CAMPI E e B STATICI NEL VUOTO

Principi e.s.: - legge di Coulomb
- sovrapposizione effetti per E
- conservazione della carica

Legge di Gauss per E

$$\oint_{sup.chiusa} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{q_L}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0}$$

Circuitazione di E o conservatività di E

$$\oint_{curva\ chiusa} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0$$

Principi m.s.: - forza di Lorentz
- sovrapposizione effetti per B
- legge di Ampere-Laplace

Legge di Gauss per B

$$\oint_{sup.chiusa} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

Circuitazione di B o Legge di Ampere

$$\oint_{curva\ chiusa} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_L$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_L$$

RIASSUNTO DELLE EQUAZIONI PER IL CAMPO STATICO NEL VUOTO

Legge di Gauss per E

$$\oiint_{sup.chiusa} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{q_L}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0}$$

Legge di Gauss per B

$$\oiint_{sup.chiusa} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{B}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

queste relazioni valgono sempre

Circuitazione di E o conservatività di E

$$\oint_{curva\ chiusa} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Circuitazione di B o Legge di Ampere

$$\oint_{curva\ chiusa} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_L$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_L$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

queste relazioni valgono solo in statica

IL CAMPO ELETTROMAGNETICO DIPENDENTE DAL TEMPO:

- **Legge di Faraday-Henry (o dell'induzione elettromagnetica)**
- **Il fenomeno dell'autoinduzione nei circuiti;**
- **Il calcolo di coeff. di autoinduzione del solenoide;**
- **I circuiti RL**
- **Energia immagazzinata in un induttore**

LA LEGGE DI FARADAY-HENRY O DELL' INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Se un magnete è posto vicino ad un circuito conduttore chiuso, nel circuito si manifesta una f.e.m. quando il magnete è messo in movimento. Tale f.e.m. è rilevabile sotto forma di corrente, cioè delle cariche libere messe in moto nel conduttore, mediante un amperometro.

Si verifica che l'entità della f.e.m., e quindi della corrente, dipende dalla velocità del moto del magnete relativamente al circuito.
La corrente ha direzione nel circuito che dipende dal fatto che il magnete sia avvicinato o allontanato.

Figura 1. L'ago dell'amperometro A si sposta quando il magnete è in moto rispetto alla bobina.

Un fenomeno analogo si manifesta se al posto del magnete in movimento abbiamo un circuito in cui la corrente varia col tempo.

Si verifica che se il circuito con corrente variabile genera un ***campo magnetico***, concatenato al circuito in cui misuriamo la corrente, osserviamo una f.e.m. indotta, e quindi una corrente indotta.

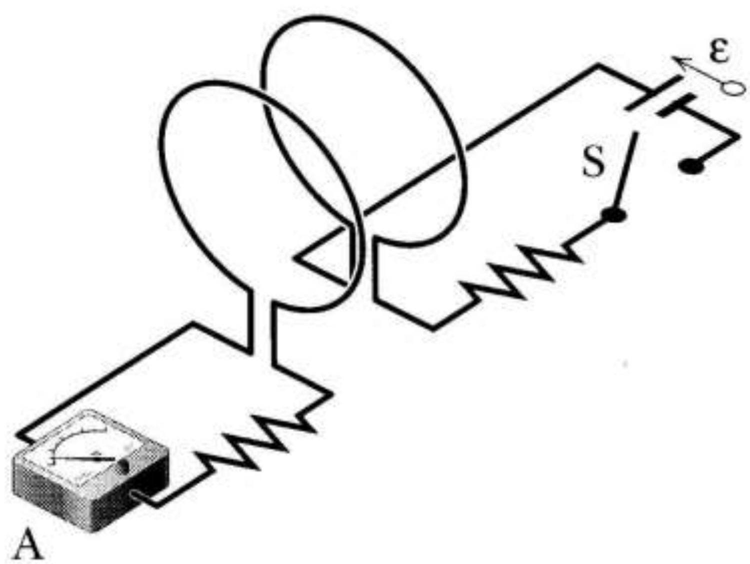
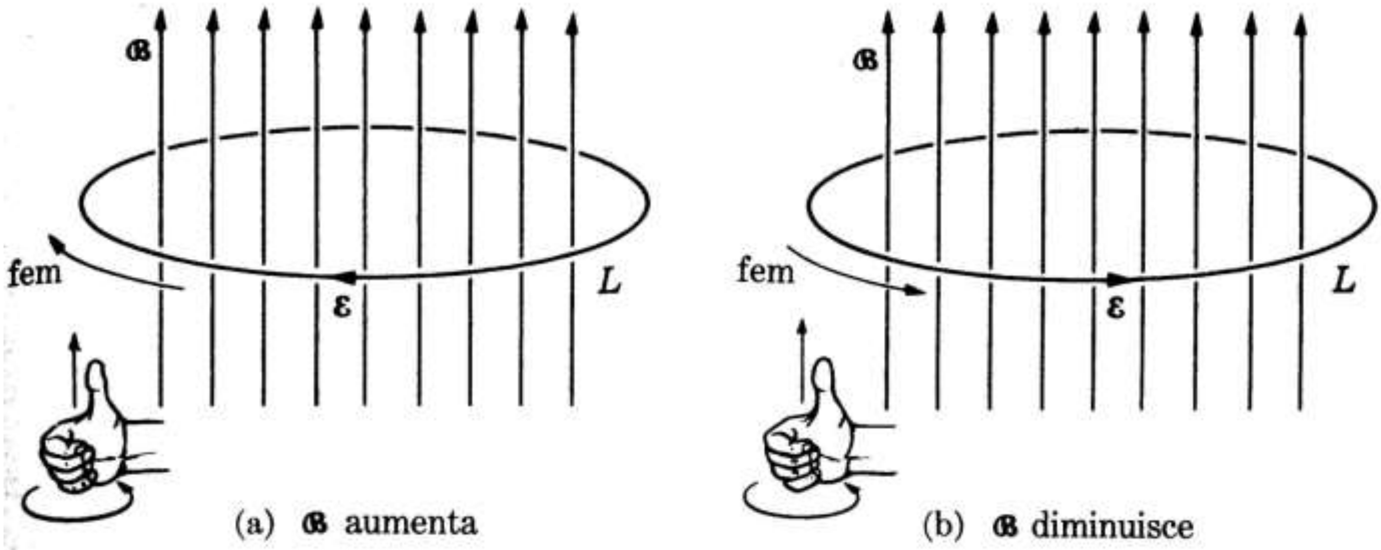


Figura 2. L'ago dell'amperometro A si sposta per qualche istante quando viene azionato l'interruttore S, sia per chiudere che per aprire il circuito. Le bobine non vengono mosse.



Esperimenti accurati hanno mostrato che

in un qualsiasi circuito chiuso posto in un campo magnetico variabile nel tempo viene indotta una f.e.m. uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico attraverso il circuito (cioè attraverso una qualsiasi superficie che ha come contorno il circuito) col segno cambiato.

$$f.e.m.\,indotta = V_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_{magn}$$

