Trasformata di Laplace

Trasformate di Funzioni e Distribuzioni

Richiami di teoria. Data una funzione $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ localmente sommabile, poniamo

$$\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : e^{-sx} f(x) \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R}^+)\}$$

Se $\Omega_f \neq \emptyset$, la **trasformata di Laplace** di f è definita come

Trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty f(x) e^{-sx}\, \mathrm{d}x, \quad s \in \Omega_f$$

Ricordiamo le proprietà della trasformata di Laplace:

Proprietà della trasformata di Laplace

- Linearità: $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$, per $s \in \Omega_f \cap \Omega_g$;
- Traslazione: $\mathcal{L}(f(x - x_0)H(x - x_0))(s) = e^{-x_0 s}\mathcal{L}(f(x))(s)$, per $s \in \Omega_f$;
- Modulazione: $\mathcal{L}(e^{s_0 x} f(x))(s) = \mathcal{L}(f(x))(s - s_0)$, per $s \in \Omega_f + s_0$;
- Riscalamento: $\mathcal{L}(f(ax))(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(x))(\frac{s}{a})$, per $s \in a\Omega_f$;
- Derivazione: $\mathcal{L}(f'(x))(s) = s\mathcal{L}(f(x))(s) - f(0^+)$ se f' è trasformabile, per $s \in \Omega_f$;
- Integrazione $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\, \mathrm{d}t\right)(s) = \dfrac{\mathcal{L}(f(x))(s)}{s}$ se f è trasformabile, $s \in \Omega_f$;
- Moltiplicazione per polinomi: $\mathcal{L}(x^n f(x))(s) = (-1)^n \left[\mathcal{L}(f(x))(s)\right]^{(n)}$, per $s \in \mathring{\Omega}_f$.

Esercizio 1. Si calcoli la trasformata di Laplace di $f(x) = \sin(\omega x)H(x)$ con $\omega \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che $\Omega_f = \{s : \mathcal{R}e(s) > 0\}$

Scriviamo
$$\sin(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}.$$
Di conseguenza, ricordando che $\mathcal{L}(H(x)) = 1/s$, abbiamo che

$$\mathcal{L}(f(x))(s) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}\left(e^{i\omega x}H(x)\right) - \mathcal{L}\left(e^{-i\omega x}H(x)\right)\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

dove abbiamo usato la proprietà di modulazione.

Esercizio 2. Si calcoli la trasformata di Laplace di $f(x) = x\sin(\omega x)H(x)$ con $\omega \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Utilizzando il risultato visto in precedenza e la formula di moltiplicazione per polinomi abbiamo che

$$\mathcal{L}(f(x))(s) = \mathcal{L}(x\sin(\omega x)H(x))(s) = -[\mathcal{L}(\sin(\omega x)H(x))(s)]' = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right] = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

Esercizio 3. Si calcoli la trasformata di Laplace di $f(x) = x^k e^{s_0 x} H(x)$.
Soluzione. Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(x))(s) &= \mathcal{L}\left(x^k e^{s_0 x} H(x)\right)(s) = (-1)^k \left[\mathcal{L}\left(e^{s_0 x} H(x)\right)(s)\right]^{(k)} = (-1)^k \left[\mathcal{L}(H(x))\left(s - s_0\right)\right]^{(k)} \\ &= (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\left[\frac{1}{s - s_0}\right] = (-1)^k \frac{(-1)^k k!}{\left(s - s_0\right)^{k+1}} = \frac{k!}{\left(s - s_0\right)^{k+1}}, \quad \mathcal{R}e(s) > 0\end{aligned}$$

Esercizio 4. Si calcoli la trasformata di Laplace di $f(x) = x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.
Soluzione. Innanzitutto calcoliamo

$$\mathcal{L}\left(\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\right) = \int_0^1 e^{-xs}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{s} e^{-xs}\right]_0^1 = -\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

Di conseguenza, per la regola di moltiplicazione per polinomi si ha:

$$\mathcal{L}(f(x))(s) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\mathcal{L}\left(\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\right)(s)\right] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{1 - e^{-s}}{s}\right] = \frac{-e^{-s}\left(s^2 + 2s + 1\right) + 2}{s^3}$$

Esercizio 5. Si calcoli la trasformata di Laplace di $f(x) = \cos(x) \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(x)$.
Soluzione. Innanzitutto osserviamo che, per la regola del riscalamento si ha:

$$\mathcal{L}(\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(x)) = \mathcal{L}\left(\mathbb{1}_{[0,1]}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right) = \frac{1 - e^{-2\pi s}}{s},$$

e ricordiamo

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Di conseguenza, utilizzando la regola della modulazione si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(x))(s) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{ix}\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(x))(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-ix}\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(x))(s) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1 - e^{-2\pi(s-i)}}{s - i} + \frac{1}{2}\frac{1 - e^{-2\pi(s+i)}}{s + i} = \frac{1}{2}\frac{1 - e^{-2\pi s}}{s - i} + \frac{1}{2}\frac{1 - e^{-2\pi s}}{s + i} \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi s})\frac{2s}{s^2 + 1} = \frac{s(1 - e^{-2\pi s})}{s^2 + 1}.\end{aligned}$$

