S_n = gruppo simmetrico

PERMUTAZIONE = $\sigma \in S_n$

CICLO di lunghezza k: (ordine k)

$\sigma \in S_n$ t.c. $\sigma = (a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_k)$

$\sigma(a_i) = a_{i+1}$ per $i = 1 \ldots k-1$

$\sigma(a_k) = a_1$

TRASPOSIZIONE = $(a_1\ a_2)$ ciclo di lunghezza 2

es: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3\,4\,5)$

oss: scrivendo $\sigma\tau$ intendiamo $\sigma \circ \tau$, cioè dobbiamo applicare prima τ e poi σ: $\sigma\tau(a) = \sigma(\tau(a))$

$\tau = (3\ 4)$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1\,2\,3\,5)(4)$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{(1\,2\,4\,5)}$$

es: $\alpha = (2\,4\,3)$, $\beta = (1\,3)$ $\in S_4$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2\,4\,3)$$

Prop: Ogni permutazione può essere decomposta nel prodotto di un numero finito di cicli disgiunti. Tale decomposizione è unica a meno dell'ordine.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 7 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{(1\,3\,5\,7\,2)(4\,8)}$$

dim: Sia $\sigma \in S_n$, $a \in I_n$

Calcoliamo:

$a,\ \sigma(a),\ \sigma(\sigma(a)) = \sigma^2(a)$

$\sigma^3(a)\ \dots \qquad \sigma^k(a) = a$

Abbiamo 2 possibilità:

- $k = n$, allora $\{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\} = I_n$
  $\Longrightarrow$ σ é un ciclo di lunghezza n

- $k < n$, allora $\exists\ b \in I_n$ tale che $b \neq \sigma^i(a)$

Calcoliamo

$b,\ \sigma(b),\ \sigma^2(b)\ \dots \qquad \sigma^h(b) = b$

Di nuovo, se:

$$(a\ \sigma(a)\ \sigma^2(a)\ \dots\ \sigma^{k-1}(a))(b\ \sigma(b)\ \dots\ \sigma^{h-1}(b)) = \sigma$$

ho finito.

Altrimenti $\exists\ c \in I_n$ t.c. $c \neq \sigma^i(a)$ $c \neq \sigma^j(b)$

... ripeto la costruzione un numero finito di volte, fino ad ottenere la decomposizione in cicli disgiunti che cercavo, che è unica per costruzione.

#

<u>OSS:</u> se γ è un ciclo di lunghezza k, $\text{ord}(\gamma) = k$

($\text{ord}(x)$ = min. intero tale che $x^n = id.$)

<u>Corollario:</u> Sia $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_r$ una decomposizione in cicli disgiunti della permutazione σ. L'ordine di σ è il minimo comune multiplo degli ordini dei cicli γ_i.

$\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$

$\sigma^n = 1$

<u>Prop:</u> Ogni permutazione può essere decomposta in un prodotto di trasposizioni.

dim: è sufficiente dimostrarlo per i cicli_

$$(a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1})(a_1 a_{k-2}) \cdots (a_1 a_4)(a_1 a_3)(a_1 a_2)$$

\#

es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= (1\,3\,7\,6\,5)(2\,4) = \overset{(56)(56)}{(15)}(16)(17)(13)(24)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Teorema: il numero di trasposizioni in cui si può decomporre una permutazione è o sempre pari o sempre dispari_

dimostrazione: mercoledì

Def: Una permutazione è detta PARI (risp. DISPARI) se si decompone in un numero pari (risp. dispari) di trasposizioni_

Def: Le permutazioni pari di S_n formano un gruppo, detto GRUPPO ALTERNO e denotato con A_n_

es: S_3

$$S_3 = \{ \underbrace{1}_{\text{pari}}, \underbrace{(1\,2), (1\,3), (2\,3)}_{\text{dispari}}, \underbrace{(1\,2\,3)}_{\text{pari}}, \underbrace{(1\,3\,2)}_{\text{pari}} \}$$

ord = 1 ; ord = 2 ; ord = 3

$$1 = (1\,2)(1\,2)(2\,3)(2\,3)$$

$$(1\,2) = (1\,2)(2\,3)(2\,3)$$

$$(1\,2\,3) = (1\,3)(1\,2)$$

$$A_3 = \{1, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$$

<u>Teorema di CAYLEY</u>: Ogni gruppo è isomorfo a un gruppo di permutazioni sull'insieme dei suoi elementi.

<u>Corollario:</u> Se G è un gruppo finito (ad esempio $|G| = n$), allora G è isomorfo a un sottogruppo di S_n.