Ricapitolando la lezione precedente

Abbiamo la seguente identificazione

$$v \in \mathbb{R}^n \longleftrightarrow T_q\Omega \quad \left(= T_q\mathbb{R}^n\ ,\ \Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^n\right)$$

Spazio vettoriale "Standard"

Insieme di tutti gli operatori di derivazione direzionale in $q \in \Omega$

La corrispondenza è la seguente

$$v \in \mathbb{R}^n \longrightarrow D_v \in T_q\Omega$$

dove $D_v : f \in C^1(\Omega) \rightarrow D_v(f) \in \mathbb{R}$ è l'operatore di derivazione direzionale che ad f associa la sua derivata direzionale lungo v in q : $D_v(f) := \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(q+tv) - f(q)}{t}$

Se scelgo un sistema di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ di Ω, allora la corrispondenza di pagina precedente è, ricordando la convenzione di Einstein,

$$\underbrace{V = a_i e_i} \longrightarrow \underbrace{a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q} \in T_q\Omega \qquad (\bullet)$$

Vettore di componenti $(a_1, \dots, a_n)$ nella base $(e_1, \dots, e_n)$ dove $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, 1, \dots, 0)$

Operatore di derivazione direzionale nel punto $q \in \Omega$ di componenti $(a_1, \dots, a_n)$ nella base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_q\right)$ di $T_q\Omega$

Ricordiamo che $a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q$ è l'operatore di derivazione direzionale che ad ogni $f \in C^1(\Omega)$ associa $a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_q$.

$$a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q : f \in C^1(\Omega) \longrightarrow a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_q \in \mathbb{R} \qquad (\star)$$

Viceversa, ogni operatore di derivazione direzionale X_q in un punto $q \in \Omega$ può essere visto come un' applicazione : $C^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, vedi $(\star)$.

La corrispondenza inversa di $(\bullet)$ di pag. 1 è

$$\begin{aligned} T_q\Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X_q &\longrightarrow \big(X_q(x_1), X_q(x_2), \dots, X_q(x_n)\big) \end{aligned}$$

In altre parole,

$$\left(X_q(x_1), \ldots, X_q(x_n) \right)$$

sono le componenti dell'operatore di derivazione X_q nella base

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_q \right)$$

di $T_q\Omega$:

$$X_q = X_q(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q + \ldots + X_q(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_q$$

$$\boxed{T_q\Omega \overset{\text{def.}}{:=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Insieme degli operatori di derivazione} \\ \text{direzionale in } q \in \Omega \end{array} \right\}}$$

Tutto quello che abbiamo detto a pag. 1-3 lo abbiamo fatto in un punto $q \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ma ragionamenti simili valgono anche per i campi vettoriali.

Più precisamente (senza introdurre nuove notazioni):

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dove a_i sono funzioni su Ω, cioè $a_i = a_i(x_1, \ldots, x_n)$

$$\xrightarrow{\text{corrisponde a}} a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} = a_i \partial_{x_i}$$

dove $a_i \partial_{x_i}$ è un operatore di derivazione direzionale che ad ogni funzione f su Ω associa la funzione $a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$.
su Ω

Per chiarezza, la funzione su Ω $a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ è definita come segue:

$$a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} : q \in \Omega \longrightarrow a_i(q) \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_q \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Quindi se le coordinate del punto q (nel sistema di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$) sono $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, alla $(*)$ è la corrispondenza

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \Omega \longrightarrow a_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \in \mathbb{R}$$

Sempre dalla lezione precedente ricordiamo che se

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad f \in C^1(\Omega)$$

allora

$$f_{\star q_0} : T_{q_0}\Omega = T_{q_0}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(q_0)}\mathbb{R}^m \qquad (\star)$$

$$X_{q_0} \longrightarrow \frac{d}{dt}\Big|_0 (f \circ \gamma)'$$

dove $\gamma : I \to \Omega$ è una curva tale che $\gamma(0) = q_0$, $\gamma'(0) = X_{q_0}$

Abbiamo visto che fissato un sistema di riferimento $(x_1, \ldots, x_n)$ di Ω e uno $(y_1, \ldots, y_m)$ di un aperto di $\mathbb{R}^m$ contenente $f(\Omega)$, nelle basi

