ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 8

1. Sia $n \in \mathbb{N}_+$. Sia $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Per ogni $x \in \mathbb{F}^n$, definiamo $\varphi_y : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ ponendo
$$\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad x \in \mathbb{F}^n.$$
   (a) Dimostrare che $\varphi_y \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F})$ per ogni $y \in \mathbb{F}^n$.
   (b) Dimostrare che la mappa $\Psi : \mathbb{F}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F})$ definita da
$$\Psi(y) = \varphi_y \qquad \forall y \in \mathbb{F}^n$$
   è un isomorfismo di spazi vettoriali (cioè Ψ è lineare e biiettiva).
   [Suggerimento: identificare $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F})$ con uno spazio di matrici.]

   Per $p \in [1, \infty]$, denotiamo con X_p lo spazio di Banach $\mathbb{F}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$.
   (c) Siano $p, q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati. Dimostrare che la mappa $\Psi : X_q \to (X_p)'$ definita in (b) è un isomorfismo isometrico, dove $(X_p)'$ è il duale di X_p.
   [Suggerimento: seguire la dimostrazione discussa a lezione per la caratterizzazione del duale di ℓ^p. Si noti tuttavia che qui $p = \infty$ è incluso!]
2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare dato da $f(x) = x_1 + x_2$ per ogni $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare la norma di tale funzionale (come elemento del duale di $\mathbb{R}^2$) quando:
   (a) $\mathbb{R}^2$ è dotato della norma $\|\cdot\|_p$ per $p \in [1, \infty]$;
   [Suggerimento: usare i risultati dell'esercizio 1.]
   (b) $\mathbb{R}^2$ è dotato della norma $\|\cdot\|$ definita da $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.
   [Suggerimento: Riesz–Fréchet.]
3. Sia $H = c_{00}$ pensato come spazio pre-hilbertiano con il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indotto da ℓ^2. Sia $\phi : H \to \mathbb{F}$ definito da
$$\phi(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{1+k} \qquad \forall \underline{x} \in H.$$
   (a) Dimostrare che $\phi \in H'$.
   (b) Dimostrare che non esiste $\underline{y} \in H$ tale che $\phi(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ per ogni $\underline{x} \in H$.
   (c) Perché H e ϕ non costituiscono un controesempio al teorema di Riesz–Fréchet?
   (d) Determinare $\|\phi\|_{H'}$.
4. Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Per ogni $g \in C[a, b]$, definiamo $\psi_g : C[a, b] \to \mathbb{F}$ ponendo
$$\psi_g(f) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \qquad \forall f \in C[a, b]. \tag{$\dagger$}$$
   Pensiamo $C[a, b]$ come spazio di Banach con la norma della convergenza uniforme.
   (a) Dimostrare che $\psi_g \in (C[a, b])'$ per ogni $g \in C[a, b]$.
   (b) Dimostrare che
$$\|\psi_g\|_{(C[a,b])'} = \int_a^b |g(t)|\, dt \qquad \forall g \in C[a, b].$$
   [Suggerimento: come nell'esercizio 7 dell'esercitazione 5, testare ψ_g sulle funzioni $g_\epsilon(t) = \overline{g(t)}/(|g(t)| + \epsilon)$ per ogni $\epsilon > 0$ e passare al limite per $\epsilon \to 0^+$.]

   Denotiamo con D lo spazio vettoriale $C[a, b]$ dotato della norma indotta da $L^1(a, b)$.
   (c) Dimostrare che la mappa $\Theta : D \to (C[a, b])'$ data da $\Theta g = \psi_g$ per ogni $g \in D$ è un'isometria lineare.
   (d) Dimostrare che $\Theta : D \to (C[a, b])'$ ha un'unica estensione a un'isometria lineare $\widetilde{\Theta} : L^1(a, b) \to (C[a, b])'$.
   [Suggerimento: esercitazione 6, esercizio 3.]
   (e) Dimostrare che, per ogni $g \in L^1(a, b)$, si ha $\widetilde{\Theta} g = \psi_g$, dove ψ_g è dato da ($\dagger$).
   (f) Dimostrare che, per ogni $g \in L^1(a, b)$, si ha $\psi_g \in (C[a, b])'$ e $\|\psi_g\|_{(C[a,b])'} = \|g\|_1$.

