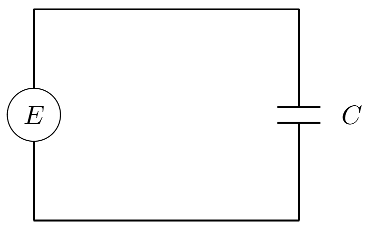
4

Introduzione alle distribuzioni

4.1 Introduzione e motivazioni.

Come più volte abbiamo avuto modo di constatare, ci sono molte situazioni nelle quali si ha l'esigenza di generalizzare il concetto di funzione a qualcosa di più flessibile. Presentiamo un paio di esempi, in parte già visti, per illustrare questo tipo di necessità.

Esempio 4.1 Consideriamo il circuito come in figura sotto.



(4.1)

Come è ben noto il legame tra l'intensità di corrente $i(t)$ che scorre nel circuito e la forza elettromotrice $E(t)$ è dato da:

$$E'(t) = \frac{1}{C} i(t) \,. \tag{4.2}$$

Tuttavia questo presuppone che la funzione $E(t)$ sia derivabile. Che cosa succede se ad esempio $E(t) = H(t)$ la funzione di Heaviside? $E(t)$ è derivabile ovunque tranne che in 0 e la sua derivata è sempre eguale a 0. In $t = 0$ non è derivabile e si potrebbe pensare di porre $E'(0) = +\infty$. Quindi per la (4.2) si avrebbe che la corrente $i(t)$ è sempre 0 tranne che per $t = 0$ dove vale $+\infty$. Ha senso una $i(t)$ definita così ? Si noti che la (4.2) può anche essere scritta come

$$E(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(s) \, \mathrm{d}s \, .$$

Essendo $i(t)$ sempre 0 tranne che in un punto e poiché l'integrale di una funzione (di Riemann, ma in realtà anche qualunque estensione ad esempio l'integrale di Lebesgue) non 'vede' ciò che la funzione fa in un singolo punto, otterremmo che $E(t) = 0$ su tutto $\mathbb{R}$. Ma questa non è la nostra $E(t)$ di partenza! Eppure fisicamente è chiaro che cosa succede: la corrente fluisce per un tempo infinitamente breve con un picco in 0. Il problema è come rappresentare una fenomenologia di questo tipo: una funzione sempre 0 con il valore $+\infty$ in 0 non è soddisfacente. Finché imponiamo che $i(t)$ sia una funzione non riusciamo a superare il problema. □

Esempio 4.2 Se abbiamo una densità volumetrica di cariche distribuite secondo la densità di carica $\rho(x, y, z)$, la carica totale contenuta in un certo volume V si calcola come:

$$Q = \iiint\limits_V \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \, .$$

Se abbiamo invece cariche puntiformi $q_1, \ldots, q_n$ nel volume V, l'espressione per la carica totale diventa

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i \, .$$

Le due formule sono chiaramente di tipo diverso; ci piacerebbe averne una unica che possa trattare densità e cariche puntiformi alla stessa stregua. Il problema chiaramente è che le cariche puntiformi non possono essere descritte da densità se queste devono essere delle normali funzioni. Si noti che cariche puntiformi possono in effetti essere approssimate da densità di carica. Facciamolo vedere lavorando per semplicità sulla retta invece che nello spazio. Si consideri la successione di densità lineari di carica[1]

$$\rho_n(x) = qnp_{1/n}(x)$$

dove q è una costante. Esse descrivono distribuzioni omogenee concentrate sull'intervallo $[-1/2n, 1/2n]$ e la carica totale è data da

$$Q_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) \, \mathrm{d}x = qn\frac{1}{n} = q$$

e non dipende quindi da n. All'aumentare di n quindi queste distribuzioni di carica tendono a concentrarsi sempre di più intorno allo 0, ma sempre mantenendo

[1] La funzione $p_{1/n}$ indica la funzione porta di ampiezza $1/n$.

costante la quantità di carica totale q. L'idea dovrebbe essere che al tendere di n a $+\infty$ tali densità dovrebbero convergere alla carica puntiforme q concentrata in 0. Tuttavia se ne guardiamo il limite dal punto di vista delle funzioni si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e tale funzione limite, se integrata sulla retta, da come risultato 0 e non q. Anzi l'informazione che la carica totale è q sembra essersi completamente persa nel passaggio al limite. Come vedremo, utilizzando invece le distribuzioni, saremo in grado di non perdere questa informazione nel passaggio al limite. □

L'idea fondamentale della teoria delle distribuzioni è che una misura di una quantità fisica, di un segnale temporale, non fornisce mai il valore in un preciso istante o in un preciso punto dello spazio. Lo strumento di misura, per quanto preciso, comunque media la quantità da misurare nel tempo e nello spazio anche se su intervalli temporali o zone di spazio molto piccole. Ne consegue che la quantità fisica, il segnale non è necessario pensarlo come qualcosa di definito punto per punto o istante per istante, quanto invece come un *qualcosa* che associa ad ogni possibile strumento di misura un numero che è il valore della misura su quel segnale. D'altra parte, le possibili misure possono essere descritte dalle medie che esse operano. Ne consegue che un segnale potrà essere pensato come un'applicazione dallo spazio delle funzioni che descrivono le medie, dette *funzioni test*, al campo degli scalari. La scelta delle funzioni test é una questione abbastanza delicata, dettata da questioni matematiche e dalle applicazioni che si vogliono considerare. Nel seguito presenteremo due possibili scelte.

4.2 Preliminari sulle funzioni

Prima di iniziare la teoria delle distribuzioni, é necessario richiamare alcuni concetti sulle funzioni integrabili.

Dato un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, indichiamo con $\mathcal{C}(I)$ l'insieme delle funzioni continue su I. Esso è in modo naturale uno spazio vettoriale di funzioni reale o complesso a seconda di dove prendono valore le funzioni. Se inoltre I è chiuso e limitato, si può introdurre una norma su questo spazio, detta norma del sup:

$$f \in \mathcal{C}(I) \quad ||f||_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)| \, .$$

Si noti che in virtù del Teorema di Weierstrass il sup sopra è in realta un massimo e dunque la norma è sempre un numero finito. E' detta norma perchè possiede le seguenti proprietà (come ad esempio la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$):

(a) $||f||_\infty \geq 0$ e $||f||_\infty = 0$ se e soltanto se $f \equiv 0$.
(b) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda f|| = |\lambda| ||f||_\infty$.

(c) $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ (questa è nota come diseguaglianza triangolare.

Ogni volta che su uno spazio abbiamo una norma possiamo introdurre un relativo concetto di convergenza. Nella fattispecie del nostro spazio $\mathcal{C}(I)$ diciamo che f_n converge a f nella norma del sup se $||f_n - f||_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$. Poichè

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

si ha che la convergenza in norma del sup coincide con la convergenza uniforme su I.

4.2.1 La classe delle funzioni $\mathcal{R}^1$

Dato un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ limitato indicheremo con $\mathcal{R}^1(I)$ (o anche semplicemente $\mathcal{R}^1$ quando non c'è rischio di ambiguità) l'insieme delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ *integrabili* cioé che godono delle seguenti proprietà:

1) f è continua su I tranne che al più un numero finito di punti $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$.
2) f è assolutamente integrabile su ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ per $i = 0, \ldots, k$ indicando con $x_0 = \inf I$ e con $x_{k+1} = \sup I$.

Per una funzione siffatta si definisce

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si noti che $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ è da interpretarsi come un normale integrale di Riemann se x_i e x_{i+1} sono semplici punti di discontinuità eliminabile o di prima specie per la f, mentre è da interpretarsi come un integrale improprio se uno o entrambi i punti estremi sono di discontinuità di seconda specie. Poiché l'integrale é di fatto 'insensibile' a ció che succede in un singolo punto del dominio, ammetteremo d'ora in avanti la possibilitá che la funzione f non sia definita negli eventuali punti di discontinuità x_i. Per lo stesso motivo useremo la notazione $\mathcal{R}^1(a,b)$ indipendentemente dal fatto che si stia considerando l'intervallo $]a,b[$, $[a,b]$ o gli altri semichiusi.

Osservazione:

1. Se I è chiuso e limitato e $f : I \to \mathbb{R}$ è continua tranne che eventualmente in un insieme finito di punti dove presenta salti, allora $f \in \mathcal{R}^1(I)$.
2. Se I non è chiuso, l'affermazione sopra non vale piú necessariamente anche se la funzione econtinua. Ad esempio la funzione $1/x^\alpha$ è continua su $]0,1]$ per ogni $\alpha > 0$ ma appartiene ad $\mathcal{R}^1(]0,1])$ se e soltanto se $\alpha < 1$.

Esempio 4.3 1. La funzione $f(x) = \sin x$, essendo continua su tutto $\mathbb{R}$ sta in $\mathcal{R}^1(I)$

2. La funzione $f(x) = \ln|x|$ sta in $\mathcal{R}^1(I)$ qualunque sia I limitato.

Estendiamo ora la definizione agli intervalli illimitati (tutta la retta o una semiretta). Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo qualunque. $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ indica l'insieme delle funzioni *localmente integrabili* su I cioè delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ tali che qualunque sia $J \subseteq I$ sottointervallo limitato, la restrizione $f_{|J} \in \mathcal{R}^1(J)$.

Se $f \in \mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ poniamo per definizione

$$\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{I\cap[-n,n]} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,. \tag{4.3}$$

Il limite sopra esiste sempre in virtù della monotonia dell'integrale delle funzioni positive, ma può essere anche $+\infty$. $\mathcal{R}^1(I)$ indica l'insieme delle funzioni $f \in \mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ per le quali l'integrale sopra è finito. Queste funzioni sono dette *integrabili* su I e per esse si può definire il normale integrale

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{I\cap[-n,n]} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{4.4}$$

Osservazione: Le funzioni continue su intervalli I chiusi sono sempre localmente integrabili su I ma non necessariamente integrabili. Ad esempio, la funzione $x^{-\alpha}$ sta in $\mathcal{R}^1([1,+\infty[)$ se e soltanto se $\alpha > 1$. Invece, la funzione $x^{-\alpha}$ non sta in $\mathcal{R}^1(]0,+\infty[)$ per nessun valore di α.

Esempio 4.4 1. La funzione $f(x) = \sin x$, essendo continua su tutto $\mathbb{R}$ sta in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Non sta tuttavia in $\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$.
2. La funzione $f(x) = e^{-x}$ sta in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Inoltre sta in $\mathcal{R}^1([a,+\infty[)$ qualunque sia a.

Definiamo infine lo spazio $\mathcal{R}^\infty(I)$ delle funzioni in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ limitate su I. Il seguente risultato riassume molte delle proprietà di questi spazi di funzioni appena introdotti; è omessa la dimostrazione che segue da considerazioni standard sull'integrale di Riemann.

Proposition 4.5. *(a) Qualunque sia I, gli insiemi di funzioni $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(I)$, $\mathcal{R}^1(I)$, $\mathcal{R}^\infty(I)$ sono spazi vettoriali di funzioni, cioè sono chiusi rispetto alle combinazioni lineari. Inoltre, se $f, g \in \mathcal{R}^1(I)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si ha che*

$$\int_I (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_I f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_I g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1. (b)

$$f \in \mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(I)\,, \quad g \in \mathcal{R}^\infty(I) \;\Rightarrow\; fg \in \mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(I)$$

$$f \in \mathcal{R}^1(I)\,, \quad g \in \mathcal{R}^\infty(I) \;\Rightarrow\; fg \in \mathcal{R}^1(I)$$

Si noti che in generale $\mathcal{R}^1(I)$ non è chiuso rispetto al prodotto: se due funzioni f e g stanno in $\mathcal{R}^1(I)$, il prodotto fg non è detto che ci stia. Un controesempio è dato dalla coppia $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$ su $[-1, 1]$.

Presentiamo sotto qualche esempio conclusivo. Fissiamo intanto la seguente notazione: se $A \subset \mathbb{R}$ definiamo la funzione indicatrice di A come quella funzione

$$\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definita da

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A\,. \end{cases}$$

Si noti che con questa notazione la funzione di Heavyside e le funzioni porta possono essere scritte come

$$H(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\,, \quad p_T(x) = \mathbb{1}_{[-T/2,T/2]}\,.$$

Esempio 4.6 1. La funzione $H(x)$ sta in $\mathcal{R}^\infty(\mathbb{R}))$ ma non in $\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$.
2. La funzione$p_T(x)$ sta in $\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ e in $\mathcal{R}^\infty(\mathbb{R})$ qualunque sia T.
3. La funzione con infiniti scalini (vedi Figura 7.3)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \chi_{[k,k+1[}$$

sta in $\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ (verificare per esercizio).
4. Nessuna delle due funzioni

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \chi_{[(k+1)^{-1},k^{-1}[}\,, \quad f_2(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1[}\,,$$

è in $\mathcal{R}^1(\mathbb{R})$: la prima (vedi Figura 7.4) non è neppure in $\mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$ in quanto le singolarità si accumulano in 0, la seconda è invece in $\mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$ ma il suo integrale è $+\infty$ (verificare).

