ISTITUZIONI DI ALG & GEOM, lezione 7

11-10-22

Definizione 4. *Siano G un gruppo e $A \subseteq G$ un suo sottoinsieme. L'insieme*

$$< A >= \bigcap_{\substack{H<G \\ H \supseteq A}} H$$

è un sottogruppo, ed è il più piccolo sottogruppo contenente A, detto ***sottogruppo generato da A****.*

Osserviamo che $< \{x\} >=< x >$.

Esercizio. Dimostrare che $< A >$ è un sottogruppo.

dim: • Abbiamo già visto che l'intersezione di sottogruppi è sottogruppo.

• $A \subseteq < A >$ per definizione

• Manca vedere che $< A >$ è il più piccolo:

sia $A \subseteq H$ sottogruppo. Allora $\bigcap_{\substack{A \subseteq H \\ H<G}} H \subseteq H$ $\square$

Definizione 1. *Siano G un gruppo e H e K due suoi sottogruppi. Si dice* **sottogruppo unione** *di H e K, e lo si indica con $H \vee K$, il minimo sottogruppo di G che li contiene entrambi.*

$$H \vee K := \langle H \cup K \rangle = \bigcap_{\substack{L < G \\ H \cup K \subseteq L}} L$$

Proposizione 2. *Siano G un gruppo e H e K due suoi sottogruppi. Allora:*

$$H \vee K = \{h_1 k_1 \cdots h_n k_n \mid h_i \in H,\ k_i \in K\}.$$

Corollario 3. *Siano G un gruppo abeliano e H e K due suoi sottogruppi. Allora*

$$H \vee K = H + K = \{h + k \mid h \in H,\ k \in K\}.$$

dim proposizione 2:

. Sia $S = \{h_1 k_1 \cdots h_n k_n \mid h_i \in H,\ k_i \in K\}$. Dobbiamo vedere:

i) S è sottogruppo: sia $x, y \in S \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x = h_1 k_1 \cdots h_n k_n \\ y = h_1' k_1' \cdots h_m' k_m' \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot y^{-1} = (h_1 k_1 \cdots h_n k_n)(h_1' k_1' \cdots h_m' k_m')^{-1} =$$

$$= (h_1 k_1 \cdots h_n k_n)(k_m'^{-1} h_m'^{-1} \cdots k_1'^{-1} h_1'^{-1}) \in S$$

ricordate: $(cd)^{-1} = d^{-1} c^{-1} \quad \forall c, d \in G$

ii) $H \cup K \subseteq S$: sia $h \in H$, allora $\underset{H}{\underset{\uparrow}{h}} \cdot \underset{K}{\underset{\uparrow}{1}} \in S$

iii) S è il più piccolo sottogruppo che contiene

3

$H \cup K$:

sia L un sottogruppo qualsiasi, tale che

$H \cup K \subseteq L$. Allora, sia $\alpha \in S$.

α si può scrivere come:

$$\alpha = h_1 k_1 \cdots h_n k_n \in L \quad (L \text{ è stabile})$$

Ricordiamo che dati due gruppi $(G, \star)$ e $(H, *)$, una funzione $f : G \to H$ è detta **omomorfismo** (o **morfismo di gruppi**) se per ogni $x, y \in G$ si ha:

$$f(x \star y) = f(x) * f(y).$$

Proposizione 5. *Sia $f : G \mapsto G'$ un omomorfismo. L'immagine di un sottogruppo di G è un sottogruppo di G'.*

dim: sia $H < G$ sottogruppo. Vediamo che

$f(H)$ è sottogruppo di G':

siano $x', y' \in f(H) \Rightarrow x' = f(x)$, $y' = f(y)$.
$\exists x, y \in G$

Allora $x' \cdot (y')^{-1} = f(x) \cdot f(y)^{-1} = f(x) \cdot f(y^{-1}) = f(x \cdot y^{-1}) \in f(H)$

(H è sottogruppo, ~~perciò~~ perciò $x \cdot y^{-1} \in H$)

Corollario 6. *Sia $f : G \mapsto G'$ un omomorfismo.* $\mathrm{Im}(f) = f(G)$ *è un sottogruppo di* G'.

Proposizione 7. *Sia $f : G \mapsto G'$ un omomorfismo. La retroimmagine di un sottogruppo di G' è un sottogruppo di G.*

dim: sia $H' < G'$ sottogruppo. Vediamo $f^{-1}(H') \subset G$ è sottogruppo:

siano $x, y \in f^{-1}(H') \Rightarrow f(x), f(y) \in H' \Rightarrow$
$f(x) \cdot f(y)^{-1} = f(x \cdot y^{-1}) \in H' \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in f^{-1}(H')$.

$\square$

Definizione 8. *Sia $f : G \mapsto G'$ un omomorfismo. Il* **nucleo** *di f, denotato con* $\mathrm{Ker}(f)$, *è l'insieme delle retroimmagini dell'elemento neutro di G':*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = 1_{G'}\}. = f^{-1}(\{1_{G'}\})$$

Corollario 9. *Sia $f : G \mapsto G'$ un omomorfismo.* $\mathrm{Ker}(f)$ *è un sottogruppo di G.*

Proposizione 10. *Sia $f : G \mapsto G'$ un omomorfismo. Allora:*

1. *f è un epimorfismo $\Leftrightarrow$* $\mathrm{Im}(f) = G'$;
2. *f è un momomorfismo $\Leftrightarrow$* $\mathrm{Ker}(f) = \{1_G\}$.

dim: 1) è ovvio.

2) $\Rightarrow$/ sia f monomorfismo e sia $x \in G$ tale che $f(x) = 1_{G'}$ $\underset{f \text{ mono}}{\Rightarrow}$ $x = 1_G$. Cioè $\mathrm{Ker}\, f = \{1_G\}$

$\Leftarrow$/ siano $x, y \in G$ tale che $f(x) = f(y) \Rightarrow$

$1_{G'} = f(x) \cdot f(y)^{-1} \underset{f \text{ omo}}{=} f(x \cdot y^{-1}) \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f = \{1_G\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} = 1_G \Rightarrow x = y$ $\square$

Scanned with CamScanner