Fisica II

Esercitazione 10

Alessandro Pedico
alessandro.pedico@polito.it

27/10/2022

Mutua induzione di 2 circuiti

Dati due circuiti *1* e *2* percorsi da corrente i_1 e i_2, possiamo definire:

$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_1} \vec{B}_2 \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_1} \left(\oint \frac{\mu_0 \, i_2}{4\,\pi} \frac{\overrightarrow{ds}_1 \text{ x } \hat{u}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma_1 = M_{1,2} \, i_2$$

$$\Phi_{2,1} = \int_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma_2 = \int_{\Sigma_2} \left(\oint \frac{\mu_0 \, i_1}{4\,\pi} \frac{\overrightarrow{ds}_2 \text{ x } \hat{u}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma_2 = M_{2,1} \, i_1$$

Tenendo conto dell’autoinduzione:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_{1,2} \, i_2 \qquad\qquad \Phi_2 = L_2 i_2 + M_{2,1} \, i_1$$

Politecnico di Torino

Mutua induzione di 2 circuiti

Energia magnetica di due circuiti accoppiati:

$$E_m = \frac{1}{2}\Phi_1 i_1 + \frac{1}{2}\Phi_2 i_2 =$$

$$= \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + \frac{1}{2}M_{2,1} i_2 i_1 + \frac{1}{2}M_{1,2} i_1 i_2$$

Si può dimostrare che $\mathbf{M_{1,2} = M_{2,1} = M}$ coefficiente di mutua induzione

Mutua induzione di n circuiti

Nel caso di n circuiti accoppiati, si generalizza l'espressione vista per 2 circuiti:

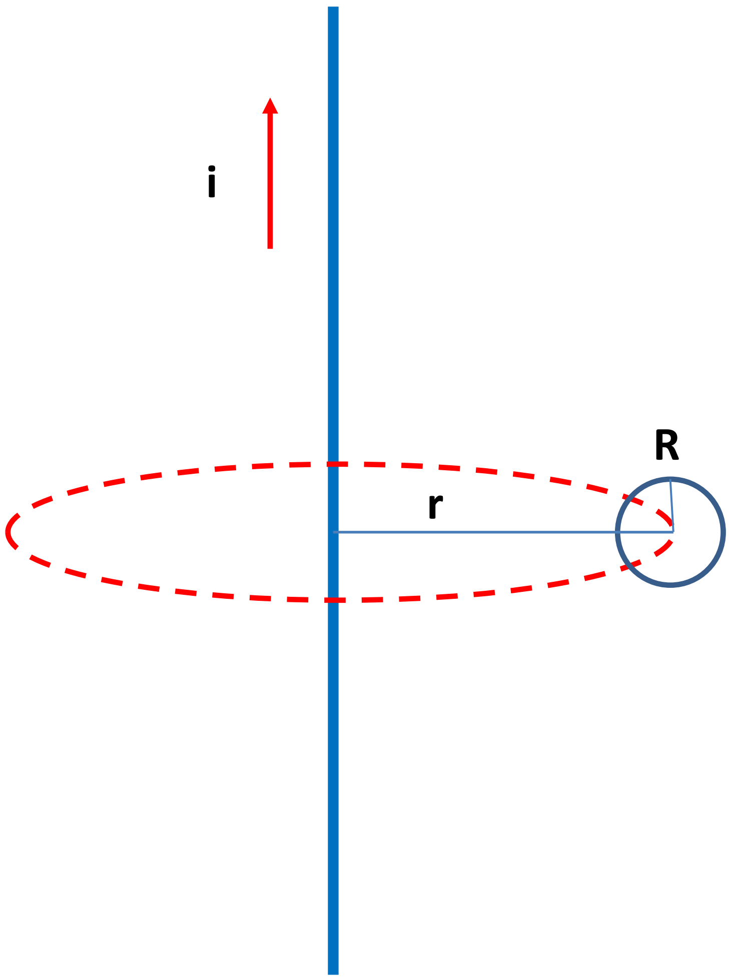
$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} \Phi_j i_j = \frac{1}{2}\sum_{j}\sum_{k} M_{j,k} i_j i_k$$

Dove: $M_{k,k} = L_K$ $\qquad \Phi_j = \sum_{1}^{n} M_{j,k} i_k$

Il flusso j-esimo rappresenta il flusso totale del campo magnetico attraverso il circuito j-esimo. È quindi necessario tenere conto della somma dei campi magnetici generati dai singoli circuiti.

