Teorema dei Residui

Integrali in campo complesso con il teorema dei residui

Richiami di teoria.

Teorema dei residui. Data una curva chiusa e semplice γ ed una funzione $f(z)$ olomorfa lungo supp(γ) e in Ω, interno del supp(γ), eccetto per un numero finito di singolarità isolate $z_1, \dots, z_n \in \Omega$, allora vale

Teorema dei Residui

$$\oint_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_i)$$

Il Teorema dei residui è un potente strumento dell'analisi complessa che generalizza il Teorema di Cauchy-Goursat e la formula integrale di Cauchy. Il Teorema dei residui riconduce il problema del calcolo di un integrale a quello del calcolo dei residui, che spesso si possono trovare facilmente con il calcolo di alcune derivate (almeno nel caso dei poli).

I passi per calcolare un integrale in campo complesso con il Teorema dei residui possono essere sintetizzati nel modo seguente:

- Calcolo delle singolarità della funzione integranda;
- Classificazione delle singolarità contenute nella regione interna delimitata dalla curva di integrazione e calcolo dei residui;
- Applicazione del Teorema dei residui.

Esercizio 1. Si calcoli

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^4 - 1},$$

dove γ è la circonferenza centrata in 0 e di raggio $\rho = 2$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)},$$

ha 4 singolarità in ± 1 e $\pm i$, tutte e quattro poli semplici, tutti e 4 contenuti nell'interno di γ, di conseguenza possiamo calcolare i residui con la formula per poli semplici:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}e_f(1) &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z+1)(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2(1+i)(1-i)} = \frac{1}{4} \\
\mathcal{R}e_f(-1) &= \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)(z+i)(z-i)} = \frac{1}{-2(-1+i)(-1-i)} = -\frac{1}{4} \\
\mathcal{R}e_f(i) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+1)(z-1)(z+i)} = \frac{1}{(i+1)(i-1)2i} = \frac{i}{4} \\
\mathcal{R}e_f(-i) &= \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{1}{(z+1)(z-1)(z-i)} = \frac{1}{-(-i+1)(-i-1)2i} = -\frac{i}{4}.
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^4 - 1} = 2\pi i\,(\mathrm{Res}\,(f,1) + \mathrm{Res}\,(f,-1) + \mathrm{Res}\,(f,i) + \mathrm{Res}\,(f,-i)) = 0.$$

Esercizio 2. Si calcoli

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 3z + 2}$$

dove γ è una circonferenza centrata nell'origine e raggio ρ, al variare di $\rho \in \mathbb{R}^+$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

ha 2 poli semplici in $z_1 = 1$ e $z_2 = 2$, nelle quali i residui sono, rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(f, 1) &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-2)} = -1 \\ \mathrm{Res}\,(f, 2) &= \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{1}{(z-1)} = 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che, per $\rho < 1$, nessuna singolarità è presente all'interno di supp_γ; per $1 < \rho < 2$, solo z_1 è contenuta all'interno di supp_γ; per $\rho > 2$, sia z_1 che z_2 sono contenute in supp_γ. Di conseguenza

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 3z + 2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho < 1 \\ 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,1) = -2\pi i & \text{se } 1 < \rho < 2 \\ 2\pi i\,(\mathrm{Res}\,(f,1) + \mathrm{Res}\,(f,2)) = 0 & \text{se } \rho > 2. \end{cases}$$

Esercizio 3. Si calcoli

$$\oint_\gamma e^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z$$

dove $\gamma = \cos t + 3i\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione. La funzione integranda presenta una singolarità nell'origine, che è contenuta nella regione interna delimitata da γ. Possiamo calcolarci lo sviluppo di Laurent, ricordando lo sviluppo di

$$e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}.$$

Di conseguenza

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$$

E' immediato constatare che si tratta di una singolarità essenziale. Il residuo è $\mathrm{Res}\,(f, 0) = 1$ e quindi:

$$\oint_\gamma e^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$$

Esercizio 4. Si calcoli al variare di $k \in \mathbb{Z}$

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi)^k}\,\mathrm{d}z$$

dove γ_n è la circonferenza centrata nell'origine e raggio 7.

Soluzione. Notiamo che per $k \leq 0$ la funzione integranda è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, quindi per il Teorema di Cauchy-Goursat si ha che:

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi)^k}\,\mathrm{d}z = 0, \quad k \leq 0$$

Quando $k > 0$ la funzione ha evidentemente un polo di ordine k in $z = \pi$, che è contenuto nella parte interna di γ. Calcoliamo il residuo con la formula per le singolarità polari:

$$\mathrm{Res}(f,\pi) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\pi}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left[\cancel{(z-\pi)^k}\frac{\cos z}{\cancel{(z-\pi)^k}}\right] = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{(k-1)!}\sin\pi, & k \text{ pari} \\ \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)!}\cos\pi, & k \text{ dispari}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & k \text{ pari} \\ \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{(k-1)!}, & k \text{ dispari}\end{cases}$$

Concludiamo che, per il Teorema dei residui:

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi)^k}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & k \text{ pari o } k \leq 0 \\ 2\pi i\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{(k-1)!} & k \text{ dispari e } k > 0\end{cases}$$

Esercizio 5. Si calcoli

$$\oint_{\gamma_n} \frac{\cos(\pi z)}{z^2\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z$$

dove γ_n sono circonferenze centrate nell'origine e di raggio $r_n = \frac{1}{2} + n$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Prima di tutto, dobbiamo trovare e classificare le singolarità della funzione integranda. Notiamo che gli zeri della funzione sono dati da:

$$\cos(\pi z) = 0 \Longrightarrow z = k - \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

mentre gli zeri del denominatore sono:

$$z^2\sin(\pi z) = 0 \Longrightarrow z = k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi la funzione integranda ha singolarità in tutti i numeri interi (notiamo che non abbiamo zeri comuni tra numeratore e denominatore). In particolare, si vede subito che $z = 0$ è un polo triplo (poiché $z^2\sin(\pi z)$ è infinitesima di ordine 3 per $z \to 0$) mentre $z = k, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ sono tutti poli semplici. A questo punto, troviamoci i residui; cominciamo con i poli semplici:

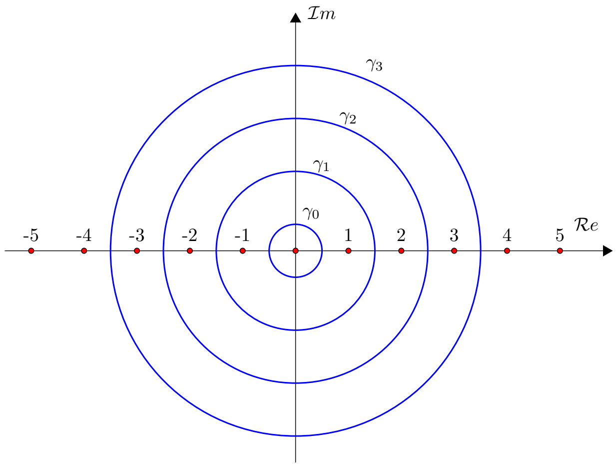
$$\mathrm{Res}(f,k) = \lim_{z\to k}(z-k)\frac{\cos(\pi z)}{z^2\sin(\pi z)} = \frac{\cos(\pi k)}{k^2}\lim_{z\to k}\frac{(z-k)}{\sin(\pi z)}$$

$$\xrightarrow{\text{de l'Hopital}} \frac{\cos(\pi k)}{k^2}\lim_{z\to k}\frac{1}{\pi\cos(\pi z)} = \frac{\cancel{\cos(\pi k)}}{k^2}\frac{1}{\pi\cancel{\cos(\pi k)}} = \frac{1}{\pi k^2}$$

Resta da calcolare il residuo associato al polo triplo nell'origine. I conti qui sono un po' più lunghi visto che dobbiamo calcolarci la derivata seconda della funzione integranda:

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\frac{\cos(\pi z)}{z^2\sin(\pi z)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[2\pi\left(\pi z\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} - 1\right)\frac{1}{\sin^2(\pi z)}\right] = -\frac{\pi}{3}$$

I calcoli per risolvere l'ultimo limite sono stati omessi per brevità ma esso può essere risolto utilizzando i limiti notevoli (in particolare $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$) e il Teorema di de l'Hopital. Ora che



abbiamo tutto, cerchiamo di capire come sono fatte le curve sulle quali integrare al variare di n nei naturali. E' immediato constatare che si tratta di circonferenze centrate nell'origine che vanno a intersecare gli assi a metà tra due numeri interi:

Notiamo che la generica circonferenza γ_n contiene, nella sua parte iterna, la singolarità nell'origine e esattamente $2n$ singolarità sugli interi. Non ci resta che applicare il teorema dei residui:

$$\oint_{\gamma_n} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{3} + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi k^2} \right)$$

Esercizi aggiuntivi svolti.

Esercizio 6. Si calcoli

$$\mathcal{I} = \oint_{\gamma} \left[z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{2z}{2z-5} \right] \mathrm{d}z.$$

dove γ è la circonferenza di raggio $\rho = 2$ centrata in $i/2$. Ripetere l'esercizio con $\rho = 4$.

Soluzione. L'integrando è dato dalla somma di due funzioni. Per la linearità dell'integrale scriviamo

$$\mathcal{I} = \oint_{\gamma} \underbrace{z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)}_{f_1} \mathrm{d}z + \oint_{\gamma} \underbrace{\frac{2z}{2z-5}}_{f_2} \mathrm{d}z.$$

