1- FORME DIFFERENZIALI SU CURVE PARAMETRIZZATE

Quello che abbiamo scritto nell'ultima lezione (Lezione 25 pag. 18-23) riguardo alle 2-forme differenziali su superfici parametrizzate non è altro che una generalizzazione di quello che succede per le curve, che andiamo a rivedere.

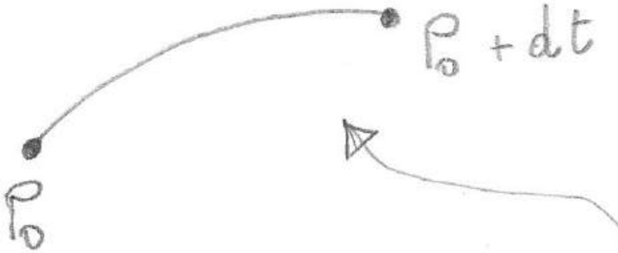
Sia $P : t \in I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow P(t) \in \mathbb{R}^n$

una curva parametrizzata. Abbiamo che

$$P(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \right)$$

dove $(x_1, \dots, x_n)$ è un sistema di coordinate di $\mathbb{R}^n$

Sia $t_0 \in I$. Abbiamo che



La lunghezza infinitesima di questa porzione di curva è $\| P'(t_0) \|$

Sappiamo che $\| P'(t) \|$ non è invariante per cambi di parametrizzazione. Infatti se

$$Q(\tau) = P(t(\tau))$$

con $\tau \longrightarrow t(\tau)$ cambio di parametrizzazione

allora

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{dP}{dt} \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \left\| \frac{dQ}{d\tau} \right\| = \left\| \frac{dP}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{d\tau} \right| \qquad (\circ)$$

"Jacobiano di $t(\tau)$"

Quindi $\|P'(t)\|$ non è invariante mentre (come succede per le superfici, Lezione 25 pag. 18-23) la 1-forma differenziale

$$\|P'(t)\|\,dt \qquad (\bullet)$$

è invariante a meno del segno. Infatti da $(\circ)$ di pag. 2 abbiamo che

$$\left\|\frac{dP}{dt}\right\| = \left\|\frac{dQ}{d\tau}\right\| \left|\frac{d\tau}{dt}\right| \implies \left\|\frac{dP}{dt}\right\| dt = \left\|\frac{dQ}{d\tau}\right\| \underbrace{\left|\frac{d\tau}{dt}\right| dt}$$

$$= d\tau \text{ se } \frac{d\tau}{dt} > 0$$

$$\text{e } -d\tau \text{ se } \frac{d\tau}{dt} < 0$$

Per quanto detto la 1-forma $(\bullet)$ si chiama <u>elemento di lunghezza</u> (infinitesimo) della curva parametrizzata $P(t)$

<u>Notare</u> : $\|P'(t)\| \, dt$ non è altro che "la radice quadrata" della restrizione della metrica di $\mathbb{R}^n$ alla curva $P(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

Infatti la metrica standard su $\mathbb{R}^n$ è

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n$$

che ristretta a $P(t)$ è, tenendo in considerazione che $dx_i \to x_i' \, dt$,

$$x_1'^2 dt^2 + \dots + x_n'^2 dt^2 = (x_1'^2 + \dots + x_n'^2) \, dt^2 = \|P'(t)\|^2 dt^2$$

$$= \|P'(t)\|^2 dt \otimes dt = P^*(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$$

INTEGRALI DI LINEA (CURVILINEI di 1° SPECIE)

Sia $P: t \in I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata ed f una funzione (continua) definita sull' immagine di P, cioè sulla traiettoria. $f: \gamma = \Im m(P) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nota. La funzione f può anche essere la restrizione su γ di una funzione definita su $\mathbb{R}^n$.

