Sistemi vincolati

Lezione 7 - 16/03/2017
Lezione 8

Consideriamo un sistema di punti $\{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ e denotiamo con

$$\underline{r}_i := P_i - O, \quad i = 1, \dots, N$$

il vettore posizione dell'i-esimo punto rispetto all'origine O del sistema di riferimento. In generale, ogni P_i è identificabile mediante 3 parametri scalari che sono le componenti di $\underline{r}_i$ rispetto ad una base fissata in $\mathbb{R}^3$, ovvero le coordinate di P_i. A priori, quindi, l'intero sistema di punti è identificabile mediante 3N parametri scalari <u>indipendenti</u>.

Supponiamo ora che tra i vettori $\{\underline{r}_i\}_{i=1}^N$, $\{\dot{\underline{r}}_i\}_{i=1}^N$ esista una relazione del tipo:

$$\psi(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N, t) \geq 0 \qquad (*)$$

dove $\psi : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è un'opportuna funzione, essendo t il tempo. Chiaramente, i vettori in questione non sono più completamente indipendenti a causa della relazione $(*)$ e quindi i parametri necessari per identificare i punti $\{P_i\}_{i=1}^N$ saranno in generale meno di 3N. Chiamiamo la $(*)$ un <u>vincolo</u> del sistema di punti.

Classifichiamo ora i possibili tipi di vincolo:

<u>Def</u>. Un vincolo su un sistema di punti $\{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ è detto:

(i) <u>olonomo</u> (o geometrico o di posizione) se si presenta nella forma

$$\psi(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) \geq 0,$$

ossia se la funzione $\psi : \mathbb{R}^{3N} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ non dipende dalle velocità $\underline{v}_{P_i} = \dot{\underline{r}}_i$;

(ii) <u>anolonomo</u> (o cinematico o di mobilità) se limita anche le velocità dei punti $\{P_i\}_{i=1}^N$ ed è quindi della forma $(*)$;

(iii) <u>bilatero</u> se si presenta nella forma

$$\psi(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N, t) = 0,$$

cioè con il segno di uguaglianza;

(iv) <u>unilatero</u> se si presenta nella forma $(*)$, cioè con il segno di disuguaglianza;

(v) <u>scleronomo</u> (o indipendente dal tempo) se la funzione ψ non dipende esplicitamente dalla variabile t:

$$\psi(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N) \geq 0;$$

(vi) <u>reonomo</u> (o dipendente dal tempo) se la funzione ψ dipende esplicitamente dalla variabile t. Se ψ è sufficientemente regolare ciò si può esprimere come $\partial_t \psi \not\equiv 0$.

$\not\triangle$

Un sistema di punti può essere soggetto a più vincoli contemporaneamente. Possono cioè esistere più funzioni $\psi_j : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, che esprimono relazioni del tipo $(*)$ tra i vettori $\{\underline{r}_i\}_{i=1}^N$:

$$\begin{cases} \psi_1(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N, t) \geq 0 \\ \vdots \\ \psi_m(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N, t) \geq 0. \end{cases}$$

I vincoli rappresentati dalle funzioni ψ_j, $j = 1, \dots, m$, possono <u>non</u> essere tutti dello stesso tipo.

<u>Esempio</u> Consideriamo un sistema costituito di due punti $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$, che rappresenteremo come

$$P_1 - O = \underline{r}_1 = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}$$

$$P_2 - O = x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k} = \underline{r}_2 .$$

Se i due punti devono formare un sistema rigido dovrà essere:

$$|P_2 - P_1| = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} = \text{costante} = c \geq 0,$$

che si può esprimere come

$$\psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = 0$$

dove $\psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1| - c$. Questo risulta un vincolo olonomo e scleronomo chiamato vincolo di rigidità.

