Analisi Funzionale

Richiami di algebra lineare

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino
a.a. 2023/2024

Spazi vettoriali

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ denota l'insieme dei numeri naturali,
$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ denota l'insieme degli interi positivi,
$\mathbb{F}$ denota il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ o il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Def. Uno *spazio vettoriale* su $\mathbb{F}$ è un insieme V dotato di due operazioni,

- $V \times V \ni (x, y) \mapsto x + y \in V$ (somma),
- $\mathbb{F} \times V \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in V$ (prodotto scalare-vettore),

che soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\forall x, y, z \in V : (x+y)+z = x+(y+z)$
   (proprietà associativa della somma),
2. $\forall x, y \in V : x + y = y + x$
   (proprietà commutativa della somma),
3. $\exists! 0 \in V : \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$
   (vettore nullo: elemento neutro della somma),
4. $\forall x \in V : \exists! -x \in V :$
   $x + (-x) = (-x) + x = 0$
   (esistenza dell'inverso rispetto alla somma);
5. $\forall \alpha \in \mathbb{F} : \forall x, y \in V :$
   $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
   (proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori),
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} : \forall x \in V :$
   $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
   (proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari),
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} : \forall x \in V : (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
   (proprietà associativa mista),
8. $\forall x \in V : 1x = x$
   (il prodotto per lo scalare 1 è l'identità su V).

Gli elementi di V sono detti *vettori*,
mentre gli elementi di $\mathbb{F}$ sono detti *scalari*.

Esempi di spazi vettoriali

- $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}\}$ con le operazioni componente per componente

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

- L'insieme $C(I) = C_{\mathbb{F}}(I)$ delle funzioni continue $f : I \to \mathbb{F}$, ove I è un intervallo di $\mathbb{R}$, con le operazioni puntuali
$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (\alpha f)(t) = \alpha f(t).$$
- L'insieme $C(\Omega) = C_{\mathbb{F}}(\Omega)$ delle funzioni continue $f : \Omega \to \mathbb{F}$, ove Ω è uno spazio topologico, con le operazioni puntuali.
- L'insieme $\mathcal{P} = \mathbb{F}[X]$ dei polinomi in una indeterminata X a coeff. in $\mathbb{F}$.
- Il *prodotto diretto* $V \times W = \{(v, w) : v \in V,\ w \in W\}$ di due spazi vettoriali V e W, con le operazioni componente per componente.
- L'insieme $\mathcal{F}(S, V)$ delle funzioni $f : S \to V$ da un insieme S a uno spazio vettoriale V, con le operazioni puntuali.
- Ogni spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ si può anche pensare come uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, restringendo l'operazione di prodotto scalare-vettore.

Sottospazi vettoriali e sottoinsiemi convessi

Def. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Si dice *sottospazio vettoriale* di V ogni sottoinsieme U di V che, dotato della restrizione delle operazioni su V, sia a sua volta uno spazio vettoriale.

Prop. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Sono equivalenti:

(i) U è un sottospazio vettoriale di V;

(ii) U è un sottoinsieme <u>non vuoto</u> di V tale che

$$\forall x, y \in U : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} : \alpha x + \beta y \in U$$

(cioè U è "chiuso per combinazioni lineari").

Def. Sia V uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme A di V si dice *convesso* se

$$\forall x, y \in A : \forall \theta \in [0, 1] : (1 - \theta)x + \theta y \in A$$

(cioè A è "chiuso per combinazioni convesse").

Oss. Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale è convesso se e solo se, per ogni coppia di punti $x, y \in A$, il segmento di retta di estremi x e y è contenuto in A.

Esempi di sottospazi vettoriali

- Per ogni spazio vettoriale V, gli insiemi $\{0\}$ e V sono sottospazi vettoriali di V.
- I sottospazi vettoriali del piano $\mathbb{R}^2$, oltre a $\{0\}$ e $\mathbb{R}^2$,sono le rette passanti per l'origine.
- Per ogni $d \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathcal{P}_d = \{p \in \mathcal{P} : \deg p \leq d\}$ dei polinomi di grado al più d è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{P}$.
- Se Ω è uno spazio topologico, $C_{\mathbb{F}}(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{F})$.
- Se $I \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme $\{p|_I : p \in \mathcal{P}\}$ delle restrizioni a I dei polinomi è un sottospazio vettoriale di $C(I)$.
- Se V è uno spazio vettoriale, e U_1 e U_2 sono sottospazi vettoriali di V, allora lo sono anche l'*intersezione*
$$U_1 \cap U_2$$
e la *somma*
$$U_1 + U_2 := \{x + y : x \in U_1,\ y \in U_2\}.$$

Combinazioni lineari e indipendenza lineare

Def. Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$, $k \in \mathbb{N}_+$, $v_1, \ldots, v_k \in V$ e $A \subseteq V$.

