ovvero

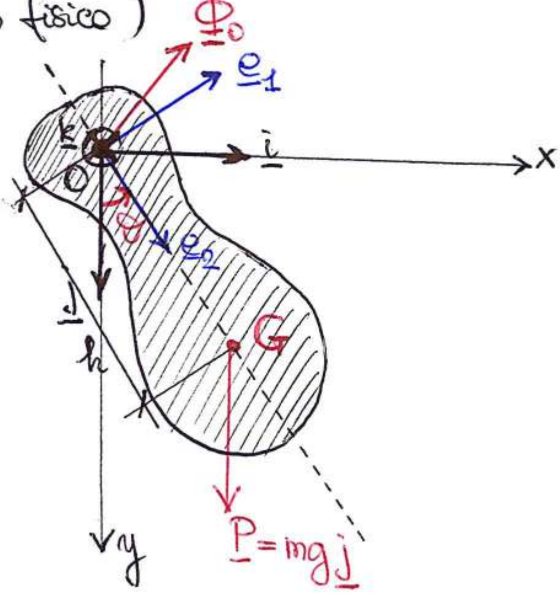
$$m(\ddot{x}\underline{i}+\ddot{y}\underline{j}) = -k(x\underline{i}+y\underline{j})+(\Phi-mg)\underline{k},$$

che non è un'equazione pura del moto in quanto contiene la reazione vincolare incognita. Tuttavia, proiettando questa equazione lungo le direzioni $\underline{i}$ e $\underline{j}$ otteniamo

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx & (\text{lungo } \underline{i}) \\ m\ddot{y} = -ky & (\text{lungo } \underline{j}) \end{cases}$$

che sono due equazioni pure che permettono di determinare il moto di P.
Infine, proiettando lungo $\underline{k}$ otteniamo $\Phi - mg = 0$, da cui in questo caso possiamo determinare anche la reazione vincolare $\underline{\Phi} = mg\,\underline{k}$.

Esempio (Pendolo fisico)




Consideriamo un corpo rigido di massa m vincolato ad oscillare nel piano Oxy attorno al suo punto fisso O. Supponiamo che il baricentro G si trovi ad una distanza $h \geq 0$ da O lungo l'asse del corpo come in figura. Scelta come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta$ indicato in figura abbiamo:

$$G-O = h\underline{e}_2 = h(\sin\theta\,\underline{i}+\cos\theta\,\underline{j}),$$

quindi la prima equazione cardinale della dinamica dà:

$$m\underline{a}_G = \underline{P} + \underline{\Phi}_O$$
$$= mg\,\underline{j} + \underline{\Phi}_O,$$

dove $\underline{\Phi}_O$ è la reazione vincolare nel punto O. Si osservi che non è possibile sapere a priori la direzione di $\underline{\Phi}_O$ in quanto ogni spostamento virtuale di O è nullo. Calcolando inoltre:

$$\underline{v}_G = \frac{d}{dt}(G-O) = h\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\underline{i} - \sin\theta\,\underline{j})$$

$$\underline{a}_G = \underline{\dot{v}}_G = h\ddot{\theta}(\cos\theta\,\underline{i} - \sin\theta\,\underline{j}) + h\dot{\theta}^2(-\sin\theta\,\underline{i} - \cos\theta\,\underline{j})$$

possiamo scrivere:

$$mh\ddot{\theta}(\cos\theta\,\underline{i} - \sin\theta\,\underline{j}) - mh\dot{\theta}^2(\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}) = mg\,\underline{j} + \underline{\Phi}_O,$$

che non è un'equazione pura del moto. Inoltre in questo caso non è possibile trovare a priori una direzione opportuna lungo la quale proiettare l'equazione per "eliminare" $\underline{\Phi}_O$ poiché non si hanno informazioni sulla direzione di quest'ultima.

Scriviamo la seconda equazione cardinale della dinamica. Poiché il sistema è piano, avremo

$$I_{z,Q}\,\dot{\omega} = M_Q^{(e)}.$$

Determiniamo ora il momento risultante delle forze esterne scegliendo come polo Q = O, che è solidale e fisso. Abbiamo:

$$\underline{M}_O^{(e)} = (O-O)\times\underline{\Phi}_O + (G-O)\times\underline{P}$$

$$= h(\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j}) \times mg\, \underline{j}$$

$$= mgh\sin\theta\, \underline{k},$$

avendo osservato che la reazione vincolare $\underline{\Phi}_0$ non ha momento rispetto ad $O$ perché il polo coincide con il suo punto di applicazione.

