Fisica II

Esercitazione 8

Alessandro Pedico
alessandro.pedico@polito.it

21/10/2022

Momento meccanico su circuito piano

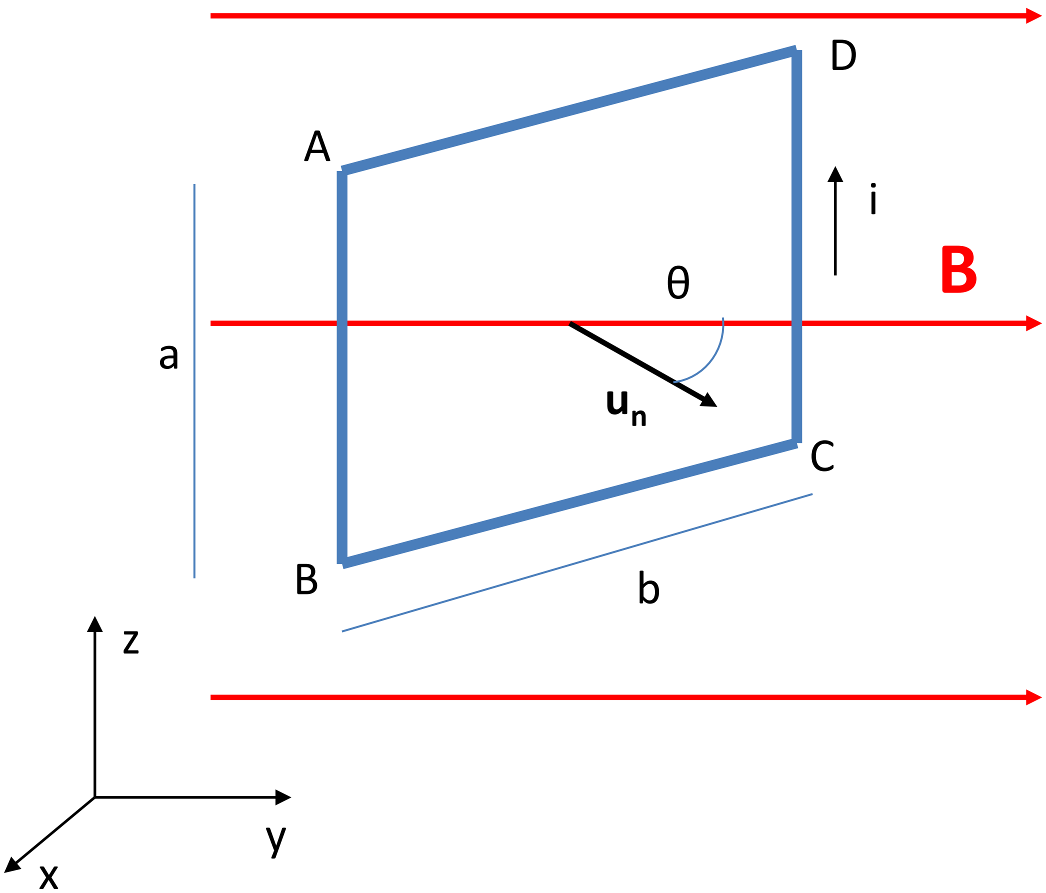
Un circuito indeformabile immerso in un campo magnetico è soggetto alla fisica del **corpo rigido**:

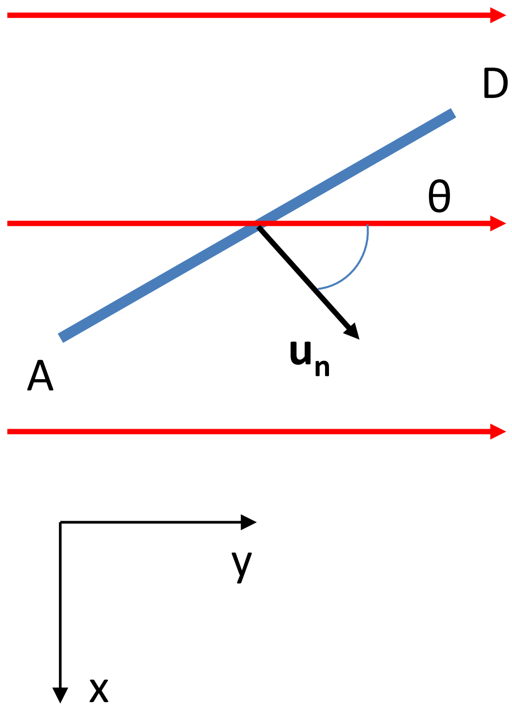
- la risultante delle forze applicate su di esso determina il **moto traslazionale** del centro di massa
- il momento meccanico determina il suo **moto rotatorio**

