EQUAZIONE DI SCHRODINGER STAZIONARIA

- Equazione di Schrodinger stazionaria;

    * la particella soggetta ad un gradino di potenziale;
    * la particella soggetta a potenziale rettangolare;
    * modello fusione nucleare;
    * modello nucleare e la fissione

LA PARTICELLA SOGGETTA AD UN GRADINO DI POTENZIALE

(L'effetto TUNNEL)

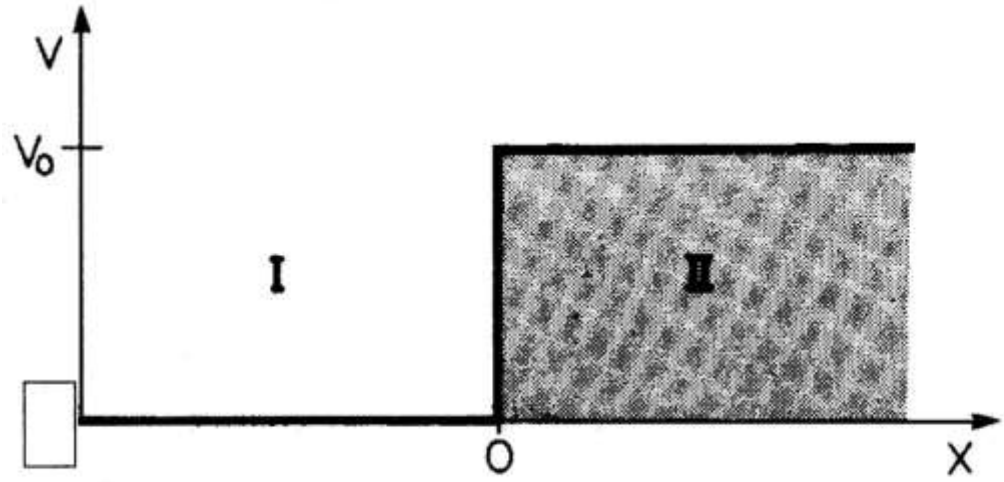


Figure 4.6. Finite potential barrier.

Consideriamo una particella di massa m che si "propaga" nella direzione positiva dell'asse x e incontra una barriera di potenziale di altezza $\mathbf{V_0}$.

Possiamo dividere l'asse x in due regioni (I) e (II) e scriviamo l'operatore hamiltoniano per le due regioni:

$$\hat{H}_I = \frac{\hat{p}^2}{2m} \qquad x < 0$$

$$\hat{H}_{II} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \mathrm{V}_0 \qquad x > 0$$

L'equazione di Schrodinger stazionaria diventa:

$$(I) \qquad \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi = 0 \qquad\qquad x < 0$$

$$(II) \qquad \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V_0\right)\Psi = 0 \qquad\qquad x > 0$$

Le soluzioni per le due regioni sono:

$$(I) \qquad \Psi_I(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$(II) \qquad \Psi_{II}(x) = Ce^{i\beta x} + De^{-i\beta x}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2m\left(E - V_0\right)}{\hbar^2}}$$

Il caso più interessante è quando **V_0>E**
(cioè quando la particella classica sarebbe confinata nella regione (I), semiasse x<0).
In questa situazione $\alpha \in R; \quad \beta \in C$

e definendo $$\gamma = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

$$\Psi_{II}(x) = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x}$$

Nel caso quantistico la particella ammette funzioni d'onda non nulle in tutto l'asse x.

Le costanti A,B,C,D delle soluzioni vengono determinate dalle condizioni:

1) le funzioni d'onda devono essere continue e derivabili in tutto il dominio (quindi si deve garantire la continuità di **Ψ** e della sua derivata in x=0 e se ne deve evitare la divergenze per x tendente ad infinito;
2) le funzioni d'onda devono essere normalizzate.

Da cui $$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0)$$

$$\left.\frac{d\Psi_I(x)}{dx}\right|_0 = \left.\frac{d\Psi_{II}(x)}{dx}\right|_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi_I(x) + \Psi_{II}(x)\right|^2 dx = 1$$

Dalla terza si deduce subito ***D=0***

La soluzione diventa:

$$(I) \qquad \Psi_I(x) = Ae^{i\alpha\, x} + Be^{-i\alpha\, x}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$(II) \qquad \Psi_{II}(x) = Ce^{-\gamma\, x}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

