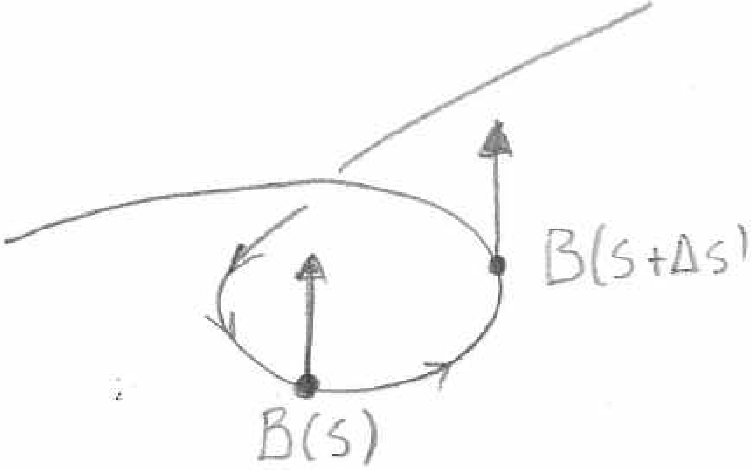
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA TORSIONE

Un discorso del tutto simile a quello fatto per l'interpretazione geometrica della curvatura lo possiamo fare per la torsione.



Ricordiamo che la torsione τ è definita dalla 2ª formula di Frenet

$$\frac{dB}{ds} = \tau N .$$

Quindi

$$|\tau| = \left\| \frac{dB}{ds} \right\| .$$

Sostanzialmente τ misura la "differenza infinitesima" del vettore "mobile" $B(s)$

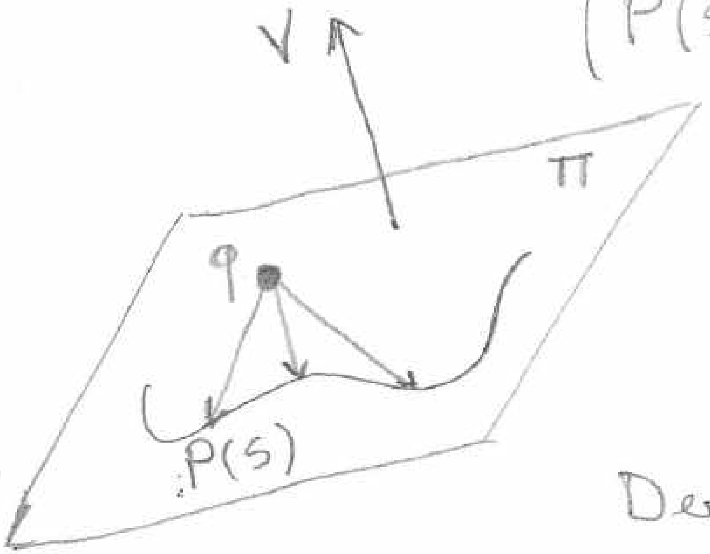
Poiché il vettore $B(s)$ è sempre ortogonale al piano osculatore, la torsione misura la variazione del piano osculatore.
In virtù di queste osservazioni la proposizione seguente è intuitiva. Noi l'andremo a dimostrare rigorosamente

<u>PROP</u>: Una curva è piana $\Longleftrightarrow$ ha torsione nulla

$\Longrightarrow$ Sia $P(s)$ una curva piana con s ascissa curvilinea. Per definizione esiste un piano π che la contiene

Se avessimo voluto motivare la precedente affermazione con maggior rigore avremmo dovuto procedere come segue.

Se $P(s)$ è piana esiste un piano Π che la contiene. Sia V un vettore ortogonale al piano. Avremo che



$$\left(P(s) - q\right) \cdot V = 0 \qquad \text{con } q \in \Pi \qquad (\star)$$

Andando a derivare $(\star)$ rispetto ad s abbiamo

$$\frac{dP}{ds} \cdot V = 0 \implies T(s) = \frac{dP}{ds}$$ è contenuto nel piano Π

Derivando ulteriormente abbiamo

$$\frac{d^2P}{ds^2} \cdot V = 0 \implies T'(s) = \frac{d^2P}{ds^2}$$ è contenuto nel piano Π, quindi anche $N(s)$ lo è

