) Utilizzando il ritratto di fase di tale sistema di equazioni differenziali, si studi in modo euristico la stabilità dei punti di equilibrio trovati al punto (a).



Isocline nulle a tangente verticale (luogo del piano dove le traiettorie delle soluzioni saranno parallele all'asse v)

$$\mathcal{L}_{f=0} = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2_+ \; : \; f(u,v) = 0 \}$$

Isocline nulle a tangente orizzontale (luogo del piano dove le traiettorie delle soluzioni saranno parallele all'asse u)

$$\mathcal{L}_{g=0} = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2_+ \; : \; g(u,v) = 0 \}$$

Si noti che

$$\mathcal{L}_{f=0} \cap \mathcal{L}_{g=0} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2_+ : f(u,v) = 0 \wedge g(u,v) = 0\}$$

$$= \text{punti di equilibrio.}$$

Ricordando che

$$f(u,v) := u(\alpha - \beta v) = u\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - v\right) = u\beta(\overline{v}_2 - v)$$

$$g(u,v) := v(\gamma u - \eta) = v\gamma(u - \eta/\gamma) = v\gamma(u - \overline{u}_2),$$

troviamo le isocline nulle a tangente verticale

$$u \equiv 0, \quad v \equiv \overline{v}_2$$

e le isocline nulle a tangente orizzontale

$$v \equiv 0, \quad u = \overline{u}_2 .$$

Inoltre, si ha:

$$f(u,v) \begin{cases} > 0 & \text{se } v < \overline{v}_2 \\ < 0 & \text{se } v > \overline{v}_2 \end{cases} \quad \forall u \in \mathbb{R}^*_+$$

$$g(u,v) \begin{cases} > 0 & \text{se } u > \overline{u}_2 \\ < 0 & \text{se } u < \overline{u}_2 \end{cases} \quad \forall v \in \mathbb{R}^*_+$$

Il comportamento qualitativo delle traiettorie è evidenziato dalle frecce in nero nel grafico di cui sopra. Ci aspettiamo quindi che:

i) $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ sia un pto di equilibrio instabile;

ii) $\begin{cases} u(t) \text{ oscilli in modo periodico intorno a } \bar{u}_2; \\ v(t) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \bar{v}_2. \end{cases}$