POLITECNICO DI TORINO

Meccanica Razionale

Risoluzione dei Temi d'Esame

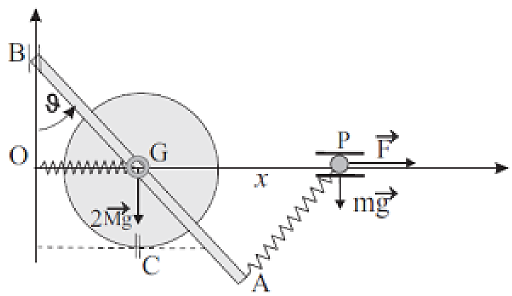
A.A. 2018 – 2019

Compito di Meccanica Razionale del 30 Giugno 2010 - Tema A

1) Cinematica relativa. (Max 1 pagina)

2) In un piano verticale Oxy un disco omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse $y = -R$; un'asta omogenea AB di egual massa M e lunghezza 2ℓ ha l'estremo B mobile sull'asse delle y ed il baricentro G incernierato al centro del disco. Un punto materiale P di massa m è mobile sull'asse delle x sollecitato da una forza orizzontale costante $\vec{F}$, con $F > 0$, e collegato con una molla ideale, di costante $k > 0$, all'estremo A dell'asta. Una forza elastica di costante $h = k$ è infine applicata al centro del disco e diretta verso l'origine O. Si suppongano i vincoli perfetti e si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo di rotazione ϑ che l'asta forma con l'asse verticale e l'ascissa x del punto P.

- Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
- Determinare la velocità angolare del disco.
- Calcolare le equazioni differenziali del moto nella forma di Lagrange.
- Linearizzare tali equazioni nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile e determinare le pulsazioni proprie.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$
\begin{aligned}
P &= (x, 0),\\
B &= (0, l\cos\theta),\\
A &= (2l\sin\theta, -l\cos\theta),\\
G &= (l\sin\theta, 0).
\end{aligned}
$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(x,\theta) = -\frac{1}{2}kx^2 + 2klx\sin\theta - 2kl^2\sin^2\theta + Fx + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero le componenti del gradiente del potenziale

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -kx + 2kl\sin\theta + F = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 2klx\cos\theta - 2kl^2\sin 2\theta = 0,$$

si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)}) = \Big(2l + \frac{F}{k}, \frac{\pi}{2}\Big),$$
$$(x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)}) = \Big(-2l + \frac{F}{k}, \frac{3}{2}\pi\Big).$$

Per valutarne la stabilità, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessiana nei suddetti punti:

$$\mathbb{H}((x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)})) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -2lF \end{pmatrix} \qquad \mathbb{H}((x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)})) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 2lF \end{pmatrix}.$$

Si osserva che, in entrambi i casi, la matrice Hessiana è diagonale e gli autovalori possono essere letti sulla diagonale principale. È facile allora concludere che $(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)})$ è un punto di equilibrio stabile, mentre $(x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)})$ è un punto di equilibrio instabile.

2. Velocità angolare del disco

Il baricentro G del disco ha coordinate $(l\sin\theta, 0)$, pertanto la sua velocità è $\mathbf{v}_G = (l\dot{\theta}\cos\theta, 0)$. Noto che C è centro di istantanea rotazione del disco ($\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$), applicando la legge di distribuzione delle velocità $\mathbf{v}_G - \mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times (G - C)$, è possibile concludere che

$$\omega = -\frac{l\dot{\theta}\cos\theta}{R}.$$

3. Equazioni di Lagrange

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \Big[\frac{5}{4}Ml^2\cos^2\theta + \frac{M}{6}l^2\Big]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

e ricordando che le equazioni del moto nella forma di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

dove $\mathcal{L} = T + U$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x} = -kx + 2kl\sin\theta + F,\\
&\Big(\frac{5}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{3}\Big)Ml^2\,\ddot{\theta} - \frac{5}{2}Ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = 2kl\cos\theta(x - 2l\sin\theta).
\end{aligned}
$$

4. Linearizzazione e calcolo delle pulsazioni proprie

Le equazioni linearizzate risultano essere

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -k(x - x^{(eq)}),\\
\frac{M}{3}l^2\ddot{\theta} &= -2lF(\theta - \theta^{(eq)}),
\end{aligned}
$$

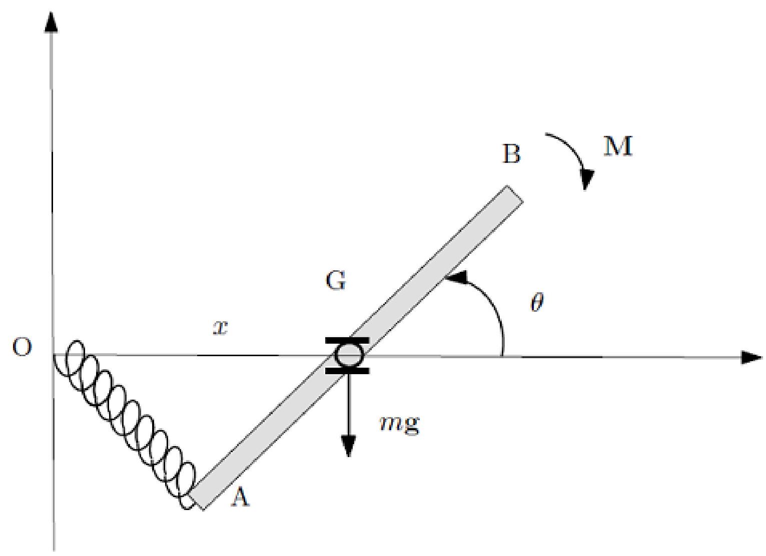
dalle quali si ricavano le pulsazioni proprie

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}},\\
\omega_2 &= \sqrt{\frac{6F}{Ml}}.
\end{aligned}
$$

Teoria (max 1 pagina): Il principio dei Lavori Virtuali e la sua applicazione a sistemi conservativi.

Esercizio In un piano verticale Oxy un' asta omogenea di massa m e lunghezza $2l$ ha il baaricentro vincolato a muoversi sull'asse delle ascisse. Nell'estremo A dell'asta e' applicata una forza elastica di costante $k > 0$, diretta verso l'origine del riferimento. Inoltre una coppia oraria di modulo costante $-M\vec{k}$, con $M > 0$ e applicata all'asta. Si suppongano i vincoli perfetti e si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo di rotazione θ che l'asta forma con l'asse delle ascisse e l'ascissa x del baricentro G.

1. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare del parametro k.
2. Determinare i momenti cinetici e l'energia cinetica.
3. Calcolare le equazioni differenziali del moto nella forma di Lagrange.
4. Posto inizialmente il sistema nella posizione $x_0 = l$, $\theta_0 = \pi/2$ con velocitá iniziali tutte nulle, calcolare l'accelerazione iniziale a_0 del baricentro G.
5. Linearizzare le equazioni del moto in un intorno di una posizione di equilibrio stabile.
6. Calcolare la reazione vincolare in G in un condizione di equilibrio.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned} A &= (x - l\cos\theta, -l\sin\theta), \\ B &= (x + l\cos\theta, l\sin\theta), \\ G &= (x, 0). \end{aligned}$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(x,\theta) = -\frac{1}{2}kx^2 + klx\cos\theta - M\theta + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero le componenti del gradiente del potenziale

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -kx + kl\cos\theta = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -klx\sin\theta - M = 0, \end{aligned}$$

le configurazioni di equilibrio sono tali da soddisfare

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= -\lambda, \\ x &= l\cos\theta, \end{aligned}$$

con $\lambda = \dfrac{2M}{kl^2}$, $\lambda \in (0, 1]$. In definitiva, le configurazioni di equilibrio risultano essere le coppie $(x_i^{(eq)} = l\cos\theta_i^{(eq)}, \theta_i^{(eq)})$ per $i = 1, \ldots, 4$, dove:

$$\begin{aligned} \theta_1^{(eq)} &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin\lambda}{2}, \\ \theta_2^{(eq)} &= -\frac{\arcsin\lambda}{2}, \\ \theta_3^{(eq)} &= \frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin\lambda}{2}, \\ \theta_4^{(eq)} &= \pi - \frac{\arcsin\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Si osservi che $\theta \in [-\pi, +\pi)$ dunque, per la risoluzione dell'equazione $\sin 2\theta = -\lambda$, si tenga presente che $2\theta \in [-2\pi, +2\pi)$. Per valutarne la stabilità, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessiana

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -k & -kl\sin\theta \\ -kl\sin\theta & -klx\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -kl\sin\theta \\ -kl\sin\theta & -kl^2\cos^2\theta \end{pmatrix},$$

il cui determinante è

$$\det(\mathbb{H}) = k^2 l^2 \cos 2\theta.$$

A questo punto è facile verificare che $(x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)})$ e $(x_4^{(eq)}, \theta_4^{(eq)})$ sono punti di equilibrio instabili, mentre $(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)})$ e $(x_3^{(eq)}, \theta_3^{(eq)})$ sono punti di equilibrio stabili.

2. Energia cinetica e momenti cinetici

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2,$$

i momenti cinetici sono dati da

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}. \end{aligned}$$

3. Equazioni di Lagrange

Le equazioni del moto nella forma di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0, \end{aligned}$$

dove $\mathcal{L} = T + U$. Pertanto, si ottiene

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + kl\cos\theta, \\ \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} &= -klx\sin\theta - M. \end{aligned}$$

4. Accelerazione del baricentro

Direttamente dalla prima equazione di Lagrange, imponendo le condizioni iniziali sulla posizione del baricentro e sull'angolo di rotazione dell'asta, è possibile conoscere l'accelerazione del baricentro all'istante iniziale:

$$m\ddot{x}_G(t=0) = -kx_G(t=0) + kl\cos\theta(t=0) = -kx_0 + kl\cos\theta_0 = -kl.$$

Pertanto, $\ddot{x}_G(t=0) = -\dfrac{kl}{m}$.

5. Linearizzazione delle equazioni del moto

Le equazioni linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile risultano essere

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x - x^{(eq)}) - kl\sin\theta^{(eq)}(\theta - \theta^{(eq)}), \\ \frac{M}{3}l^2\ddot{\theta} &= -kl\sin\theta^{(eq)}(x - x^{(eq)}) - kl^2\cos^2\theta^{(eq)}(\theta - \theta^{(eq)}). \end{aligned}$$

6. Reazione vincolare in G in condizioni di equilibrio

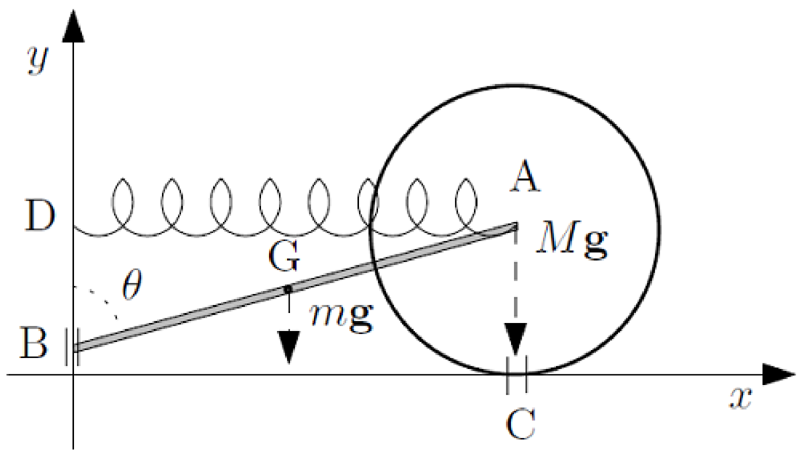
Per calcolare la reazione vincolare nel baricentro in condizioni di equilibrio, si sfrutta la prima equazione cardinale in direzione y: le forze in gioco sono la forza peso, la forza esercitata dalla molla e la reazione vincolare da determinare. Pertanto,

$$\Phi_G = mg - kl\sin\theta_1^{(eq)}.$$

Teoria (max 1 pagina): Cinematica del Corpo Rigido.

Esercizio In un piano verticale Oxy un' asta omogenea di massa m e lunghezza l ha l'estremo B vincolato a muoversi sull'asse delle ordinate. L'altro estremo A dell'asta che è vincolato al baricentro di un disco omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse delle ascisse x. Il baricentro del disco è collegato da una molla ideale, di costante $k > 0$, al punto D di coordinate $(0; R)$. Si suppongano i vincoli perfetti e si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo di rotazione θ che l'asta forma con la verticale ascendente.

1. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare del parametro k.
2. Determinare i momenti cinetici e l'energia cinetica.
3. Calcolare le equazioni differenziali del moto nella forma di Lagrange.
4. Calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto del disco in un condizione di equilibrio stabile.
5. Linearizzare le equazioni del moto in un intorno di una posizione di equilibrio stabile.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$
\begin{aligned}
C &= (l\sin\theta, 0),\\
A &= (l\sin\theta, R),\\
G &= \Big(\frac{l}{2}\sin\theta, R - \frac{l}{2}\cos\theta\Big).
\end{aligned}
$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(\theta) = mg\frac{l}{2}\cos\theta - \frac{k}{2}l^2\sin^2\theta + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero l'unica componente del gradiente del potenziale

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -mg\frac{l}{2}\sin\theta - kl^2\sin\theta\cos\theta = 0,$$

le configurazioni di equilibrio sono tali da soddisfare

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= 0,\\
\cos\theta &= -\lambda,
\end{aligned}
$$

con $\lambda = \dfrac{mg}{2kl^2}$, $\lambda \in (0,1]$. In definitiva, si ha:

$$
\begin{aligned}
\theta_1^{(eq)} &= 0,\\
\theta_2^{(eq)} &= \pi,\\
\theta_3^{(eq)} &= \arccos(-\lambda),\\
\theta_4^{(eq)} &= 2\pi - \arccos(-\lambda),
\end{aligned}
$$

con $\theta_i^{(eq)} \in [0, 2\pi]$. Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si calcola la derivata seconda del potenziale e si studia il suo segno in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -mg\frac{l}{2}\cos\theta - kl^2\cos 2\theta = -mg\frac{l}{2}\cos\theta - 2kl^2\cos^2\theta + kl^2.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \theta_1^{(eq)}) = -mg\frac{l}{2} - kl^2, \\
&\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \theta_2^{(eq)}) = kl^2(\lambda - 1), \\
&\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \theta_3^{(eq)}) = kl^2(1 - \lambda^2), \\
&\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \theta_4^{(eq)}) = kl^2(1 - 3\lambda^2).
\end{aligned}$$

A questo punto è facile verificare che θ_1 e θ_2 sono punti di equilibrio stabili, mentre θ_3 e θ_4 sono punti di equilibrio instabili.

2. Energia cinetica e momenti cinetici

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2}l^2\Big(\frac{1}{3}m + \frac{3}{2}M\cos^2\theta\Big)\dot{\theta}^2,$$

il momento cinetico è dato da

$$p_\theta = \Big(\frac{1}{3}m + \frac{3}{2}M\cos^2\theta\Big)l^2\,\dot{\theta}.$$

3. Equazioni di Lagrange

L'equazione del moto nella forma di Lagrange è

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

dove $\mathcal{L} = T + U$. Pertanto, si ottiene

$$\Big(\frac{1}{3}m + \frac{3}{2}M\cos^2\theta\Big)l^2\,\ddot{\theta} - \frac{3}{2}Ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = -mg\frac{l}{2}\sin\theta - kl^2\sin\theta\cos\theta.$$

4. Reazione vincolare C in condizioni di equilibrio

Scrivendo le equazioni cardinali nella configurazione di equilibrio stabile $\theta_1^{(eq)}$, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in C (punto di contatto). Per ottenere entrambe le componenti, si considera la prima equazione cardinale del sistema. Pertanto,

$$\Phi = (0, g(m + M)).$$

5. Linearizzazione delle equazioni del moto

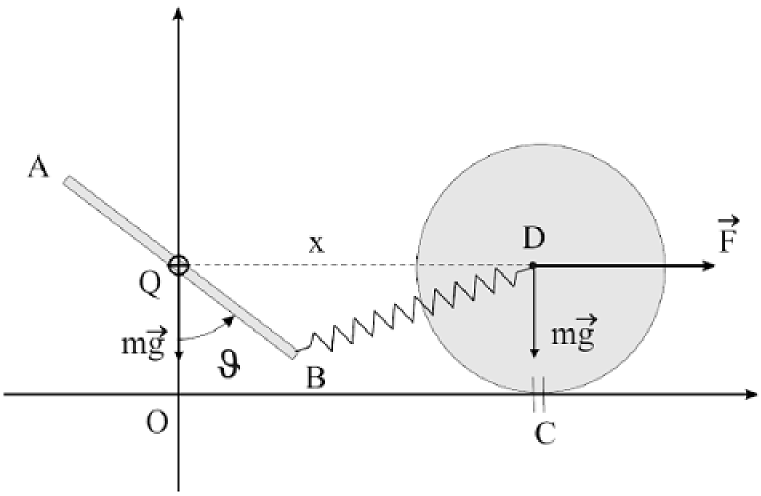
L'equazione linearizzata nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile risulta essere

$$l^2\Big(\frac{1}{3}m + \frac{3}{2}M\Big)\ddot{\theta} + \Big(mg\frac{l}{2} + kl^2\Big)\theta = 0.$$

Teoria (max 1 pagina): Statica.

Esercizio In un piano verticale Oxy un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare sull'asse x, sollecitato da una forza orizzontale costante F con $F > 0$, applicata al centro D. Un'asta omogenea AB di eguale massa m e lunghezza $2R$ è vincolata senza attrito per il suo baricentro ad un punto fisso Q di coordinate $(0, R)$. Una molla ideale con costante di elasticità $k > 0$ collega il centro del disco all'estremo B dell'asta. Si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo di rotazione θ che l'asta forma con l'asse delle ordinate e l'ascissa x del centro D del disco.

1. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare del parametro k.
2. Determinare i momenti cinetici e l'energia cinetica.
3. Linearizzare le equazioni del moto nell'intorno dello stato d'equilibrio stabile e calcolare i periodi delle oscillazioni proprie.
4. Calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto del disco in un condizione di equilibrio.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned} B &= (R\sin\theta, R - R\cos\theta), \\ Q &= (0, R), \\ D &= (x, R). \end{aligned}$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(x,\theta) = -\frac{1}{2}kx^2 + kRx\sin\theta + Fx + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero le componenti del gradiente del potenziale

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -kx + kR\sin\theta + F = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= kRx\cos\theta = 0, \end{aligned}$$

si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} (x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)}) &= \Big(\frac{F + kR}{k}, \frac{\pi}{2}\Big), \\ (x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)}) &= \Big(\frac{F - kR}{k}, \frac{3}{2}\pi\Big), \\ (x_3^{(eq)}, \theta_3^{(eq)}) &= \Big(0, \arcsin(-\lambda)\Big), \\ (x_4^{(eq)}, \theta_4^{(eq)}) &= \Big(0, \pi - \arcsin(-\lambda)\Big), \end{aligned}$$

con $\lambda = \dfrac{F}{kR}$, $\lambda \in (0,1]$. Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessina

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -k & -kR\cos\theta \\ -kR\cos\theta & -kRx\sin\theta \end{pmatrix},$$

il cui determinante è

$$\det(\mathbb{H}) = -k^2Rx\sin\theta - k^2R^2\cos^2\theta.$$

A questo punto è facile verificare che $(x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)})$, $(x_3^{(eq)}, \theta_3^{(eq)})$ e $(x_4^{(eq)}, \theta_4^{(eq)})$ sono punti di equilibrio instabili, mentre $(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)})$ è un punto di equilibrio stabile.