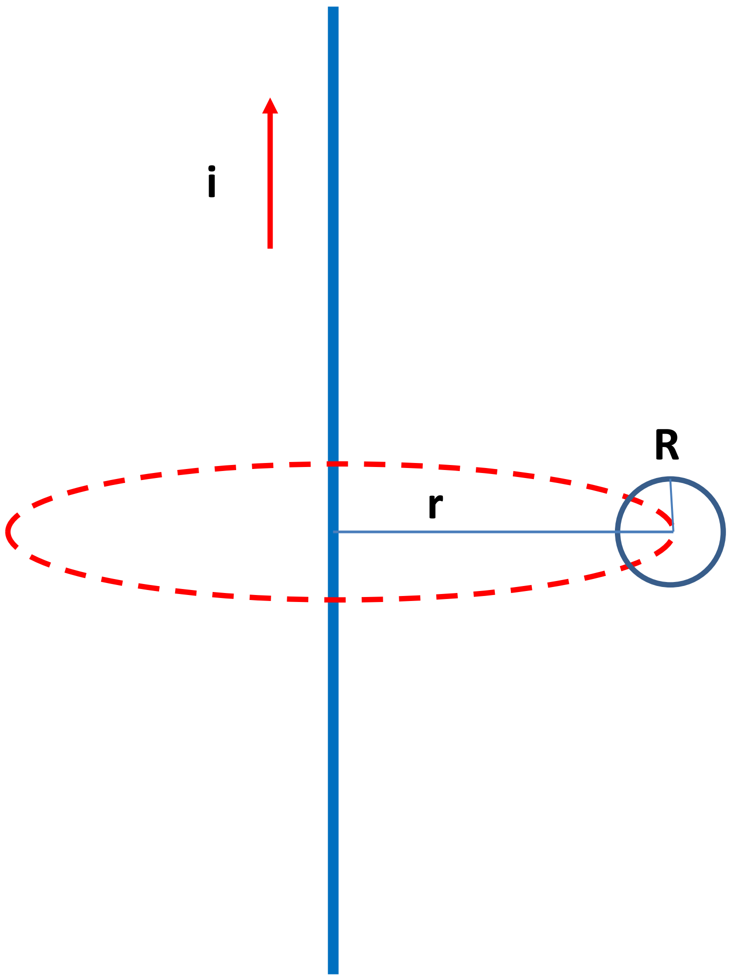
$$B = \sum_{1}^{n} B_k$$

Filo indefinito e spira circolare



Consideriamo un filo indefinito percorso da corrente *i*; una spira circolare di raggio $R = 1\ mm$ è posta a distanza $r = 1\ m$ dal filo. Calcolare il **coefficiente di mutua induzione**.

Filo indefinito e spira circolare



BIOT-SAVART $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0\, i}{2\,\pi\, r}\,\hat{u}_\phi$

$r \gg R$ ⇒ $B(R, r) \approx B(r)$

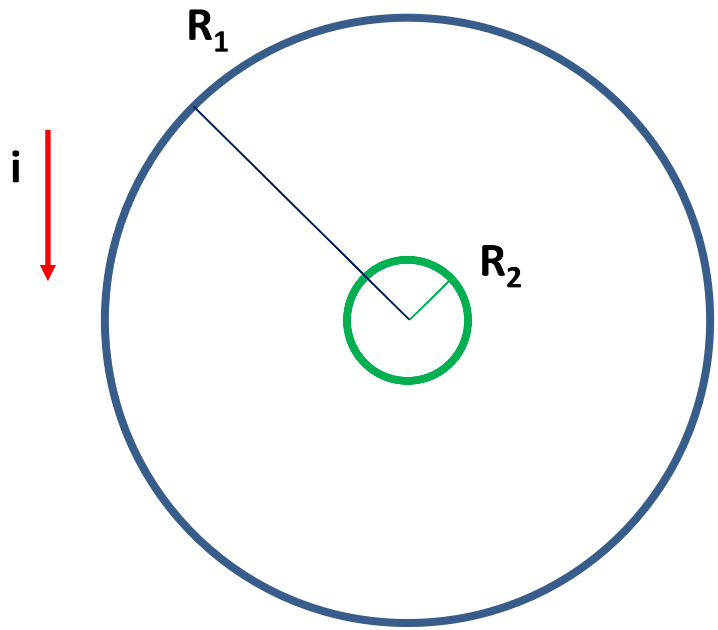
$$\Phi(B)_{spira} = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n\, d\Sigma = B \int d\Sigma =$$

$$= B(r)\,\Sigma = \frac{\mu_0\, i}{2\,\pi\, r}\,\pi\, R^2 = \frac{\mu_0\, i\, R^2}{2\, r}$$

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0\, R^2}{2\, r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (10^{-3})^2}{2 \cdot 1}$$

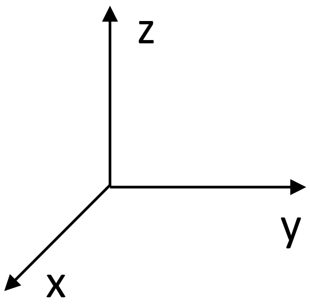
$$\boxed{M = \frac{\Phi}{i} = 6.28 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{H}}$$

