K- FORME DIFFERENZIALI SU (un aperto Ω di) $\mathbb{R}^n$

Una K- forma differenziale su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ è un' applicazione multilineare

$$\theta : \underbrace{T\Omega \times \dots \times T\Omega}_{K\text{- volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

antisimmetrica.

Quindi, nel nostro linguaggio, possiamo dire che una K- forma differenziale è un campo tensoriale di tipo $(0,K)$ antisimmetrico.

Ricordiamo che usiamo la parola campo tensoriale in quanto possiamo interpretare θ come segue:

$$p \in \Omega \longrightarrow \theta_p : T_p\Omega \times \dots \times T_p\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Antisimmetria significa che

$$\theta(\ldots, X, Y, \ldots) = -\theta(\ldots, Y, X, \ldots).$$

Analogamente a quanto visto per le metriche (campi tensoriali di tipo $(0,2)$), una K-forma differenziale agisce su K campi vettoriali $X_1, \ldots, X_K$ nel seguente modo:

$\theta(X_1, \ldots, X_K)$ è una funzione da Ω in $\mathbb{R}$, la seguente

$$p \in \Omega \longrightarrow \theta_p(X_{1p}, \ldots, X_{Kp}) \in \mathbb{R}$$

È facile vedere che le K-forme differenziali in un punto p di Ω formano uno spazio vettoriale.

Esempio: Abbiamo visto che se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ allora $df : T\Omega \to \mathbb{R}$ è una 1-forma differenziale.

$$df : p \longrightarrow (df)_p : T_p\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longrightarrow v(f) = (\nabla f)_p \cdot v = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p \cdot v_i$$

dove $(x_1, \dots, x_n)$ sono coordinate su Ω e $(v_1, \dots, v_n)$ sono le componenti del vettore v nella base $\left(\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p \right)$.

REMARK: Convenzionalmente le 0-forme differenziali su Ω sono le funzioni da Ω a $\mathbb{R}$

PRODOTTO WEDGE $\wedge$

Siano ρ e θ due 1-forme su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Poniamo per definizione

$$\rho \wedge \theta := \rho \otimes \theta - \theta \otimes \rho \qquad (\bullet)$$

È facile vedere che $\rho \wedge \theta$ è una 2-forma differenziale.

Infatti è bilineare e antisimmetrica.

La 2-forma $(\bullet)$ agisce su una coppia di campi vettoriali su Ω X e Y come segue:

$$(\rho \wedge \theta)(X, Y) = \rho(X) \cdot \theta(Y) - \theta(X) \cdot \rho(Y)$$

Per definizione, se f è una 0 forma differenziale (quindi una funzione da Ω a $\mathbb{R}$) e θ una K-forma, allora

$$f \wedge \theta := f \cdot \theta$$

In realtà il prodotto $\wedge$ può essere generalizzato a qualsiasi tipo di forme differenziali.

Più precisamente c'è una formula generale per definire

$$\rho \wedge \theta \quad \text{con } \rho \ K\text{-forma differenziale e} \quad \theta \ h\text{-forme differenziale}$$

In questo corso non insisteremo su quest'aspetto.

In ogni modo possiamo definire (con un procedimento in qualche modo iterativo) il prodotto $\wedge$ tra 3 1-forme differenziali.

Siano θ_1, θ_2 e θ_3 3 1-forme differenziali. Allora

$$\begin{aligned} \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 := {} & \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_3 - \theta_1 \otimes \theta_3 \otimes \theta_2 \\ & + \theta_2 \otimes \theta_3 \otimes \theta_1 - \theta_2 \otimes \theta_1 \otimes \theta_3 \\ & + \theta_3 \otimes \theta_1 \otimes \theta_2 - \theta_3 \otimes \theta_2 \otimes \theta_1 \end{aligned}$$

PROP: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $(x_1, \dots, x_n)$ un sistema di coordinate su Ω. Allora

$$\{dx_i \wedge dx_j\}_{i<j} = \Big(dx_1 \wedge dx_2,\ dx_1 \wedge dx_3,\ \dots\ dx_1 \wedge dx_n,\ dx_2 \wedge dx_3,\ \dots,\ dx_2 \wedge dx_n,\ \dots\dots,\ dx_{n-1} \wedge dx_n\Big)$$

è una base dell'insieme delle 2-forme su Ω.