<u>**Richiami di teoria.**</u> Considerimao distribuzioni $T \in \mathcal{D}'$ a supporto compatto contenuto in $[0, \infty)$; in questo caso infatti possiamo definire la trasformata di Laplace di T come

Trasformata di Laplace di ditribuzioni

$$\mathcal{L}(T)(s) := \langle T(x), e^{-sx} \rangle$$

Per la trasformata di distribuzioni così definita, valgono essenzialmente le stesse regole viste precedentemente per le funzioni. Vale solo la pena ricordare che, per la trasformata di distribuzioni, vale la formula:

$$\mathcal{L}\left(T'\right)(s) = s\mathcal{L}(T)(s)$$

Questa, anche nel caso di distribuzioni regolari indotte da una funzione f, non è in contraddizione con la regola di derivazione della trasformata per funzioni (dove è presente il termine $f(0^+)$). Per la verifica di questo semplice fatto si rimanda a pagina 183 del capitolo 6 delle dispense.

Esercizio 6. Si calcoli la trasformata di Laplace di $\delta_0^{(k)}$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che

$$\mathcal{L}(\delta_0)(s) = \langle \delta_0, e^{-sx} \rangle = 1.$$

Di conseguenza

$$\mathcal{L}(\delta_0^{(k)})(s) = s^k \mathcal{L}(\delta_0)(s) = s^k.$$

Esercizio 7. Si calcoli la trasformata di Laplace di $x^4 \delta(x-2)$.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che

$$x^4 \delta(x-2) = x^4 \delta_2(x).$$

Quindi abbiamo due strade, possiamo usare la regola di moltiplicazione per polinomi:

$$\mathcal{L}\left(x^4 \delta_2(x)\right)(s) = \mathcal{L}\left(\delta_0(x-2)\right)^{(4)}(s) = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}s^4}\left[e^{-2s}\mathcal{L}\left[\delta_0\right](s)\right] = \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}s^4}\left[e^{-2s}\right] = 16e^{-2s}$$

Oppure osservare che $x^4\delta_2(x) = 16\delta_2(x) \implies \mathcal{L}(x^4\delta_2(x))(s) = 16\mathcal{L}(\delta_0(x-2))(s) = 16e^{-2s}$.

<u>Richiami di teoria.</u> Nel caso di funzioni continue e distribuzioni $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ che siano $\mathcal{L}$ -trasformabili, è ben definita l'antitrasformata di Laplace ed essa è unica.

Ovvero, data una funzione $F(s)$ che è la trasformata di Laplace di una certa funzione/distribuzione $T(x)$, allora $T(x)$ è unica, cioè esiste un'unica $T(x)$ tale per cui $\mathcal{L}(T(x))(s) = F(s)$.

In questo caso si dice che $T(x)$ è l'antitrasformata di Laplace di $F(s)$ e si scrive $T(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

Esercizio 8. Si calcoli l'antitrasformata di Laplace di $\dfrac{s^3}{s^2+1}$.

Soluzione. La funzione è razionale fratta e notiamo che siamo nel caso in cui il numeratore è di grado maggiore del denominatore. In questo caso, scomporre la frazione è facile:

$$\frac{s^3}{s^2+1} = \frac{s^3+s-s}{s^2+1} = s - \frac{s}{s^2+1}.$$

Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3}{s^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}(s) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \delta_0' - \cos(x)H(x)$$

dove in questo caso abbiamo riconosciuto la trasformata nota $\cos(x)H(x)$.

Esercizio 9. Si calcoli l'antitrasformata di Laplace di $\dfrac{1}{(s+5)^3}$.

Soluzione. In questo caso il numeratore ha grado minore del denominatore e non occorre effettuare nessuna divisione preliminare. Sfruttando le prorpietà della trasformata di Laplace si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+5)^3}\right) = e^{-5x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) = \frac{1}{2}e^{-5x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{1}{s}\right]\right) = \frac{1}{2}e^{-5x}x^2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2}e^{-5x}x^2H(x)$$

Esercizio 10. Si calcoli l'antitrasformata di Laplace di $\dfrac{s^3+2s^2+s-1}{s^2+2s+1}$.

Soluzione. Il numeratore ha grado maggiore del denominatore, quindi per prima cosa scomponiamo la frazione:

$$\frac{s^3+2s^2+s-1}{s^2+2s+1} = \frac{s\left(s^2+2s+1\right)-1}{s^2+2s+1} = s - \frac{1}{s^2+2s+1} = s - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Quindi, sfruttando le proprietà della trasformata:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3+2s^2+s-1}{s^2+2s+1}\right) &= \mathcal{L}^{-1}(s) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) = \delta_0'(x) - e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\
&= \delta_0'(x) + e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{s}\right]\right) = \delta_0'(x) - xe^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \\
&= \delta_0'(x) - xe^{-x}H(x)
\end{aligned}$$