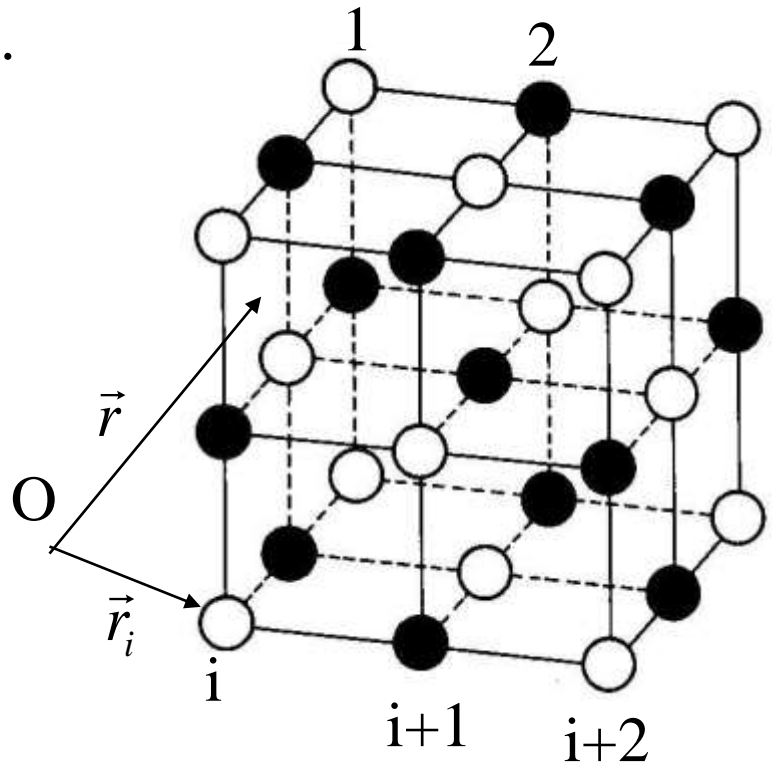


Abbiamo cercato di studiare il comportamento degli elettroni in un cristallo.



Siccome risolvere l'equazione di Schrodinger per tutti gli elettroni che competono agli atomi del cristallo è una impresa impossibile.

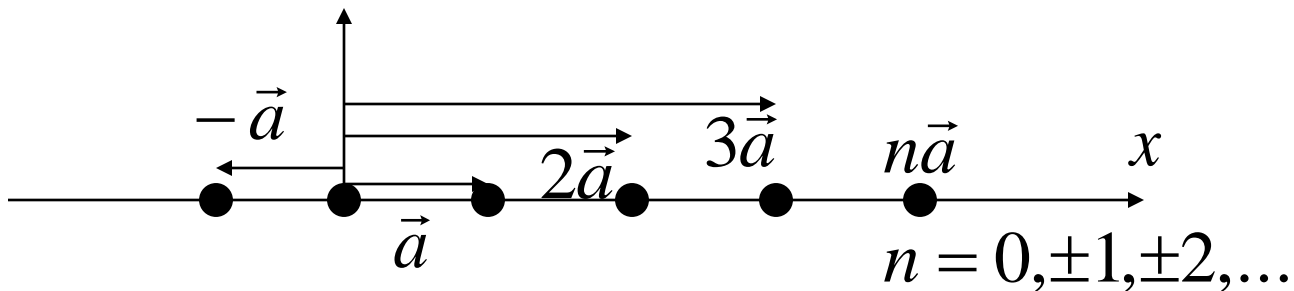
Abbiamo modellizzato il solido ponendo 5 ipotesi ideali che abbiamo rimosso nel seguito eccetto l'ultima:

- il potenziale a cui è soggetto l'elettrone è costituito da una schiera di buche di potenziale;
- il problema è monodimensionale;
- il solido ha dimensione infinita;
- il solido contiene un solo elettrone
- **il solido si trova alla temperatura di 0 K, cioè i nuclei sono fissi.**

Bande di energia di un elettrone in una catena uni-dimensionale di atomi

Abbiamo calcolato la relazione che lega l'energia E dei livelli ammessi con il numero quantico k_x per un elettrone soggetto a buche di potenziale periodiche di distanza a l'una dall'altra.

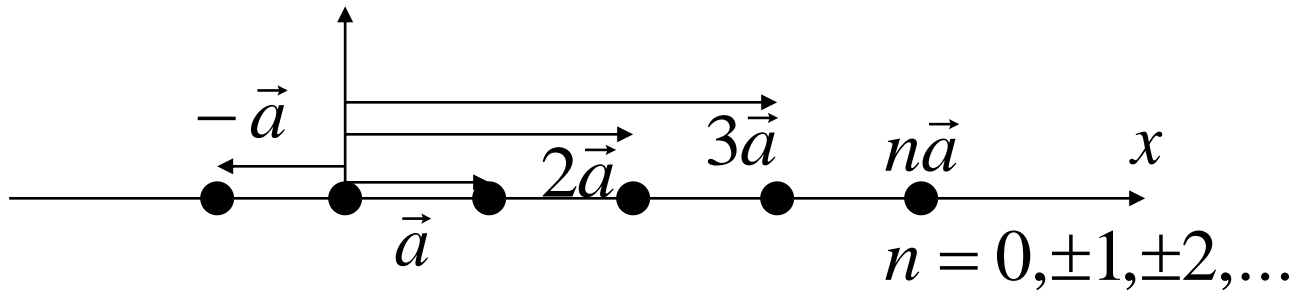
Ricordiamo che tale potenziale ben approssima quello a cui è soggetto un elettrone in una catena uni-dimensionale di atomi posti a distanza a



Se introduciamo il vettore a che congiunge un atomo origine posto in \mathbf{O} ad un atomo adiacente, si vede che tutti gli atomi del reticolo (catena) sono identificabili mediante