Se abbiamo un sistema rigido di N punti $\{P_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathbb{R}^3$ ci sono più vincoli di rigidità della forma

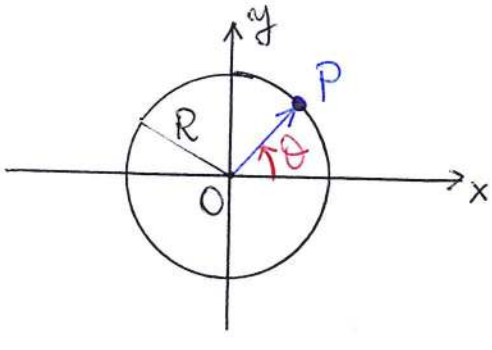
$$|\underline{r}_j - \underline{r}_i| = c_{ij} \qquad \forall i, j = 1, \dots, N, \; i \neq j$$

dove $c_{ij} > 0$ sono costanti, i quali si possono esprimere nella forma:

$$\psi_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) = 0, \qquad \psi_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) = |\underline{r}_j - \underline{r}_i| - c_{ij} .$$

Si tratta di un sistema di vincoli olonomi scleronomi tutti dello stesso tipo. ☒

Esempio – Punto vincolato ad una guida circolare



Un punto P è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro l'origine e raggio $R > 0$ nel piano Oxy. Detto

$$P - O = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} = \underline{r}$$

il vettore posizione di P, questo vincolo si esprime mediante le equazioni:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

che sono del tipo

$$\begin{cases} \psi_1(\underline{r}) = 0 \\ \psi_2(\underline{r}) = 0 \end{cases}$$

Proiezione di r su k

con $\psi_1(\underline{r}) = \underline{r} \cdot \underline{k}$ e $\psi_2(\underline{r}) = (\underline{r} \cdot \underline{i})^2 + (\underline{r} \cdot \underline{j})^2 - R^2$. Si tratta quindi di due vincoli olonomi scleronomi. Usando le componenti scalari si può anche scrivere

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_1(x, y, z) = 0 \\ \tilde{\psi}_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

con $\tilde{\psi}_1(x, y, z) = z$ e $\tilde{\psi}_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2$.

Usando l'angolo θ in figura possiamo rappresentare la posizione di P come:

$$P(t) - O = \underline{r}(t) = R\cos\theta(t)\,\underline{i} + R\sin\theta(t)\,\underline{j},$$

che soddisfa automaticamente i vincoli rappresentati da ψ_1 e ψ_2.

Osserviamo che a priori il punto P è identificato da 3 parametri scalari liberi, ma con i vincoli ψ_1, ψ_2 i parametri necessari ad identificarlo scendono a $1 = 3 - 2$. Il parametro θ è chiamato in questo contesto una <u>coordinata libera</u>.

Tutte le caratteristiche cinematiche di P possono essere calcolate in termini di θ e delle sue derivate. Ad esempio:

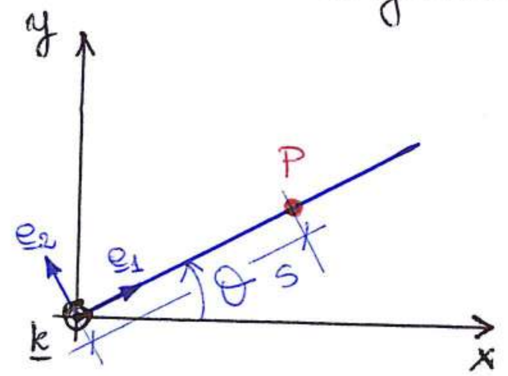
$$\underline{v}_P = \dot{\underline{r}} = R\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}\right)$$

$$\underline{a}_P = R\ddot{\theta}\left(-\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}\right) + R\dot{\theta}^2\left(-\cos\theta\,\underline{i} - \sin\theta\,\underline{j}\right).$$

Esercizio: ritrovare le espressioni di v_P e a_P usando le relazioni cinemati= che valide per un punto di cui sia nota la traiettoria e usando le rela= zioni cinematiche del corpo rigido (prendendo come sistema rigido di punti l'insieme $\{P, O\}$, dopo aver giustificato perché è un sistema rigido).

