Geometria delle masse

L'obiettivo della meccanica razionale è studiare la risposta dinamica di un sistema rigido ad una sollecitazione esterna, eventualmente in presenza di vincoli. Per questo, tuttavia, non è sufficiente conoscere la sollecitazione esterna e la cinematica del sistema (cioè la forma dei moti consentiti dai vincoli e le relazioni analitiche tra le grandezze utili per descrivere tali moti). É necessario conoscere anche alcune caratteristiche intrinseche del sistema, che hanno a che fare in modo sintetico con la sua geometria e la sua distribuzione di massa.

A parità di massa e di forze, l'effetto dipende da dove la la massa è stituata

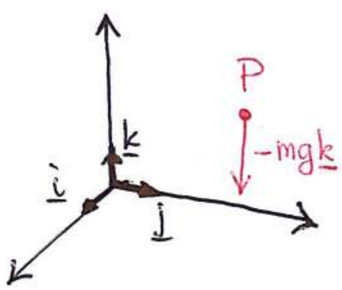
Def. Un punto materiale è un punto geometrico $P \in \mathbb{R}^3$, cioè un ente privo di dimensioni, dotato di massa. Indicheremo la massa con il simbolo m, oppure con m_P se sarà necessario specificare a quale punto ci riferiamo. La massa è una grandezza fisica non negativa, perciò $m \geq 0$.

Baricentro

Un punto materiale immerso nel campo gravitazionale terrestre è soggetto all'azione della forza peso:

$$\underline{P} := -mg\underline{k} \in \mathbb{R}^3,$$

che è inteso come un vettore libero di modulo mg, essendo $g = 9{,}81\ m/s^2$ l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre, diretto in verso opposto al versore verticale $\underline{k}$ di un sistema di riferimento $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ in $\mathbb{R}^3$. Il peso può anche essere inteso come un vettore applicato $(-mg\underline{k}, P)$, essendo il punto materiale P il suo punto di applicazione.



Consideriamo ora un sistema di punti materiali $\{P_i\}_{i=1}^N$ di masse rispettive $m_i > 0$ e il relativo sistema di vettori applicati dato dalle loro forze peso:

$$\{(-m_i g \underline{k}, P_i)\}_{i=1}^N .$$

Si tratta evidentemente di un sistema di vettori paralleli, del quale possiamo calcolare il risultante:

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^N (-m_i g \underline{k}) = -\left(\sum_{i=1}^N m_i\right) g \underline{k} = -Mg\underline{k}$$

avendo definito $M := \sum_{i=1}^N m_i$ la massa totale del sistema di punti. Sappiamo che il sistema originario è equivalente al solo risultante $\underline{R}$ applicato nel centro del sistema, che è il punto G individuato da:

Equivalente se ha stessa risultante e stesso momento risultante

$$G - O = \frac{1}{-Mg} \sum_{i=1}^N (-m_i g)(P_i - O)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i$$

avendo denotato $\underline{r}_i = P_i - O$. Il punto G così determinato si chiama il <u>baricentro</u> (o centro di massa) del sistema di punti materiali. Esso è, di fatto, la media pesata delle posizioni dei punti del sistema essendo i pesi le masse dei vari punti.

In particolare, se le masse sono tutte uguali ($m_i = m \ \forall i = 1, \dots, N$) otteniamo $M = Nm$ e quindi

$$G - O = \frac{1}{Nm} \sum_{i=1}^N m \underline{r}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{r}_i .$$

Chiaramente è una media: la posizione media

Distribuzione continua di massa

Nel caso in cui un corpo rigido sia un sistema esteso, ossia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di volume non nullo oppure un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ di area non nulla oppure ancora un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di lunghezza non nulla, la massa si distribuisce in tutto il sottoinsieme occupato dal corpo. Allora non è più possibile pensare ai punti del corpo come punti materiali, ciascuno dotato di massa finita, perchè essi sono in quantità infinita in ogni sotto-porzione del corpo. Si introduce quindi il concetto di <u>densità</u>, che è una proprietà intensiva del corpo, definita come una funzione $\rho : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$, essendo $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ il sottoinsieme che individua il corpo $(n=1,2,3)$, tale che:

$$M = \int_{\mathcal{B}} \rho(\underline{x})\, d\underline{x}$$

sia la massa del corpo. Questo integrale sarà un integrale unidimensionale, di superficie o di volume a seconda della dimensione geometrica n del corpo. Il baricentro G sarà allora definito come:

$$G - O = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}} \underline{x}\, \rho(\underline{x})\, d\underline{x},$$