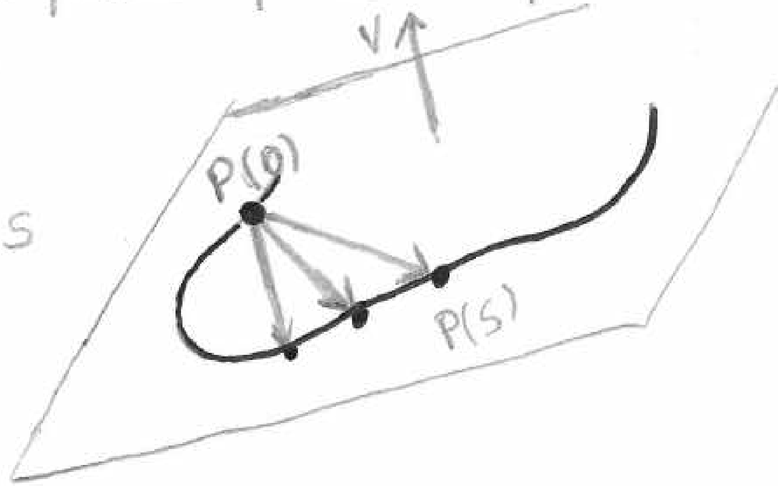
Tutto questo implica che $B(s) = T(s) \times N(s)$ è proporzionale al vettore V: $B(s) = f(s)\, V$

Poiché $B(s)$ ha modulo costante uguale a 1, avremo che $B(s) = \mp \frac{V}{\|V\|}$. In particolare $B(s)$ è costante $\forall s$, che implica $\frac{dB}{ds} = 0$, cioè $\tau = 0$

$\Leftarrow$ Supponiamo $\tau(s) = 0 \ \forall s$. Questo implica che $\frac{dB}{ds} = 0$, cioè $\underline{B(s) = \text{vettore costante} = V}$ lungo la curva $P(s)$

Proviamo che $P(s)$ è contenuta nel piano passante per $P(0)$ e ortogonale a V, cioè che

$$\big(P(s) - P(0)\big) \cdot V = 0 \quad \forall s$$



Consideriamo la funzione

$$f(s) = \big(P(s) - P(0)\big) \cdot V$$

Andando a derivare rispetto ad s ottengo

$$f'(s) = \frac{dP}{ds} \cdot V = T(s) \cdot B(s)$$ (ricordare da pag. precedente che $B(s) = V$)

$$= 0$$ (in quanto $T(s)$ e $B(s)$ sono ortogonali)

Quindi

$$f(s) = \text{costante}$$

ma poiché $f(0) = 0$ (vedi ultima formula di pagina precedente)