2. Energia cinetica e momenti cinetici

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}mR^2\dot{\theta}^2,$$

i momenti cinetici risultano essere

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\dot{x}, \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}mR^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

3. Linearizzazione delle equazioni del moto

Le equazioni linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile risultano essere

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}m\ddot{x} &= -k(x - x_1^{(eq)}), \\ \frac{1}{3}mR^2\ddot{\theta} &= -kRx_1^{(eq)}\left(\theta - \theta_1^{(eq)}\right), \end{aligned}$$

dalle quali si ricavano le pulsazioni proprie:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{2k}{3m}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{3(F + kR)}{mR}}. \end{aligned}$$

4. Reazione vincolare in C in condizioni di equilibrio

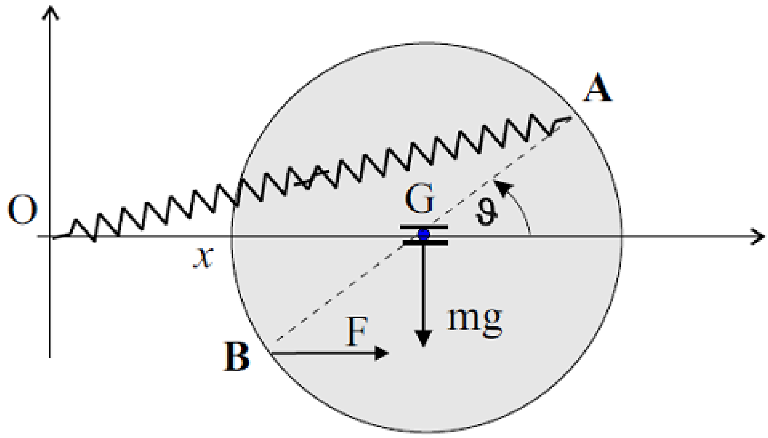
Scrivendo le equazioni cardinali nella configurazione di equilibrio stabile $\theta_1^{(eq)}$, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in C (punto di contatto). Per ottenere entrambe le componenti si considera la prima equazione cardinale applicata al disco. Pertanto,

$$\Phi = (0, mg).$$

Teoria (max 1 pagina): Cinematica.

Esercizio In un piano verticale Oxy un disco omogeneo di massa m e raggio R ha il baricentro G vincolato a muoversi sull'asse delle ascisse x. Oltre alla forza peso, una forza elastica con costante di elasticità k, diretta verso l'origine O del riferimento, ed una forza orizzontale costante F sono applicate al disco, rispettivamente nei due punti A e B della circonferenza, diametralmente opposti. Si supponga il vincolo liscio e si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo di rotazione θ e l'ascissa x del baricentro G.

1. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare del parametro k.
2. Determinare i momenti cinetici e l'energia cinetica.
3. Linearizzare le equazioni del moto nell'intorno dell'unica posizione di equilibrio sempre stabile e calcolare i periodi delle oscillazioni proprie.
4. Calcolare la reazione vincolare nel punto G in cui il disco è vincolato alla guida nella condizione di equilibrio sempre stabile.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$
\begin{aligned}
B &= (x - R\cos\theta, -R\sin\theta),\\
A &= (x + R\cos\theta, R\sin\theta),\\
G &= (x, 0).
\end{aligned}
$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$
U(x,\theta) = -\frac{1}{2}kx^2 - kRx\cos\theta + Fx - FR\cos\theta + C,
$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero le componenti del gradiente del potenziale

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= -kx - kR\cos\theta + F = 0,\\
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= kRx\sin\theta + FR\sin\theta = 0,
\end{aligned}
$$

si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$
\begin{aligned}
(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)}) &= \Big(\frac{F - kR}{k}, 0\Big),\\
(x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)}) &= \Big(\frac{F + kR}{k}, \pi\Big),\\
(x_3^{(eq)}, \theta_3^{(eq)}) &= \Big(-\frac{F}{k}, \arccos(\lambda)\Big),\\
(x_4^{(eq)}, \theta_4^{(eq)}) &= \Big(-\frac{F}{k}, 2\pi - \arccos(\lambda)\Big),
\end{aligned}
$$

con $\lambda = \dfrac{2F}{kR}$, $\lambda \in (0,1]$. Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessiana

$$
\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -k & kR\sin\theta \\ kR\sin\theta & (kRx + FR)\cos\theta \end{pmatrix},
$$

il cui determinante è

$$
\det(\mathbb{H}) = -k(kRx + FR)\cos\theta - k^2R^2\sin^2\theta.
$$

A questo punto è facile verificare che $(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)})$, $(x_3^{(eq)}, \theta_3^{(eq)})$ e $(x_4^{(eq)}, \theta_4^{(eq)})$ sono punti di equilibrio instabili, mentre $(x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)})$ è un punto di equilibrio stabile.

2. Energia cinetica e momenti cinetici

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2,$$

i momenti cinetici risultano essere

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

3. Linearizzazione delle equazioni di Lagrange

Le equazioni linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile risultano essere

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x - x_2^{(eq)}) \\ \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} &= -kRx_2^{(eq)}(\theta - \theta_2^{(eq)}). \end{aligned}$$

dalle quali si ricavano le pulsazioni proprie:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{2(F + kR)}{mR}}. \end{aligned}$$

4. Reazione vincolare in G in condizioni di equilibrio

Scrivendo le equazioni cardinali nella configurazione di equilibrio sempre stabile $(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)})$, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in G. Per ottenere entrambe le componenti, si considera la prima equazione cardinale applicata al disco. Pertanto,

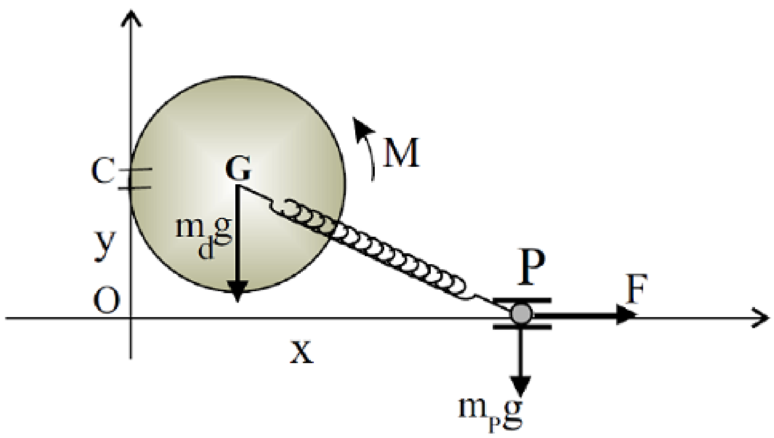
$$\Phi = (0, mg).$$

Teoria (max 1 pagina): Teorema di stazionarietà del potenziale e sue implicazioni.

Esercizio. In un piano verticale Oxy un disco omogeneo di massa m_d e raggio R rotola senza strisciare sull'asse delle ordinate. Oltre alla forza peso su di esso agisce una coppia antioraria costante M. Inoltre una molla ideale con costante di elasticità k collega il baricentro G ad un punto materiale P di massa m_P mobile senza attrito sull'asse delle ascisse. Al punto P è infine applicata una forza orizzontale costante F.

Assunte come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto P e l'ordinata y del baricentro G:

1. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
2. Determinare i momenti cinetici e l'energia cinetica.
3. Determinare le equazioni di Lagrange.
4. Linearizzare le equazioni del moto nell'intorno della posizione di equilibrio stabile e calcolare i periodi delle oscillazioni proprie.
5. Calcolare la reazione vincolare nel punto C in cui il disco è vincolato alla guida nella condizione di equilibrio sempre stabile.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$
\begin{aligned}
P &= (x, 0), \\
C &= (0, y), \\
G &= (R, y),
\end{aligned}
$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$
U(x, \theta) = -m_d g y - \frac{1}{2} k (x^2 - 2Rx + y^2) + Fx - M \frac{y}{R} + C,
$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero le componenti del gradiente del potenziale

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= -kx - kR + F = 0, \\
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= -ky + \frac{M}{R} - m_d g = 0,
\end{aligned}
$$

si ricava che l'unica configurazione di equilibrio è

$$
(x^{(eq)}, y^{(eq)}) = \left(R + \frac{F}{k}, \frac{M}{kR} - \frac{m_d g}{k} \right)
$$

Per valutarne la stabilità, occorre verificare che risulti essere effettivamente un massimi del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessiana

$$
\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix},
$$

Tale matrice è diagonale e non dipende dalle coordinate lagrangiane, dunque gli autovalori possono essere letti sulla diagonale principale. È facile allora concludere che $(x^{(eq)}, y^{(eq)})$ è un punto di equilibrio stabile.

2. Energia cinetica e momenti cinetici

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$
T = \frac{3}{4} m_d \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2,
$$

i momenti cinetici risultano essere

$$
\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_p \dot{x}, \\
p_y &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{3}{2} m_d \dot{y}.
\end{aligned}
$$

3. Equazioni di Lagrange

Le equazioni del moto nella forma di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

dove $\mathcal{L} = T + U$. Pertanto si ottiene

$$m_p\ddot{x} = -kx + kR + F,$$
$$\frac{3}{2}m_d\ddot{y} = -ky + \frac{M}{R} - m_d g.$$

4. Linearizzazione e calcolo delle pulsazioni proprie

Le equazioni linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile risultano essere

$$m_p\ddot{x} = -kx + kR + F,$$
$$\frac{3}{2}m_d\ddot{y} = -ky + \frac{M}{R} - m_d g,$$

dalle quali si ricavano le pulsazioni proprie

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_p}},$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{3m_d}}.$$

4. Reazione vincolare in C in condizioni di equilibrio

Scrivendo le equazioni cardinali nella configurazione di equilibrio stabile, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in C (punto di contatto):

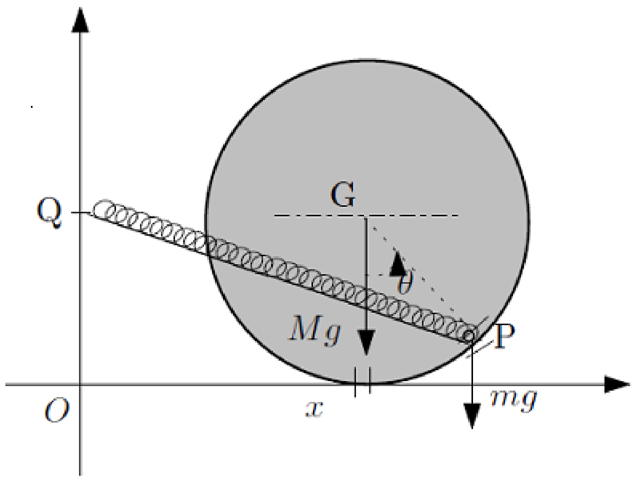
$$\Phi_C = \Big(F, \frac{M}{R}\Big).$$

Compito di Meccanica Razionale del 18 Febbraio 2014 - Tema A

Teoria. Il principio di d'Alambert.

Esercizio. In un piano verticale Oxy un disco omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse delle ascisse x ; un punto materiale P di massa m è mobile sulla circonferenza del disco collegato da una molla ideale, di costante $k > 0$, al punto Q di coordinate $(0; R)$. Si suppongano i vincoli perfetti e si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo di rotazione θ che il raggio GP forma con la verticale discendente e l'ascissa x del baricentro G.

1. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare del parametro k .
2. Determinare i momenti cinetici e l'energia cinetica.
3. Calcolare le equazioni differenziali del moto nella forma di Lagrange.
4. Linearizzare tali equazioni nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile.
5. Calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto del disco in una posizione di equilibrio stabile.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$
\begin{aligned}
P &= (x + R\sin\theta, R - R\cos\theta), \\
G &= (x, R).
\end{aligned}
$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(x,\theta) = -\frac{1}{2}kx^2 - kRx\sin\theta + mgR\cos\theta + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero le componenti del gradiente del potenziale

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= -kx - kR\sin\theta = 0, \\
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= -kRx\cos\theta - mgR\sin\theta = 0,
\end{aligned}
$$

si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$
\begin{aligned}
(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)}) &= (0, 0), \\
(x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)}) &= (0, \pi), \\
(x_3^{(eq)}, \theta_3^{(eq)}) &= (-R\sqrt{1-\lambda^2}, \arccos(\lambda)), \\
(x_4^{(eq)}, \theta_4^{(eq)}) &= (+R\sqrt{1-\lambda^2}, 2\pi - \arccos(\lambda)),
\end{aligned}
$$

con $\lambda = \dfrac{mg}{kR}$. Si osservi che le ultime due configurazioni di equilibrio sono accettabili se $\lambda \in (0, 1]$. Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessiana

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -k & -kR\cos\theta \\ -kR\cos\theta & kRx\sin\theta - mgR\cos\theta \end{pmatrix}.$$

A questo punto è facile verificare che:

- $(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)})$ è una configurazione di equilibrio stabile se e solo se $\lambda > 1$;
- $(x_2^{(eq)}, \theta_2^{(eq)})$ è una configurazione di equilibrio instabile per ogni valore di λ;
- $(x_3^{(eq)}, \theta_3^{(eq)})$ e $(x_4^{(eq)}, \theta_4^{(eq)})$ sono configurazioni di equilibrio stabile se e solo se $\lambda \in (0, 1)$.

2. Energia cinetica e momenti cinetici

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + R^2\dot{\theta}^2),$$

i momenti cinetici risultano essere

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \Big(\frac{3}{2}M + m\Big)\dot{x} + mR\cos\theta\dot{\theta}, \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = mR\cos\theta\dot{x} + mR^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

3. Equazioni di Lagrange

Le equazioni del moto di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0, \end{aligned}$$

dove $\mathcal{L} = T + U$. Pertanto, si ottiene

$$\begin{aligned} \Big(\frac{3}{2}M + m\Big)\ddot{x} + mR\cos\theta\ddot{\theta} - mR\sin\theta\dot{\theta}^2 &= -kx - kR\sin\theta, \\ mR\cos\theta\ddot{x} + mR^2\ddot{\theta} &= -kRx\cos\theta - mgR\sin\theta. \end{aligned}$$

4. Linearizzazione delle equazioni del moto

Le equazioni linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile $(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)})$ risultano essere

$$\begin{aligned} \Big(\frac{3}{2}M + m\Big)\ddot{x} + mR\ddot{\theta} &= -kx - kR\theta, \\ mR\ddot{x} + mR^2\ddot{\theta} &= -kRx - mgR\theta. \end{aligned}$$

5. Reazione vincolare in C in condizioni di equilibrio

Scrivendo le equazioni cardinali nella configurazione di equilibrio stabile $(x_1^{(eq)}, \theta_1^{(eq)})$, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in C (punto di contatto):

$$\Phi_C = (0, (m + M)g - kR).$$

Compito di Meccanica Razionale del 1 Luglio 2016 - Tema B

Teoria. Stabilità lineare per sistemi olonomi.

Esercizio. Il sistema materiale di figura è disposto in un piano verticale. La sbarretta rigida OA ha massa m, lunghezza l ed è incernierata nel suo estremo fisso O. Su di essa agiscono: una coppia di momento costante M e la forza elastica prodotta da una molla AB con rigidezza $k > 0$ e lunghezza a riposo trascurabile, la quale collega l'estremo libero A al baricentro B di un disco di raggio r e massa $3m/2$ che rotola senza strisciare sull'asse y.
Si assumano come coordinate lagrangiane: l'angolo θ indicato in figura e l'ordinata y del baricentro del disco.

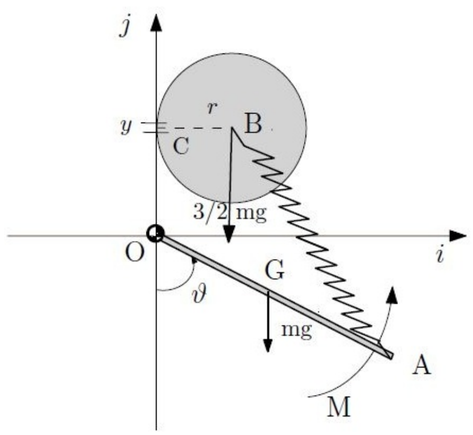
1. Calcolare il momento M della coppia che assicura l'equilibrio del sistema per $\theta = \pi$ e l'ordinata y del baricentro del disco in condizioni di equilibrio. Studiare quindi la stabilità di tale configurazione di equilibrio.

2. Determinare l'energia cinetica e i momenti cinetici.

3. Determinare la Lagrangiana e calcolare le equazioni differenziali del moto nella forma di Lagrange.

4. Linearizzare le equazioni del moto nell'intorno della configurazione di equilibrio determinata al punto 1, nell'ipotesi che $kl = 5mg$ e calcolare le frequenze proprie di vibrazione.

5. Calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto del disco nella posizione di equilibrio determinata al punto 1.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned}
A &= (l\sin\theta, -l\cos\theta),\\
B &= (r, y),\\
G &= \left(\frac{l}{2}\sin\theta, -\frac{l}{2}\cos\theta\right).
\end{aligned}$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(\theta, y) = -\frac{1}{2}ky^2 + kl(r\sin\theta - y\cos\theta) + mg\left(\frac{1}{2}l\cos\theta - \frac{3}{2}y\right) + M\theta + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Per il calcolo del momento M che assicura l'equilibrio del sistema per $\theta = \pi$, si determinano le componenti del gradiente del potenziale:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= klr\cos\theta + kly\sin\theta - \frac{1}{2}mgl\sin\theta + M,\\
\frac{\partial U}{\partial y} &= -ky - kl\cos\theta - \frac{3}{2}mg;
\end{aligned}$$

ponendo $\theta = \pi$ e imponendo a zero le espressioni ottenute, si ottiene:

$$\begin{aligned}
-klr + M &= 0,\\
-ky + kl - \frac{3}{2}mg &= 0.
\end{aligned}$$

Pertanto, per $M = klr$ esiste le configurazione di equilibrio

$$(\theta^{(eq)}, y^{(eq)}) = (\pi, l - \frac{3}{2k}mg),$$

Per valutare la stabilità di tale configurazione di equilibrio, occorre verificare che risulti essere effettivamente massimo del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessiana

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -l(kl - 2mg) & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix},$$

Tale matrice è diagonale e non dipende dalle coordinate lagrangiane, dunque gli autovalori possono essere letti sulla diagonale principale. È facile allora concludere che $(\theta^{(eq)}, y^{(eq)})$ è un punto di equilibrio stabile soltanto se è verificata la condizione

$$k > \frac{2mg}{l}.$$

2. Energia cinetica e momenti cinetici

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}l^2\dot{\theta}^2 + \frac{9}{4}\dot{y}^2\right),$$

i momenti cinetici risultano essere

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta},$$
$$p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{9}{4}m\dot{y}.$$

3. Equazioni di Lagrange

Le equazioni del moto di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0,$$

dove $\mathcal{L} = T + U$ è la Lagrangiana. Pertanto, si ottiene

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = l(ky - \frac{1}{2}mg)\sin\theta + klr(\cos\theta + 1),$$
$$\frac{9}{4}m\ddot{y} = -\frac{3}{2}mg - k(y + l\cos\theta)$$

4. Linearizzazione delle equazioni del moto

Ponendo $kl = 5mg$, le equazioni linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile risultano essere

$$\ddot{\theta} = \frac{9g}{l}(\theta - \theta^{(eq)}),$$
$$\ddot{y} = -\frac{2k}{3m}(y - y^{(eq)}),$$

dalle quali si ricavano le pulsazioni proprie e le frequenze proprie di vibrazione

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9g}{l}} \implies f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9g}{l}},$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \implies f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}}.$$

5. Reazione vincolare in C in condizioni di equilibrio

Scrivendo la prima equazione cardinale nella configurazione di equilibrio, proiettata lungo l'asse i, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in C (punto di contatto):

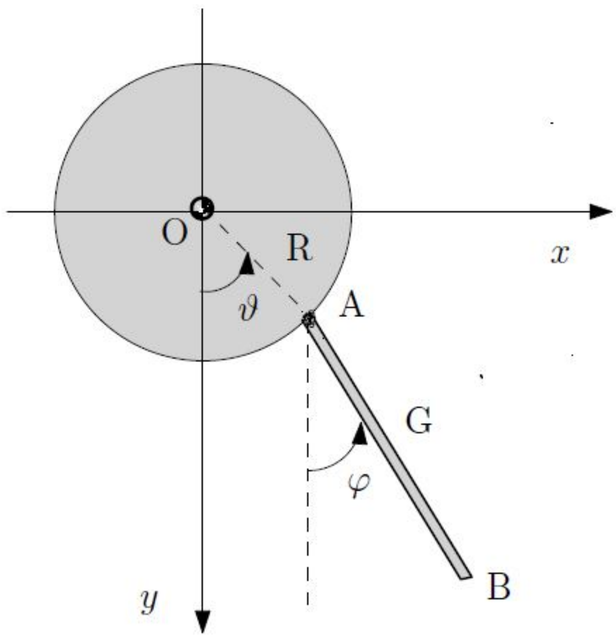
$$\Phi_C = (kr, 0).$$

Compito di Meccanica Razionale del 15 Luglio 2016 - Tema A

Teoria. Equazioni Cardinali della Dinamica

Esercizio. Il sistema materiale di figura è disposto in un piano verticale. Un disco di massa m e raggio R ruota attorno alla cerniera fissa O. Un'asta omogena AB ha massa m, lunghezza l ed è incernierata in un punto A della periferia del disco.
Si assumano come coordinate lagrangiane gli angoli θ e φ indicati in figura e si considerino tutti i vincoli perfetti.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità
2. Determinare la Lagrangiana e calcolare le equazioni differenziali del moto nella forma di Lagrange.
3. Linearizzare le equazioni del moto nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile
4. Calcolare la reazione vincolare del disco in O e dell'asta in A nella posizione di equilibrio stabile.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dell'unico punto notevole risultano essere

$$G = \left(R\sin\theta + \frac{l}{2}\sin\varphi, R\cos\theta + \frac{l}{2}\cos\varphi \right).$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(\theta,\varphi) = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mgl\cos\varphi + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero le componenti del gradiente del potenziale

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial\theta} &= -mgR\sin\theta = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial\varphi} &= -\frac{1}{2}mgl\sin\varphi = 0, \end{aligned}$$

si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} (\theta_1^{(eq)}, \varphi_1^{(eq)}) &= (0, 0), \\ (\theta_2^{(eq)}, \varphi_2^{(eq)}) &= (0, \pi), \\ (\theta_3^{(eq)}, \varphi_3^{(eq)}) &= (\pi, 0), \\ (\theta_4^{(eq)}, \varphi_4^{(eq)}) &= (\pi, \pi). \end{aligned}$$

Si osservi che $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$. Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessiana:

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -mgR\cos\theta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mgl\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

A questo punto è facile verificare che $(\theta_2^{(eq)}, \varphi_2^{(eq)})$, $(\theta_3^{(eq)}, \varphi_3^{(eq)})$ e $(\theta_4^{(eq)}, \varphi_4^{(eq)})$ sono punti di equilibrio instabili, mentre $(\theta_1^{(eq)}, \varphi_1^{(eq)})$ è un punto di equilibrio stabile.

2. Equazioni di Lagrange

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mRl\cos(\theta - \varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2,$$

le equazioni del moto di Lagrange sono

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0,$$

dove $\mathcal{L} = T + U$ è la Lagrangiana. Pertanto, si ottiene

$$\begin{aligned} &3R\ddot{\theta} + l\sin(\theta - \varphi)\dot{\varphi}^2 + l\cos(\theta - \varphi)\ddot{\varphi} = -2g\sin\theta, \\ &2l\ddot{\varphi} - 3R\sin(\theta - \varphi)\dot{\theta}^2 + 3R\cos(\theta - \varphi)\ddot{\theta} = -3g\sin\varphi. \end{aligned}$$

4. Linearizzazione delle equazioni del moto

Determinata la matrice di massa

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}mR^2 & \frac{1}{2}mRl\cos(\theta - \varphi) \\ \frac{1}{2}mRl\cos(\theta - \varphi) & \frac{1}{3}ml^2 \end{pmatrix},$$

le equazioni linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile risultano essere

$$\begin{aligned} 3R\ddot{\theta} + l\ddot{\varphi} + 2g\theta = 0, \\ 2l\ddot{\varphi} + 3R\ddot{\theta} + 3g\varphi = 0. \end{aligned}$$

4. Reazione vincolare in O e in A in condizioni di equilibrio

Scrivendo le equazioni cardinali nella configurazione di equilibrio stabile, è possibile ricavare il seguente sistema di equazioni, in cui le incognite sono i vettori Φ_O e Φ_A:

$$\begin{cases} mg\vec{j} + \Phi_O - \Phi_A = \vec{0} \\ mg\vec{j} + \Phi_A = \vec{0} \end{cases} \implies \begin{cases} \Phi_A = -mg\vec{j} \\ \Phi_O = -2mg\vec{j} \end{cases}.$$

Compito di Meccanica Razionale del 16 Settembre 2016 - Tema A

Teoria. Teorema di stazionarietà del potenziale.

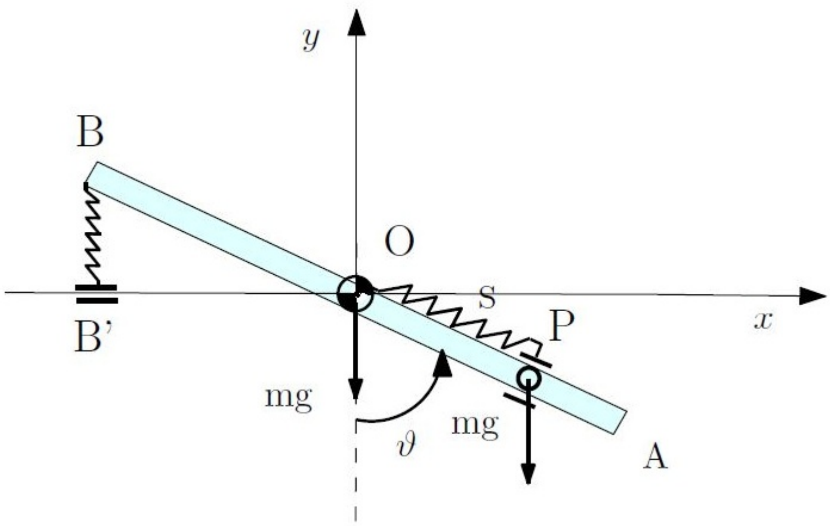
Esercizio. In un piano verticale un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza l è vincolata per il suo baricentro all'origine O di un riferimento cartesiano (Oxy). Un punto materiale P di egual massa m è mobile sull'asta. Oltre alle forze peso, due molle ideali di egual costante elastica k, con $k > 0$, sono applicate al sistema, collegando rispettivamente l'estremo B dell'asta con la sua proiezione B' sull'asse orizzontale delle x e il punto materiale P con l'origine O. Supposti tutti i vincoli privi di attrito, si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo di rotazione θ che l'asta forma con la verticale discendente e l'ascissa s del punto P sull'asta, con $-l/2 \leq s \leq l/2$.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità al variare del parametro $\mu = \frac{2mg}{kl} \neq 1$.

2. Determinare la Lagrangiana e calcolare le equazioni differenziali del moto nella forma di Lagrange.

3. Linearizzare le equazioni del moto nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile.

4. Calcolare la reazione vincolare in O e in P nella posizione di equilibrio del punto precedente.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere

$$\begin{aligned} P &= (s\sin\theta, -s\cos\theta),\\ B &= \Big(-\frac{l}{2}\sin\theta, \frac{l}{2}\cos\theta\Big). \end{aligned}$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(\theta, s) = mgs\cos\theta - \frac{1}{8}kl^2\cos^2\theta - \frac{1}{2}ks^2 + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero le componenti del gradiente del potenziale

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -mgs\sin\theta + \frac{1}{4}kl^2\cos\theta\sin\theta = 0,\\ \frac{\partial U}{\partial s} &= +mg\cos\theta - ks = 0, \end{aligned}$$

e supponendo $k^2l^2 \neq 4m^2g^2$, si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} (\theta_1^{(eq)}, s_1^{(eq)}) &= \Big(0, \frac{1}{k}mg\Big),\\ (\theta_2^{(eq)}, s_2^{(eq)}) &= \Big(\frac{\pi}{2}, 0\Big),\\ (\theta_3^{(eq)}, s_3^{(eq)}) &= \Big(\frac{3}{2}\pi, 0\Big),\\ (\theta_4^{(eq)}, s_4^{(eq)}) &= \Big(\pi, -\frac{1}{k}mg\Big). \end{aligned}$$

Si osservi che $\theta \in [0, 2\pi)$ mentre $s \in [-l/2, l/2]$; pertanto, affinché $(\theta_1^{(eq)}, s_1^{(eq)})$ e $(\theta_4^{(eq)}, s_4^{(eq)})$ siano delle configurazioni di equilibrio fisicamente accettabili per il sistema, deve verificarsi la seguente condizione:

$$\frac{1}{k}mg \leq \frac{l}{2} \implies \mu := \frac{2mg}{kl} \leq 1.$$

Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessiana:

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -mgs\cos\theta - \frac{1}{4}kl^2\sin^2\theta + \frac{1}{4}kl^2\cos^2\theta & -mg\sin\theta \\ -mg\sin\theta & -k \end{pmatrix}.$$

A questo punto, ricordando che $\mu \in (0,\, 1)$, è facile verificare che:

- $(\theta_1^{(eq)}, s_1^{(eq)})$ e $(\theta_4^{(eq)}, s_4^{(eq)})$ sono punti di equilibrio instabili per ogni valore di μ ammissibile, ossia $\mu \in (0,\, 1)$;
- $(\theta_2^{(eq)}, s_2^{(eq)})$ e $(\theta_3^{(eq)}, s_3^{(eq)})$ sono punti di equilibrio stabili se e solo se $\mu \in (0, 1)$.

2. Equazioni di Lagrange

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{24} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2),$$

le equazioni del moto di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= 0, \end{aligned}$$

dove $\mathcal{L} = T + U$ è la Lagrangiana. Pertanto, si ottiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} m l^2 \ddot{\theta} + 2 m s \dot{\theta} \dot{s} + m \dot{s}^2 \ddot{\theta} = -mgs \sin\theta - \frac{1}{4} k l^2 \sin\theta \cos\theta, \\ &m\ddot{s} + m s \dot{\theta}^2 = mg \cos\theta - ks. \end{aligned}$$

3. Linearizzazione e calcolo delle pulsazioni proprie

Le equazioni linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile $(\theta_1^{(eq)}, s_1^{(eq)})$ risultano essere

$$\begin{aligned} \left(\frac{mk^2l^2 + 6m^3g^2}{3k}\right)\ddot{\theta} - \left(\frac{k^2l^2 - 4m^2g^2}{2}\right)(\theta - \theta_1^{(eq)}) &= 0, \\ m\ddot{s} + k(s - s_1^{(eq)}) &= 0, \end{aligned}$$

dalle quali si ricavano le pulsazioni proprie

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{3k\,(-4m^2g^2 + k^2l^2)}{2m\,(6m^2g^2 + k^2l^2)}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned}$$

4. Reazione vincolare in O e in P in condizioni di equilibrio

Scrivendo le equazioni cardinali nella configurazione di equilibrio stabile $(\theta_1^{(eq)}, s_1^{(eq)})$, è possibile ricavare il seguente sistema di equazioni, in cui le incognite sono i vettori Φ_O e Φ_P:

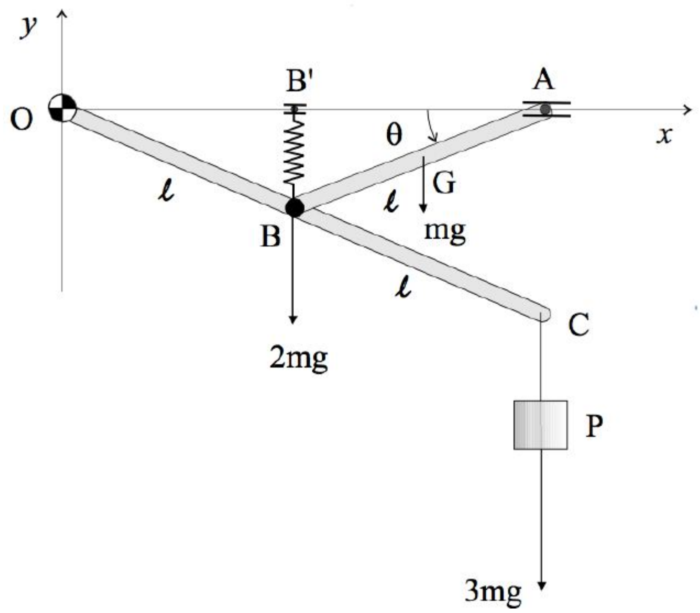
$$\begin{cases} -mg\vec{j} - mg\vec{j} - \dfrac{l}{2}k\vec{j} + \Phi_O - \Phi_P = \vec{0} \\ -mg\vec{j} + mg\vec{j} + \Phi_P = \vec{0} \end{cases} \implies \begin{cases} \Phi_O = \left(2mg + \dfrac{1}{2}kl\right)\vec{j} \\ \Phi_P = \vec{0} \end{cases} .$$

Compito di Meccanica Razionale del 13 Febbraio 2017 - Tema A

Teoria. Teorema delle forze vive

Esercizio. Il sistema di figura è disposto in un piano verticale. L'asta rigida omogenea OC, di lunghezza $2l$ e massa $2m$, è incernierata nell'origine del sistema di riferimento inerziale $O(x, y)$. Al suo baricentro B è incernierata una sbarretta rigida omogenea di lunghezza l e massa m, il cui estremo A scorre senza attrito sull'asse x. Una forza elastica prodotta da una molla verticale con costante di rigidezza k nota, è applicata al baricentro B dell'asta OC. Una filo rigido di massa trascurabile e lunghezza $l/3$, che si mantiene verticale durante il moto del sistema ed è applicato all'estremo C, sostiene un contrappeso P di massa $3m$. Si assuma come coordinata lagrangiana l'angolo θ indicato in figura e si considerino tutti i vincoli perfetti.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità
2. Determinare la Lagrangiana e calcolare le equazioni differenziali del moto nella forma di Lagrange.
3. Determinare un integrale primo del moto.
4. Calcolare la componente orizzontale della reazione vincolare dell'asta in O in condizioni statiche.



1. Configurazioni di equilibrio e stabilità

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere

$$\begin{aligned}
B &= (l\cos\theta, -l\sin\theta),\\
G &= \left(\frac{3}{2}l\cos\theta, -\frac{1}{2}l\sin\theta\right),\\
P &= \left(2l\cos\theta, -2l\sin\theta - \frac{l}{3}\right)
\end{aligned}$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(\theta,\varphi) = \frac{17}{2}mgl\sin\theta - \frac{1}{2}kl^2\sin^2\theta + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero l'unica componente del gradiente del potenziale

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = \left(\frac{17}{2}mgl - kl^2\sin\theta\right)\cos\theta = 0$$

e osservando che $\theta \in [0,\pi]$, si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
\theta_1^{(eq)} &= \frac{\pi}{2},\\
\theta_2^{(eq)} &= \arcsin\lambda \iff \lambda \leq 1,\\
\theta_3^{(eq)} &= \pi - \theta_2^{(eq)} \iff \lambda \leq 1,
\end{aligned}$$

dove $\lambda = \dfrac{17}{2}\dfrac{mg}{kl} > 0$. Si noti che, se $\lambda = 1$, allora $\theta_1^{(eq)} = \theta_2^{(eq)} = \theta_3^{(eq)}$.

Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si calcola la derivata seconda del potenziale e si studia il suo segno in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -kl^2\cos^2\theta - kl^2(\lambda - \sin\theta)\sin\theta.$$

A questo punto è facile verificare che $\theta_1^{(eq)}$ è un punto di equilibrio stabile se e solo se $\lambda > 1$, mentre $\theta_2^{(eq)}$ e $\theta_3^{(eq)}$ sono punti di equilibrio stabile se e solo se $0 < \lambda < 1$.

2. Equazioni di Lagrange

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2}ml^2(15 + 2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2,$$

l'equazioni del moto di Lagrange è

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

dove $\mathcal{L} = T + U$ è la Lagrangiana. Pertanto, si ottiene

$$(15 + 2\sin\theta)\ddot{\theta} + \sin(2\theta)\dot{\theta}^2 = \frac{k}{m}(\lambda - \sin\theta)\cos\theta.$$

3. Integrale primo del moto

Per il principio di conservazione dell'energia meccanica, si ha d $(T - U)$ =0, pertanto

$$T - U = \frac{1}{2}ml^2(15 + 2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 - kl^2\left(\lambda\sin\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right) = \text{costante}\,.$$

4. Reazione vincolare in O in condizioni di equilibrio

All'equilibrio nessuna forza attiva ha componente orizzontale, quindi si ha

$$\Phi_{O,x} = -\Phi_{A,x}.$$

Inoltre, per l'ipotesi di vincoli lisci si ha $\Phi_{A,x} = 0$, pertanto

$$\Phi_{O,x} = 0.$$

Compito di Meccanica Razionale del 7 Luglio 2017 - Tema A

(i) **Domanda di teoria**

Enunciare il teorema dell'energia cinetica, discutendo in particolare sotto quali ipotesi esso permette di ricavare un'equazione pura del moto.