Determiniamo infine la velocità angolare $\underline{\omega} = \omega\underline{k}$. Dalla legge di distribuzione delle velocità sappiamo che dev'essere:

$$\underline{v}_G = \underbrace{\underline{v}_O}_{=\underline{0}} + \underline{\omega} \times (G-O)$$

$$h\dot{\theta}(\cos\theta\, \underline{i} - \sin\theta\, \underline{j}) = \omega\underline{k} \times h(\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j})$$

$$= h\omega(\sin\theta\, \underline{j} - \cos\theta\, \underline{i})$$

$$= -h\omega(\cos\theta\, \underline{i} - \sin\theta\, \underline{j})$$

da cui $\omega = -\dot{\theta}$ e quindi $\dot{\omega} = -\ddot{\theta}$. La seconda equazione cardinale della dinamica diventa perciò:

$$-I_{z,0}\ddot{\theta} = mgh\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgh}{I_{z,0}}\sin\theta,$$

che è un'equazione pura del moto.

Una volta che la legge oraria $\theta = \theta(t)$ sia nota da questa equazione, è possibile inserire la funzione $\theta(t)$ nella prima equazione cardinale della dinamica e ricavare $\underline{\Phi}_0$ (che, in questo caso, varia nel tempo).

## Integrali primi del moto

**Def.** Sia $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$ un sistema di punti materiali. Una funzione

$$f = f(P_1, \dots, P_N, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_N, t),$$

scalare o vettoriale, si dice un <u>integrale primo</u> del moto dei $P_i$ se il suo valore si mantiene costante nel tempo durante il moto dei $P_i$. Cioè se:

$$f(P_1(t), \dots, P_N(t), \underline{v}_1(t), \dots, \underline{v}_N(t), t)$$

$$= \underbrace{f(P_1(0), \dots, P_N(0), \underline{v}_1(0), \dots, \underline{v}_N(0), 0)}_{\text{valore di } f \text{ all'istante iniziale}} .$$

Si dice anche che la quantità $f$ <u>si conserva</u> o che $f$ è una <u>quantità conservata</u> (nel tempo).

**Teorema** (Integrale primo della quantità di moto)
Se la componente del risultante delle forze esterne $\underline{R}^{(e)}$ lungo una direzione fissa $\underline{e}^*$ è nulla allora la componente della quantità di moto del sistema lungo quella stessa direzione è un integrale primo del moto.

**Dim.** Dalla prima equazione cardinale della dinamica abbiamo:

$$\dot{\underline{Q}} = \underline{R}^{(e)}$$

da cui, moltiplicando scalarmente entrambi i membri per $\underline{e}^*$,

$$\dot{\underline{Q}} \cdot \underline{e}^* = \underline{R}^{(e)} \cdot \underline{e}^* = 0.$$

Ma $\dot{\underline{Q}} \cdot \underline{e}^* = \frac{d}{dt}(\underline{Q} \cdot \underline{e}^*)$ perché $\underline{e}^*$ è fisso, quindi $\frac{d}{dt}(\underline{Q} \cdot \underline{e}^*) = 0$ e così $\underline{Q} \cdot \underline{e}^*$ è conservato. $\square$

Teorema (Integrale primo del momento delle quantità di moto)

Sia $Q \in \mathbb{R}^3$ un polo tale che $\underline{v}_Q \times \underline{Q} = \underline{0}$. Se la componente del momento risultante rispetto a $Q$ delle forze esterne lungo una direzione fissa $\underline{e}^*$ è nulla allora la componente del momento delle quantità di moto rispetto a $Q$ lungo quella stessa direzione è un integrale primo del moto.

