ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 9

1. Sia $\underline{e^{(n)}} = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Dimostrare che $\underline{e^{(n)}} \overset{*}{\rightharpoonup} \underline{0}$ in ℓ^1.
   (b) Dimostrare che non si ha $\underline{e^{(n)}} \rightharpoonup \underline{0}$ in ℓ^1.
   [Questo esempio mostra che la convergenza debole$*$ in generale non implica la convergenza debole.]
   (c) Dimostrare che la successione $(\underline{e^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ non converge debolmente in ℓ^1.
   (d) Dimostrare che la successione $(\underline{e^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in ℓ^1, ma non ha sottosuccessioni convergenti debolmente in ℓ^1.
   (e) Perché la successione $(\underline{e^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ non costituisce un controesempio al corollario del teorema di Banach–Alaoglu sulla convergenza debole?
2. Sia $p \in (1,\infty)$. Dare un esempio di successione a valori in ℓ^p che converge componente per componente a $\underline{0}$ ma non converge debolmente in ℓ^p.
3. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni caratteristiche

$$\mathbf{1}_{[0,1]},\ \mathbf{1}_{[0,1/2]},\ \mathbf{1}_{[1/2,1]},\ \mathbf{1}_{[0,1/3]},\ \mathbf{1}_{[1/3,2/3]},\ \mathbf{1}_{[2/3,1]},\ \mathbf{1}_{[0,1/4]},\ \mathbf{1}_{[1/4,2/4]},\ \mathbf{1}_{[2/4,3/4]},\ \mathbf{1}_{[3/4,1]},\ldots$$

   (a) Dimostrare che $f_n \to 0$ in $L^p(0,1)$ per ogni $p \in [1,\infty)$.
   (b) Dimostrare che $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^p(0,1)$ per ogni $p \in [1,\infty)$.
   (c) Dimostrare che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(0,1)$.
   (d) Dimostrare che, per ogni $t \in [0,1]$, la successione di numeri reali $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ è indeterminata e non converge in $\mathbb{R}$.
   [Questo esempio mostra che la convergenza debole in $L^p(0,1)$ non implica la convergenza puntuale; questo va confrontato con il caso di ℓ^p, dove invece la convergenza debole implica la convergenza componente per componente.]
4. Sia H uno spazio di Hilbert. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un insieme ortogonale limitato in H (indicizzato iniettivamente).
   (a) Sia $\Delta = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup (\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})^\perp$. Dimostrare che $\operatorname{span}\Delta$ è denso in H.
   (b) Dimostrare che $x_n \rightharpoonup 0$ in H.
5. Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, sia $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(t) = \sin(nt)$ per ogni $t \in [0,2\pi]$.
   (a) Sia $p \in [1,\infty]$. Dimostrare che non si ha $f_n \to 0$ in $L^p(0,2\pi)$.
   (b) Sia $p \in (1,\infty)$. Dimostrare che $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^p(0,2\pi)$.
   (c) Determinare se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(0,2\pi)$.
   (d) Determinare se $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^1(0,2\pi)$.
6. Sia $p \in [1,\infty)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\underline{x^{(n)}} = (1+n)^{-1/p} \sum_{j=0}^n \underline{e^{(j)}}$, ove $\underline{e^{(j)}} = (\delta_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$.
   (a) Determinare se $\underline{x^{(n)}} \to \underline{0}$ in ℓ^p.
   (b) Sia $p \in (1,\infty)$. Determinare se $\underline{x^{(n)}} \rightharpoonup \underline{0}$ in ℓ^p.
   (c) Sia $p = 1$. Determinare se $\underline{x^{(n)}} \overset{*}{\rightharpoonup} \underline{0}$ in ℓ^1.
   (d) Sia $p = 1$. Determinare se $\underline{x^{(n)}} \rightharpoonup \underline{0}$ in ℓ^1.

7. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $u(t) = 1/(1+t^2)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $u_n(t) = u(t-n)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Sia $p \in [1, \infty]$. Determinare se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^p(\mathbb{R})$.
   (b) Sia $p \in (1, \infty)$. Determinare se $u_n \rightharpoonup 0$ in $L^p(\mathbb{R})$.
   (c) Determinare se $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(\mathbb{R})$.
   (d) Determinare se $u_n \rightharpoonup 0$ in $L^1(\mathbb{R})$.
8. Sia X uno spazio di Banach. Sia $J : X \to X''$ l'immersione canonica.
   (a) Dimostrare che un sottoinsieme $E \subseteq X'$ è limitato nello spazio duale X' se e solo se
   $$\sup_{\varphi\in E} |\varphi(x)| < \infty \quad \forall x \in X.$$
   [Suggerimento: Banach–Steinhaus.]
   (b) Dimostrare che un sottoinsieme $A \subseteq X$ è limitato in X se e solo se l'insieme $J(A)$ è limitato in X''.
   (c) Dimostrare che un sottoinsieme $A \subseteq X$ è limitato in X se e solo se
   $$\sup_{x\in A} |\varphi(x)| < \infty \quad \forall \varphi \in X'.$$
   (d) Vale il punto (c) se si assume solo che X è uno spazio normato (non necessariamente di Banach)?

[I prossimi due esercizi contengono, fra l'altro, una dimostrazione dell'enunciato visto a lezione che uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se X' è riflessivo.]

9. Siano X, Y spazi normati. Ricordiamo che, per ogni operatore $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, è definito l'operatore trasposto $A^t \in \mathcal{B}(Y', X')$ (vedi esercitazione 8, esercizio 8); iterando, possiamo anche considerare il trasposto del trasposto $A^{tt} = (A^t)^t \in \mathcal{B}(X'', Y'')$. Siano $J_X : X \to X''$ e $J_Y : Y \to Y''$ le immersioni canoniche di X e Y nei rispettivi biduali.
   (a) Dimostrare che $J_Y A = A^{tt} J_X$ per ogni $A \in \mathcal{B}(X,Y)$.
   [Questa proprietà è ciò che rende "canonica" l'immersione nel biduale.]
   (b) Dimostrare che $(J_X)^t J_{X'} = \mathrm{id}_{X'}$, dove $J_{X'} : X' \to X'''$ è l'immersione canonica.
   (c) Dimostrare che, se X è riflessivo, allora $J_{X'} = ((J_X)^t)^{-1}$ e anche X' è riflessivo.
   [Suggerimento: esercitazione 8, esercizio 8(g).]
10. Sia X uno spazio di Banach. Sia $J_X : X \to X''$ l'immersione canonica nel biduale.
   (a) Dimostrare che l'immagine $J_X(X)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di X''.
   (b) Dimostrare che, se X non è riflessivo, allora esiste $W \in X'''$ non nullo tale che $J_X(X) \subseteq \operatorname{Ker} W$.
   (c) Dimostrare che, se X non è riflessivo, allora $\operatorname{Ker}((J_X)^t) \neq \{0\}$.
   (d) Dimostrare che, se X' è riflessivo, allora $(J_X)^t = J_{X'}^{-1}$ è un isomorfismo isometrico.
   [Suggerimento: esercizio 9.(b).]
   (e) Dimostrare che, se X non è riflessivo, allora X' non è riflessivo.

[Il prossimo esercizio è volto a dimostrare il risultato enunciato a lezione che ℓ^p è riflessivo per $p \in (1, \infty)$.]

11. Siano $p, q \in [1, \infty]$ esponenti coniugati. Denotiamo con $\Psi_p : \ell^q \to (\ell^p)'$ l'isometria lineare definita da
   $$\Psi_p(\underline{y})(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \qquad \forall \underline{x} \in \ell^p,\ \underline{y} \in \ell^q.$$
   Sia inoltre $J_p : \ell^p \to (\ell^p)''$ l'immersione canonica.
   (a) Dimostrare che $(\Psi_p)^t J_p = \Psi_q$.
   (b) Dimostrare che, se $p \in (1, \infty)$, allora $J_p = ((\Psi_p)^t)^{-1} \Psi_q$ e dunque ℓ^p è riflessivo.