Equazione delle onde

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{in } Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\downarrow$$

$$\Omega \times (0,+\infty)$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$c \in \mathbb{R}$ è una costante e si scrive c^2 nell'equazione per assicurare la non-negatività del coefficiente che moltiplica Δu.

Studieremo sempre il caso $n=1$, quindi $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.

Il caso $\Omega = \mathbb{R}$

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0,+\infty)$$

Scriviamo:

$$(\partial_t + c\partial_x)\left[(\partial_t - c\partial_x)u\right] = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0,+\infty)$$

$$(\partial_t + c\partial_x)\left[\partial_t u - c\partial_x u\right]$$

$$\partial_t\left[\partial_t u - c\partial_x u\right] + c\partial_x\left[\partial_t u - c\partial_x u\right]$$

$$\partial_t^2 u - c\cancel{\partial_{tx}^2 u} + c\cancel{\partial_{xt}^2 u} - c^2\partial_x^2 u$$

(teorema di Schwartz – almeno per sol. classiche $C^2(Q)$)

Poniamo:

$$v(x,t) := \partial_t u(x,t) - c\,\partial_x u(x,t)$$

da cui

$$\begin{cases} \partial_t v + c\,\partial_x v = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,+\infty) \quad (i) \\ \partial_t u - c\,\partial_x u = v & \text{in } \mathbb{R}\times(0,+\infty) \quad (ii) \end{cases}.$$

Dunque l'eq. delle onde è equivalente ad un sistema di due equazioni del trasporto lineari.

La (i) è un'eq. del trasporto del tipo di quelle già studiate. Imponiamo una condizione iniziale per risolverla:

$$v(x,0) = \underbrace{\partial_t u(x,0)}_{\substack{\text{dato iniziale} \\ \text{da assegnare} \\ \rightsquigarrow\, u_1(x)}} - c\,\underbrace{\partial_x u(x,0)}_{\substack{\text{dato che si ricava} \\ \text{dalla conoscenza del dato} \\ \text{iniziale } u(x,0)=u_0(x) \\ \text{come } \partial_x u(x,0) = u_0'(x)}}$$

$$= u_1(x) - c\,u_0'(x)$$

Oss. Poiché l'equazione delle onde è del secondo ordine in tempo, serve assegnare due condizioni iniziali, precisamente:

$$u = u_0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t=0$$
$$\partial_t u = u_1, \qquad x \in \mathbb{R},\ t=0.$$

La soluzione di (i) si scrive:

$$v(x,t) = v_0(x-ct) \rightarrow \text{dato iniziale per } v$$
$$= u_1(x-ct) - c u_0'(x-ct).$$

Nota v, troviamo u risolvendo

$$\begin{cases} \partial_t u - c\partial_x u = v & \text{in } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u = u_0 & \text{in } \mathbb{R},\ t=0. \end{cases}$$

La novità è che il termine forzante non è necessariamente nullo.

Risoluzione dell'equaz. del trasporto lineare con termine forzante non nullo

- caratteristiche: $\frac{dx}{dt} = -c \Rightarrow x(t) = -ct + x_0$

($x_0 \in \mathbb{R}$ piede della caratteristica)

- restrizione alle caratteristiche:

$$\hat{u}(t) := u(x(t), t)$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \partial_t u(x(t), t) + \partial_x u(x(t), t) \cdot \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{=-c}$$

$$= \partial_t u(x(t), t) - c\,\partial_x u(x(t), t)$$

$$= v(x(t), t)$$

dalla PDE

da cui:

$$\int_0^t \frac{d\hat{u}(s)}{ds}\, ds = \int_0^t v(x(s), s)\, ds$$

$$\hat{u}(t) - \hat{u}(0) = \int_0^t v(x(s), s)\, ds$$

$$\hat{u}(t) = \hat{u}(0) + \int_0^t v(x(s), s)\, ds$$

$$u(x(t), t) = u(\underbrace{x(0)}_{= x_0}, 0) + \int_0^t v(x(s), s)\, ds$$

$$u(x(t),t) = u_0(x(t)+ct) + \int_0^t v(x(s),s)\,ds$$

$$= u_0(x(t)+ct) + \int_0^t \left[u_1(x(s)-cs) - c u_0'(x(s)-cs) \right] ds$$

$$= u_0(x(t)+ct) + \int_0^t \left[u_1(-cs+x_0-cs) - c u_0'(-cs+x_0-cs) \right] ds.$$

