$$\frac{1}{2}(\underline{\underline{A}}\dot{q})\cdot\dot{q} \geq 0$$

per ogni $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ e l'uguaglianza vale solo se $\dot{q} = \underline{0}$ - Quindi $\underline{\underline{A}}$ è definita positiva. $\boxtimes$

Notiamo che questa proprietà garantisce che $\underline{\underline{A}}$ sia invertibile.

Potenza di forze e conservazione dell'energia meccanica

Def. Sia $\underline{F} \in \mathbb{R}^3$ una forza agente su un punto materiale (P, m) che si muove con velocità $\underline{v}$. Si chiama potenza sviluppata da $\underline{F}$ la quantità scalare

$$\Pi := \underline{F} \cdot \underline{v}.$$

Il concetto di potenza è strettamente legato a quello di energia cinetica di un sistema. Infatti:

Teorema (dell'energia cinetica)

Sia Π la potenza esplicata da tutte le forze (attive esterne, attive interne, vincolari) di un sistema. Allora:

$$\dot{T} = \Pi.$$

Dim. Sia (P_i, m_i) il generico punto materiale del sistema e sia $\underline{R}_i$ il risultante di tutte le forze agenti su di esso. Per la seconda equazione della meccanica vale $m_i \underline{a}_i = \underline{R}_i$, da cui, moltiplicando scalarmente entrambi i membri per $\underline{v}_i$,

$$\underline{R}_i \cdot \underline{v}_i = m_i \underline{a}_i \cdot \underline{v}_i = m_i \dot{\underline{v}}_i \cdot \underline{v}_i = m_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i\right)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m_i |\underline{v}_i|^2.$$

Sommando su tutti i punti del sistema otteniamo:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i \cdot \underline{v}_i}_{\Pi} = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i |\underline{v}_i|^2}_{T}$$

da cui la tesi. $\boxtimes$

Il teorema dell'energia cinetica appena dimostrato può, in alcuni casi, fornire un'<u>equazione pura</u> del moto. Ciò è dovuto ai due risultati seguenti.

<u>Prop.</u> (potenza delle forze interne)

Sia $\underline{f}_{ij} = f_{ij} \frac{P_j - P_i}{|P_j - P_i|}$ la forza interna esercitata sul punto P_i dal punto P_j - Allora la potenza $\Pi^{(i)}$ delle forze interne vale

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{f_{ij}}{|P_j - P_i|} \cdot \frac{d}{dt} |P_j - P_i|^2.$$

<u>Dim.</u> Omessa (si veda il libro, pag. 241). $\boxtimes$

Questo risultato ci interessa perché da esso deduciamo che <u>in un moto rigido la potenza $\Pi^{(i)}$ è nulla</u>. Infatti le distanze tra i punti si mantengono costanti e quindi $\frac{d}{dt}|P_j - P_i|^2 = 0$ per ogni i, j.

Allora in un moto rigido il teorema dell'energia cinetica diventa:

$$\dot{T} = \Pi^{(a,e)} + \Pi^{(v)},$$

dove $\Pi^{(a,e)}, \Pi^{(v)}$ sono rispettivamente le potenze delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari. Questa non è ancora un'equazione pura del moto a causa della presenza del termine $\Pi^{(v)}$, tuttavia:

<u>Prop.</u> (potenza delle reazioni vincolari)

La potenza della reazione vincolare esplicata da un vincolo ideale, bi=latero e scleronomo è zero.

<u>Dim.</u> Per definizione, un vincolo ideale è tale che $\delta L^{(v)} = \underline{\Phi} \cdot \delta \underline{P} \geq 0$ per ogni spostamento virtuale $\delta \underline{P}$ ammissibile. Ricordiamo che $\delta \underline{P} = \underline{v}\, dt$, dove $\underline{v}$ è una velocità virtuale. Se il vincolo è bilatero tutte le veloci=tà virtuali, e quindi tutti gli spostamenti virtuali, sono invertibili, per cui

$$\delta L^{(v)} = \underline{\Phi} \cdot \underline{v}\, dt = 0, \qquad \forall\, \underline{v} \text{ virtuale.}$$

Infine, se il vincolo è scleronomo tra tutte le velocità virtuali c'è anche quella reale $\underline{v}$, per cui in particolare:

$$\underline{\Phi} \cdot \underline{v}\, dt = 0.$$

Ma $\underline{\Phi} \cdot \underline{v}$ è la potenza sviluppata dalla reazione vincolare corrispondente al vincolo in questione, da cui la tesi. ☒

Dunque in un moto rigido con vincoli ideali, bilateri e scleronomi vale

$$\dot{T} = \Pi^{(a,e)},$$

che è un'equazione pura del moto.