Dim. Poiché $\underline{v}_Q \times \underline{Q} = \underline{0}$ la seconda equazione cardinale della dinamica dà:

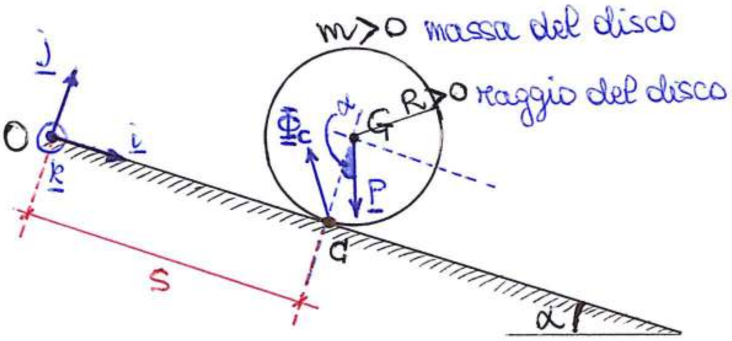
$$\dot{\underline{K}}_Q = \underline{M}_Q^{(e)},$$

da cui, proiettando lungo $\underline{e}^*$,

$$0 = \underline{M}_Q^{(e)} \cdot \underline{e}^* = \dot{\underline{K}}_Q \cdot \underline{e}^* = \frac{d}{dt}\left(\underline{K}_Q \cdot \underline{e}^*\right)$$

e così $\underline{K}_Q \cdot \underline{e}^*$ è conservato. $\boxtimes$

Esempio - Disco che rotola senza strisciare su un piano inclinato




Le forze esterne agenti sul disco sono:

(i) la forza peso $\underline{P} = mg\sin\alpha\,\underline{i} - mg\cos\alpha\,\underline{j}$;

(ii) la reazione vincolare $\underline{\Phi}_C$.

La forza peso è applicata nel baricentro $G - O = s\,\underline{i} + R\,\underline{j}$, con $s = s(t)$ coordinata lagrangiana.

La prima equazione cardinale della dinamica dà:

$$m\underline{a}_G = \underline{P} + \underline{\Phi}_C$$

ovvero

$$m\ddot{s}\,\underline{i} = mg\sin\alpha\,\underline{i} - mg\cos\alpha\,\underline{j} + \underline{\Phi}_C,$$

che non è un'equazione pura del moto.

Scegliendo come polo il punto $Q = C$, centro di istantanea rotazione (istantaneamente fisso e solidale), la seconda equazione cardinale della dinamica si scrive:

$$\dot{\underline{K}}_C = (G-C)\times\underline{P},$$

avendo osservato che il momento di $\underline{\Phi}_C$ rispetto a $C$ è nullo. Questa è una equazione pura del moto. Essendo il sistema piano abbiamo inoltre $\underline{\omega}=\omega\underline{k}$, $\omega\in\mathbb{R}$, quindi:

$$\underline{K}_C = \underline{\underline{I}}_C\,\underline{\omega} = I_{C,z}\,\omega\underline{k}$$

e così

$$\dot{\underline{K}}_C = I_{z,C}\,\dot{\omega}\underline{k},$$

da cui

$$I_{z,C}\,\dot{\omega}\underline{k} = R\underline{j}\times(mg\sin\alpha\,\underline{i} - mg\cos\alpha\,\underline{j})$$
$$= -mgR\sin\alpha\,\underline{k}$$

ovvero

$$I_{z,C}\,\dot{\omega} = -mgR\sin\alpha.$$

Il momento di inerzia $I_{z,C}$ del disco vale $I_{z,C}=\frac{3}{2}mR^2$. Determiniamo ora la velocità angolare dalla legge di distribuzione delle velocità per l'atto di moto:

$$\underline{v}(G) = \underline{v}(C) + \underline{\omega}\times(G-C)$$

da cui

$$\dot{s}\underline{i} = \omega\underline{k}\times R\underline{j} = -\omega R\underline{i}$$

e infine $\omega = -\dot{s}/R$. La seconda equazione cardinale della dinamica diventa allora:

$$\frac{3}{2}mR^2\cdot\left(-\frac{\ddot{s}}{R}\right) = -mgR\sin\alpha$$

che dà

$$\ddot{s} = \frac{2}{3}g\sin\alpha.$$

Inserendo questo valore nella prima equazione cardinale della dinamica troviamo infine:

$$\frac{2}{3} mg \sin\alpha \, \underline{i} = mg \sin\alpha \, \underline{i} - mg \cos\alpha \, \underline{j} + \underline{\Phi}_C ,$$

da cui determiniamo la reazione vincolare

$$\underline{\Phi}_C = -\frac{1}{3} mg \sin\alpha \, \underline{i} + mg \cos\alpha \, \underline{j} .$$

Vediamo che $\underline{\Phi}_C$ non è in generale ortogonale al piano inclinato, a meno che non sia $\alpha = 0$ (ma in tal caso il disco è fermo, perché la sola forza peso non può metterlo in moto lungo il piano).