   Per $p \in [a, b]$, sia $V_p : C[a, b] \to \mathbb{F}$ il funzionale di valutazione in p.
   (g) Dimostrare che $V_p \in (C[a, b])' \setminus \operatorname{Im} \widetilde{\Theta}$ per ogni $p \in [a, b]$, e che dunque $\widetilde{\Theta} : L^1(a, b) \to (C[a, b])'$ non è suriettiva.

   [Questo esercizio mostra che $L^1(a, b)$ si immerge isometricamente nel duale di $C[a, b]$.]
5. Supponiamo che $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Sia $\underline{w} = (i^k)_{k \in \mathbb{N}}$, dove $i \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria.
   (a) Dimostrare che $\underline{w} \in \ell^\infty$ e determinare $\|\underline{w}\|_\infty$.

   Sia $A = D_{\underline{w}} \in \mathcal{B}(\ell^2)$ l'operatore di moltiplicazione per $\underline{w}$ (vedi esercitaz. 5, esercizio 3).
   (b) Dimostrare che l'operatore A è coercivo in norma.
   (c) Sia $F_A : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineare associata ad A. Determinare se la forma F_A è coerciva.

6. Sia $\underline{y} = (k/(k+1))_{k\in\mathbb{N}}$.
   (a) Dimostrare che $\underline{y} \in \ell^\infty$ e calcolare $\|\underline{y}\|_\infty$.
   Sia $\varphi_{\underline{y}} \in (\ell^1)'$ il funzionale su ℓ^1 associato a $\underline{y}$, cioè $\varphi_{\underline{y}}(\underline{x}) = \sum_{k=0}^\infty x_k y_k$ per ogni $\underline{x} \in \ell^1$.
   (b) Dimostrare che, per ogni $\underline{x} \in \ell^1$ con $\|\underline{x}\|_1 = 1$, si ha $|\varphi_{\underline{y}}(\underline{x})| < 1$.
   (c) Dimostrare che $\|\varphi_{\underline{y}}\|_{(\ell^1)'} = \sup\{|\varphi_{\underline{y}}(\underline{x})| \,:\, \|\underline{x}\|_1 \leq 1\}$ e che qui l'estremo superiore non è un massimo.
   [Questo esempio mostra come il sup nella definizione della norma sullo spazio duale X' di uno spazio X in generale non possa sostituirsi con max. Questo è in contrasto con la espressione "duale" della norma su X in termini di X' ottenuta come conseguenza del teorema di Hahn–Banach, in cui invece si può usare max.]
7. Siano X, Y spazi normati.
   (a) Sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dimostrare che
   $$\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x\in X \,:\, \|x\|_X \leq 1 \\ \psi\in Y' \,:\, \|\psi\|_{Y'}\leq 1}} |\psi(Tx)|.$$
   [Suggerimento: usare la caratterizzazione della norma $\|\cdot\|_Y$ data dal teorema di Hahn–Banach.]
   Supponiamo ora che Y sia uno spazio con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$.
   (b) Sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dimostrare che
   $$\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x\in X \,:\, \|x\|_X \leq 1 \\ y\in Y \,:\, \|y\|_Y\leq 1}} |\langle Tx, y\rangle_Y|.$$
   Supponiamo ora invece che $Y = \ell^p$ con $p \in [1,\infty]$. Sia $q \in [1,\infty]$ l'esponente coniugato a p.
   (c) Sia $T \in \mathcal{L}(X,\ell^p)$. Dimostrare che
   $$\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x\in X \,:\, \|x\|_X \leq 1 \\ \underline{y}\in \ell^q \,:\, \|\underline{y}\|_q\leq 1}} \left|\sum_{k=0}^\infty (Tx)_k\, y_k\right|,$$
