

EQUAZIONI E SISTEMI DI EQUAZIONI NON LINEARI

Letizia SCUDERI

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

letizia.scuderi@polito.it

A.A. 2022/2023

Consideriamo il seguente problema: la ricerca delle soluzioni o radici di un'**equazione non lineare**

$$f(x) = 0$$

ovvero dei valori α tali che $f(\alpha) \equiv 0$.

Ricordiamo che non sempre è possibile risolvere analiticamente un'equazione non lineare.

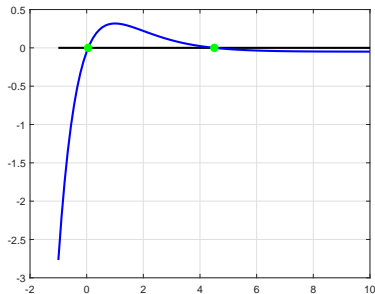
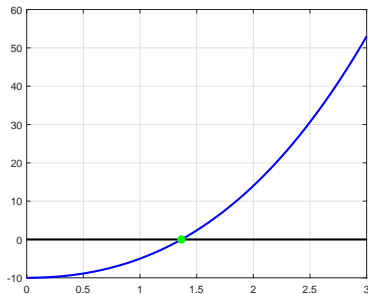
Inoltre, quand'anche ciò fosse possibile, la sua risoluzione potrebbe risultare complicata.

Esempio

Le seguenti due equazioni non lineari non sono risolvibili con metodi analitici:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \quad \text{e} \quad f(x) = xe^{-x} - e^{-3} = 0$$

La rappresentazione grafica di f consente di dedurre che la prima equazione (figura a sinistra) ammette una radice reale e due complesse e coniugate; la seconda (figura a destra) ammette due radici reali.



In queste situazioni e quando non si conosce l'espressione analitica di f ma si conosce soltanto il valore numerico $f(x)$ che f assume in un qualunque punto x , si rende necessario l'utilizzo di un metodo numerico in grado di restituire un valore approssimato delle radici dell'equazione assegnata (indipendentemente dalla complessità della funzione f).

I metodi numerici per il calcolo delle radici di un'equazione non lineare sono di tipo iterativo:

a partire da un valore x_0 si determina una successione di valori $\{x_n\}$ che, sotto opportune condizioni, converge a una radice α dell'equazione assegnata

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

Per stimare la rapidità di convergenza di un metodo si introduce la seguente definizione.

Definizione

Si definisce **ordine di convergenza di una successione** $\{x_n\}$ convergente ad α , il numero reale $p \geq 1$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^p} = C \neq 0, +\infty$$

Inoltre,

- se $p = 1$, $C < 1$, la convergenza si dice **lineare**;
- se $1 < p < 2$, la convergenza si dice **superlineare**;
- se $p = 2$, la convergenza si dice **quadratica**;
- se $p = 3$, la convergenza si dice **cubica**.

Definizione

Se la successione $\{x_n\}$ definita da un metodo per la risoluzione di un'equazione $f(x) = 0$ ha ordine di convergenza p , allora si dice che il **metodo ha ordine di convergenza p** .

Osservazione

Osserviamo che, se un metodo ha ordine di convergenza p , allora per n sufficientemente grande si ha

$$|\alpha - x_{n+1}| \approx C |\alpha - x_n|^p$$

e, conseguentemente,

$$|\alpha - x_n| \approx 10^{-k} \quad \Rightarrow \quad |\alpha - x_{n+1}| \approx C 10^{-kp}$$

Pertanto, per n sufficientemente grande, se x_n ha k decimali corretti, il numero di decimali corretti presenti in x_{n+1} è dell'ordine di kp .

La convergenza talvolta dipende dalla scelta del valore iniziale x_0 .

Esistono infatti i teoremi di convergenza “locale” che garantiscono la convergenza del metodo solo se x_0 è “sufficientemente vicino” a α .

I teoremi di convergenza “globale” invece garantiscono la convergenza del metodo per ogni scelta del punto iniziale x_0 appartenente a un intervallo (non necessariamente di ampiezza “piccola”) contenente la radice α .

Pertanto è importante partire da un valore iniziale x_0 che risulti una prima approssimazione della radice α .

Per effettuare una “buona” scelta del valore iniziale x_0 si può procedere con la rappresentazione grafica della funzione $f(x)$, oppure con la determinazione di un intervallo di ampiezza “piccola” contenente α .

A tale scopo risulta utile il seguente teorema.

Teorema

Se $f \in C^0([a, b])$ e $f(a)f(b) < 0$, cioè $f(x)$ assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a, b]$, allora esiste almeno un punto $\alpha \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) \equiv 0$.

Nel caso di radici semplici, un intervallo di ampiezza “piccola” contenente α può essere individuato mediante il **metodo di bisezione**.

Tale metodo consiste nel partire dall'intervallo (a_0, b_0) , per il quale risulta $f(a_0)f(b_0) < 0$, e nel costruire una successione di intervalli (a_n, b_n) di ampiezza sempre più piccola e contenenti la radice α .

