- **Il principio di conservazione della carica;**
- **Carica del condensatore**
- **La legge di Ampere-Maxwell;**

IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA

In tutti i processi che avvengono nell'universo l'ammontare netto di carica elettrica deve rimanere sempre lo stesso.

(il principio è ottenuto dall'evidenza sperimentale)

Questa principio si traduce nel dire che se prendiamo una superficie chiusa ***S*** e indichiamo con ***q*** la carica netta dentro *S*
all'entrata di carica in ***S*** corrisponde un aumento di ***q***
all'uscita di carica da ***S*** corrisponde una diminuzione.

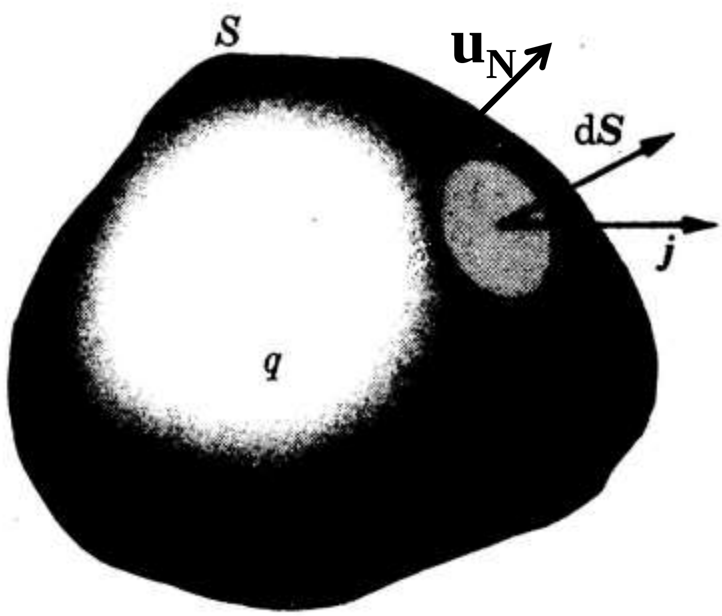


Figura 27.9 Corrente attraverso una superficie chiusa che racchiude una carica *q*.

Tradotto in un bilancio il principio di conservazione della carica per la superficie ***S*** diventa:

$$\begin{Bmatrix}\text{diminuzione} \\ \text{di carica in S}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{flusso} \\ \text{di carica} \\ \text{uscente}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{flusso} \\ \text{di carica} \\ \text{entrante}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{flusso netto} \\ \text{di carica} \\ \text{uscente}\end{Bmatrix}$$

In termini matematici:

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{u}_N ds$$

La densità di corrente ***j*** è presa:
positiva se uscente da ***S***, negativa se entrante.

$$\frac{dq}{dt} + \oint_S \vec{j} \cdot \vec{u}_N ds = 0$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA

Tenendo conto della **Legge di Gauss**
(la carica totale entro una superficie ***S*** chiusa è pari al flusso del campo elettrico ***E*** attraverso la superficie stessa)

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}\right] = 0$$

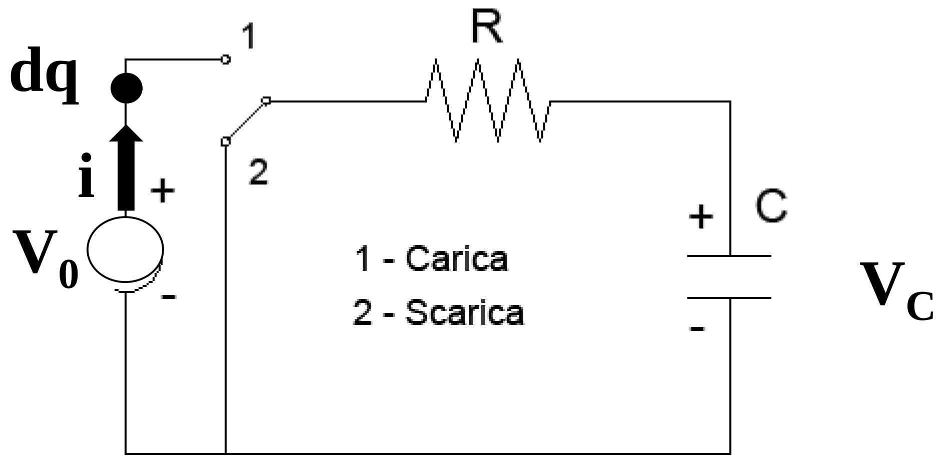
$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \left[\oint_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}\right] = 0$$

$$\oint_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S} = 0$$

Se i campi **E** sono statici:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

CARICA DEL CONDENSATORE



Consideriamo un circuito conduttore che collega un generatore di f.e.m. $\mathbf{V_0}$ ad un condensatore di capacità **C**.