(ii) **Esercizio**

Nel sistema in figura, posto nel piano verticale Oxy, il disco di centro G è omogeneo di massa m e raggio R e rotola senza strisciare lungo l'asse y; l'asta AG è omogenea di massa m e lunghezza $4R$ con l'estremo A vincolato a scorrere lungo l'asse x; la molla tra i punti A e A_0 ha costante elastica k; infine, il punto A_0 ha coordinate $(5R, 0)$. Al baricentro del disco è applicata una forza $\mathbf{F} = F\mathbf{j}$ con $F \in \mathbb{R}$ costante.

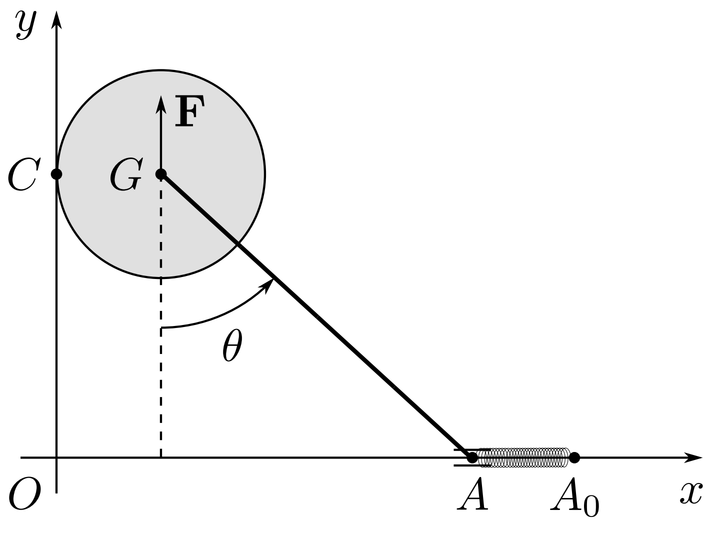
I vincoli sono tutti lisci.

Scegliamo come coordinata lagrangiana l'angolo θ indicato in figura.

1) Determinare F in modo che la configurazione corrispondente a $\theta = \frac{\pi}{4}$ sia di equilibrio.
2) Stabilire se, con il valore di F determinato al precedente punto 1), la configurazione $\theta = \frac{\pi}{4}$ risulta un equilibrio stabile o instabile.

D'ora in avanti fissiamo per F il valore determinato al precedente punto 1).

3) Scrivere la lagrangiana del sistema e l'equazione del moto di Lagrange.
4) Determinare la reazione vincolare in C nella configurazione di equilibrio di cui al punto 1).



1. Configurazioni di equilibrio

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned}
A &= (R + 4R\sin\theta, 0),\\
C &= (0, 4R\cos\theta),\\
G &= (R, 4R\cos\theta),\\
M &= (R + 2R\sin\theta, 2R\cos\theta),
\end{aligned}$$

dove M è il baricentro dell'asta.
Il lavoro virtuale delle forze attive ha la seguente espressione:

$$\delta L^{(a)} = (-4RF\sin\theta + 6mgR\sin\theta + 16kR^2\cos\theta - 16kR^2\sin\theta\cos\theta)\,\delta\theta = Q_\theta^{(a)}\,\delta\theta.$$

Per determinare l'intensità della forza F in modo che la configurazione corrispondente a $\theta = \frac{\pi}{4}$ sia di equilibrio, si valuta $Q_\theta^{(a)}$ in $\theta = \frac{\pi}{4}$ e si pone tale valore uguale a 0:

$$-4RF\frac{\sqrt{2}}{2} + 6mgR\frac{\sqrt{2}}{2} + 16kR^2\frac{\sqrt{2}}{2} - 16kR^2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

da cui si ricava

$$F = \frac{3}{2}mg + 4\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)kR.$$

2. Studio della stabilità

Per valutare la stabilità della configurazione $\theta = \frac{\pi}{4}$, occorre verificare che risulta essere effettivamente massimo del potenziale. Pertanto, si calcola la derivata seconda del potenziale, i.e. la derivata della forza generalizzata, e si studia il suo segno in corrispondenza della configurazione di equilibrio:

$$\frac{\partial Q_\theta^{(a)}}{\partial\theta} = -4RF\cos\theta + 6mgR\cos\theta - 16kR^2\sin\theta - 16kR^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

A questo punto, è facile verificare che, per $\theta = \frac{\pi}{4}$, la precedente espressione è sempre negativa. Pertanto, $\theta = \frac{\pi}{4}$ è un punto di equilibrio stabile.

3. Equazioni di Lagrange

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = 12mR^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{8}{3}mR^2\dot{\theta}^2,$$

e il potenziale

$$U = (16 - 8\sqrt{2})kR^2 \cos\theta + 16kR^2 \sin\theta + 8kR^2 \cos^2\theta,$$

l'equazione del moto di Lagrange è

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

dove $\mathcal{L} = T + U$ è la Lagrangiana. Pertanto, si ottiene

$$\left(3\sin^2\theta + \frac{2}{3}\right)\ddot\theta + 3\sin\theta\cos\theta\dot\theta^2 = \frac{2k}{m}\left[(1-\sin\theta)\cos\theta - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\theta\right].$$

4. Reazione vincolare in C in condizioni di equilibrio

Scrivendo la prima equazione cardinale nella configurazione di equilibrio, proiettata lungo l'asse $\boldsymbol{i}$, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in C (punto di contatto):

$$\boldsymbol{\Phi}_C = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)kR\boldsymbol{i}.$$

Compito di Meccanica Razionale del 21 Luglio 2017 - Tema A

(i) **Domanda di teoria**

Discutere la caratterizzazione dei vincoli ideali. A completamento della risposta, spiegare perché quando un disco rotola senza strisciare su un piano non è possibile, pur in presenza di vincoli ideali, dedurre a priori la direzione della reazione vincolare nel punto di contatto tra il disco e il piano.

(ii) **Esercizio**

Nel sistema in figura, posto nel piano verticale Oxy, il disco di centro G, omogeneo di massa $3m$ e raggio r, è incernierato nell'origine O coincidente con un punto della sua circonferenza. Al punto diametralmente opposto A è incernierata un'asta AB omogenea di massa m e lunghezza $2r$, avente l'estremo B vincolato a scorrere lungo l'asse x. Inoltre tra i punti B e G è tesa una molla di costante elastica k.

I vincoli sono tutti ideali.

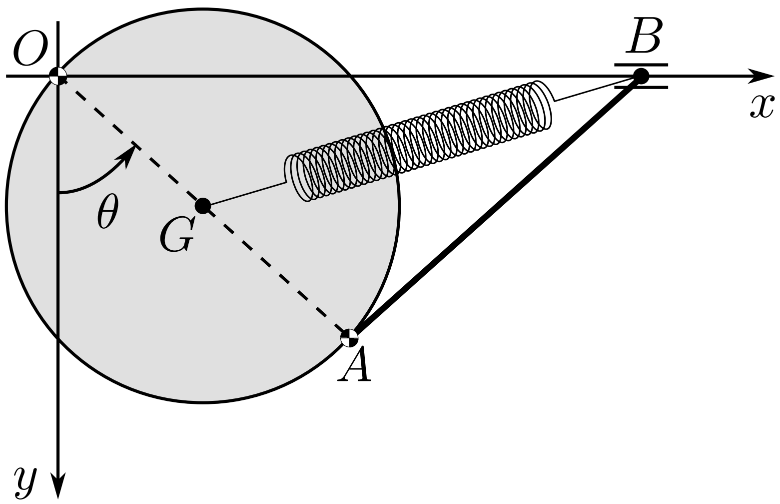
Si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo θ indicato in figura.

(i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema al variare dei parametri del problema.

(ii) Studiare la stabilità delle configurazioni determinate al punto 1).

(iii) Scrivere la lagrangiana del sistema e l'equazione del moto di Lagrange.

(iv) Determinare la componente orizzontale della reazione vincolare che si esplica nel punto O in condizioni dinamiche.



1. Configurazioni di equilibrio

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned}
A &= (2r\sin\theta, 2r\cos\theta),\\
B &= (4r\sin\theta, 0),\\
C &= (3r\sin\theta, r\cos\theta),\\
G &= (r\sin\theta, r\cos\theta).
\end{aligned}$$

Il lavoro virtuale delle forze attive ha la seguente espressione:

$$\delta L^{(a)} = (-8kr^2\sin\theta\cos\theta - mgr\sin\theta)\,\delta\theta = Q_\theta^{(a)}\,\delta\theta.$$

Per determinare le configurazioni di equilibrio, si impone a zero la forza generalizzata $Q_\theta^{(a)}$ e si ottiene:

$$\begin{aligned}
\theta_1^{(eq)} &= 0,\\
\theta_2^{(eq)} &= \pi,\\
\theta_3^{(eq)} &= \arccos\left(-\frac{mg}{2kr}\right),\\
\theta_4^{(eq)} &= 2\pi - \arccos\left(-\frac{mg}{2kr}\right).
\end{aligned}$$

Si noti che, poiché $-1 \le \sin\theta \le 1$, $\theta_3^{(eq)}$ e $\theta_4^{(eq)}$ esistono (distinte da $\theta_1^{(eq)}$ e $\theta_2^{(eq)}$) se $mg < 2kr$.

2. Studio della stabilità

Per valutare la stabilità delle configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si calcola la derivata seconda del potenziale, i.e. la derivata della forza generalizzata, e si studia il suo segno in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial Q_\theta^{(a)}}{\partial\theta} = -4mgr\cos\theta - 8kr^2(2\cos^2\theta - 1).$$

A questo punto, è facile verificare che $\theta_1^{(eq)}$ e $\theta_2^{(eq)}$ sono punti di equilibrio stabile, mentre $\theta_3^{(eq)}$ e $\theta_4^{(eq)}$ (quando esistono) sono punti di equilibrio instabili.

3. Equazioni di Lagrange

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{35}{12}mr^2\dot\theta^2 + 4mr^2\cos^2\theta\dot\theta^2,$$

e il potenziale
$$U = 4mgr\cos\theta - 4kr^2\sin^2\theta,$$
l'equazione del moto di Lagrange è
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\Big) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0,$$
dove $\mathcal{L} = T + U$ è la Lagrangiana. Pertanto, si ottiene
$$\Big(\frac{35}{6} + 8\cos^2\theta\Big)\ddot\theta - 8\sin\theta\cos\theta\dot\theta^2 + \frac{4g}{r}\sin\theta + \frac{8k}{m}\sin\theta\cos\theta = 0.$$

4. Reazione vincolare in O in condizioni dinamiche

Il baricentro $\hat{G}$ di tutto il sistema ha coordinate
$$\hat{G} = \Big(\frac{3}{2}r\sin\theta, r\cos\theta\Big),$$
da cui si può ricavare il vettore accelerazione
$$\mathbf{a}_{\hat{G}} = \frac{3}{2}r(\cos\theta\ddot\theta - \sin\theta\dot\theta^2)\mathbf{i} - r(\sin\theta\ddot\theta + \cos\theta\dot\theta^2)\mathbf{j}.$$
Pertanto, scrivendo l'equazione cardinale della dinamica per tutto il sistema e proiettandola lungo l'asse $\mathbf{i}$, si ottiene la componente orizzontale della reazione vincolare in O in condizioni dinamiche:
$$\Phi_{O,x} = 6mr(\cos\theta\ddot\theta - \sin\theta\dot\theta^2).$$

Compito di Meccanica Razionale del 15 Settembre 2017

(i) **Domanda di teoria**

Discutere la nozione di *spazio solidale* ad un corpo rigido e richiamare il *teorema di Poisson*. A completamento della domanda, utilizzare questo teorema per mostrare che se il moto di un sistema è rigido allora le velocità di due suoi qualsiasi punti sono legate dalla *legge di distribuzione delle velocità*.

(ii) **Esercizio**

Nel sistema in figura, posto nel piano verticale Oxy, l'asta OA, omogenea di massa m e lunghezza l, è incernierata nel punto fisso O mentre l'asta AB, anch'essa omogenea di massa m e lunghezza l, è incernierata nel suo estremo A all'asta OA e ha l'estremo B vincolato a scorrere lungo l'asse y. Tra l'estremo B e il punto $C = (l, 0)$ è tesa una molla di costante elastica k e inoltre su B agisce una forza costante $\mathbf{F} = F\mathbf{j}$ con $F \in \mathbb{R}$.

I vincoli sono tutti ideali.

Si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ indicato in figura.

(a) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione dei parametri del problema. Quando esse esistono solo per particolari valori dei parametri, esprimere le condizioni di esistenza in termini di $F \in \mathbb{R}$.

(b) Studiare la stabilità delle configurazioni determinate al punto 1) in funzione di F.

(c) Scrivere la lagrangiana del sistema e l'equazione del moto di Lagrange.

(d) Posto $F = 2(mg+kl)$, determinare la componente verticale della reazione vincolare in O in corrispondenza della configurazione di equilibrio che risulta stabile per il valore di F assegnato.

1. Configurazioni di equilibrio

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned}
A &= (-l\sin\theta, l\cos\theta),\\
B &= (0, 2l\cos\theta),\\
G_1 &= \left(-\frac{1}{2}l\sin\theta, \frac{1}{2}l\cos\theta\right),\\
G_2 &= \left(-\frac{1}{2}l\sin\theta, \frac{3}{2}l\cos\theta\right),
\end{aligned}$$

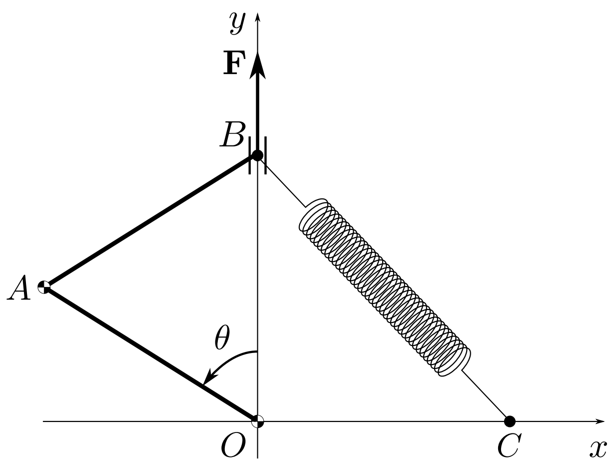
dove G_1 e G_2 sono i baricentri delle aste OA e AB rispettivamente.
Il lavoro virtuale delle forze attive ha la seguente espressione:

$$\delta L^{(a)} = 2l\sin\theta(mg - F + 2kl\cos\theta)\,\delta\theta = Q_\theta^{(a)}\,\delta\theta.$$

Per determinare le configurazioni di equilibrio, si impone a zero la forza generalizzata $Q_\theta^{(a)}$ e si ottiene:

$$\begin{aligned}
\theta_1^{(eq)} &= 0,\\
\theta_2^{(eq)} &= \pi,\\
\theta_3^{(eq)} &= \arccos\left(\frac{F - mg}{2kl}\right),\\
\theta_4^{(eq)} &= 2\pi - \arccos\left(\frac{F - mg}{2kl}\right).
\end{aligned}$$

Si noti che, poiché $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $\theta_3^{(eq)}$ e $\theta_4^{(eq)}$ esistono (distinte da $\theta_1^{(eq)}$ e $\theta_2^{(eq)}$) se $mg - 2kl < F < mg + 2kl$.



2. Studio della stabilità

Per valutare la stabilità delle configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si calcola la derivata seconda del potenziale, i.e. la derivata della forza generalizzata, e si studia il suo segno in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial Q_\theta^{(a)}}{\partial \theta} = 2l(mg - F)\cos\theta + 4kl^2(2\cos^2\theta - 1).$$

A questo punto, è facile verificare che:

- $\theta_1^{(eq)}$ è un punto di equilibrio stabile se e solo se $F > mg + 2kl$;
- $\theta_2^{(eq)}$ è un punto di equilibrio stabile se e solo se $F < mg - 2kl$;
- $\theta_3^{(eq)}$ e $\theta_4^{(eq)}$ sono punti di equilibrio stabile se e solo se $mg - 2kl \leq F \leq mg + 2kl$.

3. Equazioni di Lagrange

Determinata l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2,$$

e il potenziale

$$U = -2l(mg - F)\cos\theta - 2kl^2\cos^2\theta,$$

l'equazione del moto di Lagrange è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

dove $\mathcal{L} = T + U$ è la Lagrangiana. Pertanto, si ottiene

$$\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)\ddot{\theta} + \sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 = \frac{1}{m}\sin\theta(mg - F + 2kl\cos\theta).$$

4. Reazione vincolare in O in condizioni di equilibrio

Posto $F = 2(mg + kl)$, la configurazione stabile è $\theta_1^{(eq)} = 0$, essendo $F > mg + 2kl$. Pertanto, scrivendo l'equazione cardinale della statica per tutto il sistema e proiettandola lungo l'asse $\mathbf{j}$, si ottiene la componente verticale della reazione vincolare in O in condizioni di equilibrio:

$$\Phi_{O,y} = 0.$$

Compito di Meccanica Razionale del 12 Febbraio 2018

(i) **Domanda di teoria** [5 punti]

Spiegare cosa sono le *forze apparenti* in un sistema di riferimento non inerziale e come nasce la necessità di introdurle.

(ii) **Esercizio** [26 punti]

Nel sistema in figura, posto nel piano verticale Oxy, l'asta OA, omogenea di massa $m > 0$ e lunghezza $2l > 0$, è incernierata nel punto fisso O mentre l'asta AB, anch'essa omogenea di massa m e lunghezza $2l$, è incernierata nel suo estremo A all'asta OA e ha l'estremo B vincolato a scorrere lungo l'asse x. Tra l'estremo B e il punto O è tesa una molla di costante elastica $k > 0$. I vincoli sono tutti ideali.

Si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo θ indicato in figura e si assuma $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) [**6 punti**] Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione dei parametri del problema tenendo conto dei limiti imposti a θ. Verificare che esiste al più una configurazione di equilibrio ammissibile.

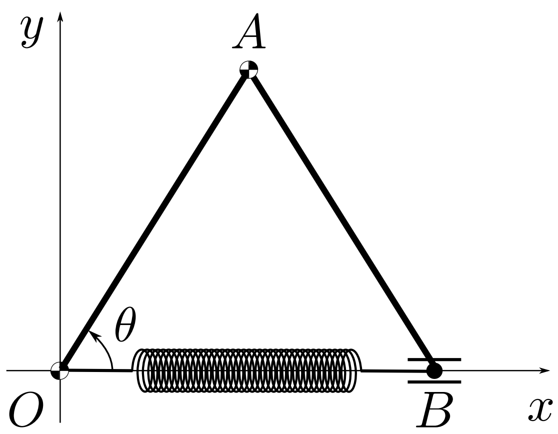
(b) [**2 punti**] Indicare sotto quali condizioni sui parametri del sistema la configurazione di equilibrio determinata al punto 1) esiste.

