FENOMENI INTERFERENZIALI :

- Interferenza tra onde e.m. prodotte da sorgenti coerenti sincrone;
- Metodo dei fasori o dei vettori rotanti;
- Interferenza tra onde e.m. prodotte da due sorgenti coerenti sincrone;

Sorgenti del campo elettromagnetico

LE EQUAZIONI DI MAXWELL CI PERMETTONO DI CONCLUDERE CHE

↓

CAMPO		**SORGENTE**
ELETTRICO STATICO	→	CARICHE FISSE
MAGNETICO STATICO	→	CARICHE IN MOTO UNIFORME
ELETTROMAGNETICO	→	CARICHE ACCELERATE

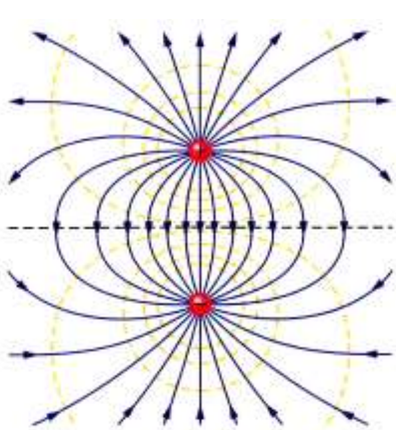
DIPOLO ELETTRICO

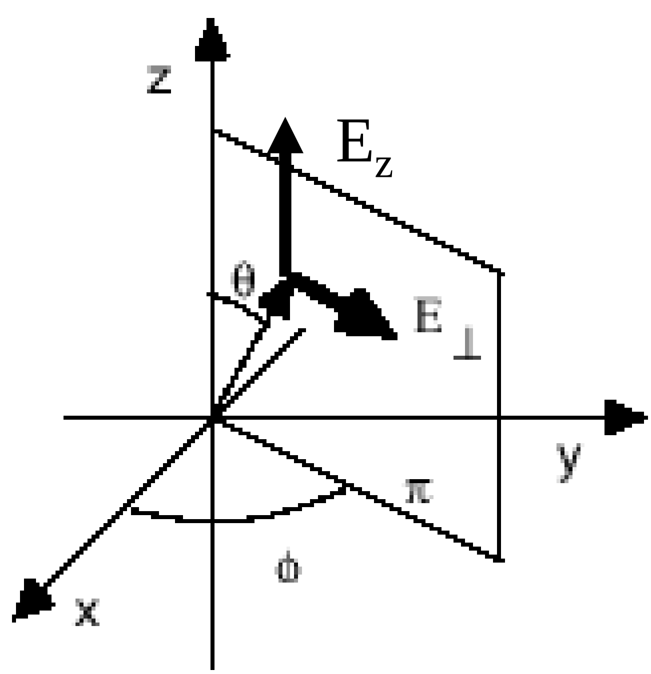
Prendiamo un dipolo elettrico statico $\boldsymbol{p_0}$, creerà un campo elettrico statico intorno a sé, come abbiamo visto.

Se le cariche del dipolo vengono messe in oscillazione con una legge $\mathbf{p(t) = p_0 \sin\omega t}$ il campo elettrico sarà dipendente dal tempo.

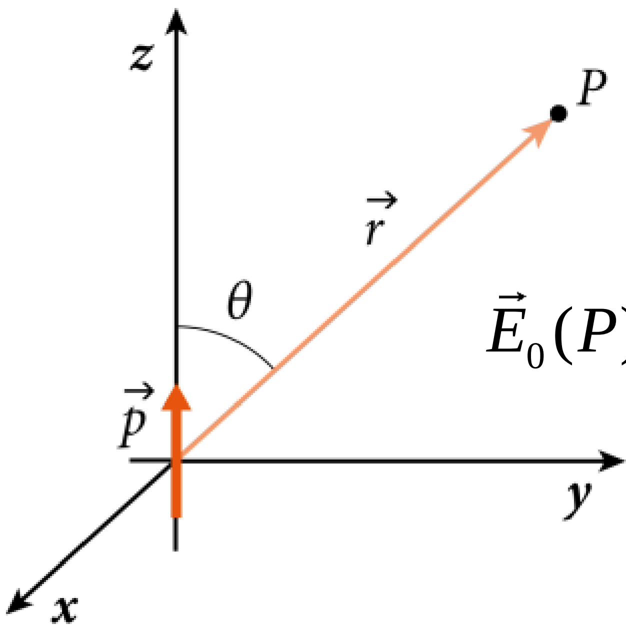
Ricordando che nel caso statico…...

$$
\begin{cases}
E_x = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{3zx}{r^5} \\
E_y = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{3zy}{r^5} \\
E_z = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{3\cos^2(\theta) - 1}{r^3}
\end{cases}
$$



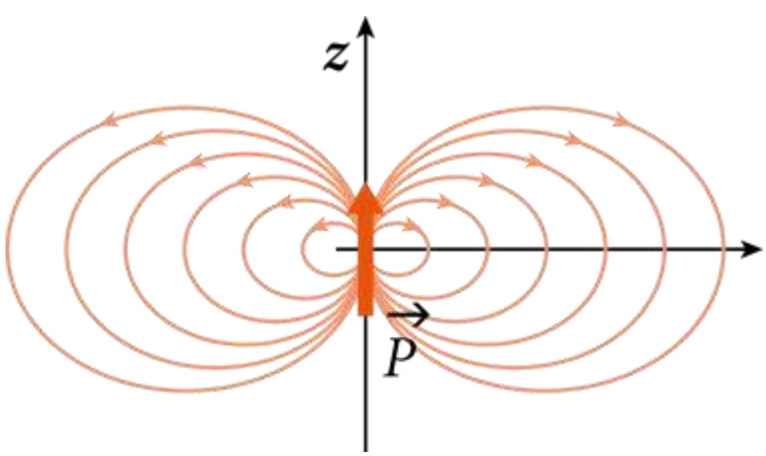


Il campo elettrico generato da un dipolo statico (trattato in precedenza) può essere scritto in modo compatto come:

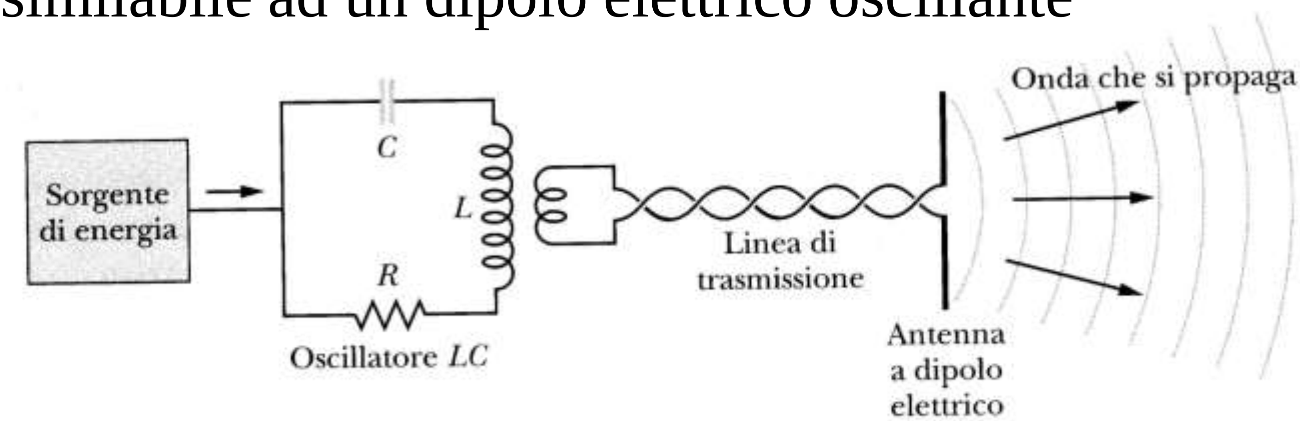


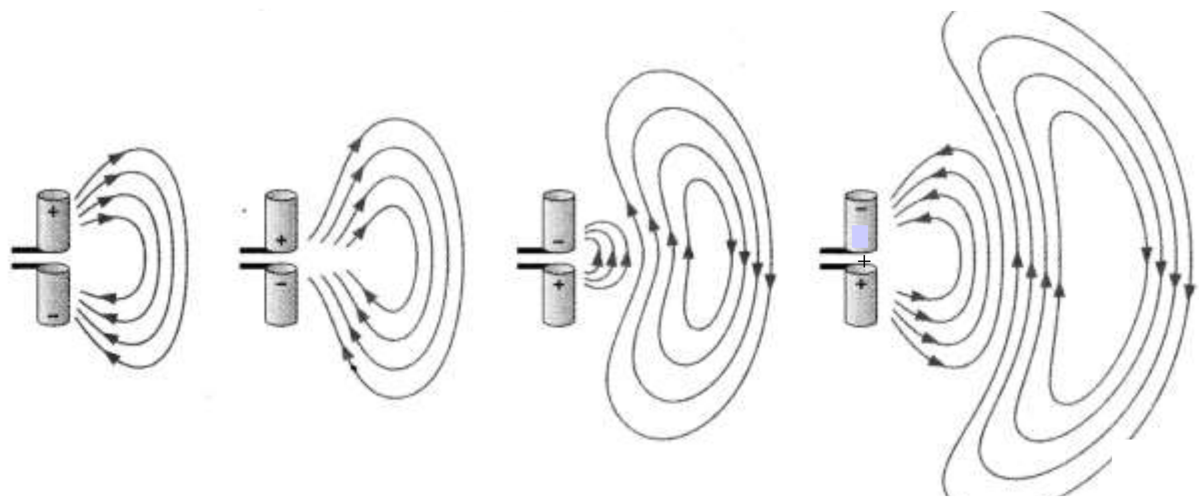
$$\vec{E}_0(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[3\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\right]\vec{r} - \left[\frac{\vec{p}}{r^3}\right]\right\}$$

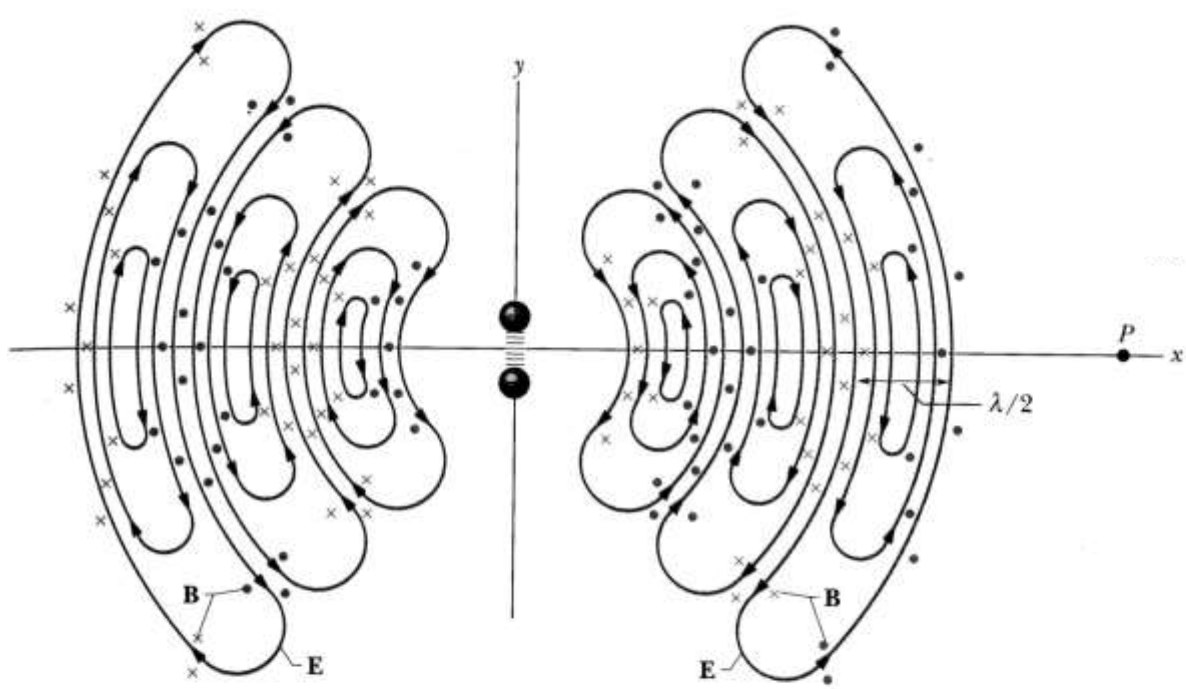
Con linee di campo:



Vediamo un esempio di generatore di onde e.m. assimilabile ad un dipolo elettrico oscillante







Vediamo di calcolare il campo e.m. prodotto da un dipolo oscillante usando il Potenziale VETTORE.

Il campo magnetostatico prodotto da una distribuzione continua di correnti ha le seguenti equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

Abbiamo visto che è possibile introdurre il Potenziale VETTORE A.