Spire concentriche

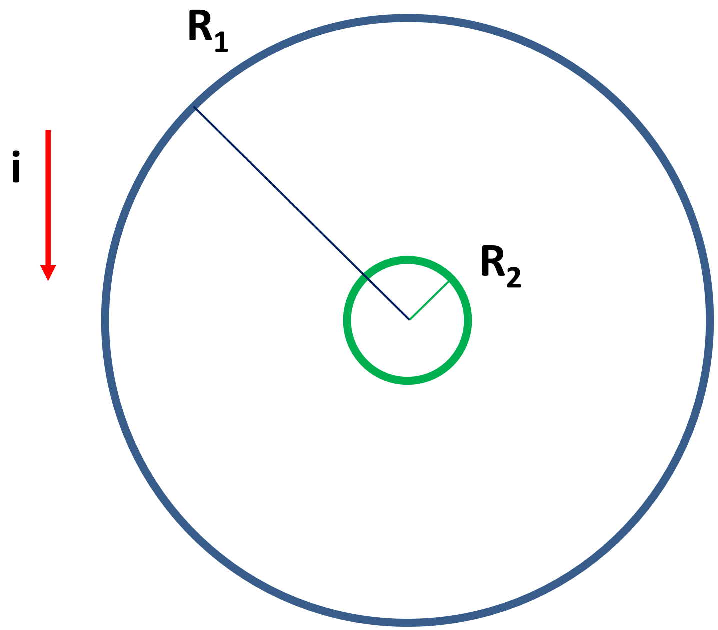


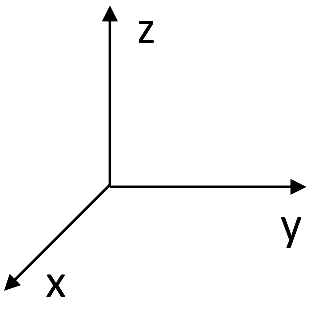
Consideriamo due spire circolari di raggio $R_1 = 1\ m$ e $R_2 = 1\ cm$; le spire sono concentriche e giacciono sullo stesso piano.

Calcolare il **coefficiente di mutua induzione**.



Spire concentriche





$$R_1 \gg R_2 \Rightarrow B(x,y,z) \approx B(x,0,0)$$

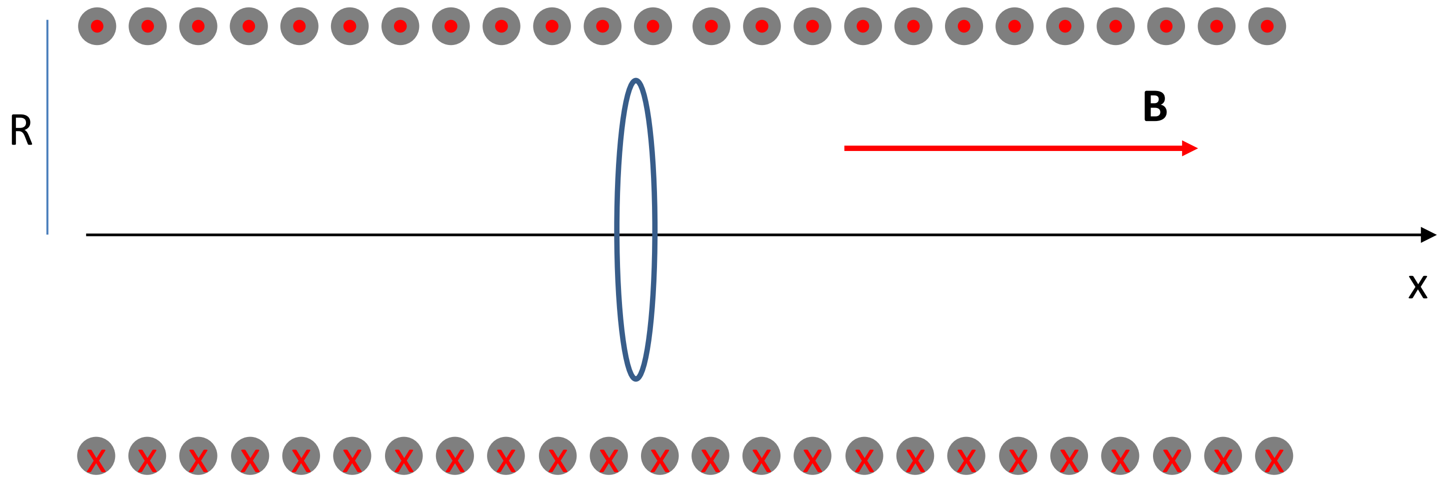
$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0\, i\, R_1^2}{2\,[R_1^2 + x^2]^{3/2}}\,\hat{u}_x$$

$$\Phi(B)_{spira} = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = B \int d\Sigma =$$