(c) [**4 punti**] Studiare la stabilità della configurazione di equilibrio determinata al punto 1) sotto le condizioni di esistenza di cui al punto 2).

(d) [**6 punti**] Calcolare le componenti orizzontali delle reazioni vincolari in O e in A in corrispondenza della configurazione di equilibrio determinata al punto 1).

(e) [**3 punti**] Determinare le velocità angolari delle aste OA e AB.

(f) [**5 punti**] Determinare l'energia cinetica del sistema.



1. Configurazioni di equilibrio

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$
\begin{aligned}
A &= (2l\cos\theta, 2l\sin\theta),\\
B &= (4l\cos\theta, 0),\\
C &= (l\cos\theta, l\sin\theta),\\
D &= (3l\cos\theta, l\sin\theta),
\end{aligned}
$$

dove C e D sono i baricentri delle aste OA e AB rispettivamente.
Il lavoro virtuale delle forze attive ha la seguente espressione:

$$\delta L^{(a)} = 2l(-mg + 8kl\sin\theta)\cos\theta\,\delta\theta = Q_\theta^{(a)}\,\delta\theta.$$

Per determinare le configurazioni di equilibrio, si impone a zero la forza generalizzata $Q_\theta^{(a)}$ e si ottiene:

$$\theta^{(eq)} = \arcsin\left(\frac{mg}{8kl}\right)$$

Si noti che l'equazione $\cos\theta = 0$ non ha soluzioni nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$, mentre l'equazione $8kl\sin\theta = mg$ ha al più una soluzione in $(0, \frac{\pi}{2})$, poiché in tale intervallo la funzione sin è monotona: in particolare, si ha esattamente una soluzione se $0 < \frac{mg}{8kl} < 1$.

3. Studio della stabilità

Per valutare la stabilità della configurazione di equilibrio, occorre verificare che risulta essere effettivamente massimo del potenziale. Pertanto, si calcola la derivata seconda del potenziale, i.e. la derivata della forza generalizzata, e si studia il suo segno in corrispondenza della configurazione di equilibrio:

$$\frac{\partial Q_\theta^{(a)}}{\partial\theta} = 2mgl\sin\theta + 16kl^2(2\cos^2\theta - 1).$$

A questo punto, tenendo conto delle condizioni di esistenza della configurazione di equilibrio, è facile verificare che $\theta^{(eq)}$ è un punto di equilibrio instabile.

4. Reazioni vincolari in O e in A in condizioni di equilibrio

Scrivendo le equazioni cardinali della statica per le due aste, è possibile ricavare il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}_O + k(B-O) - mg\mathbf{j} + \mathbf{\Phi}_A = 0 \\ \mathbf{\Phi}_B + k(O-B) - mg\mathbf{j} - \mathbf{\Phi}_A = 0 \end{cases}.$$

Sommando le precedenti equazioni e proiettando l'equazione risultante lungo l'asse $\mathbf{i}$, si ottiene

$$\Phi_{O,x} = 0,$$

poiché $\Phi_{B,x} = 0$ per l'ipotesi di vincolo liscio. Infine, è possibile ricavare la componente orizzontale della reazione vincolare in A proiettando la prima equazione lungo l'asse $\mathbf{i}$ e valutandola in $\theta = \theta^{(eq)}$:

$$\Phi_{A,x} = -4kl\sqrt{1 - \left(\frac{mg}{8kl}\right)^2}.$$

5. Velocità angolare delle aste

Si utilizza la legge di distribuzione delle velocità. Per l'asta OA, si ha:

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_O = \boldsymbol{\omega}_{OA} \times (A - 0),$$

da cui si ricava $\boldsymbol{\omega}_{OA} = \dot{\theta}\,\mathbf{k}$. Similmente, per l'asta AB si ottiene $\boldsymbol{\omega}_{AB} = -\dot{\theta}\,\mathbf{k}$.

6. Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche delle aste:

$$T_{OA} = \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2, \qquad T_{AB} = \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + 4ml^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2.$$

Pertanto, si ottiene

$$T = 4ml^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2.$$

Compito di Meccanica Razionale del 6 Luglio 2018

(i) **Domanda di teoria** [5 punti]

Dimostrare che se vale la legge di distribuzione delle velocità allora il moto di un sistema di punti è rigido.

(ii) **Esercizio** [26 punti]

Nel sistema in figura (si veda il retro del foglio), posto nel piano verticale Oxy, il disco di centro A, omogeneo di massa $\frac{1}{2}M$ e raggio R, rotola senza strisciare lungo l'asse y; il disco di centro B, anch'esso omogeneo ma di massa M e raggio $2R$, rotola senza strisciare lungo l'asse x; l'asta AB, omogenea di massa M e lunghezza $4R$, ha gli estremi A e B incernierati nei centri dei due dischi. Una molla di costante elastica $k > 0$ è tesa tra l'origine del sistema di riferimento e l'estremo B dell'asta.

I vincoli sono tutti lisci.

Si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo θ indicato in figura.

Domande per tutti:

1) [**5 punti**] Determinare k in modo che la configurazione corrispondente a $\theta = \frac{\pi}{6}$ sia di equilibrio[1]. Fissare tale valore di k per tutti i prossimi punti dell'esercizio.
2) [**3 punti**] Stabilire se la configurazione $\theta = \frac{\pi}{6}$ è un equilibrio stabile o instabile.
3) [**8 punti**] Calcolare la reazione vincolare in C nella configurazione di equilibrio $\theta = \frac{\pi}{6}$.

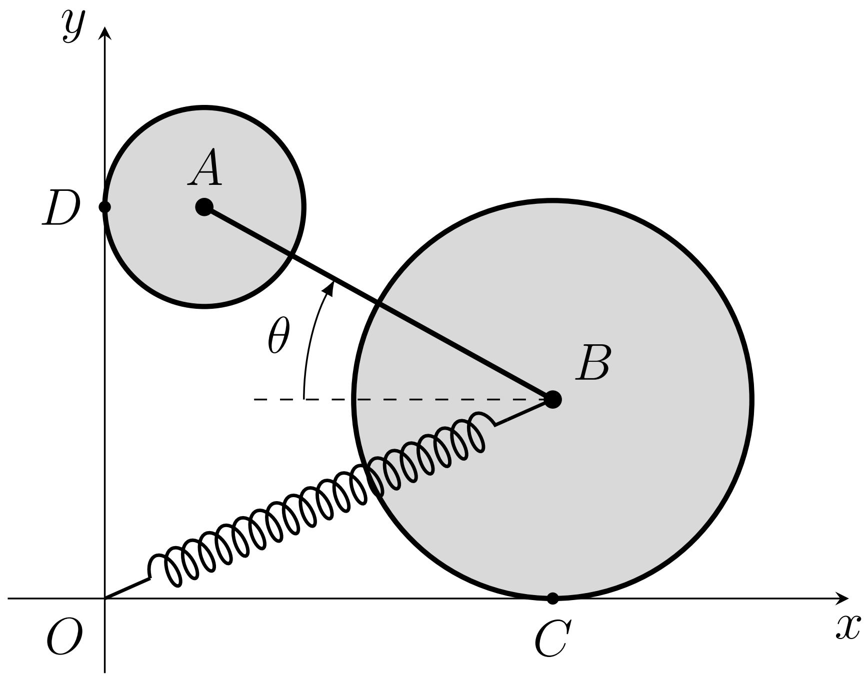
Ulteriori domande per l'esame da 8 crediti:

4) [**6 punti**] Calcolare l'energia cinetica del sistema.
5) [**4 punti**] Scrivere l'equazione di Lagrange che descrive il moto del sistema.

Ulteriori domande per l'esame da 6 crediti:

4) [**4 punti**] Calcolare la reazione vincolare in D nella configurazione di equilibrio $\theta = \frac{\pi}{6}$.
5) [**6 punti**] Calcolare le reazioni vincolari in A e B nella configurazione di equilibrio $\theta = \frac{\pi}{6}$.

[1] Ricordare che $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



1. Configurazioni di equilibrio

Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned} A &= (R, 4R\sin\theta + 2R), \\ B &= (R + 4R\cos\theta, 2R), \\ G &= (R + 2R\cos\theta, 2R + 2R\sin\theta), \end{aligned}$$

dove G è il baricentro dell'asta AB.
Il lavoro virtuale delle forze attive ha la seguente espressione:

$$\delta L^{(a)} = 4R\left[-Mg\cos\theta + kR(1 + 4\cos\theta)\sin\theta\right]\delta\theta = Q_\theta^{(a)}\,\delta\theta.$$

Per determinare il valore della costante elastica k in modo che la configurazione corrispondente a $\theta = \frac{\pi}{6}$ sia di equilibrio, si valuta $Q_\theta^{(a)}$ in $\theta = \frac{\pi}{6}$ e si pone tale valore uguale a 0:

$$4R\left[-Mg\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}kR\left(1 + 4\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 0,$$

da cui si ricava

$$k = \frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}}\,\frac{Mg}{R}.$$

2. Studio della stabilità

Per valutare la stabilità della configurazione di equilibrio, occorre verificare che risulta essere effettivamente massimo del potenziale. Pertanto, si calcola la derivata seconda del potenziale, i.e. la derivata della forza generalizzata, e si studia il suo segno in corrispondenza della configurazione di equilibrio:

$$\frac{\partial Q_\theta^{(a)}}{\partial \theta} = 4R\,(Mg\sin\theta + kR\cos\theta + 4kR\cos^2\theta - 4kR\sin^2\theta).$$

A questo punto, è facile verificare che $\theta^{(eq)}$ è un punto di equilibrio instabile.

3. Reazione vincolare in C in condizioni di equilibrio

Scrivendo la prima equazione cardinale della statica per tutto il sistema, si ha:

$$\boldsymbol{\Phi}_C + \boldsymbol{\Phi}_D + k(O-B) - \tfrac{1}{2}Mg\boldsymbol{j} - Mg\boldsymbol{j} - Mg\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}.$$

A questo punto, sfruttando la seconda equazione cardinale della statica, è possibile dimostrare che la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_D$ è perpendicolare all'asse $\boldsymbol{j}$, mentre la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_C$ è perpendicolare all'asse $\boldsymbol{i}$: infatti, per il disco di centro A (scegliendo come polo il punto A) e per il disco di centro B (scegliendo come polo il punto B), si hanno rispettivamente le seguenti equazioni:

$$(A-D)\times\boldsymbol{\Phi}_D = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{\Phi}_D = \Phi_{D,x}\,\boldsymbol{i}$$
$$(B-C)\times\boldsymbol{\Phi}_C = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{\Phi}_C = \Phi_{C,y}\,\boldsymbol{j}.$$

Pertanto, al fine di ricavare il valore della reazione vincolare in C, è sufficiente proiettare la prima equazione cardinale della statica lungo l'asse $\boldsymbol{j}$:

$$\Phi_{C,y} + k(y_O - y_B) - \tfrac{1}{2}Mg - Mg - Mg = 0,$$

da cui si ricava

$$\boldsymbol{\Phi}_C = \left(\frac{5}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}\right)Mg\boldsymbol{j}.$$

Ulteriori risposte per l'esame da 8 crediti

4. Energia cinetica

Utilizzando la legge di distribuzione delle velocità, si procede con il calcolo delle velocità angolari del disco di centro A, del disco di centro B e dell'asta, indicate rispettivamente con $\boldsymbol{\omega}_A$, $\boldsymbol{\omega}_B$ e $\boldsymbol{\omega}_G$. In particolare, ricordando che $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_D = \mathbf{0}$, si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_D = \boldsymbol{\omega}_A \times (A - D) &\implies \omega_A = 4\cos\theta\dot{\theta},\\
\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_B \times (B - C) &\implies \omega_B = 2\sin\theta\dot{\theta},\\
\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_G \times (A - B) &\implies \omega_G = -\dot{\theta}.
\end{aligned}$$

Pertanto, l'energia cinetica del sistema ha la seguente espressione:

$$T = 6MR^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + 12MR^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{8}{3}MR^2\dot{\theta}^2$$

5. Equazioni di Lagrange

L'equazione di Lagrange che descrive il moto del sistema è la seguente:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta^{(a)}.$$

Pertanto, si ottiene

$$2\bigg(6MR^2\cos^2\theta + 12MR^2\sin^2\theta + \frac{8}{3}MR^2\bigg)\ddot{\theta} + 12MR^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 = Q_\theta^{(a)}.$$

Ulteriori risposte per l'esame da 6 crediti

4. Reazione vincolare in D in condizioni di equilibrio

Dalle osservazioni precedenti (si veda la risposta **3**), per ricavare il valore della reazione vincolare in D, è sufficiente proiettare la prima equazione cardinale della statica lungo l'asse $\boldsymbol{i}$:

$$\Phi_{D,x} + k(x_O - x_B) = 0,$$

da cui si ricava

$$\boldsymbol{\Phi}_D = \sqrt{3}\,Mg\boldsymbol{i}.$$

5. Reazioni vincolari in A e in B in condizioni di equilibrio

Scrivendo la prima equazione cardinale della statica per il disco di centro A e il disco di centro B, si ottiene il valore della reazione vincolare in A e in B, rispettivamente. Infatti, tenendo presente che la molla è tesa tra l'origine O e l'estremo B dell'asta, si ha:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_A + \boldsymbol{\Phi}_D - \tfrac{1}{2}Mg\boldsymbol{j} = \mathbf{0} &\implies \boldsymbol{\Phi}_A = \Big(-\sqrt{3}\,Mg,\ \frac{1}{2}Mg\Big),\\
\boldsymbol{\Phi}_B + \boldsymbol{\Phi}_C - Mg\boldsymbol{j} = \mathbf{0} &\implies \boldsymbol{\Phi}_B = \Big(0,\ -\frac{3}{2}Mg - \frac{2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}Mg\Big).
\end{aligned}$$

Politecnico di Torino
MECCANICA RAZIONALE
Prova scritta del 20 luglio 2018 - A

(i) **Domanda di teoria** [5 punti, max. 1 pagina]

Assumendo la validità del principio dei lavori virtuali, dimostrare che per un sistema rigido soggetto a vincoli ideali le equazioni cardinali della statica forniscono una condizione sufficiente per l'equilibrio.

(ii) **Esercizio** [26 punti]

Nel sistema in figura (si veda il retro del foglio), posto nel piano verticale Oxy, la lamina quadrata $OBCD$, omogenea di massa M e lato l, è incernierata nel suo vertice O all'origine del sistema di riferimento. Inoltre il suo vertice C è collegato all'asse y da una molla di costante elastica k, che si mantiene sempre orizzontale.

I vincoli sono tutti lisci.

Si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ indicato in figura.

Domande per tutti:

1) [**5 punti**] Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione del valore assunto dalla costante elastica $k > 0$.
2) [**8 punti**] Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio in funzione di $k > 0$.

D'ora in avanti, in tutti i prossimi punti dell'esercizio, si supponga che al vertice C della lamina sia applicato un punto materiale di massa m.

3) [**7 punti**] Determinare per quali valori di $m > 0$ la configurazione $\theta = \frac{\pi}{2}$ rimane un equilibrio stabile del sistema.
4) [**3 punti**] Calcolare la reazione vincolare che si esplica in O in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio instabili del sistema.

Ulteriori domande per l'esame da 8 crediti:

5) [**3 punti**] Calcolare l'energia cinetica del sistema[2].

Ulteriori domande per l'esame da 6 crediti:

5) [**3 punti**] Calcolare la reazione vincolare in C che mantiene il punto materiale di massa m attaccato alla lamina in una configurazione di equilibrio.

[2]Si ricorda che il momento di inerzia di una lamina quadrata di massa M e lato l rispetto ad un asse perpendicolare al piano della lamina e passante per il baricentro di quest'ultima vale $\frac{1}{6}Ml^2$.

1. Configurazioni di equilibrio e stabilità
Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$G = \frac{l}{2}\sqrt{2}(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}),$$
$$C = l\sqrt{2}(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}),$$
$$H = l\sqrt{2}\sin\theta\mathbf{j}.$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

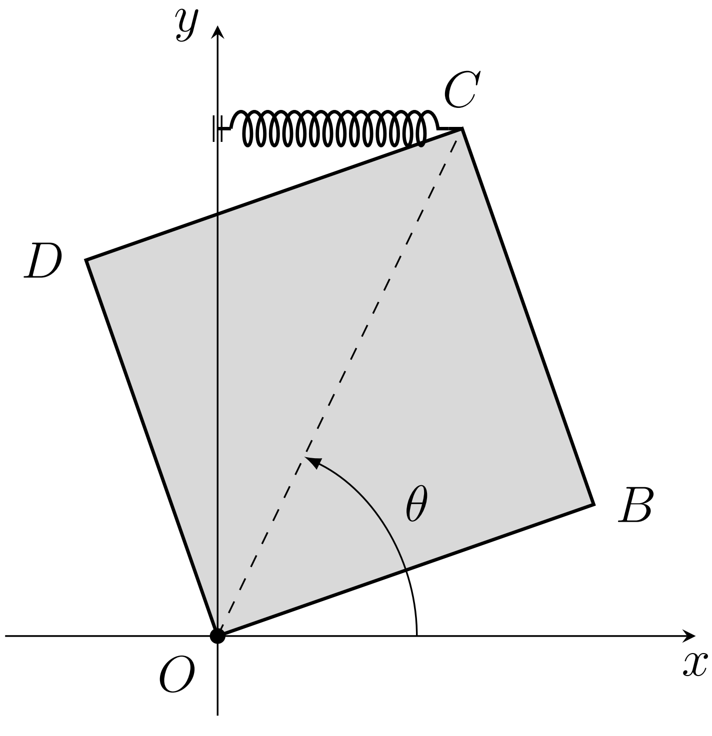
$$U(\theta) = -\sqrt{2}gl\sin\theta\Big(\frac{M}{2} + m\Big) + kl^2sin^2\theta + C$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero l'unica componente del gradiente del potenziale

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{2}Mg + \sqrt{2}kl\sin\theta - mg\Big)l\cos\theta = 0$$

e considerando il caso 1 : m=0

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{2}Mg + \sqrt{2}kl\sin\theta\Big)l\cos\theta = 0,$$



le configurazioni di equilibrio sono tali da soddisfare

$$\cos\theta = 0,$$
$$\sin\theta = \lambda$$

con $\lambda = \frac{Mg}{2\sqrt{2}kl}$, $\lambda \in (0, 1]$. In definitiva, si ha:

$$\theta_1^{(eq)} = \frac{\pi}{2}$$
$$\theta_2^{(eq)} = \frac{3\pi}{2}$$
$$\theta_3^{(eq)} = \arcsin(\lambda)$$
$$\theta_4^{(eq)} = \pi - \arcsin(\lambda)$$

con $\theta_i^{(eq)} \in [0, 2\pi]$.
Stabilità (per $m = 0$): Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si calcola la derivata seconda del potenziale e si studia il suo segno in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}kl\cos\theta)l\cos\theta + \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2}Mg + \sqrt{2}kl\sin\theta\Big)(-l\sin\theta)\\ &= 2kl^2(cos^2\theta - sin^2\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}Mgl\sin\theta.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \theta_1^{(eq)}) = -2kl^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}Mgl$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \theta_2^{(eq)}) = -2kl^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}Mgl$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \theta_3^{(eq)}) = 2kl^2 - \frac{1}{4}\frac{M^2g^2}{k}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \theta_4^{(eq)}) = 2kl^2 + \frac{1}{4}\frac{M^2g^2}{k}$$

A questo punto è facile verificare che θ_1 e θ_2 sono punti di equilibrio stabili, mentre θ_3 e θ_4 sono punti di equilibrio instabili.