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_q \right) \quad e \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{f(q)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_{f(q)} \right)$$

l'applicazione $f_{\star q_0}$ è rappresentata dalla Jacobiana di f calcolata in q_0

Questo significa che

$$f_{*q_0}\left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{q_0}\right) = A_{ki}(q_0)\, a_i \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{f(q_0)}$$

dove $A_{ki} = \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}$,

cioè $A_{ki}(q_0)\, a_i \left(= \sum_{i=1}^{n} A_{ki}(q_0)\, a_i\right)$ → Ricordare sempre la convenzione di Einstein

è la componente K-esima di $f_{*q_0}\left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{q_0}\right)$
nella base $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{f(q_0)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_{f(q_0)}\right)$

Analogamente possiamo definire f_* sui campi vettoriali
(Vedi sempre la lezione precedente)

Ricordiamo che se

$$\det\left(\mathrm{Jac}(f)_{q_0}\right) \neq 0 \qquad \text{dove } f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

allora l' applicazione

$$f_{*q_0} : T_{q_0}\Omega \longrightarrow T_{f(q_0)}\mathbb{R}^n$$

è <u>biunivoca</u>, cioè è un <u>isomorfismo</u>

Ex: Sia (u,v) il sistema di coordinate cartesiano standard di $\mathbb{R}^2$. Sia $X_{(u_0,v_0)}$ il vettore $(1,1)$ nel generico punto $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2$.
Esprimere $X_{(u_0,v_0)}$ nelle coordinate polari (r,φ).

Sappiamo che la trasformazione f che collega i due sistemi di coordinate è la seguente

$$f : (u,v) \longrightarrow \left(\sqrt{u^2+v^2},\ \arctan\left(\frac{v}{u}\right)\right)$$

Quindi l'esercizio ci chiede di calcolare

$$f_{*q_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{q_0} + \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{q_0}\right) \qquad \text{con } q_0 = (u_0, v_0)$$

La matrice Jacobiana di f è

$$\mathrm{Jac}(f)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\[2ex] -\dfrac{v}{u^2+v^2} & \dfrac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathrm{Jac}(f)_{(u_0,v_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u_0+v_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}} \\[2ex] \dfrac{u_0-v_0}{u_0^2+v_0^2} \end{pmatrix} \leftarrow$$

Sono le componenti di $f_{*q_0}\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0} + \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{q_0}\right)$ nella base $\left(\partial_r\Big|_{f(q_0)}, \partial_\varphi\Big|_{f(q_0)}\right)$

cioè

$$f_{*q_0}\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0} + \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{q_0}\right) = \frac{u_0+v_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}} \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\underbrace{\left(\sqrt{u_0^2+v_0^2},\, \arctan\left(\frac{v_0}{u_0}\right)\right)}_{= f(q_0)}} + \frac{u_0-v_0}{u_0^2+v_0} \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_{f(q_0)}$$

Riscrivo

$$f_{A\,(u_0,v_0)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{(u_0,v_0)}+\frac{\partial}{\partial v}\bigg|_{(u_0,v_0)}\right)=$$

$$\frac{u_0+v_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}}\,\frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{\left(\sqrt{u_0^2+v_0^2},\ \arctan\left(\frac{v_0}{u_0}\right)\right)}+\frac{u_0-v_0}{u_0^2+v_0^2}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\bigg|_{\left(\sqrt{u_0^2+v_0^2},\ \arctan\left(\frac{v_0}{u_0}\right)\right)}$$

Se voglio esprimere tutto in coordinate (r,φ) ho che $u_0=r_0\cos(\varphi_0)$ e $v_0=r_0\,\mathrm{sen}(\varphi_0)$, quindi andando a sostituire in ottengo

$$\left(\cos(\varphi_0)+\mathrm{sen}(\varphi_0)\right)\frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{(r_0,\varphi_0)}+\frac{\cos(\varphi_0)-\mathrm{sen}(\varphi_0)}{r_0}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\bigg|_{(r_0,\varphi_0)}\qquad(\star)$$

<u>Oss</u>: Andando a rileggere il testo dell'esempio di pag. 8 realizziamo che

$$X : q_0 = (u_0, v_0) \longrightarrow X_{q_0} = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0} + \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{q_0} \simeq (1,1)$$

è il campo vettoriale costante a $(1,1)$.

