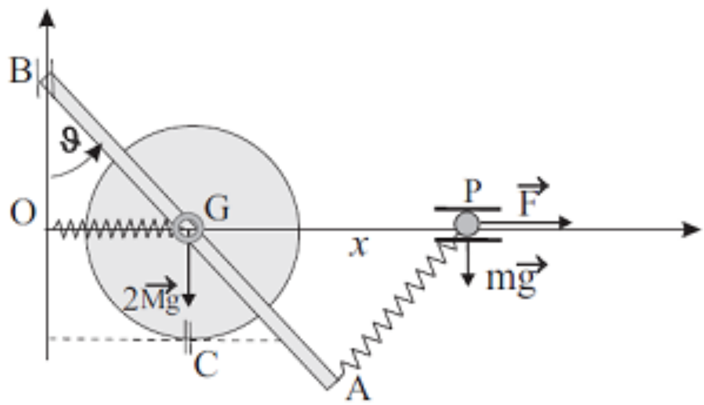
Compito di Meccanica Razionale del 30 Giugno 2010 - Tema A

1) Cinematica relativa. (Max 1 pagina)
2) In un piano verticale Oxy un disco omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse $y = -R$; un'asta omogenea AB di egual massa M e lunghezza 2ℓ ha l'estremo B mobile sull'asse delle y ed il baricentro G incernierato al centro del disco. Un punto materiale P di massa m è mobile sull'asse delle x sollecitato da una forza orizzontale costante $\vec{F}$, con $F > 0$, e collegato con una molla ideale, di costante $k > 0$, all'estremo A dell'asta. Una forza elastica di costante $h = k$ è infine applicata al centro del disco e diretta verso l'origine O. Si suppongano i vincoli perfetti e si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo di rotazione ϑ che l'asta forma con l'asse verticale e l'ascissa x del punto P.

- Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
- Determinare la velocità angolare del disco.
- Calcolare le equazioni differenziali del moto nella forma di Lagrange.
- Linearizzare tali equazioni nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile e determinare le pulsazioni proprie.



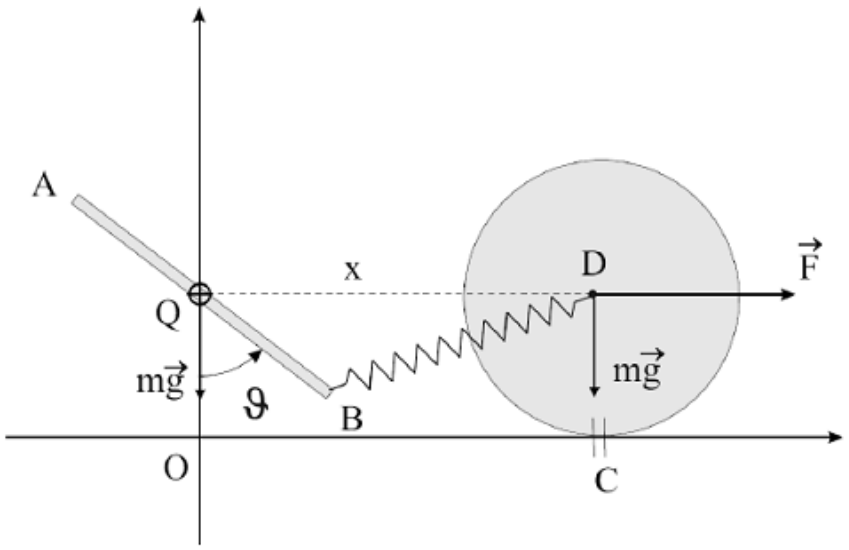
Esercizio 2.

Compito di Meccanica Razionale del 25 Giugno 2013 - Tema A

Teoria (max 1 pagina): Statica.

Esercizio In un piano verticale Oxy un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare sull'asse x, sollecitato da una forza orizzontale costante F con $F > 0$, applicata al centro D. Un'asta omogenea AB di eguale massa m e lunghezza $2R$ è vincolata senza attrito per il suo baricentro ad un punto fisso Q di coordinate $(0, R)$. Una molla ideale con costante di elasticità $k > 0$ collega il centro del disco all'estremo B dell'asta. Si scelgano come coordinate lagrangiane l'angolo di rotazione θ che l'asta forma con l'asse delle ordinate e l'ascissa x del centro D del disco.

1. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare del parametro k.
2. Determinare i momenti cinetici e l'energia cinetica.
3. Linearizzare le equazioni del moto nell'intorno dello stato d'equilibrio stabile e calcolare i periodi delle oscillazioni proprie.
4. Calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto del disco in un condizione di equilibrio.



Riprendiamo Esame 30/06/2010

$U = 2klx\sin\theta - 2kl^2\sin^2\theta + Fx - \frac{1}{2}kx^2 + cost$

$Q_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} = 2klx\cos\theta - 4kl^2\sin\theta\cos\theta = 2kl\cos\theta(x - 2l\sin\theta)$

$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 2kl\sin\theta + F - kx$

$\delta L^{(a)} = \sum_i \underline{F}_i^{(a)} \cdot \delta P_i = \sum_j F_j^{(a,i)} \cdot \delta P_j + \sum_k F_k^{(a,e)} \cdot \delta P_k$

$\delta L^{(a)} = -Mg\underline{j}\cdot\delta G - Mg\underline{j}\cdot\delta G - mg\underline{j}\cdot\delta P + k(O-G)\cdot\delta G$
$+ k(A-P)\cdot\delta P + k(P-A)\cdot\delta A + F\underline{i}\cdot\delta P =$
$= \cancel{-2Mg\underline{j}\cdot l\cos\theta\,\delta\theta\,\underline{i}}_{=0} \cancel{- mg\underline{j}\cdot\delta x\,\underline{i}}_{=0} - kl\sin\theta\,\underline{i}\cdot l\cos\theta\,\delta\theta\,\underline{i} +$
$+ k[(2l\sin\theta - x)\underline{i} - l\cos\theta\,\underline{j}]\cdot\delta x\,\underline{i} +$
$- k[(2l\sin\theta - x)\underline{i} - l\cos\theta\,\underline{j}]\cdot(2l\cos\theta\,\delta\theta\,\underline{i} + l\sin\theta\,\delta\theta\,\underline{j}) + F\underline{i}\cdot\delta x\,\underline{i} =$
$= \cancel{-kl^2\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta} + k(2l\sin\theta - x)\delta x - 2kl\cos\theta(2l\sin\theta - x)\delta\theta +$
$+ \cancel{kl^2\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta} + F\delta x$

$\delta L^{(a)} = \underbrace{2kl\cos\theta(x - 2l\sin\theta)}_{Q_\theta}\delta\theta + [\underbrace{k(2l\sin\theta - x) + F}_{Q_x}]\delta x$

Conferma di quanto già trovato:

$Q_\theta = 2kl\cos\theta(x - 2l\sin\theta)$ $\qquad$ $Q_x = 2kl\sin\theta - kx + F$

Equilibrio: dalla prima, deve essere $2kl\cos\theta(x - 2l\sin\theta) = 0$

2 sottocasi: 1° $\cos\theta = 0$ $\begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{2} \\ \theta_2 = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

Inserendo nella seconda: $2kl\sin\frac{\pi}{2} - kx_1 + F = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2l + \frac{F}{k}$

$2kl\sin(\frac{3}{2}\pi) - kx_2 + F = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2l + \frac{F}{k}$

$(\theta_1, x_1) = (\frac{\pi}{2}, 2l + \frac{F}{k})$ e $(\theta_2, x_2) = (\frac{3}{2}\pi, -2l + \frac{F}{k})$ sono equilibri.

2°: $x = 2l\sin\theta$, inserendo nella seconda: $2k\cancel{l\sin\theta} - 2k\cancel{l\sin\theta} + F = 0$

Impossibile, poiché per definizione $F > 0$.

Le configurazioni di equilibrio sono due!

