Consideriamo la funzione:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$t \mapsto e^{tA}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. In particolare:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} .$$

Prop. Vale:

$$\underbrace{F'(t)}_{=\frac{dF}{dt}(t)} = A e^{tA} = e^{tA} A .$$

In particolare, le matrici $A, e^{tA} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ commutano sempre $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dim. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ il cui elemento generico $F_{ij}(t) \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ è dato da:

$$F_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k a_{ij}^{(k)}}{k!} .$$

elemento di posto (i,j) di A^k

Per la convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ della serie esponenziale, possiamo derivare termine a termine e scrivere:

$$F'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{k!}_{=\cancel{k}(k-1)!}} \cdot \cancel{k} t^{k-1} a_{ij}^{(k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} a_{ij}^{(k)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ h:=k-1}}{=} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} t^h a_{ij}^{(h+1)}.$$

Dall'espressione del generico elemento della matrice $F'(t)$ deduciamo:

$$F'(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} \underbrace{A^{h+1}}_{=A^h \cdot A}$$

$$= \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h A^h}{h!} \right) A = e^{tA} A.$$

Allo stesso modo:

$$F'(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} A \cdot A^h$$

$$= A \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} A^h \right) = A e^{tA}.$$

$\varnothing$

Corollario Per ogni $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e per ogni $s,t \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

(i) $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$;

in particolare, la matrice esponenziale è sempre invertibile (anche qualora A non lo sia);

(ii) $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$.

Dim. (i) Introduciamo la funzione:

$$G(s,t) := e^{-tA} \cdot e^{(t+s)A}, \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

(cioè $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n\times n}$). Calcoliamo:

$$\partial_t G(s,t) \underset{\uparrow}{=} -e^{-tA} A \cdot e^{(t+s)A} + e^{-tA} \cdot A e^{(t+s)A}$$

per la proposizione precedente

$$= 0 \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

pertanto G è costante rispetto a t:

$$G(s,t) = G(s,0) = e^{0} \cdot e^{sA}$$
$$= I \cdot e^{sA}$$

$e^{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$

$M = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$e^{0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!}$

$= 0^0 = I.$

$$= e^{sA}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad e^{-tA} \cdot e^{(t+s)A} = e^{sA}, \quad \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

Posto $s=0$:

$$e^{-tA} \cdot e^{tA} = I,$$

da cui otteniamo che $e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1}$.

(ii) Ripartiamo da

$$\underbrace{\left(e^{tA} \cdot e^{-tA}\right)}_{\substack{=I \\ \text{per (i)}}} \cdot e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$$

e rimane la seconda tesi. $\boxtimes$

<u>Oss.</u> Dal punto (ii) possiamo dedurre come conseguenza che le matrici e^{tA}, e^{sA} commutano $\forall s,t \in \mathbb{R}$. Infatti:

$$e^{tA} \cdot e^{sA} \underset{\text{per (ii)}}{=} e^{(t+s)A} = e^{(s+t)A} \underset{\text{per (ii)}}{=} e^{sA} \cdot e^{tA}.$$

Più in generale, vale che se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ commutano allora:

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

e quindi, con lo stesso ragionamento di prima, commutano anche e^A, e^B.

Siamo ora pronti a dimostrare la formula di rappresentazione delle soluzioni di un sistema di ODE lineari.

<u>Teorema</u> Le soluzioni di

$$\dot{x} = Ax$$

sono tutte e sole le funzioni

$$x(t) = e^{tA}c$$

dove $c \in \mathbb{R}^n$ è un vettore di costanti arbitrarie. In particolare, l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

è $x(t) = e^{tA}x_0$.

<u>Dim.</u> 1. Facciamo vedere che $x(t) = e^{tA}c$ è soluzione:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}c\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)c = A\underbrace{e^{tA}c}_{x} .$$

2. Facciamo vedere che se una funzione $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ risolve $\dot{x} = Ax$ allora x è necessariamente della forma $x(t) = e^{tA}c$.

Poniamo: $y(t) := e^{-tA}x(t) \in \mathbb{R}^n$ e calcoliamo

$$\dot{y}(t) = -Ae^{-tA}x(t) + e^{-tA}\underbrace{\dot{x}(t)}_{= Ax(t)}$$

$$= -Ae^{-tA}x(t) + e^{-tA}Ax(t) = 0 \in \mathbb{R}^n.$$

Dunque $y(t)$ è costante:

$$y(t) = y(0) = c \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

da cui

$$e^{-tA}x(t) = c \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$x(t) = e^{tA}c.$$

3. Per $t=0$ abbiamo $x(0) = c$, quindi la condizione iniziale è soddisfatta prendendo $c = x_0$ e la soluzione del problema di Cauchy risulta $x(t) = e^{tA}x_0$. $\square$

Regole di calcolo di una matrice esponenziale

Def. Due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dicono *simili* se esiste $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare t.c.

$$B = P^{-1}AP.$$

Lemma Se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono simili mediante una matrice $P \in \mathbb{R}^n$ allora anche e^A, e^B sono simili mediante la stessa matrice P.

Dim. Per ipotesi;

$$B = P^{-1}AP.$$

Calcoliamo:

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big[\underbrace{(P^{-1}AP)\cdot(P^{-1}AP)\cdot\ldots\cdot(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)}_{k \text{ volte}}\Big]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(P^{-1}A^kP\right)$$

$$= P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)P = P^{-1}e^AP. \qquad \boxtimes$$

① Caso di matrice A diagonalizzabile

A è simile ad una matrice diagonale:

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori di A. Dato $t \in \mathbb{R}$, se siamo in grado di calcolare $e^{t\Lambda}$ allora potremo scrivere:

$$P^{-1} e^{tA} P = e^{t\Lambda} \Rightarrow e^{tA} = P e^{t\Lambda} P^{-1}.$$

Abbiamo:

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$e^{t\Lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \Lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{t^k \lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{t^k \lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

A questo punto, e^{tA} si recupera per similitudine.