(c) Si discuta in modo euristico come il numero di riproduzione di base $\mathcal{R}_0 := \frac{\beta}{\gamma}$ influenzi le prime fasi del processo di infezione – ossia, la dinamica di $I(t)$ quando $S(t) \approx N(t)$.

Dal momento che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(t) = \beta \frac{I(t)}{N(t)} S(t) - \gamma I(t),$$

se $S(t) \approx N(t)$ allora

$$\frac{d}{dt} I(t) \approx \beta \frac{I(t)}{\cancel{N(t)}} \cancel{N(t)} - \gamma I(t)$$

$$= \beta I(t) - \gamma I(t)$$

$$= \gamma \Big(\underbrace{\frac{\beta}{\gamma}}_{=: \mathcal{R}_0} - 1 \Big) I(t)$$

$$= \gamma \left(\mathcal{R}_0 - 1 \right) I(t)$$

Di qui, notiamo che, in prima approssimazione, se $S(t) \approx N(t)$, allora:

- se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ si ha $\frac{d}{dt} I(t) \leq 0$ ($\Rightarrow$ la malattia non si propaga nella popolazione);
- se $\mathcal{R}_0 > 1$ si ha $\frac{d}{dt} I(t) > 0$ ($\Rightarrow$ la malattia si propaga).

(e) Siano $s(t) := \dfrac{S(t)}{N(t)}$ e $r(t) := \dfrac{R(t)}{N(t)}$, rispettivamente, la frazione di individui suscettibili e la frazione di individui guariti all'istante di tempo t. Dando per assunto che $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$, si dimostri che

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = -\frac{1}{\mathcal{R}_0}\,\mathrm{W}\left(-\mathcal{R}_0\, s(0)\, \exp\left[-\mathcal{R}_0\,(1-r(0))\right]\right)$$

e

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 1 + \frac{1}{\mathcal{R}_0}\,\mathrm{W}\left(-\mathcal{R}_0\, s(0)\, \exp\left[-\mathcal{R}_0\,(1-r(0))\right]\right),$$

dove $\mathcal{R}_0 := \dfrac{\beta}{\gamma}$ è il numero di riproduzione di base e $\mathrm{W}(z)$ denota la funzione W di Lambert, ovvero l'inversa della funzione $z\exp(z)$.[2]

Sfruttando il suggerimento dato nel testo del problema, utilizzando le ODE per $S(t)$ e $R(t)$, troviamo:

$$\frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = \frac{dS}{dR} = \frac{-\beta \frac{\cancel{I}^{1}}{N} S}{\gamma\, \cancel{I}_{1}} \underset{\mathcal{R}_0 := \frac{\beta}{\gamma}}{=} -\mathcal{R}_0 \frac{S}{N} \underset{N(t) \equiv N(0)}{=} -\mathcal{R}_0 \frac{S}{N(0)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dS}{dR} = -\mathcal{R}_0 \frac{S}{N(0)}.$$

Risolvendo mediante separazione delle variabili:

$$S(t) = S(0)\exp\left[-\mathcal{R}_0\left(\frac{R(t)-R(0)}{N(0)}\right)\right], \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{S(t)}{N(0)}}_{=s(t)} = \underbrace{\frac{S(0)}{N(0)}}_{=s(0)} \exp\left[-\mathcal{R}_0 \underbrace{\left(\frac{R(t)-R(0)}{N(0)}\right)}_{=r(t)-r(0)}\right], \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow s(t) = s(0)\exp\left[-\mathcal{R}_0\,(r(t)-r(0))\right], \quad t \geq 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} s(t) = s(0) \exp\left[-R_0\left(\lim_{t\to\infty} r(t) - r(0)\right)\right] \quad (*)$$

Inoltre, dal momento che $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$, si ha:

$$\lim_{t\to\infty} s(t) + \lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} \left(s(t) + r(t)\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{S(t)}{N(t)} + \frac{R(t)}{N(t)}\right)$$

$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{S(t)}{S(t)+R(t)} + \frac{R(t)}{S(t)+R(t)}\right)$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} r(t) = 1 - \lim_{t\to\infty} s(t)$$

Sostituendo questa relazione asintotica in $(*)$ si trova:

