Trasformata di Fourier

Trasformata di Funzioni e Proprietà Elementari

Richiami di teoria. Data una funzione integrabile $f \in \mathcal{R}^1$, definiamo la sua **trasformata di Fourier**:

Trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Le proprietà elementari della trasformata di Fourier sono:

Proprietà della trasformata di Fourier

- Linearità: $\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$.
- Traslazione: $\mathcal{F}(f(x - x_0))(\omega) = e^{-2\pi i x_0 \omega} \mathcal{F}(f(x))(\omega)$.
- Modulazione: $\mathcal{F}(e^{2\pi i \omega_0 x} f(x))(\omega) = \mathcal{F}(f(x))(\omega - \omega_0)$.
- Riscalamento: $\mathcal{F}(f(ax))(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f(x))(\frac{\omega}{a})$.
- Derivazione: $\mathcal{F}([f(x)]^{(n)})(\omega) = (2\pi i)^n \omega^n \mathcal{F}(f(x))(\omega)$, se $f^{(n)} \in \mathcal{R}^1$.
- Moltiplicazione per polinomi: $\mathcal{F}(x^n f(x))(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^n [\mathcal{F}(f(x))(\omega)]^{(n)}$, se $x^n f(x) \in \mathcal{R}^1$.

Esercizio 1. Si provi che la trasformata di una funzione pari e reale è pari e reale.

Soluzione. Ricordiamo innanzitutto che il prodotto tra una coppia di funzioni pari o una coppia di funzioni dispari è pari, mentre il prodotto tra una coppia di funzioni pari ed una dispari è dispari. Inoltre l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine è sempre nullo. Allora, se $f(x)$ è pari e reale, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(-2\pi\omega x) + i\sin(-2\pi\omega x)) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\omega x) f(x)\,\mathrm{d}x - i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi\omega x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\omega x) f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

essendo il coseno una funzione pari, mentre il seno una funzione dispari. Osserviamo quindi che $\mathcal{F}(f)(\omega)$ è reale, essendo l'integrale di un prodotto di funzioni reali, e che è pari, in quanto

$$\mathcal{F}(f)(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi(-\omega)x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\omega x) f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}(f)(\omega).$$

Esercizio 2. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-ax}H(x)$, $a > 0$.

Soluzione. Ricordiamo

$$\mathcal{F}\left(e^{-x}H(x)\right) = \frac{1}{1 + 2\pi i\omega}$$

ed osserviamo che, definita $g(x) = e^{-x}H(x)$, abbiamo $g(ax) = e^{-ax}H(ax) = e^{-ax}H(x) = f(x)$. Di conseguenza, per la proprietà di riscalamento

$$\mathcal{F}(f(x))(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(g(x))\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{a + 2\pi i\omega}$$

Esercizio 3. Si calcoli la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione. Innanzitutto riscriviamo

$$f(x) = 2\mathbb{1}_{[-1,0]}(x) - \mathbb{1}_{[0,2]}(x) = 2\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \mathbb{1}_{[-1,1]}(x-1).$$

Ricordiamo a questo punto la trasformata di Fourier della porta $p_a(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x)$:

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x)\right)(\omega) = \frac{\sin(a\pi\omega)}{\pi\omega}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\omega) &= 2\mathcal{F}\left[\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right](\omega) - \mathcal{F}\left[\mathbb{1}_{[-1,1]}(x-1)\right](\omega) \\
&= 2e^{-2\pi i(-\frac{1}{2})\omega}\mathcal{F}\left[\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\right](\omega) - e^{-2\pi i 1\omega}\mathcal{F}\left[\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\right] \\
&= 2e^{\pi i\omega}\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega} - e^{-2\pi i\omega}\frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega}
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che $f \in \mathcal{R}^1$, di conseguenza

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\omega t}}{a^2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2}\frac{e^{-2\pi i\omega t}}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Utiliziamo il cambio di variabili $x = t/a$, da cui con $\mathrm{d}x = a\,dt$ otteniamo

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\frac{e^{-2\pi i\omega ax}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i(a\omega)x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)(a\omega).$$

Calcoliamo ora

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\omega x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Come abbiamo già visto, è possibile calcolare questo integrale sfruttando le proprietà degli integrali in campo complesso. Prima di tutto, distinguiamo due casi.

