ESERCITAZIONE: ESERCIZI DAL FOGLIO #4

#13 $SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$

criterio di normalità:

$A \in SL_n(\mathbb{R})$, $B \in GL_n(\mathbb{R}) \overset{?}{\Longrightarrow} BAB^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B)^{-1}$$
$$= \underbrace{\det(B)\cdot\det(B)^{-1}}_{1} \cdot 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$\det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$$
$$A \longmapsto \det(A)$$

$$\mathrm{Ker}(\det) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{R})$$

$SL_n(\mathbb{R})$ = nucleo di un omomorfismo $\checkmark$
(quindi è un sottogruppo normale)

#11

G e H gruppi finiti t.c.
$|G| = m$, $|H| = n$, $MCD(m,n) = 1$.
Dimostrare che $\mathrm{Hom}(G,H)$ contiene un solo elemento, e descriverlo.

$$\mathrm{Hom}(G,H) = \{\varphi : G \to H \mid \text{omomorfismo}\}$$

Sia $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,H)$
Sia $\mathrm{Im}(\varphi)$ la sua immagine, allora $\mathrm{Im}(\varphi) < H$
$\Longrightarrow$ (per il teo. di Lagrange) $|\mathrm{Im}(\varphi)| \mid |H| = n$.

Per il teo. fond. di omomorfismo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & H \\ G/\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}$ iniettiva

$$G/_{\mathrm{Ker}(\varphi)} \cong \mathrm{Im}(\varphi)$$

$$\Longrightarrow \left| G/_{\mathrm{Ker}(\varphi)} \right| = |\mathrm{Im}(\varphi)|$$

$$\frac{m}{|\mathrm{Ker}(\varphi)|} = \frac{|G|}{|\mathrm{Ker}(\varphi)|} = |\mathrm{Im}(\varphi)| \Longrightarrow |\mathrm{Im}(\varphi)| \,\big|\, m$$

$\Longrightarrow$ l'unica possibilità è $|\mathrm{Im}(\varphi)| = 1$

$\mathrm{Im}(\varphi) = \{1_H\}$

$$\Longrightarrow \varphi : \begin{aligned} G &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto 1_H \end{aligned} \qquad \mathrm{Ker}(\varphi) = G$$

#6 G, H gruppi

$\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ omomorfismo

a) se $g \in G \Longrightarrow \overbrace{\mathrm{ord}(\varphi(g))}^{m} \,\Big|\, \overbrace{\mathrm{ord}(g)}^{n}$

b) se φ è iniettivo: $\mathrm{ord}(\varphi(g)) = \mathrm{ord}(g)$

$$\mathrm{ord}(g) = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{Z} \mid g^k = 1_G\} \\ \mathrm{ord}(g) = \infty \text{ se il min. } \nexists \end{cases}$$

- $g^n = 1_G \;(\iff \mathrm{ord}(g) = n)$
- $\varphi(g)^m = 1_H \;(\iff \mathrm{ord}(\varphi(g)) = m)$

a) $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(1_G) = 1_H \Longrightarrow m \mid n$

Se $x^\alpha = 1_G$
$\Longrightarrow \alpha$ è un multiplo di $\mathrm{ord}(x)$ $(\mathrm{ord}(x) \mid \alpha)$

b) Supponiamo che φ sia un monomorf.

$\varphi(\underline{1_G}) = 1_H = \varphi(g)^m = \varphi(\underline{g^m})$

$\Longrightarrow g^m = 1_G \Longrightarrow m$ è multiplo di $\mathrm{ord}(g)$: $n \mid m$

Siccome $n \mid m$ e $m \mid n$, $n, m \in \mathbb{N} \Longrightarrow n = m$ ✓

$\boxed{\underline{\text{OSS:}}\ \varphi \underset{G \to H}{\text{isomorfismo}} \Longrightarrow \mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(\varphi(g))\ \forall g \in G}$

$\Delta_6 \not\cong A_4$

12 elt.   12 elt

$A_n \triangleleft S_n$ sottogruppo normale:

$A_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{sgn})$, dove $\mathrm{sgn}: S_n \longrightarrow \{+1, -1\}$

$$\sigma \longmapsto \begin{cases} +1 & \sigma \text{ pari} \\ -1 & \sigma \text{ disp} \end{cases}$$

oppure usando il criterio: $\sigma \in A_n$, $\tau \in S_n$

$$\tau \overset{\text{pari}}{\sigma} \tau^{-1}$$

pari

$A_n \triangleleft S_n$ é t.c. $\dfrac{|S_n|}{|A_n|} = [S_n : A_n] = 2$ e

S_n / A_n é commutativo

Gli elem. di S_n / A_n sono le classi laterali

$$\sigma A_n = \{\sigma\alpha \mid \alpha \in A_n\} \quad \text{con } \sigma \in S_n$$

Siccome qualsiasi sia σ, $\sigma\alpha$, $\alpha \in A_n$ é pari

$\Longrightarrow$ le classi laterali del tipo σA_n sono tutte $= A_n$ stesso

D'altra parte, S_n = unione disgiunta di classi laterali

$\Longrightarrow S_n = A_n \cup A_n^C$

Se $H \triangleleft G$ t.c. $[G:H] = 2 \Longrightarrow G/H$ é abeliano.

$$G/H = \{\underset{1_{G/H}}{\underset{\shortparallel}{H}}, H^C\} \rightsquigarrow \text{i 2 elt. commutano!}$$

#2 G, H due gruppi, $\varphi \in Hom(G, H)$

a) φ iniettivo e H ciclico $\Longrightarrow$ anche G é ciclico

b) φ suriettivo e G ciclico $\Longrightarrow$ anche H é ciclico

OSS: $\varphi: G \to H$ isomorfismo significa in particolare che o sono entrambi ciclici o nessuno dei 2.

$g \in G \quad <g> = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$

G si dice ciclico se $\exists\ g \in G$ t.c. $G = <g>$

$|<g>| = ord(g)$

In particolare, G gruppo finito di ordine $|G| = n$ é ciclico $\Longleftrightarrow$ $\exists$ un suo elemento di ordine n.

$\Longrightarrow$ $G = <g> \quad ord(g) = n$ ✓

$\Longleftarrow$ se $\exists\ x$ di ordine n,

$<x>$ = sottogruppo di G t.c. $|<x>| = |G|$

$\Longrightarrow <x> = G$ ✓

I sottogruppi di un gruppo ciclico sono tutti ciclici.

a) φ iniettivo e H ciclico $\Longrightarrow$ anche G é ciclico

$H = <h>$

$G \cong Im(\varphi) \Longrightarrow$ G é isomorfo a un sottogruppo di un gruppo ciclico.

Questo sottogruppo $Im(\varphi) = \langle h^k \rangle$, ma allora prendiamo l'elemento $g' \in G$ t.c. $\varphi(g') = h^k$

$ord(g') = ord(h^k) = |Im(\varphi)| = |G|$: $G = \langle g' \rangle$ ✓

b) φ suriettivo e G ciclico $\Longrightarrow$ anche H è ciclico

$$\varphi : G \twoheadrightarrow H, \quad G = \langle g \rangle$$

Sia $h \in H \Longrightarrow h = \varphi(g^k) = \varphi(g)^k$ cioè gli elementi di H sono tutti della forma $\varphi(g)^k$: $H = \langle \varphi(g) \rangle$ ✓

#9 G gruppo $\quad f : G \longrightarrow G$, $\quad g \longmapsto g^2$

f è omomorfismo $\Longleftrightarrow$ G è abeliano

(nel caso lo sia, stabilire se è autom.)

$$\begin{aligned}
f \text{ omo } &\Longleftrightarrow \forall a, b \in G \quad f(ab) = f(a) f(b) \\
&\Longleftrightarrow \forall a, b \in G \quad (ab)^2 = a^2 b^2 \\
&\Longleftrightarrow \forall a, b \in G \quad \cancel{a} b a \cancel{b} = \cancel{a} a b \cancel{b} \\
&\Longleftrightarrow \forall a, b \in G \quad ba = ab \quad ✓
\end{aligned}$$

$f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\quad x \longmapsto x^2$ non è suriettivo

$g : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_5$, $\quad \overline{m} \longmapsto 2\overline{m}$ è un isom. (per casa)