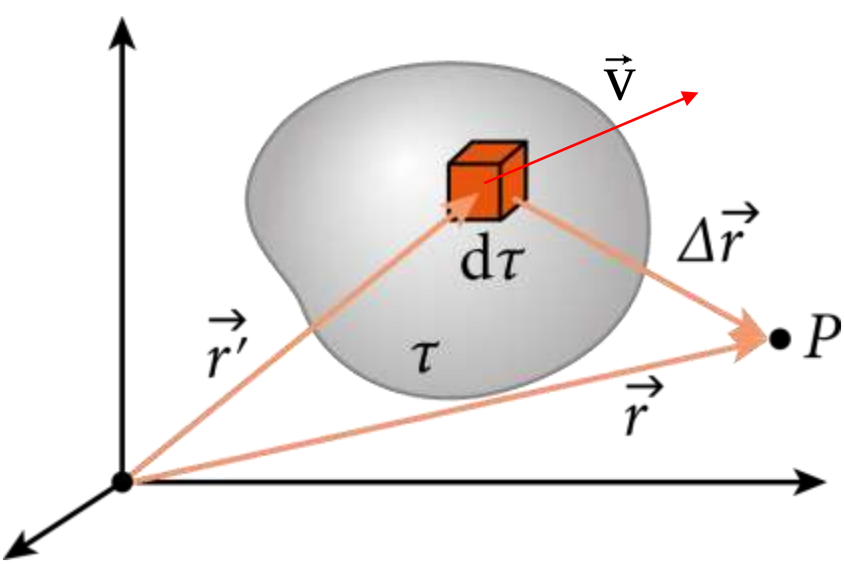
Tale per cui: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

densità dei carica

$$\vec{j}(\vec{r}\,') = nq\vec{v} = \rho \vec{v}$$

densità delle cariche



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(x', y' z')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau$$

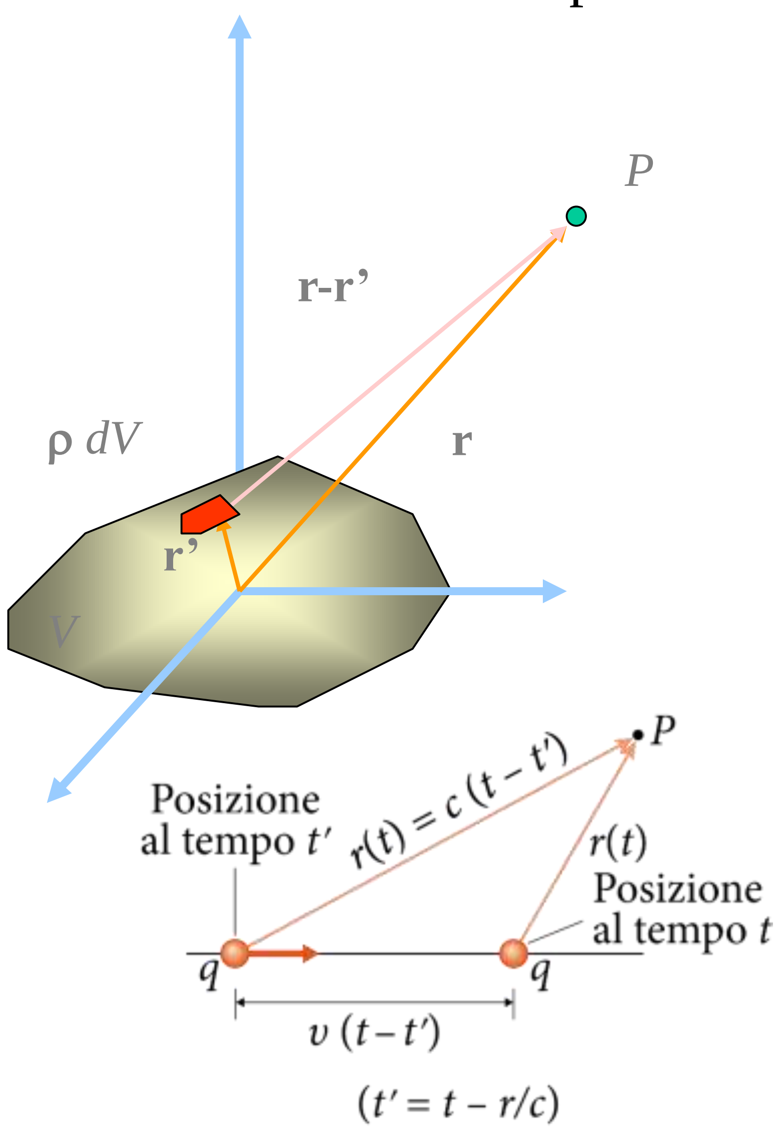
Campo generato da cariche in moto ottenuto con il potenziale ritardato

Sappiamo che la differenza tra caso statico e dinamico è che i campi E e B si propagano in un tempo finito a velocità ***c***

Possiamo determinare le soluzioni considerando che al tempo ***t*** nel punto ***r*** i campi e quindi i potenziali sono dovuti alla configurazione di carica all'istante precedente.

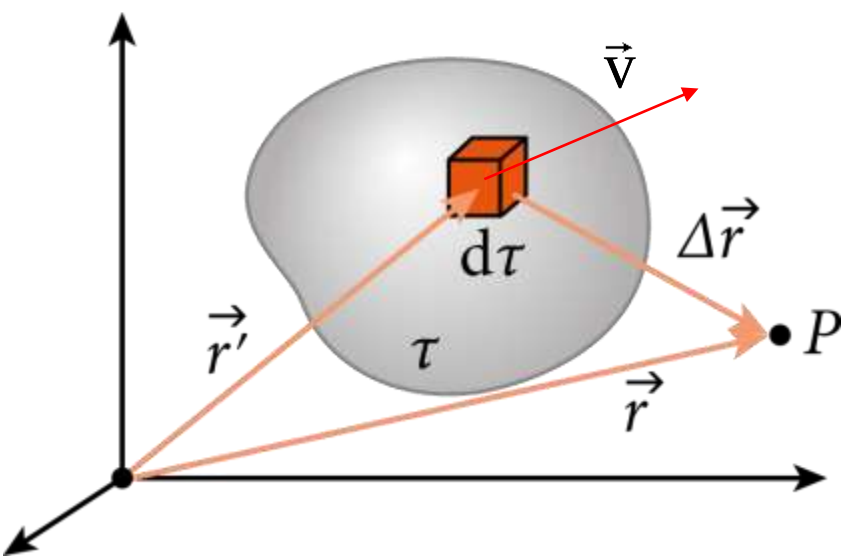
$$\rho\left(t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}\,'|}{c}\right)$$

$$\vec{j}\left(t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}\,'|}{c}\right)=\rho\vec{\mathrm{v}}$$



Avremo allora il così detto potenziale ritardato

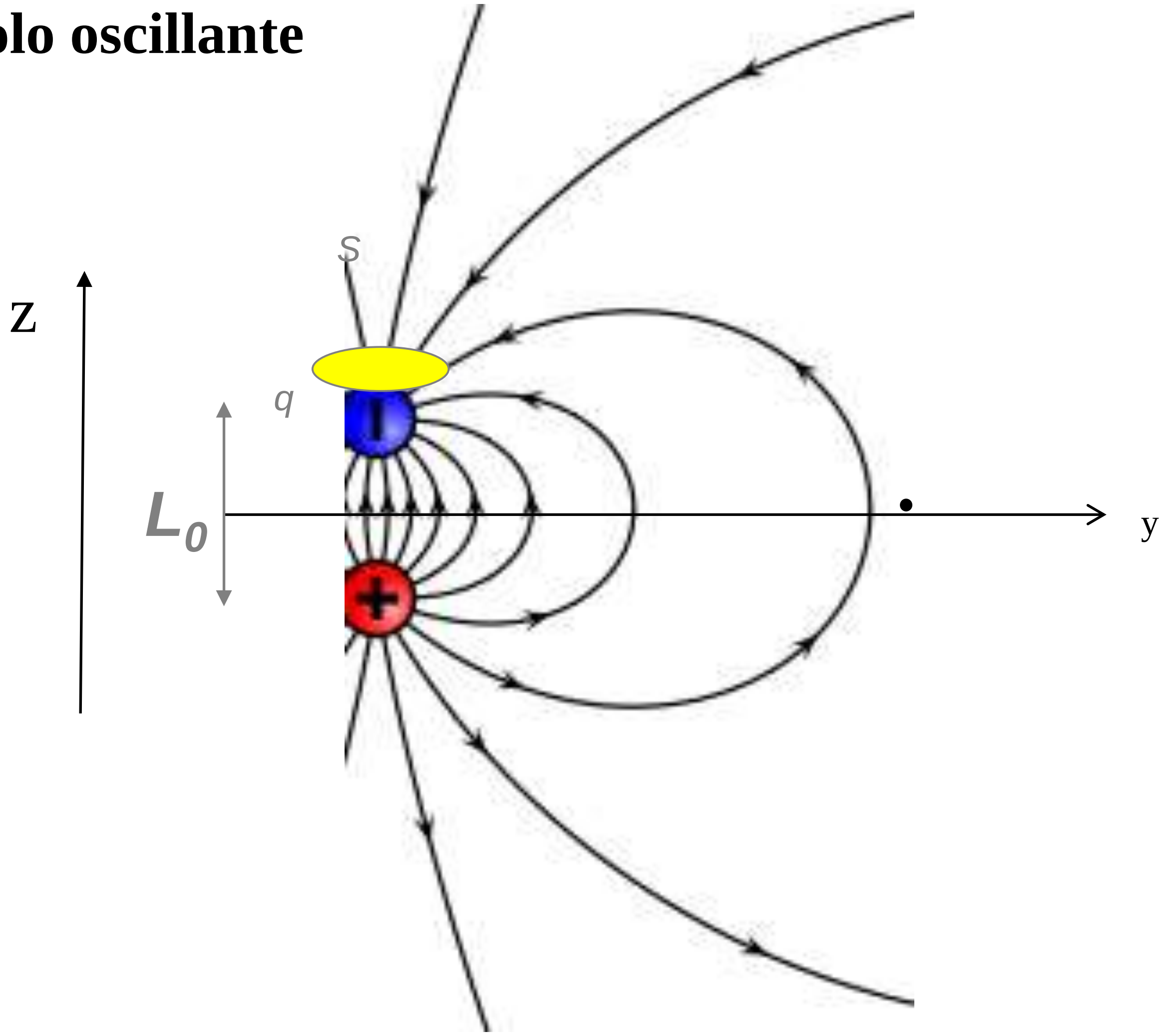
$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\mu_0\int_{V'}\frac{\vec{j}\left(t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}{c}\right)d\tau}{4\pi|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}$$



$$\vec{j}(\vec{r}\,')=\rho\vec{v}$$

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Dipolo oscillante

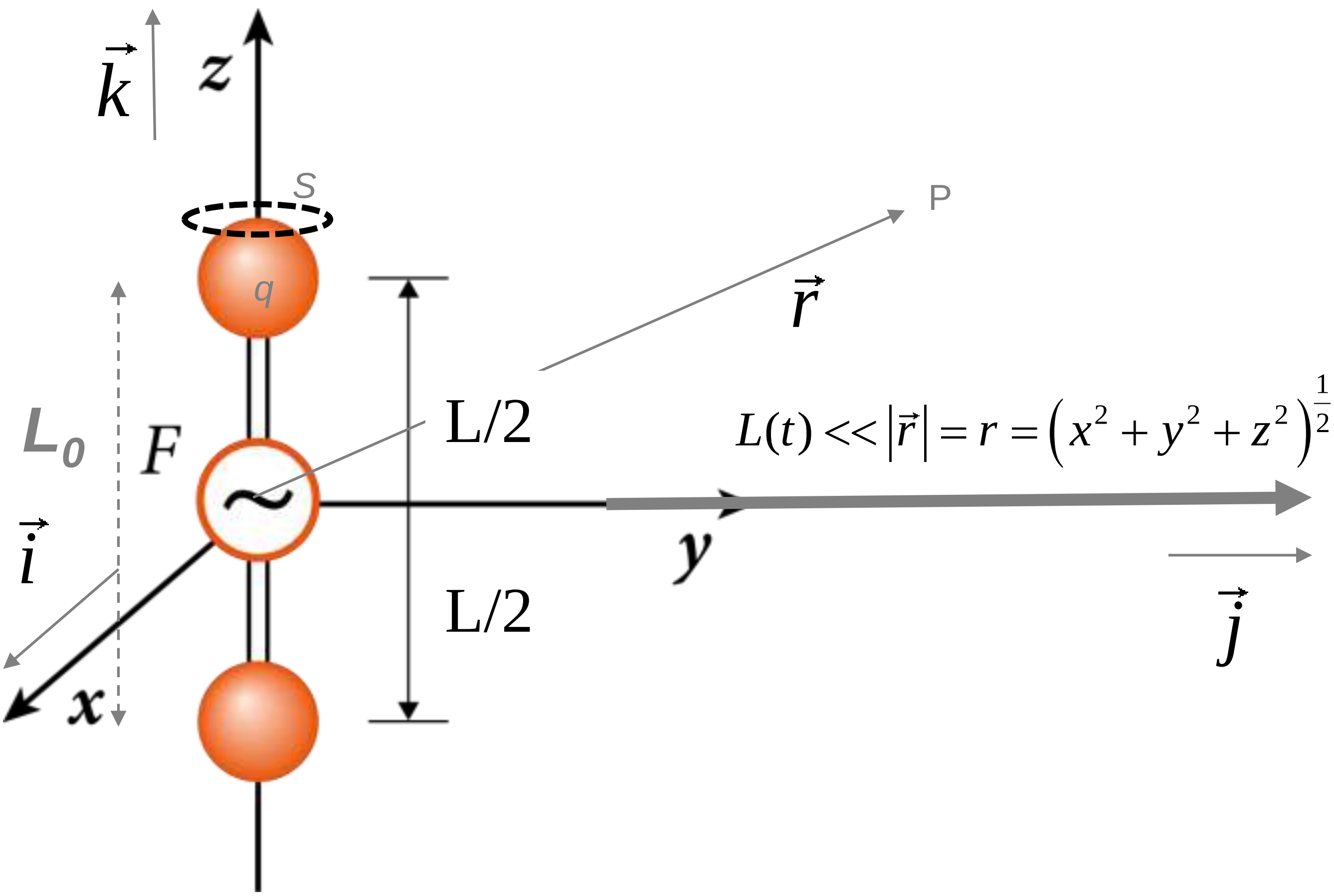


$$\mathrm{L}(t) = L_0 \sin \omega t$$

$$p(t) = q_0 L(t) = q_0 L_0 \sin \omega t = p_0 \sin \omega t$$

$$\vec{j}_q = \frac{dq}{d\tau}\vec{\mathrm{v}} = \frac{dq}{d\tau}\frac{dL}{dt}\vec{k}$$

