

## **ONDE ELETTROMAGNETICHE:**

- Dipoli oscillanti come sorgenti del campo e.m.: il potenziale vettore ritardato
- Cenni alle proprietà elettromagnetiche classiche della materia

# Sorgenti del campo elettromagnetico

**LE EQUAZIONI DI MAXWELL  
CI PERMETTONO  
DI CONCLUDERE CHE**



**CAMPO**

**SORGENTE**

ELETTRICO  
STATICO



CARICHE FISSE

MAGNETICO  
STATICO



CARICHE IN  
MOTO UNIFORME

ELETTROMAGNETICO



CARICHE  
ACCELERATE

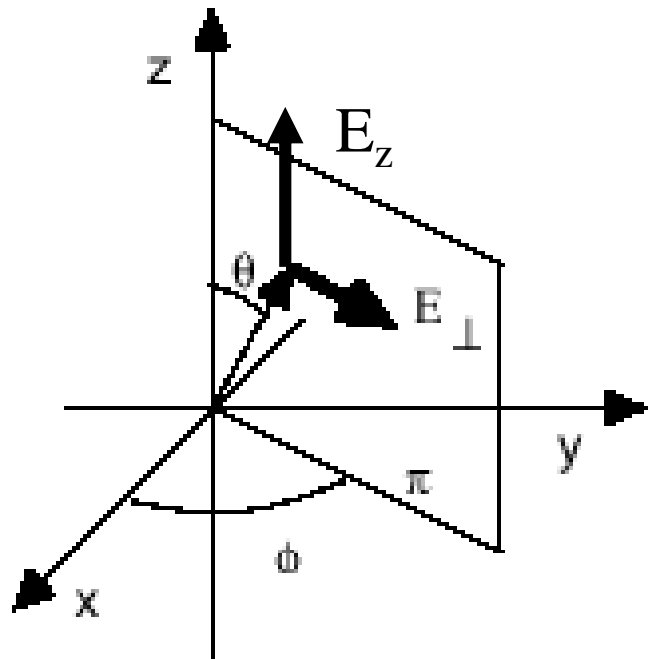
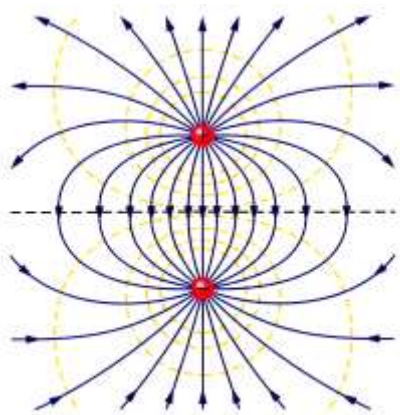
# ***DIPOLO ELETTRICO***

Prendiamo un dipolo elettrico statico  $\mathbf{p}_0$ , creerà un campo elettrico statico intorno a sé, come abbiamo visto.

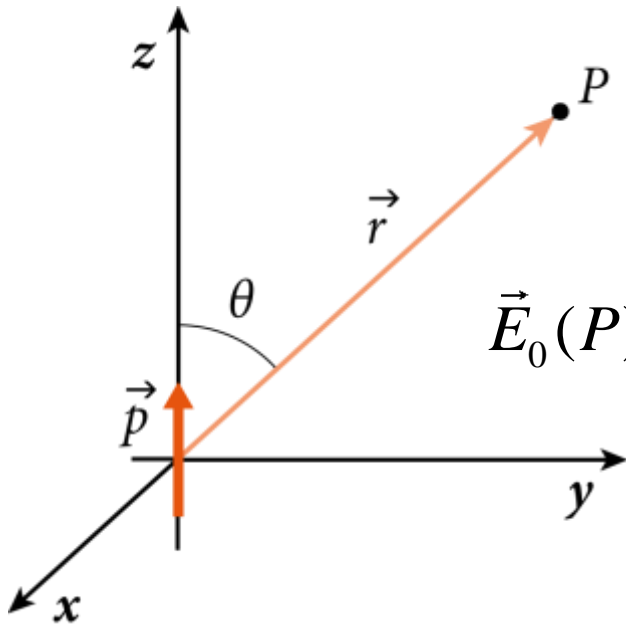
Se le cariche del dipolo vengono messe in oscillazione con una legge  $\mathbf{p}(\mathbf{t}) = \mathbf{p}_0 \sin \omega \mathbf{t}$  il campo elettrico sarà dipendente dal tempo.

Ricordando che nel caso statico.....

$$\begin{cases} E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3zx}{r^5} \\ E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3zy}{r^5} \\ E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3\cos^2(\theta) - 1}{r^3} \end{cases}$$

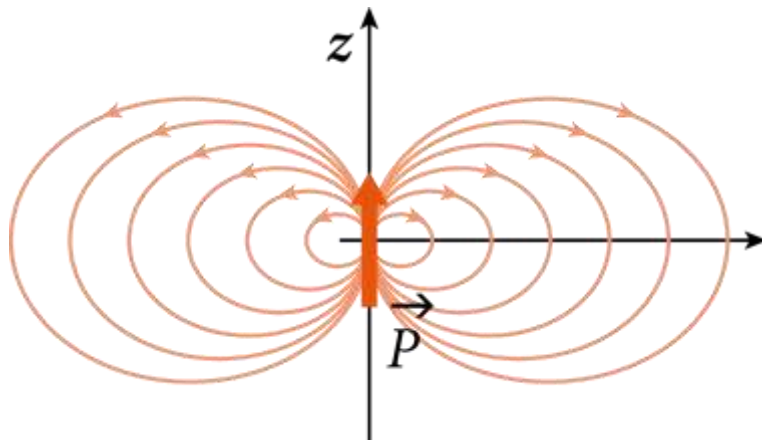


Il campo elettrico generato da un dipolo statico (trattato in precedenza) può essere scritto in modo compatto come:

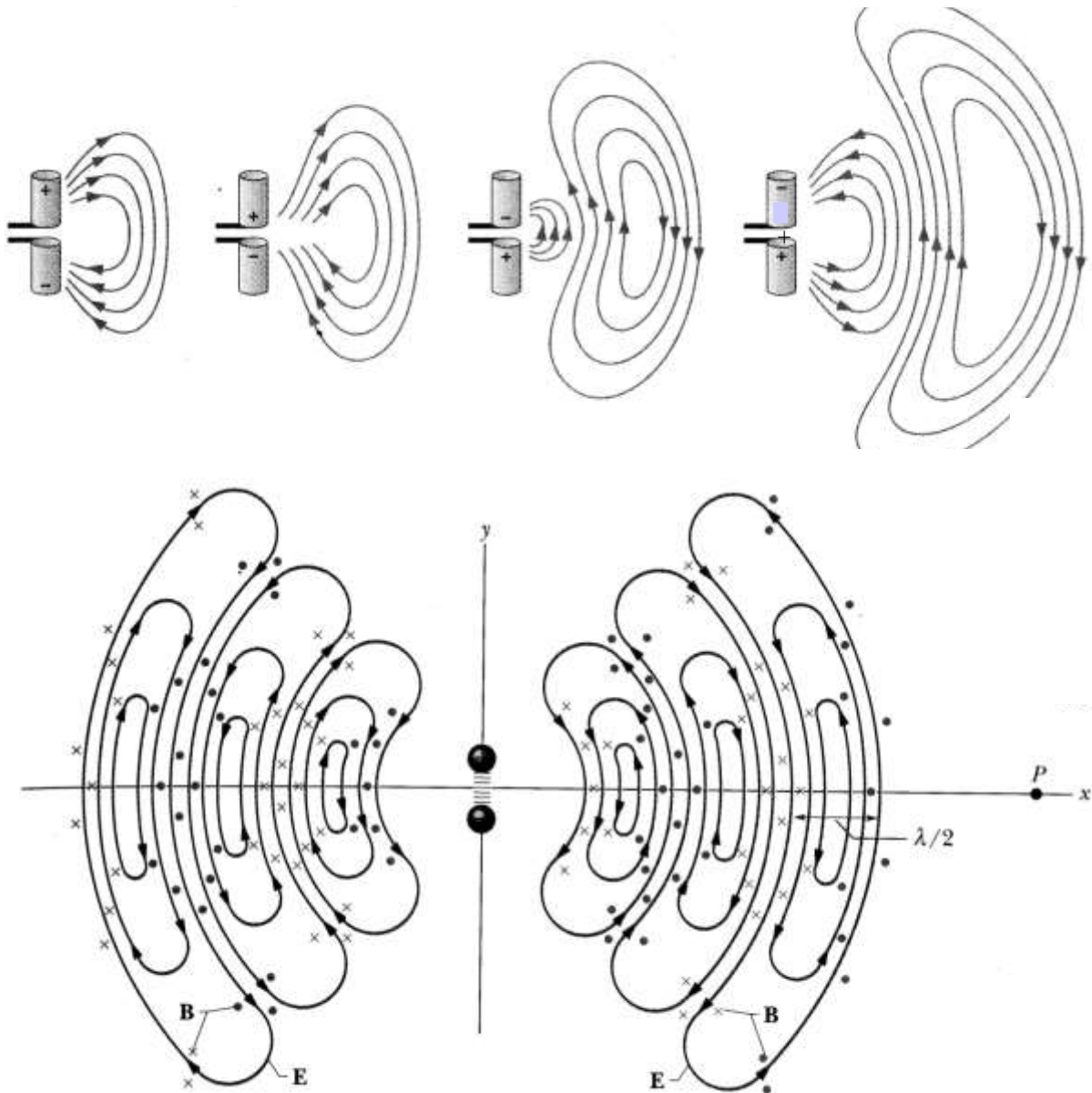
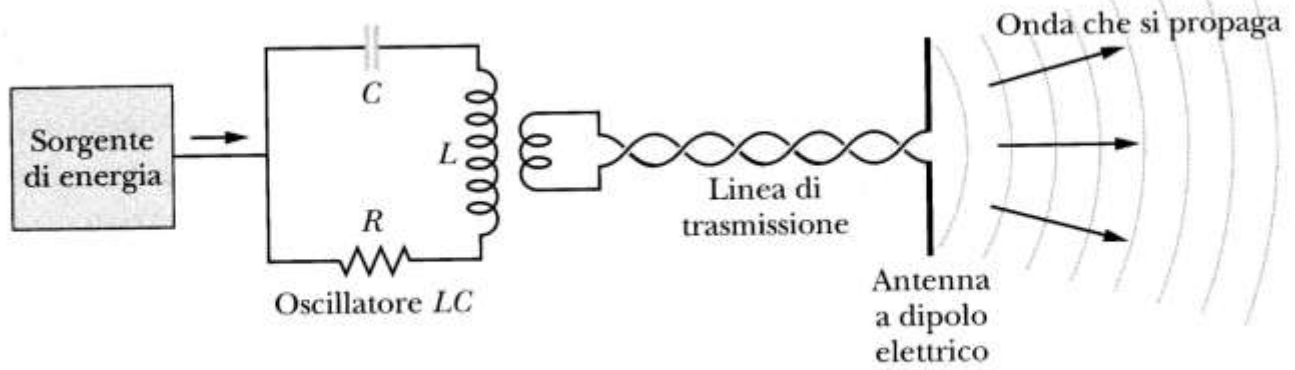