abbiamo che

$$f(s) = 0 \quad \forall s$$

cioè $\left(P(s) - P(0)\right) \cdot V = 0 \quad \forall s$

che era quello che volevamo

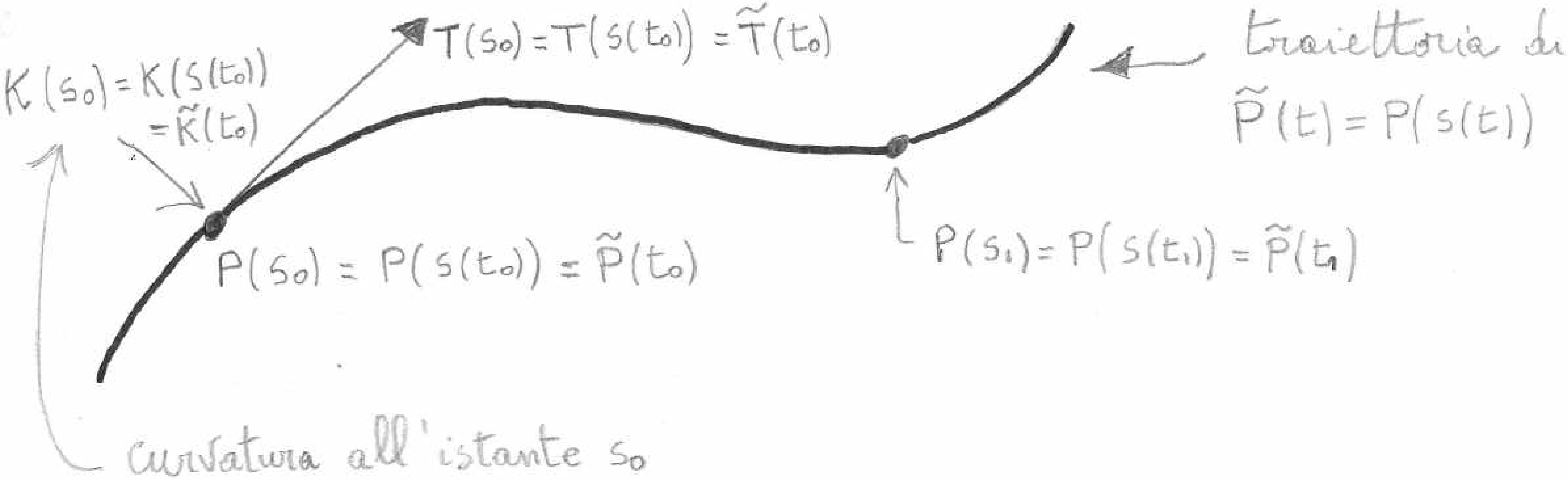
FORMULE DI FRENET

RISPETTO AD UNA PARAMETRIZZAZIONE ARBITRARIA

Consideriamo la curva $P(s)$ (s ascissa curvilinea) e la curva $\tilde{P}(t) = P(s(t))$ equivalente a $P(s)$.

Ricordiamo che $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \| \tilde{P}'(t) \| \, dt$ $\qquad (\bullet)$

Per chiarezza facciamo un disegno:



Analogamente possiamo scrivere nella parametrizzazione t tutti gli oggetti geometrici che abbiamo definito.

$$\tilde{P}(t) = P(s(t)) \qquad \tilde{T}(t) = T(s(t)) \qquad \tilde{N}(t) = N(s(t)) \qquad (\star)$$

$$\tilde{B}(t) = B(s(t)) \qquad \tilde{K}(t) = K(s(t)) \qquad \tilde{\tau}(t) = \tau(s(t)) \quad \text{ecc.}$$

Scriviamo la prima formula di Frenet rispetto alle parametrizzazione (arbitraria) t.

Abbiamo che

$$\left.\frac{d\tilde{T}}{dt}\right|_t \overset{\text{dalla } 2^{a} \text{ di } (\star)}{=} \left.\frac{dT}{ds}\right|_{s(t)} \left.\frac{ds}{dt}\right|_t \overset{\substack{1^{a} \text{ formula di Frenet per } T(s) \\ \text{e da } (\bullet) \text{ di pag. 6}}}{=}$$

$$= K(s(t)) \cdot N(s(t)) \cdot \|\tilde{P}'(t)\| = \tilde{K}(t)\, \tilde{N}(t)\, \|\tilde{P}'(t)\|$$

Analogamente possiamo fare la stessa cosa per la 2ª e 3ª formula di Frenet.

Alla fine le formule di Frenet per una curva $\tilde{P}(t)$ sono

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{T}}{dt} = \|\tilde{P}'\| \cdot \tilde{K} \cdot \tilde{N} \\[2ex] \dfrac{d\tilde{N}}{dt} = -\|\tilde{P}'\| \left(\tilde{K}\tilde{T} + \tilde{\tau}\tilde{B}\right) \\[2ex] \dfrac{d\tilde{B}}{dt} = \|\tilde{P}'\| \tilde{\tau}\tilde{N} \end{cases}$$

Nel caso particolare in cui consideriamo l'ascissa curvilinea come parametro, avendo il punto velocità unitaria rispetto a questa parametrizzazione, le formule a sinistra si riducono a quelle studiate precedentemente

CHIARIMENTO

Il più delle volte non chiarisco la regolarità della curva in quanto è chiara dal contesto.
Per esempio se parlo di curvatura, la curva deve essere almeno C^2, se si parla di torsione almeno C^3 e così via.

CURVATURA E TORSIONE RISPETTO AD UNA PARAMETRIZZAZIONE ARBITRARIA

Sia $P(t)$ una curva di $\mathbb{R}^3$.

Per quello detto a pagina precedente la supponiamo sufficientemente regolare, cioè almeno C^3.

