Dobbiamo determinare i coefficienti $\hat{u}_k(t)$, $k=0,1,2,\dots$ Sappiamo che:

$$\begin{cases} \hat{u}_k'' + c^2 \lambda_k \hat{u}_k = 0 & \text{in } (0,+\infty) \\ \hat{u}_k(0) = \hat{u}_{k,0} \\ \hat{u}_k'(0) = \hat{u}_{k,1} \end{cases}$$

L'integrale generale è:

$$\hat{u}_k(t) = a_k e^{\sqrt{-c^2\lambda_k}\, t} + b_k e^{-\sqrt{-c^2\lambda_k}\, t}$$

dove a_k, b_k sono costanti di integrazione arbitrarie.

$$\hat{u}_k(t) = a_k e^{ic\sqrt{\lambda_k}\, t} + b_k e^{-ic\sqrt{\lambda_k}\, t}$$

(avendo supposto $c>0$ per fissare le idee). Le costanti a_k, b_k si determinano imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} a_k + b_k = \hat{u}_{k,0} \\ ic\sqrt{\lambda_k}\,(a_k - b_k) = \hat{u}_{k,1}, \end{cases} \qquad k = 0,1,2,\dots$$

da cui:

$$a_k = \frac{1}{2}\left(\hat{u}_{0,k} - i\,\frac{\hat{u}_{1,k}}{c\sqrt{\lambda_k}}\right), \qquad b_k = \frac{1}{2}\left(\hat{u}_{0,k} + i\,\frac{\hat{u}_{1,k}}{c\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

In definitiva, la formula di rappresentazione per serie di u risulta:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\hat{u}_{0,k} - i \frac{\hat{u}_{1,k}}{c\sqrt{\lambda_k}} \right) e^{ic\sqrt{\lambda_k}t} + \frac{1}{2} \left(\hat{u}_{0,k} + i \frac{\hat{u}_{1,k}}{c\sqrt{\lambda_k}} \right) e^{-ic\sqrt{\lambda_k}t} \right] \varphi_k(x)$$

Esempio Consideriamo in dimensione $n = 1$ in $\Omega = (0,1)$ il problema:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 & \text{in } (0,1) \times (0,+\infty) \\ \left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ \partial_t u &= u_1 \end{aligned}\right\} & \text{in } (0,1),\ t = 0 \\ u = 0 & \text{per } x = 0, 1,\ t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

che modellizza le vibrazioni di una corda elastica di lunghezza finita unitaria con gli estremi bloccati.

Sappiamo che:

$$\varphi_k(x) = \sin(k\pi x), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_k = k^2\pi^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\hat{u}_k(t) = \frac{1}{2} \left(\hat{u}_{0,k} - i \frac{\hat{u}_{1,k}}{k\pi c} \right) e^{ik\pi ct} + \frac{1}{2} \left(\hat{u}_{0,k} + i \frac{\hat{u}_{1,k}}{k\pi c} \right) e^{-ik\pi ct}.$$

Consideriamo il caso di corda inizialmente ferma:

$$u_1 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_{1,k} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

quindi otteniamo:

$$\hat{u}_k(t) = \frac{1}{2}\hat{u}_{0,k}\, e^{ik\pi ct} + \frac{1}{2}\hat{u}_{0,k}\, e^{-ik\pi ct}$$

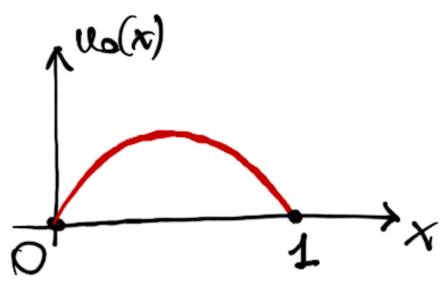
$$= \hat{u}_{0,k} \cos(k\pi ct).$$

La soluzione in serie assume pertanto la forma:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_{0,k} \cos(k\pi ct) \sin(k\pi x).$$

Prendendo come deformata iniziale della corda

$$u_0(x) = \sin(\pi x) = \varphi_1(x)$$



abbiamo:

$$\begin{cases} \hat{u}_{0,1} = 1 \\ \hat{u}_{0,k} = 0 \quad \forall k > 1 \end{cases}$$

e quindi

$$u(x,t) = \cos(\pi ct) \sin(\pi x).$$

Se u_0 non coincide con una delle autofunzioni φ_k, possiamo determinare i coefficienti $\hat{u}_{0,k}$ osservando che:

$$(\varphi_k, \varphi_h) = \int_\Omega \varphi_k(x)\varphi_h(x)\,dx = 0 \quad \forall h \neq k$$

(prodotto scalare in $L^2(\Omega)$).

