28/9/2022

- Analisi I : $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$

  funz. di una variabile

- Analisi II : $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(o\ \mathbb{R}^m)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funzione di n variabili
  $n \geq 1$

Esempio : $n=4$, $f(x,y,z,t)$ può indicare, ad es., la temperatura del punto (x,y,z) di un certo solido $D \subset \mathbb{R}^3$, al tempo $t \in \mathbb{R}$.

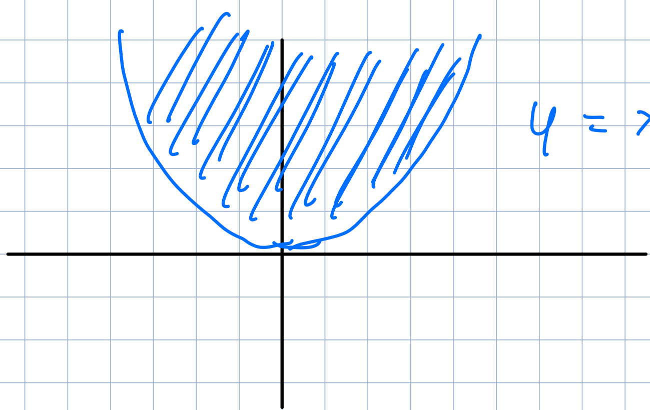
Esempio : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ potrebbe indicare un potenziale (elettrico, gravitazionale, ecc.) nel punto $(x,y,z) \in \mathbb{R} \rightsquigarrow f(x,y,z)$

Esempio : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ha come dominio "naturale" (cioè come "dominio massimale") l'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Esempio: $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$,

$$\text{dom}(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \}$$



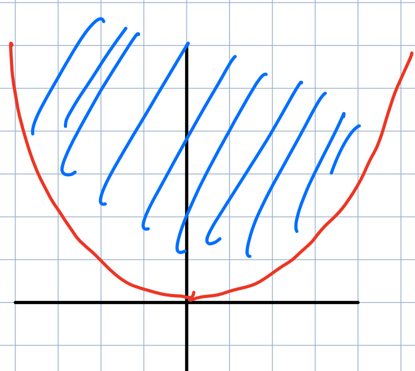
$y = x^2$

N.B. la parabola $y = x^2$ è compresa nel $\text{dom}(f)$ ($\text{dom}(f)$ è un insieme "chiuso")

Esempio $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - x^2}}$

(oppure $f(x,y) = \log(y - x^2)$), qui

$$\text{dom}(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2 \}$$



$y = x^2$

N.B. ora la parabola $y = x^2$ <u>non</u> fa parte di $\text{dom}(f)$ (qui $\text{dom}(f)$ è un insieme "aperto")

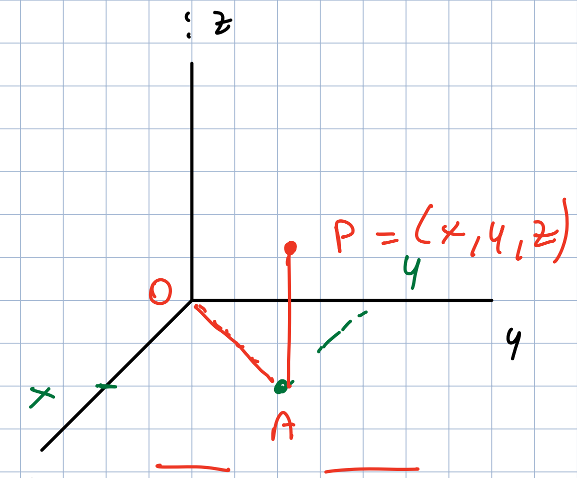
Esempio $f(x,y,z) = \sqrt{z - \sqrt{x^2+y^2}} + \log(1-x^2-y^2-z^2)$

Qui il dom(f) è l'insieme

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \underbrace{z \geq \sqrt{x^2+y^2}} \wedge x^2+y^2+z^2<1\}$$

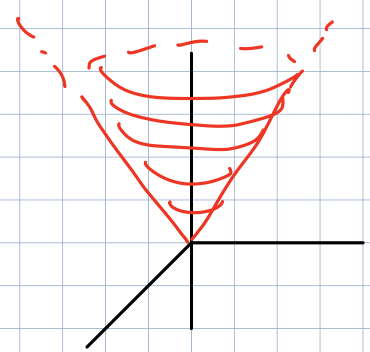
END logico

palla di raggio 1 (aperta, cioè privata della superficie sferica)

