Entropia per le soluzioni classiche:

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) = 0 \qquad \text{in } Q = \mathbb{R}\times(0,+\infty)$$

dove $q'(u) := \eta'(u) f'(u)$.

Se u è soluzione debole della legge di conservazione $\underbrace{\text{non}}_{\partial_t u + \partial_x f(u) = 0}$ è detto che $\partial_t u + f'(u)\partial_x u = 0$ e quindi non è detto che $\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) = 0$. Ci proponiamo di capire quanto fa $\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u)$ quando u è soluzione debole.

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) \xrightarrow[\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \dots dx\,dt]{\times\, \varphi \in \mathcal{D}(Q)} \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \big(\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u)\big)\varphi \, dx\,dt$$

$$\Big\downarrow \text{integrazione per parti}$$

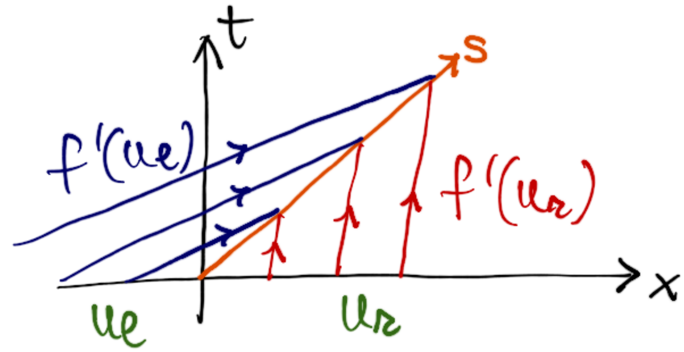
$$- \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \big(\eta(u)\partial_t \varphi + q(u)\partial_x \varphi\big) dx\,dt$$

D'ora in poi ragioneremo dunque sull'espressione

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \big(\eta(u)\partial_t \varphi + q(u)\partial_x \varphi\big) dx\,dt. \qquad (*)$$

Testiamo questa espressione su una soluzione debole che già sappiamo essere fisicamente ammissibile: l'onda d'urto formata dall'intersezione delle caratteristiche

$u_\ell > u_r$ (per $f'' > 0$)



$$s = \frac{f(u_r) - f(u_\ell)}{u_r - u_\ell}$$

$f'(u_\ell) > f'(u_r)$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell & \text{per } x < st \\ u_r & \text{per } x > st. \end{cases}$$

Inseriamo questo u in $(*)$:

$$(*) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{st} \left(\eta(u_\ell)\partial_t\varphi + q(u_\ell)\partial_x\varphi \right) dx\, dt$$

$$+ \int_0^{t} \int_{st}^{+\infty} \left(\eta(u_r)\partial_t\varphi + q(u_r)\partial_x\varphi \right) dx\, dt$$

$=$ (... scambio ordine di integrazione + teorema fondamentale del calcolo integrale...)

$$= \left(\eta(u_r) - \eta(u_\ell)\right) \int_0^{+\infty} \varphi\left(x, \frac{x}{s}\right) dx \rightsquigarrow \frac{x}{s} =: t$$

$$- \left(q(u_r) - q(u_l) \right) \int_0^{+\infty} \varphi(st,t)\,dt$$

(**)

$$= \boxed{\left[s\left(\eta(u_r) - \eta(u_l) \right) - \left(q(u_r) - q(u_l) \right) \right]} \int_0^{+\infty} \varphi(st,t)\,dt.$$

Osserviamo che sulle soluzioni non classiche l'espressione $\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u)$, opportunamente tradotta in forma debole, non è necessariamente zero.

Chiediamoci se questa espressione ha per lo meno un segno, cioè se è non-negativa (≥ 0) o non-positiva (≤ 0). Per questo, fissiamo innanzitutto

$$\varphi \in \mathcal{D}(Q), \quad \varphi \geq 0 \text{ in } Q$$

così il segno dipende solo dalla parte contenente la soluzione debole, cioè (**).

Consideriamo per semplicità il caso di urto debole, cioè quello in cui u_l e u_r sono poco diversi tra loro ($|u_l - u_r|$ è sufficientemente piccolo):

- $$f(u_r) = f(u_l) + f'(u_l)(u_r - u_l) + \frac{1}{2} f''(u_l)(u_r - u_l)^2 + \frac{1}{6} f'''(u_l)(u_r - u_l)^3 + o\left((u_r - u_l)^3\right)$$

$$\hookrightarrow s = \frac{f(u_r)-f(u_l)}{u_r-u_l} = f'(u_l) + \frac{1}{2} f''(u_l)(u_r-u_l) + \frac{1}{6} f'''(u_l)(u_r-u_l)^2 + o\left((u_r-u_l)^2\right)$$

$$\bullet\ \eta(u_r) = \eta(u_l) + \eta'(u_l)(u_r-u_l) + \frac{1}{2}\eta''(u_l)(u_r-u_l)^2 + \frac{1}{6}\eta'''(u_l)(u_r-u_l)^3 + o\left((u_r-u_l)^3\right)$$

$$q'' = \eta'' f' + \eta' f''$$

$$\bullet\ q(u_r) = q(u_l) + \underbrace{\boxed{q'(u_l)}}_{\eta'(u_l) f'(u_l)}(u_r-u_l) + \frac{1}{2}\boxed{q''(u_l)}(u_r-u_l)^2 + \frac{1}{6}\boxed{q'''(u_l)}(u_r-u_l)^3 + o\left((u_r-u_l)^3\right)$$

$$q''' = \eta''' f' + 2\eta'' f'' + \eta' f'''$$

Inserendo questi sviluppi di Taylor nella (**) si ottiene:

$$s\left(\eta(u_r)-\eta(u_l)\right) - \left(q(u_r)-q(u_l)\right) = \underbrace{-\frac{1}{12}\eta''(u_l) f''(u_l)(u_r-u_l)^3}_{\geq 0} + o\left((u_r-u_l)^3\right)$$

