3. Si scriva una legge di conservazione che descriva la dinamica della densità di veicoli $0 \leq u(x,t) \leq 1$ alla posizione x lungo una corsia stradale all'istante di tempo $t \geq 0$ nel caso in cui:

   - ci sia una sola corsia, assunta di lunghezza infinita, e non siano permessi sorpassi;
   - non sia permesso a nuovi veicoli di immettersi nella corsia e non sia altresì permesso ai veicoli inizialmente presenti di abbandonare la corsia;
   - la velocità dei veicoli alla posizione x si azzeri nel caso in cui il traffico sia localmente congestionato;
   - la velocità massima raggiungibile da un veicolo alla posizione x in assenza di altri veicoli sia pari a $v_m \in \mathbb{R}^+_*$.

   Si assuma che sia presente un semaforo, posto in $x = 0$, e si definisca un dato iniziale corrispondente allo scenario in cui:

   - tutti i veicoli presenti siano inizialmente in coda al semaforo;
   - il traffico all'interno della coda al semaforo sia inizialmente uniformemente localmente congestionato.

   Si calcolino:

   (a) la densità di veicoli lungo la corsia a un generico istante di tempo $t > 0$;

Nello scenario corrispondente alle informazioni forniteci, l'evoluzione della funzione $0 \leq u(x,t) \leq 1$ sarà governata da una legge di conservazione nella forma:

$$\partial_t u + \partial_x (F(u)) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

con

$$F(u) = u \, \underbrace{v}_{\text{velocità dei veicoli in } (x,t)}(x,t) = u \, V(u), \qquad V(0) = V_m, \quad V(1) = 0.$$

Consideriamo la definizione seguente per $V(u)$:

$$V(u) := V_m (1-u).$$

Inoltre, sempre sulla scorta delle informazioni forniteci nel testo del problema, scegliamo la condizione iniziale

$$u(x,0) = u_0(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Le caratteristiche sono nella forma:

$$x(t) = x_0 + F'(u_0(x_0))t = x_0 + V_m(1-2u_0(x_0))t$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \begin{cases} x_0 - V_m t, & \text{se } x_0 < 0 \\ x_0 + V_m t, & \text{se } x_0 > 0. \end{cases}$$

Si ha quindi la regione di rarefazione

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : -V_m t < x < V_m t \}$$

e, di conseguenza, la soluzione del problema di Riemann in oggetto sarà nella forma di un'onda di rarefazione:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq -V_m t \\ (F')^{-1}\left(\dfrac{x-0}{t-0}\right) & \text{se } -V_m t < x < V_m t \\ 0, & \text{se } x \geq V_m t \end{cases} \qquad (*)$$

con

$$(F')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) \underset{\Downarrow}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{V_m t}\right).$$

$$V_m(1-2u) = \frac{x}{t}$$

(b) la densità di veicoli al semaforo a un generico istante di tempo $t > 0$;

Da (✱) si evince che, essendo il semaforo in $x=0$, la densità dei veicoli al semaforo sarà

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{V_m t}\right)\Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \quad \forall\, t>0.$$

(c) l'istante di tempo a cui il semaforo verrà superato da un veicolo che si trovi al punto $x_1 = -v_m\, t_1$ all'istante di tempo t_1.

Iniziamo notando che, sino al raggiungimento del semaforo, il veicolo di interesse sarà nella regione di rarefazione. Per cui, tale veicolo si muoverà con velocità

$$V(u) = V_m(1-u), \qquad \text{con } u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{V_m t}\right).$$

Quindi, se denotiamo con $X(t)$ la posizione del veicolo all'istante di tempo $t>0$, il moto del veicolo dalla posizione x_1 sino alla posizione del semaforo ($x=0$), sarà descritto dal problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(t) = \dfrac{V_m}{2} + \dfrac{X(t)}{2t}, & t > t_1 \\ X(t_1) = -V_m t_1 . \end{cases} \qquad (✱✱)$$

Risolvendo il problema di Cauchy $(\ast\ast)$ si trova

$$X(t) = v_m\left(t - 2\sqrt{t_1 t}\right), \quad t \geq t_1.$$

L'istante di tempo t_s a cui il veicolo raggiunge il semaforo sarà dato dalla relazione

$$X(t_s) = 0$$

e, di conseguenza,

$$v_m\left(t_s - 2\sqrt{t_1 t_s}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_s = 4t_1.$$

1. Si risolva il seguente problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, & u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \\ u(x,0) = u_0(x), & \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove $u_0(x) := x^3$ e $u_1(x) := \sin(x)$.

Ricordiamo che se

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\,\partial_x^2 u = 0, & u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \\ u(x,0) = u_0(x), & \partial_t u(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

allora:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(z)\,\mathrm{d}z.$$

Notiamo che, nel nostro caso, $c := 1$, $u_0(x) := x^3$ e $u_1(x) := \sin(x)$. Quindi:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left((x-t)^3 + (x+t)^3\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin(z)\,dz$$

$$= x^3 + 3xt^2 + \sin(x)\sin(t).$$

2. Si risolva il seguente problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\,\partial_x^2 u = 0, & u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = 0, \quad t \in [0,\infty), \end{cases}$$

dove $u_0(x) \equiv 0$ e $u_1(x) := \sin(x)$.

Ricordiamo che se

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\,\partial_x^2 u = 0, & u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = g(t), \quad t \in [0,\infty) \end{cases}$$

allora:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(z)\,\mathrm{d}z, & \text{se } x \geq ct \\ g\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) - u_0(ct-x)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} u_1(z)\,\mathrm{d}z, & \text{se } 0 < x < ct. \end{cases}$$

Notiamo che, nel nostro caso, $u_0(x) \equiv 0$, $u_1(x) := \sin(x)$ e $g(t) \equiv 0$.

Quindi, si ha

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\left(\cos(x-ct) - \cos(x+ct)\right)$$

$$= \frac{1}{c}\sin(x)\sin(ct).$$