$\boxtimes$

Esempio – Punto vincolato ad una guida mobile (vincolo reonomo)



Consideriamo nel piano Oxy un'asta rigida avente un estremo fisso nell'origine O e un punto P mobile su di essa.

Sia $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{k})$ una terna solidale con l'asta, che sceglieremo come:

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j} \\ \underline{e}_2 = -\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j} \end{cases}$$

dove l'angolo $\theta = \theta(t)$ caratterizza la posizione dell'asta ad ogni istante di tempo.

Sia $P - O = \overbrace{x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}}^{\underline{r}=}$. Il vincolo che P stia sul piano Oxy si esprime come:

$$z = 0 \;\rightarrow\; \varphi_1(\underline{r}) = 0 \quad \text{con } \varphi_1(\underline{r}) = \underline{r}\cdot\underline{k}.$$

Questo è un vincolo olonomo scleronomo su P. Ciò posto, l'ulteriore vincolo che P stia sull'asta si può esprimere come:

$$(P-O)\cdot \underline{e}_2 = 0$$

ovvero $\psi_2(\underline{r},t)=0$ con $\psi_2(\underline{r},t) = \underline{r}\cdot\underline{e}_2$. Notiamo che la dipendenza del vincolo ψ_2 dal tempo è dovuta al fatto che il versore $\underline{e}_2$ dipende da t, ossia in ultima analisi dal fatto che l'asta è in movimento. Esplicitamente abbiamo:

$$\underline{r}\cdot\underline{e}_2 = (x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k})\cdot(-\sin\theta\,\underline{i}+\cos\theta\,\underline{j})$$
$$= -x\sin\theta + y\cos\theta$$

e quindi i vincoli imposti a P sono complessivamente

$$\begin{cases} z=0 \\ -x\sin\theta(t)+y\cos\theta(t)=0. \end{cases}$$

Notiamo che il secondo vincolo è olonomo reonomo, perché esso dipende esplicitamente da t. "Esplicitamente" significa non solo attraverso l'intrinseca dipendenza da t delle coordinate di P.

Sia $s=s(t)$ la distanza con segno di P da O lungo l'asta. Allora il vincolo ψ_2 è automaticamente soddisfatto ponendo

$$P-O = s\,\underline{e}_1 = s(\cos\theta\,\underline{i}+\sin\theta\,\underline{j}).$$

Complessivamente, quindi, la posizione di P è caratterizzata in ogni istante da un'unica coordinata libera, appunto s, se si suppone che il moto dell'asta, ovvero la funzione $t\mapsto\theta(t)$, sia noto.

Abbiamo inoltre, ad esempio,

$$\underline{v}_P = \frac{d}{dt}(P-O) = \frac{d}{dt}(s\underline{e}_1)$$
$$= \dot{s}\,\underline{e}_1 + s\,\dot{\underline{e}}_1 = \dot{s}(\cos\theta\,\underline{i}+\sin\theta\,\underline{j}) + s\dot{\theta}(-\sin\theta\,\underline{i}+\cos\theta\,\underline{j})$$

$$= (\dot{s}\cos\theta - s\dot{\theta}\sin\theta)\underline{i} + (\dot{s}\sin\theta + s\dot{\theta}\cos\theta)\underline{j}.$$

Si noti che $\dot{\underline{e}}_1$ si può anche calcolare come $\underline{\omega} \times \underline{e}_1$, essendo $\underline{\omega}$ la velocità angolare dell'asta ovvero del sistema solidale $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{k})$ rispetto a quello fisso $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$. Non è difficile verificare che risulta $\underline{\omega} = \dot{\theta}\underline{k}$.

Si noti inoltre che la velocità di P rispetto al sistema fisso ha la struttura

$$\underline{v}_P = \dot{\underline{r}} = \underline{r}' + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

dove $\underline{r}'$ è la velocità di P relativa al sistema mobile $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{k})$, quindi $\underline{r}' = (s\underline{e}_1)' = \dot{s}\underline{e}_1$ ricordando che $s' = \dot{s}$ in quanto quantità scalare.