con

$$B = \frac{(i\alpha + \gamma)}{(i\alpha - \gamma)} A$$

$$C = \frac{2i\alpha}{(i\alpha - \gamma)} A$$

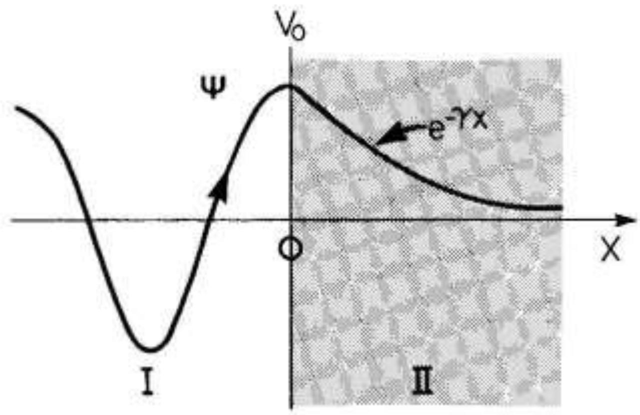
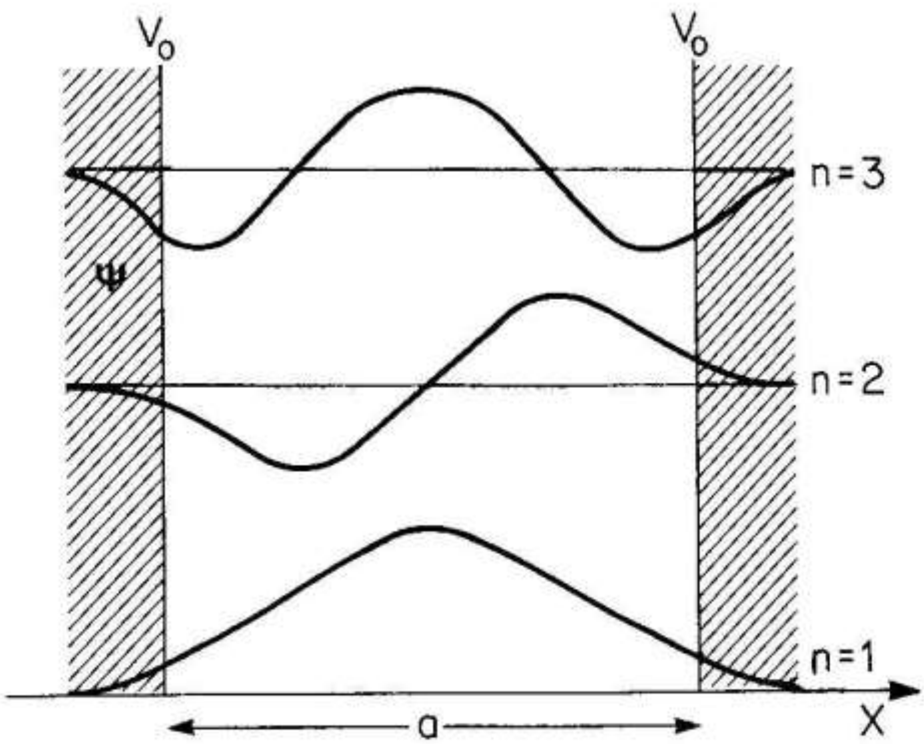


Figure 4.7. ψ-Function meeting a potential barrier.

Il fenomeno quantistico in cui una particella può entrare in una zona di spazio in cui il potenziale è maggiore dell'energia totale (non previsto dalla meccanica classica) è detto **EFFETTO TUNNEL**.

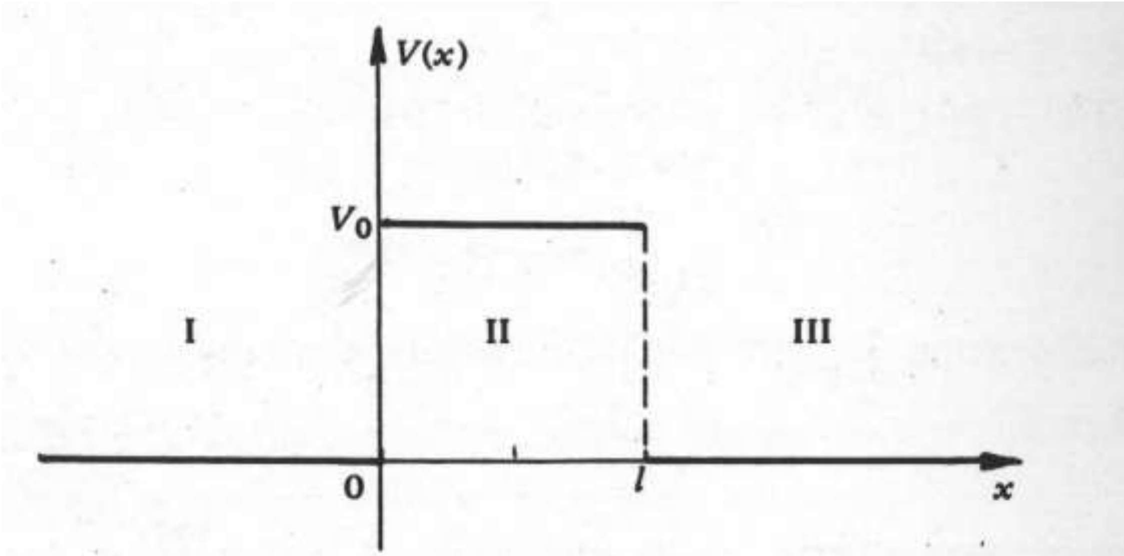
Buca di potenziale a pareti finite

Come conseguenza dell'effetto tunnel una particella confinata in una buca di potenziale rettangolare a pareti finite può avere probabilità finita di uscire dalla buca anche se la sua energia totale **E** è minore dell'altezza $\mathbf{V_0}$ della barriera.



In figura sono mostrate le funzioni d'onda $\mathbf{\Psi_n}$, ottenute risolvendo l'equazione di Schrodinger stazionaria, per alcuni livelli energetici con la condizione $\mathbf{E<V_0}$.
Vedremo la soluzione in seguito.

Particella soggetta ad una barriera di potenziale rettangolare



Consideriamo il caso in cui una particella di massa m è soggetta ad un potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \quad x > l \\ V_0 & 0 < x < l \end{cases}$$

Possiamo scrivere l'equazione di Schrodinger stazionaria per le tre regioni (I), (II), (III)

$$(I)\text{-}(III) \qquad \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0$$

$$(II) \qquad \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V_0\right)\Psi = 0$$

Consideriamo dapprima le regioni (I) e (III)

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0 \qquad\qquad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$$\Psi_I(x) = Ae^{ikx} + \; Be^{-ikx} \qquad\qquad x < 0$$

Sovrapposizione dell'onda progressiva e dell'onda regressiva in (I).

$$\Psi_{III}(x) = Ce^{ikx} \qquad\qquad x > l$$

Onda progressiva trasmessa dalla barriera rettangolare in (III).

Consideriamo ora la regione (II)

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \beta^2\Psi = 0 \qquad \beta = i\gamma = i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(V_0 - E\right)}$$

se

$$E < V_0 \quad \Rightarrow \gamma > 0$$

$$\Psi_{II}(x) = Ge^{\gamma x} + \; Fe^{-\gamma x}$$

$$0 < x < l$$

Imponendo le condizioni di continuità per

$$\Psi(x) \quad \text{e} \quad \frac{d\Psi}{dx}$$

in x=0 e x=l si possono calcolare i coefficienti A,B,C,F,G.

