<u>Ex</u>: Siano (x, y, z) le coordinate standard cartesiane di $\mathbb{R}^3$

La metrica standard (cioè il prodotto scalare standard) è il seguente

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Più precisamente, ad ogni $p \in \mathbb{R}^3$, g associa

$$g_p = (dx)_p \otimes (dx)_p + (dy)_p \otimes (dy)_p + (dz)_p \otimes (dz)_p \quad : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Ad una coppia di campi vettoriali X e Y su $\mathbb{R}^3$ la metrica g associa

$$g(X, Y) = dx(X)\,dx(Y) + dy(X)\,dy(Y) + dz(X)\,dz(Y)$$
$$= X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3$$

dove X_i e Y_i sono le componenti dei campi (quindi funzioni su $\mathbb{R}^3$)

È chiaro che la metrica di pagina precedente, in ogni punto $p \in \mathbb{R}^3$, coincide col prodotto scalare standard.

Infatti, se $v, w \in T_p \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$,

$$g_p(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = v \cdot w$$

Prodotto scalare standard

Stesso discorso ovviamente vale per $\mathbb{R}^2$ se scegliamo come sistema di riferimento quello cartesiano standard (x, y)

Ex: Sia (x,y) il sistema di coordinate cartesiano standard di $\mathbb{R}^2$. Allora

$$g = x\, dx^2 + (y+x)\, dy^2$$

è una metrica su $\mathbb{R}^2$. Se $q_0 = (x_0, y_0)$ abbiamo che

$$g : q_0 \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow g_{q_0} = x_0 (dx^2)_{q_0} + (y_0 + x_0)(dy^2)_{q_0}$$
$$: T_{q_0}\mathbb{R}^2 \times T_{q_0}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Su una coppia di campi vettoriali X e Y su $\mathbb{R}^2$ g agisce come segue

$$g(X,Y) = (x\, dx \otimes dx)(X,Y) + (y+x)(dy \otimes dy)(X,Y)$$
$$= x X_1 Y_1 + (y+x) X_2 Y_2$$ dove X_i, Y_i sono funzioni su $\mathbb{R}^2$, quindi $X_i = X_i(x,y)$, $Y_i = Y_i(x,y)$

<u>Ex:</u> Sia (r, φ) il sistema di coordinate polari su un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$. Allora

$$g = r\, dr \otimes dr + r\varphi\, dr \otimes d\varphi + r\varphi\, d\varphi \otimes dr$$
$$= r\, dr^2 + 2r\varphi\, dr\, d\varphi$$

è una metrica su Ω.

La sua matrice rappresentativa è

$$\begin{pmatrix} r & r\varphi \\ r\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\partial_r, \partial_r) & g(\partial_r, \partial_\varphi) \\ g(\partial_r, \partial_\varphi) & g(\partial_\varphi, \partial_\varphi) \end{pmatrix}$$

PULL-BACK DI UNA METRICA

(in generale, di un campo tensoriale di tipo $(0,2)$)

È una diretta generalizzazione di quanto detto per i campi tensoriali di tipo $(0,1)$, cioè, per le forme differenziali.

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

Sia g un campo tensoriale di tipo $(0,2)$. Allora

$f^*(g)$ così definito

$$\big(f^*(g)\big)(X, Y) = g\big(f_*(X), f_*(Y)\big), \quad X \text{ e } Y \text{ campi vettoriali su } \Omega$$

più precisamente, $\forall q \in \Omega$,

$$\big(f^*(g)\big)_q (X_q, Y_q) = g_{f(q)}\big(f_*(X_q), f_*(Y_q)\big)$$

è un tensore di tipo $(0,2)$ su Ω

ATTENZIONE

Se g è una metrica su $\mathbb{R}^m$, non è detto che $f^*(g)$ lo sia.
Infatti: $f^*(g)$ potrebbe essere degenere.

<u>Ex:</u> Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Sia g una metrica su $\mathbb{R}^m$

Siano $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_m)$ sistemi di coordinate su Ω e $\mathbb{R}^m$ (o meglio, su un aperto contenente $f(\Omega)$) rispettivamente. Sia g_{ij} la matrice rappresentativa di g.

Calcolare la matrice rappresentativa di $f^*(g)$

<u>Cenno</u> dello svolgimento

$$g = g_{ij}\, dy_i \otimes dy_j \Rightarrow f^*(g) = f^*(g_{ij}\, dy_i \otimes dy_j)$$

$$= g_{ij}\, f^*(dy_i) \otimes f^*(dy_j) = g_{ij}\, J_{ik}\, dx_k \otimes J_{jm}\, dx_m$$

$$= g_{ij}\, J_{ik}\, J_{jm}\, dx_k \otimes dx_m$$

J matrice Jacobiana di f

Quindi $(f^*(g))_{km} = g_{ij}\, J_{ik}\, J_{jm}$, Ex: Sia (u,v) il sistema di coordinate standard di $\mathbb{R}^2$.