Per quanto riguarda la forza magnetica: $\vec{F} = i \int_P^Q \overrightarrow{ds} \times \vec{B}$

abbiamo verificato che nel caso di circuito piano immerso in un campo magnetico uniforme dipende solo dalla distanza tra gli estremi su cui è calcolata e non dalla particolare conformazione del circuito.
Come conseguenza, la forza magnetica totale su un circuito chiuso piano è **NULLA**. Passiamo adesso allo studio del **momento meccanico**.

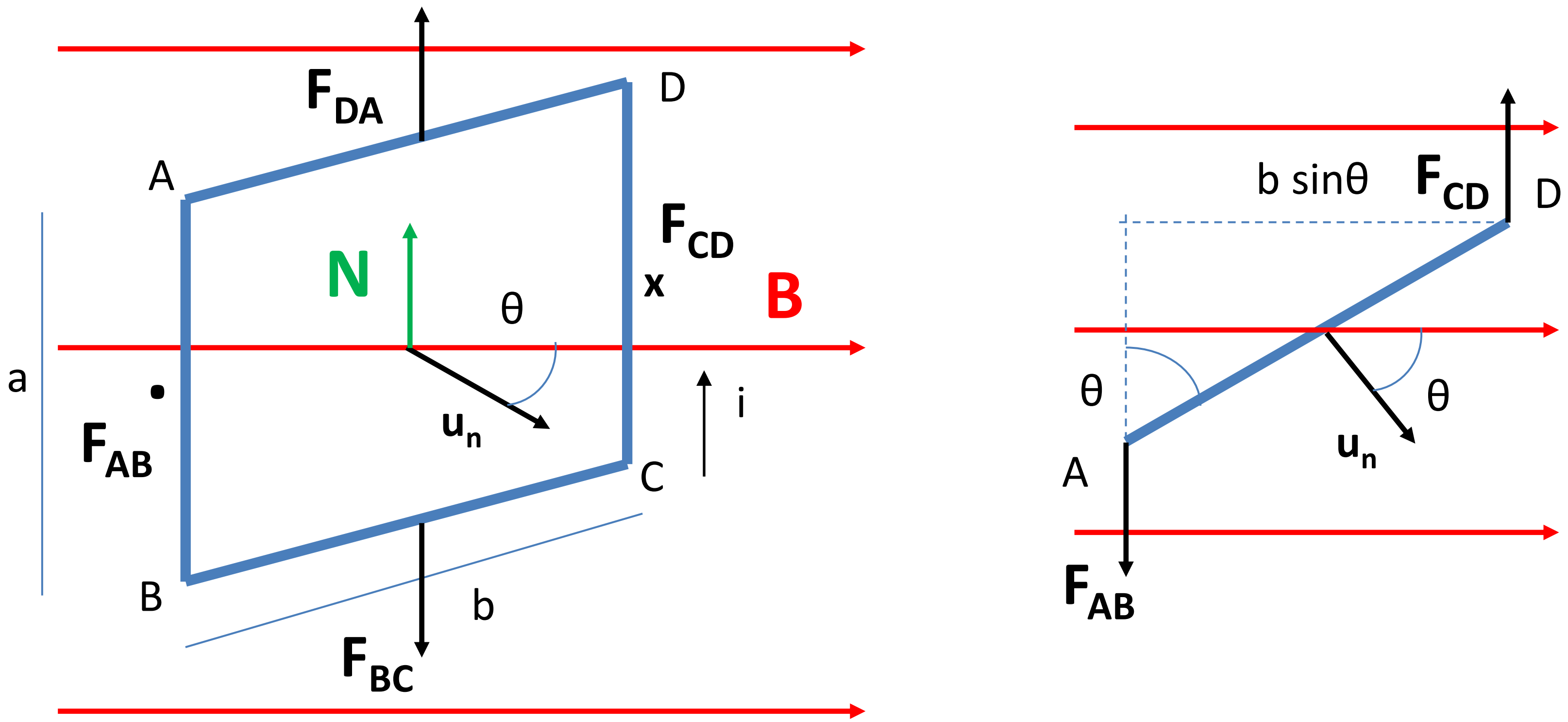
Momento meccanico su circuito piano





Spira piana rettangolare (lati *a*, *b*), posta in un campo magnetico uniforme **B** orientato lungo l'asse y.