Le condizioni da porre sono

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0)$$

$$\left.\frac{d\Psi_I(x)}{dx}\right|_0 = \left.\frac{d\Psi_{II}(x)}{dx}\right|_0$$

$$\Psi_{II}(l) = \Psi_{III}(l)$$

$$\left.\frac{d\Psi_{II}(x)}{dx}\right|_l = \left.\frac{d\Psi_{III}(x)}{dx}\right|_l$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi_I(x) + \Psi_{II}(x) + \Psi_{III}(x)\right|^2 dx = 1$$

Da cui si ottiene

$$\frac{C}{A} = \frac{4ik\gamma e^{(\gamma - ik)l}}{(\gamma + ik)^2 - (\gamma - ik)^2 e^{2\gamma l}}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{(\gamma^2 + k^2)(1 - e^{2\gamma l})}{(\gamma + ik)^2 e^{2\gamma l} - (\gamma - ik)^2}$$

Notare che

$\left|\frac{C}{A}\right|^2$ probabilità che l'onda venga trasmessa

$\left|\frac{B}{A}\right|^2$ probabilità che l'onda venga riflessa

Il risultato più importante è che, diversamente dal caso classico, anche se l'energia totale **E** della particella è minore del potenziale $\mathbf{V_0}$ della barriera su cui incide

$$\mathbf{E < V_0}$$

<u>la particella ha probabilità non nulla di superarla</u>.

Tale fenomeno è detto effetto tunnel.

LA PARTICELLA SOGGETTA AD UN GRADINO DI POTENZIALE

(L'effetto TUNNEL)

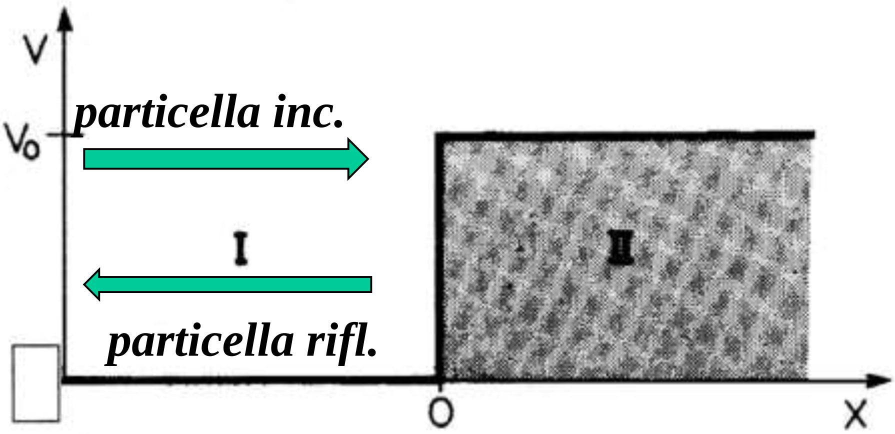


Figure 4.6. Finite potential barrier.

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2m\left(V_0 - E\right)}{\hbar^2}}$$

$$\Psi_I(x) = Ae^{i\alpha\, x} + \frac{(i\alpha + \gamma)}{(i\alpha - \gamma)} Ae^{-i\alpha\, x}$$

$$\Psi_{II}(x) = \frac{2i\alpha}{(i\alpha - \gamma)} Ae^{-\gamma\, x}$$

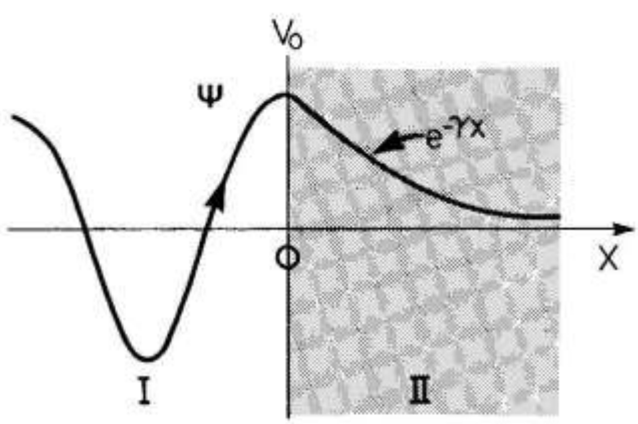
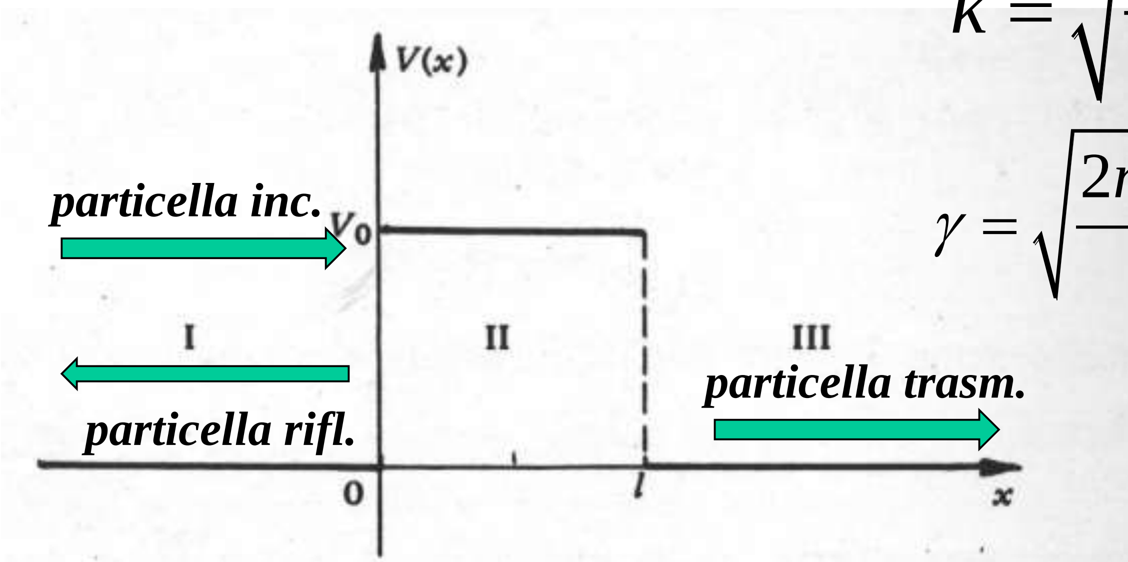


Figure 4.7. ψ-Function meeting a potential barrier.