Da questa espressione, preso un generico punto $(x,t) \in Q$ in cui calcolare la soluzione u, abbiamo che la caratteristica passante per (x,t) ha equazione $x = -ct + x_0$ e quindi $x_0 = x + ct$ da cui:

$$u(x,t) = u_0(x+ct) + \int_0^t \left[u_1(x+ct-2cs) - c u_0'(x+ct-2cs) \right] ds$$

$$\underset{\xi := x+ct-2cs}{=} u_0(x+ct) + \int_{x+ct}^{x-ct} \left[u_1(\xi) - c u_0'(\xi) \right] \left(-\frac{1}{2c}\right) d\xi$$

$$= u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left[u_1(\xi) - c\,u_0'(\xi)\right]d\xi$$

$$= u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,d\xi$$

$$- \frac{1}{2\cancel{c}}\cdot\cancel{c}\,\underbrace{\int_{x-ct}^{x+ct} u_0'(\xi)\,d\xi}_{\left(u_0(\xi)\Big|_{\xi=x-ct}^{\xi=x+ct}\right.}$$

$$= u_0(x+ct) - u_0(x-ct)$$

$$= u_0(x+ct) - \frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2}u_0(x-ct)$$

$$+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,d\xi$$

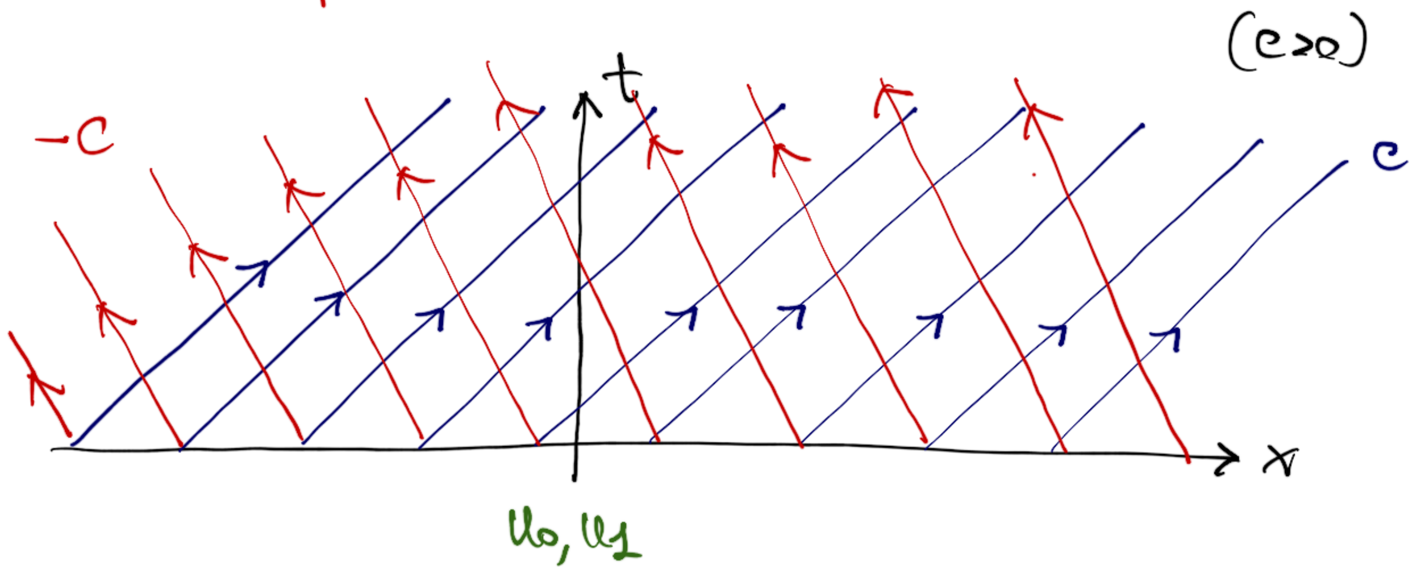
In definitiva:

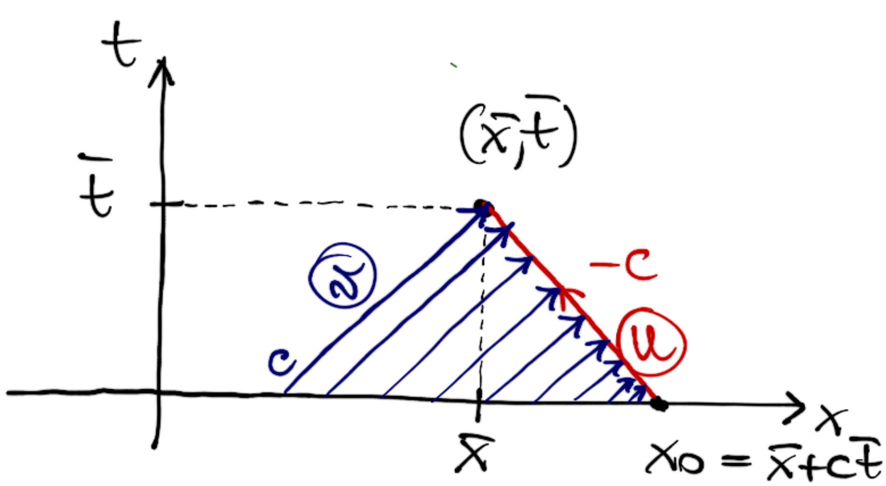
$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,d\xi}$$

Questa formula di rappresentazione della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ \left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ \partial_t u &= u_1 \end{aligned}\right\} & \text{in } \mathbb{R},\ t=0 \end{cases}$$

si chiama **formula di d'Alembert.**

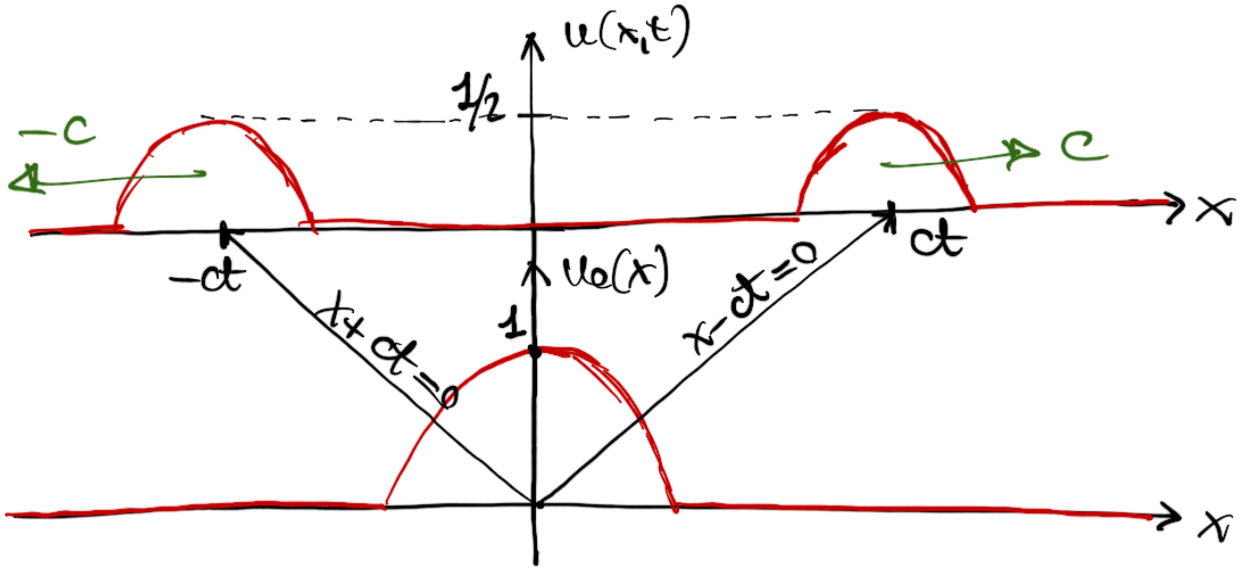




Casi particolari

- Se $u_1 \equiv 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\Big)$$



- Se $u_0 \equiv 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,d\xi .$$

Sia

$$U_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} u_1(y)\,dy$$

una primitiva di u_1. Allora:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\left(U_1(x+ct) - U_1(x-ct)\right)$$

la soluzione ha ancora la struttura di due profili d'onda che viaggiano in versi opposti con velocità costanti di uguale modulo $|c|$.