3/10/2022

Completiamo la def. di "grafico" nel caso generale di n variabili:

se $f : \Omega \to \mathbb{R}$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (quindi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è funzione di $n \geq 1$ variabili), il "grafico di f" è il sottinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathcal{G}(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \wedge x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

N.B. È possibile un "disegno" del grafico solo se $n \leq 2$ ....

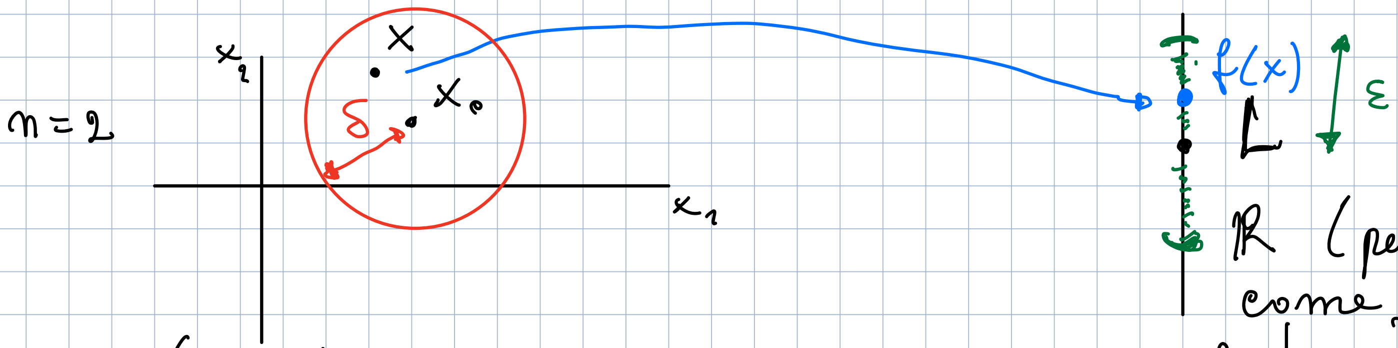
LIMITI E CONTINUITÀ IN PIÙ VARIABILI

Def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e f una funzione di n variabili, definita (almeno) in un intorno di x_0, tranne eventualmente in x_0 stesso. Si dice che

$$\text{"} \lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{"}$$ se, $\forall\, \varepsilon > 0$

$\exists\, \delta > 0$ tale che:

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$



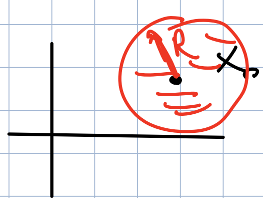
$\mathbb{R}^2$ (pensato come piano che contiene dom(f))

$\mathbb{R}$ (pensato come codominio di f)

In $\mathbb{R}^n$, con "intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$", si intende un insieme del tipo

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < R \}$$

dove $R > 0$ è il "raggio" dell'intorno:



(geometricamente, si tratta di una palla di raggio R centrata in x_0)

Col concetto di intorno, il fatto che

$$\text{"} \lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{"}$$

si può esprimere così:

$\forall$ intorno I_L di L, esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che

$$x \neq x_0 \wedge x \in I_{x_0} \Longrightarrow f(x) \in I_L$$

(in questa forma, la def. coincide con quella dell' Analisi I...).

Col concetto di limite, possiamo def. il concetto di continuità in un punto:

Def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e f una funzione definita (almeno) in un intorno di x_0 (in particolare, f è definita anche in x_0). Si dice che "f è continua in x_0" se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

N.B. Se una funzione $g(x)$ (di UNA sola variabile) è continua in un punto $\bar{x}$, allora la funzione (formalmente di

n variabili) definito da

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_J)$$

(per un certo indice $J \in \{1, 2, \dots, n\}$ fissato) rimane continua, in tutti quei punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno la J-esima componente uguale a $\bar{x}$.

N.B. questo fatto, è un semplice esercizio di teoria... provate a farlo!

Inoltre, come in una variabile, si dimostra che somme, prodotti, composizione e quozienti (laddove il denom. è $\neq 0$) di funzioni continue, sono ancora funzioni continue. Questo permette, data una $f(x_1, \dots, x_n)$ anche complicata, di garantire la sua continuità, in tutti i punti del suo dominio, salvo eventualmente qualche punto particolare, dove i teoremi precedenti non si applicano, e dove la continuità va verificata a mano caso per caso.

