$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \longrightarrow \partial_t u + \boxed{f'(u)}\,\partial_x u = 0$$

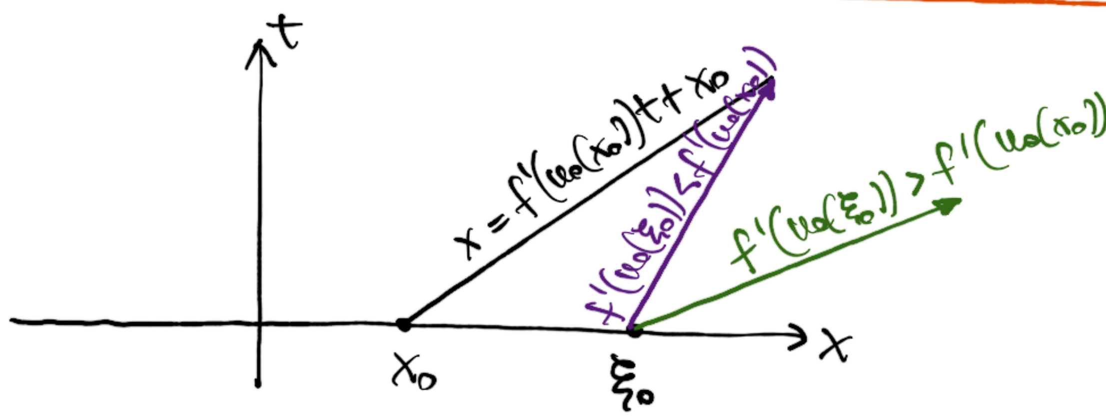
velocità di trasporto

Caratteristiche: $$\frac{dx}{dt} = f'(u(x(t),t))$$

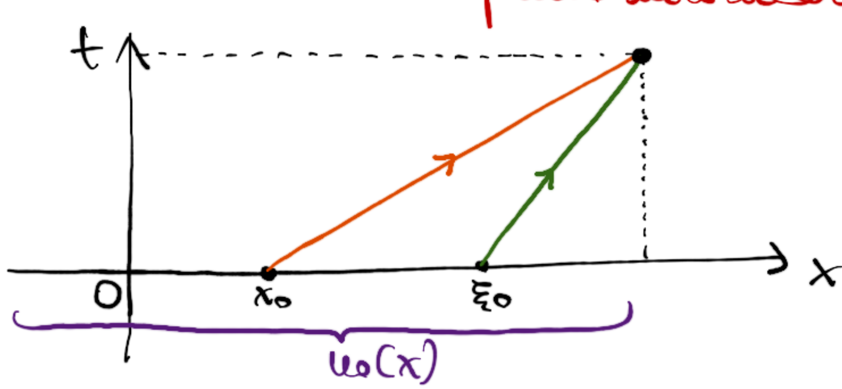
$t=0$

u costante sulle caratteristiche $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{dx}{dt} = f'(u_0(x_0))}$$

le caratteristiche sono rette $\Rightarrow$ $$\boxed{x(t) = f'(u_0(x_0))\,t + x_0}$$

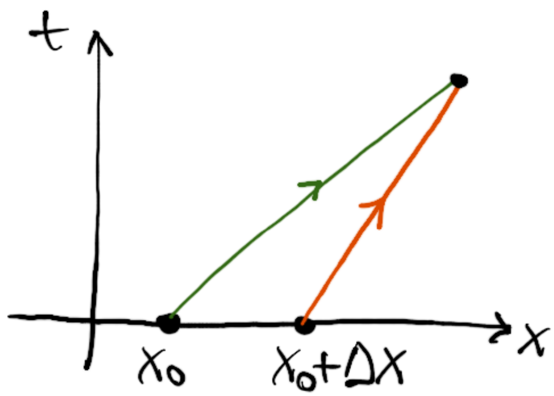


Oss. Le caratteristiche sono rette in generale non parallele (a meno che f non sia lineare-affine o u_0 non sia costante).
Quindi le caratteristiche si possono intersecare.



Quando due caratteristiche distinte si intersecano, nel punto (x,t) di intersezione la u dovrebbe valere contemporaneamente $u_0(x_0)$ e $u_0(\xi_0)$. Se $u_0(x_0) \neq u_0(\xi_0)$ la u sviluppa in (x,t) una discontinuità di tipo salto tra i valori $u_0(x_0)$ e $u_0(\xi_0)$.

Stabiliamo qual è il primo istante di tempo in cui si forma un salto in u:



$$\begin{cases} x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0 \\ x(t) = f'(u_0(x_0+\Delta x))t + x_0 + \Delta x \end{cases}$$

$$f'(u_0(x_0))t + \cancel{x_0} = f'(u_0(x_0+\Delta x))t + \cancel{x_0} + \Delta x$$

$$0 = \frac{f'(u_0(x_0+\Delta x))t - f'(u_0(x_0))t}{\Delta x} + 1$$

$$\frac{f'(u_0(x_0+\Delta x)) - f'(u_0(x_0))}{\Delta x} t = -1$$

Passando al limite $\Delta x \to 0$:

$$\left.\frac{d}{dx} f'(u_0(x))\right|_{x=x_0} t = -1$$

$$f''(u_0(x))\,u_0'(x)\Big|_{x=x_0} t = -1$$

$$f''(u_0(x_0))\,u_0'(x_0)\,t = -1$$

$$t = -\frac{1}{f''(u_0(x_0))\,u_0'(x_0)}$$

Questo è il primo istante in cui la caratteristica uscente da x_0 ne interseca un'altra a lei vicina. Passando al min su x_0 otteniamo il primo istante in assoluto in cui due caratteristiche si intersecano (indipendentemente da dove escono):

$$\boxed{t^* := \min_{x_0 \in \mathbb{R}} \left(-\frac{1}{f''(u_0(x_0))\,u_0'(x_0)} \right)}.$$

Da qui, supponendo f con concavità costante, vediamo che:

(i) se $f''(u) > 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$ (flusso convesso) $t^* > 0$ può esistere purché $u_0' < 0$ almeno in qualche tratto, quindi purché u_0 sia decrescente da qualche parte;

(ii) se $f''(u) < 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$ (flusso concavo) $t^* > 0$ può esistere purché $u_0' > 0$, cioè u_0 sia crescente, in qualche tratto.

