Appunti di Complementi di Matematica

Jacobo Pejsachowicz
(a cura di Nathan Quadrio)

Indice

1 Cenni della teoria degli insiemi

1.1 Classi ed insiemi

Il concetto di **classe** è una nozione primitiva che non definiamo. Informalmente il significato di classe è quello di una collezione di oggetti o elementi. La notazione $x \in A$ (si legge x appartiene ad A) significa che x è un elemento della classe A. Due classi A e B sono uguali se hanno gli stessi elementi, ossia

$$A = B \quad \text{se} \quad x \in A \iff x \in B.$$

Un classe può essere definita enumerando i suoi elementi, ma anche descrivendoli per mezzo di una proposizione. Una proposizione è una frase $P(x)$ del linguaggio che riferita ad elementi di una classe possa essere vera oppure falsa. Una proposizione P individua automaticamente la classe degli elementi che la verificano

$$A = \{\, x \ \mid\ P(x) \text{ è vera} \,\} .$$

Per il principio del terzo escluso, data una classe A, un elemento o appartiene ad A o non vi appartiene. Se la classe è definita attraverso una proposizione per ogni elemento possiamo verificare se un elemento appartiene ad A o non vi appartiene controllando se la proposizione $P(x)$ riferita a questo elemento sia vera o falsa.
La teoria elementare (o ingenua) degli insiemi, dovuta a Cantor, identificava quello che qui chiamiamo classe con il concetto di insieme. I matematici dell'epoca si sono accorti che una tale teoria sarebbe stata non priva di contraddizioni.
Un tipico esempio dei problemi ai quali si andava incontro è il famoso paradosso chiamato **antinomia di Russell:**
Sia A la classe di tutti gli elementi che non appartengono a se stessi, ossia, $A = \{\, x \ \mid\ x \notin x \,\}$. Se fosse $A \in A$ allora, per definizione di A, A non dovrebbe appartenere ad A; se invece fosse $A \notin A$ allora $A \in A$.
Per evitare questa ed altre contraddizioni, nelle nostre costruzioni useremo soltanto classi particolari chiamate insiemi.

Definizione 1.1. *Una classe A è un **insieme** se esiste una classe B tale che $A \in B$.*

Per assioma, se P è una proposizione diamo alla formula $A = \{\, x \ \mid\ P(x) \text{ è vera} \,\}$ il significato seguente:

A è la classe degli x tali che x è un insieme e $P(x)$ è vera.

Questo permette di ricondurre il paradosso di Russell al teorema:

La classe $A = \{\, x \ \mid\ x \notin x \,\}$ non è un insieme.

Maggiori dettagli sulla teoria assiomatica degli insiemi si possono trovare nell'appendice del libro di J.L.Kelley, Topologia Generale.

1.2 Operazioni fra gli insiemi

Definizione 1.2. *Diremo che un insieme A è* **contenuto** *nell'insieme B se ogni elemento di A appartiene a B. Quindi:*

$$A \subset B \quad \textit{se} \quad \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

In questo caso diremo anche che A è un **sottoinsieme** dell'insieme B o che è una **parte** di B.
La proposizione seguente è una conseguenza immediata della definizione di sottoinsieme.

Proposizione 1.1. $A = B \iff A \subset B$ *e* $B \subset A$.

Definizione 1.3. *Dati due insiemi A e B, le seguenti operazioni si dicono rispettivamente* ***unione***, ***intersezione*** *ed* ***insieme complementare***,

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ o } x \in B \,\},$$

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ e } x \in B \,\},$$

$$A^c = \{\, x \mid x \notin A \,\}.$$

Definizione 1.4. $\emptyset = \{\, x \mid x \neq x \,\}$.

Esercizio 1.2. *Dimostrare le seguenti proprietà delle operazioni definite sopra*

- $A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset B$;
- $A \cup B = B \cup A$, *idem con* $\cap$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, *idem con* $\cap$;
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $(A^c)^c = A$;
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *(Leggi di De Morgan);*
- $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Se X è un insieme qualsiasi, l'insieme $\mathcal{P}(X) = \{\, A \mid A \subset X \,\}$ si chiama l'insieme delle parti di X. L'insieme $\emptyset$ e X sono elementi di $\mathcal{P}(X)$. Ogni elemento $x \in X$ definisce un elemento $\{\, x \,\} \in \mathcal{P}(X)$. Per definizione $\{\, x \,\} \subset X$ è il sottoinsieme di X il cui unico elemento è x. L'insieme $\{\, x \,\}$ si chiama **singleton** x o singoletto x. L'insieme $\mathcal{P}(X)$ con le operazioni unione, intersezione e complemento forma una struttura algebrica nota con il nome di Algebra di Boole.

Esercizio 1.3. *Supposte definite le operazioni di complemento e intersezione descrivere l'operazione unione in termini delle altre due.*

Vediamo un esempio tipico di una dimostrazione della teoria degli insiemi.

Proposizione 1.4. *Dati due insiemi A e B, le seguente affermazioni sono equivalenti:*

1. $A \subset B$;

2. $A \cap B = A$*;*

3. $A \cup B = B$*;*

4. $B^c \subset A^c$.

Dimostrazione. Facciamo vedere che ogni affermazione implica la seguente e che l'ultima implica la prima.

(1) $\Rightarrow$ (2).

Che $(A \cap B) \subset A$ vale sempre per definizione di intersezione.
Vediamo che se vale la (1) allora $A \subset (A \cap B)$ ossia $x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in A \cap B$. Infatti, dato che $A \subset B$, $x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B$. Ne segue dunque che $x \in A \cap B$.

(2) $\Rightarrow$ (3).

$B \subset (A \cup B)$ per definizione di unione.
Per dimostrare che $(A \cup B) \subset B$ dobbiamo far vedere che se $x \in A \cup B$ allora $x \in B$.

Se $x \in A \cup B$ allora o $x \in A = A \cap B$ e dunque, per la (2), $x \in B$, oppure $x \in B$ ed in tal caso non c'è nulla da dimostrare. Da ciò segue il risultato.

(3) $\Rightarrow$ (4).

Si deve dimostrare che $x \in B^c \quad \Rightarrow \quad x \in A^c$.

Dalla (3) risulta che $x \in A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in B$, inoltre sappiamo che $x \notin B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in B^c$. Di conseguenza se $x \in B^c$ allora $x \notin B$ e dunque, per la (3), $x \notin A \cup B$. Poiché $A \subset A \cup B$ risulta che $x \notin A$ ossia che $x \in A^c$. Quindi $B^c \subset A^c$.

(4) $\Rightarrow$ (1).

Si deve dimostrare che $x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B$. Per ipotesi si ha che $B^c \subset A^c$. Se $x \in A$ allora $x \notin A^c$, così $x \notin B^c$ e dunque $x \in (B^c)^c = B$, ossia $A \subset B$.

□

Definizione 1.5. *Dati A e B due insiemi, si definisce l'operazione di* **differenza di insiemi**

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Esercizio 1.5. *Dimostrare le seguenti conseguenze delle leggi di De Morgan:*

- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Definizione 1.6. *Dati A e B due insiemi, si definisce l' operazione* **differenza simmetrica**

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Esercizio 1.6. *Dimostrare che*

$A \bigtriangleup A = \emptyset$;

$A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A; v$

$A \bigtriangleup B \subset A \bigtriangleup C \cup C \bigtriangleup B, \forall C.$

Definizione 1.7. *Il prodotto di due insiemi A, B è l'insieme delle coppie*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Esercizio 1.7. $A \times \emptyset = ?$

$(A \cup B) \times C = ?$

$(A \cap B) \times C = ?$

Se $A \subset C$ *e* $B \subset D$ *allora* $C \times D \setminus B \times A = ?$

$\emptyset^c = ?$

Definizione 1.8. *Una* **funzione***, o* **mappa***, o* **trasformazione** $f \colon A \to B$ *è una legge che fa corrispondere ad ogni elemento a di A un unico elemento $f(a) \in B$.*

Nota Bene 1.1. *Il termine funzione viene spesso riservato a mappe a valori nei numeri reali o complessi. Qui useremo indifferentemente tutti i tre nomi.*

Ricordiamo che ogni funzione è univocamente determinata dal suo dominio A, codominio (o rango) B ed il grafico

$$Graf(f) = \{\, (a, b) \in A \times B \mid b = f(a) \,\}\,.$$

Data una funzione $f \colon A \to B$ restano automaticamente indotte due funzioni definite sull'insieme delle parti. La prima, chiamata **immagine di un insieme** per la f, è una funzione $f \colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ (denotata con la stessa lettera f) che assegna ad ogni sottoinsieme D di A la sua immagine $f(D)$, dove

$$f(D) = \{\, b \in B \mid \exists a \in D \,\text{tale che}\, f(a) = b \,\}\,.$$

La seconda, chiamata **controimmagine (o immagine inversa) di un insieme** per la funzione f, è la funzione $f^{-1} \colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ che assegna ad ogni sottoinsieme C di B l'insieme

$$f^{-1}(C) = \{\, x \in A \;\mid\; f(x) \in C \,\}\,.$$

La seconda funzione è quella più interessante perché preserva le operazioni unione, intersezione e complemento. In altre parole, $f^{-1} \colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ è un omomorfismo di algebre di Boole.

Esercizio 1.8. 1) *Verificare che la funzione f^{-1} rispetta le operazioni di famiglie di insiemi, ossia:*

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D);$$
$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D);$$
$$f^{-1}(C^c) = f^{-1}(C)^c.$$

2) *Verificare (con esempi) che la funzione immagine $f \colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ non rispetta le operazioni di intersezione e complemento.*
3) *Dimostrare che se $C \subset D \subset B$ allora $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ e se $C \subset D \subset A$ allora $f(C) \subset f(D)$.*
4) *Dimostrare che $f(f^{-1}(C) \subset C)$ e che $C \subset f^{-1}(f(C)$ ma che in genere $C \neq f^{-1}(f(C), C \neq f(f^{-1}(C)$.*

1.3 Unioni ed intersezioni di famiglie di insiemi

Le operazioni di unione e intersezione e prodotto (così come le operazioni da loro derivate) si estendono ad operazioni di famiglie di insiemi.
Una famiglia di insiemi altro non è che un insieme $C = \{ B \}$ avente insiemi come elementi. Un esempio tipico di una famiglia di insiemi è un qualsiasi sottoinsieme C dell'insieme $\mathcal{P}(X)$ delle parti di un insieme X.
L'intersezione di una famiglia di insiemi è per definizione

$$\bigcap_{B \in C} B = \{ x \ \mid \ x \in B \ \forall B \in C \} .$$

L'unione è definita come

$$\bigcup_{B \in C} B = \{ x \ \mid \ \exists B \in C, \ x \in B \} .$$

Un'altra definizione di famiglia di insiemi risulta a volte più conveniente.

Definizione 1.9. *Se A è un insieme di indici e ad ogni indice $\alpha \in A$ viene assegnato un insieme B_α, la corrispondenza $\alpha \to B_\alpha$ si chiama una* ***famiglia indicizzata di insiemi****.*

Data una famiglia indicizzata di insiemi definiamo

$$\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha = \{ x \ \mid \ x \in B_\alpha \ \forall \alpha \} ,$$

$$\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \{ x \ \mid \ \exists \alpha \in A, \ x \in B_\alpha \} .$$

Nel seguito secondo la convenienza del momento useremo entrambe le notazioni per l'unione e l'intersezione di una famiglia di insiemi.
Lasciamo al lettore la dimostrazione delle seguenti proprietà dell'unione e dell'intersezione di famiglie di insiemi.

$$(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha^c,$$

$$\bigcap_{\gamma \in D} (\bigcup_{\alpha \in A} B_{\alpha,\gamma}) = \bigcup_{\alpha \in A} (\bigcap_{\gamma \in D} B_{\alpha,\gamma}).$$

Data $f \colon X \to Y$

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha),$$

$$f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha).$$

2 La retta reale $\mathbb{R}$

2.1 Campi ordinati

Ricordiamo che un campo K è un anello commutativo con unità 1 tale che ogni elemento non nullo ha un inverso moltiplicativo. Cioè, $\forall a \in K$, $a \neq 0$ esiste un elemento $a^{-1} \in K$ tale che $a^{-1}a = 1$.
La ragione per la richiesta $a \neq 0$ è data dalla proposizione seguente.

Proposizione 2.1. *Se A è un anello allora*

$$\forall a \in A \qquad a \cdot 0 = 0.$$

Dimostrazione.

$$a(0+b) = ab$$

perché $0 + b = b$;

$$a(0+b) = a \cdot 0 + ab$$

per la proprietà distributiva;
Quindi $ab = a \cdot 0 + ab$ e sottraendo il prodotto ab otteniamo $a \cdot 0 = 0$. □

Dunque non si può chiedere a 0 di avere un inverso moltiplicativo.

Ricordiamo anche che un insieme **ordinato** $(A, \leq)$ è un insieme munito di una relazione $\leq$ (un sottoinsieme di $A \times A$) verificante:

- $a \leq a$;
- $a \leq b,\ b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c$;
- $a \leq b,\ b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b$.

Dunque una relazione di ordine è una relazione identica, transitiva ed antisimmetrica.
L'insieme A si dice **totalmente ordinato** se per ogni $a, a' \in A$, o $a \leq a'$ oppure $a' \leq a$.

Un campo K totalmente ordinato è un campo munito di un ordine totale $\leq$ che preserva le operazioni $+, \cdot$, nel senso che valgono:

1. $a \leq b \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c \ \ \forall c$;
2. $a \leq b \quad \Rightarrow \quad ca \leq cb \ \ \forall c \geq 0$.

Dato un insieme ordinato, diremo che $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$.
Nessun campo finito ammette un ordine totale. Il campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ ed il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ sono totalmente ordinati. Il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ non lo è.

2.2 Estremo superiore ed inferiore

Definizione 2.1. *Sia $(K, +, \cdot, \leq)$ un campo totalmente ordinato e sia $A \subset K$, un suo sottoinsieme. Un numero $k \in K$ si dice* ***maggiorante*** *di A se $a \leq k$ per ogni $a \in A$. L'insieme A si dice* ***limitato superiormente*** *se esiste almeno un $k \in K$ che sia un maggiorante dell'insieme A, cioè se l'insieme M_A di tutti i maggioranti di A è non vuoto.*

Definizione 2.2. *L'* **estremo superiore** $\sup A$ *di un sottoinsieme A di K è un numero $\alpha \in K$ che è il minimo elemento dell'insieme M_A dei maggioranti di A. In altre parole:*

$$\alpha = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} i) \ \forall a \in A \ \ a \leq \alpha \\ \\ ii) \ a \leq \beta \ \forall a \in A \ \Rightarrow \ \ \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

Se un sottoinsieme A di K ha un massimo (un elemento di $m \in A$ tale che $a \leq m, \ \forall a \in A$) allora esso è anche l'estremo superiore di A ma bisogna evitare di confondere la nozione di massimo con quella di estremo superiore.

Esercizio 2.2. *Si consideri l'intervallo razionale* $I = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, 0 < q < 1\}$. *Si dimostri che* I *non ha un massimo ma che 1 è l'estremo superiore di* I.

Esempio: Consideriamo ora il seguente esempio di sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ superiormente limitato ma senza estremo superiore.
Consideriamo il seguente sottoinsieme del campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali:

$$A = \{\, q \in \mathbb{Q} \ \ | \ \ 0 \leq q \ e \ q^2 \leq 2 \,\}\,. \tag{2.1}$$

A è superiormente limitato perché, ad esempio, il numero 2 è un maggiorante di A. Infatti, osserviamo che per numeri positivi si ha che

$$q_1 < q_2 \quad \Longleftrightarrow \quad q_1^2 < q_2^2 \text{(si dimostri!)}$$

Poiché per ogni $q \in A$ risulta che $q^2 < 2^2$ allora deve essere $q < 2$. Osserviamo pero che A non ha un estremo superiore. Infatti , se ci fosse un tale estremo $\alpha \in \mathbb{Q}$, esso dovrebbe verificare $\alpha^2 = 2$, ma i pitagorici hanno dimostrato che un tale numero razionale non può esistere.
Un'utile caratterizzazione di $\sup A$ è la seguente:

Proposizione 2.1.

$$\alpha = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} i) \ \forall a \in A \ \ a \leq \alpha \\ \\ ii) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \ \textit{tale che} \ \alpha - \varepsilon \leq a \leq \alpha. \end{cases}$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Se $\alpha = \sup A$, $\alpha \in M_A$. Dunque $\forall a \in A, \ \ a \leq \alpha$. Ciò dimostra *i*). Se $\varepsilon > 0$ allora $\alpha - \varepsilon < \alpha$ e $\alpha - \varepsilon \notin M_A$ perché α è il più piccolo dei maggioranti. Quindi deve esistere un $a \in A$ tale che $\alpha - \varepsilon < a$ e siccome $a < \alpha$ si ha che $\alpha - \varepsilon \leq a \leq \alpha$. Questo dimostra la *ii*).

"$\Leftarrow$".
Se è vera la *i*) allora $\alpha \in M_A$. Vediamo ora che se $a \leq \beta \ \forall a \in A$ allora $\alpha \leq \beta$. Supponiamo per assurdo che esista un $\beta < \alpha$ appartenente all'insieme M_A, allora $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ e $\beta = \alpha - \varepsilon$. Per *ii*) esiste $a \in A$ tale che $\beta = \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$ contraddicendo $\beta \in M_A$. □

Esercizio 2.3. *Definire le nozioni di minorante, insieme limitato inferiormente e dell'estremo inferiore* $\inf A$ *di un sottoinsieme* A *di* K.

Esercizio 2.4. *Dimostrare la seguente caratterizzazione di* $\inf A$ *:*

$$\alpha = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} i) \ \alpha \leq a \ \forall a \in A \\ \\ ii) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \ \textit{tale che} \ \alpha \leq a \leq \alpha + \varepsilon. \end{cases}$$

2.3 Completezza della retta reale

Definizione 2.3. *Un campo* $(K, +, \cdot, \leq)$ *totalmente ordinato si dice* ***completo*** *se ogni sottoinsieme* A *di* K *non vuoto e limitato superiormente ha un estremo superiore.*

Esercizio 2.5. *Dimostrare che in un corpo totalmente ordinato completo ogni sottoinsieme non vuoto limitato inferiormente possiede un estremo inferiore.*

Un isomorfismo tra due campi ordinati è una trasformazione biiettiva che preserva le operazioni somma , prodotto ed ordine. Si può dimostrare che a meno di isomorfismi esiste un unico campo totalmente ordinato e completo. Dunque se agli assiomi di campo e di ordine totale compatibile con le operazioni aggiungiamo l'assioma:

ogni sottoinsieme A non vuoto e limitato superiormente ha un estremo superiore

ci sarà (a meno di isomorfismi) un unico campo che li soddisfi tutti. Questo unico campo è per definizione il campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. D'ora in poi andremo a lavorare nel campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ che denoteremo brevemente con $\mathbb{R}$. Nella sezione successiva introdurremo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali come un particolare sottoinsieme (induttivo) del campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Poiché $\mathbb{R}$ è chiuso rispetto alla somma e prodotto, deriva da questo che anche l'anello degli interi $\mathbb{Z}$ ed il campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Esempio: Poiché $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, l'insieme A definito in (2.1) è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente. Per l'assioma della completezza esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ che è il suo estremo superiore. Infatti, α altro non è che il numero irrazionale $\sqrt{2}$.

2.4 Numeri naturali e principio di induzione

Definizione 2.4. *Un sottoinsieme* $I \subset \mathbb{R}$ *si dice* ***induttivo*** *se:*

1. $1 \in I$;

2. $x \in I \;\Rightarrow\; x + 1 \in I$.

Consideriamo la famiglia $\mathcal{I}$ di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$ e definiamo l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ come intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi della retta reale. Quindi:

Definizione 2.5.

$$\mathbb{N} = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$$

Proposizione 2.6. $\mathbb{N}$ *è il più piccolo sottoinsieme induttivo di* $\mathbb{R}$*. In altre parole* $\mathbb{N}$ *è induttivo e se* I *è induttivo* $\mathbb{N} \subset I$.

Dimostrazione. E' facile vedere che $\mathbb{N}$ è un insieme induttivo. Infatti, per definizione di insieme induttivo $\forall I$ induttivo $1 \in I$ e quindi $1 \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I = \mathbb{N}$. Si supponga ora che $x \in \mathbb{N}$, bisogna far vedere che $x + 1 \in \mathbb{N}$.
Se $x \in I \; \forall I \in \mathcal{I}$ induttivo si ha che anche $x + 1 \in I \; \forall I \in \mathcal{I}$ e quindi

$x+1 \in \bigcap_{I\in\mathcal{I}} I = \mathbb{N}$ per definizione di intersezione di una famiglia di insiemi. Ne segue che $\mathbb{N}$ è induttivo.

Se I è induttivo segue che $I \in \mathcal{I}$ ma allora $\mathbb{N} \subset I$ perché l'intersezione di una famiglia di insiemi è contenuta in ogni elemento di essa. In conclusione $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo. $\square$

Teorema 2.7 (Principio di induzione)**.** *Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha una proposizione $P(n)$ tale che*

1. *$P(1)$ è vera,*
2. *$P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1)$ è vera,*

allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Consideriamo $I = \{\, n \in N \mid P(n) \text{ è vera} \,\}$. Per definizione di I si ha $I \subset \mathbb{N}$. Quindi per dimostrare il teorema basterà verificare che $\mathbb{N} \subset I$.
Per la 1) abbiamo che $1 \in I$. Inoltre se $n \in I$ allora $P(n)$ è vera e per la 2) risulta vera anche la $P(n+1)$ così anche $n+1 \in I$ e quindi I è un insieme induttivo. Poiché $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo risulta $\mathbb{N} \subset I$ cioè $\mathbb{N} = I$. $\square$

Denotiamo con $I_n = \{\, k \in \mathbb{N} \mid k \leq n \,\}$ l'intervallo naturale $\{\, 1, 2, 3, \ldots, n \,\}$.

Teorema 2.8. *Ogni sottoinsieme A di I_n non vuoto ha un massimo e un minimo.*

Dimostrazione. Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. La proposizione $p(1)$ è vera poiché se $A \subset I_1,\ A \neq \emptyset$, allora $A = I_1 = \{\, 1 \,\}$ e $\max A = \min A = 1$. Supponendo che $p(n)$ sia vera vediamo che $p(n+1)$ è vera.
Sia $A \subset I_{n+1},\ A \neq \emptyset$. Se

$$n+1 \in A \;\Rightarrow\; \max A = n+1$$

altrimenti

$$n+1 \notin A \;\Rightarrow\; A \subset I_n$$

e per ipotesi induttiva esiste $k = \max A$.
Per dimostrare l'esistenza del minimo si procede così:
Sia $A \subset I_{n+1}$, considero $A' = A \cap I_n$. Se $A' = \emptyset$, allora $A = \{\, n+1 \,\}$ e quindi $\min A = n+1$. Altrimenti se $A' \neq \emptyset$ per ipotesi induttiva esiste $m = \min A'$ (perché $A' \subset I_n$) ma allora $\forall a \in A$, o $a \in A'$ o $a = n+1$. Quindi $m \leq a\ \forall a \in A$, ossia $m = \min A$.

$\square$

Definizione 2.6. *Un insieme ordinato si dice* ***ben ordinato*** *se ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un primo elemento (minimo).*

Notare che ogni insieme ben ordinato risulta totalmente ordinato ma non è vera la reciproca. $\mathbb{R}$, ad esempio, non è ben ordinato perché $A = (0,1)$ non ha minimo (se $x \in A$, $1/2\,x \in A$ ma $1/2\,x < x$).

Teorema 2.9. $(\mathbb{N}, \geq)$ *è un insieme ben ordinato.*

Dimostrazione. Sia $A \subset \mathbb{N}$ un insieme non vuoto e sia $n_0 \in A$.
$A' = A \cap I_{n_0} \neq \emptyset$ perché n_0 appartiene ad entrambi.
Poiché $A' \subset I_{n_0}$, per il teorema precedente esiste $m = \min A'$. Affermo che m è anche il minimo di A. Infatti, se $a \in A$ o $a \leq n_0$ e allora $a \in A'$ e quindi $m \leq a$, oppure $a > n_0$ e dunque $m \leq n_0 < a$. $\square$

Esercizio 2.10. *Sia I un insieme di indici e $\forall i \in I$ supponiamo che $B_i \subset \mathbb{N}$ sia un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$. Dimostrare che esiste una funzione $f\colon I \to \mathbb{N}$ tale che $Imf \subset \bigcup_{i \in I} B_i$ e $f(i) \in B_i$ (in altre parole che si possa scegliere un unico elemento $f(i)$ in ciascun B_i).*

Suggerimento: usare il fatto che $\mathbb{N}$ sia ben ordinato. Poiché per ogni $i \in I$ $B_i \neq \emptyset$ allora esiste un primo elemento $f(i)$ di B_i. La corrispondenza $i \to f(i)$ è una funzione perché il primo elemento è unico.

2.5 Proprietà topologiche della retta reale.

In questo capitolo discuteremo una serie di importanti conseguenze della completezza della retta $\mathbb{R}$ riguardanti la sua topologia e la convergenza di successioni di numeri reali.

Proposizione 2.2. *$\mathbb{N}$ non è limitato superiormente.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{N}$ fosse limitato superiormente esisterebbe $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha = \sup \mathbb{N}$. Per definizione di sup dato $\epsilon = 1/2$ dovrebbe esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 > \alpha - \frac{1}{2}$, ma $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ perché l'insieme $\mathbb{N}$ è induttivo. Dunque $n_0 + 1 > \alpha - 1/2 + 1 > \alpha$. Ciò è assurdo perché per definizione di sup per ogni $n \in \mathbb{N},\ n \leq \alpha$. □

Corollario 2.11 (Proprietà Archimedea dei numeri reali)**.** *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\delta > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n\,\delta > x$.*

Dimostrazione. Se $x \leq 0$ non c'è nulla da dimostrare.
Se $x > 0$ si consideri $y = \frac{x}{\delta} > 0$. Poiché $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > y = \frac{x}{\delta}$. Quindi $n\,\delta > x$.

□

Proposizione 2.12. *Tra due numeri reali distinti c'è sempre un numero razionale ed un numero irrazionale.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che $y > x \geq 0$. Per la proprietà archimedea esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{1}{y-x}$, o equivalentemente $0 < \frac{1}{n} < y - x$. Usando di nuovo la proprietà archimedea, possiamo trovare un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{k}{n} \geq y$. L'insieme $\{\, k \;\mid\; \frac{k}{n} \geq y \,\} \neq \emptyset$ e quindi ammette un primo elemento k_0. Allora

$$\frac{k_0 - 1}{n} < y \leq \frac{k_0}{n}$$

e

$$x = y - (y - x) < \frac{k_0}{n} - \frac{1}{n} = \frac{k_0 - 1}{n}.$$

Così $q = \frac{k_0-1}{n} \in \mathbb{Q}$ è tale che $x < q < y$.

Per dimostrare la seconda affermazione usiamo la prima. Infatti, dati $x \neq y$ posiamo trovare un numero razionale q tale che $x - \sqrt{2} < q < y - \sqrt{2}$. Allora $q + \sqrt{2}$ è irrazionale (verificare!) e si trova tra x e y.

□

Definizione 2.7. *$A \subset \mathbb{R}$ si dice denso se $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A$ tale che $|x - a| < \varepsilon$.*

In altre parole A è denso se in ogni intorno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ del numero $x \in \mathbb{R}$ si trova qualche elemento di A.

Esercizio 2.13. *i) Dimostrare che $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme denso della retta reale $\mathbb{R}$.*
ii) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste una successione $q_1, q_2, \ldots, q_n,\ q_i \in \mathbb{Q}$ tale che $q_n \to x$.
iii) Dimostrare che anche l'insieme dei numeri irrazionali è denso in $\mathbb{R}$.

Ricordiamo che una **successione** (x_n) di numeri reali altro non è che una funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Di norma si denota $x(n)$ con x_n. Una **sottosuccessione** (x_{n_k}) della successione (x_n) è la composizione della funzione $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con una funzione strettamente crescente $n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Denotando con $x_{n_k} = x \circ n(k)$, avremo che (x_{n_k}) è una sottosuccessione di (x_n) se $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$.

Definizione 2.8. *Diremo che la successione (x_n)* **converge** *ad un numero reale x (simbolicamente $x_n \longrightarrow x$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall n > n_0$.*

Esercizio 2.14. *Dimostrare che $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.*

Esercizio 2.15. *Dimostrare che se $x_n \longrightarrow x$ e $x_n \longrightarrow y$ allora $x = y$.*

Esercizio 2.16. *Dimostrare che se $x_n \longrightarrow x$ e x_{n_k} è una sottosuccessione allora $x_{n_k} \longrightarrow x$(cioè $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 :\ \forall k \geq k_0\ |x_{n_k} - x| < \varepsilon$).*

Esempio: Esistono successioni non convergenti che hanno sottosuccessioni convergenti. Se

$$x_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 2k-1 \\ \frac{1}{n} \text{ se } n = 2k, \end{cases}$$

allora $x_{2k+1} \longrightarrow 1$, e invece $x_{2k} \longrightarrow 0$. Quindi (x_n) non converge a nessun punto per il esercizio precedente.

Esercizio 2.17. *Enumeriamo tutti numeri razionali (vedremo in seguito che questo è possibile) e consideriamo la successione $(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots)$ la cui immagine è $\mathbb{Q}$. Dimostrare che dato un numero reale x qualsiasi esiste un sottosuccessione (q_{n_k}) della successione (q_n) convergente ad x.*

Una successione di numeri reali a_m si dice **monotona crescente** se

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_m \leq \ldots.$$

Analogamente si definisce una successione monotona decrescente.
Per definizione, una successione monotona è una successione monotona crescente oppure decrescente.
Una successione (x_m) è **limitata superiormente** se l'insieme $\{ x_1, \ldots, x_m, \ldots \}$ immagine della successione è limitato superiormente (ricordiamo che una successione è un'applicazione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$). In altre parole (x_m) è limitata superiormente se

$$\exists k \in \mathbb{R} :\ x_m \leq k\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Proposizione 2.18. *Ogni successione monotona crescente e limitata superiormente è convergente ad un punto $x \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $A = \{ x_1, \ldots, x_m, \ldots \}$. Poiché A è limitato superiormente, per la completezza della retta reale $\mathbb{R}$ esiste $x = supA$. Si vuole far vedere che $x_m \longrightarrow x$. Per questo si usa la proprietà *ii*) della proposizione che caratterizza l'estremo superiore, cioè che dato $\varepsilon > 0\ \exists x_{m_0}$ tale che $x - \varepsilon < x_{m_0} \leq x$.
Poiché (x_m) è monotona e $x = \sup A$ allora $\forall m \geq m_0$

$$x - \varepsilon < x_{m_0} \leq x_m \leq x < x + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x_m - x| < \varepsilon.$$

□

Definizione 2.9. *Una successione* $\{ x_n \}$ *di numeri reali si dice* ***di Cauchy*** *(o fondamentale) se* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ *tale che* $\forall n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| \leq \varepsilon$.

Proposizione 2.3 (Criterio di convergenza di Cauchy)**.** *Una successione* (x_n) *di numeri reali è convergente se e soltanto se è di Cauchy.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Ogni successione convergente è di Cauchy. Per ipotesi $x_n \longrightarrow x$ e quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > n_0$, ma allora

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_m + x - x| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0.$$

Si ha dunque che $\{ x_n \}$ è di Cauchy.

($\Leftarrow$)

Poiché (x_n) è di Cauchy, dato ε esiste n_0 tale che $\forall n, m \geq n_0$ $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. In particolare $|x_{n_0} - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall m \geq n_0$. Quindi se $m \geq n_0$, si ha

$$x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < x_m < x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Questo dice che esiste solo un numero finito di n tali che $x_n \leq x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2}$. Consideriamo l'insieme

$$S = \{ y \in \mathbb{R} \ \mid \ \text{esiste solo un numero finito di } n \text{ tali che } \ x_n \leq y \}.$$

Poiché $x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \in S$ abbiamo che $S \neq \emptyset$. Osserviamo ora che se $y \in S$ allora $(-\infty, y] \subset S$. Poiché $x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \notin S$, non esiste alcun elemento $y \in S$ maggiore di $x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}$. Dunque $x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}$ è un maggiorante dell'insieme S. Per la completezza della retta reale esiste $x = \sup S$.
Dato che $x = \sup S$ si ha che $x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq x$ e siccome x è il minimo dei maggioranti si ha che $x \leq x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}$. Allora

$$\frac{\varepsilon}{2} x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Inoltre per $m > n_0$

$$x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < x_m < x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2},$$

e dunque

$$-x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < -x_m < -x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Sommando (2.2) e (2.3) si ottiene $-\varepsilon < x - x_m < \varepsilon$ e quindi $|x - x_m| < \varepsilon$ $\forall m > n_0$. Poiché l'argomento è valido per ogni ε risulta che $x_n \longrightarrow x$. $\square$

Definizione 2.10. $A \subset \mathbb{R}$ *si dice* ***limitato*** *se è limitato superiormente ed inferiormente, cioè* A *è limitato se esistono* $m, M \in \mathbb{R}$ *tali che* $A \subset [m, M]$. *Una successione si dice limitata se è limitato il suo insieme immagine.*

Esercizio 2.19. *Dimostrare che* A *è limitato se e solo se esiste* $K > 0$ *tale che* $|a| \leq K$ $\forall a \in A$.

Proposizione 2.20. *Ogni successione di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon = 1$. Siccome (x_n) è di Cauchy

$$\exists n_0 : \ \forall n, m \geq n_0 \ |x_n - x_m| < 1.$$

In particolare $|x_{n_0} - x_m| < 1$, ossia $x_{n_0} - 1 < x_m < x_{n_0} + 1$ per ogni $m \geq n_0$. Siano $M = \max(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0} + 1)$ e $m = \min(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0} - 1)$, allora $m \leq x_n \leq M$, $\forall n$. Quindi (x_n) è una successione limitata.