Abbiamo che

1) $P'(t) = \|P'(t)\| \, T(t)$

2) $P''(t) = \|P'(t)\|' \, T(t) + \|P'(t)\|^2 K(t) \, N(t)$

La 1) si ricava da $T(t) = P'(t) / \|P'(t)\|$

La 2) si ricava da 1) derivando rispetto a t e sostituendo nella formula ottenuta, $T'(t) = \|P'(t)\| \, K(t) \, N(t)$ (1ª formula di Frenet rispetto ad una parametrizzazione arbitraria)

Andando a calcolare $P'(t) \times P''(t)$ dati da 1) e 2) di pag. 10, tenendo conto che $T(t) \times T(t) = 0$, abbiamo che

$$
\begin{aligned}
P'(t) \times P''(t) &= \|P'(t)\|^3 K(t)\, T(t) \times N(t) \\
&= \|P'(t)\|^3 K(t)\, B(t)
\end{aligned}
\qquad (\star)
$$

Questo implica che

$$\|P'(t) \times P''(t)\| = \|P'(t)\|^3 K(t)$$

(Ricordare che $K(t) \geq 0$ e che $\|B(t)\| = 1$ in quanto versore)

cioè

$$\boxed{K(t) = \frac{\|P'(t) \times P''(t)\|}{\|P'(t)\|^3}}$$

che ci dà la curvatura rispetto ad una parametrizzazione arbitraria

Metodo alternativo (comunque istruttivo) per arrivare alla formula di $K(t)$ di pag. 11

Per quello detto a pagina 8 abbiamo

$$\frac{dT}{dt} = \|P'(t)\|\, K(t)\, N(t)$$ (non è necessario considerare i ~)

da cui

$$K(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|P'(t)\|} \quad (\bullet)$$ (ricordarsi sempre che $\|N(t)\| = 1$)

Calcoliamo $T'(t)$: abbiamo che $T'(t) = \left(\frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}\right)' =$

$$= \frac{P'' \cdot \|P'\| - P' \cdot \|P'\|'}{\|P'\|^2} \quad (\star)$$

Ci serve calcolare $\|P'\|'$

Abbiamo che

$$\|P'\|' = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\right) \qquad \text{dove } P(t)=(x(t), y(t), z(t))$$
$$P' = (x', y', z')$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}} \cdot (2x' x'' + 2y'y'' + 2z'z'')$$

$$= \frac{1}{\|P'\|} \cdot (P' \bullet P'') = \frac{P' \bullet P''}{\|P'\|}.$$

Andando a sostituire questa quantità in $(\star)$ di pag. 11 b otteniamo che

$$T'(t) = \frac{\|P'\| P'' - \frac{P' \bullet P''}{\|P'\|} P'}{\|P'\|^2} \qquad \text{che implica}$$

$$\|T'(t)\| = \frac{1}{\|P'\|^2} \left\| \|P'\| P'' - \frac{P'\cdot P''}{\|P'\|} P' \right\| \qquad (\bullet)$$

Abbiamo che

$$\left\| \|P'\| P'' - \frac{P'\cdot P''}{\|P'\|} P' \right\| = \sqrt{\left(\|P'\| P'' - \frac{P'\cdot P''}{\|P'\|} P'\right)\cdot\left(\|P'\| P'' - \frac{P'\cdot P''}{\|P'\|} P'\right)}$$

$$= \sqrt{\|P'\|^2 \|P''\|^2 - 2(P'\cdot P'')^2 + (P'\cdot P'')^2} = \sqrt{\|P'\|^2 \|P''\|^2 - (P'\cdot P'')^2}$$

$= \sqrt{\|P' \times P''\|^2} = \|P' \times P''\|$. Quindi, andando a sostituire in $(\bullet)$ sopra otteniamo $\|T'(t)\| = \dfrac{\|P' \times P''\|}{\|P'\|^2}$ che sostituito nella $(\bullet)$ di pag. 11b ci dà

$$K(t) = \frac{\|P'(t) \times P''(t)\|}{\|P'(t)\|^3}$$

Ora vediamo come calcolare la torsione rispetto ad una parametrizzazione arbitraria

Dalla 2) di pag. 10 abbiamo che

$$P'''(t) = \left(\|P'(t)\|' T(t) + \|P'(t)\|^2 K(t) N(t) \right)'$$

$$= \|P'(t)\|'' T(t) + \|P'(t)\|' T'(t) + \left(\|P'(t)\|^2 K(t) \right)' N(t)$$

$$+ \|P'(t)\|^2 K(t) N'(t)$$

1ª e 2ª formula di Frenet pag. 8

$$= \|P'(t)\|'' T(t) + \|P'(t)\|' \|P'(t)\| K(t) N(t)$$

$$+ \left(\|P'(t)\|^2 K(t) \right)' N(t) - \|P'(t)\|^3 K^2(t) T(t)$$

$$- \|P'(t)\|^3 K(t) \tau(t) B(t)$$

Ora calcoliamo $\left(P'(t) \times P''(t)\right) \cdot P'''(t)$

Con $P'(t) \times P''(t)$ dato da ($\star$) di pag. 11 e $P'''(t)$ da pag. 12

Poiché $B(t) \cdot T(t) = B(t) \cdot N(t) = 0$ in quanto ricordiamo che $(T(t), N(t), B(t))$ è una base ortonormale $\forall t$, abbiamo che

$$\left(P'(t) \times P''(t)\right) \cdot P'''(t) = -\|P'(t)\|^6 K^2(t)\, \tau(t) \qquad (\star)$$

