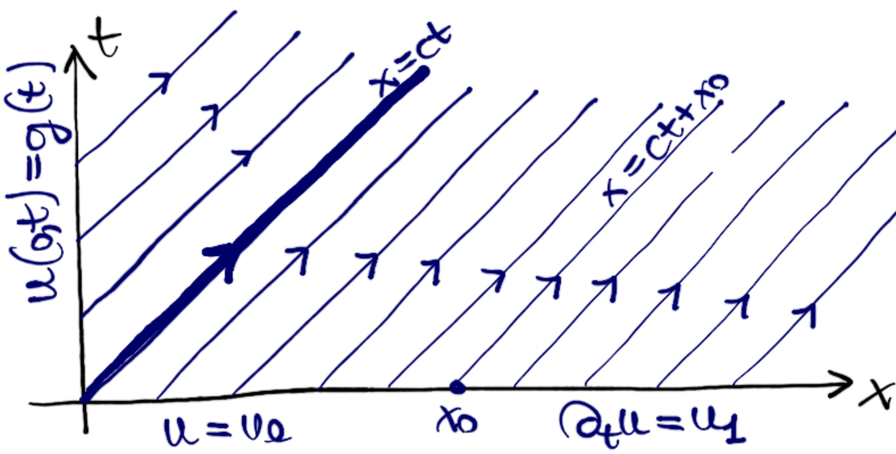
L'equazione delle onde sulla semiretta $x \geq 0$

$\Omega = (0, +\infty)$

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\
\left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ \partial_t u &= u_1 \end{aligned}\right\} & \text{in } \Omega,\ t = 0 \\
u = g & \text{per } x = 0,\ t \in (0,+\infty)
\end{cases}
$$



Supponiamo $c > 0$ e fattorizziamo l'equazione delle onde in due equazioni del trasporto lineari:

$$
0 = \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = (\partial_t + c\partial_x)\underbrace{(\partial_t - c\partial_x)u}_{v}
$$

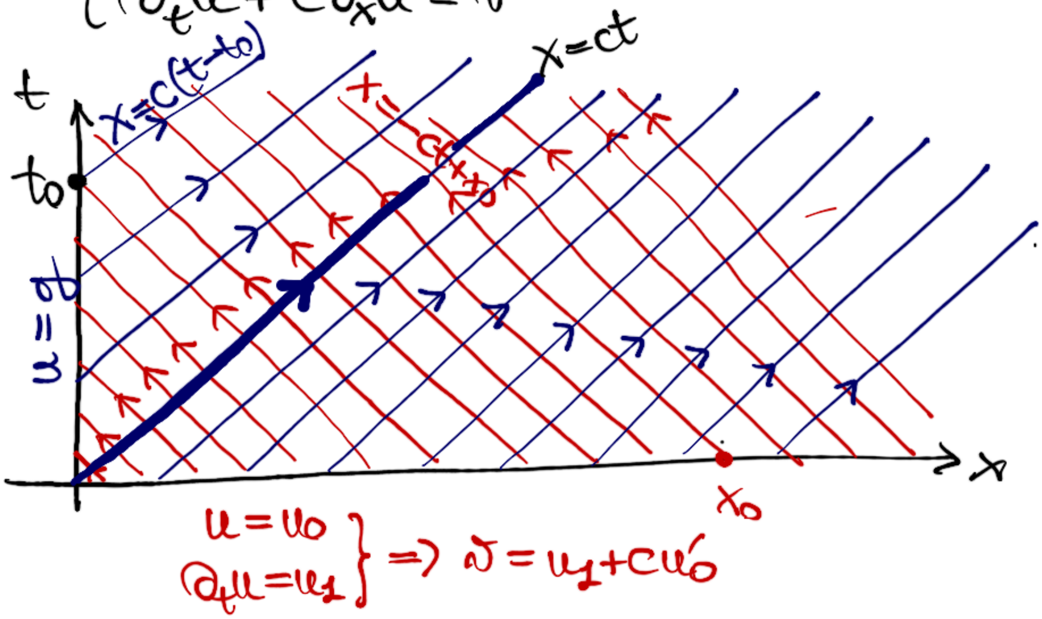
$$
\rightarrow \quad \begin{cases}
\partial_t v + c\partial_x v = 0 \\
\partial_t u - c\partial_x u = v
\end{cases} \quad \text{in } \Omega \times (0,+\infty)
$$

Questa fattorizzazione richiede di conoscere il valore al bordo $v(0,t)$, che tuttavia non si può ricostruire dalle sole conoscenza del dato $u(0,t) = g(t)$: servirebbe conoscere anche $\partial_x u(0,t)$, la quale tuttavia non è prescritta.

