3. Sia $u(t)$ una funzione a valori reali che soddisfi la seguente equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = f(u(t)), \quad t \geq 0,$$

ove $f(u)$ è una funzione differenziabile. Sia $\overline{u}$ un punto di equilibrio dell'equazione differenziale per $u(t)$. Linearizzando l'equazione differenziale per $u(t)$ in un intorno di $\overline{u}$, si studi la stabilità del punto di equilibrio $\overline{u}$ in funzione del segno di $f'(\overline{u})$.

Considerando un intorno del punto di equilibrio $\overline{u}$, introduciamo l'ansatz

$$u(t) = \overline{u} + \eta(t) \qquad (*)$$

con $\eta(t)$ piccola perturbazione dello stato stazionario.
Sostituendo $(*)$ nella ODE assegnata, troviamo:

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{u}+\eta(t)\right) = f\left(\overline{u}+\eta(t)\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\eta(t) = f\left(\overline{u}+\eta(t)\right).$$

Inoltre, linearizzando il termine $f\left(\overline{u}+\eta(t)\right)$, ricordando che $\eta(t)$ è una piccola perturbazione, si ha:

$$f\left(\overline{u}+\eta(t)\right) = f(\overline{u}) + f'(\overline{u})\eta(t) + \mathcal{O}(\eta^2) \approx f(\overline{u}) + f'(\overline{u})\eta(t).$$

Quindi, in prima approssimazione, si ha

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = \underbrace{f(\overline{u})}_{=0} + f'(\overline{u})\eta(t) \qquad (**)$$

(in quanto $\overline{u}$ è punto di equilibrio)

N.B. Tanto (*) quanto (**) sono validi fintanto che $\eta(t)$ è, in valore assoluto, suff. piccola.

In definitiva, $\eta(t)$ è soddisfa la ODE

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = f'(\bar{u})\,\eta(t),$$

da cui:

- se $f'(\bar{u}) < 0$ allora $\eta(t) \to 0$ e il punto di equilibrio $\bar{u}$ sarà (in prima approssimazione) asintoticamente stabile;
- se $f'(\bar{u}) > 0$ allora $\eta(t)$ divergerà e il punto di equilibrio $\bar{u}$ sarà (in prima approssimazione) instabile
- se $f'(\bar{u}) = 0$ allora per poter giungere a una conclusione sulla natura del punto di equilibrio $\bar{u}$ dovremmo considerare anche termini di ordine $O(\eta^k)$ con $k \geq 2$ nell'approssimazione di $f(\bar{u}+\eta(t))$.

1. La dinamica di un bioreattore è descritta dal seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) = \overset{1}{\cancel{\gamma}} \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \eta_i\, S_i(t)\, N(t) - \overset{1}{\cancel{\nu}} N(t), & \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_i(t) = \sigma_i - \overset{1}{\cancel{\mu_i}} S_i(t) - \eta_i\, S_i(t)\, N(t), & t > 0, \quad i = 1, \dots, I. \\ N(0) = N_0 > 0, \quad S_i(0) = S_{0i} > 0, & \end{cases}$$

$$\gamma = 1, \quad \nu = 1, \quad \mu_i = 1\ \forall i \in \{1, \dots, I\} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{I} \eta_i\, \sigma_i > 1. \quad (*)$$

(a) Si dimostri che

$$\lim_{t \to \infty} \left(N(t) + \sum_{i=1}^{I} S_i(t) \right) = \sum_{i=1}^{I} \sigma_i .$$

Sommando tra loro le ODE assegnate, introducendo la notazione

$$M(t) = N(t) + \sum_{i=1}^{I} S_i(t),$$

troviamo

$$\frac{d}{dt} M(t) = \sum_{i} \sigma_i - M(t).$$

Risolvendo tale ODE, soggetta al dato iniziale

$$M(0) = N_0 + \sum_{i=1}^{I} S_{0i},$$

si trova

$$M(t) = \sum_{i=1}^{I} \sigma_i + \left(M(0) - \sum_{i=1}^{I} \sigma_i \right) e^{-t},$$

da cui

$$\lim_{t \to \infty} M(t) = \sum_{i=1}^{I} \sigma_i \, .$$

(b) Si dimostri che esiste un unico punto di equilibrio di componenti reali e positive $\overline{N}$, $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_I$.

Si ha

$$\begin{cases} \overline{N} \left(\sum_{i=1}^{I} y_i \overline{S}_i - 1 \right) = 0 \\ \sigma_i - (1 + y_i \overline{N}) \overline{S}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, I \end{cases}$$

con $\overline{N}, \overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_I \in \mathbb{R}_+^*$; di qui

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{I} y_i \overline{S}_i = 1, & (**) \\ \overline{S}_i = \dfrac{\sigma_i}{1 + y_i \overline{N}}, \quad i = 1, \ldots, I . & (***) \end{cases}$$

