Analisi Funzionale

Richiami di topologia in spazi metrici

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino

a.a. 2023/2024

Spazi metrici

Def. Si dice *spazio metrico* un insieme M dotato di una funzione $d : M \times M \to [0, \infty)$ tale che:

1. $\forall x, y \in M : d(x, y) = 0 \iff x = y$
   (proprietà di separazione);
2. $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$
   (simmetria);
3. $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
   (disuguaglianza triangolare).

Una tale funzione d è detta *distanza* o *metrica* su M.
Gli elementi di M sono anche detti *punti* di M.

Scriviamo anche "lo spazio metrico (M, d)" quando vogliamo specificare simultaneamente l'insieme M e la metrica d su M.

Esempi di spazi metrici

- L'insieme $\mathbb{F}^n$ si può dotare di diverse metriche, fra cui:
  - $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$ (metrica euclidea);
  - $d_1(x,y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$ (metrica di Manhattan);
  - $d_\infty(x,y) = \max\{|x_j - y_j| : j = 1, \ldots, n\}$;
  - $d_p(x,y) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p\right)^{1/p}$ (per $p \in [1,\infty)$).

  Se $n = 1$, tutte le metriche d_p coincidono con $d_2(x,y) = |x - y|$.
- Se $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme $C_{\mathbb{F}}[a,b]$ si può dotare della *metrica dell'estremo superiore*, detta anche *metrica della convergenza uniforme*:
$$d_\infty(f,g) := \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|;$$
  (la seconda uguaglianza è dovuta al teorema di Weierstrass.)
- Se (M,d) è uno spazio metrico ed E è un sottoinsieme di M, allora la restrizione di d a $E \times E$ è una metrica su E (detta *metrica indotta*), che per brevità denotiamo ancora con d.
- Se (M,d_M) e (N,d_N) sono spazi metrici, definiamo la *metrica prodotto* d sul prodotto cartesiano $\Omega = M \times N$ ponendo
  $d((x,y),(x',y')) := \max\{d_M(x,x'), d_N(y,y')\} \quad \forall x,x' \in M,\ y,y' \in N.$

Successioni e sottosuccessioni

Def. Sia X un insieme.

- Una *successione* a valori in X è una funzione $s : \mathbb{N} \to X$.
- Per $k \in \mathbb{N}$, il valore $s(k)$ è detto *termine k-esimo* della successione s.
- Se $s(k) = x_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, al posto di s scriviamo anche $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ oppure $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ oppure $(x_0, x_1, x_2, \dots)$;
  per brevità a volte si scrive $(x_k)_k$ omettendo il dominio $\mathbb{N}$.

Oss. Attenzione alle parentesi!

- $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ denota una successione, mentre
- $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ denota l'insieme dei suoi valori.

Oss. A volte considereremo "successioni"

- $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ indicizzate sull'insieme $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, o anche
- $(x_k)_{k=k_0}^{\infty}$ indicizzate su $\{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\}$ per qualche $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Def. Sia X un insieme e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X.
Una *sottosuccessione* di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione della forma $(x_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ per qualche $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente.

Successioni convergenti e di Cauchy

Def. Sia (M, d) uno spazio metrico. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in M e sia $x \in M$.

(a) Diciamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende* a x (o anche che *converge* a x), e scriviamo

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) < \epsilon$ per ogni $n > N$. In tal caso, x si dice *limite* della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Diciamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *di Cauchy* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \epsilon$ per ogni $n, m > N$.

Oss. Si ha $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Prop. Sia (M, d) uno spazio metrico. Siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in M e $x \in M$.

(i) Il limite di $(x_n)_n$, se esiste, è unico.

(ii) Se $(x_n)_n$ converge a x, allora ogni sottosucc. di $(x_n)_n$ converge a x.

(iii) Se $(x_n)_n$ converge, allora $(x_n)_n$ è di Cauchy.

Spazi metrici completi

Def. Uno spazio metrico (M, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy a valori in M converge a un punto di M.

Esempi

- $(\mathbb{Q}, d_2)$ non è completo.
- Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, $(\mathbb{F}^n, d_2)$ è completo, ove $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
- Se $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, allora $(C_{\mathbb{F}}[a, b], d_\infty)$ è completo.

Prop. Siano (M, d_M) e (N, d_N) spazi metrici. Sia $(M \times N, d)$ lo spazio metrico prodotto.

(i) Una successione $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $M \times N$ converge a $(x, y) \in M \times N$ se e solo se $x_n \to x$ in M e $y_n \to y$ in N.