$$= B(0)\,\Sigma = \frac{\mu_0\, i}{2\,R_1}\,\pi R_2^2$$

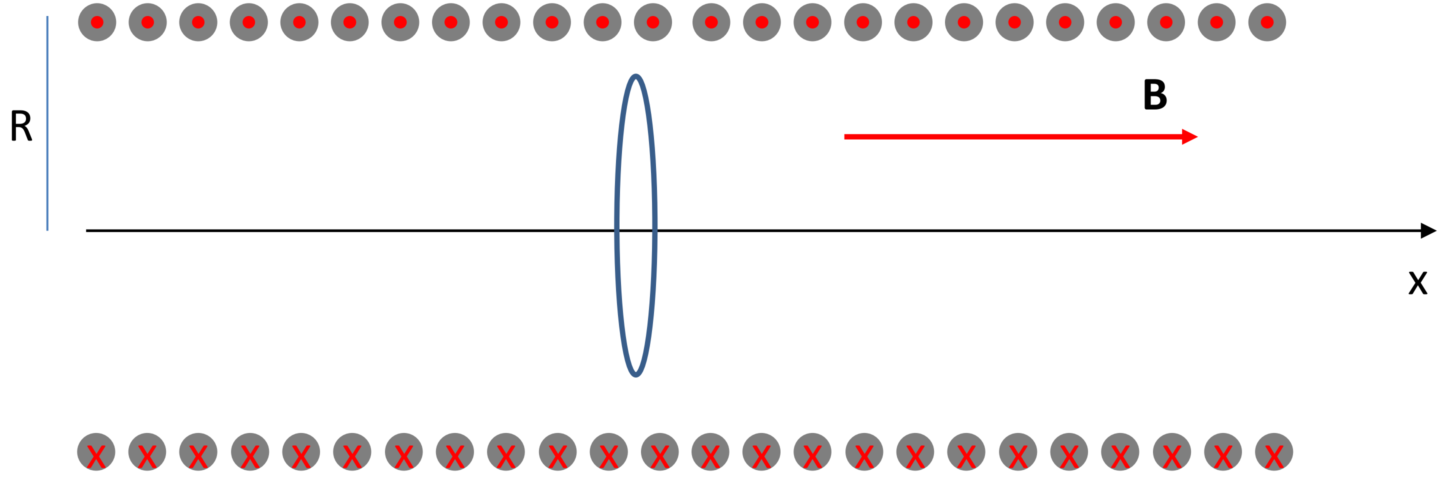
$$\boxed{M = \frac{\Phi}{i} = 19.7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{H}}$$

Solenoide e spira



Consideriamo un solenoide di lunghezza *l = 5 m*, costituito da *N = 500* spire; all'interno del solenoide è presente una spira circolare di diametro *d = 10 mm* con asse parallelo a quello del solenoide; calcolare il **coefficiente di mutua induzione**.

Solenoide e spira



Solenoide infinito

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N\, i}{l}\hat{u}_x$$

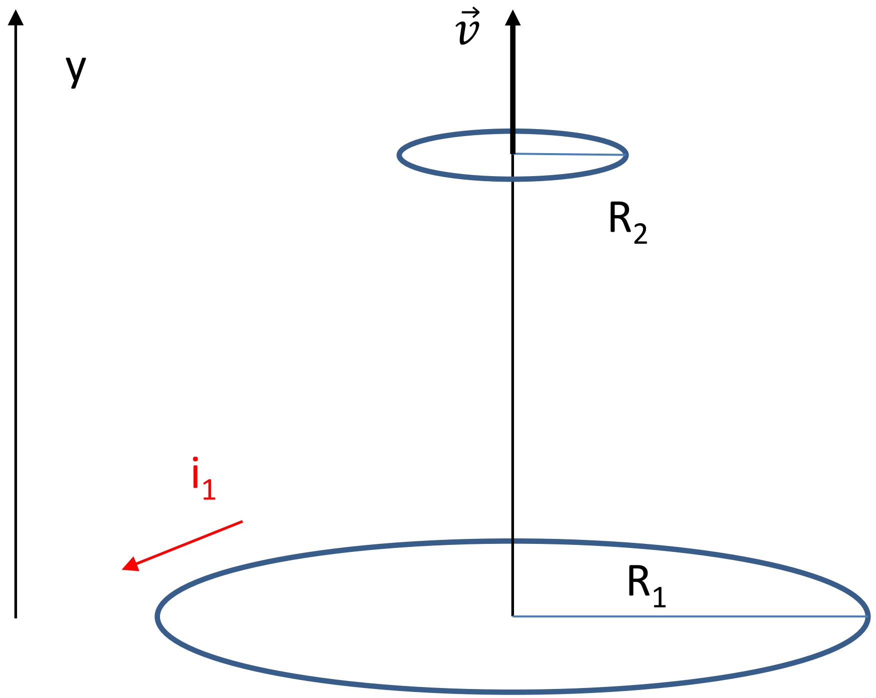
$$\Phi(B)_{spira} = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = B\int d\Sigma =$$

$$= B\,\Sigma = \frac{\mu_0\, N\, i}{l}\,\pi\,\frac{d^2}{4}$$

$$\boxed{M = \frac{\Phi}{i} = 9.87 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{H}}$$

