FORME DIFFERENZIALI SU $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $q \in \Omega$, Ω aperto.

f si dice <u>differenziabile</u> in q se esiste un' applicazione lineare $(df)_q : T_q\Omega \simeq T_q\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ – quindi $(df)_q \in T_q^*\mathbb{R}^n$ – tale che

$$f(q+\vec{v}) - f(q) = (df)_q(\vec{v}) + o\|\vec{v}\| \quad , \quad \|\vec{v}\| \to 0$$

con $\vec{v}$ vettore applicato in q

Equivalentemente

$$\lim_{\|\vec{v}\| \to 0} \frac{\| f(q+\vec{v}) - f(q) - (df)_q(\vec{v}) \|}{\|\vec{v}\|} = 0$$

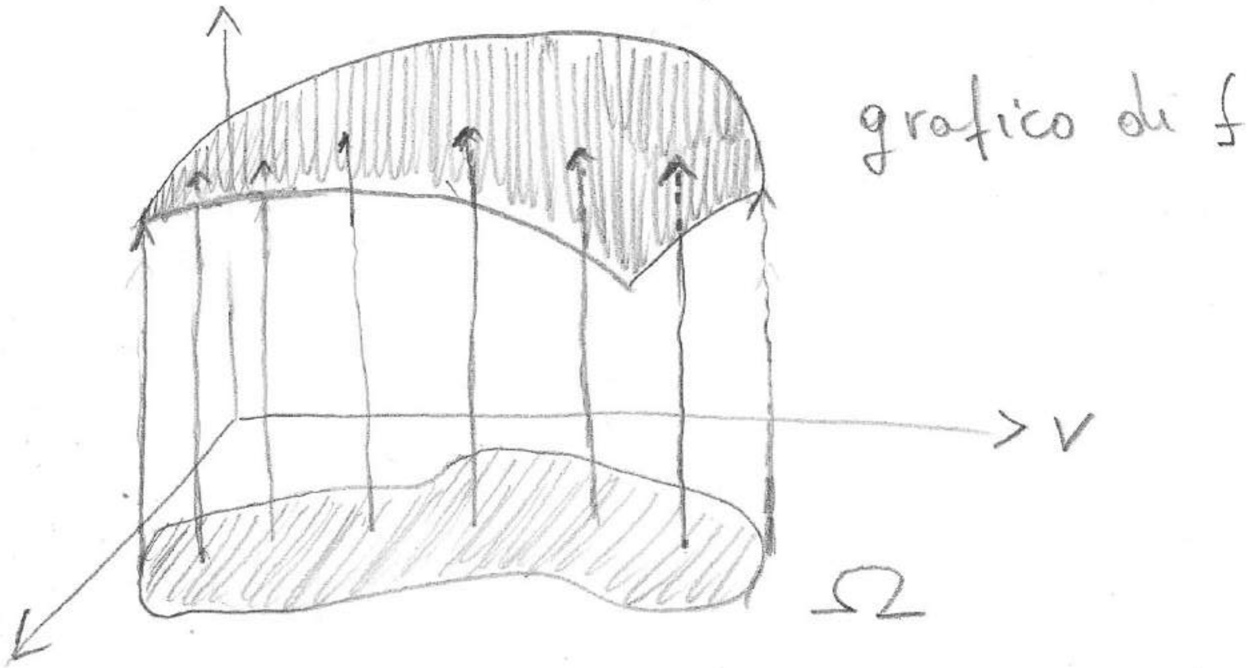
$\sqcap$

Intuitivamente, una funzione è differenziabile se possiamo "approssimare" la sua differenza infinitesima con una funzione lineare.

