Fisica II

Esercitazione 11

Alessandro Pedico
alessandro.pedico@polito.it

4/11/2022

Equazioni di Maxwell

In un mezzo indefinito, lineare e omogeneo, nel quale non abbiamo cariche libere e correnti di conduzione, le equazioni di Maxwell sono:

i) $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

ii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

iii) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

iv) $\nabla \times \vec{B} = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Discende dalle equazioni di Maxwell in queste condizioni il fatto che il campo elettrico e il campo magnetico debbano rispettare l'equazione delle onde.

Equazione delle onde

Per verificarlo, facciamo il rotore della equazione iii):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left[\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}\right] = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

equazione i)

Termine di sinistra: $\nabla \times \left[\nabla \times \vec{E}\right] = -\nabla^2 \vec{E} + \cancel{\nabla \left(\nabla \cdot \vec{E}\right)} = -\nabla^2 \vec{E}$

Termine di destra: $-\nabla \times \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \times \vec{B}\right] = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = -\varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

equazione iv)

Quindi otteniamo: $$\boldsymbol{\nabla}^2 \vec{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\varepsilon\mu} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{0}$$

In modo equivalente si ottiene l’equazione delle onde per il campo magnetico facendo il rotore della quarta equazione di Maxwell e utilizzando la stessa identità vettoriale.

Equazione delle onde

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

La velocità di propagazione dei campi è data da:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r}} = \frac{c}{n} \longrightarrow \text{indice di rifrazione}$$

- Il campo elettrico e magnetico sono perpendicolari $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$
- Il campo elettrico e magnetico oscillano perpendicolarmente rispetto alla direzione di propagazione, sono **in fase** e tra i moduli dei campi sussiste la relazione **B = E/v**
- Vale il **principio di sovrapposizione**
- Le possibili forme d'onda sono soluzioni dell'equazione delle onde

Onda piana

ONDA PIANA ARMONICA

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi) = \mathrm{Im}\, \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi) = \mathrm{Im}\, \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi)}$$

$\vec{k} \longrightarrow$ Vettore d'onda $\omega \longrightarrow$ Pulsazione

$\omega = 2\pi f$ $v = \lambda f \longrightarrow$ c (nel vuoto)

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ $\boxed{\omega = kv}$

Proprietà da equazioni di Maxwell

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = \frac{E_0^2}{v}\hat{u}_k$$

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{B} = 0$$

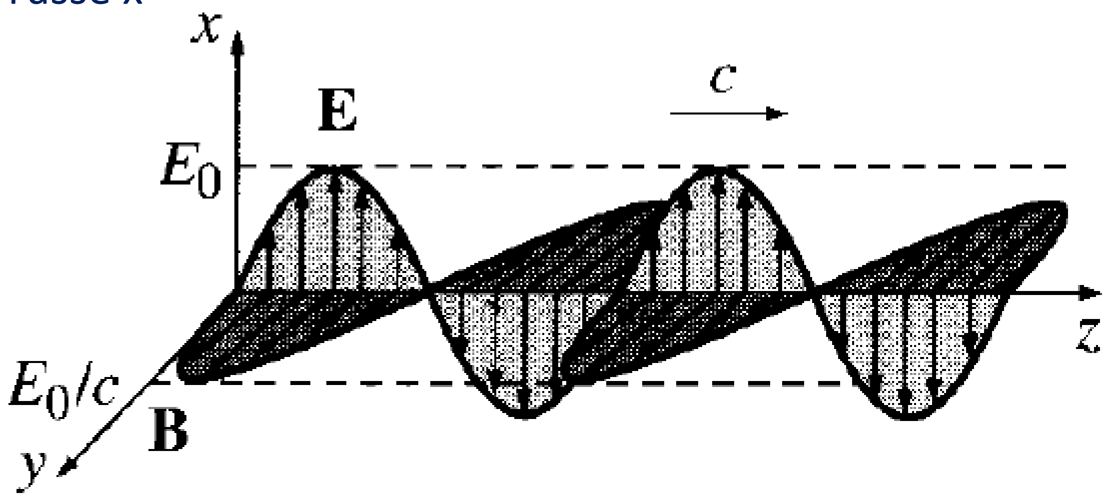
coordinate cartesiane

$$E_x(x,y,z) = E_{0,x} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi)$$
$$E_y(x,y,z) = E_{0,y} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi)$$
$$E_z(x,y,z) = E_{0,z} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi)$$

$$B_x(x,y,z) = B_{0,x} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi)$$
$$B_y(x,y,z) = B_{0,y} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi)$$
$$B_z(x,y,z) = B_{0,z} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi)$$