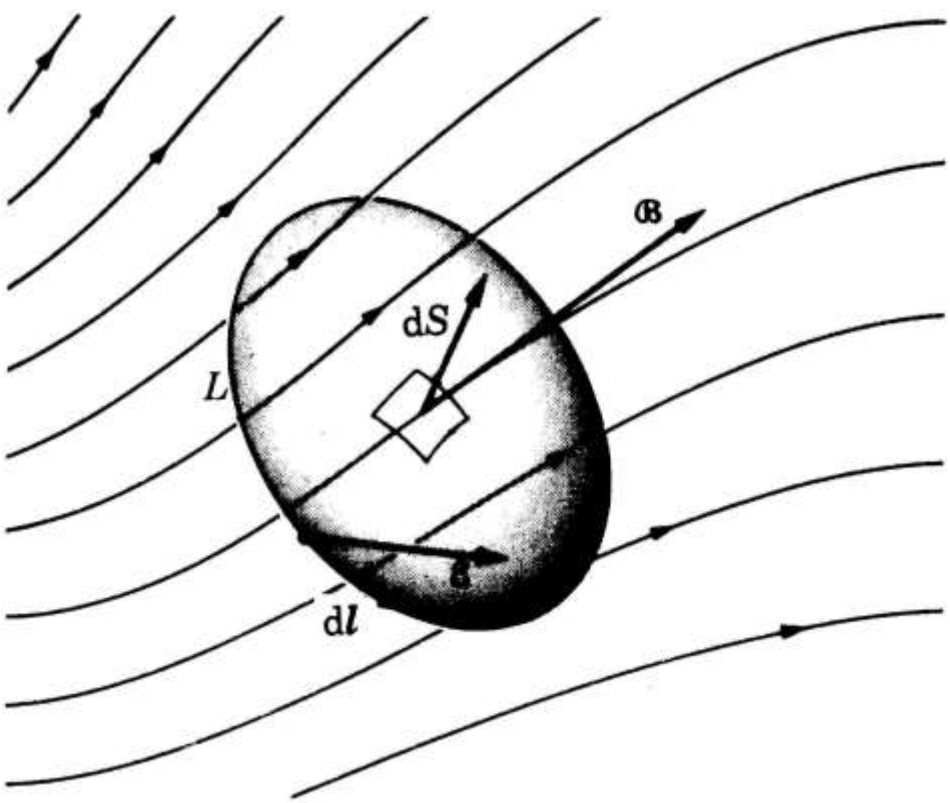
$$f.e.m. = -\frac{d}{dt}\left[\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\right]$$

Ricordando che la f.e.m. lungo un percorso chiuso è definita come il lavoro necessario per spostare una carica unitaria lungo tale percorso:

$$f.e.m. = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Se ***L*** è il percorso chiuso contorno della superficie ***S*** abbiamo:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left[\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\right]$$



Il risultato ottenuto è valido anche se ***L*** non
è un conduttore, ma è una curva chiusa ideale.

In conclusione possiamo affermare che

un campo magnetico dipendente dal tempo crea un campo elettrico tale che la circuitazione del campo elettrico lungo un percorso arbitrario chiuso sia eguale ed opposta alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo magnetico attraverso una superficie avente per contorno quel percorso.

Tale legge prende il nome di

Legge di Faraday-Henry o dell'induzione

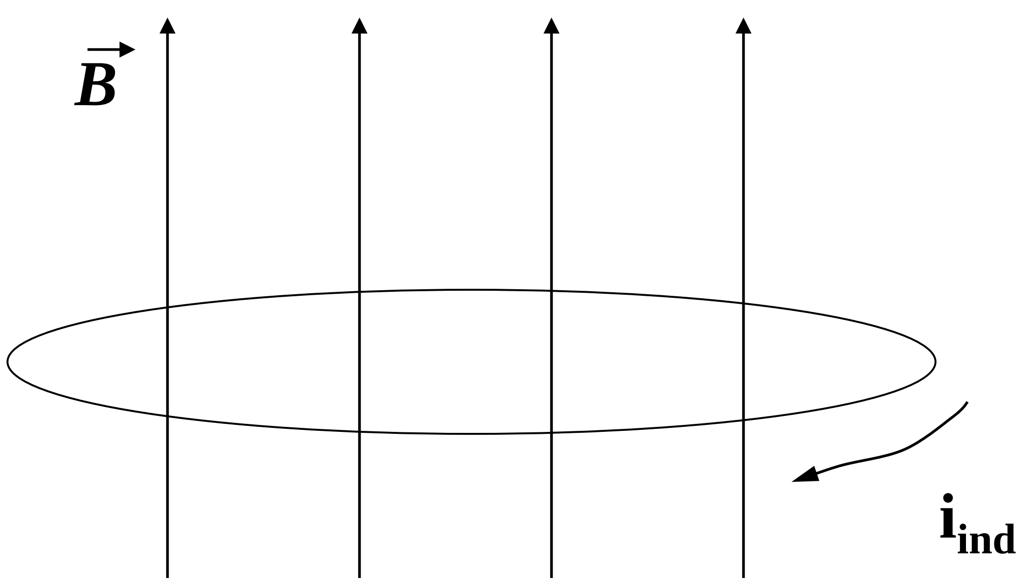
e costituisce una delle **equazioni di Maxwell (la terza equazione)**

La regola per determinare le f.e.m. indotte è data dala **legge di Lenz**:

La corrente indotta in una spira conduttrice chiusa ha un verso tale da opporsi alla variazione che l'ha generata

$$V_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_{magn}$$

$$\mathrm{i}_{\mathrm{ind}} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\Phi_{magn}$$

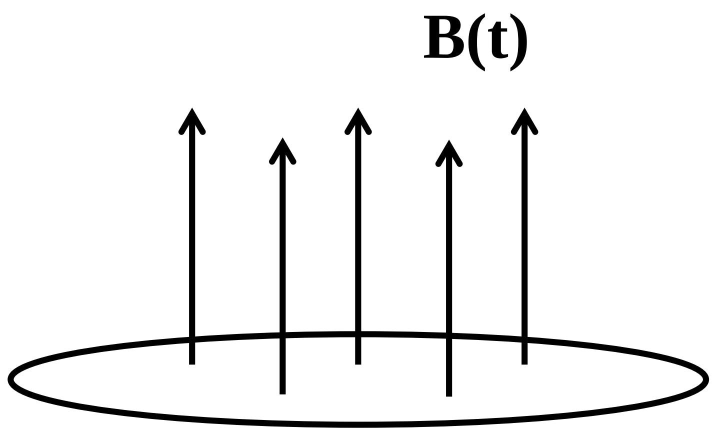


Es.

B aumenta

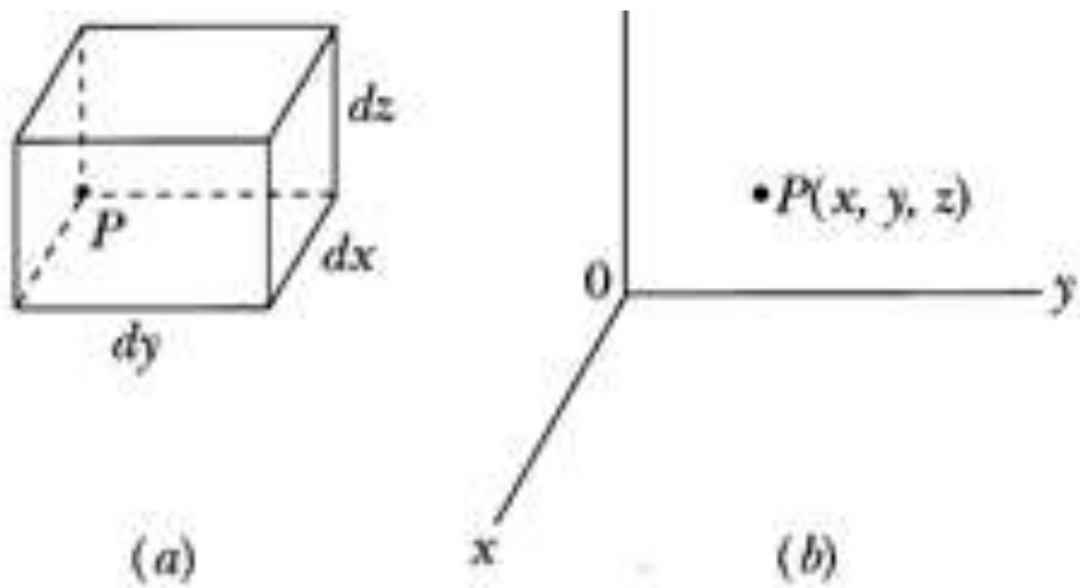
nel tempo

Applicazione



Determinare la corrente che circola nella spira conduttiva di raggio L e resistenza elettrica R se il campo magnetico varia con la legge: $B(t)= a*t$

