SPAZI TANGENTI AD APERTI DI $\mathbb{R}^n$

Abbiamo già visto che, se $P : (u,v) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è una superficie parametrizzata e $S = \text{Immagine}(P)$, allora

$$T_{P(u_0,v_0)} S = \text{Span}\left\{ P_u(u_0,v_0),\ P_v(u_0,v_0) \right\}$$

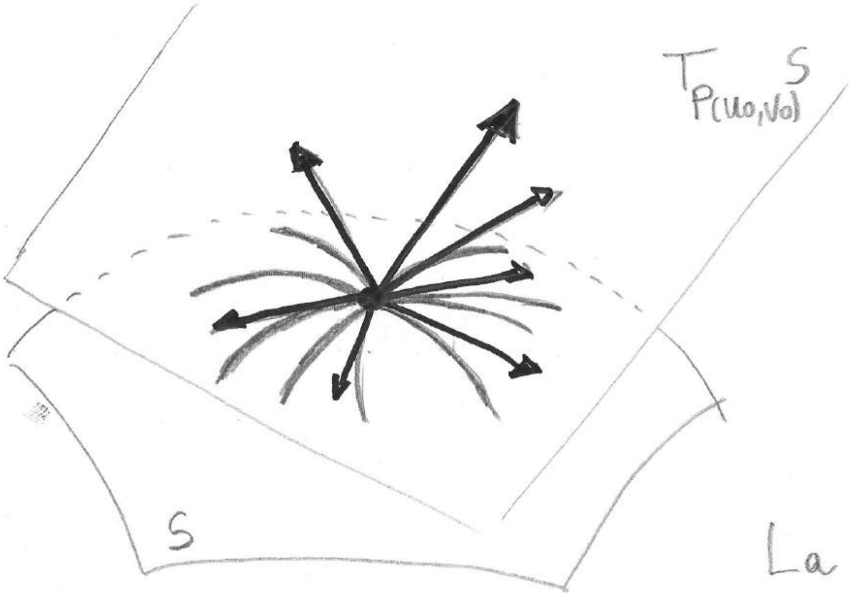
$$= \left\{ a\, P_u(u_0,v_0) + b\, P_v(u_0,v_0) \right\}_{a,b \in \mathbb{R}}$$

Quindi possiamo dire che $T_{P(u_0,v_0)} S$ è l'insieme di tutti i vettori tangenti in $P(u_0,v_0)$ alle curve la cui traiettoria passa per $P(u_0,v_0)$ ed è contenuta in S. (Vedi figura pagina successiva)

al netto delle considerazioni di pag. 13 Lezione 11

Cioè

$$T_{P_0} S = \left\{ \gamma'(0) \right\} \quad \text{dove } \gamma : I \to S \text{ è una curva tale che } \gamma(0) = P_0$$



Il piano tangente è dunque uno spazio vettoriale (quindi dobbiamo immaginarlo infinito)

La definizione che abbiamo dato a pagina precedente in realtà si applica in molti contesti.

Per esempio, se nelle figura di sopra immaginate che S diventa sempre più "piatta" fino a diventare un piano, allora $T_{P(u_0,v_0)}S$ potrebbe identificarsi con S

Adottando la definizione a fine di pag. 1, è facile vedere che, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $p \in \Omega$, allora

$$T_p \Omega = \mathbb{R}^n \qquad (\star)$$

dove l' $\mathbb{R}^n$ di $(\star)$ è da considerarsi come <u>spazio vettoriale con origine p</u>

<u>e non come insieme di punti</u> (in questo caso ennuple)

CAMPI VETTORIALI SU APERTI DI $\mathbb{R}^n$

Facciamo tutto nel caso $n = 2$.
La generalizzazione al caso con n arbitrario è diretta.
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$.
Un campo vettoriale su Ω è una corrispondenza

$$q \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow X_q \in T_q\Omega = \mathbb{R}^2$$ (vedi pag. 3)