Il primo problema da affrontare è la scelta dello spazio delle funzioni test.

4.3 Lo spazio delle funzioni test.

Per definire formalmente le distribuzioni, abbiamo preliminarmente bisogno di definire lo spazio delle funzioni test. Questo é quello che faremo in questa sezione. Iniziamo con un concetto preliminare: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiamo il *supporto* di f (indicato $\mathrm{supp}(f)$) come la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0\}$ (cioè l'insieme stesso unito alla sua frontiera). f si dice a *supporto compatto* se $\mathrm{supp}(f)$ è chiuso (quello lo è sempre per definizione) e limitato. In altri termini f è a supporto compatto, se è possibile trovare $R > 0$ tale che $f(x) = 0$ per ogni x tale che $|x| > R$.

Possiamo ora definire lo spazio delle funzioni test:

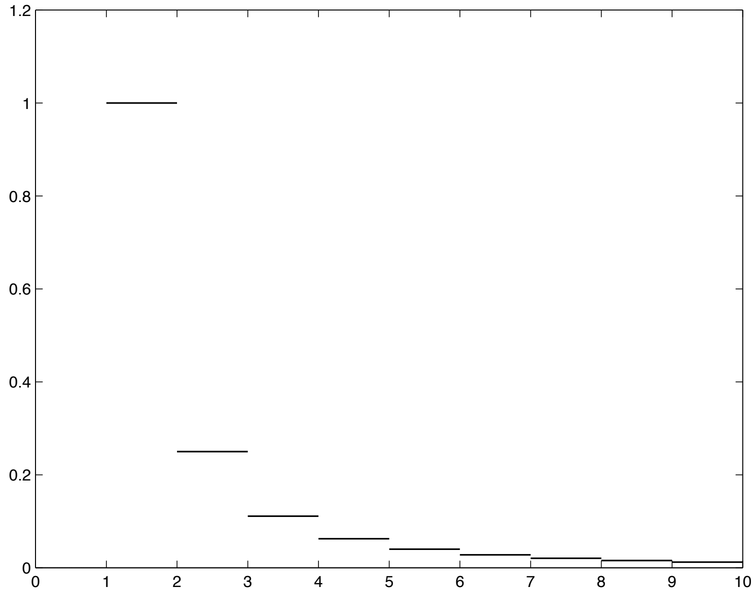


Figura 4.1.

Definizione 4.7 *Definiamo $\mathcal{D}$ come lo spazio delle funzioni ϕ di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$ ed a supporto compatto.*

Cominciamo ad esibire concretamente funzioni che stanno in $\mathcal{D}$. Ovviamente la funzione sempre nulla sta in $\mathcal{D}$. Una più interessante è la seguente:

$$\gamma(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

il cui grafico è mostrato in Figura 4.3. E' a supporto compatto in $[-1, 1]$ per costruzione e si può far vedere che è effettivamente di classe C^∞. Da essa se ne possono costruire molte altre. Ad esempio si possono considerare, al variare del parametro $r > 0$,

$$\gamma_r(x) = \frac{\gamma(rx)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(rx)\ \mathrm{d}x}$$

Si noti che γ_r ha supporto concentrato in $[-1/r, 1/r]$ che diventa sempre più piccolo all'aumentare di r. Per definizione tuttavia

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_r(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

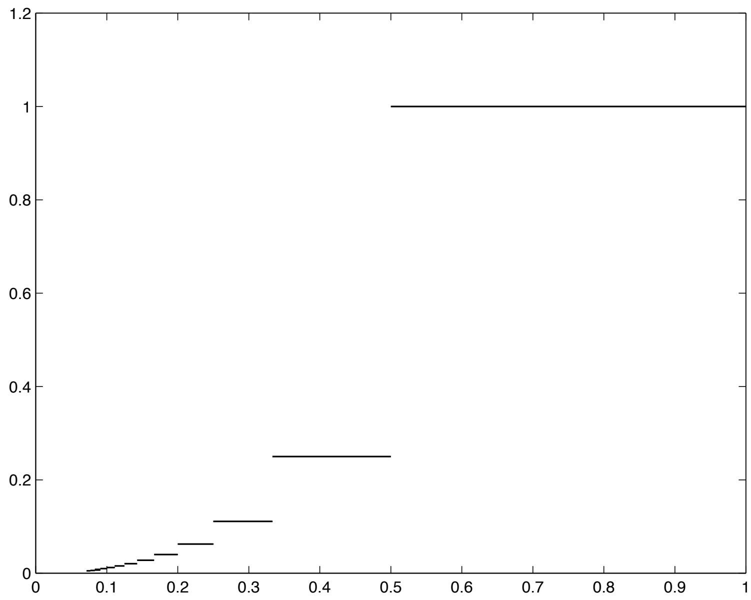


Figura 4.2.

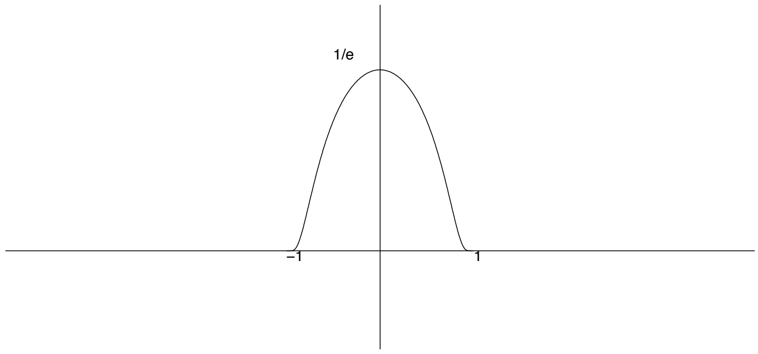


Figura 4.3.

qualunque sia $r > 0$. Questo significa che il picco $\gamma_r(0)$ dovrà forzatamente crescere all'aumentare di r (anzi tenderà a $+\infty$ per $r \to +\infty$). In Figura 4.4 sono riportati i grafici per alcuni valori di r.

Consideriamo ora

$$\theta_r(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \gamma_r(t) \mathrm{d}\, t$$

θ_r è ancora una funzione di classe C^∞, ma non è a supporto compatto. In effetti,

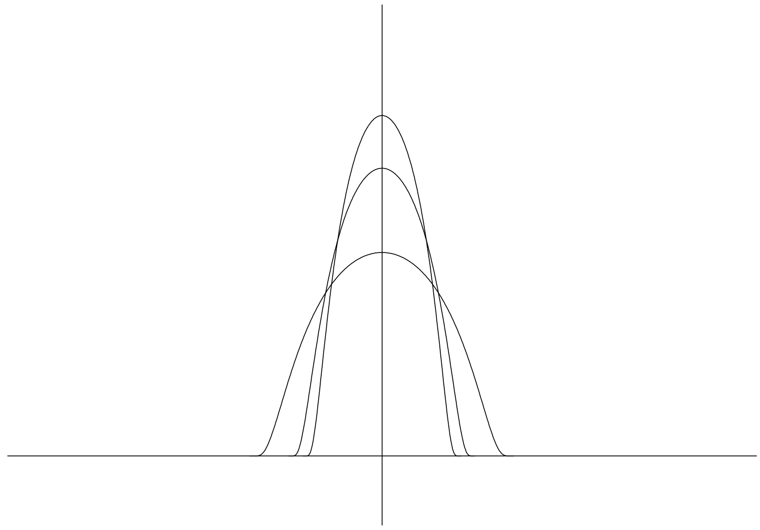


Figura 4.4.

$\theta_r(x) = 0$ se $x \leq -1/r$, ma $\theta_r(x) = 1$ se $x \geq 1/r$. Se ora consideriamo la funzione

$$\gamma_{r,T}(x) := \begin{cases} \theta_r\left(x + \frac{1}{r} + \frac{T}{2}\right) & \text{se } x \leq 0 \\ \theta_r\left(-x - \frac{1}{r} - \frac{T}{2}\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Il grafico di una funzione di questo tipo è proposto in Figura 4.5. Non è difficile far vedere (provare per esercizio) che

$$\begin{array}{ll} \gamma_{r,T}(x) = 0 & \text{se } |x| \geq T/2 + 1/r \\ \gamma_{r,T}(x) = 1 & \text{se } |x| \leq T/2 \end{array}.$$

Inoltre è immediato dalla costruzione osservare che sono di classe C^∞. Sono dunque funzioni in $\mathcal{D}$: esse possono essere pensate come delle versioni 'smussate' della funzione porta.

Facciamo ora alcune osservazioni sulla struttura dello spazio $\mathcal{D}$, mostrando in particolare come esso sia chiuso rispetto a tutta una serie di operazioni. Cominciamo con la chiusura rispetto alle combinazioni lineari: se $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ è cioè quello che si chiama uno spazio vettoriale di funzioni. Esso è chiuso rispetto ad altre operazioni:

$$\begin{array}{ll} \phi \in \mathcal{D} & \Rightarrow\ \phi' \in \mathcal{D} \\ \\ \phi \in \mathcal{D} & \Rightarrow\ x \mapsto \phi(ax+b) \in \mathcal{D}\ \forall a \neq 0,\ b \in \mathbb{R} \\ \\ \phi \in \mathcal{D}, \psi \in \mathbb{C}^\infty & \Rightarrow\ \phi\psi \in \mathcal{D} \end{array}$$

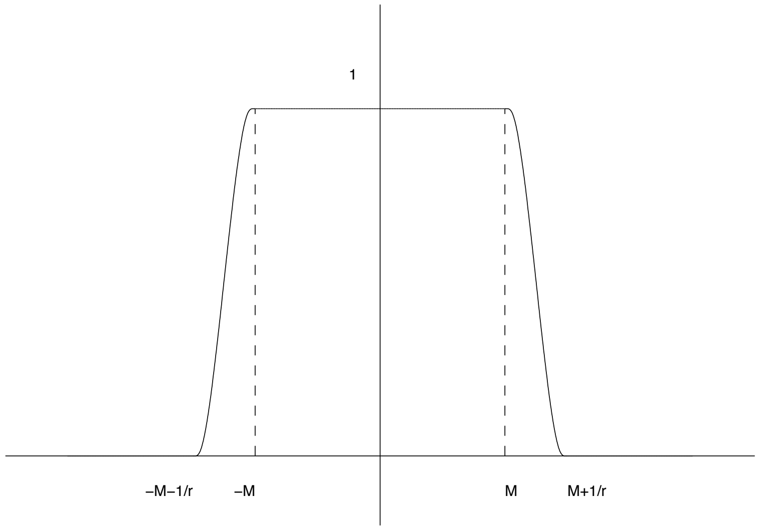


Figura 4.5.

In definitiva, le funzioni di $\mathcal{D}$ possono essere tra loro combinate linearmente, scalate, traslate, derivate, moltiplicate per funzioni in C^∞ senza mai uscire dallo spazio $\mathcal{D}$. Ad esempio,

$$\gamma_{1,3}(x-7)\sin x^2 + 12\gamma''_{2,7}(x)e^x$$

è una funzione di $\mathcal{D}$.

Infine, sullo spazio delle funzioni test $\mathcal{D}$ si può introdurre un concetto di convergenza molto forte nel modo seguente: data una successione ϕ_n di elementi di $\mathcal{D}$ e un'altra funzione $\phi \in \mathcal{D}$ diciamo che ϕ_n converge a ϕ in $\mathcal{D}$, se tutte le ϕ_n mantengono il loro supporto in un intervallo limitato fissato e se la successione ϕ_n converge uniformemente[2] con tutte le sue derivate a ϕ. Più formalmente, se

(i) Esiste $a \geq 0$ tale che $\phi_n(x) = 0$ per ogni x tale che $|x| > a$.
(ii) $\phi_n^{(q)} \to \phi^{(q)}$ uniformemente per ogni $q \in \mathbb{N}$.

