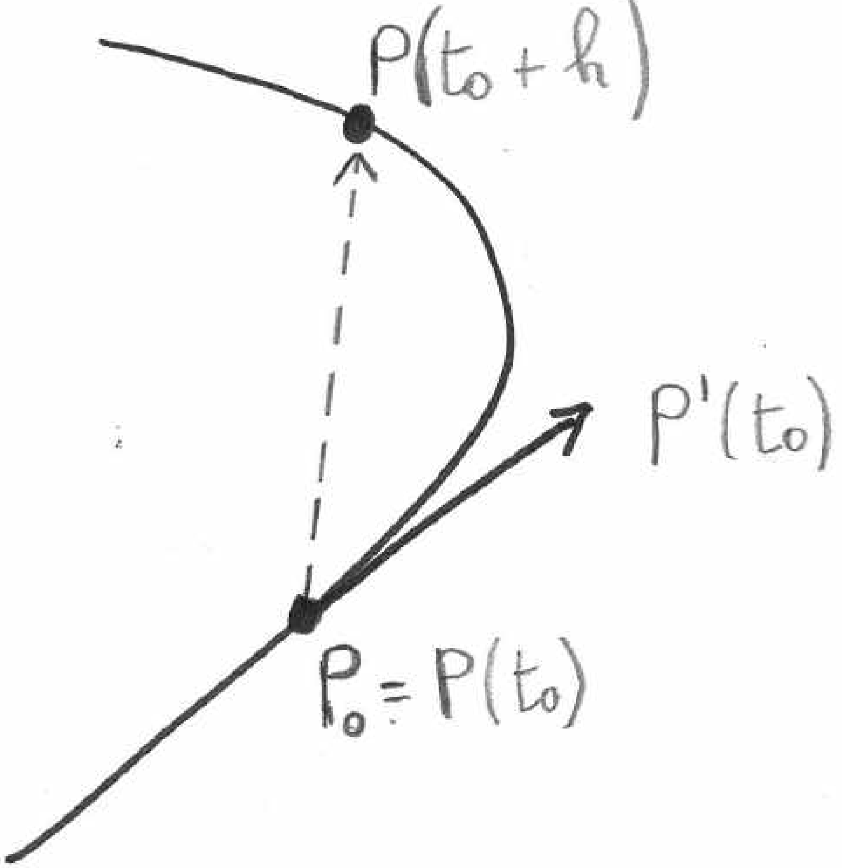
PROP: Il piano osculatore nel punto biregolare $P_0 = P(t_0)$ è il piano limite, per $h \to 0$, del piano passante per $P(t_0 + h)$ e $P(t_0)$ e parallelo a $P'(t_0)$.



Oss: esiste un solo piano passante per $P(t_0 + h)$ e P_0 e parallelo a $P'(t_0)$.
Quest'ultima condizione significa che $P'(t_0)$ è ortogonale alla giacitura del piano

DIM :

1° PASSO : Ricordiamo che un piano passante per due punti A e B e parallelo ad un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ha equazioni parametriche

$$A + \alpha(B - A) + \beta \vec{v} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$ sono i parametri

cioè coincide col piano passante per A e parallelo a $\text{Span}\{B - A, \vec{v}\}$

Nel nostro caso, il piano passante per $P(t_0 + h)$ e P_0 e parallelo a $P'(t_0)$ - chiamiamo $Q(h)$ tale piano - ha equazioni parametriche

$$Q(h) = P(t_0) + \alpha\big(P(t_0+h) - P_0\big) + \beta P'(t_0) \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

L'equazione cartesiana di tale piano è

$$\det\begin{pmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x(t_0+h) - x(t_0) & y(t_0+h) - y(t_0) & z(t_0+h) - z(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

dove $P(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$

Non ci rimane che studiare il vettore

$$P(t_0+h) - P(t_0) = \big(x(t_0+h) - x(t_0),\ y(t_0+h) - y(t_0),\ z(t_0+h) - z(t_0)\big)$$

