Analisi Funzionale

Prodotti scalari e spazi di Hilbert

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino
a.a. 2023/2024

Prodotti scalari su spazi vettoriali reali

Def. Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un *prodotto scalare* su H è una mappa $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(a) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ per ogni $x, y, z \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (lineare nella prima variabile);

(b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ per ogni $x, y \in H$ (simmetrica);

(c) $\langle x, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in H$, e $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$ (definita positiva).

Oss. Dalle proprietà (a) e (b) segue anche:

(a') $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$ per ogni $x, y, z \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (lineare nella seconda variabile).

Una mappa che soddisfi (a) e (a') si dice *bilineare*.
Per questo motivo, diciamo che un prodotto scalare su H è una *forma bilineare simmetrica definita positiva* su H.

Prodotti scalari su spazi vettoriali complessi

Def. Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Un *prodotto scalare* su H è una mappa $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ con le seguenti proprietà:

(a) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ per ogni $x, y, z \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (lineare nella prima variabile);

(b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ per ogni $x, y \in H$ (hermitiana);

(c) $\langle x, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in H$, e $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$ (definita positiva).

Oss. Dalle proprietà (a) e (b) segue anche:

(a') $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$ per ogni $x, y, z \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (<u>anti</u>lineare nella seconda variabile).

Una mappa che soddisfi (a) e (a') si dice *sesquilineare*.
Per questo motivo, diciamo che un prodotto scalare su H è una *forma sesquilineare hermitiana definita positiva* su H.

Prodotti scalari e spazi pre-hilbertiani

Oss. Sia $\mathbb{F}$ il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ oppure dei numeri complessi $\mathbb{C}$.
Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$.
Allora un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su H soddisfa le seguenti proprietà:

(a) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ per ogni $x, y, z \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

(a') $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$ per ogni $x, y, z \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

(b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ per ogni $x, y \in H$;

(c) $\langle x, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in H$, e $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

[Nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ si ha $\alpha = \overline{\alpha}$ per ogni scalare α,
dunque la "antilinearità" è lo stesso della "linearità".]

Def. Uno spazio vettoriale H su $\mathbb{F}$ dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si dice *spazio pre-hilbertiano* (o *spazio con prodotto scalare*).

Esempi di spazi pre-hilbertiani

- Il *prodotto scalare euclideo* (o *standard*) su $\mathbb{F}^n$ è dato da

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} \qquad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n.$$

- Sullo spazio ℓ^2 un prodotto scalare è dato da

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k} \qquad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \ell^2. \tag{$\dagger$}$$

  [La convergenza della serie in ($\dagger$) segue dalla disug. di Hölder.]

- Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sullo spazio $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ un prodotto scalare è dato da

$$\langle f, g \rangle = \int_M f \, \overline{g} \, d\mu \qquad \forall f, g \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu).$$

- Sia $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio pre-hilbertiano e V un sottospazio vettoriale di H. Allora V è uno spazio pre-hilbertiano, il cui prodotto scalare è la restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $V \times V$ (detta *prodotto scalare indotto* da $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ su V), che per brevità denotiamo ancora con $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Norma indotta da un prodotto scalare

Def. Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio pre-hilbertiano. La funzione $\|\cdot\| : H \to [0,\infty)$ definita da

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \forall x \in H$$

si dice *norma indotta dal prodotto scalare*.

Oss. Siccome il prodotto scalare è definito positivo, si ha $\langle x, x\rangle \geq 0$, quindi $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ è ben definita per ogni $x \in H$.

Teor. (disuguaglianza di Cauchy–Schwarz) Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio pre-hilbertiano. Allora

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in H.$$

Prop. Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio pre-hilbertiano. La norma $\|\cdot\|$ indotta dal prodotto scalare è una norma su H.

Oss. Dunque ogni spazio pre-hilbertiano è anche uno spazio normato (e in particolare uno spazio metrico).

Def. Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio pre-hilbertiano completo.

Esempi e non-esempi di spazi di Hilbert

- Gli spazi pre-hilbertiani
$$(\mathbb{F}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle), \qquad (\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle), \qquad (L^2(M, \mathcal{M}, \mu), \langle\cdot,\cdot\rangle)$$
precedentemente discussi sono tutti spazi di Hilbert.

- Lo spazio c_{00} con il prodotto scalare
$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$
indotto da $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ non è uno spazio di Hilbert.

- Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
Lo spazio $C[a, b]$ con il prodotto scalare integrale
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$
indotto da $(L^2(a, b), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ non è uno spazio di Hilbert.

Proprietà del prodotto scalare e della norma indotta

Prop. Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio pre-hilbertiano su $\mathbb{F}$.

(i) Per ogni $x, y \in H$,

$$4\langle x, y\rangle = \begin{cases} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 & \text{se } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 & \text{se } \mathbb{F} = \mathbb{C} \end{cases}$$

(identità di polarizzazione).

(ii) Per ogni $x, y \in H$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(identità del parallelogramma).

Coroll. Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ è uno spazio pre-hilbertiano. Allora la mappa $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{F}$ è continua.

Oss. La validità dell'identità del parallelogramma è condizione necessaria (e sufficiente) affinché la norma $\|\cdot\|$ sia indotta da un prodotto scalare.
In particolare, <u>non</u> sono indotte da un prodotto scalare:

- la norma $\|\cdot\|_p$ su ℓ^p per $p \neq 2$;
- la norma $\|\cdot\|_\infty$ su $C[a, b]$.