E' facile verificare che

$$\phi_n \to \phi \text{ in } \mathcal{D} \;\Leftrightarrow\; \phi_n - \phi \to 0 \text{ in } \mathcal{D}\,. \tag{4.5}$$

[2] Una successione di funzioni $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che converge uniformemente ad una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se fissato comunque $\varepsilon > 0$ si può trovare un intero positivo n_0 tale che

$$\forall n \geq n_0,\, \forall x \in I \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Equivalentemente, la successione f_n converge uniformemente a f se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0\,.$$

Osservazione: E' facile rendersi conto che se abbiamo due successioni convergenti $\phi_n \to \phi$ e $\psi_n \to \psi$ in $\mathcal{D}$, allora qualunque combinazione lineare risulta ancora convergente, più precisamente si ha

$$\lambda\phi_n + \mu\psi_n \to \lambda\phi + \mu\psi\,.$$

4.4 Distribuzioni: definizione ed esempi

In questa sezione diamo la definizione formale di distribuzione. Per capire a pieno il significato e la portata della definizione che stiamo per dare, è utile ricordare che, in base alle considerazioni precedenti, una distribuzione rappresenta un possibile segnale la cui natura è quella di essere 'qualcosa' che associa ad ogni possibile misura un ben determinato valore (da interpretarsi come il valore del segnale sotto quella misura). Avendo stabilto che $\mathcal{D}$ rappresenta l'insieme delle nostre misure, una distribuzione dovrà dunque essere un'applicazione che associa ad ogni elemento di $\mathcal{D}$ un numero reale. Non vogliamo però considerare tutte le applicazioni di questo tipo, ma limitarci a quelle che rispettano un principio di linearità e di continuità rispetto a $\mathcal{D}$:

Definizione 4.8 *Si definisce distribuzione una qualunque funzione*

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

tale che

(i) T è lineare : $T(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1 T(\phi_1) + \lambda_2 T(\phi_2)$ qualunque siano $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
(ii) T è continua: se $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{D}$, allora $T(\phi_n) \to T(\phi)$ come successione di numeri reali.

In virtù di (4.5) e della linearità espressa nel punto (i) è sufficiente rimpiazzare (ii) con la cosiddetta continuità in 0:

(iibis) se $\phi_n \to 0$ in $\mathcal{D}$, allora $T(\phi_n) \to 0$

In effetti se $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{D}$, segue che $\phi_n - \phi \to 0$ in $\mathcal{D}$. Dunque per (i) e (iibis), segue che $T(\phi_n) - T(\phi) = T(\phi_n - \phi) \to 0$, cioè che $T(\phi_n) \to T(\phi)$.

E' comune usare la notazione distribuzionale $< T, \phi >$ al posto di $T(\phi)$ per motivi che saranno chiari tra poco.

Osservazione: Se è abbastanza chiaro da un punto di vista fisico l'opportunità di incorporare un concetto di continuità all'interno del concetto di distribuzione, lo è meno da un punto di vista tecnico. Da ora in poi, ogni volta che introdurremo una nuova aspirante distribuzione dovremo mostrare che essa è lineare (e questo in generale non da molti problemi) ma anche che è continua (e questo è tipicamente meno indolore). Perchè allora occuparci della continuità? Non avremmo potuto più semplicemente imporre soltanto la linearità nella definizione di distribuzione? Una buona parte della teoria che noi svilupperemo è in effetti del tutto slegata dalla questione della continuità e sarebe la stessa anche senza questa ipotesi. Tuttavia alcuni degli aspetti più profondi della teoria delle distribuzioni e delle sue applicazioni risultano invece intimamente collegati al concetto di continuità: senza questa ipotesi alcuni importanti risultati non sarebbero veri. Della continuità dunque non si può fare purtroppo a meno. E' però vero che in pratica non si riescono ad esibire concretamente applicazioni lineari su $\mathcal{D}$ che non siano continue; esse esistono ma non se ne possono trovare costruzioni esplicite dirette. In altri termini nelle nostre considerazioni successive non incapperemo mai in applicazioni lineari su $\mathcal{D}$ che non siano continue. Per quanto detto, nel seguito di questo capitolo, faremo soltanto inizialmente alcune semplici verifiche di continuità rimandando all'appendice per altre più complesse.

Presentiamo ora alcuni fondamentali esempi di distribuzioni.

Esempio 4.9 (**Distribuzioni regolari**) Sia $f \in \mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Ad essa possiamo associare la distribuzione T_f definita nel modo seguente:

$$< T_f, \phi >:= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x\,, \quad \phi \in \mathcal{D} \tag{4.6}$$

Si noti innanzitutto che l'integrale sopra ha sempre senso. In effetti se $\phi \in \mathcal{D}$ si ha che esiste $a \geq 0$ tale che $\phi(x) = 0$ se $|x| > a$. Quindi l'integrale in questione si riduce di fatto ad un integrale su un intervallo limitato $[-a, a]$ di una funzione $f(x)\phi(x)$ che è in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Per essere sicuri che (4.6) definisce una distribuzione dobbiamo verificare che si tratti di un'applicazione lineare e continua. La linearità segue semplicemente dalla linearità dell'operazione di integrazione (lasciamo i dettagli per esercizio). Vediamo la continuità: supponiamo che $\phi_n \to 0$ in $\mathcal{D}$. Si ha allora che esiste $a \geq 0$ tale che $\phi_n(x) = 0$ se $|x| > a$. Inoltre $\phi_n \to 0$ uniformemente. Possiamo allora stimare come segue:

$$\begin{aligned} | < T_f, \phi_n > | &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi_n(x)\ \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_{-a}^{a} f(x)\phi_n(x)\ \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_{-a}^{a} |f(x)||\phi_n(x)|\ \mathrm{d}x \\ &\leq \left[\sup_{-a<x<a} |\phi_n(x)| \right] \int_{-a}^{a} |f(x)|\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

A causa della convergenza uniforme si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{-a<x<a} |\phi_n(x)| = 0\,.$$

Per confronto si ha quindi che

$$\lim_{n\to+\infty} < T_f, \phi_n >= 0$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

Sono proprio le distribuzioni regolari a motivare la notazione $< T, \phi >$. In effetti si ha che $< T_f, \phi >$ si esprime come il prodotto scalare nella norma quadratica tra le funzioni f e ϕ.

Esempio 4.10 (**La delta di Dirac**) La distribuzione delta di Dirac nel punto $a \in \mathbb{R}$ è definita come

$$< \delta_a, \phi >= \phi(a)\,, \quad \phi \in \mathcal{D}\,.$$

E' immediato verificare la linearità e la continuità di questa applicazione che così è effettivamente una distribuzione. Questa non è una distribuzione regolare, cioè non esiste una funzione $f \in \mathcal{R}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tale che

$$< \delta_a, \phi >= \phi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\, \mathrm{d}x$$

qualunque sia $\phi \in \mathcal{D}$. Questo è intuitivo, f per quanto a supporto molto piccolo intorno ad a farà una media di ϕ e non potrà mai fornire l'esatta valutazione nel punto a. Non proponiamo una dimostrazione formale di questo fatto adesso; in seguito vedremo una dimostrazione indiretta. □

L'insieme di tutte le distribuzioni viene indicato con il simbolo $\mathcal{D}'$. Esso è uno spazio vettoriale reale in modo naturale. In effetti, date T_1 e T_2 in $\mathcal{D}'$ e due scalari λ_1 e λ_2, possiamo definire la distribuzione combinazione lineare $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ come

$$< \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \phi >= \lambda_1 < T_1, \phi > + \lambda_2 < T_2, \phi > \;.$$

Si verifichi per esercizio che questa sopra è effettivamente una distribuzione (si tratta di verificare la linearità e la continuità).

Esempio 4.11 Siano $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ punti della retta e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ scalari. La distribuzione $\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}$ agisce nel modo seguente:

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}, \phi \right\rangle \sum_{i=1}^n \lambda_i < \delta_{a_i}, \phi > \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(a_i)\,.$$ □

Esempio 4.12 La distribuzione $T = T_{\sin x} - 12\delta_4$ agisce sulle funzioni test nel modo seguente

$$< T, \phi >= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \phi(x)\, \mathrm{d}x - 12\phi(4)\,. \qquad \square$$

Esempio 4.13 Consideriamo l'applicazione $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ data da

$$< T, \phi >= \int\limits_{\mathbb{R}} |\phi(x)|\, \mathrm{d}x\,.$$

Questa non è una distribuzione in quanto non è verificata la linearità. Infatti si ha sempre, ad esempio, $< T, -\phi >=< T, \phi >$ qualunque sia $\phi \in \mathcal{D}$.

4.5 Le proprietà fondamentali delle distribuzioni

Abbiamo appena visto come combinare linearmente le distribuzioni. Vogliamo ora estendere alle distribuzioni altre operazioni comunemente utilizzate nell'ambito delle funzioni: la traslazione, il riscaldamento, la derivazione. L'idea è di partire dalle distribuzioni regolari e cercare da queste di trovare il modo per estendere la definizione alle altre distribuzioni.

Prima di continuare facciamo un'ulteriore convenzione notazionale che sarà molto utile in seguito. Denoteremo le distribuzioni T spesso con il simbolo $T(x)$ anche se T non è in generale una funzione della variabile x. Scriveremo quindi $< T(x), \phi(x) >$ per indicare l'azione sulla funzione test ϕ. Il motivo di questa notazione è che ci agevolerà nelle notazioni per la traslazione che indicheremo $T(x - x_0)$ e per i riscalamenti che indicheremo $T(ax)$ come se fossero funzioni. Naturalmente queste sono soltanto scelte notazionali e non devono far perdere di vista il fatto che in generale le distribuzioni $T(x)$ non sono funzioni della variabile x e che quindi $< T(x), \phi(x) >$ non sta per l'integrale del prodotto, ma come l'azione di T sulla funzione test ϕ.

4.5.1 La traslazione

Cominciamo dunque con le traslazioni. Sia $f \in \mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Come è fatta la distribuzione associata a $f(x - x_0)$? Vale la seguente catena di eguaglianze (la seconda si ottiene con una sostituzione nell'integrale) qualunque sia $\phi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} < T_{f(x-x_0)}(x), \phi(x) > &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0)\phi(x)\ \mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x + x_0)\ \mathrm{d}x \\ &= < T_{f(x)}, \phi(x + x_0) > \ . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Quindi l'azione della distribuzione associata alla funzione $f(x-x_0)$ sulle funzione test $\phi(x)$ è eguale all'azione della distribuzione associata ad $f(x)$ sulla funzione test traslata in senso opposto $\phi(x+x_0)$. Questo suggerisce di definire la traslazione di una qualunque distribuzione $T(x)$ come quella distribuzione, indicata $T(x-x_0)$, tale che

$$< T(x-x_0), \phi(x) >=< T(x), \phi(x+x_0) > \tag{4.8}$$

qualunque sia la funzione test $\phi(x)$. Si noti come l'espressione $< T(x), \phi(x+x_0) >$ abbia senso in quanto $\phi(x+x_0)$ è ancora una funzione test. Questa è una buona definizione in quanto effettivamente definisce una distribuzione: si ricordi che per dare una distribuzione si deve dire quanto essa vale su ogni funzione test e poi verificare linearità e continuità. L'espressione sopra definisce $T(x-x_0)$ contro ogni funzione test $\phi(x)$ in quanto , linearità e continuità seguono facilmente dal fatto che la $T(x)$ aveva le due proprietà. Si noti inoltre che per distribuzioni regolari, la traslazione così definita coincide con la traslazione usuale delle funzioni, nel senso che

$$T_{f(x)}(x-x_0) = T_{f(x-x_0)}(x)$$

Questo segue semplicemente confrontando (4.7) e (4.8).

Esempio 4.14 Siano $a, x_0 \in \mathbb{R}$. Consideriamo δ_a e calcoliamo la traslata $\delta_a(x+x_0)$ in base alla precedente definizione:

$$< \delta_a(x+x_0), \phi(x) >=< \delta_a(x), \phi(x-x_0) >= \phi(a-x_0) =< \delta_{a-x_0}(x), \phi(x) > \ .$$

Dunque si ha che $\delta_a(x+x_0) = \delta_{a-x_0}(x)$.