□

Proposizione 2.21. *Se (x_n) è una successione di Cauchy e una sottosuccessione (x_{n_k}) di (x_n) converge a x allora anche $x_n \longrightarrow x$.*

Dimostrazione. Essendo (x_n) una successione di Cauchy, dato $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che $|x_m - x_n| < \varepsilon/2$ se $m, n \geq n_0$. Siccome $x_{n_k} \longrightarrow x$ esisterà anche un k_0 che tale che $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$ per ogni $k \geq k_0$. Possiamo supporre che $n_{k_0} \geq n_0$ (perché?). Dalle disuguaglianze precedenti deriva che per ogni $m \geq n_0$,

$$|x_m - x| \leq |x_m - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Proposizione 2.4. *Data una successione (x_n) di numeri reali esiste sempre una sottosuccessione (x_{n_k}) di (x_n) che sia o monotona crescente oppure monotona decrescente.*

Dimostrazione. Si dice che x_k è un **punto di vetta** della successione (x_n) se per ogni $m \geq k$ $x_m \leq x_k$.
Una successione (x_n) o ha un numero finito di punti di vetta oppure ne ha un numero infinito.
(**1° caso**) Se il numero di punti di vetta è finito $\exists n_0$ tale che per ogni $n \geq n_0,\ x_n$ non è di vetta.
Scegliamo allora $x_{n_1} > x_{n_0}$ con $n_1 > n_0$. Poiché x_{n_1} non è di vetta esiste $m > n_1$ tale che $x_m > x_{n_1}$. Fra tali m scegliamo un n_2 ottenendo $n_1 < n_2$ e $x_{n_1} < x_{n_2}$, e così via. In questo modo troveremo una sottosuccessione (x_{n_k}) della successione (x_n) strettamente crescente.

(**2° caso**) Numero infinito di vette.
Preso x_{n_1}, punto di vetta, esiste $n_2 > n_1$ tale che x_{n_2} è ancora un punto di vetta e $x_{n_1} \geq x_{n_2}$, perché x_{n_1} è di vetta. Analogamente esiste $n_3 > n_2$ tale che x_{n_3} è punto di vetta e $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3}$... Si è costruito in questo modo una sottosuccessione monotona decrescente.

□

Teorema 2.22 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato della retta reale e sia (x_n) una successione di punti di $[a, b]$. Allora esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) di (x_n) convergente ad un punto di $[a, b]$.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) di (x_n) monotona crescente o decrescente. Supponiamo che la (x_{n_k}) sia crescente. Essa è limitata superiormente in quanto $x_{n_k} \leq b \, \forall k$ e quindi per la Proposizione 2.18 $x_{n_k} \longrightarrow x = \sup \{ x_{n_k} \}$. Analogamente si dimostra che una sottosuccessione (x_{n_k}) monotona decrescente converge ad $\inf \{ x_{n_k} \} \geq a$. □

Teorema 2.23 (Completezza secondo Cantor). *Sia*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$$

con $I_n = [a_n, b_n]$ *una successione di intervalli chiusi, incapsulati, non vuoti e tali che la lunghezza* $l(I_n) = (b_n - a_n) \longrightarrow 0$. *Allora esiste un unico* $x \in \mathbb{R}$ *tale che* $x \in I_n$ $\forall n$. *In altre parole* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{ x \}$.

Dimostrazione. Siano $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$ gli estremi inferiori e superiori degli intervalli. Un semplice argomento dimostra che per ogni m, n si ha che $a_m < b_n$ e dunque abbiamo che

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq \ldots b_n \leq \ldots \ \leq b_2 \leq b_1.$$

Quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$, b_k è maggiorante dell'insieme $\{ a_1, \ldots, a_n, \ldots \}$. Per la completezza di $\mathbb{R}$, l'insieme $\{ a_n \}$ ammette un estremo superiore. Sia $x = \sup \{ a_n \}$. Per definizione di supremo $a_n \leq x \leq b_n$ per ogni n e quindi $x \in I_n = [a_n, b_n]$ $\forall n$, ossia $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
Dimostriamo ora che tale x è unico. Supponiamo che esistano x e x_1 appartenenti ad ogni intervallo. Se $x \neq x_1$ allora $|x - x_1| = \delta > 0$. Dato che

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$$

esiste $I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$ tale che $l(I_{n_0}) < \delta$. Però allora x e x_1 non possono appartenere entrambi ad I_{n_0}, il che contraddice l'assunto.

$\square$

Il teorema precedente risulta essere equivalente all'assioma della completezza della retta. Storicamente questo approccio alla completezza precede quello scelto da noi. Inoltre ha il vantaggio di non usare né la nozione di estremo superiore né la presenza di un ordine totale in modo essenziale ma soltanto la presenza di una metrica sulla retta reale. Questo lo rende utile in situazioni più generali della retta reale. In realtà si potrebbe introdurre l'assioma di completezza in varie forme fra loro equivalenti come si vede dal esercizio seguente.

Esercizio 2.24. *Dimostrare che in un corpo totalmente ordinato le seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti :*
i) Ogni sottoinsieme non vuoto limitato superiormente ha un estremo superiore.
ii) Ogni successione monotona crescente limitata converge.
iii) Ogni successione di Cauchy è convergente
iv) Ogni successione di intervalli chiusi, incapsulati, non vuoti e tali che la lunghezza $l(I_n) = (b_n - a_n) \longrightarrow 0$ *ha un unico punto in comune.*

3 Cardinalità di un insieme

3.1 Assioma della scelta

Definizione 3.1. *Una catena C in un insieme ordinato $(X, \leq)$ è un sottoinsieme totalmente ordinato di X, un maggiorante della catena C è un elemento $x_0 \in X$ tale che $c \leq x_0$ $\forall c \in C$. Un elemento massimale del insieme ordinato X è un elemento m di X tale che se $x \in X$ e $m \leq x$ allora $m = x$.*

Si può dimostrare (ma qui non daremo la dimostrazione) che le seguenti affermazioni sono equivalenti fra loro. Quindi scegliendo una di loro come assioma le altre si ottengono come teoremi.

Assioma della scelta: Dato $I \neq \emptyset$ e dato $\forall i \in I$ un insieme $A_i \neq \emptyset$ esiste una funzione (chiamata funzione di scelta) $f\colon I \to \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ tale che $f(i) \in A_i$.
Principio del buon ordinamento: Dato un insieme A, esiste un ordine $\leq$ su A tale che $(A, \leq)$ è ben ordinato.
Lemma di Zorn : Se $(X, \leq)$ è un insieme ordinato tale che ogni catena $C \subset X$ ha un maggiorante allora esiste un elemento massimale in $(X, \leq)$,
Principio massimale di Hausdorff: Se $(X, \leq)$ è un insieme ordinato allora ogni catena è contenuta in una catena massimale.

Usualmente si sceglie come assioma la prima delle affermazioni, detta, per ovvie ragioni, assioma della scelta.

Ricordiamo che $X \times Y$ è l'insieme delle coppie ordinate di elementi di X con elementi di Y. Dati n insiemi $X_1, \ldots, X_n$, si definisce l'insieme prodotto come

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \mid \; a_i \in X_i \,\}\,.$$

La generalizzazione di questa costruzione ad un insieme qualsiasi di indici è anche possibile.
Dato $I \neq \emptyset$ un insieme di indici, consideriamo per ogni $i \in I$ un insieme X_i. Il prodotto della famiglia indicizzata $\{X_i | i \in I\}$ è per definizione:

$$\prod_{i \in I} X_i = \{\, f\colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i \;\mid\; f(i) \in X_i \,\}\,.$$

Useremo la notazione X^Y per denotare l'insieme di tutte le funzioni da X a valori in Y, cioè $X^Y = \{\, f\colon X \to Y \,\}\,.$

Esercizio 3.1. *Dimostrare che $X^Y = \prod_{x \in X} Y$*

Un corollario importante dell'assioma della scelta è:

Corollario 3.2. *Se $I \neq \emptyset$ e $X_i \neq \emptyset$ allora $\prod\limits_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.*

La dimostrazione è immediata poiché questo corollario non è altro che una riformulazione dell'assioma della scelta. Un'altra utile conseguenza è data dal seguente corollario:

Corollario 3.3. *Se $f\colon X \to Y$ è una funzione suriettiva, esiste una funzione $g\colon Y \to X$ iniettiva tale che $f(g(y)) = y\ \forall y$, cioè $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.*

Dimostrazione. Consideriamo Y come l'insieme degli indici, $\forall y \in Y$ consideriamo $A_y = f^{-1}(y) = \{\, x \in X \mid f(x) = y \,\}$. Siccome f è suriettiva, per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$ e quindi $A_y = f^{-1}(y) \neq \emptyset$.
Per l'assioma della scelta, per ogni y possiamo scegliere un unico $g(y) \in A_y = f^{-1}(y)$ e questo definisce una funzione $g\colon Y \to X$ tale che $f(g(y)) = y$. Osserviamo che una tale g è necessariamente iniettiva, perché

$$g(y_1) = g(y_2) \;\Rightarrow\; f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \;\Rightarrow\; y_1 = y_2.$$

□

3.2 Teoremi di Bernstein-Schroeder e Cantor-Bernstein

Diremo che due insiemi A e B sono coordinabili (o equipollenti) se esiste una biiezione $f\colon A \to B$. Scriveremo $A \sim B$ se A è coordinabile con B. Risulta facile dimostrare che la relazione $\sim$ ha la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Perciò è una relazione d'equivalenza.
Un insieme A si dice **finito** se $A \sim I_n$, dove $I_n = \{\, k \in \mathbb{N} \mid k \leq n \,\}$. Se A è finito l'unico numero n tale che $A \sim I_n$ è per definizione la **cardinalità** o il numero degli elementi del insieme A.

Esercizio 3.4. *Si dimostri che la cardinalità di A è ben definita (ossia se $A \sim I_n$ e $A \sim I_m$ allora $n = m$). Suggerimento: dimostrare prima che se $n \neq m$ non esiste alcuna biiezione fra I_n e I_m.*

Vogliamo estendere la nozione di cardinalità ad insiemi non necessariamente finiti.
Senza andare ad approfondire per ora la nozione di numero cardinale, supporremo un'ipotetica esistenza di tale numero e diremo che la cardinalità (o potenza) dell'insieme A è uguale alla cardinalità dell'insieme B (in simboli $\mathrm{card}\ A = \mathrm{card}\ B$) se i due insiemi sono coordinabili fra loro.
Si vorrebbe definire i numeri cardinali come si faceva a scuola con i numeri naturali

$$\mathrm{card}\, A = \{\, B \mid B \sim A \,\},$$

ma in genere il lato destro non risulta un insieme ma solo una classe. La definizione rigorosa di numero cardinale è più complicata ed usa numeri ordinali per trovare un prototipo per ogni $\mathrm{card}\ A$ analogo agli insiemi $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ nel caso degli insiemi finiti.
Diremo che la cardinalità dell'insieme A è minore o uguale a quella di B ($\mathrm{card}\ A \leq \mathrm{card}\ B$) se esiste una funzione $f\colon A \to B$ iniettiva.
Dal corollario 3.3 risulta immediatamente:

Proposizione 3.5. $\mathrm{card}\ A \leq \mathrm{card}\ B$ *se esiste una funzione $h\colon B \to A$ suriettiva.*

Se $\mathrm{card}\ A \leq \mathrm{card}\ B$ e $\mathrm{card}\ B \leq \mathrm{card}\ A$ si può dire $\mathrm{card}\ A = \mathrm{card}\ B$? Questo implicherebbe che la relazione $\leq$ è una relazione d'ordine. La risposta positiva a questa domanda viene data da un famoso teorema:

Teorema 3.6 (Bernstein-Schroeder)**.** *Se esiste* $f\colon A \to B$ *iniettiva ed esiste* $g\colon B \to A$ *iniettiva (cioè* $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A$*) allora esiste una funzione* $h\colon A \to B$ *biiettiva.*
In altri termini $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ *e* $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A$ *implica che* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

Dimostrazione. **Passo** 1. Prima di tutto dimostriamo il teorema in un caso particolare. Supporremo che $B \subset A$ e che $g = i\colon B \subset A$ sia l'inclusione $i(x) = x$, $\forall x \in B$.
Sia $A = A_0$ e $B = A_1 \subset A_0$. Consideriamo $A_2 = f(A) \subset B = A_1$. Siano $f(A_1) = A_3 \subset A_2$ e $f(A_2) = A_4 \subset A_3$ e così via.
La costruzione ci porta ad una successione infinita di insiemi:

$$A = A_0 \supset B = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_k \supset \ldots$$

Sia A_∞ l'intersezione di tutti questi insiemi $A_\infty = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n$.
Dimostriamo il seguente lemma:

Lemma 3.7. A_0 *si può scrivere come unione di* A_∞ *con una unione di anelli concentrici due a due disgiunti*

$$A_0 = (A_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup A_\infty.$$

Dimostrazione. Sia $x \in A_0$, allora o $x \in A_\infty$ (si trova in tutti) oppure esiste un n tale che $x \notin A_n$.
Consideriamo $S = \{\, n \geq 0 \mid x \notin A_n \,\}$. Si sa che $S \neq \emptyset$ e quindi deve esistere un primo elemento $n_0 \in S$. (Aggiungere lo zero a $\mathbb{N}$ non modifica il buon ordine)
Allora $x \notin A_{n_0}$ ma $x \in A_{n_0-1}$ perché altrimenti n_0 non sarebbe il primo elemento di S. Dunque $x \in A_{n_0-1} \setminus A_{n_0}$.
Abbiamo dimostrato dunque che se $x \notin A_\infty$ allora

$$x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}).$$

Questo dimostra il lemma. □

Adesso continuiamo con la dimostrazione del teorema.
Scriviamo A come

$$A = (A_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup A_\infty.$$

Osserviamo che per definizione degli A_i si ha che $f(A_0 \setminus A_1) = A_2 \setminus A_3$ e più generalmente

$$f(A_i \setminus A_{i+1}) = A_{i+2} \setminus A_{i+3}.$$

Inoltre, essendo la f iniettiva, abbiamo

$$A_i \setminus A_{i+1} \sim A_{i+2} \setminus A_{i+3},$$

via la restrizione della f ad $A_i \setminus A_{i+1}$. Scrivendo adesso B come

$$B = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup A_\infty,$$

costruiamo una funzione biiettiva h fra A e B definendo la h come

$$h = \begin{cases} f\colon A_i \setminus A_{i+1} \to A_{i+2} \setminus A_{i+3} & \text{if } i = 2k \\ \mathrm{Id}: A_i \setminus A_{i+1} \to A_i \setminus A_{i+1} & \text{if } i = 2k+1 \\ \mathrm{Id}: A_\infty \to A_\infty & \text{on } A_\infty \end{cases}$$

Passo 2. Completiamo la dimostrazione del teorema riducendo il caso generale a quello dimostrato in precedenza.
Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ funzioni iniettive. Consideriamo $\bar{B} \subset A$ $\bar{B} = g(B)$. Allora $\bar{g}\colon B \to \bar{B}$ definita da $\bar{g}(x) = g(x)$ è iniettiva, suriettiva e dunque biiettiva. Inoltre $\bar{f} = \bar{g} \circ f\colon A \to \bar{B}$ è iniettiva. Abbiamo anche l'inclusione $i\colon \bar{B} \to A$. Dunque ci troviamo nel caso considerato precedentemente. Per il primo passo deve esistere una biiezione $\bar{h}\colon A \to \bar{B}$. Allora $h = (\bar{g})^{-1} \circ \bar{h}$ è la biiezione desiderata. $\square$

Teorema 3.8 (Cantor-Bernstein)**.** *Se X è un insieme allora* card $X < card\,\mathcal{P}(X)$.

Dimostrazione. Vediamo che card $X \leq card\,\mathcal{P}(X)$. Per questo definiamo la funzione iniettiva $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$, $f(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$, che è chiaramente iniettiva.
Per vedere che card $X \neq$ card $\mathcal{P}(X)$ si dimostra che non esiste alcuna biiezione tra X e $\mathcal{P}(X)$.
Supponiamo per assurdo che esiste $h\colon X \to \mathcal{P}(X)$ biiettiva e sia

$$S = \{ x \in X \mid x \notin h(x) \}.$$

Poiché h è suriettiva, deve esistere un $x_0 \in X$ tale che $h(x_0) = S$. Se x_0 appartenesse ad S allora apparterrebbe a $h(x_0)$, ma per definizione dell'insieme S, risulta $x_0 \notin h(x_0) = S$. Se x_0 non appartenesse a S allora si avrebbe che $x_0 \in h(x_0) = S$. In entrambi i casi si arriva ad un assurdo.
Dunque non può esistere una biiezione tra X e $\mathcal{P}(X)$.

$\square$

Teorema 3.9. $\mathcal{P}(X) \sim \{0,1\}^X$.

Dimostrazione. Dato un sottoinsieme A di X, la **funzione caratteristica** di A e la funzione $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ definita da

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \notin A \end{cases}.$$

Definiamo la funzione $f\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$, ponendo $f(A) = \chi_A$. Consideriamo $g\colon \{0,1\}^X \to \mathcal{P}(X)$ definita come segue: se $\alpha\colon X \to \{0,1\}$ allora

$$g(\alpha) = A_\alpha = \{ x \mid \alpha(x) = 1 \} \in \mathcal{P}(X).$$

Risulta $(f \circ g)(\alpha)(x) = f(g(\alpha))(x) = \chi_{A_\alpha}(x) = \alpha(x)$. Quindi $f \circ g = id$. Analogamente $(g \circ f)(A) = g(\chi_A) = \{ x \mid \chi_A(x) = 1 \} = A$, ossia $g \circ f = id$. Ne segue che g è la funzione inversa della f e quindi $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\square$

Corollario 3.10. *Se A è un insieme finito ed ha n elementi allora $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi.*

3.3 Insiemi numerabili

Un insieme A si dice **infinito** se non è finito (ossia non può essere messo in corrispondenza con nessun I_n. Diremo che A è **numerabile** se $A \sim \mathbb{N}$.

Esempio: Sia $A = \{ 2k \mid k \in \mathbb{N} \}$ l'insieme dei numeri pari.
A è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ Nonostante ciò $A \sim \mathbb{N}$. Infatti, $f\colon \mathbb{N} \to A$ $f(k) = 2k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ è biiettiva. Quindi, insiemi infiniti (numerabili) possono avere sottoinsiemi propri della stessa cardinalità.

Esercizio 3.11. *Dimostrare che A è infinito se e solo se esiste $B \subsetneq A$ tale che $B \sim A$ (B è equipollente ad A).*

Proposizione 3.12. *L'insieme $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ è numerabile. Quindi* $\operatorname{card} \mathbb{N}^n = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sicuramente esiste una funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ iniettiva. Basta prendere per esempio $f(n) = (n, 1, \ldots, 1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Definiamo ora una funzione iniettiva da $\mathbb{N}^n$ in $\mathbb{N}$. Per questo, scegliamo n numeri primi distinti $p_1, \ldots, p_n$ e definiamo $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ponendo

$$g(k_1, \ldots, k_n) = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{k_n}.$$

La funzione g risulta iniettiva perché, per il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica, la decomposizione d un numero naturale in fattori primi è unica, ossia:

$$g(k_1, \ldots, k_n) = g(s_1, \ldots, s_n) \quad \Rightarrow \quad k_1 = s_1, \ldots, k_n = s_n.$$

Dal Teorema di Bernstein-Schroeder si conclude che esiste $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ biiettiva e quindi che $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n$. □

Esercizio 3.13. *Se X è un insieme, l'insieme delle parti finite di X è definito da:*

$$\mathcal{P}_F(X) = \{ A \subset X \mid A \text{ è finito} \}.$$

Dimostrare che $\mathcal{P}_F(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$. (Suggerimento: usare $\mathbb{N}^n \sim \mathbb{N}$)

Teorema 3.14. *Ogni sottoinsieme di un insieme numerabile o è finito o è numerabile.*

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che basta dimostrare il risultato nell'ipotesi $A = \mathbb{N}$. Infatti, essendo A numerabile esiste una funzione $f\colon A \to \mathbb{N}$ biiettiva. Se $S \subset A$ allora $S' = f(S) \subset \mathbb{N}$ e $S \sim S'$ (via la restrizione della f a S) . Risulta dunque che $S \subset A$ è finito o numerabile se e solo se $S' \subset \mathbb{N}$ lo è. Dunque basta dimostrare il teorema per sottoinsiemi $S \subset \mathbb{N}$.
Se $S = \emptyset$ il teorema è dimostrato.
Se $S \neq \emptyset$ per il principio di buon ordinamento esiste $n_0 \in S$ primo elemento di S.
Sia $S_1 = S \setminus \{ n_0 \}$. Se $S_1 = \emptyset$ il teorema è dimostrato perché $S = \{ n_0 \}$. Altrimenti esiste un $n_1 \in S_1$ primo elemento. Per definizione di S_1 $n_1 \neq n_0$. Definiamo

$$S_2 = S_1 \setminus \{ n_1 \} = S \setminus \{ n_0, n_1 \}.$$

Se $S_2 = \emptyset$ allora S è finito, se invece $S_2 =\neq \emptyset$ definiamo n_2 come il primo elemento di S_2. Per definizione di S_2, abbiamo che $n_2 \neq n_1$ e $n_2 \neq n_0$ Ripentendo il ragionamento, costruito così S_n si definisce

$$S_{n+1} = S_n \setminus \{ n_n \} = S \setminus \{ n_0, n_1, \dots, n_n \} .$$

Ora; o per qualche k, si ha che $S_k = \emptyset$, ed in tal caso $S = \{ n_0, \dots, n_k \}$ sarebbe finito, oppure $S_k \neq \emptyset \ \forall k$, ed in questo caso è stata costruita una successione $(n_0, n_1, \dots, n_k, \dots)$ tale che $n_k \neq n_r$ se $k \neq r$. Infatti, se $k \neq r$ avremmo $k < r$ oppure $r < k$. Supponiamo ad esempio che $k < r$, allora $n_r \notin S_k$ e quindi $n_k \neq n_r$. Abbiamo costruito in questo modo una funzione iniettiva $f\colon \mathbb{N} \to S$ definita da $f(k) = n_k$. Poiché abbiamo anche una ovvia funzione iniettiva $i\colon S \to \mathbb{N}$, dove i è l'inclusione $i(k) = k$, per Bernstein -Schroeder $S \sim \mathbb{N}$.

□

Corollario 3.15. *Una unione finita o numerabile di insiemi finiti o numerabili è un insieme finito o numerabile.*

Dimostrazione. Consideriamo qui solo il caso di un insieme numerabile di indici. Senza perdita di generalità possiamo supporre che questo insieme è $\mathbb{N}$.
Sia dunque $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Per ipotesi, per ogni $i \in \mathbb{N}$, esiste $f_i\colon \mathbb{N} \to A_i$ suriettiva (anche biiettiva se A_i è numerabile). Definiamo $f\colon \mathbb{N}^2 \to A$ come $f(i, j) = f_i(j)$. Chiaramente f è suriettiva e quindi esiste una funzione iniettiva g da A in $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$. Essendo A coordinabile con immagine della funzione g, che è un sottoinsieme dell'insieme numerabile $\mathbb{N}^2$, per il teorema precedente risulta anch'esso finito o numerabile. □

Esercizio 3.16. *Dimostrare che gli insiemi* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *e* $\mathbb{Z}^+ = \{ 0 \} \cup \mathbb{N}$ *sono tutti coordinabili con* $\mathbb{N}$ *esibendo esplicitamente una funzione biiettiva fra loro ed* $\mathbb{N}$.

Corollario 3.17. $\mathbb{Q}$ *è numerabile.*

Dimostrazione. Infatti $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(n, m) = \frac{n}{m}$ è suriettiva. Quindi esiste una funzione iniettiva g da $\mathbb{Q}$ a valori nell'insieme numerabile $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Allora $\mathbb{Q} \sim g(\mathbb{Q})$ che è un sottoinsieme di un insieme numerabile. Dunque $\mathbb{Q}$ deve essere finito o numerabile. Però $\mathbb{Q}$ non può essere finito perché contiene $\mathbb{N}$. □

Definizione 3.2. $x \in \mathbb{R}$ *si dice* ***algebrico*** *se esiste un polinomio P a coefficienti interi, tale che $P(x) = 0$. Altrimenti x si dice* ***trascendente***. *In altre parole un numero algebrico è un numero che è radice di un polinomio a coefficienti interi.*

Esercizio 3.18. *Dimostrare che x è un numero algebrico se e soltanto se x è radice di un polinomio a coefficienti razionali.*

Proposizione 3.19. *L'insieme $\mathbb{R}_{alg} \subset \mathbb{R}$ dei numeri reali algebrici è numerabile.*

Dimostrazione. L'insieme $\mathcal{P}$ dei polinomi a coefficienti interi è numerabile. Infatti , $\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$, dove $\mathcal{P}_n$ è l'insieme dei polinomi a coefficienti interi di grado minore o uguale a n. Osserviamo che la funzione $f\colon \mathcal{P}_n \to \mathbb{Z}^{n+1}$, che associa ad ogni polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ la $(n+1)$-upla

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dei suoi coefficienti, è iniettiva (si dimostri!). Poiché $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ concludiamo facilmente che $\mathcal{P}_n$ è numerabile e quindi anche $\mathcal{P}$ è numerabile perché si tratta di una unione numerabile di insiemi numerabili. Un polinomio di grado n ha al più n radici reali. Dunque l'insieme delle radici $R(P)$ di ogni polinomio $P \in \mathcal{P}$ è finito. Da qui risulta che $\mathbb{R}_{alg} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} R(P)$ è un insieme numerabile, perché si tratta di un'unione numerabile di insiemi finiti che non è un insieme finito. $\square$

3.4 La potenza del continuo

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ invece non è numerabile e per verificarlo basta far vedere che $(0, 1)$ o che $[0, 1]$ non è numerabile, dato che se $\mathbb{R}$ fosse numerabile dovrebbe esserlo ogni suo sottoinsieme.

Esercizio 3.20. *Dimostrare che* $\mathbb{R} \sim (0, 1)$. *Suggerimento: Si consideri la funzione biiettiva*

$$\arctan \colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

e si dimostri che $(0, 1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Per dimostrare che $\mathbb{R}$ non è numerabile useremo l'espansione di un numero reale nella base $b \in \mathbb{N} \setminus \{ 1 \}$.

Teorema 3.21. *Dato un numero naturale* $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *esiste una successione* $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ *di numeri naturali con* $a_i \in \{ 0, \dots, b-1 \} \subset \mathbb{N}$ *tale che*

$$x = [x] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i}.$$

Qui $[x]$ = *parte intera di* x, *ossia il più grande numero intero minore o uguale ad* x.

L'espressione $[x], a_1 a_2 \dots a_n \dots$ si chiama **espansione del numero reale x in base b**.
Naturalmente anche la parte intera [x] ha un'espansione finita come polinomio in b^n, ma non approfondiamo questo aspetto perché non sarà usato qui.
Se $b = 10$ abbiamo l'espansione dei numeri reali in base dieci usata a scuola per definire numeri reali. Se la base è $b = 2$, allora ogni numero si scrive nella forma di sopra con $a_k \in \{0, 1\}$. Se $b = 3$, allora $a_k \in \{0, 1, 2\}$.
Ad esempio in base due:

$$\begin{aligned} 0,01010000000... &= \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^4} = 5/16 \\ 1,1000000... &= 3/2. \end{aligned}$$

In genere l'espansione di un numero reale in una base data non è unica, ad esempio sempre in base $2 : 1 = 1,0000... = 0,1111111...$, $3/2 = 1,1000000... = 1,0111111...$ (dimostrare).

Esercizio 3.22. *Trovare l' espansione del numero* $\pi = 3,1415.....$ *in base* 3 *fino alla potenza* 3^4.

Diamo qui un cenno della dimostrazione dell'esistenza dell'espansione:

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $x \in (0,1)$. Sia $J_b = \{ 0, \ldots, b-1 \}$ e sia $S_1 = \{ k \in J_b \mid \frac{k}{b} \leq x \}$. $S_1 \neq \emptyset$ ha un ultimo elemento a_1 (essendo finito), quindi

$$\frac{a_1}{b} \leq x < \frac{a_1 + 1}{b}.$$

Sia $S_2 = \{ k \in J_b \mid \frac{k}{b^2} \leq x - \frac{a_1}{b} \}$ e sia a_2 l'ultimo elemento di S_2, quindi

$$\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} \leq x < \frac{a_1}{b} + \frac{a_2 + 1}{b^2}.$$

Continuando così definiamo

$$S_m = \{ k \in J_b \mid \frac{k}{b^m} \leq x - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{b^i} \}.$$

Se a_m è l'ultimo elemento di S_m allora

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{b^i} \leq x < \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{b^i} + \frac{a_m + 1}{b^m}.$$

Osservando che il termine m della somma minore di x differisce dalla somma maggiore di al più $1/b^m$, si dimostra facilmente che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i}$ converge ad x. $\square$

Teorema 3.23. *La retta reale* $\mathbb{R}$ *non è numerabile.*

Abbiamo già visto che basta verificarlo per l'intervallo $(0,1)$. Supponiamo per assurdo che $(0,1)$ sia numerabile. Numeriamo i suoi elementi mettendoli in successione $\{x_1, x_2, \ldots, x_k \ldots\}$. Fissiamo la base $b = 2$ e scriviamo l'espansione di ogni elemento della successione come segue:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1k} \ldots \\ x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2k} \ldots \\ x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \ldots a_{3k} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Definiamo un numero reale x scegliendo la sua prima cifra diversa da a_{11}, la seconda diversa da a_{22}, e così via. Si vede subito che un tale numero non si trova nella nostra lista perché differisce da ogni x_i nella i-esima cifra della sua espansione binaria, contraddicendo la supposizione di avere numerato tutti i numeri reali.
Invece $\mathbb{R}$ risulta coordinabile con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Questo fatto fornisce una dimostrazione migliore della sua non numerabilità.

Teorema 3.24. $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $[0,1] \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Infatti, $[0,1] \sim (0,1) \sim \mathbb{R}$ (dimostrare la prima affermazione !).
Dal teorema 3.9 discende che $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e per il Teorema 3.21, per ogni $x \in [0,1]$ esiste una successione $\alpha = (a_1, a_2, \ldots a_k, \ldots)$ con $a_i \in \{ 0, 1 \}$ tale che

$$x = 0, a_1a_2a_3 \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}.$$

Questo ci dice che se consideriamo la funzione $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ definita da $f(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$ essa risulta suriettiva. Quindi, per l'assioma della scelta, possiamo costruire una funzione iniettiva $g\colon [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Per concludere la dimostrazione sulla base del Teorema di Cantor-Schroeder basterà esibire una funzione iniettiva $h\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$. La costruiremo usando il famoso insieme ternario di Cantor, che è un sottoinsieme di $[0,1] \subset \mathbb{R}$ definito in modo ricorsivo dividendo ad ogni passo ciascun intervallo in tre sottointervalli e rimuovendo la parte interna di quello centrale. Otterremo al primo passo

$$C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1],$$

al secondo

$$C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1],$$

e così via...
L'insieme di Cantor è per definizione l'insieme $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ Consideriamo adesso l'espansione di un numero reale in base 3. Gli unici numeri che non vengono rimossi in nessun passo e che dunque rimangono nell'insieme C sono i soli numeri $x \in [0,1]$ che hanno un'espansione $x = 0, a_1 a_2 ... a_k ....$ non avente nessun $a_k = 1$. Questo ci permette costruire una funzione iniettiva $f\colon \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ associando ad ogni $\alpha = (a_1, a_2, \dots a_k, \dots) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ il numero $f(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$. Infatti, $x = f(\alpha) \in C$ e non ci sono due diverse espansioni di x aventi come cifre soltanto $\{0,2\}$. Ogni altra espansione di x deve contenere per forza la cifra 1. Chiaramente $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ e quindi esiste anche una funzione iniettiva $h\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$. □

La cardinalità della retta reale $\mathbb{R}$ è detta la **potenza del continuo** e si indica con la lettera c. Sulla base del teorema precedente abbiamo che

$$\operatorname{card} \mathbb{R} = \operatorname{card}(0,1) = \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c.$$

Nota Bene 3.1. *Nelle dimostrazioni precedenti abbiamo fatto uso sconsiderato dell'assioma della scelta. Ma tanto il teorema di Cantor Schroeder come tutte le nostre affermazioni su insiemi numerabili e cardinalità in generale possono essere dimostrate senza assumere questo assioma. Non bisogna però credere che la scelta di introdurre questo assioma sia del tutto irrilevante. L'unico esempio disponibile di un insieme non misurabile secondo Lebesgue si costruisce solo sulla base di questo assioma.*

3.5 Numeri ordinali e cardinali

Accenniamo brevemente e in modo informale alla costruzione di ordinali e cardinali. Lavoreremo qui con insiemi i cui elementi sono altri insiemi e dunque useremo minuscole tanto per denotare un insieme come per i suoi elementi.
Ogni insieme x si può ordinare con la relazione seguente $z \propto y$ se $z \in y$ o $z = y$. Chiameremo $\propto$ relazione di appartenenza. Assumendo fra tanti altri (vedasi l'appendice del libro di Kelley citato in precedenza) un assioma, detto di regolarità, che implica in particolare che per ogni insieme x, $x \notin x$, possiamo definire i numeri ordinali in modo seguente:

Definizione 3.3. *Un insieme σ si dice* **numero ordinale** *se è totalmente ordinato dalla relazione di appartenenza $\propto$ ed inoltre se ogni suo elemento è anche un suo sottoinsieme. Ossia che vale $x \in \sigma \Rightarrow x \subset \sigma$.*

Diamo qualche esempio di numero ordinale:

Esempio: Sono numeri ordinali:

- $\emptyset$; chiamato 0.
- $\{\emptyset\}$; chiamato 1. Quindi $1 = \{0\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; chiamato 2. Quindi $2 = \{0, 1\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; chiamato 3. Quindi $3 = \{0, 1, 2\}$
- ....

In base a questa definizione ogni numero appartenente a $\mathbb{Z}^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ è l'insieme di tutti i numeri in $\mathbb{Z}^+$ più piccoli di esso. Da osservare che questa definizione di numeri interi positivi come numeri ordinali finiti è interna alla teoria degli insiemi basata sulla assiomatica di Fraenkel -Zermelo e prescinde degli assiomi che definiscono $\mathbb{R}$. Questo approccio, considerabilmente diverso dalla definizione di $\mathbb{N}$ come il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$, adottata precedentemente, è però vicino alla assiomatica di Peano.

Oltre agli ordinali enumerati precedentemente abbiamo che anche

$$\omega = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

risulta essere un numero ordinale per costruzione. L'ordinale ω è un insieme numerabile ma non finito. Si dice che ω è il primo ordinale **transfinito**.
E' un numero ordinale anche $\omega + 1 = \{\omega, \{\omega\}\}$ e così via...