Esempi

- $f(u) = \frac{u^2}{2}$ prototipo di flusso convesso

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

equazione di Burgers

ovvero

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0$$

dove $u = u(x,t)$ è la velocità di un fluido in $x \in \mathbb{R}$ al tempo $t > 0$;

- $f(u) = u(1-u)$ prototipo di flusso concavo

$$\partial_t u + \partial_x \big(u(1-u) \big) = 0$$

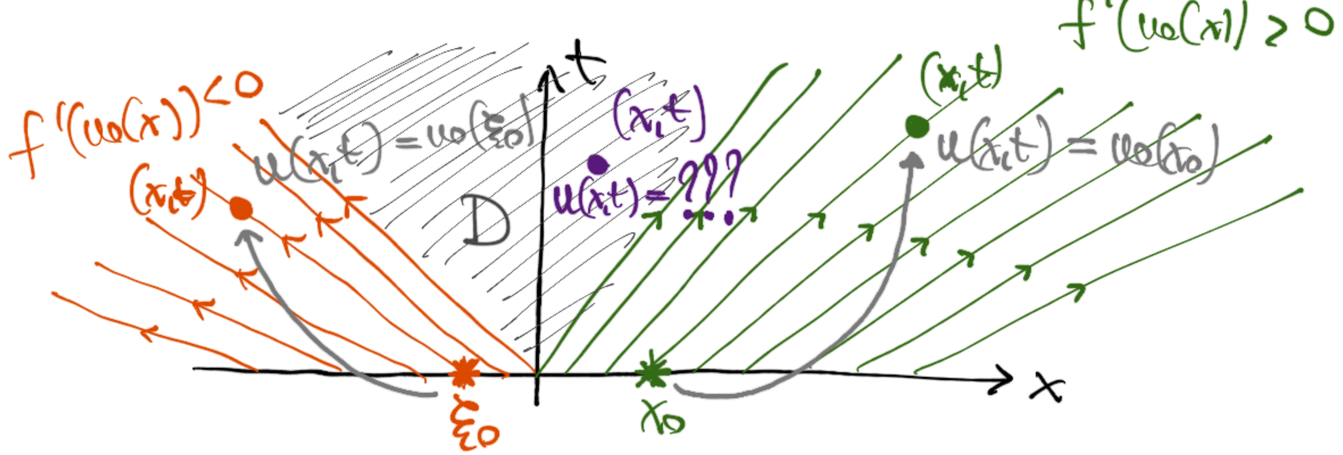
equazione del traffico

ovvero

$$\partial_t u + (1-2u) \partial_x u = 0,$$

dove $u = u(x,t)$ è la densità di auto nel punto $x \in \mathbb{R}$ della strada al tempo $t > 0$.

Il fatto che le caratteristiche non siano rette parallele può dare luogo anche ad altre configurazioni "bizzarre" delle caratteristiche stesse:



Può accadere che si formi una regione $D \subseteq Q = \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ in cui non arriva alcuna caratteristica. In tal caso in D la soluzione u non è definita dal dato iniziale.

Iniziamo a trattare matematicamente il problema della formazione di discontinuità in tempo finito. Per questo, abbiamo bisogno di un opportuno concetto di soluzione debole:

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \partial_t u\,\varphi\,dx\,dt + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\partial_x f(u)\,\varphi\,dx\,dt = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{+\infty}\partial_t u\,\varphi\,dt\right)dx + \int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}\partial_x f(u)\,\varphi\,dx\right)dt = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}}\left\{-\int_0^{+\infty} u\,\partial_t\varphi\,dt + \Big[\cancel{u\varphi}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} {\scriptstyle =0}\right\}dx$$

$$+\int_0^{+\infty}\left\{-\int_{\mathbb{R}} f(u)\,\partial_x\varphi\,dx + \Big[\underbrace{f(u)\varphi}_{=0}\Big]_{x=-\infty}^{x=+\infty}\right\}dt = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty} u\,\partial_t\varphi\,dt\,dx + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(u)\,\partial_x\varphi\,dx\,dt = 0$$

$$\int_0^{+\infty}\int_{R}\Big(u\,\partial_t\varphi + f(u)\,\partial_x\varphi\Big)\,dx\,dt = 0.$$

Def. Chiamiamo soluzione debole della legge di conservazione $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ in $Q = \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ una funzione $u \in L^1_{loc}(Q)$ t.c.

$$\int_0^{+\infty}\int_{R}\Big(u\,\partial_t\varphi + f(u)\,\partial_x\varphi\Big)\,dx\,dt = 0 \qquad \forall \varphi\in\mathcal{D}(Q).$$

$\rightsquigarrow$ Esercizio: verificare che la richiesta $u\in L^1_{loc}(Q)$ rende ben definita la formulazione debole della legge di conservazione.