CONVERGENZA IN LEGGE

Definizione

Siano $(\mu_n)_{n\geq 1}$ e μ misure finite su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

si dice che la successione $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge debolmente alla misura μ e si indica $\mu_n \longrightarrow \mu$ $\left(\mu_n \xrightarrow{w} \mu\right)$

se $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$ (f continua e limitata)

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu}$$

Definizione

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ e X v.a. definite rispettivamente su $((\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mu_n))_{n\geq 1}$ e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a valori reali.

Diciamo che $(X_n)_{n\geq 1}$ converge in legge (in distribuzione) alla v.a. X se la successione delle leggi $(\mathbb{P}_{X_n})_{n\geq 1}$ converge debolmente alla legge $\mathbb{P}_X$

e si indica $\boxed{X_n \xrightarrow{L} X}$ $\left(X_n \xrightarrow{D} X\right)$

ovvero $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_{X_n} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_X$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega_n} f(X_n) \, d\mathbb{P}_n \longrightarrow \int_{\Omega} f(X) \, d\mathbb{P}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{E}_m[f(X_m)] \to \mathbb{E}[f(X)]}$$

Se le v.a. sono definite tutte sullo stesso spazio, allora la convergenza in legge è la più debole:

PROPOSIZIONE

$X_m \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_m \xrightarrow{L} X$ [$(X_m)_{m\geq 1}$, e X definite tutte su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$]

dim

Proviamo che $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$ $\mathbb{E}[f(X_m)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

f continua $\Rightarrow f(X_m) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$ (teo. di continuità)

f limitata $\Rightarrow |f(X_m)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ $\forall m \geq 1$

$\Rightarrow f(X_m) \xrightarrow{L^p} f(X)$ $\forall p \geq 1$

$\Rightarrow$ in particolare $f(X_m) \xrightarrow{L^1} f(X) \Rightarrow \mathbb{E}[f(X_m)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

CVD

Non vale il viceversa:

Controesempio

$\Omega = \{0,1\}$ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$ (uniforme)

$\forall m \geq 1$ $\begin{cases} X_m(0) = 0 \\ X_m(1) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} X(0) = 1 \\ X(1) = 0 \end{cases}$

$X_n, \forall n \geq 1$ e $X \sim$ Bernoulli$\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$

Provare che $\forall f \in C_b(\mathbb{R}) \quad \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

Però non c'è convergenza in probabilità:

$\forall \; 0 < \varepsilon < 1$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 1 \not\to 0$$

$\Rightarrow X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\not\to} X$

Proposizione

Siano $(X_n)_{n \geq 1}$ e X definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

e sia $X = a$ q.o.

Allora $X_n \xrightarrow{L} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

dim

Ricordiamo che $\forall f \in C_b(\mathbb{R}) \quad \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

Consideriamo

$$f(x) = \frac{|x-a|}{|x-a|+1} \in C_b(\mathbb{R})$$

Allora $\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}\left[\frac{|X_n - a|}{|X_n - a| + 1}\right] \qquad \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}\left[\frac{|X-a|}{|X-a|+1}\right] = 0$$

$X = a$ q.o. $\longrightarrow$ $=$

$$\mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{|X_n - X| + 1}\right] \qquad \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

cvd

CRITERI DI CONVERGENZA IN LEGGE

(1) DEFINIZIONE ALTERNATIVA

TEOREMA

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$, X v.a. e siano $(F_{X_n})_{n\geq 1}$ e F_X le funzioni di ripartizione.

$$\boxed{X_n \xrightarrow{L} X \iff \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(x)}$$

$\forall x$ punto di continuità di F_X.