Esempi Sia

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2},$$

che ha come dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ed è continua in tutti i punti del suo dominio (perché è ottenuta da prodotti, quozienti ecc. di funzioni continue, come detto in precedenza: $2x$ è continua, y anche $\Rightarrow$ $2x \cdot y$ è continua ecc.)

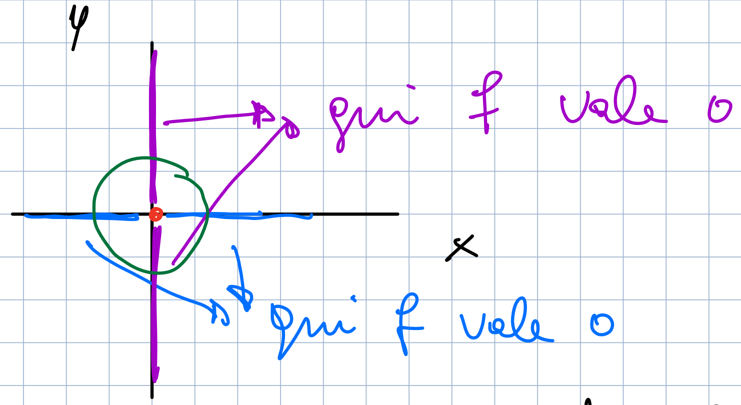
Cosa succede vicino all'origine?

Più precisamente, esiste oppure no

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$? Se sì, quanto vale?

OSS. Lungo gli assi x e y (fuori dall'origine...) la mia $f(x,y)$ vale 0, perché $f(0,y) = 0 \quad \forall\, y \neq 0$, e

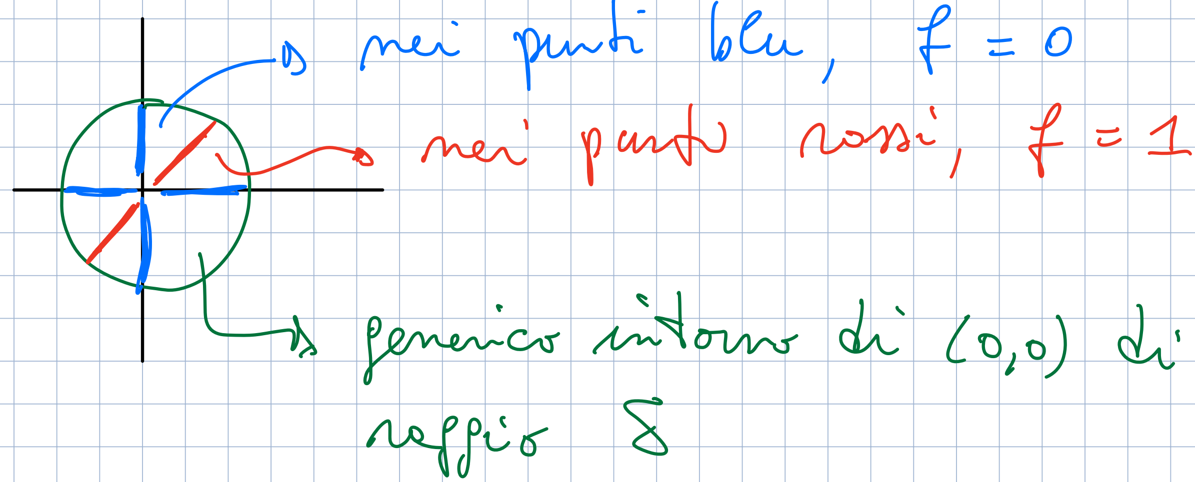
$f(x,0) = 0 \quad \forall \; x \neq 0$:



Allora, dalla def. di limite, segue che, SE $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, allora deve valere 0.

Tuttavia, se guardo $f(x,y)$ ristretta alla bisettrice del I e III quadrante, ho che $f(x,x) = 1 \quad \forall \; x \neq 0$.

Quindi, il limite non può esistere!



Questo è incompatibile col fatto

che $\lim f(x,y) = L$, per qualunque valore di L ...