Particella soggetta ad una barriera di potenziale rettangolare

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2m\left(V_0 - E\right)}{\hbar^2}}$$



$$\Psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad x < 0$$

$$\Psi_{III}(x) = Ce^{ikx} \qquad x > l$$

$$\frac{C}{A} = \frac{4ik\gamma e^{(\gamma - ik)l}}{(\gamma + ik)^2 - (\gamma - ik)^2 e^{2\gamma l}} \qquad \left|\frac{C}{A}\right|^2 \ prob.trasm.$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\left(\gamma^2 + k^2\right)\left(1 - e^{2\gamma l}\right)}{(\gamma + ik)^2 e^{2\gamma l} - (\gamma - ik)^2} \qquad \left|\frac{B}{A}\right|^2 \ prob.rifl.$$

Fusione nucleare dentro il sole

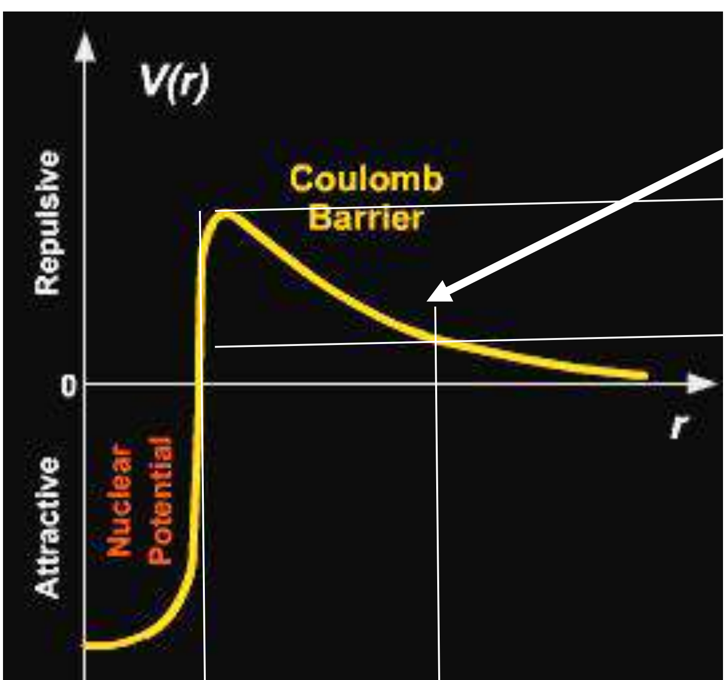
(Gamow 1929- Bethe 1939)

Due nuclei di idrogeno ^{1}H (protoni) si fondono per formare deuterio ^{2}H, rilasciando un positrone (poiché un protone è diventato un neutrone) ed un neutrino

$$^{1}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{2}H + e^{+} + \nu_e + \gamma + 2\ \text{MeV (energia)}$$

Questo primo passaggio è estremamente lento perchè i due protoni si leghino è necessario superare la barriera di repulsione elettrostatica (e ciò può avvenire unicamente per effetto tunnel, che ha una probabilità bassa anche se non nulla).

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$2{,}3\ 10^{-12}$ J= 14 MeV

1,9 keV energia cin. di H nel nucleo

10^{-15} m 10^{-13} m

La temperatura del sole varia da 6000 K sulla superficie a **15 milioni di K nel nucleo** dove la densità dell'H vale $\boldsymbol{\rho_H}$**=150 g/cm3**.

La fusione avviene nel nucleo dove

$$\frac{3}{2}k_B T = V(r) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad r \approx 10^{-13} m$$

Tenuto conto che la densità di H al cm^3 vale circa $\mathbf{N_H=\rho_H}$ **/ massa protone=$\mathbf{10^{26}}$ H/cm$^\mathbf{3}$** , usando la teoria cinetica classica del gas ideale troviamo una frequenza di urti per singolo atomo di **f=6 $\mathbf{10^{18}}$ urti/s**.

Dalla teoria dell'effetto tunnel per una barriera di potenziale rettangolare di altezza **14 MeV** e **larghezza di $\mathbf{10^{-13}}$ m** otteniamo una probabilità di trasmissione **T=10 $\mathbf{^{-36}}$**

Quindi la probabilità per unità di tempo che un H superi la barriera vale **prob= T*f**

Quindi il protone deve aspettare un tempo pari e **1/prob = $\mathbf{10^9}$ anni = 5 $\mathbf{10^{16}}$** s prima di fondersi in deuterio.

Ma a causa dell'alta concentrazione di H il numero totale di reazioni è $\mathbf{N_R = N_H\ T\ f = 10^9}$ **fusioni / s cm³**

Dopo la produzione di deuterio in una stella giovane e ricca di H si può avere la fusione con un altro nucleo di idrogeno per produrre un isotopo leggero dell‘ ^{3}He:

$$^2H + {}^1H \rightarrow {}^3He + \gamma + 7,5 \text{ MeV (energia)}$$

Da qui ci sono differenti vie che portano alla formazione dell'isotopo dell'elio ^{4}He.

Ad es. $^3He + {}^1H \rightarrow {}^4He + \nu_e + e^+$

In questo caso l'elio-3 reagisce direttamente con un protone per dare elio-4

Confrontando la massa dell'elio-4 finale con le masse dei quattro protoni si ottiene che lo 0,7% della massa originaria è persa. Questa massa è convertita in energia, sotto forma di raggi gamma e di neutrini rilasciati durante le reazioni individuali.
L'energia totale che si ottiene da un ramo intero è di **26,73 MeV**.