In altre parole, $\{(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p\}_{i<j}$ è una base dello spazio vettoriale delle forme bilineari

$$T_p\Omega \times T_p\Omega \to \mathbb{R}$$

antisimmetriche.

Commentiamo e dimostriamo la proposizione di pag. 6 nel caso di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Siano (x_1, x_2, x_3) coordinate su Ω. Allora

$$\left(dx_1 \wedge dx_2 \,,\; dx_1 \wedge dx_3 \,,\; dx_2 \wedge dx_3 \right) \qquad (\bullet)$$

è una base per le 2-forme su Ω.

<u>Lineare indipendente</u> : Prendiamo una generica combinazione lineare di $(\bullet)$ e vediamo quando è identicamente nulla.

$$\theta_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + \theta_{13}\, dx_1 \wedge dx_3 + \theta_{23}\, dx_2 \wedge dx_3 = 0 \longrightarrow$$

$$\Big(\theta_{12}(dx_1 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1) + \theta_{13}(dx_1 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_1)$$
$$+ \theta_{23}(dx_2 \otimes dx_3 - dx_3 \otimes dx_2) \Big) \left(\partial_{x_i} , \partial_{x_j} \right) = \theta_{ij} = 0$$

con $i < j$

(•) di pag. 7 è un sistema di generatori:

Ogni 2-forma θ su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è sempre del tipo

$$\theta = \sum_{i<j} \theta(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})\, dx_i \wedge dx_j$$

$$= \theta(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})\, dx_1 \wedge dx_2 + \theta(\partial_{x_1}, \partial_{x_3})\, dx_1 \wedge dx_3 +$$

$$+ \theta(\partial_{x_2}, \partial_{x_3})\, dx_2 \wedge dx_3$$

$$= \theta_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + \theta_{13}\, dx_1 \wedge dx_3 + \theta_{23}\, dx_2 \wedge dx_3$$

$\theta_{ij} = \theta(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$ sono i coefficienti della 2-forma

La matrice rappresentativa di θ è

$$\begin{pmatrix} 0 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ -\theta_{12} & 0 & \theta_{23} \\ -\theta_{13} & -\theta_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto detto, la dimensione dello spazio vettoriale delle 2-forme su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in $p \in \Omega$,

$$T_p\Omega \times T_p\Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

è uguale a $\frac{n(n-1)}{2}$, cioè coincide con la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche $n \times n$.

I risultati di pag. 6-8 possono essere generalizzati.

Per esempio una base delle 3-forme su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è

$$\{dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k\}_{i<j<k}$$

e così via.

PROP: Nelle stesse ipotesi delle proposizione di pag. 6:

Una base dell'insieme delle 2-forme su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

è $dx_1 \wedge dx_2$.

Una base dell'insieme delle 3-forme su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

è $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, e così via.

In virtù di quello che abbiamo detto finora, è facile realizzare che, al di là delle forme nulle, non esistono K-forme differenziali su (aperti di) $\mathbb{R}^n$ se $K > n$.

<u>Esempio</u>: Si consideri la 2-forma $dx \wedge dy$ su $\mathbb{R}^2$.

Calcoliamo tale forma su una coppia di vettori:

$$(dx \wedge dy)(v, w) = (dx \otimes dy - dy \otimes dx)(v, w)$$

$$= v(x)\, w(y) - v(y)\, w(x) = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

$$= \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

dove v_i e w_i sono le componenti dei vettori

<u>Notiamo</u> che $\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$ coincide - eventualmente a meno del segno - con <u>l'area</u> del parallelogramma individuato da v e w

Per questo la forma $dx \wedge dy$ è anche detta <u>elemento d'area (infinitesimo) di $\mathbb{R}^2$</u>

Esempio: Si consideri la 3-forma $dx \wedge dy \wedge dz$ su $\mathbb{R}^3$

Calcoliamo tale forma su una tripla di vettori

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(u, v, w) \overset{\text{pag. 5}}{=}$$

$$\left(dx \otimes dy \otimes dz - dx \otimes dz \otimes dy + dy \otimes dz \otimes dx + \dots \right)(u, v, w) =$$

$$= u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 + u_2 v_3 w_1 - u_2 v_1 w_3 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1$$

$$= \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

che coincide – eventualmente a meno del segno – con il volume del parallelepipedo individuato da u, v, w

Per questo la forma $dx \wedge dy \wedge dz$ è anche detta elemento di volume (infinitesimo) di $\mathbb{R}^3$