Gli intervalli successivi (a_n, b_n) , $n = 1, 2, \dots$ vengono individuati con la seguente strategia.

Supponiamo $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$. Dato (a_{n-1}, b_{n-1}) , determiniamo il punto medio

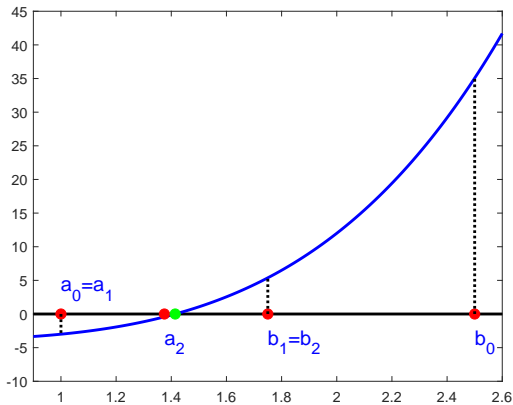
$$m_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

e calcoliamo $f(m_n)$. Se $f(m_n) = 0$ allora $\alpha = m_n$, altrimenti poniamo:

$$(a_n, b_n) = \begin{cases} (m_n, b_{n-1}) & \text{se } f(m_n) < 0 \\ (a_{n-1}, m_n) & \text{se } f(m_n) > 0 \end{cases}$$

Esempio

La figura mostra le prime due iterazioni del metodo di bisezione applicato all'equazione $x^4 - 4 = 0$ per il calcolo della radice reale positiva $\alpha = \sqrt{2}$, a partire dai valori $a_0 = 1$ e $b_0 = 2.5$.



Così facendo ad ogni passo si determina un intervallo, di ampiezza dimezzata rispetto alla precedente, contenente la radice α :

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Se come stima della radice α prendiamo m_{n+1} , si ha

$$|\alpha - m_{n+1}| < \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

La convergenza del metodo è dunque garantita ma è lenta. A ogni passo l'errore al massimo si dimezza rispetto al passo precedente

$$\frac{|\alpha - m_{n+1}|}{|\alpha - m_n|} \approx \frac{1}{2}$$

e quindi la convergenza è soltanto lineare.

Osservazioni

- Questo metodo non garantisce una progressiva riduzione dell'errore, ma solo un dimezzamento dell'ampiezza dell'intervallo al quale la radice appartiene. Per questo motivo, se si usa come solo criterio di arresto quello basato sull'ampiezza dell'intervallo, possono venire inavvertitamente scartate approssimazioni accurate della radice.
- Questo metodo non tiene conto dell'andamento della funzione: esso non converge alla soluzione in un solo passo neppure se f è lineare, a meno che l'intervallo di partenza non sia simmetrico rispetto alla radice.
- Questo metodo non tiene conto dei valori della funzione ma soltanto dei segni.
- Questo metodo viene generalmente utilizzato per inizializzare metodi più rapidamente convergenti.

Prima di analizzare ulteriori metodi per la risoluzione di equazioni non lineari, descriviamo i criteri che generalmente si utilizzano per arrestare i procedimenti iterativi definiti dai suddetti metodi.

Un criterio consiste senz'altro nel fissare un massimo numero di iterazioni n_{max} . Un altro criterio si basa sulla bontà dell'approssimazione x_{n+1} e consiste nel fissare una tolleranza assoluta (relativa) tol e nell'arrestare il processo quando

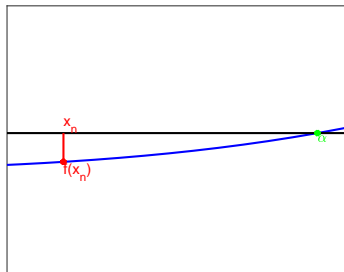
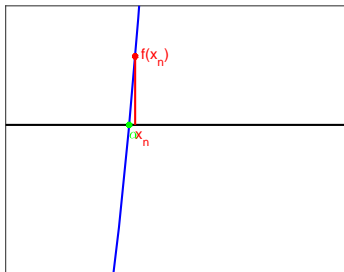
$$|x_n - x_{n+1}| \leq tol \quad (|x_n - x_{n+1}| \leq tol |x_{n+1}|)$$

Tale criterio potrebbe risultare non affidabile quando la convergenza è soltanto lineare.