Calcolo bilanci energetici

$^1H + {}^1H \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu_e + \gamma$ [2 MeV (energia)]

[2 massa (H) – massa (^{2}H)]c^2= 2 MeV
2* (1,00794 uma)*1,66 10-27 kg= 2 massa (H)
2,01363 uma *1,66 10-27 kg = massa (^{2}H)

$^2H + {}^1H \rightarrow {}^3He + \gamma$ [7,5 MeV (energia)]

[massa(H)+massa(^{2}H)]c^2-massa(^{3}He)c^2=7,5MeV
1,00794 uma*1,66 10-27 kg= massa (H)
2,01363 uma *1,66 10-27 kg = massa (^{2}H)

$^3He + {}^1H \rightarrow {}^4He + e^+ + \nu_e + \gamma$ [17,2 MeV (energia)]

Supponiamo che nel sole prevalgano le prime 2 reazioni (stella giovane con molto H).

Calcoliamo l'energia rilasciata e confrontiamola con la misura.

Nucleo solare R_{NS}= 150000 km

$$Potenza(sole) = \frac{4}{3}\pi R_{NS}^3 N_R (en.emessa) \approx 2 \cdot 10^{26} - 10^{27} J/s$$

2 MeV < *en. emessa* < 9,5 MeV

Il valore misurato è

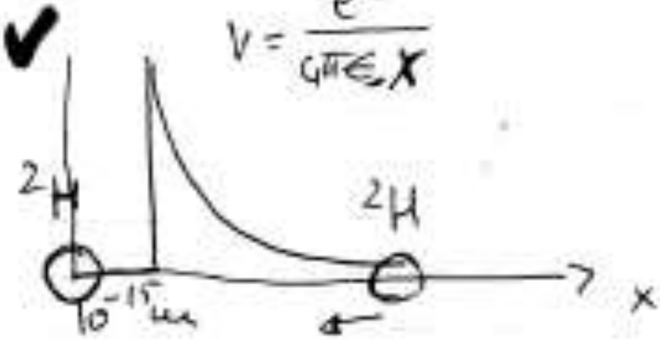
$$Potenza(sole, mis.) = 3{,}86 \cdot 10^{26} J/s$$

Fusione nucleare

$^2H + {}^2H \rightarrow {}^4He + \text{energia}$

$m({}^4He) < 2m({}^2H) \quad \Delta m c^2 = \text{energia}$

$V = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x}$



$V(10^{-15}m) \cong 2 \cdot 10^{-13} J \sim 10^6 eV = 1 MeV$

Quale temperatura devono avere 2 nuclei per avvicinarsi a 10^{-15} m?

$\frac{3}{2} k_B T = 2 \cdot 10^{-13} J \qquad k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} J/K$

$T \sim 10^{10} K$

Nel sole $T = 6000 K \rightarrow 15 \cdot 10^6 K$

Mancano 3 ordini di grandezza!!

Quanto si avvicinano gli H?

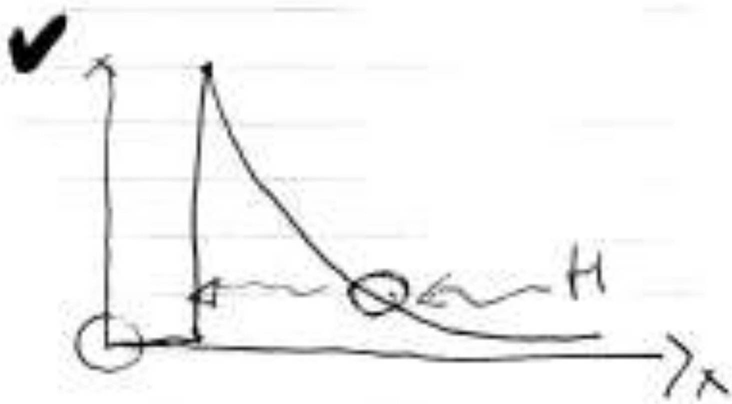
Risolviamo l'equazione

$$\frac{3}{2} k_B T = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x}$$

$$x \sim 100 \cdot 10^{-15}\ m$$

Un fattore 100 più lontano

Allora interviene l'effetto tunnel



La probabilità è molto bassa ma

ci sono tanti atomi ^2H e gli

urti sono tantissimi.

Questo basta x dare un numero
grande di fusioni

$$^2H + {}^2H \to {}^4He + \text{energia}$$

Modello del NUCLEO ATOMICO

Modello Protone-Neutrone

Heisenberg ipotizzo' nucleo formato da Z protoni e A-Z neutroni.

Modello semplice: nucleoni tenuti assieme da *forza nucleare* a corto range. Si spiega con questo modello: il momento angolare, la radioattivita' e altre evidenze sperimentali; la *forza nucleare* ha una natura complessa.

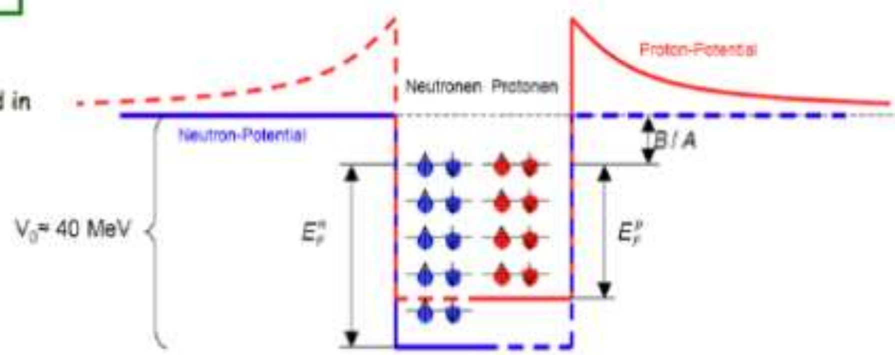
Fermi Energy $\boxed{E_F = \frac{p_F^2}{2m_N} \sim 33\ MeV}$

Binding Energy: BE/A= 7-8 MeV

$V_0=E_F+B/A\sim 40MeV$

→Nucleons are rather weakly bound in the nucleus

The neutron potential well is deeper that the proton well because of the missing Coulomb repulsion. The Fermi Energy is the same, otherwise the p-->n decay would happen spontaneously. This implies that they are more neutrons states available and hence N>Z the heavier the nuclei become.