# Equazioni cardinali della statica

Consideriamo un punto materiale $(P, m)$ soggetto all'azione di forze e vincoli <u>indipendenti dal tempo</u>. Per la seconda legge della meccanica avremo:

$$m\underline{a}_P = \sum_j \underline{F}_j^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} \underline{f}_j^{(a,i)} + \sum_j \underline{\Phi}_j ,$$

dove $\underline{F}_j^{(a,e)} \in \mathbb{R}^3$ indica la j-esima forza attiva esterna agente su P, $\underline{f}_j^{(a,i)}$ la j-esima forza attiva interna (cioè dovuta all'azione di eventuali altri punti del sistema su P) e $\underline{\Phi}_j \in \mathbb{R}^3$ la j-esima reazione vincolare. Poniamo complessivamente:

$$\underline{F}(P, \underline{v}_P) := \sum_j \underline{F}_j^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} \underline{f}_j^{(a,i)} + \sum_j \underline{\Phi}_j ,$$

immaginando che le forze attive (esterne ed interne) agenti su P possano dipendere in generale sia dalla posizione sia dalla velocità di P.

<u>Def</u>. Diciamo che una configurazione $P = P^* \in \mathbb{R}^3$ è di <u>equilibrio</u> per P se

$$\underline{F}(P^*, \underline{0}) = \underline{0} ,$$

ovvero se è una posizione in cui la forza totale $\underline{F}$, valutata inoltre per $\underline{v}_P = \underline{0}$, è nulla.

Diremo inoltre che la configurazione $P = P^*$ è di <u>quiete</u> se l'equazione

$$m\underline{a}_P(t) = \underline{F}(P(t), \underline{v}_P(t))$$

ammette la soluzione costante $P(t) = P^* \ \forall t > 0$ a partire dalle condizioni inizial $P(0) = P^*$, $\underline{v}_P(0) = \underline{0}$.

<u>Oss.</u> Una configurazione di quiete è necessariamente anche di equilibrio. Infatti se esiste la soluzione costante $P(t) = P^*$ allora in corrispondenza di essa si avrà $\underline{v}_P = \underline{a}_P = \underline{0}$ e dunque $\underline{F}(P^*, \underline{0}) = \underline{0}$.

Viceversa, una configurazione di equilibrio può non essere di quiete perché da essa possono originarsi più soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} m\underline{a}_P = \underline{F}(P, \underline{v}_P) \\ P(0) = P^* \\ \underline{v}_P(0) = \underline{0} \end{cases}$$

se questo non ammette soluzione unica.

Equilibrio di sistemi di punti materiali

Consideriamo ora un sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$. Diremo che il sistema è in equilibrio se ogni $P_i$ è in equilibrio; quindi quando il sistema si trova in una configurazione di equilibrio $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ la forza totale agente su ogni singolo punto dev'essere nulla.

Dividiamo, per comodità, l'insieme dei punti $\{P_i\}_{i=1}^N$ nel sottoinsieme dei punti liberi, individuati da un sottoinsieme di indici $I_0 \subseteq \{1, \dots, N\}$, sui quali non sono imposti vincoli e su cui agiscono quindi solo forze attive (esterne e interne) e nel sottoinsieme dei punti vincolati, individuati dal sottoinsieme di indici $I^{(v)} := \{1, \dots, N\} \setminus I_0$. Avremo allora:

$$\begin{cases} m_i \underline{a}_i = \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)}, & \forall i \in I_0 \\ m_i \underline{a}_i = \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} + \sum_j \underline{\Phi}_j, & \forall i \in I^{(v)} \end{cases}$$

e quindi in una configurazione di equilibrio $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ del sistema varrà:

$$\begin{cases} \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} = \underline{0}, & \forall i \in I_0 \\ \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} + \sum_j \underline{\Phi}_{ij} = \underline{0}, & \forall i \in I^{(v)}. \end{cases} \quad (*)$$

Prop. (Equazioni cardinali della statica)

Condizione necessaria affinché la configurazione $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ sia di equilibrio è che valgano le seguenti due equazioni:

$$\underline{R}^{(e)} = \underline{0}, \qquad \underline{M}_Q^{(e)} = \underline{0}, \qquad (**)$$

dove $\underline{R}^{(e)}$ è il risultante delle forze esterne (attive e vincolari) ed $\underline{M}_Q^{(e)}$ è il momento risultante delle forze esterne rispetto ad un polo qualsiasi $Q \in \mathbb{R}^3$.