un vettore detto di traslazione

$$\vec{R} = n\vec{a} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

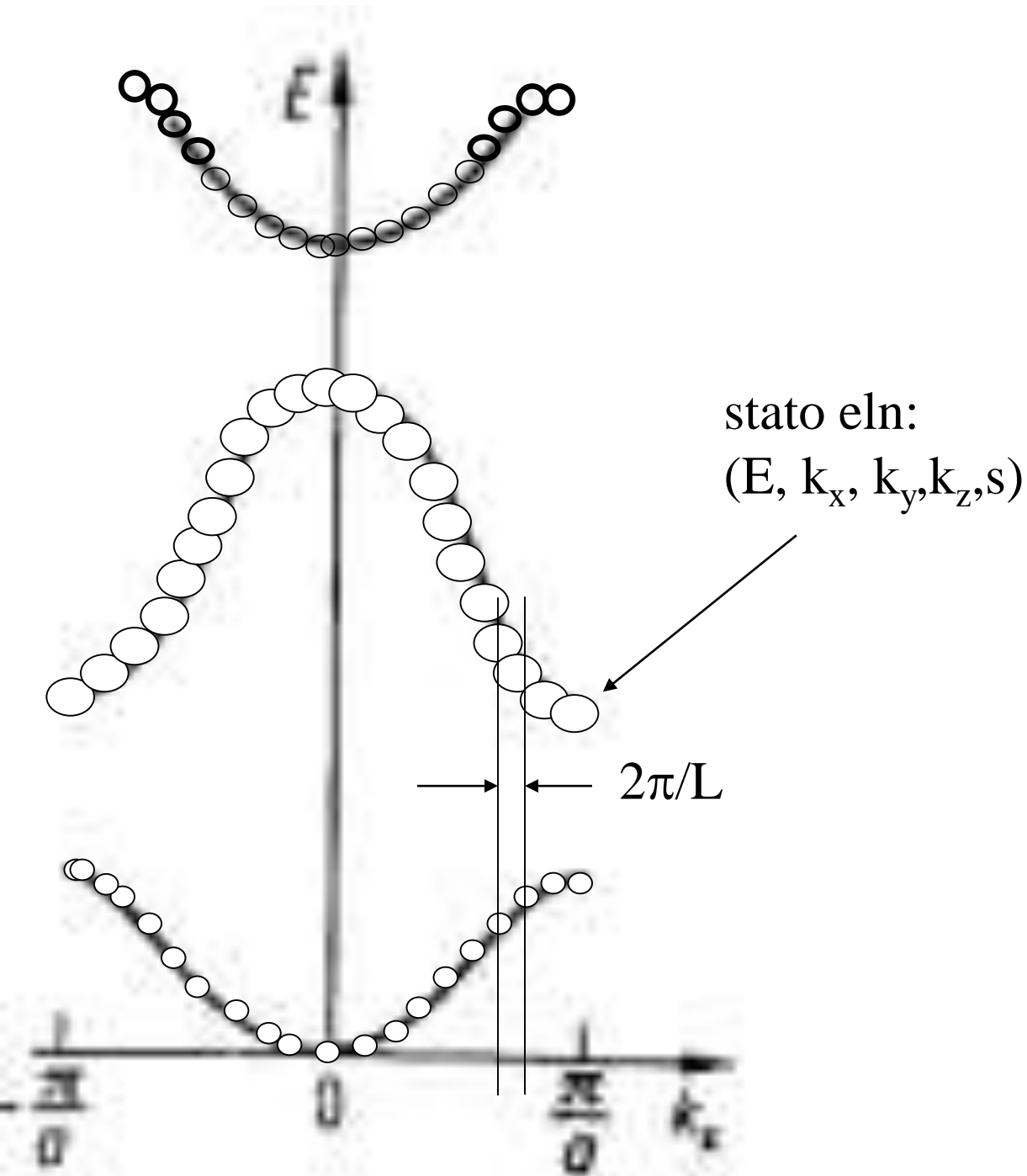


Si è mostrato che lo stato fisico dell'elettrone nel reticolo è perfettamente determinato una volta note:

$\Psi = \Psi(k_x, x)$ funzione d'onda con
 x variabile dello **spazio reale** (per un problema uni-dimensionale) dove esiste il **reticolo** (detto **diretto**) individuato dal vettore di traslazione \vec{R}

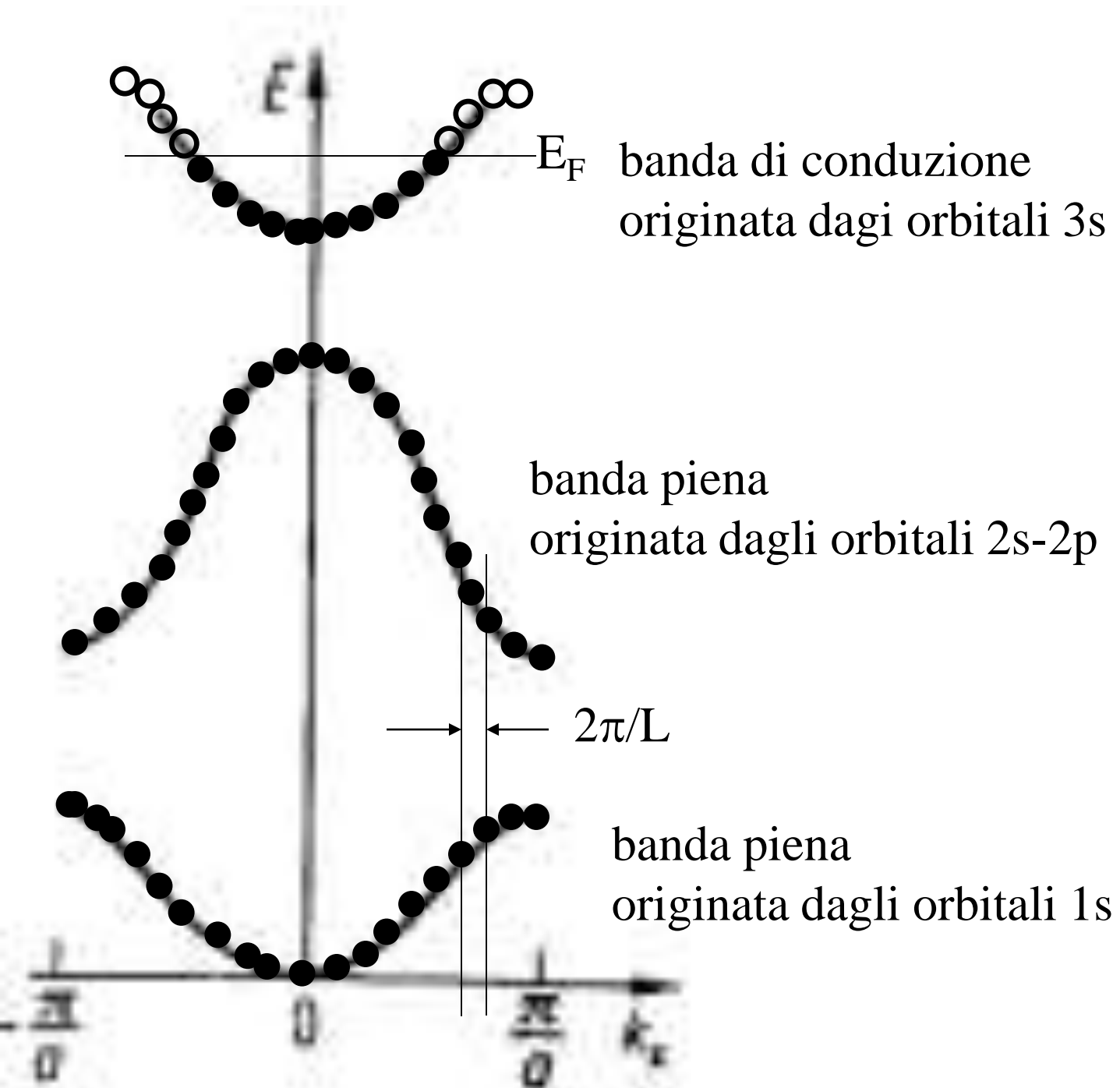
$E = E(k_x)$ Relazione energia-numero quantico \mathbf{k} ,
 \mathbf{k} è la variabile dello **spazio reciproco** dove possiamo definire un **reticolo** (detto **reciproco**)
 individuato dal vettore \vec{G}

La relazione $E - k_x$ nella prima zona di Brillouin diventa:

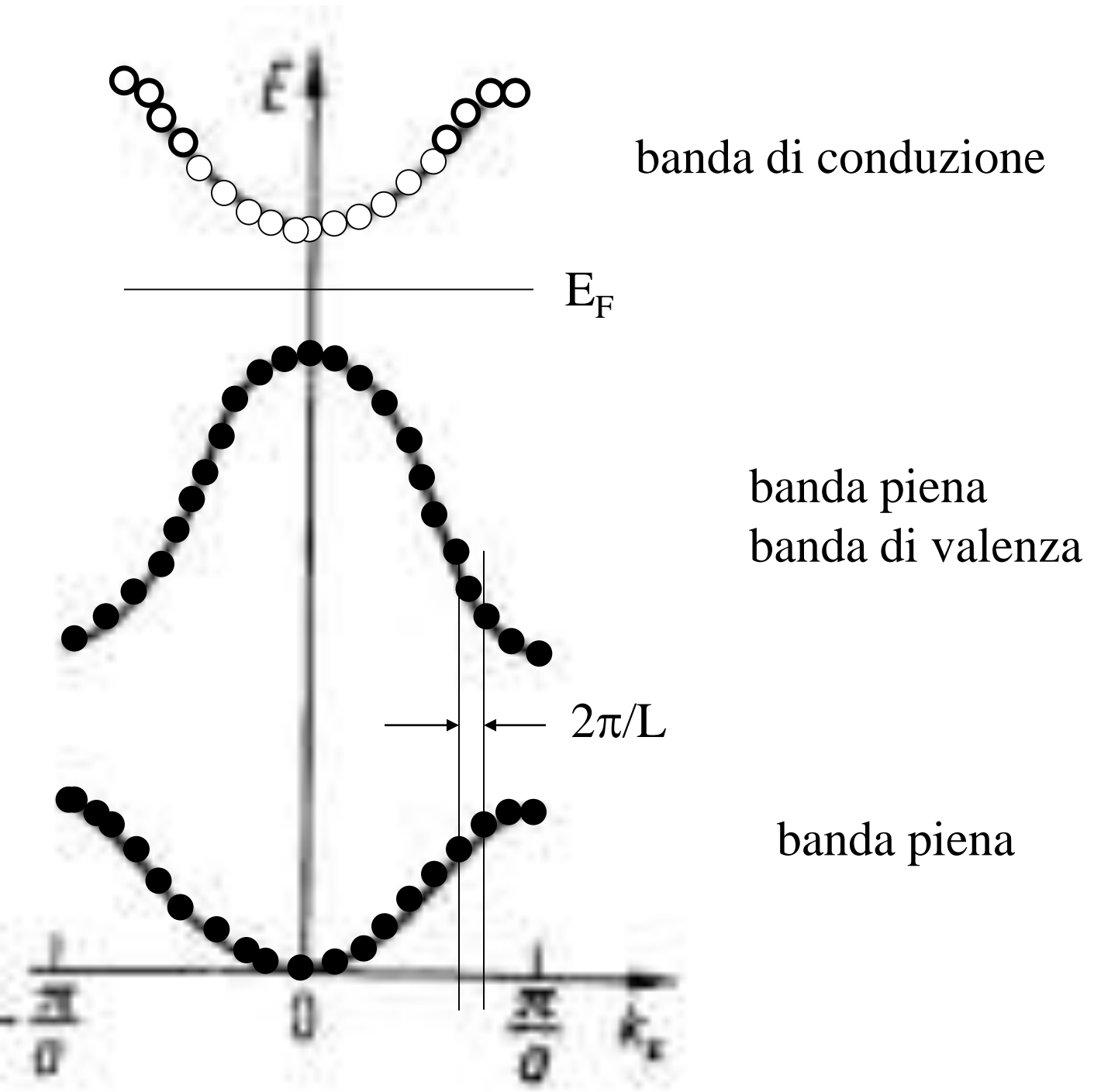


Dove ogni pallino rappresenta uno stato $E - k$ occupabile da 2 elettroni con spin opposto.

Un blocco di metallo di lato L a $T=0K$ presenta uno schema a bande in cui gli elettroni occupano a coppie tutti gli stati a energia crescente fino al livello di Fermi. La banda semi-piena ad energia più elevata è detta di conduzione.



Un blocco di semiconduttore/isolante di lato L a $T=0K$ presenta uno schema a bande in cui gli elettroni occupano a coppie tutti gli stati a energia crescente fino ad occupare completamente l'ultima banda, detta di valenza, lasciando la banda successiva, detta di conduzione, completamente libera.

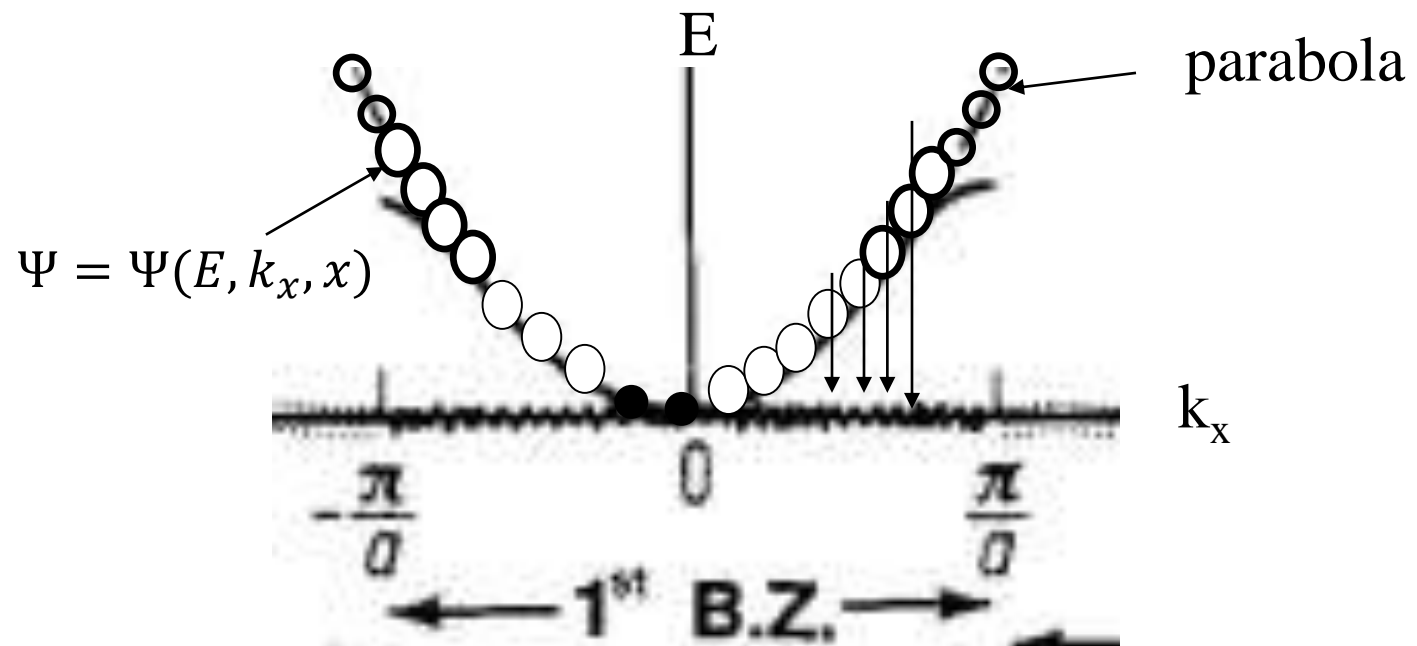


Approssimazione parabolica delle bande e massa efficace.

Le bande di energia sono tutte approssimabili con parabole.

Dal punto di vista analitico si tratta di uno sviluppo in serie troncato al secondo ordine in corrispondenza del punto di minimo o di massimo.

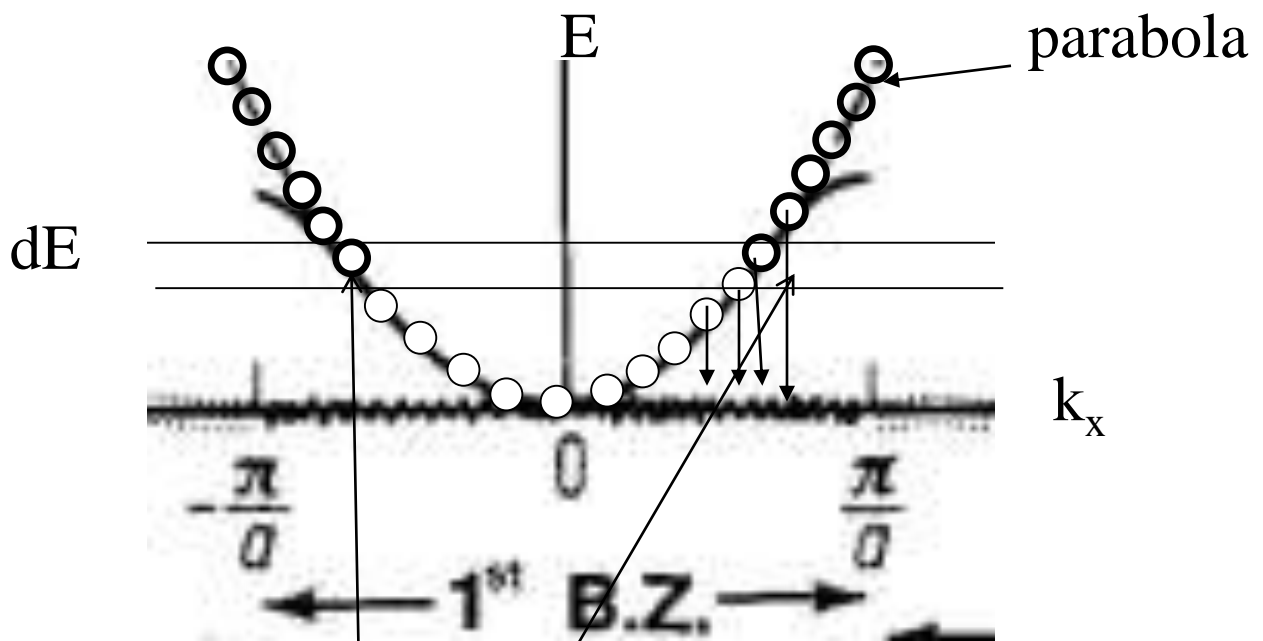
L'approssimazione è perfetta nel centro zona di Brillouin, lo scostamento aumenta sul bordo zona.



