Neanche in questo caso interviene il vincolo di rigidità del sistema.

Equilibrio di sistemi rigidi

Vediamo ora come per un sistema <u>rigido</u> le equazioni cardinali della statica diventino anche sufficienti a garantirne l'equilibrio.

<u>Teorema</u> Se il sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$ è <u>rigido</u> e i vincoli sono <u>ideali</u>, allora condizione necessaria e sufficiente affinché la configurazione $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ sia di equilibrio è che valgano le equazioni cardinali della statica.

<u>Dim.</u> Che la validità delle equazioni cardinali della statica sia una condizione necessaria per l'equilibrio è ovvio dal fatto che, come precedentemente dimostrato, è così per un sistema qualsiasi.

Risultanti di forze e momenti risultanti nulli

Vediamo che, sotto il vincolo di rigidità, le equazioni (**) diventano anche sufficienti. Dalle equazioni cardinali della statica abbiamo:

$$\begin{cases} \underline{0} = \underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(a,e)} + \underline{R}^{(v)} \\ \underline{0} = \underline{M}_Q^{(e)} = \underline{M}_Q^{(a,e)} + \underline{M}_Q^{(v)} \end{cases} \qquad (***)$$

Ricordiamo inoltre che il lavoro virtuale delle forze agenti su un sistema rigido si scrive:

$$\delta L = \underline{R} \cdot \delta \underline{Q} + \underline{M}_Q \cdot \delta \underline{\varepsilon},$$

essendo $\underline{R}$, $\underline{M}_Q$ rispettivamente il risultante e il momento risultante rispetto ad un polo <u>solidale</u> $Q \in \mathbb{R}^3$ delle forze agenti e $\delta \underline{\varepsilon}$ una rotazione virtuale.

Allora se nelle (***) prendiamo Q appartenente allo spazio solidale e poi moltiplichiamo scalarmente la prima equazione per $\delta \underline{Q}$, la seconda per $\delta \underline{\varepsilon}$ e infine sommiamo deduciamo:

$$0 = \underbrace{\underline{R}^{(a,e)} \cdot \delta \underline{Q} + \underline{M}_Q^{(a,e)} \cdot \delta \underline{\varepsilon}}_{\delta L^{(a,e)}} + \underbrace{\underline{R}^{(v)} \cdot \delta \underline{Q} + \underline{M}_Q^{(v)} \cdot \delta \underline{\varepsilon}}_{\delta L^{(v)}}$$

ossia

$$\delta L^{(a,e)} + \delta L^{(v)} = 0.$$

D'altra parte, il lavoro virtuale delle forze attive interne è nullo perchè, per il terzo principio della meccanica, sono nulli sia il risultante

$$\underline{R}^{(a,i)} := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} = \underline{0}$$

sia il momento risultante

$$\underline{M}_Q^{(a,i)} := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} (P_i - Q) \times \underline{f}_{ij}^{(a,i)} = \underline{0}.$$

Dunque: $\delta L^{(a,i)} = \underline{R}^{(a,i)} \cdot \delta \underline{Q} + \underline{M}_Q^{(a,i)} \cdot \delta \underline{\varepsilon} = 0$ e quindi possiamo ulteriormente scrivere

$$\underbrace{\delta L^{(a,e)} + \delta L^{(a,i)}}_{\delta L^{(a)}} + \delta L^{(v)} = 0.$$

Ma allora $\delta L^{(a)} + \delta L^{(v)} = 0$, cioè, essendo i vincoli ideali $(\delta L^{(v)} \geq 0)$,

$$\delta L^{(a)} = -\delta L^{(v)} \leq 0.$$

Per il principio dei lavori virtuali la configurazione è quindi di equilibrio.

