ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 2

1. Siano $1 \leq p < q < \infty$. Determinare la chiusura di ℓ^p in $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ e in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Siano $0 < \alpha \leq \beta < \infty$. Sia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/(x^\alpha + x^\beta)$ per ogni $x \in (0, \infty)$. Determinare per quali $p \in [1, \infty]$ si ha $f \in L^p(0, \infty)$.
3. Siano $1 \leq p < q \leq \infty$ e $-\infty < a < b < \infty$.
   (a) Dimostrare che l'inclusione $L^q(a, b) \subseteq L^p(a, b)$ è propria.
   (b) Dimostrare che non ci sono inclusioni fra $L^p(\mathbb{R})$ e $L^q(\mathbb{R})$.
   (c) Ci sono inclusioni fra $L^p(a, \infty)$ e $L^q(a, \infty)$?
4. Sia $(M, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$.
   (a) Dimostrare che, se $f \in L^p(M)$ e $|f| \leq 1$ μ-quasi ovunque, allora $f \in L^r(M)$.
   (b) Dimostrare che $L^p(M) \cap L^\infty(M) \subseteq L^r(M)$.
   (c) Dimostrare che, se $q < \infty$, $f \in L^q(M)$ e $|f| \geq 1$ μ-quasi ovunque sull'insieme $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$, allora $f \in L^r(M)$.
   (d) Dimostrare che $L^p(M) \cap L^q(M) \subseteq L^r(M)$.
   [Suggerimento: per $q < \infty$, posto $E = \{x \in M : |f(x)| \leq 1\}$, spezzare $f = f\mathbf{1}_E + f\mathbf{1}_{M \setminus E}$.]
5. Siano $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili sull'intervallo $(0, 1)$ e $g \in L^\infty(0, 1)$ tali che $|f_n| \leq g$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $f_n \to f$ puntualmente su $(0, 1)$ per $n \to \infty$.
   (a) Dimostrare che $(f_n)_n$ è una successione limitata in $L^\infty(0, 1)$ e che $f \in L^\infty(0, 1)$.
   (b) È necessariamente vero che $f_n \to f$ in $L^\infty(0, 1)$?
   [Questo esercizio discute il problema se valga per L^∞ un analogo del teorema di convergenza dominata.]
6. Sia X uno spazio normato.
   (a) Siano $x, y \in X$ e $r, s > 0$. Dimostrare che $\overline{B}(x, r) \cap \overline{B}(y, s) \neq \emptyset$ se e solo se $\|x - y\| \leq r + s$.
   [Suggerimento: per $\Leftarrow$ cercare un punto della forma $(1 - \theta)x + \theta y$ per opportuno $\theta \in [0, 1]$ nell'intersezione.]
   (b) Supponiamo ora che $X = \ell^2$. Posto $r = 1/2$, $s = (3 - \sqrt{2})/(2\sqrt{2})$,
   $$\underline{x} = (1, 0, 0, 1/27, 1/81, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...),$$
   $$\underline{y} = (0, 1/3, 1/9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...)$$
   (le rimanenti componenti di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono tutte nulle), determinare se le palle chiuse $\overline{B}(\underline{x}, r)$ e $\overline{B}(\underline{y}, s)$ in ℓ^2 si intersecano.
7. Data $\underline{x} \in \ell^\infty$, definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la troncata n-esima $\underline{x^{(n)}}$ di $\underline{x}$ ponendo
$$x_k^{(n)} = \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n, \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che $(\underline{x}^{(n)})_n$ è una successione limitata a valori nello spazio di Banach $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.
[Nota: ogni singola $\underline{x}^{(n)}$ è una successione numerica (a valori in $\mathbb{F}$); qui si chiede invece di considerare la successione di successioni $(\underline{x}^{(n)})_n$.]
(b) È necessariamente vero che $\underline{x}^{(n)} \to \underline{x}$ in ℓ^∞ per $n \to \infty$?

8. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_n(t) = \frac{1}{1+(t-n)^2} \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$
(a) Dimostrare che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1,\infty]$.
(b) Dimostrare che $f_n \to 0$ puntualmente.
(c) Determinare per quali $p \in [1,\infty]$ si ha $f_n \to 0$ in $L^p(\mathbb{R})$.

9. Sia $p \in [1,\infty)$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto (limitato o illimitato).
(a) Dimostrare che, per ogni intervallo $[c,d] \subseteq I$, se $c_n, d_n \in I$ sono tali che $c_n \leq d_n$ e inoltre $c_n \to c$ e $d_n \to c$ per $n \to \infty$, allora $\mathbf{1}_{[c_n,d_n]} \to \mathbf{1}_{[c,d]}$ in $L^p(I)$.
[Suggerimento: verificare la convergenza puntuale su $I \setminus \{c,d\}$ e usare convergenza dominata.]
(b) Dimostrare che l'insieme
$$\operatorname{span}\{\mathbf{1}_{[c,d]} \,:\, [c,d] \subseteq I,\ c,d \in \mathbb{Q}\}$$
è denso in $L^p(I)$.
(c) Dimostrare che lo spazio $L^p(I)$ è separabile.
[Questo esercizio dà un approccio alternativo alla separabilità di $L^p(I)$ senza passare dal teorema di Stone–Weierstrass.]

10. La *variazione totale* di una successione $\underline{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^\mathbb{N}$ è definita da
$$V(\underline{x}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_{k+1} - x_k|.$$
Sia bv l'insieme delle successioni a *variazione limitata*:
$$bv = \{\underline{x} \in \mathbb{F}^\mathbb{N} \,:\, V(\underline{x}) < \infty\}.$$
(a) Dimostrare che bv è un sottospazio vettoriale di ℓ^∞.
(b) Dimostrare che V non è una norma su bv.
(c) Sia
$$\|\underline{x}\|_{bv} = |x_0| + V(\underline{x})$$
per ogni $\underline{x} \in \mathbb{F}^\mathbb{N}$. Dimostrare che $\|\cdot\|_{bv}$ è una norma su bv.
(d) Dimostrare che $(bv, \|\cdot\|_{bv})$ è uno spazio di Banach.

11. Sia $C_c(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ a supporto compatto, cioè tali che l'insieme
$$\operatorname{supp} f = \overline{\{t \in \mathbb{R} \,:\, f(t) \neq 0\}}$$
è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$.
(a) Dimostrare che una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ appartiene a $C_c(\mathbb{R})$ se e solo se esiste $M > 0$ tale che $f(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus [-M,M]$.
(b) Dimostrare che $C_c(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
(c) Dimostrare che ogni $f \in C_c(\mathbb{R})$ è uniformemente continua.
[Suggerimento: usare Heine–Cantor su un'opportuna restrizione di f.]
(d) Sia $p \in [1,\infty)$. Dimostrare che, se $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$, allora $\mathbf{1}_{[c,d]}$ è limite in $L^p(\mathbb{R})$ di una successione a valori in $C_c(\mathbb{R})$.
[Suggerimento: usare l'analogo risultato per $L^p(a,b)$ noto dalla teoria.]
(e) Dimostrare che $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1,\infty)$.
(f) $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^\infty(\mathbb{R})$?