ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 6

1. Siano M e N spazi metrici compatti. Sia $F : M \to N$ continua. Definiamo $\Phi_F : C(N) \to C(M)$ ponendo
$$\Phi_F f = f \circ F \qquad \forall f \in C(N).$$
Pensiamo $C(M)$ e $C(N)$ come spazi di Banach con la norma dell'estremo superiore.
   (a) Dimostrare che $\Phi_F : C(N) \to C(M)$ è un operatore lineare limitato e 1-lipschitziano.
   (b) Dimostrare che, se $F : M \to N$ è suriettiva, allora Φ_F è un'isometria lineare.
   (c) Dimostrare che, se K è un altro spazio metrico compatto e $G : K \to M$ è una funzione continua, allora $\Phi_{F\circ G} = \Phi_G \Phi_F$.
   (d) Dimostrare che, se $F : M \to N$ è un omeomorfismo, allora $\Phi_F : C(N) \to C(M)$ è un isomorfismo isometrico.
2. Siano H_1 e H_2 spazi di Hilbert. Sia $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale di H_1 (indicizzata iniettivamente).
   (a) Dimostrare che $T : H_1 \to H_2$ è un'isometria lineare se e solo se $\{Te_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un insieme ortonormale in H_2 (indicizzato iniettivamente).
   (b) Dimostrare che $T : H_1 \to H_2$ è un isomorfismo isometrico se e solo se $\{Te_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale di H_2 (indicizzata iniettivamente).
3. Siano X, Y spazi normati. Siano $D \subseteq X$ ed $E \subseteq Y$ sottospazi vettoriali, dotati delle norme indotte da X e Y rispettivamente. Assumiamo che D sia denso in X. Siano $T \in \mathcal{B}(D, E)$ e $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$ tali che $\widetilde{T}|_D = T$. Dimostrare che $\widetilde{T}$ è un'isometria lineare se e solo se T lo è.
4. Sia H uno spazio di Hilbert. Sia $X \subseteq H$ un sottospazio vettoriale chiuso proprio non banale, e sia $Y = X^{\perp}$. Dotiamo X e Y delle norme indotte da H. Sia $X \times Y$ dotato della norma prodotto. Definiamo $T : H \to X \times Y$ ponendo
$$Tv = (P_X v, P_Y v) \qquad \forall v \in H.$$
   (a) Dimostrare che $T \in \mathcal{B}(H, X \times Y)$ e determinare $\|T\|_{\mathrm{op}}$.
   (b) Dimostrare che $T : H \to X \times Y$ è invertibile e che $T^{-1} \in \mathcal{B}(X \times Y, H)$.
   (c) Determinare se T è un'isometria lineare.
5. Ricordiamo che, per ogni $\underline{w} \in \ell^\infty$, denotiamo con $D_{\underline{w}} \in \mathcal{B}(\ell^2)$ l'operatore di moltiplicazione per $\underline{w}$ (vedi esercitazione 5, esercizio 3).
   (a) Dimostrare che la mappa $\underline{w} \mapsto D_{\underline{w}}$ è un'isometria lineare da ℓ^∞ a $\mathcal{B}(\ell^2)$.
   (b) Dimostrare che $D_{\underline{w}\cdot\underline{z}} = D_{\underline{w}} D_{\underline{z}}$ per ogni $\underline{w}, \underline{z} \in \ell^\infty$, dove $\underline{w} \cdot \underline{z} = (w_k z_k)_k$ denota il prodotto componente per componente.
   (c) Dimostrare che gli operatori di moltplicazione $D_{\underline{w}}$ commutano a due a due (rispetto al prodotto di operatori).
   (d) Dimostrare che, se $\underline{1} = (1, 1, 1, \dots)$ è la successione costante 1, allora $D_{\underline{1}} = \mathrm{id}_{\ell^2}$.
   (e) Dimostrare che la norma operatoriale $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ su $\mathcal{B}(\ell^2)$ non è indotta da un prodotto scalare.
   [Suggerimento: utilizzare (a) e l'analoga proprietà per la norma di ℓ^∞.]

