Abbiamo visto che il problema ai valori iniziali e al bordo:

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 & \text{in } (0,+\infty)\times(0,+\infty) \\
\left.\begin{array}{r} u = u_0 \\ \partial_t u = u_1 \end{array}\right\} & \text{in } (0,+\infty),\ t=0 \\
u = g & x=0,\ t\in(0,+\infty)
\end{cases}
\quad \text{dato al bordo}
$$

ammette soluzione che dipende dai dati u_0, u_1, g.

Proviamo a sostituire alla condizione al bordo $u=g$ su $\{x=0\}$ una condizione che assegni il valore di $\partial_x u$ sul bordo:

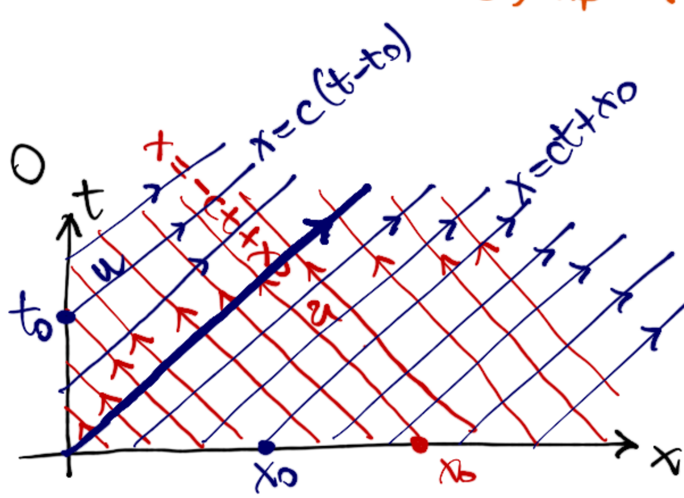
$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 & \text{in } (0,+\infty)\times(0,+\infty) \\
\left.\begin{array}{r} u = u_0 \\ \partial_t u = u_1 \end{array}\right\} & \text{in } (0,+\infty),\ t=0 \\
\partial_x u = h & x=0,\ t\in(0,+\infty)
\end{cases}
\quad \text{nuovo dato al bordo}
$$

$h = h(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

Fattorizziamo:

$$
(\partial_t - c\partial_x)\underbrace{(\partial_t + c\partial_x)u}_{v} = 0
$$

$$
\begin{cases}
\partial_t v - c\partial_x v = 0 \\
\partial_t u + c\partial_x u = v \quad (*)
\end{cases}
$$



Prescriviamo il dato iniziale su v:

$$v(x,0) = \partial_t u(x,0) + c\,\partial_x u(x,0)$$
$$= u_1(x) + c\,u_0'(x)$$

$$\Rightarrow \quad v(x,t) = u_1(x+ct) + c\,u_0'(x+ct).$$

Per trasportare successivamente u lungo le caratteristiche blu abbiamo bisogno di ricostruire il valore di u lungo l'asse $\{x=0\}$ (questo serve per definire la soluzione nella regione $\{x<ct\}$).

Dall'espressione per u, cioè $(*)$, osserviamo che:

$$\partial_t u(0,t) + \underbrace{c\,\partial_x u(0,t)}_{\substack{=h(t)\\ \text{condizione al bordo}}} = \underbrace{v(0,t)}_{=u_1(ct)+c\,u_0'(ct)}$$

$$\partial_t u(0,t) = u_1(ct) + c\,u_0'(ct) - c\,h(t)$$

$$\int_0^t \partial_s u(0,s)\,ds = \int_0^t \left[u_1(cs) + c\,u_0'(cs) - c\,h(s)\right] ds$$

$$u(0,t) - \underbrace{u(0,0)}_{=u_0(0)} \underset{\substack{cs=:\xi\\ c\,ds=d\xi}}{=} \frac{1}{c}\int_0^{ct} u_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\cancel{c}}\cancel{c}\int_0^{ct} u_0'(\xi)\,d\xi - c\int_0^t h(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^{ct} u_1(\xi)\,d\xi + u_0(ct) - \cancel{u_0}(0) - c\int_0^t h(s)\,ds$$

da cui:

$$u(0,t) = \frac{1}{c}\int_0^{ct} u_1(\xi)\,d\xi + u_0(ct) - c\int_0^t h(s)\,ds.$$

Noto questo valore, si può integrare u lungo le caratteristiche anche nella regione $\{x < ct\}$ esattamente come fatto nel caso della condizione al bordo $u = g$. Formalmente, tutto funziona come se si ponesse

$$g(t) = \frac{1}{c}\int_0^{ct} u_1(\xi)\,d\xi + u_0(ct) - c\int_0^t h(s)\,ds.$$

<u>Def.</u> Data una PDE

$$F\left(\{D^\alpha u\}_\alpha, u, x, t\right) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,+\infty)$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, se su $\partial\Omega$ viene assegnata una condizione del tipo:

$$u = g \quad \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty)$$

si parla di condizione (al bordo) di Dirichlet.