Un altro criterio consiste nel fissare una tolleranza $ftol$ e nell'arrestare il metodo non appena

$$|f(x_n)| \leq ftol$$

Questo criterio potrebbe portare a degli inconvenienti nelle due seguenti situazioni:



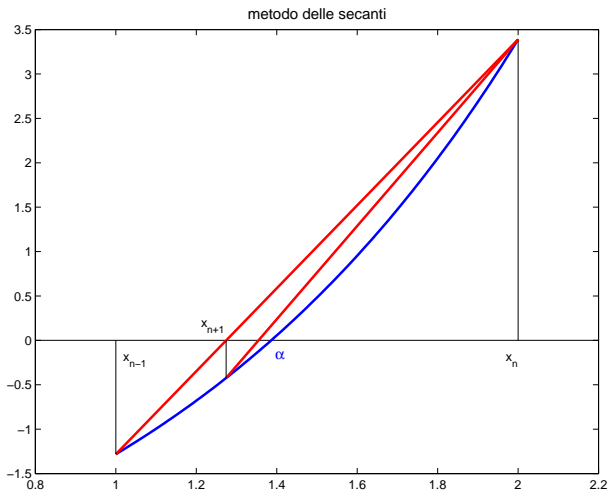
Nella figura a sinistra la quantità $|x_n - \alpha|$ è “piccola” ma il valore $|f(x_n)|$ è “grande”; invece, nella figura a destra, $|x_n - \alpha|$ è “grande” ma $|f(x_n)|$ è “piccolo”.

Il **metodo delle secanti** rappresenta un primo modo naturale di utilizzare i valori della funzione, oltre che il segno.

Infatti, in tale metodo, si considera come approssimazione della funzione f , nell'intervallo (a_n, b_n) , la retta interpolante i punti $(a_n, f(a_n))$ e $(b_n, f(b_n))$ anziché, come nel metodo di bisezione, i punti $(a_n, \operatorname{sgn}(f(a_n)))$ e $(b_n, \operatorname{sgn}(f(b_n)))$.

Risolvendo poi la corrispondente equazione lineare, si ottiene la nuova approssimazione della radice.

Pertanto, il metodo parte da x_0 e x_1 e genera una successione di valori x_{n+1} con $n = 1, 2, \dots$, ottenuti come l'intersezione della retta passante per i punti $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ e $(x_n, f(x_n))$ con l'asse delle ascisse :



Per ricavare la formula iterativa del metodo, partiamo allora da

$$\begin{cases} y = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n) \\ y = 0 \end{cases}$$

e deduciamo

$$x_{n+1} \equiv x = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Teorema di convergenza locale

Sia $f(x)$ tale per cui tutte le successive approssimazioni x_n generate dal metodo delle secanti appartengano all'intervallo $[a, b]$ e sia α una radice semplice di $f(x) = 0$ in $[a, b]$.

Se $f \in C^2([a, b])$, $x_0, x_1 \in [a, b]$ e $|\alpha - x_0|, |\alpha - x_1|$ sono sufficientemente piccoli, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.

Inoltre l'ordine di convergenza del metodo delle secanti è

$$\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

.

Osservazione

Quando la radice ha molteplicità $\mu \geq 2^1$, il metodo delle secanti in generale non converge.

¹Una radice α dell'equazione $f(x) = 0$ ha molteplicità $\mu \geq 1$ se $f(\alpha) = \dots = f^{(\mu-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(\mu)}(\alpha) \neq 0$. Se $\mu = 1$ allora la radice α si dice semplice.

Osservazione

Il metodo delle secanti può essere anche ottenuto approssimando l'equazione $f(x) = 0$ con $p_1(x) = 0$, dove $p_1(x)$ è il polinomio di grado 1 che interpola $f(x)$ nei nodi x_{n-1} e x_n :

$$f(x_n) + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) = 0$$

Se si considerano tre approssimazioni successive x_{n-2}, x_{n-1}, x_n

$$f(x_n) + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) = 0$$

allora si ottiene un metodo più rapidamente convergente di ordine $p \approx 1.84$. Come nuova approssimazione x_{n+1} si prende la radice reale (della parabola) più vicina a x_n . Tale metodo è attribuito a Muller.

Function MATLAB

```
function [x,n,ier] = secanti(f,x0,x1,nmax,tol)
ier = 0;
for n = 1:nmax
    x = x1-f(x1)*(x1-x0)/(f(x1)-f(x0));
    if abs(x-x1) <= tol
        ier = 1;
        break
    end
    x0 = x1;
    x1 = x;
end
```

Esempio

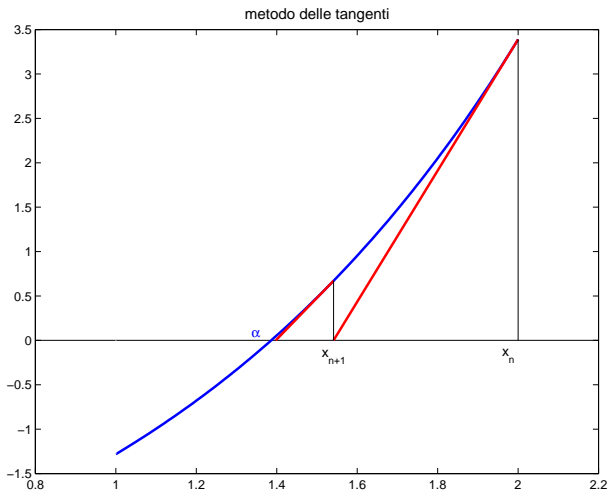
Determiniamo la radice $\alpha = \sqrt{2} \approx 1.414213562373095$ dell'equazione $f(x) = x^4 - 4 = 0$ mediante il metodo delle secanti. Scegliendo $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $n_{\max} = 100$, $\text{tol} = 1.0e - 10$, si ha:

n	x_n	$ x_{n+1} - x_n $	$ \alpha - x_n $
1	2.0000000000000000	$8.00e - 01$	$5.86e - 01$
2	1.2000000000000000	$1.11e - 01$	$2.14e - 01$
3	1.310661764705882	$1.32e - 01$	$1.04e - 01$
4	1.442979105271929	$3.21e - 02$	$2.88e - 02$
5	1.410915551310193	$3.20e - 03$	$3.30e - 03$
6	1.414114438843506	$9.95e - 05$	$9.91e - 05$
7	1.414213909809020	$3.47e - 07$	$3.47e - 07$
8	1.414213562336565	$3.65e - 11$	$3.65e - 11$

Nel **metodo delle tangenti o di Newton-Raphson** si utilizza, quando la funzione è derivabile, la derivata di f per adattare il metodo iterativo alla particolare funzione e ottenere una più rapida convergenza.

In tale metodo, si considera come approssimazione della funzione f , la retta tangente al grafico di f nel punto $(a_n, f(a_n))$ e si risolve la corrispondente equazione lineare per ottenere una nuova approssimazione della radice.

Il metodo parte da x_0 e genera una successione di valori x_{n+1} con $n = 0, 1, 2, \dots$, ottenuti come l'intersezione della retta tangente la curva $y = f(x)$ nel punto $(x_n, f(x_n))$ con l'asse delle ascisse:



Pertanto, per ricavare la formula iterativa del metodo, partiamo da

$$\begin{cases} y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \\ y = 0 \end{cases}$$

e deduciamo

$$x_{n+1} \equiv x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Teorema di convergenza locale

Sia $f(x)$ tale per cui tutte le successive approssimazioni x_n generate dal metodo delle tangenti appartengano all'intervallo $[a, b]$ e sia α una radice semplice di $f(x) = 0$ in $[a, b]$.

Se $f \in C^2([a, b])$, $x_0 \in [a, b]$ e $|\alpha - x_0|$ è sufficientemente piccolo, si ha
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha.$$

Inoltre, se α è una radice semplice, cioè $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$, l'ordine di convergenza del metodo delle tangenti è

$$p = 2$$

Se α non è semplice, cioè $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) = 0$, allora

$$p = 1$$

Osservazione

Per ripristinare l'ordine di convergenza $p = 2$ del metodo delle tangenti nel caso di radici multiple con molteplicità μ nota, si può usare il metodo delle tangenti così modificato:

$$x_{n+1} = x_n - \mu \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Quando μ non è nota possiamo applicare il metodo delle tangenti (oppure il metodo delle secanti) alla nuova equazione

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

che ha le stesse radici di $f(x) = 0$ ma tutte semplici. Nel caso del metodo delle tangenti, la formula iterativa è:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

Di seguito l'enunciato di un teorema di convergenza globale per il metodo delle tangenti.

Teorema di convergenza globale

Se $f \in C^2([a, b])$ e se

- ① $f(a)f(b) < 0$
- ② $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$
- ③ $f''(x) \geq 0$ oppure $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$
- ④ $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a$ e $\left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a$

allora il metodo di Newton converge all'unica soluzione α in $[a, b]$ per ogni scelta di $x_0 \in [a, b]$.

Osservazione

Il metodo delle tangenti può essere anche ottenuto approssimando l'equazione $f(x) = 0$ con $p_1(x) = 0$, dove $p_1(x)$ è il polinomio di grado 1 che interpola $f(x)$ nei nodi x_n e x_n , ovvero con il polinomio di Taylor di grado 1:

$$f(x_n) + f[x_n, x_n](x - x_n) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

Se si considera il polinomio di Taylor di grado 2:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + f''(x_n)\frac{(x - x_n)^2}{2} = 0$$

allora si ottiene un metodo più rapidamente convergente di ordine $p = 3$.