Onda piana

ESEMPIO: onda piana che si propaga nel vuoto lungo l'asse z, con campo elettrico che oscilla lungo l'asse x



$$\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{E_0}\ \mathbf{sin}(\mathbf{k\,z} - \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{t} + \boldsymbol{\phi})\ \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{x}$$

$$E_x(x,y,z) = E_{0,x}\ \sin(\cancel{k_x x} + \cancel{k_y y} + k_z z - \omega t + \phi)$$

$$E_y(x,y,z) = 0$$

$$E_z(x,y,z) = 0$$

$$B_x(x,y,z) = 0$$

$$B_y(x,y,z) = \frac{E_{0,x}}{c}\ \sin(\cancel{k_x x} + \cancel{k_y y} + k_z z - \omega t + \phi)$$

$$B_z(x,y,z) = 0$$

Spettro elettromagnetico

The Electromagnetic Spectrum

Frequency (Hz)	Type	Wavelength (m)
10^{22}		10^{-13}
10^{21}	gamma rays	10^{-12}
10^{20}		10^{-11}
10^{19}		10^{-10}
10^{18}	x rays	10^{-9}
10^{17}		10^{-8}
10^{16}	ultraviolet	10^{-7}
10^{15}	visible	10^{-6}
10^{14}	infrared	10^{-5}
10^{13}		10^{-4}
10^{12}		10^{-3}
10^{11}		10^{-2}
10^{10}	microwave	10^{-1}
10^{9}		1
10^{8}	TV, FM	10
10^{7}		10^{2}
10^{6}	AM	10^{3}
10^{5}		10^{4}
10^{4}	RF	10^{5}
10^{3}		10^{6}

The Visible Range

Frequency (Hz)	Color	Wavelength (m)
1.0×10^{15}	near ultraviolet	3.0×10^{-7}
7.5×10^{14}	shortest visible blue	4.0×10^{-7}
6.5×10^{14}	blue	4.6×10^{-7}
5.6×10^{14}	green	5.4×10^{-7}
5.1×10^{14}	yellow	5.9×10^{-7}
4.9×10^{14}	orange	6.1×10^{-7}
3.9×10^{14}	longest visible red	7.6×10^{-7}
3.0×10^{14}	near infrared	1.0×10^{-6}

Esercizio 1

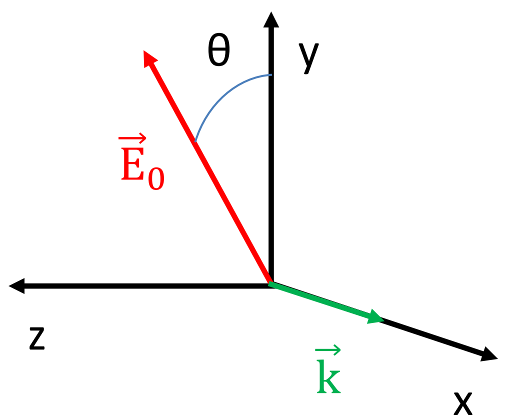
Una onda piana di frequenza $f = 7.5 \cdot 10^{14}$ ***Hz*** si propaga nel vuoto lungo l'asse x. Il campo elettrico forma un angolo $\vartheta = 30°$ con il piano (x,y) e ha ampiezza $E_0 = 10^3$ ***V/m***. Scrivere la funzione dell'onda per il campo elettrico e magnetico.

$$c = 3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0.4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.6 \cdot 10^7 \mathrm{rad/m}$$

$$\omega = 2\pi f = 4.7 \cdot 10^{15} \mathrm{rad/s}$$



L'onda si propaga lungo l'asse x, quindi:

$$\vec{k} = k_x \hat{u}_x + \cancel{k_y \hat{u}_y} + \cancel{k_z \hat{u}_z} = k\, \hat{u}_x$$