Per quello che abbiamo detto nelle pagine precedenti possiamo definire l'integrale curvilineo della funzione f lungo la curva $P(t)$:

$$\int_I f(P(t)) \, \|P'(t)\| \, dt = \int_a^b f(P(t)) \, \|P'(t)\| \, dt \quad \text{se } I = [a, b]$$

Spesso si trova la scrittura

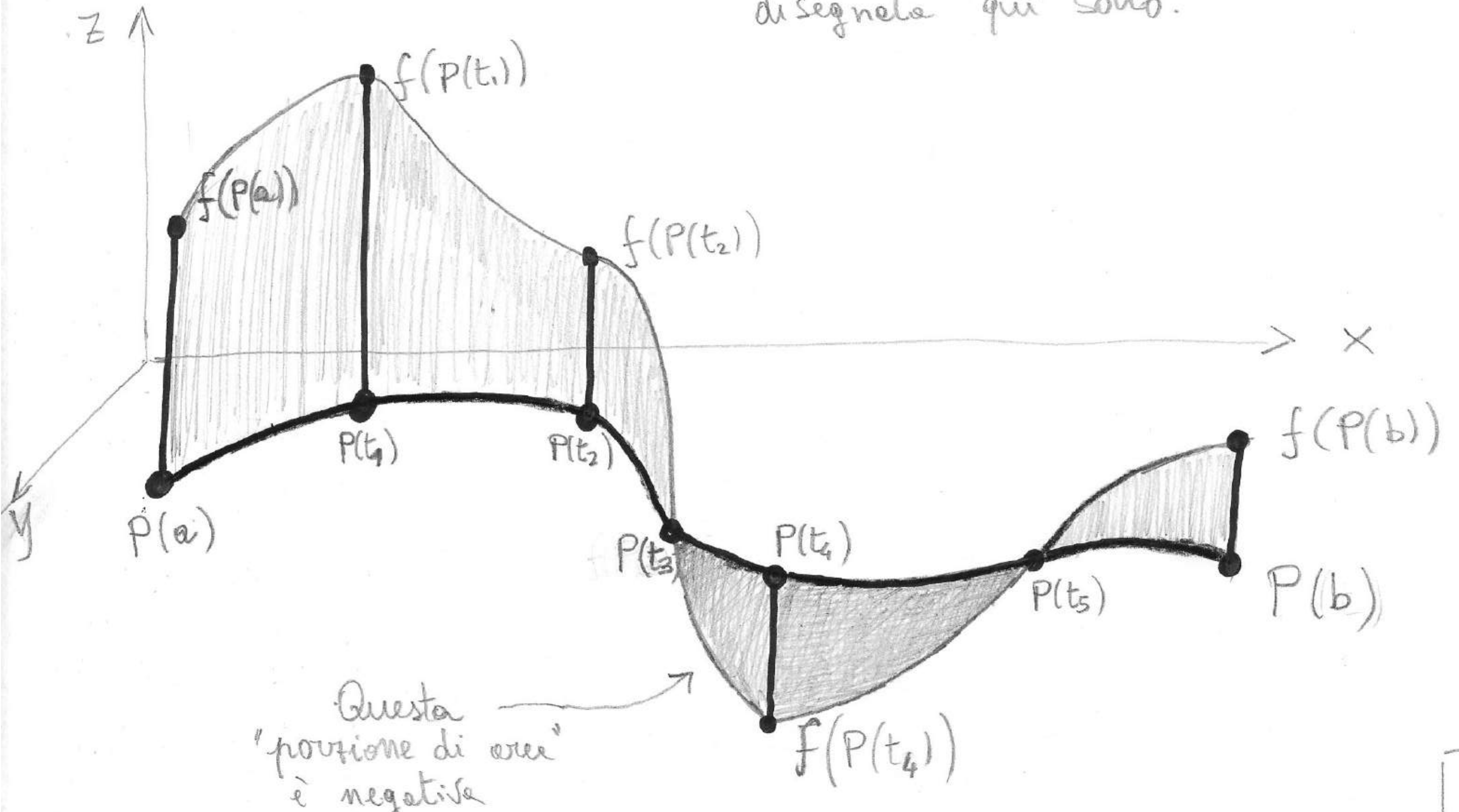
$$\int_a^b f(P(t))\,\|P'(t)\|\,dt = \int_\gamma f\,d\ell \qquad (\bullet)$$

dove γ è la traiettoria di $P(t)$ e $d\ell$ è l'elemento di lunghezza infinitesima.