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = s(0) \exp\left[-R_0\left(\left(1 - \lim_{t\to\infty} s(t)\right) - r(0)\right)\right],$$

da cui, introducendo la notazione $\lim_{t\to\infty} s(t) =: s^\infty$, si ha

$$s^\infty = s(0) \exp\left[-R_0\left(1 - r(0)\right)\right] \exp\left[R_0 s^\infty\right]$$

$$\Rightarrow s^\infty \exp\left[-R_0 s^\infty\right] = s(0) \exp\left[-R_0\left(1 - r(0)\right)\right]$$

$$\Rightarrow -R_0 s^\infty \exp\left[-R_0 s^\infty\right] = -R_0 s(0) \exp\left[-R_0(1-r(0))\right]$$

$$\Rightarrow -R_0 s^\infty = W\left(-R_0 s(0) \exp\left[-R_0(1-r(0))\right]\right)$$

$$\Rightarrow s^\infty = -\frac{1}{R_0} W\left(-R_0 s(0) \exp\left[-R_0(1-r(0))\right]\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} s(t) = -\frac{1}{R_0} W\left(-R_0 s(0) \exp\left[-R_0(1-r(0))\right]\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} r(t) = 1 + \frac{1}{R_0} W\left(-R_0 s(0) \exp\left[-R_0(1-r(0))\right]\right).$$

---

1. Si risolva il punto (c) del Problema 1 dell'Esercitazione 1 utilizzando il Lemma di Grönwall in forma differenziale.

Ricordiamo che:

$$(*) \quad \frac{d}{dt} N(t) = \left(\rho - k A(t)\right) N(t), \quad t > 0.$$

Nel caso in cui

$$A(t) \geq C \quad \forall\, t \geq t^*,$$

dalla ODE di cui sopra $(*)$ otteniamo la seguente disuguaglianza differenziale:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} N(t) \leq (\rho - KC)}_{} N(t), \quad t \geq t^*.$$

$$\frac{d}{dt} N(t) \leq \underbrace{(\rho - KC)}_{=:B} N(t), \quad t \geq t^*.$$

Quindi, usando il Lemma di Grönwall in forma diff., si ha:

$$N(t) \leq \overline{N}(t), \qquad t \geq t^*$$

Con $\overline{N}(t)$ soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overline{N}(t) = (\rho - KC) \overline{N}(t), & t > t^* \\ \overline{N}(t^*) = N(t^*) . \end{cases}$$

Dunque, ricordando che $N(t) \geq 0$, possiamo concludere:

$$0 \leq N(t) \leq \overline{N}(t) = \underbrace{N(t^*)}_{>0} \exp\left[(\rho - KC) t \right], \quad t \geq t^* .$$

Quindi, se $C > \frac{\rho}{K}$ allora $\lim_{t \to \infty} N(t) = 0$.

Di qui si procede poi come visto nella scorsa esercitazione.

2. Sia data una popolazione in cui il numero di individui all'istante di tempo $t \geq 0$ sia descritto dalla funzione $N(t) \geq 0$, la cui evoluzione temporale sia governata dal seguente problema di Cauchy[1]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) = \rho \left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right) N(t), & t > 0, \\ \\ N(0) = N_0 := \alpha K, \end{cases}$$

ove $\alpha > 0$, $\rho > 0$ e $K > 0$.

(b) Si mostri che $N(t)$ soddisfa le seguenti stime a priori

$$0 < N(t) \leq N_M \quad \text{per ogni } t \geq 0,$$

Per risolvere il problema, studiamo il segno di $\frac{d}{dt} N(t)$:

$$\frac{d}{dt} N(t) \begin{cases} < 0, & \text{se } N(t) > K \\ = 0, & \text{se } N(t) = K \\ > 0, & \text{se } 0 < N(t) < K. \end{cases}$$

Quindi, ricordando che $N(0) = \alpha K$ con $\alpha > 0$,

- se $\alpha \geq 1$ allora $K \leq N(t) \leq \alpha K$, $t \geq 0$
- se $0 < \alpha < 1$ allora $\alpha K \leq N(t) \leq K$, $t \geq 0$.

Di conseguenza:

$$0 < N(t) \leq \max\{\alpha K, K\} =: N_M, \quad t \geq 0.$$

(c) Si dimostri che $\operatorname{sgn}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)\right) = \operatorname{sgn}(1-\alpha)$ per ogni $0 \le t < \infty$.

Notiamo che la ODE per $N(t)$ è nella forma

$$\frac{d}{dt} N = R(N)\, N \,, \quad t > 0$$

con

$$R(N) := \rho \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Quindi, sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

$$R(0) = \rho, \quad R'(N) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N} R(N) < 0 \;\forall N \in \mathbb{R}, \quad R(K) = 0 \quad \text{ove } \rho > 0 \text{ e } K > 0,$$

da cui, sfruttando il risultato dimostrato nella scorsa esercitazione, troviamo:

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{dt} N(t)\right) = \operatorname{sgn}\left(R(N(0))\right)$$

$N(0) = \alpha K$

$$= \operatorname{sgn}\left(R(\alpha K)\right)$$

$$= \operatorname{sgn}\left(\rho\left(1 - \frac{\alpha \cancel{K}}{\cancel{K}}\right)\right)$$

$\rho > 0$

$$= \operatorname{sgn}(1-\alpha), \quad t \geq 0.$$