Si dimostra che tutti numeri ordinali sono ben ordinati dalla relazione di appartenenza. Inoltre, ogni insieme di numeri ordinali è ben ordinato. Usando l'induzione transfinita (che generalizza il principio di induzione di Peano) si dimostra che ogni insieme ben ordinato è isomorfo a esattamente uno ed un solo numero ordinale. In particolare, due numeri ordinali sono isomorfi se e soltanto se sono uguali. Questo permette assegnare ad ogni insieme ben ordinato il suo (unico) numero ordinale.

Vediamo adesso una particolarità dei numeri ordinali infiniti. Due ordinali diversi, anche se non possono essere isomorfi con un isomorfismo di ordine, possono essere coordinabili fra di loro. Un buon esempio lo danno i numeri ordinali ω e $\omega+1$. Che non esiste nessun isomorfismo di ordine fra ω e $\omega+1$ si può vedere facilmente introducendo la nozione di **predecessore** di un elemento x come quella del massimo fra tutti gli elementi che precedono strettamente x. Chiaramente un isomorfismo di ordine preserva predecessori, ossia, se y è un predecessore di x, allora $f(y)$ è un predecessore di $f(x)$. Da questo risulta immediatamente che ω e $\omega+1$ non possono essere isomorfi. Infatti, ogni elemento di ω ha un predecessore, ma l'elemento $\{\,\omega\,\} \in \omega+1$ non ha alcun predecessore. Ciò nonostante ω è coordinabile con $\omega+1$ e quindi ha la stessa cardinalità. Infatti, una biiezione $f\colon \omega \to \omega+1$ si costruisce definendo $f(0) = \{\,\omega\,\}\,, f(1) = 0, ...f(n) = n-1, ...$

Definizione 3.4. *Un numero ordinale σ si dice* **numero cardinale** *se non è coordinabile a nessun ordinale strettamente minore di σ.*

Consideriamo la classe $\mathcal{O}$ degli numeri ordinali. Si può dimostrare che $\mathcal{O}$ non è un insieme ma che si tratta comunque di una classe ben ordinata dalla relazione di appartenenza. Se a è un insieme qualsiasi, per il principio del buon ordinamento (equivalente all'assioma della scelta) possiamo introdurre sull'insieme a un buon ordine $\leq$. Quindi, per quel che abbiamo detto prima, esiste un numero ordinale σ (unico) tale che $(a, \leq)$ è isomorfo per un isomorfismo di ordine ad $(\sigma, \propto)$. Poiché un isomorfismo di ordine è necessariamente una biiezione, risulta che $\mathcal{O}_a = \{\,\sigma \in \mathcal{O} \;\mid a$ è coordinabile $\sigma\,\}$ è non vuoto. Essendo $\mathcal{O}$ una classe ben ordinata, $\mathcal{O}_a$ avrà un primo elemento α. Si vede facilmente che α non può essere coordinabile con nessuno degli ordinali strettamente più piccoli e dunque α è un numero cardinale.
Poniamo per definizione card $a = \alpha$.
In questo modo abbiamo associato ad ogni insieme un unico numero cardinale che generalizza la nozione di numero di elementi di un insieme finito. Le operazioni di somma e prodotto possono essere estese (con dovuta cautela) a operazioni fra numeri cardinali.
Cardinali finiti non si distinguono dagli ordinali finiti, essi sono $\{\,0, 1, 2, 3, ...\,\}$.
Si usano lettere greche per denotare ordinali infiniti. Invece per denotare numeri cardinali infiniti vengono usate lettere dell'alfabeto ebraico, ad esempio:

$$\text{card}\ \mathbb{N} = \text{card}\ \omega = \aleph_0, \quad c = \text{card}\ \mathbb{R} = \text{card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}.$$

Il primo numero cardinale strettamente maggiore di $\aleph_0$ si denota con $\aleph_1$. Si è dimostrato che l'uguaglianza $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, chiamata **ipotesi del continuo,** è una affermazione indipendente dall'assiomatica corrente della teoria di insiemi. In altre parole, usando solo gli assiomi di Fraenkel-Zermelo, non si può dimostrare né la precedente uguaglianza né il suo contrario, potendosi aggiungere o l'una o l'altra come assioma.
Una breve discussione della storia dell'ipotesi del continuo (così come di ogni altra cosa, esistente o no) si può trovare su Wikipedia. e

4 Spazi metrici e spazi topologici

4.1 Spazi metrici

La retta reale $\mathbb{R}$ munita della distanza associata al valore assoluto è forse l'esempio più familiare di uno spazio metrico.
Ricordiamo che la funzione modulo o valore assoluto, definita da

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0, \end{cases}$$

verifica le seguenti proprietà:

1. $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \iff x = 0$;
2. $|xy| = |x||y|$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Esercizio 4.1. .
1)Dimostrare che per ogni numero reale x si ha $-|x| \leq x \leq |x|$
2)Dimostrare che se $r \geq 0$ allora $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.
3)Dimostrare la proprietà triangolare del valore assoluto ($|x + y| \leq |x| + |y|$)

La funzione modulo permette di definire la distanza fra due punti x, y della retta ponendo

$$d(x, y) = |y - x| = |x - y|.$$

In particolare $|x| = d(x, 0)$.
Lasciamo al lettore la dimostrazione della seguente proposizione:

Proposizione 4.1. *La distanza $d(x, y)$ definita sopra gode delle seguenti proprietà fondamentali:*

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(proprietà triangolare).*

Useremo queste tre proprietà per introdurre in modo assiomatico la nozione di distanza.

Definizione 4.1. *Uno **spazio metrico** (X, d) è un insieme X munito di una funzione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, che verifica le proprietà (1), (2), (3) della proposizione precedente. La funzione d si chiama **distanza** o **metrica** su X.*

Esempi

1. $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = |x - y|$ è uno spazio metrico.
2. (**Metrica discreta**) Sia X un insieme qualsiasi, definiamo

   $$d_{disc}\colon X \times X \to \mathbb{R},$$

   come

   $$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 1 & se\ x \neq y \\ 0 & se\ x = y \end{cases}.$$

   E facile vedere che d_{disc} verifica tutte le tre proprietà di una distanza. La metrica d_{disc} definita come sopra si chiama metrica discreta.

3. Sia
$$X = C[a,b] = \{ f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua} \} .$$
Definiamo $d_\infty\colon X \times X \to \mathbb{R}$ come segue: Se f e g sono due funzioni continue:
$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$
Notare che per il Teorema di Weierstrass si ha anche che
$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

4. Sia X come sopra, sia $d_1\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definita da :
$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$
e sia
$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\, dx}.$$

Esercizio 4.2. *Verificare che d_∞, d_1 e d_2 sono tre metriche definite sullo stesso insieme $X = C[a,b]$. Vedremo più tardi che lo spazio metrico (X, d_∞) è molto diverso da (X, d_i), $i = 1, 2$*

Esempio: Se (X_1, d_1) e (X_2, d_2) sono spazi metrici allora $X_1 \times X_2$ è uno spazio metrico con una qualsiasi di queste tre distanze:
$$\begin{cases} d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{d_1^2(x_1,y_1) + d_2^2(x_2,y_2)} \\ d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{ d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2) \} \\ d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) \end{cases} .$$

Esercizio 4.3. *Verificare che d_i, $i = 1, 2, \infty$, è una metrica.*

Esempio: (**Metrica indotta su un sottoinsieme**) Sia (X, d) uno spazio metrico. Dato $A \subset X$ la restrizione $d_A\colon A \times A \to \mathbb{R}$, $d_A(x,y) = d(x,y)\ \forall x, y \in A$ definisce una metrica su A.

Esempio: La lunghezza di una curva differenziabile a tratti $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è definita come
$$l(\gamma) = \int_a^b ||\dot\gamma(t)|| dt.$$
Consideriamo ora una superficie parametrica S nello spazio, ad esempio la sfera $S = \{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$.
Dati due punti $p, q \in S$, consideriamo l'insieme $\mathcal{G}$ i cui elementi sono tutte le curve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ differenziabili a tratti le cui immagini sono contenute in S e tali che $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. La **distanza geodetica** fra il punto p ed il punto q di S è, per definizione,
$$d_{geo}(p,q) = \inf_{\gamma\in\mathcal{G}} l(\gamma).$$

Notare che la distanza geodetica della sfera S non coincide con la distanza $d_S(p,q)$ indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$ su S. Dai disegni si vede subito che se $p \neq q$ allora

$$d_S(p,q) < d_{geo}(p,q).$$

Nota Bene 4.1. *il nome distanza geodetica deriva dal fatto che per due punti p, q della superficie S sufficientemente vicini fra loro esiste un'unica curva differenziabile $\gamma_* \in \mathcal{G}$ tale che $l(\gamma_*) = d_{geo}(p,q)$. La curva γ_* viene chiamata* **geodetica**.

Esempio: Una **pseudometrica** è una funzione

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

tale che valgono le proprietà (1), (2) e (3) eccetto: $d(x,y) = 0$ implica $x = y$.
Il seguente è un esempio interessante di uno spazio pseudometrico:
Sia $R = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ l'intervallo unitario di $\mathbb{R}^2$. Per ogni sottoinsieme $A \subset R$ e misurabile secondo Jordan resta definita la sua misura $0 \leq m(A) < \infty$ che verifica le seguenti proprietà:

1. $m(A) \geq 0$,
2. $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ (unione disgiunta);
3. $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Sia

$$\mathcal{A} = \{\, A \subset R \mid A \text{ è misurabile secondo Jordan} \,\}$$

e sia

$$d_m\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

definita da

$$d_m(A,B) = m(A \triangle B).$$

Esercizio 4.4. *Dimostrare che d_m è una pseudometrica ma non è una metrica.*

Esempio: Sia $\mathcal{R} = \{\, f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \;\mid\; f \text{ è integrabile secondo Riemann} \,\}$. Definiamo

$$d_{\mathcal{R}}(f,g) = \int_a^b \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx.$$

$d_{\mathcal{R}}$ così definita è una pseudometrica. Infatti:

1. $d_{\mathcal{R}} \geq 0$,
   $$\frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} > 0$$
   se
   $$|f - g| = 0 \Rightarrow d_{\mathcal{R}} = 0,$$
   ma non vale l'implicazione inversa perché f e g potrebbero non essere continue;
2. $d_{\mathcal{R}}(f,g) = d_{\mathcal{R}}(g,f)$ perché $|f - g| = |g - f|$;

3. Dato che $|f-g| \leq |f-h| + |h-g|$ risulta

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{R}}(f,g) &= \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \leq \\
&\leq \int \frac{|f-h|+|h-g|}{1+|f-h|+|h-g|} = \\
&= \int \frac{|f-h|}{1+|f-h|+|h-g|} + \int \frac{|h-g|}{1+|f-h|+|h-g|} \leq \\
&\leq \int \frac{|f-h|}{1+|f-h|} + \int \frac{|h-g|}{1+|h-g|} = \\
&= d_{\mathcal{R}}(f,h) + d_{\mathcal{R}}(h,g).
\end{aligned}$$

Esercizio 4.5. *Calcolare* $d_{\mathcal{R}}(\chi_A, \chi_B)$.

4.2 Spazi normati

La norma è una generalizzazione astratta del concetto di valor assoluto del quale conserva le proprietà fondamentali. In fisica e ingegneria essa ha il significato di intensità di una grandezza vettoriale.

Definizione 4.2. *Uno spazio normato* $(V, \|.\|)$ *è uno spazio vettoriale (non necessariamente di dimensione finita) munito di una funzione* $\|.\|\colon V \to \mathbb{R}$, *chiamata norma, che verifica:*

1. $||v|| \geq 0 \ \forall v \in V$, $||v|| = 0 \iff v = 0$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$
3. $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$.

Esempio: Sono norme sullo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$:

- $||v||_2 = ||(x_1, \dots, x_n)||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- $||v||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$
- $||v||_\infty = \max |x_i|$.

Più generalmente si può definire su $\mathbb{R}^n$ la norma-p di Minkowski:
Dato $1 \leq p < \infty$

$$||v||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}.$$

Per $p = 1$ si ha la norma $||.||_1$.
Per $p = 2$ si ha la norma $||.||_2$.
Si può dimostrare che $\lim_{p\to\infty} ||v||_p = ||v||_\infty$.

Definizione 4.3. *Uno spazio Euclideo* $(V, <,>)$ *è uno spazio vettoriale (non necessariamente di dimensione finita) munito di una funzione* $<,>\colon V \times V \to \mathbb{R}$ *(chiamata prodotto scalare) verificante:*

- $< \lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z} >= \lambda < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z} > + \mu < \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} >$ *(Bilinearità)*
- $< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} >=< \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} >$
- $< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} >\geq 0$ *e* $< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} >= 0$ *se e soltanto se* $\boldsymbol{v} = 0$

Esempio: Ogni spazio Euclideo $(V, <, >)$ è anche uno spazio normato se definiamo la norma come $||v|| = \sqrt{< v, v >}$.
Non tutti gli spazi normati sono Euclidei. Non è difficile dimostrare che la condizione necessaria e sufficiente affinché una norma derivi da un prodotto scalare e che essa abbia la proprietà del parallelogrammo

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \tag{4.1}$$

Degli spazi normati dell'esempio precedente solo $(\mathbb{R}^n, \|, \|_2)$ è Euclideo perché la norma deriva dal prodotto scalare

$$< (x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Lo spazio di funzioni continue $X = \mathcal{C}[a, b]$ è chiaramente uno spazio vettoriale infinito dimensionale. (Che X non ha dimensione finita si vede facilmente osservando che le funzioni $f_n(x) = x^n$ formano un sistema di vettori linearmente indipendenti.
Consideriamo su X le seguenti norme:

- $||f||_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$;
- $||f||_p = (\int\limits_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}$,

Esercizio 4.6. *Dimostrare che per* $p = 1, 2, \infty$, $||f||_p$ *è una norma.*

Nota Bene 4.2. $||f||_p$ *è una norma per ogni* p, $1 \leq p \leq \infty$ *ma la dimostrazione di questo fatto richiede una disuguaglianza nota come disuguaglianza di Minkowski*

Notare che nel caso $p = 2$ la norma $|| - ||_2$ deriva dal prodotto scalare.

$$< f, g >= \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Infatti $||f||_2 =< f, f >^{1/2}$.

Teorema 4.7. *Ogni spazio vettoriale normato è uno spazio metrico con la metrica* d *definita da* $d(v, w) = ||v - w||$. *La metrica* d *così costruita è invariante per traslazioni, ossia* $d(v + z, w + z) = d(v, w)$.

La dimostrazione si riduce alla verifica delle tre proprietà caratteristiche di una distanza usando le corrispondenti proprietà della norma e viene lasciata al lettore.

Esempio: $d_i(f, g)$, $i = 1, 2, \infty$ è la distanza associata a $||f||_i$, $i = 1, 2, \infty$ rispettivamente.

4.3 Proprietà fondamentali degli aperti di uno spazio metrico

Cominciamo definendo il concetto di **intorno** di un punto in uno spazio metrico. Dato un punto $x_0 \in (X,d)$, la **palla aperta** di centro x_0 e raggio $r > 0$ è l'insieme

$$B(x_0,r) = \{ x \in X \mid d(x,x_0) < r \}$$

Esempi

- Se $X = \mathbb{R}$ allora

$$B(x_0,r) = \{ x \in X \mid |x - x_0| < r \} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

- Se $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ allora
- In norma $||.||_1$, $B_1(0,r) = \{ (x_1,x_2) \mid |x_1| + |x_2| < r \}$ (un rombo);
- In norma $||.||_2$, $B_2(0,r) = \{ (x_1,x_2) \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r \}$ (un cerchio);
- In norma $||.||_\infty$, $B_\infty(0,r) = \{ (x_1,x_2) \mid \max(|x_1|,|x_2|) < r \}$ (un quadrato).

La seguente proprietà risulta fondamentale per introdurre la nozione di intorno.

Proposizione 4.2. *Sia (X,d) uno spazio metrico e $B(x,r)$ una palla aperta con centro in x. Se $z \in B(x,r)$ esiste $\delta > 0$ tale che $B(z,\delta) \subset B(x,r)$.*

Dimostrazione. Se $z \in B(x,r)$ allora $d = d(x,z) < r$. Prendiamo $\delta = r - d > 0$. Affermiamo che $B(z,\delta) \subset B(x,r)$. Infatti, se $y \in B(z,\delta)$, $d(y,z) < \delta$ quindi

$$d(y,x) \leq d(y,z) + d(z,x) < d + \delta = r$$

e quindi $y \in B(x,r)$.

□

Definizione 4.4. *Dato uno spazio metrico (X,d), un **intorno elementare** di $x \in X$, è una palla aperta $B(x,r)$ di centro x e raggio $r > 0$.*
*$N \subset X$ si dice **intorno** di x se $x \in N$ ed esiste una palla con centro in x e raggio r tale che $B(x,r) \subset N$.*

Esempio: Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $N = [2,3]$:

- $x = \frac{5}{2} \in N$, ed N è un intorno di 5/2, perché $B(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}) = (2,3) \subset N$;
- $x = \frac{8}{3} \in N$, ed N è un intorno di 8/3, $B(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{7}{3}, 3) \subset N$;
- $x = \frac{10}{3} \notin N$, e dunque N non può essere un suo intorno;
- $x = 3 \in N$, ma N non è un intorno di 3 perché nessuna palla con centro in nel punto 3 e raggio $r > 0$ è contenuta in N. Infatti, se $r > 0$ allora $B(3,r) = (3 - r, 3 + r)$ contiene il punto $3 + \frac{r}{2} \notin N$.

Possiamo facilmente concludere che N è intorno di x, $\forall x \in (2,3)$ ma non dei punti 2 e 3.

Esercizio 4.8. *Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $x_n \to x$;
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ *tale che* $\forall n \geq n_0\ d(x_n, x) < \varepsilon$;
3. *per ogni intorno elementare* $B(x, \varepsilon)$ *di* x *esiste* n_0 *tale che* $\forall n \geq n_0\ x_n \in B(x, \varepsilon)$;
4. *per ogni intorno* N *di* x *esiste* n_0 *tale che* $\forall n \geq n_0\ x_n \in N$.

Definizione 4.5. *Un sottoinsieme* U *di uno spazio metrico* (X, d) *si dice* **aperto** *se per ogni* $x \in U$ *esiste una palla aperta* $B(x, r)$ *con centro in* x *e raggio positivo interamente contenuta in* U*. In altre parole* U *è un insieme aperto se è intorno di ognuno dei suoi punti.*

La famiglia dei sottoinsiemi aperti di uno spazio metrico (X, d) si chiama **topologia**. La denoteremo con $\mathcal{T}_d$ per indicare che si tratta della topologia associata alla metrica d. Per definizione $\mathcal{T}_d = \{\, U \mid U \subset X, U \text{ aperto} \,\}$.

Teorema 4.9. *La topologia* $\mathcal{T}_d$ *di uno spazio metrico verifica le seguenti proprietà:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$;
2. *Se* $(U_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathcal{T}_d$ *allora* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}_d$*, ossia qualsiasi unione di insiemi aperti è un insieme aperto;*
3. *Se* $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_d$ *allora* $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}_d$*, ossia l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.*

Dimostrazione.

1. Banalmente $\emptyset$ verifica la definizione 4.5 semplicemente perché non ci sono $x \in \emptyset$. Lo spazio X è aperto perché per ogni $x \in X$, $B(x, 1) \subset X$. Quindi X e $\emptyset$ sono aperti.
2. Sia $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ e sia $x \in U$ allora esiste α_0 tale che $x \in U_{\alpha_0}$. Poiché U_{α_0} è aperto esiste $B(x, \delta) \subset U_{\alpha_0} \subset U$. Si è così trovato un intorno elementare di x contenuto in U.
3. Sia $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ allora per ogni $i, 1 \leq i \leq n$, $x \in U_i$. Poiché U_i è aperto, per ogni $i, 1 \leq i \leq n$, esiste un $r_i > 0$ tale che $B(x, r_i) \subset U_i$. Sia $r = \min(r_1, \dots, r_n) > 0$. Poiché $r < r_i\ \forall i$, si ha che $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset U_i$ per ogni i. Quindi $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ e ciò dimostra che $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ è aperto.

□

Abbiamo un'utile descrizione degli aperti di uno spazio metrico:

Proposizione 4.3. *In ogni spazio metrico* (X, d)*,* U *è aperto se e solo se* U *è un'unione di palle aperte (o intorni elementari).*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) La prima cosa da osservare è che per la Proposizione 4.2 risulta immediatamente che in uno spazio metrico la palla aperta $B(x, r)$ è un insieme aperto per ogni $x \in X$ e $r > 0$. Quindi, se $V = \bigcup_{\alpha \in A} B(x_\alpha, \delta_\alpha)$ allora V è aperto perché unione di aperti.
($\Rightarrow$) Reciprocamente se U è un aperto $\forall x \in U$ possiamo trovare una palla $B(x, \delta_x) \subset U$. Ma allora

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, \delta_x).$$

□

4.4 Spazi topologici

La topologia è nata nel primo novecento. I matematici hanno codificato sotto il nome di topologia (studio dei luoghi) una serie di proprietà che non avevano bisogno delle considerazioni metriche per essere formulate (conosciute già dal settecento e studiate da Eulero, Gauss, Riemann e molti altri). Il nome topologia è dovuto a Felix Hausdorff che ha anche provveduto a formularne gli assiomi fondamentali sulla base della, allora recente, teoria degli insiemi di Georg Cantor.

Definizione 4.6. *Uno* **spazio topologico** $(X, \mathcal{T})$ *è un insieme* X *con una famiglia* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ *di sottoinsiemi di* X *che verifica le proprietà (1), (2) e (3) del Teorema 4.9. La famiglia* $\mathcal{T}$ *si chiama* ***topologia*** *mentre gli elementi di* $\mathcal{T}$ *si dicono* ***aperti*** *dello spazio topologico* X.

Il Teorema 4.9 della sezione precedente ci dice che ogni spazio metrico possiede una topologia $\mathcal{T}_d$, i cui aperti sono definiti da 4.5 (è molto importante ricordare la definizione 4.5 degli aperti della topologia $\mathcal{T}_d$ associata ad una metrica).
Quindi, ogni spazio metrico è anche uno spazio topologico. Ma non è vero che ogni spazio topologico possiede una metrica. Ci sono topologie che non possono essere della forma $\mathcal{T}_d$ con d una distanza su X.

Esempio: Uno stesso insieme X può avere molte topologie diverse. La topologia più grande definibile su un insieme X è la topologia $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{P}(X)$, i cui aperti sono tutti i sottoinsiemi di X. Infatti, $\mathcal{P}(X)$ verifica banalmente le tre proprietà di una topologia.
Dimostreremo ora che la topologia $\mathcal{T}_{dis}$ è associata ad una metrica su X. Ossia che esiste una metrica d su X tale che $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{T}_d$. Per questo consideriamo l'insieme X con la metrica discreta

$$d_{dis}(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}.$$

Per ogni $x \in X$ abbiamo che $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$, e dunque per ogni x, $\{x\}$ è un insieme aperto di $\mathcal{T}_{d_{dis}}$. Poiché per ogni sottoinsieme A di X

$$A = \cup_{x \in A} \{x\}$$

risulta che ogni $A \subset X$ è un insieme aperto di $\mathcal{T}_{d_{dis}}$ perché, per la proprietà (3) di una topologia, l'unione qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto. Quindi $\mathcal{T}_{d_{dis}} = \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_{dis}$.

La topologia $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{P}(X)$ si chiama **topologia discreta**.
La più piccola topologia che si possa definire su un insieme X è la topologia $\mathcal{T}_{ind} = \{ \emptyset, X \}$ che ha solo due aperti: l'insieme X e l'insieme vuoto. $\mathcal{T}_{ind}$ si chiama **la topologia indiscreta**. E' immediato verificare che $\mathcal{T}_{ind}$ è una topologia. Ma vedremo che non esiste alcuna metrica su X tale che $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{ind}$ se X ha almeno due elementi.
Infatti, la topologia $\mathcal{T}_d$ di uno spazio metrico (X, d) gode di una proprietà speciale detta **proprietà di separazione di Hausdorff**: dati due punti $x, y \in X$ con $x \neq y$ esistono due insiemi aperti U, V tali che $x \in U,\ y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Per dimostrare che ogni spazio metrico (X, d) verifica la proprietà di separazione di Hausdorff dati $x, y \in X$ $x \neq y$ basta prendere $U = B(x, \delta)$ e $V = B(y, \delta)$ con $\delta = d(x, y)/2$. Osserviamo che se card $X \geq 2$, allora $\mathcal{T}_{ind}$ non ha la proprietà di Hausdorff e quindi $(X, \mathcal{T}_{ind})$ è uno spazio topologico ma non è uno spazio metrico.

Esercizio 4.10. *Quante topologie possono essere definite su un insieme di quattro elementi?*

Esercizio 4.11. *Sia* $X = \mathbb{R}$ *con la metrica* $d(x, y) = |x - y|$. *Dimostrare che* U *è aperto di* $(\mathbb{R}, d)$ *se e solo se* $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ *(unione disgiunta) ossia* U *è unione numerabile di aperti disgiunti.*

Suggerimento: per ogni $x \in U$ sia $V_x = (a_x, b_x)$ il più grande intervallo aperto tale che $x \in V_x \subset U$. Dimostrare che se $V_x \cap V_y \neq \emptyset$ allora $V_x = V_y$.

Esercizio 4.12. *Dimostrare che le tre norme* $|| - ||_i,\ i = 1, 2, \infty$ *su* $X = \mathbb{R}^n$ *hanno gli stessi insiemi aperti.*

Nota Bene 4.3. *Dimostreremo più tardi che tutte le norme su* $\mathbb{R}^n$ *hanno gli stessi insiemi aperti. Dunque, quando parliamo della topologia dello spazio* $\mathbb{R}^n$, *non abbiamo bisogno di precisare la norma considerata.*

Esempio:
Se consideriamo $X = \mathbb{R}^2$ con la topologia indotta dalla norma due (per esempio). L'insieme

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x > 0,\ y \geq 0 \}$$

non è aperto perché non è intorno di nessuno dei punti che stanno sulla retta $y = 0$.
Mentre l'insieme $U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x > 0,\ y > 0 \}$ è aperto.(Dimostrarlo!)
Qualsiasi insieme U della $U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ a_i x + b_i y + c_i > 0,\ 1 \leq i \leq k \}$ è un aperto del piano. In generale, un insieme definito un numero finito di disuguaglianze lineari strette è un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 4.13. *Nello spazio normato* $(\mathcal{C}[0, 1], ||.||_\infty)$ *consideriamo l'insieme*

$$A = \{ f \in \mathcal{C}[0, 1] \ \mid \ f(x) > 0\ \forall x \}.$$

Dimostrare che A *è aperto. Suggerimento: usare il teorema di Weierstrass(della esistenza dei massimi e minimi).*

Esercizio 4.14. *Definiamo* $\mathbb{R}$ *la* **topologia dell'ordine** $\mathcal{T}_{\leq}$ *che ha come aperti l'insieme vuoto, tutta la retta e gli insiemi della forma* $(a, +\infty), a \in \mathbb{R}$.
Dimostrare che $\mathcal{T}_{\leq}$ *è una topologia che non deriva da una metrica su* $\mathbb{R}$.

4.5 Topologia relativa

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $Y \subset X$ un suo sottoinsieme. La **topologia relativa** di Y indotta dalla topologia di X ha come aperti la famiglia $\mathcal{T}_Y$ di sottoinsiemi di Y che sono intersezioni di Y con qualche aperto U di X.
Più precisamente,

$$\mathcal{T}_Y = \{ V \mid V = U \cap Y \mid U \in \mathcal{T} \} .$$

Lo spazio topologico $(Y, \mathcal{T}_Y)$ è detto **sottospazio** di X.
E' facile vedere che se (X, d) è uno spazio metrico e $Y \subset X$ allora la topologia relativa su Y indotta dalla topologia metrica $\mathcal{T}_d$ su X coincide con la topologia della metrica d_Y, restrizione della metrica d ad Y.
La topologia relativa ha qualche aspetto poco intuitivo.

Esempio: Consideriamo lo spazio $X = \mathbb{R}^2$, con la topologia indotta da una qualsiasi delle metriche studiate in precedenza. Ad esempio d_2 e consideriamo il sottospazio $Y = \{ (x, y) \mid y \geq 0 \}$ con la topologia relativa. Allora l'insieme $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x > 0, \ y \geq 0 \}$ contenuto nel semipiano Y non è né chiuso né aperto in $\mathbb{R}^2$ ma è un sottoinsieme aperto di $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Perché?

Esercizio 4.15. *i) Descrivere gli aperti dello spazio* $Y = (-\infty, 0] \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *che non sono aperti di* $\mathbb{R}$.
ii) Idem con $Y \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid, \ y \leq 0 \} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y = 1/n, \, n \in \mathbb{N} \}$.

Esercizio 4.16. *Dimostrare che se* Y *è un aperto di* X *allora* $V \subset Y$ $\mathcal{T}_Y$ *se e soltanto se* V *è un sottoinsieme di* Y *aperto in* X.

4.6 Chiusi, chiusura, interno e bordo

Un sottoinsieme C di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice **chiuso** se il suo complemento è aperto. Quindi C è chiuso se e soltanto se $C^c \in \mathcal{T}$. Usando le leggi di De Morgan e le proprietà $(1), (2), (3)$ di $\mathcal{T}$ si dimostra facilmente che:

1. X e $\emptyset$ sono chiusi (essendo uno il complementare dell'altro sono entrambi sia chiusi che aperti);

2. intersezione qualsiasi di chiusi è un insieme chiuso;

3. unione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

Queste tre proprietà caratterizzano lo spazio X. Infatti uno spazio topologico può essere alternativamente definito specificando la famiglia $\mathcal{C}$ dei suoi sottoinsiemi chiusi verificante le proprietà descritte sopra.

Esercizio 4.17. *Sia* $(X, \mathcal{T})$ *uno spazio topologico e sia* $Y \subset X$. *Dimostrare che un sottoinsieme* $C \subset Y$ *è un chiuso di* Y *nella topologia relativa di* Y *se e soltanto se esiste un sottoinsieme chiuso* C' *di* X *tale che* $C = C' \cap Y$.

Esercizio 4.18. *Dimostrare che se* Y *è un chiuso di* X *allora* $C \subset Y$ *è chiuso nella topologia relativa se e soltanto se* C *è un sottoinsieme di* Y *chiuso in* X.

Se (X, d) è uno spazio metrico sappiamo che $B(x, r) = \{ y \in X \mid d(x, y) < r \}$ è un sottoinsieme aperto di X per ogni $r > 0$. Dimostriamo ora:

Proposizione 4.4. $\bar{B}(x, r) = \{ y \in X \mid d(x, y) \leq r \}$ *è un sottoinsieme chiuso di* X *per ogni* $r \geq 0$

Dimostrazione. Basta verificare che $\bar{B}(x, r)^c$ è aperto.
Se $y \in \bar{B}(x, r)^c$ allora $d(x, y) > r$. Sia $\delta = d(x, y) - r$. Se $z \in B(y, \delta)$ allora $d(z, y) < \delta$ Per la proprietà triangolare della distanza si ha $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ cioè $d(x, z) \geq d(x, y) - d(z, y)$. Quindi, $d(x, z) > d(x, y) - \delta = r$ ossia $d(x, z) > r$ e per tanto $z \notin B(x, r)$. Questo dimostra che $B(y, \delta) \subset \bar{B}(x, r)^c$, e quindi $\bar{B}(x, r)^c$ è aperto. $\square$

Definizione 4.7. *Se* $A \subset X$ *è un sottoinsieme di uno spazio topologico* X *si chiama* ***chiusura*** *di* A *il più piccolo insieme chiuso di* X *contenente* A*. La chiusura di* A *si denota con* $\bar{A}$*.*

Proposizione 4.19. *Sia* $\mathcal{C}_A$ *la famiglia di tutti gli sottoinsiemi chiusi di* X *contenenti l'insieme* A*. Allora*

$$\bar{A} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_A} C.$$

Dimostrazione. Sia $\bar{C} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_A} C$. L'insieme $\bar{C}$ è chiuso perché è una intersezione di insiemi chiusi. Inoltre $A \subset \bar{C}$ perché $A \subset C$ per ogni $C \in \mathcal{C}$. Se C' è un qualsiasi insieme chiuso che contiene A allora $\bar{C} \subset C'$ perché $C' \in \mathcal{C}$. Quindi $\bar{C}$ è il più piccolo insieme chiuso di X contenente A. Per definizione di chiusura di un insieme $\bar{C} = \bar{A}$. $\square$

Definizione 4.8. *Se* $(X, \mathcal{T})$ *è uno spazio topologico e* $A \subset X$ *è un sottoinsieme di* X *si chiama* ***interno*** *di* A *(e si indica* $\mathring{A}$*) il più grande insieme aperto di* X *contenuto in* A*.*

Un argomento analogo a quello di sopra dimostra che

$$\mathring{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{T},\ U \subset A} U.$$

Chiameremo **bordo** di A l'insieme $\partial A = \bar{A} \cap \bar{A^c}$ L'**esterno** di A è per definizione l'interno del complemento di A.

Esercizio 4.20. *Dimostrare che* $(\mathring{A})^c = \bar{A^c}$.

Esercizio 4.21. *Dimostrare che per ogni spazio topologico* X *e per ogni sottoinsieme* $A \subset X$ *si ha*

$$X = \mathring{A} \cup \partial A \cup \mathring{A^c}.$$

Inoltre gli insiemi $\mathring{A}, \partial A, \mathring{A^c}$ *sono due a due disgiunti.*

Teorema 4.22 (Proprietà dell'operazione chiusura)**.** *Se* $(X, \mathcal{T})$ *è uno spazio topologico e se* $A \subset X$ *è un sottoinsieme di* X *allora*

1. $A \subset \bar{A}$;

2. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$*, in particolare* A *è chiuso se e solo se* $A = \bar{A}$;

3. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

4. $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

Dimostrazione. 1. E' ovvio per definizione.

2. $\bar{A}$ è chiuso ma allora la chiusura dell'insieme chiuso $\bar{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene $\bar{A}$ ossia esso stesso. Quindi $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

3. Sappiamo che $A \subset \bar{A}$, $B \subset \bar{B}$ e quindi $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. Ma unione finita di chiusi è chiusa e dunque $\bar{A} \cup \bar{B}$ è chiuso. Si ha dunque che $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ perché $\overline{A \cup B}$ è il più piccolo chiuso contente $A \cup B$. Inoltre, poiché $A \subset \overline{A \cup B}$, abbiamo che $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ e analogamente $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Quindi, $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. Questo dimostra l'uguaglianza dei due insiemi.