$\not{I}$

Statica dei sistemi olonomi

Consideriamo un sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$ soggetto solo a vincoli olonomi:

$$\psi_j(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) \geq 0, \qquad j \geq 1,$$

essendo $\underline{r}_i$ il vettore posizione $P_i - O$ dell'i-esimo punto. Individuate $n \geq 1$ opportune coordinate lagrangiane $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}$, avremo pertanto

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_n, t).$$ A differenza delle r, le q sono indipendenti

Sappiamo allora che il lavoro virtuale δL delle forze agenti sui punti del sistema si può scrivere come

$$\delta L = \sum_{k=1}^{n} Q_k \, \delta q_k ,$$

essendo

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} , \qquad k = 1, \dots, n$$

la k-esima forza generalizzata associata all'incremento virtuale δq_k della k-esima coordinata lagrangiana. In particolare, il lavoro virtuale delle forze attive si scriverà:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} Q_k^{(a)} \delta q_k$$

con $Q_k^{(a)} := \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(a)} \cdot \partial_{q_k} \underline{r}_i$ essendo $\underline{F}_i^{(a)}$ il risultante delle forze attive (esterne e interne) agenti sull'i-esimo punto.

È importante osservare che poiché i vincoli sono olonomi, cioè non coinvolgono le velocità $\underline{v}_i$, gli incrementi virtuali δq_k delle coordinate lagrangiane sono tutti indipendenti tra loro.

- Vincoli bilateri

Se i vincoli del sistema sono tutti bilateri:

$$\psi_j(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0, \quad j \geq 1$$

allora tutti gli spostamenti virtuali $\delta \underline{P}_i$, e quindi tutti gli incrementi virtuali δq_k, sono invertibili. Di conseguenza, il principio dei lavori virtuali assume la forma

$$\delta L^{(a)} = 0 \qquad \forall \delta \underline{P}_i ,$$

ovvero

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k^{(a)} \delta q_k = 0 \qquad \forall \delta q_k$$

essendo i δq_k univocamente associati ai $\delta \underline{P}_i$ (e viceversa). Ma allora stante l'indipendenza dei δq_k perché i vincoli sono olonomi, ciò implica

$$Q_k^{(a)} = 0 \qquad \forall k = 1, \dots, n.$$

Ne consegue che:

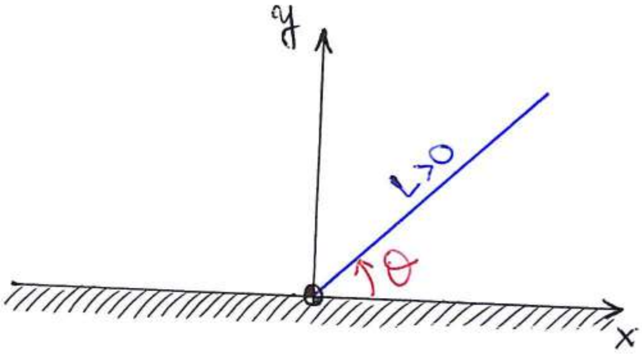
Prop. In un sistema olonomo a vincoli ideali bilateri le configurazioni di equilibrio corrispondono a tutti e soli gli insiemi di coordinate lagrangiane $(q_1, \dots, q_n)$ che risolvono il sistema

$$\begin{cases} Q_1^{(a)}(q_1, \dots, q_n) = 0 \\ \vdots \\ Q_n^{(a)}(q_1, \dots, q_n) = 0 . \end{cases}$$

- <u>Vincoli unilateri</u>

In presenza di alcuni vincoli unilateri vi sono configurazioni del sistema a partire dalle quali non tutti gli incrementi virtuali δq_k sono possibili, perché alcuni spostamenti virtuali sono <u>irreversibili</u> (ossia $\delta \underline{P}$ è uno spostamento virtuale ma $-\delta \underline{P}$ no). Esse sono le cosiddette <u>configurazioni di confine</u>, a partire dalle quali una o più coordinate lagrangiane ammettono solo incrementi virtuali con un segno ben preciso determinato dal vincolo.

<u>Esempio</u> Riconsideriamo l'esempio dell'asta che giace nel <u>semipiano</u> Oxy con $y \geq 0$ ed è incernierata nell'origine.