6. Consideriamo $C[0,1]$ come spazio di Banach con la norma della convergenza uniforme. Sia $D = \{f \in C[0,1] \,:\, \sum_{k=1}^{\infty} |f(1/k)| < \infty\}$.
   (a) Verificare che D è un sottospazio vettoriale di $C[0,1]$.
   (b) D è denso in $C[0,1]$?

   Sia ora $T : D \to \mathbb{F}$ definito da $Tf = \sum_{k=1}^{\infty} f(1/k)$ per ogni $f \in D$.
   (c) Dimostrare che $T \in \mathcal{L}(D, \mathbb{F})$.
   (d) Determinare se esiste $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(C[0,1], \mathbb{F})$ tale che $\widetilde{T}|_D = T$.
7. Sia $X = c_{00}$ pensato come spazio normato con la norma indotta da ℓ^∞. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, sia $T_m : X \to \mathbb{F}$ definito da $T_m \underline{x} = m x_m$ per ogni $\underline{x} \in X$.
   (a) Dimostrare che $T_m \in \mathcal{B}(X, \mathbb{F})$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.
   (b) Dimostrare che $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|T_m\|_{\mathrm{op}} = \infty$.
   (c) Dimostrare che, per ogni $\underline{x} \in X$, $\sup_{m \in \mathbb{N}} |T_m \underline{x}| < \infty$.
   (d) Perché la famiglia di operatori $\mathcal{F} = \{T_m \,:\, m \in \mathbb{N}\}$ non costituisce un controesempio al teorema di Banach–Steinhaus?
8. Sia $\mathbb{F}$ il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ oppure il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Ricordiamo che un'*algebra* su $\mathbb{F}$ è uno spazio vettoriale V su $\mathbb{F}$ dotato di un'ulteriore operazione di prodotto $V \times V \ni (x,y) \mapsto xy \in V$ con le seguenti proprietà:
   - $(xy)z = x(yz)$ per ogni $x, y, z \in V$
     (il prodotto è *associativo*);
   - $(\alpha x + \alpha' x')y = \alpha xy + \alpha' x' y$ per ogni $x, x', y \in V$ e $\alpha, \alpha' \in \mathbb{F}$,
     $x(\alpha y + \alpha' y') = \alpha xy + \alpha' x y'$ per ogni $x, y, y' \in V$ e $\alpha, \alpha' \in \mathbb{F}$,
     (il prodotto è *bilineare*).

   Ricordiamo inoltre che un'*algebra normata* è un'algebra V dotata di una norma $\|\cdot\|$ che la rende uno spazio normato e che inoltre è *submoltiplicativa*, cioè
   $$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \qquad \forall x, y \in V.$$
   Infine, ricordiamo che un'algebra normata si dice *algebra di Banach* se, come spazio normato, è uno spazio di Banach.
   (a) Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$. Dimostrare che lo spazio $\mathcal{L}(X)$ degli operatori lineari su X è un'algebra su $\mathbb{F}$ con l'operazione di prodotto (composizione) di operatori.
   (b) Sia X uno spazio normato. Dimostrare che lo spazio $\mathcal{B}(X)$ degli operatori lineari limitati su X, con l'operazione di prodotto di operatori e la norma operatoriale, è un'algebra normata.
   (c) Dimostrare che, se X è uno spazio di Banach, allora $\mathcal{B}(X)$ è un'algebra di Banach.
   (d) Dimostrare che lo spazio ℓ^∞, dotato dell'operazione di prodotto componente per componente
   $$\underline{x} \cdot \underline{y} = (x_k y_k)_{k \in \mathbb{N}} \qquad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \ell^\infty,$$
   è un'algebra di Banach, e che lo stesso vale per lo spazio c_0.
   (e) Sia M uno spazio metrico compatto. Dimostrare che lo spazio $C(M)$, dotato della norma dell'estremo superiore e del prodotto puntuale di funzioni, cioè
   $$(fg)(t) = f(t)g(t) \qquad \forall f, g \in C(M),\ \forall t \in M,$$
   è un'algebra di Banach.