Se invece su $\partial\Omega$ viene assegnata una condizione del tipo:

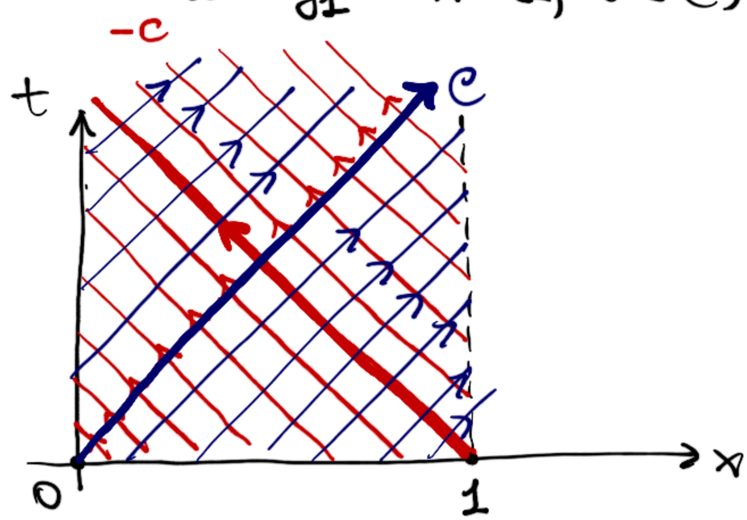
$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty),$$

essendo $\frac{\partial u}{\partial n}$ la derivata di u lungo la direzione normale a $\partial\Omega$, si parla di condizione (al bordo) di Neumann.
Quando $g=0$ oppure $h=0$ si parla di condizioni omogenee.

Equazione delle onde su un intervallo limitato

Consideriamo come prototipo l'intervallo $\Omega = (0,1)$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 & \text{in } (0,1)\times(0,+\infty) \\ \left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ \partial_t u &= u_1 \end{aligned}\right\} & \text{in } (0,1),\ t=0 \\ u = g_0 & x=0,\ t\in(0,+\infty) \\ u = g_1 & x=1,\ t\in(0,+\infty) \end{cases}$$



dove $g_0, g_1 : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ sono funzioni assegnate del tempo.

Per fissare le idee ci focalizziamo sul caso di condizioni al bordo di Dirichlet sia in $x=0$ sia in $x=1$.

Proviamo ad attaccare il problema mediante fattorizzazione:

$$(\partial_t - c\partial_x)\underbrace{(\partial_t + c\partial_x)u}_{v} = 0$$

da cui:

$$\begin{cases} \partial_t v - c\partial_x v = 0 & \text{in } (0,1)\times(0,+\infty) \\ v = u_1 + c u_0' & \text{in } (0,1),\ t=0 \\ v = g_1' + c\partial_x u & x=1,\ t\in(0,+\infty) \end{cases}$$

non è nota in $x=1$

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = v & \text{in } (0,1)\times(0,+\infty) \\ u = u_0 & \text{in } (0,1),\ t=0 \\ u = g_0 & x=0,\ t\in(0,+\infty) \end{cases}$$

Oss. Il problema per v richiede di conoscere lungo il bordo $\{x=1\}$ sia u sia $\partial_x u$, il che non si può ottenere né con una condizione di Dirichlet né con una condizione di Neumann. Invertendo la fattorizzazione iniziale la questione non si risolve, semplicemente si sposta sul bordo $\{x=0\}$.

Soluzione per serie

È basato sulla ricerca di u mediante uno sviluppo in serie. Funziona in dimensione spaziale n qualsiasi, perciò lo consideriamo per $n \in \mathbb{N}$ generico:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\ \left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ \partial_t u &= u_1 \end{aligned}\right\} & \text{in } \Omega,\ t=0 \\ u = g & \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty). \end{cases}$$

Per semplicità, considereremo il caso $g=0$ (Dirichlet omogeneo).