$2^{\underline{o}}$ PASSO : Studio dell'elemento $P(t_0+h) - P(t_0)$

Per la formula di Taylor, che possiamo applicare componente per componente, abbiamo che

$$P(t_0+h) = P(t_0) + P'(t_0)\cdot h + \frac{1}{2}P''(t_0)\,h^2 + \underbrace{\frac{1}{6}P'''(t_0)\,h^3 + \ldots + \ldots}_{\text{Questa quantità è uguale a}}$$

$$= h^2 \underbrace{\left(\frac{1}{6}P'''(t_0)\,h + \ldots\ldots + \ldots\right)}_{\text{Pongo questo pezzo, per definizione, uguale a } \frac{\varepsilon(h)}{2}}$$

In definitiva

$$P(t_0+h) = P(t_0) + P'(t_0)\,h + \frac{1}{2}P''(t_0)\,h^2 + h^2\,\frac{\varepsilon(h)}{2}$$

$$= P(t_0) + P'(t_0)\,h + \frac{1}{2}\left(P''(t_0) + \varepsilon(h)\right)h^2$$

Cioè

$$P(t_0+h) - P(t_0) = h\cdot P'(t_0) + \frac{h^2}{2}\cdot\left(P''(t_0) + \varepsilon(h)\right) \quad (\star)$$

In altre parole

$$P(t_0+h) - P(t_0) \in \mathrm{Span}\left\{P'(t_0),\ P''(t_0) + \varepsilon(h)\right\}$$

Se andiamo a sostituire $(\star)$

nell'equazione cartesiana di pag. 3 otteniamo, denotando $\varepsilon(h) = \left(\varepsilon_x(h),\ \varepsilon_y(h),\ \varepsilon_z(h)\right)$,

$$\det\begin{pmatrix} X - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ h\,x'(t_0) + \frac{h^2}{2}\left(x''(t_0) + \varepsilon_x(h)\right) & h\,y'(t_0) + \frac{h^2}{2}\left(y''(t_0) + \varepsilon_y(h)\right) & h\,z'(t_0) + \frac{h^2}{2}\left(z''(t_0) + \varepsilon_z(h)\right) \end{pmatrix} = 0$$

che per la proprietà dei determinanti è uguale a

$$\det\begin{pmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ h\,x'(t_0) & h\,y'(t_0) & h\,z'(t_0) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ \frac{h^2}{2}\left(x''(t_0) + \varepsilon_x(h)\right) & \frac{h^2}{2}\left(y''(t_0) + \varepsilon_y(h)\right) & \frac{h^2}{2}\left(z''(t_0) + \varepsilon_z(h)\right) \end{pmatrix} = 0$$

Il primo membro dell'ultima equazione di pag. 6 è nullo in quanto la 2^a e la 3^a riga sono proporzionali. Quindi, in definitiva abbiamo che il piano $Q(h)$ ha equazione cartesiana

$$\det\begin{pmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) + \varepsilon_x(h) & y''(t_0) + \varepsilon_y(h) & z''(t_0) + \varepsilon_z(h) \end{pmatrix} = 0$$

Poiché per $h \to 0$ abbiamo che $\varepsilon(h) = \big(\varepsilon_x(h), \varepsilon_y(h), \varepsilon_z(h)\big) = (0,0,0)$,

la precedente equazione si riduce a

$$\det \begin{pmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

che è l'equazione cartesiana del piano passante per $P(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ e parallelo a $\mathrm{Span}\{P'(t_0), P''(t_0)\}$, cioè <u>il</u> <u>piano osculatore</u>

<u>Oss:</u> In qualche testo l'enunciato della Proposizione di pag. 1 viene preso come definizione di piano osculatore

Triedro di Frenet

di una curva $P : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nel punto biregolare $P_0 = P(t_0)$ (o anche, triedro di Frenet all'istante t_0) è il triedro che ha come lati:

1) La retta tangente alla curva in P_0
2) La retta perpendicolare alla retta tangente e contenuta nel piano osculatore
3) La retta ortogonale al piano osculatore

Definiamo

$$T(t) = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} \qquad N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \qquad B(t) = T(t) \times N(t)$$