Si noti che perché esiste $\overline{N} \in \mathbb{R}_+^*$ che soddisfi le relazioni di cui sopra è necessario che la condizione (*) sia soddisfatta. In effetti, dal momento che

$$\overline{S}_i = \frac{\sigma_i}{1+\gamma_i \overline{N}} < \sigma_i \quad \forall\, \overline{N} \in \mathbb{R}_+^*$$

si ha

$$\sum_{i=1}^{I} \gamma_i \overline{S}_i < \sum_{i=1}^{I} \gamma_i \sigma_i$$

e, quindi, se la condizione (*) non fosse soddisfatta allora $\sum_{i=1}^{I} \gamma_i \overline{S}_i < 1$ e, di conseguenza, (**) non potrebbe essere soddisfatta.
Dal momento che ciascuna $\overline{S}_i$ è una funzione monotona decrescente di $\overline{N}$ (vedasi (***)), se la condizione (*) è soddisfatta, esisterà un unico $\overline{N} \in \mathbb{R}_+^*$ tale che la relazione (**) sia soddisfatta; di conseguenza, anche le singole $\overline{S}_i$ saranno univocamente determinate.
In definitiva, esiste un unico punto di equilibrio di componenti reali e positive.

(c) Dando per assunto che per ogni $t > 0$ si abbia $N(t) > 0$ e $S_i(t) > 0$ per tutti i valori di i, si utilizzi la funzione

$$V(N, S_1, \dots, S_I) := \overline{N} \ln\left(\frac{\overline{N}}{N}\right) + (N - \overline{N}) + \sum_{i=1}^{I} \left[\overline{S}_i \ln\left(\frac{\overline{S}_i}{S_i}\right) + (S_i - \overline{S}_i)\right]$$

per dimostrare che

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \overline{N} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} S_i(t) = \overline{S}_i \quad \text{per ogni} \quad N_0 > 0 \quad \text{e} \quad S_{0i} > 0, \quad i = 1, \dots, I,$$

dove $\overline{N}, \overline{S}_1, \dots, \overline{S}_I$ sono le componenti reali e positive del punto di equilibrio la cui esistenza è stata dimostrata al punto precedente.

La funzione $V(N, S_1, \dots, S_I)$ in oggetto è una funzione di Lyapunov in senso stretto relativa al punto di equilibrio $(\overline{N}, \overline{S}_1, \dots, \overline{S}_I)$ definita su

$$Q := \{(N, S_1, \dots, S_I) \in \mathbb{R}^{I+1} : N > 0, S_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, I\}.$$

Infatti, si ha:

i) $V \in C^1(Q)$ ✓

ii) $V(\overline{N}, \overline{S}_1, \dots, \overline{S}_I) = 0$ ✓

iii) $V(N, S_1, \dots, S_I) > 0$ ✓ $\quad \forall (N, S_1, \dots, S_I) \in Q \setminus \{\overline{N}, \overline{S}_1, \dots, \overline{S}_I\}$

Dim. (iii) Ricordando la disuguaglianza logaritmica

$$\ln(x) > 1 - \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},$$

dando per assunto che $N > 0$ e $S_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, I$, considerando $(N, S_1, \dots, S_I) \in Q \setminus \{\overline{N}, \overline{S}_1, \dots, \overline{S}_I\}$, si trova:

$$\overline{N} \ln\left(\frac{\overline{N}}{N}\right) + (N - \overline{N}) > \overline{N}\left(1 - \frac{N}{\overline{N}}\right) + (N - \overline{N}) = 0$$

$$\left[\overline{S}_i \ln\left(\frac{\overline{S}_i}{S_i}\right) + (S_i - \overline{S}_i)\right] > \overline{S}_i\left(1 - \frac{S_i}{\overline{S}_i}\right) + (S_i - \overline{S}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, I$$

Quindi,

$$V(N, S_1, \dots, S_I) > 0 \ \forall (N, S_1, \dots, S_I) \in Q \setminus \{\overline{N}, \overline{S}_1, \dots, \overline{S}_I\}$$

$\boxtimes$

iv) $\frac{d}{dt} V(N(t), S_1(t), \dots, S_I(t)) < 0$

per ogni traiettoria uscente da

$$(N_0, S_{10}, \dots, S_{I0}) \in Q \setminus \{\overline{N}, \overline{S}_1, \dots, \overline{S}_I\}.$$

Dim. (iv) Notiamo che

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{dN}{dt}\frac{d}{dN} V + \sum_{i=1}^{I} \frac{dS_i}{dt}\frac{d}{dS_i} V.$$

Inoltre

$$\frac{d}{dN} V = 1 - \frac{\bar{N}}{N} = \frac{1}{N}(N - \bar{N}),$$

$$\frac{d}{dS_i} V = 1 - \frac{\bar{S}_i}{S_i} = \frac{1}{S_i}(S_i - \bar{S}_i).$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt} V(t) = (N - \bar{N}) \underbrace{\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}}_{= \sum_{i=1}^{I} y_i S_i - 1} + \sum_{i=1}^{I} (S_i - \bar{S}_i) \underbrace{\frac{1}{S_i}\frac{dS_i}{dt}}_{= \frac{\sigma_i}{S_i} - (1 + y_i N)}$$

(dalla ODE per $N(t)$ ricordando che $N(t) > 0$)   (dalla ODE per $S_i(t)$ ricordando che $S_i(t) > 0$)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} V(t) = \left(\sum_{i=1}^{I} y_i S_i - 1\right)(N - \bar{N}) + \sum_{i=1}^{I} \left[\frac{1}{S_i}(\sigma_i - S_i) - y_i N\right](S_i - \bar{S}_i)$$

...