Andando a sostituire in ($\star$) $K(t)$ di pag. 11 otteniamo

$$\left(P'(t) \times P''(t)\right) \cdot P'''(t) = -\|P'(t) \times P''(t)\|^2 \tau(t), \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{\tau(t) = -\frac{\left(P'(t) \times P''(t)\right) \cdot P'''(t)}{\|P'(t) \times P''(t)\|^2}}$$

che ci dà la torsione rispetto ad una parametrizzazione arbitraria

Abbiamo già visto che se una curva ha curvatura zero allora è una retta.

Più precisamente si dovrebbe dire che è una parte di una retta in quanto, per esempio, anche un segmento di $\mathbb{R}^3$ è una curva a curvatura zero.

Cosa possiamo dire di curve con curvatura costante > 0 e torsione $= 0$?

PROP: Sia $P(s)$ una curva con s l'ascissa curvilinea (in particolare il punto $P(s)$ si muove con velocità costante $=1$). Allora

$K(s) = K =$ costante , $\tau(s) = 0 \iff$

$P(s)$ descrive una (parte di) circonferenza di raggio $\frac{1}{K}$.

DIM

$\Leftarrow$ Se $P(s)$ descrive una (parte di) circonferenza significa che è una curva piana e quindi $\tau(s) = 0$ per la Proposizione a pag. 2

D'altra parte sappiamo che una circonferenza di raggio $\frac{1}{K}$ ha curvatura K (in ogni modo verificarlo)

$\Longrightarrow$ Supponiamo ora che $K(s) = K =$ costante > 0 e $\tau(s) = 0$
Per la proposizione di pag. 2 abbiamo che
$P(s)$ è una curva piana.

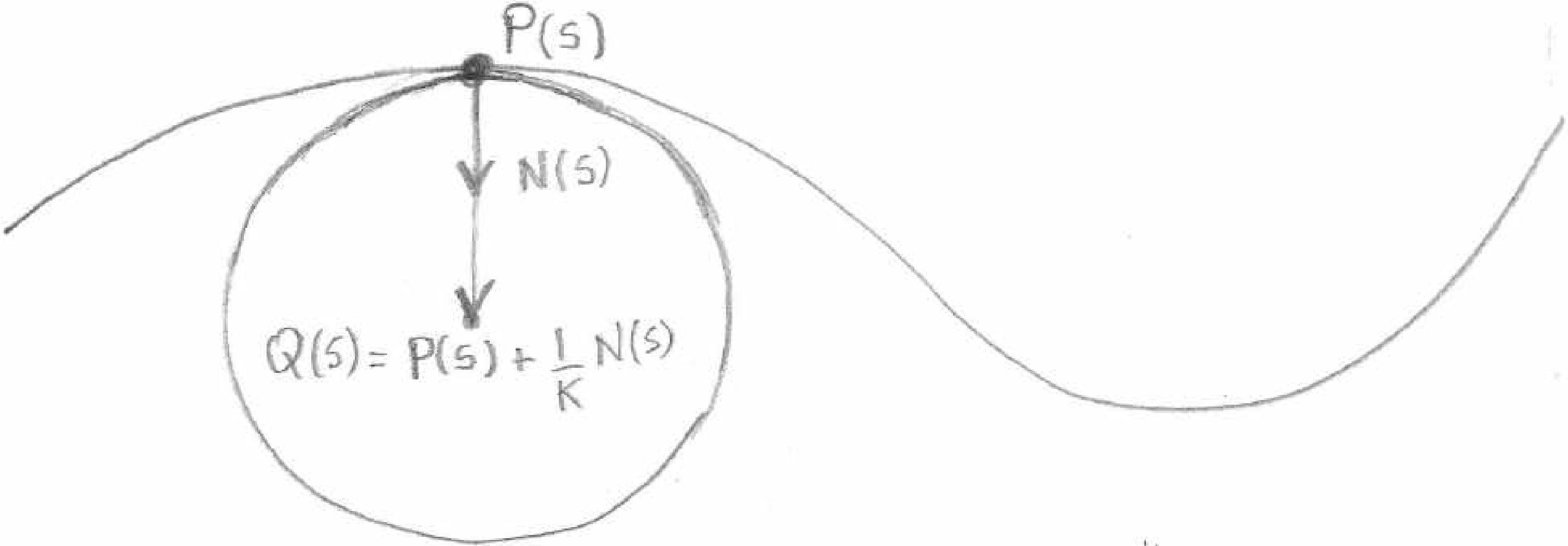
Per provare che $P(s)$ è una (parte di) circonferenza di raggio $\frac{1}{K}$ bisogna provare che esiste un punto C (il centro della circonferenza) tale che