Oss. Le equazioni (**) sono dette rispettivamente prima e seconda equazione cardinale della statica.

Dim. Supponiamo che la configurazione $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ sia di equilibrio. Allora sommando su $i$ abbiamo:

$$\underline{0} = \sum_{i \in I_0} \left( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \right)$$

$$+ \sum_{i \in I^{(v)}} \left( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} + \sum_j \underline{\Phi}_{ij} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)}}_{= \underline{0} \text{ per il terzo principio della meccanica}} + \sum_{i \in I^{(v)}} \sum_j \underline{\Phi}_{ij}$$

$$= \underline{R}^{(a,e)} + \underline{R}^{(v)} = \underline{R}^{(e)},$$

da cui la prima equazione cardinale della statica.

Moltiplicando ora vettorialmente a sinistra per $P_i - Q$, dove $Q \in \mathbb{R}^3$ è un polo qualsiasi, e sommando ancora su $i$ otteniamo:

$$\underline{0} = \sum_{i\in I_0} \left( \sum_j (P_i - Q)\times \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} (P_i-Q)\times \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \right)$$

$$+ \sum_{i\in I^{(v)}} \left( \sum_j (P_i-Q)\times \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} (P_i-Q)\times \underline{f}_{ij}^{(a,i)} + \sum_j (P_i-Q)\times \underline{\underline{\Phi}}_{ij} \right)$$

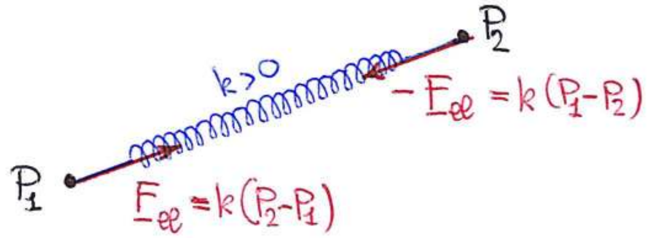
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_j (P_i-Q)\times \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} (P_i-Q)\times \underline{f}_{ij}^{(a,i)}}_{=\underline{0} \text{ per il terzo principio della meccanica}} + \sum_{i\in I^{(v)}}\sum_j (P_i-Q)\times \underline{\underline{\Phi}}_{ij}$$

$$= \underline{M}_Q^{(a,e)} + \underline{M}_Q^{(v)} = \underline{M}_Q^{(e)},$$

da cui la seconda equazione cardinale della statica. $\boxtimes$

Oss. Questa Proposizione non fa intervenire in alcun modo il vincolo di rigidità.

Oss. Le equazioni cardinali della statica forniscono in generale una condizione necessaria ma non sufficiente per l'equilibrio di un sistema di punti materiali. Ciò significa che le equazioni possono anche essere soddisfatte quando il siste= ma non si trova in una configurazione di equilibrio. Consideriamo ad esem= pio due punti materiali collegati da una molla:




chiaramente $\underline{R}^{(e)} = \underline{M}_Q^{(e)} = \underline{0}$, perché le uniche forze agenti sul sistema sono le forze elastiche interne $\underline{F}_{el}$, $-\underline{F}_{el}$, tuttavia nessuno dei due punti è in equilibrio perchè la forza totale agente su ciascuno di essi <u>non</u> è nulla.

## Principio dei lavori virtuali (PLV)

<u>Teorema</u> Supponiamo che i vincoli del sistema siano <u>ideali</u>. Condizione <u>necessaria e sufficiente</u> affinchè la configurazione $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ sia di equilibrio è che

$$\delta L^{(a)} \leq 0$$

per ogni spostamento virtuale dei $P_i$ a partire da $\{P_i^*\}_{i=1}^N$.

<u>Oss.</u> In questo enunciato, $\delta L^{(a)}$ indica il lavoro virtuale delle sole forze attive (esterne e interne).

<u>Dim.</u> Ricordiamo che un vincolo ideale su un punto $P_i$ è un vincolo tale che $\delta L_i^{(v)} = \underline{\Phi}_i \cdot \delta \underline{P}_i \geq 0$ per ogni spostamento virtuale $\delta \underline{P}_i$.