Calcolo del potenziale vettore e del campo B



$$\vec{j}_{q+} = \rho_+ \frac{dL/2}{dt}\vec{k} \qquad \vec{j}_{q-} = -\rho_- \frac{dL/2}{dt}\vec{k}$$

Scriviamo il potenziale ritardato

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{cilindro(SL_0)} \frac{\vec{j}_q\left(t - \frac{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}{c}\right)}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, d\tau$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{cilindro(SL_0)}\frac{\vec{j}_q\left(t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}{c}\right)}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\,d\tau$$

Se $\quad L(t)<<|\vec{r}| \quad \Rightarrow \quad \vec{r}-\vec{r}'\approx\vec{r}$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{cilindro(SL_0)}\frac{\vec{j}_q\left(t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}\right)}{|\vec{\mathbf{r}}|}dSdz$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{cilindro(SL_0)}\frac{\left[\vec{j}\right]_{t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}dSdz\,\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{cilindro(SL_0)}\frac{\left[\rho\vec{\mathrm{v}}\right]_{t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}\vec{k}dSdz$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[q\frac{dL/2}{dt}\vec{k}+q\frac{dL/2}{dt}\vec{k}\right]_{t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}\vec{k}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[q\frac{dL}{dt}\right]_{t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}\vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[\frac{dL}{dt}\right]_{t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}\vec{k}q=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[\frac{dp}{dt}\right]_{t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}\vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\omega qL_0\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \; = \vec{k}\,\frac{\mu_0}{4\pi|\vec{\mathbf{r}}|}\frac{dp\left(t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}\right)}{dt} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{p}\left(t-\frac{|\vec{\mathbf{r}}|}{c}\right)\vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{k} = A_z\vec{k}$$

con $p\left(t-\frac{r}{c}\right) = qL_0 \sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] = p_0 \sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\omega q L_0 \cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{k} = A_z\vec{k}$$

Ricordando che $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ -\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\omega q L_0\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{k}=A_z\vec{k}$$

Ricordando che
$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}\quad;\quad\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}=\frac{\mu_0}{4\pi}\omega p_0\left\{\frac{\omega}{c}\frac{y}{r^2}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{y}{r^3}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}$$

$$B_y=-\frac{\partial A_z}{\partial x}=\frac{\mu_0}{4\pi}\omega p_0\left\{-\frac{\omega}{c}\frac{x}{r^2}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{x}{r^3}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}$$

$$B_z=0$$

Se ci mettiamo a grande distanza dalla sorgente (r grande)

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}\approx-\frac{\mu_0}{4\pi}p_0\frac{\omega^2}{c}\frac{y}{r^2}\sin\left[\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)\right]$$

$$B_y=-\frac{\partial A_z}{\partial x}\approx\frac{\mu_0}{4\pi}p_0\frac{\omega^2}{c}\frac{x}{r^2}\sin\left[\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)\right]$$

$$B_z=0$$

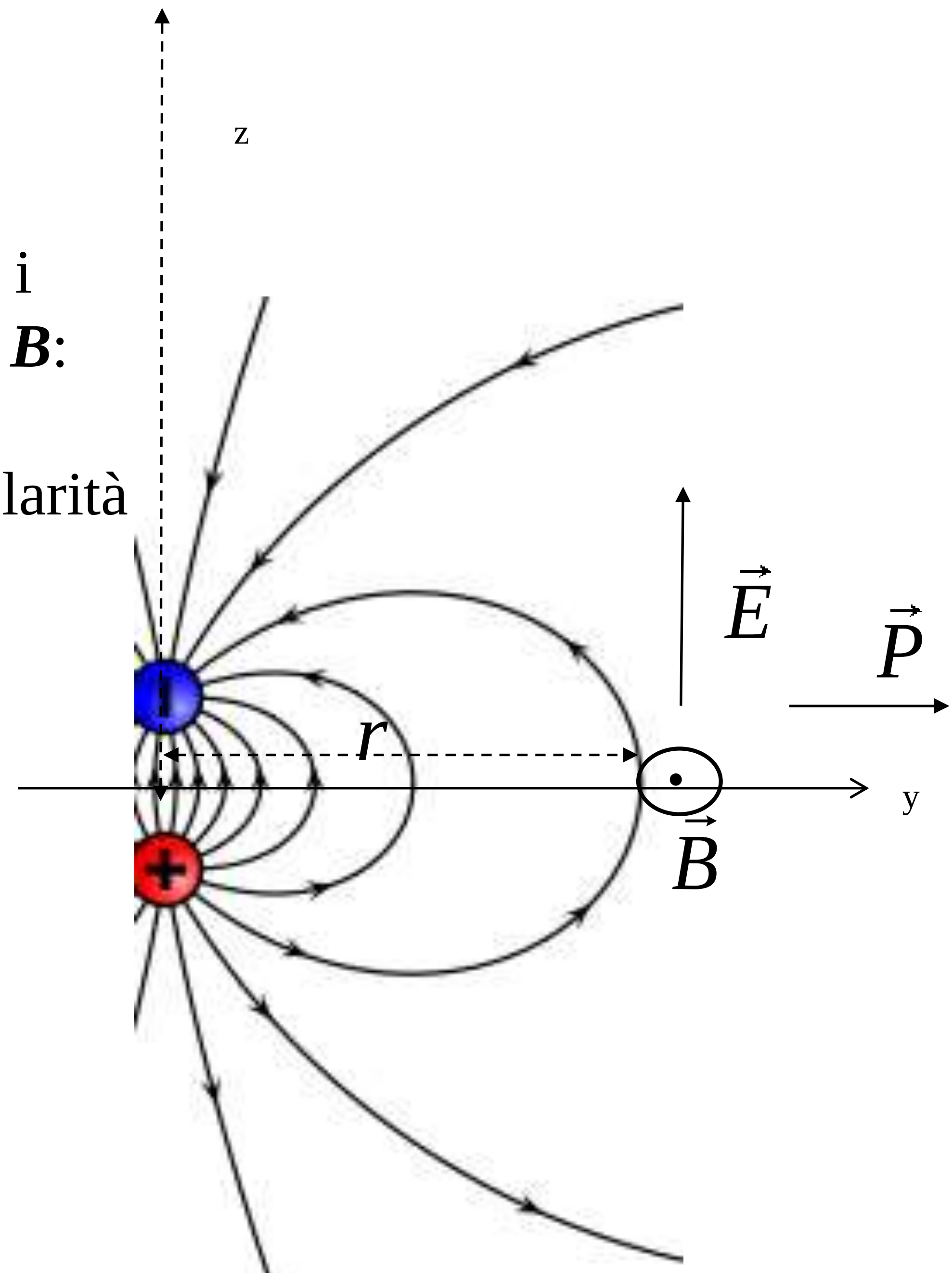
Lungo l’asse y quindi coordinate ***(0,y,0)*** abbiamo

$$B_x(0,y,0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{y} \sin\left[\omega\left(\frac{y}{c} - t\right)\right]$$

$$B_y(0,y,0) = 0$$

$$B_z(0,y,0) = 0$$

Ricordando:
- relazione tra i moduli di ***E*** e ***B***: ***E=cB***
- perpendicolarità tra i campi
- vettore di Poynting