LA LEGGE DI FARADAY-HENRY O DELL' INDUZIONE ELETTROMAGNETICA IN FORMA DIFFERENZIALE



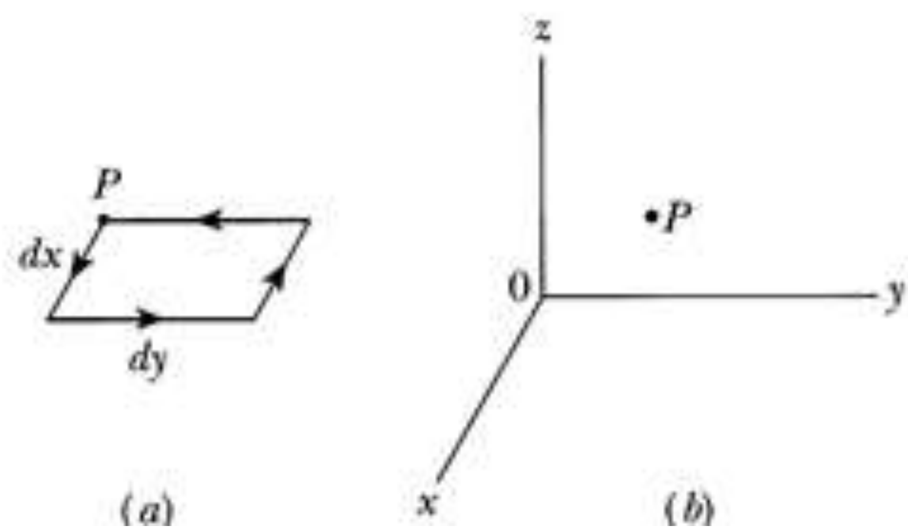
Mettiamoci in un punto P dello spazio in un sistema di riferimento cartesiano.
Consideriamo un parallelepipedo infinitesimo *dx dy dz*.

Applichiamo la relazione valida per il campo elettrostatico

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left[\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\right]$$

sulle 3 facce coordinate.

Cominciamo con la faccia *dx dy*



$$\int_{dx} \vec{E} \cdot \vec{i}\, dx + \int_{dy} \left(\vec{E} + \frac{d\vec{E}}{dx} dx \right) \cdot \vec{j} dy +$$

$$+ \int_{dx} \left(\vec{E} + \frac{d\vec{E}}{dy} dy \right) \cdot \left(-\vec{i}\, dx \right) + \int_{dy} \vec{E} \cdot \left(-\vec{j} dy \right) = -\frac{d}{dt}\left[\vec{B} \cdot \vec{k} dx dy \right]$$

$$\int_{dx} E_x dx + \int_{dy} \left(E_y + \frac{dE_y}{dx} dx \right) dy +$$

$$- \int_{dx} \left(E_x + \frac{dE_x}{dy} dy \right) dx - \int_{dy} E_y dy = -\frac{d}{dt}\left[B_z dxdy \right]$$

$$E_x dx + \left(E_y + \frac{dE_y}{dx} dx \right) dy - \left(E_x + \frac{dE_x}{dy} dy \right) dx - E_y dy =$$

$$= -\frac{d}{dt}\left[B_z dxdy \right]$$

$$\left(\frac{dE_y}{dx} dx \right) dy - \left(\frac{dE_x}{dy} dy \right) dx = -\frac{d}{dt}\left[B_z dxdy \right]$$

$$\left(\frac{dE_y}{dx} \right) - \left(\frac{dE_x}{dy} \right) = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\frac{d}{dt} B_z$$

Ripetendo lo stesso calcolo sulle facce *dy dz* e *dx dz*

Possiamo inventarci il vettore:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{k}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

che rappresenta la formulazione differenziale della legge:

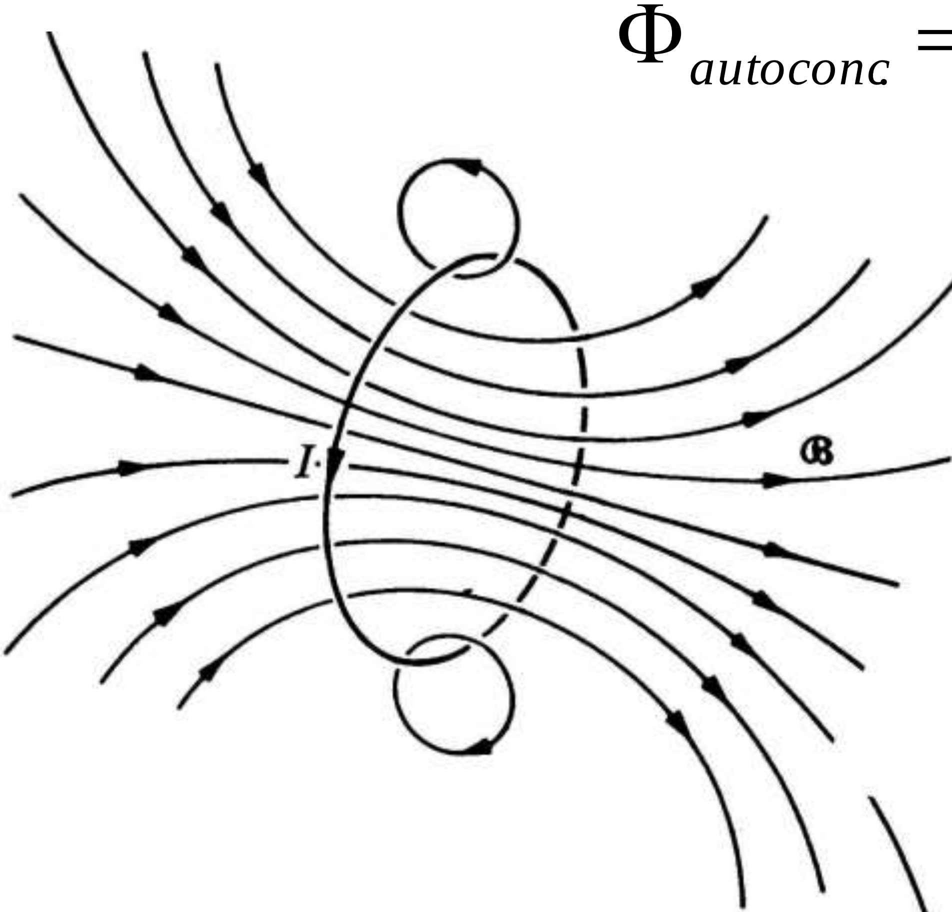
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\left[\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\right]$$

Il fenomeno dell'autoinduzione nei circuiti

Se consideriamo un circuito percorso dalla corrente ***I***, tale corrente crea nello spazio circostante un campo magnetico ***B***.