Per descrivere le sue configurazioni è sufficiente una sola coordinata lagrangiana, ad esempio l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ mostrato in figura.
Mentre a partire da una qualsiasi configurazione $\theta = \theta_0 \in (0, \pi)$ gli incrementi virtuali $\delta\theta$ sono tutti reversibili, in $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$ a causa del vincolo unilatero $y \geq 0$ imposto ai punti dell'asta gli incrementi virtuali $\delta\theta$ sono irreversibili. In particolare, per $\theta_0 = 0$ è ammesso solo $\delta\theta \geq 0$ mentre per $\theta_0 = \pi$ è ammesso solo $\delta\theta \leq 0$.

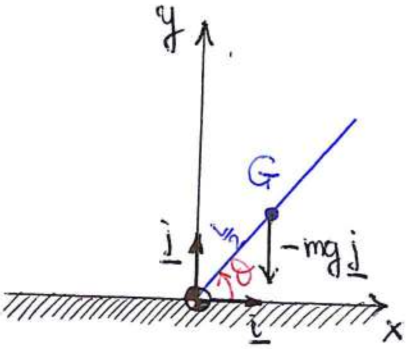
Se $\{P_i^*\}_{i=1}^N$ è una configurazione di confine è ancora possibile utilizzare il principio dei lavori virtuali per decidere se essa è di equilibrio. Ovviamente, a partire da essa si dovrà avere:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} Q_k^{(a)} \delta q_k \leq 0, \qquad \forall \delta q_k$$

e, richiamando nuovamente l'indipendenza dei δq_k grazie all'olonomia dei vincoli, risulterà:

$$\begin{cases} Q_k^{(a)} = 0 & \text{per tutti i } k \text{ per cui } \delta q_k \text{ è reversibile} \\ Q_k^{(a)} \leq 0 & \text{per tutti i } k \text{ per cui } \delta q_k \text{ è irreversibile e } \delta q_k \geq 0 \\ Q_k^{(a)} \geq 0 & \text{per tutti i } k \text{ per cui } \delta q_k \text{ è irreversibile e } \delta q_k \leq 0. \end{cases}$$

Esempio Supponiamo che l'asta dell'esempio precedente sia soggetta alla sola forza peso $\underline{P} = -mg\underline{j}$ (come forza attiva). Il suo punto di applicazione è il baricentro G dell'asta che, supponendo l'asta omogenea, si trova in



$$G - O = \frac{L}{2}\left(\cos\theta\, \underline{i} + \sin\theta\, \underline{j}\right).$$

Uno spostamento virtuale $\delta \underline{G}$ del baricentro sarà pertanto dato da:

$$\delta \underline{G} = \frac{\partial (G-O)}{\partial \theta}\delta\theta = \frac{L}{2}\left(-\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j}\right)\delta\theta$$

e quindi il lavoro virtuale delle forze attive risulta:

$$\delta L^{(a)} = \underline{P}\cdot\delta\underline{G} = -mg\underline{j}\cdot\frac{L}{2}\left(-\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j}\right)\delta\theta$$

$$= -\frac{1}{2} mgL\cos\theta\,\delta\theta$$

che ha la forma $\delta L^{(a)} = Q_\theta^{(a)}\delta\theta$ con

$$Q_\theta^{(a)} = -\frac{1}{2} mgL\cos\theta.$$

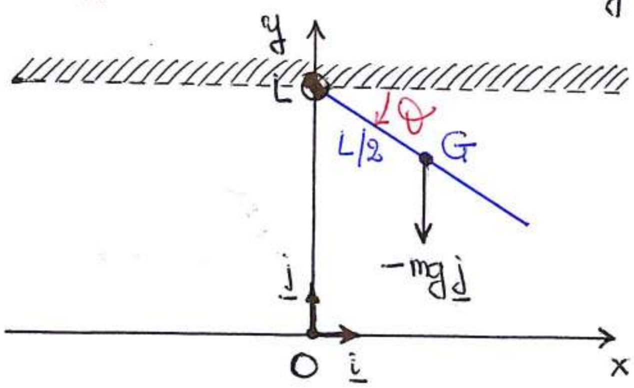
Questa è dunque la forza generalizzata associata all'incremento virtuale $\delta\theta$ della coordinata lagrangiana θ.

