ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 1

1. Sia $X = C_{\mathbb{C}}[0,1]$; è noto che X è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$ della convergenza uniforme. Siano $Y = \{p|_{[0,1]} : p \in \mathcal{P}\}$ il sottospazio delle funzioni polinomiali in X, e $Y_n = \{p|_{[0,1]} : p \in \mathcal{P}_n\}$ quello delle funzioni polinomiali di grado al più n, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Dimostrare che $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ non è uno spazio di Banach.
   [Suggerimento: Y è denso in X.]
   (b) Dimostrare che $(Y_n, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. Sia $X = C_{\mathbb{C}}[0,1]$. Per $f \in X$, definiamo
$$\|f\|_* = \sup_{t\in[0,1]} |tf(t)|, \qquad \|f\|_{**} = \sup_{t\in[0,1]} |(1+t)f(t)|.$$
   (a) Dimostrare che $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_{**}$ sono norme su X.
   (b) Dimostrare che $\|\cdot\|_{**}$ è equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.
   (c) Dimostrare che $\|\cdot\|_*$ non è equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.
   (d) Per $n \in \mathbb{N}$, sia $Y_n = \{p|_{[0,1]} : p \in \mathcal{P}_n\}$. Dimostrare che le norme indotte da $\|\cdot\|_*$ e $\|\cdot\|_{**}$ su Y_n sono equivalenti.
3. Sia $X = C_{\mathbb{R}}[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Definiamo $f_0, f_1, f_2 \in X$ ponendo
$$f_0(t) = 1, \qquad f_1(t) = t, \qquad f_2(t) = 1-t \qquad \forall t \in [0,1].$$
   Determinare l'intersezione della palla unitaria chiusa $\overline{B}(0,1)$ nello spazio di Banach X con i seguenti sottospazi:
   (a) $\operatorname{span}\{f_1\}$; (b) $\operatorname{span}\{f_0, f_1\}$; (c) $\operatorname{span}\{f_1, f_2\}$.
4. (a) Dimostrare che la formula
$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt \tag{†}$$
   definisce una norma $\|\cdot\|$ sullo spazio $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1]$.
   (b) Dimostrare che la formula (†) <u>non</u> definisce una norma sullo spazio $C_{\mathbb{R}}[-1,1]$ delle funzioni continue sull'intervallo $[-1,1]$.
   (c) Dimostrare che la formula (†) definisce una norma $\|\cdot\|$ sullo spazio $\mathcal{P}$ dei polinomi in una variabile a coefficienti reali.
5. Sia X uno spazio normato. Siano $B(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ la palla unitaria aperta e $S(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la sfera unitaria in X. Ricordiamo che il *segmento* di estremi $x, y \in X$ è l'insieme delle combinazioni convesse $\{(1-\theta)x + \theta y : \theta \in [0,1]\}$; i *punti interni* del segmento sono i punti del segmento diversi dagli estremi.
   (a) Dimostrare che, se $x \in S(0,1)$ e $y \in B(0,1)$, allora tutti i punti interni del segmento di estremi x e y sono in $B(0,1)$.
   (b) Dimostrare che, se $x, y \in S(0,1)$ sono distinti, e un punto interno del segmento di estremi x e y appartiene a $S(0,1)$, allora tutto il segmento di estremi x e y è contenuto in $S(0,1)$.
   (c) Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) $S(0,1)$ contiene un segmento (con estremi distinti);
(ii) esistono $x, y \in X$ linearmente indipendenti tali che
$$\|x\| + \|y\| = \|x + y\|.$$

6. Siano $n \in \mathbb{N}_+$, $X = \mathbb{R}^n$ e $p \in (0,1)$. Definiamo $|\cdot|_p : X \to [0,\infty)$ ponendo
$$|x|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \qquad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X.$$
   (a) Dimostrare che, se $n > 1$, allora $|\cdot|_p$ non è una norma su X.
   (b) Dimostrare che $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ per ogni $a, b \in [0,\infty)$.
   [Suggerimento: applicare ai vettori $(a^p, 0), (0, b^p) \in \mathbb{R}^2$ la disuguaglianza triangolare per la norma $\|\cdot\|_{1/p}$.]
   (c) Dimostrare che, per ogni $x, y \in X$,
   $$|x+y|_p^p \leq |x|_p^p + |y|_p^p.$$
   (d) Determinare se $x \mapsto |x|_p^p$ è una norma su X.
7. Ricordiamo il Teorema del Punto Fisso per contrazioni in spazi metrici: se (X, d) è uno spazio metrico completo e $\Phi : X \to X$ è lipschitziana di costante $L < 1$, allora esiste un unico $x \in X$ tale che $\Phi(x) = x$.
Siano $M \in (0,\infty)$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e tale che
$$|F(x,y) - F(x,y')| \leq M|y - y'| \qquad \forall x, y, y' \in \mathbb{R}.$$
Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $r \in (0,\infty)$ e $I = [x_0 - r, x_0, +r]$.
   (a) Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti per una funzione $u : I \to \mathbb{R}$:
      (i) $u \in C^1(I)$ e
      $$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x)) & \forall x \in I, \\ u(x_0) = y_0; \end{cases}$$
      (ii) $u \in C(I)$ e
      $$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x F(t, u(t))\, dt \qquad \forall x \in I.$$
   [Suggerimento: Teorema Fondamentale del Calcolo.]
   (b) Sia $\Phi : C(I) \to C(I)$ definita da
   $$\Phi(u)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, u(t))\, dt \qquad \forall x \in I$$
   per ogni $u \in C(I)$. Dimostrare che Φ è lipschitziana di costante rM rispetto alla metrica dell'estremo superiore d_∞ su $C(I)$.
   (c) Dimostrare che, se $rM < 1$, allora il problema di Cauchy
   $$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0; \end{cases}$$
   ha un'unica soluzione sull'intervallo I.
   [Suggerimento: Teorema del Punto Fisso.]