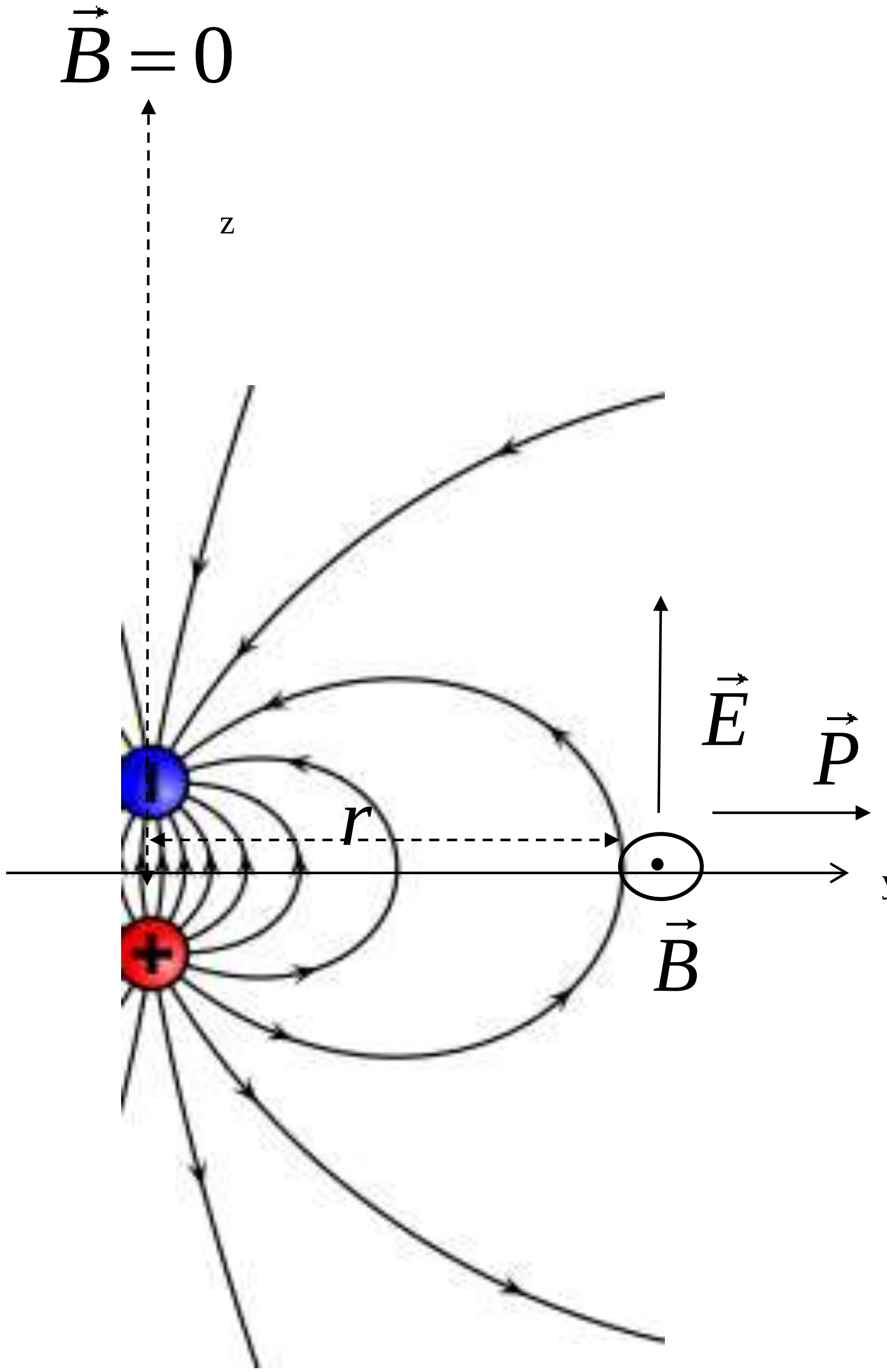


Lungo l’asse z quindi coordinate ***(0,0,z)*** abbiamo

$$B_x(0,0,z)=0$$

$$B_y(0,0,z)=0$$

$$B_z(0,0,z)=0$$



Lungo l'asse ***r*** inclinato q rispetto al piano ***xy*** abbiamo

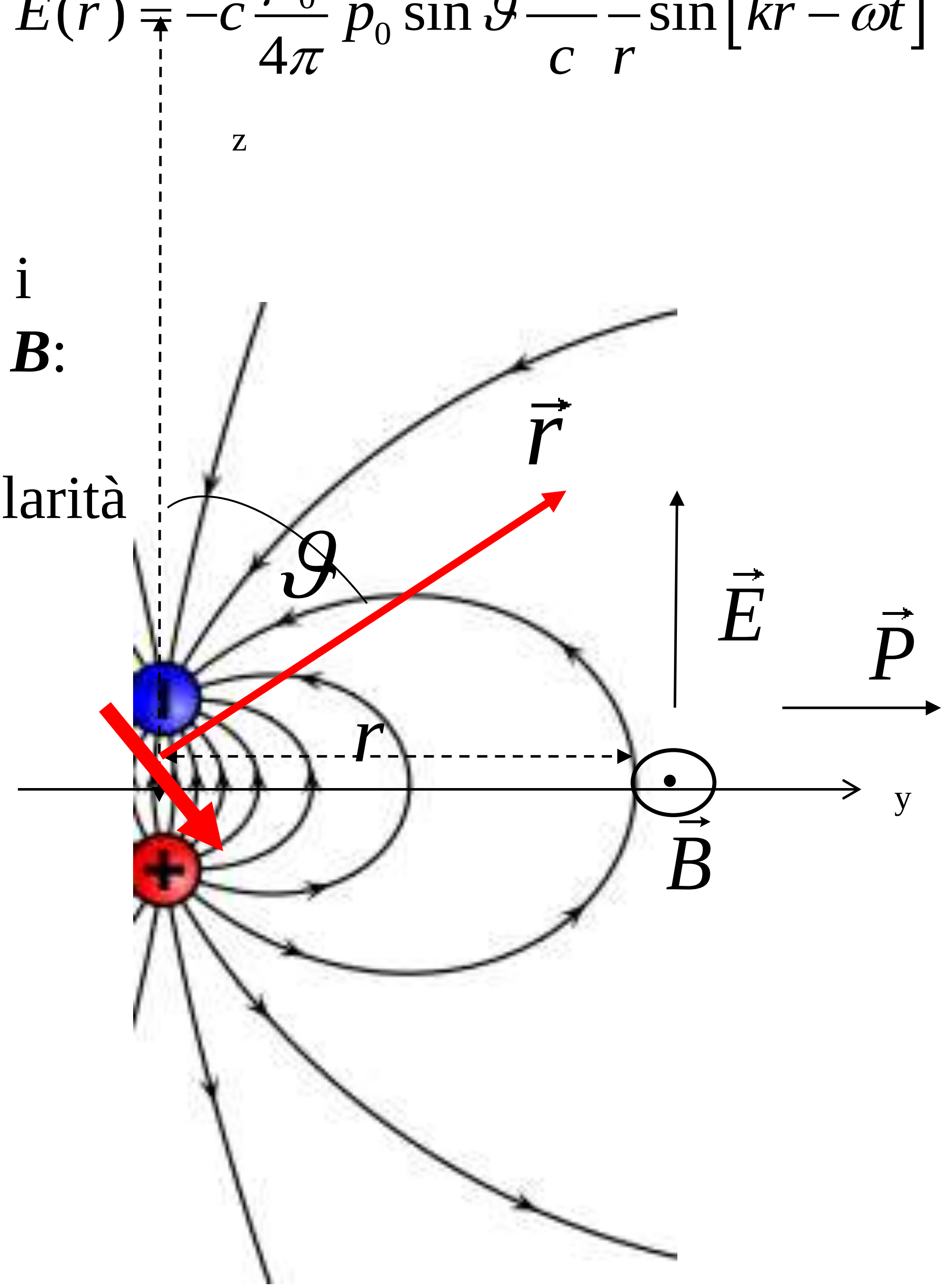
$$B(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \sin\vartheta \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{r} \sin\left[\omega\left(\frac{r}{c} - t\right)\right]$$

$$B(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \sin\vartheta \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{r} \sin\left[kr - \omega t\right]$$

$$E(\vec{r}) = -c\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \sin\vartheta \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{r} \sin\left[kr - \omega t\right]$$

Ricordando:

- relazione tra i moduli di ***E*** e ***B***: ***E=cB***
- perpendicolarità tra i campi
- vettore di Poynting

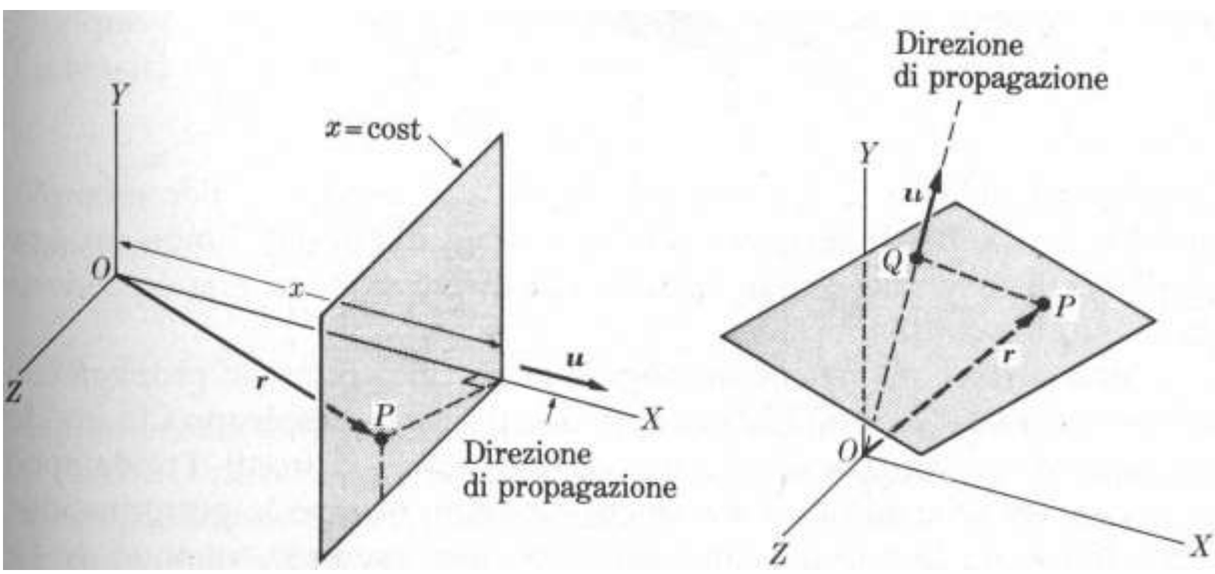


Definizione di raggi e fronti d'onda

Una onda che si sta propagando nella direzione **x** che scriviamo come

$$\xi = f(x - \mathrm{v}t)$$

Non è concentrata sull'asse **x**
ma si propaga in uno spazio tridimensionale con caratteristiche della perturbazione ξ identiche su piani perpendicolari all'asse **x**.



Possiamo cioè riscrivere l'equazione dell'onda come

$$\xi = f(\vec{r} \cdot \vec{u} - \mathrm{v}t)$$

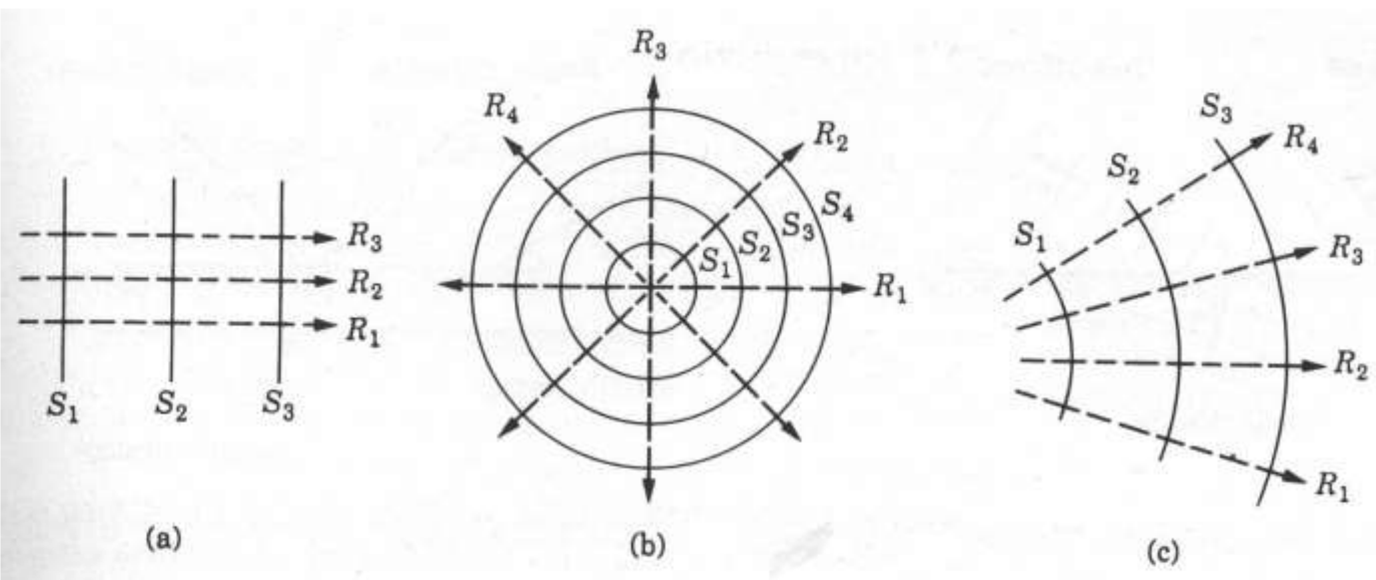
dove **r** è il generico punto del piano che ha le stesse caratteristiche ξ nella perturbazione;
u è la direzione in cui l'onda si muove con velocità **v**.

Dove $(\vec{r} \cdot \vec{u} - \mathrm{v}t) = \Phi$ è la fase dell'onda

Ma l’equazione $f(\Phi)$

Finisce col definire la più generica onda che si propaga in direzione $\vec{\mathbf{u}}$ con velocità **v**.

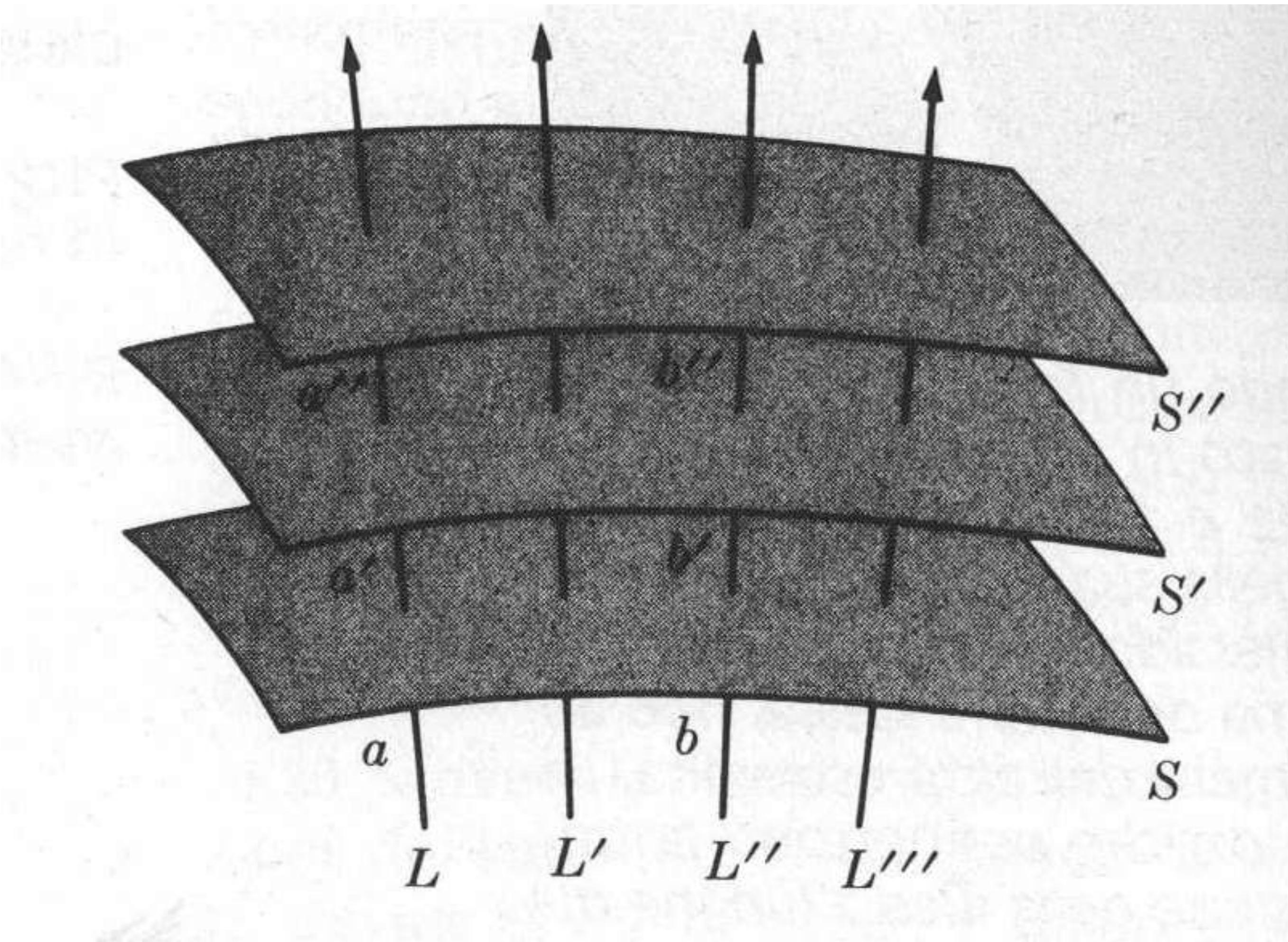
Essa non è necessariamente un’onda piana. Dipende da come nasce la perturbazione della sorgente.