Se fissiamo un sistema di coordinate (u, v) su Ω, la precedente corrispondenza diventa

$$\underbrace{(u,v)}_{\text{coordinate di un generico punto } q} \in \Omega \longrightarrow \underbrace{\big(a(u,v),\ b(u,v)\big)}_{\text{componenti del vettore } X_q} \in T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$$

D'altra parte sappiamo (e in un certo senso l'abbiamo visto nella lezione precedente), che ad ogni <u>vettore w di $\mathbb{R}^2$ corrisponde l'operatore di derivata direzionale</u>:

$$w \in T_{q_0}\mathbb{R}^2 \longrightarrow D_w\big|_{q_0} \quad , \quad q_0 = (u_0, v_0)$$

dove $D_w\big|_{q_0} : F \to D_w F(q_0) = \nabla F(u_0, v_0) \cdot w$

Quindi al vettore $(a(u,v), b(u,v))$ di pag. 4 gli possiamo associare l'operatore di derivazione direzionale

$$\boxed{a(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial}{\partial v} : F \longrightarrow a(u,v)\frac{\partial F}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial F}{\partial v} = (a(u,v), b(u,v)) \cdot \nabla F}$$

L'operatore di derivazione direzionale

$$\boxed{a(u,v)\,\frac{\partial}{\partial u} + b(u,v)\,\frac{\partial}{\partial v}} \qquad (\star)$$

è (l'espressione in coordinate (u,v) di) un campo vettoriale su Ω.

In altre parole, ad ogni punto $q_0 \in \Omega$ associo l'operatore di derivazione direzionale nel punto q_0

$$q_0 \in \Omega \longrightarrow a(u_0,v_0)\,\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0} + b(u_0,v_0)\,\frac{\partial}{\partial v}\Big|_{q_0} \in T_{q_0}\Omega = \mathbb{R}^2$$

lungo il vettore $(a(u_0,v_0), b(u_0,v_0))$.

Una conseguenza di quello che abbiamo detto è che ogni vettore di $T_{q_0}\Omega = \mathbb{R}^2$ può essere espresso come combinazione lineare di $\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{q_0}$ e $\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{q_0}$

In particolare abbiamo la seguente

PROP: $\left(\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{q_0}, \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{q_0} \right)$ è una base di $T_{q_0}\Omega$

PROP: Ogni campo vettoriale su Ω è combinazione lineare (con coefficienti funzioni su Ω) dei campi $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$ (vedi anche (★) pag. 6)

In questo senso, $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$ formano una base per i campi vettoriali su Ω

Ricapitolando :

Un generico vettore $\in T_{q_0}\Omega$ dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$ è del tipo

$$\alpha \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0} + \beta \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{q_0} \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

mentre un generico campo vettoriale su Ω è del tipo

$$a(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial}{\partial v} \qquad (\star)$$

con $a(u,v)$ e $b(u,v)$ funzioni : $\Omega \to \mathbb{R}$

COMPONENTI DI UN VETTORE e/o DI UN CAMPO VETTORIALE

In virtù di quello che abbiamo detto fino a pag. 8,
Se ho un vettore $W \in T_{q_0}\Omega$ e ne voglio calcolare le componenti nella base $\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0}, \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{q_0} \right)$ basta calcolare $W(u)$ e $W(v)$, cioè calcolare il vettore W (cioè la derivata direzionale lungo W) sulla funzione u per avere la prima componente e sulla funzione v per avere la seconda componente.

Infatti

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0} + \beta \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{q_0}\right)(u) = \alpha \overbrace{\frac{\partial u}{\partial u}\Big|_{q_0}}^{=1} + \beta \overbrace{\frac{\partial u}{\partial v}\Big|_{q_0}}^{=0} = \alpha$$

$$\left(\quad = \quad\quad = \quad\quad = \quad \right)(v) = \beta \frac{\partial v}{\partial v}\Big|_{q_0} = \beta$$

Stesso discorso se vogliamo ottenere le componenti di un campo su Ω:

Se $X = a(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial}{\partial v}$ è un campo su Ω

(Vedi (*) pag. 8)

allora

$$X(u) = a(u,v)\frac{\partial u}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial u}{\partial v} = a(u,v)$$

$$X(v) = a(u,v)\frac{\partial v}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial v}{\partial v} = b(u,v)$$

Quello che abbiamo visto, come detto all'inizio, è generalizzabile direttamente ad $\mathbb{R}^n$ con n arbitrario.