$\boxed{\text{Oss. 1}}$ $T(t)$ e $N(t)$ sono ortogonali $\forall\, t \in I$

Infatti, poiché $T(t)$ è un versore, abbiamo che

$\|T(t)\| = 1$, cioè $T(t) \cdot T(t) = 1 \quad \forall\, t \in I$

Quindi

$$T \cdot T = 1 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(T \cdot T) = 0 \xRightarrow[\text{Leibniz}]{\text{Regola}} T' \cdot T + T \cdot T' = 0$$

$$\xRightarrow[\text{prodotto scalare}]{\text{simmetria}} 2\,T' \cdot T = 0 \Longrightarrow T' \text{ è ortogonale a } T$$

$\boxed{\text{Oss. 2}}$ B è un versore ortogonale a T e N

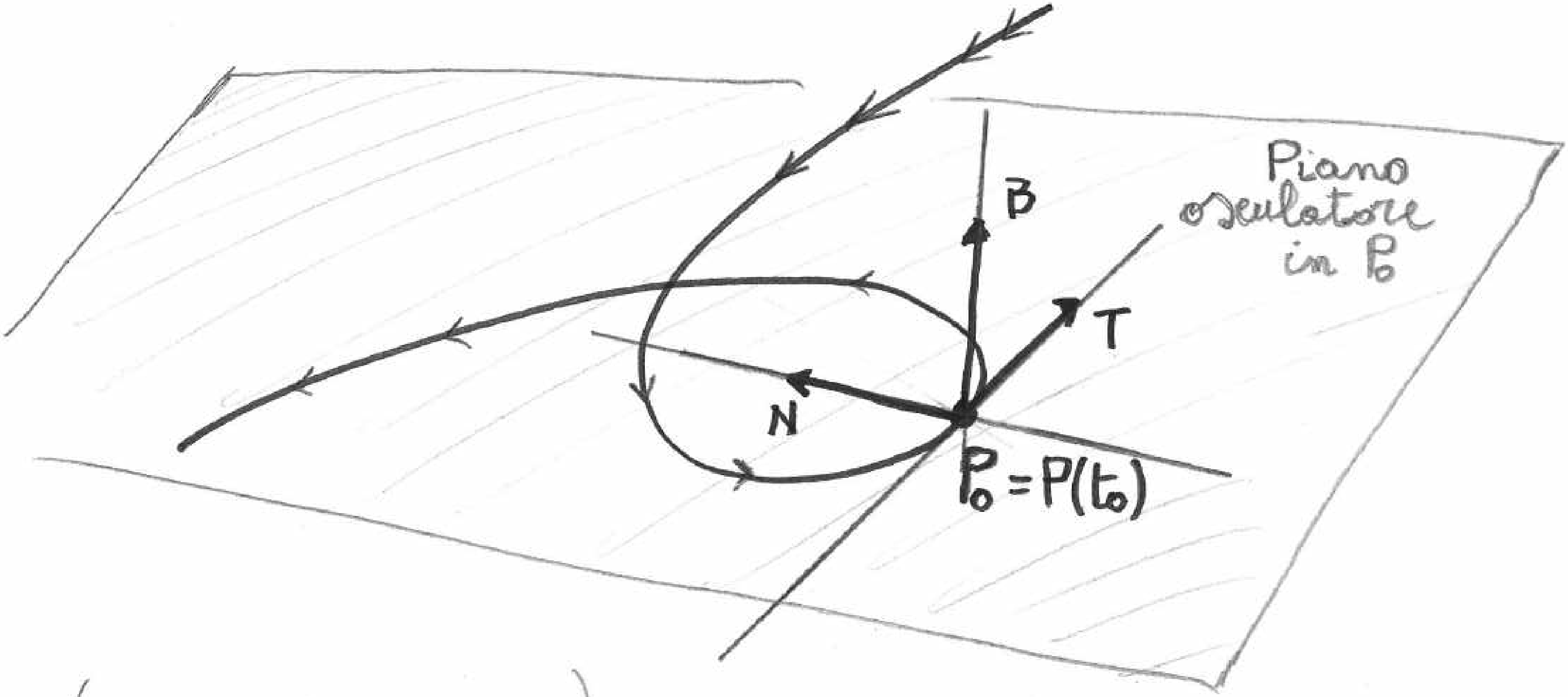
Infatti $\|B\| = \|T \times N\| = \underbrace{\|T\|}_{\substack{=1 \\ \text{in quanto} \\ \text{versore}}} \underbrace{\|N\|}_{\substack{=1 \\ \text{in quanto} \\ \text{versore}}} \underbrace{\operatorname{sen}(\theta)}_{=1}$