□

Esiste un teorema analogo per l'operazione "interno" la cui dimostrazione è lasciata al lettore per esercizio.

Teorema 4.23 (Proprietà dell'operazione interno)**.** *Nelle ipotesi del teorema precedente si ha che:*

1. $\mathring{A} \subset A$;

2. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$, *in particolare* A *è aperto se o solo se* $A = \mathring{A}$;

3. $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Non è vere in genere $(A \overset{\circ}{\cup} B) = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, né che $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Si consideri ad esempio i numeri razionali ed irrazionali della retta.

Esercizio 4.24. *Dimostrare che* $\partial A = \emptyset$ *se e soltanto se* A *è tanto chiuso come aperto in* X.

Esercizio 4.25. *Dimostrare che se* $D \subset X$ *è tale che* $\bar{D} = X$ *allora, per ogni insieme aperto* U *di* X *si ha che* $D \bar{\cap} U = \bar{U}$.

5 Topologia degli spazi metrici

5.1 Chiusura e punti d'aderenza di un insieme

Le operazioni chiusura, l'interno e bordo di un insieme vengono definite per ogni spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ ma nel caso di uno spazio (X, d) metrico esse ammettono una caratterizzazione più intuitiva in termini di convergenza di successioni che andremo qui a studiare.

Dato uno spazio metrico (X, d) ed un insieme $A \subset X$, si dice che x è un **punto di aderenza** di A se ogni intorno elementare $B(x, \varepsilon)$ di x contiene punti di A. Quindi x è un punto d'aderenza di A se $\forall \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
Si dice che x è **interno** ad A se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset A$ cioè se A è un intorno di x. Diremo che un punto $x \in X$ è **esterno** ad A se x è interno a A^c. Ogni punto di A è un punto di aderenza ad A e ogni punto interno deve appartenere all'insieme A. Si noti che un punto esterno ad A non è mai un punto d'aderenza all'insieme A.

Esercizio 5.1. *Dimostrare che*
1) x è un punto di aderenza di A se e soltanto se per ogni intorno N di x $N \cap A \neq \emptyset$;
2) x è un punto interno di A se e soltanto se esiste un intorno N di x tale $N \subset A \neq \emptyset$.

I punti di aderenza di un insieme si possono caratterizzare agevolmente in termini di convergenza di successioni.

Definizione 5.1. *Diremo che una successione (x_n) di elementi di uno spazio metrico (X, d)* **converge** *ad un elemento $x \in X$ (simbolicamente $x_n \longrightarrow x$) se la successione numerica $d(x_n, x) \longrightarrow 0$.*

Esercizio 5.2. *Dimostrare che se $x_n \longrightarrow x$ e $x_n \longrightarrow y$ allora $x = y$.*

Esercizio 5.3. *Dimostrare che una successione (x_n) di elementi di X converge ad x se e soltanto se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in B(x, \varepsilon)$ per ogni $n > n_0$.*

Esercizio 5.4. *Come si potrebbe definire la convergenza in uno spazio topologico generale $(X, \mathcal{T})$? Che cosa bisognerebbe richiedere allo spazio topologico per avere l'unicità del limite? Suggerimento: provare con la topologia indiscreta.*

Teorema 5.5. *x è un punto di aderenza ad A se e solo se esiste una successione $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in A$ tale che $x_n \longrightarrow x$.*

Dimostrazione. Se x è di aderenza ad A, presa $B(x, \frac{1}{n})$ esiste $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. Allora $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ e quindi $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$. Così abbiamo trovato una successione tale che $x_n \to x$.
Reciprocamente se $x_n \in A$, $x_n \longrightarrow x$ allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 :$ $\forall n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Quindi $x_n \in A$ e $x_n \in B(x, \varepsilon)$, ossia $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
$\square$

Dunque i punti di aderenza possono essere visti come limiti di successioni di punti di A.

Vediamo ora che l'insieme $A_{ad} = \{\, x \mid x \text{ è } \textit{aderente ad } A \,\}$ di tutti i punti di aderenza ad A altro non è che la chiusura $\bar{A}$ dell'insieme A.
Dimostriamo prima due lemmi:

Lemma 5.6. *A_{ad} è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Se $y \notin A_{ad}$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(y, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Per la Proposizione 4.2 per ogni $z \in B(y, \varepsilon)$ esiste $B(z, \delta) \subset B(y, \varepsilon)$ e quindi $B(z, \delta) \cap A = \emptyset$.
Ma allora nessun $z \in B(y, \varepsilon)$ appartiene a A_{ad} e dunque $B(y, \varepsilon) \subset A^c_{ad}$. Ne segue che A^c_{ad} è aperto e A_{ad} è chiuso.

□

Esercizio 5.7. *Dimostrare il lemma precedente usando la caratterizzazione 5.5 dei punti di aderenza di A come limiti di successioni di A.*

Lemma 5.8. *Se A è chiuso e $x_n \in A$, $n \geq 1$ e $x_n \longrightarrow x$ allora $x \in A$.*

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che $x \notin A$ e quindi $x \in A^c$. Poiché A^c è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset A^c$. Quindi $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, contraddicendo $x_n \longrightarrow x$. □

Teorema 5.9. $A_{ad} = \bar{A}$.

Dimostrazione. Sappiamo che A_{ad} è un insieme chiuso e che $A \subset A_{ad}$. Poiché $\bar{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene A necessariamente $\bar{A} \subset A_{ad}$.
Reciprocamente se $x \in A_{ad}$ esiste $x_n \in A$ tale che $x_n \longrightarrow x$. Ma $x_n \in A \subset \bar{A}$ e $x_n \longrightarrow x$. Poiché $\bar{A}$ è chiuso per il secondo lemma $x \in \bar{A}$.
Abbiamo dimostrato che ogni $x \in A_{ad}$, appartiene a $\bar{A}$. Dunque $A_{ad} \subset \bar{A}$.
Ne segue che $A_{ad} = \bar{A}$.

□

Corollario 5.10. *$x \in \bar{A}$ se e soltanto se esiste una successione (x_n) di elementi di A tale che $x_n \longrightarrow x$.*

Corollario 5.11. *Un sottoinsieme A di uno spazio metrico (X, d) è chiuso in X se e soltanto se il limite di ogni successione di elementi di A appartiene ad A.*

Esercizio 5.12. *Dimostrare che $A_{int} = \{\, x \mid x \text{ è } \textit{interno ad } A \,\} = \mathring{A}$ e che $A_{est} = \{\, x \mid x \text{ è } \textit{esterno ad } A \,\} = \mathring{A^c}$*

Esercizio 5.13. *Dimostrare che un punto $x \in (X, d)$ appartiene al bordo di un sottoinsieme A se e soltanto se per ogni $\varepsilon > 0$ la palla $B(x, \varepsilon)$ ha intersezione non vuota sia con A sia con A^c.*

Esempio: Vediamo che ogni punto aderente all'insieme

$$A = \{\, (x, y) \mid x = 0 \,\} \cup \{\, (x, y) \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \,\}$$

del piano R^2, appartiene ad A. Per il Teorema 5.9 basta verificare che A^c è aperto. Quindi, per ogni $(x, y) \in B$ bisogna trovare una palla $B(x, \varepsilon)$ contenuta in A^c. Se $(x, y) \in A^c$ e $x < 0$ basterà prendere $\varepsilon = \|x\|_2$, se $x > 1$ basterà prendere $\varepsilon = \|x\|_2 - 1$. Se invece $0 < x < 1$, avremo $\frac{1}{n_0} < x < \frac{1}{n_0 - 1}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$. In questo caso prendendo $\varepsilon = \min(|x - \frac{1}{n_0}|, |x - \frac{1}{n_0-1}|)$ avremo che $B(x, \varepsilon) \subset A^c$. Ne segue che A è chiuso e quindi $\bar{A} = A$.

Esercizio 5.14. *Dimostrare l'affermazione di sopra usando la caratterizzazione di chiusi nel Corollario 5.11.*

Esempio: Nello spazio $X = \mathbb{R}$ con la metrica $d(x, y) = |x - y|$ consideriamo l'insieme $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Osserviamo che $\frac{1}{\sqrt{2}} \notin A$ ma usando il fatto che fra due numeri reali distinti esiste sempre un numero razionale è facile (lo si faccia!) costruire una successione crescente $q_1 < q_2 < \dots q_n \dots$ tale che per ogni n $q_n \in A$ e $q_n \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi $\frac{1}{\sqrt{2}} \notin A$ ma $\frac{1}{\sqrt{2}} \in \bar{A}$.

Esercizio 5.15. *Dimostrare che* $\bar{A} = [0, 1]$.

Esercizio 5.16. *Dimostrare che se (X, d) è uno spazio metrico e (x_n) è una successione tale che $x_n \longrightarrow x$, allora*

$$\overline{\{ x_n \}} = \{ x_n \} \cup \{ x \} .$$

Abbiamo visto che in ogni spazio metrico la palla chiusa $\bar{B}(x, r) = \{ y \mid d(x, y) \leq r \}$, è un insieme chiuso. Per definizione, la chiusura della palla aperta $\overline{B(x, r)}$ è contenuta nella palla chiusa $\bar{B}(x, r)$. Però ci sono spazi metrici dove $\overline{B(x, r)} \neq \bar{B}(x, r)$.

Esempio: Consideriamo (X, d_{disc}) con $\operatorname{card} X \geq 2$. In questo spazio metrico $B(x, 1) = \{ y \mid d_{disc}(x, y) < 1 \} = \{ x \}$, Essendo $\{ x \}$ un insieme chiuso

$$\overline{B(x, 1)} = \overline{\{ x \}} = \{ x \} .$$

D'altro canto $\bar{B}(x, 1) = \{ y \mid d_{disc}(x, y) \leq 1 \} = X$. Possiamo quindi concludere che se l'insieme X ha più di un punto allora

$$\overline{B(x, 1)} \neq \bar{B}(x, 1).$$

Invece quando la metrica è abbastanza regolare la palla chiusa coincide con la chiusura della palla aperta dello stesso raggio. Infatti:

Teorema 5.17. *In* $(\mathbb{R}^n, ||.||_2)$ *vale* $\overline{B(x, r)} = \bar{B}(x, r)$.

Dimostrazione. Come detto in precedenza vale $\overline{B(x, r)} \subset \bar{B}(x, r)$ quindi basta dimostrare che $\overline{B(x, r)} \supset \bar{B}(x, r)$. Per fare ciò per ogni $y \in \bar{B}(x, r)$ cerchiamo una successione $y_n \in B(x, r)$ tale che $y_n \longrightarrow y$.
Senza perdere generalità possiamo supporre che $x = 0$ e $r = 1$. Se $y \in \bar{B}(0, 1)$ o $||y|| < 1$ ed in tal caso $y \in B(0, 1)$. e possiamo prendere la successione costante $y_n = y \, \forall n$ oppure $||y|| = 1$ ed in questo caso si può prendere $y_n = (1 - \frac{1}{n})y$. Avremo allora $||y_n|| = |1 - \frac{1}{n}| ||y|| < 1$. Quindi $y_n \in B(0, 1)$ e chiaramente $y_n \longrightarrow y$. □

Esercizio 5.18. *Determinare l'interno il bordo e la chiusura dell'insieme di Cantor.*

5.2 Mappe continue tra spazi topologici e tra spazi metrici

Ricordiamo che funzione o mappa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è **continua** in x se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \, \text{tale che } x' \in B(x, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x') \in B(f(x), \varepsilon).$$

Equivalentemente f è continua in x se per ogni $x_n \longrightarrow x$ si ha che $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. La funzione si dice continua se è continua in ogni punto del suo dominio. Osservare che entrambe le formulazioni del concetto di continuità si generalizzano immediatamente a mappe fra spazi metrici con esattamente la stessa formulazione. Procederemo in modo leggermente diverso per definire la continuità di funzioni fra spazi topologici. Vedremo anche che ritroveremo la nozione a noi familiare nel caso degli spazi metrici.

Definizione 5.2. *Siano,$(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ due spazi topologici. Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice continua se la controimmagine di ogni insieme aperto di Y è un aperto di X.*

$$f \text{ è continua} \iff \forall V \in \mathcal{T}' \ f^{-1}(V) \in \mathcal{T} \tag{5.1}$$

Nel teorema seguente confrontiamo varie formulazioni equivalenti del concetto di continuità.

Teorema 5.19. *Siano $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ una funzione.*
$i)$ Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(a) per ogni V aperto di Y $f^{-1}(V)$ è aperto in X (cioè f e continua);

(b) per ogni C chiuso di Y $f^{-1}(C)$ è chiuso in X;

(c) per ogni $A \subset X$ $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;

$ii)$ Inoltre se (X, d), (Y, d') sono spazi metrici allora le tre affermazioni del punto $i)$ sono anche equivalenti a:

(d) se $x_n \longrightarrow x$ allora $f(x_n) \longrightarrow f(x)$;

(e) $\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :\ f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di $(a) \iff (b)$ è immediata usando il fatto che C è chiuso se e soltanto se C^c è aperto e che $(f^{-1}(C))^c = f^{-1}(C^c)$.
Vediamo che $(b) \Rightarrow (c)$. Per definizione di chiusura di un insieme $\overline{f(A)}$ è chiuso e $f(A) \subset \overline{f(A)}$. Prendendo l'immagine inversa otteniamo

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Per il punto (b), $f^{-1}(\overline{f(A)})$ è chiuso e contiene A. Quindi

$$\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Applicando la f risulta

$$f(\bar{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}.$$

Dimostriamo ora che $(c) \Rightarrow (b)$.

Sia $C \subset Y$ un insieme chiuso. Verifichiamo che $D = f^{-1}(C)$ è anch'esso chiuso. Basta dimostrare che $D = \bar{D}$ e poichè vale sempre che $D \subset \bar{D}$, basta dimostrare che $\bar{D} \subset D$. Poiché C è chiuso, sappiamo che $C = \bar{C}$ e per la (c) si ha che $f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subset \bar{C} = C$. Prendendo f^{-1} di entrambi membri risulta

$$\bar{D} = \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}[f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right)] \subset f^{-1}(C) = D.$$

Dunque $D = f^{-1}(C)$ è chiuso.

Supponiamo ora che X e Y siano spazi metrici e dimostriamo $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$. Così avremo stabilito l'equivalenza di tutte le cinque affermazioni. Prima di tutto dimostriamo il seguente lemma:

Lemma 5.20. *Sia (x_n) una successione in uno spazio metrico (X, d). Se (x_n) non converge a x allora esiste $\varepsilon > 0$ ed una sottosuccessione (x_{n_k}) di (x_n) tale che $d(x_{n_k}, x) > \varepsilon$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che (x_n) non converge a x equivale a

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall n \ \exists m > n \ \textit{per cui} \ d(x_m, x) > \varepsilon.$$

Prendiamo un n_1 tale che $d(x_{n_1}, x) > \varepsilon$. Poiché (x_n) non converge a x, dato n_1 esiste $n_2 > n_1$ tale per cui $d(x_{n_2}, x) > \varepsilon$ e ripetendo il ragionamento si trovano $n_1 < n_2 < \dots$ tali che $d(x_{n_k}, x) > \varepsilon$. Quindi (x_{n_k}) è la sottosuccessione desiderata.

$\square$

Dimostriamo ora che $(c) \Rightarrow (d)$. Prendiamo una successione (x_n) tale che $x_n \longrightarrow x$. Supponiamo per assurdo che $f(x_n)$ non converga a $f(x)$. Poiché $f(x_n)$ non converge a $f(x)$, per il lemma precedente, esiste $\varepsilon > 0$ ed una sottosuccessione $(f(x_{n_k}))$ della successione $(f(x_n))$ tale che $d(f(x_{n_k}), f(x)) > \varepsilon$. Poiché $x_n \longrightarrow x$ abbiamo anche che $x_{n_k} \longrightarrow x$.
Sia $A = \{ x_{n_k} \}$. Risulta $x \in \bar{A}$ ma $f(x) \notin \overline{f(A)}$ perché $d(f(x_{n_k}), f(x)) > \varepsilon$ e quindi $B(f(x), \varepsilon) \cap f(A) = \emptyset$. Dunque $f(\bar{A}) \not\subseteq \overline{f(A)}$ il che contraddice (c).

Dimostriamo $(d) \Rightarrow (e)$. Supponiamo per assurdo che esista un $x \in X$ tale che f non sia continua in x. Allora deve esistere un $\varepsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ $f(B(x, \delta)) \not\subseteq B(f(x), \varepsilon)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ prendiamo $\delta = \frac{1}{n}$. Poichè $f(B(x, \frac{1}{n})) \not\subseteq B(f(x), \varepsilon)$ deve esistere un $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ tale che $f(x_n) \notin B(f(x), \varepsilon)$. Avremo così $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$. Ciò vuol dire che, per $n \to \infty$, $d(x_n, x) \longrightarrow 0$. Quindi $x_n \longrightarrow x$ ma $f(x_n)$ non converge a $f(x)$ il che contraddice (d).

Finalmente dimostriamo che $(e) \Rightarrow (a)$. Sia $x \in f^{-1}(V) = U$ allora $f(x) \in V$. Siccome V è aperto esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(f(x), \varepsilon) \subset V$. Per (e) esiste un $\delta > 0$ tale che $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Quindi

$$B(x, \delta) \subset f^{-1}[B(f(x), \varepsilon)] \subset f^{-1}(V) = U.$$

Ciò dimostra che U è aperto.

□

Esempi

- Consideriamo i sottoinsiemi $\{\, x \mid |x| > a \,\}$ e $\{\, x \mid |x| \geq a \,\}$ di $\mathbb{R}$. Il primo è aperto ed il secondo è chiuso. Questo si può dimostrare direttamente usando la definizione di aperto e chiuso ma anche usando il fatto che la funzione $f(x) = |x|$ è continua. Prima di tutto verifichiamo la continuità della funzione f usando una nota disuguaglianza che si deduce facilmente dalla proprietà triangolare del valore assoluto (la si dimostri!):

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \tag{5.2}$$

  Si supponga ora che $x_n \longrightarrow x$ e quindi $|x_n - x| \longrightarrow 0$. Poichè $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$ anche $||x_n| - |x|| \longrightarrow 0$ e quindi $|x_n| \longrightarrow |x|$.Ciò dimostra che $f(x) = |x|$ è continua.

  Alternativamente, si può usare la (5.2) per verificare la (e).

  Osserviamo che l'insieme $\{\, x \mid |x| > a \,\}$ coincide con $f^{-1}(a, +\infty)$. Essendo $(a, +\infty)$ aperto per la (a) deve essere aperto anche $\{\, x \mid |x| > a \,\}$. Analogamente, $\{\, x \mid |x| \geq a \,\}$ è chiuso perché $\{\, x \mid |x| \geq a \,\} = f^{-1}[a, +\infty)$ ed è quindi la controimmagine di un insieme chiuso.

- Sia $\{\, x \mid \sin x > \cos x \,\}$, l'insieme è aperto. Infatti, la funzione $f(x) = \sin x - \cos x$ è continua dunque

$$\{\, x \mid \sin x > \cos x \,\} = \{\, x \mid \sin x - \cos x > 0 \,\} = f^{-1}((0, +\infty)),$$

  ossia controimmagine di un aperto. Più generalmente è aperto ogni insieme definito da una disuguaglianza stretta tra funzioni f, g continue.

Esercizio 5.21. *Dimostrare che la composizione di due mappe continue è continua*

Esercizio 5.22. *Sia $f\colon X \to Y$ una mappa fra due spazi topologici e sia $Z = \operatorname{Im} f$ munito della topologia relativa. Dimostrare che $f\colon X \to Y$ è continua se e soltanto se $\bar{f}\colon X \to Z$, definita da $\bar{f}(x) = f(x)$ è continua.*

Esercizio 5.23. $i)$ *Dimostrare che se f, g sono continue allora l'insieme $\{\, x \mid f(x) \leq g(x) \,\}$ è chiuso.*
$ii)$ *Dimostrare che se $f_i,\ g_i,\ 1 \leq i \leq n$, sono continue allora l'insieme*

$$\{\, x \mid f_i(x) < g_i(x), 1 \leq i \leq n \,\}$$

è aperto. E se l'insieme è definito da disuguaglianze strette fra due famiglie numerabili di funzioni? Dare esempi.

Esercizio 5.24. *Si numerino i numeri razionali $\mathbb{Q} = \{\, q_1, \ldots, q_n, \ldots \}$. Si definisce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Irr \\ 1/n & x = q_n \end{cases}.$$

Dimostrare che f è continua in ogni numero irrazionale e discontinua solo se $x \in \mathbb{Q}$.

Proposizione 5.1. *Siano x, y, z tre punti di uno spazio metrico (X, d), allora vale*

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y). \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza triangolare $d(y,z) \leq d(x,z) + d(x,y)$ e anche $d(x,z) \leq d(y,z) + d(x,y)$. Sottraendo $d(x,z)$ ad entrambi membri della prima e $d(y,z)$ della seconda abbiamo $d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y)$ e anche $-(d(y,z) - d(x,z)) \leq d(x,y)$. Quindi $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$. $\square$

Se $X = V$, uno spazio vettoriale, poichè $\|x\| = d(x,0)$ prendendo $z = 0$ nella (5.3) otteniamo

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \tag{5.4}$$

Il che ci restituisce la (5.2) nel caso $V = \mathbb{R}$

Definizione 5.3. *Una mappa $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ si dice* ***lipschitziana*** *di costante Lipschitz k se*

$$d'(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y).$$

La mappa f si dice ***contrazione*** *se $k < 1$, f si dice* ***non espansiva*** *se $k = 1$.*

Definizione 5.4. *Una mappa $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ si dice* ***uniformemente continua*** *se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ se } d(x,y) < \delta.$$

La definizione di funzione uniformemente continua si può riformulare come segue: f è uniformemente continua se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)\ \forall x \in X.$$

Da qui risulta che ogni funzione uniformemente continua è continua.
Notare la sottile differenza con la (e). Se f è continua per ogni x si trova un δ tale che $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$ ma in genere δ dipende da x. La mappa f risulta uniformemente continua se δ non dipende da x.

Proposizione 5.25. *Ogni mappa lipschitziana è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Si vuole dimostrare che f è uniformemente continua, ossia $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ se } d(x,y) < \delta.$$

Poiché f è lipschitziana, esiste un $k > 0$ tale che $d'(f(x), f(y)) \leq k d(x,y)$. Allora dato $\varepsilon > 0$ basta prendere $\delta = \frac{1}{k}\varepsilon$ e otteniamo che per ogni coppia (x,y) tale che $d(x,y) < \delta$, si ha

$$d'(f(x), f(y)) \leq k d(x,y) < k\delta = \varepsilon.$$

$\square$

Proposizione 5.26. *Dato uno spazio metrico* (X, d) *e un punto* $x_0 \in X$*, la funzione* $\varphi \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita da* $\varphi(x) = d(x, x_0)$ *è uniformemente continua (ed in particolare continua).*

Dimostrazione. Discende immediatamente dalla proposizione precedente in quanto la disuguaglianza (5.3) dice che $\varphi(x) = d(x, x_0)$ è una funzione lipschitziana di costante $k = 1$. □

Corollario 5.27. *La norma* $\|.\| \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ *di uno spazio normato* V *è una funzione uniformemente continua.*

5.3 Continuità delle trasformazioni lineari, norme equivalenti

Ricordiamo che una mappa $T \colon V \to V'$ fra due spazi vettoriali si dice **trasformazione lineare** se

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in V, \text{ e} \,\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cioè una trasformazione lineare altro non è che un omomorfismo di spazi vettoriali.
Supponiamo ora che $(V\|.\|)$ e $(V'\|.\|)$ siano due spazi normati (non distingueremo nella notazione le loro norme). Sia $T \colon V \to V'$ una trasformazione lineare. Diremo che T è una **trasformazione lineare limitata** se esiste $K > 0$ tale che

$$||T(x)|| \leq K||x|| \ \forall x \in V.$$

Teorema 5.28. *Sono equivalenti:*

1. *T è continua*
2. *T è continua nel punto* 0
3. *T è una trasformazione lineare limitata.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Ovviamente, se T è continua, è continua in ogni punto e quindi in 0.
(2) $\Rightarrow$ (3). Se T è continua in 0, prendendo $\varepsilon = 1$ esiste $\delta > 0$ tale che $T(B(0, \delta)) \subset B(0, 1)$, ossia $||T(x)|| \leq 1$ se $||x|| < \delta$. Per ogni $x \in V, x \neq 0$, consideriamo

$$x_1 = \frac{\delta}{2} \frac{x}{||x||}.$$

Allora $||x_1|| = \delta/2$ e dunque $x_1 \in B(0, \delta)$. Il che implica $||T(x_1)|| \leq 1$.
Per linearità della T,

$$||T(x_1)|| = ||T(\frac{\delta_1}{2||x||} x)|| = \frac{\delta_1}{2||x||} ||T(x)||,$$

e quindi $||T(x)|| \leq \frac{2}{\delta_1} ||x||$ per ogni $x \in V$. (Infatti per $x = 0$ la disuguaglianza è trivialmente verificata.) Prendendo $K = 2/\delta_1$ risulta $||T(x)|| \leq K||x||$, $\forall x \in V$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Se $||T(x)|| \leq K||x|| \ \forall x \in V$ allora

$$||T(x) - T(y)|| = ||T(x - y)|| \leq K||x - y||$$

quindi T è lipschitziana di costante K. In particolare T è uniformemente continua e quindi continua.

□

Corollario 5.29. *Ogni trasformazione lineare continua è lipschitziana e dunque uniformemente continua.*

Definizione 5.5. *Si definisce la norma di una trasformazione come*

$$||T|| = \sup_{||x||=1} ||T(x)||$$

Enunciamo ora un risultato la cui dimostrazione viene lasciata al lettore.

Proposizione 5.2. *Se T è lineare limitata allora*

1. $||T|| < \infty$;
2. $||T(x)|| \leq ||T|| ||x||$;
3. $||T|| = \inf \{ K \mid ||T(x)|| \leq K||x|| \ \forall x \in V \}$.

Nota Bene 5.1. *Sia $\mathcal{L}(V, V')$ l'insieme di tutte le trasformazioni lineari e limitate da V in V' Allora $\mathcal{L}(V, V')$ è uno spazio vettoriale e $||T|| = \sup_{||x||=1} ||T(x)||$ definisce una norma su $\mathcal{L}(V, V')$.*

Sia V uno spazio vettoriale munito di due norme diverse. Abbiamo allora due spazi normati $(V, ||.||_1)$ e $(V, ||.||_2)$ definite sullo stesso spazio vettoriale. Cerchiamo una condizione necessaria e sufficiente affinché i due spazi normati abbiano gli stessi aperti. Prima condizione necessaria e sufficiente è che la mappa identica $\mathrm{Id} : V \to V$ risulti continua tanto come trasformazione $\mathrm{Id} : (V, ||.||_1) \to (V, ||.||_2)$ quanto come trasformazione $\mathrm{Id} : (V, ||.||_2) \to (V, ||.||_1)$. Infatti, dalla definizione di mappa continua risulta che queste due condizioni sono verificate, se e soltanto se ogni aperto della topologia $\mathcal{T}_1$ indotta dalla $||.||_1$ è anche aperto della topologia $\mathcal{T}_2$ indotta dalla $||.||_2$
Ma l'identità Id è una trasformazione lineare. Per il teorema precedente la continuità della trasformazione $\mathrm{Id} : (V, ||.||_1) \to (V, ||.||_2)$ equivale all'esistenza di una costante $K > 0$ tale che $\|\mathrm{Id}\, x\|_2 \leq K||x||_1$ ossia $||x||_2 \leq K||x||_1$. Analogamente, la contiuità di $\mathrm{Id} : (V, ||.||_2) \to (V, ||.||_1)$ equivale all'esistenza di una costante $K' > 0$ tale che $||x||_1 \leq K'||x||_2$.

Definizione 5.6. *Due norme su uno stesso spazio vettoriale si dicono* ***equivalenti*** *se esistono K, K' tali che*

$$K||x||_2 \leq ||x||_1 \leq K'||x||_2.$$

Dalla discussione precedente si conclude:

Teorema 5.30. *Le topologie indotte da due norme diverse sullo stesso spazio vettoriale coincidono se e soltanto se le due norme sono equivalenti.*

Più tardi dimostreremo che tutte le norme su uno spazio vettoriale di **dimensione finita** (attenzione!) sono fra loro equivalenti e quindi definiscono la stessa topologia sullo spazio.

5.4 Distanza d'un punto da un insieme

Definizione 5.7. *Dato uno spazio metrico (X, d) e un sottoinsieme non vuoto $A \subset X$, la distanza di un punto $x \in X$ da A è il numero positivo o nullo $d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$.*

Sotto certe condizioni di convessità o compattezza, ad esempio se A è un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio normato o se A è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$, il numero $d(x, A) \in \mathbb{R}$ risulta essere non solo l'infimo ma è anche il minimo dell'insieme $\{d(x, y) \,|\, y \in A\}$. In altre parole, esiste un $y_0 \in A$ tale che $d(x, A) = d(x, y_0)$. Ma in genere ciò non è vero.

Esempio: Consideriamo $X = \mathbb{R}^n$ con la norma euclidea. Sia $S \subset X$ un sottospazio di dimensione 1 generato dal vettore $v \in \mathbb{R}^n$.
Dato $x \in \mathbb{R}^n$, sia

$$d = d(x, S) = \inf_{y=\lambda v} ||x - y||$$

Cerchiamo un $y_0 = \lambda_0 v \in S$ tale che $d = ||x - y_0||$. Per il teorema di Pitagora se $y_0 = \lambda_0 v$ è tale che $< x - y_0, y >= 0 \, \forall y \in S$ allora $\|x - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y\|^2$ e dunque

$$d(x, y) = \|x - y\| \geq \|x - y_0\| = d(x, y_0).$$

Per cui basta trovare un $y_0 \in S$ tale che $x - y_0 \perp S$ e avremo che y_0 realizza la distanza $d = d(x, S)$.
Un tale y_0 esiste sempre ed inoltre è unico. Lo si può trovare come punto d'intersezione di S con la retta passante per x e perpendicolare ad S. Alternativamente si trova y_0 facendo la proiezione ortogonale del vettore x su S. La formula esplicita per y_0 è:

$$y_0 = \frac{< x, v >}{\|v\|} v.$$

(Verificare che questo y_0 ha la proprietà desiderata!)

Il metodo della proiezione ortogonale si generalizza facilmente a sottospazi S di dimensione finita k di uno spazio vettoriale V qualsiasi. Data una base ortonormale $e_1, \ldots, e_k$ di S, il vettore

$$y_0 = \sum_{i=1}^{k} < x, e_i > e_i$$

è l'unico vettore di S tale che $||x - y_0|| = d(x, S)$.

Esempio: Sia $X = \mathbb{R}^2$ e $p = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Sia $A = \{ (x, y) \;\; | \;\; x^2 + y^2 < 1 \}$.

$$d(p, A) = \inf \{ d(v, q) \;\; | \;\; q \in A \} = 0$$

perché $q_n = (0, 1 - \frac{1}{n}) \in A$ è una successione di punti di A tale che

$$d(p, q_n) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Ma non esiste alcun punto di A che realizzi la distanza $d(p, A) = 0$ perché $p \notin A$.

Esercizio 5.31. *Dare un esempio in cui $d(x, A)$ è realizzata da più di un punto di A.*

5.5 La miglior approssimazione polinomiale

La ricerca di un punto dell'insieme A che realizza la distanza di questo insieme da un punto dato è un problema matematico molto studiato. In diversi casi si riesce ad esibire una formula esplicita per un tale punto. Ad esempio la formula per trovare la retta dei minimi quadrati è di questo tipo.

Discuteremo qui molto brevemente il problema della miglior approssimazione di una funzione continua con un polinomio di grado n prefissato per spiegare la sua importanza.
Naturalmente il problema dipende dalla scelta dello spazio di funzioni e della distanza. Noi considereremo solo lo spazio $X = \mathcal{C}[0,1]$, con la norma dal prodotto scalare $< f, g > g = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
Il sottospazio S_n di X generato dalle funzioni $1, t, t^2, \ldots, t^n$ e precisamente lo spazio delle restrizioni all'intervallo $[0,1]$ dei polinomi di grado minore o uguale ad n. I polinomi $1, t, t^2, \ldots, t^n$ formano una base di S_n e dunque $\dim S = n+1$. Consideriamo una funzione $f \in \mathcal{C}[0,1]$ e ci chiediamo quale fra tutti i polinomi di grado minore o uguale ad n è il più vicino a f in norma due? In altre parole, cerchiamo un polinomio $p_0 \in S_n$ tale che

$$\sqrt{\int_0^1 (f(t) - p_0(t))^2 \, dt} \leq \sqrt{\int_0^1 (f(t) - p(t))^2 dt} \quad \forall p \in S_n.$$

Un tale polinomio esiste ed è unico. Una formula esplicita per il polinomio p_0 s'ottiene utilizzando ancora il metodo delle proiezioni ortogonali che funziona esattamente come prima perché la dimensione di S_n è finita. (Ricordando la teoria di serie di Fourier non risulta difficile adattarlo anche a situazioni più generali.)
Mediante l'ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, dalla base $1, t, t^2, \ldots, t^n$ di S_n si ottiene una base ortonormale $(l_0, l_1(t), \ldots, l_n(t))$ dello stesso sottospazio. I polinomi $l_i(t)$ si chiamano **polinomi di Legendre**. Fatto questo, la formula per p_0 è formalmente la stessa di prima:

$$p_0(t) = \sum_{i=0}^{n} (\int_0^1 l_i(t) f(t) dt) l_i(t).$$

5.6 Lemma di Urysohn per gli spazi metrici

Prima di tutto raccogliamo in un'unico teorema le proprietà generali della distanza $d(x, A)$.

Teorema 5.32. *i)* $d(x, A) \geq 0$ *e* $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$. *In particolare se* A *è chiuso* $x \in A \iff d(x, A) = 0$;

ii) $d(x, A \cup B) = min\{d(x, A), d(x, B)\}$. *In particolare se* $A \subset B$ *allora* $d(x, B) \leq d(x, A)$;

iii) per ogni $x, y \in X$ *e* $A \subset X$, $d(x, A) \leq d(y, A) + d(x, y)$.