In particolare, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è un sistema di coordinate di $\mathbb{R}^n$, un vettore generico $\in T_{q_0}\mathbb{R}^n$ è del tipo

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{q_0} + \ldots\ldots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{q_0} \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Più precisamente abbiamo che

<u>PROP</u>: $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{q_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{q_0} \right)$ è una base di $T_{q_0}\mathbb{R}^n$

Un generico campo vettoriale su (un aperto Ω di) $\mathbb{R}^n$ sarà del tipo

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad , \quad a_i : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$a_i = a_i(x_1, \ldots, x_n)$$

Cioè una combinazione lineare dei campi vettoriali

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

con coefficienti che sono funzioni su Ω.

Analogamente al caso 2-dimensionale trattato a pag. 8b-8c, la componente i-esima di un vettore $w \in T_{q_0}\Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, è data da

$$w(x_i)$$

cioè

$$w = w(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{q_0}$$

Stessa cosa per un campo vettoriale X.
La sua componente i-esima è data da

$$X(x_i)$$

cioè

$$X = X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ex: Consideriamo il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ dato da

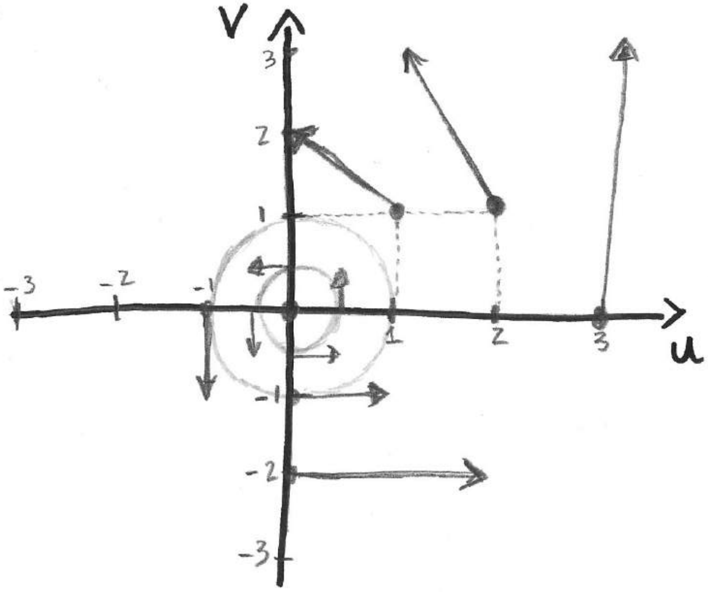
$$X = -v\,\partial_u + u\,\partial_v$$

dove (u,v) è il sistema di coordinate Cartesiane.

Il campo vettoriale X è dato dall'applicazione

$$\underbrace{(u,v)}_{\text{coordinate di un punto generico di } \mathbb{R}^2} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \underbrace{(-v,u)}_{\text{componenti del vettore nella base } \left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,v)}, \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{(u,v)}\right)} \in T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$$

Il vettore $(-v,u)$ dà luogo all'operazione di derivazione direzionale data da X. Andiamo a disegnare questo campo.



È facile vedere che il campo vettoriale

$$-v\,\partial_u + u\,\partial_v$$

è un campo rotazionale. Si vede che i vettori del campo sono tangenti alle circonferenze di centro l'origine

Per esempio nel punto $(0,-1)$ il campo vettoriale X è uguale a $\frac{\partial}{\partial u}$, che coincide con l'usuale operatore di derivazione parziale rispetto a u (o equivalentemente con la derivazione direzionale lungo il vettore $(1,0)$)

APPLICAZIONE TANGENTE $f_\star$ DI UN'
APPLICAZIONE $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Domanda: Una funzione

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \,, \quad f \in C^1(\Omega)$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, induce un'applicazione tra i corrispettivi spazi tangenti?