Sia $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (x+y, \; x+z) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{cc} \| & \| \\ u(x,y,z) & v(x,y,z) \end{array}$$

Scrivere $f^*(du^2 + dv^2)$

1° Metodo

Abbiamo che $u = x+y$, $v = x+z$, quindi

$du = dx + dy$, $dv = dx + dz \Longrightarrow$

$du^2 = (dx+dy)^2 = dx^2 + 2\,dx\,dy + dy^2$

$\left(\text{Ricordare che } dx\,dy = dx \odot dy = \frac{1}{2}(dx \otimes dy + dy \otimes dx) \right)$

$dv^2 = (dx+dz)^2 = dx^2 + 2\,dx\,dz + dz^2$

$\Longrightarrow f^*(du^2 + dv^2) = 2\,dx^2 + 2\,dx\,dy + 2\,dx\,dz + dy^2 + dz^2$

Notare che la matrice rappresentativa di $f^*(du^2+dv^2)$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è di rango 2

Quindi $f^*(du^2+dv^2)$, pur essendo un campo tensoriale di tipo $(0,2)$ su $\mathbb{R}^3$, non rappresenta una metrica su $\mathbb{R}^3$.

<u>2° Metodo</u>

Usare le formule di fine pag. 7, tenendo conto che in questo caso

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per esempio avremo che

$$(f^*(g))_{11} = g_{ij} J_{i1} J_{j1} = J_{11}^2 + J_{21}^2 = 2$$

$$(f^*(g))_{12} = g_{ij} J_{i1} J_{j2} = J_{11} J_{12} + J_{21} J_{22} = 1$$

$$(f^*(g))_{13} = g_{ij} J_{i1} J_{j3} = J_{11} J_{13} + J_{21} J_{23} = 1$$

e così via

Ex: Sia (u, v) il sistema cartesiano standard su $\mathbb{R}^2$.
Scrivere la metrica standard in coordinate polari (r, φ)

Come per le forme differenziali, diamo 2 metodi

Abbiamo che

$$f : (r, \varphi) \longrightarrow (\underset{u}{\underset{\shortparallel}{r\cos(\varphi)}}, \underset{v}{\underset{\shortparallel}{r\,\mathrm{sen}(\varphi)}}) \qquad (\bullet)$$

1º Metodo

La metrica standard di $\mathbb{R}^2$ è

$$g = du^2 + dv^2 = du \otimes du + dv \otimes dv \qquad (\bullet\bullet)$$

Sostituendo $(\bullet)$ in $(\bullet\bullet)$ abbiamo

$$\left(d(r\cos(\varphi))\right)^2 + \left(d(r\,\mathrm{sen}(\varphi))\right)^2 = \left(\cos(\varphi)\,dr - r\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi\right)^2$$

$$+ \left(\mathrm{sen}(\varphi)\,dr + r\cos(\varphi)\,d\varphi\right)^2 = \longrightarrow$$

$$\cos^2(\varphi)\, dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)\, d\varphi^2 - 2r\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)\, dr\, d\varphi$$

$$+ \operatorname{sen}^2(\varphi)\, dr^2 + r^2\cos^2(\varphi)\, d\varphi^2 + 2r\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)\, dr\, d\varphi$$

$$= dr^2 + r^2\, d\varphi^2 \qquad (\odot)$$

Ricordare che $dr\,d\varphi$ significa $dr \odot d\varphi = \frac{1}{2}(dr \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dr)$

" " dr^2 " $dr \odot dr = dr \otimes dr$

" " $d\varphi^2$ " $d\varphi \odot d\varphi = d\varphi \otimes d\varphi$

2º Metodo

Calcoliamo $(f^*(g))_{ij}$ usando la formula di fine di pag. 7

Sapendo che $J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\operatorname{sen}(\varphi) \\ \operatorname{sen}(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ avremo che

$$(f^*(g))_{11} = g_{ij} J_{i1} J_{j1} = g_{11} J_{11}^2 + g_{22} J_{21}^2 = \cos^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\varphi) = 1$$

$$\left(f^*(g)\right)_{12} = g_{ij} J_{i1} J_{j2} = g_{11} J_{11} J_{12} + g_{22} J_{21} J_{22}$$

$$= -r\, \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\varphi) + r\, \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\varphi) = 0$$

$$\left(f^*(g)\right)_{22} = g_{ij} J_{i2} J_{j2} = g_{11} J_{12}^2 + g_{22} J_{22}^2 =$$

$$= r^2 \mathrm{sen}^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi) = r^2$$

Quindi in definitiva

$$f^*(g) = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

che coincide con $(\bullet)$ di pag. 9

CONSIDERAZIONE :