2. Valori di m per i quali $\pi/2$ è equilibrio stabile e reazione vincolare in O
Consideriamo adesso $m \neq 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \sqrt{2}(-\frac{1}{2}Mg + \sqrt{2}kl\sin\theta - mg)l\cos\theta$$

Notiamo che:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(\pi/2) = 0, \forall m \geq 0.$$

Quindi $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ è sempre una configurazione di equilibrio per qualsiasi massa m.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\pi/2) = -2kl^2 + \sqrt{2}gl\Big(\frac{1}{2}M + m\Big)\sin\theta < 0,$$

da cui segue

$$m < \frac{\sqrt{2}kl}{g} - \frac{M}{2}$$

Scrivendo le equazioni cardinali nella configurazione di equilibrio instabile θ_3, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in O. Per ottenere entrambe le componenti, si considera la prima equazione cardinale del sistema. Pertanto,

$$\Phi = \Big(\sqrt{2\Big(k^2l^2 - \frac{1}{8}M^2g^2\Big)}, (M+m)g\Big)$$

3. Energia cinetica
L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \Big(\frac{1}{3}M + m\Big)l^2\dot{\theta}^2$$

4. Reazione vincolare in C

$$\Phi = (0, mg)$$

Politecnico di Torino

MECCANICA RAZIONALE

Prova scritta del 14 settembre 2018

(i) **Domanda di teoria** [5 punti, max. 1 pagina]

Spiegare perché, in generale, la velocità reale di un punto P soggetto ad un vincolo reonomo non appartiene allo spazio delle velocità virtuali di P.

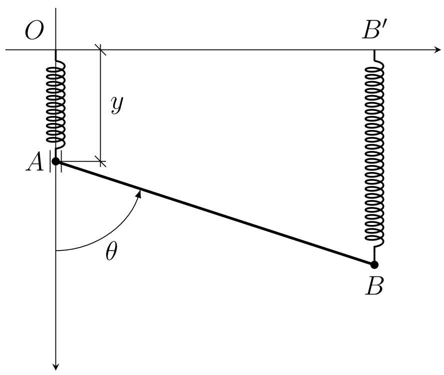
(ii) **Esercizio** [26 punti]

Nel sistema in figura, posto in un piano verticale, l'asta AB, omogenea di massa m e lunghezza l, è incernierata nel suo estremo A, che può scorrere lungo l'asse verticale. Inoltre due molle di uguale costante elastica $k > 0$ sono tese rispettivamente tra il punto O e l'estremo A dell'asta e tra il punto B' e l'estremo B dell'asta, essendo B' la proiezione ortogonale di B sull'asse orizzontale[3].

I vincoli a cui il sistema è sottoposto sono supposti tutti ideali.

Si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ e l'ordinata $y \in \mathbb{R}$ del punto A indicati in figura.

1) [**6 punti**] Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
2) [**6 punti**] Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio del sistema.
3) [**4 punti**] Calcolare la reazione vincolare che si esplica in A in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio determinate al precedente punto 1).
4) [**5 punti**] Scrivere la prima equazione cardinale della dinamica per l'asta.
5) [**5 punti**] Dedurre dal risultato del precedente punto 4) un'equazione pura del moto dell'asta e la reazione vincolare che si esplica in A in condizioni dinamiche.



[3]Attenzione: O e B' **non** sono punti materiali del sistema.

1. Configurazioni di equilibrio e stabilità
Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned}
A &= y\mathbf{j}, \\
B &= l\sin\theta\mathbf{i} + (y + l\cos\theta)\mathbf{j}, \\
G &= \frac{l}{2}\sin\theta\mathbf{i}(\frac{l}{2}\cos\theta + y)\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Il potenziale ha la seguente espressione:

$$U(y,\theta) = mgy - ky^2 - kl\cos\theta y + \frac{k}{2}l^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}lmg\cos\theta + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante di integrazione. Imponendo a zero le componenti del gradiente del potenziale

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y} &= mg - 2ky - kl\cos\theta = 0, \\
\frac{\partial U}{\partial \theta} &= l(ky + kl\cos\theta - \frac{1}{2}mg)\sin\theta = 0,
\end{aligned}$$

si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
(\theta_1^{(eq)}, y_1) &= \Big(0, \frac{1}{2}\Big(\frac{mg}{k} - l\Big)\Big), \\
(\theta_2^{(eq)}, y_2) &= \Big(\pi, \frac{1}{2}\Big(\frac{mg}{k} + l\Big)\Big), \\
(\theta_3^{(eq)}, y_3) &= \Big(\frac{\pi}{2}, \frac{mg}{2k}\Big), \\
(\theta_4^{(eq)}, y_4) &= \Big(\frac{3\pi}{2}, \frac{mg}{2k}\Big).
\end{aligned}$$

Per valutare la stabilità, occorre verificare che risultino essere effettivamente massimi del potenziale. Pertanto, si procede con il calcolo della matrice Hessiana nei suddetti punti:

$$\mathbb{H}((\theta_1^{(eq)}, y_1)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}kl^2 & 0 \\ 0 & -2k \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{H}((\theta_2^{(eq)}, y_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}kl^2 & 0 \\ 0 & -2k \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{H}((\theta_3^{(eq)}, y_3)) = \begin{pmatrix} -kl^2 & kl \\ kl & -2k \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{H}((\theta_4^{(eq)}, y_4)) = \begin{pmatrix} -kl^2 & -kl \\ -kl & -2k \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante e la traccia di queste matrici, si verifica che $(\theta_1^{(eq)}, y_1)$ e $(\theta_2^{(eq)}, y_2)$ sono punti di equilibrio instabili, mentre $(\theta_3^{(eq)}, y_3)$ e $(\theta_4^{(eq)}, y_4)$ sono punti di equilibrio stabili.

2. Reazione vincolare in A in condizioni di equilibrio
Scrivendo la prima equazione cardinale in entrambe le configurazioni di equilibrio, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in A :

$$\Phi_A = \mathbf{0},$$

sia per le configurazioni di equilibrio stabile che instabile.

3. Prima equazione cardinale della dinamica e equazione pura del moto Scrivendo la Prima equazione cardinale della dinamica per l'asta, otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}ml(-\sin\theta\dot{\theta}^2 + \cos\theta\ddot{\theta})\mathbf{i} - \frac{1}{2}ml(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta})\mathbf{j} + m\ddot{y}\mathbf{j} \\ = -ky\mathbf{j} - k(y + l\cos\theta)\mathbf{j} + mg\mathbf{j} + \Phi_A.\end{aligned}$$

Da questa, si ricava l'equazione pura del moto:

$$\ddot{y} - \frac{1}{2}l(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta}) = -2\frac{k}{m}y - \frac{kl}{m}\cos\theta,$$

considerando che la reazione vincolare che si esplica in A in condizioni dinamiche è

$$\Phi_A = \frac{1}{2}ml(-\sin\theta\dot{\theta}^2 + \cos\theta\ddot{\theta})$$

Politecnico di Torino
MECCANICA RAZIONALE
Prova scritta dell'11 febbraio 2019

(i) **Domanda di teoria** [5 punti]

Dare la definizione di *integrale primo* del moto, quindi enunciare e dimostrare il teorema dell'integrale primo della quantità di moto.

(ii) **Esercizio** [26 punti]

Nel sistema in figura (si veda il retro del foglio), posto nel piano verticale Oxy, un disco omogeneo di massa $5m$, con $m > 0$, e raggio $R > 0$ è incernierato all'origine O del sistema di riferimento in un punto della sua circonferenza. Inoltre, nel punto P diametralmente opposto ad O è saldato al disco un punto materiale di massa m. Infine, tra il baricentro G del disco e la proiezione ortogonale G' di G lungo la retta $x = 2R$ è tesa una molla di costante elastica $k > 0$ (***attenzione**: G' **non** è un punto materiale del sistema*).

I vincoli sono tutti lisci.

Si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ indicato in figura.

Domande per tutti:

1) [**4 punti**] Scrivere il lavoro virtuale delle forze attive agenti sul sistema e determinare la forza attiva generalizzata associata alla coordinata lagrangiana θ.
2) [**4 punti**] Applicando il Principio dei Lavori Virtuali, determinare $k > 0$ in modo che $\theta = \frac{\pi}{4}$ sia una configurazione di equilibrio[4].
3) [**4 punti**] Usando il valore di k determinato al precedente punto 2), stabilire se la configurazione $\theta = \frac{\pi}{4}$ è un equilibrio stabile o instabile.
4) [**4 punti**] Usando il valore di k determinato al precedente punto 2), calcolare la reazione vincolare in O nella configurazione di equilibrio $\theta = \frac{\pi}{4}$.
5) [**2 punti**] Calcolare la velocità angolare del punto materiale P.

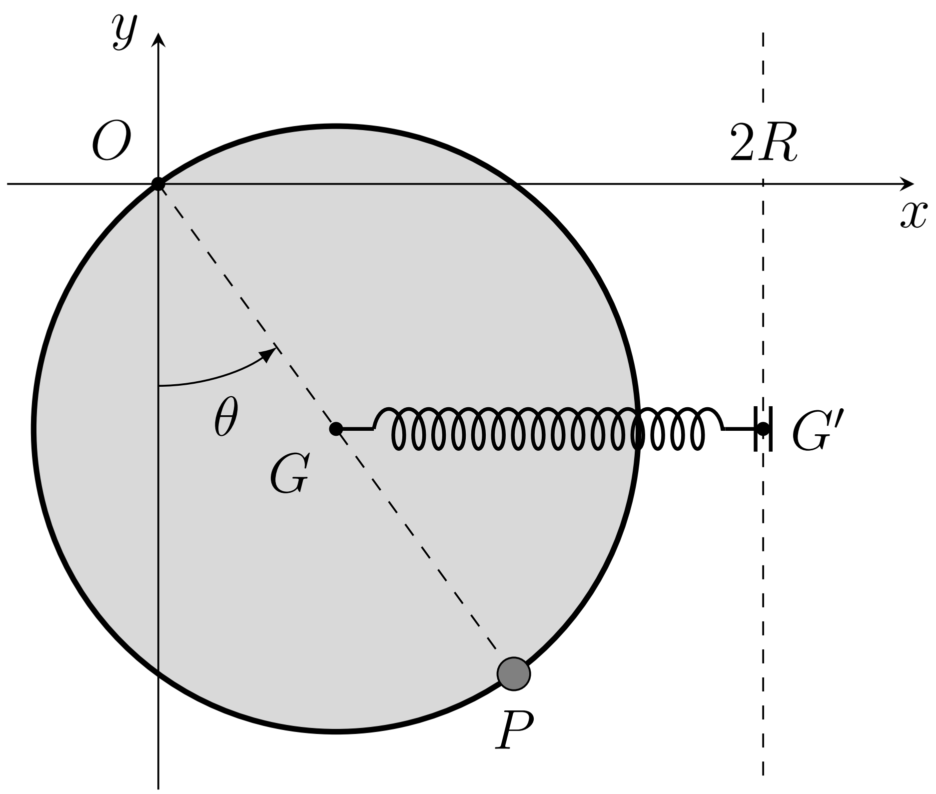
Ulteriori domande per l'esame da 8 crediti:

6) [**5 punti**] Scrivere l'equazione di Lagrange che descrive il moto del sistema.
7) [**3 punti**] Come cambiano i risultati dei punti da 1) a 6) se, a parità di tutto il resto, il disco è sostituito da un'asta rigida omogenea coincidente con il segmento OP, incernierata in O e avente la stessa massa del disco? Motivare la risposta.

[4] Ricordare che $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ulteriori domande per l'esame da 6 crediti:

6) [**5 punti**] Determinare se esiste un valore di $k > 0$ che rende $\theta = \frac{\pi}{2}$ una configurazione di equilibrio.
7) [**3 punti**] Come cambiano i risultati dei punti da 1) a 6) se, a parità di tutto il resto, il disco è sostituito da un'asta rigida omogenea coincidente con il segmento OP, incernierata in O e avente la stessa massa del disco? Motivare la risposta.



1)
Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$
\begin{aligned}
G &= R\sin\theta\mathbf{i} - R\cos\theta\mathbf{j},\\
G' &= 2R\mathbf{i} - R\cos\theta\mathbf{j},\\
P &= 2R\sin\theta\mathbf{i} - 2R\cos\theta\mathbf{j},
\end{aligned}
$$

Considerando tutte le forze attive agenti sul sistema, tra cui

$$
\begin{aligned}
F_G G' &= k(G' - G)\\
&= kR(2 - \sin\theta)\mathbf{i},
\end{aligned}
$$

si ha che il lavoro virtuale è dato da

$$\delta L^{(a)} = \left(-7mgR\sin\theta + kR^2(2 - \sin\theta)\cos\theta\right)\delta\theta,$$

mentre la forza generalizzata attiva è data da

$$Q_\theta^{(a)} = -7mgR\sin\theta + kR^2(2 - \sin\theta)\cos\theta$$

2)
Applicando il Principio dei Lavori Virtuali, si ottiene

$$Q_\theta^{(a)}(\pi/4) = 0 \Rightarrow k = (4 + \sqrt{2})\frac{mg}{R}$$

3)
Verifichiamo se la configurazione $\theta = \frac{\pi}{4}$ è stabile o no:

$$\frac{dQ_\theta^{(a)}}{d\theta}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\Big(\frac{15}{2}\sqrt{2} + 2\Big)mgR < 0$$

Quindi la configurazione $\theta = \frac{\pi}{4}$ è stabile.

4)
Scrivendo la prima equazione cardinale nella configurazione di equilibrio, è possibile ricavare il valore della reazione vincolare in O:

$$\Phi_O = (-7\mathbf{i} + 6\mathbf{j})mg.$$

5)
Applicando la Legge di distribuzione delle velocità ai punti O e P si ottiene,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$$

6)
Dopo aver calcolato l'energia cinetica del sistema

$$\begin{aligned} T &= T_{disco} + T_p \\ &= \frac{23}{4} m R^2 \dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

scriviamo l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta^{(a)},$$

ottenendo

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{23}\frac{g}{R}\big[-7\sin\theta + (4+\sqrt{2})(2-\sin\theta)\cos\theta)\cos\theta\big].$$

7)
Sostituendo il disco con un'asta omogenea OP, cambia l'energia cinetica (momento d'inerzia dell'asta diverso da quello del disco) e di conseguenza cambia un coefficiente nell'equazione di Lagrange. Tutti gli altri risultati rimangono invariati perchè non dipendono dalla forma del disco.ma soltanto dalle coordinate dei punti G,G',P.
6')
Applicando il Principio dei Lavori Virtuali, si ottiene

$$Q_\theta^{(a)}(\pi/2) = 0 \Rightarrow -7mgR = 0.$$

Quindi non esiste $k > 0$ tale che $\theta = \frac{\pi}{2}$ sia una configurazione di equilibrio.
7')
Sostituendo il disco con un'asta omogenea OP, non cambia niente perchè i risultati ottenuti non dipendono dalla forma del disco, ma soltanto dalle coordinate dei punti G,G',P.

Politecnico di Torino
MECCANICA RAZIONALE
Prova scritta del 3 luglio 2019

(i) **Domanda di teoria** [5 punti]

Definire cosa si intende per osservatore solidale ad un sistema di punti $\{P_i\}_{i=1}^N$. Considerare, quindi, il caso particolare di $N = 2$ punti $\{P_1, P_2\}$ e spiegare perché, se il sistema non è rigido, non esiste un osservatore solidale.

(ii) **Esercizio** [26 punti]

Il sistema in figura (si veda il retro del foglio), posto nel piano verticale Oxy, è formato da:

(i) un'asta rigida omogenea AB, di massa $m > 0$ e lunghezza $2l > 0$, vincolata a ruotare intorno al suo baricentro O;

(ii) un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato rigidamente all'asta AB mediante una sbarra PO di lunghezza l e massa trascurabile, che forma con l'asta AB un angolo di $\frac{\pi}{2}$ radianti.

Oltre che alle forze peso, il sistema è soggetto a due forze elastiche prodotte da due molle di uguale costante elastica $k > 0$, tese tra ciascun estremo dell'asta AB e la rispettiva proiezione ortogonale sull'asse x, e inoltre ad un momento $\mathbf{M} = mgl \sin\theta \mathbf{k}$, essendo θ l'angolo antiorario formato dall'asta AB con la direzione positiva dell'asse x.

I vincoli sono supposti tutti ideali.

Si scelga come coordinata lagrangiana il succitato angolo θ.

Domande per tutti:

1) [**8 punti**] Introdotto il parametro adimensionale $\lambda := \frac{mg}{kl} > 0$, determinare, al variare di λ, le configurazioni di equilibrio del sistema facendo uso del Principio dei Lavori Virtuali. Precisare, in particolare, i valori di λ per cui ciascuna configurazione di equilibrio esiste.

2) [**6 punti**] Studiare, in funzione di λ, la stabilità delle configurazioni di equilibrio.

Ulteriori domande per l'esame da 8 CFU:

3) [**7 punti**] Scrivere l'equazione di Lagrange che descrive il moto del sistema[5].

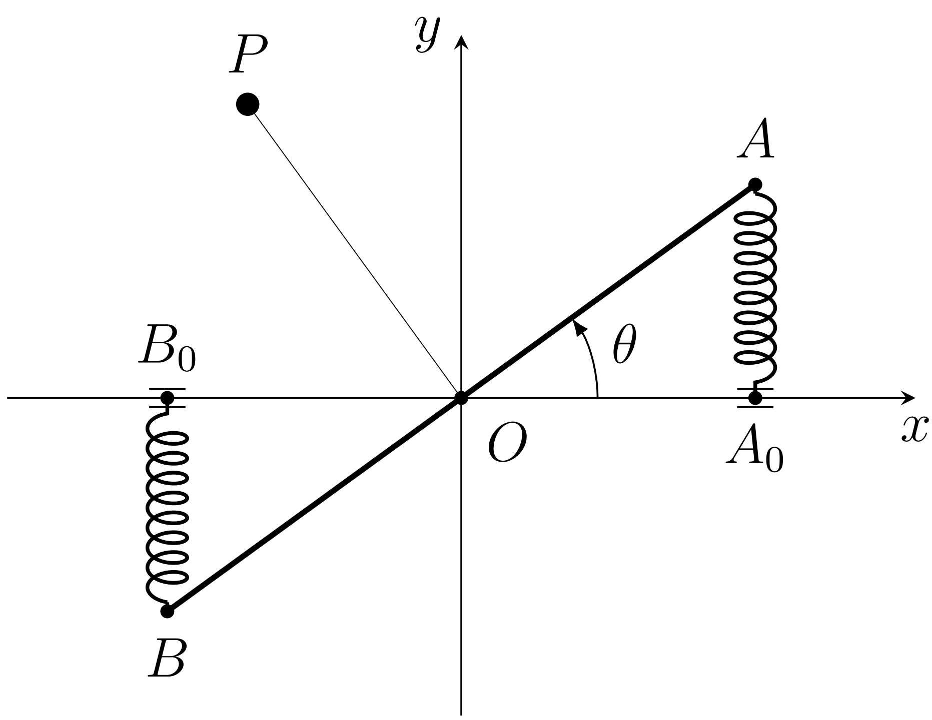
[5]Si ricorda che il momento di inerzia di un'asta omogenea rispetto ad un asse perpendicolare al piano dell'asta e passante per il baricentro è $\frac{1}{12}$(massa dell'asta) $\cdot$ (lunghezza dell'asta)^2.