Generalizzazione del concetto di media aritmetica

ossia la media delle posizioni $\underline{x}$ dei punti di $\mathcal{B}$ pesate ciascuna con la "massa infinitesima" $\rho(\underline{x})d\underline{x}$ distribuita in un volumetto $d\underline{x}$ centrato in $\underline{x}$. Osserviamo che se la densità è costante in $\mathcal{B}$, cioè se $\rho(\underline{x}) \equiv \bar{\rho} \geq 0 \ \forall \underline{x} \in \mathcal{B}$, allora abbiamo $M = \bar{\rho}|\mathcal{B}|$, dove con $|\mathcal{B}|$ indichiamo la misura "geometrica" di $\mathcal{B}$ (ossia la lunghezza, l'area o il volume a seconda della dimensione) e

$$G - O = \frac{1}{\bar{\rho}|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \underline{x}\, \bar{\rho}\, d\underline{x} = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} \underline{x}\, d\underline{x}.$$

Oss. Se la distribuzione delle masse, sia discreta sia continua, è omogenea (cioè se $m_i = m \ \forall i = 1, \dots, N$ oppure se ρ è costante in $\mathcal{B}$) allora se il sistema di punti / corpo $\mathcal{B}$ presenta piani o rette di simmetria il baricentro G si trova su quei piani o su quelle rette. Se vi sono più piani o rette di simmetria il baricentro si trova nella loro intersezione.

Oss. D'ora in avanti, per semplicità di notazione, considereremo esplicitamente sistemi discreti di punti materiali, limitandoci a dare le equivalenti formule per il caso di distribuzioni continue di massa.

Momenti di inerzia

Def. Sia $a \subseteq \mathbb{R}^3$ una retta (asse). Dato un punto materiale P di massa $m \geq 0$, chiamiamo momento di inerzia del punto P rispetto all'asse a il numero

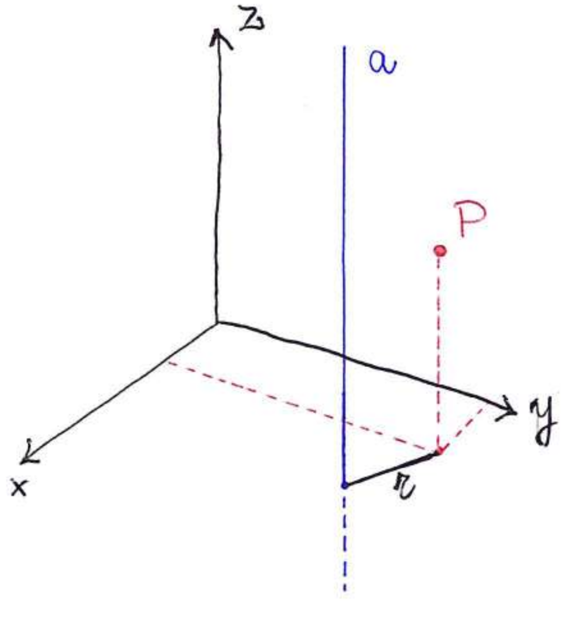
$$I_a = m r^2,$$

essendo $r \geq 0$ la distanza di P da a.

Per un sistema di punti materiali $\{P_i\}_{i=1}^N$ di masse rispettive m_i, $i = 1, \dots, N$, chiamiamo momento di inerzia (del sistema) rispetto all'asse a il numero:

$$I_a = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

essendo r_i la distanza di P_i da a.



Oss. Il momento di inerzia di un sistema di punti materiali è un numero non negativo.

Oss. Nel caso di un corpo continuo con densità ρ avremo:

$$I_a = \int_{\mathcal{B}} d^2(\underline{x},a)\,\rho(\underline{x})\,d\underline{x},$$

dove $d(\underline{x},a)$ è la funzione che esprime la distanza del punto $\underline{x}$ dall'asse a.

