Fisica II

Esercitazione 2

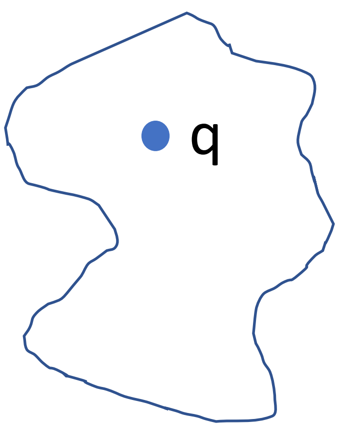
Alessandro Pedico
alessandro.pedico@polito.it

07/10/2022

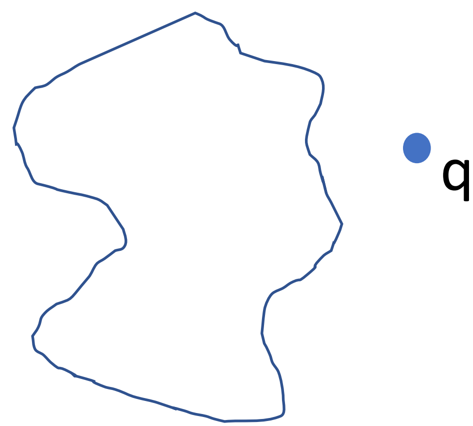
Legge di Gauss

LEGGE DI GAUSS $$\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, \mathbf{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = 0$$



Legge di Gauss

LEGGE DI GAUSS $$\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, \mathrm{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Esistono casi in cui la legge di Gauss può essere utilizzata per calcolare in maniera semplice il campo elettrico generato da una **distribuzione di cariche**.

In generale, è possibile quando il sistema esibisce **elevata simmetria**, ovvero quando è possibile trovare una superficie di integrazione rispetto alla quale il campo elettrico sia perpendicolare o parallelo, rimanendo costante in modulo.

Legge di Gauss

PAG. 73 – ESEMPIO 3.1 - *Campo Elettrostatico/Pot. Elettrostatico di una* ***distribuzione di carica superficiale sferica***

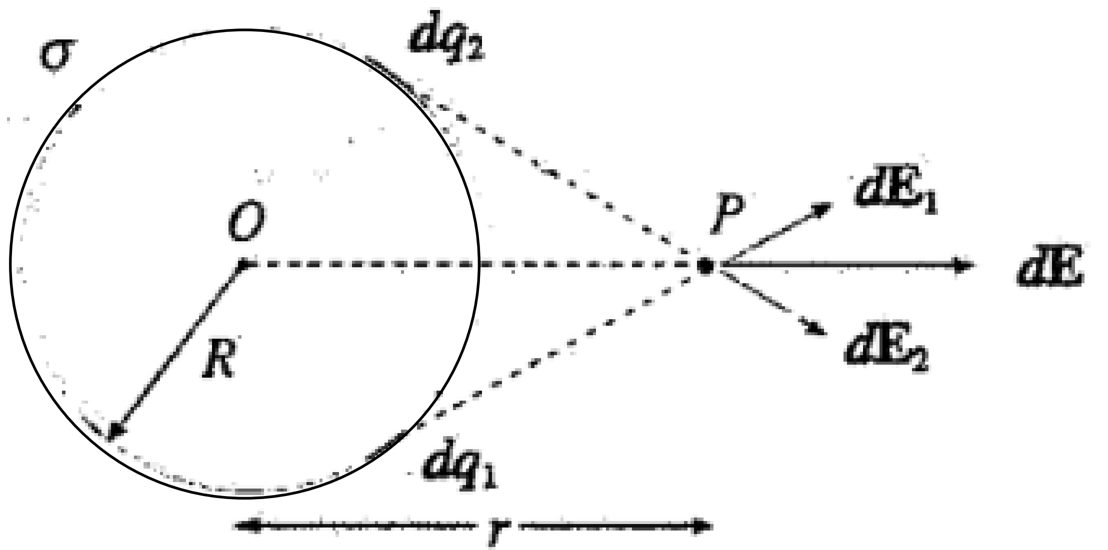
PAG. 73 – ESEMPIO 3.2 - *Campo Elettrostatico/Pot. Elettrostatico di una* ***sfera uniformemente carica***

PAG. 75 – ESEMPIO 3.3 - *Campo Elettrostatico/Pot. Elettrostatico di un* ***cilindro infinito uniformemente carico***

Gli esercizi sono tratti da «Elementi di Fisica: elettromagnetismo e onde», Mazzoldi-Nigro-Voci

Sfera carica

Una carica *q* è distribuita con densità superficiale costante *σ* su una superficie sferica di raggio *R*. Calcolare il campo elettrostatico all'interno e all'esterno della superficie.



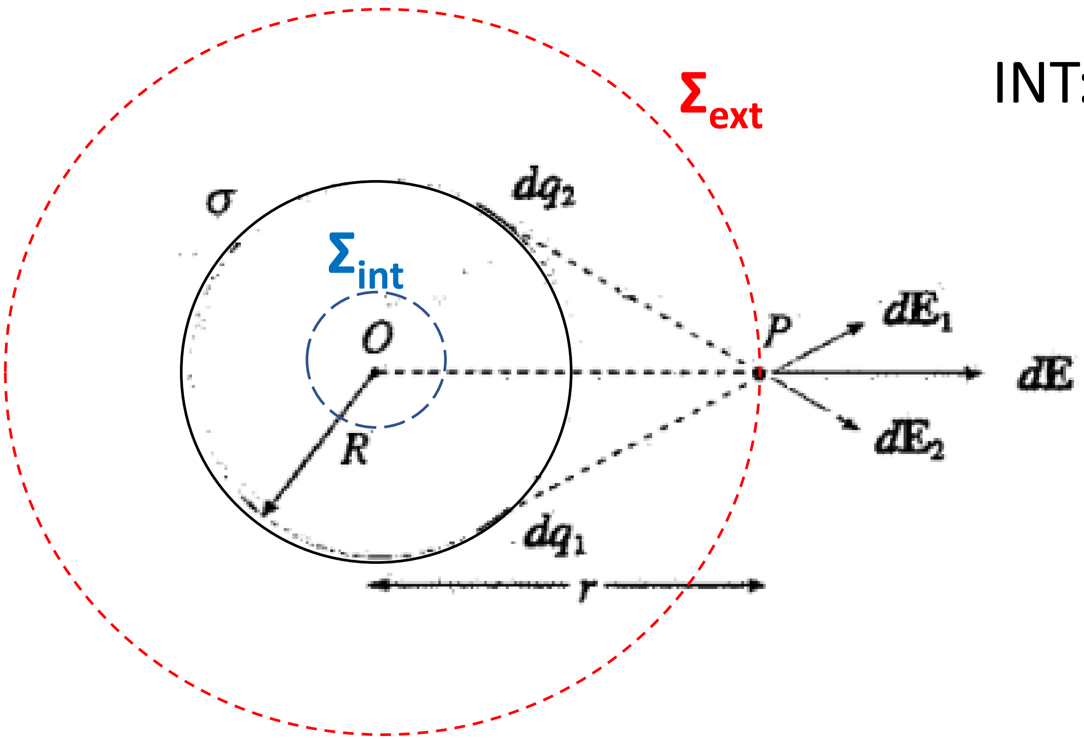
Per simmetria della distribuzione di carica, il campo elettrico è ovunque orientato radialmente e il suo modulo dipende esclusivamente dalla distanza dal centro della sfera

Superficie sferica carica

Possiamo quindi agevolmente sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie sferica, in quanto:

EXT: $\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \, \mathbf{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

INT: $\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \, \mathbf{dS} = 0$



Superficie sferica carica

Possiamo quindi agevolmente sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie sferica, in quanto:

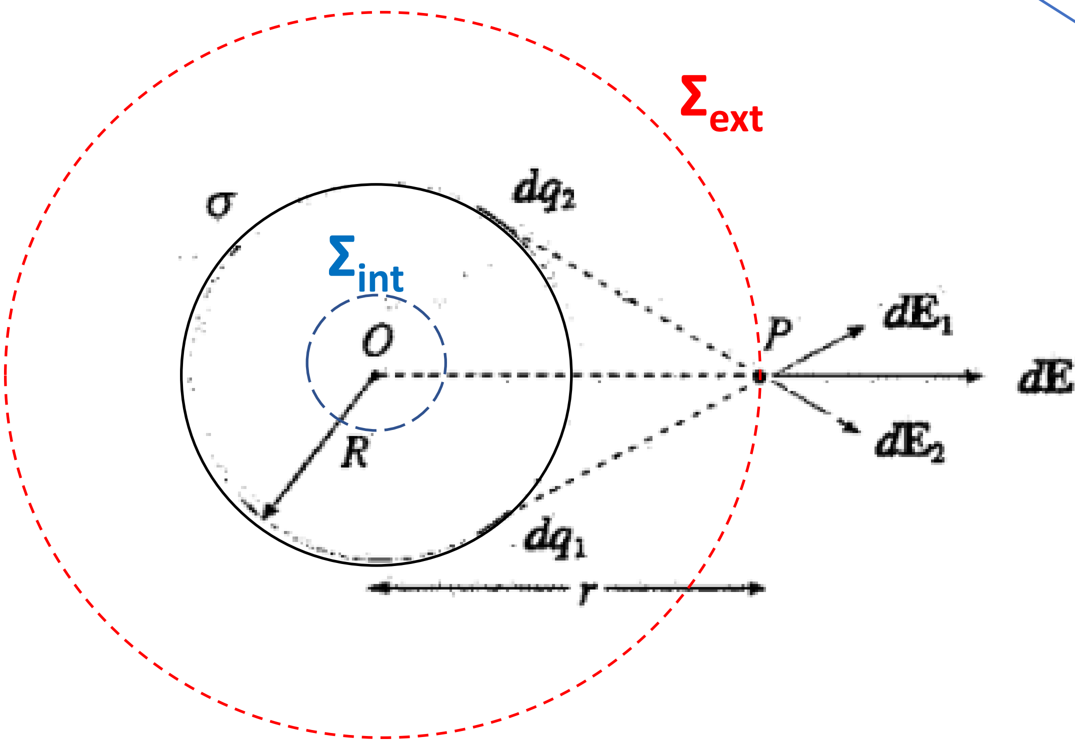
Gauss

EXT:

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

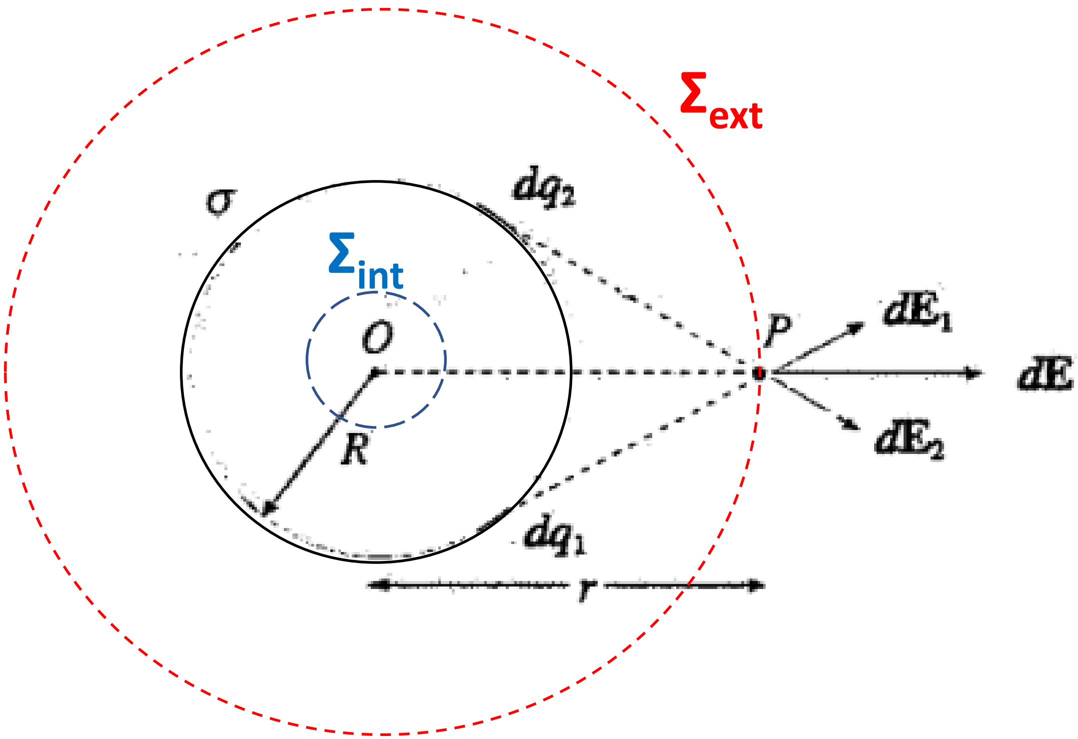
$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS =$$

$$= \int_S E \, dS = E \int_S dS = E\,S$$



Superficie sferica carica

Possiamo quindi agevolmente sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie sferica, in quanto:



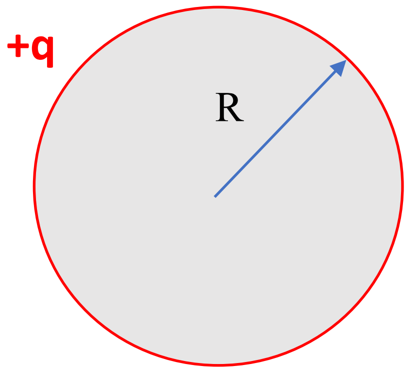
$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS = E\,S$$

$$E = \frac{q}{S\,\varepsilon_0}$$

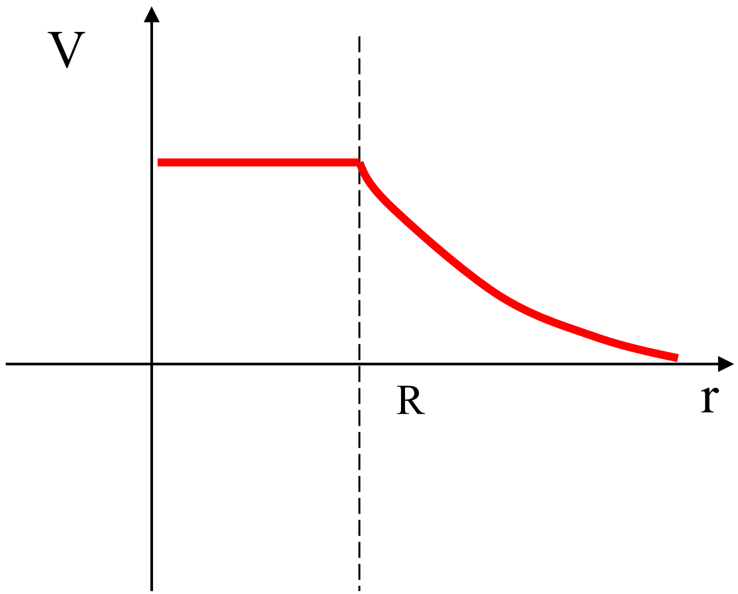
$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}}$$