- $\omega \leq 0$

  Chiamato γ_1 il segmento da $-\rho$ a ρ, γ_2 la semicirconferenza superiore con centro in 0 e raggio ρ e $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ curva di Jordan, abbiamo che

$$\lim_{\rho\to\infty} \oint_{\gamma} \frac{e^{-2\pi i\omega z}}{1 + z^2}\,\mathrm{d}z = \lim_{\rho\to\infty}\left[\int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{-2\pi i\omega x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} \frac{e^{-2\pi i\omega z}}{1 + z^2}\,\mathrm{d}z\right].$$

L'idea ora è quella di mostrare che l'integrale lungo γ_2 si annulla per $\rho \to \infty$. A tal proposito, osserviamo che per $\omega \leq 0$ abbiamo che lungo γ_2 (dove $\mathcal{I}m[z] = y \geq 0$) si ha:

$$\left|e^{-2\pi i\omega z}\right| = \left|e^{-2\pi\omega(xi-y)}\right| = \left|e^{2\pi\omega y}e^{-2\pi\omega xi}\right| = e^{2\pi\omega y} \leq 1 \qquad \text{per } \omega \leq 0$$

e quindi per la disuguaglianza di Darboux:

$$\lim_{\rho\to\infty}\left|\int_{\gamma_2} \frac{e^{-2\pi i\omega z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right| \leq \lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma_2} \frac{\left|e^{-2\pi i\omega z}\right|}{\left|1+z^2\right|}\,\mathrm{d}z \leq \lim_{\rho\to\infty} L_{\gamma_2} \max_{z\in\gamma_2} \frac{\left|e^{-2\pi i\omega z}\right|}{\left|1+z^2\right|}$$

$$\leq \lim_{\rho\to\infty} L_{\gamma_2} \frac{\max_{z\in\gamma_2}\left|e^{-2\pi i\omega z}\right|}{\min_{z\in\gamma_2}\left|1+z^2\right|} = \lim_{\rho\to\infty} \pi\rho\frac{1}{\rho^2-1} = 0$$

dove nell'ultimo passaggio si usas la disuguaglianza triangolare inversa. In conclusione, per $\omega \leq 0$, considerando che la funzione integranda ha un polo semplice $z = i$ contenuto nella semicirconferenza superiore, per il Teorema dei Residui abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\omega x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\rho\to\infty}\oint_{\gamma} \frac{e^{-2\pi i\omega z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\omega z}}{1+z^2}, i\right) = \pi e^{2\pi\omega}$$

- $\omega > 0$

  Al contrario, per $\omega > 0$, possiamo chiamare γ_3 la semicirconferenza inferiore con centro in 0 e raggio ρ e $\gamma' = \gamma_3 \cup (-\gamma_1)$ curva di Jordan, per cui

$$\lim_{\rho\to\infty}\oint_{\gamma'} \frac{e^{-2\pi i\omega z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \lim_{\rho\to\infty}\left[-\int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{-2\pi i\omega x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_3} \frac{e^{-2\pi i\omega z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right].$$

  Osserviamo che lungo γ_3(dove $\mathcal{I}m[z] = y \leq 0$), per lo stesso ragionamento fatto sopra si ha:

$$|e^{-2\pi i\omega z}| \leq 1,$$

  di conseguenza, per lo stesso ragionamento di prima si prova che l'integrale lungo γ_3 va a 0 per $\rho \to \infty$. Osservando che in γ' il segmento lungo l'asse reale è percorso in senso inverso e considerando che la funzione integranda ha un polo semplice $z = -i$ contenuto nella semicirconferenza inferiore, per il Teorema dei Residui abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\omega x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\rho\to\infty}\oint_{\gamma'} \frac{e^{-2\pi i\omega z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\omega z}}{1+z^2}, -i\right) = \pi e^{-2\pi\omega}$$

Possiamo riassumere i due casi come:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\omega x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi e^{-2\pi|\omega|}$$

e, dunque,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(a\omega) = \frac{\pi}{|a|}e^{-2\pi|a\omega|}$$

Esercizio 5. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \dfrac{x}{(9+4x^2)^2}$.

Soluzione. Possiamo innanzitutto osservare che $f \in \mathcal{R}^1$. Inoltre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{9+4x^2} = -\frac{8x}{(9+4x^2)^2} \implies f(x) = g'(x),$$

dove

$$g(x) = -\frac{1}{8}\frac{1}{9+4x^2} = -\frac{1}{32}\frac{1}{x^2+\frac{9}{4}}.$$

Di conseguenza, per la regola di derivazione e usando la trasformata calcolata nell'esercizio 4 si ha:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(g')(\omega) = -\frac{1}{32}2\pi i\omega\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)(\omega) = -\frac{1}{16}\pi i\omega\frac{2\pi}{3}e^{-2\pi|\frac{3}{2}\omega|} = -\frac{\pi^2 i}{24}\omega e^{-3\pi|\omega|}.$$

