# Numeri Complessi

## Forma Algebrica e Trigonometrica ed Equazioni in $\mathbb{C}$

---

**Richiami di teoria.** Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ può essere scritto in due diverse forme:

- **Forma algebrica**, mettendo in evidenza la *parte reale* ($\mathcal{R}e(z) = x$) e la *parte immaginaria* ($\mathcal{I}m(z) = y$)

**Forma algebrica**

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

- **Forma esponenziale - trigonometrica**, mettendo in evidenza modulo ($|z| = \rho$) ed argomento ($\arg(z) = \theta$)

**Forma esponenziale - trigonometrica (formula di Eulero)**

$$z = \rho e^{\theta i} = \rho\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right), \qquad \rho \in \mathbb{R}^+,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, $arg(z)$ è un qualsiasi angolo (misurato in radianti) formato dalla semiretta dei reali positivi e dal vettore individuato da $z$, pertanto può assumere infiniti valori che differiscono per multipli interi di $2\pi$.
Dato un numero complesso in forma esponenziale, la forma trigonometrica ci consente di portarlo in forma algebrica. Dato invece un complesso in forma algebrica, modulo e argomento principale $Arg(z)$ (ovvero l'unico argomento $\theta$ tale che $-\pi \leq \theta \leq \pi$) possono essere ricavati dalla sua parte reale e immaginaria tramite le seguenti formule:

**Modulo e argomento principale**

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{se } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

**Esercizio 1.** Semplifica

$$z = \frac{1 + 7i}{-1 + 12i}$$

*Soluzione.* Cerchiamo di ricondurre $z$ alla sua semplice forma algebrica $z = x + iy$. Per fare questo, possiamo razionalizzare la frazione dividendo numeratore e denominatore per il coniugato di quest'ultimo; infatti, sfruttando il fatto $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ si ha:

$$z = \frac{1 + 7i}{-1 + 12i} = \frac{1 + 7i}{-1 + 12i} \cdot \frac{-1 - 12i}{-1 - 12i} = \frac{-1 - 12i - 7i + 84}{145} = \frac{83}{145} - \frac{19}{145}i$$

**Esercizio 2.** Semplifica

$$z = \frac{-2 + 2i}{1 - \sqrt{3}i} e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

*Soluzione.* Visto che questa volta è presente un fattore in forma esponenziale, può convenire convertire anche il resto in forma esponenziale per poi sfruttare le proprietà delle potenze, quindi per prima cosa trasformiamo numeratore e denominatore in forma esponenziale:

- Numeratore: si ha $\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e per quanto riguarda l'argomento principale: $\theta = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$ e quindi $-2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$;

- Denominatore: si ha $\rho = \sqrt{4} = 2$ e per quanto riguarda l'argomento principale: $\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ e quindi $1 - \sqrt{3}i = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$;

Quindi

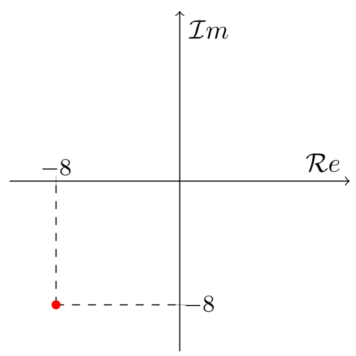
$$z = \frac{-2+2i}{1-i\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{2}i} = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}}e^{-\frac{\pi}{2}i} = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i+\frac{\pi}{3}i-\frac{\pi}{2}i} = \sqrt{2}e^{\frac{7}{12}\pi i}.$$

Alternativamente è possibile trasformare tutto in forma algebrica ($e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$) ed utilizzare la razionalizzazione:

$$z = \frac{-2+2i}{1-i\sqrt{3}}(-i) = \frac{2i+2}{1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})i$$

**Esercizio 3.** Rappresenta sul piano complesso $z = -8 - 8i$ ed esprimilo in forma trigonometrica.

*Soluzione.* Rappresentare un numero complesso in forma algebrica sul piano complesso è immediato: parte reale e parte immaginaria sono, rispettivamente, ascissa ed ordinata.




