SPAZIO DUALE DI UNO SPAZIO VETTORIALE V di DIMENSIONE FINITA DEFINITO SU $\mathbb{R}$

È per definizione lo spazio

$$V^* = \left\{ f : V \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle/\; f \text{ lineare} \right\}$$

V^* è uno spazio vettoriale (definito su $\mathbb{R}$) con le seguenti definizioni di somma e prodotto per uno scalare:

1) $(f+g)(v) := f(v) + g(v) \quad \forall f, g \in V^*, \; v \in V$

2) $(a \cdot f)(v) := a \cdot f(v), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \; v \in V$

Gli elementi di V^* si chiamano anche <u>covettori</u>

DIMENSIONE e base di V^*

Costruiamo una base di V^* partendo da una base di V

Supponiamo che V sia n-dimensionale

Sia

$$(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

una base di V.

Definisco e_1^* come <u>quell'unica</u> applicazione lineare da V a $\mathbb{R}$ tale che

$$e_1^*(e_1) = 1, \quad e_1^*(e_2) = 0, \quad \dots, \quad e_1^*(e_n) = 0 \qquad (*)$$

In virtù di (★) di pag. 2 ho che

$$e_1^* : v \in V \longrightarrow e_1^*(v) = v_1$$

dove v_1 è la <u>prima</u> componente di v nella base $(e_1, \dots, e_n)$

Infatti se

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n = \sum_i v_i e_i$$

ho che

$$e_1^*(v) = e_1^*\left(\sum_i v_i e_i\right) \overset{\text{Linearità}}{=} \sum_i v_i e_1^*(e_i) \overset{(\star)\text{ pag. 2}}{=}$$

$$= v_1$$

Analogamente definisco e_2^*:

$$e_2^* : v \in V \longrightarrow e_2^*(v) = v_2$$

dove v_2 è la <u>seconda</u> componente di v nella base $(e_1, \dots, e_n)$

In generale definisco

$$e_i^* : v \in V \longrightarrow e_i^*(v) = v_i$$

dove v_i è la <u>i-esima</u> componente di v nella base $(e_1, \dots, e_n)$

È facile realizzare che

$$e_i^*(e_k) = \delta_k^i \quad (\text{simbolo di Kronecker})$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}$$

PROP: Sia $(e_1, \dots, e_n)$ una base di V.
Allora $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ è una base di V^*

DIM

1) $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ è un sistema di (co-) vettori linearmente indipendenti

Dobbiamo dimostrare che

$$\sum_i a_i e_i^* = 0 \implies a_K = 0 \quad \forall K \in \{1, \dots, n\}$$

Infatti

$$\sum_i a_i e_i^* = 0 \implies \sum_i a_i e_i^*(e_K) = 0 \quad \forall K \in \{1, \dots, n\}$$

$$\overset{\text{vedi pag. 4}}{\implies} \sum_i a_i \delta_K^i = 0 \quad \forall K \implies a_K = 0 \quad \forall K \in \{1, \dots, n\}$$

che era quello che volevamo

2) $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ è un sistema di generatori di V^*.

Dobbiamo far vedere che $\forall f \in V^*$ può essere scritta come

$$f = \sum_i a_i e_i^* \qquad \text{con } a_i \in \mathbb{R}$$

Questo è vero in quanto

$$f = \sum_i f(e_i)\, e_i^*$$

<u>Notare</u> che f e $\sum_i f(e_i)\, e_i^*$ <u>sono la stessa applicazione lineare</u> in quanto assumono gli stessi valori su una base (in questo caso $(e_1, \dots, e_n)$). Infatti

$$\sum_i f(e_i)\, e_i^*(e_k) = \sum_i f(e_i)\, \delta_k^i = f(e_k)$$

Prodotto Scalare su uno spazio vettoriale V di dimensione finita

È un'applicazione $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

1) Simmetrica : $g(u, v) = g(v, u) \quad \forall\, u, v \in V$

2) Multilineare : $g(u+v, w) = g(u, w) + g(v, w)$
$$g(\lambda u, w) = \lambda g(u, w) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Più in generale, se $(e_1, \dots, e_n)$ è una base di V:
$$g\left(\sum_i v_i e_i \,,\, \sum_j w_j e_j\right) = \sum_{i,j} v_i w_j \, g(e_i, e_j)$$

3) Definito positivo : $g(v, v) > 0 \quad \forall\, v \neq 0$

Si definisce norma di un vettore $v \in V$ rispetto al prodotto scalare g la quantità $\|v\|_g = \sqrt{g(v,v)}$

Oss: Abbiamo definito il prodotto scalare come definito positivo, che è quello che ci servirà

In generale si può definire il prodotto scalare anche solo tramite 1) e 2) di pag. 7, o magari tramite 1), 2) + non-degenericità di g

Quindi, nel seguito, se non altrimenti specificato, un prodotto scalare sarà sempre inteso definito positivo.