$$\vec{E}_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \right] \vec{r} - \left[ \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \right\}$$

Con linee di campo:



Vediamo un esempio di generatore di onde e.m.  
assimilabile ad un dipolo elettrico oscillante



**Vediamo di calcolare il campo e.m. prodotto da un dipolo oscillante usando il Potenziale VETTORE.**

Il campo magnetostatico prodotto da una distribuzione continua di correnti ha le seguenti equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

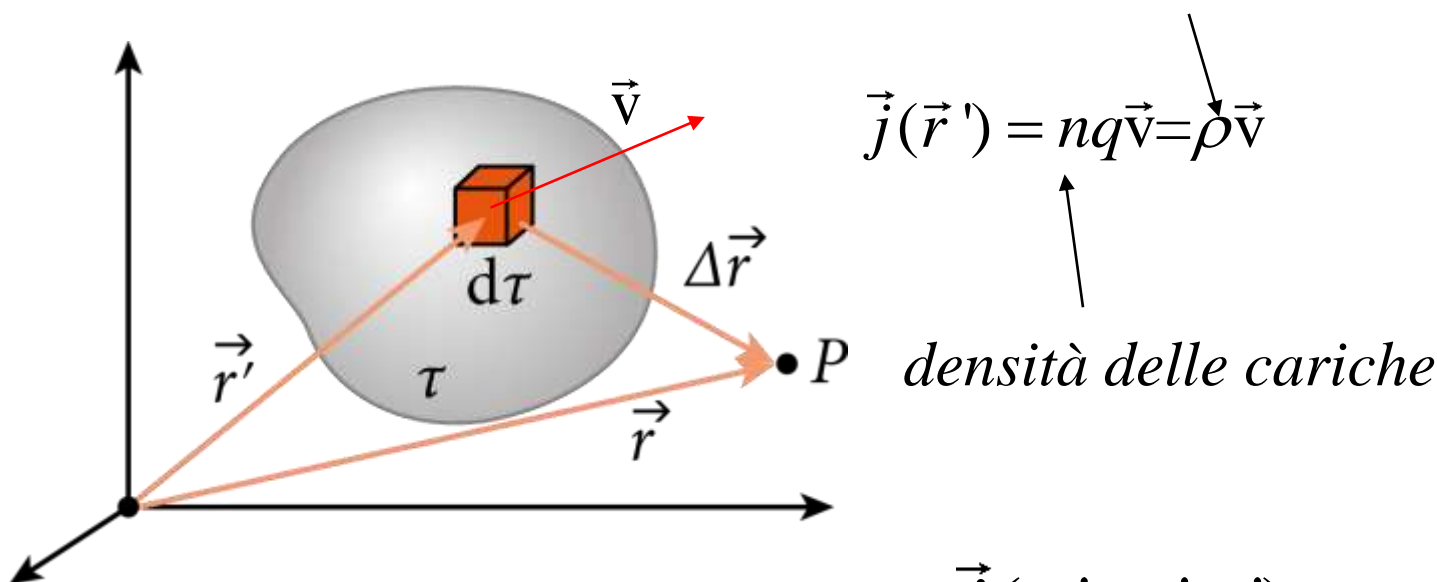
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

**Abbiamo visto che è possibile introdurre il Potenziale VETTORE A.**

Tale per cui:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

*densità dei carica*



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

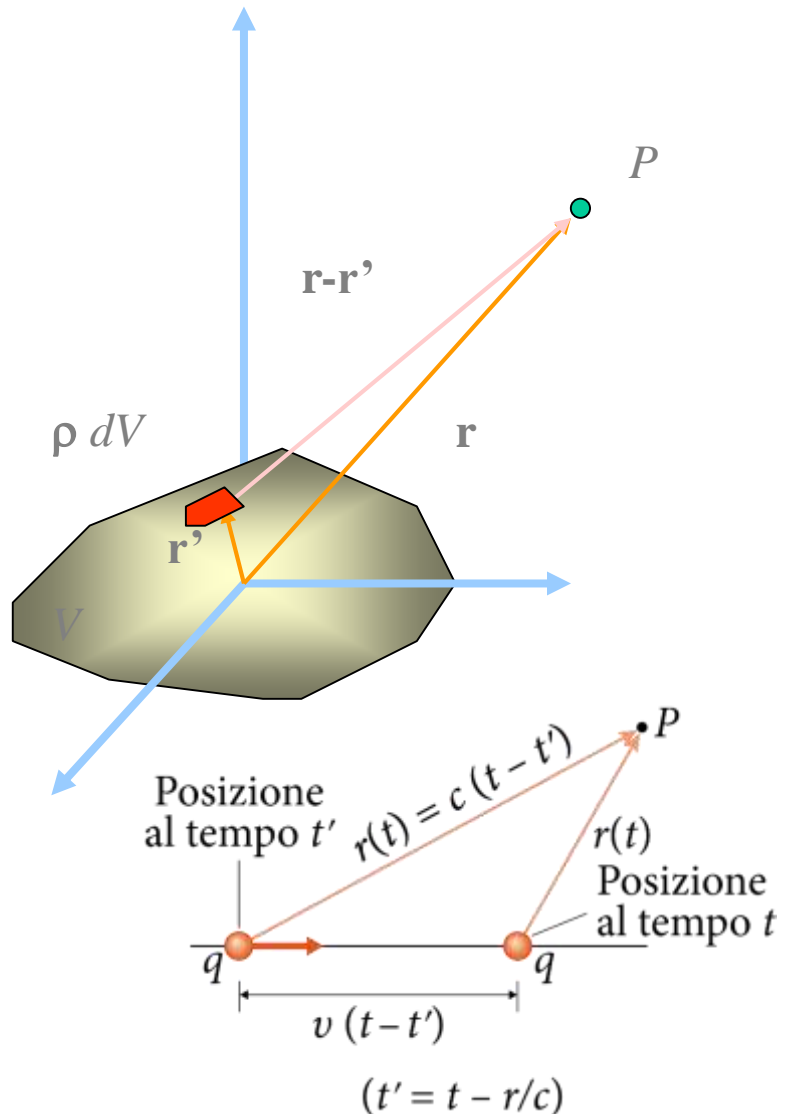
# Campo generato da cariche in moto ottenuto con il potenziale ritardato

Sappiamo che la differenza tra caso statico e dinamico è che i campi  $E$  e  $B$  si propagano in un tempo finito a velocità  $c$

Possiamo determinare le soluzioni considerando che al tempo  $t$  nel punto  $r$  i campi e quindi i potenziali sono dovuti alla configurazione di carica all'istante precedente.

