Integrazione lungo curve in $\mathbb{C}$

Formula integrale di Cauchy

Richiami di teoria. Data una funzione olomorfa $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e una curva di Jordan γ percorsa in senso antiorario e contenuta in Ω, allora $\forall\, z_0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$ vale

Formule integrali di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z \implies \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0).$$

Inoltre la funzione f ammette derivata di ogni ordine e si ha

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z \implies \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

La formula di Cauchy esprime quindi il valore di una funzione in ogni punto del dominio identificato da $\mathrm{Int}(\gamma)$ mediante i valori che essa assume sul contorno di tale dominio, tramite un integrale curvilineo.

Esercizio 1. Calcolare

$$\oint_\gamma \frac{\sin z}{z + i}\, \mathrm{d}z,$$

dove $\mathrm{supp}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 10\}$, percorso in senso antiorario.

Soluzione. Chiamiamo $f(z) = \sin z$, sappiamo che $f(z)$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Inoltre, il punto $z_0 = -i$ è contenuto all'interno della curva γ (circonferenza di raggio 10 con centro in 1, percorsa in senso antiorario), che è di Jordan. Di conseguenza applicando la formula integrale di Cauchy,

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{\sin z}{z + i}\, \mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z + i}\, \mathrm{d}z = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \sin(-i) \\ = 2\pi i \frac{e^{i(-i)} - e^{-i(-i)}}{2i} = \pi i \left(e - \frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{z(z^3 + 10)}\, \mathrm{d}z,$$

dove $\mathrm{supp}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{3}{2}\}$, percorso in senso antiorario.

Soluzione. Osserviamo che il supporto della curva γ, che è di Jordan, è la circonferenza di raggio $3/2$ centrata nell'origine. Il denominatore della funzione integranda si annulla in $z = 0$ e nelle tre radici terze di -10 (che stanno sulla circonferenza di raggio $\sqrt[3]{10} > 3/2$), di conseguenza la funzione

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3 + 10}$$

è olomorfa in $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{3}{2}\}$. Quindi applicando la formula di Cauchy,

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{z(z^3 + 10)}\, \mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z}\, \mathrm{d}z = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{\cos 0}{10} = \frac{\pi}{5} i$$

Esercizio 3. Calcolare
$$\oint_\gamma \frac{1}{z^4-1}\,\mathrm{d}z,$$
dove $\mathrm{supp}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 1\}$, percorso in senso orario.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che il supporto di γ coincide con la circonferenza di raggio unitario centrata in i percorsa in senso orario.
Notiamo che $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$, pertanto il numeratore si annulla in 4 punti $-1, 1, -i, i$, ma solo $z_0 = i$ appartiene all'interno della curva γ. Per cui,
$$\oint_\gamma \frac{1}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z,$$
dove la funzione
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)(z+i)}$$
è olomorfa in $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| \leq 1\}$. Di conseguenza, considerando la curva $-\gamma$, che è percorsa in senso antiorario, applicando la formula integrale di Cauchy,
$$\oint_\gamma \frac{1}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = -\oint_{-\gamma} \frac{f(z)}{z-i} = -2\pi i f(i) = -\frac{2\pi i}{(i+1)(i-1)2i} = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 4. Calcolare
$$\oint_\gamma \frac{\sinh z}{z^4}\,\mathrm{d}z,$$
lungo la frontiera del quadrato con centro nell'origine e vertici nelle radici quarte dell'unità, percorsa in senso antiorario.

Soluzione. La funzione $f(z) = \sinh z$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ ed il punto $z_0 = 0$ è contenuto nel quadrato considerato. Di conseguenza (posto $n = 3$), possiamo applicare la formula integrale di Cauchy generalizzate per le derivate,
$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^4}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{\pi i}{3}\cosh(0) = \frac{\pi i}{3}\frac{e^0+e^0}{2} = \frac{\pi i}{3}.$$

Esercizio 5. Calcolare
$$\oint_\gamma \frac{1}{z^3+z^2}\,\mathrm{d}z,$$
lungo la circonferenza con centro in -1 e raggio 3, percorsa in senso antiorario.

Soluzione. Innanzitutto scomponiamo
$$\frac{1}{z^3+z^2} = \frac{1}{z^2(z+1)}$$
ed osserviamo che i due zeri del denominatore $z_0 = 0$ e $z_1 = -1$ sono entrambi contenuti nella circonferenza, per cui non possiamo applicare direttamente la formula di Cauchy. Riduciamo allora l'integranda ai fratti semplici:
$$\frac{1}{z^3+z^2} = \frac{Az^2+B}{z^2} + \frac{C}{z+1} \implies \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{cases} \implies \begin{cases} C=1 \\ A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$
Quindi
$$\oint_\gamma \frac{1}{z^3+z^2}\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{1-z}{z^2}\,\mathrm{d}z + \int_\gamma \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z.$$

