# Distribuzioni

## Definizione di distribuzione, Distribuzioni regolari

---

**Richiami di teoria.** Definiamo l'insieme delle **funzioni test** $\mathcal{D}$ formato dalle funzioni $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto. Una **distribuzione** è un funzionale $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ lineare e continuo. In altre parole, una distribuzione è un oggetto che prende in input una funzione test e restituisce un numero complesso. Ci interessa quindi capire come una distribuzione agisce su una generica funzione test $\phi \in \mathcal{D}$; l'azione della distribuzione $T$ su $\phi$ si indica con la notazione $\langle T, \phi \rangle$.

Le proprietà di linearità e continuità possono essere allora formalizzate come segue:

**Linearità e continuità di distribuzioni**

1. $\langle T, \lambda\phi_1 + \mu\phi_2 \rangle = \lambda\langle T, \phi_1\rangle + \mu\langle T, \phi_2\rangle$, $\forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. Se data una successione di funzioni $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{D}$, allora $\langle T, \phi_n\rangle \to \langle T, \phi\rangle$ in $\mathbb{R}$. In virtù della linearità, questo è equivalente a chiedere che $\phi_n \to 0 \implies \langle T, \phi_n\rangle \to 0$.

L'insieme delle distribuzioni definite sulle funzioni test è denotato con $\mathcal{D}'$ (detto anche spazio duale di $\mathcal{D}$) ed è uno spazio vettoriale. In particolare, la somma di distribuzioni è ancora una distribuzione.

E' di particolare interesse una certa famiglia di distribuzioni dette *distribuzioni regolari*. Tali distribuzioni sono costruite a partire da una funzione $f \in \mathcal{R}^1_{loc}$ (cioè localmente integrabile) che induce una distribuzione definita come segue:

**Distribuzioni regolari**

$$\langle T_f, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Una delle distribuzioni più importanti, anche nelle applicazioni, è la *delta di Dirac* centrata in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, che si denota con $\delta_{x_0}$; la sua azione sulla generica funzione test è data da:

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0)$$

In altre parole, la delta di Dirac centrata in un punto $x_0$ prende in input una funzione test e resitutisce la funzione test valutata in $x_0$.

**Esercizio 1.** Data una funzione test $\phi \in \mathcal{D}$, dimostrare che $\phi' \in \mathcal{D}$ e che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

*Soluzione.* Innanzitutto osserviamo che essendo $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, allora $\phi'$ è ben definita e $\phi' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre osserviamo che, essendo $\mathrm{supp}_\phi$ compatto, allora $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b : \phi(x) = 0$, $\forall\, x < a$ o $x > b$. Di conseguenza, $\phi$ è costante all'esterno di $[a, b]$ e $\mathrm{supp}_{\phi'} \in [a, b]$. Per concludere, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} \phi'(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \phi(y) - \lim_{y\to-\infty} \phi(y) = 0.$$

**Esercizio 2.** Verificare se $f(x) = e^x$ induce una distribuzione.

*Soluzione.* Innanzitutto osserviamo che $f(x) \in \mathcal{R}^1_{loc}$. Verifichiamo quindi la linearità

$$\langle T_f, \lambda\phi_1 + \mu\phi_2\rangle = \int_{\mathbb{R}} (\lambda\phi_1 + \mu\phi_2)e^x \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\mathbb{R}} \phi_1 e^x \, \mathrm{d}x + \mu \int_{\mathbb{R}} \phi_2 e^x \, \mathrm{d}x = \lambda\langle T_f, \phi_1\rangle + \mu\langle T_f, \phi_2\rangle.$$

Verifichiamo la continuità. Sia $\phi_n \in \mathcal{D}$, tale che $\phi_n \to 0$ allora abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |\langle T_f, \phi_n\rangle| &= \lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^x \phi_n(x) \, \mathrm{d}x \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathrm{supp}_{\phi_n}} e^x \phi_n(x) \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} ||\phi_n||_\infty \left| \int_{\mathrm{supp}_{\phi_n}} e^x \, \mathrm{d}x \right| \leq \lim_{n\to\infty} K||\phi_n||_\infty \to 0,\end{aligned}$$

dove $K < \infty$ è una diretta conseguenza di $\mathrm{supp}_{\phi_n}$ compatto e $e^x \in \mathcal{R}^1_{loc}$. Osserviamo che questa dimostrazione può essere facilmente riadattata a qualsiasi $f \in \mathcal{R}^1_{loc}$.

**Esercizio 3.** Verificare se

$$\langle T, \phi\rangle = \int_0^2 \ln(x+1)\phi(x) \, \mathrm{d}x$$

è una distribuzione.

*Soluzione.* Risulta immediato riconoscere $T$ come distribuzione regolare indotta dalla funzione $f(x) = \ln(x+1)\mathbb{1}_{[0,2]}(x) \in \mathcal{R}^1_{loc}$ dove $\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$ denota la funzione indicatrice dell'intervallo $[0, 2]$.

**Esercizio 4.** Verificare se

$$\langle T, \phi\rangle = \int_0^1 \phi(x)^3 \, \mathrm{d}x$$

è una distribuzione.