$$E(k_x) \approx \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(k_x)}{\partial k_x^2} \right]_0 k_x^2 = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*}$$

DENSITA' degli STATI

In uno schema a bande mono-dimensionale in approssimazione parabolica abbiamo gli stati indicati dai punti in figura, occupabili da una coppia di elettroni a spin opposto



$$g(E) = \frac{L^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$$

Numero di stati disponibili agli elettroni nell'intervallo di energia dE in 3D

Rimuoviamo adesso la condizione che
il solido si trova alla temperatura di 0 K, cioè i nuclei sono fissi.

LA MECCANICA STATISTICA APPLICATA A SISTEMI QUANTISTICI

- I gas ideali quantistici:
 - gli elettroni e la distribuzione di Fermi-Dirac;
Applicazione: il gas di elettroni liberi nei metalli/
conduttori

Elettroni nello schema a bande di un solido a $T > 0$ K

Quando la temperatura del solido cristallino diventa maggiore di 0 K i nuclei nel reticolo cristallino acquistano energia e iniziano a oscillare intorno alle posizioni di equilibrio.

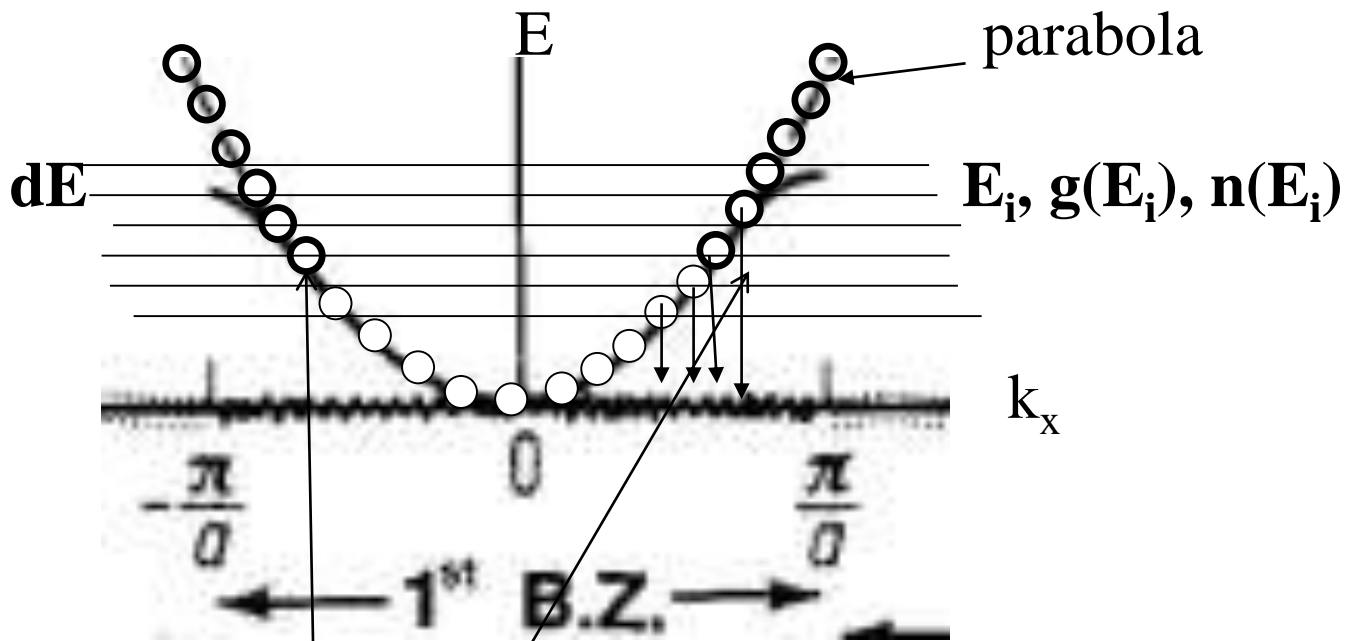
Gli elettroni possono urtare con il reticolo fuori dalla posizione di equilibrio e acquistare energia

$$E(\text{stato fin.}) = E(\text{stato in.}) + E(\text{trasferita dal reticolo})$$

Quando gli elettroni raggiungono l'equilibrio termodinamico alla temperatura T , non saranno più tutti ad energie minori del livello di Fermi.

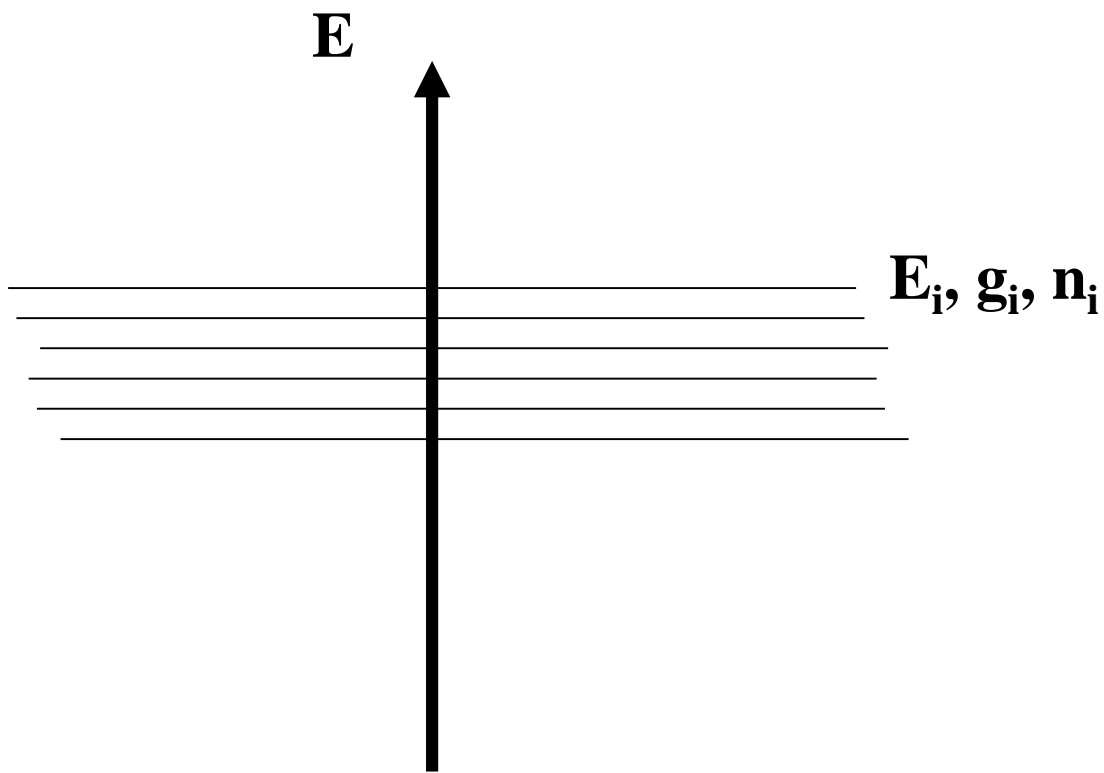
Ci chiediamo quale distribuzione abbiano nelle bande, chiamando:

n_i gli elettroni che occupano degli stati ad energia E_i
 g_i gli stati disponibili ad energia E_i



$$g(E) = \frac{L^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$$

Nello schema è indicata una banda generica, la sua approssimazione parabolica e la divisione in intervalli di energia dE piccoli a piacere intorno a E_i e contenenti $n_i = n(E_i)dE$ elettroni al livello E_i che occupano un numero $g_i = g(E_i)dE$ di stati disponibili agli elettroni nell'intervallo di energia dE intorno a E_i