Momento meccanico su circuito piano



- la forza risultante è **nulla**; non avviene moto traslazionale del centro di massa
- Le forze $\mathbf{F_{AB}}$ e $\mathbf{F_{CD}}$ costituiscono una coppia di braccio b sinθ, che genera momento meccanico **N** e quindi **moto rotatorio** (antiorario attorno all'asse z).

Momento magnetico su circuito piano

$$N = b\ \sin\theta\ F =$$

$$\vec{F} = i\int_C^D \overrightarrow{ds} \times \vec{B} \longrightarrow F = i\,a\,B$$

Momento magnetico su circuito piano

$$N = b\ \sin\theta\ F = i\,a\,b\ B\sin\theta = i\,S\,B\ \sin\theta$$

In forma vettoriale possiamo scrivere:

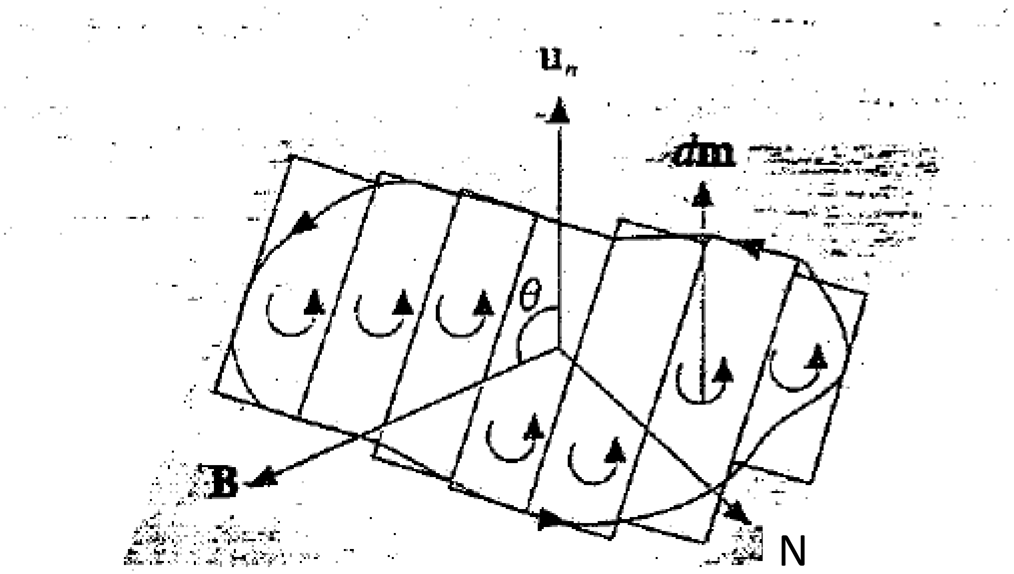
$$\vec{N} = i\,S\,B\ \sin\theta\ \hat{u}_z = i\,S\ \hat{u}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Il vettore **m** è definito come **momento magnetico** della spira.

$$\boxed{\vec{m} = i\,S\,\hat{u}_n \qquad \vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

Momento magnetico su circuito piano

La definizione di momento magnetico di un circuito è valida per **circuiti piani di forma qualsiasi** immersi in un campo magnetico uniforme



$$\vec{N} = \int \overrightarrow{dm} \times \vec{B} = i \int dS\, \hat{u}_n \times \vec{B} = i\, S\, \hat{u}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Momento magnetico

$$\vec{m} = i\,S\,\hat{u}_n \qquad \vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

- Quando un circuito piano è immerso in un campo magnetico, si genera un **momento meccanico** che tende ad **allineare** il momento magnetico del circuito tramite moto rotatorio

- Se **m** parallelo a **B**, il momento meccanico è **nullo**: quando $\theta = 0$, si ha equilibrio **stabile**, per $\theta = \pi$ si ha equilibrio **instabile**