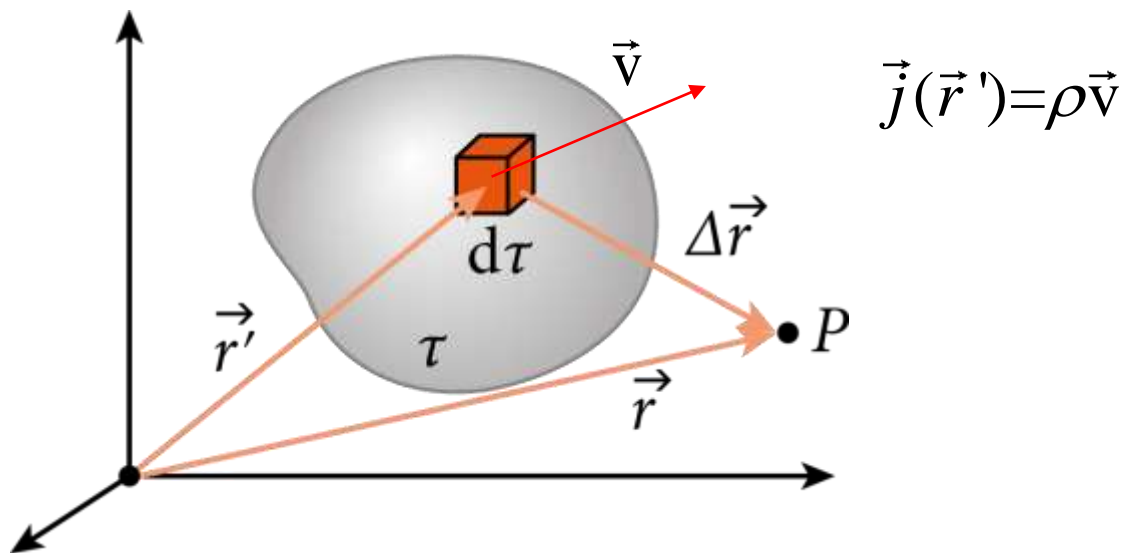
$$\rho\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)$$

$$\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) = \rho \vec{v}$$



Avremo allora il così detto potenziale ritardato

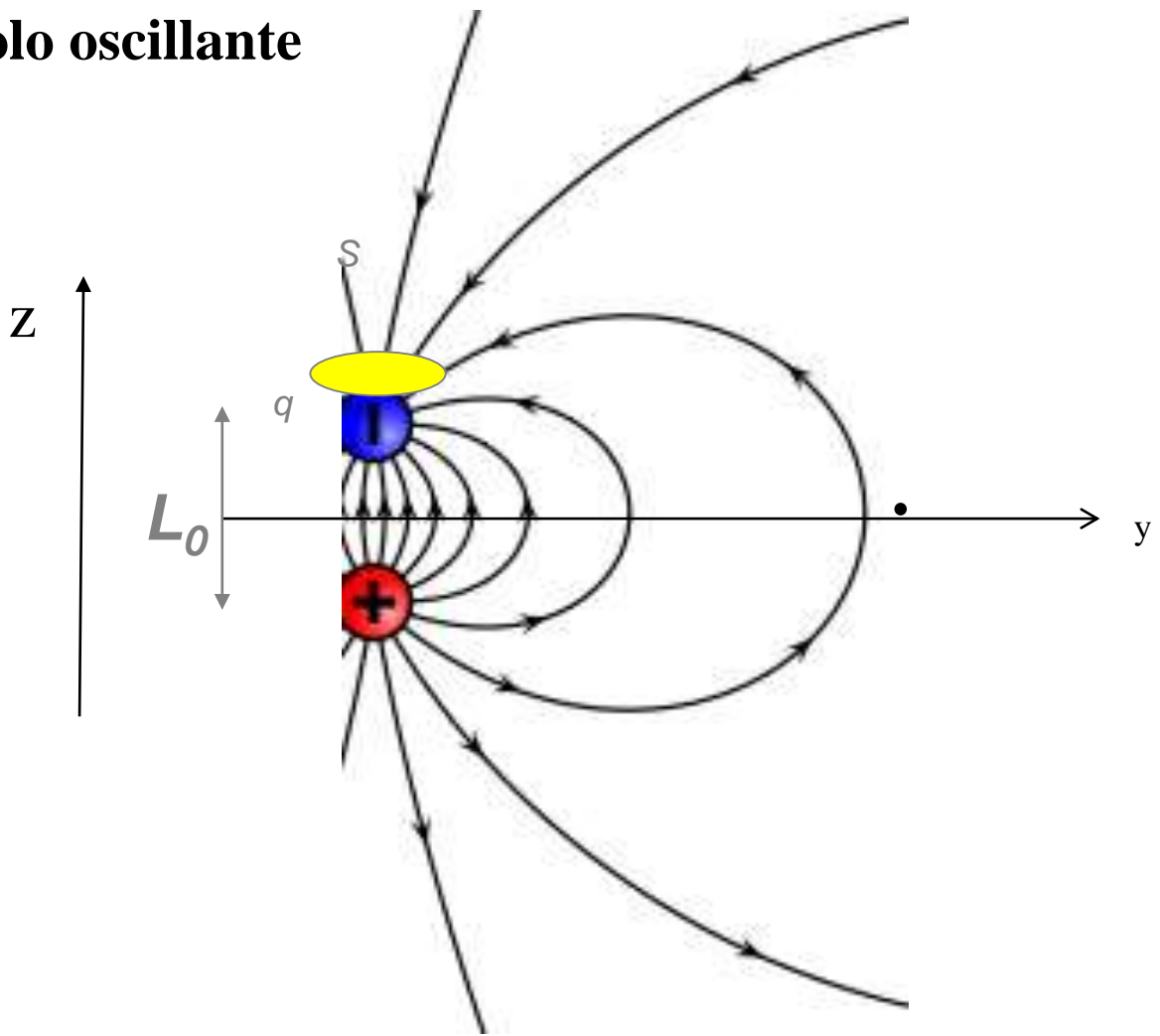
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0 \int_{V'} \frac{\vec{j} \left( t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) d\tau}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$



$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$



# Dipolo oscillante

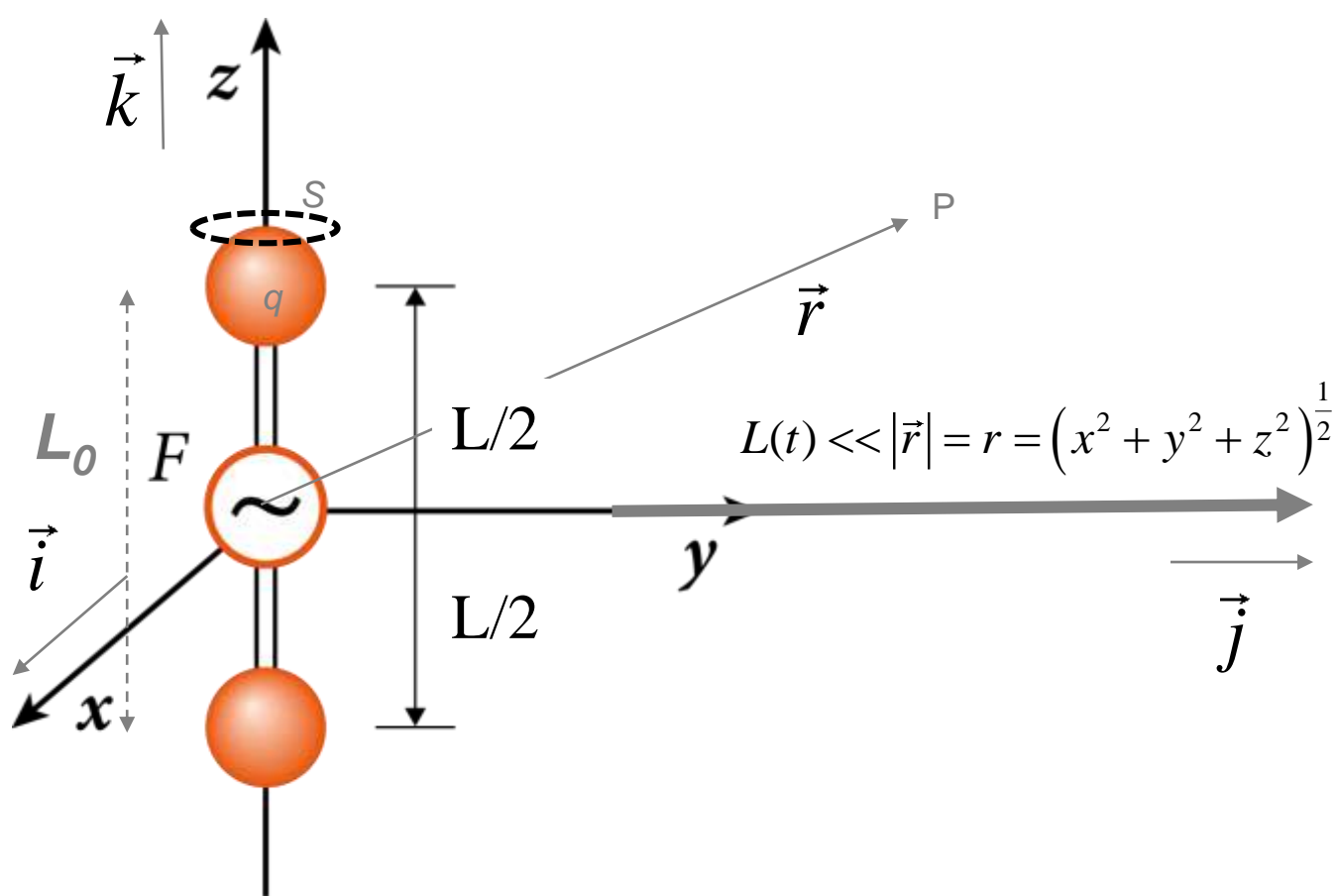


$$L(t) = L_0 \sin \omega t$$

$$p(t) = q_0 L(t) = q_0 L_0 \sin \omega t = p_0 \sin \omega t$$

$$\vec{j}_q = \frac{dq}{d\tau} \vec{v} = \frac{dq}{d\tau} \frac{dL}{dt} \vec{k}$$