•Le superfici che presentano all’istante ***t*** lo stesso valore di Φ

sono detti ***<u>fronti d’onda</u>***

• $\vec{u}$ è perpendicolare ai fronti d'onda.
Le curve tangenti a $\vec{u}$ sono dette <u>***raggi***</u>.



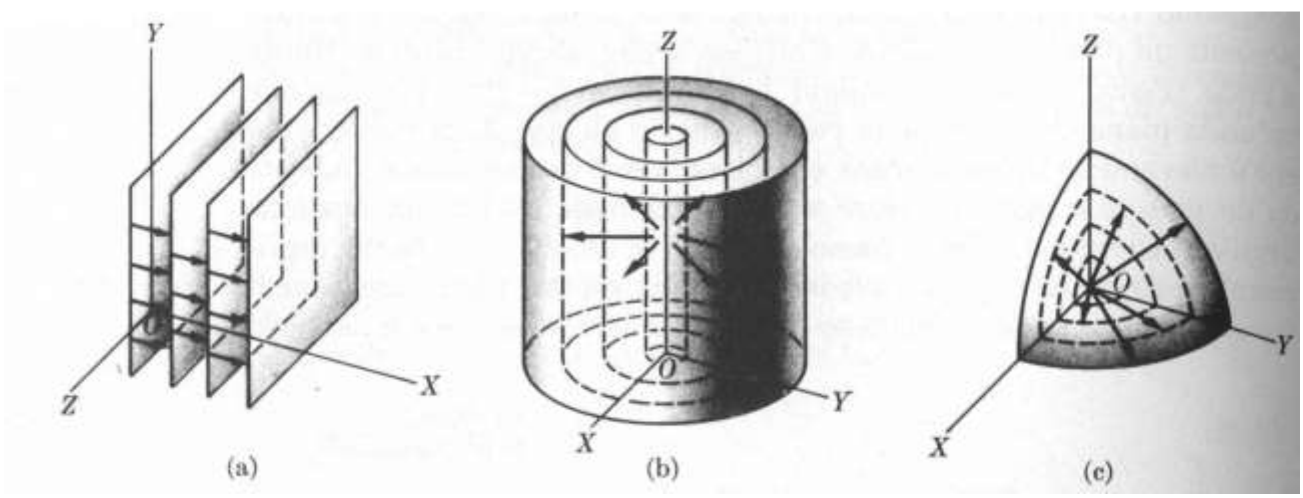
•Se le proprietà del mezzo sono omogenee (v=cost) i raggi sono rette;

•se le proprietà del mezzo non sono omogenee (cioè variano da punto a punto) i raggi non sono più rette;

•se le proprietà del mezzo sono isotrope (cioè non dipendono dalla direzione) i fronti d'onda si ripetono identici e paralleli:

piani ---> piani cilindri ---> cilindri

sfere ---> sfere



•Se le proprietà del mezzo sono anisotrope (v diversa in diverse direzioni) i fronti d'onda si deformano in modo anche complicato.

Il vettore di Poynting

Come tutte le onde, anche quelle e.m. trasportano energia propagandosi.

Tale energia può essere visualizzata come un flusso di energia per unità di tempo e di superficie.

Si descrive il modulo e la direzione del flusso di energia, trasportata dal campo E e B che si propaga, attraverso un vettore detto ***vettore di Poynting***, e definito come:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

In conclusione il vettore di Poynting definisce:

- come direzione e verso la direzione e verso del flusso di energia;
- come modulo l'energia per unità di tempo e superficie attraverso una area posta ortogonale alla direzione di propagazione.

<u>Vediamo una rapida giustificazione alla forma algebrica del vettore di Poynting</u>.

Il campo e.m. nel vuoto immagazzina energia nello spazio con una densità (energia per unità di volume) ***w***

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Tra i moduli dei campi ***E*** e ***B*** c'è la relazione:

$$E = cB$$

La velocità di propagazione del campo e.m. è

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

La direzione di propagazione del campo, e quindi quella del flusso di energia, è: $\vec{E} \times \vec{B}$

Combinando il tutto, la densità di energia del campo e.m. diventa:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (cB)^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{E^2}{c^2 \mu_0}$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Tale energia si propaga con il campo e.m. a velocità c in direzione perpendicolare a E e B, quindi:

$$wc = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

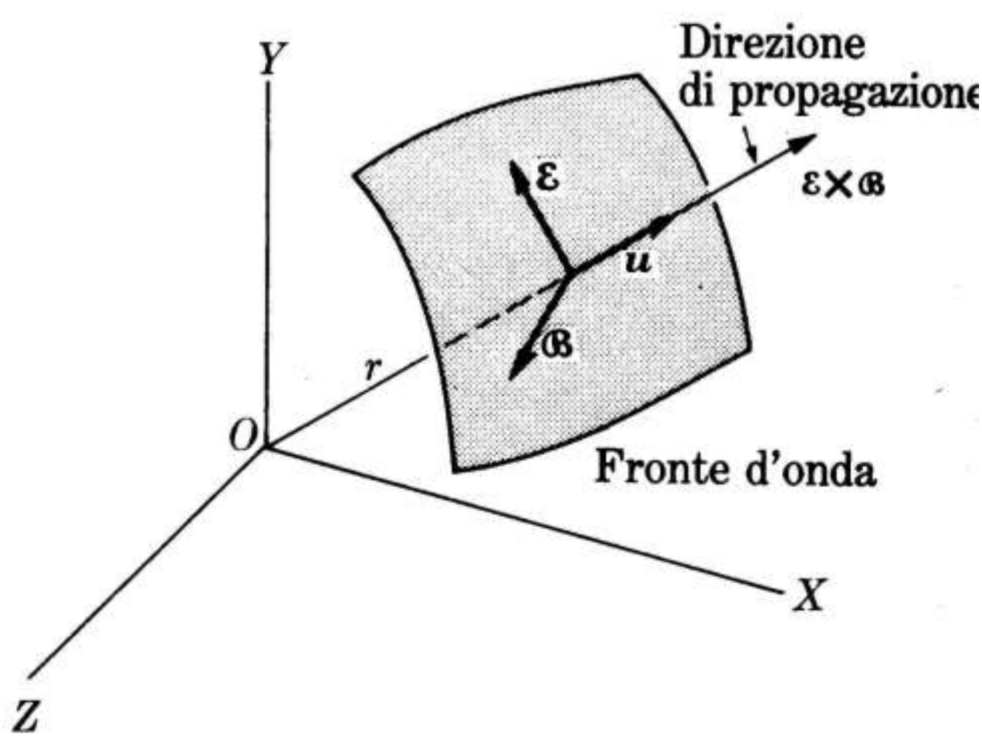
Vettorialmente:

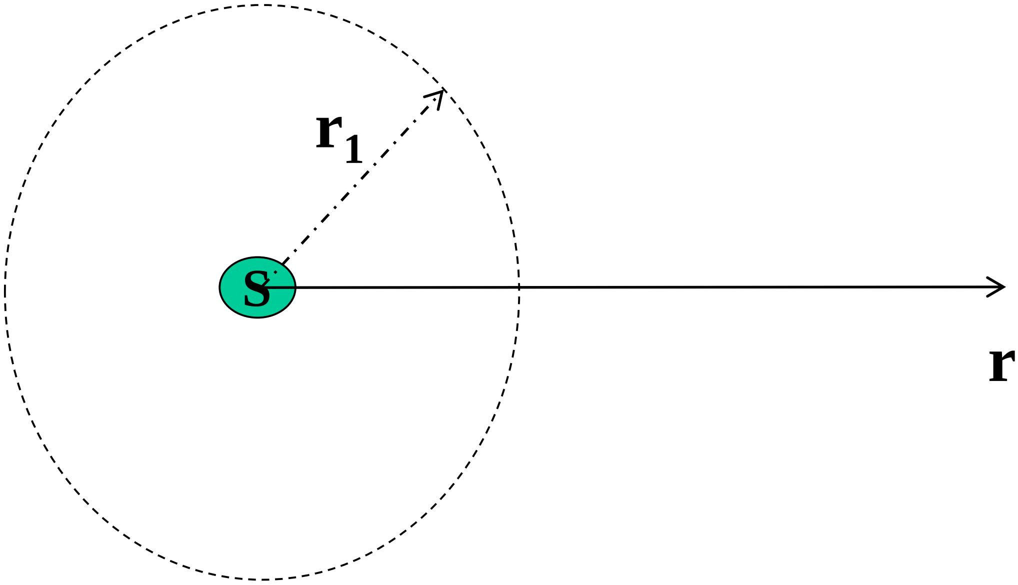
$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Onde elettromagnetiche sferiche

Le equazioni di Maxwell (sotto forma delle equazioni delle onde) ammettono soluzioni anche del tipo ***onde sferiche*** e ***onde cilindriche***.

Ad esempio per le onde sferiche il campo ***E*** e ***B*** è tangente alla superficie di una sfera e la direzione di propagazione è quella radiale.





Un’onda di equazione viene emessa dalla sorgente **S** isotropicamente

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin\left(kr - \omega t\right)$$

La sorgente emette una potenza **$P_S(t)$**

Attraverso ogni sfera di raggio **r_1** fluisce la potenza **$P(r_1,t)$**

$$P(r_1,t) = \left|\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right| 4\pi r^2 = \frac{E^2}{c\mu_0} 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^2}{c\mu_0} E_0^2 \sin^2(kr - \omega t)$$

Si può supporre che il flusso di energia in funzione del tempo non sia lo stesso allo stesso istante attraverso le superfici sferiche di raggio diverso, a causa del ritardo di propagazione.

Ma possiamo aspettarci che la media su un periodo abbia lo stesso valore a qualsiasi **r**

$$\langle P_S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P_S dt$$

$$\langle P(r_1) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(r_1, t) dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{4\pi r^2}{c\mu_0} E_0^2 \sin^2(kr - \omega t)$$

$$\langle P_S \rangle = \langle P(r_1) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{4\pi r^2}{c\mu_0} E_0^2 \sin^2(kr - \omega t) = \frac{2\pi r^2}{c\mu_0} E_0^2$$

Quindi

$$E_0^2 = \frac{\langle P_S \rangle c\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r^2}$$

Cioè

$$E_0 \propto \frac{1}{r^2}$$

L'ampiezza di una onda sferica decresce come 1/r

Onde elettromagnetiche piane

Un caso particolare per la soluzione ***E*** e **B** per l'equazione delle onde e.m. è dato dalle funzioni armoniche. Prendiamo come al solito la direzione di propagazione parallela all'asse **X**, il campo ***E*** parallelo a **Y**, quello ***B*** parallelo a **Z**.