$$\| P(s) - C \| = \frac{1}{K} \quad \forall s$$

Consideriamo la curva

$$Q(s) = P(s) + \frac{1}{K} N(s) \qquad (\star)$$

La curva $Q(s)$ rappresenta i centri di curvatura (ossia i centri del cerchio osculatore) della curva $P(s)$) al variare di s



Notare che $Q(s) - P(s)$ ha norma $\| P(s) + \frac{1}{K} N(s) - P(s) \|$

$$= \left\| \frac{1}{K} N(s) \right\| = \frac{1}{K}$$

Andando a derivare $Q(s)$ otteniamo

$$\frac{dQ}{ds} = \frac{dP}{ds} + \frac{1}{K}\frac{dN}{ds} = \text{per la 2ª formula di Frenet}$$

$$= \frac{dP}{ds} + \frac{1}{K}\left(-K\,T(s) + \tau(s)\,B(s)\right)$$

$$= 0 \quad \text{in quanto} \quad \frac{dP}{ds} = T(s) \quad e \quad \tau(s) = 0$$

In definitiva $\frac{dQ}{ds} = 0 \Rightarrow Q(s) = \text{costante} = C$

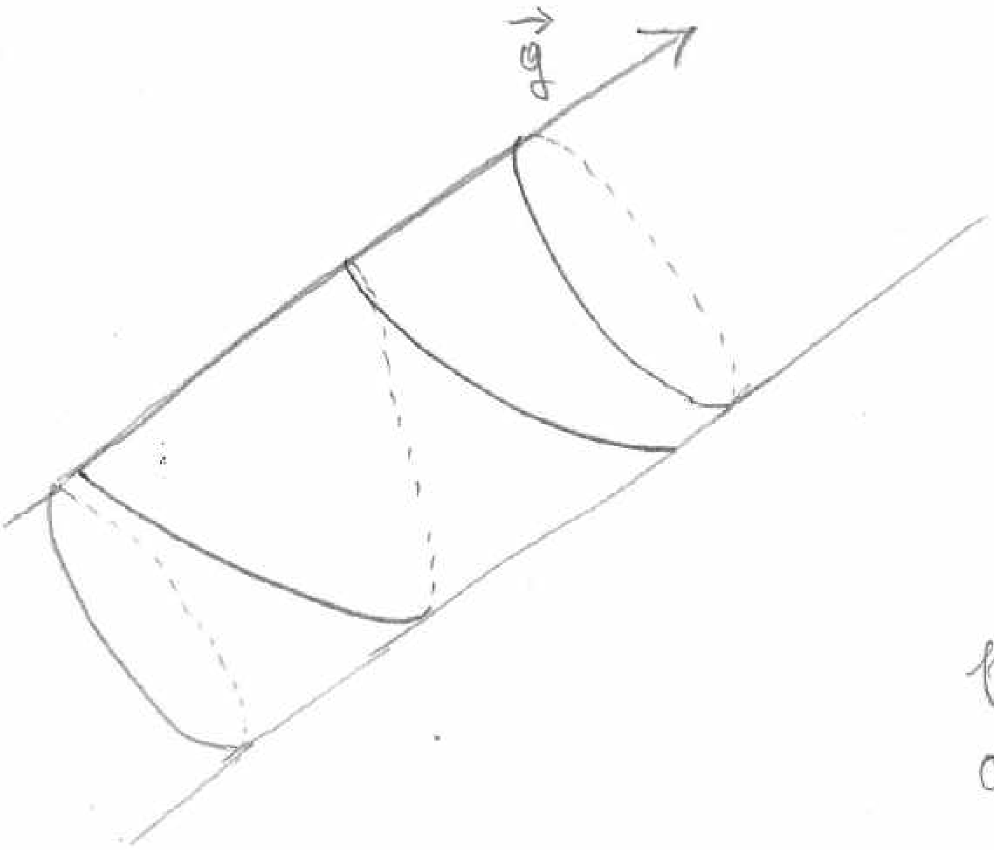
e andando a sostituire nella (★) di pag. 16 otteniamo