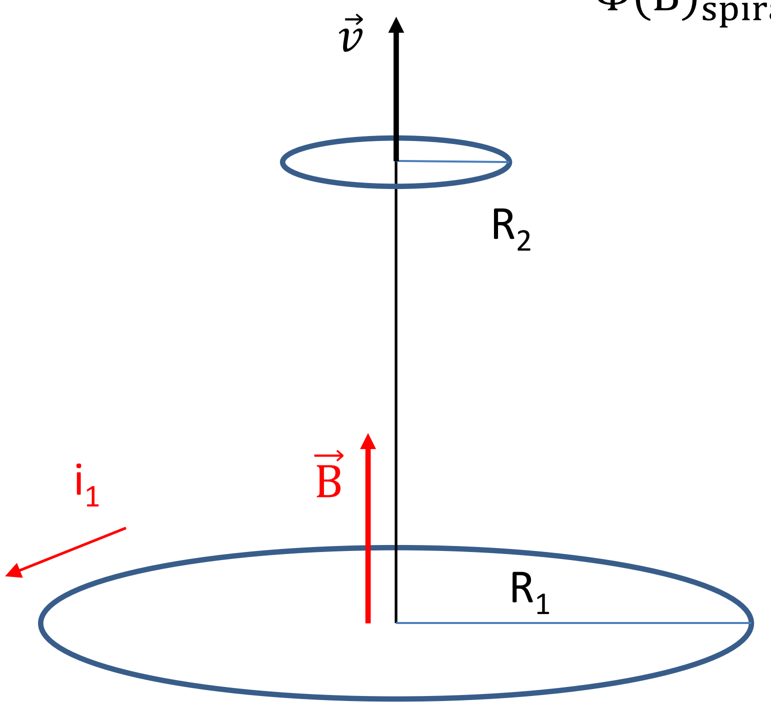
Spire accoppiate

Una spira conduttrice fissa di raggio $R_1 = 50\ cm$ è percorsa da una corrente $i_1 = 20\ A$. Sull'asse della spira è centrata una seconda spira conduttrice mobile avente raggio $R_2 = 3\ cm$ e resistenza elettrica **Z = 0.02 ohm**. Le due spire giacciono su piani paralleli e la spira mobile si allontana da quella fissa con una velocità $v = 0.02\ m/s$ partendo da una distanza $y = 0\ cm$ a $t = 0\ s$. Calcolare il coefficiente di mutua induzione del sistema e il contributo della forza elettromotrice indotta nella spira mobile dopo che è trascorso un tempo $t = 2\ s$.



Spire accoppiate

$$R_1 \gg R_2 \quad \Rightarrow \quad B(x, y, z) \approx B(0, y, 0) \qquad \vec{B}(y) = \frac{\mu_0\, i\, R_1^2}{2\,[R_1^2 + y^2]^{3/2}}\,\hat{u}_y$$



$$\Phi(B)_{spira} = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = B \int d\Sigma =$$

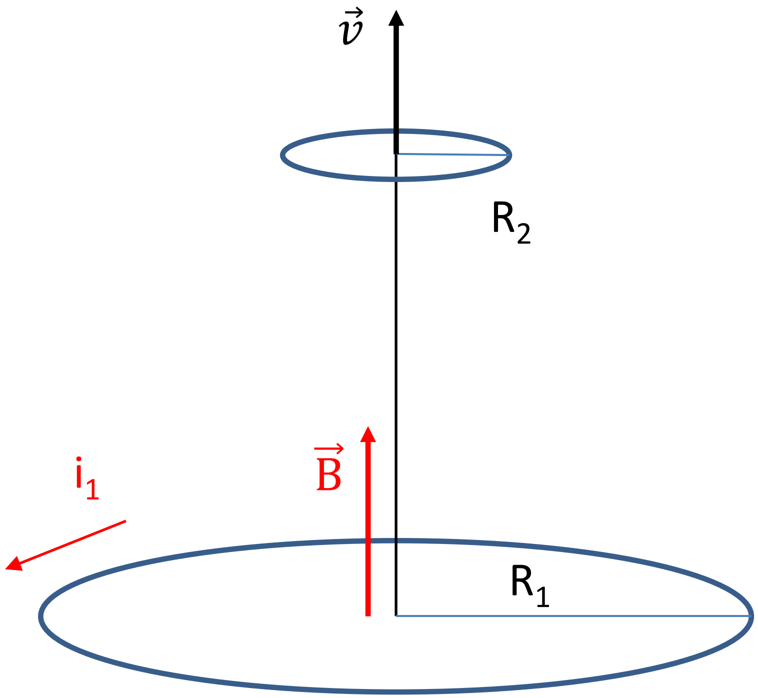
$$= B(y)\,\Sigma = \frac{\mu_0\, i\, R_1^2}{2\,[R_1^2 + y^2]^{3/2}}\,\pi R_2^2 \qquad y = v\,t$$

$$\boxed{M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0\,\pi R_1^2 R_2^2}{2\,[R_1^2 + v^2 t^2]^{3/2}}}$$

Nota bene: il coefficiente di mutua induzione **dipende dal tempo**

Spire accoppiate

$$\boxed{M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0\ \pi R_1^2 R_2^2}{2\ [R_1^2 + \ v^2 t^2]^{3/2}}}$$