Possiamo quindi schematizzare le bande come costituite da livelli energetici discreti E_i , contenenti n_i che occupano una frazione dei g_i stati disponibili agli elettroni.

Con le condizioni:

$$n_i \leq g_i \quad \text{dal principio di Pauli}$$

$$\sum_i n_i = N \quad \begin{array}{l} \text{numero totale costante} \\ \text{di particelle del gas} \end{array}$$

$$\sum_i E_i n_i = U \quad \text{energia totale degli elettroni}$$

In linea di principio tutte le distribuzioni degli n_i elettroni nei g_i stati disponibili ad energia E_i sono equivalenti nel limite del rispetto delle condizioni (numero totale di elettroni nel solido, energia totale e principio di Pauli).

Quindi ci possiamo figurare che gli elettroni, urtando con il reticolo (cioè acquisendo o cedendo energia), possano cambiare continuamente stato.

Noi però sappiamo che le proprietà fisiche di un solido dipendono da dove sono posizionati gli elettroni nelle bande (pensate alla differenza tra conduttori e isolanti).

Se gli elettroni sono liberi di cambiare continuamente l'occupazione delle bande vedrei le proprietà fisiche cambiare in tempo reale.

Noi sappiamo che i solidi a T fissata hanno proprietà fisiche costanti.

COME POSSO CONCILIARE LE DUE VISIONI ?
(cioè elettroni che cambiano stato per gli urti e proprietà fisiche costanti nel tempo)

RISPOSTA data da Fermi:

Deve esistere una distribuzione degli $\mathbf{n_i}$ elettroni nei $\mathbf{g_i}$ stati disponibili ad energia $\mathbf{E_i}$ che si può realizzare in un numero incredibilmente grande di combinazioni da non far realizzare mai tutte le altre distribuzioni.

Ecco il ragionamento alla base della distribuzione di Fermi-Dirac che ci suggerisce l'esistenza di una distribuzione degli $\mathbf{n_i}$ elettroni nei $\mathbf{g_i}$ stati disponibili ad energia $\mathbf{E_i}$ che è stazionaria

$$\mathbf{n_i} / \mathbf{g_i} = f(\mathbf{E_i} ,T)$$

Gli elettroni e la distribuzione di Fermi-Dirac

Consideriamo N particelle quantistiche che soddisfano al **PRINCIPIO DI PAULI** alla temperatura T .



Uno stato quantistico non può essere occupato da più di una particella
(**FERMIONE**).

Si vuole derivare la probabilità di occupazione

$f(E_i, T)$ di uno stato ad energia E_i

con densità degli stati g_i

quando le N particelle non interagenti sono in equilibrio termodinamico alla temperatura T .

Sia n_i il numero di elettroni che occupano parte dei g_i stati alla stessa energia E_i .

Ovviamente:

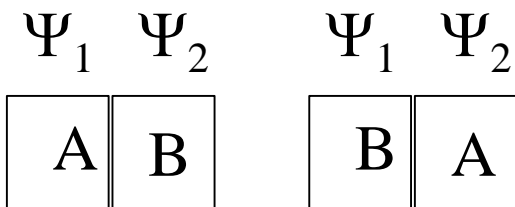
$$n_i \leq g_i \quad \text{dal principio di Pauli}$$

$$\sum_i n_i = N \quad \begin{array}{l} \text{numero totale costante} \\ \text{di particelle del gas} \end{array}$$

$$\sum_i E_i n_i = U \quad \text{energia interna del gas}$$

Proviamo a calcolare i W modi in cui n particelle possono occupare g stati di diversa funzione d'onda.

Se $n=2$ (particella A e B) e $g=2$ (funzioni d'onda Ψ_1 e Ψ_2):



Quindi $W=2$ modi di occupazione

Se $n=3$ (particella A, B e C) e $g=3$ (funzioni d'onda Ψ_1, Ψ_2 e Ψ_3):

Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
A	B	C
B	A	C
A	C	B

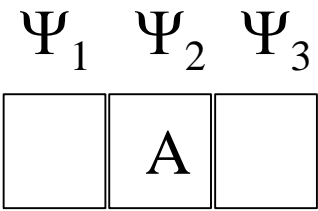
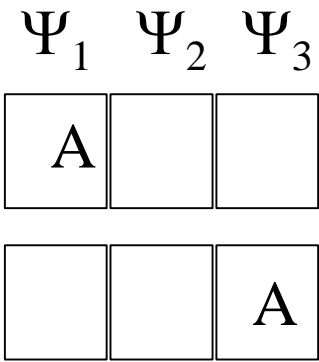
Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
C	B	A
B	C	A
C	A	B

Quindi $W=6=3!$ modi di occupazione

Se provate con $n=4$ (particella A, B, C e D) e $g=4$ (funzioni d'onda Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 e Ψ_4):

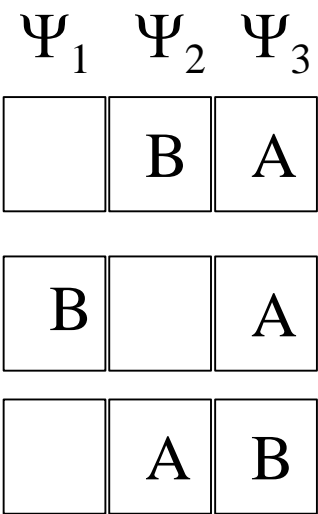
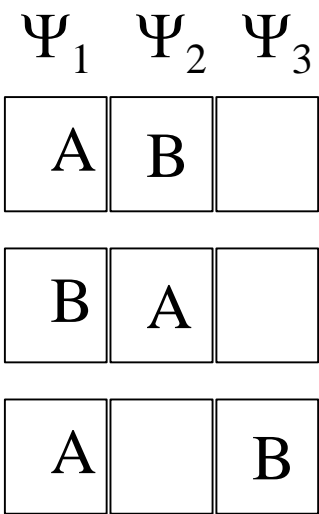
$W=24=4!$ modi di occupazione

Se $n=1$ (particella A) e $g=3$ (funzioni d'onda Ψ_1, Ψ_2 e Ψ_3):



Quindi $W=3=3!/2$ modi di occupazione

Se $n=2$ (particella A, B) e $g=3$ (funzioni d'onda Ψ_1, Ψ_2 e Ψ_3):