4.5.2 Il riscalamento

Sia $f \in \mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ e sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vogliamo capire come opera la distribuzione associata alla funzione $f(ax)$. Qualunque sia $\phi \in \mathcal{D}$, si ha che

$$\begin{aligned} < T_{f(ax)}, \phi(x) > &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\phi(x)\ \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{1}{|a|}\phi\left(\frac{x}{a}\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \left\langle T_{f(x)}, \tfrac{1}{|a|}\phi\left(\tfrac{x}{a}\right)\right\rangle \end{aligned} \tag{4.9}$$

(la seconda eguaglianza segue operando la sostituzione $t = ax$). Questo suggerisce di definire il riscalamento di una qualunque distribuzione $T(x)$ come quella distribuzione indicata $T(ax)$ tale che

$$< T(ax), \phi(x) >= \left\langle T(x), \frac{1}{|a|}\phi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle \tag{4.10}$$

qualunque sia la funzione test $\phi(x)$. Anche in questo caso si sfrutta il fatto che lo spazio delle funzioni test è chiuso rispetto ai riscalamenti per esser certi che la parte a destra della (4.10) abbia senso. Per dimostrare che questo definisce una distribuzione rimane da verificare linearità e continuità e questo è lasciato per esercizio. Si noti come anche in questo caso il riscalamento di una distribuzione regolare $T_{f(x)}(ax)$ coincida con la distribuzione $T_{f(ax)}$. Si noti infine che per $a = -1$ otteniamo la definizione dell'inversione temporale di una distribuzione:

$$< T(-x), \phi(x) >=< T(x), \phi(-x) > \tag{4.11}$$

Esempio 4.15 Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$. Consideriamo δ_a e calcoliamo il riscalamento $\delta_a(bx)$ in base alla precedente definizione:

$$< \delta_a(bx), \phi(x) >= \left\langle \delta_a(x), \frac{1}{|b|}\phi\left(\frac{x}{b}\right)\right\rangle = \frac{1}{|b|}\phi\left(\frac{a}{b}\right) .$$

Ne segue che

$$\delta_a(bx) = \frac{1}{|b|}\delta_{\frac{a}{b}} .$$

4.5.3 La moltiplicazione

Supponiamo di avere due funzioni f e g in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, una delle due limitate. Il loro prodotto fg è ancora in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. La distribuzione T_{fg} agisce nel modo seguente sulle funzioni test:

$$< T_{fg}(x), \phi(x) >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x$$

Non è chiaro come questa azione si possa esprimere in termini di T_f e T_g per poi generalizzarla al prodotto di generiche distribuzioni. Potremmo essere tentati di scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x =< T_f(x), g(x)\phi(x) > .$$

Si noti tuttavia che se g non è $\mathcal{C}^\infty$, $g(x)\phi(x)$ non è più una funzione test e l'espressione sopra non avrebbe quindi senso se al posto di T_f vi fosse una distribuzione non regolare. Affinché $g(x)\phi(x)$ sia ancora una funzione test qualunque sia ϕ funzione test, è necessario e sufficiente che $g(x)$ sia di classe C^∞. Questi problemi sono intrinseci alle distribuzioni. In effetti le distribuzioni, in generale, *non possono essere moltiplicate tra loro*. Il massimo che si può fare è moltiplicare una distribuzione per una funzione C^∞: in effetti, se $T \in \mathcal{D}'$ e $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ possiamo definire la distribuzione ψT come

$$< \psi(x)T(x), \phi(x) >=< T(x), \psi(x)\phi(x) >, \quad \phi \in \mathcal{D}$$

$\psi(x)T(x)$ così definita è effettivamente una distribuzione: la linearità la lasciamo per esercizio mentre per la continuità rimandiamo all'appendice.

Esempio 4.16 Sia $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Calcoliamo $\psi\delta_a$. Si ha che

$$< \psi\delta_a, \phi >=< \delta_a, \psi\phi >= \psi(a)\phi(a)\,.$$

Abbiamo dunque ottenuto che

$$\psi\delta_a = \psi_a\delta_a\,.$$

4.5.4 La derivazione

Consideriamo questa volta una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata $f' \in \mathcal{R}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Studiamo $T_{f'}(x)$:

$$\begin{aligned}
< T_{f'(x)}(x), \phi(x) > &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x \\
&= f(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x =< T_{f(x)}, -\phi'(x) >
\end{aligned} \tag{4.12}$$

(la seconda eguaglianza segue dall'integrazione per parti, la terza dal fatto che $f(x)\phi(x)$ è nulla fuori di un insieme limitato). Questo suggerisce di definire la derivata di una qualunque distribuzione $T(x)$ come quella distribuzione indicata $T'(x)$ tale che

$$< T'(x), \phi(x) >=< T(x), -\phi'(x) > \tag{4.13}$$

E' ancora una buona definizione? Sicuramente è un'applicazione da $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$ che si vede facilmente essere lineare. Per quanto riguarda la continuità, si noti innazitutto che se abbiamo una successione ϕ_n in $\mathcal{D}$ tale che $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{D}$, allora anche $\phi'_n \to \phi'$ in $\mathcal{D}$ (si pensi al perché). Quindi,

$$< T'(x), \phi_n(x) >= - < T(x), \phi'_n(x) >\to - < T(x), \phi'(x) >=< T'(x), \phi(x) >$$

come volevamo. Si noti inoltre che anche in questo caso il nuovo concetto di derivazione coincide col vecchio nel caso di derivazione di distribuzioni regolari con simbolo derivabile, cioè se $f(x)$ ammette derivata $f'(x) \in \mathcal{R}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, le considerazioni precedenti mostrano che

$$T'_{f(x)}(x) = T_{f'(x)}(x)\,. \tag{4.14}$$

In base alla definizione che abbiamo appena dato, ogni distribuzione T è derivabile. La derivata T' essendo una distribuzione è dunque ancora derivabile. Ogni distribuzione può quindi essere derivata quante volte vogliamo. Indicheremo con il simbolo $T^{(n)}$ la derivata n-esima della distribuzione T.

Esempio 4.17 Calcoliamo le derivate della delta di Dirac. In base alla definizione data:

$$< \delta_a'(x), \phi(x) >= - < \delta_a(x), \phi'(x) >= -\phi'(a) .$$

La derivata n-esima sarà quindi data da

$$< \delta_a^{(n)}(x), \phi(x) >= (-1)^n \phi^{(n)}(a) .$$

□

Esempio 4.18 Sia $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$. Consideriamo la distribuzione $T = \psi(x)\delta_a^{(n)}$. Valutiamo la sua azione sulle funzioni test. Utilizzando il risultato dell'Esempio **??** si ottiene,

$$< T, \phi >=< \delta_a^{(n)}, \psi\phi >= (-1)^n (\psi\phi)^{(n)}(a) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(n-k)}(a)\phi^{(k)}(a) .$$

Dunque si ha,

$$T = \psi(x)\delta_a^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\psi^{(n-k)}(a)\delta_a .$$

Dedichiamoci ora alle derivate delle distribuzioni regolari. Si noti che ogni distribuzione T_f con $f \in \mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, ammetterà derivata. Tuttavia nei casi in cui il simbolo f non è lei stessa derivabile, non è chiaro come questa derivata si calcoli. Vedremo che in generale non sarà una distribuzione regolare. Una precisazione notazionale: quando si deriva una distribuzione regolare T_f, la derivata T_f' (che in genere sarà una distribuzione) si dice anche derivata distribuzionale della funzione f.

Esempio 4.19 Calcoliamo la derivata della distribuzione regolare T_H associata alla funzione di Heaviside $H(x)$. Si noti che, poiché $H(x)$ non è derivabile come funzione non si può utilizzare la (4.14). Chi è dunque T_H'? Usiamo la definizione:

$$< T_H'(x), \phi(x) >= - < T_H(x), \phi'(x) > = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\phi'(x) \, \mathrm{d}x$$

$$= - \int_{0}^{+\infty} \phi'(x) \, \mathrm{d}x = \phi(0) .$$

Abbiamo dunque,

$$< T_H'(x), \phi(x) >= \phi(0)$$

il che vuol dire che $T_H'(x) = \delta_0(x)$: la derivata della distribuzione regolare associata alla Heaviside è la delta di Dirac in 0. □

L'esempio precedente ammette la seguente generalizzazione:

Proposizione 4.20 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione ovunque derivabile tranne che in un punto x_0 dove $f(x)$ presenta al più una discontinuità eliminabile od un salto. Supponiamo inoltre che $f'(x)$ definita per $x \neq x_0$ sia in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Allora,*

$$T'_{f(x)}(x) = [f(x_0+) - f(x_0-)]\delta_{x_0}(x) + T_{f'(x)}(x)$$

dove $f(x_0+)$ e $f(x_0-)$ indicano i limiti, destro e sinistro rispettivamente, di $f(x)$ per $x \to x_0$.

Dimostrazione. In base alla definizione di derivata di una distribuzione abbiamo che

$$\begin{aligned} < T'_f(x), \phi(x) > &= - < T_f(x), \phi'(x) >= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= - \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.15}$$

Poiché $f(x)$ è una funzione continua su $(-\infty, x_0]$, se in x_0 la facciamo valere il suo limite sinistro $f(x_0-)$, ed è ovunque derivabile si ha che integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x &= f(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x \\ &= f(x_0-)\phi(x_0) - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Similmente si ottiene,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x &= f(x)\phi(x)\Big|_{x_0}^{+\infty} - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -f(x_0+)\phi(x_0) - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Sostituendo queste due espressioni nella (4.15) otteniamo la tesi. □

Osservazione: Con riferimento al risultato precedente si noti che nel caso in cui la funzione $f(x)$ sia continua nel punto x_0, anche se ivi non necessariamente derivabile, si ha che la derivata della distribuzione T_f non contiene parte singolare. Si ha cioè

$$T'_f = T_{f'}\,.$$

Esempio 4.21 Calcoliamo la derivata della distribuzione regolare avente il simbolo

$$f(x) = e^x H(x-1)\,.$$

Possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ e^x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}\,.$$

E' chiaro quindi che siamo nelle ipotesi della Proposizione 4.20: la nostra funzione è di classe C^1 tranne che nel punto 1 dove presenta un salto. Si ottiene dunque

$$T_f' = (e-0)\delta_1 + T_{f'}\,,$$

dove $f'(x) = e^x H(x-1) = f(x)$. Quindi,

$$T_f' = e\delta_1 + T_f\,.$$

Esempio 4.22 Calcoliamo la derivata della distribuzione regolare avente il simbolo

$$f(x) = |x| + x^2\,.$$

La nostra funione è chiaramente di classe C^1 tranne che nel punto 0 dove è comunque continua. Applicando di nuovo la Proposizione 4.20 (in particolare l'osservazione ad essa seguente), si ha che $T_f' = T_{f'}$ dove $f'(x) = \operatorname{sgn}(x) + 2x$.

La Proposizione 4.20 si può estendere al caso in cui vi siano un numero finito di punti di discontinuità della $f(x)$.

Proposition 4.23. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione ovunque derivabile tranne che in un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_k$ dove $f(x)$ presenta al più una discontinuità eliminabile od un salto. Supponiamo inoltre che $f'(x)$ (definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$) sia localmente integrabile. Allora,*

$$T_f'(x) = \sum_{i=1}^{k} [f(x_i+) - f(x_i-)]\delta_{x_i}(x) + T_{f'}(x)\,.$$

Esempio 4.24 Calcoliamo la derivata della distribuzione regolare avente il simbolo

$$f(x) = H(x) - 2H(2-x)\,.$$

La nostra funione è chiaramente di classe C^1 tranne che nei punti 0 e 2. In effetti si ha

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{if } x < 0 \\ -1 & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

Si noti che $f'(x) = 0$ per ogni $x \neq 0, 2$. Applicando la Proposizione 4.23 si ottiene quindi $T_f' = \delta_0 + 2\delta_2$

I salti dunque producono delta di Dirac a livello della derivata. Meno facile è capire che cosa succeda quando la funzione che si deriva presenta ad esempio un asintoto in un punto. Non miriamo a presentare una teoria generale che studi questo tipo di fenomeni e ci limitiamo invece a presentare un paio di esempi significativi.