Stabilità:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -2k\ell\sin\theta(x - 2\ell\sin\theta) - 4k\ell^2\cos^2\theta = -2k\ell x\sin\theta + 4k\ell^2\sin^2\theta - 4k\ell^2\cos^2\theta$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial x} = 2k\ell\cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -k$$

$$\underline{\underline{H}}(\theta, x) = \begin{pmatrix} -2k\ell x\sin\theta + 4k\ell^2\sin^2\theta - 4k\ell^2\cos^2\theta & 2k\ell\cos\theta \\ 2k\ell\cos\theta & -k \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}(\theta_1, x_1) = \underline{\underline{H}}\left(\frac{\pi}{2}, 2\ell + \frac{F}{k}\right) = \begin{pmatrix} -2k\ell\left(2\ell + \frac{F}{k}\right) + 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2F\ell & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

Due autovalori $< 0 \Rightarrow (\theta_1, x_1)$ è sempre stabile

$$\underline{\underline{H}}(\theta_2, x_2) = \underline{\underline{H}}\left(\frac{3}{2}\pi, -2\ell + \frac{F}{k}\right) = \begin{pmatrix} 2k\ell\left(-2\ell + \frac{F}{k}\right) + 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F\ell & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

Un autovalore > 0 e uno $< 0 \Rightarrow (\theta_2, x_2)$ è instabile

- Velocità angolare del disco $\quad \underline{\omega}_d = \omega_d \underline{k}$

$$\underline{v}_G - \overset{=0}{\underline{v}_C} = \omega_d \underline{k} \wedge (G - C) \qquad \underline{v}_G = \ell\cos\theta\,\dot\theta\,\underline{i} \; ; \; G - C = R\underline{j}$$

$$\ell\cos\theta\,\dot\theta\,\underline{i} = \omega_d \underline{k} \wedge R\underline{j} \iff \ell\cos\theta\,\dot\theta\,\underline{i} = -\omega_d R\,\underline{i} \iff \omega_d = -\frac{\ell\cos\theta\,\dot\theta}{R}$$

$$\underline{\omega}_d = \omega_d \underline{k} = -\frac{\ell\cos\theta\,\dot\theta}{R}\underline{k}$$

È anche $\underline{\omega}_a = \omega_a \underline{k} = \dot\theta\,\underline{k}$ per l'asta

- Eq. del moto di Lagrange:

Ci serve l'energia cinetica $T = T^{(a)} + T^{(d)} + T^{(P)}$

$$T^{(a)} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G^{(a)}\omega_a^2 = \frac{1}{2}M\ell^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}M(2\ell)^2\dot\theta^2 = \frac{1}{2}M\ell^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right)\dot\theta^2$$

$$T^{(d)} = \frac{1}{2}I_C^{(d)}\omega_d^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\frac{\ell^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2}{R^2} = \frac{3}{4}M\ell^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2 \; ; \; T^{(P)} = \frac{1}{2}m\dot x^2$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{6}M\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}M\ell^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2}_{T^{(d)}} + \underbrace{\frac{3}{4}M\ell^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2}_{T^{(a)}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot x^2}_{T^{(P)}} = \frac{1}{6}M\ell^2\dot\theta^2 + \frac{5}{4}M\ell^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot x^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{1}{3}Ml^2\dot\theta + \frac{5}{2}Ml^2\cos^2\theta\,\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{1}{3}Ml^2\ddot\theta + \frac{5}{2}Ml^2\cos^2\theta\,\ddot\theta - 5Ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{5}{2}Ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta^2$$

$2kl\cos\theta(x-2l\sin\theta)$

1^a equazione $: \frac{1}{3}Ml^2\ddot\theta + \frac{5}{2}Ml^2\cos^2\theta\ddot\theta - 5Ml^2\sin\theta\cos\theta\dot\theta^2 + \frac{5}{2}Ml^2\sin\theta\cos\theta\dot\theta^2 = Q_\theta$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot x} = m\dot x \; ; \; \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot x} = m\ddot x \; ; \; \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot x = Q_x$$

(Ho semplificato l)

$$\begin{cases} \frac{1}{3}Ml\ddot\theta + \frac{5}{2}Ml\cos^2\theta\,\ddot\theta - \frac{5}{2}Ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta^2 = 2k\cos\theta(x-2l\sin\theta) \\ m\ddot x = 2kl\sin\theta - kx + F \end{cases}$$

- Pulsazioni proprie: $\underline{\underline{A}}(\underline{q}_e)\underline{\ddot\eta} - \underline{\underline{H}}(\underline{q}_e)\underline{\eta} = \underline{0}$

$(\theta_1, x_1) = \left(\frac{\pi}{2}, 2l + \frac{F}{k}\right)$ è stabile : $\eta_1 = \theta - \frac{\pi}{2}$; $\eta_2 = x - 2l - \frac{F}{k}$

$$\underline{\underline{A}}(\theta, x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}Ml^2 + \frac{5}{2}Ml^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}(\theta_1, x_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}Ml^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