Sia riguardo agli esercizi sulle forme differenziali che a quelli appena fatti sulle metriche abbiamo sempre dato due metodi (equivalenti).
Tale equivalenza si basa sulle seguente formula (che non dimostriamo)

Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f^*(dh) = d(f^*(h)) \qquad (\bullet)$$

dove $\boxed{f^*(h) := h \circ f .}$

Per esempio, se $f : (r, \varphi) \to (u(r,\varphi), v(r,\varphi)) = (u, v)$

$$f^*(du) = d(f^*(u)) = d(u \circ f) = d(u(r,\varphi)) = u_r\, dr + u_\varphi\, d\varphi$$

Ex: Sia $P : (u,v) \in \Omega \to P(u,v) \in \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata

Sia $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ la metrica standard di $\mathbb{R}^3$

Calcolare $P^*(g)$ (è una metrica su Ω)

Abbiamo che $P(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v) \big)$. Quindi

$$P^*(g) = P^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) \overset{\text{Vedi pag. 11}}{=\!=} \big(d\,P^*(x)\big)^2 + \big(d\,P^*(y)\big)^2 + \big(d\,P^*(z)\big)^2$$

$$= \big(d\,x(u,v)\big)^2 + \big(d\,y(u,v)\big)^2 + \big(d\,z(u,v)\big)^2$$

$$= (x_u\,du + x_v\,dv)^2 + (y_u\,du + y_v\,dv)^2 + (z_u\,du + z_v\,dv)^2$$

= facendo i conti

$$= \left(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2\right) du^2 + 2\left(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v\right) du\,dv \qquad (\bullet)$$

$$+ \left(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2\right) dv^2$$

Poniamo

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

in maniera tale che la metrica (•) a pag. 12

è uguale a

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

Con matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

DEF: Sia $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata

Per semplicità supponiamo P iniettiva e sia $S = \operatorname{Im} P$

Una metrica su S è una corrispondenza

$$g : p \in S \to g_p \in \operatorname{Bil}(T_p S)$$

dove g_p è una metrica su $T_p S$.

Se g è una metrica su S, $g \circ P$ dove

$$g \circ P : (u, v) \in \Omega \to g_{P(u,v)} \in \operatorname{Bil}(T_{P(u,v)} S)$$

è una metrica lungo P

Come per le forme differenziali (vedi Lezione 17 pag. 5-6c)

Se ho una metrica su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$g = g_{11}\, du^2 + 2 g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2 \qquad (\circ)$$

con $g_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, allora, se $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

è iniettiva,

$$P^{-1*}(g) \circ P = g_{11} P_u^* \odot P_u^* + 2 g_{12} P_u^* \odot P_v^* + g_{22} P_v^* \odot P_v^* \qquad (\circ\,\circ)$$

è una metrica lungo P

$$P^{-1*}(g) = \left(g_{11} P_u^* \odot P_u^* + 2 g_{12} P_u^* \odot P_v^* + g_{22} P_v^* \odot P_v^* \right) \circ P^{-1} \qquad (\circ\,\circ\,\circ)$$

è una metrica su S

Al di là delle definizioni, la cosa importante è che in $(\bullet)$, $(\bullet\bullet)$ e $(\bullet\bullet\bullet)$ di pagina precedente i coefficienti metrici sono sempre gli stessi.

Infatti una volta che ho una metrica su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$g = g_{11}\, du^2 + 2 g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2 \quad , \quad g_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$$

e una superficie parametrizzata $P : (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to P(u,v) \in \mathbb{R}^3$

si possono costruire tutti gli oggetti di pag. 15

METRICA INDOTTA SU UNA SUPERFICIE PARAMETRIZZATA : 1ª FORMA FONDAMENTALE

Sia $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superfice parametrizzata

Sia $S = \operatorname{Im} P$.

La restrizione della metrica standard di $\mathbb{R}^3$ ad S, cioè ad ogni suo piano tangente $T_{P(u,v)} S = \operatorname{Span}\{P_u(u,v), P_v(u,v)\}$ è detta

<u>1ª forma fondamentale</u> della superficie parametrizzata.

e verrà denotata con g_S

Più precisamente, se $(u,v) \in \Omega$,

$$(g_S)_{P(u,v)} : T_{P(u,v)} S \times T_{P(u,v)} S \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\star)$$

$$(v\,,\,w) \longrightarrow v \bullet w$$

Prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

Calcoliamo i coefficienti metrici di g_S

Consideriamo la base (P_u, P_v) di $T_{P(u,v)} S$,

quindi la metrica sarà

$$g_S = g_S(P_u, P_u)\, P_u^* \odot P_u^* + 2 g_S(P_u, P_v)\, P_u^* \odot P_v^* + g_S(P_v, P_v)\, P_v^* \odot P_v^*$$

$$\overset{(\star)}{=} (P_u \bullet P_u)\, P_u^* \odot P_u^* + 2 (P_u \bullet P_v)\, P_u^* \odot P_v^* + (P_v \bullet P_v)\, P_v^* \odot P_v^*$$

Prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$

In altre parole

$$(g_S)_{11} = P_u \bullet P_u \qquad (g_S)_{12} = P_u \bullet P_v \qquad (g_S)_{22} = P_v \bullet P_v$$

Andiamo a calcolarli. Poiché

$$P(u,v) = \left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \right)$$

avremo che

$$P_u = \left(x_u,\ y_u,\ z_u \right) \quad , \quad P_v = \left(x_v,\ y_v,\ z_v \right)$$

quindi

$$P_u \bullet P_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \qquad P_u \bullet P_v = x_u \cdot x_v + y_u\, y_v + z_u\, z_v$$

$$P_v \bullet P_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

che coincidono (ma questo c'era da aspettarselo) con E, F, G di pagina 13

Per questo la 1ª forma fondamentale di una superficie parametrizzata $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è solitamente scritta

$$\boxed{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2} = P^*(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Con $\underline{E = P_u \cdot P_u}$ $\quad \underline{F = P_u \cdot P_v}$ $\quad \underline{G = P_v \cdot P_v}$

<u>coefficienti della 1ª forma fondamentale</u>

piuttosto che

$$E\, P_u^* \odot P_u^* + 2F\, P_u^* \odot P_v^* + G\, P_v^* \odot P_v^*$$

<u>Ex:</u> Calcolare la 1ª forma fondamentale del cilindro di raggio r e asse z:

$$x = r\cos(u), \quad y = r\,\text{sen}(u), \quad z = v$$

cioè $P(u,v) = (r\cos(u),\ r\,\text{sen}(u),\ v)$

Abbiamo che

$$P_u = (-r\,\text{sen}(u),\ r\cos(u),\ 0)$$
$$P_v = (0,\ 0,\ 1)$$

Quindi

$$E = P_u \cdot P_u = r^2 \qquad F = P_u \cdot P_v = 0 \qquad G = P_v \cdot P_v = 1$$

In conclusione la metrica sul cilindro è

$$r^2 du^2 + dv^2$$

<u>Ex:</u> Calcolare la 1ª forma fondamentale di superfici che siano il grafico di una funzione $f(u,v)$, cioè consideriamo

$$P : (u,v) \in \Omega \longrightarrow (u, v, f(u,v)) \in \mathbb{R}^3.$$

Abbiamo che

$$P_u = (1, 0, f_u) \quad \text{e} \quad P_v = (0, 1, f_v)$$

Quindi

$$E = P_u \cdot P_u = 1 + f_u^2 \qquad F = P_u \cdot P_v = f_u f_v$$

$$G = P_v \cdot P_v = 1 + f_v^2 .$$

In definitiva la 1ª forma fondamentale è

$$g_S = (1 + f_u^2)\, du^2 + 2 f_u f_v \, du\, dv + (1 + f_v^2)\, dv^2$$

Ex: Calcolare la 1ª forma fondamentale della sfera di $\mathbb{R}^3$ di centro l'origine e raggio r.

Denotiamo S^2 tale sfera.

Per calcolare quello che ci chiede l'esercizio dobbiamo cercare una parametrizzazione della sfera. Per esempio la seguente

$$P(u,v) = \big(r\cos(u)\cos(v) \, , \, r\cos(u)\,\mathrm{sen}(v) \, , \, r\,\mathrm{sen}(u) \big)$$

$$(u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$= \big(x(u,v) \, , \, y(u,v) \, , \, z(u,v) \big)$$

Un conto diretto mostra che $x^2(u,v) + y^2(u,v) + z^2(u,v) = r^2$

Avremo che

$$P_u = \left(-r\,\mathrm{sen}(u)\cos(v)\,,\ -r\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(v)\,,\ r\cos(u)\right)$$

$$P_v = \left(-r\,\mathrm{sen}(v)\cos(u)\,,\ r\cos(u)\cos(v)\,,\ 0\right)$$

Quindi

$$\begin{aligned} E = P_u \cdot P_u &= r^2\,\mathrm{sen}^2(u)\cos^2(v) + r^2\,\mathrm{sen}^2(u)\,\mathrm{sen}^2(v) + r^2\cos^2(u) \\ &= r^2\,\mathrm{sen}^2(u)\Big(\underbrace{\cos^2(v) + \mathrm{sen}^2(v)}_{=1}\Big) + r^2\cos^2(u) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

$F = P_u \cdot P_v =$ facendo i conti $= 0$ $\qquad G = P_v \cdot P_v = \;\dots\; = r^2\cos^2(u)$

In definitiva la 1ª forma fondamentale su S^2 è

$$g_{S^2} = r^2\left(du^2 + \cos^2(u)\,dv^2\right)$$