Infine, se il sistema delle forze attive ammette un potenziale $U = U(q)$, con $q = (q_1, \dots, q_n)$, allora possiamo scrivere il lavoro elementare di tali forze come:

$$dL^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} Q_k^{(a)} dq_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) dt = \frac{d}{dt} U(q)\, dt,$$

da cui vediamo che $\Pi^{(a)} = \dot{U}$. Di qui segue il seguente <u>integrale primo del moto</u>:

<u>Teorema</u> (conservazione dell'energia meccanica)

Consideriamo un sistema rigido sottoposto a vincoli ideali, bilateri e scleronomi. Supponiamo inoltre che le forze attive esterne ammettano un potenziale. Detta

$$E := T - U$$

l'<u>energia meccanica</u> del sistema, risulta

$$\dot{E} = 0.$$

<u>Dim.</u> Per le ipotesi poste vale $\dot{T} = \Pi^{(a,e)}$ e inoltre $\Pi^{(a,e)} = \dot{U}$. Allora:

$$\dot{T} = \dot{U} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T - U) = 0. \qquad \boxtimes$$

Meccanica lagrangiana

Consideriamo un sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^{N}$ sottoposto a vincoli ideali olonomi bilateri. Ci proponiamo di determinare una procedura che conduca alla scrittura generale di equazioni pure del moto, ossia equazioni in cui non compaiano le reazioni vincolari.

Per questo, consideriamo il secondo principio della meccanica per ciascun punto del sistema:

$$m_i \underline{a}_i = \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} + \sum_j \underline{\Phi}_{ij} . \qquad (*)$$

Sia $V_i := \text{span}\{\partial_{q_k}(P_i - O)\}_{k=1}^{n}$ lo spazio tangente alla (sotto-)varietà di $\mathbb{R}^n$ su cui si muove l'i-esimo punto del sistema per effetto dei vincoli imposti su di esso e sia $\delta \underline{P}_i \in V_i$,

$$\delta \underline{P}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(P_i - O)}{\partial q_k} \delta q_k ,$$

uno spostamento virtuale di P_i. Moltiplicando scalarmente l'equazione $(*)$ per $\delta \underline{P}_i$ e sommando su i otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \delta \underline{P}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)} \cdot \delta \underline{P}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_j \underline{\Phi}_{ij} \cdot \delta \underline{P}_i$$

$$= \delta L^{(a,e)} + \delta L^{(a,i)} + \delta L^{(v)} .$$

Poiché i vincoli sono ideali e bilateri, avremo $\delta L^{(v)} = 0$. Quindi possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \delta \underline{P}_i = \delta L^{(a)} , \qquad (**)$$

dove $\delta L^{(a)}$ è il lavoro virtuale complessivo delle forze attive (esterne e interne

Sia $\underline{R}_i^{(a)} := \sum_j \underline{F}_{ij}^{(a,e)} + \sum_{j \neq i} \underline{f}_{ij}^{(a,i)}$ il risultante delle forze attive agenti su P_i.
Allora:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{(a)} \cdot \delta \underline{P}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{(a)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k} \right)}_{Q_k^{(a)}} \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} Q_k^{(a)} \delta q_k .$$

Analogamente, risulta:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \delta \underline{P}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k} \right) \delta q_k ,$$

quindi dall'equazione (**) otteniamo, raccogliendo δq_k in entrambi i membri,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k} - Q_k^{(a)} \right) \delta q_k = 0. \qquad (*\!*\!*)$$