Esempio 4.25 Si consideri la funzione $f(x) = \ln|x|$. Essa è in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Calcoliamo la sua derivata distribuzionale. In base alla definizione si ha che

$$< T'_{\ln|x|}, \phi >= - < T_{\ln|x|}, \phi' > - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{4.16}$$

Come nei casi considerati precedentemente, non possiamo integrare per parti, senza prima spezzare l'integrale isolando la singolarità in 0. Possiamo scrivere,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln|x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{+\infty} \ln|x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+}\left[(\ln\epsilon)\phi(-\epsilon) - \int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x - (\ln\epsilon)\phi(\epsilon) - \int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+} - \ln\epsilon[\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)] - \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Si noti ora che

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \ln\epsilon[\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)] = (\lim_{\epsilon\to 0+} \epsilon\ln\epsilon) \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)}{\epsilon} = 0 \cdot 2\phi'(0) = 0$$

(si giustifichi questi passaggi). Sostituendo in (4.17) si ha dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x = - \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

e quindi, tornando alla derivata che volevamo calcolare, utilizzando la (4.16) otteniamo

$$< T'_{\ln|x|}, \phi >= \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right]\,. \tag{4.18}$$

Potremmo essere tentati di scrivere

$$< T'_{\ln|x|}, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

e di dire come conseguenza che la derivata della distribuzione regolare $T_{\ln|x|}$ è la distribuzione regolare $T_{1/x}$ cioè quella ottenuta semplicemente derivando il simbolo $\ln|x|$. Tuttavia questo non è corretto in quanto la funzione $1/x$ non è in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$: la singolarità che presenta in 0 non è integrabile nel senso di Riemann (e neppure di Lebesgue o di qualunque altra teoria dell'integrazione). Dunque $1/x$ non può definire una distribuzione regolare. Tuttavia la relazione (4.18) è perfettamente corretta ed in particolare implica che l'applicazione

$$\phi \mapsto \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

è una distribuzione (infatti è proprio la derivata di $T_{\ln|x|}$). In particolare questo vuol dire che, nonostante la singolarità non integrabile di $1/x$, il limite sopra esiste sempre finito. Questo si può anche dimostrare direttamente (esercizio): il fatto cruciale è che il limite venga fatto sulla somma dei due integrali che separatamente invece divergerebbero, il fatto che $1/x$ sia una funzione dispari gioca qui un ruolo fondamentale. Questa distribuzione viene chiamata il valore principale di $1/x$, ed indicata v.p.$1/x$. Dunque

$$T'_{\ln|x|} = \text{v.p.}\frac{1}{x}\,. \qquad \square$$

Incontreremo ancora, più avanti la distribuzione v.p.$1/x$. Intanto mostriamone un'utile ed intuitiva proprietà:

Osservazione: Vale la seguente relazione:

$$x\left[\text{v.p.}\,\frac{1}{x}\right] = T_1\,. \tag{4.19}$$

In effetti,

$$\begin{aligned}\left\langle x\left[\text{v.p.}\,\tfrac{1}{x}\right], \phi(x)\right\rangle &= \left\langle \text{v.p.}\,\tfrac{1}{x}, x\phi(x)\right\rangle \\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{x\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{x\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,\mathrm{d}x =< T_1(x), \phi(x) > \;.\end{aligned}$$

Esercizio 4.1 Dimostrare che la distribuzione v.p.$1/x$ ammette anche la seguente rappresentazione alternativa: fissato un qualunque $a > 0$ vale

$$< \text{v.p.}1/x, \phi >= \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{+a}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \forall\phi\in\mathcal{D}\,.$$

La derivata distribuzionale gode di molte proprietà simili al caso della derivata di funzioni. Alcune sono raccolte nella seguente proposizione.

Proposizione 4.26 *Siano* $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$, $\lambda_1, \lambda_2, x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Allora valgono le seguenti relazioni:*

(i) $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)' = \lambda_1 T_1' + \lambda_2 T_2'$.
(ii) $(T(x - x_0))' = T'(x - x_0)$.
(iii) $(T(ax))' = aT'(ax)$.

Dimostrazione. Dimostriamo (iii) lasciando (i) e (ii) per esercizio. Utilizzando la definizione di derivata e di riscalamento di una distribuzione, si ottiene

$$< (T(ax))', \phi(x) >= - < T(ax), \phi'(x) >=< T(x), -|a|^{-1}\phi'(a^{-1}x) > \ .$$

D'altra parte, considerando il secondo membro,

$$\begin{aligned} < aT'(ax), \phi(x) > &= a < T'(x), |a|^{-1}\phi(a^{-1}x) > \\ &= - < T(x), a|a|^{-1}(\phi(a^{-1}x))' > \\ &= < T(x), -a|a|^{-1}a^{-1}\phi'(a^{-1}x) > \\ &= < T(x), -|a|^{-1}\phi'(a^{-1}x) > \ . \end{aligned}$$

Avendo ottenuto lo stesso risultato, (iii) segue. □

Osservazione: Segue dalle regole precedenti che proprio come per le funzioni, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, si ha

$$T(ax + b)' = T(a(x + a^{-1}b))' = aT'(a(x + a^{-1}b)) = aT'(ax + b)\,.$$

Esempio 4.27 Ricalcoliamo la derivata dell'Esempio 4.24 utilizzando le regole precedenti. Si noti che $T_f(x) = T_H(x) - 2T_H(2 - x)$. Si ha dunque:

$$T_f'(x) = T_H'(x) - 2(T_H(2-x)' = T_H'(x) + 2T_H'(2-x) = \delta_0(x) + 2\delta_0(2-x)\delta_0(x) + 2\delta_2(x)\,.$$

Vale anche una generalizzazione della formula di Leibnitz:

Proposizione 4.28 *Siano* $T \in \mathcal{D}'$ *e* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Si ha che*

$$(\psi(x)T(x))' = \psi'(x)T(x) + \psi(x)T'(x)\,.$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Esempio 4.29 Calcoliamo la derivata della distribuzione $T(x) = (x^2 - 9)T_{I_{[-2,3]}}(x)$. Si noti che $T_{I_{[-2,3]}(x)} = T_H(x + 2) - T_H(x - 3)$. Dunque si ottiene:

$$T'(x) = 2xT_{I_{[-2,3]}}(x) + (x^2 - 9)[\delta_{-2}(x) - \delta_3(x)] = 2xT_{I_{[-2,3]}}(x) - 5\delta_{-2}(x)\,.$$

4.6 Convergenza di distribuzioni

Sullo spazio delle distribuzioni $\mathcal{D}'$ si può introdurre un utile concetto di convergenza nel modo seguente. Data una successione T_n in $\mathcal{D}'$ diciamo che T_n converge ad una distribuzione T in $\mathcal{D}'$ se accade la cosa seguente:

$$< T_n, \phi > \to < T, \phi > , \quad \forall \phi \in \mathcal{D} .$$

Valgono alcune immediate proprietà sulla convergenza di distribuzioni. Se abbiamo due successioni convergenti di distribuzioni $T_n \to T$ e $S_n \to S$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si verifica facilmente che $\lambda T_n + \mu S_n \to \lambda T + \mu S$. Si noti in particolare che dire che $T_n \to T$ è equivalente a dire che $T_n - T \to 0$ o che $T - T_n \to 0$.

Esempio 4.30 Consideriamo la successione $\delta_n \in \mathcal{D}'$ e facciamo vedere che essa tende alla distribuzione nulla. In effetti se $\phi \in \mathcal{D}$ si ha che

$$< \delta_n, \phi >= \phi(n) = 0$$

per n sufficientemente grande in virtù del fatto che ϕ ha supporto compatto. $\square$

Esempio 4.31 Consideriamo la successione

$$T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_0)$$

e cerchiamo di stabilire a cosa converge. Se $\phi \in \mathcal{D}$ si ha che

$$< T_n, \phi >=< n(\delta_{1/n} - \delta_0), \phi >= \frac{\phi(1/n) - \phi(0)}{1/n} \to \phi'(0) .$$

Dunque abbiamo dimostrato che

$$n(\delta_{1/n} - \delta_0) \to -\delta_0' .$$

Esempio 4.32 Consideriamo la successione $\delta_{(-1)^n} \in \mathcal{D}'$ e facciamo vedere che essa non converge. In effetti se $\phi \in \mathcal{D}$ si ha che

$$< \delta_{(-1)^n}, \phi >= \phi((-1)^n) .$$

Se ϕ assume valori diversi nei due punti -1 e $+1$, è chiaro che la successione $\phi((-1)^n)$ oscillerà tra questi due valori e non sarà dunque convergente.

Esempio 4.33 Consideriamo la successione di somme parziali

$$\sum_{k=-n}^{n} \delta_k$$

Vorremmo far vedere che essa converge ad una distribuzione T. Ma chi è la possibile candidata distribuzione limite? Verrebbe di pensare all'oggetto:

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n \, ,$$

ma ha senso? Dobbiamo dire come T agisce sulle funzioni test; definiamo nel modo naturale

$$\left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n, \phi \right\rangle \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi(n)$$

Si noti innazitutto che la somma a secondo membro è in realtà una somma finita in virtù di nuovo del fatto che ϕ ha supporto limitato. Bisogna far vedere che effettivamente si tratta di una distribuzione, cioè che la mappa sulle funzioni test che abbiamo appena definito è lineare e continua. Per quanto riguarda la linearità si tratta come al solito di una verifica semplice che lasciamo per esercizio. Per la continuità rimandiamo all'appendice. Dunque T così definita è effettivamente una distribuzione che consiste in infinite delta di Dirac posizionate nella griglia dei numeri interi. Essa viene detta *treno di impulsi.* Facciamo vedere per concludere che

$$\sum_{k=-n}^{n} \delta_k \to \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n$$

Facciamo vedere equivalentemente che la differenza

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n - \sum_{k=-n}^{n} \delta_k$$

tende a 0. Fissiamo $\phi \in \mathcal{D}$ e notiamo in effetti che

$$\left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n - \sum_{k=-n}^{n} \delta_k, \phi \right\rangle \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| > a}} \phi(n)$$

è eguale a 0 se n è sufficientemente grande. □

L'esempio precedente ammette un'utile ed evidente generalizzazione. Sia a_n una successione che diverge a $+\infty$ e sia b_n una qualunque successione. Consideriamo la successione di distribuzioni:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \delta_{a_k} \, .$$

Ripetendo le argomentazioni precedenti si può far vedere che se definiamo

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \delta_{a_k}\,,$$

intendendo che se $\phi \in \mathcal{D}$, si ha

$$< T, \phi >= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \phi(a_k)\,,$$

T risulta una distribuzione e $T_n \to T$. Similmente accade se avessimo che invece a_k tende a $-\infty$. Queste considerazioni permettono di estendere la Proposizione 4.23 a situazioni con un'infinità di punti di discontinuità:

Proposition 4.34. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione ovunque derivabile tranne che in una successione di punti x_k (crescente a $+\infty$ o decrescente a $-\infty$) dove $f(x)$ presenta al più una discontinuità eliminabile od un salto. Supponiamo inoltre che $f'(x)$ (definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_k\,, : k \in \mathbb{N}\}$) sia localmente integrabile. Allora,*

$$T'_f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} [f(x_i+) - f(x_i-)]\delta_{x_i}(x) + T_{f'}(x)\,. \qquad (4.20)$$

Dimostrazione. Supponiamo che x_k tenda crescendo a$+\infty$ e consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = f(x) I_{]-\infty, x_n]}(x)\,.$$

E' chiaro che $T_{f_n} \to T_f$. Ne segue che $T'_{f_n} \to T'_f$. Si notiora che poichè la f_n presenta un numero finito di discontinuità, ad essa si può applicare la Proposizione 4.23 ed ottenere quindi che

$$T'_{f_n}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i+) - f(x_i-)]\delta_{x_i}(x) - f(x_n-)\delta_{x_n}(x) + T_{f'_n}(x)\,.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene quindi la formula (4.20).

Esempio 4.35 Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 1 e tale che $f(x) = x$ per ogni $x \in [0, 1[$. Essa presenta salti nei punti dell'insieme $\mathbb{Z}$. Applicando il risultato precedente alle due funzioni $f(x)H(x)$ e $f(x)H(-x)$ si ottiene che

$$T'_f = -2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k + T_1\,.$$

Esempio 4.36 Consideriamo la funzione $f(x) = |\sin x|$. Essa non è derivabile in tutti i punti del tipo $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Di nuovo per il risultato precedente si ottiene che

$$T'_f = T_{f'}\,,$$

dove

$$f'(x) = \mathrm{sgn}(\sin x) \cos x\,.$$

Esempio 4.37 Consideriamo la successione di distribuzioni

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_k \in \mathcal{D}' .$$

e vediamo se essa converge alla distribuzione nulla. In effetti se $\phi \in \mathcal{D}$ si ha che

$$< T_n, \phi >= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \phi(k) .$$

Poichè ϕ ha supporto compatto, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\phi(k) = 0$ per ogni $k > n_0$. Si ha dunque che se $n \geq n_0$,

$$< T_n, \phi >= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} \phi(k) .$$

E' chiaro che il secondo membro sopra tende a 0 per $n \to +\infty$ e quindi è dimostrato.

Vediamo qualche esempio che coinvolge le distribuzioni regolari. Supponiamo di avere una successione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di funzioni continue a tratti che converge uniformemente su tutti gli intervalli limitati ad una funzione f ancora continua a tratti. Allora T_{f_n} converge a T_f nel senso delle distribuzioni (si provi a dimostrarlo). Si possono indebolire le ipotesi e richiedere che f_n converga ad f solo in norma quadratica su ogni intervallo limitato ed ottenere ancora che T_{f_n} converge a T_f nel senso delle distribuzioni (anche questo si provi a dimostrarlo per esercizio).