4) [**5 punti**] Determinare la frequenza propria delle piccole oscillazioni del sistema nell'intorno della configurazione di equilibrio che risulta sempre stabile per ogni valore di $\lambda > 0$.

Ulteriori domande per l'esame da 6 CFU:

3) [**7 punti**] Calcolare la reazione vincolare che si esplica in O nelle configurazioni di equilibrio precedentemente determinate. Mostrare, in particolare, che questa reazione vincolare è la stessa in ogni configurazione di equilibrio.

4) [**5 punti**] Mediante la seconda equazione cardinale della dinamica, determinare un'equazione pura del moto del sistema[7].



1. Configurazioni di equilibrio
Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned} A &= l(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}), \\ B &= -l(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}), \\ P &= l(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}), \\ A_0 &= l\cos\theta\mathbf{i}, \\ B_0 &= -l\cos\theta\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Il lavoro virtuale delle forze attive risulta essere:

$$\delta L^{(a)} = 2l(mg - kl\cos\theta)\sin\theta\ \delta\theta,$$

da cui si ottiene la forza attiva generalizzata

$$Q_\theta^{(a)} = 2l(mg - kl\cos\theta)\sin\theta.$$

Imponendo a zero quest'ultima, si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \theta_1^{(eq)} &= 0, \quad \theta_3^{(eq)} = arcos(\lambda), \\ \theta_2^{(eq)} &= \pi, \quad \theta_4^{(eq)} = 2\pi - arcos(\lambda). \end{aligned}$$

2. Stabilità delle configurazioni di equilibrio
Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, calcoliamo la derivata di $Q_\theta^{(a)}$ e la valutiamo nelle precedenti configurazioni.

$$\frac{d}{d\theta}Q_\theta^{(a)} = 2mgl\cos\theta + 2kl^2(1 - 2\cos^2\theta)$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}Q_\theta^{(a)}(\theta = \theta_1^{(eq)}) &= 2kl^2(\lambda - 1), \\ \frac{d}{d\theta}Q_\theta^{(a)}(\theta = \theta_2^{(eq)}) &= -2mg - 2kl^2, \\ \frac{d}{d\theta}Q_\theta^{(a)}(\theta = \theta_3^{(eq)}) &= 2kl^2(1 - \lambda^2), \\ \frac{d}{d\theta}Q_\theta^{(a)}(\theta = \theta_4^{(eq)}) &= 2kl^2(1 - \lambda^2), \end{aligned}$$

A questo è facile verificare che $\theta_1^{(eq)}$ è stabile per $\lambda < 1$, $\theta_2^{(eq)}$ è sempre stabile, mentre $\theta_3^{(eq)}$ e $\theta_4^{(eq)}$ sono sempre instabili.

3. Equazione di Lagrange
Dopo aver calcolato l'energia cinetica del sistema,

$$\begin{aligned} T &= T_{asta} + T_P \\ &= \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

scriviamo l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta^{(a)},$$

ottenendo

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} = 2l(mg - kl\cos\theta)\sin\theta.$$

Linearizzando la precedente equazione nell'intorno di $\theta_2^{(eq)} = \pi$, si ottiene l'equazione delle piccole oscillazioni:

$$\ddot{\eta} + \frac{3(mg + kl)}{2ml^2}\eta = 0.$$

Da qui segue che la pulsazione e la frequenza risultano essere rispettivamente:

$$\omega = \sqrt{\frac{3(mg + kl)}{2ml^2}}, \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(mg + kl)}{2ml^2}}$$

4. Reazione vincolare in O
Dalla prima equazione cardinale della statica per una generica configurazione di equilibrio, si ricava

$$\Phi_O = 2mg\mathbf{j}$$

5. Equazione pura del moto
Dalla seconda equazione cardinale della dinamica, scritta rispetto al punto O, si ricava

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} = 2l(mg - kl\cos\theta)\sin\theta$$

Politecnico di Torino

MECCANICA RAZIONALE

Prova scritta del 22 luglio 2019

(i) **Domanda di teoria** [5 punti]

Definire cosa si intende per configurazione di equilibrio di un sistema meccanico e spiegare la differenza tra configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine.

(ii) **Esercizio** [26 punti]

Nel sistema in figura (si veda il retro del foglio), posto nel piano verticale Oxy, un disco omogeneo di massa $m > 0$ e raggio $R > 0$ rotola senza strisciare lungo la retta Ox inclinata di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rispetto all'orizzontale[6]. Il baricentro G del disco è vincolato a non oltrepassare due pareti perpendicolari alla retta Ox poste rispettivamente nell'origine O e nel punto di coordinate $(\pi R,\, 0)$ rispetto al sistema di riferimento Oxy indicato. Oltre al peso, al disco è applicata una coppia di momento $\mathbf{M} = -a \sin\theta \mathbf{k}$ con $a > 0$ costante, essendo θ l'angolo mostrato nella figura. I vincoli sono tutti ideali.

Si scelga come coordinata lagrangiana il succitato angolo θ.

Domande per tutti:

1) [**4 punti**] Tenendo presente i vincoli indicati nel testo, e assumendo che per $\theta = 0$ il disco abbia il baricentro sull'asse y, determinare l'insieme dei valori che l'angolo θ può assumere.

2) [**7 punti**] Introdotto il parametro adimensionale

$$\lambda := \frac{\sqrt{3}mgR}{2a} > 0,$$

determinare, in funzione di λ, le configurazioni di equilibrio **ordinarie** del sistema. Precisare i valori di λ per cui queste configurazioni esistono e quelli per cui sono tutte distinte.

3) [**3 punti**] Determinare le configurazioni di equilibrio **di confine** del sistema.

4) [**5 punti**] Studiare la stabilità delle sole configurazioni di equilibrio **ordinarie** nel caso in cui esse siano tutte distinte.

Ulteriori domande per l'esame da 8 CFU:

5) [**3 punti**] Scrivere l'equazione di Lagrange che descrive il moto del sistema[7].

---

[6] Si ricorda che $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

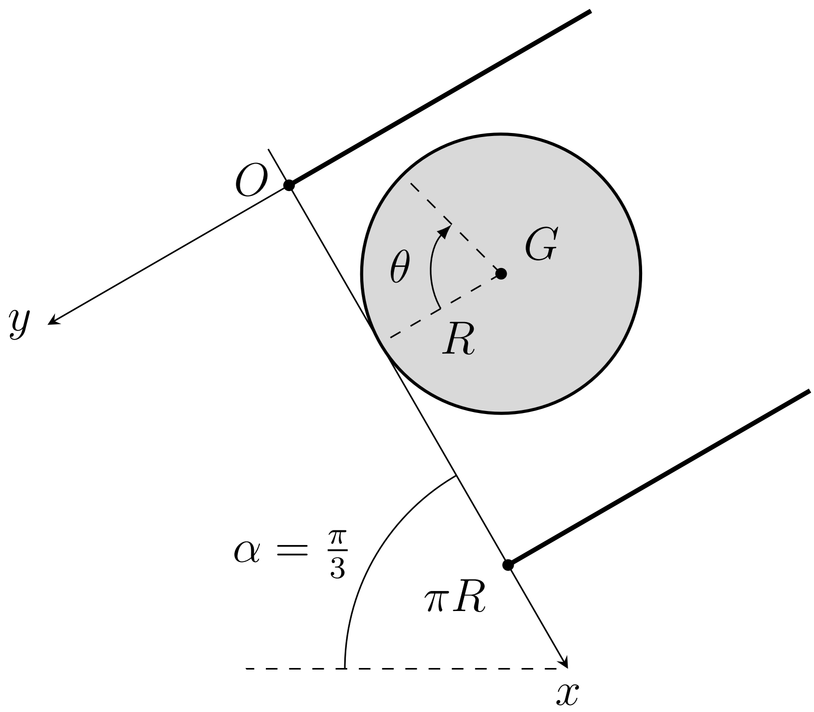
[7] Si ricorda che il momento di inerzia di un disco omogeneo rispetto ad un asse perpendicolare al piano del disco e passante per il **baricentro** è $\frac{1}{2}$(massa del disco)$\cdot$(raggio del disco)^2. Trasporre opportunamente questo valore in caso di necessità.

6) [**4 punti**] Determinare l'equazione delle piccole oscillazioni e la loro frequenza propria nell'intorno della configurazione di equilibrio ordinaria stabile.

Ulteriori domande per l'esame da 6 CFU:

5) [**4 punti**] Mediante la seconda equazione cardinale della dinamica, determinare un'equazione pura del moto del sistema[7].

6) [**3 punti**] Si supponga di aggiungere al sistema una molla di costante elastica $k > 0$ tesa tra il baricentro G del disco e la proiezione ortogonale G_0 di G sull'asse y. Mediante la seconda equazione cardinale della statica, determinare il valore di k che rende $\theta = \frac{\pi}{2}$ una configurazione di equilibrio.



1. Spazio delle configurazioni
Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$
\begin{aligned}
C &= R\theta\mathbf{i},\\
G &= R\theta\mathbf{i} - R\mathbf{j},\\
P &= \frac{1}{2}mg(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}).
\end{aligned}
$$

L'insieme dei valori che l'angolo θ può assumere è dato da

$$0 \leq R\theta \leq \pi R \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$$

con $\theta = 0, \pi$ configurazioni di confine.

2. Configurazioni di equilibrio ordinarie
Il lavoro virtuale delle forze attive risulta essere:

$$\delta L^{(a)} = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}mgR - a\sin\theta\Big)\delta\theta,$$

da cui si ottiene la forza attiva generalizzata

$$Q_\theta^{(a)} = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}mgR - a\sin\theta\Big)$$

Imponendo a zero quest'ultima, si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio ordinarie:

$$\theta_1^{(eq)} = \arcsin(\lambda) \quad \theta_2^{(eq)} = \pi - \arcsin(\lambda),$$

che esistono per $0 < \lambda \leq 1$ e sono distinte per $\lambda \neq 1$.

3. Configurazioni di equilibrio di confine
Si verifica che $\theta = 0$ è una configurazione di equilibrio di confine se

$$\delta L^{(a)} = \frac{\sqrt{3}}{2}mgR\delta\theta \leq 0, \quad \forall\, \delta\theta \leq 0. \tag{1}$$

Ma questa condizione non è, in generale, verificata. Quindi $\theta = 0$ non è una configurazione di equilibrio di confine.
Analogamente, $\theta = \pi$ è una configurazione di equilibrio di confine se vale (1). Ma tale condizione è sempre verificata e quindi $\theta = \pi$ è una configurazione di equilibrio di confine.

4. Stabilità delle configurazioni di equilibrio ordinarie
Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, calcoliamo la derivata di $Q_\theta^{(a)}$ e la valutiamo in $\theta_1^{(eq)}$ e $\theta_2^{(eq)}$

$$\frac{d}{d\theta}Q_\theta^{(a)} = a\cos\theta$$

Pertanto, $\theta_1^{(eq)}$ è una configurazione di equilibrio stabile, mentre $\theta_2^{(eq)}$ è una configurazione di equilibrio instabile.

5. Equazione di Lagrange
Dopo aver calcolato l'energia cinetica del sistema,

$$T = \frac{1}{2} I_{C,z}\,\omega^2 = \frac{3}{4} mR^2\dot{\theta}^2,$$

scriviamo l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta^{(a)},$$

ottenendo

$$\frac{3}{2} mR^2\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} mgR - a\sin\theta.$$

6. Piccole oscillazioni
Consideriamo la configurazione di equilibrio stabile $\theta_1^{(eq)} = \arcsin(\lambda)$ e poniamo

$$\theta = \theta_1^{(eq)} + \epsilon\eta, \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

Inserendo quest'ultimo nell'equazione di Lagrange e linearizzando, otteniamo l'equazione delle piccole oscillazioni intorno a $\theta_1^{(eq)}$:

$$\ddot{\eta} + \frac{2a}{3mR^2}\sqrt{1-\lambda^2}\,\eta = 0.$$

Da cui leggiamo che la frequenza di oscillazione propria è:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2a}{3mR^2}\sqrt{1-\lambda^2}}$$

7. Equazione pura del moto
Dalla seconda equazione cardinale, scritta rispetto al punto C, si ricava

$$\frac{3}{2} mR^2\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} mgR - a\sin\theta$$

8. Equilibrio per $\theta = \pi/2$
Dalla seconda equazione cardinale della statica rispetto al polo C, risulta che deve essere:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} mgR - kR^2 - a \sin\theta = 0,$$

che per $\theta = \frac{\pi}{2}$, dà

$$k = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} mgR - a\right) \tag{2}$$

Politecnico di Torino

MECCANICA RAZIONALE

Prova scritta del 13 settembre 2019

(i) **Domanda di teoria** [5 punti]

Due dischi rigidi, che giacciono sul piano Oxy, rotolano senza strisciare lungo l'asse x. I centri dei due dischi sono collegati da un'asta rigida e il raggio di uno dei due dischi è il doppio di quello dell'altro.

I due dischi hanno la stessa velocità angolare? Motivare esaurientemente la risposta, facendo riferimento ad opportune proprietà teoriche.

(ii) **Esercizio** [26 punti]

Il sistema rappresentato in figura (si veda il retro del foglio), posto in un piano verticale Oxy, è costituito di un'asta AB pesante omogenea di massa $m > 0$ e lunghezza $2l > 0$, i cui estremi A e B sono vincolati a scorrere rispettivamente sugli assi x e y. Oltre che al peso, l'asta è soggetta all'azione di una forza elastica esercitata da una molla di costante $k = \frac{mg}{4l}$ ancorata all'origine O e al punto Q dell'asta distante λl (con $0 < \lambda < 2$) dall'estremo A.

I vincoli sono supposti tutti ideali.

Si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ rappresentato in figura.

Domande per tutti:

1) [**6 punti**] Utilizzando il Principio dei Lavori Virtuali, determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone in particolare l'esistenza in funzione di λ.
2) [**6 punti**] Discutere, in funzione di λ, la stabilità delle configurazioni di equilibrio determinate in precedenza.
3) [**4 punti**] Calcolare le reazioni vincolari che si esplicano nei punti A e B in condizioni statiche in funzione della configurazione di equilibrio θ considerata.

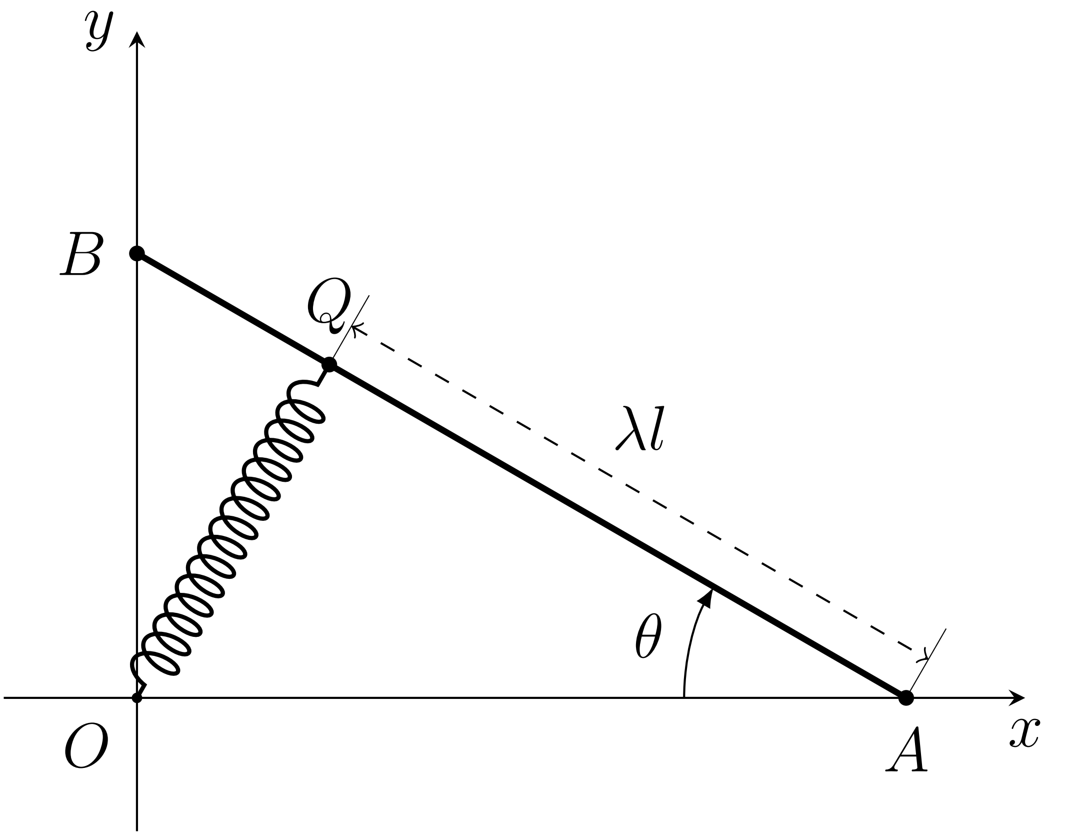
Ulteriori domande per l'esame da 8 CFU:

4) [**6 punti**] Ricavare l'equazione di Lagrange del moto.
5) [**4 punti**] Determinare l'equazione delle piccole oscillazioni e la loro frequenza propria nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile che si ha per $\lambda = \frac{2}{3}$.

Ulteriori domande per l'esame da 6 CFU:

4) [**6 punti**] Scrivere la seconda equazione cardinale della statica riferita al polo O e, utilizzando le espressioni delle reazioni vincolari determinate al precedente punto 3), ritrovare da essa l'equazione che fornisce le configurazioni di equilibrio del sistema.

5) [**4 punti**] Calcolare, mediante la prima equazione cardinale della dinamica, le reazioni vincolari in A e B in condizioni dinamiche.



