1. Si consideri una popolazione di batteri esposta all'azione di un antibiotico. A ogni instante di tempo $t \geq 0$, il numero di batteri all'interno della popolazione venga descritto dalla funzione $N(t) \geq 0$ e la concentrazione di antibiotico sia invece descritta da una funzione (limitata e continua) assegnata $A(t) \geq 0$.

   (a) Si formuli un problema di Cauchy che descriva l'evoluzione temporale del numero di batteri nel caso in cui:

   - il numero iniziale di batteri sia pari a $N_0 > 0$;
   - il numero di batteri cresca esponenzialmente a tasso $\rho > 0$;
   - il numero di batteri decresca esponenzialmente a un tasso proporzionale alla concentrazione di antibiotico, con costante di proporzionalità $\kappa > 0$[1].

[1] **Richiamo teorico**. Data una generica quantità il cui valore all'istante di tempo $t \geq 0$ sia rappresentato dalla funzione $f(t) \geq 0$, la crescita/decrescita esponenziale di detta quantità può essere descritta per mezzo dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = R(t)\, f(t), \quad t > 0.$$

La funzione $R(t)$ rappresenta il tasso netto di crescita (ovvero, la differenza tra il tasso di crescita e il tasso di decrescita) del valore della quantità in oggetto all'istante di tempo t.

Sulla scorta di quanto detto nel richiamo teorico e delle informazioni dateci nel testo del problema si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} N(t) = \left(\rho - \kappa A(t)\right) N(t), & t > 0 \\ N(0) = N_0 > 0 \end{cases}$$

(b) Si calcoli il numero di batteri a un generico istante di tempo $t > 0$.

Risolvendo la ODE per N(t) mediante il metodo di separazione delle variabili si ottiene:

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N} = \int_0^t (\ell - k A(s))\, ds$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = \int_0^t (\ell - k A(s))\, ds$$

$$\Rightarrow \frac{N(t)}{N_0} = \exp\left(\int_0^t (\ell - k A(s))\, ds\right)$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \exp\left(\int_0^t (\ell - k A(s))\, ds\right), \quad t \geq 0$$

(c) Si trovi il valore critico della concentrazione di antibiotico $A^* > 0$ tale che se

$$A(t) > A^* \quad \forall\, t \geq t^* \quad \text{per un qualche } t^* < \infty$$

allora la popolazione di batteri si estingua per $t \to \infty$.

Il fatto che la popolazione si estingue per $t \to \infty$ è equivalente ad avere che $N(t) \to 0$ per $t \to \infty$.

Notiamo inoltre che, sulla scorta di quanto trovato al punto precedente, se $A(t) > C > 0$ per $t \geq t^*$, allora, per $t \geq t^*$,

$$0 \leq N(t) = N_0 \exp\left(\int_0^t (\varrho - k A(s))\, ds\right)$$

$$\leq N_0 \exp\left(\int_0^{t^*} (\varrho - k A(s))\, ds + \int_{t^*}^{t} (\varrho - k C)\, ds\right)$$

$$= N_0 \exp\left(\int_0^{t^*} (\varrho - k A(s))\, ds\right) \times$$

$$\times \exp\left[(\varrho - k C)(t - t^*)\right]$$

Di qui, notando che (vedasi le assunzioni su $A(t)$)

$$\exp\left(\int_0^{t^*} (\varrho - k A(s))\, ds\right) < \infty$$

e, inoltre, che se $C > \frac{\varrho}{k}$ allora

$$\exp\left[(\varrho - k C)(t - t^*)\right] \xrightarrow[t \to \infty]{} 0,$$

possiamo concludere che se $A(t) > C > \varrho/k$ per ogni $t \geq t^*$ allora $N(t) \to 0$ per $t \to \infty$.

In definitiva, ciò ci permette di concludere che $A^* = \varrho/k$.

2. Sia data una popolazione il cui numero di individui all'istante di tempo $t \geq 0$ venga descritto dalla funzione $N(t) \geq 0$, la cui evoluzione sia governata dal seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) = R(N)\, N(t), \quad t > 0, \\ \\ N(0) = N_0 > 0. \end{cases}$$

Siano inoltre verificate le seguenti ipotesi

$$R(0) = \rho, \quad R'(N) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N} R(N) < 0 \; \forall N \in \mathbb{R}, \quad R(K) = 0 \quad \text{ove } \rho > 0 \text{ e } K > 0.$$

(a) Si dimostri che

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t)\right) = \operatorname{sgn}\left(R(N_0)\right) \quad \forall\, t \in [0, \infty),$$

dove $\operatorname{sgn}(\cdot)$ denota la funzione segno, e si discuta il significato fisico di tale risultato.