Function MATLAB

```
function [x,n,ier] = tangenti(f,fd,x0,nmax,tol)
ier = 0;
for n = 1:nmax
    x = x0-f(x0)/fd(x0);
    if abs(x-x0) <= tol
        ier = 1;
        break
    end
    x0 = x;
end
```

Esempio

Determiniamo la radice $\alpha = \sqrt{2} \approx 1.414213562373095$ dell'equazione $f(x) = x^4 - 4 = 0$ mediante il metodo delle tangenti. Scegliendo $x_0 = 1$, $n_{\max} = 100$, $\text{tol} = 1.0e - 10$, si ha:

n	x_n	$ x_{n+1} - x_n $	$ \alpha - x_n $
0	1.0000000000000000	$7.50e - 01$	$4.14e - 01$
1	1.7500000000000000	$2.51e - 01$	$3.36e - 01$
2	1.499088921282799	$7.79e - 02$	$8.49e - 02$
3	1.421153542275386	$6.89e - 03$	$6.94e - 03$
4	1.414264232528399	$5.07e - 05$	$5.07e - 05$
5	1.414213565096140	$2.72e - 09$	$2.72e - 09$
6	1.414213562373095	$0.00e + 00$	$0.00e + 00$

Metodo del punto fisso

Il problema del calcolo delle radici dell'equazione $f(x) = 0$, ovvero dei valori

$$\alpha : f(\alpha) \equiv 0,$$

può essere riformulato (riscrivendo in maniera opportuna l'equazione assegnata) nel problema equivalente del calcolo delle radici dell'equazione $x - g(x) = 0$, ovvero dei valori

$$\alpha : \alpha - g(\alpha) \equiv 0$$

Ciascun valore di α tale che $\alpha \equiv g(\alpha)$ si definisce **punto fisso** della funzione $g(x)$.

Pertanto, il primo problema consiste nella ricerca degli zeri della funzione $f(x)$, il secondo nella ricerca dei punti fissi della funzione $g(x)$.

La funzione $g(x)$ del secondo problema si definisce a partire dalla funzione $f(x)$.

Per esempio,

$$\bullet \quad f(\alpha) \equiv 0 \implies \underbrace{\alpha + f(\alpha)}_{g(\alpha)} \equiv \alpha \Rightarrow g(x) = x + f(x);$$

$$\bullet \quad f(\alpha) \equiv 0 \implies \underbrace{\alpha + \frac{f(\alpha)}{k}}_{g(\alpha)} \equiv \alpha \Rightarrow g(x) = x + \frac{f(x)}{k}$$

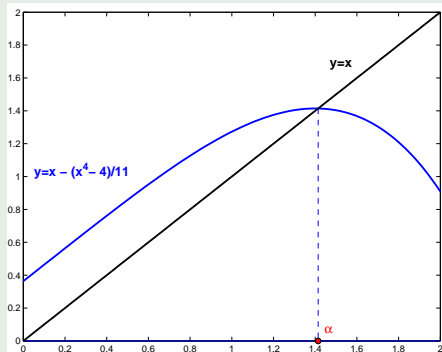
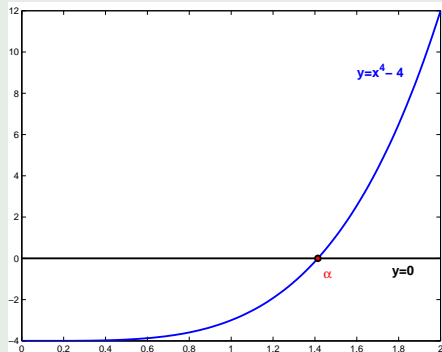
Esempio

Le equazioni

$$x^4 - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x + \frac{(x^4 - 4)}{k} = x$$

con $k = -11$ per esempio, sono equivalenti.

Pertanto possiamo determinare $\alpha = \sqrt{2}$ sia come zero della funzione $f(x) = x^4 - 4$, sia come punto fisso della funzione $g(x) = x - (x^4 - 4)/11$. Graficamente si ha:



Il **metodo del punto fisso** consiste nel determinare α tale che $g(\alpha) \equiv \alpha$, a partire da x_0 e come limite della successione $\{x_n\}$ così definita

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Osservazione

Osserviamo che se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ e se g è continua in un intervallo contenente α , allora $\alpha = g(\alpha)$.

Osservazione

Osserviamo che il metodo delle tangenti è un particolare metodo del punto fisso; esso si ottiene per $g(x) = x + \frac{f(x)}{k}$ con $k = -f'(x)$.

Il metodo delle secanti non è invece un metodo del punto fisso in quanto la generica iterata x_{n+1} non dipende dalla sola x_n , ma anche da x_{n-1} .

Teorema di convergenza locale

Sia α un punto fisso di una funzione g di classe C^1 in un intorno I di α . Se $|g'(\alpha)| < 1$ e $|\alpha - x_0|$ è sufficientemente piccolo, allora per la successione $\{x_n\}$ definita da $x_{n+1} = g(x_n)$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.

Si dimostra che, se esiste un intorno I di α per il quale $|g'(x)| > 1 \quad \forall x \in I$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \alpha$.

Teorema di convergenza globale

Sia I un intervallo dell'asse reale. Se

- ① $g(x) \in I$ per ogni $x \in I$ (cioè $g(I) \subseteq I$)
- ② $g \in C^1(I)$ ¹
- ③ $\exists m < 1 : |g'(x)| \leq m$ per ogni $x \in I$

allora esiste uno e un solo punto fisso α di g in I e per $x_{n+1} = g(x_n)$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \quad \text{per ogni } x_0 \in I$$

Inoltre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha)$$

¹È sufficiente che la funzione $g(x)$ risulti lipschitziana in I , ossia
 $|g(x_1) - g(x_2)| \leq m |x_1 - x_2|$ per ogni coppia di punti x_1 e x_2 appartenenti a I .