→ **Comportamento analogo a quello di un dipolo elettrico in un campo elettrico**

Campo magnetico di una spira

Spira

$$\vec{B}(x,0,0) = \frac{\mu_0 \, i \, R^2}{2\,[R^2 + x^2]^{3/2}} \, \hat{u}_x$$

Approssimazione di grandi distanze: **x >>R**

$$\vec{B}\,(x,0,0) = \frac{\mu_0 \, i \, R^2}{2\,x^3} \hat{u}_x = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \frac{2\,\vec{m}}{x^3}$$

$$\vec{m} = i\,\pi R^2 \, \hat{u}_x$$

Politecnico di Torino

Campo magnetico di una spira

Spira

$$\vec{B}(x,0,0) = \frac{\mu_0\, i\, R^2}{2\,[R^2 + x^2]^{3/2}}\,\hat{u}_x$$

Approssimazione di grandi distanze: **x >>R**

$$\vec{B}\,(x,0,0) = \frac{\mu_0\, i\, R^2}{2\, x^3}\hat{u}_x = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{2\,\vec{m}}{x^3}$$

Espressione formalmente identica al campo elettrico generato dal dipolo elettrico a grandi distanze lungo il suo asse ($\theta = 0$).

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\,p\cos\theta}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

L'analogia vale per ogni punto dello spazio, se la distanza dalla spira è molto maggiore della dimensione caratteristica della spira. Il campo magnetico generato dalla spira è **identico** al campo elettrico generato dal dipolo elettrico su **grandi distanze**.

Energia potenziale

Principio di equivalenza di Ampere

Una spira **piana** di area *dS* percorsa da corrente *i* equivale agli effetti magnetici a un **dipolo elementare** di momento magnetico:

$$\overrightarrow{dm} = i\, dS\, \hat{u}_n$$

perpendicolare al piano della spira e orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite.

Possiamo definire quindi, in analogia con il dipolo elettrico, una **energia potenziale:**

$$\mathrm{U_p} = -\,\vec{\mathrm{m}} \cdot \vec{\mathrm{B}}$$

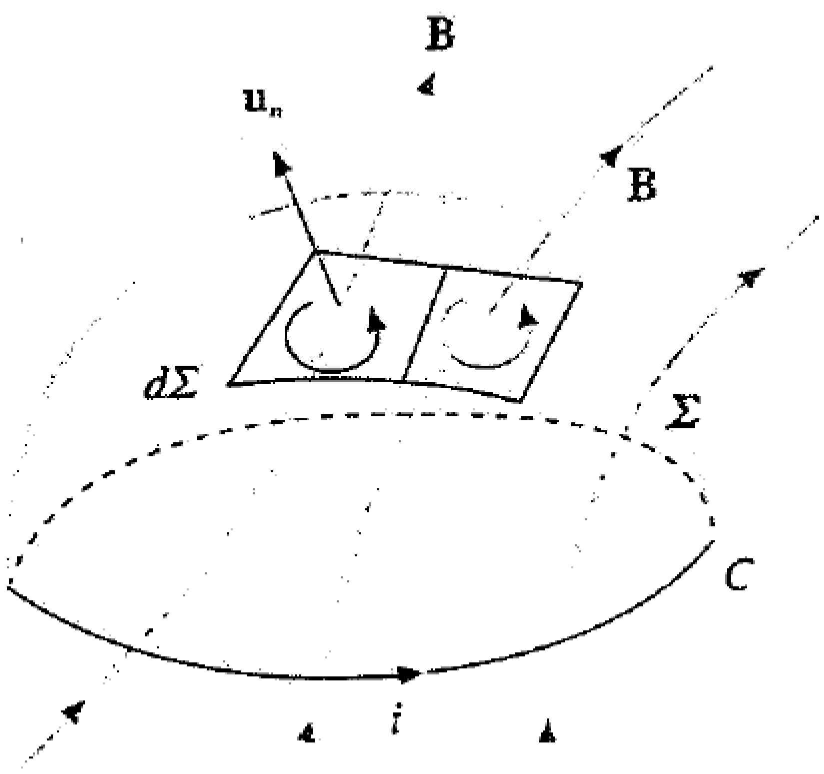
$$\vec{\mathrm{F}} = -\,\vec{\nabla}\, \mathrm{U_p}$$

