Calcolare la torsione dell' elica circolare

Consideriamo la solita parametrizzazione dell' elica:

$$x = r\cos(t) \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}(t) \, , \quad z = h t$$

Cioè

$$P(t) = \left(r\cos(t) \, , \, r\,\mathrm{sen}(t) \, , \, h t \right)$$

$$P'(t) = \left(-r\,\mathrm{sen}(t) \, , \, r\cos(t) \, , \, h \right)$$

$$P''(t) = \left(-r\cos(t) \, , \, -r\,\mathrm{sen}(t) \, , \, 0 \right)$$

$$P'''(t) = \left(r\,\mathrm{sen}(t) \, , \, -r\cos(t) \, , \, 0 \right)$$

Possiamo quindi applicare la formule per il calcolo della torsione rispetto ad una parametrizzazione arbitraria

$$\tau(t) = - \frac{\left(P'(t) \times P''(t)\right) \cdot P'''(t)}{\| P'(t) \times P''(t) \|^2} \qquad (\star)$$

Abbiamo che

$$P'(t) \times P''(t) = \left(r h \operatorname{sen}(t),\ -r h \cos(t),\ r^2\right)$$

Quindi

$$\left(P'(t) \times P''(t)\right) \cdot P'''(t) = r^2 h \operatorname{sen}^2(t) + r^2 h \cos^2(t) = r^2 h$$

$$\| P'(t) \times P''(t) \|^2 = r^2 h^2 + r^4$$

Quindi la formula $(\star)$ di sopra ci dà

$$\tau(t) = - \frac{r^2 h}{r^2 h^2 + r^4} = - \frac{h}{r^2 + h^2}$$

Equivalentemente potevamo sfruttare la formula di Frenet

$$\frac{dB}{dt} = \|P'(t)\| \, \tau(t) \, N(t)$$

Abbiamo che

$T(t) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \left(-r \operatorname{sen}(t) , \, r \cos(t) , \, h \right)$ dal quale ricaviamo

$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \left(-\cos(t) , -\operatorname{sen}(t) , 0 \right)$. Quindi

$B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \left(h \operatorname{sen}(t) , -h \cos(t) , r \right)$ da cui

$$\frac{dB}{dt} = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \left(\cos(t) , \, \operatorname{sen}(t) , \, 0 \right)$$

Mettendo tutte le formule di pag. precedente (tenendo conto che $\|P'(t)\| = \sqrt{r^2+h^2}$) nella formula di Frenet abbiamo

$$\frac{dB}{dt} = \|P'(t)\| \, \tau(t) \, N(t)$$

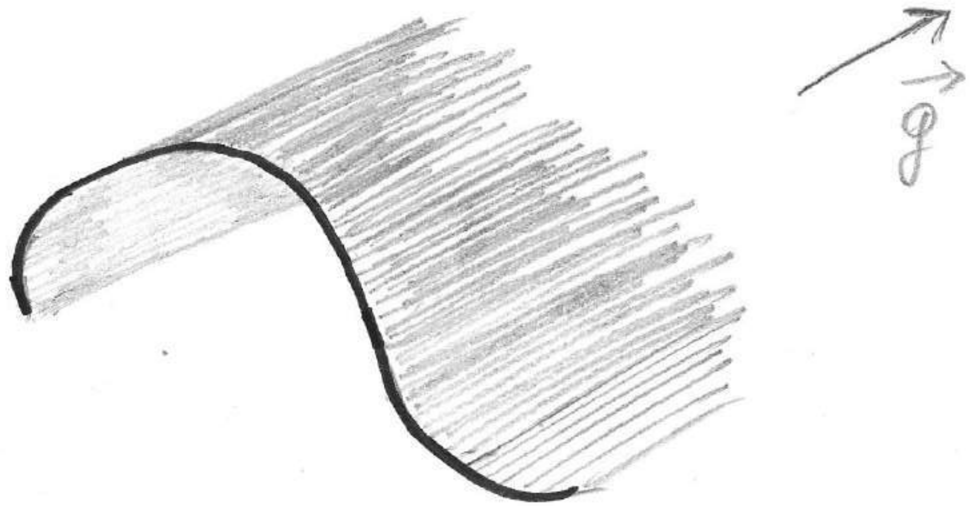
$$\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \left(\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0\right) = \sqrt{r^2+h^2} \, \tau(t) \left(-\cos(t), -\operatorname{sen}(t), 0\right)$$

$$\Longrightarrow \tau(t) = -\frac{h}{r^2+h^2}$$

CILINDRO su una curva $P(t)$.