Se chiudiamo il circuito nella configurazione interruttore su (1) e consideriamo il lavoro fatto dal generatore per tenere in moto la carica dq contro la d.d.p. creata dal condensatore e dalla dissipazione per effeto Joule, la conservazione dell'energia si scrive

$$V_0 dq = V_C dq + Ridq$$

lavoro fatto dal generatore V_0

energia immagazzinata nel condensatore (campo E)

energia dissipata nella resistenza

$$V_0 - V_C = Ri \qquad\qquad V_0 - \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{1}{C}\left(q - V_0 C\right) = -R\frac{dq}{dt}$$

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{dq}{\left(q - V_0 C\right)}$$

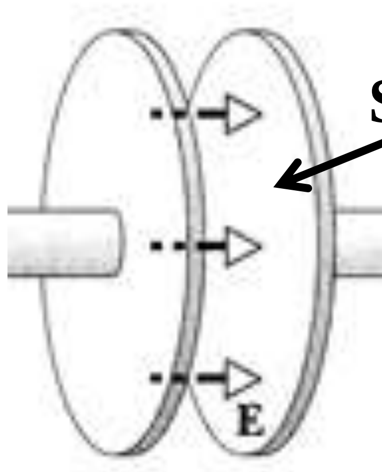
$$\ln\left(q - V_0 C\right) = -\frac{t}{RC} + k$$

$$\left(q - V_0 C\right) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

Con la condizione q=0 a t=0

$$q(t) = V_0 C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Se il condensatore è a facce piane parallele e circolari



S area delle armature

Il campo elettrico nel condensatore vale

$$E(t) = \frac{q(t)}{\varepsilon_0 S} = \frac{V_0 C}{\varepsilon_0 S}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

LA LEGGE DI AMPERE-MAXWELL

Allo stato attuale sappiamo che il campo elettrico ***E*** e magnetico ***B*** sono legati da una legge (Faraday-Henry) che correla la circuitazione di ***E*** lungo una linea chiusa ***L*** alla variazione del flusso di ***B*** attraverso una superficie che ha ***L*** come contorno:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

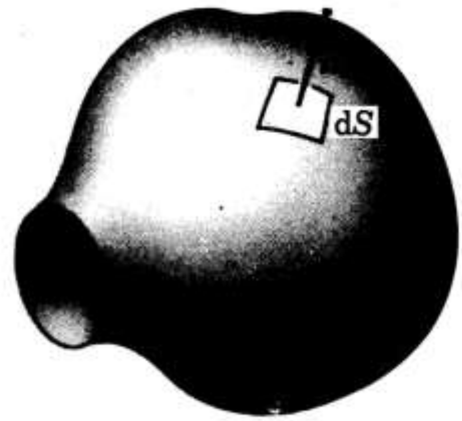
Per quel che riguarda la circuitazione di ***B*** lungo una linea chiusa ***L*** al momento abbiamo trovato una legge (Ampere) che la lega alla corrente concatenata (cioè al flusso del vettore densità di corrente $\vec{j}$ attraverso una superficie con contorno ***L***:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_L = \mu_0 \int_{S(L)} \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

Vediamo come questa legge si mostri non valida per campi dipendenti dal tempo !

Se prendiamo una superficie ***S*** che ha come contorno la curva chiusa ***L*** e restringiamo ***L*** fino a tendere ad un punto, la circuitazione di ***B*** tende a zero

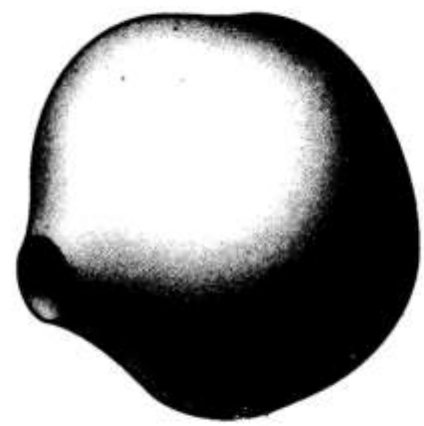
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$