TRASLAZIONE RIGIDA

$$\mathrm{N} = -\,\frac{\partial\, \mathrm{U_p}}{\partial\, \theta}$$

ROTAZIONE RIGIDA

Energia potenziale di un circuito



Consideriamo un circuito *C* **non piano**, percorso da corrente *i*

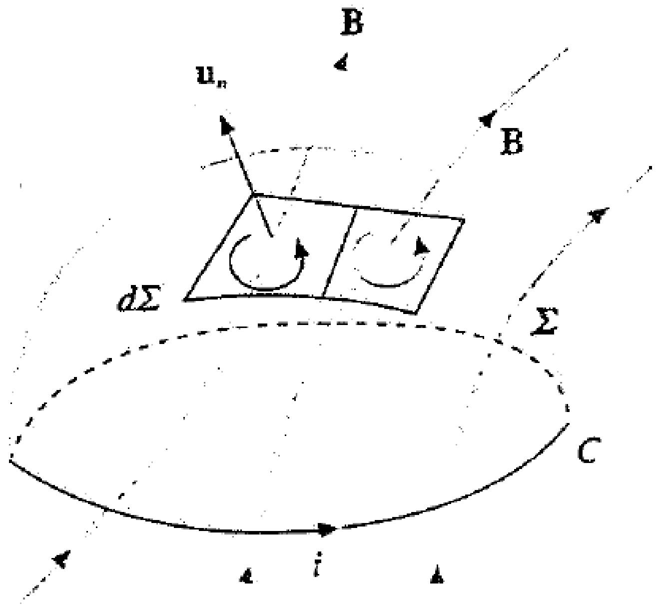
$$dU_p = -\overrightarrow{dm} \cdot \vec{B}$$

$$= -i\,\vec{B} \cdot \hat{u}_n\, dS$$

$$= -i\, d\Phi(B)$$

$$U_p = -i \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n\, dS = -i\,\Phi(B)$$

Energia potenziale



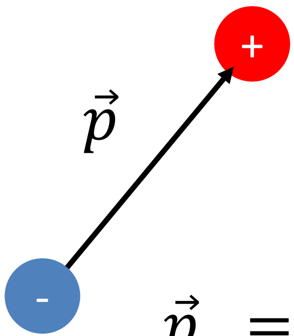
$$U_p = -i \int \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, dS = -\, i\, \Phi(B)$$

L'integrale **non dipende** dalla particolare superficie scelta, ma solo dal bordo (cioè dalla forma del circuito), come conseguenza della proprietà di flusso del campo magnetico.

Il **lavoro** corrispondente ad una variazione di configurazione è quindi sempre legato a variazioni del **flusso magnetico**, a condizione che la corrente resti costante.

$$W = -\,\Delta\, U_p = i\, \Delta\Phi(B)$$

Dipolo elettrico vs Dipolo magnetico



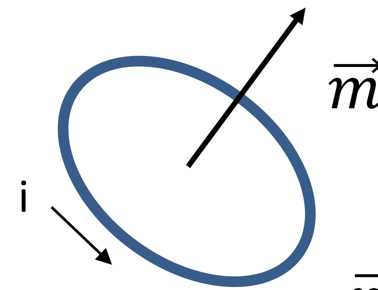
$$\vec{p} = q\, a\, \hat{u}_{-,+}$$

$$U_e(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\, U_e$$

$$M = -\frac{\partial\, U_e}{\partial\, \theta}$$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$



$$\vec{m} = i\, S\, \hat{u}_n$$

$$U_p(\theta) = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

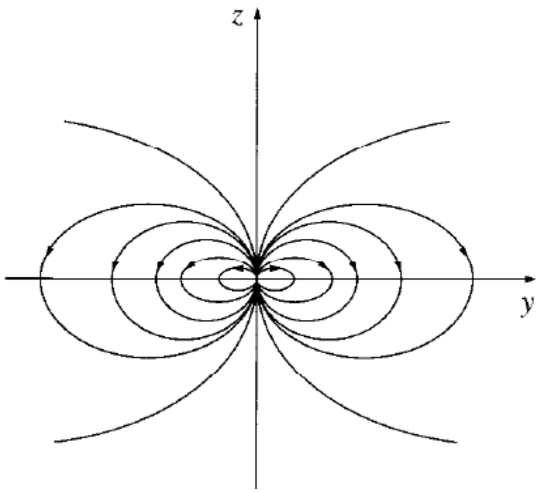
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\, U_p$$