È l'insieme dei punti appartenenti alle rette parallele ad una direzione data $\vec{g}$ (detta anche <u>generatrice</u>) ed incidenti una curva $Q(t)$ (cioè, incidenti la sua traiettoria).

Senza ledere le generalità, possiamo supporre la curva piana e ortogonale a $\vec{g}$



ELICA CILINDRICA (o generalizzata)

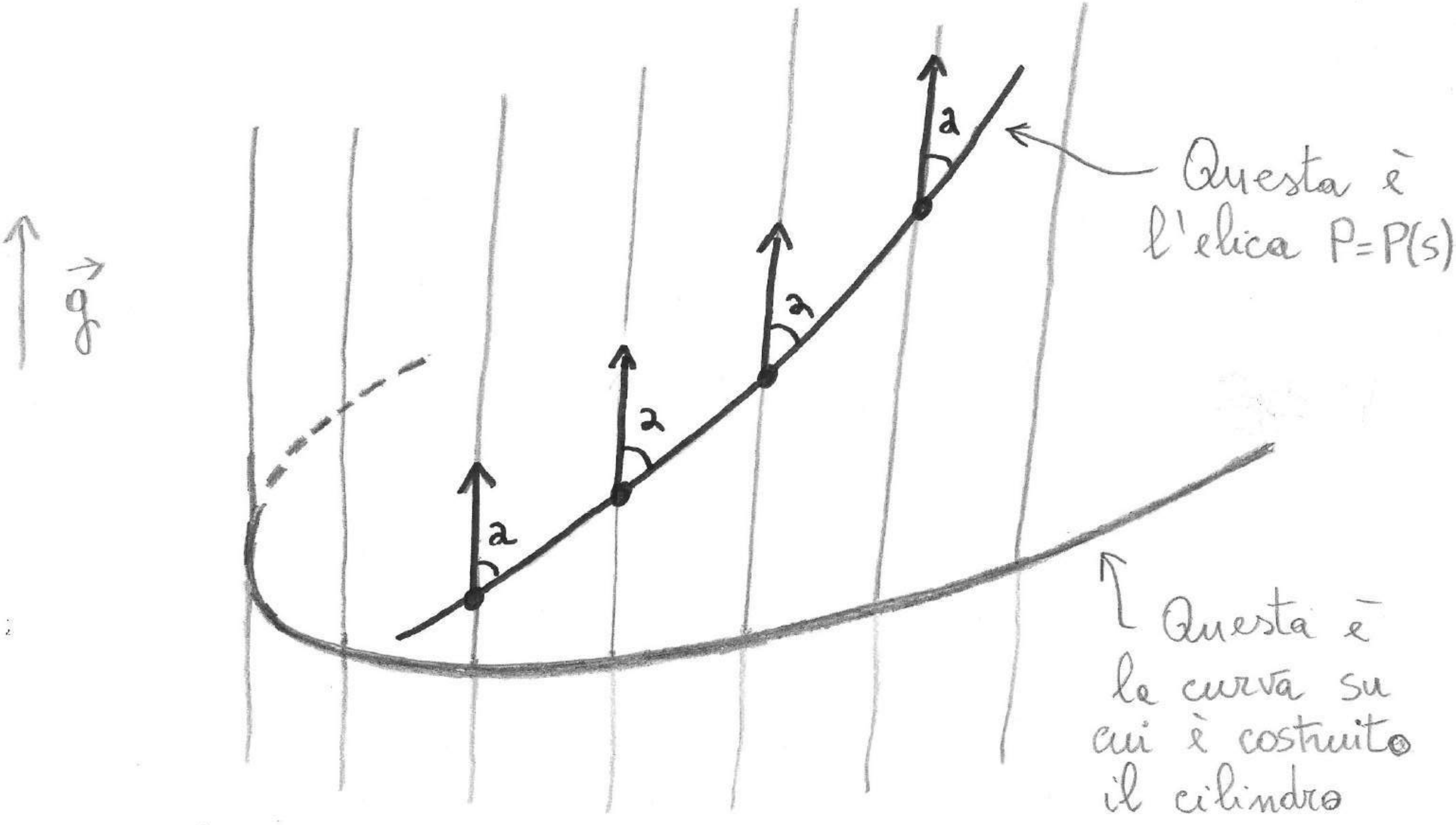
PER DEFINIZIONE: è una curva la cui retta tangente, in ogni punto della curva stessa, forma un angolo costante α con una direzione prefissata $\vec{g}$ (direzione dell'elica o generatrice)