Ricordiamoci che $\underline{\underline{H}}(\theta_1, x_1) = \begin{pmatrix} -2Fl & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}Ml^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot\eta_1 \\ \ddot\eta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2Fl & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

← semplifichiamo l in prima riga

$$\begin{cases} \frac{1}{3}Ml\ddot\eta_1 + 2F\eta_1 = 0 \\ m\ddot\eta_2 + k\eta_2 = 0 \end{cases}$$

Per le frequenze proprie potrei applicare pedissequamente la formula:

$$\left| \underline{\underline{H}}(\underline{q}_e) - \mu^2 \underline{\underline{A}}(\underline{q}_e) \right| = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = -\mu^2$$

$$\begin{vmatrix} -2Fl - \mu^2 \frac{1}{3} M l^2 & 0 \\ 0 & -k - \mu^2 m \end{vmatrix} = 0 \qquad \mu_1^2 = -2Fl \frac{3}{Ml^2} = -\frac{6F}{Ml}$$

$$\mu_2^2 = -\frac{K}{m}$$

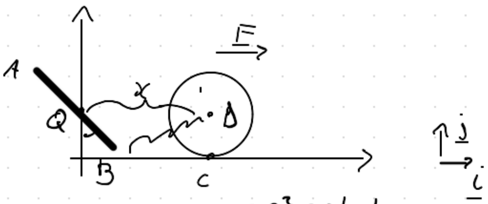
$$\omega_1 = \sqrt{-\mu_1^2} = \sqrt{\frac{6F}{Ml}} \qquad e \qquad \omega_2 = \sqrt{-\mu_2^2} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Più direttamente dalle equazioni linearizzate

$$\begin{cases} \frac{1}{3} M l \ddot{\eta}_1 + 2F\eta_1 = 0 \\ m \ddot{\eta}_2 + K\eta_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \frac{6F}{Ml} \eta_1 = 0 \\ \ddot{\eta}_2 + \frac{K}{m} \eta_2 = 0 \end{cases}$$

Oscillatore armonico: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $\quad \nearrow \omega_1 = \sqrt{\frac{6F}{Ml}} \quad \searrow \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Tema 25/06/2013



$Q = (0, R)$; $B = (R\sin\theta, R - R\cos\theta)$; $D = (x, R)$

$C = (x, 0)$; $D - B = (x - R\sin\theta, R\cos\theta)$

$$U = -\frac{1}{2}K|BD|^2 + Fx + cost = -\frac{1}{2}K\left(x^2 - 2Rx\sin\theta + \underbrace{R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta}_{=R^2 \text{ costante}}\right) + Fx + c =$$

$$= KRx\sin\theta - \frac{1}{2}Kx^2 + Fx + cost.$$

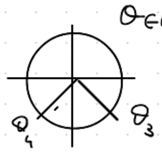
- Equilibrio $\quad Q_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} = KRx\cos\theta \quad ; \quad Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = KR\sin\theta - Kx + F$

$Q_\theta = 0 \rightarrow$ 2 sottocasi : 1°) $\cos\theta = 0$ $\quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad x_1 = R + \frac{F}{K}$

$\quad \theta_2 = \frac{3}{2}\pi \quad x_2 = -R + \frac{F}{K}$

2°) $x = 0$, sostituito nella seconda (eguagliata a zero) : $KR\sin\theta + F = 0$ $\quad \theta \in [0, 2\pi)$

$\sin\theta = -\lambda$ dove $\lambda = \frac{F}{KR}$



$$\begin{cases} \theta_3 = 2\pi - \arcsin\lambda \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_4 = \pi + \arcsin\lambda \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

altrimenti

$$\begin{cases} \sin\theta_3 = -\lambda \\ \cos\theta_3 = \sqrt{1-\lambda^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin\theta_4 = -\lambda \\ \cos\theta_4 = -\sqrt{1-\lambda^2} \end{cases}$$

Le equilibri: $(\theta_1, x_1) = \left(\frac{\pi}{2}, R+\frac{F}{k}\right)$; $(\theta_2, x_2) = \left(\frac{3}{2}\pi, -R+\frac{F}{k}\right)$

$(\theta_3, x_3) = (2\pi - \arcsin\lambda, 0)$; $(\theta_4, x_4) = (\pi + \arcsin\lambda, 0)$

La 3ª e la 4ª hanno senso solo se $\lambda \leq 1$.