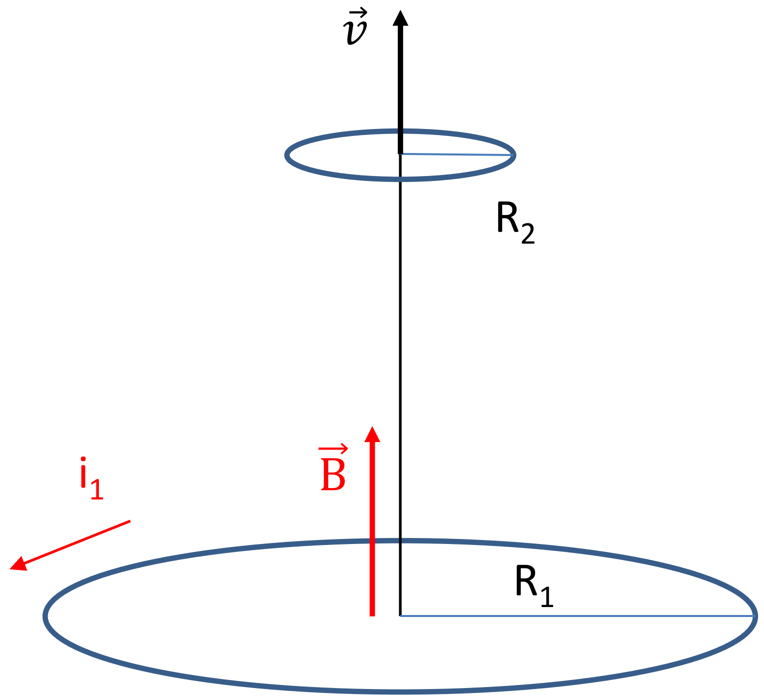


Per la legge di Faraday-Henry, abbiamo che:

$$\varepsilon_M = -\frac{d\Phi}{dt} = -i_1 \frac{dM}{dt}$$

Visto che i_1 non varia nel tempo, la forza elettromotrice indotta nella spira 2 è determinata dalla variazione di M

Spire accoppiate



$$\boxed{M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0\ \pi R_1^2 R_2^2}{2\,[R_1^2 +\ v^2 t^2]^{3/2}}}$$

$$\varepsilon_M = -\frac{d\Phi}{dt} = -i_1\frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{3}{2}\,\frac{\mu_0\ \pi R_1^2 R_2^2}{2\,[R_1^2 +\ v^2 t^2]^{5/2}}\ 2\,v^2 t$$

all’istante t = 2 s, abbiamo che:

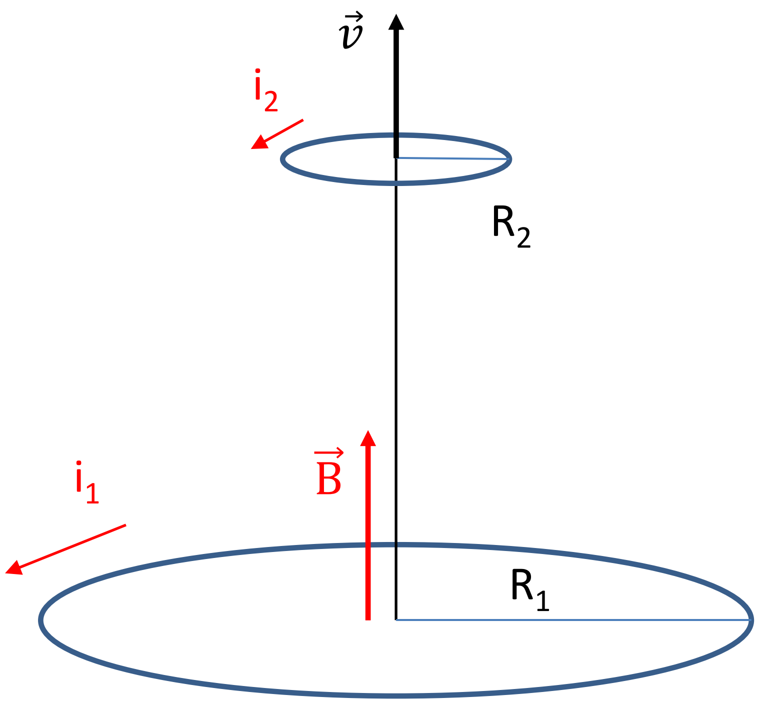
$$\varepsilon_M = 6.7\ \cdot 10^{-10}\ V$$

Spire accoppiate

Nel momento in cui inizia a scorrere una corrente nella spira 2, si innescherà un fenomeno di autoinduzione.

$$i_2 = \frac{\varepsilon_M}{Z} = -\frac{i_1}{Z}\frac{dM}{dt}$$

$$i_2 = \frac{i_1 3\,\mu_0\,\pi R_1^2 R_2^2 v^2 t}{2Z\,[R_1^2 + v^2t^2]^{5/2}} = 3.4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{A}$$



Il campo magnetico generato dalla spira 2 nel suo centro vale per t = 2s :