Dimostrazione. Dimostreremo solo $i)$ e $iii)$ lasciando $ii)$ come esercizio.
Dimostrazione di $i)$: che $d(x, A) \geq 0$ è chiaro. Per dimostrare $\Rightarrow$ del $\iff$ vediamo che se $x \notin \bar{A}$ allora $0 < d(x, A)$. Infatti, se $x \notin \bar{A}$ esiste un $\varepsilon > 0$

tale che la palla $B(x,\varepsilon)$ non interseca l'insieme A e quindi $0 < \varepsilon \le d(x,y)$, per ogni $y \in A$. Per le proprietà dell'inf questo implica che $\varepsilon \le d(x,A) = \inf\{\, d(x,y) \;\mid\; y \in A \,\}$ ciò che dimostra $0 < d(x,A)$.
Dimostriamo ora $\Leftarrow$: se $x \in \bar{A}$ allora esiste $(x_n)_{n\ge1} \in A$ tale che $x_n \longrightarrow x$ ossia $d(x_n,x) \longrightarrow 0$. Ma allora $0 \le d(x,A) = \inf\{\, d(x,z) \mid z \in A \,\} \le d(x,x_n) \forall n$, e quindi $d(x,A) = 0$.
Per dimostrare la *iii*) osserviamo che per definizione di infimo $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, z \in A$ tale che $d(y,A) \le d(y,z) \le d(y,A)+\varepsilon$. Per la proprietà triangolare della distanza

$$d(x,A) \le d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \le d(x,y) + d(y,A) + \varepsilon,$$

Poiché questo è vero per ogni $\varepsilon > 0$, $d(x,A) \le d(y,A) + d(x,y)$. □

Corollario 5.33. *La funzione $\varphi_A \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\varphi_A(x) = d(x,A)$ è lipschitziana con la costante Lipschitz $k = 1$. In particolare φ_A è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Si deve dimostrare che $|\varphi(x) - \varphi_A(y)| \le d(x,y)$ il che, per definizione di modulo e di φ equivale alla disuguaglianza

$$d(y,A) - d(x,y) \le d(x,A) \le d(y,A) + d(x,y).$$

Quest'ultima a sua volta è una conseguenza immediata del punto *iii*) del teorema precedente. □

Come conseguenza otteniamo un importante caso particolare del noto Lemma di Urysohn:

Teorema 5.34. *Sia (X,d) uno spazio metrico, sia $C \subset X$ un sottoinsieme chiuso e sia U un aperto tale che $C \subset U$. Allora esiste una funzione continua $f \colon X \to [0,1]$ tale che*

$$\begin{cases} f(x) = 1 & se\ x \in C \\ \\ f(x) = 0 & se\ x \notin U. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia

$$f(x) = \frac{d(x,U^c)}{d(x,C) + d(x,U^c)},$$

La funzione f è continua perché si tratta del quoziente di due funzioni $d(x,U^c)$ e $g(x) = d(x,C) + d(x,U^c) \neq 0$ che sono continue e tali che il denominatore $g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in X$.
Infatti, se fosse $g(x) = 0$ si avrebbe $d(x,C) = d(x,U^c) = 0$ in quanto entrambe le quantità sono non negative. Ma tanto C quanto U^c sono chiusi e quindi $d(x,C) = 0 \Rightarrow x \in C$ e $d(x,U^c) = 0 \Rightarrow x \in U^c$. Quindi $d(x,C) = d(x,U^c) = 0$ non si verifica mai perché $C \cap U^c = \emptyset$.
Questo dimostra che f è continua. Chiaramente $0 \le f \le 1$ perché $d(x,U^c) \le d(x,C) + d(x,U^c)$. Inoltre, se $x \in U^c$ risulta $d(x,U^c) = 0$ e quindi $f(x) = 0$. Invece se $x \in C$ si ha $d(x,C) = 0$ e dunque $f(x) = 1$. □

Corollario 5.35. *Dati due insiemi chiusi C_1 e C_2 di uno spazio metrico X tali che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ esiste $f \colon X \to [0,1]$ continua tale che*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in C_1 \\ \\ 0 & se\ x \in C_2 \end{cases}.$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente con $C = C_1$ e $U = C_2^c$. □

5.7 Proprietà di separazione negli spazi metrici

Prima di tutto introduciamo una serie di assiomi che descrivono le proprietà di separazione analoghe alla proprietà di Hausdorff.

- Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice T_0 se dati $x, y \in X$ con $x \neq y$ esiste un intorno aperto U di uno dei due che non contiene l'altro.

- Diremo che X è T_1 se, dati x, y come prima, esistono aperti U, V di X tali che $x \in U$ e $y \in V$ ma $y \notin U$ e $x \notin V$. Gli spazi T_1 sono caratterizzati dal fatto che $\{x\}$ è un sottoinsieme chiuso di X per ogni $x \in X$. La retta reale $\mathbb{R}$ con la topologia dell'ordine vista in precedenza è un tipico esempio di uno spazio T_0 ma non T_1.

- Lo spazio X si dice T_2 o di **Hausdorff** se dati $x, y \in X$, $x \neq y$ esistono aperti U, V tali che $x \in U$ e $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

- X è T_3 o **regolare** se dati $x \in X$ e $A \subset X$ chiuso con $x \notin A$ esistono U, V aperti tali che $x \in U$, $A \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

- X è T_4 o **normale** se dati $A, B \subset X$ chiusi con $A \cap B = \emptyset$ esistono U, V aperti con $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Chiaramente
$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$
Abbiamo verificato in precedenza che ogni spazio metrico (X, d) è di Hausdorff. Vedremo adesso che gli spazi metrici godono di ulteriori proprietà di separazione.

Teorema 5.36. *Ogni spazio metrico è T_4.*

Dimostrazione. Dati A, B chiusi con $A \cap B = \emptyset$, per il corollario (5.35) esiste $f\colon X \to [0,1]$ continua tale che $f(x) = 1$ se $x \in A$ e $f(x) = 0$ se $x \in B$. Sia $U = f^{-1}((1/2, 1])$ e $V = f^{-1}([0, 1/2))$. Entrambi sono aperti perché sono controimmagini di due aperti di $[0,1]$ (occhio, si tratta di topologia relativa i cui aperti si ottengono intersecando $[0,1]$ con aperti di $\mathbb{R}$!). Chiaramente $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. □

In realtà la proprietà T_4 è equivalente all'esistenza di una funzione continua come sopra. Infatti negli spazi normali valgono i seguenti teoremi che non dimostreremo qui:

Teorema 5.37 (Lemma di Urysohn)**.** *Sia X uno spazio normale e $C, C' \subset X$ chiusi disgiunti. Allora esiste $f : X \longrightarrow [0,1]$ continua tale che $f|_C = 0$ e $f|_{C'} = 1$*

Vale anche:

Teorema 5.38 (Tietze)**.** *Sia X uno spazio normale, $C \subset X$ chiuso ed $f\colon C \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $\bar{f} \in C(X)$ tale che $\bar{f}|_W = f$.*

6 Teorema della contrazione e le sue applicazioni

6.1 Spazi metrici completi

Definizione 6.1. *Dato una successione (x_n) di uno spazio metrico (X, d) si dice di Cauchy (o fondamentale) se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \; \forall n, m \geq n_0 \; d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Esercizio 6.1. *Dimostrare che (x_n) è di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ e ogni $p \geq 1$ si ha che $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$. Suggerimento: Prendere $m = n + p$ con $p \in \mathbb{N}$ nella definizione precedente.*

Definizione 6.2. *Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.*

Naturalmente questa costituisce una riformulazione della completezza della retta reale per spazi metrici astratti. Osservare che la completezza non è una proprietà topologica ma metrica.
Formuliamo qui sotto un'utile caratterizzazione della completezza.

Definizione 6.3. *Una successione (x_n) in X si dice **fortemente fondamentale** o **fortemente di Cauchy** se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ è convergente.*

Proposizione 6.2. *Ogni successione fortemente fondamentale è di Cauchy.*

Dimostrazione. Se (x_n) è fortemente fondamentale esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$, $\sum_{k=n}^{\infty} d(x_{k+1}, x_k) < \varepsilon$. Usando la disuguaglianza triangolare p volte otteniamo

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_k, x_{k+1}) \sum_{k=n}^{\infty} d(x_{k+1}, x_k) \leq \varepsilon.$$

□

Proposizione 6.1. *Ogni successione di Cauchy ammette una sottosuccessione fortemente fondamentale.*

Dimostrazione. Se (x_n) è di Cauchy possiamo trovare un $n_1 \geq 1$ tale che

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2},$$

per ogni $n, m \geq n_1$. Applicando la definizione di nuovo troveremo un n_2, che possiamo supporre strettamente maggiore di n_1, tale che per ogni $n, m \geq n_2$

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^2}.$$

Procedendo così troveremo una successione di numeri naturali $n_1 < n_2 < \ldots, n_k < \ldots$ tale che

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}.$$

Allora la serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(x_{n-k}, x_{n_{k+1}})$$

è convergente perché maggiorata dalla serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ e quindi (x_{n_k}) è una sottosuccessione fortemente fondamentale. $\square$

Esercizio 6.3. *Dimostrare che se una sottosuccessione di una successione di Cauchy converge ad un punto x allora anche tutta la successione converge allo stesso punto. Suggerimento: adottare la dimostrazione fatta in $\mathbb{R}$ ad uno spazio metrico generale.*

Una conseguenza immediata della discussione precedente è il teorema:

Teorema 6.4. *X è completo se e solo se ogni successione fortemente fondamentale è convergente.*

Definizione 6.4. *Uno spazio normato $(V, \|.\|)$ si chiama* ***spazio di Banach*** *se è completo rispetto alla distanza indotta dalla norma $d(x,y) = \|x-y\|$.*

Uno spazio normato completo la cui norma deriva da un prodotto scalare si dirà ***spazio di Hilbert****.*

Negli spazi di Banach, grazie alla completezza, possiamo formulare una utile generalizzazione di un noto risultato sulla convergenza delle serie di numeri reali.

Definizione 6.5. *Sia B uno spazio di Banach, una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ di elementi $x_n \in B$ si dice* **assolutamente convergente** *se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ converge.*

Teorema 6.5. *Una serie assolutamente convergente di elementi di uno spazio di Banach converge ad un elemento $x \in B$. In altre parole, esiste un $x \in B$ tale che la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ converge a x.*

Dimostrazione. Siccome B è completo, per il teorema 6.4 basterà dimostrare che s_n sia fortemente fondamentale. Ma

$$d(s_{n+1}, s_n) = ||s_{n+1} - s_n|| = ||\sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k|| = ||x_{k+1}||.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(s_{n+1}, s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_{n+1}|| < \infty,$$

per ipotesi e dunque s_n è fortemente fondamentale. $\square$

6.2 Completezza di $\mathbb{R}^n$ e di $C[a,b]$.

Abbiamo dimostrato all'inizio del corso che ogni successione di Cauchy di numeri reali è convergente. Quindi, $(\mathbb{R}, |.|)$ è uno spazio normato completo ossia è uno (piccolissimo) spazio di Banach.

Proposizione 6.6. $(\mathbb{R}^m, ||.||_\infty)$, $(\mathbb{R}^m, ||.||_1)$ *e* $(\mathbb{R}^m, ||.||_2)$ *sono spazi di Banach.*

Dimostrazione. (solo per $(\mathbb{R}^m, ||.||_2)$).
Consideriamo una successione (v_n) di Cauchy in $\mathbb{R}^m$. Ogni v_n è un n-upla $v_n = (x_1^n, \dots, x_m^n)$. Verifichiamo che fissato k, $1 \leq k \leq m$ la successione di numeri reali (x_k^n) è ed è di Cauchy in $\mathbb{R}$.
Infatti poiché $(v_1, \dots, v_n, \dots)$ è di Cauchy per ogni $\forall \varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che $||v_n - v_p||_2 < \varepsilon$, per ogni $n, p \geq n_0$. Allora,

$$\varepsilon > ||v_n - v_p||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i^n - x_i^p)^2} \geq \sqrt{(x_k^n - x_k^p)^2} = |x_k^n - x_k^p|,$$

e dunque fissato k, $1 \leq k \leq m$ per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo trovato n_0 tale che

$$\forall n, p \geq n_0 \ |x_k^n - x_k^p| < \varepsilon.$$

Per la completezza della retta reale, per ogni $1 \leq k \leq m$ esiste un $z_k \in \mathbb{R}$ tale che $x_k^n \longrightarrow z_k$. Consideriamo il vettore $v = (z_1, \dots, z_m)$ e verifichiamo che $v_n \longrightarrow v$, ossia che $||v_n - v||_2 \longrightarrow 0$.
Siccome per ogni k $x_k^n \longrightarrow z_k$, dato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare n_0 tale che

$$|x_k^n - z_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \ \forall n \geq n_0, \text{ e } \forall k, \ 1 \leq k \leq m. \tag{6.1}$$

Dalla (6.1) segue facilmente che

$$||v_n - v||_2 \leq \sqrt{\frac{(m\varepsilon)^2}{m}} = \varepsilon.$$

Questo dimostra la completezza di $(\mathbb{R}^m, \|.\|_2)$. □

Esercizio 6.7. *Dimostrare che le norme $\|.\|_i$, $i = 1, 2, \infty$ in $\mathbb{R}^m$ sono equivalenti.*

Esercizio 6.8. *Dimostrare che norme equivalenti hanno le stesse successioni di Cauchy e le stesse successioni convergenti. Concludere che $\mathbb{R}^m$ è completo anche con la norma $\|.\|_i$, $i = 1, \infty$.*

Vediamo ora un importante esempio di uno spazio di Banach di dimensione infinita. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{C}[a, b]$ di tutte le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ con la norma $||f||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.
Notare che l'estremo superiore che compare nella definizione della norma è finito. Infatti, per il teorema di Weierstrass, si tratta di un massimo.

Teorema 6.9. *Lo spazio normato $(\mathcal{C}[a, b], \|.\|_\infty)$ è completo.*

Dimostrazione. **Passo 1.**
Sia (f_n) una successione di Cauchy in $\mathcal{C}[a, b]$. Per analogia con la dimostrazione della completezza di $\mathbb{R}^m$, prima di tutto dimostreremo che per ogni $t \in [a, b]$ la successione $(f_n(t))$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.
Infatti per definizione di successione di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n, m \geq n_0 \ ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon.$$

Ma allora $\forall t \in [a, b]$ si ha che

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| = ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon$$

quando $n, m \geq n_0$ e dunque $(f_n(t))$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $t \in [a, b]$.
Essendo di Cauchy ogni successione $(f_n(t))$ converge ad un numero $f(t)$. Resta così definita una funzione $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ in ogni punto dell'intervallo.

Passo 2.

Affermiamo che $sup_{t\in[a,b]}|f_n(t) - f(t)| \longrightarrow 0$ (cioè che (f_n) converge ad f uniformemente). Infatti, poiché (f_n) è di Cauchy in $\|.\|_\infty$, prendendo $m = n + p$ risulta che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha

$$||f_n - f_{n+p}||_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall p,$$

il che implica che

$$\forall t \in [a, b],\ |f_n(t) - f_{n+p}(t)| < \varepsilon/2.$$

Riscriviamo l'ultima disuguaglianza nella forma

$$\forall t \in [a, b],\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 1 \quad f_n(t) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f_{n+p}(t) \leq f_n(t) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per un t fissato $f_{n+p}(t) \longrightarrow f(t)$ quando $p \longrightarrow \infty$, e quindi passando al limite nella disuguaglianza precedente risulta che, per ogni $n \geq n_0$

$$f_n(t) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(t) \leq f_n(t) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Equivalentemente,

$$\forall t,\ \forall n \geq n_0 \quad |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Infine, prendendo il sup otteniamo

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

E' stato così dimostrato che $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \longrightarrow 0$.

Passo 3.

Dimostriamo ora che $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Per il passo precedente, preso $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che

$$\forall n \geq n_0 \quad \sup_t |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Poiché f_{n_0} è continua, preso un $t_0 \in [a, b]$ e dato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ (dipendente da t_0) tale che

$$|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad se\ |t - t_0| < \delta.$$

Ora

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &= |f(t) - f_{n_0}(t) + f_{n_0}(t) - f(t_0)| \leq \\ &\leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f(t_0)| \leq \\ &\leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f(t_0)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| < \\ &< \varepsilon \quad se\ |t - t_0| < \delta. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque trovato un δ tale che $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ se $|t - t_0| < \delta$.
Passo 4.
In conclusione, $f \in \mathcal{C}[a, b]$ e dunque lo stesso vale per le funzioni $(f_n - f)$. Il Paso 2 ci dice che

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)| \longrightarrow 0$$

e dunque $f_n \longrightarrow f$ in $\mathcal{C}[a, b]$. Ciò dimostra che $\mathcal{C}[a, b]$ è completo. □

Esercizio 6.10. *Dimostrare che la successione $f_n \in \mathcal{C}[0, 1], f_n(t) = t^n$ non è di Cauchy. Cosa si può dire della successione $g_n(x) = cos(\frac{x}{n})$ nello stesso spazio?*

Esercizio 6.11. *Dimostrare che $(\mathcal{C}[-1, 1], ||.||_1)$ non è completo. Suggerimento: considerare una successione di funzioni continue f_n su $[-1, 1]$ che s'annullano in $[-1, -1/n] \cup [1/n, 1]$ e tali che $f_n(0) = 1$.*

Esercizio 6.12. *Se X è uno spazio metrico completo, e $Y \subset X$ è un sottospazio chiuso allora Y è completo. Suggerimento: ogni successione di Cauchy in Y lo è anche in X e dunque converge. Si usi adesso il fatto che Y è chiuso.*

6.3 Teorema della contrazione

Uno degli strumenti più utili nella matematica applicata, in cui la completezza svolge un ruolo essenziale, è costituito dal Teorema della Contrazione (o di Banach-Caccioppoli).

Teorema 6.13. *Sia (X, d) uno spaio metrico completo e sia $T : X \to X$ una mappa da X in se stesso verificante $d(T(x), T(y)) \leq k\, d(x, y)$ con $k < 1$ (ossia, una contrazione). Allora esiste un unico $x \in X$ tale che $x = T(x)$. Un tale x è detto **punto fisso** della mappa T.*

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema delle contrazioni usa una versione astratta di un metodo costruttivo già noto in precedenza con il nome di metodo di Picard. Il metodo di Picard veniva usato per dimostrare l'esistenza delle soluzioni di equazioni differenziali e integrali. La dimostrazione del teorema fornisce anche un algoritmo esplicito per approssimare il punto fisso della mappa T, perchè costruisce esplicitamente una successione (x_n) che converge all'unico punto fisso x della contrazione.

Passo 1.
Sia $x_0 \in X$, un punto qualsiasi. Definiamo $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$, e più generalmente supposto definito x_{n-1} si definisce $x_n = T(x_{n-1})$. Definizioni come la precedente si dicono **ricorsive**. Chiaramente $x_n = T^n(x_0)$, dove T^n è la composizione di T con se stessa n volte.
Osserviamo che ad ogni passo la distanza fra punti successivi della successione si contrae. Ponendo $d = d(x_1, x_0) = d(T(x_0), x_0)$ risulta:

$$\begin{aligned} d(T(x_1), T(x_0)) &\leq kd(x_1, x_0) = kd(T(x_0), x_0) = kd, \\ d(T(x_2), T(x_1)) &\leq kd(x_2, x_1) = kd(T(x_1), T(x_0)) \leq k^2 d, \end{aligned}$$

e così via.

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq k^n d. \tag{6.2}$$

Infatti, sappiamo che per $n = 1$ la (6.2) è verificata.
Supponendo la (6.2) che valga per n abbiamo che:

$$d(T(x_{n+1}), T(x_n)) \leq kd(x_{n+1}, x_n) = kd(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq k^{n+1}d$$

Dunque, per il principio d'induzione (6.2) è vera per ogni n.
Passo 2.
Consideriamo la successione $x_n = T^n(x_0)$, e osserviamo che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n)$ è convergente. Infatti,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) \leq d(\sum_{n=1}^{\infty} k^n) \leq d\frac{k}{1-k} < \infty,$$

perché la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} k^n$ converge a $\frac{k}{1-k}$. Quindi la successione $\{ x_n \}$ è fortemente fondamentale. Siccome X è completo esiste un $x \in X$ tale $x_n \longrightarrow x$. Necessariamente anche la sottosuccessione (x_{n+1}) di (x_n) converge allo stesso punto x. Ma poiché T è continua si ha che $x_{n+1} = T(x_n) \longrightarrow T(x)$. Da qui $T(x) = x$.
Passo 3.
Dimostriamo ora che il punto x è unico. Siano $x, y \in X$ tali che $x = T(x)$ e $y = T(y)$. Allora

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Poiché $k < 1$ questo può verificarsi solo se $d(x, y) = 0$ ossia $x = y$.
In conclusione esiste un unico punto fisso x della mappa T che si può trovare come limite della successione delle iterate $x_n = T^n(x_0)$ costruita a partire da un punto qualsiasi $x_0 \in X$. □

Esercizio 6.14. *Dimostrare la seguente stima della distanza (o errore) dell'approssimazione n-esima $x_n = T^n(x_0)$ dal punto fisso $x = T(x)$ tale che*

$$d(x_n, x) \leq \frac{k}{1-k} d(x_0, T(x_0)).$$

Esercizio 6.15. *Una* **isometria** $I\colon X \to Y$ *fra spazi metrici è una trasformazione che verifica $d(I(x), I(y)) = d(x, y)$. Dare un esempio di una isometria da X in se stesso priva di punti fissi.*

6.4 Teorema dell'esistenza e unicità della soluzioni

Come applicazione del Teorema delle contrazioni dimostriamo qui il Teorema di esistenza ed unicità della soluzione di un'equazione differenziale. Nella dimostrazione (che segue lo schema di Picard) useremo la completezza dello spazio $\mathcal{C}[a, b]$ dimostrata in precedenza.

Teorema 6.16. *Sia U un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una funzione lipschitziana in y, uniformemente rispetto ad x, In altre parole, esiste una costante M (indipendente da x) tale che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|. \tag{6.3}$$

Allora, dato un punto $(x_0, y_0) \in U$, esiste un $\delta > 0$ ed un'unica funzione $y = y(x)$ definita e derivabile nell'intervallo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tale che $y(x_0) = y_0$ e

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

In altre parole, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{6.4}$$

ammette un'unica soluzione $y \in C^1(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dimostrazione. **Passo 1.**
Scriviamo prima di tutto un'equazione integrale equivalente alla (6.4). Data una funzione $y\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ continua, anche la funzione $g(t) = f(t, y(t))$ risulta essere continua perché trattasi di una composizione di due funzioni continue (quali?). Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci dice che la funzione $z(x)$ definita da

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

è derivabile con derivata $z'(x) = f(x, y(x))$. Inoltre, per definizione di $z(x)$, $z(x_0) = y_0$.
Dunque se una funzione continua $y \in C^0(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ verifica l'equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{6.5}$$

allora $y(x)$ è una funzione derivabile con continuità che risolve il problema di Cauchy (6.4).
Passo 2.
Scegliamo una palla chiusa $B = \bar{B}_0((x_0, y_0), \varepsilon)$ con centro in (x_0, y_0) e raggio $\varepsilon > 0$ contenuta in U. Nella metrica $\|.\|_\infty$ di $\mathbb{R}^2$ la palla

$$B = \bar{B}_0((x_0, y_0), \varepsilon) = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon].$$

Fissiamo un $\delta < \varepsilon$ positivo il cui valore sarà determinato successivamente e sia $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Consideriamo lo spazio metrico

$$X_\delta = \{\, y \in \mathcal{C}(I_\delta) \;\mid\; |y(x) - y_0| \le \varepsilon,\ \forall x \in I_\delta \,\}$$

con la metrica indotta dalla norma di $\mathcal{C}(I_\delta)$. Non possiamo considerare tutto lo spazio $\mathcal{C}(I_\delta)$, perché per definire la composizione $f(x, y(x))$ occorre che $(x, y(x)) \in U$.
Per ogni $\delta > 0$, X_δ è uno spazio metrico completo essendo un sottoinsieme chiuso di $\mathcal{C}(I_\delta)$ la cui completezza è stata dimostrata in precedenza.
Osserviamo che, se identifichiamo $y_0 \in R$ con la funzione costante $y(x) \cong y_0$, allora X_δ altro non è che la palla chiusa con centro y_0 e raggio ε nello spazio $\mathcal{C}(I_\delta)$.
Definiamo ora $T\colon X_\delta \to \mathcal{C}(I_\delta)$,

$$[T(y)](x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Dalla definizione della mappa T risulta che $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ se e soltanto se

$$y(x) = [T(y)](x), \ \forall x \in I_\delta.$$

In altre parole, la funzione $y \in X_\delta$, verifica l'equazione integrale $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ se e soltanto se y è un punto fisso della mappa T.

Passo 3.
Cerchiamo ora un δ in modo che $T(X_\delta) \subset X_\delta$.
Ricordando che X_δ è la palla chiusa $\bar{B}(y_0, \varepsilon) \subset \mathcal{C}(I_\delta)$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che $T(\bar{B}(y_0, \varepsilon) \subset \bar{B}(y_0, \varepsilon) \subset \mathcal{C}(I_\delta)$ Per questo troviamo una stima per la distanza $d(T(y), y_0)$:

$$\begin{aligned} ||T(y) - y_0||_\infty &= \sup_{x \in X_\delta} |[T(y)](x) - y_0| = \\ &= \sup_{x \in X_\delta} \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \Big| \leq \\ &\leq \sup_{x \in X_\delta} \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt. \end{aligned}$$

L'insieme $B = \bar{B}_0((x_0, y_0), \varepsilon) = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$. Poichè la funzione $|f|$ è continua su B per il teorema di Weierstrass, esiste una costante $N < \infty$ tale che $|f(x, y)| \leq N, \ \ \forall (x, y) \in B$.
Allora

$$\int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt \leq \int_{x_0}^{x} N dt = N(x - x_0) \leq N\delta.$$

Scegliendo dunque un $\delta > 0$ tale che $\delta N < \varepsilon$ risulta che

$$||T(y) - y_0||_\infty \leq \varepsilon \ \ \forall y \in X_\delta.$$

Quindi, per la definizione di X_δ, per ogni $y \in X_\delta$ si ha che $T(y) \in X_\delta$.

Passo 4.
Completiamo la dimostrazione aggiustando il δ in modo che T risulti essere una contrazione dello spazio metrico X_δ, ossia che per qualche $k < 1$ valga :

$$d(T(y_1), T(y_2)) = ||T(y_1) - T(y_2)||_\infty \leq k||y_1 - y_2||_\infty = kd(y_1, y_2).$$

A questo fine si stima la distanza fra le immagini di due elementi:

$$\begin{aligned} ||T(y_1) - T(y_2)||_\infty &= \sup_{x \in I_\delta} \Big| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \Big| \leq \\ &\leq \sup_{x \in I_\delta} \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|dt. \end{aligned}$$

Per ipotesi, $|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq M|y_1(t) - y_2(t)|$ e quindi

$$||T(y_1) - T(y_2)||_\infty \leq \sup_{x \in I_\delta} \int_{x_0}^{x} M|y_1(t) - y_2(t)| \, dt.$$

Poichè, per ogni $t \in I_\delta$,

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \sup_{x \in I_\delta} |y_1(t) - y_2(t)| \leq \|y_1 - y_2\|_\infty,$$

sostituendo quest'ultima disuguaglianza in quella che la precede otteniamo

$$\begin{aligned}||T(y_1) - T(y_2)||_\infty &= \sup_{x \in I_\delta} \int_{x_0}^{x} M\|y_1 - y_2\|_\infty dt = \\ &= \sup_{x \in I_\delta} M\|y_1 - y_2\|_\infty |x - x_0| \leq \\ &\leq \delta M \|y_1 - y_2\|_\infty .\end{aligned}$$

Prendendo ora un $\delta > 0$ in modo che $\delta \leq \frac{1}{2M}$ si ha che
$k = \delta M \leq 1/2 < 1$ e l'ultima disuguaglianza ci dice che T è contrattiva.
In conclusione, se scegliamo $\delta \leq \min(\frac{\varepsilon}{N}, \frac{1}{2M})$, dalla discussione precedente risulta che la mappa $T\colon X_\delta \to X_\delta$ è una trasformazione contrattiva dello spazio X_δ in se stesso. Per il teorema di Banach-Caccioppoli deve esistere un unico $y \in X_\delta$ tale che $T(y) = y$.
Nel primo passo abbiamo dimostrato che la funzione y così ottenuta verifica l'equazione integrale $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ e dunque risolve il problema di Cauchy (6.4) .

□

Corollario 6.17. *Sia $f\colon V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una funzione differenziabile con continuità (C^1) definita su un aperto V di $\mathbb{R}^2$. Allora per ogni $(x_0, y_0) \in U$ esiste un $\delta > 0$ tale che il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} . \tag{6.6}$$

ammette un'unica soluzione $y\colon I \to \mathbb{R}$ definita nell'intervallo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dimostrazione. Basta dimostrare che possiamo trovare un intorno aperto U del punto $p_0 = (x_0, y_0)$ in cui siano verificate le ipotesi del teorema precedente. Per questo scegliamo un ε tale che tutta la palla chiusa

$$B = \bar{B}(p_0, \varepsilon) = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$$

sia contenuta in V. L'insieme B è chiuso limitato ed anche convesso, cioè, dati due punti $p = (x, y)$, $q = (u, v) \in B$, il segmento $tp + (1 - t)q$, $0 \leq t \leq 1$, è interamente contenuto in B. Applicando il teorema di Lagrange alla funzione di una variabile $g(t) = f(tp + (1 - t)q)$ nell'intervallo $[0, 1]$ e usando la regola della derivata della funzione composta otteniamo

$$f(p) - f(q) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta)(x - u) + \frac{\partial f}{\partial y}(\theta)(y - v),$$

dove θ è un punto appartenete al segmento $\overline{pq}$. Quindi, prendendo il valore assoluto e usando la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$|f(p) - f(q)| \leq |\frac{\partial f}{\partial x}(\theta)||x - u| + |\frac{\partial f}{\partial y}(\theta)|y - v|$$

Poiché $B \subset \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass le funzioni continue $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sono limitate in B e quindi esiste un $M > 0$ tale che

$$\sup_{(x,y) \in B} \max\{|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)|, |\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)|\} \leq M.$$

Dalla disuguaglianza precedente ricaviamo la stima

$$|f(p) - f(q)| \leq M \max\{|x-u|, |y-v|\} = M\|p-q\|_\infty \tag{6.7}$$

valida per ogni coppia di punti p, q di B. In questo modo abbiamo dimostrato che ogni funzione C^1 è localmente lipschtiziana (come funzione di due variabili), ma dalla (6.7) discende immediatamente la (6.3) prendendo punti p, q con la stessa ascissa.
Dunque, le ipotesi del teorema 6.16 sono verificate nell'aperto $U = B(p_0, \varepsilon)$ ed il corollario risulta una conseguenza di questo teorema. □

Il teorema dell'esistenza e unicità risulta valido anche per il problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali. Dato il sistema

$$\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = u_0 \ , \end{cases} \tag{6.8}$$

dove $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, è un sottoinsieme aperto, (x_0, u_0) è un punto di V e $f\colon V \to \mathbb{R}^n$, è una mappa C^1, usando il teorema della contrazione si dimostra usando il teorema della contrazione esattamente come nel caso di una singola equazione l'esistenza di un'unica soluzione $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ del problema 6.8 definita su un intervallo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Poiché ogni equazione differenziale di ordine n in forma normale

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

è riconducibile ad un sistema di equazioni del primo ordine come sopra ponendo

$$u_i(x) = y^{(i)}(x), i = 0, \ldots, n-1,$$

resta dimostrato il teorema dell'esistenza e unicità per il problema di Cauchy per equazioni in forma normale di qualsiasi ordine con lato destro C^k.

Usando il teorema del punto fisso di Brouwer, o alternativamente, la caratterizzazione dei compatti di $C[a,b]$ dovuta ad Ascoli e Arzelà si riesce a dimostrare l'esistenza in piccolo delle soluzioni di equazioni differenziali con lato destro solamente continuo. Però, in questo caso, l'unicità della soluzione non è garantita.

Esercizio 6.18. *1) Verificare che $f(x,u) = 3u^{2/3}$ è continua ma non Lipschitz in un intorno di* 0*, e quindi non è possibile applicare il teorema precedentemente dimostrato.*
2) Verificare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ammette due soluzioni, $u_0 \equiv 0$ e $u(x) = x^3$.

6.5 Teorema della funzione inversa

Prima di tutto richiamiamo la nozione di differenziale di una mappa.

Definizione 6.6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in $a \in A$ lungo la direzione v se esiste il limite*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) \;=\; \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \;. \tag{6.9}$$

Le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sono per definizione le derivate lungo la direzione degli elementi e_i, $i = 1, \dots, n$, della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 6.7. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una mappa $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ si dice **differenziabile** in $a \in A$ se esiste una trasformazione lineare $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chiamata il **differenziale** della f in a, tale che risulti*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - Th\|}{\|h\|} \;=\; 0 \;. \tag{6.10}$$

La trasformazione T viene denotata con $DF(a)$ o anche $df(a)$ quando si tratta di una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ a valori reali. Una mappa F differenziabile è una mappa differenziabile in ogni punto dell'aperto A. L'equazione (6.10) dice che il differenziale $Df(a)$ è la migliore approssimazione lineare della F nel punto a. Cioè,

$$F(a+h) = F(a) + DF(a)h + o(\|h\|) \tag{6.11}$$

Usando la (6.11) si dimostra facilmente che il differenziale di una mappa composta è la composizione dei differenziali. Più precisamente, se $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $G\colon V \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ sono differenziabili allora anche $H = G \circ F$ lo è. Inoltre vale

$$DH(x) = DG(F(x)) \circ DF(x) \tag{6.12}$$

Se scriviamo F nella forma $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$, dove $F_1, \dots, F_m\colon A \to \mathbb{R}$ sono le sue componenti, vediamo che F è differenziabile in A se e soltanto se lo sono anche le sue componenti F_i.
Una nota condizione necessaria e sufficiente per la differenziabilità di una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ nell'aperto A è che esistano e siano continue le sue derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $1 \le j \le n$. Quindi una mappa $F\colon A \to \mathbb{R}^n$ sarà differenziabile se e soltanto se sono definite e continue tutte le derivate parziali $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$, per ogni (i,j) $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. Denoteremo con $C^1 = C^1(A, \mathbb{R}^m)$ l'insieme delle applicazioni $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ verificanti questa proprietà. Più generalmente diremo che F è C^k se tutte le sue derivate fino all'ordine k-esimo sono continue.