Linee di forza del campo sono quindi concatenate al circuito, per cui si può calcolare il flusso autoconcatenato.
Il flusso magnetico attraverso una superficie che ha per contorno il circuito vale:

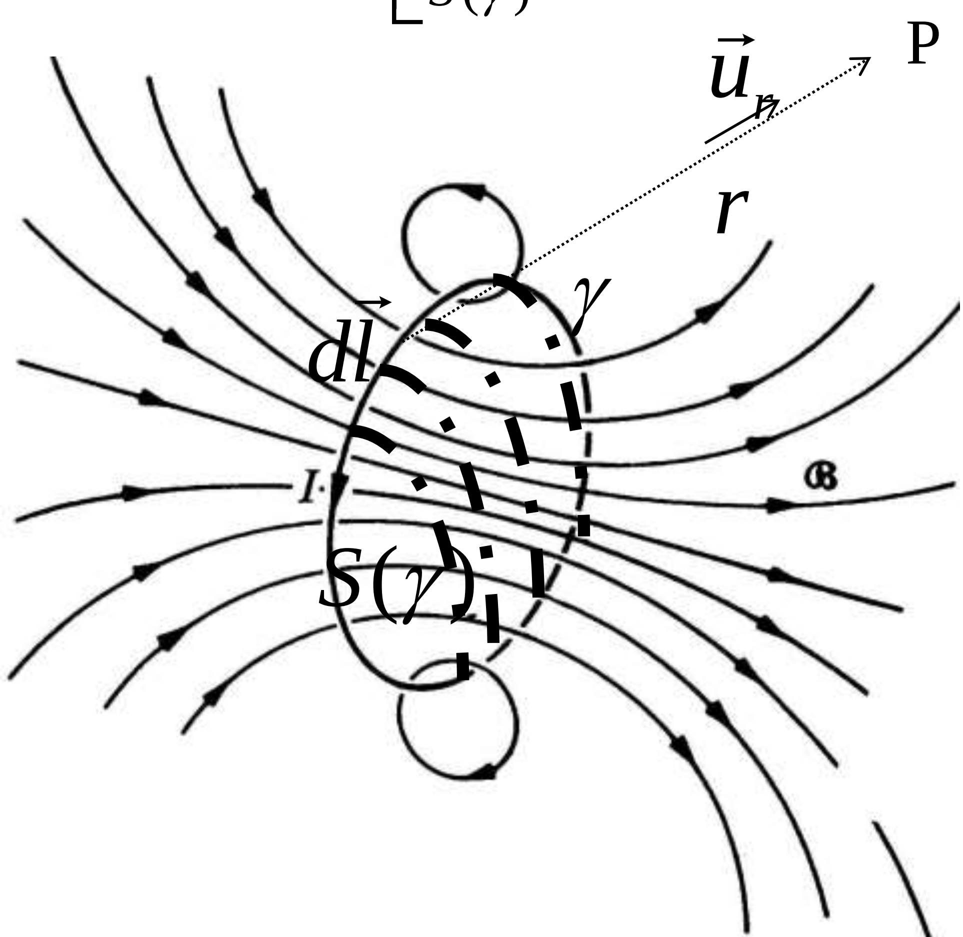
$$\Phi_{autoconc} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



$$\vec{B}(P) = \oint_{\gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l}}{r^2} \times \vec{u}_r$$

$$\Phi_{autoconc} = \int_{S(\gamma)} \oint_{\gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l}}{r^2} \times \vec{u}_r \cdot \vec{u}_N ds$$

$$\Phi_{autoconc} = \left[\int_{S(\gamma)} \oint_{\gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{r^2} \times \vec{u}_r \cdot \vec{u}_N ds \right] i = Li$$



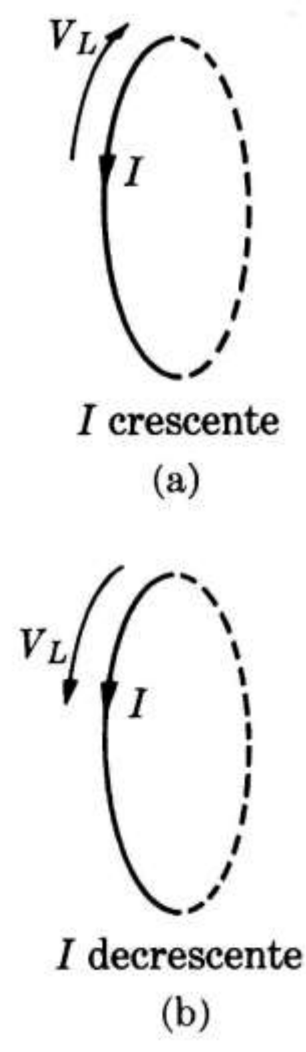
Il risultato vale qualunque sia la geometria del circuito.

L è detto coefficiente di autoinduzione ed è una funzione della forma del circuito e del mezzo circostante.

La sua unità di misura nel S.I. è

Wb A^{-1} = H (Henry)

Figura 27.12 Flusso magnetico autoconcatenato da un circuito.

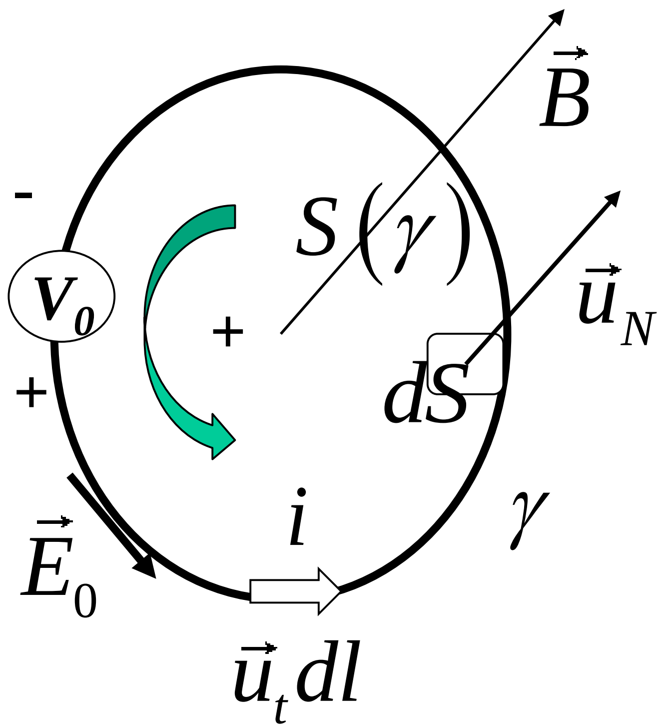


Se la corrente ***I*** nel circuito varia nel tempo, anche il flusso magnetico autoconcatenato varia con t, si viene a creare per la legge dell'ind. e.m. una f.e.m.

$$V_L = -\frac{d}{dt}\Phi = -L\frac{dI}{dt}$$

I circuiti resistivi

Prendiamo un cavo conduttore e colleghiamolo ad un generatore di f.e.m. che mantiene una differenza di potenziale $\boldsymbol{V_0}$ tra le polarità **+** e **-**. Cioè colleghiamo il conduttore ad un dispositivo che garantisce la permanenza di un campo elettrico non nullo $\boldsymbol{E_0}$ dentro il conduttore.



Vale la legge di Ohm $V_0 = Ri$ con $i = \text{cost}$

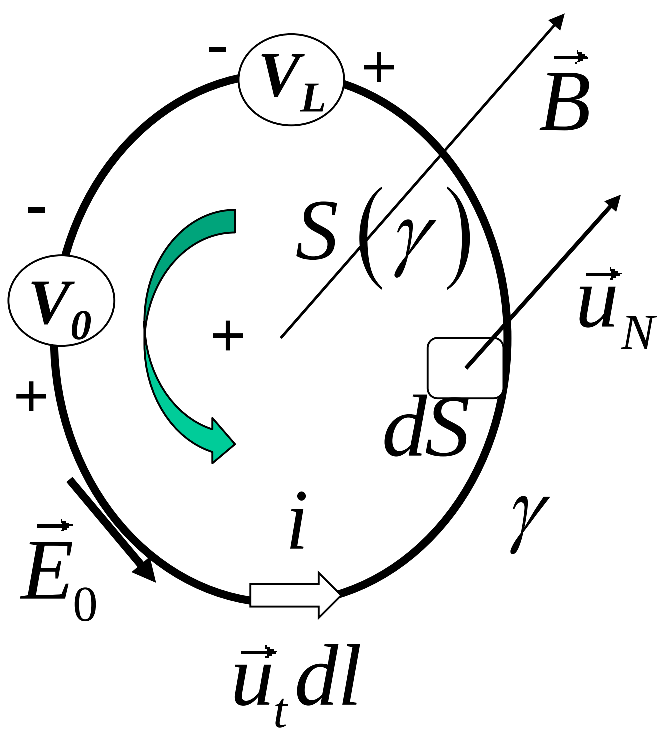
Applicando la legge della Induzione e.m. al circuito

$$\oint_{\gamma} \vec{E}_{indotta} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left[\int_{S(\gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{S}\right] = 0 \Rightarrow \vec{E}_{indotta} = 0$$