Nei punti di discontinuità di F_X può non esserci la convergenza:

esempio:

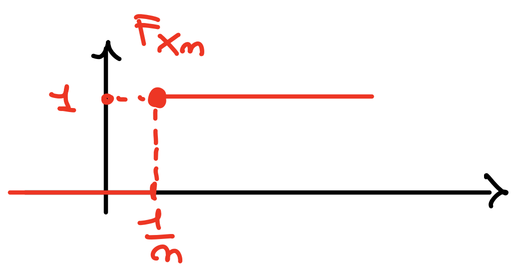
Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Siano $X_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$ $\quad \left(X_n(\omega) = \frac{1}{n} \ \forall \omega \in \Omega \right)$

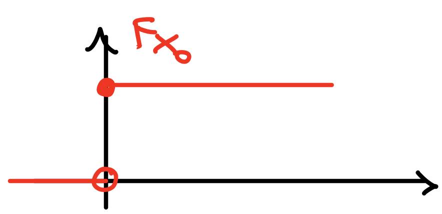
$X_0 = 0$ $\quad \left(X_0(\omega) = 0 \ \forall \omega \in \Omega \right)$

$X_n \to X_0$ q.c., L^p, $\mathbb{P}$, in legge.

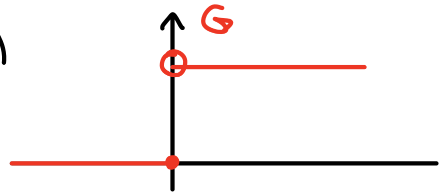
$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$



$$F_{X_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Sia $G(x) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)$



$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_{X_0}(x)$ tranne che per $x=0$ punto di discontinuità di F_{X_0}

OSSERVAZIONE

$$0 = P_{X_n}(\{0\}) = P(X_n=0) \not\longrightarrow P(X_0=0) = P_{X_0}(\{0\}) = 1$$

quindi

$$X_n \xrightarrow{L} X \iff P_{X_n} \to P_X$$

$$\not\Rightarrow \quad \underbrace{\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_{X_n}(A) \to P_X(A)}_{\text{convergenza forte delle leggi}}$$

"$\Leftarrow$"
vale il viceversa

(se ho convergenza forte $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$P_{X_n}((-\infty, x]) \to P_X((-\infty, x])$

ovvero $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$

e quindi $X_n \xrightarrow{L} X$)

② TEOREMA

a) Se $(X_n)_{n\geq 1}$ e X sono v.a. discrete a valori in $\mathbb{N}$

$$X_n \xrightarrow{L} X \iff p_{X_n}(k) = \mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k) = p_X(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

b) Se $(X_n)_{n\geq 1}$ e X sono v.a. assolutamente continue e $f_{X_n} \to f_X$ q.c. $\Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$

$\cancel{\Leftarrow}$

③ TEOREMA DI PAUL LÉVY

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. con funzione caratteristica $(\Phi_{X_n})_{n\geq 1}$

1) Se $X_n \xrightarrow{L} X$ dove X v.a. con funzione caratteristica Φ_X

allora $\lim_{n\to\infty} \Phi_{X_n}(t) = \Phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

2) Se $\lim_{n\to\infty} \Phi_{X_n}(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

e φ è continua in 0 allora $\exists$ una v.a. X

t.c. $\varphi = \Phi_X$ e $X_n \xrightarrow{L} X$

NOTA: Se φ non è continua in 0 $\Rightarrow$ φ non può essere una funzione caratteristica

$\Rightarrow$ X_n non converge in legge.

Se infatti fosse $X_n \xrightarrow{L} X$ $\Rightarrow$ si avrebbe $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} \Phi_{X_n}(t) \arrow[r] \arrow[dr] & \varphi(t) \\ & \Phi_X(t) \arrow[u, phantom, "\neq"] \end{tikzcd}$$

assurdo

PROPRIETÀ DELLA CONVERGENZA IN LEGGE

1) CONTINUITÀ:

Teorema di continuità:

$$X_n \xrightarrow{L} X \quad f \text{ continua} \quad \rightarrow \quad \overbrace{f(X_n)}^{Y_n} \xrightarrow{L} \overbrace{f(X)}^{Y}$$

dim

sia $g \in C_b(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E}[g(Y_n)] = \mathbb{E}[g(f(X_n))] = \mathbb{E}[g \circ f(X_n)]$$

$$\longrightarrow \mathbb{E}[g \circ f(X)] = \mathbb{E}[g(f(X))] = \mathbb{E}[g(Y)]$$

- f continua, g continua limitata $\Big\} \Rightarrow g \circ f \in C_b(\mathbb{R})$
- $X_n \xrightarrow{L} X$

CVD