# Calcolo del potenziale vettore e del campo B



$$\vec{j}_{q+} = \rho_+ \frac{dL/2}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{j}_{q-} = -\rho_- \frac{dL/2}{dt} \vec{k}$$

Scriviamo il potenziale ritardato

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{cilindro(SL_0)} \frac{\vec{j}_q \left( t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{cilindro(SL_0)} \frac{\vec{j}_q \left( t - \frac{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}{c} \right)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} d\tau$$

Se  $L(t) \ll |\vec{r}| \quad \Rightarrow \quad \vec{r} - \vec{r}' \approx \vec{r}$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{cilindro(SL_0)} \frac{\vec{j}_q \left( t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c} \right)}{|\vec{\mathbf{r}}|} dS dz$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{cilindro(SL_0)} \frac{[\vec{j}]_{t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|} dS dz \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{cilindro(SL_0)} \frac{[\rho \vec{v}]_{t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|} \vec{k} dS dz$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[ q \frac{dL}{dt} \vec{k} + q \frac{dL}{dt} \vec{k} \right]_{t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|} \vec{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[ q \frac{dL}{dt} \right]_{t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|} \vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[ \frac{dL}{dt} \right]_{t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|} \vec{k} q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[ \frac{dp}{dt} \right]_{t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|} \vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \omega q L_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = = \vec{k} \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{\mathbf{r}}|} \frac{dp\left(t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}\right)}{dt} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{p}\left(t - \frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}\right) \vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{k} = A_z \vec{k}$$

$$\text{con } p\left(t - \frac{r}{c}\right) = qL_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] = p_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \omega qL_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{k} = A_z \vec{k}$$

Ricordando che

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ -\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \omega q L_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{k} = A_z \vec{k}$$

Ricordando che

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \left( x^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega p_0 \left\{ \frac{\omega}{c} \frac{y}{r^2} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{y}{r^3} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega p_0 \left\{ -\frac{\omega}{c} \frac{x}{r^2} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{x}{r^3} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}$$

$$B_z = 0$$

Se ci mettiamo a grande distanza dalla sorgente (r grande)

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{c} \frac{y}{r^2} \sin \left[ \omega \left( \frac{r}{c} - t \right) \right]$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{c} \frac{x}{r^2} \sin \left[ \omega \left( \frac{r}{c} - t \right) \right]$$

$$B_z = 0$$

Lungo l'asse  $y$  quindi coordinate  $(0, y, 0)$  abbiamo

$$B_x(0, y, 0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{y} \sin \left[ \omega \left( \frac{y}{c} - t \right) \right]$$

$$B_y(0, y, 0) = 0$$

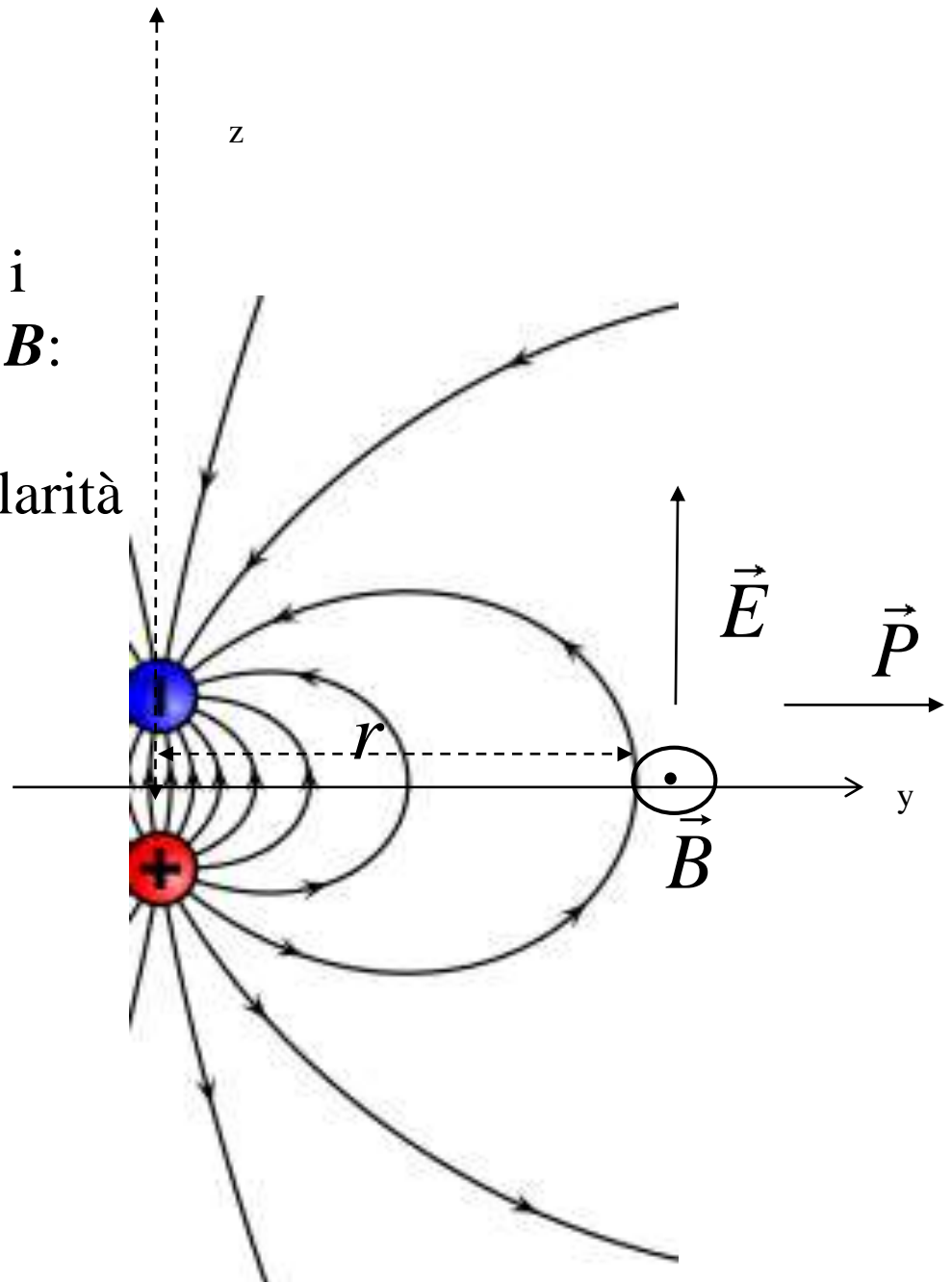
$$B_z(0, y, 0) = 0$$

Ricordando:

- relazione tra i moduli di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B}$$