Quindi $W=6=3!/1$ modi di occupazione

Quindi se abbiamo g stati e n particelle, con $n \leq g$

$$W = g! / (g-n)!$$

Cioè dobbiamo togliere gli scambi degli stati vuoti
 $(g-n)!$

Se le n particelle fossero indistinguibili tra loro, come
gli elettroni, dovremmo togliere anche gli scambi tra i
posti pieni

$$n!$$

Cioè $W = g! / [n!(g-n)!]$

Quindi il singolo gruppo n_i di particelle può avere W_i modi di essere distribuito su g_i stati dati da

$$W_i = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

Dal calcolo combinatorio il numero totale dei modi per distribuire gruppi di n_i particelle su gruppi di g_i stati vale:

$$W = \prod_i W_i$$

W ci dà un valore collegabile al disordine nella configurazione del sistema di elettroni. Boltzmann aveva già collegato questo numero al concetto di ENTROPIA mediante la definizione per principio

$$\text{ENTROPIA} \quad S = k_B \ln W$$

Possiamo quindi scrivere il **primo principio della termodinamica a volume costante** per il gas di particelle considerato con

EN. INTERNA
$$U = \sum_i E_i n_i$$

ENTROPIA
$$S = k_B \ln W$$

k_B costante di Boltzmann

W il numero di modi per distribuire
gruppi di n_i particelle su gruppi
di g_i stati

$$\delta Q = dU \quad \text{cioè} \quad TdS = dU$$

$$dU - TdS = 0$$

Lavorando a $T = \text{costante}$

$$d[U - TS] = 0$$

$$d \left[\sum_i E_i n_i - T k_B \ln W \right] = dF(n_i) = 0$$

Quindi deve contemporaneamente valere

$$d[U - TS] = 0$$

il principio di max dell'entropia e di minimo dell'energia, oltre che costanza del numero di lettroni.

Quindi per un sistema in equilibrio otteniamo che $F(\mathbf{n}_i)$ deve essere minima rispetto alla variazione del numero di occupazione $\delta \mathbf{n}_i$ dei livelli ad energia E_i .

Cioè

$$dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial n_i} \delta n_i = 0$$

$$\text{con} \quad \sum_i \delta n_i = 0$$

Definiamo:
$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = \mu_i \Rightarrow \sum_i \mu_i \delta n_i = 0$$

Siccome questo deve valere per qualsiasi $\delta \mathbf{n}_i$

$$\mu \sum_i \delta n_i = 0 \Rightarrow \mu \text{ è detto potenziale chimico}$$

Dal calcolo combinatorio il numero totale dei modi per distribuire gruppi di n_i particelle su gruppi di g_i stati vale:

$$W = \prod_i W_i$$

Possiamo scrivere l'energia libera del gas ideale di fermioni come

$$F = \sum_i E_i n_i - kT \ln \prod_i \left[\frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!} \right]$$

Tenendo conto dell'approssimazione detta di Stirling

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

$$F = \sum_i E_i n_i - kT \sum_i [g_i \ln g_i - g_i - n_i \ln n_i + n_i + (g_i - n_i) \ln (g_i - n_i) - (g_i - n_i)]$$

Dalla definizione di potenziale chimico

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial n_i} = E_i + kT \ln \left[\frac{n_i}{g_i - n_i} \right]$$

da cui il gruppo di numeri di occupazione medi n_i che rendono minima F
(cioè la distribuzione n_i alla quale corrisponde il massimo numero di microstati W con lo stesso macrostato) è

$$n_i = g_i \left[\frac{1}{e^{\frac{(E_i - \mu)}{kT}} + 1} \right]$$

La probabilità che all'equilibrio termodinamico uno stato ad energia E_i sia occupato quando il gas ideale di fermioni si trova alla temperatura T vale:

$$f(E_i, T) = \frac{n_i}{g_i} = \left[\frac{1}{e^{\frac{(E_i - \mu)}{kT}} + 1} \right]$$

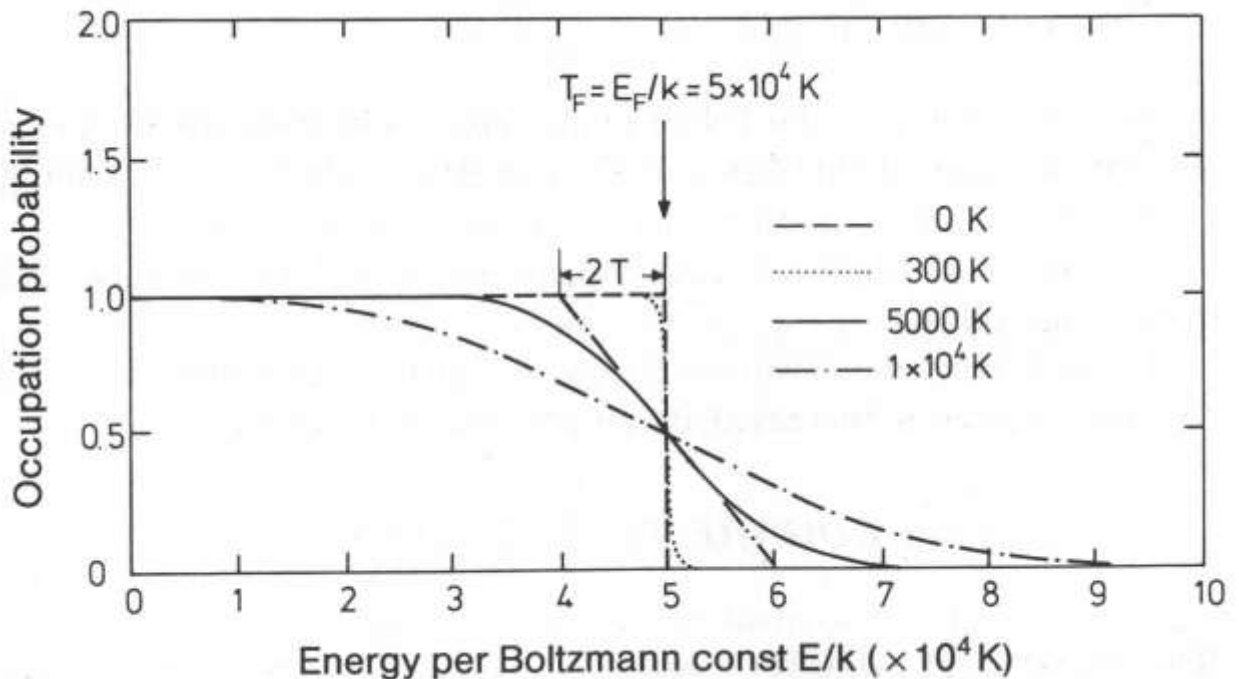
Se i livelli E_i sono distribuiti in modo molto fitto (quasi continuo) si può scrivere

$$f(E, T) = \left[\frac{1}{e^{\frac{(E - \mu)}{kT}} + 1} \right] \quad \textbf{DISTRIBUZIONE DI FERMI}$$

Il grado di degenerazione g_i diventa per il caso continuo

$g(E)dE \Rightarrow$ numero di stati nell'intervallo energetico $[E, E+dE]$

DISTRIBUZIONE DI FERMI



La distribuzione riportata in grafico descrive la probabilità di occupazione di uno stato ad energia E per particelle quantistiche non interagenti che obbediscono al **PRINCIPIO di PAULI** (fermioni) all'equilibrio termico.

Il significato del **POTENZIALE CHIMICO** μ è chiaro se si prende $f(E, T)$ a $T=0 \text{ K}$.

$f(E, 0)$ è la funzione a gradino.

$$f(E, T = 0 \text{ K}) = 1 \quad E < \mu$$

$$f(E, T = 0 \text{ K}) = 0 \quad E > \mu$$

Per gli elettroni μ è detta energia di Fermi E_F .

Applicazione della statistica di Fermi ad un gas ideale di elettroni liberi

Il gas di elettroni liberi e non interagenti rappresenta uno dei casi più interessanti di applicazione della statistica di Fermi.

Come già detto, gli elettroni sono particelle che soddisfano al Principio di Pauli (Fermioni, spin semintero) e quindi rispondono alla statistica di Fermi.