1. Spazio delle configurazioni
Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$\begin{aligned}
A &= 2l\cos\theta\mathbf{i},\\
B &= 2l\sin\theta\mathbf{j},\\
Q &= (2-\lambda)l\cos\theta\mathbf{i} + \lambda l\sin\theta\mathbf{j},\\
G &= l(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}).
\end{aligned}$$

Considerando tutte le forze attive agenti sul sistema, si ha che il lavoro virtuale è dato da

$$\delta L^{(a)} = -mgl[1 + (\lambda - 1)\sin\theta]\cos\theta\delta\theta$$

mentre la forza generalizzata è data da

$$Q_\theta^{(a)} = -mgl[1 + (\lambda - 1)\sin\theta]\cos\theta$$

Imponendo a zero quest'ultima, si ricavano le seguenti configurazioni di equilibrio:

$$\theta_1^{(eq)} = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2^{(eq)} = \frac{3}{2}\pi,$$

che esistono $\forall\lambda \in (0, 2)$.

2. Stabilità delle configurazioni di equilibrio
Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, calcoliamo la derivata di $Q_\theta^{(a)}$ e la valutiamo in $\theta_1^{(eq)}$ e $\theta_2^{(eq)}$

$$\frac{d}{dt}Q_\theta^{(a)} = (\lambda - 1)mgl(1 - 2\cos^2\theta) + mgl\sin\theta.$$

Da cui si deduce che $\theta_1^{(eq)} = \frac{\pi}{2}$ è una configurazione di equilibrio instabile, mentre $\theta_2^{(eq)} = \frac{3}{2}\pi$ è una configurazione di equilibrio stabile.

3. Reazioni vincolari in condizioni statiche
I vincoli a cui sono soggetti A e B sono ideali e bilateri, quindi $\boldsymbol{\Phi_A} = \Phi_A\mathbf{j}$ e $\boldsymbol{\Phi_B} = \Phi_B\mathbf{i}$. Dalla prima equazione cardinale della statica si ricava,

$$\Phi_A = \Big(1 + \frac{\lambda}{4}\sin\theta\Big)mg, \quad \Phi_B = \frac{2-\lambda}{4}mg\cos\theta.$$

Quindi per $\theta_1^{(eq)}$ otteniamo

$$\Phi_A = \Big(1 + \frac{\lambda}{4}\Big)mg, \quad \Phi_B = 0,$$

mentre per $\theta_2^{(eq)}$ otteniamo

$$\Phi_A = \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)mg, \quad \Phi_B = 0,$$

4. Equazione di Lagrange
Dopo aver calcolato l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v_G}|^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2,$$

scriviamo l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta^{(a)},$$

ottenendo

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{4l}[1 + (\lambda - 1)\sin\theta]\cos\theta$$

5. Piccole oscillazioni
Per $\lambda = \frac{2}{3}$, la configurazione di equilibrio stabile è $\theta = \frac{3}{2}\pi$ e poniamo

$$\theta = \frac{3}{2}\pi + \epsilon\eta, \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

Inserendo quest'ultimo nell'equazione di Lagrange e linearizzando, otteniamo

$$\ddot{\eta} + \frac{g}{l}\eta = 0,$$

da cui leggiamo che la frequenza di oscillazione propria è

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

6. Seconda equazione cardinale della statica
Scrivendo l'e quazione cardinale della statica, otteniamo

$$-mg\cos\theta\mathbf{k} + 2\Phi_A\cos\theta\mathbf{k} - 2\Phi_B\sin\theta\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

e sostituendo i valori di Φ_A e Φ_B otteniamo

$$\cos\theta[1 + (\lambda - 1)\sin\theta] = 0$$

7. Reazioni vincolari in condizioni dinamiche
Dalla prima equazione cardinale della dinamica si ha

$$\boldsymbol{\Phi_A} = [ml(-\sin\theta\dot{\theta}^2 + \cos\theta\ddot{\theta}) + (1 + \frac{\lambda}{4})mg\sin\theta]\mathbf{j},$$

$$\boldsymbol{\Phi_B} = [-ml(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta}) + \frac{2-\lambda}{4}mg\cos\theta]\mathbf{i}$$

Politecnico di Torino
MECCANICA RAZIONALE
Prova scritta del 24 gennaio 2020

(i) **Domanda di teoria** [5 punti]

Dimostrare che la potenza sviluppata da un vincolo ideale, bilatero e scleronomo è nulla, spiegando nella dimostrazione a cosa serve ciascuna delle tre ipotesi "ideale", "bilatero", "scleronomo".

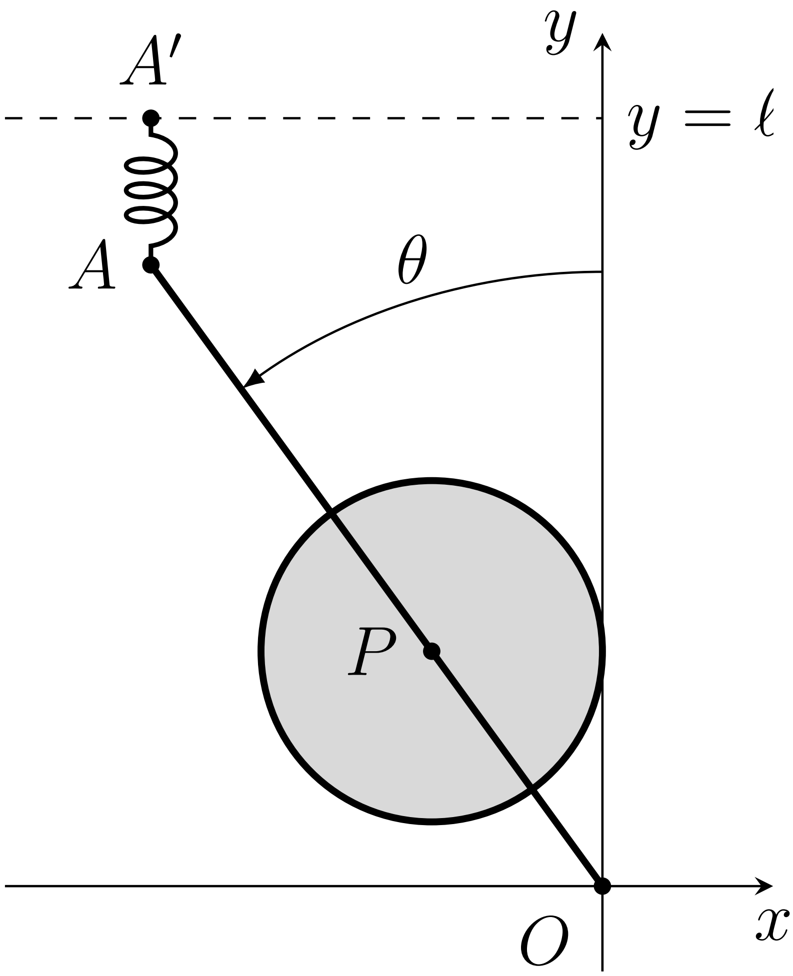
(ii) **Esercizio** [26 punti]

Nel sistema in figura (si veda il retro del foglio), disposto in un piano verticale Oxy, un'asta rigida omogenea OA di lunghezza ℓ e massa m è incernierata nell'origine O ed è collegata alla retta $y = \ell$ da una molla AA' che si mantiene sempre verticale e che ha costante elastica k. Lungo l'asta scorre senza attrito il baricentro P di un disco omogeneo di massa M e raggio $r < \ell$, che rotola senza strisciare sull'asse y.

I vincoli del sistema sono tutti ideali.

Si assuma come coordinata lagrangiana l'angolo θ indicato in figura.

1) [**8 punti**] Utilizzando il Principio dei Lavori Virtuali, stabilire quale valore deve assumere la costante elastica k affinché la configurazione $\theta = \frac{\pi}{2}$ sia di equilibrio. Stabilire inoltre se tale configurazione di equilibrio è stabile o instabile.
2) [**3 punti**] Esprimere la velocità angolare del disco in funzione di $\dot{\theta}$.
3) [**5 punti**] Calcolare l'energia cinetica del sistema e, ricorrendo allo sviluppo di Taylor della funzione $\sin\theta$, linearizzarla nell'intorno della configurazione $\theta = \frac{\pi}{2}$.
4) [**3 punti**] Ricorrendo agli sviluppi di Taylor delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$ e utilizzando il valore di k determinato al punto 1), linearizzare anche l'espressione della forza attiva generalizzata nell'intorno della configurazione $\theta = \frac{\pi}{2}$.
5) [**4 punti**] Utilizzando le espressioni linearizzate dell'energia cinetica e della forza attiva generalizzata determinate ai precedenti punti 3) e 4), scrivere l'equazione di Lagrange del moto del sistema. Riconoscere che si tratta dell'equazione delle piccole oscillazioni del sistema nell'intorno della configurazione di equilibrio $\theta = \frac{\pi}{2}$.
6) [**3 punti**] Sfruttando l'equazione determinata al precedente punto 5), calcolare la pulsazione propria del sistema nell'intorno della configurazione di equilibrio $\theta = \frac{\pi}{2}$.



1. Spazio delle configurazioni
Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$P = (-r, \frac{r}{\tan\theta}),$$
$$G = (-\frac{l}{2}\sin\theta, \frac{l}{2}\cos\theta),$$
$$A = (-l\sin\theta, l\cos\theta).$$

Considerando tutte le forze attive agenti sul sistema, si ha che il lavoro virtuale è dato da

$$\delta L^{(a)} = \Big[\frac{Mgr}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2}mgl\sin\theta - kl^2(1-\cos\theta)\sin\theta\Big]\delta\theta$$

mentre la forza generalizzata è data da

$$Q_\theta^{(a)} = \frac{Mgr}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2}mgl\sin\theta - kl^2(1-\cos\theta)\sin\theta$$

La configurazione $\theta = \frac{\pi}{2}$ è di equilibrio se

$$Q_\theta^{(a)}(\theta = \pi/2) = 0 \Rightarrow k = \frac{Mgr}{l^2} + \frac{mg}{2l}$$

Per valutare la stabilità di tali configurazioni di equilibrio, calcoliamo la derivata di $Q_\theta^{(a)}$ e la valutiamo in $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{d}{dt}Q_\theta^{(a)} = -\frac{2Mgr\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{1}{2}mgl\cos\theta + kl^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

Da cui si deduce che $\theta = \frac{\pi}{2}$ è una configurazione di equilibrio stabile.

2. Velocità angolare del disco

Dalla Legge di distribuzione delle velocità si ricava che

$$\boldsymbol{\omega_{disco}} = \frac{\dot\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{k}.$$

3. Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica del sistema è data da

$$\begin{aligned} T &= T_{asta} + T_{disco} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}ml^2\dot\theta^2 + \frac{3}{2}Mr^2\frac{\dot\theta^2}{sin^4\theta}\Big). \end{aligned}$$

Linearizzando nell'intorno di $\theta = \frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$T \approx \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}ml^2 + \frac{3}{2}Mr^2\Big)\dot\theta^2.$$

Linearizzando, invece, la forza attiva generalizzata $Q_\theta^{(a)}$ nell'intorno di $\theta = \frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$Q_\theta^{(a)} \approx -\Big(Mgr + \frac{1}{2}mgl\Big)\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big)$$

4. Equazione di Lagrange

Sostituendo le espressioni di $Q_\theta^{(a)}$ e T nell'equazione di Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta^{(a)},$$

otteniamo

$$\ddot\theta + \frac{Mgr + \frac{1}{2}mgl}{\frac{1}{3}ml^2 + \frac{3}{2}Mr^2}\Big(\theta - \frac{\pi}{2}\Big) = 0.$$

Si riconosce che questa è l'equazione linearizzata per la perturbazione $\eta = \theta - \frac{\pi}{2}$. Inoltre la pulsasione propria è data da

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgr + \frac{1}{2}mgl}{\frac{1}{3}ml^2 + \frac{3}{2}Mr^2}}$$

Politecnico di Torino
MECCANICA RAZIONALE
Prova scritta del 10 febbraio 2020

(i) **Domanda di teoria** [5 punti]

Richiamare la seconda equazione cardinale della dinamica per un sistema rigido nella sua forma generale. Giustificare poi sotto quali ipotesi vale l'integrale primo del momento delle quantità di moto.

(ii) **Esercizio** [26 punti]

Nel sistema in figura , che è disposto in un piano verticale, la sbarretta rigida omogenea AB di lunghezza $\ell > 0$ e massa $m > 0$ è incernierata, ad un terzo della sua lunghezza, nell'origine del sistema di riferimento (quindi $|B - O| = \frac{1}{3}\ell$). Ad essa sono applicati un momento costante $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{k}$, con $M \in \mathbb{R}$, e una molla di costante elastica $k > 0$, che collega l'estremo A della sbarretta ad un punto materiale P di massa $m_P > 0$ scorrevole sull'asse x. Al punto P è applicata una forza costante $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{i}$ con $F \in \mathbb{R}$.

I vincoli sono supposti tutti ideali.

Si scelgano come coordinate lagrangiane le quantità θ e x indicate in figura.

Domande per tutti:

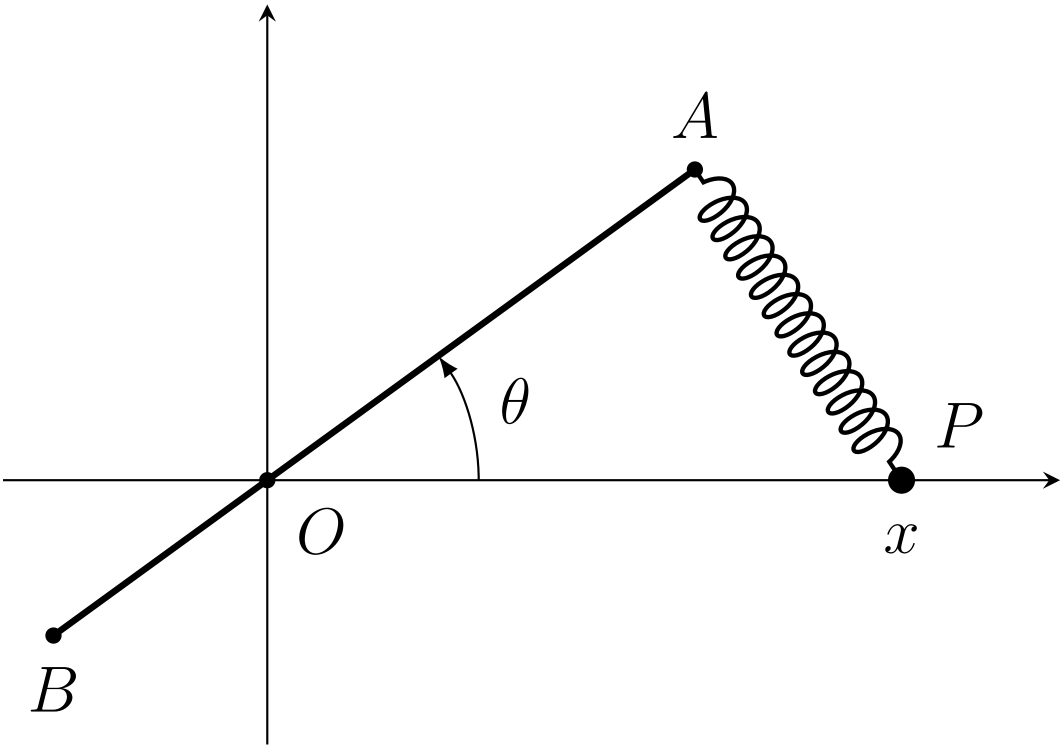
1) [**8 punti**] Utilizzando il Principio dei Lavori Virtuali, determinare la posizione di equilibrio x^* del punto P e il valore che deve assumere M affinchè la sbarretta si trovi in equilibrio per $\theta^* = \pi$.
2) [**6 punti**] Determinare la condizione che deve essere soddisfatta da F per assicurare la stabilità della configurazione di equilibrio (θ^*, x^*) di cui al punto precedente.

Ulteriori domande per l'esame da 8 CFU:

3) [**7 punti**] Calcolare l'energia cinetica del sistema.
4) [**5 punti**] Scrivere le equazioni di Lagrange che regolano il moto del sistema.

Ulteriori domande per l'esame da 6 CFU:

3) [**7 punti**] Calcolare la reazione vincolare che si esplica in P nella configurazione di equilibrio (θ^*, x^*).
4) [**5 punti**] Calcolare la reazione vincolare che si esplica in O nella configurazione di equilibrio (θ^*, x^*).



1. Configurazioni di equilibrio
Seguendo i dati del problema per la caratterizzazione dei vincoli, le coordinate dei punti notevoli risultano essere:

$$
\begin{aligned}
G &= \Big(\frac{l}{6}\cos\theta, \frac{l}{6}\sin\theta\Big),\\
a &= \Big(\frac{2l}{3}\cos\theta, \frac{2l}{3}\sin\theta\Big),\\
P &= (x, 0).
\end{aligned}
$$

Il lavoro virtuale delle forze attive risulta essere:

$$
\delta L^{(a)} = \Big[M + \frac{2}{3}kl(\frac{2}{3}l\cos\theta - x)\sin\theta - \frac{4}{9}kl^2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{6}mgl\cos\theta\Big]\delta\theta + \Big[k\Big(\frac{2}{3}l\cos\theta - x\Big) + F\Big]\delta x
$$

da cui si ottiene la forza attiva generalizzata

$$
\begin{aligned}
Q_\theta^{(a)} &= M - \frac{2}{3}klx\sin\theta - \frac{1}{6}mgl\cos\theta,\\
Q_x^{(a)} &= k\Big(\frac{2}{3}l\cos\theta - x\Big) + F
\end{aligned}
$$

Sostituendo $\theta = \pi$ e imponendo l'equilibrio, ricaviamo:

$$
\begin{cases}
M &= -\frac{1}{6}mgl,\\
x^* &= \frac{F}{k} - \frac{2}{3}l
\end{cases}
$$

2. Stabilità delle configurazioni di equilibrio
Si procede con il calcolo della matrice Hessiana

$$\mathbb{H}((x^*, \theta^*)) = \begin{pmatrix} -\frac{l}{3}kl\left(\frac{F}{k} - \frac{2}{3}l\right) & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi stabilità dell'equilibrio se $F < \frac{2}{3}kl$.

3. Energia cinetica
L'energia cinetisca del sistema è

$$T = T_{asta} + T_P = \frac{1}{18}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_P\dot{x}^2$$

4. Equazioni di Lagrange
Sostituendo le espressioni di $Q_\theta^{(a)}$ e T nell'equazione di Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta^{(a)},$$

otteniamo

$$\begin{cases} \ddot{\theta} & = \frac{9M}{ml^2} - \frac{6k}{l}x\sin\theta - \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta, \\ \ddot{x} & = \frac{k}{m_P}\left(\frac{2}{3}l\cos\theta - x\right) + \frac{F}{m_P}. \end{cases}$$

5. Reazione vincolare in P e O all'equilibrio
Dalla prima equazione cardinale della statica prima per il punto P e poi per il punto O, otteniamo

$$\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{P}} = m_P g\mathbf{j}, \quad \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{O}} = mg\mathbf{j} - F\mathbf{i}$$