Modello del nucleo di uranio

Uranio: $\mathbf{U^{238}{}_{92}}$ numero di massa ***Z=238***

numero atomico
A=92

$$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}\, kg$$

$$m_n = 1,674 \cdot 10^{-27}\, kg$$

$$M(nucl) = \left[m_p Z + m_n (A - Z) \right]$$

$$m(U^{238})$$

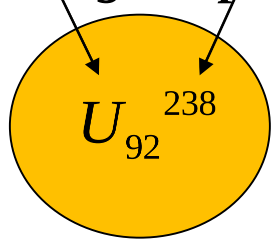
$$M(nucl.) = \left[m_p Z + m_n (A - Z) \right]$$

A protoni

Z-A neutroni

$$m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\, kg \qquad m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\, kg$$

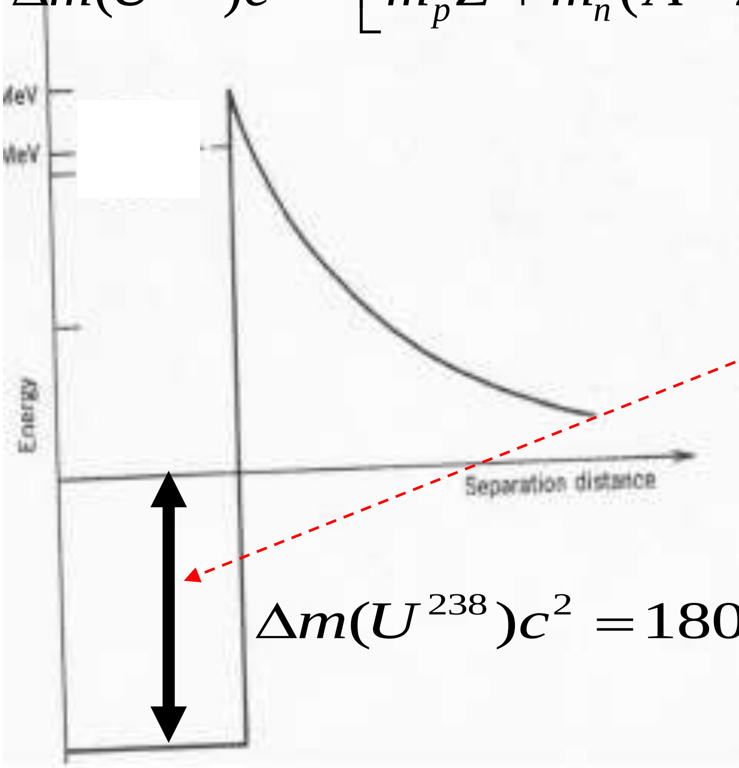
nucleoni si legano per formare il nucleo



$$m(U^{238})$$

$$\Delta m(U^{238}) = \left[m_p Z + m_n (A - Z) \right] - m(U^{238})$$

$$\Delta m(U^{238}) c^2 = \left[m_p Z + m_n (A - Z) \right] c^2 - m(U^{238}) c^2$$