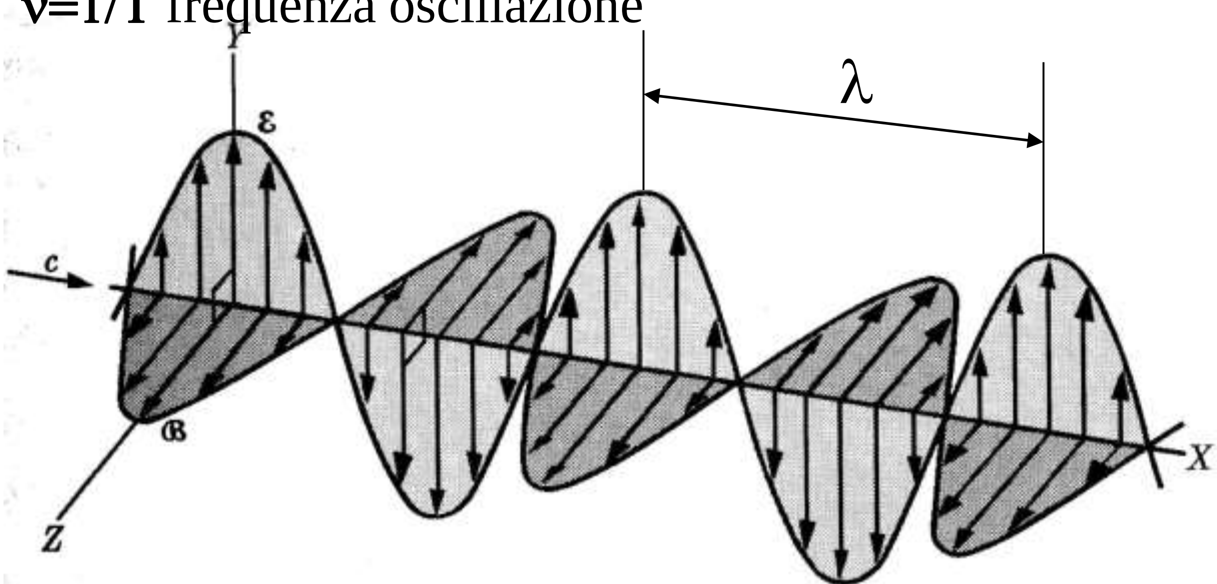
$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 sin[k(x-ct)] = \vec{E}_0 sin[kx-\omega t] = \vec{E}_0 sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\right]$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 sin[k(x-ct)] = \vec{B}_0 sin[kx-\omega t] = \vec{B}_0 sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\right]$$

Dove: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $kc = \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}}$$

λ lunghezza d'onda (parametro di periodicità spaziale)
K=2π/λ vettore d'onda
T periodo di oscillazione (par. di periodicità temporale)
ν=1/T frequenza oscillazione



Onde elettromagnetiche piane

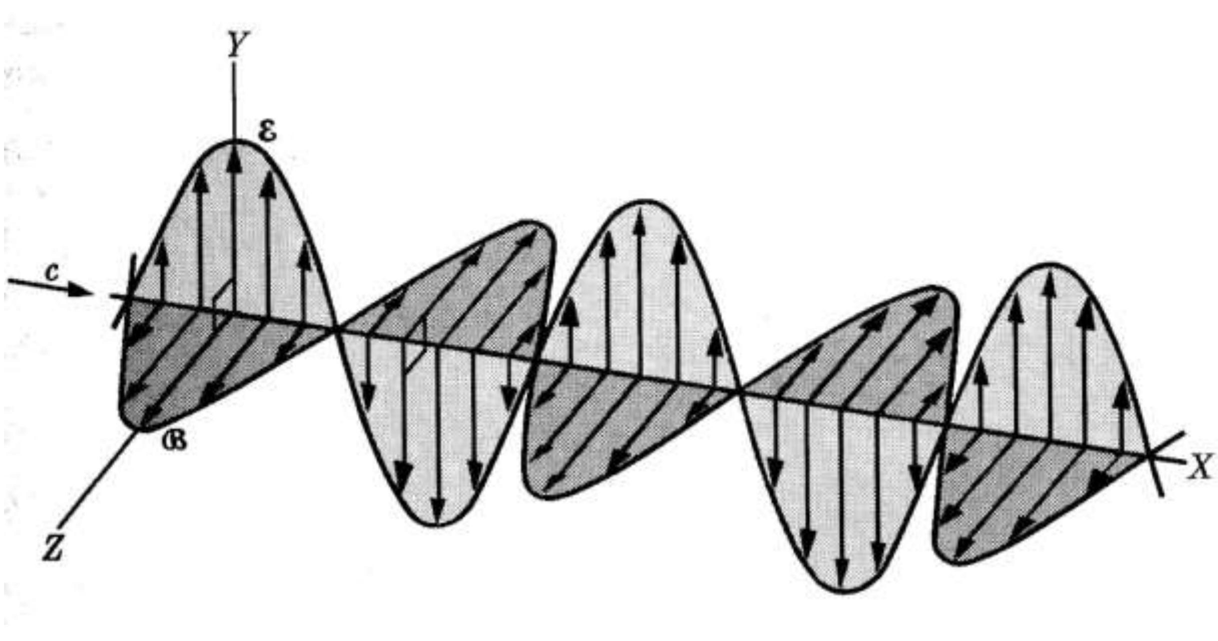
In notazione complessa:

$$\vec{E}(x,t)=\vec{E}(x-ct)=\mathrm{Im}\left\{\vec{E}_0 e^{i[k(x-ct)]}\right\}$$
$$\vec{B}(x,t)=\vec{B}(x-ct)=\mathrm{Im}\left\{\vec{B}_0 e^{i[k(x-ct)]}\right\}$$

Dove: $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$; $kc=\omega=2\pi\nu=\dfrac{2\pi}{T}$

k è detto numero d'onda,

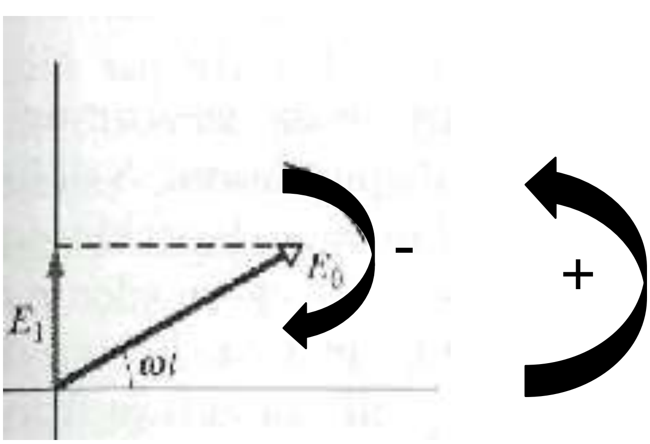
λ lunghezza d'onda; ν frequenza; ***T*** periodo di oscillazione



L’ampiezza istantanea in un punto di un’onda e.m. del tipo

$$E_1(P,t) = \mathrm{Im}\left\{E_0 e^{i\left(kr_P \pm \omega t\right)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{E_0 ' e^{i\left(\pm \omega t\right)}\right\}$$

può essere rappresentato sul piano complesso e la parte immaginaria che ha significato fisico può essere vista come la proiezione sull’asse delle ordinate del vettore **E’$_0$** che ruota con velocità angolare **ω** intorno all’origine in cui è applicato:



$$E_0 ' e^{i\left(\pm \omega t\right)}$$

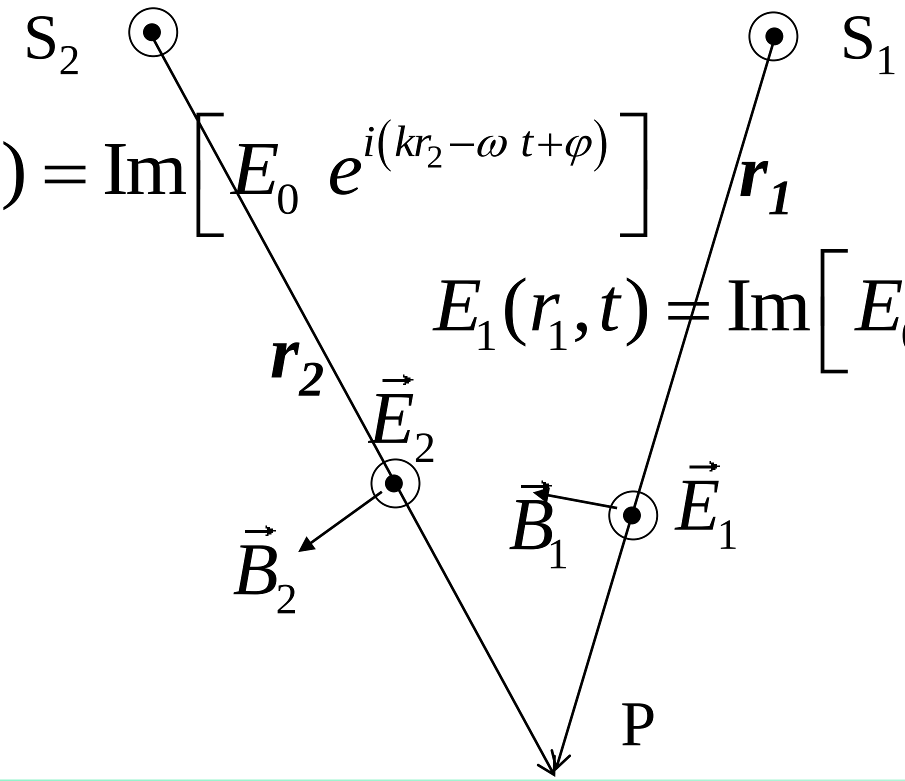
Prendiamo sorgenti oscillanti (dipoli oscillanti) con la stessa frequenza **ν** e una differenza di fase iniziale **φ**.

$$p_2(t) = \mathrm{Im}\left\{ p_{0,2}\ e^{i(\omega\, t-\varphi)} \right\}$$

$$p_1(t) = \mathrm{Im}\left\{ p_{0,1}\ e^{i(\omega\, t)} \right\}$$

$$E_2(r_2,t) = \mathrm{Im}\left[E_0\ e^{i(kr_2-\omega\, t+\varphi)} \right]$$

$$E_1(r_1,t) = \mathrm{Im}\left[E_0\ e^{i(kr_1-\omega\, t)} \right]$$



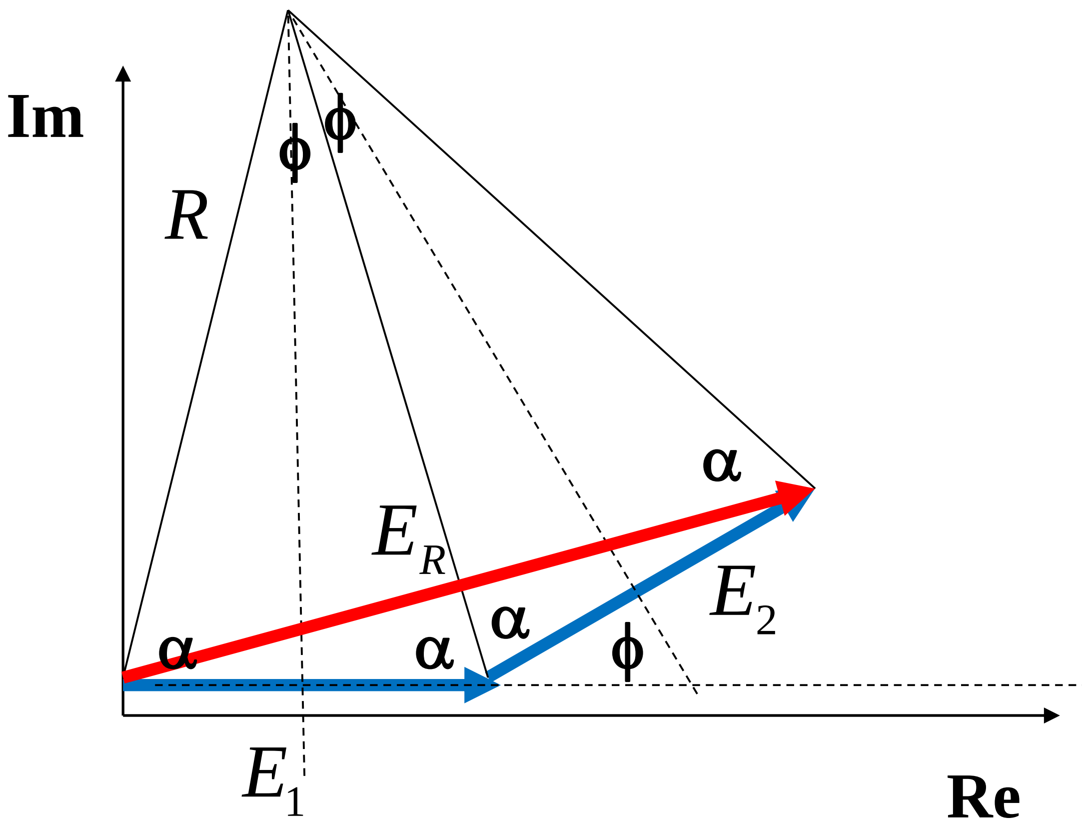
Consideriamo le onde e.m. emesse e seguiamo ***2 raggi*** ***r***

Queste onde hanno:

- stessa ampiezza massima
- vettori campo E paralleli
- stessa frequenza
- differenza di fase **φ** costante alla sorgente.

VENGONO DETTE ONDE COERENTI

Sommiamo le onde in P utilizzando la notazione complessa.



$$E_1(r_1,t) = E_0\ e^{i(kr_1 - \omega\ t)} = E_0\ e^{i\Phi_1}$$

$$E_2(r_2,t) = E_0\ e^{i(kr_2 - \omega\ t + \varphi)} = E_0\ e^{i\Phi_2}$$

$$\Phi = \left(kr_2 - \omega\ t + \varphi\right) - \left(kr_1 - \omega\ t\right) = \left(kr_2 - kr_1 + \varphi\right)$$

$$E_R = 2R\sin\Phi \qquad E_0 = 2R\sin\frac{\Phi}{2}$$

$$\frac{E_R}{E_0} = \frac{2R\sin\Phi}{2R\sin\frac{\Phi}{2}} = \frac{\sin\Phi}{\sin\frac{\Phi}{2}} = \frac{\sin 2\frac{\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{E_R}{E_0} = \frac{2\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}} = 2\cos\frac{\Phi}{2}$$

$$E_R = 2E_0\cos\frac{\Phi}{2}$$

$$E(P,t) = E_R e^{i(\frac{\Phi}{2}-\omega t)} = 2E_0\cos\frac{\Phi}{2}e^{i(\frac{\Phi}{2}-\omega t)}$$

L’energia in P vale

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$$

Tenendo conto della relazione tra ***E*** e ***B*** e del significato fisico del coefficiente dell’immaginario del campo complesso

$$w(p,t) = \varepsilon_0 E^2(P,t) = \varepsilon_0 \left[2E_0 \cos\frac{\Phi}{2} \sin(\frac{\Phi}{2} - \omega t) \right]^2$$

Valutando il valore medio sul periodo ***T*** e chiamiamo tale valore intensità ***I*** dell’onda e.m.