Poniamo, per brevità,

$$\tau_k := \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k} , \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Poiché i vincoli sono olonomi, tutti gli incrementi virtuali δq_k delle coordinate lagrangiane sono indipendenti e automaticamente ammessi dai vincoli. Si noti che lo stesso <u>non</u> si può dire degli spostamenti virtuali $\delta \underline{P}_i$ nella (**) pro:

prio a causa dei vincoli. Dunque, per l'arbitrarietà dei δq_k, dalla (**) segue:

$$\tau_k = Q_k^{(a)}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Si noti che questo è un sistema di n equazioni <u>pure</u> del moto, poiché il contributo delle reazioni vincolari al lavoro virtuale è stato annullato dall'ipotesi di vincoli bilateri ideali.

<u>Prop.</u> Sia T l'energia cinetica del sistema. Allora:

$$\tau_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

<u>Dim.</u> Dalla definizione di τ_k abbiamo:

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i \cdot \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{v}}_i \cdot \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}\left(\underline{v}_i \cdot \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k}\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k}.$$

Se $P_i - O = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$ (<u>i vincoli possono essere reonomi</u>) allora:

$$\underline{v}_i = \dot{\underline{r}}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$$

e dunque

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k}.$$

Inoltre:

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_k \partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial (P_i - O)}{\partial q_k}.$$

Riprendendo l'espressione di τ_k possiamo quindi scrivere:

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}\left(\underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k}\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\underline{v}_i \cdot \underline{v}_i)\right] - \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_k}(\underline{v}_i \cdot \underline{v}_i)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2} m_i |\underline{v}_i|^2}_{T} - \frac{\partial}{\partial q_k}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2} m_i |\underline{v}_i|^2}_{T}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \qquad \boxtimes$$

Grazie a questa proposizione, il sistema di equazioni pure della dinamica precedentemente determinato può porsi nella forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k^{(a)}, \qquad k = 1, \dots, n,$$

che sono dette le <u>equazioni di Lagrange</u> del moto.

<u>Lagrangiana</u>

Quando il sistema di forze attive considerato ammette un potenziale U, le equazioni di Lagrange assumono una forma particolarmente espressiva.

Per discutere questo caso, premettiamo il seguente fatto:

<u>Prop.</u> Se il sistema di forze attive ammette un potenziale allora le forze attive generalizzate $Q_k^{(a)}$ non dipendono dalle velocità lagrangiane $\{\dot{q}_k\}_{k=1}^n$ né dal tempo.

<u>Dim.</u> Se una forma differenziale in m variabili generiche $p_1, \dots, p_m$:

$$\Psi_1(p_1,\dots,p_m)\,dp_1 + \dots + \Psi_m(p_1,\dots,p_m)\,dp_m = \sum_{j=1}^m \Psi_j(p_1,\dots,p_m)\,dp_j$$

ammette un potenziale $U = U(p_1, \dots, p_m)$ allora

$$\Psi_j = \partial_{p_j} U, \quad j = 1,\dots,m$$

e, per il teorema di Schwartz, vale

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial p_j \partial p_i}, \quad \forall\, i,j = 1,\dots,m,$$

da cui le condizione di compatibilità sui coefficienti della forma:

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial p_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_j}, \quad \forall\, i,j = 1,\dots,m.$$

Supponiamo che le forze generalizzate $Q_k^{(a)}$ dipendano in generale da $q_1, \dots, q_n$, da $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ e da t, cioè dalle $m = 2n+1$ variabili

$$p_1 = q_1, \dots, p_n = q_n$$
$$p_{n+1} = \dot{q}_1, \dots, p_{2n} = \dot{q}_n$$
$$p_{2n+1} = t.$$

Poiché il lavoro virtuale si scrive: $\delta L^{(a)} = \sum_{k=1}^n Q_k^{(a)} \delta q_k$, rispetto alla forma generale della forma differenziale abbiamo:

$$\Psi_1 = Q_1^{(a)}, \ldots, \Psi_n = Q_n^{(a)}$$

$$\Psi_{n+1} = \ldots = \Psi_{2n} = \Psi_{2n+1} = 0.$$

Dunque le condizioni di compatibilità danno

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial p_i} = \frac{\partial Q_j^{(a)}}{\partial \dot{q}_{i-n}} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j} = 0 \quad \forall \begin{array}{l} i = n+1, \ldots, 2n+1 \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

e dunque $Q_j^{(a)}$ non dipende da alcuna $\dot{q}_i$ né da t per ogni $j = 1, \ldots, n$. $\square$