Se $\lambda = 1$, la 2ª, la 3ª e la 4ª sono coincidenti.

Infatti $(\theta_2, x_2) = \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ se $\lambda = 1$ (cioè $F = kR$)

La 3ª e 4ª esistono distinte tra loro e dalla 2ª se $\lambda < 1$.

Stabilità: $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -kRx\sin\theta$; $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} = kR\cos\theta$; $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -k$

$$\underline{\underline{H}}(\theta, x) = \begin{pmatrix} -kRx\sin\theta & kR\cos\theta \\ kR\cos\theta & -k \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}(\theta_1, x_1) = \begin{pmatrix} -kR\left(R+\frac{F}{k}\right) & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kR^2 - FR & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

2 autov. negativi
stabile

$$\underline{\underline{H}}(\theta_2, x_2) = \begin{pmatrix} kR\left(-R+\frac{F}{k}\right) & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kR^2(\lambda-1) & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

stabile se $\lambda < 1$

$$\underline{\underline{H}}(\theta, x) = \begin{pmatrix} -kRx\sin\theta & kR\cos\theta \\ kR\cos\theta & -k \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}(\theta_3, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & kR\sqrt{1-\lambda^2} \\ kR\sqrt{1-\lambda^2} & -k \end{pmatrix};$$

$\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{H}} < 0$

$\det \underline{\underline{H}} = -k^2R^2(1-\lambda^2) < 0$ quando esiste distinta, cioè $\lambda < 1$.

$$\underline{\underline{H}}(\theta_4, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & -kR\sqrt{1-\lambda^2} \\ -kR\sqrt{1-\lambda^2} & -k \end{pmatrix};$$

$\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{H}} < 0$ e stesso determinante.

Sono entrambe instabili.

- Energia cinetica e momenti cinetici.

$T = T^{(a)} + T^{(d)}$ $\quad\quad \underline{\omega}_a = \omega_a \underline{k} = \dot{\theta}\,\underline{k}$

Per il disco: $\underline{\omega}_d = \omega_d \underline{k} \rightarrow \underline{v}_D = \underline{\omega}_d \wedge (D - C)$

$\dot{x}\,\underline{i} = \omega_d\,\underline{k} \wedge R\,\underline{j} \quad\quad \omega_d = -\frac{\dot{x}}{R}$

$T^{(a)} = \frac{1}{2} I_Q^{(a)} \omega_a^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{12} m (2R)^2 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} m R^2 \dot{\theta}^2$

$T^{(d)} = \frac{1}{2} I_C^{(d)} \omega_d^2 = \frac{3}{4} m R^2 \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 \quad ; \quad T = \frac{1}{6} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4} m \dot{x}^2$

Momenti cinetici: $p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m R^2 \dot{\theta} \quad ; \quad p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m \dot{x}$

Linearizzare: $\eta_1 = \theta - \theta_1 \quad ; \quad \eta_2 = x - x_1 \quad\quad \underline{\underline{A}}(\theta, x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} m R^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} m R^2 \ddot{\eta}_1 + (kR^2 + FR)\eta_1 = 0 \\ \frac{3}{2} m \ddot{\eta}_2 + k\eta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \frac{3(kR+F)}{mR}\eta_1 = 0 \\ \ddot{\eta}_2 + \frac{2k}{3m}\eta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{3(kR+F)}{mR}} & T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} & T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \end{cases}$$

- Reazione vincolare in C quando (θ_1, x_1) è statico.

$D - B = (x - R\sin\theta, R\cos\theta) \xrightarrow[(\theta_1, x_1)]{} \left(R + \frac{F}{k} - R, 0\right) = \left(\frac{F}{k}, 0\right)$

$\underline{\Phi}_c - mg\,\underline{j} + k(B - D) + F\,\underline{i} = \underline{0}$

$\Phi_{cx}\,\underline{i} + \Phi_{cy}\,\underline{j} - mg\,\underline{j} \cancel{- k\left(\frac{F}{k}\right)\underline{i}} \cancel{+ F\,\underline{i}} = \underline{0}$

$\Phi_{cx} = 0 \quad ; \quad \Phi_{cy} = mg \quad\quad \underline{\Phi}_c = (0, mg)$