Esercizio 6. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-x^2}$

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che $f \in \mathcal{R}^1$, per cui

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x}f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x}e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

L'ultimo integrale può essere calcolato con tecniche di analisi complessa. Mostreremo qui un altro metodo; derivando ambo i membri rispetto a ω, si trova che:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x}e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-2\pi i\omega x}e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi i x e^{-2\pi i\omega x}e^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \pi i\int_{-\infty}^{\infty} -2xe^{-x^2}e^{-2\pi i\omega x}\,\mathrm{d}x = \pi i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{-x^2}\right]e^{-2\pi i\omega x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

La derivazione sotto il segno di integrale fatta nei primi passaggi in questo caso è lecita (la verifica è lasciata allo studente interessato). A questo punto, integriamo per parti l'ultimo integrale:

$$\pi i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{-x^2}\right]e^{-2\pi i\omega x}\mathrm{d}x = \underbrace{\pi i\left[e^{-x^2}e^{-2\pi i\omega x}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - 2\pi^2\omega\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x}e^{-x^2}\mathrm{d}x = -2\pi^2\omega\hat{f}(\omega)$$

Ma allora abbiamo appena ottenuto che:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega) = -2\pi^2\omega\hat{f}(\omega)$$

Questa è una equazione differenziale ordinaria del primo ordine che può essere facilmente risolta per separazione delle variabili. Infatti si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega) = -2\pi^2\omega\hat{f}(\omega) \Longrightarrow \int\frac{\mathrm{d}\hat{f}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = -2\pi^2\int\omega\,\mathrm{d}\omega \Longrightarrow \log(\hat{f}(\omega)) = -2\pi^2\frac{\omega^2}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Semplificando ed esplicitando $\hat{f}(\omega)$ si trova che la soluzione è data da

$$\hat{f}(\omega) = ke^{-\pi^2\omega^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

La costante k può essere trovata imponendo la condizione iniziale:

$$\hat{f}(0) = k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Da cui, sostituendo:

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\omega^2}$$

Esercizi aggiuntivi svolti.

Esercizio 7. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Soluzione. Sfruttiamo la traslazione riscrivendo

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Di conseguenza, ricordando la trasformata trovata in un esercizio precedente si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\omega) &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)(\omega) = e^{-2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)\omega}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\right)(\omega)\\ &= e^{\pi i\omega}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)(\omega) = e^{\pi i\omega}\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}\pi|\omega|} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}e^{\pi\left(i\omega-\sqrt{3}|\omega|\right)}.\end{aligned}$$

Esercizio 8. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = xe^{-x}H(x)$.

Soluzione. Osserviamo che $f \in \mathcal{R}^1$. Ricordiamo

$$\mathcal{F}\left(e^{-x}H(x)\right) = \frac{1}{1+2\pi i\omega}$$

Di conseguenza, per la regola di moltiplicazione per polinomi:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\omega) &= \mathcal{F}(xe^{-x}H(x))(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}(e^{-x}H(x)) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{1+2\pi i\omega}\right]\\ &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{-2\pi i}{(1+2\pi i\omega)^2} = \frac{1}{(1+2\pi i\omega)^2}.\end{aligned}$$

Esercizio 9. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-|x|}$

Soluzione. Usiamo la definizione:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x}f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega x}e^{-|x|}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-2\pi i\omega)}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+2\pi i\omega)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^{x(1-2\pi i\omega)}}{1-2\pi i\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-x(1+2\pi i\omega)|}}{1+2\pi i\omega}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{2}{1+4\pi^2\omega^2}$$

Esercizio 10. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{6\pi ix}e^{-|x|}$.

Soluzione. Si potrebbe affrontare il calcolo passando ancora una volta per la definizione, ma avendo calcolato la trasformata di Fourier di $e^{-|x|}$ nell'esercizio precedente, possiamo sfruttare la proprietà di modulazione:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}\left(e^{6\pi ix}e^{-|x|}\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\omega-3) = \frac{2}{1+4\pi^2(\omega-3)^2}$$

Esercizio 11. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = xe^{-x^2}$

Soluzione. Notiamo che, posto $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, si ha $g'(x) = xe^{-x^2} = f(x)$. Possiamo ora usare la regola della derivata e la trasformata trovata in un esercizio precedente:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}\left(g'\right)(\omega) = 2\pi i\omega\mathcal{F}(g)(\omega) = -\pi i\omega\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\omega) = -\pi^{\frac{3}{2}} i\omega e^{-\pi^2\omega^2}$$

Alternativamente, si poteva anche usare la regola della moltiplicazione per polinomi.