Notiamo che, per $\theta\in[0,\pi]$, risulta $Q_\theta^{(a)}=0$ per $\theta=\frac{\pi}{2}$, che non è una configurazione di confine. Pertanto, per il principio dei lavori virtuali, $\theta=\pi/2$ è una configurazione di equilibrio (ordinaria) dell'asta.

Studiamo ora cosa accade nelle configurazioni di confine $\theta=0$, $\theta=\pi$.

- In $\theta=0$ è ammesso solo $\delta\theta\geq 0$ mentre si ha $Q_\theta^{(a)}(\theta=0) = -\frac{1}{2}mgL \leq 0$. Allora $\delta L^{(a)} = Q_\theta^{(a)}\delta\theta \leq 0$ e per il principio dei lavori virtuali $\theta=0$ è una configurazione di equilibrio.
- In $\theta=\pi$ è ammesso solo $\delta\theta\leq 0$ e $Q_\theta^{(a)}(\theta=\pi)=\frac{1}{2}mgL\geq 0$. Allora $\delta L^{(a)}=Q_\theta^{(a)}\delta\theta\leq 0$, quindi anche $\theta=\pi$ è una configurazione di equilibrio.

<u>Esempio</u> Consideriamo ora un'asta omogenea di lunghezza $L>0$ che giace nel piano Oxy ed è incernierata nel punto di coordinate $(0,L)$. Supponiamo che l'asta sia soggetta al vincolo unilatero $y\leq L$ e che su di essa agisca come unica forza attiva la forza peso $\underline{P}=-mg\underline{j}$.



Scelta quale coordinata lagrangiana l'angolo $\theta\in[0,\pi]$ in figura, abbiamo:

$$G-O = \frac{L}{2}\cos\theta\,\underline{i} + \left(L-\frac{L}{2}\sin\theta\right)\underline{j},$$

quindi il lavoro virtuale delle forze attive è:

$$\delta L^{(a)} = -mg\,\underline{j} \cdot \frac{\partial (G-O)}{\partial \theta}\,\delta\theta$$

$$= -mg\,\underline{j} \cdot \frac{L}{2}\left(-\sin\theta\,\underline{i} - \cos\theta\,\underline{j}\right)\delta\theta$$

$$= \frac{1}{2} mgL\cos\theta\,\delta\theta,$$

da cui ricaviamo la forza generalizzata $Q_\theta^{(a)} = \frac{1}{2}mgL\cos\theta$. Per $\theta \in [0,\pi]$ essa si annulla nel punto interno $\theta = \frac{\pi}{2}$, che rappresenta perciò una configurazione di equilibrio ordinaria. Nelle configurazioni di confine abbiamo invece:

- in $\theta = 0$, $Q_\theta^{(a)}(\theta = 0) = \frac{1}{2}mgL$ con incrementi virtuali ammissibili $\delta\theta \geq 0$, quindi $\delta L^{(a)} \geq 0$ e la configurazione non è di equilibrio;
- in $\theta = \pi$, $Q_\theta^{(a)}(\theta = \pi) = -\frac{1}{2}mgL$ con incrementi virtuali ammissibili $\delta\theta \leq 0$, quindi nuovamente $\delta L^{(a)} \geq 0$ e neppure questa configurazione di confine risulta di equilibrio.

Potenziale

Il lavoro virtuale delle forze attive agenti su un sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$,

$$\delta L^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} Q_k^{(a)}\,\delta q_k\,, \qquad Q_k^{(a)} = Q_k^{(a)}(q_1, \dots, q_n)$$

è una forma differenziale nelle variabili $q_1, \dots, q_n$ (coordinate lagrangiane).

Def. Diremo che una funzione $U = U(q_1, \dots, q_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è un potenziale per il sistema di forze attive agenti sul sistema se il lavoro vir=

tuale $\delta L^{(a)}$ è il differenziale di U rispetto alle variabili lagrangiane.

Se per il sistema di forze attive esiste un potenziale U allora dovrà risultare

$$\delta L^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k ,$$

da cui

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^{(a)} , \quad k=1,\dots,n.$$

Di qui discende immediatamente il seguente

<u>Teorema</u> (di stazionarietà del potenziale)
Se le forze attive di un sistema olonomo a vincoli ideali, ammettono un potenziale allora le configurazioni di equilibrio ordinarie coincidono con i punti di stazionarietà di U.