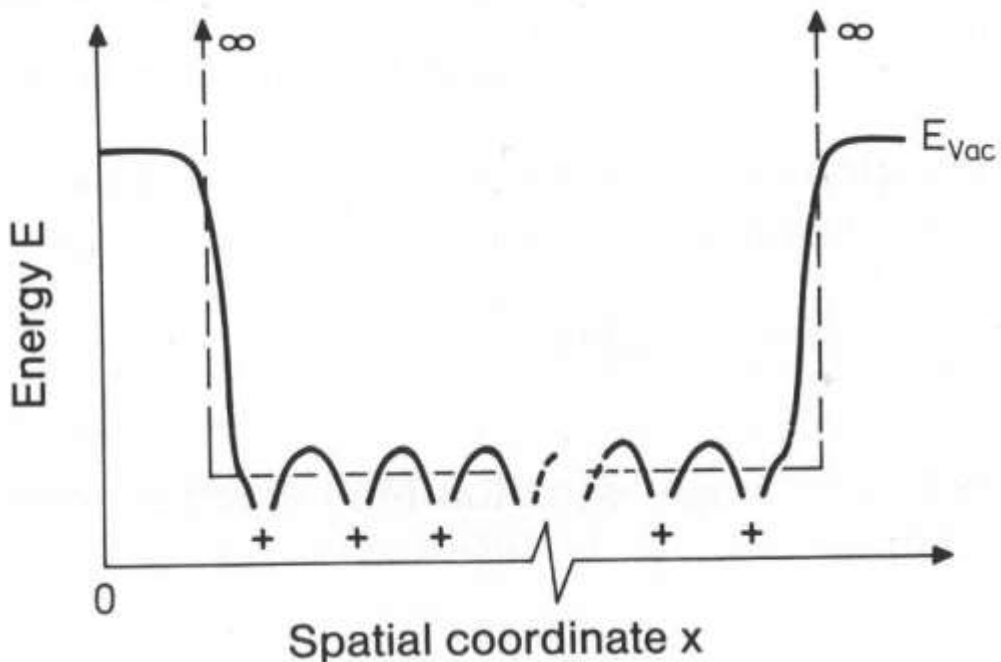
Se consideriamo un insieme di N elettroni non interagenti e liberi di massa m in una scatola cubica di lato L e volume L^3 ,

otteniamo i

risultati di alcuni lezioni fa quando abbiamo considerato gli elettroni soggetti ad una buca di potenziale (elettroni in un metallo).

Gli elettroni liberi possono essere trattati come un insieme di particelle non interagenti in una buca di potenziale

Consideriamo un singolo elettrone libero in una buca di potenziale tri-dimensionale (scatola) di lato L , il potenziale schematizzabile come nella figura (il modello si adatta perfettamente a descrivere gli elettroni in banda di conduzione di un materiale conduttore, es. metallo):



Possiamo quindi scrivere l'energia potenziale di un singolo elettrone come

$$V(x, y, z) = \begin{cases} V_0 = \text{cost} & \text{per } 0 < x, y, z < L \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'equazione di Schrodinger stazionaria agli autovalori E' per l'operatore hamiltoniano è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}) + (V_0 - E') \Psi(\vec{r}) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}) - E \Psi(\vec{r}) = 0$$

Le soluzioni hanno forma: $\Psi(\vec{r}) = \left[\frac{1}{L} \right]^{\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$
funzioni di Bloch

Come condizioni al contorno si possono porre le condizioni di periodicità:

$$\Psi(x + L, y + L, z + L) = \Psi(x, y, z)$$

Da cui si ottiene una limitazione per i valori di $k=(k_x, k_y, k_z)$

$$k_x = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \dots, \pm \frac{2\pi}{L} n_x$$

$$k_y = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \dots, \pm \frac{2\pi}{L} n_y$$

$$k_z = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \dots, \pm \frac{2\pi}{L} n_z$$

$$n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Quindi l'elettrone può avere solo stati caratterizzati da certi valori dei numeri quantici k .

Attenzione che una tale limitazione vale per qualsiasi elettrone in un solido come conseguenza della forma delle funzioni di Bloch

Ricordiamo che le funzioni d'onda di tali elettroni sono:

$$\Psi(\vec{r}) = \left[\frac{1}{L} \right]^{\frac{3}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Soggette alle condizioni al contorno:

$$\Psi(x + L, y + L, z + L) = \Psi(x, y, z)$$

Da cui si ottiene una limitazione per i valori di $k=(k_x, k_y, k_z)$

$$k_x = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \dots, \pm \frac{2\pi}{L} n_x$$

$$k_y = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \dots, \pm \frac{2\pi}{L} n_y$$

$$k_z = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \dots, \pm \frac{2\pi}{L} n_z$$

$$n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

I possibili valori per l'energia degli stati che l'elettrone può occupare sono:

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k}|^2$$

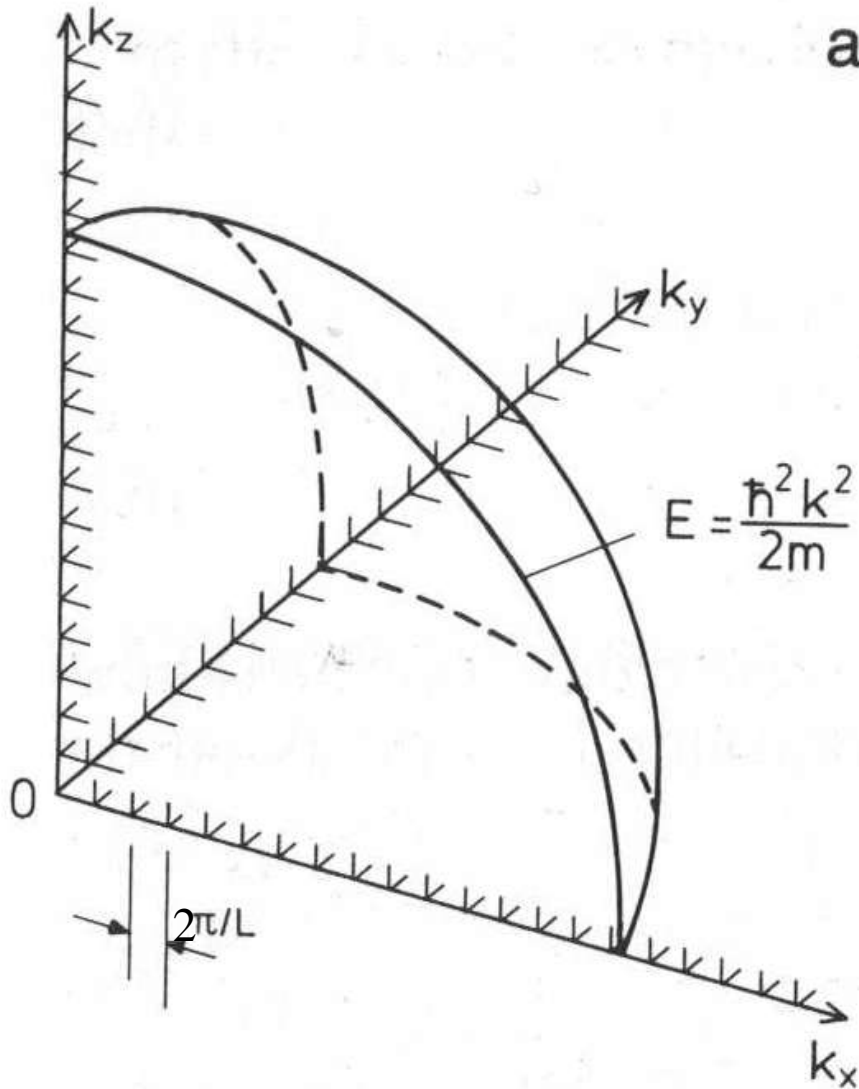
$$\text{con} \quad |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

Tutti gli stati con $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \text{cost.}$

sono degeneri.

