Introduzione ai modelli fisico-matematici formulati mediante PDE

PDE = Partial Differential Equation(s)

Equazione/i alle derivate parziali

$Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto dominio della PDE

$\hookrightarrow Q = \Omega \times (0,+\infty)$

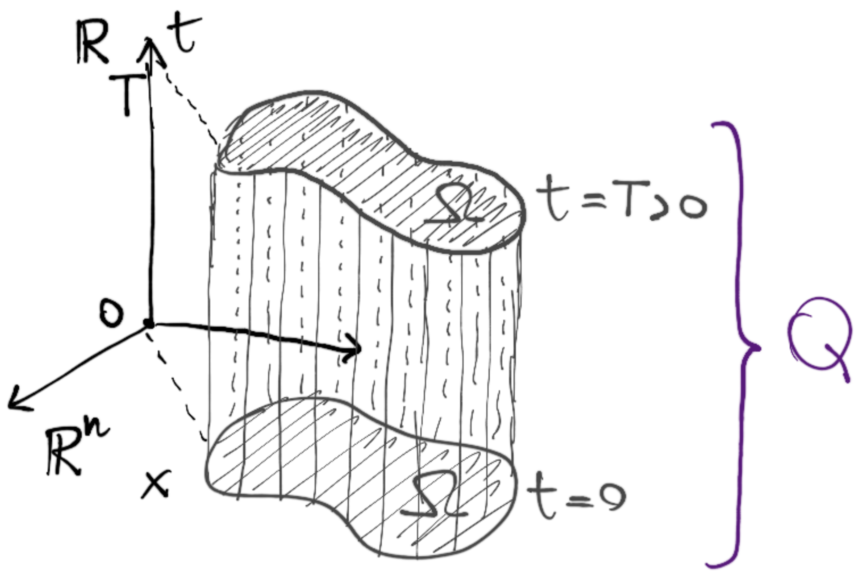
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio spaziale

$(0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ dominio temporale

$x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ variabile spaziale

$x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n$

$t \in (0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ variabile temporale



Sia $u : Q \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$ con $x \in \Omega, t \in (0,+\infty)$.

<u>Def.</u> Una PDE definita in Q nell'incognita u è una relazione tra u e certe sue derivate della forma

$$F\left(\{D^\alpha u\}_\alpha, u, x, t\right) = 0 \quad \text{per } (x,t) \in Q.$$

<u>Notazione</u> Con il simbolo $D^\alpha u$ intendiamo la seguente derivata parziale di u:

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\underbrace{\alpha_i \in \mathbb{N} \ \forall i = 1, \dots, n+1}_{\text{multi-indice}}$
- $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i$ lunghezza del multi-indice

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\alpha_{n+1}}}$$

<u>Esempio</u> $n = 1$, $Q \subseteq \mathbb{R}^2$, $Q = \Omega \times (0,+\infty)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}$

$u = u(x,t)$ con $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$, $t \in (0,+\infty) \subset \mathbb{R}$

$$\alpha = (1,2) \longrightarrow D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}$$

$$\alpha = (0,2) \rightarrow D^{\alpha}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\alpha = (1,1) \rightarrow D^{\alpha}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

Esempi di PDE

1) Equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \qquad (*)$$

Per convenzione, si intende che le eventuali derivate temporali (di qualunque ordine) presenti nella PDE siano indicate esplicitamente. Di conseguenza, tutti gli operatori differenziali diversi da $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ si intendono agenti solo sulla variabile spaziale x.

Quindi l'equazione $(*)$ si intende come:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{per } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

e u può essere intesa come una funzione che dipende solo da x, cioè $u = u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

2) Equazione di Poisson

$$\Delta u = -\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\text{costante}}\underbrace{\rho(x)}_{\text{funzione assegnata}} \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Possiamo scrivere:

$$\underbrace{\Delta u + \frac{1}{\varepsilon}\rho(x) = 0}_{F\left(\{D^\alpha u\}_\alpha,\, u,\, x\right) = 0} \qquad x \in \Omega$$

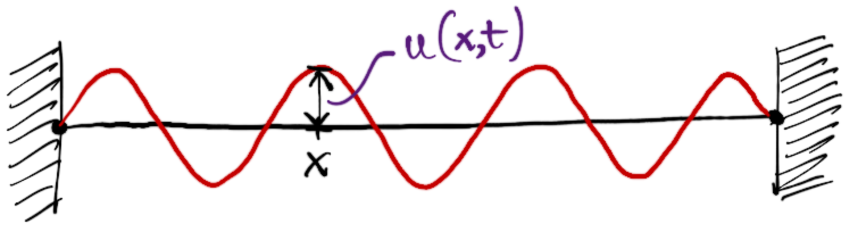
$$\{D^\alpha u\}_\alpha \to \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right\} \longrightarrow \partial^2_{x_i^2} u \quad \text{(notazione più compatta)}$$

3) Equazione del calore

$$\partial_t u - \underbrace{D}_{\substack{\text{coefficiente}\\ \text{di diffusione}\\ \text{(costante)}}}\Delta u = \underbrace{f(x,t)}_{\text{funzione assegnata}} \quad \text{in } Q = \Omega \times (0, +\infty)$$

4) Equazione delle onde

$$\partial_t^2 u - D\Delta u = f(x,t) \quad \text{in } Q = \Omega \times (0,+\infty)$$



5) Equazione del trasporto

$$\partial_t u + a(x,t)\cdot\nabla u = 0 \quad \text{in } Q = \Omega \times (0,+\infty)$$

dove $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ è un vettore assegnato

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\,\partial_{x_i} u = 0.$$

<u>Def.</u> Si chiama ordine di una PDE

$$F\left(\{D^\alpha u\}_\alpha, u, x, t\right) = 0$$

la massima lunghezza dei multi-indici α che figurano in questa relazione.

Esempi

1) $\Delta u = 0$ secondo ordine

2) $\Delta u = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(x)$ secondo ordine

3) $\partial_t u - D\Delta u = f$ secondo ordine

secondo ordine in spazio

primo ordine in tempo

4) $\partial_t^2 u - D\Delta u = f$ secondo ordine

secondo ordine in spazio

secondo ordine in tempo

5) $\partial_t u + a \cdot \nabla u = 0$ primo ordine

primo ordine in spazio

primo ordine in tempo