(ii) Una successione $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $M \times N$ è di Cauchy se e solo se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in M e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in N.

(iii) Se M e N sono completi, anche il prodotto $M \times N$ è completo.

Distanza dell'estremo superiore fra funzioni

Sia S un insieme. Per $f, g \in \mathcal{F}(S, \mathbb{F})$ definiamo

$$d_\infty(f, g) := \sup_{t \in S} |f(t) - g(t)|.$$

Si può verificare che, per ogni $f, g, h \in \mathcal{F}(S, \mathbb{F})$,

$$d_\infty(f, g) = 0 \iff f = g,$$
$$d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f),$$
$$d_\infty(f, h) \le d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h).$$

Tuttavia d_∞ in generale <u>non è una distanza</u> su $\mathcal{F}(S, \mathbb{F})$!
d_∞ diventa una distanza se ristretta all'insieme delle <u>funzioni limitate</u>

$$\mathcal{F}_b(S, \mathbb{F}) = \left\{ f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{F}) : \sup_{t \in S} |f(t)| < \infty \right\}.$$

Teor. Sia S un insieme. Allora lo spazio metrico $(\mathcal{F}_b(S, \mathbb{F}), d_\infty)$ è completo.

Oss. Per il teorema di Weierstrass, $C_{\mathbb{F}}[a, b] \subseteq \mathcal{F}_b([a, b], \mathbb{F})$.

Convergenza puntuale e convergenza uniforme

Def. Sia S un insieme. Siano $f_n : S \to \mathbb{F}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $f : S \to \mathbb{F}$.

(a) Diciamo che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente* a f, e scriviamo "$f_n \to f$ puntualmente", se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \qquad \forall t \in S.$$

(b) Diciamo che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* a f, e scriviamo "$f_n \to f$ uniformemente", o anche $f_n \rightrightarrows f$, se

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0.$$

Oss. Esplicitando le definizioni, $f_n \to f$ puntualmente se e solo se

$$\forall t \in [a, b] : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |f_n(t) - f(t)| < \epsilon;$$

invece, $f_n \to f$ uniformemente se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall t \in [a, b] : |f_n(t) - f(t)| < \epsilon.$$

Dunque

- la conv. uniforme implica la conv. puntuale
- ma il viceversa in generale non vale!

Proprietà della convergenza uniforme

Prop. Sia Ω uno spazio topologico.

(i) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $C(\Omega)$ e $f_n \rightrightarrows f$, allora $f \in C(\Omega)$.

Supponiamo ora che $I \subseteq \mathbb{R}$ sia un intervallo. Sia $C^1(I)$ l'insieme delle funzioni $f : I \to \mathbb{F}$ derivabili con derivata continua.

(ii) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $C^1(I)$ tale che $f_n \rightrightarrows f$ e $f' \rightrightarrows g$, allora $f \in C^1(I)$ e $f' = g$.

Infine, sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$.

(iii) Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $C[a, b]$ e $f_n \rightrightarrows f$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Topologia in spazi metrici

Def. Sia (M, d) uno spazio metrico.

(a) Siano $x \in M$ e $r > 0$. La *palla aperta* e la *palla chiusa* di centro x e raggio r sono gli insiemi

$$B(x, r) = \{y \in M : d(x, y) < r\}, \qquad \overline{B}(x, r) = \{y \in M : d(x, y) \leq r\}.$$

Scriviamo anche $B_d(x, r)$ e $B_M(x, r)$ al posto di $B(x, r)$.

(b) Un sottoinsieme E di M si dice *limitato* se esistono $x_0 \in M$ e $r > 0$ tali che $E \subseteq B(x_0, r)$; in caso contrario, E si dice *illimitato*.

(c) Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in M si dice *limitata* o *illimitata* a seconda che l'insieme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dei suoi valori sia un sottoinsieme limitato o illimitato di M.

(d) Un sottoinsieme U di M si dice *intorno* di un punto $x \in M$ se esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq U$.

(e) Un sottoinsieme A di M si dice *aperto* se è A è intorno di ogni suo punto; in altre parole, se, per ogni $x \in A$, esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$.

(f) Un sottoinsieme C di M si dice *chiuso* se $M \setminus C$ è aperto.

Topologia in spazi metrici

Prop. Sia (M, d) uno spazio metrico.