Dimostrazione

L'ipotesi 1) e la continuità di g assicurano che la funzione di iterazione g ammetta almeno un punto fisso α in I .

L'ipotesi 3) assicura l'unicità del punto fisso. Infatti se per assurdo esistesse $\beta \in I$ distinto da α e tale che $g(\beta) = \beta$, allora per il teorema di Lagrange esisterebbe ξ appartenente all'intervallo di estremi α e β e quindi appartenente a I tale che

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\xi)| |\alpha - \beta| \leq m |\alpha - \beta|$$

Essendo $m < 1$ questa disuguaglianza è possibile solo se $\alpha = \beta$.

... continua dimostrazione

Partendo da un'approssimazione iniziale $x_0 \in I$, si ha $x_1 = g(x_0) \in I$ per l'ipotesi 1). Per l'ipotesi 2) e il teorema di Lagrange risulta

$$\alpha - x_1 = g(\alpha) - g(x_0) = g'(\xi_0)(\alpha - x_0)$$

con ξ_0 punto non noto dell'intervallo di estremi α e x_0 . Analogamente, si ha che

$$\alpha - x_2 = g(\alpha) - g(x_1) = g'(\xi_1)(\alpha - x_1)$$

...

$$\alpha - x_n = g(\alpha) - g(x_{n-1}) = g'(\xi_{n-1})(\alpha - x_{n-1})$$

con ξ_i , $i = 1, \dots, n-1$, punto dell'intervallo di estremi α e x_i .

Si ha allora

$$\begin{aligned} |\alpha - x_n| &= |g'(\xi_{n-1})| |\alpha - x_{n-1}| = |g'(\xi_{n-1})| |g'(\xi_{n-2})| |\alpha - x_{n-2}| = \dots \\ &= |g'(\xi_{n-1})| |g'(\xi_{n-2})| \cdot \dots \cdot |g'(\xi_0)| |\alpha - x_0| \leq m^n |\alpha - x_0| \end{aligned}$$

... continua dimostrazione

Da quest'ultima diseuguaglianza, in virtù dell'ipotesi 3), si ha la convergenza della successione $\{x_n\}$ ad α .

Inoltre, da

$$\alpha - x_{n+1} = g'(\xi_n)(\alpha - x_n)$$

poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \alpha$ (essendo ξ_n un punto dell'intervallo di estremi x_n e α e x_n tende a α per $n \rightarrow \infty$), dalla continuità di g' segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_n) = g'(\alpha).$$

- Da $|\alpha - x_n| \leq m^n |\alpha - x_0|$ e tenendo conto che

$$|\alpha - x_0| \leq |\alpha - x_1| + |x_1 - x_0| \leq m |\alpha - x_0| + |x_1 - x_0|$$

si deduce facilmente la seguente stima dell'errore

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{m^n}{1 - m} |x_1 - x_0|.$$

- Da $|\alpha - x_{n+1}| \leq m |\alpha - x_n|$ e tenendo conto che

$$|\alpha - x_n| \leq |\alpha - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \leq m |\alpha - x_n| + |x_{n+1} - x_n|$$

si deduce facilmente la seguente stima dell'errore

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq \frac{m}{1 - m} |x_{n+1} - x_n|.$$

Per $m \leq 1/2$ allora $|\alpha - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n|$.

- Più è piccolo m , ovvero $g'(\alpha)$, e più è rapida la convergenza del metodo del punto fisso.

... continua osservazioni

- Se $g \in C^{k+1}(I)$ si ha:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) &= \cancel{g(\alpha)} + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2}(x_n - \alpha)^2 \\ &+ \dots + \frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}(x_n - \alpha)^k + \frac{g^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x_n - \alpha)^{k+1} - \cancel{g(\alpha)} \end{aligned}$$

da cui è immediato dedurre l'ordine p del metodo del punto fisso.

In particolare, si ha:

- se $g'(\alpha) \neq 0$ allora $p = 1$;
 - se $g'(\alpha) = 0$ e $g''(\alpha) \neq 0$ allora $p = 2$;
 - se $g'(\alpha) = \dots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0$ e $g^{(k)}(\alpha) \neq 0$ allora $p = k$.
- Per il metodo di Newton $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ e, se α è semplice,

$$g'(\alpha) = \cancel{1} - \frac{\cancel{f'(\alpha)}}{\cancel{f'(\alpha)}} - \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0 \quad \text{allora} \quad p \geq 2$$

Function MATLAB

```
function [x,n,ier] = puntofisso(g,x0,nmax,tol)
ier = 0;
for n = 1:nmax
    x = g(x0);
    if abs(x-x0) <= tol
        ier = 1;
        break
    end
    x0 = x;
end
```