In conseguenza della precedente proposizione, un potenziale U, se esiste, dipende al più dalle n coordinate lagrangiane $q_1, \ldots, q_n$. In tal caso risulta

$$Q_k^{(a)} = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

e quindi è possibile scrivere le equazioni di Lagrange come:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}(T+U) = 0.$$

Inoltre, essendo U indipendente da $\dot{q}_k$ e da t, abbiamo equivalentemente

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T+U) - \frac{\partial}{\partial q_k}(T+U) = 0,$$

perché $\partial_{\dot{q}_k} U = 0$ e $\frac{d}{dt}\partial_{\dot{q}_k} U = 0$. Introducendo la <u>lagrangiana</u>

$$\mathcal{L} := T + U$$

troviamo infine:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Oss. È bene non confondere la lagrangiana di un sistema con l'energia meccanica. Entrambe si definiscono per un sistema di forze attive che ammetta un potenziale, ma:

$$\mathcal{L} = T + U$$

$$E = T - U.$$

La quantità $-U$ è anche chiamata l'energia potenziale delle forze attive.

Prop. (Integrale primo dei momenti cinetici)
Se la lagrangiana non dipende da una certa coordinata lagrangiana q_k allora la funzione $\partial_{\dot{q}_k}\mathcal{L}$ è un integrale primo del moto.

Oss. La quantità $\partial_{\dot{q}_k}\mathcal{L}$ è detta momento cinetico e la coordinata lagrangiana q_k da cui $\mathcal{L}$ non dipende è detta coordinata ciclica (o ignorabile).

Dim. Dalle equazioni di Lagrange, poiché $\partial_{q_k}\mathcal{L} = 0$ perché $\mathcal{L}$ non dipende da q_k, si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

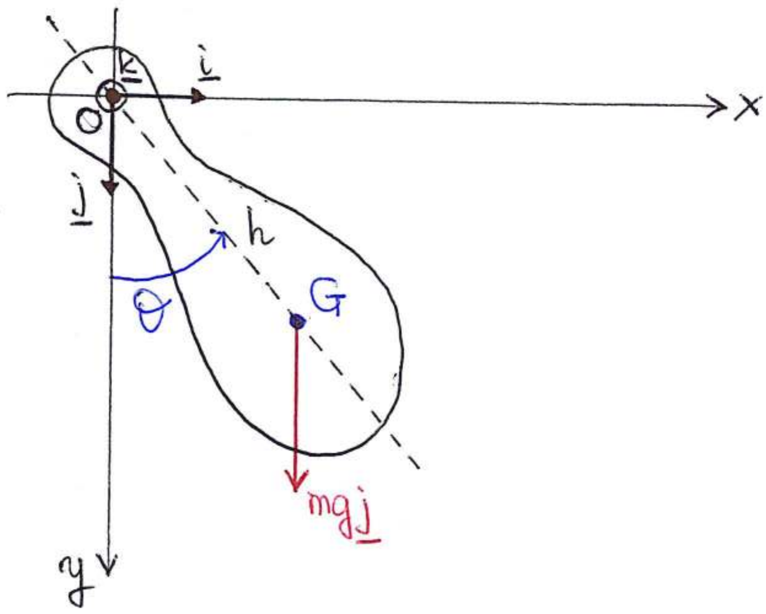
e quindi $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ è conservata nel tempo. ☒

Esempi

1) Pendolo fisico

Consideriamo nuovamente il caso del pendolo fisico illustrato in fi=

gura:



Ricaviamo l'equazione pura del moto mediante l'equazione di Lagrange. L'unica forza attiva agente sul sistema è la forza peso $\underline{P} = mg\underline{j}$ applicata in G con $G-O = h\sin\theta\,\underline{i} + h\cos\theta\,\underline{j}$. Dunque:

$$\delta L^{(a)} = mg\underline{j}\cdot\delta G = mg\underline{j}\cdot\left(h\cos\theta\,\underline{i} - h\sin\theta\,\underline{j}\right)\delta\theta$$

$$= -mgh\sin\theta\,\delta\theta,$$

da cui identifichiamo la forza generalizzata $Q_\theta^{(a)} = -mgh\sin\theta$.