(i) La famiglia dei sottoinsiemi aperti di M è una *topologia* su M:
   (a) M e $\emptyset$ sono sottoinsiemi aperti di M;
   (b) se $\mathcal{A}$ è una famiglia di sottoinsiemi aperti di M, allora la loro unione $\bigcup \mathcal{A}$ è un sottoinsieme aperto di M;
   (c) se A e B sono sottoinsiemi aperti di M, allora $A \cap B$ è un sottoinsieme aperto di M.

(ii) La famiglia dei sottoinsiemi chiusi di M ha le seguenti proprietà:
   (a) M e $\emptyset$ sono sottoinsiemi chiusi di M;
   (b) se $\mathcal{C}$ è una famiglia non vuota di sottoinsiemi chiusi di M, allora la loro intersezione $\bigcap \mathcal{C}$ è un sottoinsieme chiuso di M;
   (c) se C e D sono sottoinsiemi chiusi di M, allora $C \cup D$ è un sottoinsieme chiuso di M.

(iii) Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in M converge a un punto $x \in M$ se e solo se, per ogni sottoinsieme aperto A di M contenente x, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in A$ per ogni $n > N$.

(iv) Ogni successione di Cauchy a valori in M è una successione limitata. In particolare, ogni successione convergente è limitata.

Topologia in spazi metrici

Def. Sia (M, d) uno spazio metrico.

(a) Sia $E \subseteq M$. La *chiusura* di E è l'insieme

$$\overline{E} = \bigcap \{C \subseteq M : C \text{ chiuso}, \ E \subseteq C\}.$$

Scriviamo anche $\overline{E}^M$ o $\overline{E}^{(M,d)}$ al posto di $\overline{E}$.

(b) Sia $E \subseteq M$. La *parte interna* di E è l'insieme

$$\mathring{E} = \bigcup \{A \subseteq M : A \text{ aperto}, \ A \subseteq E\}.$$

(c) Sia $E \subseteq M$. La *frontiera* di E è l'insieme $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$.

(d) Un sottoinsieme E di M si dice *denso* in M se $\overline{E} = M$.

Topologia in spazi metrici

Prop. Sia (M, d) uno spazio metrico.

(i) Un sottoinsieme C di M è chiuso se e solo se, per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in C, se $x_n \to x$ in M allora $x \in C$.

(ii) Sia $E \subseteq M$.

- La chiusura $\overline{E}$ di E è il più piccolo sottoinsieme chiuso di M che contiene E.
- E è chiuso se e solo se $\overline{E} = E$.
- $\overline{E} = \{x \in M : x = \lim_{n\to\infty} x_n$ per qualche $(x_n)_n$ a valori in $E\}$
- $\overline{E} = \{x \in M : d(x, E) = 0\}$, ove $d(x, E) := \inf\{d(x, y) : y \in E\}$.
- La parte interna $\mathring{E}$ di E è il più grande sottoinsieme aperto di M contenuto in E.
- E è aperto se e solo se $E = \mathring{E}$.
- Si ha
$$M \setminus \mathring{E} = \overline{M \setminus E}, \qquad M \setminus \overline{E} = (M \setminus E)^{\circ}.$$

(iii) Sia $E \subseteq M$. Allora E è denso in M se e solo se, per ogni $x \in M$, esiste una successione $(x_n)_n$ a valori in E tale che $x_n \to x$.

Compattezza in spazi metrici

Def. Sia (M, d) uno spazio metrico.

(a) Un sottoinsieme K di M si dice *compatto* se ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in K ha una sottosuccessione che converge a un punto di K.

(b) Un sottoinsieme E di M si dice *relativamente compatto* se $\overline{E}$ è compatto.

Teor. Sia (M, d) uno spazio metrico.

(i) Sia $K \subseteq M$. Allora K è compatto se e solo se ogni *ricoprimento aperto* di K (cioè una famiglia di aperti la cui unione contiene K) ha un sottoricoprimento finito.

(ii) Se $K \subseteq M$ è compatto, allora K è chiuso e limitato.

Oss. In un arbitrario spazio metrico, non tutti i sottoinsiemi chiusi e limitati sono compatti.

Teor. (Heine–Borel) Sia $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Nello spazio metrico $(\mathbb{F}^n, d_2)$, un sottoinsieme di $\mathbb{F}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Separabilità

Def. Uno spazio metrico (M, d) si dice *separabile* se M ha un sottoinsieme denso al più numerabile.

Es. Ecco alcuni esempi di spazi metrici separabili.

(a) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ è separabile: il sottoinsieme $\mathbb{Q}^n$ è denso e numerabile.