$$C = P(s) + \frac{1}{K}N(s) \ \text{che implica} \ \|P(s) - C\| = \frac{1}{K} \quad \left(\begin{array}{l}\text{ricordarsi che}\\ \|N(s)\| = 1\end{array}\right)$$

che era quello che volevamo dimostrare

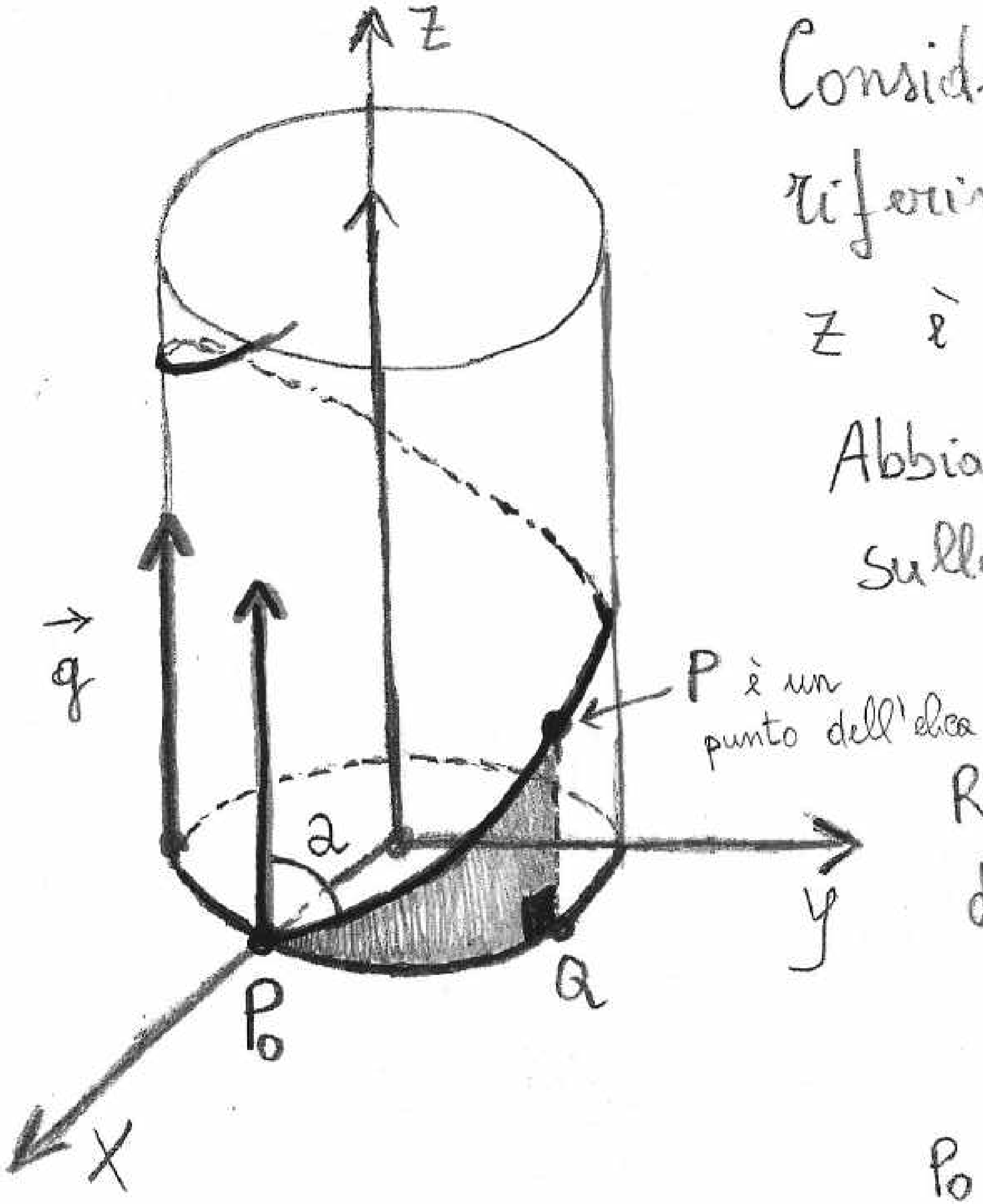
Esempio: ELICA CIRCOLARE

L'elica circolare è una curva su un cilindro di base circolare che forma un angolo costante con la generatrice che denotiamo con $\vec{g}$



Troviamo innanzitutto una rappresentazione parametrica.