La differenza di massa si trasforma in energia cinetica del nucleo che trasla

$$\Delta m(U^{238}) c^2 = 1804 MeV$$

Decadimento dell'uranio

Uranio: $\mathbf{U^{238}}_{\mathbf{92}}$ numero di massa Z

L'uranio 238 decade secondo la reazione

$$U_{92}{}^{238} \rightarrow Th_{90}{}^{234} + He_2{}^4$$

La massa mancante nei 3 nuclei, rispetto la massa dei nucleoni liberi vale

$$\Delta m(U^{238}) = \left[m_p Z + m_n (A - Z) \right] - m(U^{238})$$

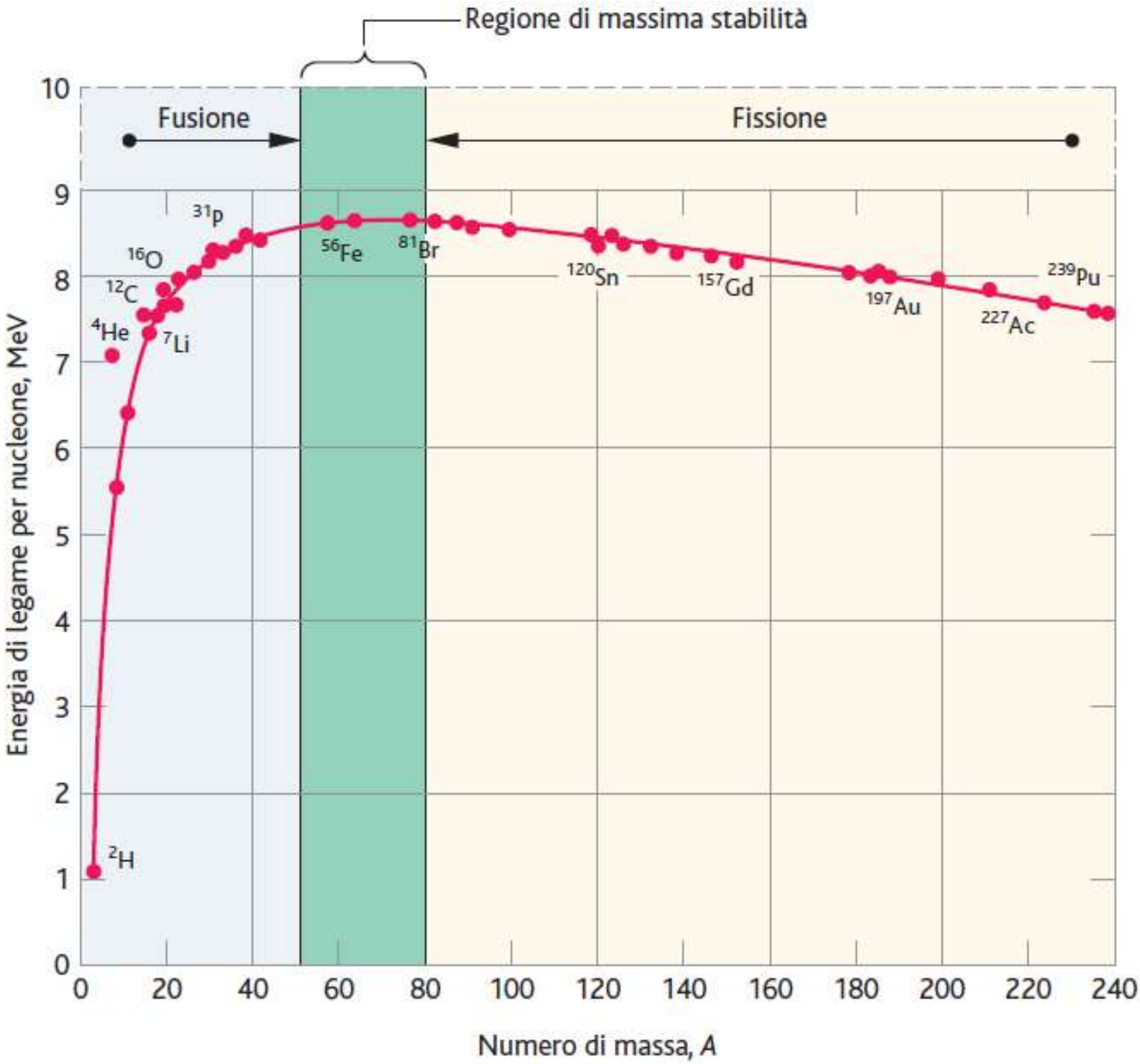
$$\Delta m(Th^{234}) = \left[m_p Z + m_n (A - Z) \right] - m(Th^{234})$$

$$\Delta m(He^4) = \left[m_p Z + m_n (A - Z) \right] - m(He^4)$$

$$\frac{\Delta m(U^{238})c^2}{A(U^{238})} = 7,58 MeV$$

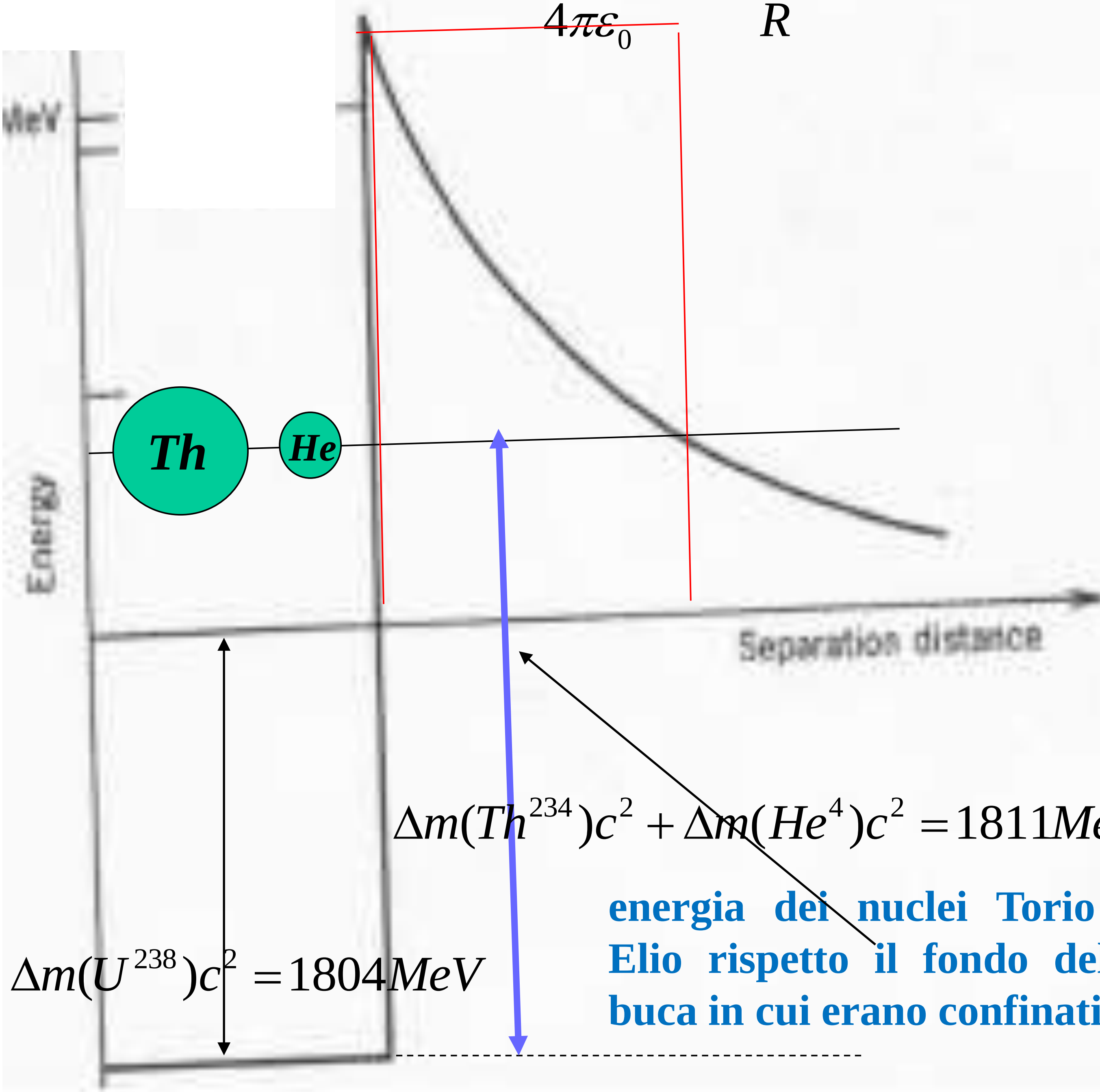
$$\frac{\Delta m(Th^{234})c^2}{A(Th^{234})} = 7,62 MeV$$

$$\frac{\Delta m(He^4)c^2}{A(He^4)} = 7,07 MeV$$


Regione di massima stabilità
Fusione
Fissione
Energia di legame per nucleone, MeV
Numero di massa, A
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
²H
⁴He
⁷Li
¹²C
¹⁶O
³¹P
⁵⁶Fe
⁸¹Br
¹²⁰Sn
¹⁵⁷Gd
¹⁹⁷Au
²²⁷Ac
²³⁹Pu