I circuiti RL

Teniamo adesso conto del transitorio in cui i passa da ***0*** al ***valore a regime***.
Si induce una f.e.m. indotta (o meglio auto indotta) che chiamiamo $\boldsymbol{V_L}$.

$$V_L = \oint_{\gamma} \vec{E}_{indotta} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left[\int_{S(\gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{S}\right] = -L\frac{di}{dt}$$



La legge di Ohm diventa

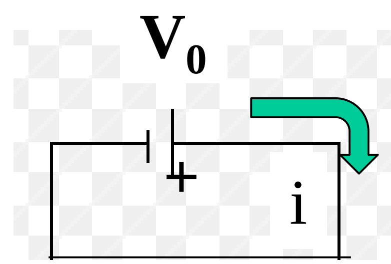
$$V_0 + V_L = V_0 - L\frac{di}{dt} = Ri$$

Ragionando su circuiti reali RL

Prendiamo un filo conduttore nel vuoto e colleghiamolo ad un generatore di **f.e.m.** (forza elettro motrice). Si instaura una corrente elettrica **i** che segue la legge di Ohm $\varepsilon = Ri$ dove R è la resistenza elettrica del filo conduttore.

Ma il circuito percorso da corrente genera un campo magnetico **B** che genera un flusso attraverso una superficie che ha come contorno il circuito stesso.

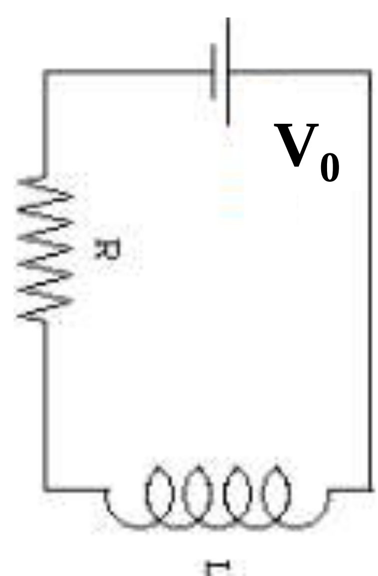
$$\Phi_{autoconc} = Li$$



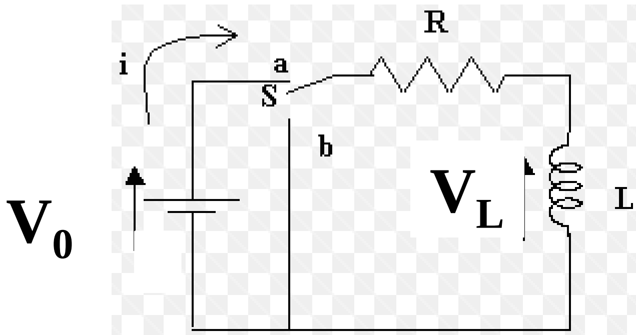
Nella fase di transitorio in cui i si instaura i flusso ha derivata temporale non nulla e secondo la Legge di Faraday-Henry abbiamo la creazione di una f.e.m. indotta:

$$V_L = -\frac{d}{dt}\Phi_{autoconc.} = -L\frac{dI}{dt}$$

Possiamo formalmente indicare il circuito come in figura, concentrando fittiziamente i parametri resistenza e induttanza



Anche se resistenza elettrica **R** e f.e.m. V_L autoindotta sono distribuiti lungo il circuito, possiamo per comodità immaginarli concentrati in due componenti elettrici



La legge di Ohm, se l'interruttore a è chiuso, diventa

$$V_0 + V_L = Ri \qquad\qquad V_0 - L\frac{di}{dt} = Ri$$

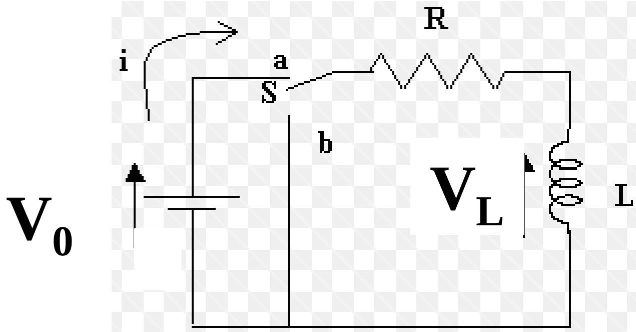
$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{V_0}{R}\right)$$

$$\frac{di}{\left(i - \frac{V_0}{R}\right)} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\frac{d\left(i - \frac{V_0}{R}\right)}{\left(i - \frac{V_0}{R}\right)} = -\frac{R}{L}dt \qquad \ln\left(i - \frac{V_0}{R}\right) = -\frac{R}{L}t + C$$

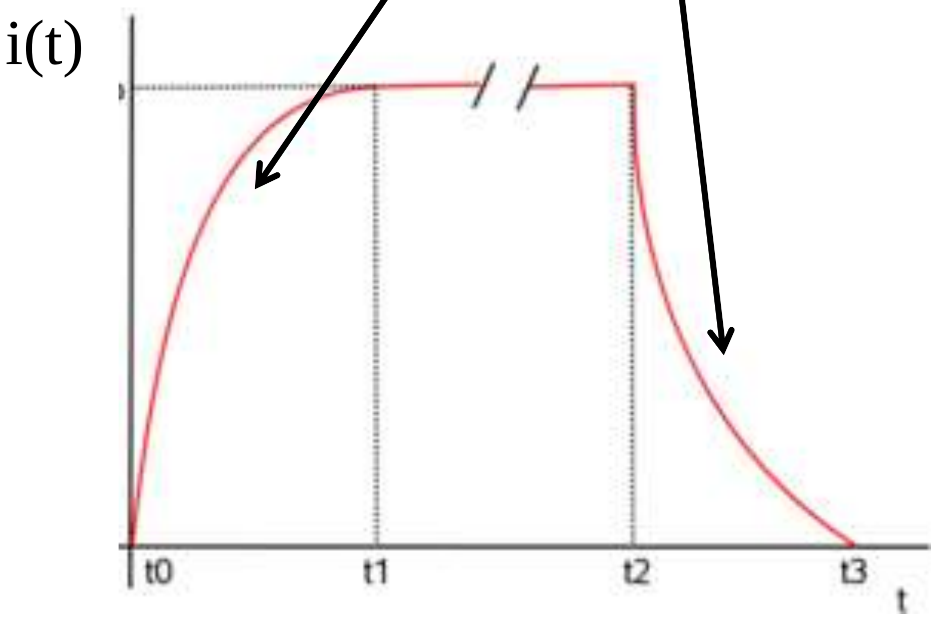
Siccome i=0 a t=0

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

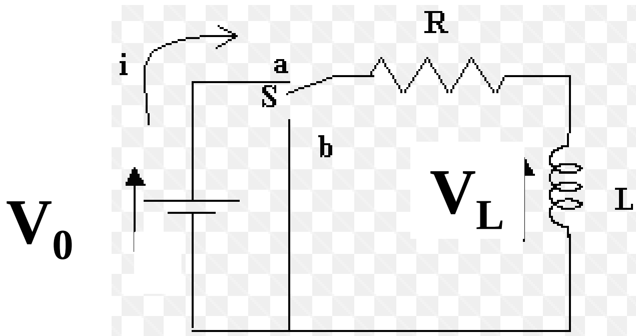


$$i(t)=\frac{V_0}{R}\left[1-e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$ Fase di accensione del circuito (a)

$$i(t)=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$ Fase di spegnimento del circuito (b)



Analizziamo il bilancio energetico:



Fase di accensione del circuito (a):
il generatore eroga l’energia per mantenere in moto la carica dq

$$En_g = V_0 dq$$

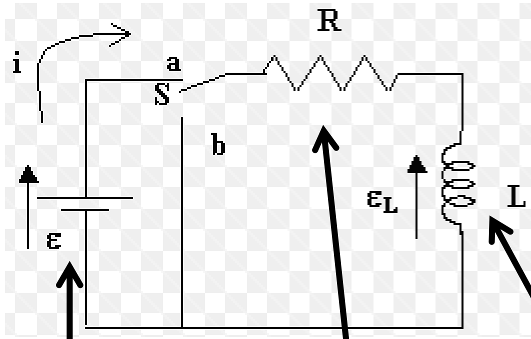
La resistenza dissipa l’energia $$En_R = Ridq$$

La carica dq ha bisogno dell’energia per attraversare l’induttore. $$En_L = L\frac{di}{dt}dq$$

Ovviamente $$En_g = En_R + En_L$$

$$V_0 dq = Ridq + L\frac{di}{dt}dq$$

$$V_0 \frac{dq}{dt}dt = Ri\frac{dq}{dt}dt + L\frac{dq}{dt}di$$



Integrando:

$$\int_{i=0}^{i=\frac{V_0}{R}} V_0 \frac{dq}{dt}\,dt = \int_{i=0}^{i=\frac{V_0}{R}} Ri\frac{dq}{dt}\,dt + \int_{i=0}^{i=\frac{V_0}{R}} Li\,di$$

Quindi nella fase di transitorio nei circuiti RL ai capi dell'induttanza si ha una tensione $\boldsymbol{V_L}$ e quindi il generatore di f.e.m. impiega potenza per forzare la corrente:

$$P = V_L i = \left(L\frac{di}{dt} \right) i$$

Il lavoro compio dal generatore vale:

$$energia = W = \int P\,dt = \int_0^i Li\,di = \frac{1}{2}Li^2$$

e rappresenta una energia immagazzinata nell'induttore sotto forma di campo magnetico.

ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO

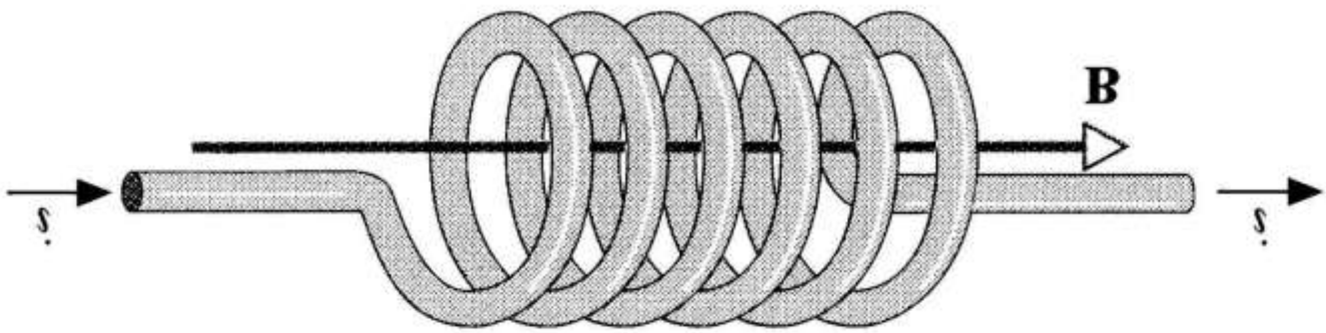
Nella fase di transitorio nei circuiti RL ai capi dell'induttanza si ha una tensione $\boldsymbol{V_L}$ e quindi il generatore di f.e.m. impiega potenza per forzare la corrente:

$$P = V_L I = \left(L \frac{dI}{dt} \right) I$$

Quindi quando la corrente diventa stazionaria il lavoro fatto dal generatore sull'induttore vale

$$energia = W = \int P dt = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2} LI^2$$

Per un circuito a forma di solenoide è facile calcolare ***L***. **Coefficiente di autoinduzione del solenoide.**



Se il solenoide ha ***N*** spire di sezione ***S***, è lungo ***l*** ed è percorso dalla corrente ***i***,

$$B=\mu\frac{N}{l}i \quad ; \quad \Phi=NSB=\left(\mu\frac{N^2S}{l}\right)i; \qquad L=\mu\frac{N^2S}{l}$$

$$W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\left(\mu\frac{N^2}{l}S\right)I^2=\frac{1}{2}\left(\mu^2\frac{N^2}{\mu l^2}S\right)I^2 l$$

$$W=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}(Sl) \quad \longleftarrow \quad \text{moltiplicando x}\frac{\mu l}{\mu l}$$

Introducendo il concetto di densità di ***energia del campo magnetico:***

$$w=\frac{W}{(Sl)}=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

Cioè l’energia del generatore si è accumulata nel campo magnetico. ***Si può dimostrare che il risultato ottenuto è valido per qualsiasi campo magnetostatico.***

ENERGIA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Come abbiamo visto precedentemente, ai campi elettrostatico e magnetostatico
è associata una energia per unità di volume
pari a

$$w_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$$

$$w_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu_r}$$

Anche per il campo elettromagnetico dipendente dal tempo c'è da aspettarsi di poter definire una energia per unità di volume.

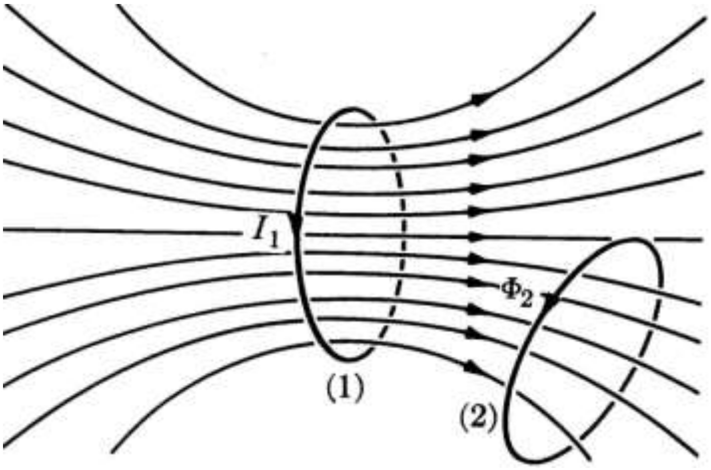
Si può dimostrare (ma non lo faremo) che la espressione per tale energia è la stessa che avevamo per i campi statici:

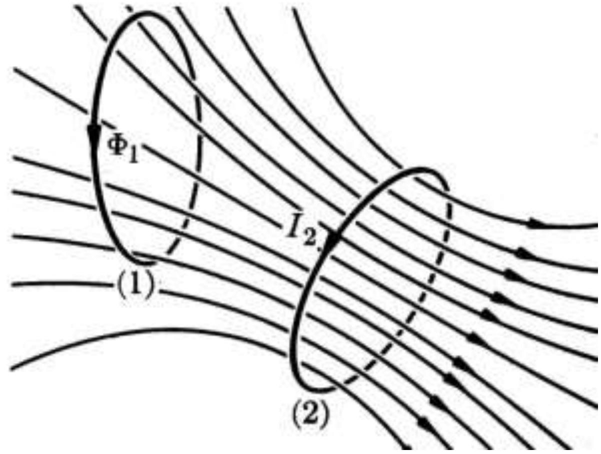
$$w_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu_r}$$

IL CAMPO ELETTROMAGNETICO DIPENDENTE DAL TEMPO:

- **La mutua induzione**

I CIRCUITI ACCOPPIATI E IL COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE





Prendiamo due circuiti **(1)** e **(2)** di geometria nota e posti in due punti fissi dello spazio.
Nel circuito **(1)** circola la corrente $\boldsymbol{I_1}$
nel circuito **(2)** circola la corrente $\boldsymbol{I_2}$.