Esempio

Determiniamo la radice $\alpha = \sqrt{2} \approx 1.414213562373095$ dell'equazione $f(x) = x^4 - 4 = 0$ mediante i seguenti due metodi del punto fisso:

i) $x_{n+1} = x_n + (x_n^4 - 4);$

ii) $x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^4 - 4)}{11}.$

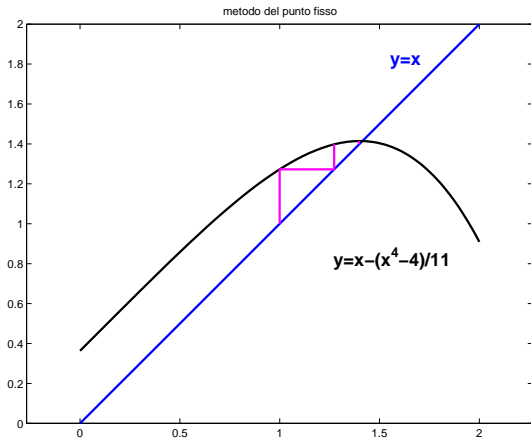
Scegliendo $x_0 = 1$, $nmax = 100$, $tol = 1.e - 10$, si ha:

n	$x_n^{i)}$	$x_n^{ii)}$	$ \alpha - x_n^{ii}) $
1	-2	1.272727272727273	1.41e - 01
2	10	1.397830500897231	1.64e - 02
3	10^4	1.414390239825487	1.77e - 04
4	10^{16}	1.414208489661399	5.07e - 06
5	10^{64}	1.414213707013457	1.45e - 07
6		1.414213558248080	4.13e - 09
7		1.414213562490736	1.18e - 10
8		1.414213562369740	3.36e - 12

Il diverso comportamento dipende dal fatto che risulta:

- i) $g(x) = x + (x^4 - 4) \Rightarrow |g'(x)| = |1 + 4x^3| > 1$ per ogni $x > 0$;
- ii) $g(x) = x - \frac{(x^4 - 4)}{11} \Rightarrow |g'(x)| = |1 - \frac{4x^3}{11}| < 1$ per $x \in (0, \sqrt[3]{\frac{11}{2}})$.

Pertanto, posto $I = (0, \sqrt[3]{\frac{11}{2}})$, il teorema precedente garantisce la convergenza a partire da qualsiasi $x_0 \in I$. Graficamente si ha:



Di seguito la descrizione di due comandi MATLAB: il primo per la risoluzione di una generica equazione non lineare $f(x) = 0$, il secondo per il calcolo delle radici della seguente equazione algebrica

$$c(1)x^n + c(2)x^{n-1} + \dots + c(n+1) = 0$$

Comandi MATLAB

- `r = fzero(f,x0,tol)` calcola un'approssimazione `r` di una radice dell'equazione $f(x) = 0$, con tolleranza assoluta `tol` e a partire dall'approssimazione iniziale `x0`.
- `r = roots(c)` calcola e memorizza in `r` gli zeri del polinomio i cui coefficienti, a partire da quello del termine di grado massimo, sono memorizzati in `c`.

Sistemi di equazioni non lineari

Consideriamo ora il seguente problema: la ricerca delle soluzioni di un sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere nella forma più compatta

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

avendo definito

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Metodo di Newton per sistemi

Alcuni dei metodi per la risoluzione di una singola equazione possono venire generalizzati al caso di sistemi di equazioni non lineari.

Per generalizzare il metodo di Newton, descriviamo dapprima una diversa costruzione del metodo nel caso di una singola equazione $f(x) = 0$. Questa verrà poi generalizzata al caso di sistemi di equazioni non lineari.

Denotiamo con x_n un'approssimazione della radice α e, supponendo $f(x)$ derivabile due volte con derivate seconda continua in un intorno di α contenente x_n , consideriamo il seguente sviluppo in serie di Taylor:

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + f''(\xi) \frac{(\alpha - x_n)^2}{2}$$

Trascurando l'errore, che non è quantificabile, abbiamo

$$f(\alpha) \approx f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n)$$

da cui, tenendo conto che $f(\alpha) = 0$, si deduce

$$0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n)$$

La risoluzione dell'equazione lineare, che si ottiene sostituendo \approx con $=$, definisce la seguente approssimazione x_{n+1} della radice α :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Generalizziamo tale costruzione al caso di sistemi di equazioni non lineari.