Def. Dato un sistema di punti materiali $\{P_i\}_{i=1}^N$ omogeneo, cioè tale che $m_i = m > 0$ $\forall i$, chiamiamo momento di inerzia geometrico del sistema rispetto ad un asse a il numero

$$i_a := \frac{I_a}{m} = \sum_{i=1}^N r_i^2,$$

essendo $r_i \geq 0$ la distanza di P_i da a. Nel caso di un corpo continuo con densità costante $\rho > 0$ risulta:

$$i_a := \frac{I_a}{\rho} = \int_{\mathcal{B}} d^2(\underline{x},a)\,d\underline{x}.$$

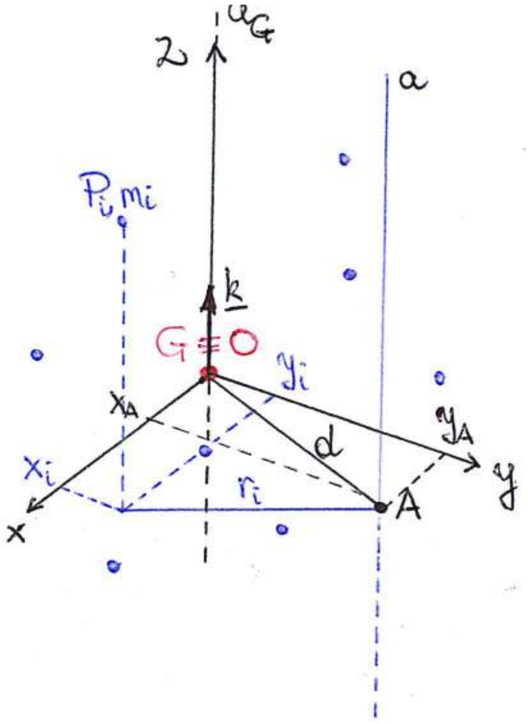
Teorema (di Huygens-Steiner)

Sia $a \subset \mathbb{R}^3$ un asse arbitrario e $a_G \subset \mathbb{R}^3$ l'asse parallelo ad a e passante per il centro di massa $G \in \mathbb{R}^3$ di un corpo $\mathcal{B}$. Allora:

$$I_a = I_{a_G} + Md^2,$$

dove M è la massa totale di $\mathcal{B}$ e d è la distanza tra a e a_G.

Dim. Introduciamo un sistema di riferimento con origine nel baricentro G di $\mathcal{B}$ e tale che gli assi a_G, a siano paralleli all'asse z. Effettueremo la dimostrazione nel caso in cui $\mathcal{B}$ sia un sistema di punti materiali $\{P_i\}_{i=1}^N$ di masse rispettive m_i, $i=1,\dots,N$; l'estensione al caso di un corpo continuo segue le stesse idee.



In questo sistema di riferimento, la retta a ha equazione:

$$a: \; A-O+\lambda \underline{k}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

essendo $A=(x_A, y_A, 0)$ il punto in cui essa interseca il piano $z=0$. Posto $P_i - O = x_i \underline{i} + y_i \underline{j} + z_i \underline{k}$ abbiamo:

$$r_i^2 = (x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2$$

e quindi:

$$\begin{aligned} I_a &= \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_i^2 - 2x_A x_i + x_A^2 + y_i^2 - 2y_A y_i + y_A^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_i^2 + y_i^2 \right] + \sum_{i=1}^{N} m_i \underbrace{\left[x_A^2 + y_A^2 \right]}_{d^2} \\ &\quad - 2 \left\{ x_A \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}_{M x_G = 0} + y_A \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}_{M y_G = 0} \right\} \quad \text{perchè } G \equiv O \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) + d^2 \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$= I_{a_G} + Md^2$$

avendo posto $M := \sum_{i=1}^{N} m_i$. $\boxtimes$

Oss. Dal teorema di Huygens-Steiner abbiamo che

$$I_a \geqslant I_{a_G}$$

per ogni asse a parallelo ad a_G. Dunque tra tutti gli assi aventi direzione fissata quello passante per G è l'asse rispetto al quale il momento di inerzia è minimo.