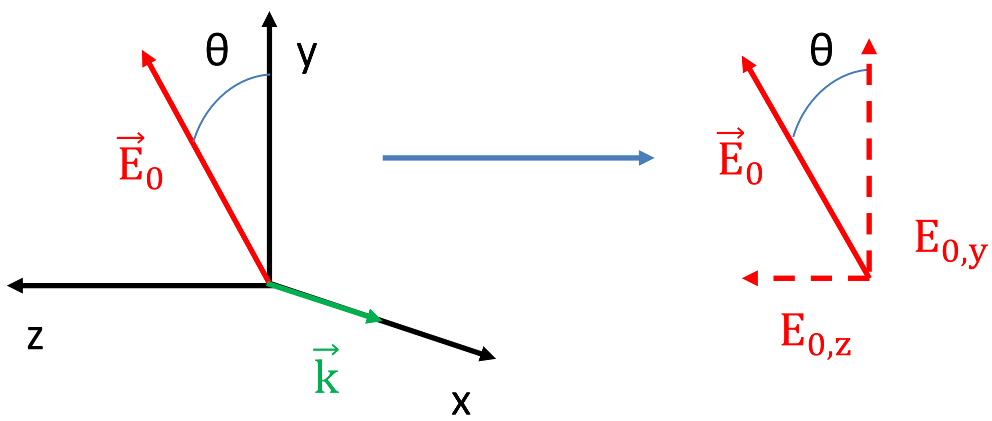
Esercizio 1

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.57 \cdot 10^{7}\ \mathrm{rad/m} \qquad \omega = 2\pi f = 4.7 \cdot 10^{15}\ \mathrm{rad/s} \qquad E_0 = 10^3\ \mathrm{V/m}$$

$$E_x(x,y,z) = 0$$

$$E_y(x,y,z) = E_{0,y}\ \sin(k_x x - \omega t) = 8.7 \cdot 10^2 \sin(1.6 \cdot 10^7 x - 4.7 \cdot 10^{15}\ t)\ \ \mathrm{V/m}$$

$$E_z(x,y,z) = E_{0,z}\ \sin(k_x x - \omega t) = 5 \cdot 10^2 \sin(1.6 \cdot 10^7 x - 4.7 \cdot 10^{15}\ t)\ \ \mathrm{V/m}$$



$$E_0 = \sqrt{E_{0,y}^2 + E_{0,z}^2} = 10^3\ \mathrm{V/m}$$

$$\vec{E}_0 = E_{0,y}\hat{u}_y + E_{0,z}\,\hat{u}_z$$

$$E_{0,y} = E_0 \cos\theta$$

$$E_{0,z} = E_0\ \sin\theta$$

Esercizio 1

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.57 \cdot 10^7 \text{ rad/m} \qquad \omega = 2\pi f = 4.7 \cdot 10^{15} \text{ rad/s} \qquad E_0 = 10^3 \text{ V/m}$$

$$\vec{E} = E_{0,y} \sin(k\,x - \omega\,t)\,\hat{u}_y + E_{0,z} \sin(k\,x - \omega\,t)\,\hat{u}_z$$

Vediamo quanto vale il campo magnetico

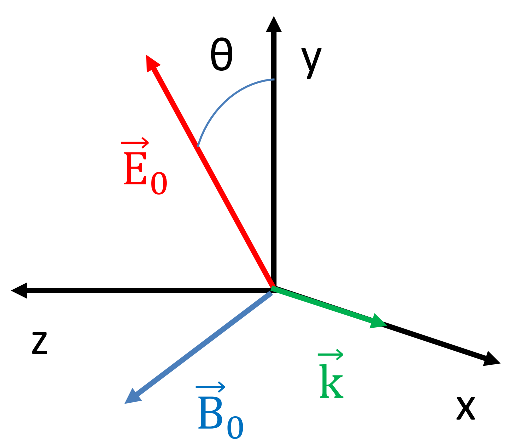
$$\vec{k} = k_x \hat{u}_x$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B}_0 = B_{0,y}\hat{u}_y + B_{0,z}\,\hat{u}_z$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = \frac{E_0^2}{c}\hat{u}_k$$

$$\boxed{B_{0,y} = -\frac{E_{0,z}}{c} \qquad B_{0,z} = \frac{E_{0,y}}{c}}$$



Esercizio 2

Consideriamo una sorgente S che genera una radiazione in forma di onda piana di pulsazione **ω**; vediamo cosa succede quando cambiamo il mezzo in cui si propaga

materiale 1

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r,1}\mu_{r,1}} \sim \sqrt{\varepsilon_{r,1}}$$

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \qquad k_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{E}}_0 \sin\left(\vec{\mathbf{k}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega\, t\right)$$

materiale 2

$$n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r,2}\mu_{r,2}} \sim \sqrt{\varepsilon_{r,2}}$$

$$v_2 = \frac{c}{n_2} \qquad k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2}$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{E}}_0 \sin\left(\vec{\mathbf{k}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega\, t\right)$$

Nota bene: quando l’onda passa da un mezzo di propagazione ad un altro cambia la lunghezza d’onda e velocità di propagazione, ma non cambia la frequenza!