$\operatorname{sen}(\theta) = 1$ in quanto θ è l'angolo formato da T e N che, essendo ortogonali, è di $90°$.

È ortogonale a T e N in quanto $T \times N$ lo è.

Vedere disegno pagina successiva

Facendo un disegno



$$\left(T(t) \, , \, N(t) \, , \, B(t) \right)$$

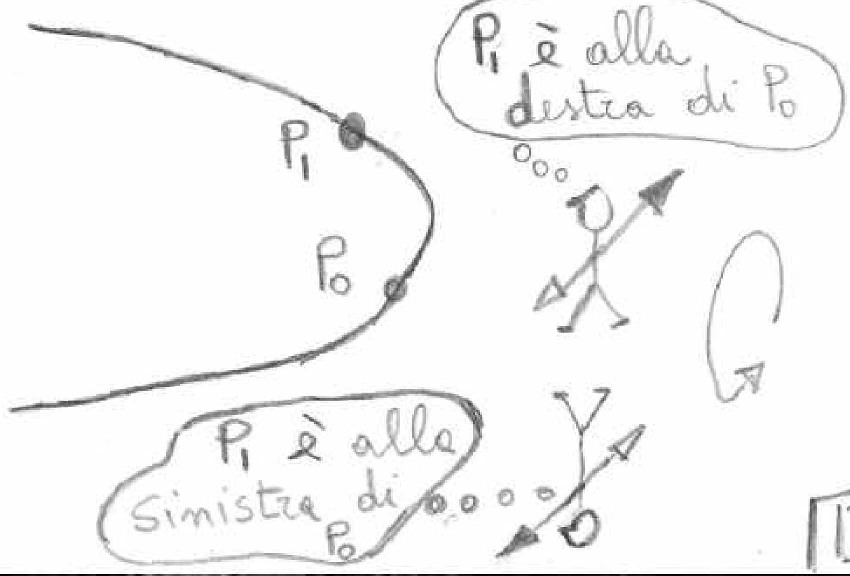
è una base di $\mathbb{R}^3$ per ogni $t \in I$.

fatta di versori

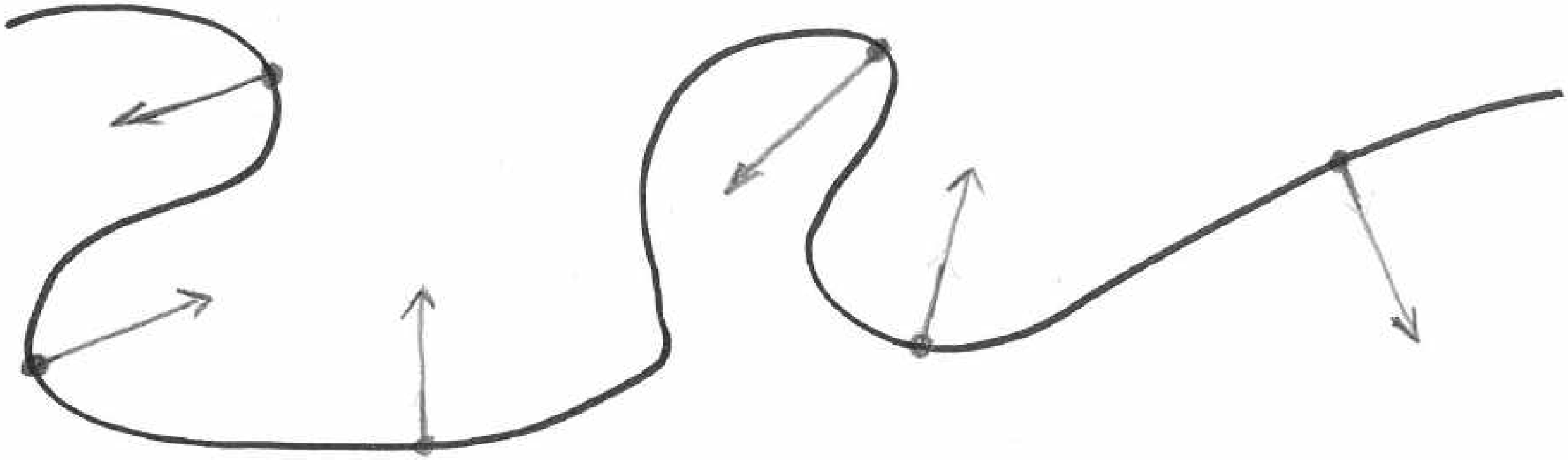
Oss. 3 : Il verso del vettore T, come già abbiamo visto quando abbiamo parlato di vettore tangente ad una curva, non è invariante nel senso che dipende dalla parametrizzazione. In particolare dipende se il punto materiale P ("la particella") percorre la curva in un verso o nell'altro.