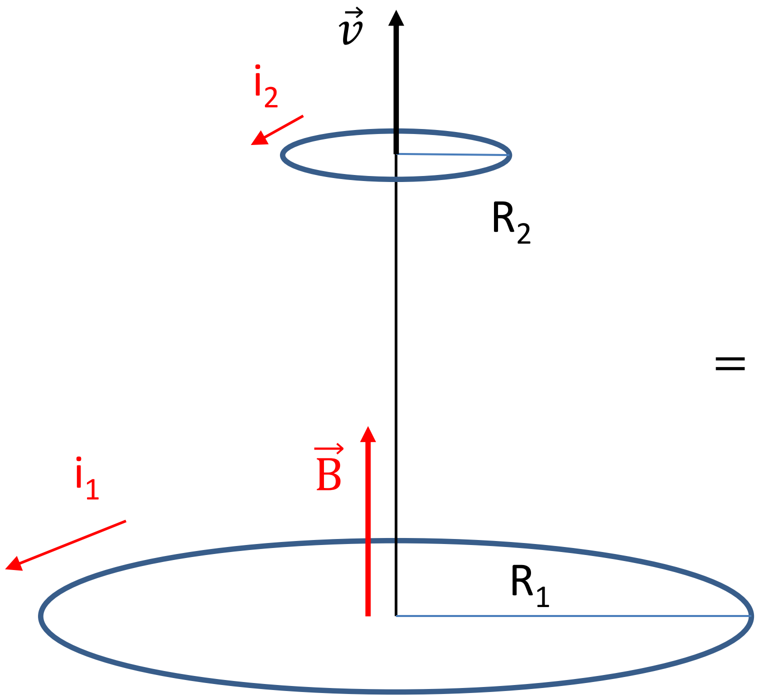
$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\,R_2} = \frac{\mu_0}{2\,R_2}\frac{i_1 3\,\mu_0\,\pi R_1^2 R_2^2 v^2 t}{2Z\,[R_1^2 + v^2t^2]^{5/2}} = 7 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{T}$$

Mentre quello generato dalla spira 1:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1 R_1^2}{2[R_1^2 + v^2t^2]^{\frac{3}{2}}} = 2.5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

Spire accoppiate

Ci accorgiamo, quindi, che il contributo dell'autoinduzione è del tutto trascurabile. Infatti nel centro della spira 2: $B = B_1 + B_2 \approx B_1$



Volendo comunque stimare la fem autoindotta, approssimiamo il campo magnetico autoindotto come uniforme su tutta la superficie della spira:

$$B_2 \approx \frac{\mu_0 i_2}{2R_2}$$

$$\varepsilon_A = -\frac{d\Phi}{dt} \approx -\frac{d(B_2 \pi R_2^2)}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi R_2}{2}\frac{di_2}{dt} =$$

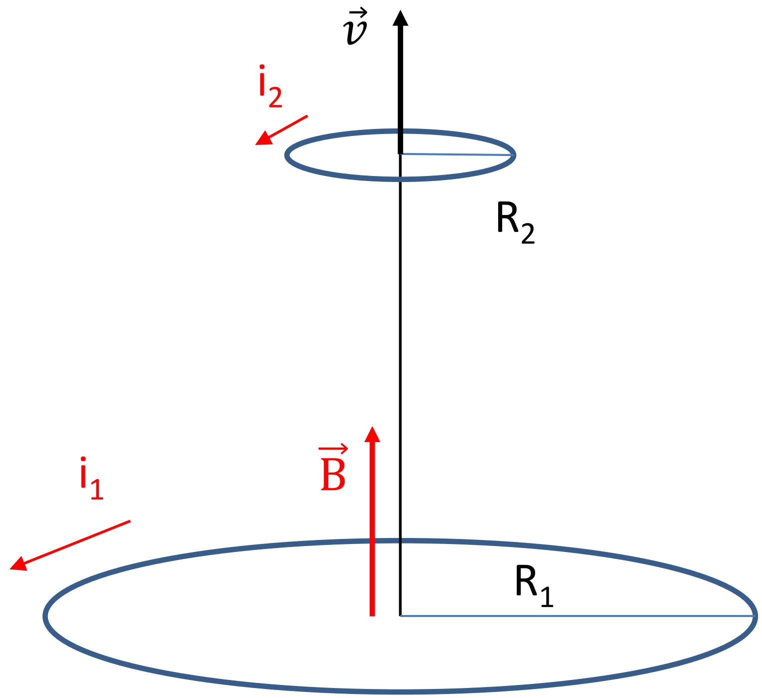
$$= -\frac{i_1 3\mu_0^2 \pi^2 R_1^2 R_2^3 v^2}{4Z}\left(\frac{1}{[R_1^2 + v^2t^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{5v^2t^2}{[R_1^2 + v^2t^2]^{\frac{7}{2}}}\right) =$$

$$= -9.6 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{V}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_M \gg \varepsilon_A$$

Spire accoppiate

$$i_2 = \frac{\varepsilon_M + \varepsilon_A}{Z} \approx \frac{\varepsilon_M}{Z}$$