Pensiamo una porta che ruota attorno ai suoi cardini e una girevole che ruota attorno un asse centrale

Corollario Se $a_1, a_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono due assi paralleli distanti rispettivamente d_1, $d_2 \geq 0$ dal baricentro allora:

$$I_{a_2} = I_{a_1} + M(d_2^2 - d_1^2).$$

Dim. Dal teorema di Huygens-Steiner risulta:

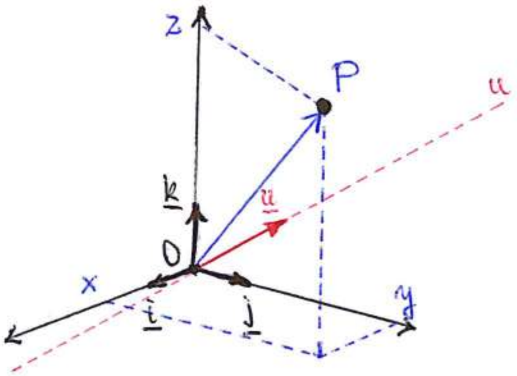
$$I_{a_1} = I_{a_G} + Md_1^2,$$
$$I_{a_2} = I_{a_G} + Md_2^2,$$

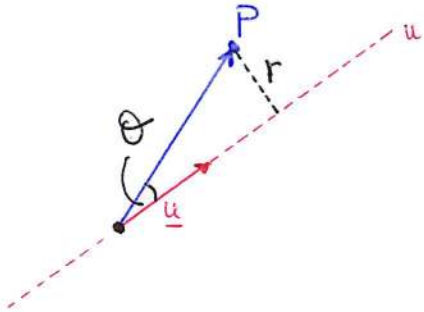
perciò la tesi segue sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima. $\boxtimes$

Matrice di inerzia

Consideriamo ora il problema di determinare il momento di inerzia di un corpo (ovvero di una distribuzione di massa) rispetto ad un asse $u \subset \mathbb{R}^3$ passante per un punto $O \in \mathbb{R}^3$ fissato.

Prendiamo a questo scopo un sistema di riferimento con origine in O e assi $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ e identifichiamo l'asse u in questione con un versore $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ che ne individua la direzione.





Sia $\underline{u} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k}$ con $u_i \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{3} u_i^2 = 1$. Sia poi $P \in \mathbb{R}^3$ un generico punto tale che $P-O = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$. La distanza di P dall'asse u è

$$r = |P-O| \sin\theta,$$

essendo θ l'angolo formato dai vettori $P-O$ e $\underline{u}$ nel piano che essi generano. Allora:

$$r = |(P-O) \times \underline{u}|.$$

Applicando questo risultato ad un sistema di punti materiali $\{P_i\}_{i=1}^{N}$ potremo scrivere:

$$I_u = \sum_{i=1}^{N} m_i \left|(P_i - O) \times \underline{u}\right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left|(x_i \underline{i} + y_i \underline{j} + z_i \underline{k}) \times (u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k})\right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left| x_i u_2 \underline{k} - x_i u_3 \underline{j} - y_i u_1 \underline{k} + y_i u_3 \underline{i} + z_i u_1 \underline{j} - z_i u_2 \underline{i}\right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left|(y_i u_3 - z_i u_2)\underline{i} + (z_i u_1 - x_i u_3)\underline{j} + (x_i u_2 - y_i u_1)\underline{k}\right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(y_i u_3 - z_i u_2)^2 + (z_i u_1 - x_i u_3)^2 + (x_i u_2 - y_i u_1)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[y_i^2 u_3^2 - 2 y_i z_i u_2 u_3 + z_i^2 u_2^2 + z_i^2 u_1^2 - 2 x_i z_i u_1 u_3 + x_i^2 u_3^2 \right.$$
$$\left. + x_i^2 u_2^2 - 2 x_i y_i u_1 u_2 + y_i^2 u_1^2 \right]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) \right) u_1^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) \right) u_2^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \right) u_3^2$$

$$+ 2 \left(- \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i \right) u_1 u_2 + 2 \left(- \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i \right) u_1 u_3 + 2 \left(- \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i \right) u_2 u_3 .$$

È facile vedere che i termini in parentesi della prima riga sono i momenti di inerzia rispetto ai tre assi x, y, z del sistema di riferimento scelto:

$$I_x = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Invece i tre termini in parentesi della seconda riga sono detti i <u>prodotti di inerzia</u> (o <u>momenti centrifughi</u>):

$$I_{xy} := - \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i , \quad I_{xz} := - \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i , \quad I_{yz} := - \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i .$$