Esempio 4.38 Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = nI_{[n,+\infty[}(x)$. Chiaramente $f_n(x) \to 0$ uniformemente su ogni intervallo limitato e dunque $T_{f_n} \to 0$ nel senso delle distribuzioni.

Esempio 4.39 Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = nI_{[-n,n]}(x)$. Chiaramente $f_n(x) \to +\infty$ qualunque sia $x \in \mathbb{R}$. Questo di per sè non dimostra che T_{f_n} non converge nel senso delle distribuzioni: facciamo vedere che effettivamente è così:

$$< T_{f_n}, \phi >= n \int_{-n}^{n} \phi(x)\, \mathrm{d}x .$$

Si noti ora che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} \phi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\, \mathrm{d}x .$$

Nell'ipotesi in cui questo integrale da $-\infty$ a $+\infty$ sia non nullo, ad esempio strettamente positivo, si ottiene che

$$\lim_{n\to+\infty} < T_{f_n}, \phi >= +\infty .$$

Questo dimostra il nostro asserto.

La convergenza delle distribuzioni si può tuttavia avere anche in casi in cui i simboli corrispondenti non convergono affatto. Questo viene mostrato negli esempi seguenti:

Esempio 4.40 Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = \sin nx$. Sappiamo che la $f_n(x)$ non converge a nessuna funzione $f(x)$, neppure puntualmente. Tuttavia si noti che

$$
\begin{aligned}
< T_{\sin nx}, \phi > &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin nx\phi(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n} \cos nx\phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos nx\phi'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos nx\phi'(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

(dove abbiamo usato un passo d'integrazione per parti ed utilizzato il fatto che ϕ ha supporto limitato). Si noti ora che

$$
\left| \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos nx\phi(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\cos nx||\phi'(x)|\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi'(x)|\ \mathrm{d}x
$$

L'ultima quantità è chiaramente infinitesima per $n \to +\infty$ in quanto si tratta di $1/n$ moltiplicata per una costante finita. Quindi, per la catena di eguaglianze e diseguaglianze che abbiamo stabilito segue che

$$< T_{\sin nx}, \phi > \to 0$$

Dunque $T_{\sin nx} \to 0$! □

Un altro esempio importante è il seguente che mostra come la delta di Dirac si possa pensare come limite di distribuzioni regolari.

Esempio 4.41 Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n = np_{1/n}$$

e mostriamo che T_{f_n} converge alla delta in 0. Prendiamo una qualunque $\phi \in \mathcal{D}$ e consideriamo:

$$< T_{f_n}, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\phi(x)\ \mathrm{d}xn \int_{-1/2n}^{1/2n} \phi(x)\ \mathrm{d}x = \phi(\xi)$$

dove ξ è un punto in $[-1/2n, 1/2n]$ (abbiamo utilizzato il teorema della media integrale). Al tendere di $n \to +\infty$, ξ deve tendere a 0 e per la continuità di ϕ, $\phi(\xi)$ tende a $\phi(0)$. Quindi abbiamo mostrato che

$$< T_{f_n}, \phi > \to \phi(0)$$

in altre parole che $T_{f_n} \to \delta_0$. □

Mostriamo ora un'esempio dove una successione di distribuzioni costituite da delta di Dirac converge invece ad una distribuzione regolare.

Esempio 4.42 Consideriamo la successione di distribuzioni

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n}} .$$

Sia $\phi \in \mathcal{D}$. Si ha che

$$< T_n, \phi > = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \phi(k/n) .$$

Quella sopra è una somma integrale della funzione ϕ sull'intervallo $[0, 1]$ e relativa alla partizione

$$[0, 1/n] , [1/n, 2/n] , \ldots , [(n-1)/n, n/n] .$$

Essendo ϕ integrabile su $[0, 1]$ si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \phi(k/n) = \int_0^1 \phi(x)\, \mathrm{d}x .$$

Si ha dunque che

$$T_n \to T_{I_{[0,1]}} .$$

4.7 Supporto di una distribuzione

Richiamiamo innazitutto il concetto di supporto di una funzione. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione in $\mathcal{R}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ e consideriamo l'insieme N_f ottenuto facendo l'unione di tutti gli intervalli aperti sui quali f è nulla. Allora il supporto di f, è dato dal complementare di N_f, cioè

$$\mathrm{supp}(f) = (N_f)^c$$

Esso è quindi per definizione sempre un insieme chiuso.

Esempio 4.43 Sia $f(x) = \sin x$. Non ci sono intervalli aperti sui quali f è nulla. Quindi $N_f = \emptyset$ e di conseguenza $\mathrm{supp}(f) = \mathbb{R}$ (e non $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ come si sarebbe potuto pensare. □

Si può dimostrare che in generale si ha

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

(dove la riga sopra l'insieme indica l'operazione topologica di chiusura).

Veniamo ora alle distribuzioni. Data $T \in \mathcal{D}'$ e un intervallo aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice che T è nulla su A se per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ tale che $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq A$ si ha che $< T, \phi >= 0$. Sia N_T l'unione di tutti gli intervalli aperti sui quali T è nulla. Definiamo quindi il supporto della distribuzione T come il complementare

$$\operatorname{supp}(T) = (N_T)^c \,.$$

Se $T = T_f$ è una distribuzione regolare non è difficile dimostrare che $N_T = N_f$.

Esempio 4.44 Consideriamo $T = \delta_{x_0}$ e mostriamo che $\operatorname{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$. In effetti se consideriamo un qualunque intervallo aperto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ e $\phi \in \mathcal{D}$ tale che $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq (a, b)$ si ha che $\phi(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)^c$ e quindi in particolare $< \delta_{x_0}, \phi >= \phi(x_0) = 0$. Dunque $N_{\delta_{x_0}} = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ e quindi $\operatorname{supp}(\delta_{x_0}) = \{0\}$. □

L'operazione di derivazione non aumenta il supporto di una distribuzione:

Proposizione 4.45 *Sia $T \in \mathcal{D}'$. Allora*

$$\operatorname{supp}(T') \subseteq \operatorname{supp}(T) \,.$$

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto dove si annulla T. Vediamo che su esso si annulla anche T'. In effetti se prendiamo $\phi \in \mathcal{D}$ tale che $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq A$ abbiamo che anche $\operatorname{supp}(\phi') \subseteq A$ e quindi

$$< T', \phi >= - < T, \phi' >= 0 \,.$$

Dunque T' si annulla su tutti gli intervalli aperti dove si annulla T e quindi vale la tesi. □

In virtù del risultato precedente e dell'Esempio 4.44, tutte le derivate della delta di Dirac $\delta_{x_0}^{(q)}$ hanno supporto $\{x_0\}$ come anche ogni loro combinazione lineare del tipo

$$T = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{x_0}^{(i)} \,.$$

E' interessante che questo si può invertire; vale infatti il seguente risultato:

Theorem 4.46. *Sia T una distribuzione tale che* $\operatorname{supp}(T) = \{x_0\}$. *Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ e numeri reali $a_0, \ldots, a_n$ tale che*

$$T = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{x_0}^{(i)} \,.$$

Non forniremo una dimostrazione di questo risultato perchè esula dagli scopi di questo corso. Vogliamo però sottolineare il fatto che per la validità di questo teorema, è essenziale la continuità della distribuzione T.

4.7.1 Distribuzioni a supporto compatto

Veniamo ora ad una definizione molto importante: una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ tale che supp(T) è un insieme compatto (chiuso e limitato) si dice distribuzione a supporto compatto. Se T è a supporto compatto si può estendere la sua azione dallo spazio delle funzioni test $\mathcal{D}$ a tutto quanto $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ nel modo seguente. Supponiamo che supp$(T) \subseteq (a,b)$. Utilizzando le funzioni test $\gamma_{r,M}$ introdotte nel paragrafo 4.3, possiamo costruire una funzione $\phi_0 \in \mathcal{D}$ tale che $\phi_0(x) = 1$ per ogni $x \in (a,b)$. A questo punto, se ψ è una generica funzione in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ definiamo

$$< T, \Psi > = < T, \phi_0 \Psi > \tag{4.21}$$

Poiché $\phi_0 \Psi$ è sicuramente in $\mathcal{D}$ la definizione sopra ha senso. L'unica cosa da verificare è che non dipenda dalla particolare funzione test di taglio ϕ_0 che abbiamo scelto: se consideriamo un'altra funzione $\tilde{\phi}_0 \in \mathcal{D}$ tale che $\tilde{\phi}_0(x) = 1$ per ogni $x \in (a,b)$, dobbiamo far vedere che

$$< T, \phi_0 \Psi > = < T, \tilde{\phi}_0 \Psi > , \quad \forall \Psi \in C^\infty(\mathbb{R}) .$$

Consideriamo

$$< T, \phi_0 \Psi > - < T, \tilde{\phi}_0 \Psi > = < T, (\phi_0 - \tilde{\phi}_0) \Psi >$$

Poiché $(\phi_0 - \tilde{\phi}_0)\Psi$ è una funzione test nulla su (a,b) e supp$(T) \subseteq (a,b)$ ne segue che $< T, (\phi_0 - \tilde{\phi}_0)\Psi >= 0$. Questo dimostra che la nostra definizione (4.21) non dipende dalla particolare funzione ϕ_0 scelta. C'è ancora un'importante verifica da fare: vorremmo che (4.21) fosse un'estensione della T originale definita solo su $\mathcal{D}$. Dobbiamo quindi verificare che se $\phi \in \mathcal{D}$ si ha che

$$< T, \phi > = < T, \phi_0 \phi > \ .$$

Consideriamo la differenza

$$< T, \phi > - < T, \phi_0 \phi > = < T, (1 - \phi_0)\phi > \ .$$

e notiamo che $(1 - \phi_0)\phi$ è una funzione test che si annulla su (a,b) che contiene il supporto di T. Quindi come prima $< T, (1 - \phi_0)\phi >= 0$. Dunque effettivamente la nuova definizione estende la vecchia.

4.7.2 Equazioni cn distribuzioni

Come son fatte le distribuzioni $T(x)$ tali che $xT(x) = 0$? E' chiaro che le distribuzioni del tipo $T = c\delta_0$ soddisfano a questa proprietà (verificare). Il seguente risultato mostra che non ce ne sono altre.

Proposizione 4.47 *Sia $T(x)$ una distribuzione tale che $xT(x) = 0$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $T(x) = c\delta_0(x)$.*

Dimostrazione. Supponiamo prima che T sia una distribuzione a supporto compatto tale che $xT(x) = 0$ e consideriamo una $\phi \in C^\infty$ tale che $\phi(x) = 0$. Allora $\Psi(x) = \phi(x)/x \in C^\infty$ (estendendola per continuità in $x = 0$). Abbiamo quindi che

$$< T(x), \phi(x) >=< T(x), x\Psi(x) >=< xT(x), \Psi(x) >= 0\,.$$

Sia ora $\phi \in \mathcal{D}$ qualsiasi. Allora $\phi(x) - \phi(0)$ sta in C^∞ e si annulla in 0, e quindi

$$0 =< T(x), \phi(x) - \phi(0) >=< T(x), \phi(x) > -\phi(0) < T, 1 >$$

che implica

$$< T(x), \phi(x) >=< T, 1 > \phi(0)$$

e questo significa proprio che $T(x) = c\delta_0$ con $c =< T, 1 >$. Questo ragionamento non funziona se T non è a supporto compatto. In questo caso si considera allora una successione di $\Psi_n \in \mathcal{D}$ tali che $\Psi_n(x) = 1$ per ogni $x \in [-n, n]$ (sappiamo come costruire una successione del genere). Le distribuzioni $T_n(x) = \Psi_n(x)T(x)$ sono ora a supporto compatto e godono ancora della proprietà $xT_n(x) = 0$. Per i risultati precedenti sappiamo che esistono costanti c_n tali che $T_n = c_n\delta_0$. Sia ora $\phi \in \mathcal{D}$ una qualunque funzione test tale che $\phi(0) \neq 0$ e $\phi(x) = 0$ se $|x| \geq 1$. Consideriamo

$$< T(x), \phi(x) >=< T(x), \Psi_n(x)\phi(x) >=< T_n(x), \phi(x) >= c_n\phi(0)$$

Questo mostra che necessariamente c_n deve essere una successione costante $c_n = c$ per ogni n. Dunque, $T_n = c\delta_0$ per ogni n. Poiché, come è facile vedere $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'$, ne segue che $T = c\delta_0$. $\square$

La Proposizione 4.47 ha varie possibili estensioni che proponiamo per esercizio (vedi Esercizi 4.7, 4.8, 4.9.