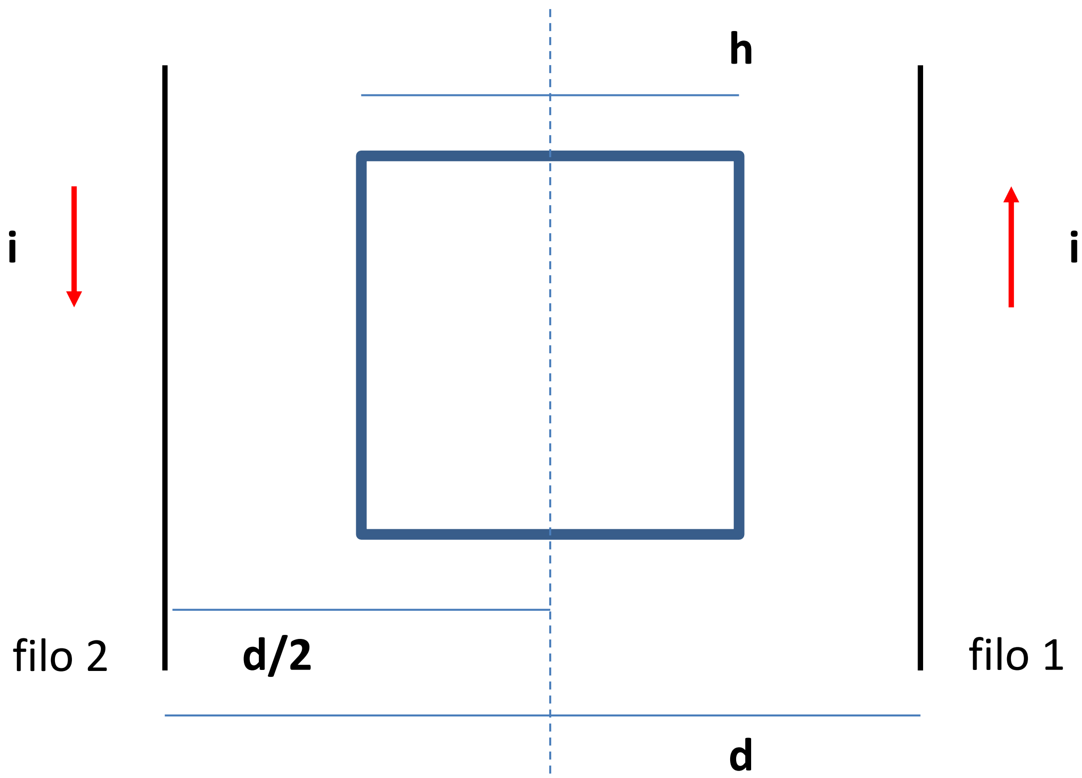


Il fenomeno di autoinduzione è del tutto ininfluente in questo caso. La fem autoindotta è ordini di grandezza inferiore rispetto a quella generata dalla mutua induzione tra i due circuiti.

I coefficienti L e M dipendono solo dalla geometria del sistema. Di conseguenza, la rilevanza dei fenomeni ad essi associati dipende dalle dimensioni dei sistemi. Per circuiti con geometrie diverse, infatti, il fenomeno di autoinduzione può non essere trascurabile (es: solenoide).

Spira quadrata tra due fili

Una spira quadrata di lato ***h*** ha coefficiente di autoinduzione trascurabile. La spira si trova in mezzo a due fili rettilinei indefiniti posti a distanza ***d*** l'uno dall'altro e percorsi da correnti elettriche di moduli ***i*** che corrono in versi opposti; la spira è complanare ai due fili. Si calcoli la **mutua induttanza** tra i fili e la spira.



Spira tra due fili

Calcoliamo il coefficiente di mutua induttanza tra **filo 1** e **spira quadrata**:

$$M_1 = \frac{\Phi_1}{i}$$

Utilizziamo Biot-Savart per calcolare il campo magnetico generato dal filo 1:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\,\pi\, r}$$

$$\Phi_1(B) = \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n\, d\Sigma = \int_0^h \int_{\frac{d}{2}-\frac{h}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{h}{2}} B(r)\, dr dz = \int_0^h dz \int_{\frac{d}{2}-\frac{h}{2}}^{\frac{d}{2}+\frac{h}{2}} \frac{\mu_0 i}{2\,\pi\, r}\, dr = \frac{h\, \mu_0 i}{2\,\pi} \ln\left[\frac{d+h}{d-h}\right]$$

$$\Rightarrow \quad M_1 = \frac{h\, \mu_0}{2\,\pi} \ln\left[\frac{d+h}{d-h}\right]$$

Con lo stesso ragionamento si ottiene per il filo 2: $M_2 = \frac{h\, \mu_0}{2\,\pi} \ln\left[\frac{d+h}{d-h}\right]$

Se le correnti avessero lo stesso verso: $M_2 = -M_1$ $\Rightarrow$ No induzione perché

$i_2 = i_1 \qquad \Phi_{TOT} = 0$

ma $\quad \vec{B} \cdot \hat{u}_n\, d\Sigma \neq 0$