Calcoliamo ora l'energia cinetica del pendolo. Poiché c'è il punto fisso O, possiamo scrivere direttamente

$$T = \frac{1}{2}\underline{K}_O\cdot\underline{\omega} = \frac{1}{2}\underline{\underline{I}}_O\underline{\omega}\cdot\underline{\omega} = \frac{1}{2}I_{O,z}\,\omega^2$$

essendo $\underline{\omega} = \omega\underline{k}$ la velocità angolare del pendolo e $I_{O,z}$ il momento di inerzia rispetto all'asse z. Per completare il calcolo di T determiniamo $\underline{\omega}$ dalla legge di distribuzione delle velocità per il corpo rigido:

$$\underline{v}_G = \underline{\omega}\times(G-O)$$

e quindi

$$h\dot{\vartheta}(\cos\vartheta\,\underline{i}-\sin\vartheta\,\underline{j}) = \omega\underline{k}\times h(\sin\vartheta\,\underline{i}+\cos\vartheta\,\underline{j})$$
$$= \omega h(\sin\vartheta\,\underline{j}-\cos\vartheta\,\underline{j})$$

da cui $\omega=-\dot{\vartheta}$. Dunque:

$$T=\frac{1}{2}I_{0,z}\dot{\vartheta}^2.$$

Risulta perciò:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\vartheta}}\left(\frac{1}{2}I_{0,z}\dot{\vartheta}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(I_{0,z}\dot{\vartheta}\right) = I_{0,z}\ddot{\vartheta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\vartheta}=0$$

e infine:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}}-\frac{\partial T}{\partial\vartheta}=Q_\vartheta^{(a)} \Rightarrow I_{0,z}\ddot{\vartheta}=-mgh\sin\vartheta$$

ovvero l'equazione già ricavata per mezzo delle equazioni cardinali della dinamica

$$\ddot{\vartheta}=-\frac{mgh}{I_{0,z}}\sin\vartheta.$$

Vediamo che per questo sistema è anche possibile scrivere una lagrangiana. Per questo dobbiamo procurarci un potenziale $U=U(\vartheta)$ delle forze attive definito dalla relazione

$$U'=Q_\vartheta^{(a)}=-mgh\sin\vartheta,$$

quindi $U(\vartheta)=mgh\cos\vartheta+C_1$. Nel seguito sceglieremo $C_1=0$. Allora la lagrangiana è:

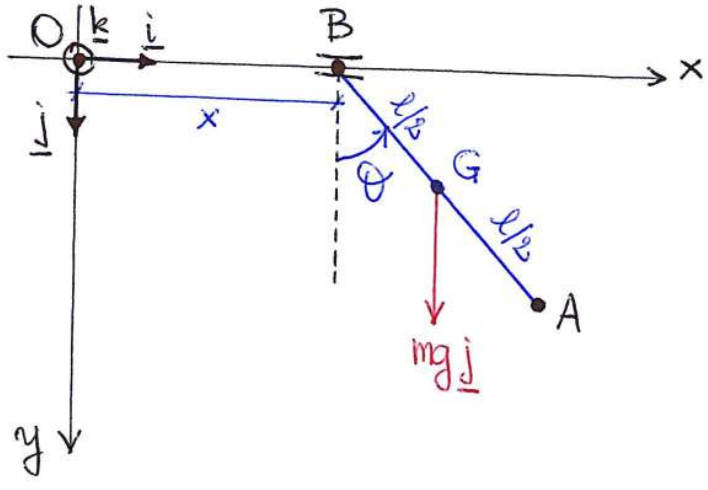
$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} I_{O,z} \dot{\theta}^2 + mgh\cos\theta.$$