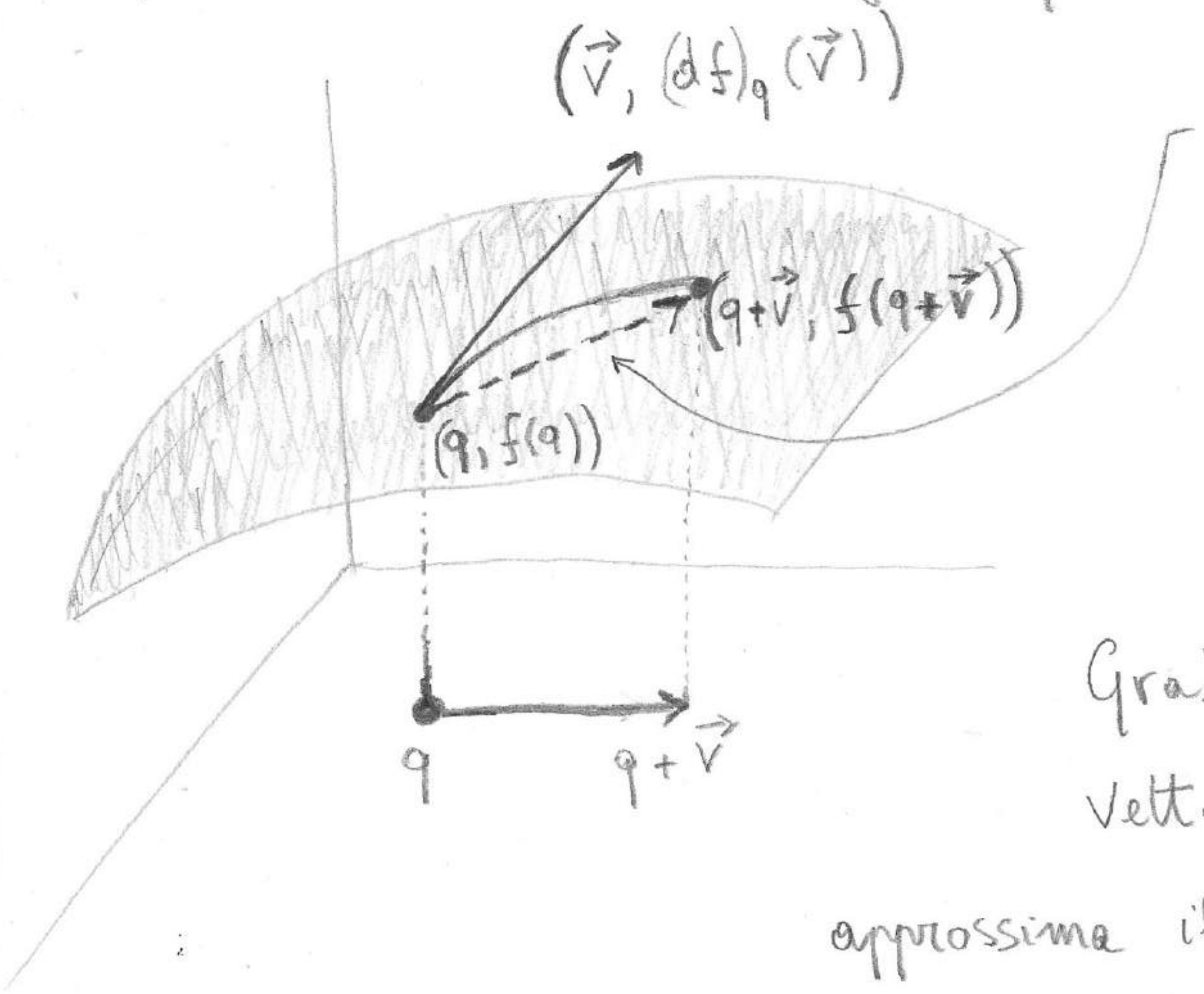
Consideriamo il caso $n = 2$.

Consideriamo il grafico di una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

cioè l'insieme $(u, v, f(u,v))$, $(u,v) \in \Omega$



Vediamo con un disegno quello detto a pag. 1-2



Questo vettore tratteggiato è uguale a

$$(q+\vec{v},\ f(q+\vec{v})) - (q,\ f(q))$$

$$= (\vec{v},\ f(q+\vec{v}) - f(q))$$

Graficamente si vede come il vettore $(\vec{v}, (df)_q(\vec{v}))$

approssima il vettore tratteggiato

$$(\vec{v},\ f(q+\vec{v}) - f(q))$$

per $\|\vec{v}\| \to 0$

Se $(df)_q(\vec{v})$ esiste, coincide con la derivata direzionale di f in q lungo $\vec{v}$.

Questo lo si può vedere anche dalla definizione di derivata direzionale, oppure come segue.

Per costruzione, $(\vec{v}, (df)_q(\vec{v}))$ è tangente al grafico di f nel punto $(q, f(q))$, quindi

$$(\bullet) \quad \left(\vec{V}, (df)_q(\vec{V})\right) \in T_{(q,f(q))}\text{Grafico di } f = \text{Span}\left\{ \begin{matrix} (1, 0, f_u(q)) \\ (0, 1, f_v(q)) \end{matrix} \right\}$$

Cioè se $\vec{V} = (a_1, a_2)$ (componenti rispetto alla base canonica)

Abbiamo che $(\bullet)$ significa

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u(q) \\ 0 & 1 & f_v(q) \\ a_1 & a_2 & (df)_q(\vec{v}) \end{pmatrix} = 0 \implies (df)_q(\vec{V}) = a_1 f_u(q) + a_2 f_v(q)$$

$$= (\nabla f)_q \cdot (a_1, a_2) = (\nabla f)_q \cdot \vec{V}$$

BASE DELLO SPAZIO VETTORIALE $T_q^* \mathbb{R}^n$

Sia $(x_1, \dots, x_n)$ un sistema di coordinate su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

In particolare, ogni x_i è una funzione su Ω.