4.8 Convoluzione di distribuzioni

Per estendere il concetto di convoluzione alle distribuzioni, cominciamo col fare alcune considerazioni per la convoluzione di funzioni. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono due funzioni in $\mathcal{R}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, una delle due a supporto compatto e limitata, la convoluzione $f * g$ è ben definita ed è una funzione continua dunque in particolare anche in $\mathcal{R}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Si può quindi considerare la distribuzione regolare associata T_{f*g}. Abbiamo che utilizzando le regole di scambio degli integrali per integrali assolutamente convergenti:

$$< T_{f*g}(x), \phi(x) >= \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt \right] \phi(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\phi(x)\ \mathrm{d}x \right]\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi(x+t)\ \mathrm{d}x \right]\ \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) < T_g(x), \phi(x+t) >\ \mathrm{d}t =< T_f(t), < T_g(x), \phi(x+t) >>$$

Dunque,

$$< T_{f*g}(x), \phi(x) >=< T_f(t), < T_g(x), \phi(x+t) >>$$

Vediamo di capire meglio quello che abbiamo ottenuto. La formula sopra dice che per calcolare l'azione della distribuzione $T_{f*g}(x)$ sulla funzione test $\phi(x)$ si può alternativamente procedere come segue: per primo sulla funzione test $\phi(x+t)$ pensata come funzione della x, agisce la distribuzione $T_g(x)$; il risultato ottenuto è a questo punto una funzione di t e su questa agisce quindi la distribuzione $T_f(t)$. Si noti in questo caso l'utilità della notazione con la variabile indipendente nelle distribuzioni. Se T e S sono distribuzioni, saremmo quindi tentati di definire la convoluzione di T e S tramite la formula

$$< T * S, \phi >=< T(t), < S(x), \phi(x+t) >> \tag{4.22}$$

E' lecito farlo? Si noti che certamente fissato un qualunque $t \in \mathbb{R}$, la funzione $x \mapsto \phi(x+t)$ è una funzione test (è semplicemente una traslazione della $\phi(x)$). Quindi ha perfettamente senso fare $< S(x), \phi(x+t) >$ che è effettivamente una funzione di t. Tuttavia per poter applicate la distribuzione $T(t)$ dovremmo prima accertarci che $< S(x), \phi(x+t) >$ è, rispetto a t una funzione test. Il problema non è la regolarità in t, in effetti vale il seguente risultato che è una sorta di estensione del teorema di derivazione sotto segno di integrale:

Proposizione 4.48 *Se $\phi \in \mathcal{D}$ e $S \in \mathcal{D}'$ si ha che*

$$t \mapsto < S(x), \phi(x+t) >$$

è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Senza tuttavia ipotesi aggiuntive su S, la funzione $< S(x), \phi(x+t) >$ potrebbe non avere supporto compatto. In effetti se ad esempio consideriamo $S = T_1$ si ha che

$$< T_1(x), \phi(x+t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x+t)\ \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\ \mathrm{d}x$$

cioè una funzione costante in t. Se la funzione test ϕ è tale che il suo integrale non è nullo, si ha quindi una funzione non a supporto compatto. Per ottenere il supporto compatto è sufficiente ipotizzare che S sia a supporto compatto come mostra il seguente:

Proposizione 4.49 *Sia $S \in \mathcal{D}'$ a supporto compatto e sia $\phi \in \mathcal{D}$. Allora*

$$t \mapsto < S(x), \phi(x+t) >$$

è una funzione test.

Dimostrazione. In virtù della Proposizione 4.48 è sufficiente far vedere che ha il supporto compatto. Supponiamo che $\operatorname{supp}(S) \subseteq (-a, a)$ e che $\operatorname{supp}(\phi(x)) \subseteq (-b, b)$. Allora fissato t, si ha che $\operatorname{supp}(\phi(x+t)) \subseteq (-b-t, b-t)$. Si noti che se $(-a, a) \cap (-b-t, b-t) = \emptyset$, allora chiaramente $< S(x), \phi(x+t) >= 0$. Basta ora osservare che sicuramente $(-a, a) \cap (-b-t, b-t) = \emptyset$ se $b-t < -a$ o se $-b-t > a$ quindi se $t > b+a$ o se $t < -b-a$. Questo completa la dimostrazione. □

Dunque nell'ipotesi che T sia una qualunque distribuzione e che S sia una distribuzione a supporto compatto, la formula (4.22) ha perfettamente senso e definisce $T * S$ che agisce sulle funzioni test. Per esser certi che $T * S$ è effettivamente una distribuzione, dovremmo come al solito controllare che linearità e continuità siano rispettate. La linearità segue sfruttando la linearità delle due distribuzioni T e S e viene lasciata per esercizio. Per quanto riguarda la continuità, omettiamo la dimostrazione che usa tecniche di analisi funzionale che esulano dal corso. Dunque in questo caso effettivamente (4.22) definisce una distribuzione che è detta la convoluzione di T e S e rappresentata appunto con il simbolo $T * S$.

E' interessante notare che la formula (4.22) ha ancora senso nel caso T sia a supporto compatto e S qualunque. In effetti in tal caso si ha che comunque la funzione $t \mapsto < S(x), \phi(x+t) >$ è di classe C^∞. Per cui ad essa si può applicare la distribuzione $T(t)$ in virtù dei risultati ottenuti precedentemente per distribuzioni a supporto compatto. Si può mostrare che ancora comunque (4.22) definisce una distribuzione ancora chiamata convoluzione di T e S.

Se infine entrambe le distribuzioni T e S sono a supporto compatto si può mostrare che anche la convoluzione $T * S$ è a supporto compatto (lo si verifichi per esercizio).

La convoluzione tra distribuzioni gode di molte delle proprietà che valevano nel caso di funzioni. Alcune sono raccolte nella seguente proposizione che enunciamo senza fornire dimostrazione.

Proposizione 4.50 *Siano S, T e U tre distribuzioni con almeno due di esse a supporto compatto e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora le seguenti convoluzioni sono tutte ben definite e valgono le eguaglianze:*

$$S * T = T * S$$

$$S * (T * U) = (S * T) * U$$

$$S * (\lambda T + \mu U) = \lambda(S * T) + \mu(S * U)$$

Calcoliamo ora esplicitamente alcuni prodotti di convoluzione.

Esempio 4.51 Sia T una qualunque distribuzione. Calcoliamo $\delta_{x_0} * T$ e $T * \delta_{x_0}$ mostrando in particolare la validitá della regola di commutatività:

$$< \delta_{x_0} * T, \phi >=< \delta_{x_0}(s), < T(t), \phi(t+s) >>=< T(t), \phi(t+x_0) >< T(t-x_0), \phi(t) >$$

Dunque, $(\delta_{x_0} * T)(x) = T(x - x_0)$. D'altra parte,

$$< T * \delta_{x_0}, \phi >=< T(t), < \delta_{x_0}(s), \phi(t+s) >>=< T(t), \phi(t+x_0) >< T(t-x_0), \phi(t) >$$

Dunque, $(T * \delta_{x_0})(x) = T(x - x_0)$. Quindi abbiamo ottenuto che la convoluzione di una distribuzione T per la δ_{x_0} ne determina una traslazione di x_0. Cioè,

$$(\delta_{x_0} * T)(x) = (T * \delta_{x_0})(x) = T(x - x_0)\,.$$

Si noti in particolare che

$$\delta_0 * T = T * \delta_0 = T\,.$$

La convoluzione per la δ_0 non produce alcun cambiamento nella distribuzione. In termini algebrici, pensando la convoluzione come un'operazione di prodotto, potremmo dire che δ_0 è l'unità rispetto a questo prodotto. □

Questo esempio è collegato al seguente risultato:

Proposizione 4.52 *Siano S e T due distribuzioni delle quali almeno una a supporto compatto e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora si ha*

$$(S(x) * T(x))(x - x_0) = S(x - x_0) * T(x) = S(x) * T(x - x_0)\,.$$

Dimostrazione. Segue dall'esempio precedente e dalla proprietà di associatività che

$$(S(x)*T(x))(x-x_0) = (S(x)*T(x))*\delta_{x_0}(x) = S(x)*(T(x)*\delta_{x_0}(x)) = S(x)*T(x-x_0)\,.$$

Quindi, $(S(x) * T(x))(x - x_0) = S(x) * T(x - x_0)$. L'altra eguaglianza si dimostra similmente in modo diretto oppure segue utilizzando la commutatività della convoluzione. □

Il prossimo risultato mostra invece come le operazioni di derivazione e di convoluzione interagiscono tra di loro.

Proposizione 4.53 *Siano S e T due distribuzioni delle quali almeno una a supporto compatto. Allora si ha,*

$$(S * T)' = S' * T = S * T'$$

Dimostrazione. Sia $\phi \in \mathcal{D}$. Abbiamo che,

$$< (S * T)', \phi > = - < S * T, \phi' >= - < S(s) < T(t), \phi'(s + t) >>$$

$$= < S(s) < T'(t), \phi(s + t) >>=< S * T', \phi >$$

Quindi abbiamo fatto vedere che $(S * T)' = S * T'$. Essendo la convoluzione commutativa l'altra eguaglianza segue da quella appena dimostrata. □

Esempio 4.54 Sia T una qualunque distribuzione e consideriamo la sua convoluzione per le derivate della delta di Dirac. Utilizzando ripetutamente la Proposizione 4.53 e l'Esempio 4.51 otteniamo,

$$(\delta_{x_0}^{(q)} * T)(x) = (\delta_{x_0} * T)^{(q)} = T^{(q)}(x - x_0)\,.$$

In particolare, per $x_0 = 0$ otteniamo che

$$\delta_0^{(q)} * T = \delta_0^{(q)} * T = T^{(q)}\,.$$

Cioè la convoluzione di una distribuzione T per la derivata q-esima della delta δ_0 produce semplicemente la derivata q-esima di T. □

Vediamo un altro risultato ancora che mostra come il prodotto di convoluzione traforma la convergenza.

Proposizione 4.55 *Sia T_n una successione di distribuzioni tali che $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'$ e sia S un'altra distribuzione a supporto compatto. Allora si ha che*

$$T_n * S \to T * S\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\phi \in \mathcal{D}$. Sappiamo che $< S(s), \phi(s+t) >$ è una funzione test in t. Dunque per la definizione di convergenza di successioni di distribuzioni abbiamo che,

$$< T_n(t), < S(s), \phi(s + t) >>\to< T(t), < S(s), \phi(s + t) >> \;.$$

Questo dimostra il risultato. □

Si può fornire un'altra versione del risultato sopra ipotizzando che anzichè la S, siano le T_n e la T ad essere a supporto compatto:

Proposizione 4.56 *Sia T_n una successione di distribuzioni a supporto compatto e sia T un'altra distribuzione sempre a supporto compatto. Supponiamo che $T_n \to T$ ma nel senso che*

$$< T_n, \psi > \to < T; \psi > \quad \forall \psi \in C^\infty \tag{4.23}$$

(si noti che questa è una nozione di convergenza più forte di quella in $\mathcal{D}'$). Sia poi S un'altra qualunque distribuzione. Allora si ha che

$$T_n * S \to T * S\,.$$

Dimostrazione. Si procede ripetendo i passi della dimostrazione della Proposizione 4.55 e viene lasciata per esercizio. □

E' interessante mostrare che cosa succede quando facciamo la convoluzione tra una qualunque distribuzione T e una distribuzione regolare T_γ con simbolo dato da una funzione test, $\gamma \in \mathcal{D}$. La convoluzione si può sicuramente fare poiché T_γ è certamente a supporto compatto. La cosa interessante è che $T * T_\gamma$ è una distribuzione regolare con simbolo C^∞. Vediamo perché. Sia $\psi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} < T * T_\gamma, \phi > &= < T(t), < T_\gamma(s), \phi(s+t) >> \left\langle T(t), \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s)\phi(s+t)\ \mathrm{d}s \right\rangle \\ &= \left\langle T(t), \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)\gamma(s-t)\ \mathrm{d}s \right\rangle < T(t), < T_\phi(s), \gamma(s-t) >> \\ &= < T_\phi(s), < T(t), \gamma(s-t) >> \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s) < T(t), \gamma(s-t) > \ \mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Ma questo mostra proprio che $T * T_\gamma$ coincide con la distribuzione regolare avente come simbolo la funzione

$$s \mapsto < T(t), \gamma(s-t) >$$

che sappiamo, dalle considerazioni sulla definizione di convoluzione, essere di classe C^∞.

E' possibile dimostrare che vale il seguente risultato.