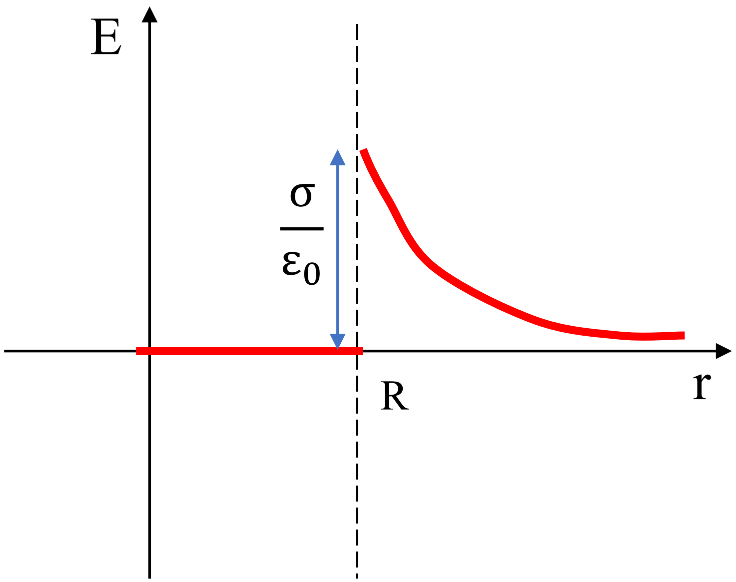
Superficie sferica carica



$r > R$ $\quad \vec{E}(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r \quad V(r) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r}$

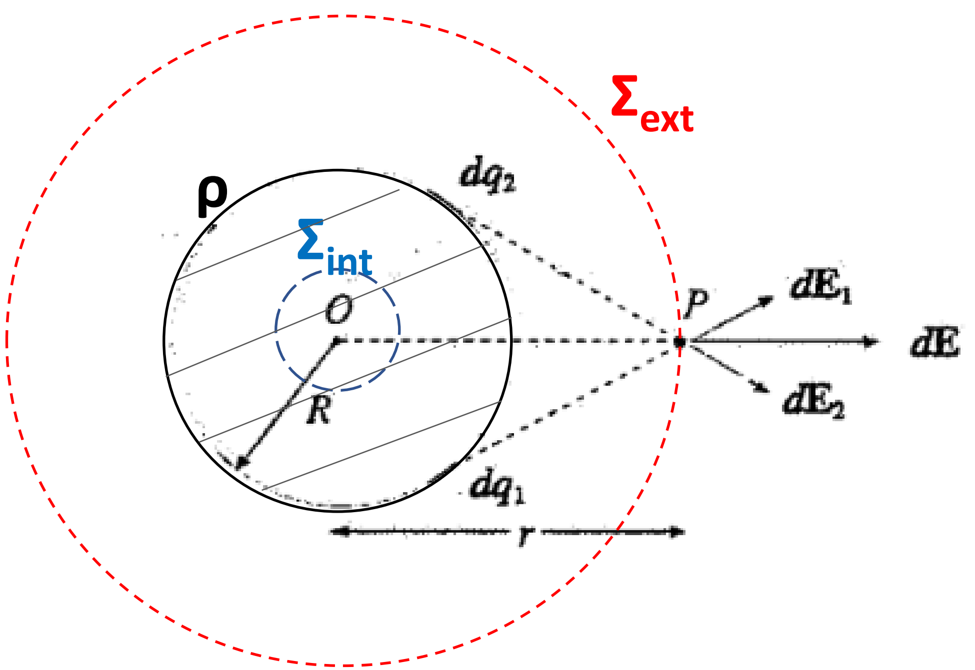
$0 < r < R$ $\quad \vec{E}(r) = 0 \quad V(r) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R}$





Sfera carica

Una carica q è distribuita con densità volumica costante ρ in una sfera di raggio R. Calcolare il campo elettrostatico all'interno e all'esterno della superficie.

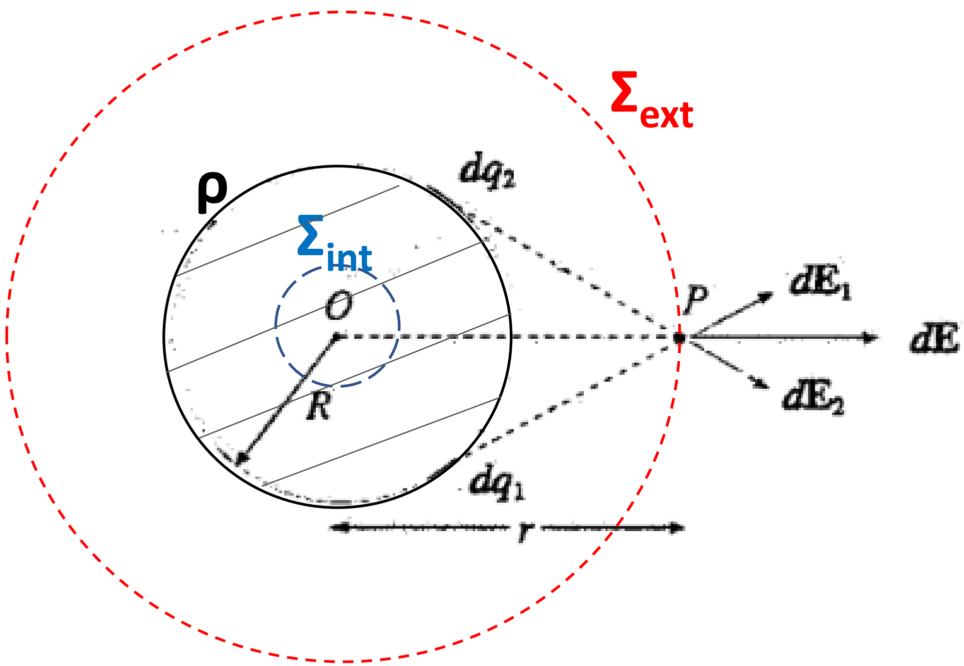


Sfera uniformemente carica

Analogamente a quanto fatto in precedenza, possiamo sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie sferica, in quanto:

EXT: $\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \, \mathbf{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

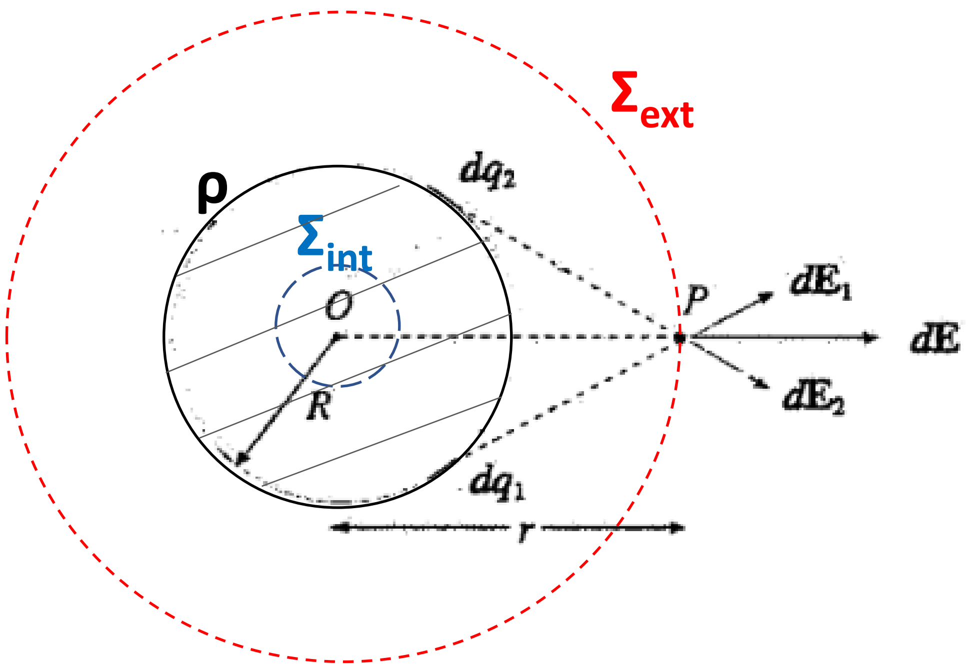
INT: $\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \, \mathbf{dS} \neq 0$