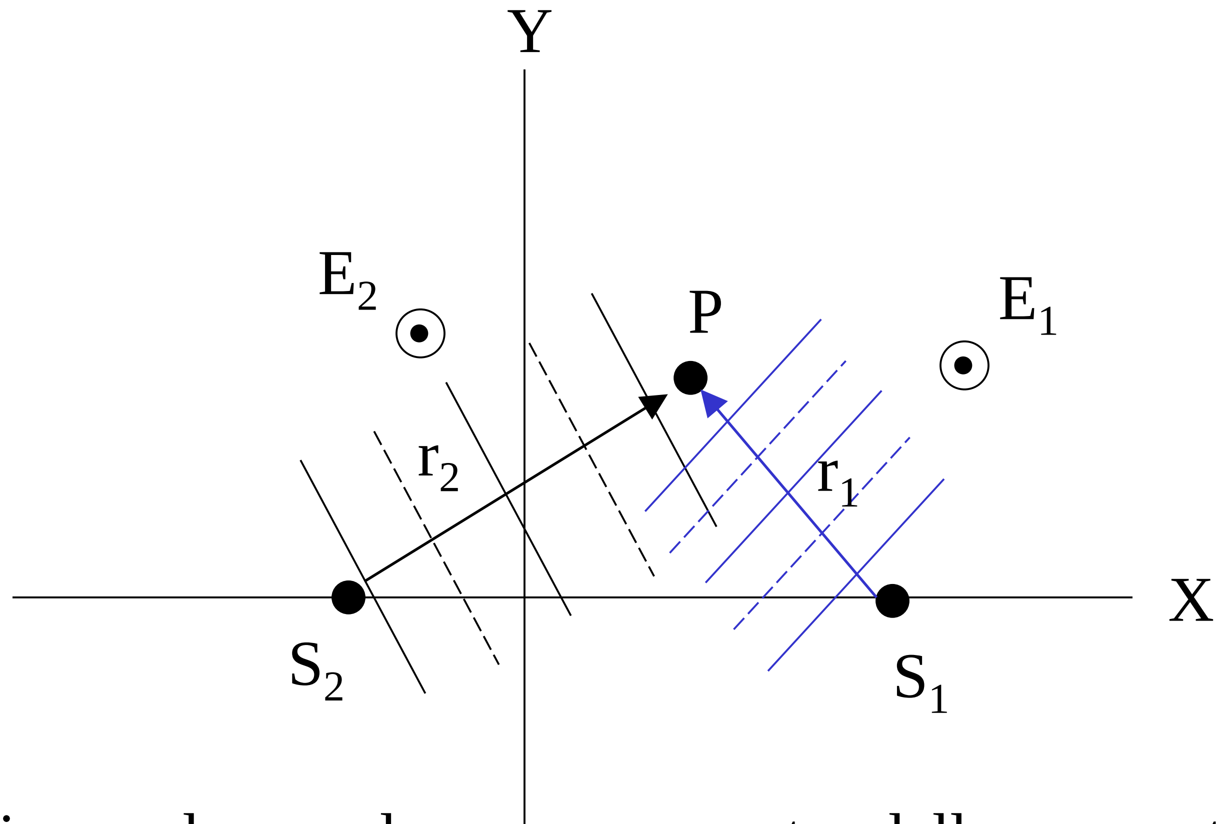
$$\langle w(p,t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_0 E^2(P,t) dt = I$$

$$I = 2\varepsilon_0 E^2{}_0 \cos^2 \frac{\Phi}{2}$$

$$I \propto \left(2E_0\right)^2 \cos^2 \frac{\Phi}{2}$$

$$\Phi = \left(kr_2 - \omega\, t + \varphi\right) - \left(kr_1 - \omega\, t\right) = \left(kr_2 - kr_1 + \varphi\right)$$

Interferenza di onde e.m. prodotte da sorgenti coerenti sincrone a differenza di fase iniziale nulla



Prendiamo due onde e.m. generate dalle sorgenti puntiformi $\mathbf{S_1}$e $\mathbf{S_2}$ (a grande distanza saranno onde piane) e supponiamo che le onde abbiano campo elettrico

$$E_j(P,t) = \mathrm{Im}\left\{E_{0,j}\, e^{i\left(kr_j - \omega t\right)}\right\}$$

$$E_j = E_{0,j} \sin\left(kr_j - \omega t\right) \qquad j = 1,2$$

Cioè le sorgenti hanno la stessa pulsazione $\boldsymbol{\omega}$ e fase iniziale nulla.

Ipotizziamo poi che le ampiezze $\mathbf{E_{0,i}}$ non cambino con la propagazione e siano parallele.

Quando le onde si incontrano nel punto **P** si sommano. La somma è vettoriale ma se prendiamo campi $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$ paralleli tra loro.

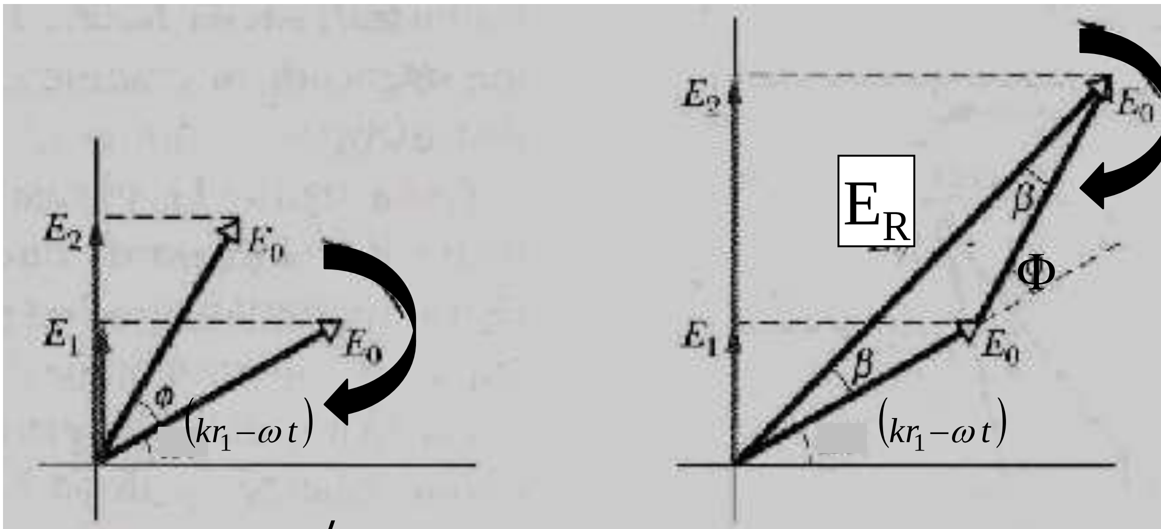
$$E(P,t) = \mathrm{Im}\left\{E_{0,1}\, e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_{0,2}\, e^{i(kr_2 - \omega t)}\right\}$$

$$E(P,t) = E_{0,1} \sin(kr_1 - \omega t) + E_{0,2} \sin(kr_2 - \omega t)$$

Possiamo fare la somma utilizzando la rappresentazione complessa delle onde e.m.

(detta anche metodo dei dei fasori o dei vettori rotanti)

$$E(P,t) = E_{0,1}\, e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_{0,2}\, e^{i(kr_2 - \omega t)}$$



$$\beta = \frac{\phi}{2}; \qquad\qquad E_\theta = |E_R|$$

Se si considerano due onde nello stesso punto dello spazio con campo **E** parallelo si può ottenere che la loro somma **E_R= E_1+E_2** vale:

$$E_R = E_1 + E_2 = E_0\, e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_0\, e^{i(kr_2 - \omega t)}$$

Chiamando ***Φ*** è la ***<u>differenza di fase (d.d.f.)</u>*** fra le due onde nel punto in cui si sommano:

$$\phi = (kr_2 - \omega t) - (kr_1 - \omega t) = kr_2 - kr_1$$

$$E_R = E_1 + E_2 = \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right) e^{i\left(\frac{\phi}{2} + kr_1 - \omega t\right)} = E_\theta e^{i\left(\frac{\phi}{2} + kr_1 - \omega t\right)}$$

$$E_\theta = 2E_0 \cos\frac{\phi}{2}$$

$$E_R = E_1 + E_2 = \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2} + kr_1 - \omega t\right)$$

Se il campo nel punto **P** vale $\mathbf{E_R}$ l'energia istantanea del campo in quei punti è proporzionale al quadrato del campo elettrico:

$$I(t) \propto \left(E_1 + E_2\right)^2 = \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2} + kr_1 - \omega t\right)$$

Se prendiamo di tale energia il valor medio $\mathbf{I_M}$ (che è la quantità che si misura o si vede se le onde sono luce visibile)

$$I_M = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt \propto \frac{1}{T}\int_0^T \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2} + kr_1 - \omega t\right)dt =$$

$$= \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{\phi}{2} + kr_1 - \omega t\right)dt\right] =$$

$$= \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{T}\frac{T}{2}\right] \propto \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)^2$$

$$I_M \propto \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)^2$$

da cui:

$$I_M \quad \max \quad \phi = 2m\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

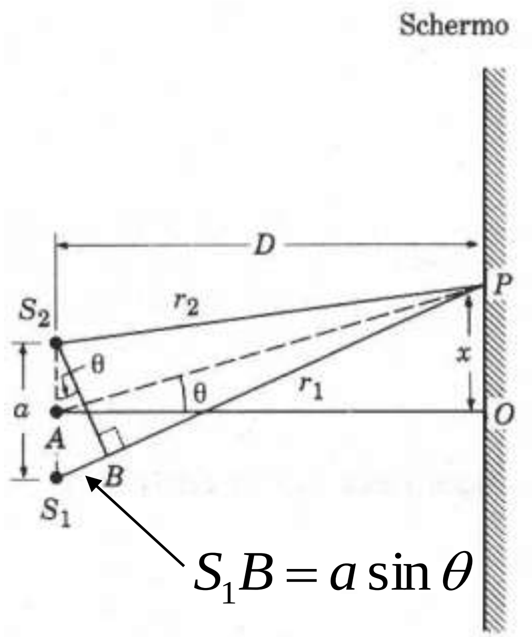
(***interferenza costruttiva***)

$$I_M \quad \min \quad \phi = (2m+1)\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(***interferenza distruttiva***)

Interferenza tra onde e.m prodotte da due sorgenti coerenti

Se abbiamo due sorgenti identiche di onde e.m. con la stessa frequenza ω, fase iniziale uguale e nulla e campo parallelo (***in questo caso le sorgenti sono dette coerenti***)



$$E_1 = E_0 \ sin(kr_1 - \omega t)$$
$$E_2 = E_0 \ sin(kr_2 - \omega t)$$

Nel punto **P** la somma delle due onde da un campo risultante $\mathbf{E_R}$

$$E_R = (E_1 + E_2) = \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2} \right) sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2} \right)$$

con $\quad \phi = d.d.f. = kr_1 - kr_2 = k(r_1 - r_2) =$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

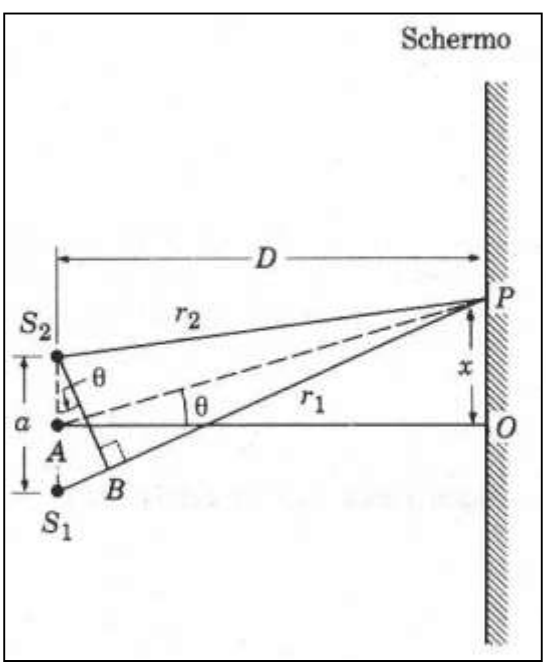
L'intensità media, cioè la quantità media di energia in **P** vale