- perpendicolarità tra i campi
- vettore di Poynting

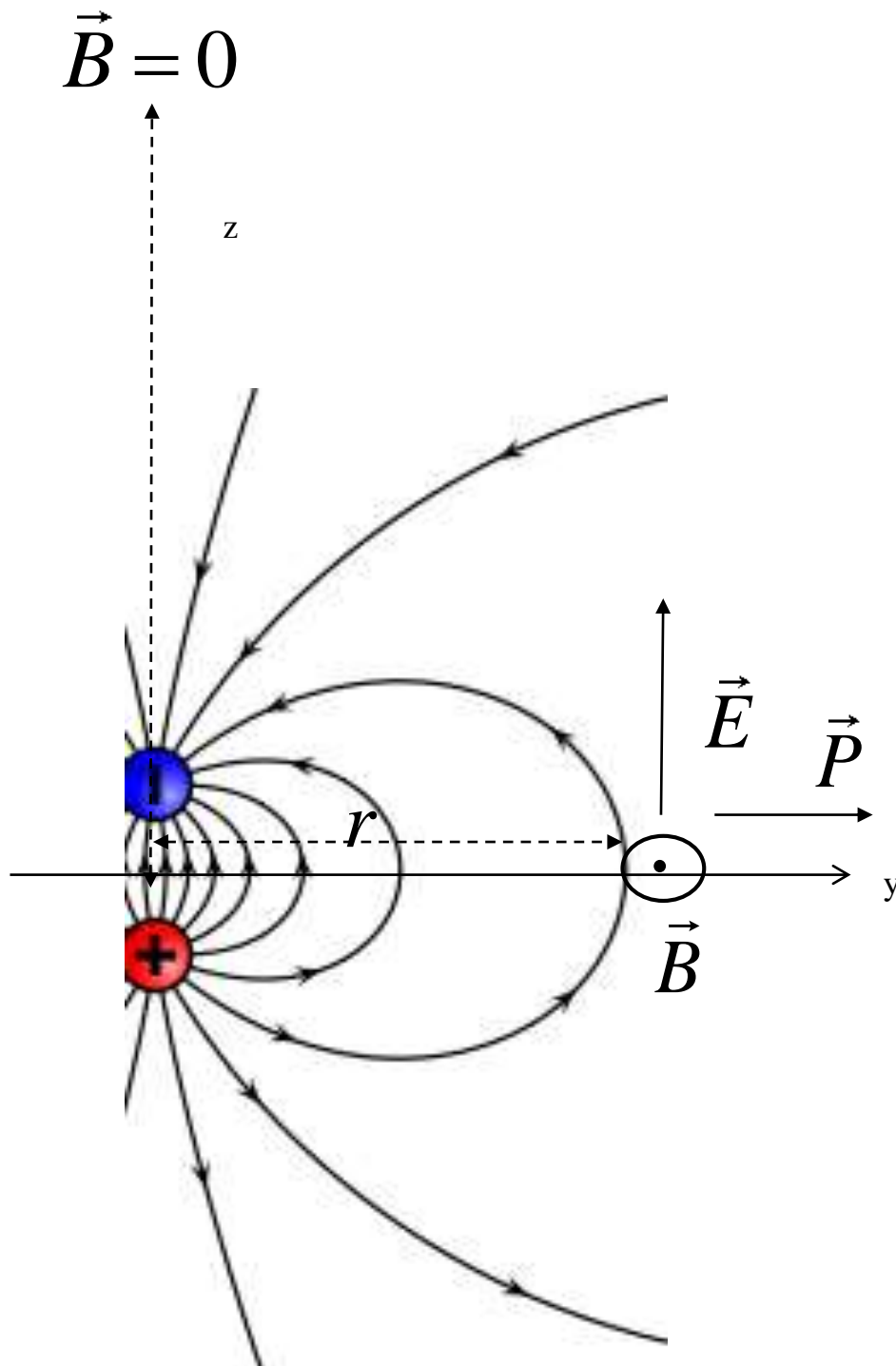


Lungo l'asse z quindi coordinate  $(0,0,z)$  abbiamo

$$B_x(0,0,z) = 0$$

$$B_y(0,0,z) = 0$$

$$B_z(0,0,z) = 0$$



Lungo l'asse  $\mathbf{r}$  inclinato  $\vartheta$  rispetto al piano  $xy$  abbiamo

$$B(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \sin \vartheta \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{r} \sin \left[ \omega \left( \frac{r}{c} - t \right) \right]$$

$$B(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \sin \vartheta \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{r} \sin [kr - \omega t]$$

$$E(\vec{r}) = -c \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \sin \vartheta \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{r} \sin [kr - \omega t]$$

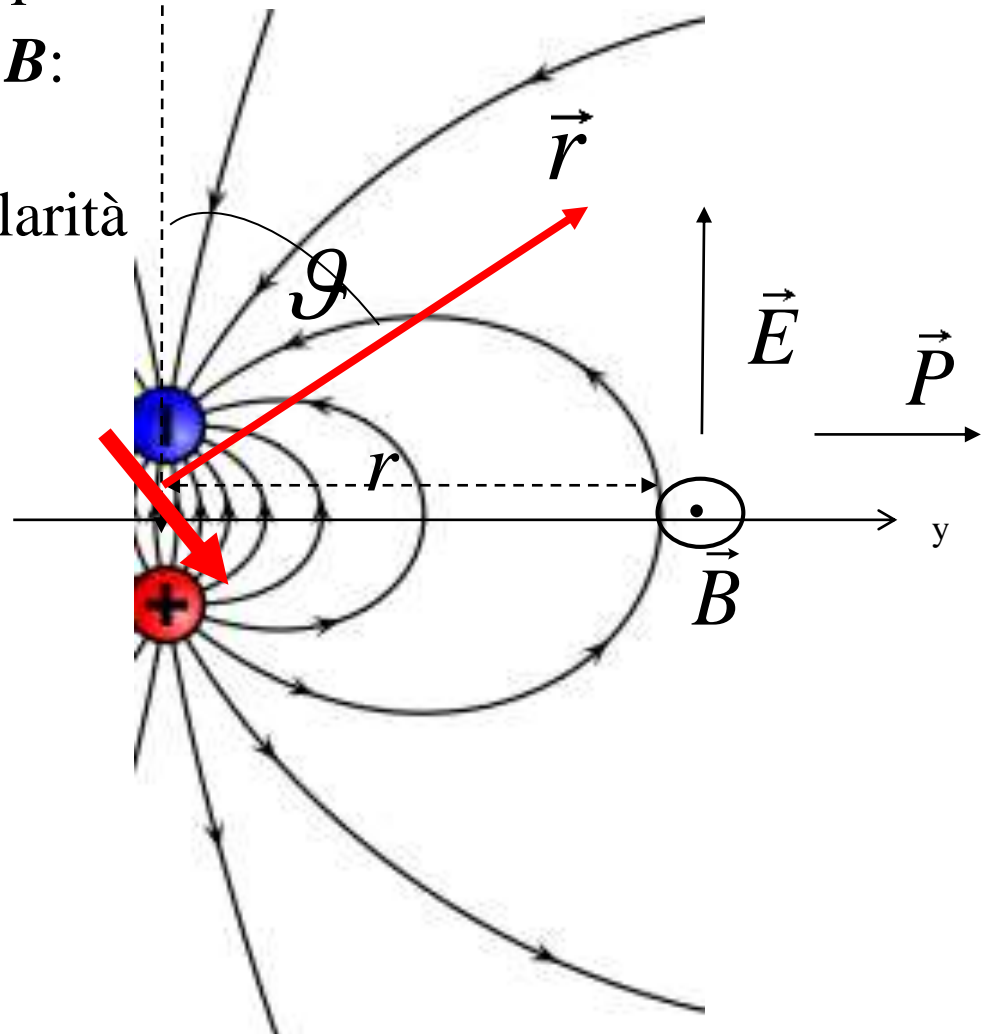
$z$

Ricordando:

- relazione tra i  
moduli di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B}$$

- perpendicolarità  
tra i campi
- vettore di  
Poynting





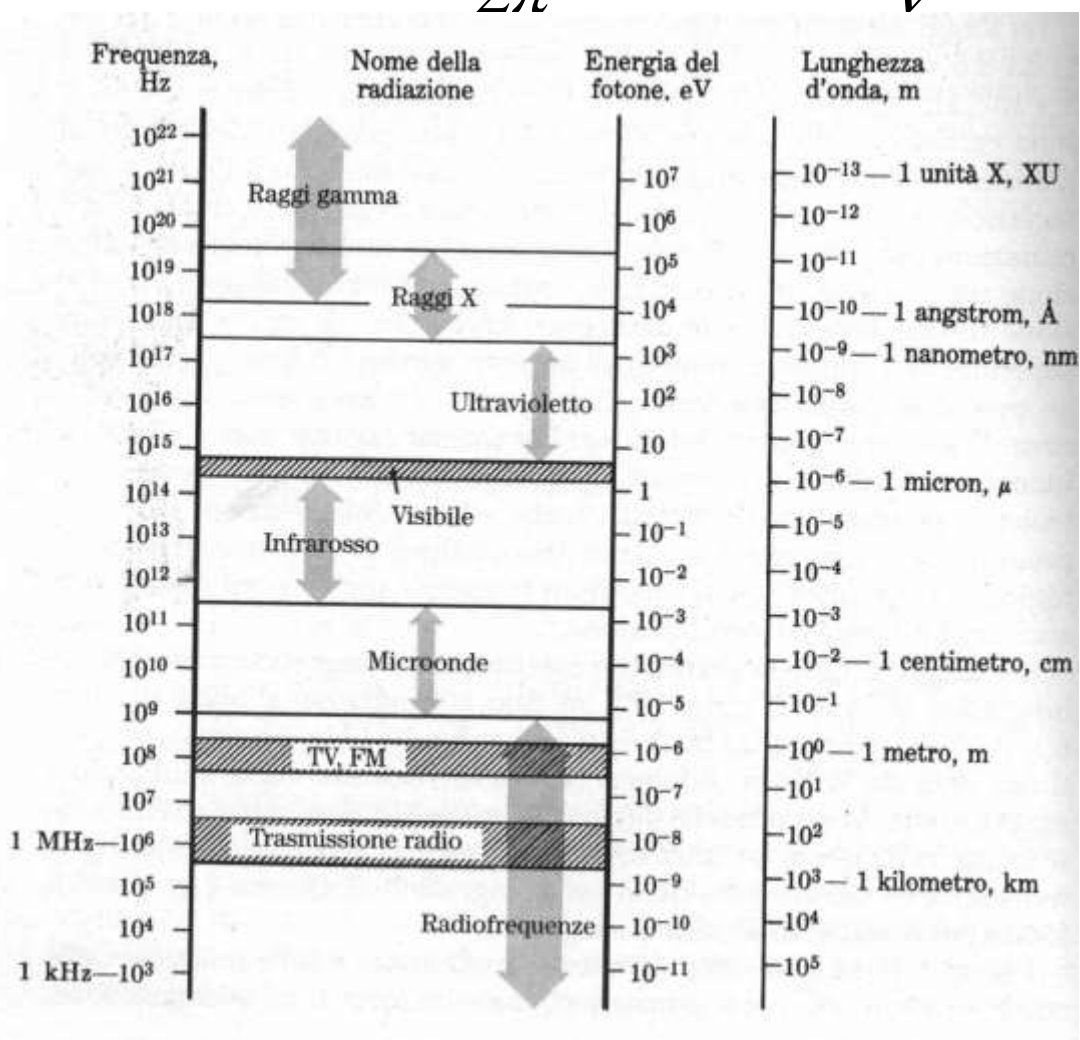
# Spettro delle onde elettromagnetiche

Se consideriamo le onde e.m. sinusoidale piane di forma  $\vec{A} = \vec{A}_0 \sin(kx - \omega t)$

abbiamo un'onda monocromatica con  $A=E$  o  $B$  e  $x$  la direzione di propagazione.

