Equazioni della Fisica Matematica   Esercitazione 10

1. Si risolva il seguente problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\, \partial_x^2 u = 0, \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,L) \\ \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \in [0,\infty), \end{cases}$$

dove $L \in \mathbb{R}_+^*$, $u_0(x) := \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ e $u_1(x) \equiv 0$.

2. Si risolva il seguente problema di Cauchy-Neumann omogeneo

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\, \partial_x^2 u = 0, \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,L) \\ \\ \partial_x u(0,t) = 0, \quad \partial_x u(L,t) = 0, \quad t \in [0,\infty), \end{cases}$$

dove $L \in \mathbb{R}_+^*$, $u_0(x) := \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ e $u_1(x) \equiv 0$.

3. Si risolva il seguente problema di Cauchy misto (Neumann-Dirichlet) omogeneo

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\, \partial_x^2 u = 0, \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,L) \\ \\ \partial_x u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \in [0,\infty), \end{cases}$$

dove $L \in \mathbb{R}_+^*$, $u_0(x) := \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$ e $u_1(x) \equiv 0$.

4. Si risolva il seguente problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\, \partial_x^2 u = 0, \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,L) \\ \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \in [0,\infty), \end{cases}$$

dove $L \in \mathbb{R}_+^*$, $u_1(x) \equiv 0$ e $u_0(x)$ è una funzione sviluppabile in serie di Fourier di soli seni in $[0,L]$, ossia

$$u_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{a}_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad \overline{a}_m = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\, \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x.$$

5. Si risolva il seguente problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\,\Delta u = 0, \quad u \equiv u(x,y,t), \quad (x,y,t) \in (0,L)\times(0,L)\times(0,\infty) \\ \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad \partial_t u(x,y,0) = u_1(x,y), \quad (x,y) \in (0,L)\times(0,L) \\ \\ u(0,y,t) = 0, \quad u(L,y,t) = 0, \quad (y,t) \in (0,L)\times[0,\infty) \\ \\ u(x,0,t) = 0, \quad u(x,L,t) = 0, \quad (x,t) \in (0,L)\times[0,\infty), \end{cases}$$

dove $L \in \mathbb{R}_+^*$, $u_0(x,y) \equiv 0$ e $u_1(x,y)$ è una funzione sviluppabile in serie di Fourier di soli seni in $[0,L]\times[0,L]$, ossia

$$u_1(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \hat{a}_{m,n}\,\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

con

$$\overline{a}_{m,n} = \frac{4}{L^2}\int_0^L\int_0^L u_1(x,y)\,\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

6. Sia assegnato il problema di Cauchy-Neumann omogeneo

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \partial_t u = 0, \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty) \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,L) \\ \\ \partial_x u(0,t) = 0, \quad \partial_x u(L,t) = 0, \quad t \in [0,\infty), \end{cases}$$

dove $u_0(x)$ e $u_1(x)$ sono funzioni note, e sia definito il funzionale

$$E(t) := \int_0^L \Big[(\partial_t u(x,t))^2 + (\partial_x u(x,t))^2\Big]\,\mathrm{d}x.$$

Si dimostri che vale la seguente disuguaglianza differenziale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leq 0, \quad \forall t \in (0,\infty).$$