Invertiamo la fattorizzazione:

$$0 = \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = (\partial_t - c\partial_x)\underbrace{(\partial_t + c\partial_x) u}_{v}$$

$$\begin{cases} \partial_t v - c\partial_x v = 0 \\ \partial_t u + c\partial_x u = v \end{cases} \quad \text{in } \Omega \times (0,+\infty)$$



Il problema per v diventa:

$$\begin{cases} \partial_t v - c\partial_x v = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\ v = u_1 + c u_0' & \text{in } \Omega,\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v(x,t) = u_1(x+ct) + c u_0'(x+ct).$$

Successivamente risolviamo il problema per u:

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = v & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\ u = u_0 & \text{in } \Omega,\ t=0 \\ u = g & x=0,\ t\in(0,+\infty). \end{cases}$$

Risolviamo nella regione $\{x > ct\}$, dove le caratteristiche blu trasportano il dato iniziale:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x-ct)+u_0(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,d\xi .$$

Questo è precisamente la formula di d'Alembert, coerentemente con il fatto che nella regione $\{x > ct\}$ la soluzione u non è influenzata dal dato al bordo g (tutto funziona come nel problema ai soli valori iniziali) ⇝ verifica per esercizio

Risolviamo ora nella regione $\{x < ct\}$:

restringiamo u ad una caratteristica della forma $x(t) = c(t-t_0)$:

$$\hat{u}(t) := u(x(t),t);$$

calcoliamo la variazione di u lungo la caratteristica:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \partial_x u(x(t),t)\cdot\frac{dx}{dt} + \partial_t u(x(t),t)$$

$$= \partial_x u(x(t),t)\,c + \partial_t u(x(t),t) = v(x(t),t)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{d\hat{u}}{ds}\,ds = \int_{t_0}^{t} v(x(s),s)\,ds$$

$$\underbrace{\hat{u}(t)}_{\shortparallel \atop u(c(t-t_0),t)} - \underbrace{\hat{u}(t_0)}_{\shortparallel \atop u(0,t_0)=g(t_0)} = \int_{t_0}^{t} v(c(s-t_0),s)\,ds$$

(dato al bordo)

$$u(\underbrace{c(t-t_0)}_{x \,\rightsquigarrow\, t_0 = t-\frac{x}{c}},t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(c(s-t_0),s)\,ds$$

$$t_0 = t - \frac{x}{c}$$

$$u(x,t) = g\left(t-\frac{x}{c}\right) + \int_{t-\frac{x}{c}}^{t} v(x+c(s-t),s)\,ds$$

$$= g\left(t-\frac{x}{c}\right) + \int_{t-\frac{x}{c}}^{t} \Big[u_1(x+c(s-t)+cs) + c\,u_0'(x+c(s-t)+cs) \Big]\,ds$$

$$= g\left(t-\frac{x}{c}\right) + \int_{t-\frac{x}{c}}^{t} \Big[u_1(x-ct+2cs) + c\,u_0'(x-ct+2cs) \Big]\,ds$$

$$= g\left(t-\frac{x}{c}\right)+\int_{ct-x}^{ct+x}\left[u_1(\xi)+cu_0'(\xi)\right]\frac{1}{2c}\,d\xi$$

$\xi := x-ct+2cs$

$d\xi = 2c\,ds$

$$= g\left(t-\frac{x}{c}\right)+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x}u_1(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}\left[u_0(ct+x)-u_0(ct-x)\right].$$

In definitiva, l'espressione completa della soluzione è:

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(u_0(x-ct)+u_0(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}u_1(\xi)\,d\xi & \text{per } x>ct\\ g\left(t-\frac{x}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(u_0(ct+x)-u_0(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{ct+x}u_1(\xi)\,d\xi & \text{per } x<ct.\end{cases}$$

Osserviamo il comportamento di u lungo la caratteristica $x=ct$:

- $x \to (ct)^-$

$$u((ct)^-,t)=g(0)+\frac{1}{2}\left(u_0(2ct)-u_0(0)\right)+\frac{1}{2c}\int_0^{2ct}u_1(\xi)\,d\xi$$

• $x \to (ct)^+$

$$u((ct)^+,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(0) + u_0(2ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_0^{2ct} u_1(\xi)\,d\xi .$$

La u avrà un salto attraverso la caratteristica $x=ct$ se:

$$u((ct)^+,t) - u((ct)^-,t) \neq 0.$$

Ma:

$$u((ct)^+,t) - u((ct)^-,t) = u_0(0) - g(0),$$

quindi u è discontinua lungo $x=ct$ se

$$u_0(0) \neq g(0).$$

Se invece $u_0(0) = g(0)$ allora u è almeno continua in $Q = \Omega \times (0,+\infty)$ (posto che i dati u_0, u_1, g) lo siano.

<u>Oss.</u> Il dato iniziale u_1 non interviene nella condizione di formazione di una discontinuità in u lungo $x=ct$.