In altre parole, se fissiamo un punto P_0 sulla curva, il concetto di andare "a destra" o "a sinistra" del punto non è ben definito.

Stessa cosa per il versore B: non è ben definito il concetto di "sopra" o "sotto" al piano osculatore



Invece il verso del vettore N è canonico, cioè invariante per parametrizzazioni della curva.
Questo riflette il fatto che possiamo "distinguere" la concavità della curva in ogni suo punto



Ora lo andiamo a dimostrare rigorosamente

PROP: Il verso di N non cambia se cambiamo parametrizzazione

DIM

Consideriamo la curva $P(\tau)$ e il cambio di parametrizzazione $\tau(t)$. Avremo che

$$T(t) = \frac{\frac{d}{dt} P(\tau(t))}{\left\| \frac{d}{dt} P(\tau(t)) \right\|} = \frac{\frac{dP}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}}{\left\| \frac{dP}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right\|} = \frac{\frac{dP}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}}{\left\| \frac{dP}{d\tau} \right\| \left| \frac{d\tau}{dt} \right|}$$

$$= T(\tau) \, \frac{d\tau}{dt} \Big/ \left| \frac{d\tau}{dt} \right|$$

Riscrivo :

$$T(t) = T(\tau) \cdot \frac{d\tau}{dt} \Big/ \left|\frac{d\tau}{dt}\right| \qquad (\star)$$

$\boxed{\text{Se } \frac{d\tau}{dt} > 0}$ da $(\star)$ ho che $T(t) = T(\tau)$

da cui $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \Longrightarrow \frac{dT}{dt}$ e $\frac{dT}{d\tau}$

hanno lo stesso verso in quanto stiamo supponendo $\frac{d\tau}{dt} > 0$

$\boxed{\text{Se } \frac{d\tau}{dt} < 0}$ da $(\star)$ ho che $T(t) = -T(\tau)$

da cui $\frac{dT}{dt} = -\frac{dT}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \Longrightarrow \frac{dT}{dt}$ e $\frac{dT}{d\tau}$ hanno

lo stesso verso in quanto stiamo supponendo $\frac{d\tau}{dt} < 0$

DEF:

La base "mobile" di $\mathbb{R}^3$

$$\left(T(t), N(t), B(t) \right)$$

si chiama anche riferimento di Frenet

della curva $P(t)$

$T(t)$ è il versore tangente

$N(t)$ è il versore normale

$B(t)$ è il versore binormale

Ex: Consideriamo la curva

$$P(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Abbiamo che

$$P'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$ e poiché $\|P'(t)\| = 1$