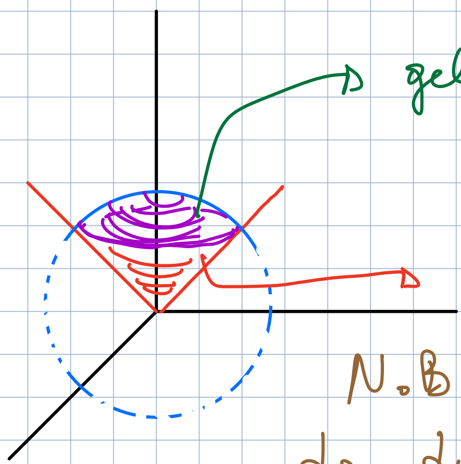


$\overline{PA} = \overline{OA}$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ rappresenta un cono di ampiezza 90°



quindi $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ indica i punti di $\mathbb{R}^3$ che stanno "sopra" al cono (cono compreso). Quindi, intersecando le due condizioni, dom(f) è un "cono gelato"



gelato (a che gusto?)

cialda ...

N.B. il "bordo" è fatto da due parti:

1) superficie conica, che fa parte di dom(f) (perché c'è il $\geq$)

2) calotta sferica, che NON fa parte di dom(f) (perché c'è il $<$)

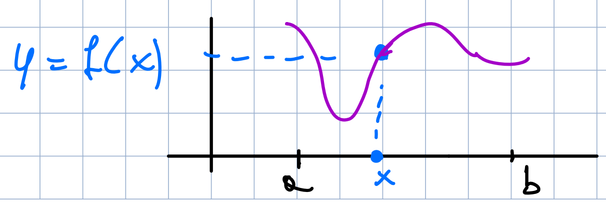
Quindi, qui, dom(f) non è né aperto né chiuso ...

COME VISUALIZZARE $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

Tramite il concetto di "grafico" ...

Analisi I: data $f: I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$, il "grafico di f" è il sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito così:

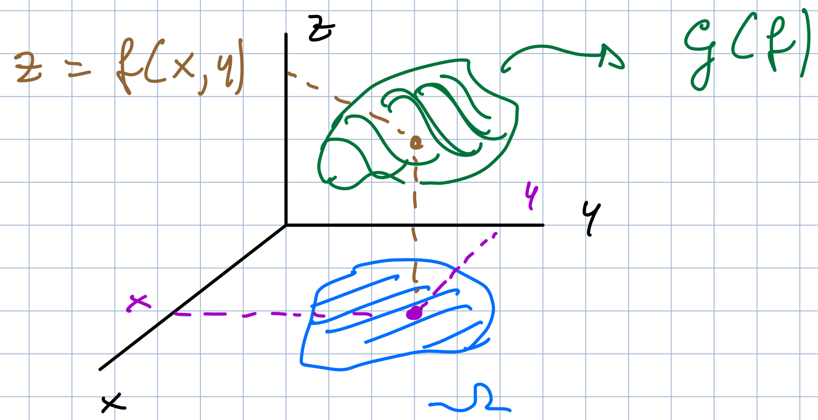
$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \wedge y = f(x)\}$$



In due variabili: $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, il grafico di f è il sottinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$G(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Omega \wedge z = f(x,y) \}.$$

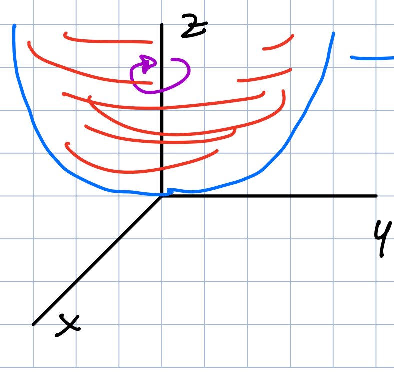
N.B. $G(f)$ è una superficie in $\mathbb{R}^3$ che, proiettata nel piano xy, coincide con $\mathrm{dom}(f) = \Omega$.