Vediamo di calcolare il numero totale N_{STATI} di stati con energia

$$E' < E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$



$$N_{STATI} = \frac{\text{volume della sfera di raggio } k}{\text{volume occupato da un singolo stato}}$$

$$N_{STATI} = \frac{\frac{4}{3} \pi k^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}$$

ricordando che per l'elettrone libero: $k = \left(\frac{2m}{\hbar^2} E\right)^{\frac{1}{2}}$

$$N_{STATI} = \frac{\frac{4}{3} \pi \left(\frac{2m}{\hbar^2} E\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = N(E)$$

$$N(E) = \frac{L^3}{6\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}}$$

con $N(E)$ il numero di stati disponibili agli elettroni con energia minore di E .

Se definiamo **DENSITA' DEGLI STATI** $g(E)$ il numero, pari a $dN(E)$, di stati disponibili agli elettroni tra le energie E e $E+dE$

$$dN(E) = g(E)dE = \frac{L^3}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} dE$$

$$g(E) = \frac{L^3}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$$

Se teniamo conto anche del numero quantico di spin, tutti gli stati possono essere occupati da due elettroni

$$g(E) = \frac{L^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$$

Se prendiamo gli N_e elettroni di conduzione nel volume L^3 , trattati come particelle libere,

essendo gli elettroni dei fermioni e seguendo la statistica di Fermi-Dirac, il numero di stati occupati nell'intervallo di energia E e $E+dE$, pari a $n(E)dE$ è dato dal

prodotto tra
densità degli stati ad energia E e probabilità di
occupazione dei singoli stati ad energia E .

$$n(E)dE = g(E)f(E,T)dE$$

Ovviamente, se N_e sono gli elettroni liberi nel volume L^3

$$N_e = \int_0^{\infty} n(E) dE = \int_0^{\infty} g(E) f(E, T) dE$$

con
$$f(E, T) = \left[\frac{1}{e^{\frac{(E-E_F)}{kT}} + 1} \right]$$

Dove il potenziale chimico μ è detto energia di Fermi E_F

$$\mu = E_F$$

Vediamo come si distribuiscono gli elettroni sui vari stati e il significato dell'energia di Fermi.

Se la temperatura $T > 0$ K

$$n(E, T) = \left[\frac{g(E)}{e^{\frac{(E - E_F)}{kT}} + 1} \right]$$

ci sono cioè stati occupati a tutte le energie e stati liberi anche a basse energie.

$$\begin{array}{llll} \text{Se } T \rightarrow 0 \text{ K} & f(E, T) \rightarrow 1 & \text{per} & E < E_F \\ & f(E, T) \rightarrow 0 & \text{per} & E > E_F \end{array}$$

$$n(E < E_F, T = 0 \text{ K}) = g(E)$$

$$n(E > E_F, T = 0 \text{ K}) = 0$$

Gli elettroni e la distribuzione di Fermi-Dirac

La probabilità che all'equilibrio termodinamico uno stato ad energia E_i sia occupato quando il gas ideale di fermioni si trova alla temperatura T vale:

$$f(E_i, T) = \frac{n_i}{g_i} = \left[\frac{1}{e^{\frac{(E_i - \mu)}{kT}} + 1} \right]$$

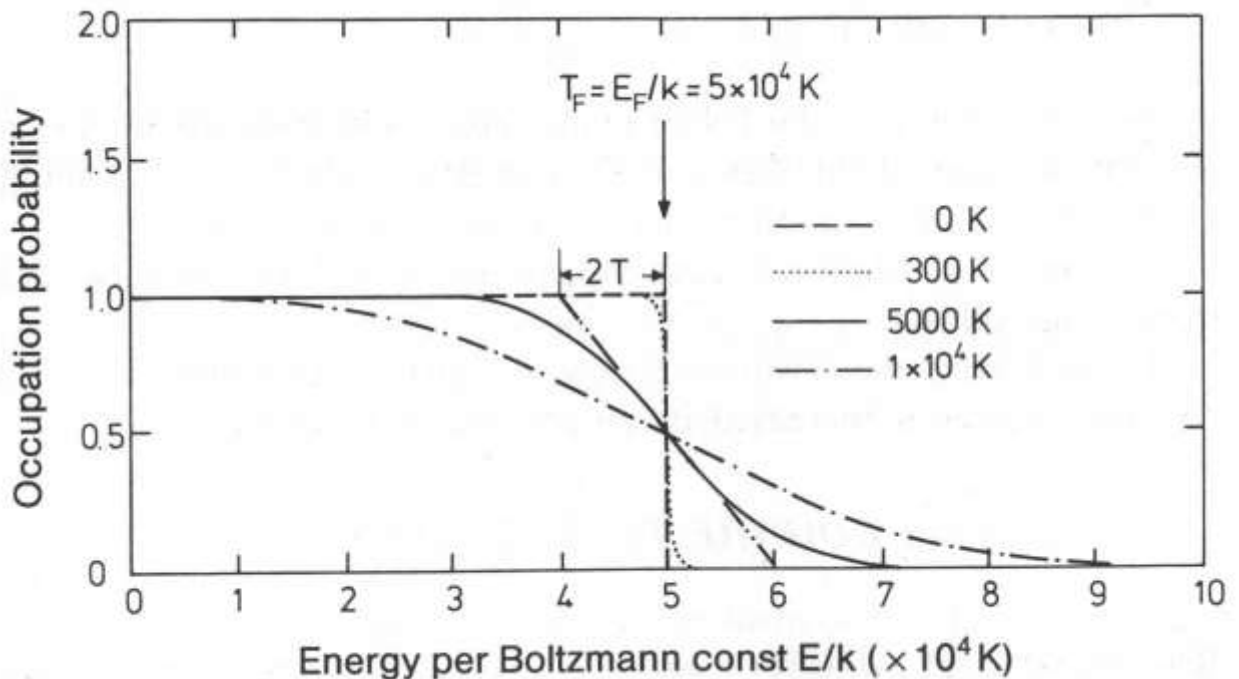
Se i livelli E_i sono distribuiti in modo molto fitto (quasi continuo) si può scrivere

$$f(E, T) = \left[\frac{1}{e^{\frac{(E - \mu)}{kT}} + 1} \right] \quad \textbf{DISTRIBUZIONE DI FERM}$$

Il grado di degenerazione g_i diventa per il caso continuo

$g(E)dE \Rightarrow$ numero di stati nell'intervallo energetico $[E, E+dE]$

DISTRIBUZIONE DI FERMI



La distribuzione riportata in grafico descrive la probabilità di occupazione di uno stato ad energia E per particelle quantistiche non interagenti che obbediscono al **PRINCIPIO di PAULI** (fermioni) all'equilibrio termico.

Il significato del **POTENZIALE CHIMICO** μ è chiaro se si prende $f(E, T)$ a $T=0 \text{ K}$.

$f(E, 0)$ è la funzione a gradino.

$$f(E, T = 0 \text{ K}) = 1 \quad E < \mu$$

$$f(E, T = 0 \text{ K}) = 0 \quad E > \mu$$

Per gli elettroni μ è detta energia di Fermi E_F .

Nelle bande la **DENSITA' DEGLI STATI** $g(E)$,
cioè il numero di stati disponibili agli
elettroni tra le energie E e $E+dE$ vale

$$g(E) = \frac{L^3}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$$

Se prendiamo gli N_e elettroni di conduzione in un
blocco di metallo di volume L^3 e supponendo che
possano essere trattati come particelle libere,

essendo gli elettroni dei fermioni e
seguendo la statistica di Fermi-Dirac, il numero di
stati occupati nell'intervallo di energia E e $E+dE$,
pari a $n(E)dE$ è dato dal

prodotto
tra densità degli stati ad energia E e probabilità
di occupazione dei singoli stati ad energia E .

$$n(E)dE = g(E)f(E,T)dE$$