IL PRODOTTO scalare definito a pag. 7 viene detto anche metrica su V

<u>DEF</u>: Si definisce <u>forma quadratica</u> su uno spazio vettoriale V con prodotto scalare g l'applicazione

$$F : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longrightarrow g(v,v) = \|v\|_g^2$$

<u>Esempio</u>: il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$

$$\big((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$\longrightarrow v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n \in \mathbb{R}$$

è un prodotto scalare definito positivo

La forma quadratica associata è

$$F(v_1, \dots, v_n) = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$

__Esempio__ di prodotto scalare __non definito__ positivo

Consideriamo il seguente

$$g : \big((x,t),(\bar{x},\bar{t})\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow x\bar{x} - c^2 t\bar{t} \in \mathbb{R}$$

con $c \in \mathbb{R}$ una costante > 0

Infatti il vettore (ct, t) ha norma $= 0$ in quanto $g\big((ct,t),(ct,t)\big) = c^2t^2 - c^2t^2 = 0$

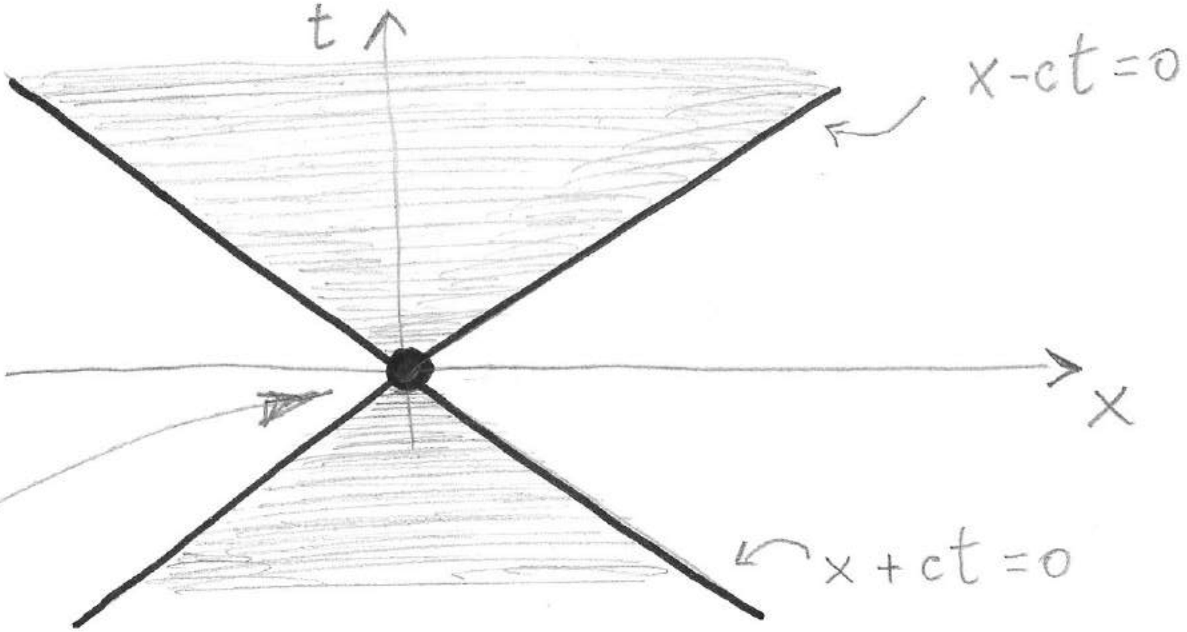
Più in generale tutti i vettori (x,t) /

$F(x,t) = x^2 - c^2t^2 = 0$ ($F(x,t)$ è la forma quadratica associata)

hanno lunghezza nulla, cioè i vettori /

$$(x+ct)(x-ct) = 0 \qquad (\star)$$

Se andiamo a rappresentare (*) su un sistema di assi cartesiani abbiamo



"CONO LUCE"

Se supponiamo che c sia la velocità della luce, t il tempo e l'asse delle x il nostro "Universo spaziale" 1-dimensionale, la velocità istantanea di questa particella è rappresentata da una retta che deve stare all'interno della zona colorata, se si vuole che non superi la velocità della luce

Analogamente, se consideriamo il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$

$$g : \big((x,y,t),(\bar{x},\bar{y},\bar{t})\big) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow x\bar{x} + y\bar{y} - c^2 t\bar{t} \in \mathbb{R}$$