(a)

e quindi dalla <u>legge di Ampere</u>

$$\mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$



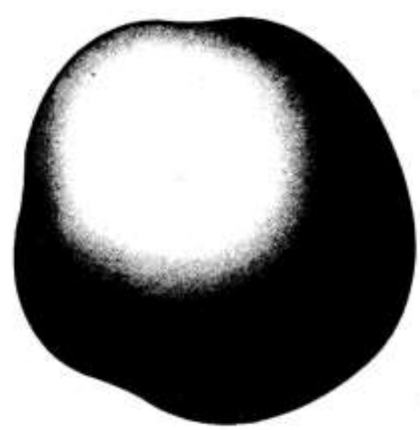
(b)

Ma dal principio di conservazione della carica abbiamo visto che

$$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

solo nel caso di campo elettrico statico.

<u>***Quindi nel caso di campo E(t) la legge di Ampere arriva ad assurdo.***</u>



(c)

Figura 27.10 Superficie delimitata dalla linea L. Quando la linea L si riduce ad un punto, la superficie diviene chiusa.

Possiamo superare l'assurdo se ricordiamo che il principio di conservazione della carica raggiunge il risultato:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}\right] = 0$$

Se sostituiamo questo termine di ***corrente "generalizzata"*** nella <u>legge di Ampere</u> otteniamo un risultato formalmente valido sia per campi statici che dinamici:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[\int_{S(L)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S(L)} \vec{E} \cdot d\vec{S}\right]$$

Tale relazione prende il nome di <u>legge di Ampere-Maxwell</u> e di fatto
lega la circuitazione di B lungo una curva chiusa L al flusso di cariche (corrente) attraverso una superficie S che ha L come contorno e alla variazione del flusso del campo elettrico attraverso la stessa superficie.

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{S(L)} \mu_0 \vec{j}\cdot d\vec{S} + \int_{S(L)} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

La quantità

$$\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = I_{Spostamento}$$

Ha le dimensioni di una corrente, gioca il ruolo di una corrente nell’equazione che dà la conservazione della carica e viene chiamata ***corrente di spostamento***

<u>di fatto non è un moto di cariche</u> ma un effetto dei campi ***E*** e ***B*** variabili nel tempo e correlati.

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(L)} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)\cdot d\vec{S}$$