Definizione 6.8. *La* matrice jacobiana *della F nel punto $a \in A$ è la matrice*

$$JF(a) \;=\; \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right) \;\in M^{m \times n}$$

Si dimostra facilmente che la matrice jacobiana della F in a è la matrice della trasformazione lineare $DF(a)$ rispetto alle basi canoniche e_j di $\mathbb{R}^n$ ed e_i di $\mathbb{R}^m$. In seguito identificheremo spesso $DF(a)$ con la matrice jacobiana $JF(a)$.

In particolare se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione, allora per ogni $h \in \mathbb{R}^n$

$$df(a)h \;=\; < \nabla f(a), h >, \tag{6.13}$$

dove $\nabla f(a)$ è il *gradiente della f in a*, cioè

$$\nabla f(a) \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n$$

Passiamo adesso al teorema della funzione inversa.

Definizione 6.9. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti. Diremo che $F\colon A \to B$ è un diffeomorfismo di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, se F è C^k, invertibile e l'inversa $F^{-1}\colon B \to A$ è C^k.*

Teorema 6.19 (Teorema della funzione inversa)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, sia p un punto di A e sia $F\colon A \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k tale che il differenziale $DF(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia un isomorfismo. Allora esistono un intorno aperto U di p e un intorno aperto V di $q = F(p)$ tali che la restrizione della F ad U, $F_{|U}\colon U \to V$ è un diffeomorfismo di classe C^k.*

Il teorema della funzione inversa dice quindi, che se $DF(p)$ è un isomorfismo allora F è un diffeomorfismo locale (cioè in un intorno di p) .

Esempio: Sia $f(x) = x^3$. Evidentemente, questa funzione non soddisfa le ipotesi del teorema della funzione inversa in $x = 0$. La sua funzione inversa esiste ed è continua ma non è derivabile in 0.

Esempio: Per ogni $\epsilon > 0$ la funzione $f(x) = x^3 + \epsilon x$ è C^∞ (anche analitica), il differenziale di f è sempre un isomorfismo perché la derivata della f è positiva in ogni punto. Il teorema della funzione inversa, ci assicura che la funzione $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esiste ed è C^∞.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità posiamo supporre che $p = 0$ (per avere questo basterà traslare l'aperto A). Possiamo anche assumere che il differenziale $DF(0) = \mathrm{Id}$ perché, essendo $DF(0)$ un isomorfismo, se il teorema è valido per $\tilde{F} = DF(0)^{-1} \circ F$ risulta valido anche per la mappa F.
Sia $G(x) = x - F(x)$. Per costruzione, $DG(0) = 0$ e quindi possiamo trovare un r tale che per ogni $x \in B(0, 2r)$ si ha che $\|DG(x)\| < 1/2$. Usando il teorema del valor medio di Lagrange, come nella dimostrazione dell'esistenza e unicità della soluzione d'una equazione differenziale, otteniamo che nella palla $B(0, 2r)$ vale anche $\|G(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$ ed in particolare

$$G(\bar{B}(0, r)) \subset \bar{B}(0, r/2)$$

Consideriamo ora $G_y(x) = y + x - F(x)$, allora $G_0 = G$ e ogni punto fisso della mappa G_y risolve l'equazione $F(x) = y$. Inoltre, se $\|y\| \leq \frac{1}{2}r$, allora per ogni $x \in \bar{B}(0, r)$ si ha

$$\|G_y(x)\| \leq \frac{1}{2}r + \|G(x)\| \leq \frac{1}{2}r + \leq \frac{1}{2}r = r$$

Il che dimostra che G_y manda la palla chiusa $\bar{B}(0, r)$ in sé stessa. Inoltre,

$$\|G_y(x) - G_y(x')\| = \|G(x) - G(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|.$$

Quindi $G_y\colon \bar{B}(0,r) \to \bar{B}(0,r)$ è una contrazione e avrà un unico punto fisso x che risolve l'equazione $y = F(x)$ per ogni $y \in \bar{B}(0,r/2)$. Questo definisce la mappa inversa $F^{-1}\colon B(0,r/2) \to B(0,r)$. La continuità della F^{-1} si dimostra facilmente osservando che l'unico punto fisso della contrazione G_y è una funzione continua di y. Alternativamente, dalla definizione di G ricaviamo che

$$\|x - x'\| \leq \|F(x) - F(x')\| + \|G(x) - G(x')\| \leq \|F(x) - F(x')\| + \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

e quindi

$$\|x - x'\| \leq 2\|F(x) - F(x')\|.$$

Sostituendo $x = F^{-1}(y)$ e $x' = F^{-1}(y')$ otteniamo la continuità della mappa F^{-1}.

Per dimostrare la differenziabilità della funzione inversa si usa una disuguaglianza simile. Se $x = F^{-1}(y)$ e $x + k = F^{-1}(y + h)$ si ha

$$\|F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - [DF(x)]^{-1}h\| = \|k - [DF(x)]^{-1}(F(x+k) - F(x)\|$$

$$\leq \|[DF(x)]^{-1}\|\|Df(x)k + F(x) - F(x+k)\| \leq M\|Df(x)k + F(x) - F(x+k)\|$$

Dove $M = \sup_{x\bar{B}(0,1)} \|[DF(x)]^{-1}\|$. Ora è facile vedere che il lato destro è un $o(\|h\|)$ e quindi F^{-1} è differenziabile. Lo stesso metodo dimostra che se $F \in C^k$ allora anche $F^{-1} \in C^k$. □

6.6 Teorema della funzione implicita

Definizione 6.10. *Consideriamo un sottoinsieme $M \subset \mathbb{R}^n$ con la topologia relativa, un punto $p \in M$ e un intorno aperto $U \subseteq M$ di p. Una* **parametrizzazione** *C^k di U per un aperto V di $\mathbb{R}^m$ è una mappa C^k, $P =\colon V \to \mathbb{R}^n$ tale che $P(V) = U$ e $P\colon V \to U$ sia un omeomorfismo fra V ed U. La mappa $H = P^{-1}\colon U \to V$ si chiama* **un sistema di coordinate** *nel punto p e la coppia (U, H) si dice una* **una carta** *nel punto p*

Aggiungiamo che una **varietà** C^k di dimensione d è una coppia $(M,\mathcal{U})$ da uno spazio topologico Hausdorff e una famiglia di carte $\mathcal{U} = \{\,(U,H)\,\}$ (cioè U aperto di M e $H\colon U \to V$ è un omeomorfismo di U con un sottoinsieme aperto V di $\mathbb{R}^d$) che ricopre M e verifica la proprietà:

(%) *Per ogni copia $(U_1, H_1), (U_2, H_2) \in \mathcal{U}$ La mappa $H_2^{-1}H_1$ è un diffeomorfismo C^k del aperto $V_1 \cap V_2$ con se stesso* e che è massimale rispetto questa proprietà, nel senso che se una carta (V, R) verifica la affermazione di sopra con rispetto ad ogni $(U, H) \in \mathcal{U}$ allora $(V, R) \in \mathcal{U}$

Nota Bene 6.1. *$\mathcal{U}$ si chiama atlante o struttura C^k. Osservare che ogni spazio di Hausdorff M ricopribile da una famiglia di carte $\mathcal{U}'$ verificante* (%) *ammette un unico atlante C^k di cui $\mathcal{U}'$ fa parte. Quindi, per dare una struttura di varietà differenziabile ad M basta coprirla con una famiglia di aperti omeomorfi di $\mathbb{R}^d$ tale che valga* (%).

Definizione 6.11. *Sia $G\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione C^k. Un punto x tale che $DG(x)$ è suriettiva si dice punto* **regolare** *della f.*

Un punto non regolare si dice punto **critico.** Per il teorema del rango f ha punti regolari se e soltanto se $m \leq n$. Osserviamo anche che quando $m = 1$ e G si riduce ad una funzione $g\colon U \to \mathbb{R}$ allora $x \in U$ è un punto critico se e soltanto se $dg(x)$ è identicamente nulla e quindi, per (6.14), $\nabla g(x) = 0$.

Il teorema della funzione implicita ci dice che un sottoinsieme M definito implicitamente dall'equazione $M = \{\, x \mid G(x) = 0 \,\}$, ammette una parametrizzazione locale in qualche intorno di ogni suo punto regolare. (Pensate alle equazioni implicite e parametriche della retta). Più precisamente:

Teorema 6.20 (Teorema della funzione implicita)**.** *Sia $G\colon A \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^k definita in un aperto A di R^n e sia $d = n - m$. Sia*

$$M = G^{-1}(0) = \{\, x \in A \mid G(x) = 0 \,\},$$

e sia p un punto di M tale che il differenziale $DG(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sia suriettivo. Allora esiste un intorno aperto U di p in M, un aperto $V \subseteq \mathbb{R}^d$ e una parametrizzazione $P\colon V \to U$

Dimostrazione. Prima di tutto dimostriamo che esiste una trasformazione lineare $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ tale che la mappa $F\colon A \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ definita da

$$F(x) = (Tx, G(x))$$

soddisfa le ipotesi del teorema della funzione inversa nel punto p. Osserviamo che se F è definita come sopra e $L = DG(p)$, allora $DF(p)h = (Th, Lh)$. Quindi dobbiamo trovare una trasformazione T tale che il lato destro risulti un isomorfismo. Per il teorema del rango $\dim \ker L = d = n - m$. Definiamo T come la composizione della proiezione $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \ker L$ con un qualsiasi isomorfismo $I\colon \ker L \to \mathbb{R}^d$

Esercizio 6.21. *Verificare che se T è così definita, allora $(T, L)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ è un isomorfismo.*

Applicando a $F = (T, G)$ il teorema della funzione inversa, troviamo un intorno aperto U' di p in $\mathbb{R}^n$ ed un intorno aperto $V' \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$ di $F(p)$ tali che

$$F_{|U'}\colon U' \to V'$$

sia invertibile e con un'inversa di classe C^k.
Se $x \in M \cap U'$ si ha $G(x) = 0$ e quindi $F(x) = (T(x), 0)$. Risulta dunque che

$$F_{|U'}(M \cap U') = \{(s, t) \in V' | t = 0\}.$$

Se identifichiamo $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ con $\mathbb{R}^d$ e definiamo

$$V = V' \cap \mathbb{R}^d \times \{0\} \text{ e } U = U' \cap M,$$

otteniamo che la restrizione della mappa F^{-1} all'aperto $V \subseteq \mathbb{R}^d$ è una parametrizzazione C^k di U per V. □

Un punto $y \in \mathbb{R}^m$ si dice **valore regolare** della $G\colon A \to \mathbb{R}^m$ se $DG(x)$ è suriettiva per ogni $x \in G^{-1}(y)$. Da un classico teorema di Sard si deduce che l'insieme dei valori regolari di una mappa C^∞ è denso in $\mathbb{R}^m$. Come corollario del teorema precedente otteniamo:

Corollario 6.22. *Se $G: A \to \mathbb{R}^m$ è C^k e se 0 è un suo valore regolare allora $M = G^{-1}(0)$ è una sottovarietà C^k di A di dimensione $d = n - m$.*

Per dimostrare 6.22 basta verificare che se $P_1: V_1 \to U_1$ e $P_2: V_2 \to U_2$ sono due parametrizzazioni locali di M ottenute nel teorema precedente allora

$$P_2^{-1} \circ P_1: V_1 \cap V_2 \to U_1 \cap U_2$$

è C^k, cosa che lasciamo come esercizio.
Un altro esercizio importante è il seguente:

Esercizio 6.23. *Siano G, M come nel corollario precedente, sia $p \in M$ e sia $P: V \to U$ una parametrizzazione C^k di un intorno aperto di p. Sia $q \in V$ tale che $P(q) = p$. Dimostrare che lo spazio tangente $T_p(M)$ nel punto p verifica*

$$T_p(M) = \ker DG(p) = \operatorname{Im} DP(q)$$

In particolare $DG(p)h = 0$ se e soltanto se $h = DP(q)k$ per qualche $k \in \mathbb{R}^d$.

Concludiamo lasciando come esercizio la versione classica del teorema della funzione implicita.

Esercizio 6.24. *Sia $G: A \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^k. Supponiamo che il minore costituito dalle ultime m colonne della matrice jacobiana $JG(p)$ abbia determinate diverso da 0. Dimostrare che esiste un aperto $V \subset \mathbb{R}^d$, un aperto $U \subseteq A$ contenente p ed una funzione C^k, $\Phi: V \to \mathbb{R}^m$ tale che $G^{-1}(0) \cap U = \{(x, \Phi(x)) \in V \times \mathbb{R}^m\}$. Ossia in U, $M = G^{-1}(0)$ è descritto dal grafico della funzione implicita Φ.*

6.7 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Un'interessante applicazione del teorema della funzione implicita è costituita dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Lo dimostreremo qui solo nel caso di un vincolo C^1 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che $0 \in \mathbb{R}$ sia un valore regolare della g e consideriamo la ipersuperficie $M = g^{-1}(0)$ di $\mathbb{R}^n$.
Poiché $dg(x)h =< \nabla g(x), h >$, la condizione di regolarità si traduce nella condizione $\nabla g(x) \neq 0$ per ogni $x \in M$. Per l'esercizio 6.24 risulta che $< \nabla g(x), h >= 0$ per ogni $h \in T_x(M)$ ossia che il vettore gradiente del vincolo g, $\nabla g(x)$ è un vettore normale alla ipersuperficie M nel punto x (abbiamo così scoperto che il gradiente è sempre ortogonale agli insiemi di livello di g).

Data una funzione C^1 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ il nostro problema consiste nel trovare i punti di massimo e minimo della restrizione della funzione f alla varietà m definita implicitamente dal vincolo g. Tali punti diconsi **estremi vincolati** della f.

Teorema 6.25 (Lagrange)**.** *Siano f, g e $M = g^{-1}(0)$ come sopra e sia p un punto di minimo (rispettivamente massimo) della restrizione $f_{|M}: M \to \mathbb{R}$ della f alla varietà M. Allora esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ detto moltiplicatore di Lagrange tale che $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$. In altre parole esiste λ tale che il punto $(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è un punto critico (stazionario) del funzionale libero*

$$h(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

Dimostrazione. sia $P\colon V \to U$ una parametrizzazione locale di M in un intorno U di p. Se p è un minimo (risp. massimo) relativo della $f_{|M}$ allora $q = P^{-1}(p)$ è un estremo relativo della funzione $\bar{f} = f_{|M} \circ P$ definita sull'aperto V di R^{n-1} e quindi un punto critico della $\bar{f}$. Dunque $d\bar{f}(q)k$=0 per ogni $k \in R^{n-1}$. Ma

$$d\bar{f}(q)k = df_{|M}(p) \circ DP(q)k. \tag{6.14}$$

Per l'esercizio, 6.24, $\operatorname{Im} DP(q) = T_p(M)$. Quindi l'equazione (6.14) dimostra che la restrizione di $df(p)$ allo spazio tangente $T_p(M)$ è nulla. Il che, sulla base di (6.13), dice che $\nabla f(p)$ è ortogonale a $T_p(M)$ e quindi deve esistere un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$. $\square$

Analogamente si dimostra che se $M = G^{-1}(0)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ definita da una mappa

$$G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad G(x) = \big(g_1(x) \dots g_k(x)\big)$$

e p è un estremo della f ristretta ad M allora esistono $\lambda_1, \dots \lambda_k$ tali che

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(p).$$

Esercizio 6.26. *Trovare il volume massimo di una scatola rettangolare che possa essere incartata da un foglio di carta di area A prefissata.*

Esercizio 6.27. *Sia $A \in M^{n\times n}$ una matrice quadrata. Siano*

$$\lambda_m = inf_{x\in S} < Ax, x >, \quad \lambda_M = sup_{x\in S} < Ax, x >,$$

dove $S = S^{n-1} = \{x | \|x\|_2 = 1\}$. Dimostrare che λ_m, λ_M sono autovalori della matrice A tali che per ogni autovalore λ di A si ha $\lambda_m \leq \lambda \leq \lambda_M$.

7 Complementi di Topologia

7.1 Base di una topologia

Definizione 7.1. *Diremo che una sottofamiglia $\mathcal{B}$ della topologia $\mathcal{T}$ è una* **base** *di $\mathcal{T}$ se ogni aperto di $\mathcal{T}$ è unione di insiemi appartenenti a $\mathcal{B}$.*

Data una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X tale che $X = \cup_{B\in\mathcal{B}} B$ è facile vedere che esiste un'unica topologia $\mathcal{T}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base se e soltanto se la famiglia $\mathcal{B}$ verifica la seguente proprietà:
(*) *dati due elementi U, V di $\mathcal{B}$ ed un punto $x \in U \cap V$ esiste un elemento $W \in \mathcal{B}$ tale che $x \in W \subset U \cap V$.*
Tutti gli aperti della topologia $\mathcal{T}$ generata da una famiglia $\mathcal{B}$ che ha la proprietà (*) s'ottengono come unioni arbitrarie degli elementi di $\mathcal{B}$, con la convenzione che l'unione di una famiglia vuota è l'insieme vuoto.

Esercizio 7.1. *Dimostrare che se $\mathcal{B}$ è una base della topologia $\mathcal{T}$ allora U appartiene a $\mathcal{T}$ se e soltanto se per ogni $x \in U$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset U$.*

Esempio: L'esempio fondamentale di una base della topologia si ritrova nella definizione degli aperti di uno spazio metrico (X, d). In questo caso, la famiglia

$$\mathcal{B} = \{\, B(x, r) \;\mid\; x \in X,\; r > 0 \,\}$$

è una base di $\mathcal{T}_d(X)$.

Esercizio 7.2. *Dimostrare che anche $\mathcal{B} = \{\, B(x, q) \;\mid\; x \in X,\; q \in \mathbb{Q}, q > 0 \,\}$ è una base di $\mathcal{T}_d(X)$.*

In ogni caso, qualsiasi topologia resta completamente determinata da una sua base e quindi per descrivere una topologia basterà esibire una base di essa, esattamente come facciamo nel caso degli spazi metrici. Grazie a questo fatto possiamo verificare varie proprietà topologiche controllando che siano valide solo sugli elementi di una base della topologia.

Esercizio 7.3. *Sia $f\colon X \to Y$ una mappa fra due spazi topologici. Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di Y. Dimostrare che f è continua se e soltanto se $f^{-1}(B)$ è aperto in X per ogni elemento $B \in \mathcal{B}$.*

Una base de intorni di un punto $x \in X$ è una famiglia $\mathcal{B}_x$ di intorni aperti di x tale che ogni intorno aperto U di x contiene un intorno V di x appartenente a $\mathcal{B}_x$.
Diremo che uno spazio topologico verifica il **primo assioma di numerabilità** ($\mathbb{N}1$) se ogni suo punto possiede una base numerabile di intorni.
Diremo che uno spazio topologico verifica il **secondo assioma di numerabilità** ($\mathbb{N}2$) se la sua topologia ha una base numerabile di aperti.
Ogni spazio metrico verifica il primo assioma di numerabilità (basta prendere intorni del punto della forma $B(x, q)$ con $q > 0$ razionale) , ma non necessariamente verifica il secondo assioma di numerabilità.
Un sottoinsieme D di X si dice **denso** in X se $\bar{D} = X$. Equivalentemente D è denso in X se ogni aperto di X contiene un punto di D.
Uno spazio topologico si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme numerabile denso.

Esempio: $X = \mathbb{R}^n$ è separabile; infatti $D = \mathbb{Q}^n$ è denso in X. Anche $C[a, b]$ lo è (Teorema di Stone-Weierstrass).

Teorema 7.4. *Se X soddisfa $\mathbb{N}2$ allora è separabile. Reciprocamente se X verifica $\mathbb{N}1$ (ad esempio se è metrico) ed è separabile allora verifica $\mathbb{N}2$.*

Dimostrazione. Per dimostrare la prima affermazione basterà scegliere un punto in ogni aperto della base e prendere come D un insieme formato da tutti questi. Chiaramente D risulterà denso in X. Per la seconda, se $D = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ basterà prendere, per ogni x_n del insieme denso, una base numerabile di intorni $\mathcal{N}_{x_n}$ allora $\mathcal{B} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{N}_n$ risulterà essere una base numerabile di aperti. □

Esercizio 7.5. *Verificare quest'ultima affermazione.*

Esercizio 7.6. *Dimostrare che*

$$B[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty\}$$

considerato con la norma $\|.\|_\infty$ non è separabile. In particolare risulta che $B[a, b]$ è verifica $\mathbb{N}1$(è metrico) ma non $\mathbb{N}2$.

Esercizio 7.7. *Uno spazio topologico si dice di Lindelof se ogni ricoprimento della spazio per insiemi aperti ha uno sotto-ricoprimento numerabile. Dimostrare che ogni spazio $\mathbb{N}2$ è di Lindelof.*

7.2 Topologia iniziale, topologia prodotto

Cerchiamo una risposta al seguente problema: dato un insieme X ed una famiglia di funzioni

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in A\}$$

da X a valori negli spazi topologici Y_α, che topologia possiamo definire su X in modo che tutte le f_α siano continue?

Sappiamo che almeno una topologia c'è. Infatti, se consideriamo la topologia discreta su X allora ogni $f_\alpha : (X, \mathcal{T}_{disc}) \to (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ è continua. La topologia discreta però è troppo grande per essere interessante.

Definizione 7.2. *La topologia iniziale $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ di X per la famiglia $\mathcal{F}$ è la topologia più piccola che rende tutte le f_α continue.*

Se la famiglia $\mathcal{F}$ consiste di una sola mappa $f : X \to Y$ risulta facile caratterizzare la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{F})$. Infatti, in questo caso

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \{U = f^{-1}(V) | V \text{aperto di } Y\}$$

forma una topologia che, per la sua definizione, risulta essere la più piccola topologia che rende continua la mappa f.

Un esempio importante di topologia iniziale definita da una sola funzione è la topologia relativa:

Sia $A \subset X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$. Consideriamo la **mappa inclusione** $i\colon A \to X$ definita da $i(x) = x$. La più piccola topologia $\mathcal{T}$ che rende continua la mappa i è la *topologia relativa* $\mathcal{T}_{rel}$.
Infatti, preso un aperto U di X abbiamo che

$$i^{-1}(U) = \{\, x \in A \ \mid \ i(x) = x \in U \,\} = U \cap A.$$

Ma gli insiemi di questa forma sono precisamente gli aperti della topologia $\mathcal{T}_{rel}$.

Se la famiglia $\mathcal{F}$ consiste in più di una mappa la descrizione della topologia iniziale associata risulta più complicata.

Proposizione 7.8. *Dato un insieme X ed una famiglia di mappe*

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha\colon X \to (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\, \alpha \in A\}$$

da un insieme X a valori nei spazi topologici Y_α, la topologia iniziale $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ è la topologia avente come base la famiglia di tutte le intersezioni finite delle controimmagini degli aperti di Y_α. In altre parole, $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ ha come base la famiglia:

$$\mathcal{B} = \{f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap ... \cap f_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) | U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i},\, 1 \le i \le k\} \tag{7.1}$$

Dimostrazione. Lasciata al lettore □

L'esempio più importante di topologia iniziale è quello della topologia prodotto. Dati due spazi topologici $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ la **topologia prodotto** sull'insieme $X \times Y = \{\, (x, y) \ \mid \ x \in X,\ y \in Y \,\}$ è la più piccola topologia che rende continue entrambe le proiezioni

$$\pi_x\colon X \times Y \to X$$

e

$$\pi_y\colon X \times Y \to Y.$$

Affinché π_x e π_y risultino continue, $\pi_x^{-1}(U)$ deve essere aperto in $X \times Y$ per ogni $U \in \mathcal{T}_1$ e $\pi_y^{-1}(V)$ deve essere aperto in $X \times Y$ per ogni $V \in \mathcal{T}_2$. Siccome l'intersezione finita di aperti è aperta allora

$$U \times V = \pi_x^{-1}(U) \cap \pi_y^{-1}(V)$$

deve essere un aperto di $\mathcal{T}_{prod}$.
Anche se gli aperti della forma $U \times V$ non formano una topologia la famiglia $\mathcal{P}$ degli sottoinsiemi di $X \times Y$ che sono prodotti di un aperto di X con uno di Y verifica banalmente la proprietà $(*)$ che caratterizza la base di una topologia (vedasi la sezione precedente) e quindi essi formano una base della topologia prodotto. Dalla discussione precedente risulta immediatamente la seguente importante caratterizzazione degli insiemi aperti dello spazio prodotto:

un sottoinsieme O di $X \times Y$ è un aperto nella topologia prodotto se per ogni $(x, y) \in O$ possiamo trovare un intorno aperto U di x in X e un introno aperto V di y in Y tale che $U \times V \subset O$.

Proposizione 7.9. *Se X, Y, Z sono spazi topologici, una mappa $f\colon Z \to X \times Y$ risulta continua se e soltanto $\pi_x \circ f\colon Z \to X$ e $\pi_y \circ f\colon Z \to Y$ sono continue.*

Dimostrazione. Il se è immediato in quanto composizione di mappe continue è continua. Per vedere che vale anche soltanto se osserviamo che per dimostrare che una mappa è continua basta verificare che la controimmagine di ogni elemento di una base della topologia sia aperta (perché?).
Ma
$$f^{-1}(U \times V) = (\pi_x \circ f)^{-1}(U) \cap (\pi_y \circ f)^{-1}(V)$$
e quindi si tratta di un insieme aperto in quanto intersezione di due aperti. □

Esercizio 7.10. *Dimostrare che le proiezione π_X è una mappe* **aperta,** *cioè $\pi_X(U)$ è aperto in X se U è un aperto di $X \times Y$. Verificare con esempi che invece l'immagine di un chiuso del prodotto non necessariamente risulta chiusa in X.*

Esercizio 7.11. *Dimostrare che il prodotto di due spazi di Hausdorff è di Hausdorff.*

Esercizio 7.12. *Siano X_i, $1 \leq i \leq n$, spazi topologici. Dire quali sono gli aperti della topologia prodotto nell'insieme $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = X$.*

Esercizio 7.13. *Dimostrare che $F \colon \mathbb{R}^n \to R^m$ definita da*
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
è continua se e soltanto se sono continue le sue componenti $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Esercizio 7.14. *Sia $\{X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia qualsiasi di spazi topologici. Usando la proposizione 7.8 descrivere gli aperti di $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

7.3 Topologia finale, topologia quoziente

Definizione 7.3. *Dato un insieme Y ed una famiglia di funzioni*
$$\mathcal{F} = \{f_\alpha \colon (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \to Y), \, \alpha \in A\},$$
la **topologia finale** *è la topologia più grande che possiamo definire su Y in modo che tutte le f_α risultino continue.*

Notare che la topologia indiscreta su Y è la topologia più piccola che rende tutte le f_α continue.

L'esempio più importante di topologia finale è la topologia quoziente.

Definizione 7.4. *Sia $q \colon X \to Y$ un'applicazione da uno spazio topologico X ad un insieme Y. La topologia quoziente su Y è la famiglia*
$$\mathcal{T}_{quoz} = \{\, U \subseteq Y \;\mid\; q^{-1}(U) \text{ è } aperto\ in\ X \,\}.$$

Esercizio 7.15. *Verificare che $\mathcal{T}_{quoz}$ è una topologia su Y e che rispetto a tale topologia q risulta continua. Inoltre ogni topologia rispetto alla quale q è continua deve essere contenuta in $\mathcal{T}_{quoz}$.*

Esercizio 7.16. *Dimostrare che se $q \colon X \to Y$ è suriettiva e se Y ha la topologia quoziente allora una mappa $f \colon Y \to Z$ è continua se e soltanto se la composizione $f \circ q$ è continua.*

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Per ogni $x \in X$ si denota la classe di equivalenza di x con

$$\bar{x} = \{\, y \in X \mid y \sim x \,\}.$$

Sia $X/\!\sim$ l'insieme di tutte le classi d'equivalenza. Per ogni $x \in X$, esiste una classe d'equivalenza $\alpha \in X/\!\sim$ tale che $x \in \alpha$. Inoltre se $\alpha = \bar{x}_1$ e $\beta = \bar{x}_2$, sono due classi d'equivalenza tali che $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, allora necessariamente $\alpha = \beta$ (infatti se esiste un $x \in \alpha \cap \beta$ si ha che $x_1 \sim x$ e $x_2 \sim x$, così che anche $x_1 \sim x_2$ ossia che $\alpha = \beta$).

Possiamo dunque scrivere

$$X = \bigcup_{\alpha \in X/\sim} \alpha.$$

Poiché le classi d'equivalenza sono due a due disgiunte ogni relazione d'equivalenza determina un'unica *partizione* dell'insieme X.
Reciprocamente ogni partizione determina una relazione di equivalenza definita dicendo che due elementi sono equivalenti se appartengono allo stesso elemento della partizione.
Sia $q\colon X \to X/\!\sim$, la proiezione al quoziente definita da $q(x) = \bar{x}$. Abbiamo che la mappa q è suriettiva.
Definiamo lo *spazio quoziente* di X per la relazione di equivalenza $\sim$ come l'insieme

$$X/\!\sim\, = \{\, \alpha \mid \alpha \text{ è classe di equivalenza di } \sim \}$$

munito con la topologia quoziente

$$\mathcal{T}_{quoz} = \{\, V \subset X/\!\sim \;\mid\; q^{-1}(V) \text{ è } \textit{aperto di } X \,\}.$$

Consideriamo la sfera unitaria $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\|_2 = 1\}$ con la topologia relativa. Definiamo una relazione d'equivalenza su S^n dicendo che $x \sim x'$ se e soltanto se $x' = -x$. Lo spazio quoziente $S^n/\!\sim\, = P^n$ si chiama spazio proiettivo.

Esercizio 7.17. *Dimostrare che la proiezione al quoziente $q\colon S^n \to P^n$ è una mappa aperta e che P^n è uno spazio topologico con la proprietà di Hausdorff.*

Esercizio 7.18. *Trovare un omeomorfismo fra P^1 e S^1.*

Nota Bene 7.1. *Per $n > 1$ lo spazio P^n è localmente omeomorfo a S^n (infatti, entrambi sono varietà differenziabili della stessa dimensione), ma sono lungi dall'essere omeomorfi. Infatti l'immagine $q(\gamma)$ di un camino geodetico γ che va da x a $-x$ sulla sfera è un laccio su P^n che non si può contrarre ad un punto, mentre tutti i lacci su S^n con $n > 1$ sono contraibili ad un punto.*

Esercizio 7.19. *Dimostrare che la topologia $\mathcal{T}_{quoz}$ verifica la seguente proprietà universale:*
Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza sullo spazio topologica X e sia $q\colon X \to X/\!\sim$ la proiezione al quoziente. Allora per ogni mappa continua $f\colon X \to Y$ tale che $f(x) = f(x')$ qualora $x \sim x'$ esiste un'unica mappa $\bar{f}\colon X/\!\sim\, \to Y$ continua tale che $\bar{f} \circ q = f$.

8 Compattezza

8.1 Spazi topologici compatti

Definizione 8.1 (Heine-Borel)**.** *Dato uno spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$*, un sottoinsieme* $K \subset X$ *si dice compatto se ogni ricoprimento di* K *per aperti di* X *ha un sottoricoprimento finito. In altre parole, data una famiglia di aperti* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *di* X*, tali che* $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$*, esistono* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *tali che*

$$K \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

Se $K = X$*,* X *si dice spazio topologico compatto.*

Esercizio 8.1. *Dimostrare che un'unione finita di sottoinsiemi compatti di* X *è un sottoinsieme compatto.*

Esercizio 8.2. *Dimostrare che* $K \subset X$ *è compatto se e solo se* $(K, \mathcal{T}_{rel})$ *è uno spazio compatto.*

Definizione 8.2. *Una famiglia* $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ *ha la proprietà PIF (Proprietà di intersezione finita) se ogni sua sottofamiglia finita ha l'intersezione non vuota.*

Esercizio 8.3. *Dimostrare che* X *è compatto se e solo se ogni famiglia* $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ *di chiusi di* X *che abbia la proprietà PIF ha intersezione non vuota.*
In altre parole, X *è compatto se e solo se verifica la proprietà seguente:*
Per ogni famiglia $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ *di chiusi di* X *tali che, per ogni scelta di un numero finito di indici* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$*, si ha che* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_{\alpha_i} \neq \emptyset$ *allora* $\bigcap\limits_{\alpha \in A} C_\alpha \neq \emptyset$*.*

Teorema 8.4. *Se* X *è uno spazio topologico compatto e* $K \subset X$ *chiuso allora* K *è un sottoinsieme compatto.*

Dimostrazione. Sia $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ricoprimento di K per aperti di X.
Poiché K è chiuso l'insieme $V = X \setminus K = K^c$ è aperto e si ha che

$$X = K \cup K^c = K \cup V \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \cup V$$

ossia $\{U_\alpha, V\}_{\alpha \in A}$ è un ricoprimento di X. Ma X è compatto e dunque esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \cup V$. Ma allora $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$e quindi K è compatto. $\square$

8.2 Proprietà di separazione degli spazi compatti

Teorema 8.5. *Sia* X *uno spazio topologico di Hausdorff e sia* $K \subset X$ *compatto. Se* $x \notin K$ *allora esistono* U *e* V *aperti con* $x \in U$ *e* $K \subset V$ *tali che* $U \cap V = \emptyset$*.*

Dimostrazione. Poiché X è T_2 per ogni $y \in K$ esistono intorni aperti U_y(occhio!) **del punto** x e V_y di y tali che $U_y \cap V_y = \emptyset$. Allora $K \subset \bigcup\limits_{y \in K} V_y$ e siccome K è compatto esistono $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ tali che $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$.

Consideriamo $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ e $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Abbiamo che V è aperto e $K \subset V$, ma anche U è aperto perché intersezione finita di aperti e $x \in U$. A questo punto abbiamo che

$$U \cap V = U \cap (\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} U \cap V_{y_i} = (U \cap V_{y_1}) \cup \cdots \cup (U \cap V_{y_n}) = \emptyset,$$

perché $U_{y_i} \bigcap V_{y_i} = \emptyset$ implica necessariamente che anche $U \cap V_{y_i} = \emptyset$ poiché $U \subset U_{y_i}$.

