Equazioni della Fisica Matematica Esercitazione 11

1. Si dimostri che le equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\partial_t^2 w - c^2 \partial_x^2 w = 0, \quad w \equiv w(x,t), \quad (x,t) \in (\ell, L) \times (0, \infty)$$

e

$$\partial_t u - D \partial_x^2 u = 0, \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in (\ell, L) \times (0, \infty),$$

dove $\ell, L \in \mathbb{R}$ con $\ell < L$, $c \in \mathbb{R}^*$ e $D \in \mathbb{R}_+^*$, possono essere riscritte, mediante opportuni cambi di variabile $x \mapsto x^\dagger$ e $x \mapsto x^\ddagger$, come

$$\partial_t^2 w - \partial_{x^\dagger}^2 w = 0, \quad w \equiv w(x^\dagger, t), \quad (x^\dagger, t) \in \left(\frac{\ell}{c}, \frac{L}{c}\right) \times (0, \infty)$$

e

$$\partial_t u - \partial_{x^\ddagger}^2 u = 0, \quad u \equiv u(x^\ddagger, t), \quad (x^\ddagger, t) \in \left(\frac{\ell}{\sqrt{D}}, \frac{L}{\sqrt{D}}\right) \times (0, \infty).$$

2. Sia dato il seguente problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = f(x,t,u), \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0 \in L^2(\Omega) \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $d \geq 1$ e $D > 0$. Utilizzando la disuguaglianza di Poincaré, ossia il fatto che

$$\int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x, \quad C > 0,$$

si dimostri che se esiste $A > 0$ tale che

$$|f(x,t,v)| \leq A\,|v| \quad \forall\, (x,t,v) \in \Omega \times (0,\infty) \times \mathbb{R} \quad \text{e} \quad D > A\,C$$

allora

$$\lim_{t \to \infty} \int_\Omega |u(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

3. Sia dato il seguente problema di Cauchy-Neumann omogeneo

$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = f(t,u), \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0 \in L^2(\Omega) \\ \nabla u(x,t) \cdot \nu = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $d \geq 1$, $D > 0$ e ν è il versore normale a $\partial\Omega$ che punta verso l'esterno di Ω. Utilizzando la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, ossia il fatto che

$$\int_\Omega |u - \langle u \rangle|^2 \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x, \quad \langle u \rangle := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, \mathrm{d}x, \quad C > 0,$$

dove $|\Omega|$ denota la misura dell'insieme Ω, si dimostri che se esiste $A > 0$ tale che

$$|f(t,v_1) - f(t,v_2)| \leq A\,|v_1 - v_2| \quad \forall\, t \in (0,\infty),\ \forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad D > A\,C$$

allora

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega |u(x,t) - \langle u\rangle(t)|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

4. Sia dato il seguente problema di Cauchy[1]

$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = R(x,t)\,u, \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \\ \\ u(x,0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad u_0 \geq 0 \end{cases}$$

dove $d \geq 1$, $D > 0$ e $R : \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Si dimostri che se

$$|R(x,t)| \leq r(t) \quad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty),$$

dove $r : (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ è una funzione limitata, allora

$$\int_{\mathbb{R}^d} (u_-(x,t))^2 \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, t \in [0,\infty),$$

dove $u_-(x,t) := -\min\{0, u(x,t)\}$.

5. [2] Si risolva il seguente problema di Cauchy[3]

$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = R(t)\,u, \quad u \equiv u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \\ \\ u(x,0) = \delta(x), \end{cases}$$

dove $d \geq 1$, $D > 0$ e $R : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Inoltre, nel caso in cui $d = 1$ e $R(t) \equiv \rho$ con $\rho > 0$, si ricavi l'espressione del punto $X(t) \in \mathbb{R}$ tale che

$$u(X(t),t) = U \quad \forall\, t \in (0,\infty) \quad \text{per un dato } U > 0,$$

e si dimostri che $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{|X(t)|}{t} = 2\sqrt{D\rho}$.

[1] Si assuma che $u(x,t)$ e le sue derivate rispetto alle componenti di x decadano a zero per $|x| \to \infty$ per ogni $t \in (0,\infty)$.
[2] Questo problema è da risolvere a valle delle lezioni relative alla soluzione fondamentale dell'equazione del calore.
[3] Suggerimento: si utilizzi l'ansatz $u(x,t) = v(x,t)\,w(t)$, con $v(x,t) \neq 0$ e $w(t) \neq 0$ per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$.