La risposta è sì.

Definiamo l'applicazione lineare, chiamata anche applicazione tangente

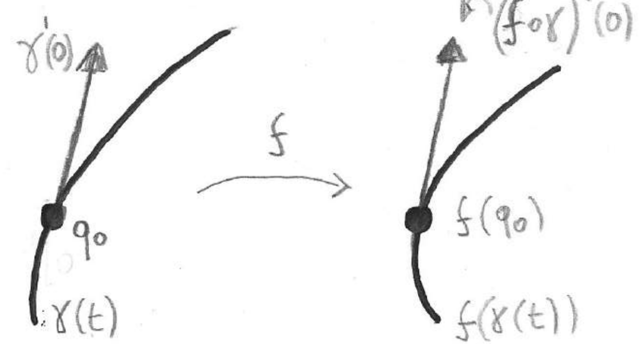
$$f_{\star q_0} : T_{q_0}\Omega = T_{q_0}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(q_0)}\mathbb{R}^m$$

nella pagina seguente

Sappiamo che ogni vettore $\in T_{q_0}\Omega = T_{q_0}\mathbb{R}^n$ è sempre un vettore tangente ad una curva $\gamma : t \to \Omega$ con $\gamma(0) = q_0$, cioè del tipo $\gamma'(0)$.

Quindi mi basta definire $f_{*_{q_0}}(\gamma'(0))$.

Lo facciamo tramite il seguente disegno.



f trasforma la curva γ nella curva $f\circ\gamma$.

In particolare $q_0 \to f(q_0)$.

Coerentemente f trasforma il vettore $\gamma'(0) \in T_{q_0}\Omega$ nel vettore $(f\circ\gamma)'(0) \in T_{f(q_0)}\mathbb{R}^m$.

Quindi per definizione

$$\boxed{f_{*_{q_0}}(\gamma'(0)) = (f\circ\gamma)'(0)}$$

MATRICE RAPPRESENTATIVA DI $f_{*}\big|_{q_0}$

Abbiamo visto che (pag. 11 e 12)

$$f_{*\,q_0} : T_{q_0}\Omega \longrightarrow T_{f(q_0)}\mathbb{R}^m \qquad (\star)$$

dove
$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad f \in C^1(\Omega)$$
Ω aperto di $\mathbb{R}^n$

Per calcolare la matrice rappresentativa di $(\star)$ devo scegliere una base di $T_{q_0}\Omega = T_{q_0}\mathbb{R}^n$ e una base di $T_{f(q_0)}\mathbb{R}^m$

Sia $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un sistema di coordinate su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
e $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ un sistema di coordinate su $\mathbb{R}^m$
(o meglio, su un aperto contenente $f(\Omega)$)

Per quello detto a pag. 8d-8e abbiamo che

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{q_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_{q_0}\right) \text{ è una base di } T_{q_0}\Omega \qquad (\star)$$

e $$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\bigg|_{f(q_0)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_m}\bigg|_{f(q_0)}\right) \text{ è una base di } T_{f(q_0)}\mathbb{R}^m \qquad (\star\star)$$

Calcoleremo la matrice rappresentativa rispetto alle suddette basi. La i-esima colonna della matrice rappresentativa di f_{*q_0} (che denoteremo A) è formata dalle componenti di

$$f_{*q_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{q_0}\right)$$

nella base $(\star\star)$

Nei sistemi di coordinate scelti abbiamo che

$$(\star) \quad \gamma(t) = \Big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t) \Big) \in \Omega$$

$$(\star\star) \quad \gamma'(0) = \gamma_1'(0) \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{q_0} + \dots + \gamma_n'(0) \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{q_0} = \gamma_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{q_0} \in T_{q_0}\Omega$$

$$(\star\star\star) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \Big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \Big)$$

Avremo quindi

$$f_{\star q_0}\big(\gamma'(0)\big) \overset{(\star\star)}{=} f_{\star q_0}\left(\gamma_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{q_0} \right) \overset{\text{Linearità}}{=} \gamma_i'(0)\, f_{\star q_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{q_0} \right) \quad (\bullet)$$