Quindi possiamo considerare i loro differenziali $(dx_i)_q$

nel punto $q \in \Omega$. Avremo che

$$(dx_i)_q : T_q \Omega = T_q \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$V \longrightarrow (dx_i)_q (V) = \text{derivata direzionale}$$

in q della funzione x_i lungo V =

$$= (\nabla x_i)_q \cdot V = (0, \dots \underset{\uparrow \text{posto } i\text{-esimo}}{1}, \dots 0) \cdot (V_1, \dots, V_n)$$

$$= V_i$$

dove V_i è la i-esima componente del vettore V rispetto alla base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q , \dots , \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_q \right)$

PROP: L'insieme $\left((dx_1)_q, \dots, (dx_n)_q\right)$ è una base di $T_q^*\Omega$ duale alla base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_q\right)$

Basta far vedere che

$$(dx_i)_q\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_q\right) = \delta_{ik}$$ (simbolo di Kronecker)

che è la definizione di base duale.

Abbiamo che

$$(dx_i)_q\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_q\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_k}\Big|_q = \delta_{ik}$$

Ogni $\omega \in T_q^*\Omega$ può essere espresso quindi come combinazione lineare di $\left((dx_1)_q, \dots, (dx_n)_q\right)$:

$$\omega = \omega_1 (dx_1)_q + \omega_2 (dx_2)_q + \dots + \omega_n (dx_n)_q \,, \quad \omega_i \in \mathbb{R}$$
$$= \omega_i (dx_i)_q$$

È facile vedere che

$$\omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q\right)$$

Cioè la componente i-esima ω_i di un covettore $\omega \in T_q^*\Omega$ è data da $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q\right)$.

Analogamente a quanto fatto per i campi vettoriali, definisco <u>forma differenziale</u> su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un'applicazione

$$W : q \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow W_q \in T_q^* \mathbb{R}^n$$

Una forma differenziale viene detta anche <u>campo covettoriale</u>.

Ogni forma differenziale W su Ω, se $(x_1, \dots, x_n)$ è un sistema di coordinate di Ω, può essere scritta nel modo seguente

$$W = f_1 \, dx_1 + \dots + f_n \, dx_n = f_i \, dx_i \quad , \quad f_i : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

dove $dx_i : q \in \Omega \to (dx_i)_q \in T_q^* \Omega$

In virtù di quello detto a pag. 7, le componenti di una forma differenziale W rispetto ad un sistema di coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ di Ω sono date da

$$W_i = W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

dove $W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ è la funzione su Ω che ad ogni punto $q \in \Omega$ associa $W_q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q\right) \in \mathbb{R}$.

Il differenziale di una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$df : q \in \Omega \longrightarrow (df)_q \in T_q^*\Omega$$

è <u>una particolare forma differenziale</u>

La sua particolarità risiede nel fatto che le sue componenti rispetto ad un sistema di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ sono date dalle derivate parziali di f. Infatti

$$df(\partial_{x_i}) = \nabla f \cdot (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-esimo posto}}}{1}, \dots 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Da qui la formula

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Una tale forma differenziale è detta <u>esatta</u>.

Non tutte le forme differenziali sono esatte.

Per esempio, su $\mathbb{R}^2$, la seguente forma differenziale <u>non è</u> esatta

$$x\,dx + x\,dy$$

Infatti non esiste un $f = f(x,y)$ tale che $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \end{cases}$

In virtù di tutto quello che abbiamo detto fino ad ora in questa lezione abbiamo che una forma differenziale su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $W : q \in \Omega \to W_q \in T_q^* \mathbb{R}^n$ agisce su un generico campo vettoriale $X : q \in \Omega \to X_q \in T_q \Omega = T_q \mathbb{R}^n$ nel seguente modo:

$$W : X \longrightarrow W(X)$$

dove $W(X) : q \in \Omega \longrightarrow W_q (X_q) \in \mathbb{R}$

Se $(x_1, \dots, x_n)$ è un sistema di coordinate su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abbiamo che

$$W = f_k \, dx_k \quad , \quad X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \text{ quindi}$$

$$W(X) = f_k \, dx_k \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = f_k \, a_i \, dx_k \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = f_k \, a_i \frac{\partial x_k}{\partial x_i} =$$

$$= f_k \, a_i \, \delta_{ki} = f_i \, a_i$$

Analogamente anche un campo vettoriale X su Ω agisce su una forma differenziale W nel seguente modo

$$X(W) := W(X) \qquad (\circledast)$$

Le componenti di W nelle coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ sono

$$f_i = W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \quad \text{cioè} \quad W = W\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dx_i$$