<u>Dim.</u> Le configurazioni di equilibrio ordinarie sono quelle a partire dalle quali tutti gli incrementi virtuali δq_k risultano invertibili. Si tratta dunque di configurazioni soggette a vincoli bilateri, per le quali, dal principio dei lavori virtuali, sappiamo che dev'essere:

$$Q_k^{(a)} = 0 \qquad \forall k=1,\dots,n.$$

Ma allora, se c'è un potenziale U,

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \qquad \forall k=1,\dots,n,$$

quindi in quelle configurazioni U è stazionario (localmente massimo o minimo). $\square$

Esempi di potenziali notevoli

In generale, il potenziale di una forza attiva si calcola dalla relazione $\partial_{q_k} U = Q_k^{(a)}$, quindi la sua espressione può dipendere dalle specifiche coordinate lagrangiane utilizzate. Inoltre U è sempre definito a meno di una costante additiva arbitraria.

Un po' come dire che non esistono tanto i potenziali, quanto solo le differenze di potenziale. Scrivere il potenziale in se è solo una rappresentazione comoda.

Negli esempi seguenti considereremo un punto materiale (P, m) libero nello spazio $\mathbb{R}^3$, quindi avremo in generale $P-O = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e le coordinate cartesiane x, y, z di P saranno le coordinate lagrangiane.

- Forza peso

Se P è soggetto all'azione della forza peso $\underline{P} = -mg\underline{k}$ allora:

$$\delta L^{(a)} = \underline{P} \cdot \delta \underline{P} = -mg\underline{k} \cdot \left(\delta x\, \underline{i} + \delta y\, \underline{j} + \delta z\, \underline{k}\right)$$

$$= -mg\,\delta z$$

da cui

$$Q_x^{(a)} = 0 \Rightarrow \partial_x U = 0$$

$$Q_y^{(a)} = 0 \Rightarrow \partial_y U = 0$$

$$Q_z^{(a)} = -mg \Rightarrow \partial_z U = -mg$$

e quindi i potenziali di $\underline{P}$ hanno la forma $U(x,y,z) = -mgz + C_1$ con $C_1 \in \mathbb{R}$ costante.

- Forza elastica

Se P è soggetto all'azione di una forza elastica di richiamo verso un punto P_0 t.c. $P_0 - O = x_0\underline{i} + y_0\underline{j} + z_0\underline{k}$,

$$\underline{F}_{el} = k(P_0 - P) = k\left[(x_0 - x)\underline{i} + (y_0 - y)\underline{j} + (z_0 - z)\underline{k}\right]$$

allora:

$$\delta L^{(a)} = \underline{F}_{el} \cdot \delta \underline{P} = k\left[(x_0-x)\,\underline{i} + (y_0-y)\,\underline{j} + (z_0-z)\,\underline{k}\right] \cdot \left(\delta x\,\underline{i} + \delta y\,\underline{j} + \delta z\,\underline{k}\right)$$

$$= k(x_0-x)\delta x + k(y_0-y)\delta y + k(z_0-z)\delta z$$

e quindi

$$Q_x = k(x_0-x) \quad \Rightarrow \quad \partial_x U = k(x_0-x)$$

$$Q_y = k(y_0-y) \quad \Rightarrow \quad \partial_y U = k(y_0-y)$$

$$Q_z = k(z_0-z) \quad \Rightarrow \quad \partial_z U = k(z_0-z).$$

Allora i potenziali di $\underline{F}_{el}$ hanno la forma

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{2}k\left[(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2\right] + C$$

$$= -\frac{1}{2}k\,|P_0-P|^2 + C$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante.

- Coppia su un sistema rigido piano

Consideriamo due punti materiali (P_1, m_1), (P_2, m_2) vincolati rigidamente tra loro e vincolati a giacere nel piano Oxy. Su di essi agisca una coppia di forze $\{(\underline{F}, P_1), (-\underline{F}, P_2)\}$ di momento $\underline{M}$ (indipendente dal polo rispetto a cui è calcolato).