D'altra parte

$$f_{\star q_0}\big(\gamma'(0)\big) \underset{\text{Dalla definizione di } f_\star|_{q_0}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_0 f(\gamma(t)) \overset{(\star)}{=} \frac{d}{dt}\Big|_0 f_1\big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\big) \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{f(q_0)}$$

$$+ \dots + \frac{d}{dt}\Big|_0 f_m\big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\big) \frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_{f(q_0)}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_0 f_K(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \frac{\partial}{\partial y_K}\Big|_{f(q_0)}$$

(Ricordare la convenzione di Einstein)

$$= \frac{\partial f_K}{\partial x_1}\Big|_{q_0} \gamma_1'(0) \frac{\partial}{\partial y_K}\Big|_{f(q_0)} + \dots + \frac{\partial f_K}{\partial x_n}\Big|_{q_0} \gamma_n'(0) \frac{\partial}{\partial y_K}\Big|_{f(q_0)}$$

$$= \frac{\partial f_K}{\partial x_J}\Big|_{q_0} \gamma_J'(0) \frac{\partial}{\partial y_K}\Big|_{f(q_0)}$$

che uguagliato a $(\bullet)$ di pag. 15 ci dà

$$\gamma_J'(0) \, f_{*q_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_J}\Big|_{q_0}\right) = \frac{\partial f_K}{\partial x_J}\Big|_{q_0} \gamma_J'(0) \frac{\partial}{\partial y_K}\Big|_{f(q_0)}$$

In virtù dell'arbitrarietà di $\gamma'(0)$, l'uguaglianza di pagina precedente ci dà

$$f_{*q_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_J}\bigg|_{q_0}\right) = \frac{\partial f_K}{\partial x_J}\bigg|_{q_0} \frac{\partial}{\partial y_K}\bigg|_{f(q_0)}$$

Cioè la matrice rappresentativa di f_{*q_0} nelle basi $(*)$ e $(**)$ di pag. 14 è $A = (A_{KJ})$

dove $$A_{KJ} = \frac{\partial f_K}{\partial x_J}\bigg|_{q_0}$$

cioè la Jacobiana $Jac(f)$ di f (calcolata in q_0)

QUALCHE FORMULA UTILE

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva

Ora sappiamo che $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}\mathbb{R}^n$ può essere interpretato sia come vettore sia come operatore di derivazione direzionale che agisce sulle funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Rispetto a quest'ultima interpretazione possiamo scrivere $\gamma'(0)$ nel seguente modo

$$\gamma'(0) = \gamma_i'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{q_0} \qquad \text{con } q_0 = \gamma(0) \qquad (*)$$

dove $(x_1, \ldots, x_n)$ è un sistema di coordinate su $\mathbb{R}^n$ e $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\big)$

PROP: Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva.

Sia $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora

$$\gamma'(0)(h) = (h \circ \gamma)'(0) \quad \left(= \frac{d}{dt}\Big|_0 h(\gamma(t)) \right) \qquad (*)$$

DIM

È un conto diretto. Abbiamo che

$$\gamma'(0)(h) \overset{(*)\ \text{pag. } 18}{=\!=} \gamma_i'(0) \left.\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|_{\gamma(0)} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_0 h(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 h(\gamma(t))$$

che era quello che volevamo dimostrare

PROP: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con Ω aperto, $f \in C^1(\Omega)$.

Allora $\Big(f_{*q_0}(w)\Big)(h) = w(h \circ f)$ $(\star)$

dove $w \in T_{q_0}\Omega$ e $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

DIM

Innanzitutto commentiamo $(\star)$. $f_{*q_0} : T_{q_0}\Omega \to T_{f(q_0)}\mathbb{R}^m$,

quindi $f_{*q_0}(w)$ può essere visto come operatore di derivazione direzionale che agisce sulle funzioni $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Andiamo ora a dimostrare $(\star)$.