<u>Notare</u> che se $f = 1$, allora l'integrale $(\bullet)$ coincide con la lunghezza della curva dall'istante a all'istante b.

<u>Notare</u> che se consideriamo l'ascissa curvilinea s allora $(\bullet)$ diventa $\int f(P(t(s)))\,ds$ $\left(\text{Ricordare che } \frac{ds}{dt} = \|P'(t)\|\right)$

<u>Un'interpretazione geometrica</u>: Se $P(t)$ è una curva nel piano x, y l'integrale $\int_a^b f(P(t)) \, \|P'(t)\| \, dt$ rappresenta l'area (può essere anche negativa) disegnata qui sotto.



Ex: Data la funzione $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y}{\sqrt{4z^2+2}}$

e la curva $P(t) = (t, t^2-4, t)$, $t \in [-2,2]$

calcolare l'integrale curvilineo di f lungo $P(t)$.

Abbiamo che

$$\int_{-2}^{2} f(P(t)) \, \|P'(t)\| \, dt = \int_{-2}^{2} \frac{t^2+(t^2-4)}{\sqrt{4t^2+2}} \, \|(1,2t,1)\| \, dt$$

$$= \int_{-2}^{2} \frac{2t^2-4}{\sqrt{4t^2+2}} \sqrt{1+4t^2+1} \, dt = \int_{-2}^{2} (2t^2-4) \, dt$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 4t \Big]_{-2}^{2} = -\frac{16}{3}$$

INTEGRAZIONE DI FORME DIFFERENZIALI (1-forme)

(INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE)

Sia $\omega = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \quad , \quad F_i = F_i(x, y, z)$

una 1-forma differenziale su un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$.

Sia $P : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata

con traiettoria contenuta in Ω.

Ha senso considerare l'integrale

$$\int_a^b P^*(\omega)$$

che possiamo chiamare <u>integrale di ω lungo la curva $P(t)$</u>

Andiamo a calcolare $\int_a^b P^*(w)$

Ricordiamo che $P^*(w)$ è il pull-back di w tramite P. Avremo che

$$P^*(w) = P^*(F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz) =$$

$$= F_1(P(t))\, P^*(dx) + F_2(P(t))\, P^*(dy) + F_3(P(t))\, P^*(dz)$$

$$= F_1(P(t))\, x'(t)\, dt + F_2(P(t))\, y'(t)\, dt + F_3(P(t))\, z'(t)\, dt$$

$$= \Big(F_1(P(t)),\, F_2(P(t)),\, F_3(P(t))\Big) \cdot P'(t)\, dt$$

da cui, se poniamo $F(P(t)) = \Big(F_1(P(t)), F_2(P(t)), F_3(P(t))\Big)$,

$$\int_a^b P^*(w) = \int_a^b F(P(t)) \cdot P'(t)\, dt$$

Chiaramente tutto si generalizza per 1-forme differenziali su $\mathbb{R}^n$

Notare :

$$\int_a^b F(P(t)) \cdot P'(t) \, dt = \int_a^b \underbrace{F(P(t)) \cdot \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}}_{\substack{\text{Componente di } F(P(t)) \\ \text{lungo la tangente di } P(t)}} \|P'(t)\| \, dt \quad (\bullet)$$

Se $F(P(t))$ è ortogonale a $P(t)$, allora l'integrale è nullo (il "lavoro" della "forza" F lungo la curva $P(t)$ è nullo)

L'integrale $(\bullet)$ è l'integrale curvilineo (di prima specie) della funzione $F(P(t)) \cdot \dfrac{P'(t)}{\|P'(t)\|}$ (lungo $P(t)$)

Ex: Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale $\omega = (y^3 + x)\,dx - \sqrt{x}\,dy$ lungo la curva $P(t) = (t^2, t)$, $t \in [0, 1]$.

Usando la formula di fine di pag. 9 abbiamo che

$$\int_0^1 P^*(\omega) = \int_0^1 \left(t^3 + t^2, -\sqrt{t^2}\right) \cdot (2t, 1)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(2t^4 + 2t^3 - t\right) dt = \frac{2}{5}$$