Sfera uniformemente carica

Analogamente a quanto fatto in precedenza, possiamo sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie sferica, in quanto:

INT: $$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS = E\,S$$



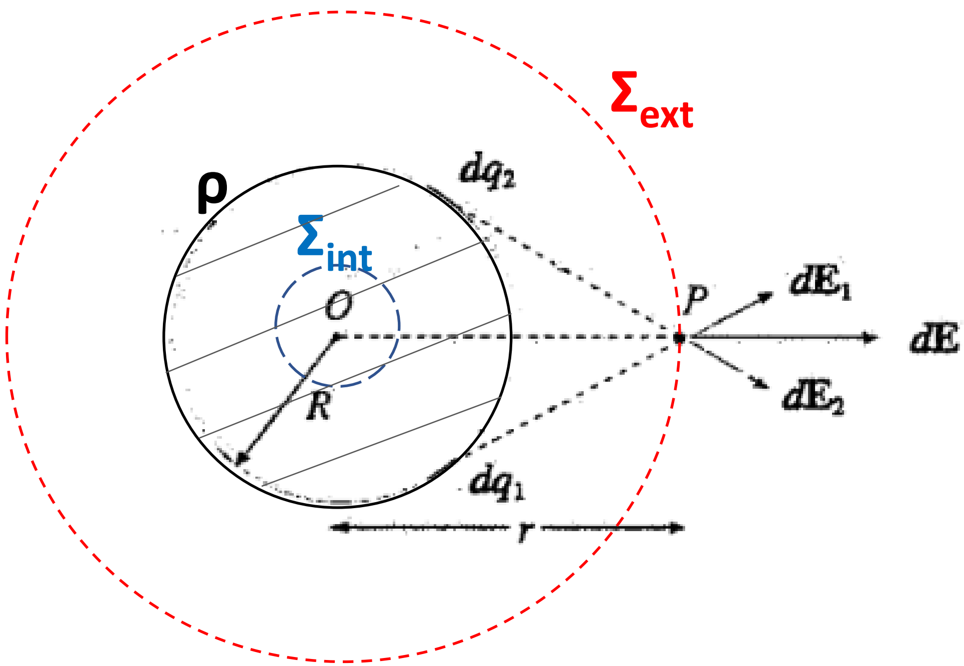
$$q_{int} < q$$

$$q_{int} = \rho \, \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\rho \, 4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$$

Sfera uniformemente carica

Analogamente a quanto fatto in precedenza, possiamo sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie sferica, in quanto:



$$\Phi(\vec{E}) = E\,S$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\rho\,4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho\,4\pi r^3}{S\,3\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho\,4\pi r^3}{4\pi r^2\,3\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\rho\,r}{3\varepsilon_0}}$$

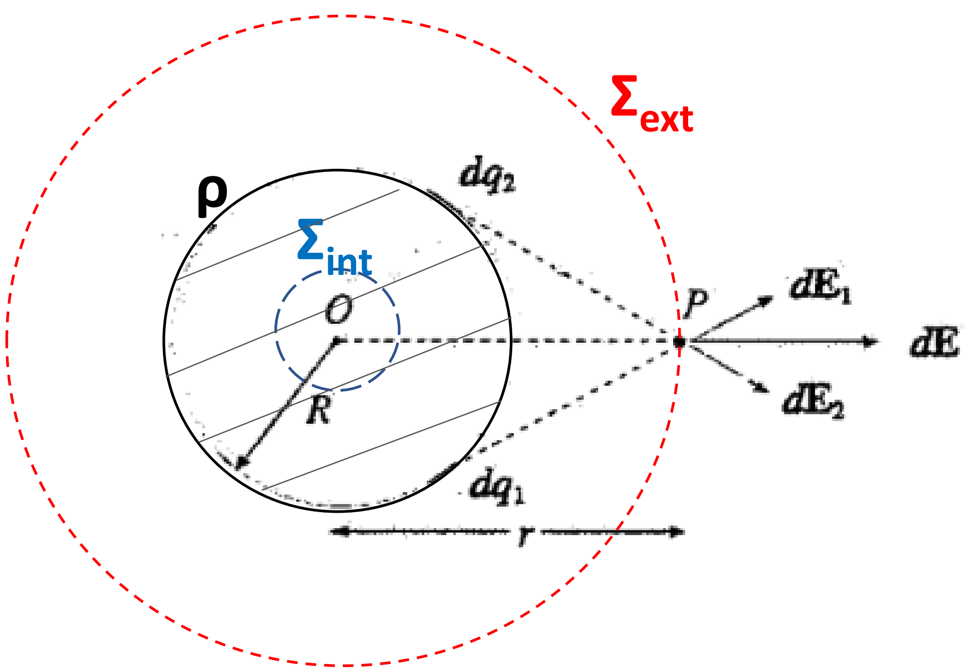
Sfera uniformemente carica

Ricaviamo ora il potenziale elettrico all'interno della sfera, utilizzando la definizione già vista in precedenza:

INT: $$\mathbf{V}(r) - \mathbf{V}(R) = \int_r^R \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r \, \mathrm{d}r =$$

$$= \int_r^R E \, \mathrm{d}r = \int_r^R \frac{\rho \, r}{3\varepsilon_0} \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_r^R r \mathrm{d}r = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right)$$



Sfera uniformemente carica

Ricaviamo ora il potenziale elettrico all'interno della sfera, utilizzando la definizione già vista in precedenza:

INT: $$\mathbf{V}(\boldsymbol{r}) - \mathbf{V}(\boldsymbol{R}) = \int_{r}^{R} \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \int_{r}^{R} \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r}^{R} \frac{\boldsymbol{\rho}\, \boldsymbol{r}}{3\varepsilon_0} \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{\rho}}{3\varepsilon_0} \int_{r}^{R} \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{6\varepsilon_0} \left(\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{r}^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\rho}}{6\varepsilon_0} \left(\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{r}^2\right) + \mathbf{V}(\boldsymbol{R}) =$$

Sfera uniformemente carica

Ricaviamo ora il potenziale elettrico all'interno della sfera, utilizzando la definizione già vista in precedenza:

INT: $$\mathbf{V}(r) - \mathbf{V}(R) = \int_r^R \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r \, \mathrm{d}r =$$

$$= \int_r^R E \, \mathrm{d}r = \int_r^R \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0} \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_r^R r \mathrm{d}r = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} \left(R^2 - r^2\right)$$

$$\frac{3q}{4\pi R^3}$$

$$\mathbf{V}(r) = \frac{\boxed{\rho}}{6\varepsilon_0} \left(R^2 - r^2\right) + \boxed{\mathbf{V}(R)} =$$

$$\mathbf{V(R)} = \frac{\mathbf{q}}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R}$$