Sia $w = \gamma'(0)$ per un'opportuna curva $\gamma(t)$. Avremo che

$$f_{*q_0}(\gamma'(0))(h) \overset{\text{def. pag. 12}}{=\!=} (f \circ \gamma)'(0)(h) \overset{(\star)\text{ pag. 19}}{=\!=} (h \circ f \circ \gamma)'(0)$$

$\overset{(\star)\text{ pag. 19}}{=\!=}$ $\gamma'(0)(h \circ f)$. Ricordando che $\gamma'(0) = w$, abbiamo $(\star)$

Ex: Potete tentare di dimostrare che la matrice rappresentativa di f_{*q_0} è la matrice Jacobiana usando la proposizione di pag. 20.

Suggerimento.

Dovete calcolare $\left(f_{*q_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)(y_j)$

dove $(x_1, \dots, x_n)$ è un sistema di coordinate su Ω e $(y_1, \dots, y_m)$ è un sistema di coordinate su $\mathbb{R}^m$ (o più precisamente su un aperto contenente $f(\Omega)$)

OSSERVAZIONE

Tutto quello che abbiamo detto sull'applicazione tangente

$$f_{*q_0} : T_{q_0}\Omega \to T_{f(q_0)}\mathbb{R}^m$$

si può estendere anche a campi vettoriali su Ω.
Più precisamente, se X è un campo vettoriale, allora possiamo definire $f_*(X)$ come quell'applicazione che ad un punto $q_0 \in \Omega$ associa $f_{*q_0}(X_{q_0})$

Fino ad ora abbiamo sempre detto "sia (u,v) <u>un sistema</u> di coordinate di $\mathbb{R}^2$" oppure "sia $(x_1, \dots, x_n)$ un sistema di coordinate di $\mathbb{R}^n$" ecc.

Non abbiamo detto "sia (u,v) <u>il sistema</u> Cartesiano ecc." *

Questo significa che quello che abbiamo detto finora valgono in <u>qualsiasi</u> sistema di coordinate (per esempio anche nelle coordinate polari di $\mathbb{R}^2$, o cilindriche / sferiche di $\mathbb{R}^3$, ecc.)

* Eccetto a pag. 9 dove abbiamo trattato un esempio concreto

Un caso interessante è quello in cui

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad f \in C^1(\Omega)$$

Sia biunivoca sull'immagine con $\mathrm{Jac}(f) \neq 0$

(interpretabile come un cambio di coordinate)

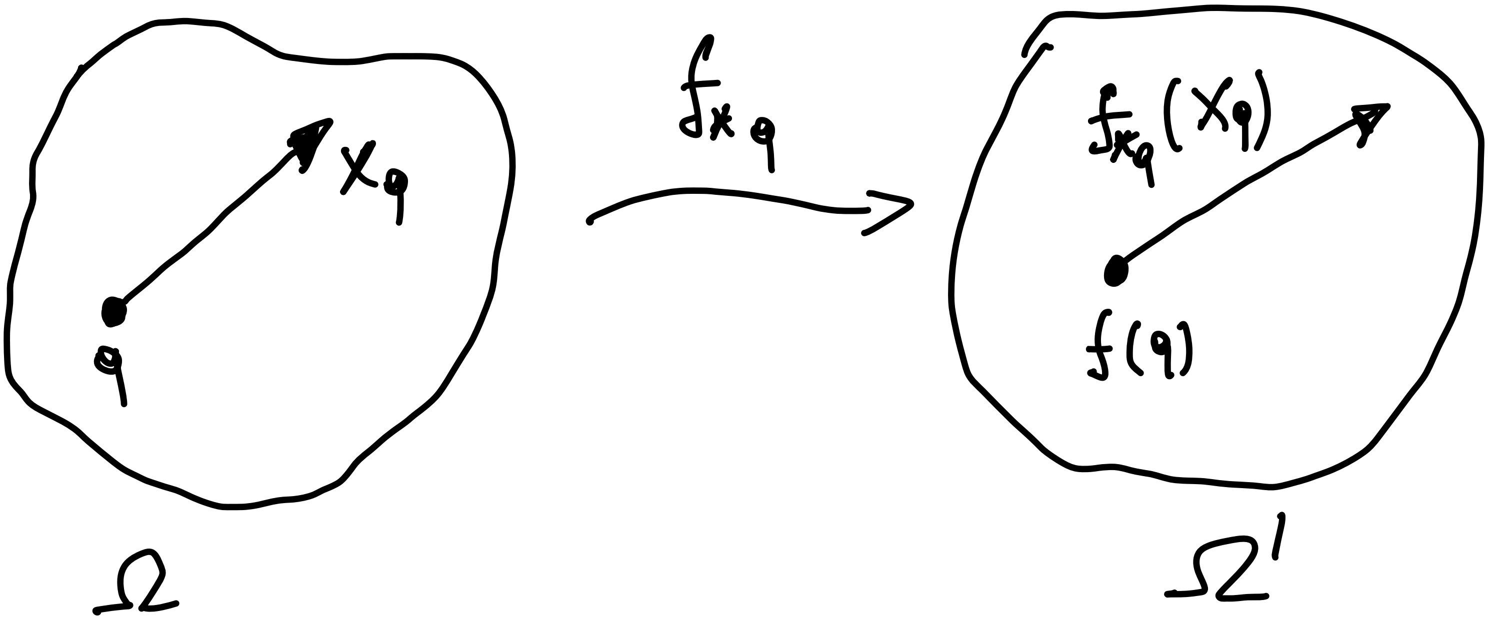
In questo caso f_* trasforma un campo vettoriale su Ω in un campo vettoriale su $f(\Omega)$