Esempio (base) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, e

$$G(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge z = x^2 + y^2 \}$$

è un paraboloide di rotazione, con asse di simmetria dato dall'asse z:

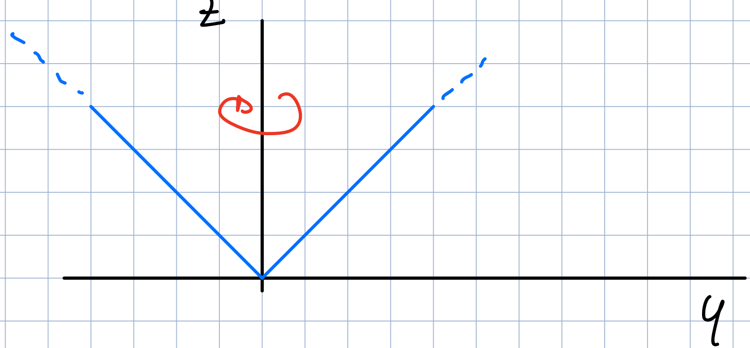


→ parabola $z = y^2$ nel piano yz (ottenuta ponendo $x = 0$ nell'eq.); il parabo-loide si ottiene facendo ruotare questa parabola attorno all'asse z ...

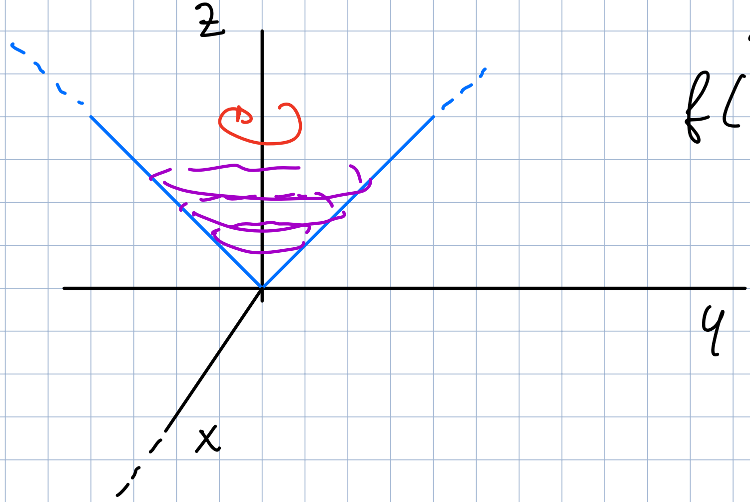
Esempio $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{G}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge z = \sqrt{x^2+y^2}\}$$

è un cono ... ponendo $x=0$, nel piano yz ottengo l'eq. $z = \sqrt{y^2} = |y|$



Il cono è ottenuto facendo ruotare la curva blu ($z = |y|$) attorno all'asse z:



Significato geometrico: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ = distanza dall'origine, nel piano xy, del punto (x,y) ....

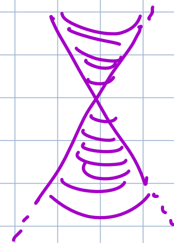
N.B. In generale, se $f(x,y)$ dipende <u>solo</u> da x^2+y^2, allora $\mathcal{G}(f)$ è una superficie di rotazione, con l'asse z come asse di simmetria

Esercizio: $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $\quad (R>0)$

↑ parametro

Chi è $G(f)$?

N.B. della geometria: l'eq. $z^2=x^2+y^2$ rappresenta un (doppio!) cono



Se ricavo z, ho $z=\sqrt{x^2+y^2}$

oppure $z=-\sqrt{x^2+y^2}$, cioè le due falde del cono, e ciascuna è il grafico di una funzione di 2 variabili:

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ ($G(f)$ è la falda superiore)

$g(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ ($G(g)$ è la falda inferiore).

Analogamente, per la sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$,

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ oppure $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ---

Esercizio: riprendere della geom. coni, sfere e paraboloidi, e scriverli come grafici di opportune $f(x,y)$, esplicitando la z...

Notazione Se $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

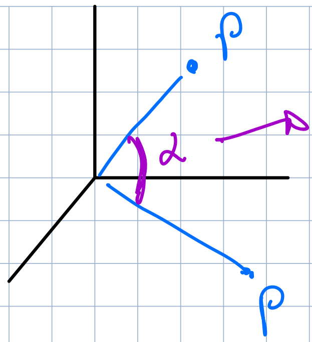
$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ indica la "norma" (o modulo) del vettore X, ovvero la distanza del punto X dall'origine di $\mathbb{R}^n$.

Se $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $\|P - Q\|$ rappresenta la distanza di P da Q, mentre

$P \cdot Q = \langle P, Q \rangle = P^t Q$ indicano il "prodotto scalare" tra P e Q, ovvero

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad \text{se } P = (x_1, \ldots, x_n) \text{ e}$$
$$Q = (y_1, \ldots, y_n)$$

Geometricamente, il significato è:



angolo tra i due vettori
(nel piano passante per P, Q
e l'origine)

$$\cos\alpha = \frac{P \cdot Q}{\|P\| \, \|Q\|}$$