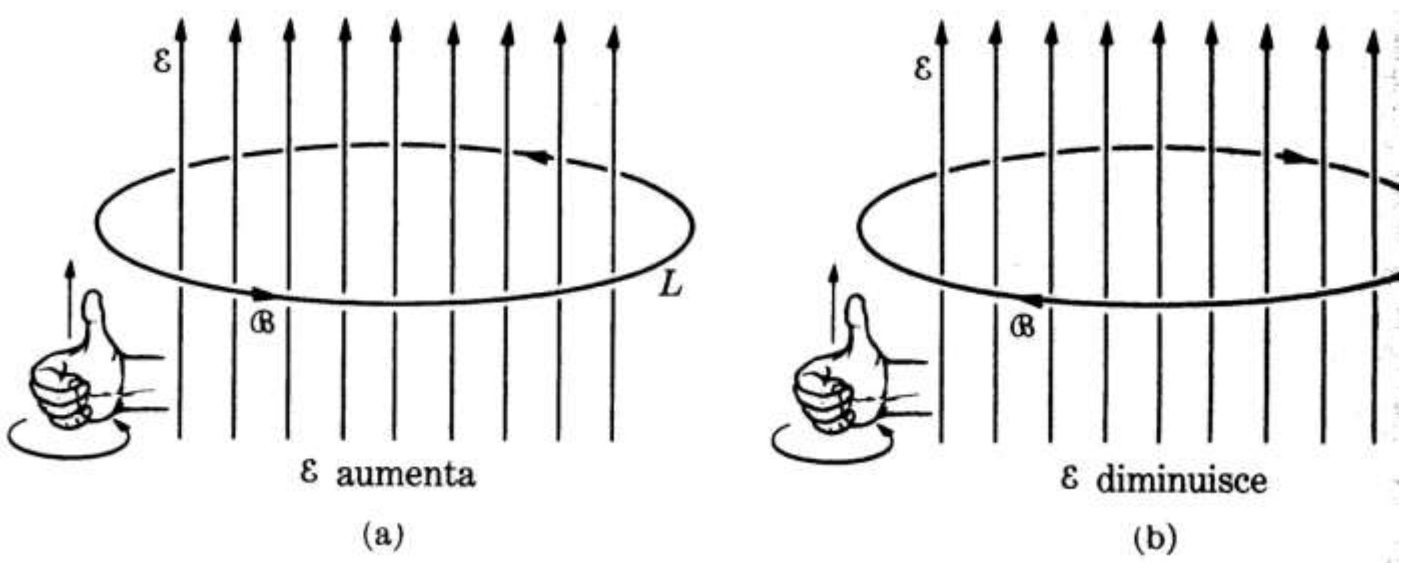
La quantità

$$\left[\int_{S(L)} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)\cdot d\vec{S} \right]$$

è una corrente generalizzata

In conclusione (nel vuoto in una regione di spazio priva di cariche):

un campo elettrico variabile nel tempo comporta l’esistenza, nella stessa regione dello spazio, di un campo magnetico tale che la circuitazione del campo magnetico lungo un percorso chiuso arbitrario sia proporzionale alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo elettrico attraverso una superficie delimitata dal percorso stesso.



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

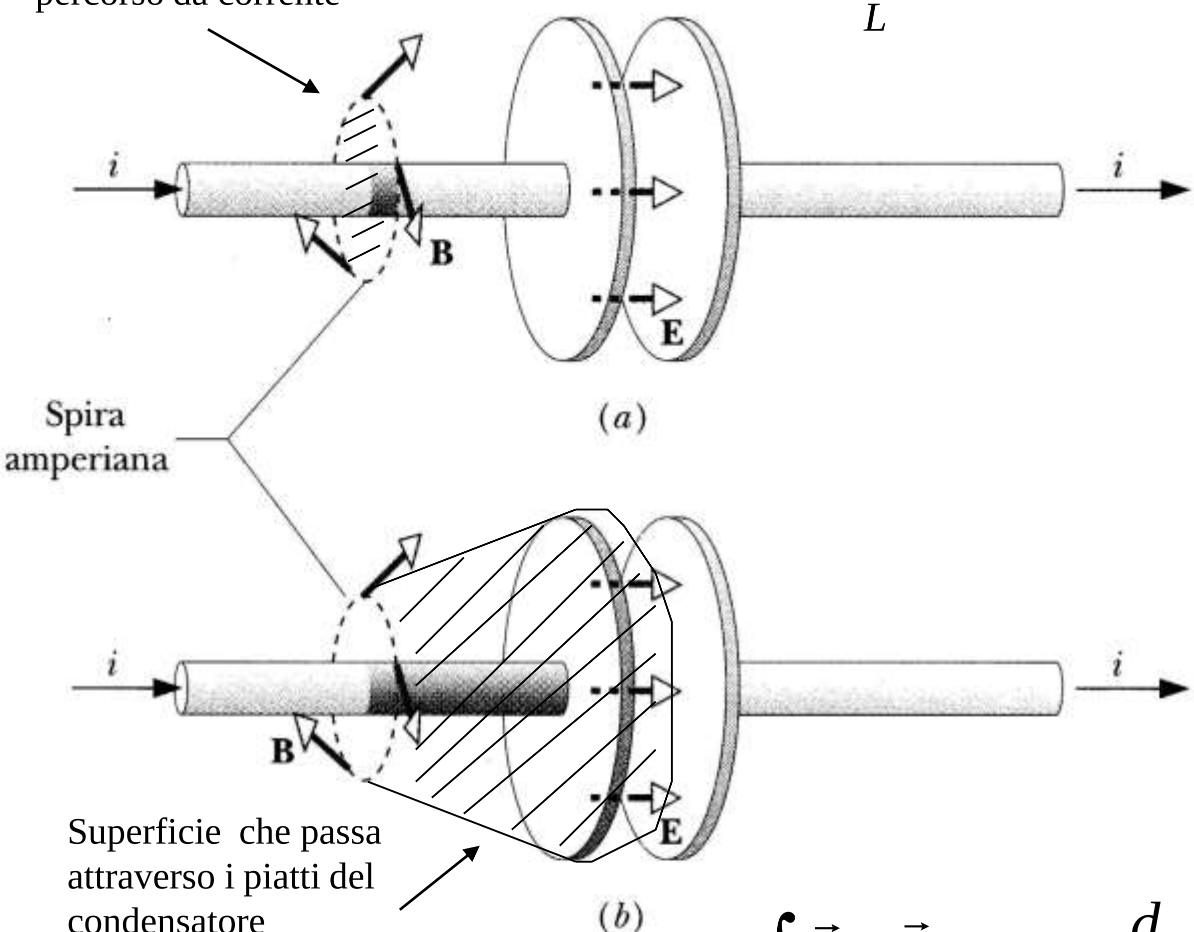
Esempio

Carica o scarica di un condensatore a facce piane circolari e parallele.