Più precisamente, vedi pagina successiva

Più precisamente, se f è biettiva

$$f : \Omega \longrightarrow \Omega'$$

e X è un campo vettoriale su Ω, abbiamo che



Quindi $f_*(X) : q \in \Omega \longrightarrow f_{*q}(X_q) \in T_{f(q)}\Omega'$

In particolare, $f_*(X)$ <u>non è</u> un campo vettoriale su Ω'. Invece

$$\boxed{f_*(X) \circ f^{-1}} : p \in \Omega' \longrightarrow \left(f_*(X)\right)_{f^{-1}(p)} \in T_p\Omega'$$

è un campo vettoriale su Ω'.

<u>Ex:</u> Consideriamo il campo su $\mathbb{R}^2$

$$(\bullet) \quad X = -v\,\partial_u + u\,\partial_v$$

dove (u,v) <u>sono le coordinate cartesiane</u> standard di $\mathbb{R}^2$.
Abbiamo già visto (vedi pag. 9) che il campo X è rotazionale.

Vediamo che forma assume il campo $(\bullet)$ in coordinate polari

Abbiamo che

$$(\bullet\,\bullet) \quad \begin{aligned} u &= r\cos(\varphi) \\ v &= r\,\mathrm{sen}(\varphi) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{u^2+v^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{v}{u} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &0 < r < +\infty \\ &0 < \varphi < 2\pi \\ &(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(t,0) \,/\, t \geq 0\right\} \end{aligned}$$

Cioè possiamo considerare l'applicazione

$$f : (u,v) \longrightarrow \left(\sqrt{u^2+v^2},\ \arctan\frac{v}{u}\right)$$

e vedere come agisce sul campo $(\bullet)$.

Dobbiamo cioè calcolare

$$f_{*q}(X_q) \qquad \text{con } q \in \mathbb{R}^2$$

Per fare questo è necessario calcolare f_* (d'ora in poi per semplicità ometto il punto d'applicazione) che come abbiamo visto è rappresentato, nelle basi (∂_u, ∂_v) e $(\partial_r, \partial_\varphi)$ dalla matrice Jacobiana di f:

$$Jac(f) = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ -\frac{v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

Quindi, poiché le componenti del campo $(\bullet)$ di pag. 22, nella base (∂_u, ∂_v), sono $(-v, u)$, il trasformato di $(\bullet)$ sarà

$$\mathrm{Jac}(f)\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\\ -\frac{v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

Queste sono le componenti di $f_\star X$ nella base $(\partial_r, \partial_\varphi)$

Quindi

$f_\star(X) = \partial_\varphi$

più precisamente $f_{\star_q}(X_q) = \partial_\varphi\big|_{f(q)}$, cioè $\partial_\varphi = (f_\star(X))\circ f^{-1}$

Ex: Siano (r, φ) le coordinate polari.