Un ulteriore modo di denotare e calcolare la velocità $\underline{v}_P$ consiste nel pensare il vettore $\underline{r} = P - O$ come funzione di s e di t a causa del vincolo φ_2 e scrivere $\underline{r} = \underline{r}(s,t)$ ovvero $P - O = P(s,t) - O$ ottenendo poi:

$$\overset{\underset{\shortparallel}{s\underline{e}_1}}{P - O} = s(\cos\vartheta(t)\,\underline{i} + \sin\vartheta(t)\,\underline{j})$$

$$\underline{v}_P = \frac{d}{dt}\underline{r}(s,t) = \partial_s\underline{r}\,\dot{s} + \partial_t\underline{r}$$

Dipendenza implicita attraverso s + dipendenza esplicita

dalla regola di derivazione delle funzioni composte. In effetti:

$$\partial_s\underline{r} = \underline{e}_1 = \cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j}$$

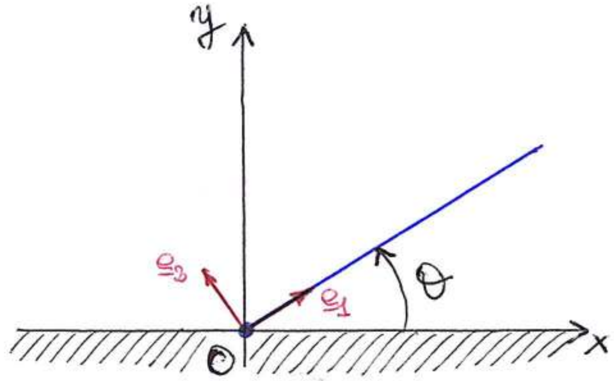
$$\partial_t\underline{r} = s\dot{\underline{e}}_1 = s\dot{\theta}(-\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}).$$

In questo caso il vettore $P - O$ non si può esprimere solo in funzione della coordinata libera s, e poi attraverso di essa in funzione del tempo, perché il vincolo φ_2 è reonomo.

$\boxtimes$

Esempio – Vincolo unilatero

Consideriamo un'asta rigida posta nel piano Oxy e avente un estremo fisso coincidente con l'origine O.



In quanto corpo rigido, la posizione dell'asta è nota univocamente una volta che sia nota la posizione di un suo punto rispetto al sistema fisso e l'orientamento di una terna ad essa solidale rispetto alla terna fissa. Se Q è un punto dell'asta si potrà infatti scrivere che ogni altro suo punto P è tale che

$$P - Q = \sum_{k=1}^{3} y_k \underline{e}_k$$

ossia

$$P-O = Q-O + \sum_{k=1}^{3} y_k \underline{e}_k = x_Q \underline{i} + y_Q \underline{j} + z_Q \underline{k} + \sum_{k=1}^{3} y_k \underline{e}_k .$$

dove y_1, y_2, y_3 sono costanti che identificano univocamente P nella terna solidale.

Il vincolo che l'asta giaccia nel piano Oxy impone $z_Q = 0$ e inoltre consente di scegliere $\underline{e}_3 = \underline{k}$ con $y_3 = 0$ ed $\underline{e}_1, \underline{e}_2 \in \text{span}\{\underline{i}, \underline{j}\}$. Avremo quindi:

Coordinate di Q in piano fisso

Coordinate di P in terna mobile

$$P-O = x_Q \underline{i} + y_Q \underline{j} + \sum_{k=1}^{2} y_k \underline{e}_k .$$