Allora:

$$(u_0, \varphi_i) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_{0,k}\varphi_k, \varphi_i \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_{0,k} (\varphi_k, \varphi_i)$$

$$= \hat{u}_{0,i} \|\varphi_i\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{0,i} = \frac{(u_0, \varphi_i)}{\|\varphi_i\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{\|\varphi_i\|^2_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega u_0(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

Unicità della soluzione per il problema ai valori iniziali e al bordo dell'equazione delle onde

Teorema Il problema ai valori iniziali e al bordo

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } Q = \Omega \times (0,+\infty) \\ \left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ \partial_t u &= u_1 \end{aligned}\right\} & \text{in } \Omega,\ t=0 \\ u = g & \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

ammette al più una soluzione $u \in C^2(Q)$.

Dim. Supponiamo che $u, \tilde{u} : Q \to \mathbb{R}$ siano due soluzioni corrispondenti agli stessi dati iniziali u_0, u_1 e allo stesso dato al bordo g. Vogliamo far vedere che $u = \tilde{u}$. Per questo, poniamo

$$w := u - \tilde{u}$$

e mostriamo che $w \equiv 0$ in Q.

Facendo la differenza tra i problemi soddisfatti da u e $\tilde{u}$ otteniamo:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - c^2 \Delta w = 0 & \text{in } Q \\ \left.\begin{aligned} w &= 0 \\ \partial_t w &= 0 \end{aligned}\right\} & \text{in } \Omega,\ t=0 \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0,+\infty). \end{cases}$$

Facciamo vedere che $w \equiv 0$ è l'unica soluzione di questo problema:

$$\int_\Omega \partial_t^2 w\, \partial_t w\, dx - c^2 \int_\Omega \Delta w\, \partial_t w\, dx = 0.$$

Osserviamo che:

- $$\partial_t^2 w\, \partial_t w = \frac{1}{2} \partial_t \left((\partial_t w)^2 \right)$$

- $$\int_\Omega \Delta w\, \partial_t w\, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla w)\, \partial_t w\, dx$$

$$= \int_\Omega \left[\operatorname{div}(\nabla w\, \partial_t w) - \nabla w \cdot \nabla (\partial_t w) \right] dx$$

$$= \underbrace{\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla w\, \partial_t w)\, dx}_{\downarrow \text{ teorema di Gauss}} - \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla (\partial_t w)\, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \nabla w\, \underbrace{\partial_t w}_{= 0} \cdot \underline{n}\, d\sigma - \int_\Omega \nabla w \cdot \partial_t \nabla w\, dx$$

su $\partial\Omega \times (0, +\infty)$ per condizione al bordo su w

$$= - \int_\Omega \frac{1}{2} \partial_t |\nabla w|^2\, dx.$$

Quindi otteniamo:

$$\int_\Omega \cancel{\frac{1}{2}} \partial_t \left((\partial_t w)^2 \right) dx + c^2 \int_\Omega \cancel{\frac{1}{2}} \partial_t |\nabla w|^2 dx = 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_\Omega \left[(\partial_t w)^2 + c^2 |\nabla w|^2 \right] dx}_{E(t)} = 0.$$

Questa relazione ci dice che la quantità E è costante nel tempo:

$$E(t) = E(0), \quad \forall t > 0$$

$$= \int_\Omega \Big[\underbrace{(\partial_t w(x,0))^2}_{\substack{=0 \\ \text{per condizione} \\ \text{iniziale}}} + c^2 \underbrace{|\nabla w(x,0)|^2}_{\substack{=0 \\ \text{per condizione} \\ \text{iniziale}}} \Big] dx$$

$$= 0,$$

dunque $E(t) = 0 \quad \forall t > 0$:

$$\int_\Omega \left[(\partial_t w)^2 + c^2 |\nabla w|^2 \right] dx = 0, \quad \forall t > 0.$$

Poiché l'integrando è non negativo, otteniamo:

$$(\partial_t w)^2 + c^2 |\nabla w|^2 = 0 \quad \text{in } Q$$

e, più in particolare,

$$\begin{cases} \partial_t w = 0 & \text{in } Q \\ |\nabla w| = 0 & \text{in } Q. \end{cases}$$

In definitiva, w è costante in Q. Ma $w(x,0) = 0$ e quindi $w(x,t) = 0 \ \ \forall (x,t) \in Q$. $\boxtimes$

<u>Oss.</u> L'unicità della soluzione vale anche se su $\partial\Omega$ è prescritta una condizione di Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{su } \partial\Omega,\ t \in (0, +\infty)$$

$\leadsto$ verifica per esercizio.