Per esprimere un numero complesso in forma trigonometrica occorre calcolarne il modulo

$$|z| = \sqrt{\mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2} = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2},$$

e l'argomento, per il quale innanzitutto si calcola

$$\arctan\left(\frac{\mathcal{I}m(z)}{\mathcal{R}e(z)}\right) = \arctan\left(\frac{-8}{-8}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Tuttavia l'arcotangente restituisce solo un angolo nel primo o nel quarto quadrante. Occorre quindi utilizzare la rappresentazione nel piano complesso per valutare se l'argomento coincide con l'arcotangente o se occorre aggiungere o togliere $\pi$. Nel nostro caso, essendo il punto nel terzo quadrante dobbiamo sottrarre un angolo piatto, ovvero:

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi,$$

quindi, in conclusione,

$$z = \rho e^{\theta i} = 8\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi i}.$$

**Richiami di teoria.**

**Formula di De Moivre**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Osserviamo che dalla formula di De Moivre è possibile ritrovare le note formule trigonometriche. Ad esempio, se $n = 2$ si ottiene

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^2 &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta\end{aligned}$$

Due numeri complessi sono uguali se hanno uguale parte reale e parte immaginaria, pertanto otteniamo

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

Invece per $n = 3$, si ottiene

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta \\ \sin 3\theta &= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Calcola le sei radici seste ed il quadrato di $z = 1 + i$.

*Soluzione.* Sappiamo che ogni numero complesso $z$ ha esattamente $n$ radici $n$-esime. Per definizione, trovare queste radici significa trovare tutti i numeri complessi $\omega$ tali per cui $w^n = z$. Per risolvere questa equazione, possiamo passare alla forma esponenziale e scrivere $\omega = \rho e^{\theta i}$ e $z = re^{\alpha i}$. Quindi, si ha:

$$\rho^n e^{n\theta i} = re^{\alpha i} \implies \begin{cases}\rho^n &= r \\ n\theta &= \alpha + 2k\pi\end{cases} \implies \begin{cases}\rho &= \sqrt[n]{r} \\ \theta &= \frac{\alpha}{n} + \frac{2k}{n}\pi\end{cases}$$

Notiamo che troviamo le $n$ soluzioni distinte per $k = 0, 1, \dots, n-1$. Quindi, le radici sono date da:

**Radici $n$-esime di un numero complesso**

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{\left(\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k}{n}\pi\right)i}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Se applichiamo quanto detto al nostro esercizio, si trova che:

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i},$$

e calcoliamo le sei radici come

$$z_k = \sqrt[12]{2}e^{\frac{\pi}{24}i + k\frac{\pi}{3}i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Il suo quadrato è ottenuto semplicemente come

$$z^2 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

**Esercizio 5.** Risolvi l'equazione $z|z| - 2z + i = 0$

*Soluzione.* L'equazione può essere risolta ponendo $z$ in forma algebrica, ovvero: $z = x + iy$; si ottiene:

$$(x+iy)\sqrt{x^2+y^2} - 2(x+iy) + i = 0 \Rightarrow x\sqrt{x^2+y^2} - 2x + \left(y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1\right) i = 0$$

la quale può essere riscritta come un sistema di due equazioni, uno per la parte reale ed uno per quella immaginaria:

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} - 2x = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Se supponiamo $x \neq 0$, si ottiene dalla prima equazione $\sqrt{x^2+y^2} = 2$ che però, sostituito nella seconda equazione, porta subito ad un risultato impossibile. Poniamo allora $x = 0$, e in questo caso si ha:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y|y| - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

distinguendo i due casi $y \geq 0$ e $y < 0$ si ottiene rispettivamente:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui segue facilmente:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione $-y^2 - 2y + 1 = 0$ ammette le due soluzioni $y = -1 \pm \sqrt{2}$ ma quella positiva va scartata in quanto stiamo supponendo $y < 0$. In definitiva, le due soluzioni dell'equazione di partenza sono date da: $z = i$ e $z = -(1+\sqrt{2})i$.