(a) Si dice *combinazione lineare* di $v_1, \ldots, v_k$ (con coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$) il vettore $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$.

(b) I vettori $v_1, \ldots, v_k$ si dicono *linearmente indipendenti* se $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F} : (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0)$; $v_1, \ldots, v_k$ si dicono *linearmente dipendenti* in caso contrario.

(c) L'insieme A si dice *linearmente indipendente* se, per ogni $s \in \mathbb{N}_+$ e $w_1, \ldots, w_s \in A$ distinti, i vettori $w_1, \ldots, w_s$ sono linearmente indipendenti. Altrimenti, A si dice *linearmente dipendente*.

(d) Lo *spazio vettoriale generato da* A è l'insieme

$$\operatorname{span}_{\mathbb{F}} A = \operatorname{span} A = \left\{ \sum_{j=1}^{s} \alpha_j w_j : s \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{F},\ w_1, \ldots, w_s \in A \right\}$$

di tutte le combinazioni lineari di elementi di A (inclusa la combinazione vuota per $s = 0$, cioè il vettore nullo).

Oss. Se U_1 e U_2 sono sottospazi vettoriali di V, allora

$$U_1 + U_2 = \operatorname{span}(U_1 \cup U_2).$$

Basi e dimensione

Def. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Si dice *base* di V ogni sottoinsieme $B \subseteq V$ linearmente indipendente tale che $\operatorname{span} B = V$.

Teor. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Allora:

(i) V ha una base.
Più precisamente, dati sottoinsiemi $A \subseteq G \subseteq V$,
dove A è linearmente indipendente e $\operatorname{span} G = V$,
esiste una base B di V tale che $A \subseteq B \subseteq G$.
(In particolare, ogni sottoinsieme linearmente indipendente A di V si può *completare a una base* B di V.)

(ii) Tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità (num. di elementi).

Def. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$.

(a) Se V ha una base con n elementi per qualche $n \in \mathbb{N}$, diciamo che V ha *dimensione* n e scriviamo $\dim V = n$.

(b) Se V non ha basi con un numero finito di elementi, diciamo che V ha *dimensione infinita* e scriviamo $\dim V = \infty$.

Scriviamo anche $\dim_{\mathbb{F}} V$ al posto di $\dim V$.

Basi e dimensione: esempi

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$. Una base di $\mathbb{R}^n$ è la *base canonica* $\{e_1, \dots, e_n\}$, ove $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ è la n-upla che ha un 1 in posizione j e 0 in tutte le altre componenti.
- Similmente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$, e una base di $\mathbb{C}^n$ è la base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ definita come sopra.
- Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$. Una base di $\mathbb{C}^n$ pensato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è l'insieme $\{e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n\}$.
- Per ogni $d \in \mathbb{N}$, $\dim \mathcal{P}_d = d + 1$. Una base di $\mathcal{P}_d$ è l'insieme $\{1, X, \dots, X^d\}$ dei monomi monici di grado al più d.
- $\dim \mathcal{P} = \infty$, e una base di $\mathcal{P}$ è l'insieme $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di tutti i monomi monici.
- Se S è un insieme di n elementi per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora $\dim \mathcal{F}(S, \mathbb{F}) = n$. Se invece S è un insieme infinito e $V \neq \{0\}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$, allora $\dim \mathcal{F}(S, V) = \infty$.
- Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo di lunghezza positiva, $\dim C_{\mathbb{F}}(I) = \infty$.

Basi e coordinate lineari. Somma diretta

Oss. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$ e $B = \{e_j\}_{j \in J}$ una base di V (indicizzata iniettivamente, cioè $e_j \neq e_k$ se $j \neq k$).
Allora ogni $v \in V$ si scrive <u>in maniera unica</u> come

$$v = \sum_{j \in J} \alpha_j e_j \qquad (\dagger)$$

ove $\alpha_j \in \mathbb{F}$ per ogni $j \in J$
e $\alpha_j \neq 0$ per al più un numero finito di $j \in J$.

I coefficienti α_j in $(\dagger)$ si possono pensare come *coordinate* del vettore v rispetto alla base B.