Inoltre il vincolo che un estremo dell'asta coincida con l'origine ci permette di scegliere $Q = O$, da cui

$$P-O = \sum_{k=1}^{2} y_k \underline{e}_k .$$

Poiché $\underline{e}_1, \underline{e}_2 \in \text{span}\{\underline{i}, \underline{j}\}$ sono versori tra loro ortogonali, la posizione dei punti P dell'asta risulta di fatto identificata da un'unica coordinata libera che determina l'orientazione della base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ di Oxy rispetto alla base canonica $(\underline{i}, \underline{j})$. Riassumendo, i vincoli imposti sono:

$$\begin{cases} Q = O \\ \underline{e}_1 \cdot \underline{k} = 0 \\ \underline{e}_2 \cdot \underline{k} = 0, \end{cases}$$

cioè 5 relazioni scalari olonome bilatere. Il numero di coordinate libere del corpo rigido è pertanto $6-5=1$, come già anticipato. Se usiamo l'angolo θ indicato in figura abbiamo

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \cos\theta\, \underline{i} + \sin\theta\, \underline{j} \\ \underline{e}_2 = -\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j} \end{cases}$$

e, in definitiva,

$$\begin{aligned} P - O = y_1 \underline{e}_1 + y_2 \underline{e}_2 &= y_1 \underline{e}_1 \\ &= y_1 \cos\theta\, \underline{i} + y_1 \sin\theta\, \underline{j} \end{aligned}$$

per ogni punto P dell'asta. Si noti che, a differenza dell'esempio precedente, in questo caso la coordinata libera è θ mentre y_1 è una variabile che descrive con continuità tutti i punti dell'asta, cioè del sistema rigido (ma è costante perché ciascuno di loro è fisso sull'asta).

Supponiamo ora di aggiungere l'ulteriore vincolo che l'asta debba sempre mantenersi nel semipiano $y \geq 0$. Ciò implica:

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{j} \geq 0$$

ossia $\sin\theta \geq 0$ e quindi $\theta \in [0, \pi]$. Come si vede, questo ulteriore vincolo è della forma

$$\varphi(\underline{r}) = \overbrace{y_1 \underline{e}_1}^{\underline{r}} \cdot \underline{j} \geq 0 \qquad \forall y_1 \in [0, L]$$

(supponendo che $L > 0$ sia la lunghezza dell'asta), cioè è olonomo, scleronomo e unilatero. Il suo effetto non è quello di ridurre il numero di coordinate libere del sistema, ma di limitare l'insieme dei valori che queste possono assumere. $\boxtimes$

Def. Chiamiamo <u>coordinate lagrangiane</u> le coordinate libere di un sistema rigido al netto dell'applicazione di tutti i vincoli a cui il sistema è sotto= posto. Il numero di coordinate lagrangiane di un sistema libero si chiama il <u>grado di libertà</u> del sistema (oppure si dice che il sistema ha <u>n gradi di libertà</u> se n è il numero di coordinate lagrangiane).

Le coordinate lagrangiane, come si vede dagli esempi precedenti, tipicamente non coincidono con alcune delle coordinate cartesiane dei punti del sistema ri= gido. Genericamente esse sono denotate con le lettere $q_1, \dots, q_n$. Dunque la posizione di un punto P del sistema rigido sarà una funzione delle $q_1, \dots, q_n$ e scriveremo:

$$P - O = \underline{r} = \underline{r}(q_1, \dots, q_n, t) \qquad (**)$$

dove l'eventuale dipendenza esplicita di $\underline{r}$ da t corrisponde alla presenza di vincoli reonomi. In funzione delle coordinate lagrangiane la velocità di P si esprime come

$$\underline{v}_P = \sum_{k=1}^{n} \partial_{q_k}\underline{r}\, \dot{q}_k + \partial_t \underline{r}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P-O)}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial(P-O)}{\partial t} \qquad (***)$$

e lo spostamento elementare di P sarà

$$dP = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P-O)}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial(P-O)}{\partial t} dt.$$

Def. Siano $q_1, \dots, q_n$ le coordinate lagrangiane di un sistema rigido. Si chiama <u>spazio delle configurazioni</u> il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ in cui le coordinate lagrangiane possono variare per descrivere tutte le configurazioni che il sistema rigido può assumere (al netto di eventuali vincoli unilateri).

