

Esercizi scheda 1

1. Data la matrice stocastica seguente, indicare quale delle risposte si ritiene corretta.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Il processo è irriducibile e pertanto non esiste una misura stazionaria.
- (b) $\pi = \left(\frac{4}{11} \quad \frac{8}{33} \quad \frac{13}{33} \right)$ è una misura invariante (o *stazionaria*) di P .
- (c) $\pi = \left(\frac{2}{11} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{6}{11} \right)$ è una misura invariante (o *stazionaria*) di P .
- (d) Il tempo medio di ritorno nello stato 2 è $\frac{11}{4}$
2. Data la matrice stocastica seguente P , dove per ciascuno stato le probabilità di transizione sono ordinate per riga, dallo stato 1 allo stato 6, indicare la suddivisione in classi che si ritiene corretta (*può aiutare uno schema grafico*):

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- (a) $\{1, 2\}$; $\{2, 3\}$; $\{3, 4, 5\}$; $\{5, 6\}$.
- (b) $\{1, 2, 3, 5, 6\}$; $\{4\}$.
- (c) $\{1, 2, 3\}$; $\{4\}$; $\{5, 6\}$.
- (d) Vi è un'unica classe e il processo è irriducibile.
3. Nel processo forward del modello di diffusione, il vettore \mathbf{x}_t , ($t \geq 1$), indica le variabili casuali che evolvono nel tempo che definiscono il sistema, mentre \mathbf{x}_0 è lo stato iniziale. Indicare tra le seguenti affermazioni quella che si ritiene non corretta:
- (a) Nel limite $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{x}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$, cioè gli elementi del vettore tendono tutti ad una normale a media nulla e varianza unitaria.
- (b) Il calendario di aggiornamento della varianza, $\beta_t = 1 - \alpha_t$, che determina la transizione da uno stato al successivo, può non essere univocamente determinato, ma tendenzialmente ne fa assumere valori piccoli negli istanti iniziali del processo.
- (c) Ciascun elemento del vettore \mathbf{x}_t è una variabile casuale con distribuzione normale, non necessariamente standardizzata, per ogni $t \geq 1$.
- (d) Ciascun elemento del vettore \mathbf{x}_t è una variabile casuale con distribuzione normale, standard o non standard, solo ed esclusivamente per $t \gg 1$, altrimenti può non essere normale.