ESE 5 FILE ESERCIZI

Esercizio 5. Si consideri la funzione

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \alpha > 0\,. \qquad \underline{n \geq 2}$$

1) Dire per quali valori di $\alpha > 0$, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$;

2) Provare che u è derivabile in senso debole per ogni $0 < \alpha < n-1$;

3) Dire per quali valori di $0 < \alpha < n-1$, $u \in H^1(B_1(0))$ dove $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ è la palla unitaria centrata nell'origine.

COMMENTI sul P.TO 2: se riguardate lo svolgimento, per dedurre che le DERIV. DEBOLI coincidono con le classiche per $0 < \alpha < n-1$, abbiamo utilizzato le seguenti info. su u_α:

1. $u_\alpha \in L^1_{LOC}(\mathbb{R}^n)$

2. $(u_\alpha)_{x_i} \in L^1_{LOC}(\mathbb{R}^n)$

IPOTESI richieste nella def. di DERIV. <u>DEBOLE</u>

3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} (u_\alpha)_{x_i}(x)\, \varphi(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^n} (u_\alpha)_{x_i}(x)\, \varphi(x)\, dx$ per $\varepsilon \to 0^+$

4. $\displaystyle\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u_\alpha\, \varphi\, n_i\, dS \to 0$ per $\varepsilon \to 0^+$

3. e 4. servono per dimostrare che

$$-\int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha\, \varphi_{x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} (u_\alpha)_{x_i}\, \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$$

Ora osservo che:

- 2. => 3. (TEO. di LEBESGUE)

- abbiamo dimostrato 4. usando il fatto che $u|_{\partial B_\varepsilon(0)} = \varepsilon^{-\alpha}$ e che per $\alpha < n-1$ ho che:

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u_n \varphi \, n_i \, ds\right| \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \|\varphi\|_\infty \, \underbrace{|\partial B_\varepsilon(0)|}_{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} = \frac{C}{\varepsilon^{\alpha-n+1}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0 \quad \text{SE } \alpha < n-1$$

MORALE: DEVO AVERE: $\boxed{u|_{\partial B_\varepsilon(0)} \cdot \varepsilon^{n-1} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0}$ (*)

condizione sufficiente

Se u è radiale la verifica di (*) è facile.
Inoltre, se $u(r) \sim c\, r^{-\alpha}$ per $r \to 0^+$ vale tutto esattamente come nell'ese. 5 ed è inutile rifare la verifica

ESE 1 FILE ESERCIZI

$\boxed{\text{ESE. 1.}}$ VERIFICO DERIV. DEBOLI e CLASSICHE COINCIDONO

$$u(r) = \log(\log(r^2+1)) - \log(\log 2) \underset{r\to 0^+}{\sim} \log(r^2) - \log(\log 2)$$

1. $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2) \iff \int_0^R u(r)\, 2\omega_2 r \, dr < +\infty$

DIMENSIONE 2

PERCHÉ: $u(r)\, r \underset{r\to 0^+}{\sim} 2\log r \cdot r \to 0$

2. $u_x, u_y \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ PERCHÉ:

$$|u_x| \le |\nabla u| = |u'(r)| = \frac{2r}{(1+r^2)\log(1+r^2)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

PERCHÉ RADIALE

$$\int_0^R \frac{2r}{(1+r^2)\log(1+r^2)} \cdot 2\omega_2 r \, dr < +\infty$$

PERCHÉ

$$\frac{r^2}{(1+r^2)\log(1+r^2)} \underset{r\to 0^+}{\sim} 1$$

3. segue da 2.
4. segue osservando che

$$u|_{\partial B_\varsigma(0)} \cdot \varsigma^{n-1} = \left(\log \varsigma^2 - \log(\log 2)\right) \cdot \varsigma^{n-1} \to 0$$