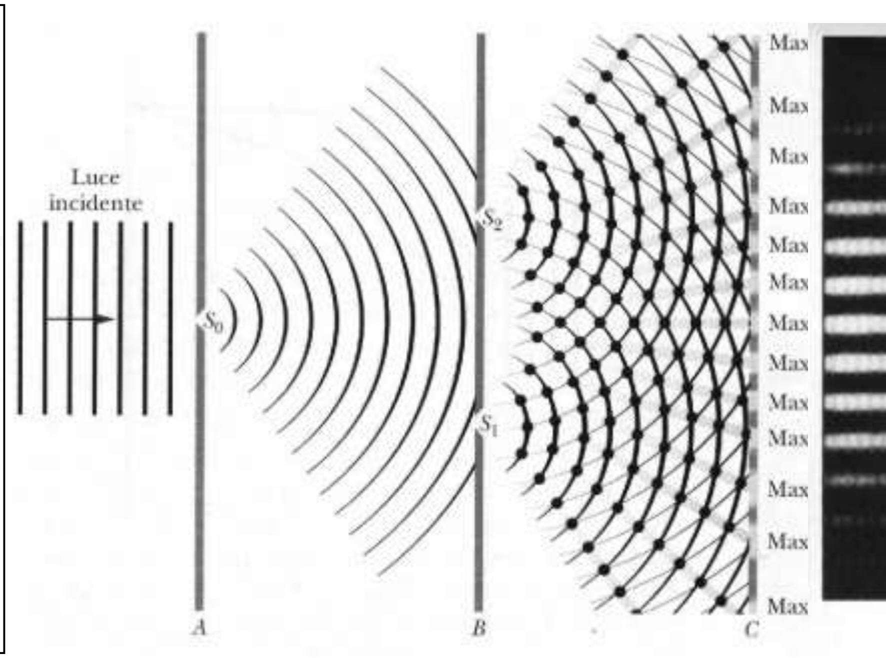
$$I_M \propto \left(2E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)^2 = \left(2E_0 \cos\frac{k(r_1 - r_2)}{2}\right)^2$$

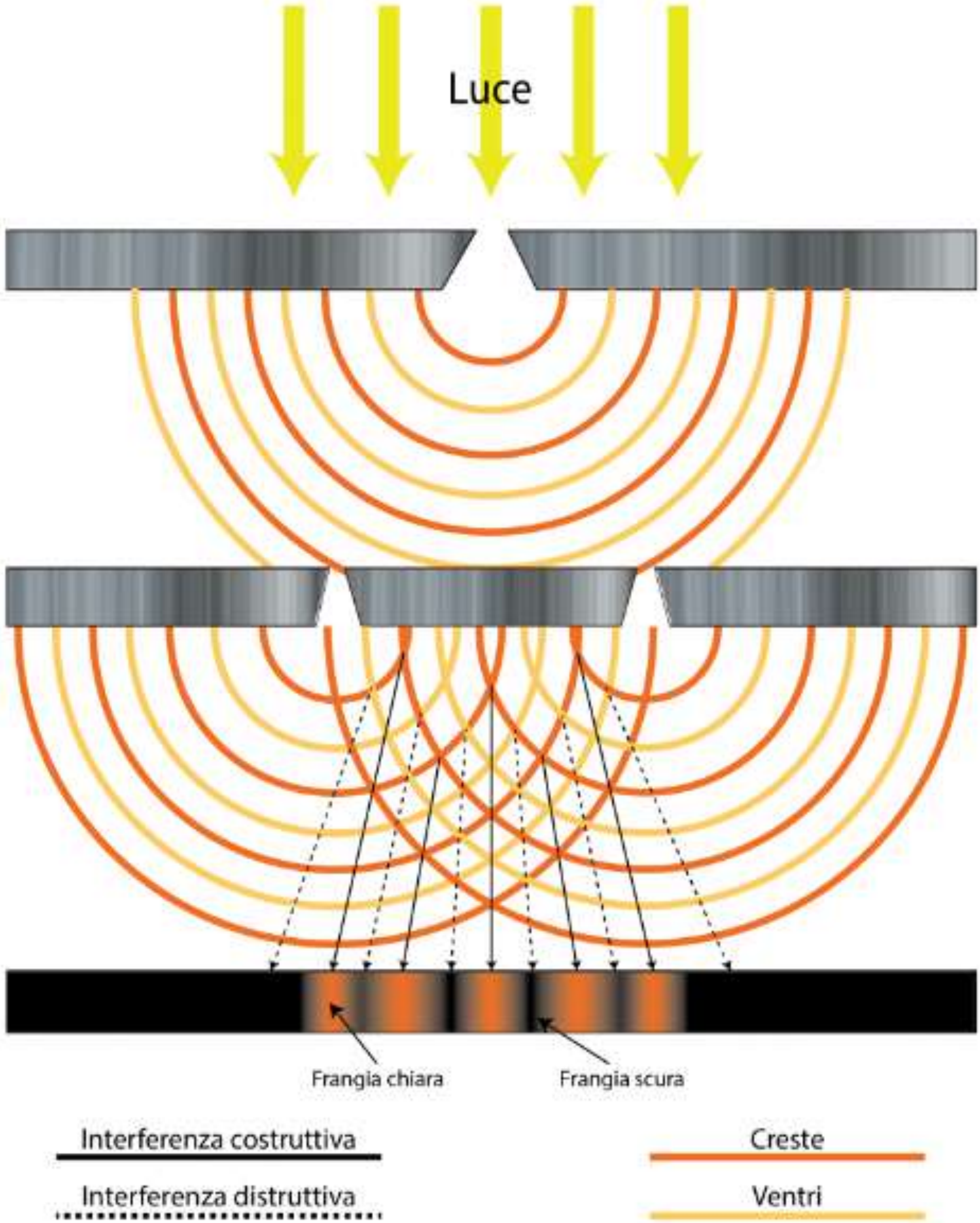
Se lo schermo è lontano, $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ sono quasi paralleli

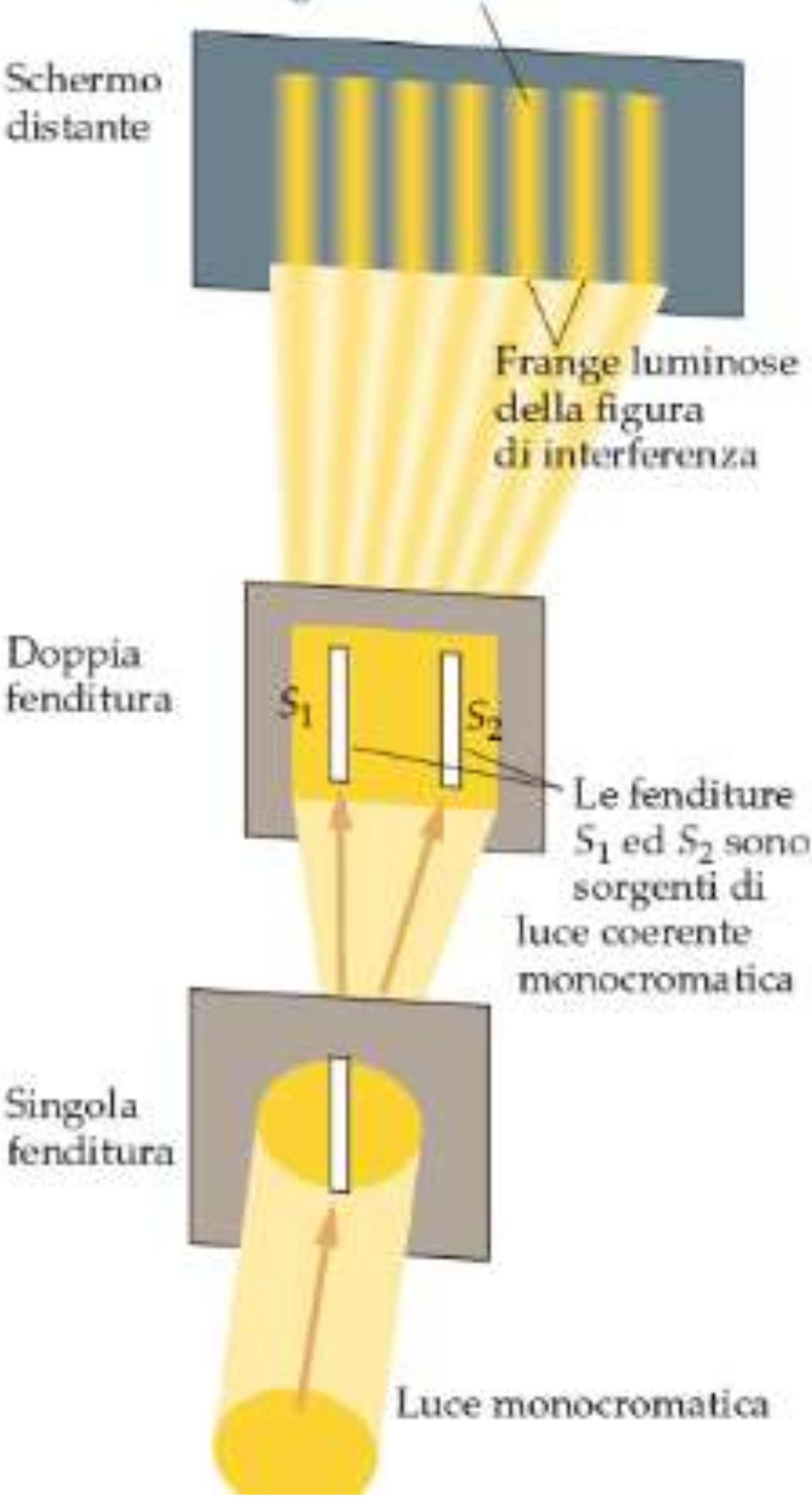
$$\phi = d.d.f. = k(r_1 - r_2) \approx k(a\,sin\theta) = \frac{2\pi}{\lambda}(a\,sin\theta)$$

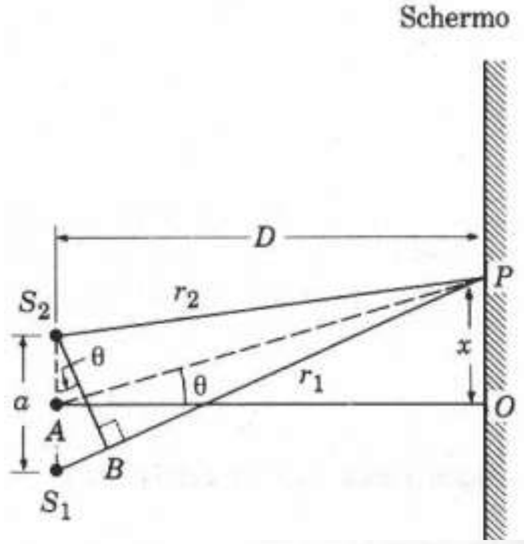
$$I_M \propto \left(2E_0 \cos\frac{k\,a\,sin\theta}{2}\right)^2 = \left(2E_0 \cos\frac{\pi\,a\,sin\theta}{\lambda}\right)^2$$

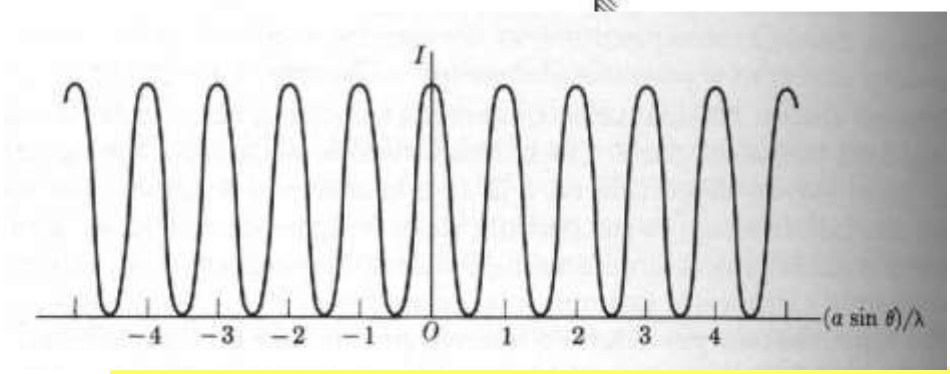





Luce
Frangia chiara
Frangia scura
Interferenza costruttiva
Interferenza distruttiva
Creste
Ventri


Schermo
distante
Frange luminose
della figura
di interferenza
Doppia
fenditura
S_1
S_2
Le fenditure
S_1 ed S_2 sono
sorgenti di
luce coerente
monocromatica
Singola
fenditura
Luce monocromatica





$$I_M = \max \;\Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta = 2m\pi$$

$$r_1 - r_2 \approx a\sin\theta = m\lambda$$

Differenza di cammino ottico

$$m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$I_M = 0 \;\Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta = (2m+1)\pi$$

$$r_1 - r_2 \approx a\sin\theta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

Si ha interferenza *costruttiva* se la differenza di cammino ottico percorso dalle onde è un multiplo intero della lunghezza d'onda (comune); l'interferenza è *distruttiva* se la differenza di cammino ottico percorso dalle onde è un multiplo dispari di semi-lunghezze d'onda