Analizziamo cosa succede ai campi dentro le armature.

Superficie attraverso la quale passa il filo percorso da corrente

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

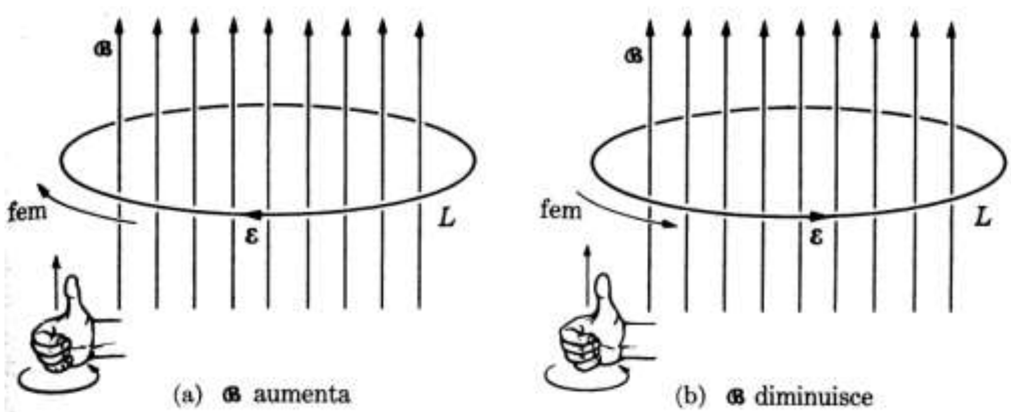


Superficie che passa attraverso i piatti del condensatore

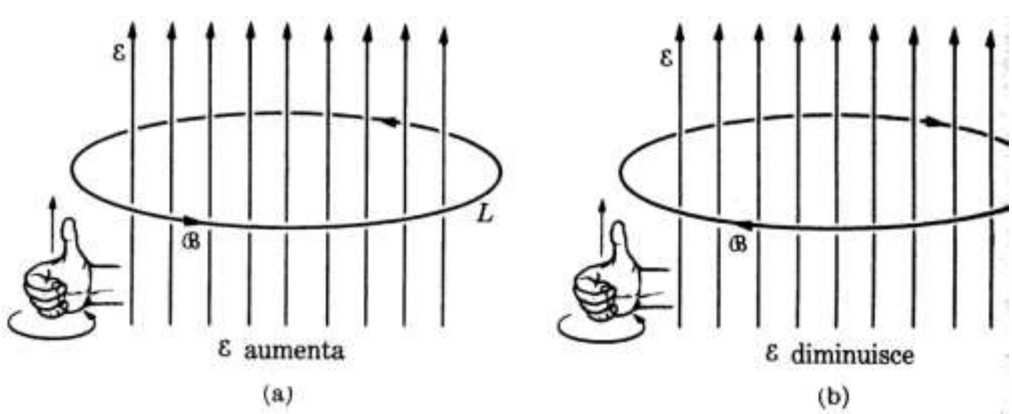
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Notare l'analogia e la simmetria tra le leggi di Faraday-Henry e Ampere-Maxwell in assenza di correnti!

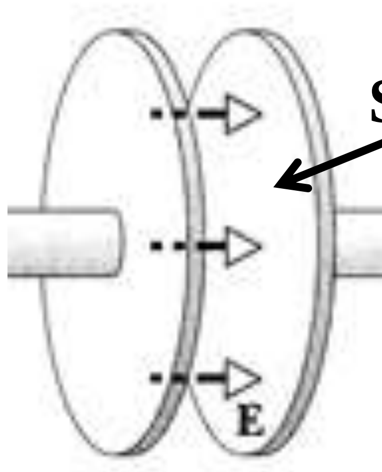
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$



Carica di un condensatore con il vuoto tra le armature è a facce piane parallele e circolari sottoposto ad un generatore V_0 in un circuito con resistenza R



S area delle armature

La carica sulle armature e la corrente nel circuito:

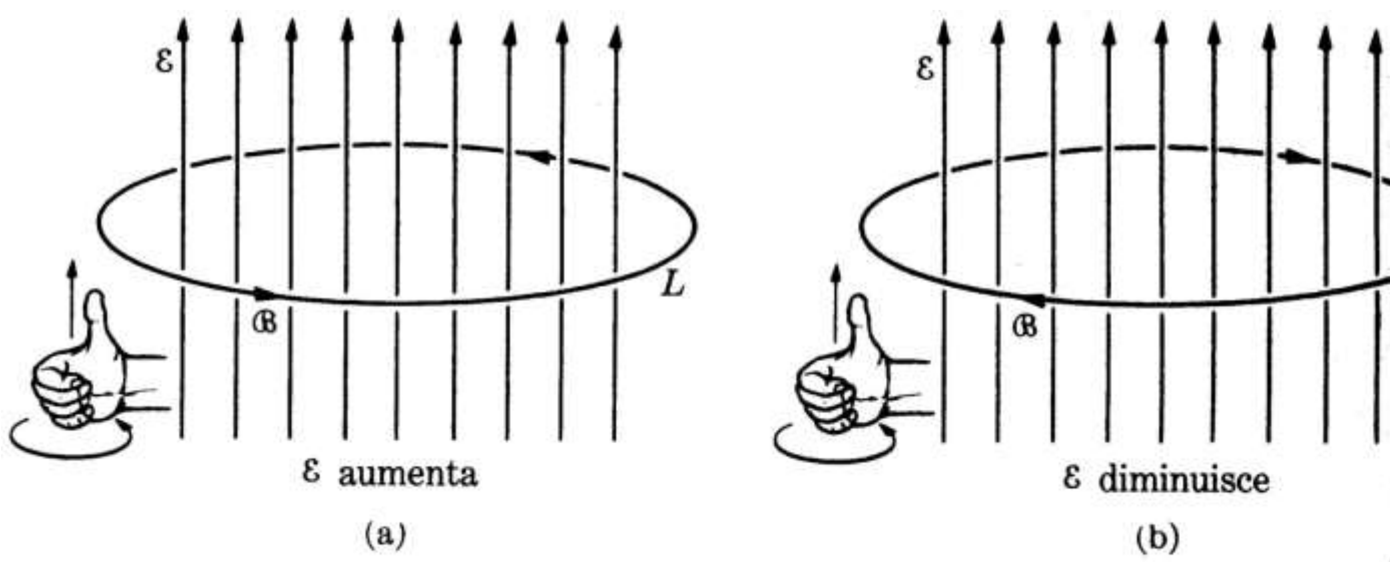
$$q(t) = V_0 C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Il campo elettrico nel condensatore vale

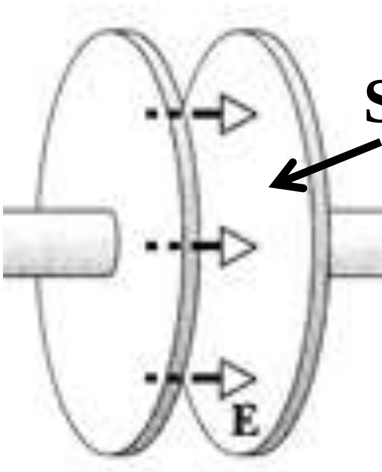
$$E(t) = \frac{q(t)}{\varepsilon_0 S} = \frac{V_0 C}{\varepsilon_0 S}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Secondo la legge di Ampere-Maxwell in assenza di cariche un campo elettrico variabile nel tempo comporta l’esistenza, nella stessa regione dello spazio, di un campo magnetico tale che la circuitazione del campo magnetico lungo un percorso chiuso arbitrario sia proporzionale alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo elettrico attraverso una superficie delimitata dal percorso stesso.



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Quindi nel condensatore si genera un campo magnetico con linee di campo circolari con centro sull'asse del condensatore



S area delle armature

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Il campo magnetico nel condensatore vale

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \pi r^2 \right]$$

$$B(t) = \mu_0 \frac{V_0}{RS} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{\pi r^2}{2\pi r}$$

$$se \quad r < R$$

$$B(t) = \mu_0 \frac{V_0}{RS} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{r}{2}$$

$$se \quad r > R$$

$$B(t) = \mu_0 \left(\frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right) \frac{1}{2\pi r}$$