(i) Facciamo vedere che la condizione $\delta L^{(a)} \leq 0$ è necessaria. Supponiamo che $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ sia una configurazione di equilibrio. Varranno quindi le equazioni $(*)$, da cui moltiplicando scalarmente per $\delta \underline{P}_i$ e sommando su $i$ otteniamo:

$$0 = \sum_{i \in I_0} \left( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \cdot \delta \underline{P}_i \right)$$

$$+ \sum_{i \in I^{(v)}} \left( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_j \underline{\Phi}_j \cdot \delta \underline{P}_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_{i \in I^{(v)}} \sum_j \underline{\Phi}_{ij} \cdot \delta \underline{P}_i$$

$$= \sum_{i=1}^N \left( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \right) \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_{i \in I^{(v)}} \sum_j \underline{\Phi}_{ij} \cdot \delta \underline{P}_i$$

$$= \delta L^{(a)} + \delta L^{(v)}$$

da cui $\delta L^{(a)} = -\delta L^{(v)} \leq 0$.

(ii) Facciamo ora vedere che la condizione $\delta L^{(a)} \leq 0$ è sufficiente.
Supponiamo quindi che valga:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \Big( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \Big) \cdot \delta \underline{P}_i$$

$$= \sum_{i\in I_0} \Big( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \Big) \cdot \delta \underline{P}_i$$

$$+ \sum_{i\in I^{(a)}} \Big( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \Big) \cdot \delta \underline{P}_i , \quad \forall \delta \underline{P}_i,\ i = 1,\dots,N.$$

Consideriamo dapprima solo i punti liberi, cioè $\underbrace{i \in I_0}_{\text{e prendiamo } \delta\underline{P}_i = \underline{0}\ \forall i\in I^{(a)}}$. Chiaramente ogni spostamento virtuale $\delta \underline{P}_i$ sarà invertibile, in quanto il punto non è vincolato, e quindi da

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i\in I_0} \Big( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \Big) \cdot \delta \underline{P}_i \leq 0, \quad \forall \delta \underline{P}_i,\ i \in I_0$$

deduciamo in particolare

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i\in I_0} \Big( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \Big) \cdot \delta \underline{P}_i = 0, \quad \forall \delta \underline{P}_i,\ i \in I_0$$

ossia, per l'arbitrarietà dei $\delta \underline{P}_i$,

$$\sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} = \underline{0}, \quad \forall i \in I_0.$$

Quindi per i punti liberi valgono le equazioni (*), che dicono che essi sono in equilibrio.

Poiché il contributo del lavoro virtuale delle forze attive (dei punti liberi) è nullo, otteniamo in particolare:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i\in I^{(a)}} \Big( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j\neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \Big)\cdot \delta \underline{P}_i \leq 0$$

per ogni $\delta\underline{P}_i$, $i\in I^{(a)}$. Ora, per far vedere che le equazioni (*) sono soddisfatte anche dai punti vincolati dobbiamo determinare opportune reazioni vincolari $\underline{\underline{\Phi}}_{ij}$ ammissibili, cioè effettivamente esplicabili dai vincoli supposti ideali, che garantiscono l'equilibrio. Se definiamo:

$$\underline{\underline{\Phi}}_{ij} := -\underline{F}_{ij}^{(a,e)} - \underline{f}_{ij}^{(a,i)}$$

abbiamo in particolare l'equilibrio purché questo sia un sistema di reazioni vincolari ammissibile, cioè compatibile con l'ipotesi di vincoli ideali. Ma:

$$\begin{aligned}\delta L^{(v)} &= \sum_{i\in I^{(a)}} \sum_j \underline{\underline{\Phi}}_{ij}\cdot\delta\underline{P}_i \\ &= -\sum_{i\in I^{(a)}} \Big( \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_j \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \Big)\cdot\delta\underline{P}_i \\ &= -\delta L^{(a)} \geq 0,\end{aligned}$$

dunque i vincoli possono esplicare il suddetto sistema di reazioni vincolari, che danno la validità delle equazioni (*) anche per i punti vincolati. ☒

Il principio dei lavori virtuali, rispetto alle equazioni cardinali della statica, dà una condizione anche sufficiente per l'equilibrio di un sistema materiale qualsiasi, sotto l'ipotesi aggiuntiva di vincoli ideali