Senza ledere le generalità, supporremo $\vec{g}$ versore

Se $P = P(s)$ è la curva con s ascissa curvilinea, la precedente condizione si traduce come segue

Prodotto scalare $\quad \dfrac{dP}{ds} \cdot \vec{g} = \text{costante} = c \in \mathbb{R}$

(Ricordarsi che $\dfrac{dP}{ds}$ e $\vec{g}$ sono 2 versori e il coseno dell'angolo formato da due versori v e w è $v \cdot w$)


Questa è
l'elica P=P(s)
Questa è
la curva su
cui è costruito
il cilindro
g
a

Osserviamo che la definizione di pag. 5 non dipende dalla parametrizzazione scelta.
Infatti rispetto alla parametrizzazione dell'ascisse curvilinea abbiamo che

$$T(s) \cdot \vec{g} = \frac{dP}{ds} \cdot \vec{g} = \text{costante}$$

e rispetto ad una parametrizzazione arbitraria t,
se $\tilde{P}(t) = P(s(t))$,

$$\tilde{T}(t) \cdot \vec{g} = \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} \Big/ \left\| \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} \right\| \cdot \vec{g} = \frac{\frac{dP}{ds}\frac{ds}{dt}}{\left\| \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} \right\|} \cdot \vec{g}$$

$$= \frac{dP}{ds} \cdot \vec{g} = \text{costante} \quad \left(\text{Ricordare che } s(t) = \int \left\| \frac{d\tilde{P}(t)}{dt} \right\| \right)$$

PROP: Sia $P(s)$ un'elica cilindrica, che non sia una retta, con direzione $\vec{g}$. Allora

$$N(s) \bullet \vec{g} = 0 \quad , \quad B(s) \bullet \vec{g} = \text{costante}$$

dove $N(s)$ e $B(s)$ sono i vettori normale e binormale

DIM:

Abbiamo visto che $P(s)$ è un'elica cilindrica se e solo se

$$\frac{dP}{ds} \bullet \vec{g} = c \in \mathbb{R}$$

cioè $T(s) \bullet \vec{g} = c$, che implica $\frac{dT}{ds} \bullet \vec{g} = 0$ (Ricordarsi che $\vec{g}$ è un vettore costante)

e dalla 1ª formula di Frenet otteniamo

$K N \bullet \vec{g} = 0$. Poiché $K \neq 0$ per ipotesi, abbiamo che $N \bullet \vec{g} = 0$

Ora dimostriamo che $B \bullet \vec{g} = \text{costante}$

Se $P(s)$ è una curva piana abbiamo che

B = vettore costante, quindi $B \bullet \vec{g}$ = costante

Supponiamo quindi $P(s)$ non piana.

In particolare la torsione $\underline{\tau(s) \neq 0}$

Da $N \bullet \vec{g} = 0$ (dimostrato a pagina precedente)

abbiamo che

$$\tau(s) N \bullet \vec{g} = 0 \xRightarrow{\text{Formula di Frenet}} \frac{dB}{ds} \bullet \vec{g} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{ds}\left(B \bullet \vec{g}\right) = 0 \Longrightarrow B \bullet \vec{g} = \text{costante}$$

PROP: Sia $P = P(s)$ una curva con $K(s) \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$.
Allora è un'elica cilindrica $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{K(s)}{\tau(s)} = $ costante