Tali tipi di onde possono coprire un grande campo di frequenze

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu}$$



*Equazioni di Maxwell nel vuoto*

• *Legge di Gauss per il campo E*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0}$$

• *Legge di Gauss per il campo B*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

• *Legge di Faraday-Henry*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}$$

• *Legge di Ampere-Laplace*

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_L + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}$$

# *Equazioni di Maxwell in un mezzo (omogeneo e isotropo)*

• *Legge di Gauss per il campo  $B$*   $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Perché il fatto che le linee di campo di  $B$  siano chiuse non dipende dal mezzo (si tratta di una proprietà intrinseca del campo magnetico, desunta dalla non esistenza del monopolo magnetico)

• *Legge di Faraday-Henry*  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Perché il fatto che un campo  $B$  variabile nel tempo in una regione di spazio generi un campo  $E$  non dipende dal mezzo, ma è una proprietà intrinseca del campo e.m. verificabile sperimentalmente.

•Legge di Gauss per il campo  $E$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_L + \rho_P}{\epsilon_0}$$

Ma ricordando che se nella regione di spazio prima nel vuoto viene aggiunto un mezzo omogeneo e isotropo a parità di distribuzione delle cariche libere abbiamo che il campo  $E$  diventa

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_L}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \epsilon_r \vec{E} = \frac{\rho_L}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_L}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

## • Legge di Ampere-Laplace

Densità di corrente generalizzata  
desunta dal principio di conservazione  
della carica.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left[ \vec{j}_L + \vec{j}_M + \vec{j}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

Ma ricordando che se nella regione di spazio prima nel vuoto viene aggiunto un mezzo omogeneo e isotropo a parità di distribuzione delle cariche libere abbiamo che i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  diventano

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}; \quad \vec{B} = \mu_r \vec{B}_0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \left[ \vec{j}_L + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \right]$$

$\Downarrow$

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_r} \right) = \mu_0 \left[ \vec{j}_L + \epsilon_0 \frac{\partial (\epsilon_r \vec{E})}{\partial t} \right]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mu_r \left[ \vec{j}_L + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

# *Cosa succede ad una onda elettromagnetica ?*

- Tanto per cominciare varia la sua velocità.

Nel vuoto  $v(\text{vuoto}) = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

In un mezzo  $v(\text{mezzo}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$

Infatti l'onda incidente con campi  $E_i$  e  $B_i$  mette in oscillazione i dipoli microscopici che iniziano ad irradiare creando un'onda secondaria con campi  $E_s$  e  $B_s$  che si sovrappone all'onda incidente.

L'effetto complessivo è la somma dei vettori  $E$  e  $B$ , principio di sovrapposizione

*onda incidente + onda secondaria*

dà origine ad un'onda con velocità  $v(\text{mezzo}) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$

con  $\mu_r \approx 1$

Si definisce indice di rifrazione

$$n = \frac{c}{v(\text{mezzo})} \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

•Cosa succede alle caratteristiche dell'onda e.m. quando passa dal vuoto ad un materiale ?

Un'onda e.m. è caratterizzata

dalla sua frequenza  $\omega=2\pi\nu$   
e dalla sua lunghezza d'onda  $\lambda$

Per l'onda incidente nel vuoto abbiamo:

$$\nu_i \quad \lambda_i$$

Per l'onda nel mezzo di costante dielettrica  $\epsilon_r=n^2$  abbiamo:

$$\nu_m \quad \lambda_m$$

Poiché la frequenza dipende solo dalla sorgente

$$\nu_i = \nu_m$$

$$\nu_i = \frac{c}{\lambda_i} = \nu_m = \frac{\nu}{\lambda_m} = \frac{c}{n\lambda_m} \Rightarrow \lambda_m = \frac{\lambda_i}{n}$$

Se l'indice di rifrazione dipende da  $\omega$

$$\nu = \frac{c}{n(\omega)} = \nu(\omega) \quad \text{fenomeno della dispersione}$$

## *Fenomeno della diffusione delle onde e.m. nella materia.*

Interazione delle onde e.m. con gli atomi di un materiale: atomi visti come elettroni legati a un nucleo positivo.

Quando un'onda e.m. incide sugli atomi di un materiale, il campo elettrico dell'onda interagisce con gli elettroni legati ai nuclei del materiale.

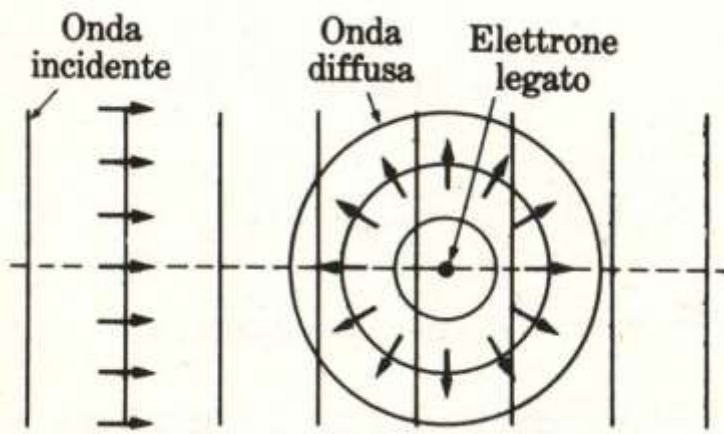
Agisce come una forza  $-eE$  e quindi fa lavoro dissipando energia del campo che viene convertita in energia del moto degli elettroni.

L'energia che viene assorbita dall'onda tende ad essere riemessa in tutte le direzioni con una frequenza che è, generalmente ma non sempre, la stessa dell'onda incidente.

L'onda riemessa si vede formata da 2 componenti:

1. si ricompone sovrapponendo all'onda incidente variandone velocità di propagazione e lunghezza d'onda;
2. non si ricompone e invade tutto l'angolo solido (diffusione).





Il processo di interazione del campo  $E$  dell'onda con gli elettroni della materia, e quindi la quantità di energia diffusa, dipende dalla frequenza della onda e.m. incidente.

Ovviamente il fascio primario è impoverito di energia.

Questo è una conseguenza delle frequenze proprie degli elettroni legati negli atomi.

(Vedi un modello di elettroni legati ai nuclei con forza di richiamo elastica e sottoposti al campo  $E$  dell'onda e.m.)

Con questo schema è possibile giustificare:

- il colore blu del cielo durante il giorno;
- il colore rosso dell'alba e del tramonto;

# **PROPRIETA' OTTICHE CLASSICHE DELLA MATERIA**

- Caratteristiche e.m. di un materiale;
- Modello semiclassico dell'interazione di una onda e.m. con la materia;
- Polarizzazione della materia

## **Caratteristiche e.m. della materia**

Descrivere le caratteristiche e.m. della materia significa capire e modellizzare

- i) come si propaga una onda e.m.,
- ii) qual è la sua velocità di propagazione,
- iii) come viene assorbita,
- iv) come viene ri-emessa.

