Il caso monodimensionale

$n = 1, \quad \Omega = (0, 1)$

$$\begin{cases} \partial_t u - D\,\partial_x^2 u = 0 & \text{in } (0,1)\times(0,+\infty) \\ u = u_0 & \text{in } (0,1)\times\{0\} \\ \partial_x u = 0 & \{0,1\}\times(0,+\infty) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k(t)\,\varphi_k(x)$$

dove $\hat{u}_k(t) = \hat{u}_{k,0}\, e^{-D\lambda_k t}$ dalla teoria generale. Vogliamo ora calcolare esplicitamente i λ_k e le φ_k:

$$\begin{cases} -\varphi_k'' = \lambda_k \varphi_k & \text{in } (0,1) \\ \varphi_k'(0) = \varphi_k'(1) = 0. \end{cases}$$

L'integrale generale è:

$$\varphi_k(x) = C_{1,k}\, e^{i\sqrt{\lambda_k}\,x} + C_{2,k}\, e^{-i\sqrt{\lambda_k}\,x}.$$

Imponiamo le condizioni al bordo calcolando preliminarmente:

$$\varphi_k'(x) = i\sqrt{\lambda_k}\, C_{1,k}\, e^{i\sqrt{\lambda_k}\,x} - i\sqrt{\lambda_k}\, C_{2,k}\, e^{-i\sqrt{\lambda_k}\,x}$$

$$\begin{cases} i\sqrt{\lambda_k}\left(c_{1,k} - c_{2,k}\right) = 0 \\ i\sqrt{\lambda_k}\left(c_{1,k}e^{i\sqrt{\lambda_k}} - c_{2,k}e^{-i\sqrt{\lambda_k}}\right) = 0. \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} i\sqrt{\lambda_k} & -i\sqrt{\lambda_k} \\ i\sqrt{\lambda_k}\,e^{i\sqrt{\lambda_k}} & -i\sqrt{\lambda_k}\,e^{-i\sqrt{\lambda_k}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Imponiamo che la matrice dei coefficienti sia singolare ($\rightsquigarrow \psi_k \not\equiv 0$):

$$\lambda_k e^{-i\sqrt{\lambda_k}} - \lambda_k e^{i\sqrt{\lambda_k}} = 0$$

$$-\lambda_k \underbrace{\left(e^{i\sqrt{\lambda_k}} - e^{-i\sqrt{\lambda_k}}\right)}_{=2i\sin(\sqrt{\lambda_k})} = 0$$

$$\lambda_k \sin(\sqrt{\lambda_k}) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_k = 0 \\ \sin(\sqrt{\lambda_k}) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\lambda_k} = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Longrightarrow \lambda_k = k^2\pi^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Ritornando al sistema lineare con questi λ_k otteniamo

$$C_{2,k} = C_{1,k}$$

e quindi le autofunzioni sono:

$$\varphi_k(x) = C_{1,k}\Big(\underbrace{e^{ik\pi x} + e^{-ik\pi x}}_{= 2\cos(k\pi x)}\Big)$$

$$= 2C_{1,k}\cos(k\pi x).$$

Fissando $C_{1,k} = \frac{1}{2}$ $\forall k \geq 0$ abbiamo in definitiva:

$$\varphi_k(x) = \cos(k\pi x), \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Oss.

(i) Gli autovalori sono uguali a quelli del caso con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo.

(ii) Le autofunzioni sono diverse: qui i coseni, in precedenza i seni.

(iii) In questo caso c'è l'autovalore nullo $\lambda_0 = 0$ con autospazio associato $\mathrm{span}\{1\}$.

Abbiamo quindi che la soluzione per serie si scrive in definitiva come:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_{k,0}\, e^{-Dk^2\pi^2 t} \cos(k\pi x).$$

Immaginiamo di fissare un dato iniziale della forma:

$$u_0(x) = \cos(\pi x) + 1,$$

che ha come coefficienti $\hat{u}_{0,k}$ i seguenti:

$$\hat{u}_{0,0} = 1, \quad \hat{u}_{1,0} = 1, \quad \hat{u}_{k,0} = 0 \ \forall k \geq 2.$$

Di conseguenza con questo dato iniziale la soluzione per serie si riduce a:

$$u(x,t) = 1 + e^{-D\pi^2 t} \cos(\pi x).$$

Da qui vediamo che per ogni $x \in (0,1)$ fissato si ha:

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 1$$ $\rightsquigarrow$ conv. puntuale in x alla densità uniforme su $(0,1)$

Possiamo dire anche di più:

$$\begin{aligned} |u(x,t) - 1| &= \left| e^{-D\pi^2 t} \cos(\pi x) \right| \\ &= e^{-D\pi^2 t} |\cos(\pi x)| \\ &\leq e^{-D\pi^2 t}. \end{aligned}$$

Passando al sup su $x \in (0,1)$ di entrambi i membri:

$$\| u(\cdot,t) - 1 \|_\infty \leq e^{-D\pi^2 t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$$

da cui vediamo che la convergenza di u a 1 in tempo è uniforme rispetto a x.