È importante sottolineare che il numero di gradi di libertà di un sistema rigido è essenzialmente determinato dai vincoli bilateri imposti, che permettono di esprimere alcuni parametri del sistema in funzione di altri. Dal canto loro, le coordinate lagrangiane devono invece essere parametri:

(i) <u>essenziali</u>, cioè tali che nessuno di essi possa essere eliminato senza pregiudicare l'individuazione univoca delle configurazioni del sistema;

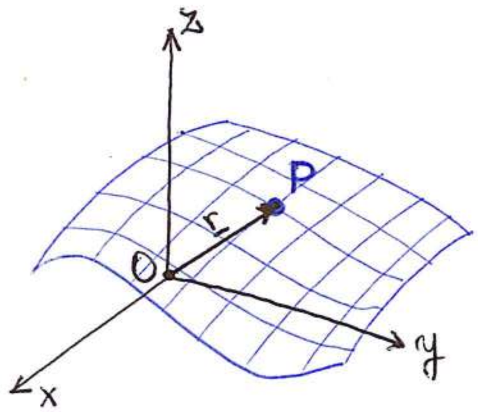
(ii) <u>indipendenti</u>, cioè tali che non vi sia alcun legame algebrico tra di essi.

Velocità e spostamenti virtuali

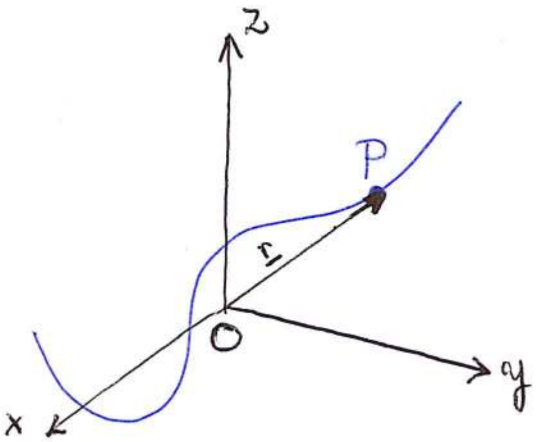
Riprendiamo in esame l'espressione (**) che dà la posizione di un punto P in funzione delle coordinate lagrangiane. Supponiamo inoltre per il momento che tutti i vincoli del sistema siano olonomi e scleronomi, cioè indipendenti dal tempo. Avremo:

$$P - O = \underline{r} = \underline{r}(q_1, \dots, q_n).$$

In particolare, se ci limitiamo a considerare un solo punto P avremo al massimo $n=3$, cioè la posizione di P sarà individuata da al più tre parametri essenziali e indipendenti. Il caso $n=3$ corrisponde al punto non vincolato in $\mathbb{R}^3$, mentre i casi $n=2$ ed $n=1$ corrispondono rispettivamente ad un punto vincolato su una superficie e su una curva in $\mathbb{R}^3$.



$n=2$



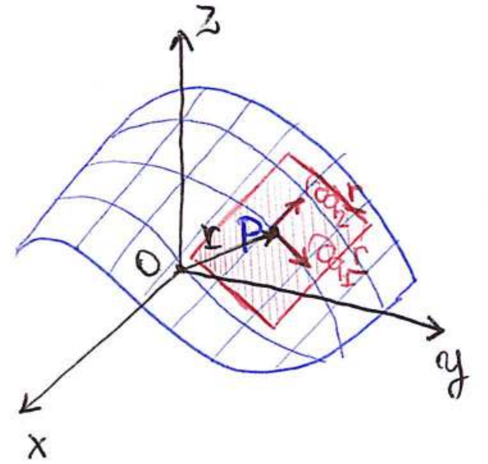
$n=1$

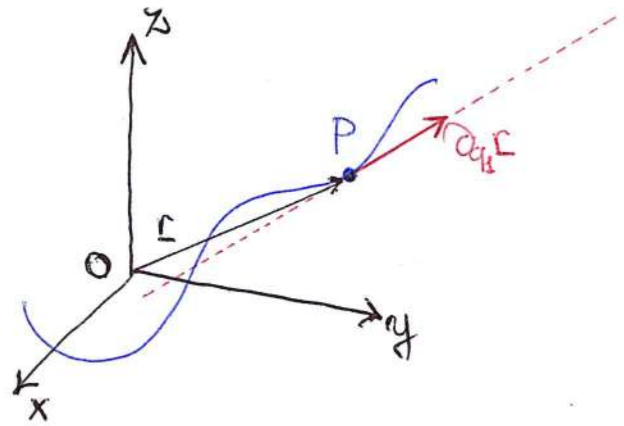
Osserviamo l'espressione di $\underline{v}_P$:

$$\underline{v}_P = \sum_{k=1}^{n} \partial_{q_k}\underline{r}\cdot\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P-O)}{\partial q_k}\dot{q}_k \,;$$

essa risulta una combinazione lineare dei vettori $\partial_{q_k}\underline{r} = \frac{\partial(P-O)}{\partial q_k}$ mediante i coefficienti $\{\dot{q}_k\}_{k=1}^{n}$. I vettori $\{\partial_{q_k}\underline{r}\}_{k=1}^{n}$ sono linearmente indipendenti perché le q_k sono indipendenti per definizione di coordinate lagrangiane. Essi rappresentano una base dello spazio tangente alla superficie (se $n=2$) o alla curva (se $n=1$) su cui è vincolato a muoversi P. Nel caso di una superficie questo spazio tangente è un piano in $\mathbb{R}^3$, nel caso di una curva è invece una retta in $\mathbb{R}^3$.

Come avevamo visto, le velocità sono tangenti alle traiettorie





Un generico vettore appartenente a span $\{\partial_{q_1}\underline{r}, \dots, \partial_{q_n}\underline{r}\}$ si potrà scrivere come

$$\underline{v} = \sum_{k=1}^{n} \partial_{q_k} \underline{r} \cdot v_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P-O)}{\partial q_k} v_k \qquad (**)$$

dove $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ sono coefficienti scalari. Chiamiamo $\underline{v}$ una <u>velocità virtuale</u> del punto P e $\text{span}\{\partial_{q_1}\underline{r}, \ldots, \partial_{q_n}\underline{r}\}$ lo <u>spazio delle velocità virtuali</u> del punto P.

Una velocità virtuale è dunque una qualsiasi velocità possibile per il punto P compatibilmente con i vincoli a cui esso è soggetto. Altrimenti detto, essa è la <u>velocità di un atto di moto di P compatibile con i vincoli imposti.</u>

Non è detto che sia una velocità reale; è solo fra quelle possibili. Come, data una strada (vincolo), ci si può viaggiare a velocità diverse.

Se scegliamo proprio $v_k = \dot{q}_k$, $k = 1, \ldots, n$, otteniamo che una delle infinite velocità virtuali è la velocità effettiva (o reale) $\underline{v}_P$ che il punto P ha in conseguenza del suo moto specifico.

La definizione di velocità virtuale ha a che fare con l'atto di moto del punto P, non con il suo moto. Ne segue che anche nel caso di vincoli dipendenti dal tempo le velocità virtuali sono definite come gli elementi dello spazio tangente alla varietà cui P è vincolato considerata ad un <u>istante $t = t_0 \geq 0$ fissato</u>. Perciò varrà sempre l'espressione $(**)$ nonostante la velocità reale sia ora

$$\underline{v}_P = \sum_{k=1}^{n} \partial_{q_k} \underline{r}\, \dot{q}_k + \partial_t \underline{r},$$

in cui il termine $\partial_t \underline{r}$ è la componente di trascinamento di P dovuta al moto del vincolo. Di conseguenza, nel caso di vincoli reonomi la velocità effettiva <u>non</u> sarà, in generale, una delle velocità virtuali.