Quindi (★) di pagina (★) sarebbe l'espressione in coordinate polari (r, φ) del campo costante a $(1,1)$ nelle coordinate (u,v) $\left(\text{cioè di } \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)$

OSSERVAZIONE SUL CAMBIO DI COORDINATE

In questa e nelle lezione precedente abbiamo usato spesso la parola "coordinate" e che

$$f : \underset{\in \Omega}{(u, v)} \longrightarrow \left(\sqrt{u^2+v^2},\ \arctan\left(\frac{v}{u}\right)\right) = (r, \varphi) \qquad (*)$$

è un cambio di coordinate.

Se andate a vedere Lezione 11 pag. 14, quando abbiamo parlato di superfici parametrizzate equivalenti, abbiamo detto che un cambio di parametrizzazione (che è la stessa cosa di un cambio di coordinate) è un'applicazione

$$f : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega} = f(\Omega)$$ (nella Lezione 11 pag. 14 l'avevamo chiamata α)

di classe $C^K(\mathring{\Omega})$, invertibile, tale che

$$\mathrm{Jac}(f)_{(u,v)} \neq 0$$

In effetti la ($\star$) soddisfa questi requisiti (a patto di scegliere opportunamente il dominio Ω)

In particolare

$$\mathrm{Jac}(f)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \\ -\frac{v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

ha determinante $= \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$, che è sempre $\neq 0$.

PRECISAZIONE DOVEROSA SULLE COORDINATE POLARI

Fino ad ora abbiamo considerato la trasformazione

$$(r, \varphi) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \big(r\cos(\varphi), r\,\mathrm{sen}(\varphi)\big) = (u, v)$$

$$\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0) \;/\; t \geq 0\}$$

e abbiamo detto che "l'inversa" è

$$(u, v) \longrightarrow \left(\sqrt{u^2+v^2},\ \arctan\left(\frac{v}{u}\right)\right) = (r, \varphi) \quad (\star)$$

Dobbiamo però stare attenti ai domini.

L'applicazione $(\star)$ è l'inversa della prima

su $u > 0$ e $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Al momento questo aspetto, seppur da prendere in considerazione, ci interessa marginalmente in quanto lo scopo di queste lezioni è di capire come si trasformano i campi vettoriali sotto l'azione di f_* con $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ opportunamente data.

Nel momento in cui sarà importante considerare i domini lo diremo.

<u>PROP</u>: (Senza dimostrazione)

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aperto, una funzione $\in C^K(\Omega)$ tale che $\det\left(Jac(f)_q\right) \neq 0$ con $q \in \Omega$.

Allora esiste un aperto $\mathcal{U} \subseteq \Omega$ contenente q tale che $f|_{\mathcal{U}}$ è biunivoca su $f(\mathcal{U})$ con $(f|_{\mathcal{U}})^{-1}$ di classe C^K

<u>Ex</u> : Sia (u,v) il sistema di coordinate standard cartesiane di $\mathbb{R}^2$. Trovare l'espressione in coordinate polari (r,φ) del campo vettoriale

$$X = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}$$

Come nell'esercizio di pag. 8, dobbiamo considerare la trasformazione

$$f : (u,v) \longrightarrow \left(\sqrt{u^2+v^2},\ \arctan\left(\frac{v}{u}\right)\right) = (r,\varphi),$$

calcolare $f_*(X)$ ed esprimere il risultato nelle coordinate (r,φ)

Sappiamo che

$$\mathrm{Jac}(f)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ -\frac{v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathrm{Jac}(f)_{(u,v)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{u^2+v^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Componenti di X nelle base $\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$

Componenti di $f_*(X)$ nelle base $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$

Quindi

$$f_*(X) = \sqrt{u^2+v^2}\, \partial_r \overset{\text{in coordinate } (r,\varphi)}{=\!=\!=} r\, \partial_r = f_*(X) \circ f^{-1}$$