Osserviamo che $\mathcal{L}$ dipende esplicitamente da θ, quindi non abbiamo l'integrale primo del momento cinetico $\partial_{\dot{\theta}} \mathcal{L}$. Tuttavia vale l'integrale primo dell'energia meccanica:

$$E = T - U = \frac{1}{2} I_{O,z} \dot{\theta}^2 - mgh\cos\theta = \text{costante}.$$

2) Asta scorrevole lungo una guida orizzontale

Consideriamo il seguente sistema:



in cui l'asta AB di lunghezza $\ell > 0$ è supposta omogenea e i vincoli lisci. Poiché l'asta può oscillare nel piano Oxy e l'estremo B può scorrere lungo l'asse x sono necessarie le due coordinate lagrangiane $\theta \in [0, 2\pi)$ e $x \in \mathbb{R}$ per descrivere univocamente le configurazioni del sistema.

L'unica forza attiva agente è il peso dell'asta $\underline{P} = mg\,\underline{j}$ applicato in G con

$$G-O = \left(x+\frac{\ell}{2}\sin\theta\right)\underline{i} + \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\underline{j}.$$

Lo spostamento virtuale di G si scrive:

$$\delta\underline{G} = \frac{\partial(G-O)}{\partial\theta}\delta\theta + \frac{\partial(G-O)}{\partial x}\delta x$$

$$= \frac{\ell}{2}\left(\cos\theta\,\underline{i}-\sin\theta\,\underline{j}\right)\delta\theta + \delta x\,\underline{i}$$

e quindi:

$$\delta L^{(a)} = \underline{P}\cdot\delta\underline{G} = mg\underline{j}\cdot\left[\frac{\ell}{2}\left(\cos\theta\,\underline{i}-\sin\theta\,\underline{j}\right)\delta\theta+\delta x\,\underline{i}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}mg\ell\sin\theta\,\delta\theta$$

da cui ricaviamo $Q_\theta^{(a)} = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\theta$ e $Q_x^{(a)} = 0$.

Per scrivere l'energia cinetica del sistema conviene fare riferimento al baricentro, non essendovi alcun punto dell'asta istantaneamente fisso. Otteniamo (cfr. anche il Teorema di König):

$$T = \frac{1}{2}m|\underline{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\underline{K}_G\cdot\underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}m|\underline{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\underline{\underline{I}}_G\,\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}.$$

Calcoliamo quindi:

$$\underline{v}_G = \frac{d}{dt}(G-O) = \left(\dot{x}+\frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot\theta\right)\underline{i} - \frac{\ell}{2}\sin\theta\,\dot\theta\,\underline{j}$$

$$|\underline{v}_G|^2 = \left(\dot{x}+\frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot\theta\right)^2 + \frac{\ell^2}{4}\sin^2\theta\,\dot\theta^2$$

$$= \dot{x}^2 + l\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \frac{l^2}{4}\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4}\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$= \dot{x}^2 + l\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2.$$

Sappiamo inoltre che $I_{G,z} = \frac{1}{12}ml^2$. Determiniamo infine la velocità angolare dell'asta dalla legge di distribuzione delle velocità applicata ai punti G e B, con $B-O = x\underline{i}$ e quindi $\underline{v}_B = \dot{x}\underline{i}$:

$$\underline{v}_G = \underline{v}_B + \omega\underline{k}\times(G-B)$$

$$\left(\cancel{\dot{x}} + \frac{l}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)\underline{i} - \frac{l}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\,\underline{j} = \dot{x}\underline{i} + \omega\underline{k}\times\frac{l}{2}\left(\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}\right)$$

$$= \cancel{\dot{x}\underline{i}} + \frac{1}{2}\omega l\left(\sin\theta\,\underline{j} - \cos\theta\,\underline{i}\right)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}l\left(\cos\theta\,\underline{i} - \sin\theta\,\underline{j}\right) = \frac{1}{2}\omega l\left(-\cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j}\right)$$

da cui nuovamente $\omega = -\dot{\theta}$. Dunque:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \frac{5}{24}ml^2\dot{\theta}^2.$$

La prima equazione di Lagrange si scrive:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta^{(a)}.$$