Procediamo ricavando una ODE per la funzione $u(t) := \frac{d}{dt} N(t)$. Si ha:

$$\frac{d}{dt} N = R(N) N$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt} N(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[R(N) N\right]$$

$$= \left[R'(N) \overbrace{\frac{dN}{dt}}^{=u(t)} N + R(N) \overbrace{\frac{dN}{dt}}^{=u(t)}\right], \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} u = \underbrace{\Big(R'(N) N + R(N)\Big)}_{=: P(t)} u, \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} u(t) = P(t)\, u(t), \quad t > 0$$

Risolvendo la ODE di cui sopra soggetta al dato iniziale $u(0)$ si trova

$$u(t) = u(0)\exp\left(\int_0^t P(s)\,ds\right), \quad t \geq 0$$

$u(t) := \frac{d}{dt}N(t)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}N(t) = \left(\frac{d}{dt}N(0)\right)\exp\left(\int_0^t P(s)\,ds\right).$$

Dal momento che

$$\exp\left(\int_0^t P(s)\,ds\right) > 0$$

si ha

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{dt}N(t)\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{dt}N(0)\right)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N(t) = R(N)N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

$$= \operatorname{sgn}\left(R(N_0)\,N_0\right)$$

$N_0 > 0$

$$= \operatorname{sgn}\left(R(N_0)\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{dt}N(t)\right) = \operatorname{sgn}\left(R(N_0)\right), \quad t \in [0,\infty).$$

(b) Sulla base del risultato ottenuto al punto (a), si discuta in modo euristico il comportamento asintotico di $N(t)$ per $t \to \infty$.

Sulla base di quanto trovato, ci possiamo aspettare che:

i) se $N_0 = K$ allora $R(N_0) = 0$ da cui $N(t) \equiv K$;

ii) se $N_0 < K$ allora $R(N_0) > 0$ da cui $N(t)$ cresce in modo monotono e $N(t) \to K$ per $t \to \infty$;

iii) se $N_0 > K$ allora $R(N_0) < 0$ da cui $N(t)$ decresce in modo monotono e $N(t) \to K$ per $t \to \infty$.

3. Si consideri una popolazione che consti di $N(t)$ individui al tempo $t \geq 0$. Di questi, $S(t)$ individui siano suscettibili a una malattia infettiva, $I(t)$ individui siano affetti da tale malattia, e quindi infetti, e $R(t)$ individui siano guariti e ormai immuni alla malattia. La dinamica di tale popolazione venga descritta matematicamente dal seguente modello SIR

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) = -\beta\dfrac{I(t)}{N(t)}S(t), \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) = \beta\dfrac{I(t)}{N(t)}S(t) - \gamma I(t), \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t) = \gamma I(t), \\ \\ N(t) := S(t) + I(t) + R(t), \end{cases} \qquad t > 0,$$

dove $\beta > 0$ e $\gamma > 0$.

(a) Si discuta il significato fisico dei termini che compaiono al secondo membro delle equazioni differenziali che compongono il modello.

Il parametro $\beta > 0$ corrisponde al tasso di infezione

Il parametro $\gamma > 0$ corrisponde al tasso di guarigione. Il termine $I(t)/N(t)$ modella la frazione di individui infetti presenti nel sistema al tempo t e fornisce una possibile misura della probabilità di entrare in contatto con un individuo infetto all'interno del sistema al tempo t.

(b) Si discuta il significato fisico della quantità $\frac{1}{\gamma}$.

Il parametro $\frac{1}{\gamma}$, che si noti ha unità di misura pari all'inverso dell'unità di misura della variabile temporale t, fornisce una possibile misura del tempo di permanenza di un individuo infetto all'interno del sistema.

(d) Si dimostri che $N(t) = N(0)$ per ogni $t \geq 0$ e si discuta il significato fisico di tale risultato.

Sommando tra loro le ODE per $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ si trova:

$$\frac{d}{dt}S(t) + \frac{d}{dt}I(t) + \frac{d}{dt}R(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\big(\underbrace{S(t)+I(t)+R(t)}_{=:N(t)}\big) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}N(t) = 0, \; t \geq 0$$

$$\Rightarrow N(t) = N(0) \quad \forall t \geq 0 \; (N(t) \text{ è costante})$$