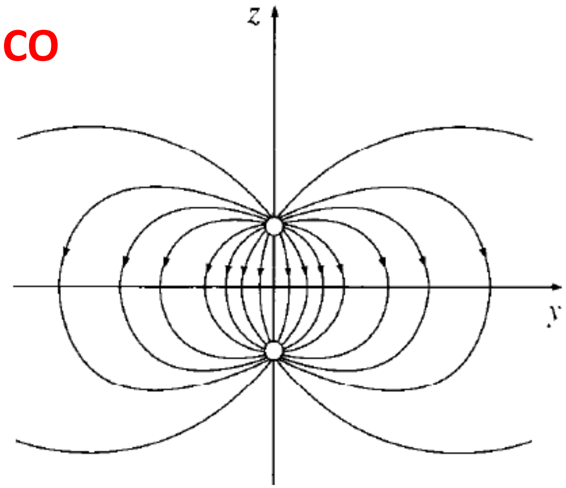
$$N = -\frac{\partial\, U_p}{\partial\, \theta}$$

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

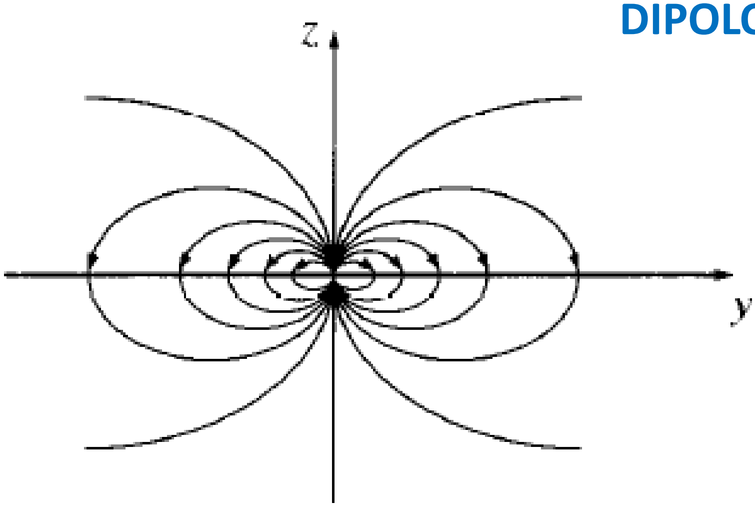
Dipolo elettrico vs Dipolo magnetico

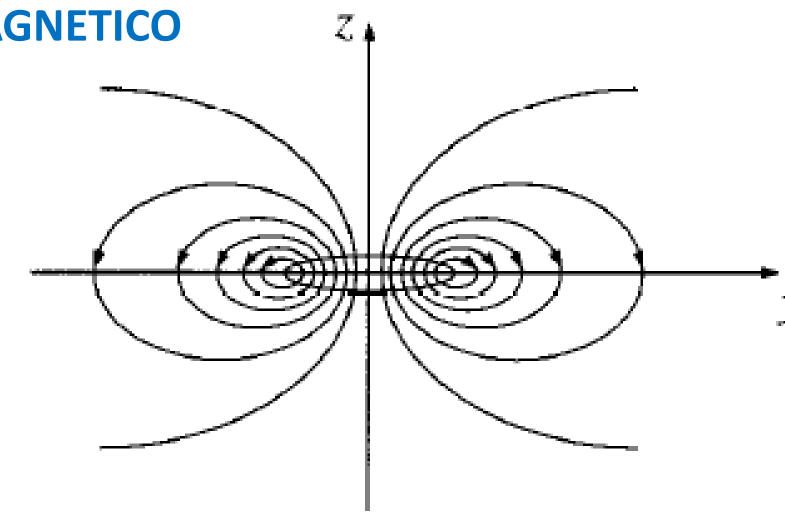
DIPOLO ELETTRICO





DIPOLO MAGNETICO





Nota: a piccole distanze le linee di campo sono differenti!