Esprimere i campi ∂_r e ∂_φ nelle coordinate Cartesiane (u, v).

A pag. 24 abbiamo già visto che

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \longrightarrow -v\,\partial_u + u\,\partial_v$$

Seguendo le notazioni di pag. 22 dobbiamo calcolare

$$f^{-1}_{*}(\partial_r) \quad \text{dove } f^{-1}: (r, \varphi) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow (r\cos(\varphi), r\,\mathrm{sen}(\varphi))$$

La matrice Jacobiana di f^{-1} è

$$\mathrm{Jac}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\,\mathrm{sen}(\varphi) \\ \mathrm{sen}(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Poiché le componenti del campo ∂_r nella base $(\partial_r, \partial_\varphi)$ sono $(1, 0)$, per ottenere $f_*^{-1}(\partial_r)$ dobbiamo calcolare

$$\mathrm{Jac}(f^{-1})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\,\mathrm{sen}(\varphi)\\ \mathrm{sen}(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \mathrm{sen}(\varphi)\end{pmatrix}$$

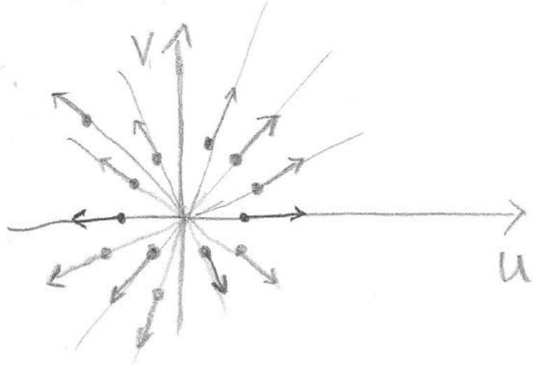
Queste sono le componenti di $f_*^{-1}(\partial_r)$ nella base (∂_u, ∂_v)

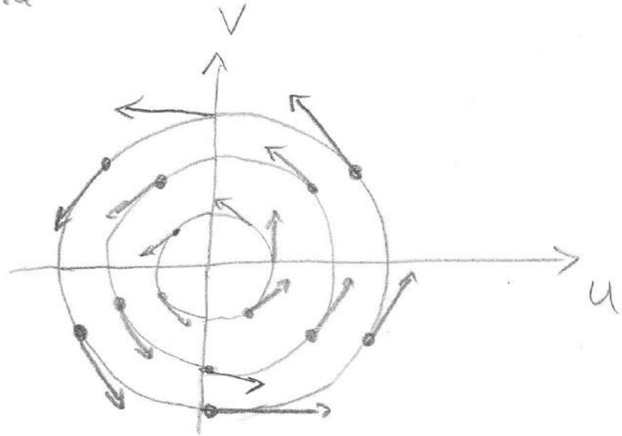
Quindi

$$f_*^{-1}(\partial_r) = \cos(\varphi)\,\partial_u + \mathrm{sen}(\varphi)\,\partial_v$$

$=$ ricordando che $\varphi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$ $= \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\partial_u + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\partial_v = f_*^{-1}(\partial_r)\circ f$

Andando a disegnare i campi ∂_r e ∂_φ nel sistema Cartesiano (u,v) avremo che

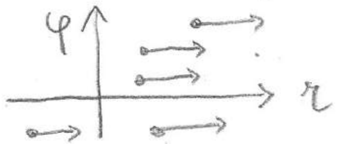




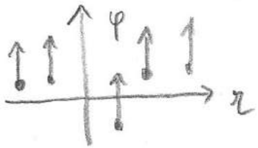
∂_r è un campo radiale di norma 1

∂_φ è un campo rotazionale di norma $\sqrt{u^2+v^2}=r$

Ovviamente, se andiamo a disegnare ∂_r e ∂_φ nel sistema polare (r,φ) abbiamo



∂_r



∂_φ