Essi, pur avendo le stesse dimensioni fisiche di un momento di inerzia (ossia massa $\cdot$ lunghezza^2) non sono momenti di inerzia rispetto ad alcun asse.
Dunque dal calcolo precedente possiamo scrivere:

$$I_u = I_x u_1^2 + I_y u_2^2 + I_z u_3^2 + 2 I_{xy} u_1 u_2 + 2 I_{xz} u_1 u_3 + 2 I_{yz} u_2 u_3 .$$

Notiamo che questa risulta essere una forma quadratica nelle variabili u_1, u_2, u_3, che sono le componenti del versore $\underline{u}$ rispetto alla base

$(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fissata. La matrice associata a questa forma quadratica è:

$$\underline{\underline{I}}_O := \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ di $\mathbb{R}^3$ con origine in O. Se ora identifichiamo $\underline{u}$ con il vettore (u_1, u_2, u_3) delle sue componenti rispetto alla suddetta base, possiamo scrivere

$$I_u = (\underline{\underline{I}}_O \underline{u}) \cdot \underline{u} = \underline{u}^T \underline{\underline{I}}_O \underline{u}. \qquad (*)$$

La matrice $\underline{\underline{I}}_O$ si chiama la matrice di inerzia (della distribuzione di massa assegnata) rispetto al punto $O \in \mathbb{R}^3$ nella base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

Oss. Poiché in $(*)$ la matrice $\underline{\underline{I}}_O$ e il vettore $\underline{u}$ sono pensati scritti in componenti rispetto ad una specifica base coordinata, quando si assegna la matrice di inerzia rispetto ad un punto è anche necessario precisare rispetto a quale base di $\mathbb{R}^3$ essa è scritta.

Se si cambia base in $\mathbb{R}^3$, passando ad esempio a $(\underline{i}', \underline{j}', \underline{k}')$ che supporremo sempre ortonormale e t.c. $\underline{k}' = \underline{i}' \times \underline{j}'$, allora esisterà una trasformazione lineare (rotazione) $\underline{\underline{R}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ t.c.

$$\underline{i} = \underline{\underline{R}}\, \underline{i}', \quad \underline{j} = \underline{\underline{R}}\, \underline{j}', \quad \underline{k} = \underline{\underline{R}}\, \underline{k}', \qquad (**)$$

da cui la relazione tra le componenti di $\underline{u}$ nella vecchia e nella nuova base:

$$\underline{u} = \underline{\underline{R}}\, \underline{u}'.$$

Allora:

$$I_u = (\underline{\underline{R}}\, \underline{u}')^T \underline{\underline{I}}_O (\underline{\underline{R}}\, \underline{u}') = (\underline{u}')^T (\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{I}}_O \underline{\underline{R}}) \underline{u}'$$

$$= (\underline{u}')^T \underline{\underline{I}}_O' \underline{u}'$$

dove $\underline{\underline{I}}_O' := \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{I}}_O \underline{\underline{R}}$ è la matrice di inerzia rispetto al punto O nella nuova base $(\underline{i}', \underline{j}', \underline{k}')$.

Si noti che, ovviamente, il valore I_u non cambia perché non è cambiato l'asse $u \subset \mathbb{R}^3$ rispetto a cui si calcola il momento di inerzia. Cambia solo la base di $\mathbb{R}^3$ in cui è espresso il suo versore, ma:

$$u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k} = u_1' \underline{i}' + u_2' \underline{j}' + u_3' \underline{k}'.$$

<u>Proprietà della matrice di inerzia</u>

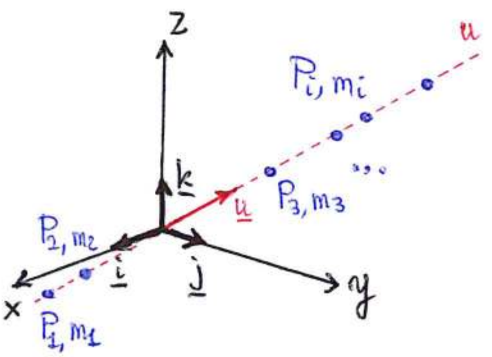
La matrice di inerzia $\underline{\underline{I}}_O$ è simmetrica e, ovviamente, rimane tale a seguito di qualsiasi cambiamento rigido di base:

$$(\underline{\underline{I}}_O')^T = (\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{I}}_O \underline{\underline{R}})^T = \underline{\underline{R}}^T (\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{I}}_O)^T = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{I}}_O^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{I}}_O \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}_O'.$$