$\eta'' > 0$ per ipotesi

$f'' > 0$ per ipotesi

$u_l > u_r$ per avere un'onda d'urto fisicamente ammissibile (con f convesso)

Motivati da questo risultato, diamo la seguente

<u>Def.</u> Una soluzione (debole) $u : Q \to \mathbb{R}$ della legge di conservazione $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ è detta soluzione entropica (ossia fisicamente ammissibile) se

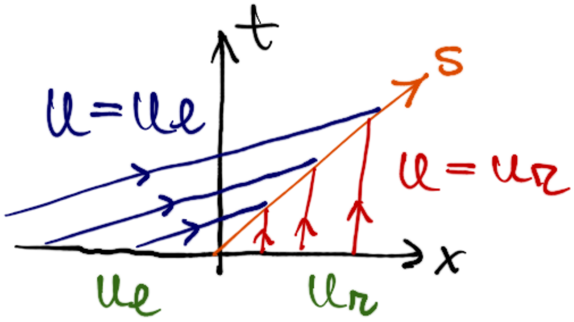
$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x q \right) dx\, dt \geq 0$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ con $\varphi \geq 0$ e per ogni coppia (η, q) di entropia e flusso di entropia associata alla legge di conservazione.

Il concetto di soluzione entropica è utile perché vale:

<u>Teorema</u> (di Kruzhkov)
La soluzione entropica, quando esiste, è unica.

Per $f''>0$, se $u_l > u_r$ l'onda d'urto



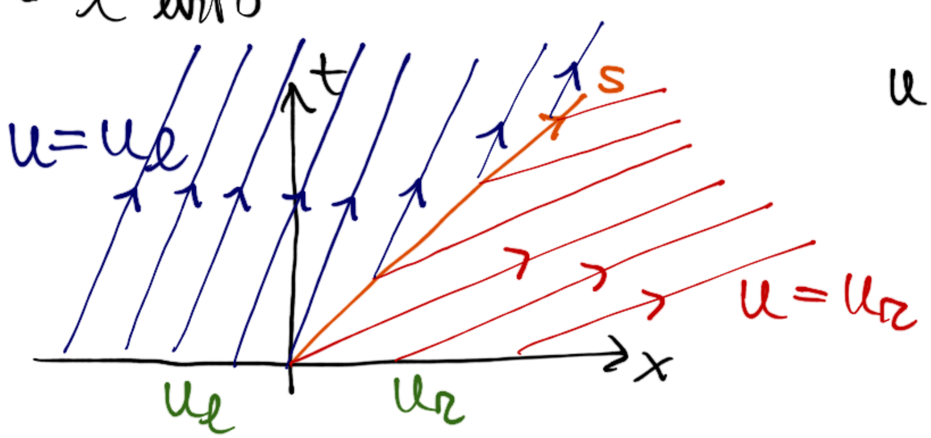
$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{per } x<st \\ u_r & \text{per } x>st \end{cases}$$

con $s = \dfrac{f(u_r)-f(u_l)}{u_r-u_l}$

non solo è l'unica soluzione restituita dal metodo delle caratteristiche, ma è anche entropica (per costruzione del criterio di entropia).

Se invece $u_l < u_r$:

- l'urto



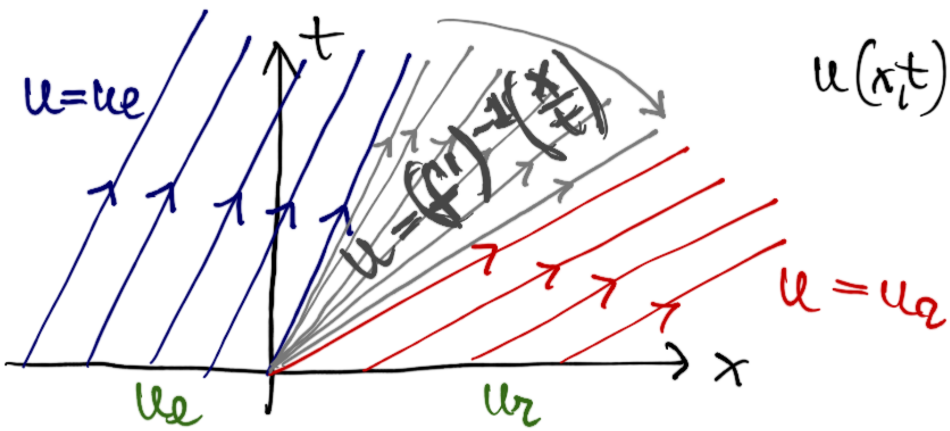
$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{per } x<st \\ u_r & \text{per } x>st \end{cases}$$

con

$$s = \frac{f(u_r)-f(u_l)}{u_r-u_l}$$

non è entropico ($\leadsto$ verifica per esercizio)

• l'onda di rarefazione



$$u(x,t)=\begin{cases} u_\ell & \text{per } x<f'(u_\ell)t \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{per } f'(u_\ell)t<x<f'(u_r)t \\ u_r & \text{per } x>f'(u_r)t \end{cases}$$

risulta una soluzione entropica (→ verifica per esercizio).

Se $f''<0$ (flusso concavo) allora la situazione è rovesciata:

→ verifica per esercizio

- l'onda d'urto è entropica quando $u_\ell<u_r$;
- l'onda di rarefazione è entropica quando $u_\ell>u_r$.

Anche in questo caso abbiamo però la possibilità di determinare sempre univocamente una soluzione fisicamente ammissibile del problema di Riemann.