La corrente $\boldsymbol{I_1}$ crea intorno al circuito **(1)** un campo magnetico $\boldsymbol{B_1}$(P). Alcune linee di forza di $\boldsymbol{B_1}$ sono concatenate al circuito **(2)** (cioè danno origine ad un flusso del vettore $\boldsymbol{B_1}$ attraverso una superficie $\boldsymbol{S_2}$ che ha come contorno il circuito **(2)**.
Calcoliamo il flusso di $\boldsymbol{B_1}$ attraverso la superficie $\boldsymbol{S_2}$ vale:

$$\vec{B}_1 = \oint_\gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1}{{r_1}^2} \times \vec{u}_{r,1}$$

$$\Phi_2(B_1) = \int_{S_2(\gamma 2)} \oint_{\gamma 1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1}{r_1^{\,2}} \times \vec{u}_{r,1} \cdot \vec{u}_{N,2} ds_2$$

$$\Phi_2(B_1) = \left[\int_{S_2(\gamma 2)} \oint_{\gamma 1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1}{r_1^{\,2}} \times \vec{u}_{r,1} \cdot \vec{u}_{N,2} ds_2 \right] I_1$$

Il flusso di $\boldsymbol{B_1}$ attraverso la superficie $\boldsymbol{S_2}$ vale:

$$\Phi_2 = M_{2,1} I_1$$

Il coefficiente $\boldsymbol{M_{2,1}}$ è funzione solo della forma dei circuiti, della loro posizione relativa e del mezzo circostante.

Se consideriamo adesso il circuito **(2)** in cui circola la corrente $\boldsymbol{I_2}$, esso crea intorno a se un campo magnetico $\boldsymbol{B_2}$(P).
Alcune linee di forza di $\boldsymbol{B_2}$ sono concatenate al circuito **(1)** (cioè danno origine ad un flusso del vettore $\boldsymbol{B_2}$ attraverso una superficie $\boldsymbol{S_1}$ che ha come contorno il circuito **(1)**.
Si può dimostrare, come nel caso del coefficiente di autoinduzione, che il flusso di $\boldsymbol{B_2}$ attraverso la superficie $\boldsymbol{S_1}$ vale:

$$\Phi_1 = M_{1,2} I_2$$

Dove la costante $\boldsymbol{M_{1,2}}$ è la stessa del caso precedente ed è detta coefficiente di mutua induzione.

L'unità di misura nel S.I. del coefficiente ***M*** è l'**Henry** [**H**].

Se la corrente nel circuito **(1)** $\boldsymbol{I_1}$ è variabile nel tempo il flusso di $\boldsymbol{B_1}$ attraverso il circuito **(2)** $\boldsymbol{\Phi_2}$ cambia. Nel circuito **(2)** si induce una f.e.m.

$$V_2 = -M_{2,1}\frac{dI_1}{dt}$$

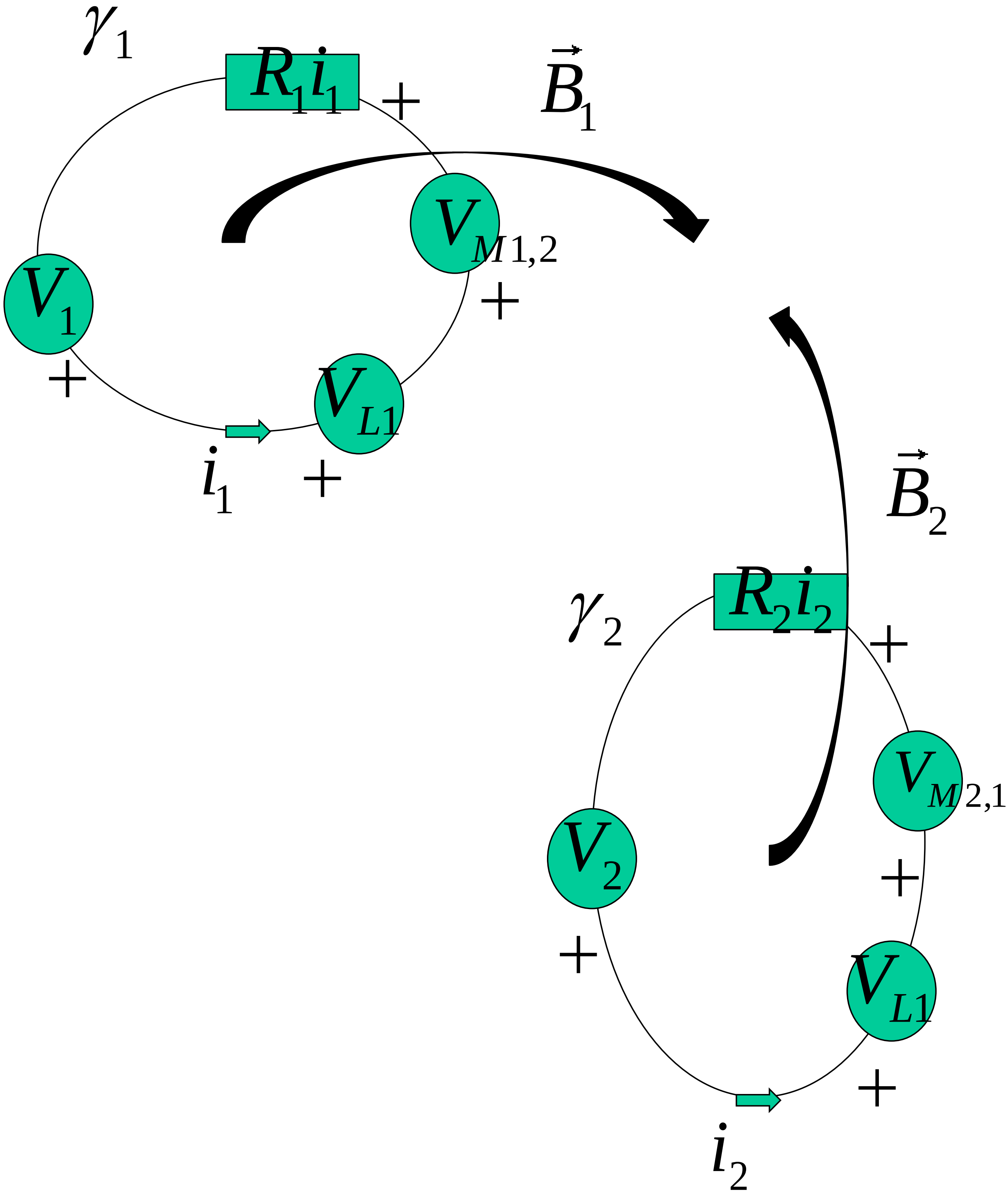
Se la corrente nel circuito **(2)** $\boldsymbol{I_2}$ è variabile nel tempo il flusso di $\boldsymbol{B_2}$ attraverso il circuito **(1)** $\boldsymbol{\Phi_1}$ cambia. Nel circuito **(1)** si induce una f.e.m.

$$V_1 = -M_{1,2}\frac{dI_2}{dt}$$

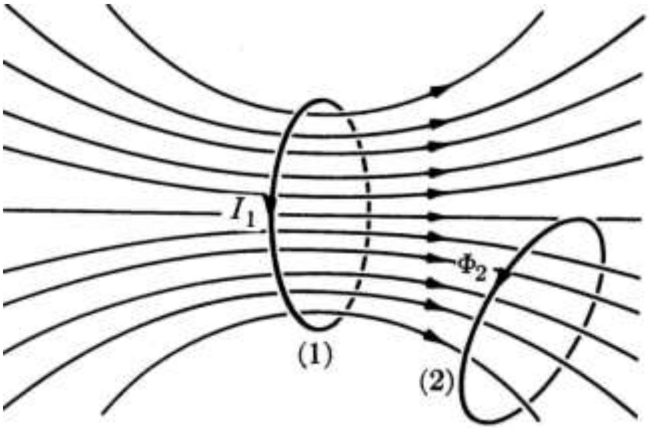
Quindi tra due circuiti si effettua uno scambio di energia mediante il campo elettromagnetico.