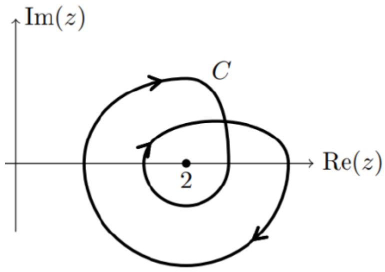
Ciascuno dei due integrali può essere calcolato mediante la formula di Cauchy, considerato che sia $f(z) = 1 - z$ sia $g(z) = 1$ sono olomorfe. Quindi otteniamo

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^3 + z^2}\, \mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\, \mathrm{d}z + \oint_\gamma \frac{g(z)}{z+1}\, \mathrm{d}z = 2\pi i f'(0) + 2\pi i g(-1) = -2\pi i + 2\pi i = 0.$$

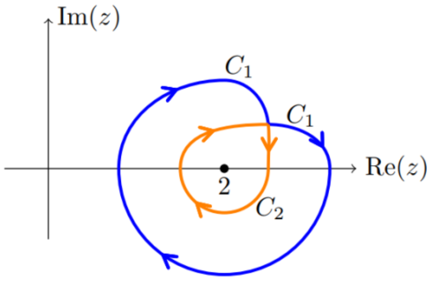
Esercizio 6. Calcolare

$$\oint_C \frac{e^{z^2}}{z-2}\, \mathrm{d}z$$

lungo la curva C il cui sostegno è mostrato in figura:



Soluzione. Notiamo subito che la curva si avvolge attorno al punto $z = 2$ in senso orario per due volte e non è una curva di Jordan. Per usare la formula di Cauchy, possiamo spezzare la curva C in due sottocurve, come mostrato in figura, in modo che $C = C_1 \cup C_2$.



Consideriamo ora $f(z) = e^{z^2}$ (olomorfa in tutto $\mathbb{C}$) e usiamo la formula di Cauchy sulle due curve C_1 e C_2. Si ha:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-2}\, \mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-2}\, \mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-2}\, \mathrm{d}z = -2\pi i f(2) - 2\pi i f(2) = -4\pi i f(2) = -4\pi e^4 i$$

Il segno meno è dato dal fatto che le curve sono percorse in senso orario.

Esercizio 7. Calcolare

$$\oint_\gamma \frac{\sin(z)}{z^{38}}\, \mathrm{d}z,$$

lungo la frontiera del quadrato con centro nell'origine e vertici nelle radici quarte dell'unità, percorsa in senso antiorario.

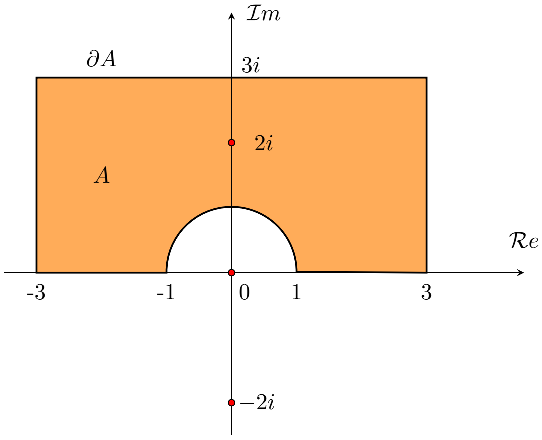
Soluzione. La funzione $f(z) = \sin(z)$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ ed il punto $z_0 = 0$ è contenuto in nel quadrato. Di conseguenza (posto $n = 37$), per la formula delle derivate successive si ha:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{38}}\, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{37!} \sin^{(37)}(0) = \frac{2\pi i}{37!} \cos(0) = \frac{2\pi i}{37!}$$

Esercizio 8. Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : |\mathcal{R}e(z)| < 3,\ 0 < \mathcal{I}m(z) < 3,\ |z| > 1\}$, calcolare

$$\oint_{\partial A} \frac{1}{z\left(z^2+4\right)^2}\,\mathrm{d}z$$

Soluzione. Prima di tutto cerchiamo di capire come è fatto l'insieme A di cui la curva di integrazione è frontiera. Scrivendo $z = x + iy$, si ha che: $|\mathcal{R}e(z)| < 3 \implies |x| < 3 \implies -3 < x < 3$; $0 < \mathcal{I}m(z) < 3 \implies 0 < y < 3$ e infine $|z| > 1 \implies x^2 + y^2 > 1$. A questo punto è facile vedere che l'insieme A e quindi ∂A sono quelli rappresentati nella figura in basso, e ∂A è una curva di Jordan.



Notiamo poi che il denominatore della funzione da integrare si annulla in $z = 0$ e $z = \pm 2i$. Di questi zeri, si ha che solo $z = 2i$ è contenuto in A. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{1}{z\left(z^2+4\right)^2} = \frac{1}{z(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

e poniamo

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)^2}$$

per la formula di Cauchy delle derivate successive si ha:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-2i)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=2i} = -2\pi i\, \frac{(z+2i)^2 + 2z(z+2i)}{z^2(z+2i)^4}\bigg|_{z=2i} = -\frac{\pi}{16}i$$

Esercizio 9. Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$$

Soluzione. Questo esercizio ha lo scopo di mostrare come le tecniche dell'analisi complessa possano rivelarsi molto efficaci per il calcolo di alcuni integrali reali. In questo esempio in particolare, l'integrale potrebbe essere calcolato anche senza scomodare l'analisi complessa, tuttavia le idee sviluppate nel procedimento si riveleranno utili anche per calcolare integrali più difficilmente attaccabili con metodi elementari.