L'equazione può anche essere risolta utilizzando la forma esponenziale $z = \rho e^{\theta i}$, otteniamo:

$$\rho^2 e^{\theta i} - 2\rho e^{\theta i} = -i \implies \left(\rho^2 - 2\rho\right) e^{\theta i} = e^{-\frac{\pi}{2} i}\,.$$

Imponiamo l'uguaglianza di modulo e argomento. Per il modulo, si ha:

$$|\left(\rho^2 - 2\rho\right) e^{\theta i}| = |e^{-\frac{\pi}{2} i}| \implies |\left(\rho^2 - 2\rho\right)| = 1 \implies \rho = 1 + \sqrt{2},\ \ \rho = 1\,.$$

Veniamo adesso all'argomento, dove occorre prestare attenzione al segno del termine $\rho^2 - 2\rho$, vediamo come:

- $\rho = 1 \implies \rho^2 - 2\rho = -1 < 0$ e quindi l'uguaglianza degli argomenti diventa:

$$\arg\left(\left(\rho^2 - 2\rho\right) e^{\theta i}\right) = \arg\left(e^{-\frac{\pi}{2} i}\right) \implies \arg\left(-e^{\theta i}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\implies \arg\left(e^{\pi i} e^{\theta i}\right) = -\frac{\pi}{2} \implies \arg\left(e^{(\theta+\pi) i}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\implies \theta + \pi = -\frac{\pi}{2} \implies \theta = -\frac{3}{2}\pi.$$

- $\rho = 1 + \sqrt{2} \implies \rho^2 - 2\rho = 1 > 0$ e quindi l'uguaglianza degli argomenti diventa:

$$\arg\left(\left(\rho^2 - 2\rho\right) e^{\theta i}\right) = \arg\left(e^{-\frac{\pi}{2} i}\right) \implies \arg\left(e^{\theta i}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

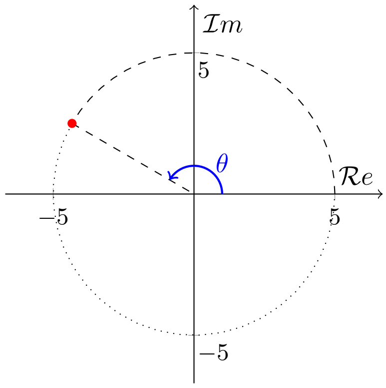
$$\implies \theta = -\frac{\pi}{2}.$$

Da cui, otteniamo le due soluzioni: $z_1 = e^{-\frac{3}{2}\pi i} = i, z_2 = (1+\sqrt{2})e^{-\frac{\pi}{2} i} = -(1+\sqrt{2})i.$

## Esercizi aggiuntivi svolti.

**Esercizio 6.** Rappresenta sul piano complesso $z = 5e^{\frac{5}{6}\pi i}$ ed esprimilo in forma algebrica.

*Soluzione.* Rappresentare un numero complesso in forma trigonometrica sul piano complesso è immediato: basta disegnare la circonferenza centrata nell'origine con raggio pari al modulo, l'argomento identifica l'angolo rispetto all'asse reale (vedi coordinate polari in Analisi II).




Per esprimere $z$ in forma algebrica basta utilizzare l'uguaglianza

$$z = 5e^{\frac{5}{6}\pi i} = 5\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right] = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i.$$

**Esercizio 7.** Risolvi l'equazione $(z - i)^2 = 2(\bar{z} + i)$.

*Soluzione.* Per risolvere l'equazione, può essere utile notare che $\overline{z - i} = \bar{z} + i$. Ponendo $t = z - i$, si può quindi riscrivere l'equazione come:

$$t^2 = 2\bar{t}$$

la quale può essere risolta in vari modi. Si può ad esempio sfruttare la forma esponenziale

$$t = \rho e^{\theta i}$$

e si ottiene:

$$\rho^2 e^{2\theta i} = 2\rho e^{-\theta i}$$

e quindi si può scrivere il sistema:

$$\begin{cases} \rho^2 &= 2\rho \\ 2\theta &= -\theta + 2k\pi \end{cases} \implies \begin{cases} \rho &= 0, \rho = 2 \\ \theta &= \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

Per la periodicità dell' esponenziale complesso, le uniche soluzioni distinte sono quelle con $k = 0, 1, 2$. Le soluzioni in $t$, scritte in forma algebrica, sono quindi: $t_1 = 0; t_2 = 2; t_3 = 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + 2i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -1 + \sqrt{3}i$ e $t_4 = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + 2i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -1 - \sqrt{3}i$. A questo punto, ricordando che $z = t + i$, si trovano subito le soluzioni dell'equazione di partenza: $z_1 = i; z_2 = 2 + i; z_3 = -1 + (\sqrt{3} + 1)i$ e $z_4 = -1 + (1 - \sqrt{3})i$.