Consideriamo un'approssimazione $\mathbf{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})^T$ della radice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$. Supponiamo che ogni singola funzione $f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$, sia derivabile due volte con derivate seconde parziali continue in un intorno di α contenente $\mathbf{x}^{(n)}$, e consideriamo i seguenti sviluppi in serie di Taylor.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\mathbf{x}^{(n)}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} (\alpha_1 - x_1^{(n)}) + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_m} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} (\alpha_m - x_m^{(n)}) \\ \quad \quad \quad + \text{termini di ordine 2} = 0 \\ f_2(\mathbf{x}^{(n)}) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} (\alpha_1 - x_1^{(n)}) + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_m} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} (\alpha_m - x_m^{(n)}) \\ \quad \quad \quad + \text{termini di ordine 2} = 0 \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}^{(n)}) + \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} (\alpha_1 - x_1^{(n)}) + \dots + \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_m} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} (\alpha_m - x_m^{(n)}) \\ \quad \quad \quad + \text{termini di ordine 2} = 0 \end{array} \right.$$

Procedendo in maniera analoga al caso di una singola equazione, trascuriamo i termini di ordine 2 e forziamo l'uguaglianza. Otteniamo così un sistema lineare la cui soluzione, se unica, non sarà α ma una sua approssimazione $\mathbf{x}^{(n+1)}$.

Denotando con

$$\mathbf{J}^{(n)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_m} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_m} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} & \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_2} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} & \cdots & \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_m} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} \end{pmatrix}$$

la matrice Jacobiana del sistema, il metodo di Newton per sistemi di equazioni non lineari è così definito:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(n)} \mathbf{h}^{(n)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h}^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{x}^{(n+1)} &= \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{h}^{(n)} \end{aligned}$$

Di conseguenza il metodo di Newton richiede a ogni passo la soluzione di un sistema lineare con matrice $\mathbf{J}^{(n)}$.

Nota un'approssimazione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ sufficientemente vicina alla soluzione α , il processo iterativo determina una successione $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$ convergente, sotto opportune condizioni, ad α .

Come nel caso di una singola equazione il metodo ha ordine di convergenza 2, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\alpha - \mathbf{x}^{(n+1)}\|}{\|\alpha - \mathbf{x}^{(n)}\|^2} = C \neq 0, +\infty$$

Function MATLAB

```
function [x,ier] = newton_system(F,J,x,nmax,tol)
ier = 0;
for n = 1:nmax
    [L,U,P] = lu(J(x));
    y = L\(-P*F(x));
    e_n = U\y;
    % oppure e_n = -J(x)\F(x);
    x = x + e_n;
    if norm(e_n) <= tol
        ier = 1;
        break
    end
end
end
```

I punti delicati del metodo di Newton sono:

- determinazione della scelta del punto iniziale;
- calcolo della matrice Jacobiana e sua valutazione a ogni passo (punto dispendioso);
- non singolarità della matrice Jacobiana e in caso di “quasi singolarità” il sistema risulterebbe mal condizionato;
- risoluzione a ogni passo di un sistema lineare (punto dispendioso).

Per ridurre il costo computazionale del metodo sono state proposte diverse alternative:

- approssimazione delle derivate con opportuni rapporti incrementali;
- utilizzo della medesima matrice Jacobiana o di una sua approssimazione per alcune fissate successive iterazioni, al fine di mantenere la fattorizzazione $\mathbf{PJ}^{(n)} = \mathbf{LU}$ della matrice Jacobiana $\mathbf{J}^{(n)}$ per più iterate.

Metodo del punto fisso per sistemi

Anche il metodo iterativo del punto fisso, definito per una singola equazione non lineare, può essere generalizzato al caso di sistemi di equazioni. A tale scopo si riscrive il sistema

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

nella forma

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x})$$

con

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \quad \text{e} \quad \varphi(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))^T$$

A partire da una approssimazione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ della soluzione α , si genera mediante la formula iterativa

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(n)})$$

una successione di approssimazioni $\mathbf{x}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ convergente sotto opportune condizioni alla soluzione α .

Il teorema che segue fornisce le condizioni che assicurano la convergenza del metodo iterativo e generalizza il teorema di convergenza globale per una singola equazione.

Teorema di convergenza globale

Sia $S_r(\mathbf{x}^{(0)}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\| < r\}$ un intorno dell'approssimazione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ e sia \mathbf{J} la matrice Jacobiana della funzione φ . Se

- ① $\exists L < 1 : \|\mathbf{J}(\mathbf{x})\| \leq L \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{S}_r(\mathbf{x}^{(0)}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq r\}$
- ② $\|\varphi(\mathbf{x}^{(0)}) - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq (1 - L)r$

allora

- tutte le approssimazioni $\mathbf{x}^{(n)}$ generate dalla formula $\mathbf{x}^{(n+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(n)})$ appartengono a $S_r(\mathbf{x}^{(0)})$
- il processo iterativo converge all'unica soluzione α presente in $\bar{S}_r(\mathbf{x}^{(0)})$ tale che $\alpha = \varphi(\alpha)$
- $\|\alpha - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq \frac{L^n}{1 - L} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$

Di seguito un comando MATLAB per la risoluzione di un sistema di equazioni non lineare.

Comando MATLAB

`r = fsolve(f,x0)` calcola un'approssimazione **r** di una soluzione del sistema di equazioni $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, a partire dall'approssimazione iniziale **x0**.