Senza perdere le generalità (cioè a meno di una rototraslazione) posso scegliere l'asse z coincidente con l'asse del cilindro

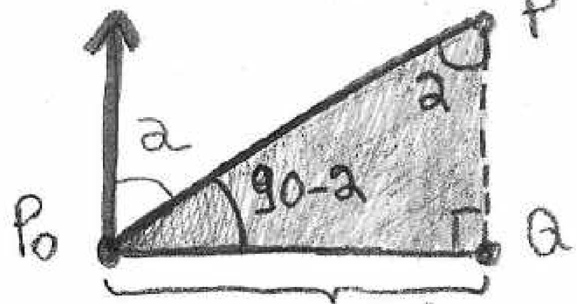


Consideriamo quindi un sistema di riferimento $\{x, y, z\}$ tale che l'asse z è parallelo alla generatrice $\vec{g}$

Abbiamo che l'elica si proietta sulla circonferenza

$$x = r\cos(t) \qquad y = r\sin(t)$$

Riportiamo il "triangolo" grigio del disegno in due dimensioni



$$P_0 = P(0)$$

$= rt$ (è una porzione di circonferenza)

$$\Longrightarrow \frac{PQ}{\cos(\alpha)} = \frac{rt}{\operatorname{sen}(\alpha)} \Longrightarrow PQ = \cot(\alpha)\, rt \Longrightarrow \boxed{z = \cot(\alpha)\, rt}$$

Quindi l'espressione parametrica dell'elica circolare nel precedente sistema di riferimento è

$$x = r\cos(t) \qquad y = r\,\mathrm{sen}(t) \qquad z = \cot(\alpha)\, r\, t$$

In definitiva

$$P(t) = \left(r\cos(t)\ ,\ r\,\mathrm{sen}(t)\ ,\ h\,t \right)$$

con $h := \cot(\alpha)\cdot r$

CURVATURA DELL'ELICA CIRCOLARE

Usando la parametrizzazione di pag. 21 abbiamo che

$$P'(t) = (-r\,\mathrm{sen}(t),\ r\cos(t),\ h)$$

$$P''(t) = (-r\cos(t),\ -r\,\mathrm{sen}(t),\ 0)$$

da cui

$$P'(t) \times P''(t) = (rh\,\mathrm{sen}(t),\ -rh\cos(t),\ r^2)$$

Quindi

$$K(t) = \frac{\| P'(t) \times P''(t) \|}{\| P'(t) \|^3} = \frac{\sqrt{r^2h^2 + r^4}}{\left(\sqrt{r^2+h^2}\right)^3} = \frac{r\sqrt{r^2+h^2}}{\left(\sqrt{r^2+h^2}\right)^3} = \frac{r}{r^2+h^2}$$

Equivalentemente dalla prima formula di Frenet (rispetto ad una parametrizzazione arbitraria) abbiamo che

$$T'(t) = \|P'(t)\| \, K(t) \, N(t) \qquad (*)$$

Facendo i conti

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \left(-r\cos(t), -r\,\mathrm{sen}(t), 0\right)$$

e $\|P'(t)\| = \sqrt{r^2+h^2}$. Quindi $(*)$ si scrive dà

$$\underbrace{\frac{r}{r^2+h^2}}_{K(t)} \underbrace{\left(-\cos(t), -\mathrm{sen}(t), 0\right)}_{N(t)} = K(t) \cdot N(t)$$

<u>Oss:</u> Nell'elica circolare abbiamo posto $h = r \cdot \cot(\alpha)$, dove α è l'angolo del disegno a pag. 20

<u>Se $\alpha \to 0$</u> allora $\cot(\alpha) \to +\infty$ e quindi $h \to \infty$

Conseguentemente $K = \dfrac{r}{r^2+h^2} \to 0$.

In questo caso limite $P(t)$ descrive una retta, che risulterà essere una generatrice del cilindro

<u>Se $\alpha \to \frac{\pi}{2}$</u> allora $\cot(\alpha) \to 0$, quindi $h \to 0$ e $K \to \frac{1}{r}$. In questo caso $P(t)$ descrive una circonferenza del cilindro