Sfera uniformemente carica

Ricaviamo ora il potenziale elettrico all'interno della sfera, utilizzando la definizione già vista in precedenza:

INT: $$\mathbf{V}(\boldsymbol{r}) - \mathbf{V}(\boldsymbol{R}) = \int_r^R \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \int_r^R \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^R \frac{\boldsymbol{\rho}\, \boldsymbol{r}}{3\varepsilon_0} \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{\rho}}{3\varepsilon_0} \int_r^R \boldsymbol{r} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{6\varepsilon_0} \left(\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{r}^2\right)$$

$$\frac{3q}{4\pi R^3}$$

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boxed{\boldsymbol{\rho}}}{6\varepsilon_0} \left(\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{r}^2\right) + \boxed{\mathbf{V}(\boldsymbol{R})} = \frac{\mathbf{q}}{8\,\pi\,\varepsilon_0 \boldsymbol{R}^3} \left(\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{r}^2\right) + \frac{\mathbf{q}}{4\,\pi\,\varepsilon_0 \boldsymbol{R}} =$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{q}}{4\,\pi\,\varepsilon_0 \boldsymbol{R}}$$

Sfera uniformemente carica

Ricaviamo ora il potenziale elettrico all'interno della sfera, utilizzando la definizione già vista in precedenza:

INT: $$\mathbf{V}(r) - \mathbf{V}(R) = \int_r^R \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r \, \mathrm{d}r =$$

$$= \int_r^R E \, \mathrm{d}r = \int_r^R \frac{\rho \, r}{3\varepsilon_0} \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_r^R r \mathrm{d}r = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right)$$

$$\mathbf{V}(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right) + \mathbf{V}(R) = \frac{\mathbf{q}}{8\,\pi\,\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{\mathbf{q}}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R} =$$

$$= \frac{\mathbf{q}}{8\,\pi\,\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - r^2\right) + 2\frac{\mathbf{q}}{8\,\pi\,\varepsilon_0 R^3} R^2 =$$

Sfera uniformemente carica

Ricaviamo ora il potenziale elettrico all'interno della sfera, utilizzando la definizione già vista in precedenza:

INT: $$\mathbf{V}(r) - \mathbf{V}(R) = \int_r^R \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r \, \mathrm{d}r =$$

$$= \int_r^R E \, \mathrm{d}r = \int_r^R \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0} \mathrm{d}r =$$

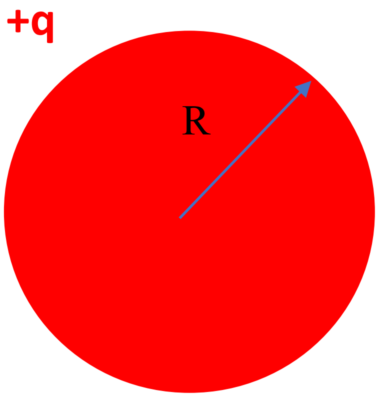
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_r^R r \mathrm{d}r = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right)$$

$$\mathbf{V}(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right) + \mathbf{V}(R) = \frac{\mathbf{q}}{8\,\pi\,\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{\mathbf{q}}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R} =$$

$$= \frac{\mathbf{q}}{8\,\pi\,\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - r^2\right) + 2\frac{\mathbf{q}}{8\,\pi\,\varepsilon_0 R^3} R^2 = \frac{\mathbf{q}}{8\,\pi\,\varepsilon_0 \mathrm{R}}\left(3\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2\right) =$$

$$= \frac{\mathbf{q}}{8\,\pi\,\varepsilon_0 \mathrm{R}}\left(3 - \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{R}^2}\right)$$

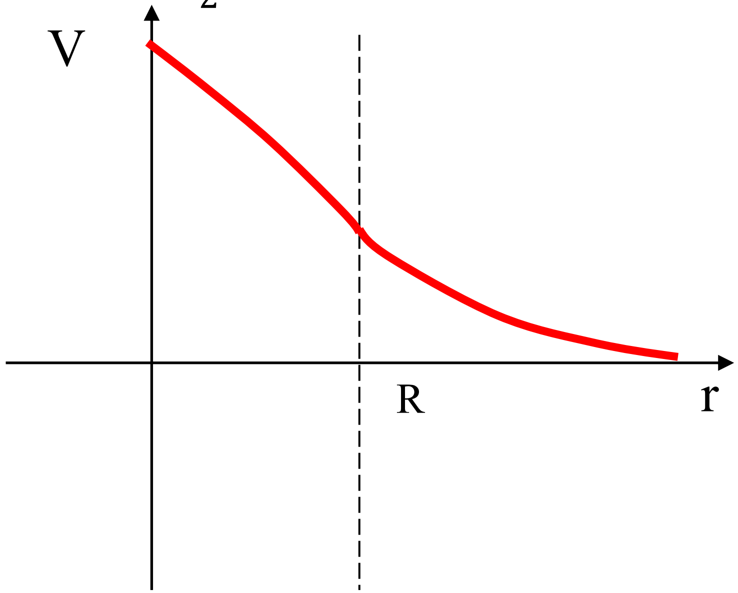
Sfera uniformemente carica

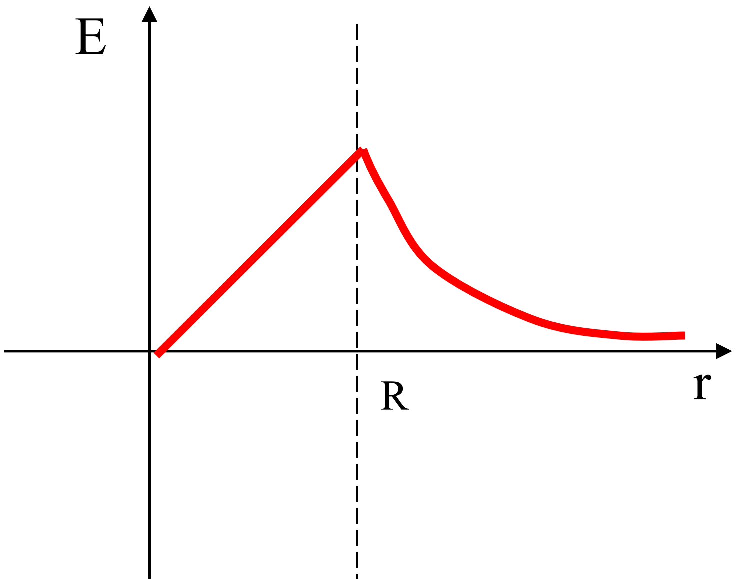


$r > R$ $\quad \vec{E}(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r \qquad V(r) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r}$

$0 < r < R$ $\quad \vec{E}(r) = \dfrac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}\,\hat{u}_r \qquad V(r) = \dfrac{q}{8\,\pi\,\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$