   dove $(Tx)_k$ denota il termine k-esimo della successione $Tx \in \ell^p$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
   Supponiamo più in generale che $Y = L^p(M,\mu)$ con $p \in [1,\infty]$, dove $(M,\mathcal{M},\mu)$ è uno spazio di misura σ-finito. Sia $q \in [1,\infty]$ l'esponente coniugato a p.
   (d) Sia $T \in \mathcal{L}(X, L^p(M,\mu))$. Dimostrare che
   $$\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x\in X \,:\, \|x\|_X \leq 1 \\ g\in L^q(M,\mu) \,:\, \|g\|_q\leq 1}} \left|\int_M (Tx)(t)\, g(t)\, d\mu(t)\right|.$$
8. Siano X, Y, Z spazi normati, e siano X', Y', Z' i rispettivi duali. Dato un operatore $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, definiamo l'*operatore trasposto* $A^t : Y' \to X'$ ponendo
   $$A^t\psi = \psi \circ A \qquad \forall \psi \in Y'.$$
   (a) Dimostrare che $A^t \in \mathcal{B}(Y', X')$ per ogni $A \in \mathcal{B}(X,Y)$.
   (b) Dimostrare che $\|A^t\|_{\mathrm{op}} = \|A\|_{\mathrm{op}}$ per ogni $A \in \mathcal{B}(X,Y)$.
   [Suggerimento: usare la caratterizzazione di $\|A\|_{\mathrm{op}}$ data dall'esercizio 7.(a).]
   (c) Dimostrare che la mappa $A \mapsto A^t$ è un'isometria lineare da $\mathcal{B}(X,Y)$ a $\mathcal{B}(Y',X')$.
   (d) Dimostrare che, nel caso $X = Y$, si ha $(\mathrm{id}_X)^t = \mathrm{id}_{X'}$.
   (e) Dimostrare che $(BA)^t = A^t B^t$ per ogni $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$.
   (f) Dimostrare che, se $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ è un isomorfismo, allora anche $A^t \in \mathcal{B}(Y',X')$ è un isomorfismo, e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
   (g) Dimostrare che, se $A : X \to Y$ è un isomorfismo isometrico, allora $A^t : Y' \to X'$ è un isomorfismo isometrico.
9. Sia
   $$c = \left\{\underline{x} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \,:\, \text{esiste in } \mathbb{F} \text{ il limite } \lim_{k\to\infty} x_k\right\}$$
   l'insieme delle successioni convergenti a valori in $\mathbb{F}$.
   (a) Dimostrare che c è un sottospazio vettoriale proprio di ℓ^∞.
   Dotiamo c della norma indotta da ℓ^∞. Sia $L : c \to \mathbb{F}$ definito da
   $$L\underline{x} = \lim_{k\to\infty} x_k \qquad \forall \underline{x} \in c.$$
   (b) Dimostrare che L è un funzionale lineare continuo su c.
   (c) Determinare la norma $\|L\|_{c'}$ di L nel duale di c.
   (d) Dimostrare che c è chiuso in ℓ^∞.
   (e) Dimostrare che L si estende a un funzionale $\tilde{L} \in (\ell^\infty)'$.
   (f) Dimostrare che $\tilde{L}|_{c_0} = 0$, ma $\tilde{L} \neq 0$.
   (g) Dimostrare che non esiste $\underline{y} \in \ell^1$ tale che
   $$\tilde{L}\underline{x} = \sum_{k=0}^\infty x_k y_k \qquad \forall \underline{x} \in \ell^\infty.$$
   [Questo esempio mostra "direttamente" che l'immersione isometrica di ℓ^1 nel duale di ℓ^∞ discussa a lezione non è suriettiva. Inoltre dà un'idea della natura "non costruttiva" del risultato alla base dell'esistenza dell'estensione nel punto (e), cioè di un'estensione (lineare e continua) del "funzionale limite" L allo spazio di tutte le successioni limitate.]