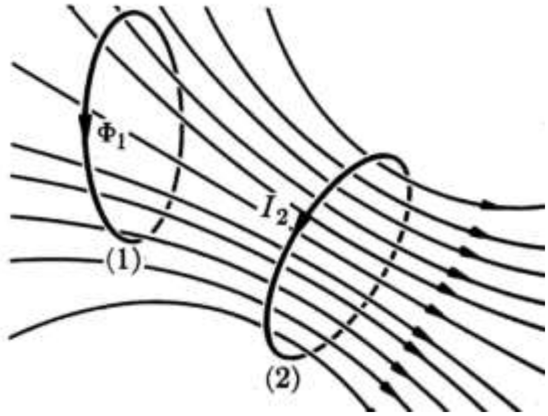
Su questo principio si basano applicazioni come: il trasformatore o la trasmissione del segnale (antenne).

DIMOSTRIAMO L'EGUAGLIANZA DEI DUE COEFFICIENTI



γ_1
$R_1 i_1$
+
$\vec{B}_1$
$V_{M1,2}$
+
V_1
+
V_{L1}
i_1
+
$\vec{B}_2$
γ_2
$R_2 i_2$
+
$V_{M2,1}$
V_2
+
+
V_{L1}
+
i_2





Se la corrente nel circuito **(1)** $\boldsymbol{I_1}$ è variabile nel tempo il flusso di $\boldsymbol{B_1}$ attraverso il circuito **(2)** $\boldsymbol{\Phi_2}$ cambia. Nel circuito **(2)** si induce una f.e.m., quindi per far circolare la carica dq_2 si deve fare un lavoro aggiuntivo

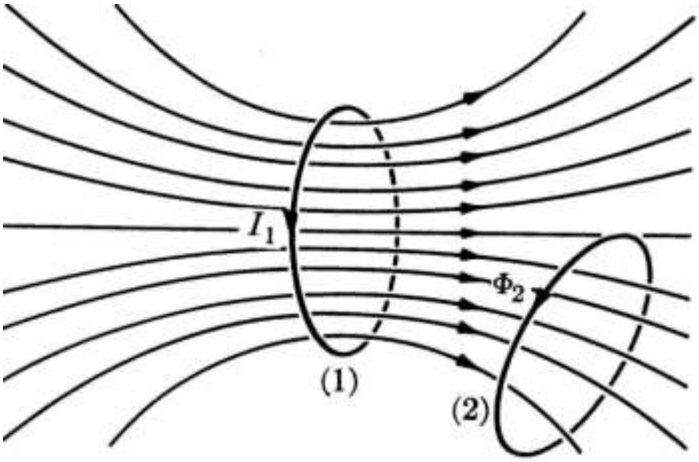
$$dEn_{2,1} = V_2 dq_2 = -M_{2,1}\frac{dI_1}{dt}dq_2 = -M_{2,1} I_2 dI_1$$

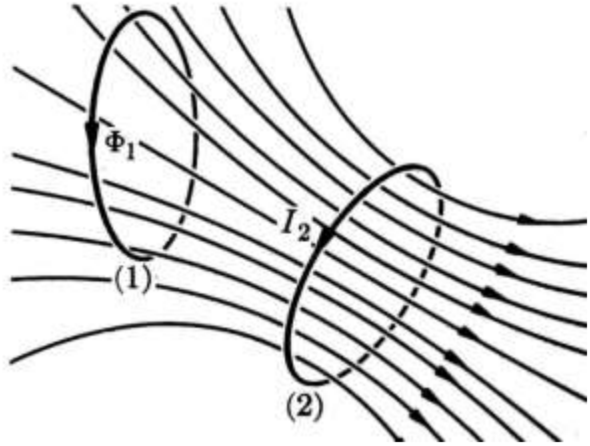
Integrando da I_1=0 al valore finale $En_{2,1} == M_{2,1} I_2 I_1$

Se la corrente nel circuito **(2)** $\boldsymbol{I_2}$ è variabile nel tempo il flusso di $\boldsymbol{B_2}$ attraverso il circuito **(1)** $\boldsymbol{\Phi_1}$ cambia. Nel circuito **(1)** si induce una f.e.m., quindi per far circolare la carica dq_1 si deve fare un lavoro aggiuntivo

$$dEn_{1,2} = V_1 dq_1 = -M_{1,2}\frac{dI_2}{dt}dq_1 = -M_{1,2} I_1 dI_2$$

Integrando da I_2=0 al valore finale $En_{1,2} = M_{1,2} I_1 I_2$





Analizziamo 2 casi.

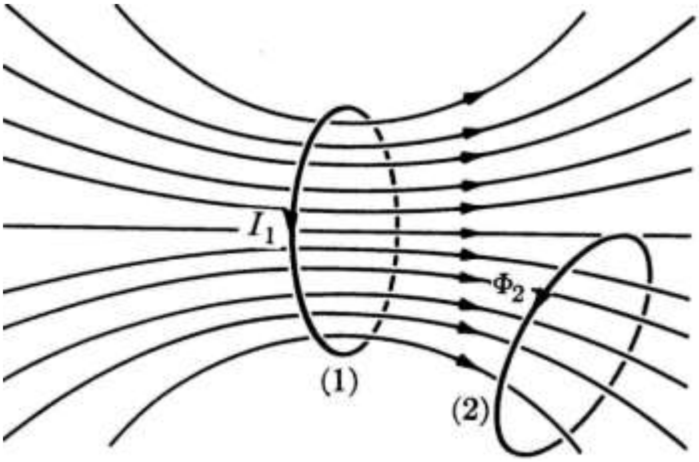
<u>CASO 1.</u> Accendiamo la corrente I_1 con $I_2=0$.
L’energia spesa vale:

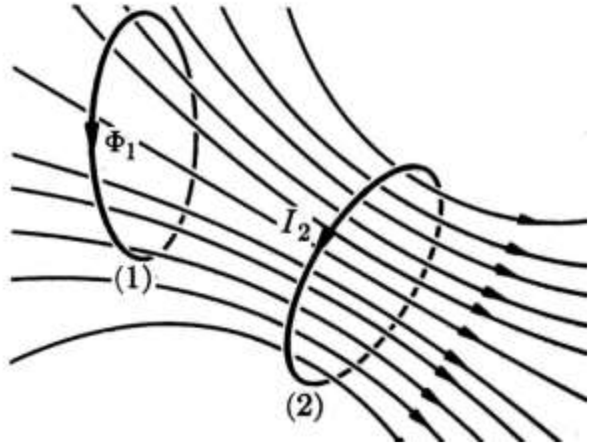
$$En_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Accendiamo anche la corrente I_2 a I_1 costante.
L’energia spesa vale:

$$\Delta En = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{1,2} I_2 I_1$$

Energia spesa per mantenere la corrente in (1)
in presenza del campo magnetico B_2 variabile





<u>CASO 2.</u> Accendiamo la corrente I_2 con I_1=0.
L'energia spesa vale:

$$En_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Accendiamo anche la corrente I_1 a I_2 costante.
L'energia complessiva spesa vale:

$$\Delta En = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{2,1} I_2 I_1$$

Energia spesa per mantenere la corrente in (2)
in presenza del campo magnetico B_1 variabile

Nei due casi l'energia totale spesa per l'accensione
Delle due correnti vale:

CASO 1

$$En = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{1,2} I_2 I_1$$

CASO 2

$$En = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{2,1} I_2 I_1$$

Le due energie spese devono coincidere perché
La configurazione finale di campo magnetico è
La stessa. Quindi

$$M_{1,2} = M_{2,1} = M$$