*Soluzione.* $T$ non è una distribuzione, per dimostrarlo verifichiamo che $T$ non è lineare considerando come controesempio il caso $\mu = 0$ e $\lambda \neq \{0, 1\}$:

$$\langle T, \lambda\phi_1\rangle = \int_0^1 (\lambda\phi_1(x))^3 \, \mathrm{d}x = \lambda^3 \int_0^1 \phi_1(x)^3 \, \mathrm{d}x = \lambda^3\langle T, \phi_1\rangle \neq \lambda\langle T, \phi_1\rangle.$$

**Esercizio 5.** Verificare se

$$\langle T, \phi\rangle = \phi(4) - \phi(5)$$

è una distribuzione.

*Soluzione.* Verifichiamo la linearità.

$$\langle T, \lambda\phi_1 + \mu\phi_2\rangle = \lambda\phi_1(4) + \mu\phi_2(4) - (\lambda\phi_1(5) + \mu\phi_2(5)) = \lambda\langle T, \phi_1\rangle + \mu\langle T, \phi_2\rangle,$$

e la continuità. Sia $\phi_n \in \mathcal{D}$, tale che $\phi_n \to 0$ allora abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \phi_n\rangle = \phi_n(4) - \phi_n(5) \to 0.$$

Osserviamo che $T$ può essere convenientemente scritta come combinazione lineare di delta di Dirac, ovvero

$$T = \delta_4 - \delta_5.$$

**Esercizio 6.** Verificare se

$$\langle T, \phi \rangle = \int_0^1 \phi'(x)\, \mathrm{d}x$$

è una distribuzione.

*Soluzione.* Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale scriviamo

$$\langle T, \phi \rangle = \int_0^1 \phi'(x)\, \mathrm{d}x = \phi(1) - \phi(0) \implies T = \delta_1 - \delta_0.$$

Di conseguenza $T$ è una distribuzione, in quanto somma algebrica di funzioni delta di Dirac.

---

## Esercizi aggiuntivi svolti.

**Esercizio 7.** Data una funzione test $\phi \in \mathcal{D}$, dimostrare che se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, \mathrm{d}x = 0,$$

allora $\exists\, \psi \in \mathcal{D} : \phi = \psi'$. Mentre se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, \mathrm{d}x \neq 0,$$

allora $\nexists\, \psi \in \mathcal{D} : \phi = \psi'$.

*Soluzione.* Definiamo

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Essendo $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, anche $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, siccome l'integrazione non può diminuire la regolarità di una funzione. Inoltre osserviamo che, siccome $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b : \phi(x) = 0$, $\forall\, x < a$ o $x > b$, allora

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, \mathrm{d}t = 0 \quad \forall x < a$$

e

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\, \mathrm{d}t + \int_{a}^{b} \phi(t)\, \mathrm{d}t + \int_{b}^{x} 0\, \mathrm{d}t = 0 \quad \forall x > b$$

Quindi $\psi \in \mathcal{D}$. Osserviamo che invece, come conseguenza dell'Esercizio 1, se esistesse $\psi \in \mathcal{D} : \phi = \psi' \in \mathcal{D}$, allora necessariamente $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, \mathrm{d}x = 0$.

**Esercizio 8.** Verificare se

$$\langle T, \phi \rangle = \int_0^1 x^2 \phi(x) \mathrm{d}x - \int_{-2}^{4} e^x \phi(x) \mathrm{d}x$$

è una distribuzione.

*Soluzione.* E' immediato riconoscere T come somma algebrica di due distribuzioni regolari, la prima indotta da $f_1(x) = x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \in \mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$ e la seconda da $f_2(x) = e^x \mathbb{1}_{[-2,4]}(x) \in \mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$.

**Esercizio 9.** Verificare se

$$\langle T, \phi \rangle = |\phi(2)|$$

è una distribuzione.

*Soluzione.* $T$ non è una distribuzione, per dimostrarlo verifichiamo che $T$ non è lineare considerando come controesempio il caso $\mu = 0$ e $\lambda = -1$:

$$\langle T, -\phi_1 \rangle = |-\phi(2)| = |\phi(2)| = \langle T, \phi_1 \rangle \neq -\langle T, \phi_1 \rangle.$$

**Esercizio 10.** Verificare se

$$\langle T, \phi \rangle = \phi(4)\phi(5)$$

è una distribuzione.

*Soluzione.* $T$ non è una distribuzione, per dimostrarlo verifichiamo che $T$ non è lineare considerando come controesempio il caso $\lambda = \mu = 1$:

$$\langle T, \phi_1 + \phi_2 \rangle = (\phi_1(4) + \phi_2(4))(\phi_1(5) + \phi_2(5)) = \langle T, \phi_1 \rangle + \langle T, \phi_2 \rangle + \phi_1(4)\phi_2(5) + \phi_2(4)\phi_1(5)$$

## Esercizi da svolgere a casa.

1. Verificare che $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = \sinh(3x) + 1$ inducono una distribuzione.
2. Verificare se $\langle T, \phi \rangle = \int_0^1 x^2 \phi(x)\, \mathrm{d}x - \int_{-2}^4 e^x \phi(x)\, \mathrm{d}x$ è una distribuzione.
3. Verificare se $\langle T, \phi \rangle = \int_0^1 \phi''(x)\, \mathrm{d}x$ e $\langle T, \phi \rangle = \phi(-2) + 4 \int_1^2 x\phi(x)\, \mathrm{d}x$ è una distribuzione.