**Esercizio 8.** Risolvi l'equazione $iz^2 - 2\bar{z} - 2 - i = 0$.

*Soluzione.* Esprimiamo l'incognita in forma algebrica $z = x + iy$. L'equazione diventa:

$$i(x + iy)^2 - 2(x - iy) - 2 - i = 0 \implies ix^2 - iy^2 - 2xy - 2x + 2iy - 2 - i = 0,$$

la quale può essere riscritta come un sistema di due equazioni, uno per la parte reale ed uno per quella immaginaria:

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda otteniamo $y = 1 \pm x$, che, sostituito nella prima da:

$$\begin{cases} y = 1 + x \\ x(1+x) + x + 1 = 0 \implies x^2 + 2x + 1 = 0 \implies x = -1,\, y = 0, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ x(1-x) + x + 1 = 0 \implies x^2 - 2x - 1 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{2},\, y = \mp\sqrt{2}. \end{cases}$$

Le tre soluzioni sono quindi: $z_1 = -1$, $z_2 = 1 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ e $z_3 = 1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

**Esercizio 9.** Risolvi l'equazione $z|z| = \bar{z}$.
*Soluzione.* Esprimiamo l'incognita in forma trigonometrica $z = \rho e^{\theta i}$. L'equazione diventa:

$$\rho e^{\theta i}\rho = \rho e^{-\theta i} \implies \rho^2 e^{\theta i} = \rho e^{-\theta i}.$$

Identificata la soluzione banale $\rho = 0$, dividiamo entrambi i membri per $\rho$ e riscriviamo l'equazione come un sistema di due equazioni, una per il modulo e una per l'argomento:

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ -\theta = \theta + 2k\pi \implies \theta = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Per la periodicità dell'esponenziale complesso, le uniche due soluzioni distinte sono per $k = 0$ e $k = 1$. In conclusione le soluzioni sono $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1$.

---

## Esercizi da svolgere a casa.

1. Semplifica $z = \frac{3+4i}{2+\sqrt{5}+i}\frac{2}{i+2}$.
2. Rappresenta sul piano complesso ed esprimi in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi: $9 + 6i$ , $\sqrt{3} + 2i$ , $3e^{\frac{7}{3}\pi i}$, $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$.
3. Disegna i seguenti insiemi:
   - $I_1 = \{z \in \mathcal{C} : Re(iz) = 2\}$
   - $I_2 = \{z \in \mathcal{C} : Im(z - 2iz) = 0\}$
   - $I_3 = \{z \in \mathcal{C} : Re(z - 2i) = 1\}$
   - $I_4 = \{z \in \mathcal{C} : Re(iz) \geq 0, Im(2z + 3) \leq 0\}$
4. Se $z = x + iy$, determina la parte reale e parte immaginaria di $z^4$, $\frac{z-1}{z+1}$, $e^{-\bar{z}}$, $e^{-z^2}$.
5. Calcola i seguenti numeri complessi: $(1-i)^4$, $(1+2i)^3$, $(1+i)^n + (1-i)^n$.
6. Risovi $z^7 = 3$, $z^5 = -i$ e $z^3 = \frac{-2+i}{3-2i}$.
7. Calcola il cubo di $z = 1 - i$ e di $\frac{1}{i}$.
8. Trova gli zeri di $z^2 - (2+3i)z + 3i$, $z^3 - 2z^2 + z - 2$ e $z^2 - iz - 1 + i$.
9. * Se $\omega \in \mathcal{C}$ è tale che $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$, calcola $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$.
10. Esprimi (usando la formula di *De Moivre*) $\cos(4\theta)$ e $\cos(5\theta)$ in termini di $\cos\theta$ e $\sin\theta$.
11. Dimostra che $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, vale la formula: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
12. * Dato un punto $z_0 \in \mathcal{C}$ e un angolo $\tau$, determina $a, b \in \mathcal{C}$ tali che la funzione $f(z) = az + b$ sia la rotazione di angolo $\tau$ rispetto al punto $z_0$.

* Esercizi non standard.