Def. Due sottospazi U_1, U_2 di V si dicono *in somma diretta* se ogni elemento $x \in U_1 + U_2$ si scrive <u>in maniera unica</u> come $x = x_1 + x_2$ per $x_1 \in U_1$ e $x_2 \in U_2$.
In tal caso scriviamo anche $U_1 \oplus U_2$ al posto di $U_1 + U_2$.

Prop. Due sottospazi U_1 e U_2 di uno spazio vettoriale V sono in somma diretta se e solo se $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Applicazioni lineari

Def. Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{F}$.

(a) Si dice *applicazione lineare* da V a W ogni funzione $T : V \to W$ tale che
$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$
per ogni $x, y \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
(Qui usiamo la notazione Tx con lo stesso significato di $T(x)$.)

(b) Denotiamo con $\mathcal{L}(V, W)$ l'insieme delle applicazioni lineari da V a W; per brevità, scriviamo anche $\mathcal{L}(V)$ invece di $\mathcal{L}(V, V)$.

(c) Il *nucleo* Ker T di un'applicazione lineare $T \in \mathcal{L}(V, W)$ è l'insieme
$$\operatorname{Ker} T = T^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : Tx = 0\}.$$

(d) L'*immagine* Im T di un'applicazione lineare $T \in \mathcal{L}(V, W)$ è l'insieme
$$\operatorname{Im} T = T(V) = \{Tx : x \in V\}.$$
A volte si scrive $\mathcal{R}(T)$ invece di Im T.

Proprietà delle applicazioni lineari

Prop. Siano V, W, X spazi vettoriali su $\mathbb{F}$.

(i) $\mathcal{L}(V, W)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(V, W)$.

(ii) Per ogni $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $S \in \mathcal{L}(W, X)$, la loro composizione $ST := S \circ T$ è un elemento di $\mathcal{L}(V, X)$.

(iii) Se $T \in \mathcal{L}(V, W)$ è invertibile, allora $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

Sia ora $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Allora:

(iv) $T0 = 0$;

(v) per ogni sottospazio vettoriale U di V, l'immagine $T(U)$ di U è un sottospazio vettoriale di W;

(vi) per ogni sottospazio vettoriale Z di W, la controimmagine $T^{-1}(Z)$ di Z è un sottospazio vettoriale di V;

(vii) il nucleo $\operatorname{Ker} T$ di T è un sottospazio vettoriale di V;

(viii) l'immagine $\operatorname{Im} T$ di T è un sottospazio vettoriale di W;

(ix) T è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} T = \{0\}$;

(x) T è suriettiva se e solo se $\operatorname{Im} T = W$;

(xi) $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$;
in particolare, $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim V$, con $=$ se T è iniettiva.

Applicazioni lineari e basi

Prop. Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{F}$. Sia B una base di V. Allora, per ogni funzione $f : B \to W$, esiste un'unica applicazione lineare $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tale che $Tx = f(x)$ per ogni $x \in B$.

In altre parole:

- possiamo costruire un'applicazione lineare da V a W assegnando liberamente i suoi valori su una base di V;
- questi valori determinano <u>univocamente</u> l'applicazione lineare.

Oss. Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{F}$ di dimensione $n \in \mathbb{N}$ e sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Allora $\Phi_B : \mathbb{F}^n \to V$ definita da

$$\Phi_B(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

è lineare e biiettiva, e l'inversa Φ_B^{-1} associa ad ogni $v \in V$ la n-upla delle sue coordinate rispetto alla base B.

Applicazioni lineari e matrici

Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{F}$ con $\dim V = n \in \mathbb{N}$, $\dim W = m \in \mathbb{N}$. Siano $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ basi di V e W.

- Sia $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Allora possiamo scrivere
  $$Tv_k = a_{1,k} w_1 + \cdots + a_{m,k} w_m, \qquad k = 1, \ldots, n,$$
  e i coefficienti $a_{j,k}$ determinano univocamente T.
  - La matrice $A = (a_{j,k})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ di questi coefficienti è detta la *matrice associata* a T nelle basi B e C.
  - Si ha allora
    $$T\Phi_B x = \Phi_C A x \qquad \forall x \in \mathbb{F}^n,$$
    dove gli $x \in \mathbb{F}^n$ sono pensati come vettori-colonna e Ax è il prodotto matrice-vettore.
- C'è una <u>corrispondenza biunivoca</u> fra appl. lineari $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e matrici $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ determinata dalla scelta delle basi B e C.
  - Tale corrispondenza è lineare (cioè preserva comb. lineari). In particolare $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim \mathbb{F}^{n \times m} = nm = \dim V \dim W$.
  - La composizione di applicazioni lineari corrisponde al prodotto riga-per-colonna di matrici.