Lo spostamento (effettivo) elementare (cioè infinitesimo) di P è:

$$dP = \underline{v}_P\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P-O)}{\partial q_k} \dot{q}_k\, dt + \frac{\partial(P-O)}{\partial t} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P-O)}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial(P-O)}{\partial t} dt.$$

Lo spostamento virtuale elementare di P è definito invece a partire dalla velocità virtuale come:

$$\delta P = \underline{v}\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P-O)}{\partial q_k} \underbrace{v_k\, dt}_{:=\delta q_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P-O)}{\partial q_k} \delta q_k ,$$

dove i δq_k sono gli incrementi virtuali elementari delle coordinate lagrangiane.

Per un sistema rigido l'atto di moto (ovvero il moto istantaneo) è regolato da

$$\underline{v}(P) = \underline{v}(Q) + \underline{\omega}(t_0) \times (P-Q),$$

dove P, Q sono punti arbitrari solidali con il sistema nell'istante di tempo t_0 considerato. Questa equazione esprime il vincolo di rigidità del sistema. Allora la generica velocità virtuale del punto P compatibile con tale vincolo sarà:

$$\underline{v}(P) = \underline{v}(Q) + \underline{\Omega} \times (P-Q), \qquad (**)$$

Per ora consideriamo solo il vincolo di rigidità

dove $\underline{v}(Q)$ e $\underline{\Omega}$ sono vettori arbitrari. In particolare, $\underline{\Omega}$ è detta la velocità angolare virtuale. Il vettore $\underline{v}(P)$ dato dalla precedente formula risulta essere, per ogni punto P del sistema, una velocità compatibile con il vincolo di rigidità del sistema (una volta che siano assegnati $\underline{v}(Q)$ e $\underline{\Omega}$) ma non subordinata ad alcun moto effettivo.

In presenza di ulteriori vincoli sul sistema, oltre a quello di rigidità, i vettori $\underline{v}(Q)$ e $\underline{\Omega}$ non saranno più totalmente arbitrari, ma dovranno essere scelti in modo che le velocità virtuali $\underline{v}(P)$ derivanti dalla (**) siano compatibile anche con i vincoli aggiuntivi. In particolare, $\underline{v}(Q)$ dovrà essere esso stesso compatibile con i vincoli aggiuntivi.

Abbiamo definito lo spostamento elementare di un punto P come

$$dP = dQ + d\underline{\varepsilon} \times (P-Q)$$

con $d\underline{\varepsilon} = \underline{\omega}\, dt$ la rotazione infinitesima. Analogamente definiamo lo spostamento virtuale elementare di P come:

$$\delta P = \delta Q + \delta\underline{\varepsilon} \times (P-Q)$$

essendo $\delta\underline{\varepsilon} := \underline{\Omega}\, dt$ una rotazione virtuale infinitesima. Se l'unico vincolo imposto al sistema è quello di rigidità allora δQ e $\delta\underline{\varepsilon}$ sono vettori arbitrari. Se vi sono invece altri vincoli è necessario che δQ e $\delta\underline{\varepsilon}$ siano scelti in modo tale che δP rispetti anche i vincoli aggiuntivi oltre quello di rigidità.

Concludiamo con alcune definizioni.

Def. Uno spostamento virtuale δP è detto reversibile se anche $-\delta P$ è uno spostamento virtuale. Se invece $-\delta P$ non è uno spostamento virtuale allora δP è detto irreversibile.

Detto $\delta P = \underline{v}\, dt$, essendo $\underline{v} \in \operatorname{span}\{\partial_{q_1}(P-O), \dots, \partial_{q_n}(P-O)\}$, questo spostamento virtuale risulta reversibile sse $-\underline{v} \in \operatorname{span}\{\partial_{q_1}(P-O), \dots, \partial_{q_n}(P-O)\}$.

È conseguenza della definizione di vincolo bilatero che in presenza di un simile vincolo ogni spostamento virtuale sia reversibile. Invece in presenza di un vincolo unilatero esistono spostamenti virtuali irreversibili. Le configurazioni del sistema a partire dalle quali esistono spostamenti virtuali irreversibili si dicono configurazioni di confine. Quelle a partire dalle quali tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili si dicono configurazioni ordinarie.