La seconda funzione è olomorfa all'interno della circonferenza (ha polo semplice in $\frac{5}{2}$), per cui il suo integrale è nullo. Al contrario, la funzione $z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ presenta una singolarità in $z_1 = 0$, all'interno di supp_γ. Possiamo calcolare lo sviluppo di Laurent, ricordando lo sviluppo di

$$\cos(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{2k}$$

Di conseguenza

$$z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k+3}.$$

La funzione presenta quindi in $z_1 = 0$ una singolarità essenziale con $\text{Res}\,(f_1, 0) = a_{-1} = \frac{1}{24}$. Quindi:

$$I = 2\pi i \, \text{Res}\,(f_1, 0) = \frac{\pi i}{12}$$

Nel caso $\rho = 4$, anche il polo di $f_2 = \frac{2z}{2z-5}$ è all'interno della curva. Il residuo corrispondente è

$$\operatorname{Res}\left(f_2, \frac{5}{2}\right) = \lim_{z \to \frac{5}{2}} \frac{2z}{2} = \frac{5}{2} \Longrightarrow \mathcal{I} = 2\pi i \left[\frac{5}{2} + \frac{1}{24}\right] = \frac{61}{12}\pi i$$

Il Teorema dei residui si rivela un potente strumento anche per il calcolo di integrali reali, che sarebbero difficili da svolgere o anche non attaccabili con metodi elementari (Analisi I e II).

Esercizio 7. Si calcoli

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{4}{1+x^4}\, \mathrm{d}x$$

Soluzione. Innanzitutto scriviamo (per definizione)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{4}{1+x^4}\, \mathrm{d}x = \lim_{\rho \to \infty} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{4}{1+x^4}\, \mathrm{d}x$$

Osserviamo che l'integrale converge, in quanto l'integranda è positiva e infinitesima di ordine 4 per $x \to \infty$:

$$\left|\frac{4}{1+x^4}\right| \sim \frac{4}{x^4}.$$

A questo punto, l'idea è di considerare una curva di Jordan γ nel piano complesso che può essere scritta come la concatenazione di due curve: $\gamma_1 = t, t \in [-\rho, \rho]$ che è il segmento della retta reale da $-\rho$ a ρ e $\gamma_2 = \rho e^{it}, t \in [0, \pi]$ che è la semicirconferenza superiore centrata nell'origine e di raggio ρ. Osserviamo che

$$\oint_\gamma \frac{4}{1+z^4}\, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{4}{1+z^4}\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{4}{1+z^4}\, \mathrm{d}z = \int_{-\rho}^{\rho} \frac{4}{1+x^4}\, \mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} \frac{4}{1+z^4}\, \mathrm{d}z$$

dove il primo integrale, essendo sulla retta reale, è scritto come un integrale in $\mathbb{R}$. Osserviamo quindi che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{4}{1+x^4}\, \mathrm{d}x = \lim_{\rho \to \infty} \left[\int_\gamma \frac{4}{1+z^4}\, \mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} \frac{4}{1+z^4}\, \mathrm{d}z\right].$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che, per la disuguaglianza di Darboux,

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{4}{1+z^4}\, \mathrm{d}z\right| \leq L_{\gamma_2} \max_{z \in \gamma_2} \left|\frac{4}{1+z^4}\right| = \rho\pi \max_{z \in \gamma_2} \frac{4}{|1+z^4|}$$

Dove $L_{\gamma_2} = \rho\pi$ è la lunghezza della curva γ_2. Ovviamente il massimo sarà raggiunto dove il modulo del denominatore è minimo. Si ha che:

$$\min_{z \in \gamma_2} \left|1+z^4\right| = \min_{t \in [0,\pi]} |1 + \rho^4 e^{4it}| = \min_{t \in [0,\pi]} \sqrt{(\rho^4 \cos(4t) + 1) + \rho^8 \sin^2(4t)}$$

$$= \min_{t \in [0,\pi]} \sqrt{\rho^8 + 2\rho^4 \cos(4t) + 1} = \sqrt{\rho^8 - 2\rho^4 + 1} = \rho^4 - 1$$

Quindi, possiamo scrivere:

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{4}{1+z^4}\, \mathrm{d}z\right| \leq \rho\pi \frac{4}{\rho^4 - 1} \to 0 \text{ per } \rho \to \infty$$

Di conseguenza, per il Teorema dei residui

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{4}{1+x^4}\, \mathrm{d}x = \lim_{\rho \to \infty} \oint_\gamma \frac{4}{1+z^4}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z_i : Im(z_i) > 0} \operatorname{Res}(f, z_i)$$

Notiamo che ci interessano solo le singolarità z tali per cui $\mathcal{I}m(z) > 0$ in quanto la curva di integrazione occupa solo il semipiano complesso dove la parte immaginaria è positiva.

$f(z)$ ha 4 poli semplici, di cui due con parte immaginaria positiva in $z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 + i)$. Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f, \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \to \frac{\sqrt{2}}{2}(i+i)} \frac{4}{(z^2+i)(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)))} = \frac{\sqrt{2}}{i-1} \\
\operatorname{Res}\left(f, \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right) &= \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \to \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)} \frac{4}{(z^2-i)(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)))} = \frac{\sqrt{2}}{i+1}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{4}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \left[\frac{\sqrt{2}}{i-1} + \frac{\sqrt{2}}{i+1}\right] = 2\pi i \frac{2\sqrt{2}i}{-2} = 2\sqrt{2}\pi.$$