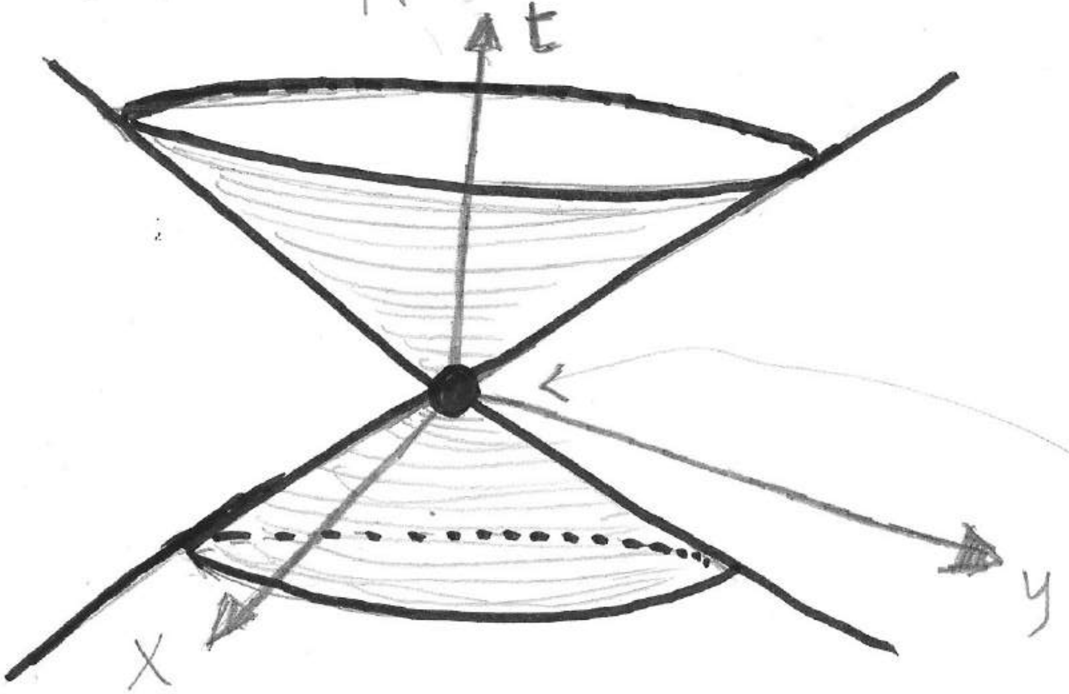
dove $c \in \mathbb{R}$ costante > 0

non è definito positivo.

I vettori che hanno lunghezza zero sono (x,y,t) /

$$F(x,y,t) = x^2 + y^2 - c^2 t^2 = 0 \qquad (\star)$$

$(\star)$ rappresenta un cono di $\mathbb{R}^3$:



Analogamente al caso di pag. 12, se interpretiamo c come la velocità della luce e il piano $\{x,y\}$ come un universo spaziale 2-dim., il cono rappresenta le velocità "limite" che questa particella può avere all'istante $t=0$

Analogamente a quanto visto per lo spazio duale V^*, si mostra che l'insieme delle applicazioni multilineari

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

forma uno spazio vettoriale.

Denotiamo con $Bil(V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni bilineari su V.

DIMENSIONE E BASE DELLO SPAZIO VETTORIALE $Bil(V)$ delle APPLICAZIONI MULTILINEARI $V \times V \to \mathbb{R}$

Sia $(e_1, \dots, e_n)$ una base di V

Definiamo

j-esima componente di w nella base $(e_1, \dots, e_n)$

$$e_i^* \otimes e_j^* : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longrightarrow e_i^*(v)\, e_j^*(w) = v_i\, w_j$$

i-esima componente di v nella base $(e_1, \dots e_n)$

Si verifica facilmente che $e_i^* \otimes e_j^* \in Bil(V)$

$e_i^* \otimes e_j^*$ è detto <u>prodotto tensoriale</u> tra e_i^* e e_j^*

PROP: Sia $(e_1, \dots, e_n)$ una base di V. Allora l'insieme $(e_i^* \otimes e_J^*)_{\substack{i=1\dots n \\ J=1\dots n}}$ è una base di $Bil(V)$

La dimensione di $Bil(V)$ è quindi n^2.

DIM (Molto simile a quella fatta per lo spazio V^*)

1) $(e_i^* \otimes e_J^*)$ è un sistema linearmente indipendente. Infatti

$$\sum_{i,J} a_{iJ}\, e_i^* \otimes e_J^* = 0 \implies \sum_{i,J} a_{iJ}\, e_i^* \otimes e_J^* (e_h, e_K) = 0 \implies$$

$$\implies \sum_{i,J} a_{iJ}\, e_i^*(e_h)\, e_J^*(e_K) = 0 \quad \forall\, h, K \in \{1, \dots, n\}$$

$$\implies \sum_{i,J} a_{iJ}\, \delta_h^i\, \delta_K^J = 0 \quad \forall\, h, K \implies a_{hK} = 0 \quad \forall\, h, K$$

2) $(e_i^* \otimes e_J^*)$ è un sistema di generatori.

Infatti ogni $g \in \mathrm{Bil}(V)$ si può scrivere nel seguente modo

$$g = \sum_{i,J} g(e_i, e_J)\, e_i^* \otimes e_J^*$$

<u>DEF</u>: La matrice $(g_{iJ}) = g(e_i, e_J)$ è detta <u>rappresentativa</u> dell'applicazione bilineare g rispetto alla base $(e_1, \dots, e_n)$