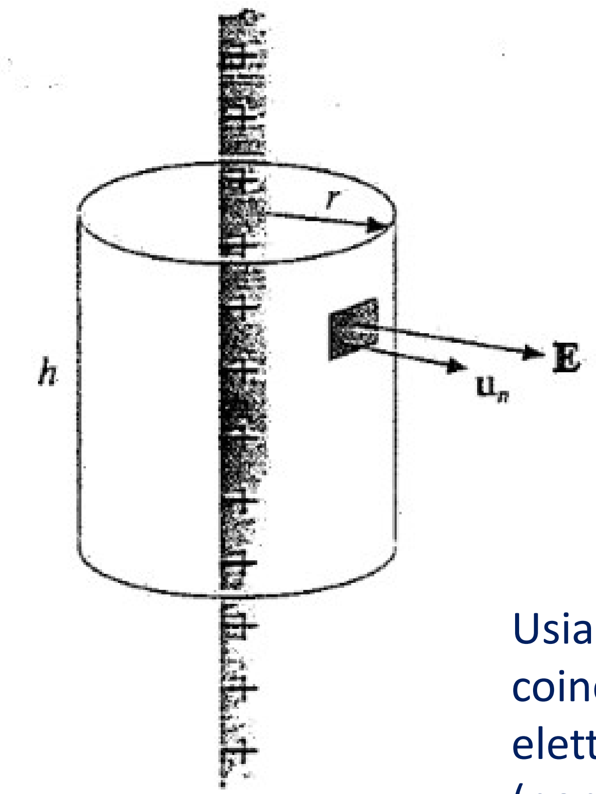
$V(0) = \dfrac{3}{2}V(R)$

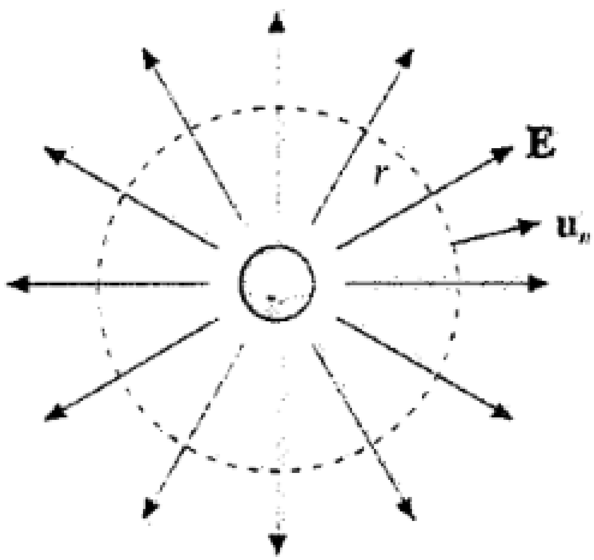




Cilindro carico

Una distribuzione spaziale continua e uniforme di carica ha forma cilindrica di raggio R. Calcolare il campo elettrostatico generato da essa.





Usiamo come superficie di integrazione un cilindro con asse coincidente al cilindro carico; in questo modo, il campo elettrico è perpendicolare alla superficie laterale e parallelo (non contribuisce al flusso) alle basi.

Cilindro infinito uniformemente carico

Possiamo quindi agevolmente sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie cilindrica, in quanto:

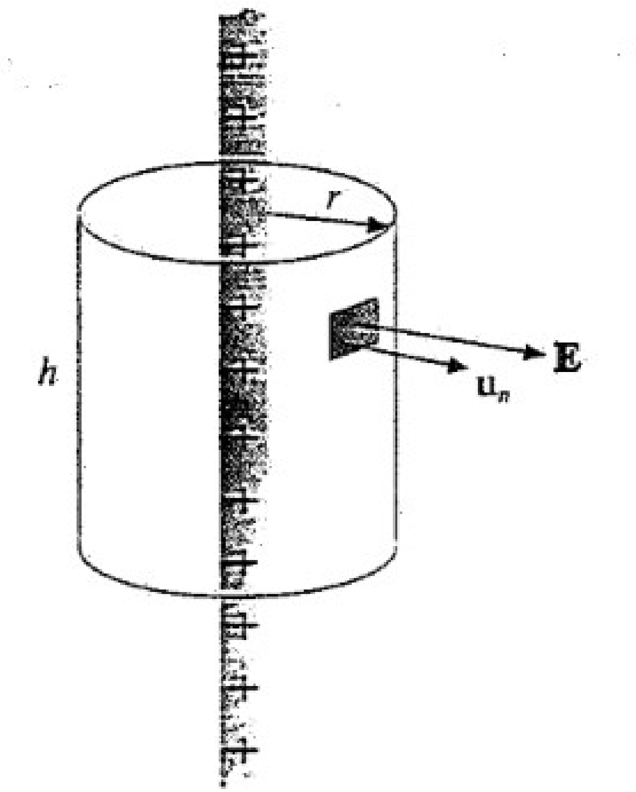
Gauss

EXT:

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

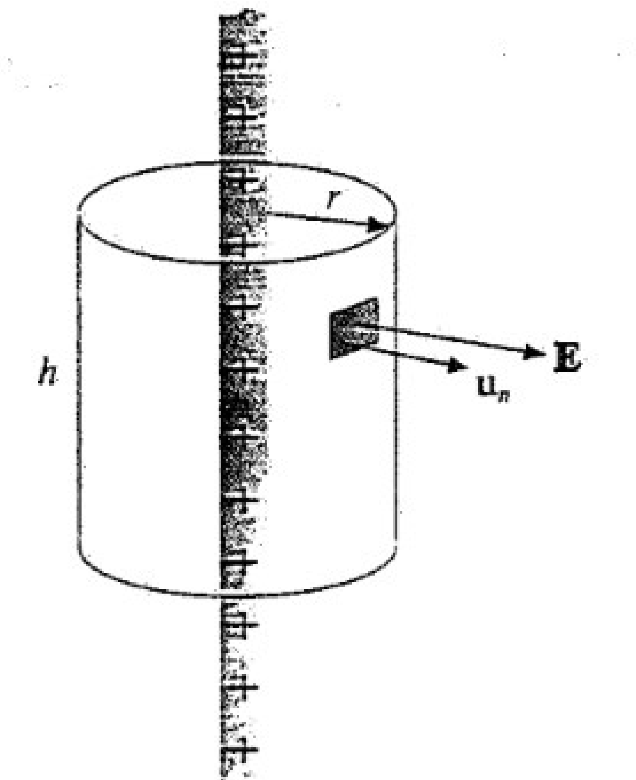
$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS =$$

$$= \int_S E \, dS = E \int_S dS = E\, S$$



Cilindro infinito uniformemente carico

Possiamo quindi agevolmente sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie cilindrica, in quanto:



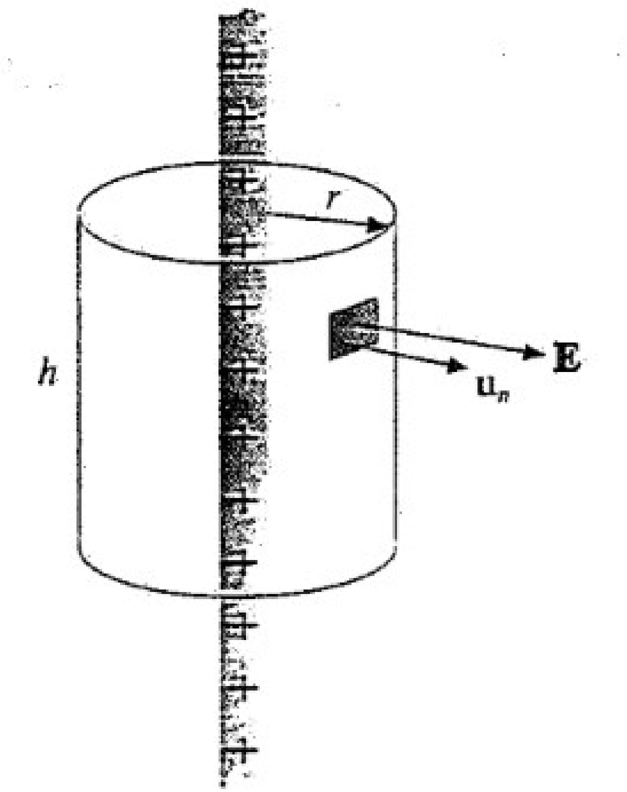
$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \, \mathbf{dS} = \boxed{\frac{\boldsymbol{q}}{\varepsilon_0}}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \, \mathbf{dS} = \boxed{\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{S}}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{S}\,\varepsilon_0} = \frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{2\pi r h \varepsilon_0}}$$