(b) $(\mathbb{C}^n, d_2)$ è separabile: il sottoinsieme $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n$ è denso e numerabile, ove $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{Q}\}$.

(c) Se $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, allora $(C_{\mathbb{F}}[a, b], d_\infty)$ è separabile: questa è una conseguenza del teorema di Stone–Weierstrass.

(d) Se (M, d) è uno spazio metrico separabile e $E \subseteq M$, allora anche (E, d) è separabile.

(e) Ogni spazio metrico compatto M è separabile.

Funzioni continue e uniformemente continue

Def. Siano (M, d_M) e (N, d_N) spazi metrici.
Una funzione $f : M \to N$ si dice:

(a) *continua in un punto* $x \in M$ se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$, tale che $d_N(f(x), f(x')) < \epsilon$ per ogni $x' \in B_M(x, \delta)$;

(b) *continua* se f è continua in ogni punto $x \in M$;

(c) *uniformemente continua* se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $d_N(f(x), f(x')) < \epsilon$ per ogni $x, x' \in M$ con $d_M(x, x') < \delta$;

(d) un *omeomorfismo* se f è continua e invertibile, e l'inversa $f^{-1} : N \to M$ è a sua volta continua.

Oss. $f : M \to N$ è continua se e solo se

$$\forall x \in M : \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in M : \big(d_M(x, x') < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x')) < \epsilon\big)$$

mentre f è uniformemente continua se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in M : \forall x' \in M : \big(d_M(x, x') < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x')) < \epsilon\big)$$

Dunque:

- ogni funzione uniformemente continua è continua,
- ma il viceversa in generale non vale!

Continuità, topologia e successioni

Prop. Siano (M, d_M) e (N, d_N) spazi metrici e $f : M \to N$.
Sono equivalenti:

(i) $f : M \to N$ è continua;

(ii) $f^{-1}(A)$ è aperto in M per ogni sottoinsieme aperto A di N;

(iii) $f^{-1}(C)$ è chiuso in M per ogni sottoinsieme chiuso C di N.

Prop. Siano (M, d_M) e (N, d_N) spazi metrici, $f : M \to N$ e $x \in M$.
Sono equivalenti:

(i) f è continua nel punto x;

(ii) per ogni successione $(x_n)_n$ a valori in M, se $x_n \to x$ in M, allora $f(x_n) \to f(x)$ in N.

Prop. Siano (M, d_M) e (N, d_N) spazi metrici. Sia $f : M \to N$ uniformemente continua. Se $(x_n)_n$ è una successione di Cauchy in M, allora $(f(x_n))_n$ è una successione di Cauchy in N.

Funzioni lipschitziane

Def. Siano (M, d_M) e (N, d_N) spazi metrici. Sia $L \geq 0$.
Una funzione $f : M \to N$ si dice *L-lipschitziana*
(o *lipschitziana di costante L*) se

$$\forall x, x' \in M : d_N(f(x), f(x')) \leq L d_M(x, x').$$

Diciamo che f è *lipschitziana* se f è L-lipschitziana per qualche $L \geq 0$.

Oss. Se f è L-lipschitziana, allora f è uniformemente continua.
(Dato $\epsilon > 0$, prendo $\delta = \epsilon / L$.)

Es. Consideriamo $\mathbb{R}$ e i suoi sottoinsiemi come spazi metrici con la metrica euclidea.

(a) La funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = \sqrt{t}$ è uniformemente continua, ma non lipschitziana.

(b) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = t$ è 1-lipschitziana.

(c) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = t^2$ è continua, ma non uniformemente continua.

Continuità e compattezza

Teor. (Heine–Cantor) Siano M e N spazi metrici, con M compatto. Se $f : M \to N$ è continua, allora f è uniformemente continua.

Teor. Siano M ed N spazi metrici e $f : M \to N$ continua.
Se K è un sottoinsieme compatto di M,
allora $f(K)$ è un sottoinsieme compatto di N.

Teor. (Weierstrass) Siano M uno spazio metrico compatto e $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è limitata ed esistono $x, y \in M$ tali che $f(x) = \max f$ e $f(y) = \min f$.

In particolare, $C_{\mathbb{F}}(M) \subseteq \mathcal{F}_b(M, \mathbb{F})$ se M è compatto.

Coroll. Sia M uno spazio metrico compatto. Allora $(C_{\mathbb{F}}(M), d_\infty)$ è uno spazio metrico completo.