DIM

$\Longrightarrow$ Sia $\vec{g}$ il versore che individua la direzione della generatrice del cilindro. Abbiamo visto (Proposizione pag. 6) che $\vec{g}$ è ortogonale ad N, quindi

$$\vec{g} \in \mathrm{Span}\{T, B\}$$

Più precisamente, poiché $\vec{g}$ è un versore,

$$\vec{g} = \cos(\alpha)\, T + \mathrm{sen}(\alpha)\, B \qquad (\star)$$

Osserviamo che α è l'angolo (costante) tra $\vec{g}$ e T
Infatti $\vec{g} \bullet T \overset{(\star)}{=} \cos(\alpha) \underbrace{T \bullet T}_{=1} + \mathrm{sen}(\alpha) \underbrace{B \bullet T}_{=0} = \cos(\alpha)$

Da (★) di pagina precedente abbiamo che, andando a derivare rispetto ad s,

$$0 = \frac{d\vec{q}}{ds} = \cos(\alpha)\frac{dT}{ds} + \operatorname{sen}(\alpha)\frac{dB}{ds} \xRightarrow{\text{Formule di Frenet}}$$

In quanto $\vec{q}$ è un vettore costante

$$= \cos(\alpha) K N + \operatorname{sen}(\alpha) \tau N =$$

$$= (\cos(\alpha) K + \operatorname{sen}(\alpha) \tau) N$$

$$\Longrightarrow \cos(\alpha) K + \operatorname{sen}(\alpha) \tau = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{K}{\tau} = -\tan(\alpha)$$ che è costante in quanto α è costante

$\Leftarrow$ Praticamente dobbiamo fare il ragionamento a ritroso di quanto fatto per dimostrare $\Rightarrow$

Supponiamo che $\frac{K}{\tau}$ sia costante.
Esisterà quindi un $\alpha \in [0, 2\pi]$ tale che

$$\frac{K}{\tau} = -\tan(\alpha)$$

cioè tale che $\cos(\alpha) K + \text{sen}(\alpha) \tau = 0 \qquad (\bullet)$

Ora $(\bullet) \Longrightarrow \left(\cos(\alpha) K + \text{sen}(\alpha) \tau\right) N = 0$

$$\xRightarrow{\text{Frenet}} \cos(\alpha) \frac{dT}{ds} + \text{sen}(\alpha) \frac{dB}{ds} = 0$$

$\Longrightarrow \cos(\alpha) T(s) + \text{sen}(\alpha) B(s) = V$ <u>vettore costante</u> $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \cos(\alpha) \underbrace{T(s) \cdot T(s)}_{=1} + \text{sen}(\alpha) \underbrace{B(s) \cdot T(s)}_{=0} = V \cdot T(s) \Longrightarrow \boxed{\cos(\alpha) = T(s) \cdot V}$

$\Longrightarrow P(s)$ è elica con generatrice $\vec{g} = V$

<u>Oss</u> : Le Proposizioni di pag. 6 e 8 valgono anche se consideriamo una parametrizzazione arbitraria, cioè possiamo sostituire tranquillamente s con t. Ovviamente se uno volesse dimostrarle rispetto ad una parametrizzazione arbitraria t nelle dimostrazioni deve tenere conto di $\|P'(t)\|$.

Per esempio, a pag. 6 le cose andrebbero come segue:

$$P(t) \text{ elica cilindrica } \Longrightarrow T(t) \cdot \vec{g} = c \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \frac{dT(t)}{dt} \cdot \vec{g} = 0 \xrightarrow{\text{FRENET}} \|P'(t)\| \cdot K(t) \cdot N(t) \cdot \vec{g} = 0$$

Poiché $\|P'(t)\| \neq 0$ e $K(t) \neq 0$, abbiamo $N(t) \cdot \vec{g} = 0$

Analogamente si possono ripercorrere i passaggi di pag. 7-10

In conclusione possiamo scrivere

<u>PROP:</u> Sia $P(t)$ un'elica cilindrica, che non sia una retta, con direzione $\vec{g}$. Allora

$$N(t) \cdot \vec{g} = 0 \quad , \quad B(t) \cdot \vec{g} = \text{costante}$$

<u>PROP:</u> Sia $P(t)$ una curva con $K(t) \neq 0$, $\tau(t) \neq 0$
Allora è un'elica cilindrica $\iff \dfrac{K(t)}{\tau(t)} = \text{costante}$