Cilindro infinito uniformemente carico

Possiamo quindi agevolmente sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie cilindrica, in quanto:



$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS = \boxed{\frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS = \boxed{E\,S}$$

$$E = \frac{q}{S\,\varepsilon_0} = \frac{q}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

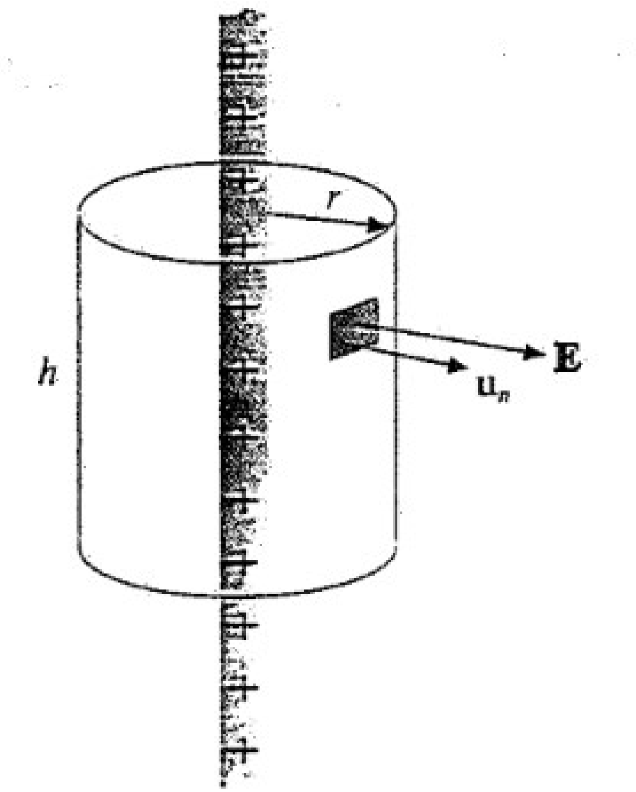
$$q = \int_V \rho \, dV = \rho \int_V dV = \rho\, \pi R^2 h$$

Cilindro infinito uniformemente carico

Possiamo quindi agevolmente sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie cilindrica, in quanto:

$$E = \frac{q}{S\,\varepsilon_0} = \frac{q}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

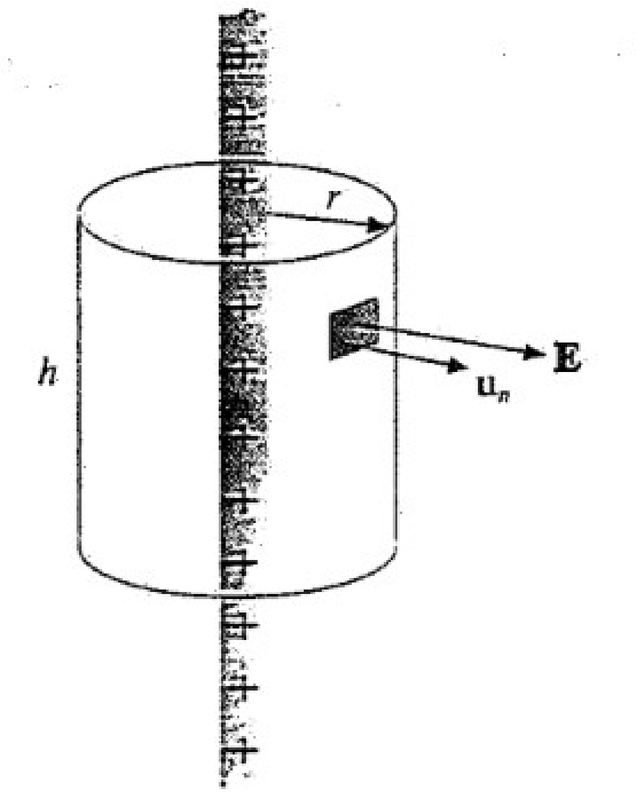
$$q = \int_V \rho\, dV = \rho \int_V dV = \underbrace{\boxed{\rho\, \pi R^2}}_{\lambda} h$$



$$\frac{q}{h} = \lambda$$

Cilindro infinito uniformemente carico

Possiamo quindi agevolmente sfruttare la legge di Gauss applicandola a una superficie cilindrica, in quanto:



$$E = \frac{q}{S\,\varepsilon_0} = \frac{q}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

$$q = \int_V \rho\, dV = \rho \int_V dV = \boxed{\rho\, \pi R^2}\, h$$

$$\lambda$$

$$\frac{q}{h} = \lambda$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}}$$

Cilindro infinito uniformemente carico

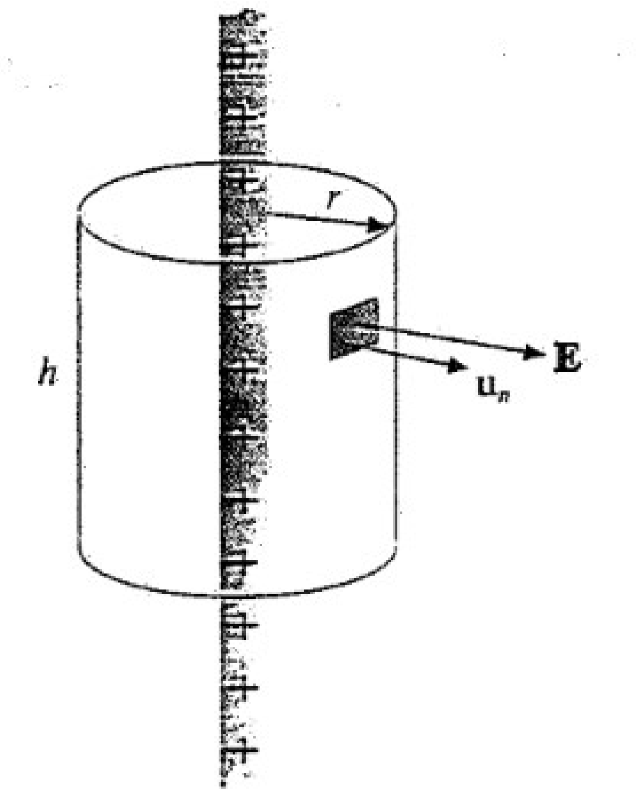
Analogamente a quanto fatto in precedenza, possiamo sfruttare la legge di Gauss per calcolare il campo interno al filo:

Gauss

INT:

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \, \mathbf{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \, \mathbf{dS} = E\,S$$



$$q_{int} = \rho\, \pi r^2 h$$

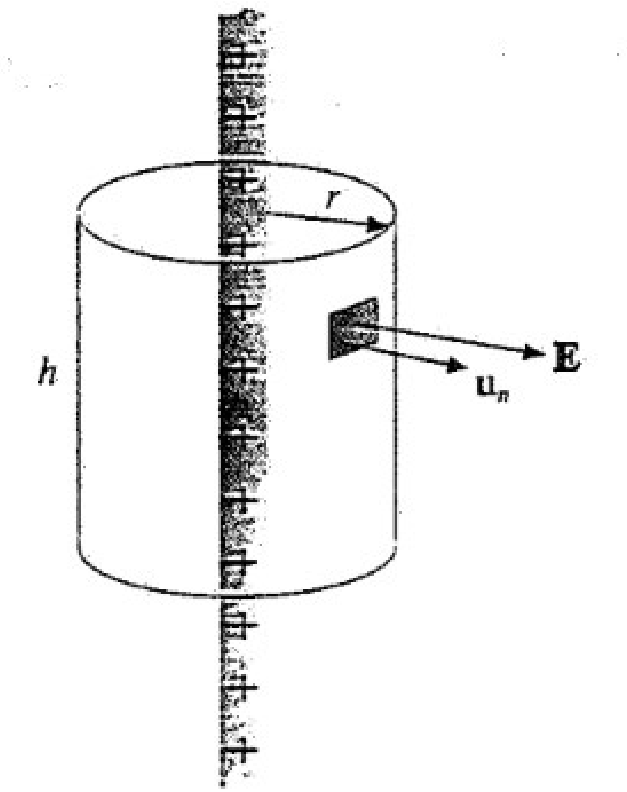
$$\lambda = \rho\, \pi R^2$$

$$q_{int} = \lambda h \frac{r^2}{R^2}$$

Cilindro infinito uniformemente carico

Analogamente a quanto fatto in precedenza, possiamo sfruttare la legge di Gauss per calcolare il campo interno al filo:

$$q_{int} = \lambda h \frac{r^2}{R^2}$$

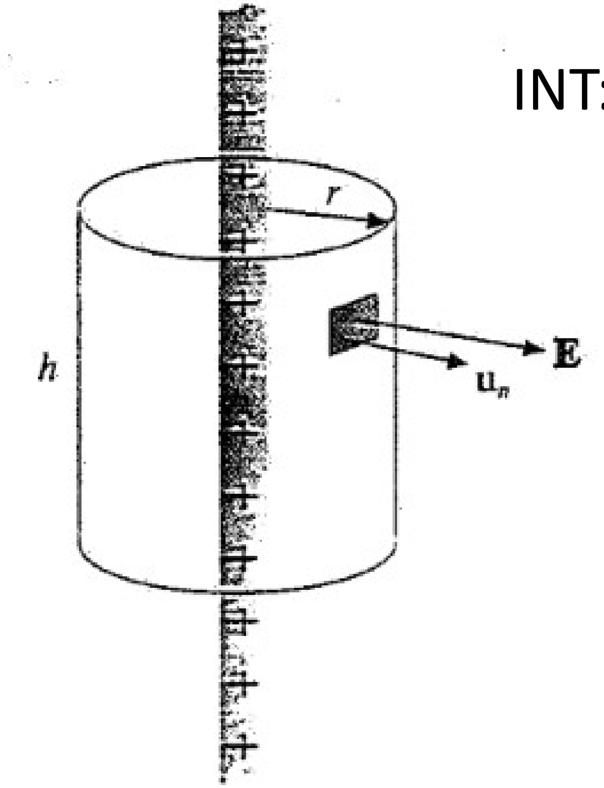


$$E \underbrace{\boxed{S}}_{2\pi r h} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda r}{2\pi R^2 \varepsilon_0}}$$

Cilindro infinito uniformemente carico

Per quanto riguarda il potenziale, invece, si presenta un problema. Il potenziale si può dimostrare che dipende dalla lunghezza h del cilindro. Se il cilindro fosse infinito, avrebbe una carica e un potenziale infinto e il potenziale all'infinito non sarebbe nullo. Tuttavia, è possibile calcolare la differenza di potenziale tra due punti esterni o interno al cilindro:



INT: $$\mathbf{V}(\boldsymbol{r}) - \mathbf{V}(\boldsymbol{R}) = \int_r^R \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r \, \mathbf{d}\boldsymbol{r} = \int_r^R \boldsymbol{E} \, \mathbf{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \int_r^R \frac{\boldsymbol{\lambda} \, \mathbf{r}}{2\pi\varepsilon_0 \mathbf{R}^2} \mathbf{d}\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2\pi\varepsilon_0 \mathbf{R}^2} \int_r^R \boldsymbol{r} \, \mathbf{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{\lambda}}{4\pi\varepsilon_0 \mathbf{R}^2} \left(\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{r}^2\right)$$

Cilindro infinito uniformemente carico

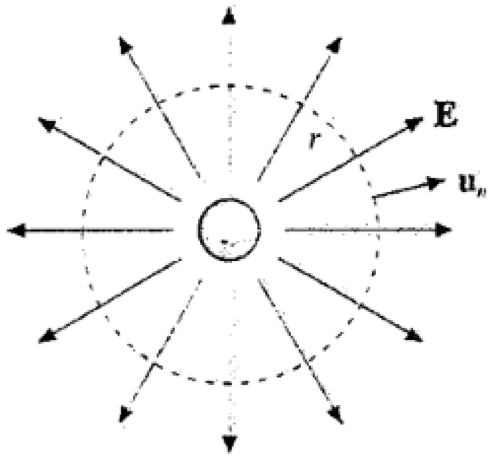
$$\text{EXT:} \quad \mathbf{V}(r_A) - \mathbf{V}(r_B) = \int_{r_A}^{r_B} \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r \, \mathbf{d}r = \int_{r_A}^{r_B} E \, \mathbf{d}r =$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2\pi r \varepsilon_0} \mathbf{d}r = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r} \, \mathbf{d}r =$$

$$= \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2\pi\varepsilon_0} (\ln[r_B] - \ln[r_A]) = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{r_B}{r_A}\right]$$

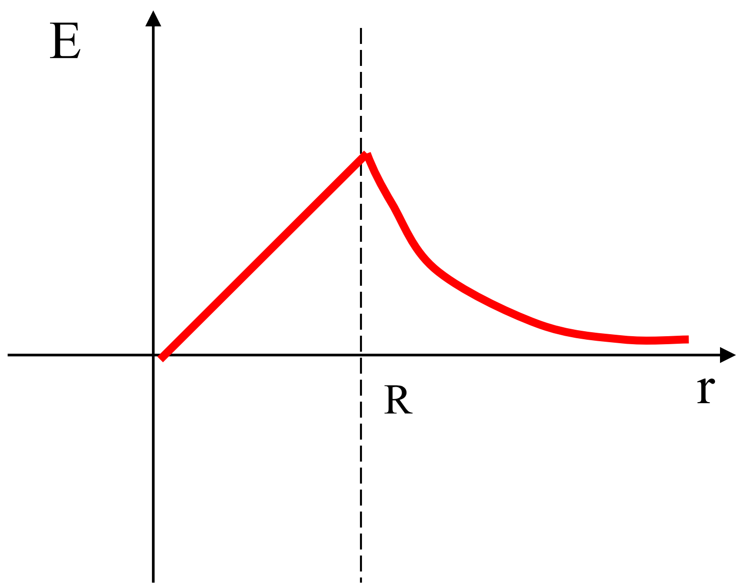
Nonostante il concetto di filo indefinito non sia realistico, questa formula rappresenta una eccellente descrizione delle differenze di potenziale generate da un filo carico reale quando ci troviamo estremamente vicino alla superficie.

Cilindro infinito uniformemente carico



r > R $\quad \vec{E}(r) = \dfrac{\lambda}{2\, r\, \pi\, \varepsilon_0}\, \hat{u}_r$

0 < r < R $\quad \vec{E}(r) = \dfrac{\lambda\, r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\, \hat{u}_r$



r < R $\quad V(r) - V(R) = \dfrac{\lambda}{4\, \pi\, \varepsilon_0 R^2}\left(R^2 - r^2\right)$

$r_A, r_B > R \quad V(r_A) - V(r_B) = \dfrac{\lambda}{2\, \pi\, \varepsilon_0}\, \ln\left[\dfrac{r_B}{r_A}\right]$