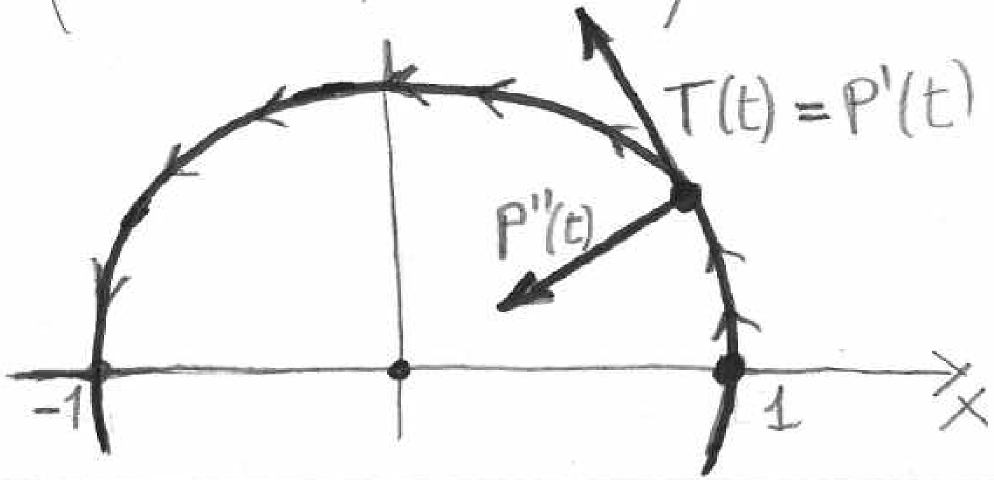
abbiamo che

$$T(t) = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} = P'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$

Quindi

$$N(t) = P''(t) = (-\cos(t), -\operatorname{sen}(t)).$$

Andando a disegnare



__Ex__: Consideriamo la curva

$$P: t \in \mathbb{R} \longrightarrow (t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3$$

e calcoliamo il suo riferimento di Frenet.

$P'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, quindi

$$T(t) = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|} = \frac{(1, 2t, 3t^2)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

e (il conto è un po' lungo)

$$N(t) = \frac{\left(-t(9t^2+2),\ -(9t^4-1),\ 3t(2t^2+1)\right)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}\ \sqrt{1+9t^2+9t^4}}$$

Per esempio, $T(0) = (1, 0, 0)$ e $N(0) = (0, 1, 0)$

Infine abbiamo che

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$, cioè è uguale a

$$\frac{\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ -t(9t^2+2) & -(9t^4-1) & 3t(2t^2+1) \end{pmatrix}}{(1+4t^2+9t^4)\sqrt{1+9t^2+9t^4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}} \cdot (3t^2, -3t, 1)$$

Oss:

Se ora cambiamo parametrizzazione alla curva, per esempio consideriamo $\tau = -t$, avremo che

$$Q(\tau) = P(t(\tau)) = P(-\tau) = (-\tau, \tau^2, -\tau^3)$$

Avremo che

$$T(\tau) = \frac{Q'(\tau)}{\| Q'(\tau) \|} = \frac{(-1, 2\tau, -3\tau^2)}{\sqrt{1+4\tau^2+9\tau^2}}$$

e, analogamente a pagina precedente,

$$N(\tau) = \frac{\left(\tau(9\tau^2+2), \; -(9\tau^4-1), \; -3\tau(2\tau^2+1) \right)}{\sqrt{1+4\tau^2+9\tau^4}\,\sqrt{1+9\tau^2+9\tau^4}}$$

Per esempio $T(0) = (-1, 0, 0)$ (l'opposto di quello di pag. 18)

e $N(0) = (0, 1, 0)$ (lo stesso " " " " ")

Notare che, in un punto generico A della curva, il vettore normale N è lo stesso sia se lo si calcola rispetto alla parametrizzazione t che rispetto a quella in τ. Infatti abbiamo che $N(t)$ di pagina 18 è uguale a $N(-t) = \mathbf{N}(\tau)$ di pagina 20.

Come ulteriore verifica di quanto detto calcoliamo N nel punto $P(1)$ (quindi per $t = 1$)

Considerando le formule di pag. 18 abbiamo che

$$N(1) = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{19}}(-11, -8, 9).$$

Analogamente se consideriamo la parametrizzazione di pag. 20 abbiamo

$$N(-1) = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{19}}(-11, -8, 9).$$