□

Corollario 8.6. *Se X è T_2 e $K \subset X$ è compatto allora K è chiuso in X.*

Dimostrazione. Basta vedere che $X \setminus K$ è aperto.
Per il teorema precedente si ha che se $x \in X \setminus K$ allora esistono U e V aperti tali che $x \in U$, $K \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$ quindi $U \subset X \setminus K$. Siccome U è aperto, $X \setminus K$ deve essere aperto poiché ogni suo punto ha un intorno aperto contenuto in $X \setminus K$. □

Teorema 8.7. *Se X è compatto e T_2 allora X è T_4.*

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che X è T_3. Dato $A \subset X$ chiuso e $x \notin A$, vediamo che esistono U, V aperti con $x \in U$ e $A \subset V$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Poiché X è compatto anche A lo è. A questo punto si usa il risultato del teorema precedente per trovare U, V disgiunti con $x \in U$ e $A \subset V$.
Dimostriamo adesso che X è T_4. Siano $A, B \subset X$ chiusi e disgiunti. Cerchiamo U, V aperti con $A \subset U$ e $B \subset V$ tali che $U \cap V = \emptyset$.
Per il teorema (8.4), A, B sono compatti. Se $x \in A$ allora $x \notin B$ poiché $A \cap B = \emptyset$. Siccome B è compatto, per il teorema (8.5), esistono U_x, V_x aperti con $x \in U_x$ e $B \subset V_x$ tali che $U_x \cap V_x = \emptyset$. Dato che $x \in U_x$, $(U_x)_{x \in A}$ è un ricoprimento di A, esistono $x_1, \ldots, x_n$ tali che $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Inoltre $B \subset V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$ perché $B \subset V_{x_i}$ $\forall i$, $1 \leq i \leq n$.
Siano $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ e $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Risulta $A \subset U$ e $B \subset V$, inoltre U, V sono aperti perché unione ed intersezione finita di aperti. Ora $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ e, per ogni i, $U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$. Quindi $U_{x_i} \cap V = \emptyset$. In conclusione

$$U \cap V = (\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}) \cap V = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap V) = \emptyset.$$

□

8.3 Caratterizzazione degli sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$

Teorema 8.8. *L'intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $I = [a, b]$ e sia $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$ tale che $I \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Sia poi J l'insieme delle x in I per le quali esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tali che $[a, x] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

L'insieme J è non vuoto perché $a \in J$, infatti $[a, a] = \{ a \} \subset U_{\alpha_1}$. Esso è anche limitato superiormente perché b è un maggiorante di J. Quindi deve esistere $x_0 = \sup J$.
Supponiamo che $x_0 < b$ e consideriamo un U_α tale che $x_0 \in U_\alpha$. Prendiamo $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset U_\alpha$. Allora, per definizione dell'insieme J, esiste un famiglia finita tale che $[a, x_0 - \delta] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.
Ma allora $[a, x_0 + \delta] \subset U_\alpha \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$, il che contraddice il fatto che $x_0 = \sup J$.
Dunque $x_0 = b$. Ma un argomento identico a quello di sopra dimostra che, se $b = \sup J$, allora $b \in J$ e quindi $[a, b]$ è ricopribile con un sottoricoprimento finito. □

Teorema 8.9 (Heine-Borel)**.** *Un sottoinsieme C della retta $\mathbb{R}$ è compatto se e soltanto se C è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Se C è compatto allora C è chiuso poiché $\mathbb{R}$ è metrico e quindi T_2. Per dimostrare che C è limitato consideriamo $U_n = (-n, n)$. Chiaramente $\bigcup_{n\geq 1} U_n = \mathbb{R}$ e quindi $C \subset \bigcup_{n\geq 1} U_n$. Poiché C è compatto esistono $n_1, \dots, n_r$ tali che $C \subset \bigcup\limits_{n=1}^{r} U_{n_i} = \bigcup\limits_{n=1}^{r} (-n_i, n_i)$. Se $m = \max\limits_{1\leq i\leq r} n_i$, allora $C \subset (-m, m)$ e quindi C è limitato.
Reciprocamente, se C è chiuso e limitato, per la limitatezza di C deve valere che $C \subset [-n, n]$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, ma $[-n, n]$ è compatto e quindi C è sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto. Dal teorema (8.4) si conclude che C è compatto. □

8.4 Immagine continua di un compatto

Teorema 8.10. *Se X è compatto e $f : X \to Y$ è continua allora $f(X)$ è un sottoinsieme compatto di Y.*

Dimostrazione. Se $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è un ricoprimento di $K = f(X)$ per aperti di Y, allora gli aperti $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ formano un ricoprimento per aperti di X. Infatti V_α sono aperti perché f è continua. Per vedere che di ricoprimento si tratta, osserviamo che essendo $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un ricoprimento di $f(X)$, preso un $x \in X$ esiste almeno un α tale che $f(x) \in U_\alpha$. Si ha allora che

$$x \in f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(U_\alpha) = V_\alpha,$$

e quindi $X = \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$. Siccome X è compatto esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$ ma allora

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f(V_{\alpha_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

Si conclude quindi che $f(X)$ è compatto. □

Teorema 8.11. *Se X è compatto allora ogni mappa continua $f : X \to Y$ a valori in uno spazio di Hausdorff Y manda chiusi in chiusi; ossia se $C \subset X$ è chiuso allora $f(C) \subset Y$ è chiuso.*

Dimostrazione. Se $C \subset X$ è chiuso e X è compatto allora C è compatto per il teorema (8.4). Dunque, per il teorema (8.10), $f(C)$ è compatto e quindi chiuso, per il corollario (8.6). $\square$

Teorema 8.12. *Se $f\colon X \to Y$ è continua e biiettiva con X compatto e Y è uno spazio T_2, allora f è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che la mappa f^{-1} è continua. Per questo basterà dimostrare che se $g = f^{-1}$, allora $g^{-1}(C)$ è chiuso per ogni C chiuso in X, ma siccome $g = f^{-1}$ implica che $g^{-1}(C) = f(C)$, questo discende teorema (8.11). $\square$

Teorema 8.13 (Weierstrass generalizzato)**.** *Sia X uno spazio topologico compatto e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua. Allora esistono $x_1, x_2 \in X$ tali che*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in X.$$

In altre parole, su uno spazio topologico compatto ogni funzione continua raggiunge il suo valore massimo e minimo.

Dimostrazione. Essendo X compatto anche $f(X)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ e quindi è chiuso e limitato. Pertanto ammette un maggiorante ed un minorante. Per completezza di $\mathbb{R}$ esistono $m = \inf_{x \in X} f(x)$ ed $M = \sup_{x \in X} f(x)$.
Poiché $M = \sup \{ f(x) \mid x \in X) \}$, preso $M_n = M - 1/n$ devono esistere $x_n \in X$ tali che $M - 1/n \leq f(x_n) \leq M$. In questo modo troviamo una successione $(x_n) \in X$ tale che $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M$.
Allora $M \in \overline{f(X)}$ poiché è il limite di una successione di punti in $f(X)$. Essendo $f(X)$ è chiuso avremo $M \in f(X) = \overline{f(X)}$, ossia che esiste $x_2 \in X$ tale che $M = f(x_2)$.
Analogamente si dimostra che $m = f(x_1)$ per qualche $x_1 \in X$. Dunque $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in X$.
$\square$

Corollario 8.14. *Ogni funzione continua su uno spazio topologico compatto X è limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$.*

Corollario 8.15 (Weierstrass)**.** *Ogni funzione continua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ raggiunge il suo valore massimo e minimo.*

8.5 Prodotto di spazi topologici compatti

Teorema 8.16. *X, Y sono spazi topologici compatti se e soltanto se $X \times Y$ è uno spazio topologico compatto.*

Dimostrazione. Innanzitutto, se $X \times Y$ è compatto dal teorema 8.10 deriva che anche X e Y lo sono, dal momento che le proiezioni $\pi_x\colon X \times Y \to X$ e $\pi_y\colon X \times Y \to Y$ sono continue e suriettive.

Reciprocamente, siano X e Y compatti e sia $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento di $X \times Y$. Per definizione della topologia prodotto ogni W_α sarà della forma

$$W_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} U_{\alpha,\beta} \times V_{\alpha,\beta}$$

con $U_{\alpha,\beta}$ aperto di X e $V_{\alpha,\beta}$ aperto di Y.
Se consideriamo $C = \bigcup_{\alpha \in A} \{\alpha\} \times B_\alpha$, e denotiamo con $\gamma = (\alpha, \beta)$, abbiamo che $\{U_\gamma \times V_\gamma\}_{(\gamma) \in C}$ è un ricoprimento di $X \times Y$.
Ora, per ogni $x \in X$, $\{ x \} \times Y$ è compatto perché omeomorfo a Y e poiché $\{U_\gamma \times V_\gamma\}_{(\gamma) \in C}$ ricopre $\{ x \} \times Y$, deve contenere un sottoricoprimento finito di questo spazio. Quindi, deve esistere un sottoinsieme finito $I(x) \subset C$ tale che

$$\{ x \} \times Y \subset \bigcup_{(\gamma) \in I(x)} (U_\gamma \times V_\gamma).$$

Se consideriamo $U_x = \bigcap\limits_{\gamma \in I(x)} U_\gamma$, ogni U_x è aperto. Dunque la famiglia $(U_x)_{x \in X}$ è un ricoprimento per aperti dello spazio compatto X, e avrà un sottoricoprimento finito. Sia esso $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_m}\}$. Osserviamo ora che $I = \bigcup\limits_{j=1}^{m} I(x_j)$ è un sottoinsieme finito di C e dimostriamo che

$$X \times Y = \bigcup_{\gamma \in I} U_\gamma \times V_\gamma.$$

Infatti, se $(x, y) \in X \times Y$, allora $x \in U_{x_j}$ per qualche j e poiché $(x_j, y) \in \{ x_j \} \times Y$, si avrà $y \in V_\gamma$ per qualche $\gamma \in I(x_j) \subset I$. Inoltre, per definizione di U_x abbiamo che $U_{x_j} \subset U_\gamma$ e quindi $(x, y) \in U_\gamma \times V_\gamma$ con $\gamma = (\alpha, \beta) \in I$.
Questo dimostra che $\{U_\gamma \times V_\gamma\}_{\gamma \in I}$ è un ricoprimento finito di $X \times Y$. Però, per ogni $\gamma \in I$, l'insieme $U_\gamma \times V_\gamma$ è contenuto in qualche insieme W_γ del ricoprimento $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$. Scegliendo uno di loro per ogni γ otteniamo che $X \times Y = \bigcup_{\gamma \in I} W_\gamma$ e quindi abbiamo trovato un sottoricoprimento finito di $X \times Y$ estratto dal ricoprimento $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$. □

Ricapitoliamo i risultati delle sezioni precedenti: essi dicono che la compattezza di uno spazio è preservata per le inclusioni di sottospazi chiusi, quozienti e prodotti.
Infatti:

1. ogni sottospazio chiuso di un spazio compatto è compatto;
2. se $\sim$ è una relazione di equivalenza allora $X/\sim$ è compatto se X lo è (perché $\pi \colon X \to X/\sim$ è continua e suriettiva);
3. il prodotto di un numero finito di spazi compatti è compatto. Inoltre, anche se qui non lo dimostriamo qui, un prodotto qualsiasi di spazi compatti è compatto (Teorema di Tychonoff).

8.6 Caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}^n$

Poiché ogni intervallo $[a, b]$della retta reale è compatto, per il teorema principale della sezione precedente risulterà compatto il prodotto

$$I_n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i,\ 1 \leq i \leq n \} = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

In particolare ogni palla chiusa

$$\overline{B}_\infty(\bar{x}_0, r) = \{\, \bar{x} \;\mid\; \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_\infty \le r \,\} = \prod_{i=1}^{n} [x_0^i - r \le x \le x_0^i + r]$$

è compatta.

Teorema 8.17. *Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e soltanto se C è chiuso e limitato.*

Del tutto identica a quella per $n = 1$. Se C è compatto allora C è chiuso perché $\mathbb{R}^n$ è T_2. Consideriamo un ricoprimento di $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_\infty(0, k)$.

Poiché C è compatto esistono $k_1, \dots, k_n$ tali che $C \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_\infty(0, k_i)$. Se prendiamo $r = \max_{1 \le i \le n} k_i$ allora $C \subset B_\infty(0, r)$ quindi è limitato.

Reciprocamente, se C è limitato esso è contenuto in $\overline{B}_\infty(0, r)$ che è compatta. Ma allora anche C è compatto perché è un sottoinsieme chiuso dello spazio compatto $\overline{B}_\infty(0, r)$.

□

Esempio: In particolare $S^{n-1} = \{\, x \;\mid\; ||x||_2 = 1 \,\}$ è un insieme compatto perché chiuso e limitato. Infatti, è limitato perché è contenuto nella sfera di raggio 1. E' anche chiuso perché se prendiamo la funzione continua $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = ||\bar{x}||_2$ risulta che $S^{n-1} = \varphi^{-1}\{\,1\,\}$, ossia la controimmagine per φ di un chiuso.
Poiché $P^{n-1} = S^{n-1}/\!\sim$ risulta che anche lo spazio proiettivo P^{n-1} è compatto.

Esercizio 8.18. *Dimostrare che la palla chiusa $\bar{B}(0, r) = \{x | \|x\|_2 \le r\}$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$.*

Esercizio 8.19. *Dimostrare che $S^{n-1}_\infty = \{\, x \;\mid\; ||x||_\infty = 1 \,\}$ è compatto usando una dimostrazione diversa da quella usata nell'esempio precedente.*

Esercizio 8.20. *Dimostrare che P^{n-1} è una varietà C^∞.*

Esercizio 8.21. *Dimostrare che $T^2 = S^1 \times S^1$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.*

Esercizio 8.22. *Dimostrare che se $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ è la proiezione al quoziente $K = q([0, 1])$ è compatto ma non chiuso in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Concludere che $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ non è di Hausdorff.*

Sia $O(n)$ lo spazio delle matrici ortogonali

$$O(n) = \{\, A \in M^{n\times n} \;\mid\; < c_i(A) c_j(A) >= \delta_{i,j} \,\},$$

dove $\bar{c}_i$ sono i vettori colonna della matrice A e $\delta_{i,j}$ è la delta di Kronecker.

Proposizione 8.23. *$O(n)$ è un gruppo topologico compatto, sottospazio di $M^{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2}$.*

Dimostrazione. Lasciamo come esercizio verificare che $O(n)$ è un gruppo topologico rispetto all'operazione prodotto di matrici. Vediamo che esso è compatto. Consideriamo lo spazio

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}$$

(n-volte). Pensando una matrice come un n-upla dei suoi vettori colonna risulta $O(n) \subset S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}$. Siccome S^{n-1} è compatto, $S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}$ è compatto. Allora basta dimostrare che $O(n)$ è un sottospazio chiuso del prodotto $S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}$.
Per questo, siano $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$. Sia poi $\varphi_{i,j} \colon S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1} \to \mathbb{R}$ la funzione continua definita da

$$\varphi_{i,j}(c_1, \ldots, c_n) =< c_i, c_j > .$$

Allora per definizione

$$O(n) = \{ (c_1, \ldots, c_n) \in S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1} \ \mid \ \varphi_{i,j}(A) = \delta_{i,j} \}$$

è chiuso perché intersezione di insiemi chiusi $\varphi_{i,j}^{-1}(\delta_{i,j})$.

$\square$

Esercizio 8.24. *Usando il teorema delle funzioni implicite dimostrare che $O(n)$ è una sottovarietà C^∞ di $\mathbb{R}^{n^2}$ e trovare la sua dimensione*

Vediamo ora un altra conseguenza importante del fatto che chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ siano compatti.

Teorema 8.25. *Tutte le norme su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti e in particolare definiscono la stessa topologia sullo spazio $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Basterà far vedere che ogni norma è equivalente alla norma $||.||_\infty$, per questo dobbiamo dimostrare che se $||.||$ è una norma qualsiasi, esistono $k_1, k_2 > 0$ tali che $||x|| \leq k_1 ||x||_\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $||x||_\infty \leq k_2 ||x||$.
Scriviamo x come una combinazione lineare dei vettori $\bar{e}_i$ della base canonica, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i$.
Stimando la norma di x otteniamo il risultato seguente:

$$\begin{aligned} ||x|| &= ||\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i|| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| ||\bar{e}_i|| \\ &\leq ||x_i||_\infty \sum_{i=1}^{n} ||\bar{e}_i||, \end{aligned}$$

poiché $|x_i| \leq ||x_i||_\infty \ \forall i, \ 1 \leq i \leq n$. Quindi, $||x|| \leq k_1 ||x||_\infty$, dove $k_1 = \sum_{i=1}^{n} ||\bar{e}_i||$.

Sulla sfera $S_\infty^{n-1} = \{x | ||x||_\infty = 1\}$ consideriamo la funzione $\varphi \colon S_\infty^{n-1} \to \mathbb{R}$, definita da $\varphi(x) = ||x||$. Allora $\varphi(x) > 0$ per ogni $x \in S_\infty^{n-1}$ perché $||x|| = 0$ se e

solo se $x = 0$. Inoltre, $\varphi(x) = ||x||$ è continua perché restrizione a S_∞^{n-1} di una funzione continua su $\mathbb{R}^n$. Poiché S_∞^{n-1} è compatto, per il teorema di Weierstrass, esiste $x_1 \in S_\infty^{n-1}$ tale che $\varphi(x_1) = \min_{x \in S_\infty^{n-1}} \varphi(x)$.
Poiché $x_1 \neq 0$ si ha che $\varphi(x_1) = ||x_1|| > 0$ e questo vuol dire che $\varphi(x) = ||x|| \geq \varphi(x_1) = \delta > 0$ per ogni $x \in S_\infty^{n-1}$.
Sia ora $x \in \mathbb{R}^n$ un vettore qualunque e sia $y = x/||x||_\infty$ allora $||y||_\infty = \frac{||x||_\infty}{||x||_\infty} = 1$ e quindi $y \in S_\infty^{n-1}$. Per la discussione di sopra abbiamo che:

$$0 < \delta \leq \varphi(y) = ||y|| = \|\frac{x}{||x||_\infty}\| = \frac{1}{||x||_\infty}||x||.$$

Risulta quindi $\delta||x||_\infty \leq ||x||$ ossia $||x||_\infty \leq k_2||x||$ con $k_2 = 1/\delta$.

□

Ricordando che una trasformazione lineare $T\colon \mathbb{R}^n \to R^m$ è continua se e soltanto se esiste una costante $K \geq 0$ tale che $\|Tx\| \leq K\|x\|$ usando il metodo del tutto analogo a quello usato per dimostrare il teorema precedente si dimostra anche

Teorema 8.26. *Ogni trasformazione lineare $T\colon \mathbb{R}^n \to R^m$ è continua.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Chiaramente lo stesso vale per ogni trasformazione lineare fra spazi normati di dimensione finita ma le cose cambiano radicalmente negli spazi normati a dimensione infinita.

8.7 Teorema di Bolzano-Weierstrass generalizzato

Introduciamo ora una estensione della proprietà di Bolzano-Weierstrass dei sottoinsiemi compatti della retta reale agli spazi topologici compatti.

Definizione 8.3. *Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$ un sottoinsieme. Diremo che x_0 è un* ***punto di accumulazione*** *di A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A.*
Se X è T_2 questa affermazione equivale a dire che ogni intorno aperto di x_0 contiene punti di A diversi da x_0. Denoteremo con A' l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A. Se $x_0 \in A$ allora x_0 è sicuramente un punto di aderenza di A, perché ogni intorno di x_0 interseca A, ma non necessariamente è un punto di accumulazione di A.
Se $x_0 \in A$ e non è di accumulazione allora esiste almeno un intorno aperto U di x_0 tale che $A \cap U = \{ x_0 \}$. In questo caso x_0 si dice ***punto isolato*** *di A.*

Esercizio 8.27. *Sia A un insieme chiuso, sia A' l'insieme dei punti di accumulazione di A e A_{iso} l'insieme dei punti isolati di A. Verificare che A' e A_{iso} sono chiusi e $A = A' \cup A_{iso}$ (unione disgiunta). Che cosa si può dire se A non è chiuso?*

Teorema 8.28. *Se X è uno spazio topologico compatto allora ogni sottoinsieme infinito di X possiede almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia $A \subset X$. Supponiamo che non esista alcun punto di accumulazione di A. Quindi, per ogni $x \in X$ esiste un intorno U_x aperto tale che $U_x \cap A = \{ x \}$, se $x \in A$, oppure $U_x \cap A = \emptyset$, se $x \notin A$. Poiché X è compatto e $(U_x)_{x \in X}$ è un ricoprimento di X esistono $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ che formano un sottoricoprimento finito di X. In particolare $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Ma allora $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \cap A$ è un insieme finito perché unione di punti. $\square$

9 Spazi topologici connessi e connessi per archi

9.1 Spazi connessi e sconnessi

Dato uno spazio topologico X, una *separazione* di X è una coppia di aperti U, V di X tale che $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$. Diremo che X è uno spazio topologico *connesso* se l'unica separazione di X è quella banale, ossia $U = \emptyset$ e $V = X$ oppure $U = X$ e $V = \emptyset$. Dunque X è sconnesso se possiamo scrivere X come unione di U, V con U, V aperti, non vuoti e disgiunti.
Se $U \cap V = \emptyset$ allora $V = U^c$ e quindi se U è aperto allora V è chiuso). Perciò uno spazio topologico X risulta connesso se e soltanto se gli unici sottoinsiemi chiusi e simultaneamente aperti di X sono X e $\emptyset$.
Diremo che un sottoinsieme A di uno spazio topologico X è connesso se A munito della topologia relativa è uno spazio connesso.
Esempi

1. Consideriamo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia relativa. Poiché $(-\infty, \sqrt{2})$ è $(\sqrt{2}, +\infty)$ sono sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$. $U = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$ e $V = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$ sono aperti di $\mathbb{Q}$. Dunque abbiamo che: $\mathbb{Q} = U \cup V$, $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ e $U \cap V = \emptyset$ e quindi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è sconnesso.

2. Sia A un insieme così definito:
$$A = \{ (x, 0) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \} \cup \{ (x, e^{-x}) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \}.$$
A, è unione di due insieme connessi, ma è facile vedere che A non è connesso (perché?). In generale l'unione di connessi non è detto che sia connessa.

3. Invece, come vedremo in seguito, l'insieme
$$A = \{ (x, 0) \ \mid \ -\infty < x \leq 0 \} \cup \{ (x, \sin \frac{1}{x}) \ \mid \ x > 0 \}$$
è sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^2$.

Teorema 9.1 (Valori intermedi)**.** *Sia I un intervallo qualsiasi (proprio o improprio) della retta reale, sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e siano $x_0, x_1 \in I$ tali che $f(x_0) = \lambda_0 \leq f(x_1) = \lambda_1$. Allora per ogni λ, con $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, esiste almeno un $x \in I$ tale che $f(x) = \lambda$.*

Dimostrazione. Basta considerare il caso $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$. Se $g(x) = f(x) - \lambda$ allora g è continua e tale che $g(x_0) < 0$ e $g(x_1) > 0$. Se facciamo vedere che esiste un $\bar{x}$ tale che $g(\bar{x}) = 0$ questo dimostrerà il teorema perché allora sarà $f(\bar{x}) = g(\bar{x}) + \lambda = \lambda$. Per dimostrare l'esistenza di un tale punto $\bar{x}$ consideriamo l'insieme $A = \{ x \in [x_0, x_1] \ \mid \ g(x) < 0) \}$ che è non vuoto perché $x_0 \in A$ e anche limitato superiormente in quanto x_1 è un maggiorante dell'insieme. Sia
$$\bar{x} = \sup A = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{ x \ \mid \ g(x) < 0 \},$$
Se $g(\bar{x}) < 0$, per il teorema di permanenza del segno, esiste un intorno $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ di $\bar{x}$ in cui $g(x) < 0$, contraddicendo il fatto che $x \leq \bar{x}$ $\forall x \in A$. Analogamente, se $g(\bar{x}) > 0$, g sarà positiva in un intorno $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ contraddicendo il fatto che $\bar{x}$ è il più piccolo maggiorante di A. Quindi l'unica alternativa è che $g(\bar{x}) = 0$. Ciò dimostra l'esistenza di un $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}) = \lambda$.

□

Teorema 9.2. *Sia X uno spazio topologico. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *X è connesso;*

(2) *ogni funzione continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ ha la proprietà dei valori intermedi (o proprietà di Darboux): se $x_0, x_1 \in X$ allora per ogni λ tale per cui $f(x_0) \leq \lambda \leq f(x_1)$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = \lambda$;*

(3) *ogni funzione $\varphi\colon X \to \{0,1\}$ continua (considerando $\{0,1\}$ con la topologia discreta) è costante.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Facciamo vedere che $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$ (qui $\neg$ denota la negazione).
Se non vale (2) vuol dire che esiste una funzione continua $f\colon X \to \mathbb{R}$, due punti $x_0, x_1 \in X$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_0) < \lambda_0 < f(x_1)$ ma $\lambda_0 \notin Im\, f$.
Prendiamo $U = f^{-1}((-\infty, \lambda_0))$ e $V = f^{-1}((\lambda_0, +\infty))$, allora U, V sono aperti perché f è continua e sono non-vuoti perché $x_0 \in U$ e $x_1 \in V$, inoltre $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$. Quindi X non è connesso.
(2) $\Rightarrow$ (3). Sia $\varphi\colon X \to \{0,1\}$ continua. La topologia relativa su $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$, come sottospazio di $\mathbb{R}$ coincide con quella discreta. Sia $\tilde{\varphi}\colon X \to \mathbb{R}$ definita da $\tilde{\varphi} = i \circ \varphi$, dove $i\colon \{0,1\} \to \mathbb{R}$ è la mappa inclusione. La funzione reale $\tilde{\varphi}$ risulta essere continua perché composizione di funzioni continue. Allora per (2), $\tilde{\varphi}$ ha la proprietà dei valori intermedi. Se $\tilde{\varphi}$ non fosse costante esisterebbero x_0, x_1 tali per cui $\tilde{\varphi}(x_0) = 0$ e $\tilde{\varphi}(x_1) = 1$. Ma $0 < 1/2 < 1$ e non esiste alcun $x \in X$ per cui $\tilde{\varphi}(x) = 1/2$, contraddicendo la (2). Così $\tilde{\varphi}$ deve essere costante e quindi pure φ lo è.
(3) $\Rightarrow$ (1). Facciamo vedere che $\neg(1) \Rightarrow \neg(3)$.
Supponiamo che X sia sconnesso, ossia che esistano $U, V \neq \emptyset$ aperti tali che $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$. Definiamo $\varphi\colon X \to \{0,1\}$ in questo modo

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in U \\ 1 & \text{se } x \in V \end{cases}.$$

Allora φ non è costante perché $U \neq \emptyset$ e $V \neq \emptyset$. Affermiamo che φ è continua. Infatti gli aperti di $\{0,1\}$ sono: $\{0,1\}, \emptyset, \{0\}$ e $\{1\}$. Ma:
$\varphi^{-1}(\{0,1\}) = X$;
$\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
$\varphi^{-1}(\{0\}) = U$;
$\varphi^{-1}(\{1\}) = V$.
Quindi la controimmagine di ogni aperto di $\{0,1\}$ è un aperto di X e così abbiamo costruito una funzione continua non costante a valori in $\{0,1\}$. □

Poiché ogni intervallo reale ha la proprietà dei valori intermedi dimostrata nel teorema 9.1 abbiamo come conseguenza:

Corollario 9.3. *Ogni intervallo di $\mathbb{R}$, sia proprio che improprio, è connesso.*

Teorema 9.4. *$A \subset \mathbb{R}$ è connesso se e soltanto se A è un intervallo proprio o improprio.*

Dimostrazione. Se A è un intervallo allora A è connesso per il corollario (9.3).
Reciprocamente, vogliamo dimostrare che ogni sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ è un

intervallo. Basta far vedere che se A non è un intervallo allora A non è connesso. Sappiamo che un insieme A è un intervallo se e solo se per ogni $x_0, x_1 \in A$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 < x < x_1$ allora $x \in A$. Dunque se A non è un intervallo devono esistere $x_0, x_1 \in A$ e $x_2 \notin A$ tali per cui valga $x_0 < x_2 < x_1$.
Se prendiamo $U = A \cap (-\infty, x_2)$ e $V = A \cap (x_2, +\infty)$ abbiamo trovato una separazione non banale di A e dunque possiamo concludere che A non è connesso.

□

Esercizio 9.5. *Dimostrare che ogni intervallo di $\mathbb{R}$ è connesso direttamente con le separazioni e senza usare la proprietà di Darboux.*

Teorema 9.6. *Sia $f\colon X \to Y$ una mappa continua fra spazi topologici, se X è connesso, allora $Z = Im\, f$ è connesso.*

Dimostrazione. Osserviamo prima di tutto che per un esercizio precedente la mappa f vista come una mappa a valori in Z è anche continua.
Prendiamo una funzione continua $\varphi\colon Z \to \{0,1\}$ e dimostriamo che φ è costante. Allora Z risulterà connesso per il teorema (9.2).
Se φ è come sopra allora $\tilde{\varphi} = (\varphi \circ f)$ è continua. Poiché X è connesso, $\tilde{\varphi}$ è costante ma allora anche φ è costante perché $f\colon X \to Z$ è suriettiva.

□

Teorema 9.7. *$X \times Y$ è connesso se e soltanto se X e Y sono connessi.*

Nota Bene 9.1. *In generale, il prodotto di una famiglia qualsiasi di spazi connessi è connesso.*

Dimostrazione. Se $X \times Y$ è connesso, X e Y sono connessi perché $X = Im\ \pi_X$ e $Y = Im\ \pi_Y$, con $\pi_X\colon X \times Y \to X$ e $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ continue.
Reciprocamente, se X, Y sono connessi vediamo che lo è anche $X \times Y$ usando ancora il teorema (9.2).
Scegliamo un punto (x_0, y_0) di $X \times Y$ e vediamo che per ogni $(x,y) \in X \times Y$ e ogni funzione continua $\varphi\colon X \times Y \to \{0,1\}$ si ha che $\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0)$. Definiamo due inclusioni $i_1\colon Y \to X \times Y$, $i_1(y) = (x_0, y)$ e $i_2\colon X \to X \times Y$, $i_2(x) = (x,y)$. Entrambe sono mappe continue perché lo sono le loro componenti (identità e funzione costante).
Quindi sono continue anche $\varphi_1 = \varphi \circ i_1$ e $\varphi_2 = \varphi \circ i_2$. Ma X, Y sono spazi topologici connessi e quindi tanto φ_1 come φ_2 sono costanti. Abbiamo così:

$$\begin{array}{ccc}
\varphi_1(y) & = & \varphi_1(y_0) \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\varphi(x_0, y) & = & \varphi(x_0, y_0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\varphi_2(x_0) & = & \varphi_2(x) \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\varphi(x_0, y) & = & \varphi(x, y).
\end{array}$$

Quindi $\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x, y)$, come volevasi dimostrare. □

Proposizione 9.8. *Se un sottoinsieme A di uno spazio topologico X è connesso, allora anche $\overline{A}$ è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\overline{A} = U \cup V$, con $U, V \subset \overline{A}$ aperti disgiunti della topologia relativa di $\overline{A}$, e facciamo vedere che non possono essere entrambi non vuoti.
Consideriamo $U' = U \cap A$ e $V' = V \cap A$. Dalla definizione di topologia relativa è facile vedere che U' e V' sono aperti della topologia relativa di A inoltre $U' \cap V' = \emptyset$ e $U' \cup V' = A$. Poiché A è connesso sarà $U' = \emptyset$ o $V' = \emptyset$. Se $U' = \emptyset$, allora necessariamente anche $U = \emptyset$. Infatti, se esistesse un $x \in U$, siccome $U \subset \overline{A}$, dovrebbe esistere un $z \in A$ tale che $z \in U$. Ma allora $z \in A \cap U = U'$, il che porta ad un assurdo.

□

Proposizione 9.9. *Siano $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ spazi connessi. Supponiamo che $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$ allora $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, e sia $\varphi \colon X \to \{0, 1\}$ continua. Dimostriamo che φ è costante. Scegliamo un punto $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ e dimostriamo che, per ogni $x \in X$, $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Sia $i_\alpha \colon X_\alpha \to X$ l'inclusione di X_α in X. Definiamo $\varphi_\alpha \colon X_\alpha \to \{0, 1\}$ come

$$\varphi_\alpha(x) = (\varphi \circ i_\alpha)(x).$$

Essendo X_α è connesso e φ_α, avremo per ogni $x \in X_\alpha$, $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_0)$. Poiché questo è vero per ogni $\alpha \in A$, la funzione φ è costante e questo dimostra che X è connesso.

□

9.2 Componenti connesse

Dato uno spazio X e dati due punti $x, y \in X$, definiamo $x \sim y$ se esiste un insieme connesso $A \subset X$ tale che $x, y \in A$. Cioè due elementi di X sono equivalenti se appartengono ad uno stesso sottoinsieme connesso.

Esercizio 9.10. *Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.*

La *componente connessa* di un punto $x \in X$ è la sua classe di equivalenza per la relazione $\sim$. In particolare la famiglia delle componenti connesse di uno spazio formano una partizione di X.

Teorema 9.11. *La componente connessa $C_x = \{ y \mid y \sim x \}$ del punto $x \in X$ è il più grande sottoinsieme connesso di X contenente x. Ogni componente connessa C è un sottoinsieme chiuso di X.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima di tutto che C_x è un insieme connesso.
Per ogni $y \in C_x$, scegliamo un sottoinsieme connesso $A_{xy} \subset X$ tale che $x, y \in A_{xy}$. Affermiamo che $A_{xy} \subset C_x$. Infatti, per definizione di $\sim$, per ogni $z \in A_{xy}$, abbiamo che $z \sim x$ e quindi $z \in C_x$. Consideriamo ora $A = \bigcup_{y \in C_x} A_{xy}$. Per definizione di A abbiamo che $C_x \subset A$. Ma anche $A \subset C_x$, perché $A_{xy} \subset C_x$ per ogni $y \in C_x$. Dunque $A = C_x$. Per la proposizione 9.9, A è connesso in quanto unione di una famiglia di connessi che si intersecano nel punto x. Quindi C_x è connesso.

Per quanto detto prima, se C è un insieme connesso che contiene x, ogni punto $z \in C$ appartiene anche a C_x. Il che dimostra che C_x è il più grande connesso che contiene x. Inoltre, poiché C_x è connesso abbiamo che anche $\overline{C_x}$ è connesso. Essendo C_x il più grande insieme connesso che contiene x, risulta $\overline{C_x} = C_x$ e quindi C_x è chiuso.