Abbiamo in particolare:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml\cos\theta\,\dot{x} + \frac{5}{12}ml^2\dot{\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} m\ell \sin\theta\, \dot\theta \dot x + \frac{1}{2} m\ell \cos\theta\, \ddot x + \frac{5}{12} m\ell^2 \ddot\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} m\ell \sin\theta\, \dot\theta \dot x$$

e quindi:

$$-\frac{1}{2} m\ell\, \cancel{\sin\theta\, \dot\theta \dot x} + \frac{1}{2} \cancel{m\ell} \cos\theta\, \ddot x + \frac{5}{12} \cancel{m\ell^2}\, \ddot\theta + \frac{1}{2} m\ell\, \cancel{\sin\theta\, \dot\theta \dot x} = -\frac{1}{2} \cancel{mg\ell} \sin\theta$$

$$\boxed{\cos\theta\, \ddot x + \frac{5}{6} \ell \ddot\theta = -g \sin\theta}.$$

La seconda equazione di Lagrange si scrive:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot x} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x^{(a)}.$$

In particolare:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot x} = \frac{d}{dt} \left(m\dot x + \frac{1}{2} m\ell \cos\theta\, \dot\theta \right)$$

$$= m\ddot x + \frac{1}{2} m\ell \cos\theta\, \ddot\theta - \frac{1}{2} m\ell \sin\theta\, \dot\theta^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

e quindi:

$$\cancel{m}\ddot x + \frac{1}{2} \cancel{m}\ell \cos\theta\, \ddot\theta - \frac{1}{2} \cancel{m}\ell \sin\theta\, \dot\theta^2 = 0$$

$$\boxed{\ddot x + \frac{\ell}{2} \left(\cos\theta\, \ddot\theta - \sin\theta\, \dot\theta^2 \right) = 0}$$

Volendo determinare la lagrangiana è necessario procurarsi un potenziale. Sarà $U = U(\theta, x)$ definito dalle relazioni:

$$\begin{cases} \partial_\theta U = Q_\theta^{(a)} = -\frac{1}{2} mgl \sin\theta \\ \partial_x U = Q_x^{(a)} = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda ricaviamo $U = U(\theta)$, che sostituita nella prima dà:

$$U(\theta) = -\frac{1}{2} mgl \int \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2} mgl \cos\theta + C_1.$$

Scegliendo $C_1 = 0$ abbiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} ml\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \frac{5}{24} ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl\cos\theta.$$

Poiché $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente da x, il momento cinetico $\partial_{\dot{x}}\mathcal{L}$ è conservato, cioè:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{1}{2} ml\cos\theta\,\dot{\theta} \quad \text{è costante nel tempo.}$$

Poiché i vincoli sono supposti ideali (per la validità delle equazioni di Lagrange), il vincolo a cui è soggetto l'estremo B dell'asta è in particolare liscio. Infatti tutti gli spostamenti virtuali di B sono invertibili, perciò Φ_B è ortogonale all'asse x. Allora nessuna forza esterna agente sul sistema ha componente orizzontale e quindi la componente orizzontale della quantità di moto del sistema si deve conservare. Cioè

$$\underline{Q} \cdot \underline{i} = \text{costante}$$

ovvero

$$m\underline{v}_G \cdot \underline{i} = \text{costante}$$

$$m\left[\left(\dot{x}+\frac{\ell}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)\underline{i}-\frac{\ell}{2}\sin\theta\dot{\theta}\,\underline{j}\right]\cdot\underline{i} = \text{costante}$$

$$m\dot{x}+\frac{1}{2}m\ell\cos\theta\dot{\theta} = \text{costante.}$$

Vediamo quindi che, in questo caso, l'integrale primo del momento cinetico $\partial_{\dot{x}}\mathcal{L}$ corrisponde all'integrale primo della componente orizzontale della quantità di moto.

Vale poi ovviamente anche l'integrale primo dell'energia meccanica:

$$E = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\ell\cos\theta\dot{\theta}\dot{x}+\frac{5}{24}m\ell^2\dot{\theta}-\frac{1}{2}mg\ell\cos\theta$$
$$= \text{costante.}$$