Teorema 4.57 *Data una qualunque $T \in \mathcal{D}'$, esiste una successione di funzioni $\psi_n \in C^\infty$ tale che*

$$T_{\Psi_n} \to T$$

nel senso delle distribuzioni.

4.9 Appendice

Continuità della moltiplicazione: Sia $T \in \mathcal{D}'$ e $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. La moltiplicazione ψT si definisce come

$$< \psi(x)T(x), \phi(x) >=< T(x), \psi(x)\phi(x) > , \quad \phi \in \mathcal{D}$$

Vogliamo mostrare che ψT è continua. Sia $\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{D}$. Dobbiamo mostrare che

$$< \psi(x)T(x), \phi_n(x) >\to< \psi(x)T(x), \phi(x) >$$

che, per la definizione sopra, equivale a

$$< T(x), \psi(x)\phi_n(x) >\to< T(x), \psi(x)\phi(x) > \ .$$

Perchè questo sia vero, essendo T una distribuzione e quindi continua, basta far vedere che $\psi\phi_n \to \psi\phi$ in $\mathcal{D}$ ed è a questa verifica che il resto della dimostrazione è dedicata. Facile vedere che i supporti della successione $\psi\phi_n$ sono equilimitati essendo tali quelli delle ϕ_n. Per quanto riguarda la convergenza si noti innazitutto che $\psi\phi_n \to \psi\phi$ uniformemente in quanto

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)\phi_n(x) - \psi(x)\phi(x)| &= \sup_{|x|\le a} [|\psi(x)||\phi_n(x) - \phi(x)|] \\ &\le \sup_{|x|\le a} |\psi(x)| \sup_{|x|\le a} |\phi_n(x) - \phi(x)| \,.\end{aligned}$$

e per le derivate, usando la regola di Leibnitz,

$$(\psi\phi_n)^{(q)} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \psi^{(k)}\phi_n^{(q-k)}$$

ci si riconduce a studiare la convergenza uniforme dei vari termini $\psi^{(k)}\phi_n^{(q-k)}$ a $\psi^{(k)}\phi^{(q-k)}$ che si fa esattamente come per $\psi\phi_n$, notando che $\psi^{(k)}$ è ancora una funzione di classe C^∞ e che $\phi_n^{(q-k)}$ converge uniformemente a $\phi^{(q-k)}$.

Continuità del treno di impulsi: Ricordiamo che il treno di impulsi

$$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n \,,$$

è definito formalmente come

$$\left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n, \phi \right\rangle \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi(n) \,.$$

Verifichiamo la continuità. Sia $\phi_k \to \phi$ per $k \to +\infty$ nel senso dello spazio $\mathcal{D}$. Allora sappiamo che esiste $a > 0$ tale che $\phi_k(x) = 0$ per ogni x tale che $|x| > a$

e per ogni k; non è restrittivo supporre che $a \in \mathbb{N}$. Valutiamo ora T su questa successione. Abbiamo

$$\left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n, \phi_k \right\rangle \sum_{-a}^{a} \phi_k(n)$$

Ma quest'ultima espressione converge a $\sum_{-a}^{a} \phi(n)$ poiché ϕ_k converge a ϕ uniformemente e quindi anche puntualmente. D'altra parte si ha

$$\left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n, \phi \right\rangle = \sum_{-a}^{a} \phi(n)$$

e quindi abbiamo dimostrato che

$$\left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n, \phi_k \right\rangle \to \left\langle \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n, \phi \right\rangle .$$

4.10 Esercizi

Esercizio 4.2 Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti applicazioni da $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$ sono effettivamente delle distribuzioni:

$$< T_1, \phi >= \int_0^1 \ln(x+1)\phi(x)\,dx\,, \qquad < T_2, \phi >= \int_0^1 |\phi(x)|^2\,dx\,,$$

$$< T_3, \phi >= \int_0^1 \phi'(x)\,dx\,, \qquad < T_4, \phi >= |\phi(5)|$$

$$< T_5, \phi >= \phi(1) - \phi(2) + \phi(3) - \phi(4)\,, \qquad < T_6, \phi >= \int_{-4}^{4} \sin x\phi(x)\,dx + 6\phi(4)$$

Esercizio 4.3 Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti applicazioni da $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$ sono effettivamente delle distribuzioni:

$$< T_1, \phi >= \int_{-1}^{1} x^2\phi(x)\,dx + \int_{-2}^{3} e^x\phi(x)\,dx\,, \qquad < T_2, \phi >= \int_0^1 \phi(x)^3\,dx$$

$$< T_3, \phi >= \int_0^1 x\phi'(x)\,dx\,, \qquad < T_4, \phi >= \phi(5)\phi(3)$$

$$< T_5, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} (\sinh x - 4x)\phi(x)\,dx + e^{12}\phi(e)\,, \qquad < T_6, \phi >= 1$$

Esercizio 4.4 Sia $\phi \in \mathcal{D}$. Dimostrare che $\phi' \in \mathcal{D}$ e vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Esercizio 4.5 Sia $\phi \in \mathcal{D}$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dimostrare che esiste un'altra funzione test $\rho \in \mathcal{D}$ tale che $\rho'(x) = \phi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. E' unica una siffatta ρ?

Esercizio 4.6 Sia $\phi \in \mathcal{D}$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0\,.$$

Mostrare che non esiste una funzione test $\rho \in \mathcal{D}$ tale che $\rho'(x) = \phi(x)$.

Esercizio 4.7 Sia $f(x)$ una funzione di classe C^1 tale che $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) \neq 0$ e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$. Allora le uniche distribuzioni che soddisfano l'equazione $f(x)T(x) = 0$ sono quelle del tipo $T(x) = c\delta_{x_0}$.

Esercizio 4.8 Sia $f(x)$ una funzione di classe C^1 per la quale esistono punti distinti $x_1, x_2, \ldots x_k$ tali che $f(x_i) = 0$, $f'(x_i) \neq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, k$ e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \notin \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$. Allora le uniche distribuzioni che soddisfano l'equazione $f(x)T(x) = 0$ sono quelle del tipo

$$T(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \delta_{x_i}\,.$$

Esercizio 4.9 Sia $f(x)$ una funzione di classe C^1 per la quale esiste una successione di punti distinti (x_k) priva di punti di accumulazione tale che $f(x_k) = 0$, $f'(x_k) \neq 0$ per ogni k e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \notin \{x_1, x_2, \ldots\}$. Allora le uniche distribuzioni che soddisfano l'equazione $f(x)T(x) = 0$ sono quelle del tipo

$$T(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \delta_{x_i}\,.$$

Esercizio 4.10 Calcolare la derivata delle distribuzioni regolari aventi i seguenti simboli:

$$(5x+3)H(x)\,, \qquad \operatorname{sgn}(x) + 2x\,, \quad |x^2 - 1|$$

$$(x^2-1)H(-x)\,, \quad \sin x H(x)\,, \quad \arctan \tfrac{1}{x-1}$$

Esercizio 4.11 Calcolare la derivata delle distribuzioni seguenti

$$T_{H(2x)} + 5\delta_3(2x)\,, \quad e^{x^2}\delta_{-1} + T_{3\operatorname{sgn}(-x)}\,, \quad x^2 T_{I_{[-1,1]}(x)}$$

Esercizio 4.12 Sia $\phi \in \mathcal{D}$ una funzione test tale che $\phi'(0) = -2$. Calcolare

$$< \sin x \delta_0'', \phi > \ .$$

Esercizio 4.13 Mostrare che le uniche distribuzioni $T \in \mathcal{D}'$ tali che $T'(x) = 0$ sono quelle del tipo T_f con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione costante. (Sugg.: utilizzare il risultato dell'Esercizio 4.5.)

Esercizio 4.14 Determinare tutte le distribuzioni $T \in \mathcal{D}'$ tali che $T' = \delta_0 + \delta_2 - 2\delta_1'$. (Sugg.: utilizzare il risultato dell'Esercizio 4.13.)

Esercizio 4.15 Determinare la distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ tale che $T' = 2\delta_0'$ e che soddisfa $< T, \phi >= 1$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ tale che $\phi(0) = 3$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Esercizio 4.16 Dimostrare che per $n \to +\infty$ si ha che

$$n^n \delta_(n) \to 0\,, \quad \delta_n^{(n)} \to 0\,, \quad e^{-1/n}\delta_{1/n} \to \delta_0$$

nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 4.17 Dimostrare che la successione

$$T_n = n(\delta_{1/n} + \delta_0)$$

non converge.

Esercizio 4.18 Per ciascuna delle successioni di distribuzioni seguente stabilire se converge o meno, per $n \to +\infty$ ed in caso affermativo determinarne il limite.

$$n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})\,, \quad \sqrt{n}(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})\,, \quad n^2(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})\,.$$

Esercizio 4.19 Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = I_{[2(-1)^n, 2(-1)^n+1]}(x)\,.$$

Dimostrare che T_{f_n} non converge nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 4.20 Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^2 p_{1/n}(x)\,.$$

Dimostrare T_{f_n} non converge nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 4.21 Mostrare che se consideriamo la successione $\gamma_n(x)$ definita nel paragrafo 4.3, la successione di distribuzioni T_{γ_n} converge a δ_0.

Esercizio 4.22 Costruire una successione di funzioni $f_n(x)$ tale che $T_{f_n} \to \delta_0'$ nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 4.23 Determinare il limite della successione di distribuzioni

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=-2n}^{5n} \delta_{\frac{k}{n}} \,.$$

Esercizio 4.24 Determinare il limite della successione di distribuzioni

$$T_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} k\delta_{\frac{k}{n}} \,.$$

Esercizio 4.25 Per ciascuna delle seguenti distribuzioni, se ne determini il supporto e si dica quali di esse risulta a supporto compatto:

$$T_{p_1} - \delta_{1/2}\,, \quad \delta'_{-2} - T_H\,, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\delta_{n^2}$$
$$x\delta_0\,, \quad e^{x^2}\delta''_{32} + x^6\delta_{-12}\,, \quad T_{x^2-x}$$

Esercizio 4.26 Sia T una distribuzione e sia $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Dimostrare che

$$\mathrm{supp}(\Psi T) \subseteq \mathrm{supp}(T)\,.$$

Esercizio 4.27 Sia T_n una successione di distribuzioni per le quali esiste $x_0 > 0$ tale che

$$\mathrm{supp}(T_n) \subseteq [-x_0, x_0]\,, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Dimostrare che $T_n(x-n) \to 0$ per $n \to +\infty$.

4.10.1 Soluzioni

4.2 T_1 è una distribuzione in quanto coincide con T_g dove $g(x) = \mathcal{X}_{[0,1]}(x)\ln(x+1)$. T_2 non è una distribuzione in quanto non è lineare (si ha ad esempio $< T_2, -\phi > = < T_2, \phi >$ qualunque sia $\phi \in \mathcal{D}$). T_3 è una distribuzione in quanto, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che

$$< T_3, \phi > = \phi(1) - \phi(0) = < \delta_1 - \delta_0, \phi > \;.$$

Dunque, $T_3 = \delta_1 - \delta_0$. T_4 non è una distribuzione in quanto non è lineare. T_5 è una distribuzione in quanto coincide con $\delta_1 - \delta_2 + \delta - 3 - \delta_4$. T_6 è una distribuzione in quanto coincide con $T_g + 6\delta_4$ dove $g(x) = \mathcal{X}_{[-4,4]}(x)\sin x$.

4.3 Sono distribuzioni T_1, T_3 e T_5. Non lo sono le altre.

4.10

$$5T_H + 3\delta_0\,, \quad 2\delta_0 + T_2\,, \quad T_{2x\mathrm{sgn}(x^2-1)}$$

$$T_{2xH(-x)} + \delta_0\,, \quad T_{\cos x H(x)}\,, \quad T_{\frac{-1}{(x-1)^2+1}} + \pi\delta_1$$

4.11
$$\delta_0 + 5/2\delta'_{3/2}\,, \quad e\delta'_{-1} - 6\delta_0\,, \quad 2xT_{I_{[-1,1]}(x)} + \delta_{-1} - \delta_1$$

4.12 -4.
4.14 $T = T_{H(x)} + T_{H(x-2)} - 2\delta_1 + CT_1$ al variare di $C \in \mathbb{R}$ costante.
4.15 $T = 2\delta_0 - 5T_1$.
4.18 $2\delta'_0$, 0, non converge.
4.23 $T_{I_{[-2,5]}}$.
4.24 0.
4.25
$$\begin{array}{lll} *\,[-1/2, 1/2], & \{-2\} \cup [0, +\infty[, & \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \\ *\,\emptyset, & *\,\{-12, 32\}, & \mathbb{R} \end{array}$$

Sono a supporto compatto quelle contrassegnate con una $*$.