Le componenti di X nelle coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ sono

$$a_i = X(dx_i) = X(x_i), \quad \text{cioè} \quad X = X(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$X(dx_i) \overset{(\circledast)}{=} dx_i(X)$ = Componente i-esima di X nella base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

$X(x_i)$ = Derivata della funzione x_i lungo il campo X

APPLICAZIONE CO-TANGENTE di $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$

Abbiamo definito nelle lezioni precedenti l'applicazione

$$f_{*q}: T_q\Omega = T_q\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(q)}\mathbb{R}^m$$

L'applicazione indotta da f_{*q} sugli spazi duali (vedi Lezione 11) è denotata da

$$f^*_{f(q)}: T^*_{f(q)}\mathbb{R}^m \longrightarrow T^*_q\mathbb{R}^n$$

Dalla definizione di applicazione indotta su spazi duali abbiamo che

$$f^*_{f(q)}(\theta)(v) = \theta\left(f_{*q}(v)\right) \qquad \begin{array}{l} \theta \in T^*_{f(q)}\mathbb{R}^m \\ v \in T_q\mathbb{R}^n \end{array}$$

La precedente definizione la possiamo dare anche in termini di commutatività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
T_q \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_{*q}"] \arrow[dr, "f^*_{f(q)}(\theta)"'] & T_{f(q)} \mathbb{R}^m \arrow[d, "\theta"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$f^*_{f(q)}(\theta) = \theta \circ f_{*q}$$

Sempre a Lezione 11, abbiamo visto che la matrice rappresentativa di $f^*_{f(q)}$ è <u>la trasposta</u> di quella che rappresenta f_{*q}, quindi la trasposta della Jacobiana di f.

Vediamolo comunque usando gli strumenti finora introdotti.

Sia $(x_1, \dots, x_n)$ un sistema di coordinate su Ω e
$(y_1, \dots, y_m)$ " " " " un aperto contenente $f(\Omega)$

La <u>i-esima colonna</u> della matrice rappresentativa di $f^*_{f(q)}$ sarà formata dalle componenti di $f^*_{f(q)}(dy_i)_{f(q)}$ nella base $\left((dx_1)_q, \dots, (dx_n)_q\right)$.

Per quello che abbiamo visto, per esempio, a pag. 12, abbiamo che la J-esima componente di $f^*_{f(q)}(dy_i)_{f(q)}$ è

$$\left(f^*_{f(q)}(dy_i)_{f(q)}\right)\frac{\partial}{\partial x_J}\Big|_q \overset{\text{pag. 13}}{=} (dy_i)_{f(q)}\left(f_{*q}\left(\frac{\partial}{\partial x_J}\Big|_q\right)\right)$$

$$= (dy_i)_{f(q)}\,(J_q f)_{KJ}\,\frac{\partial}{\partial y_K}\Big|_{f(q)}$$

dove $J_q f$ è la matrice Jacobiana di f calcolata nel punto q

$$= (J_q f)_{KJ}\,\frac{\partial y_i}{\partial y_K}\Big|_{f(q)} = (J_q f)_{KJ}\,\delta_{iK} = (J_q f)_{iJ}$$

Cioè la <u>i-esima colonna</u> della matrice rappresentativa è fatta da $(J_q f)_{iJ} = (J_q f)^T_{Ji}$

IMPORTANTE

CONSIDERAZIONE NOTAZIONALE

Abbiamo introdotto la notazione, se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$f_{\star q} : T_q \Omega \longrightarrow T_{f(q)} \mathbb{R}^m$$

Più semplicemente possiamo usarle senza il pedice, cioè senza specificare il punto q, cioè

$$f_{\star} : T_q \Omega \longrightarrow T_{f(q)} \mathbb{R}^m \qquad (\bullet)$$

Infatti la $(\bullet)$ non contiene nessuna ambiguità

Stessa cosa per $f^*_{f(q)} : T^*_{f(q)} \mathbb{R}^m \longrightarrow T^*_q \Omega = T^*_q \mathbb{R}^n$

D'ora in poi la denoteremo senza pedice; cioè senza specificare il punto.

$$f^* : T^*_{f(q)} \mathbb{R}^m \longrightarrow T^*_q \mathbb{R}^n \qquad (\bullet)$$

Infatti anche la $(\bullet)$ non contiene ambiguità.

QUINDI

D'ora in poi l'applicazione tangente e co-tangente di $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ saranno denotate da f_* e f^*