ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 4

1. Sia $H = \ell^2$ con l'usuale prodotto scalare. Poniamo
$$X = \{\underline{x} \in \ell^2 \,:\, x_k = 0 \text{ per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ pari}\},$$
$$Y = \{\underline{x} \in \ell^2 \,:\, x_k = 0 \text{ per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ dispari}\}.$$
   (a) Dimostrare che X e Y sono sottospazi vettoriali chiusi di H.
   (b) Dimostrare che $X^\perp = Y$ e $Y^\perp = X$.
   (c) Sia $\underline{z} = (1, 1/2, 1/3, \dots)$. Determinare $d(\underline{z}, X)$.
2. Siano $H = L^2(-1,1)$ e $Y = \operatorname{span}\{\phi_1, \phi_2\}$, dove $\phi_1(t) = e^{\pi i t}$ e $\phi_2(t) = e^{-\pi i t}$ per $t \in [-1,1]$. Siano inoltre $f, g, h \in H$ definite da $f(t) = 3\sin(\pi t)$, $g(t) = e^{2\pi i t}$, $h(t) = t$. Calcolare $P_Y f$, $P_Y g$ e $P_Y h$.
3. Siano $H = L^2(0,1)$ e $Y = \operatorname{span}\{\psi_1, \psi_2\}$, dove $\psi_1(t) = t$ e $\psi_2(t) = t^2$ per $t \in [0,1]$. Siano inoltre $g, h \in H$ definite da $g(t) = t^3$ e $h(t) = t^2 + t^3$. Calcolare $P_Y g$ e $P_Y h$.
4. Siano $H = L^2(0,1)$ e $\phi_n(t) = t^{4n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$.
   (a) L'insieme $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è linearmente indipendente?
   (b) $\operatorname{span}\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è denso in H?
   (c) L'insieme $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è ortonormale in H?
   (d) Siano $E = \operatorname{span}\{\phi_0, \phi_1\}$ e $f \in H$ definita da $f(t) = t$. Calcolare $P_E f$.
5. Siano $H = L^2(1,2)$ e
$$E = \left\{ f \in H \,:\, \int_1^2 \frac{f(t)}{t}\, dt = 1 \right\}.$$
L'insieme E ha un elemento di norma minima? Se sì, è unico?
6. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\underline{e^{(n)}} = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$.
   (a) Sia $E = \{(1 + 1/n)\, \underline{e^{(n)}} \,:\, n \geq 1\}$. L'insieme E ammette un elemento di norma minima in ℓ^2? Se sì, è unico?
   (b) Sia $F = E \cup \{\underline{e^{(0)}}\}$. L'insieme F ammette un elemento di norma minima in ℓ^2? Se sì, è unico?
7. Consideriamo c_{00} come spazio pre-hilbertiano con il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indotto da ℓ^2. Osserviamo che la successione $\underline{e^{(n)}} = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ è un elemento di c_{00} per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia
$$Y = \left\{ \underline{x} \in c_{00} \,:\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{1+k} = 0 \right\}.$$
   (a) Dimostrare che Y è un sottospazio vettoriale chiuso di c_{00}.
   (b) Dimostrare che $(n+1)\underline{e^{(n)}} - (n+2)\underline{e^{(n+1)}} \in Y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Sia $Y^\perp = \{\underline{x} \in c_{00} \,:\, \underline{x} \perp \underline{y} \quad \forall \underline{y} \in Y\}$ il complemento ortogonale di Y in c_{00}. Dimostrare che $Y^\perp = \{0\}$.
   (d) Dimostrare che $Y^{\perp\perp} \neq Y$.

   [Questo esempio mostra che, in uno spazio pre-hilbertiano non completo, il biortogonale $Y^{\perp\perp}$ di un sottospazio chiuso può essere diverso da Y.]

8. Sia H uno spazio di Hilbert.
   (a) Dimostrare che, se V e W sono sottospazi vettoriali di H, allora $(V+W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.
   (b) Dimostrare che, se V e W sono sottospazi vettoriali chiusi di H, allora $(V \cap W)^\perp = \overline{V^\perp + W^\perp}$.
9. Siano $r \in (0, \infty]$ e $H = L^2(-r, r)$. Sia $T : H \to H$ definita da
$$Tf(t) = f(-t) \qquad \text{per q.o. } t \in (-r, r)$$
per ogni $f \in H$.
   (a) Dimostrare che $T : H \to H$ è lineare e biiettiva, e trovarne l'inversa.
   (b) Dimostrare che T è un'isometria, cioè che $\|Tf\|_2 = \|f\|_2$ per ogni $f \in H$.
   (c) Dimostrare che $T : H \to H$ è bi-lipschitziana.
   Definiamo ora gli insiemi
$$H_p = \{f \in H \,:\, Tf = f\}, \qquad H_d = \{f \in H \,:\, Tf = -f\}$$
   delle funzioni pari e delle funzioni dispari in H.
   (d) Dimostrare che H_p e H_d sono sottospazi vettoriali chiusi di H.
   [Suggerimento: T è lineare e continua.]
   (e) Dimostrare che $H_p \perp H_d$.
   (f) Dimostrare che $H = H_p \oplus H_d$.
   [Suggerimento: $f = (f + Tf)/2 + (f - Tf)/2$.]
   (g) Dimostrare che $H_p^\perp = H_d$ e $H_d^\perp = H_p$.
   [Suggerimento: teorema di decomposizione ortogonale.]
   (h) Trovare formule per le proiezioni ortogonali $P_{H_p} f$ e $P_{H_d} f$ di una arbitraria funzione $f \in H$ su H_p e H_d.
   (i) Supponiamo $r = 1$. Sia $f \in H$ definita da $f(t) = t^2 + t^3$ per ogni $t \in (-1, 1)$. Determinare $d(f, H_p)$ e $d(f, H_d)$.
10. Sia H uno spazio di Hilbert. Sia $C \subseteq H$ un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di H.
   (a) Dimostrare che, per ogni $w \in H$, l'insieme traslato
$$C + w = \{x + w \,:\, x \in C\}$$
   è a sua volta convesso, chiuso e non vuoto.
   Sia $P_C : H \to C$ la mappa che associa ad ogni $x \in H$ la sua proiezione $P_C(x) \in C$, cioè l'unico elemento di C tale che $\|x - P_C(x)\| = d(x, C)$.
   (b) Dimostrare che $P_C(H) = C$ e che $P_C \circ P_C = P_C$.
   (c) La mappa P_C è necessariamente lineare?
   (d) Dimostrare che $P_{C+w}(x) = P_C(x - w) + w$ per ogni $x, w \in H$.
   (e) Sia $x \in H$ tale che $P_C(x) = 0$. Dimostrare che $\mathfrak{Re}\langle x, z\rangle \leq 0$ per ogni $z \in C$.
   [Suggerimento: imitare la dimostrazione della caratterizzazione del complemento ortogonale $Y^\perp$ di un sottospazio Y in termini della distanza, sfruttando la disuguaglianza $\|x\| \leq \|x - \theta z\|$ per ogni $z \in C$ e $\theta \in [0, 1]$.]
   (f) Dimostrare che $\mathfrak{Re}\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle \leq 0$ per ogni $x \in H$ e $z \in C$.
   [Suggerimento: con traslazioni si può ridursi al caso $P_C(x) = 0$.]
   (g) Dimostrare che la mappa $P_C : H \to C$ è 1-lipschitziana.
   [Suggerimento: espandere il quadrato di $\|x - y\| = \|(P_C(x) - P_C(y)) + (x - P_C(x) + P_C(y) - y)\|$ e usare (f).]