Decadimento dell'uranio

$$21MeV = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z(He)Z(Th)}{R}$$



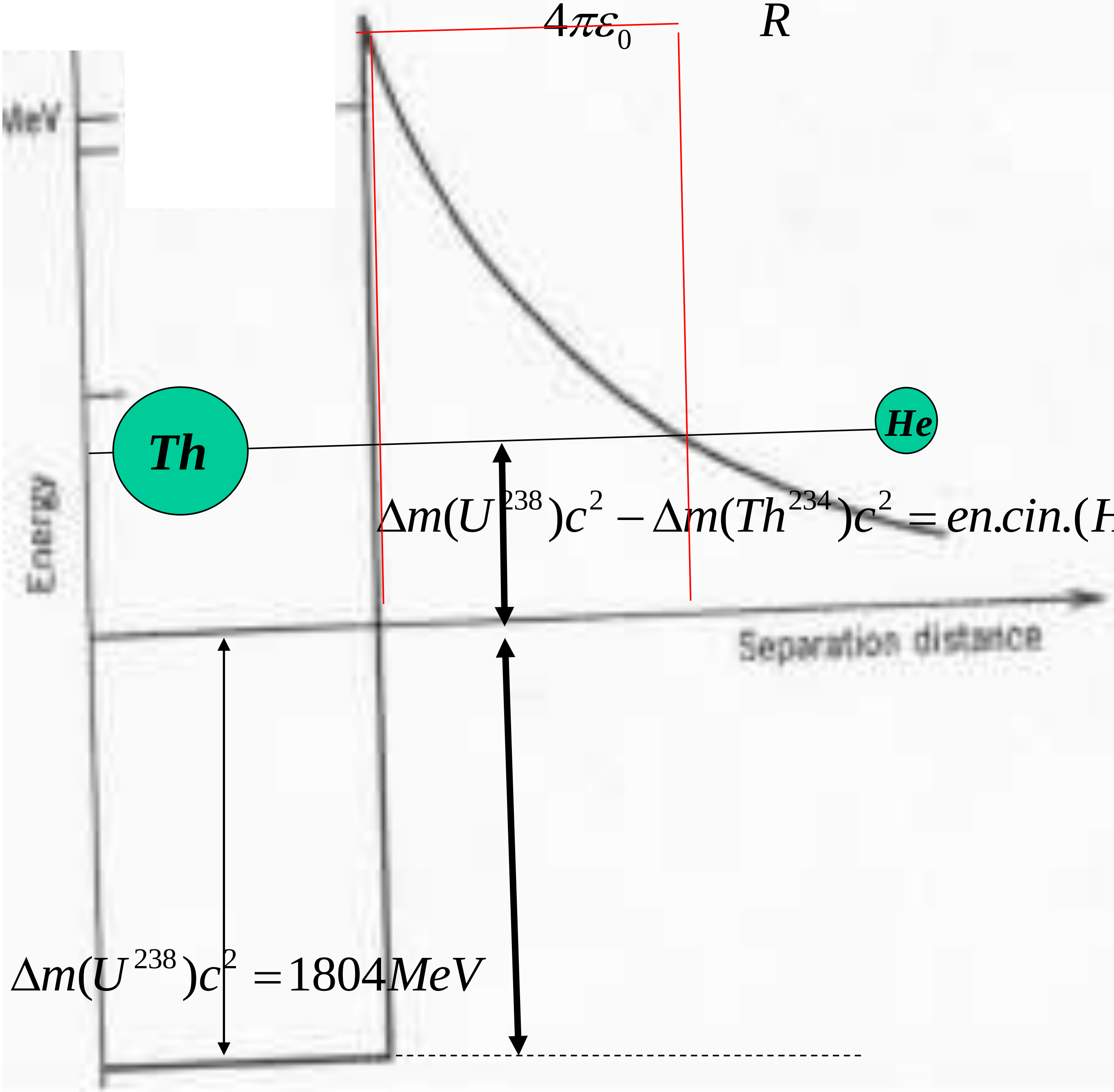
$$\Delta m(Th^{234})c^2 + \Delta m(He^4)c^2 = 1811MeV$$

$$\Delta m(U^{238})c^2 = 1804MeV$$

energia dei nuclei Torio e Elio rispetto il fondo della buca in cui erano confinati

Decadimento dell’uranio

$$21 MeV = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z(He)Z(Th)}{R}$$



$$\Delta m(U^{238})c^2 - \Delta m(Th^{234})c^2 = en.cin.(He)$$

$$\Delta m(U^{238})c^2 = 1804 MeV$$

- La fissione nucleare e il processo nucleare in cui nuclei pesanti decadono in nuclei più leggeri.

- In questo tipo di reazione la somma della massa dei nuovi nuclei costituiti ha massa minore delle massa di partenza, con conseguente liberazione di energia (cinetica dei prodotti).

- Quando un nucleo di materiale fissile e bombardato da un neutrone lento si fissiona producendo due o più nuclei più piccoli.

- Gli isotopi prodotti da tale reazione sono radioattivi in quanto posseggono un eccesso di neutroni e decadono in una successione di decadimenti no ad arrivare ad una configurazione stabile.

- Tipicamente dalla fissione vengono prodotti altri neutroni, e si puo ottenere una reazione a catena.