## Teoria semi-classica

Se consideriamo un semplice modello della materia, come costituita da nuclei positivi e da elettroni ad essi legati, in modo da dare origine ad una struttura neutra dal punto di vista elettrico, abbiamo la situazione di figura (a):

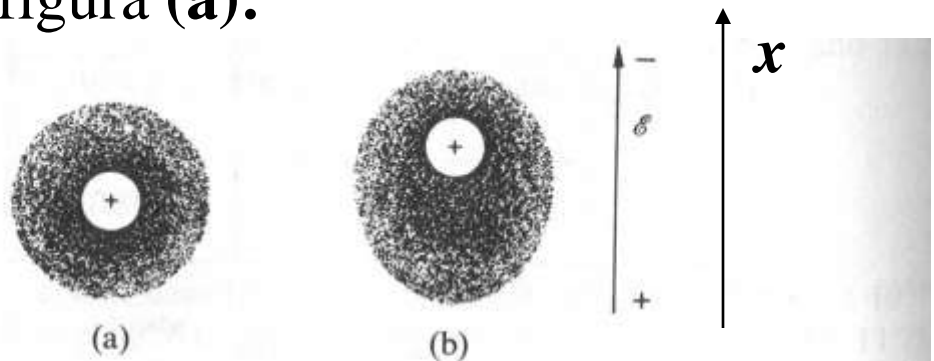


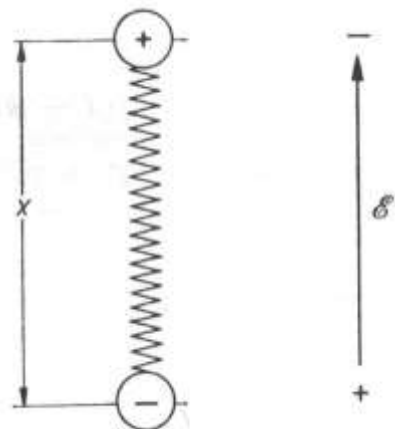
Figure 11.7. An atom is represented by a positively charged core and a surrounding, negatively charged electron cloud (a) in equilibrium and (b) in an external electric field.

Il campo elettrico dell'onda agisce sugli elettroni spostando il baricentro delle cariche negative da quello delle cariche positive (b).

Dando origine ad un dipolo elettrico atomico:

$$p = ex$$

dove  $x$  è la distanza tra i baricentri delle due cariche



Quando una onda e.m.

- i) con campo elettrico parallelo all'asse x;
- ii) con campo magnetico parallelo all'asse y;
- iii) con direzione di propagazione asse z

di equazioni:  $E_x(z, t) = E_0 e^{i(k_0 n z - \omega t)}$

$$B_y(z, t) = B_0 e^{i(k_0 n z - \omega t)}$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{è tipica dell'onda nel vuoto}$$

$n$  è l'indice di rifrazione

incontra l'atomo, sugli elettroni agiscono tre forze:

- i) la forza elettrica
- ii) la forza di richiamo nucleo-elettrone
- iii) una forza dissipativa.

$$\text{i)} \quad F_E = -eE_x$$

$$\text{ii)} \quad F_{el} = -kx$$

$$\text{iii)} \quad F_{dis} = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

Quindi considerando il sistema elettrone - campo elettrico come un massa legata al nucleo da una forza di tipo elastico con moto smorzato,

dalla dinamica classico abbiamo  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$F_E + F_{elastica} + F_{smorzamento} = ma$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = -eE_x(t) = -eE_0 e^{-i\omega t}$$

Trascuriamo l'effetto dissipativo che si traduce in un riscaldamento del materiale

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -eE_x(t) = -eE_0 e^{-i\omega t}$$

cerchiamo la soluzione nella forma

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

Sostituendo la soluzione si ottiene

$$x_0 = \frac{eE_0}{m\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)} = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$x(t) = \frac{eE(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Ricordando la definizione di momento di dipolo per unità di volume di un materiale

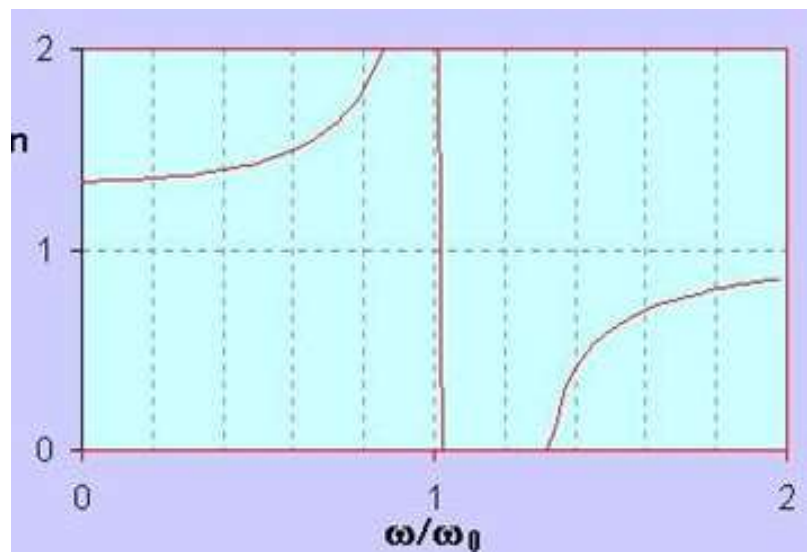
$$P = Nex(t) = \varepsilon_0 \chi_e E(t) = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E(t)$$

con  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e = n^2$

Sostituendo  $x(t)$  e  $E(t)$  si ottiene:

$$n^2 = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + 1 = \varepsilon_r$$

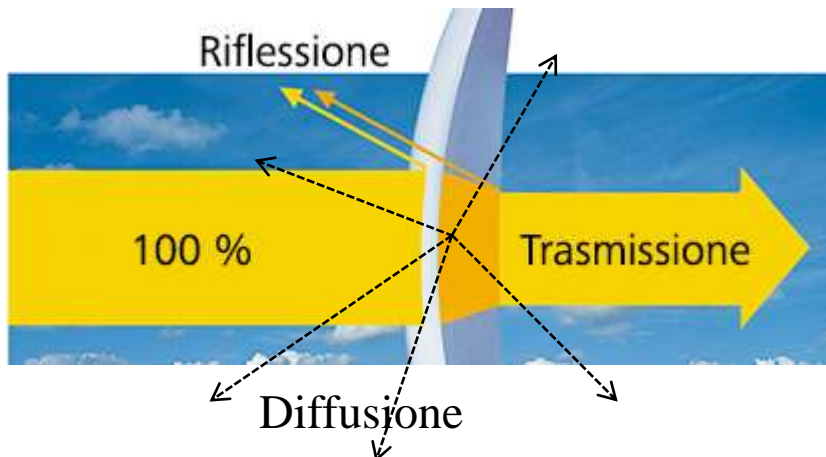
$$n = \sqrt{\frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + 1} = \sqrt{\epsilon_r}$$



Quindi riprendendo l'onda  $E(z, t) = E_0 e^{i(k_0 n z - \omega t)}$

Il campo E dell'onda fa lavoro sulle cariche e viene assorbito.

Una parte dell'energia assorbita viene riemessa in tutto l'angolo solido, una parte dispersa in calore, una parte procede indisturbata.



Mantenendo il termine dissipativo si sarebbe ottenuto un  $n$  contenente anche un termine immaginario puro:

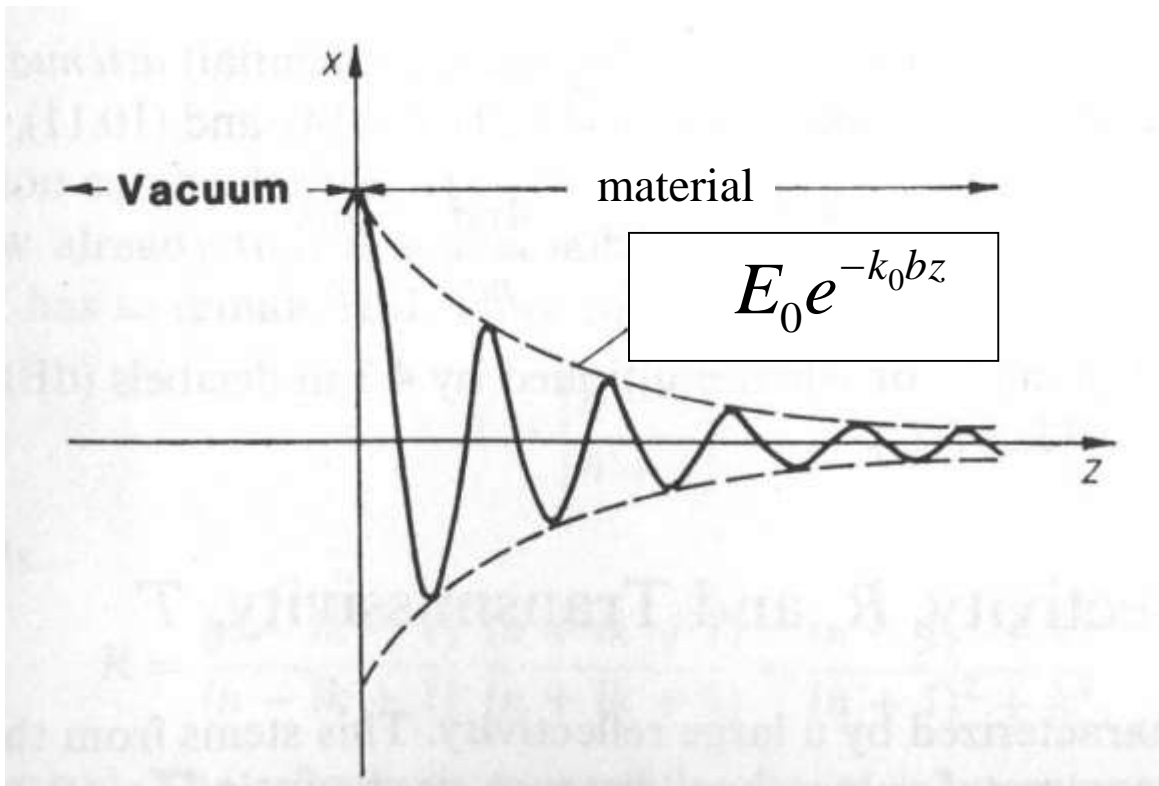
$$n_{\text{complesso}} = n + ib$$

$$E(z, t) = E_0 e^{i(k_0 n_{\text{complesso}} z - \omega t)}$$

$$E(z, t) = E_0 e^{-k_0 b z} e^{i(k_0 n z - \omega t)}$$

termine di  
smorzamento

onda





## Velocità di fase e velocità di gruppo delle onde e.m.

Come conseguenza della dispersione, cioè della dipendenza della velocità di propagazione di onde e.m. piane sinusoidale in un mezzo dalla frequenza dell'onda:

$$v = \frac{c}{n(\omega)} = v(\omega)$$

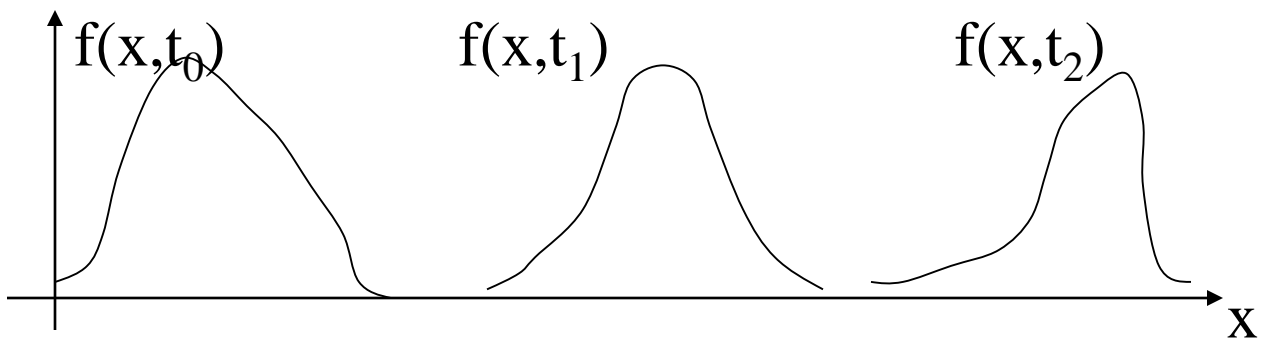
Possiamo sperimentare il seguente fenomeno:  
nel vuoto, creato un segnale e.m. di forma  $f(x)$   
non sinusoidale lungo la direzione  $x$

abbiamo  $f(x,t) = \textit{integrale di Fourier} (k, \omega)$

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \sin[k \cdot x - \omega(k) \cdot t] dk$$

se  $f(x,t)$  si propaga, avendo tutte le componenti  $k$ ,  $\omega$  dello sviluppo la stessa velocità la forma del segnale non varia.

**In un mezzo** tutte le componenti a diverse  $k$ ,  $\omega$  si propagano con velocità diversa. Il segnale cambia forma nel tempo propagandosi.



Possiamo introdurre il concetto di velocità di propagazione del segnale non sinusoidale

come *velocità di gruppo del segnale*  $v_g$ ,  
cioè la velocità con cui trasla il baricentro del  
segnale che si deforma, si può dimostrare che:

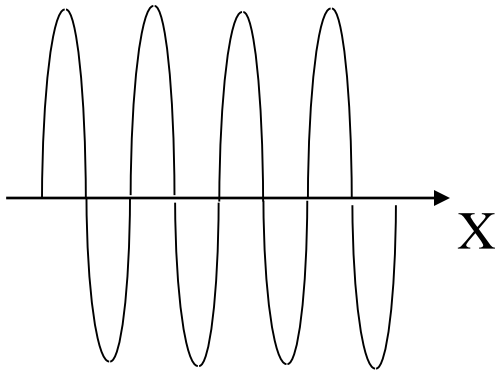
$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Mentre la velocità di propagazione del singolo segnale sinusoidale viene detta *velocità di fase*.

# Velocità di fase e velocità di gruppo

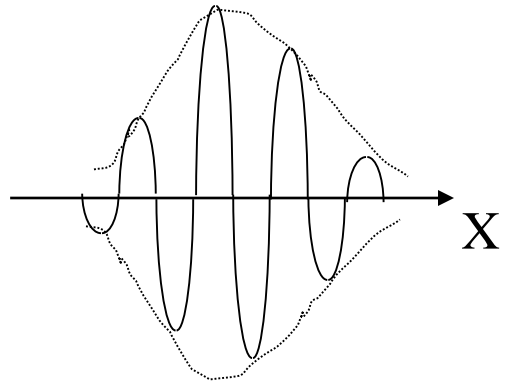
La velocità di propagazione di un'onda armonica, per quanto visto finora risulta  $v = \omega/k$ , tale velocità è detta velocità di fase.

Tale velocità non è necessariamente la velocità che osserviamo quando analizziamo un moto ondulatorio 'non armonico'



Onda armonica  
continua

(contiene una sola  
frequenza e lunghezza  
d'onda)



Impulso o pacchetto  
d'onda

(contiene diverse  
frequenze e lunghezze  
d'onda)

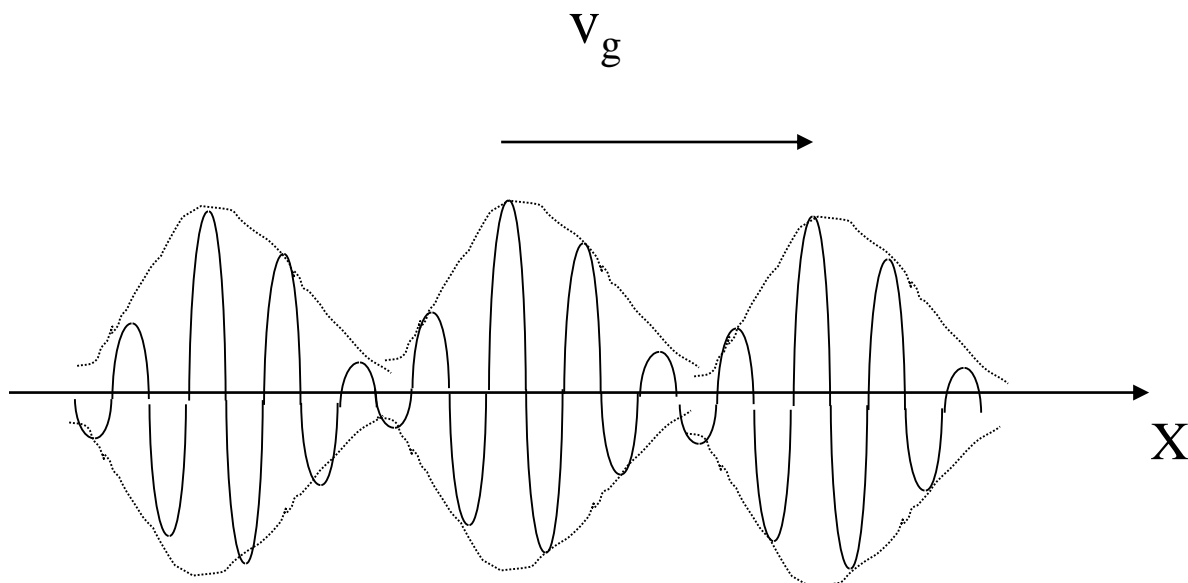
Nel caso in cui la velocità di propagazione sia indipendente dalla frequenza (non c'è dispersione), tutte le componenti dell'impulso viaggiano con la stessa velocità, e la velocità dell'impulso, ossia quello del suo baricentro, è uguale alla velocità di fase dell'onda.

In un mezzo dispersivo, ogni componente dell'impulso ha una propria velocità di propagazione, e la velocità dell'impulso non è uguale alla velocità di fase.

Supponiamo che un moto ondulatorio sia scomponibile in due sole onde armoniche con ampiezze uguali A e frequenze  $\omega$  e  $\omega'$  molto vicine tra loro

$$\begin{aligned} f(x,t) &= A \sin[kx - \omega t] + A \sin[k'x - \omega' t] = \\ &= 2A \cos \frac{1}{2} [(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin \frac{1}{2} [(k' + k)x - (\omega' + \omega)t] = \\ &= \underbrace{2A \cos \frac{1}{2} [(k' - k)x - (\omega' - \omega)t]}_{\text{Modulazione di ampiezza}} \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Modulazione di  
ampiezza



L'ampiezza modulata  $2A \cos \frac{1}{2} [(k'-k)x - (\omega' - \omega)t]$  corrisponde ad un moto ondulatorio che si propaga con una velocità

$$v_g = \frac{\omega' - \omega}{k' - k} = \frac{d\omega}{dk}$$

detta **velocità di gruppo**

Ogni massimo dell'onda (involuppo) si propaga con  $v_g$ , pertanto la velocità di gruppo è la velocità con cui un segnale viene trasmesso (N.B. E' la velocità con cui si propaga la sua energia)