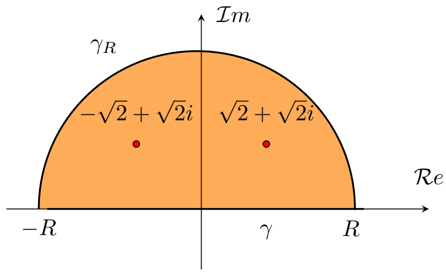
Cominciamo considerando il seguente integrale in campo complesso:

$$\oint_{\gamma\cup\gamma_R} \frac{1}{z^4+16}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1}{z^4+16}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+16}\,\mathrm{d}z$$

dove γ_R è l'arco della semicirconferenza superiore centrata nell'origine e con raggio R percorsa in senso antiorario e γ il segmento che va da $-R$ a R e che quindi chiude la semicirconferenza. L'idea è mostrare che il contributo dell'integrale dato dall'arco di circonferenza si annulla per $R \to \infty$. Notiamo che la funzione integranda ha 4 singolarità date dalle radici quarte di -16. In particolare si trova che:

$$z^4 = -16 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$$

Andando a considerare un raggio R opportuno, di queste quattro radici, solo due possono essere contenute nella regione delimitata dalla semicirconferenza e sono $z = \pm\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.



Avendo trovato le radici del denominatore, l'integranda può essere fattorizzata come:

$$\frac{1}{z^4+16} = \frac{1}{(z-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(z-(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(z-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i))(z-(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i))}$$

Siccome abbiamo due singolarità all'interno della curva, dobbiamo usare la formula di Cauchy due volte spezzando la curva in due percorsi chiusi che avvolgano le singolarità. Possiamo infatti considerare i due spicchi di semicirconferenza separati dall'asse immaginario e entrambi percorsi in senso antiorario. Si noti che in questo modo stiamo aggiungendo alla curva iniziale il segmento che va da 0 a Ri sull'asse immaginario, ma questo non è un problema poiché quando andiamo a sommare i due integrali sui due spicchi, i contributi su quel segmento si annullano tra loro poiché percorsi in sensi opposti sulle due curve.

Detto questo, Cominciamo con $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ e poniamo

$$f_1(z) = \frac{1}{(z-(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(z-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i))(z-(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i))}$$

Per la formula di Cauchy si ha che l'integrale della funzione su un percorso chiuso che avvolge z_1 è

$$2\pi i f_1(\sqrt{2}+\sqrt{2}i) = \frac{\sqrt{2}\pi(1-i)}{32}$$

Facendo lo stesso con $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ e con

$$f_2(z) = \frac{1}{(z-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(z-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i))(z-(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i))}$$

si ha

$$2\pi i f_2(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i) = \frac{\sqrt{2}\pi(1+i)}{32}$$

Quindi, sommando i due contributi, si ha che:

$$\oint_{\gamma\cup\gamma_R} \frac{1}{z^4+16}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1}{z^4+16}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+16}\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}$$

Adesso guardiamo agli integrali lungo γ e γ_R separatamente. Possiamo parametrizzare γ semplicemente come $\gamma(t) = t, -R \leq t \leq R$; quindi:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

e questo integrale diventa proprio quello che vogliamo calcolare per $R \to \infty$. Passando invece a γ_R, una parametrizzazione è data da $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$; quindi:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{R^4e^{4it}+16}\,\mathrm{d}t$$

Dobbiamo mostrare che questo integrale va a 0 per $R \to \infty$. Sfruttando la disuguaglianza triangolare inversa si ha che:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^\pi \frac{R}{|R^4-16|}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R}{|R^4-16|}$$

e l'ultimo termine va chiaramente a 0 per $R \to \infty$. Quindi, possiamo concludere che:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma\cup\gamma_R}\frac{1}{z^4+16}\,\mathrm{d}z = \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_\gamma \frac{1}{z^4+16}\,\mathrm{d}z}_{=I} + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+16}\,\mathrm{d}z}_{=0} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}$$

Esercizi da svolgere a casa.

1. Calcolare $\oint_\gamma e^z \frac{z^2-3}{z^2+3}\,\mathrm{d}z$ lungo la circonferenza di raggio 5 e centro $4+3i$, percorsa in verso antiorario.
2. Calcolare $\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2+4iz-3}\,\mathrm{d}z$, dove $\mathrm{supp}_\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{3}\}$, percorsa in senso antiorario.
3. Calcolare $\oint_\gamma \frac{e^z}{(z-3)(z+i)^2}\,\mathrm{d}z$, lungo la circonferenza di raggio 2 con centro 0, percorsa in senso orario.