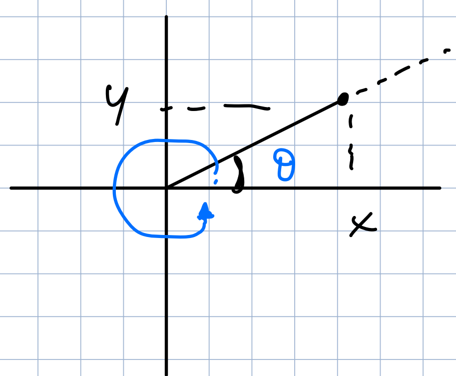
Come è fatto il grafico di $f(x,y)$?

Usando le coord. polari:

$$f(x, y) = \frac{2 r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta} = 2 \sin\theta \cos\theta$$

$x \to r \cdot \cos\theta$ $\quad y \to r \cdot \sin\theta$

$$= \sin(2\theta)$$



In questo esempio, quindi, se mi avvicino all'origine lungo una semiretta (uscente da $(0,0)$), il valore di $f(x,y)$ è costante su tutta la semiretta, e vale $\sin(2\theta)$

Esempio $f(x,y) = \dfrac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Cosa succede quando $(x,y) \to (0,0)$?

Ora, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, e lo si può

verificare usando coord. polari:

$$f(\underset{r\cos\theta}{x}, \underset{r\sin\theta}{y}) = \frac{r^3 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\cos^2\theta \cdot \sin\theta$$

Quindi $\underbrace{|f(x,y)|}_{|f(x,y) - L| < \varepsilon\,?} \leq r = \sqrt{x^2+y^2}$

$L = 0$ Basta scegliere $\delta = \varepsilon \ldots$

Quindi, se estendo f così:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ottengo che f è continua anche

nell'origine.

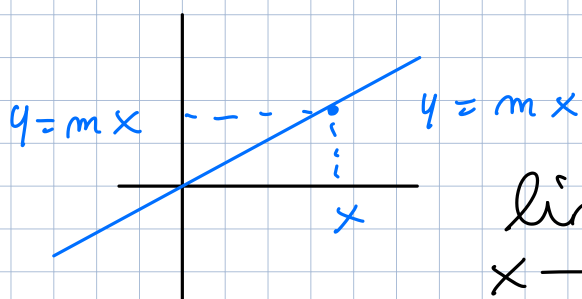
Esempio $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?? Se sì, quanto vale ?

Vediamo cosa succede lungo la generica retta non verticale $y = m \cdot x$

(N.B. lungo l' asse y, $f(0,y) = 0 \quad \forall y \neq 0$)

$$f(x, mx) = \frac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{m x}{x^2 + m^2}$$



$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = 0 \quad \forall m.$$

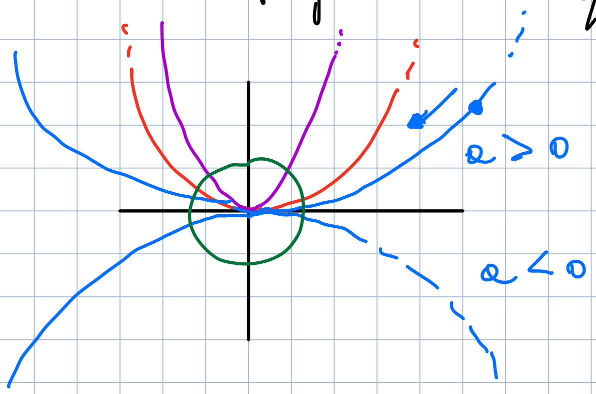
Morale : il limite, ristretto a qualunque retta passante per $(0,0)$, vale 0 ...

tuttavia, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NON ESISTE!

(questo fatto anti-intuitivo è il

Vero "salto" tra 1 variabile e + variabili)

Per vederlo, muoviamoci lungo parabole del tipo $y = a \cdot x^2$:



fisso $a \neq 0$ (parametro) e calcolo

$$f(x, a x^2) = \frac{a x^4}{x^4 + a^2 x^4} = \frac{a}{1+a^2},$$

quindi $f(x,y)$ è costante (con valore $\frac{a}{1+a^2}$) lungo ogni parabola del tipo $y = a x^2$, quindi il limite non esiste!

DERIVATE PARZIALI

Data una $f(x,y)$, definita (almeno) in un intorno di un certo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si indica col simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{oppure} \quad f_x(x_0, y_0)$$

(quando esiste finito) il valore del limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ oppure $f_y(x_0, y_0)$ indica (se esiste finito) il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$