Inoltre essa è <u>semi-definita positiva</u>, infatti

$$\underline{u}^T \underline{\underline{I}}_O \underline{u} = I_u \geq 0 \quad \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Se escludiamo il caso in cui tutta la distribuzione di massa sia concentrata lungo un asse passante per O: per cui tutte le distanze dall'asse sono nulle



essa è <u>definita positiva</u>, perché i momenti di inerzia sono in questo caso quantità positive rispetto a qualsiasi asse:

$$\underline{u}^T \underline{\underline{I}}_O \, \underline{u} = I_u > 0 \qquad \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^3,\ \underline{u} \neq \underline{0}.$$

Essendo simmetrica, essa è diagonalizzabile con autovalori reali. Inoltre, nell'ipotesi di distribuzione di massa non concentrata lungo una linea passante per O, tutti i suoi autovalori sono positivi e gli autovettori associati ad autovalori diversi sono tra loro ortogonali. Esiste dunque un cambiamento di base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ della forma (**) che diagonalizza $\underline{\underline{I}}_O$, ossia tale per cui la matrice di inerzia si presenta nella nuova base come:

$$\underline{\underline{I}}'_O = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix}.$$

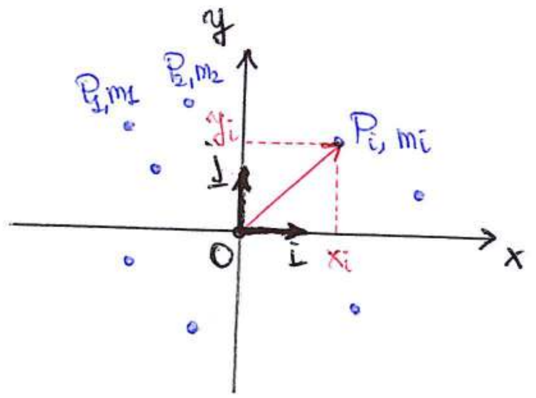
I nuovi assi $x', y', z' \subset \mathbb{R}^3$ individuati dai versori della nuova base $(\underline{i}', \underline{j}', \underline{k}')$ si chiamano gli assi principali di inerzia rispetto ad O della distribuzione di massa data. Gli autovalori di $\underline{\underline{I}}'_O$ sono i momenti principali di inerzia $I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$.

Def. Se $O = G$ allora la matrice di inerzia $\underline{\underline{I}}_G$, gli assi e i momenti principali di inerzia sono detti centrali.

Def. Un corpo (o una distribuzione di massa) si dice un giroscopio quando due dei suoi tre momenti principali di inerzia rispetto ad un dato punto O coincidono. In tal caso, il terzo asse principale di inerzia è detto asse giroscopico.

Sistemi piani

Se tutta la distribuzione di massa giace in un piano, è conveniente fissare un sistema di coordinate tale che quel piano sia un piano coordinato, ad esempio il piano Oxy.



Avremo allora $P_i - O = x_i \underline{i} + y_i \underline{j}$ e quindi:

$$I_x = \sum_{i=1}^{N} m_i |(P_i - O) \times \underline{i}|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{N} m_i |(P_i - O) \times \underline{j}|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i |(P_i - O) \times \underline{k}|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i |x_i \underline{i} \times \underline{k} + y_i \underline{j} \times \underline{k}|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i |-x_i \underline{j} + y_i \underline{i}|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

da cui:

$$I_z = I_x + I_y .$$

Inoltre, essendo $z_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, N$, avremo $I_{xz} = I_{yz} = 0$, perciò la matrice di inerzia rispetto al punto O nella base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ si presenta nella forma:

$$\underline{\underline{I}}_O = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x+I_y \end{pmatrix},$$

da cui vediamo che l'asse z, cioè l'asse ortogonale al piano della distribuzione di massa, è un asse principale di inerzia:

$$\underline{\underline{I}}_O \underline{k} = (I_x + I_y)\, \underline{k}$$

con momento principale di inerzia $I_x + I_y$.