$\square$

Ogni componente connessa di uno spazio topologico è sempre un sottoinsieme chiuso di esso ma non sempre risulta essere un sottoinsieme aperto.

Esempio: Sia $A = \{0, \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Per ogni $x \in A$ abbiamo che $C_x = \{x\}$, ossia le componenti connesse dei punti di A sono $\{0\}, \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.
$\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono sia chiusi che aperti perché punti isolati.
$\{0\}$ è chiuso ma non aperto in A perché altrimenti potrei scriverlo come intersezione di A con un aperto.

Questo esempio dimostra anche che non sempre una componente connessa di uno spazio si può separare dalle altre. Vediamo ora una condizione sullo spazio equivalente al fatto che i suoi insiemi aperti abbiano componenti connesse aperte.

Definizione 9.1. *Uno spazio X si dice localmente connesso se ogni punto dello spazio ha una base di intorni aperti connessi.*

Esercizio 9.12. *Ogni spazio normato è localmente connesso.*

Sulla base dell'esercizio precedente possiamo affermare che $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, C[a, b]$ sono localmente connessi.

Teorema 9.13. *Lo spazio X è localmente connesso se e soltanto se ogni componente connessa di un sottoinsieme aperto di X è aperta (oltre che chiusa).*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia localmente connesso. Sia U un insieme aperto di X e sia C una sua componente connessa. Se $y \in C \subset U$, deve esistere un intorno connesso V di y contenuto in U. Poiché C è un connesso massimale contenente y risulta che $V \subset C$ il che dimostra che la componente C e aperta. Reciprocamente, se le componenti connessi di insiemi aperti sono aperte allora le componenti connesse degli intorni aperti di x formano una base di intorni. $\square$

Teorema 9.14. *Ogni aperto di $\mathbb{R}$ è un'unione disgiunta al più numerabile di intervalli aperti.*

Dimostrazione. Sia $U \subset \mathbb{R}$ aperto. $U = \bigcup_{C \in U/\sim} C$ con C componente connessa.
Siccome U è aperto e lo spazio $\mathbb{R}$ è localmente connesso, ogni componente connessa C è un insieme aperto.
Poiché sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono soltanto gli intervalli, ogni componente connessa C di U dovrà essere un intervallo aperto (a, b). Ora $U/\sim$ è numerabile perché preso $C \in U/\sim, C = (a, b)$ possiamo trovare un numero razionale $q_c \in \mathbb{Q}$ con $a < q_c < b$. Questo definisce una funzione $U/\sim \to \mathbb{Q}$, $C \mapsto q_c$ che è iniettiva e quindi $U/\sim$ è al più numerabile.

$\square$

Esercizio 9.15. *Uno spazio si dice* **totalmente sconnesso** *se la componente connessa di ogni punto si riduce al punto stesso ($C_x = \{x\}$)). Dimostrare che Q è totalmente sconnesso.*

9.3 Spazi connessi per archi

Uno spazio topologico X si dice *connesso per archi* se, dati $x, y \in X$, esiste una mappa continua $\gamma\colon [0,1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$ (γ si chiama cammino, curva o arco).

Definizione 9.2. *Un sottoinsieme $C \subset V$ di uno spazio normato V si dice convesso se per ogni $x, y \in C$, il segmento $\overline{xy} \subset C$.*

Poiché la mappa $\gamma\colon [0,1] \to V$ definita da $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ ha per immagine il segmento $\bar{xy}$ concludiamo che ogni insieme convesso è connesso per archi.

Proposizione 9.16. *Se X è connesso per archi allora X è connesso.*

Dimostrazione. Sia $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ continua e vediamo che φ ha la proprietà dei valori intermedi.
Siano $x_0, x_1 \in X$, $\lambda_0 = \varphi(x_0)$ e $\lambda_1 = \varphi(x_1)$ e sia λ tale che $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$. Bisogna trovare $x \in X$ con $\varphi(x) = \lambda$. Sia $\gamma\colon [0,1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Consideriamo la funzione continua $\psi = \varphi \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Per il teorema dei valori intermedi esiste $t_0 \in I$ tale che $\psi(t_0) = \varphi(\gamma(t_0)) = \lambda$. Allora $x = \gamma(t_0)$ è il punto cercato.

□

Il seguente è un esempio classico di insieme connesso che non è connesso per archi.

Esempio: L'insieme $A = \{\, (0,y) \mid -1 < y < 1 \,\} \cup \{\, (x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x < +\infty \,\}$ non è connesso per archi ma è connesso essendo la chiusura di un insieme connesso per archi.

Esercizio 9.17. *Dimostrare che A non è connesso per archi. Suggerimento: considerare un cammino*

$$\gamma\colon [0,1] \to A, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

tale che $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(1) = (1/\pi, 0)$ e applicare il teorema dei valori intermedi ad x, y.

Teorema 9.18. *Uno spazio topologico X è connesso per archi se e soltanto se X è connesso ed ogni suo punto ha almeno un intorno che sia connesso per archi.*

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ segue banalmente dal teorema precedente. Per la $\Leftarrow$ scegliamo un $x \in X$ e osserviamo che l'insieme C_x^{arc} dei punti che sono l'estremo di un arco che parte da x e tanto aperto come chiuso in X (dimostrarlo!). Poiché $C_x^{arc} \neq \emptyset$ abbiamo che $C_x^{arc} = X$. □

Corollario 9.19. *Un sottoinsieme aperto U di uno spazio normato (ed in particolare di $\mathbb{R}^n$) è connesso se e soltanto se U è connesso per archi.*

9.4 Teoremi di Brouwer e di Jordan

I due classici teoremi che esporremo di seguito hanno dato origini ad un ramo della topologia chiamato topologia algebrica.
Denotiamo con $D^n \subset \mathbb{R}^n$ la palla chiusa con centro 0 e raggio r e con $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ il suo bordo $\partial D^n \subset D^n$.

Teorema 9.20 (Brouwer)**.** *Se $f\colon D^n \to D^n$ è un'applicazione continua, allora esiste $x \in D^n$ tale che $f(x) = x$.*

Idea della dimostrazione. Per $n = 1$ la dimostrazione è alquanto semplice.
Se $f(-1) = -1$ oppure $f(1) = 1$ non vi è nulla da dimostrare, per cui assumiamo $f(\pm 1) \neq \pm 1$. Applichiamo allora il teorema del valore intermedio alla funzione $g(x) = f(x) - x$, che nelle nostre ipotesi, cambia il segno nell'intervallo $[-1, 1]$.

Per $n > 1$ ragioniamo per assurdo supponendo che f non abbia punti fissi. Allora per ogni $x \in D^n$ è ben definito il punto $F(x) \in \partial D^n = S^{n-1}$ come l'intersezione tra ∂D^n e la retta passante per x ed $f(x)$. Otteniamo così un'applicazione continua

$$F\colon D^n \to S^{n-1} \text{ tale che } F(x) = x \ , \ \forall x \in S^{n-1} \ .$$

Una mappa con la proprietà sopra descritte si chiama **ritrazione**. Ora, l'idea è quella di dimostrare che una ritrazione di D^n su S^{n-1} non può esistere. Grazie ai teoremi di approssimazione delle funzioni continue per funzioni differenziabili, ci basterà dimostrare che non esiste una ritrazione F che sia differenziabile.
Per il teorema di Sard esiste un punto $y \in S^{n-1}$ che è valore regolare della F. Ciò vuol dire $DF(x)$ è suriettivo per ogni $x \in F^{-1}(y)$. Per il teorema della funzione implicita la controimmagine $M = F^{-1}(y)$ di un valore regolare y è una varietà uno-dimensionale con bordo contenuto nel bordo di D^n. Queste varietà sono facilmente classificabili. Risultano essere unione di curve chiuse diffeomorfe a S^1 contenute nel interno della palla e di curve omeomorfe ad un intervallo i cui estremi si trovano su ∂D^n. Poiché ogni intervallo ha due estremi, il numero totale dei punti di $M \cap \partial D^n$ deve essere pari. Ma questo contraddice il fatto che $F(x) = x \ , \ \forall x \in S^{n-1}$ perché ci sarebbe in $M \cap \partial D^n$ un altro punto $y' \neq y$ con $F(y') = y$. I dettagli si trovano sul bellissimo librino di John Milnor " Topology from differentiable veiwpoint " dove troverete anche una breve introduzione al calcolo differenziale e varietà differenziabili. □

Definizione 9.3. *Una curva chiusa semplice C è un'immagine omeomorfa di una circonferenza.*

Teorema 9.21 (Jordan)**.** *Se C è una curva semplice nel piano euclideo (curva di Jordan) allora il complementare, $\mathbb{R}^2 \setminus C$, è sconnesso e consiste di due componenti, una limitata e l'altra no. Entrambe hanno C come frontiera.*

Nota Bene 9.2. *Un teorema analogo vale per una curva semplice sulla sfera S^2. In questo caso entrambe le componenti del complemento sono limitate ed omeomorfe ad un disco aperto D^2 come è stato dimostrato da Schoenflies.*

9.5 Invarianti topologici

Esistono moltissimi invarianti topologici che permettono scoprire quando due spazi topologici non sono omeomorfi. Ad esempio $\mathbb{R}^n$ e S^n non sono omeomorfi

perché uno è compatto e l'altro no. Invarianti più raffinati quali, dimensione topologica, caratteristica di Eulero Poincaré, gruppi di omologia e omotopia richiedono altro lavoro per essere definiti.
Qui osserveremo soltanto quel che segue:
poiché l'immagine di un connesso per una mappa continua $f\colon X \to Y$ è connesso, se C è una componente connessa di X $f(C)$ deve essere contenuta in qualche componente connessa C' di Y. Da questo si deduce facilmente che se f è un omeomorfismo allora, per ogni $x \in X$, $f(C_x) = C_{f(x)} \subset Y$ e inoltre la restrizione della f a C_x è un omeomorfismo di C_x con $C_{f(x)}$. In particolare due spazi omeomorfi hanno lo stesso numero di componenti connesse.
Alcuni degli esercizi seguenti usano questo fatto per decidere se due spazi sono o non sono omeomorfi.

Esercizio 9.22. *Dimostrare che le lettere O, X, T, L non sono omeomorfe fra loro ma che C, L, VN, M sono tutte omeomorfe alla I.*

Esercizio 9.23. *Dimostrare che se A è un insieme finito di punti di $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, allora $\mathbb{R}^n \setminus A$ è connesso per archi. Dire che succede se A è numerabile.*

Esercizio 9.24. *Dimostrare che $\mathbb{R}^1$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$*

Esercizio 9.25. *Verificare che il toro $T^2 = S^1 \times S^1$ non può essere omeomorfo alla sfera S^2.*

Esercizio 9.26. *Dimostrare che $A = \{\, (x, 0) \mid -\infty < x \leq 0 \,\} \cup \{\, (x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0 \,\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Esercizio 9.27. *Dimostrare che la sfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\|_2 = 1$ è omeomorfa alla sfera $S^n_\infty = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\|_\infty = 1$ e che tutte le sfere di raggio r sono fra loro omeomorfe.*

10 Spazi metrici compatti

10.1 Compattezza per successioni

Negli spazi metrici la compattezza si può caratterizzare in termini di successioni di punti dello spazio. Infatti si ha:

Teorema 10.1. *Sia X uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguente proposizioni:*

(1) *(proprietà di Heine-Borel) Ogni ricoprimento aperto di X possiede un sottoricoprimento finito (cioè X è compatto);*

(2) *(proprietà di Bolzano-Weierstrass) ogni sottoinsieme infinito di X ha almeno un punto di accumulazione;*

(3) *(compattezza per successioni) ogni successione $(x_n)_{n \geq 1}$ di punti di X ha una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2) è una conseguenza del teorema precedente.

Nota Bene 10.1. (1) $\Rightarrow$ (2) *è valido anche negli spazi topologici, però negli spazi topologici non vale in genere che* (2) $\Rightarrow$ (1)*).*

(2) $\Rightarrow$ (3). Sia $(x_n)_{n\geq 1}$ una successione in X. Supponiamo dapprima che l'immagine $A = \{ x_1, \ldots, x_n, \ldots \}$ della successione sia un insieme finito. Facciamo vedere che in questo caso esiste sempre una sottosuccessione convergente.
Poiché $x_n \colon \mathbb{N} \to A$ assume valori nell'insieme finito A, esiste almeno un elemento $a \in A$ che compare un numero infinito di volte nella successione, ossia $J_a = \{ n \in \mathbb{N} \mid x_n = a \}$ è infinito. Così risulta immediata la costruzione di una sottosuccessione costante (e quindi convergente) $x_{n_k} = a$ di (x_n).
Se invece $A = \{ x_1, \ldots, x_n, \ldots \}$ è infinito, per (2) esiste almeno un punto di accumulazione $\bar{x}$ di A. Consideriamo intorni di $\bar{x}$ della forma $B(\bar{x}, 1/n)$. Per definizione di punto d'accumulazione, deve esistere un almeno un punto x_{n_1} di A tale che $x_{n_1} \in B(\bar{x}, 1)$. Poiché anche $B(\bar{x}, 1/2)$ contiene infiniti punti di A deve esistere $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} \in B(\bar{x}, 1/2)$. Per induzione su k possiamo trovare un $x_{n_k} \in B(\bar{x}, 1/k)$ con $n_k > n_{k-1}$. Allora (x_{n_k}) è una sottosuccessione della successione (x_n) e $d(x_{n_k}, \bar{x}) < 1/k$ quindi $x_{n_k} \longrightarrow \bar{x}$. □

Posponiamo la dimostrazione di (3) $\Rightarrow$ (1), che è lunga ma molto interessante in quanto per dimostrare questa implicazione dovremo ricorrere ad una serie di concetti fondamentali della topologia degli spazi metrici quali il concetto di base numerabile di aperti, di sottoinsieme denso e di spazi separabili. Introdurremo anche il concetto di spazio totalmente limitato che risulta utilissimo per la caratterizzazione degli spazi metrici compatti.

Definizione 10.1. *Sia X uno spazio metrico e sia $\varepsilon > 0$. Una ε-rete in X è un sottoinsieme $A \subset X$ tale che per ogni $x \in X$ esiste almeno un $a \in A$ con $d(x, a) < \varepsilon$.*

Notare che A è una $\varepsilon-$rete se e soltanto se $X = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

Definizione 10.2. *Uno spazio X si dice totalmente limitato se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una $\varepsilon-$rete finita in X, cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A_\varepsilon = \{ x_1, \ldots, x_{n_\varepsilon} \}$ tale che $X = \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x_i, \varepsilon)$.*

In parole povere, X è totalmente limitato se, assegnato ε, è possibile ricoprire X con un numero finito di palle di raggio ε.

Esempio: $\mathbb{R}$ non è totalmente limitato. Se lo fosse sarebbe compatto. Vedremo in seguito che non ogni insieme limitato risulta totalmente limitato.

Vale però:

Proposizione 10.2. *Ogni insieme totalmente limitato è limitato.*

Dimostrazione. Infatti se X è totalmente limitato, preso $\varepsilon = 1$, esiste $A = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ tale che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$. Se $M = \max d(x_i, x_j)$ allora $X = B(x_1, M + 1)$, ossia X è limitato. □

Proposizione 10.3. *Ogni spazio metrico compatto è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$ ma essendo compatto possiamo estrarre un sottoricoprimento finito $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ quindi $A_\varepsilon =$

$\{ x_1, \dots, x_n \}$ è una $\varepsilon-$rete finita. Siccome questo è possibile per ogni ε, X è totalmente limitato. $\square$

Ricordiamo che uno spazio topologico X è separabile se contiene un sottoinsieme numerabile denso.

Proposizione 10.4. *Se X è totalmente limitato allora X è separabile.*

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 1$ si consideri un sottoinsieme finito A_n di X che sia una $1/n$-rete. Allora $D = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ e un sottoinsieme numerabile (in quanto unione numerabile di insieme finiti) e denso in X. Infatti, ogni intorno di $x \in X$ deve per forza contenere una palla $B(x, 1/n)$ per n abbastanza grande e a sua volta $B(x, 1/n)$ contiene qualche elemento di $A_n \subset D$. $\square$

Proposizione 10.5. *Se X è uno spazio metrico compatto per successioni allora X è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Se X non fosse totalmente limitato esisterebbe un ε_0 tale che non esista alcuna ε_0-rete finita in X. In particolare, preso $x_1 \in X$, possiamo trovare un $x_2 \in X$ tale che $d(x_1, x_2) > \varepsilon_0$. Infatti in caso contrario sarebbe $X = B(x_1, \varepsilon_0)$. Ancora, presi x_1, x_2 possiamo trovare un $x_3 \in X$ tale che $d(x_3, x_1) > \varepsilon_0$ e $d(x_3, x_2) > \varepsilon_0$. Altrimenti sarebbe $X = B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0)$ e quindi $\{ x_1, x_2 \}$ sarebbe una $\varepsilon-$rete finita in X. Iterando il procedimento, presi $\{ x_1, \dots, x_k \}$ esiste x_{k+1} tale che $d(x_{k+1}, x_i) > \varepsilon_0$ per ogni $1 \leq i \leq k$. Otteniamo così una successione $(x_k)_{k \geq 1}$ che verifica $d(x_k, x_s) > \varepsilon_0$ per $k \neq s$. Una tale successione (x_k) non può avere alcuna sottosuccessione convergente. $\square$

Esercizio 10.6. *Dimostrare l'affermazione di sopra.*

Definizione 10.3. *X si dice numerabilmente compatto se ogni ricoprimento numerabile ha un sottoricoprimento finito.*

Proposizione 10.7. *Se X è compatto per successioni allora X è numerabilmente compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = (U_n)_{n \geq 1}$ un ricoprimento numerabile di X, ovvero $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Se $\mathcal{U}$ non ammette un sottoricoprimento finito risulta, in particolare che, per ogni $k > 0$, $X \neq \bigcup_{n=1}^{k} U_n$ e dunque, per ogni $k \geq 1$ possiamo scegliere un $x_k \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{k} U_n$.

Poiché X è compatto per successioni esiste una sottosuccessione (x_{k_i}) di (x_k) tale che $x_{k_i} \longrightarrow x* \in X$. Poiché $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di X, abbiamo che $x* \in U_{n_0}$ per qualche n_0.

Ma, $x = \lim_{i \to \infty} x_{k_i}$, e quindi deve esistere un j tale che per per ogni $i \geq j$ risulta $x_{k_i} \in U_{n_0}$. Prendendo ora un $i \geq j$ tale che $k_i \geq n_0$ otteniamo una contraddizione poiché da un lato avremo $x_{k_i} \notin \bigcup_{n=1}^{k_i} U_n$ e dall'altro $x_{k_i} \in U_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{k_i} U_n$, il che è assurdo. $\square$

Riprendiamo ora la dimostrazione del teorema 10.1 verificando che (3) $\Rightarrow$ (1). Dobbiamo quindi dimostrare che se X è compatto per successioni allora X è compatto.
Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di aperti tale che $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Vogliamo estrarre dal ricoprimento $\{U_\alpha\}$ un sottoricoprimento finito.
Poiché X è compatto per successioni, X è totalmente limitato e dunque separabile. Sia $D = \{ x_1, \dots, x_n, \dots \} \subset X$ un sottoinsieme numerabile denso. Consideriamo la famiglia di palle

$$\mathcal{B} = \{ B(x_i, q) \mid x_i \in D, q \in \mathbb{Q} \} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{ B(x_i, q) \mid q \in \mathbb{Q} \}.$$

La famiglia $\mathcal{B}$ è una famiglia numerabile perché unione numerabile di insiemi numerabili.
Consideriamo il sottoinsieme $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{B}$, definito da

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{B(x_i, q) \in \mathcal{B} | \,\text{esiste un}\, U_\alpha \in \mathcal{U} \,\text{con}\, B(x_i, q) \subset U_\alpha\}.$$

Essendo un sottoinsieme di $\mathcal{B}$, la famiglia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ è al più numerabile.

Lemma 10.8. *$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ è un ricoprimento aperto di X.*

Dimostrazione. Dato $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ esiste $x_i \in D$ tale che $x \in B(x_i, \varepsilon)$, ma vorremmo $\varepsilon = q$ fosse un numero razionale e che $B(x, \varepsilon) \subset U_\alpha$ per qualche α.
Sappiamo che $x \in U_\alpha$ per qualche α. Prendiamo una palla $B(x, \varepsilon) \subset U_\alpha$ Prendendo eventualmente un ε più piccolo possiamo supporre che $\varepsilon = q \in \mathbb{Q}$.
Per la densità di D esiste $x_i \in D$ tale che $d(x_i, x) < q/2$. Quindi $x \in B(x_i, q/2)$. Inoltre,se $z \in B(x_i, q/2)$ allora $d(z, x_i) < q/2$ e dunque $d(z, x) \leq d(z, x_i) + d(x_i, x) < q$.
Allora $B(x_i, q/2) \subset B(x, q) \subset U_\alpha$. Così abbiamo trovato una palla $B(x_i, q/2) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ tale che con $x \in B(x_i, q)$ e dimostrato che

$$X = \bigcup_{B(x_i, q) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}} B(x_i, q).$$

Essendo X compatto per successioni, esso è numerabilmente compatto e quindi si può estrarre un sottoricoprimento finito $B(x_1, q_1) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}, \dots, B(x_n, q_n) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ tale che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, q_i)$. Ma, per definizione di $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$, ogni $B(x_i, q_i)$ è sottoinsieme di qualche U_{α_i} del ricoprimento iniziale. In questo modo abbiamo trovato una sotto famiglia finita $\{U_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq n\}$ di $\mathcal{U}$ tale che $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

□

Esercizio 10.9. *Dimostrare che se (X, d) è uno spazio metrico compatto e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ è un suo ricoprimento allora esiste un numero $\delta > 0$ (detto numero di Lebesgue del ricoprimento) tale che ogni sottoinsieme di diametro minore di δ è contenuto in qualche aperto U_α del ricoprimento.*

Esercizio 10.10. *Usare l'esercizio precedente per dimostrare che se X è uno spazio metrico compatto, allora ogni funzione continua $f \colon X \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua.*

10.2 De insigne paradoxo...

" De insigne paradoxo quod in analisi de maximorum et minimorum occurrit" è il titolo di un articolo di Leonhard Euler, pubblicato su Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. Vol. 3 (1811), che discuteremo brevemente per ricordare che il teorema di Weierstrass sull'esistenza di massimi e minimi non è valido per funzioni continue definite su sottoinsiemi chiusi e limitati degli spazi funzionali, perché questi insiemi non godono della proprietà di compattezza necessaria per la validità del teorema.
Lavoreremo nella spazio $C^1 = C^1(I)$, dove $I = [0, 1]$. Ricordiamo che C^1 è l'insieme delle funzioni $u \colon I \to \mathbb{R}$ tali che u è continua, u' esiste ed è continua. C^1 è uno spazio vettoriale normato con la norma:

$$\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty,$$

Esercizio 10.11. *Verificare che $\|u\|_1$ è una norma.*

Proposizione 10.12. *Lo spazio normato C^1 è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $J \colon C^1(I) \to C(I) \times C(I)$ definita da $J(u) = (u, u')$. Se consideriamo $C(I) \times C(I)$ con la norma $\|(u, v)\| = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ allora J è un'isometria. Infatti

$$\|J(u)\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty = \|u\|_{C^1}.$$

Affermiamo che l'immagine di J è un sottospazio chiuso di $C(I) \times C(I)$. Per questo consideriamo una successione $((u_n, v_n))_{n \geq 1}$ con (u_n, v_n) appartenenti all'immagine di J tale che $(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v)$ Vediamo che allora necessariamente $(u, v) \in Im\, J$. Infatti, $(u_n, v_n) \in Im\, J$ significa $v_n = u'_n$. Ma la successione $(u_n) \in C^1$ è tale che $u_n \longrightarrow u$ uniformemente e anche $v_n = u'_n \longrightarrow v$ uniformemente. Per un noto teorema di analisi risulta che $u \in C^1$ e $u' = v$. Quindi $(u, v) \in \mathrm{Im}\, J$, ciò che dimostra che l'immagine di J è un sottospazio chiuso.
Sappiamo che $C(I)$ è uno spazio di Banach e quindi anche $C(I) \times C(I)$ lo è. Essendo $Im\, J \subset C(I) \times C(I)$ un sottospazio chiuso di uno spazio completo anch'esso è completo. Ora, C^1 è isometricamente isomorfo a $Im\, J$. Si dimostra facilmente che uno spazio metrico isometrico ad uno completo deve essere completo. Quindi anche C^1 è uno spazio di Banach. □

Consideriamo ora il sottospazio vettoriale $C^1_0 = \{u \in C^1 | u(0) = u(1) = 0\}$. Verifichiamo che pure C^1_0 è di Banach dimostrando che esso è un sottospazio chiuso di C^1.
Fissato un $x_0 \in [0, 1]$, consideriamo la funzione $\varphi_{x_0} \colon C^1 \to \mathbb{R},\ \varphi_{x_0}(u) = u(x_0)$. Si dimostra facilmente che φ_{x_0} manda successioni di funzioni (u_n) convergenti in C^1 in successioni convergenti $(u_n(x_0))$ di numeri reali e quindi è una funzione continua. Poniamo ora $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$ rispettivamente. Osserviamo che C^1_0 è l'insieme delle $u \in C^1$ tali che $\varphi_0(u) = \varphi_1(u) = 0$ Quindi C^1_0 è chiuso perché intersezione di $\varphi_0^{-1}(0)$ con $\varphi_1^{-1}(0)$ che sono chiusi entrambi.

Introduciamo ora il noto funzionale di Eulero, $\varepsilon \colon C^1_0(I) \to \mathbb{R}$ definito da:

$$\varepsilon(u) = \int_0^1 (|u'(t)|^2 - \frac{1}{2})^2 dt. \qquad (10.1)$$

Vediamo che ε è una funzione continua. Infatti se $u_n \longrightarrow u$ in $\|.\|_1$ allora $u'_n \longrightarrow u'$ uniformemente e quindi anche $u'^2_n \longrightarrow u'^2$ uniformemente. Passando al limite sotto il segno di integrale

$$\varepsilon(u_n) = \int_0^1 (|u'_n(t)|^2 - \frac{1}{2})^2 dt \longrightarrow \varepsilon(u) = \int_0^1 (|u'(t)|^2 - \frac{1}{2})^2 dt.$$

Dunque ε è una funzione continua e per la definizione di ε abbiamo che $\varepsilon(u) \geq 0$ per ogni $u \in C_0^1$.

Consideriamo la palla chiusa $\overline{B}(0,1) \subset C_0^1(I)$, di centro 0 e raggio 1. Faremo vedere che $\inf_{u \in \overline{B}(0,1)} \varepsilon(u) = 0$ ma che questo infimo non è un valore minimo del funzionale ε su $\bar{B}(0,1)$ in quanto non esiste alcuna funzione $u \in C_0^1$ tale che $\varepsilon(u) = 0$. Proprio in questo consiste il paradosso di cui parla Eulero nel titolo dell'articolo.
Poiché, per il teorema di Weierstrass, ogni funzione continua su uno spazio compatto raggiunge il suo valor minimo dovremo concludere che $\overline{B}(0,1)$ **non è un sottoinsieme compatto di C_0^1 benché sia un insieme chiuso e limitato.**

Vediamo ora che non esiste alcuna funzione in $u \in C_0^1$ tale che $\varepsilon(u) = 0$. Infatti, se fosse $\varepsilon(u) = 0$, l'integrando in (10.1) dovrebbe annullarsi in ogni punto in quanto si tratta di una funzione continua non-negativa ad integrale nullo. Quindi, risulterebbe $|u'(t)|^2 = \frac{1}{2}$ per ogni $t \in I$ ed essendo u' continua per forza dovrebbe essere $u'(t) = 1/\sqrt{2}$ per ogni $t \in I$ oppure $u'(t) = -1/\sqrt{2}$ per ogni $t \in I$. Ma allora $u(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}t$, una funzione che non assume valore zero agli estremi dell'intervallo. Questo dimostra che non esiste alcuna funzione $u \in C_0^1$ tale che $\varepsilon(u) = 0$.

Per dimostrare invece che

$$\inf_{u \in \overline{B}(0,1)} \varepsilon(u) = 0$$

basta esibire una successione di funzioni $u_n \in \overline{B}(0,1)$ tale che $\varepsilon(u_n) \longrightarrow 0$. Una tale successione si chiama **minimizzante**. Notare che nessuna sottosuccessione di una successione verificante $\varepsilon(u_n) \longrightarrow 0$ potrà convergere ad una funzione $u \in C_0^1$ perché per continuità dovrebbe risultare $\varepsilon(u) = 0$ e ciò non è possibile come abbiamo visto sopra. Quindi, costruendo (u_n) troveremo anche una successione di elementi di $\bar{B}(0,1)$ che non ha sottosuccessioni convergenti.

Per costruire una successione minimizzante u_n consideriamo la funzione

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}.$$

La funzione $\bar{v}$ è discontinua solo nel punto 1/2. Approssimiamo $\bar{v}$ con una successione di funzioni continue v_n definite da

$$v_n(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } \ 0 \leq t \leq 1/2 - 1/n \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } 1/2 + 1/n \leq t \leq 1 \\ \frac{n}{\sqrt{2}}(t - 1/2 - 1/n) + \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } 1/2 - 1/n \leq t \leq 1/2 + 1/n \end{cases}$$

Esercizio 10.13. *Verificare che v_n sono continue, che $\int_0^1 v_n(t)\,dt = 0$ e che $v_n(t) \longrightarrow v(t)$ per ogni $t \neq 1/2$.*

Esercizio 10.14. *Sia $u_n(t) = \int_0^t v_n(s)\,ds$. Dimostrare che $u_n \in \bar{B}(0,1) \subset C_0^1$, che $\varepsilon(u_n) \longrightarrow 0$ e che quindi u_n è una successione minimizzante per il funzionale di Eulero ε.*

Da questi due esercizi concludiamo che $\inf\limits_{u \in \overline{B}(0,1)} \varepsilon(u) = 0$ ma non è un valore minimo di ε.

Esempio: Sia $I = [0, 2\pi]$ e sia $C(I)$ munito del prodotto scalare $< f, g >= \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. Lo spazio $C(I)$ è uno spazio euclideo non completo. Consideriamo $f_n(t) = \sin nt$ con $t \in [0, 2\pi]$.
Si vede che $\|f_n\| = 1$ e quindi $f_n \in \overline{B}(0,1) \subset C(I)$. Inoltre

$$< f_n, f_m >= \int\limits_0^{2\pi} f_n(t)f_m(t)dt = 0 \text{ se } n \neq m.$$

Così, $\|f_n - f_m\| = \sqrt{2}$ se $n \neq m$ e dunque (f_n) non ha alcuna sottosuccessione convergente.

Nota Bene 10.2. *Si può dimostrare che la palla chiusa di raggio r in uno spazio normato di dimensione infinita, non è mai compatta.*

10.3 Caratterizzazione degli spazi metrici compatti

Teorema 10.15. *Uno spazio metrico X è compatto se e soltanto se è completo e totalmente limitato.*

Un corollario immediato è la seguente caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di uno spazio metrico.

Corollario 10.16. *Se X è uno spazio metrico completo, allora $A \subset X$ è compatto se e solo se A è chiuso e totalmente limitato.*

Dimostrazione. (del teorema) Se X è compatto abbiamo dimostrato che X è totalmente limitato. Dimostriamo ora che X è completo. Sia (x_n) una successione di Cauchy, per compattezza (x_n) avrà una sottosuccessione convergente ad un punto x, ma per una proprietà delle successioni di Cauchy, anche x_n sarà convergente ad x. Dunque X è completo.
Per dimostrare il reciproco vediamo che in uno spazio completo e totalmente limitato ogni successione ha una sottosuccessione convergente. Possiamo supporre senza perdita di generalità che l'immagine della successione (x_n) considerata è un insieme infinito. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ricopriamo lo spazio X con un ricoprimento $\mathcal{U}^n$ finito di palle di raggio $1/n$. Qualche palla B_1 del ricoprimento finito $\mathcal{U}^1$ dovrà contenere infiniti termini della successione. Poiché $\mathcal{U}^2$ ricopre B_1 deve esistere una palla $B_2 \in \mathcal{U}^2$ di raggio $1/2$ tale che $B_1 \cap B_2$ contiene infiniti membri della successione. Costruiremo così una successione di palle B_k di raggio $1/k$ tali che $B_1 \cap \cdots \cap B_k$ confine infiniti membri della successione. Scegliendo

una successione crescente di numeri naturali n_k tali che $x_{n_k} \in B_1 \cap \cdots \cap B_k$ risulta dalla costruzione che per $r, s > k$ entrambi x_{n_r} e x_{n_s} appartengono a B_k e quindi $d(x_{n_r}, x_{n_s}) < 2/k$. Risulta allora che la sottosuccessione (x_{n_k}) e di Cauchy e dunque convergente. $\square$

Per finire enunciamo senza dimostrazione una celebre caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti dello spazio $C(X)$ dovuta ad Ascoli e Arzelà.
Sia X uno spazio metrico compatto. Consideriamo $C(X)$ con la norma $\|u\|_\infty$. Si dimostra in maniera analoga a quella del caso $X = [a, b]$ che $C(X)$ è uno spazio di Banach.

Definizione 10.4. *Un sottoinsieme $K \subset C(X)$ si dice equicontinuo se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che per ogni $f \in K$, si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ se $|y - x| < \delta$.*

Esercizio 10.17. *Nella definizione sopra, si può prendere δ indipendente da x.*

Teorema 10.18 (Ascoli-Arzelà)**.** *Sia X uno spazio metrico compatto e sia $A \subset C(X)$ un suo sottoinsieme. Allora A è compatto se e soltanto se:*

1. *A è chiuso;*
2. *A è limitato;*
3. *A è equicontinuo.*

Bibliografia

V. Checcucci - A.Tognoli - E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale* Feltrinelli.
J. Dugundji, *Topology* Allyn Bacon.
N. Hitchin, *Differentiable manifolds* hitchin@maths.ox.ac.uk
J. Kelley, *General Topology* Springer verlag.
S. Lipschutz, *Theory and Problems of General Topology* Schaums outline series.
J. Milnor *Topology from the differentiable viewpoint* Princeton University Press.
J. Munkres *Topology* Prentice Hall.
H. Royden, P.Fitzpatrick *Real Analysis,* Prentice Hall, (4th Edition)
H. Royden *Real Analysis,* Prentice Hall.