Equazioni di Maxwell - Onde Elettromagnetiche

Al termine dello studio su campi elettrici e magnetici in regime stazionario e non stazionario siamo pervenuti alle seguenti equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tali equazioni possono anche essere espresse in forma integrale e avremo:

$$\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}; \qquad \oint_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0;$$

$$\int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\oint_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma\right); \qquad \int_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma\right)$$

Le equazioni di Maxwell mostrano che la derivata temporale di $\vec{E}$ è sorgente di campo magnetico e viceversa. Questa circostanza suggerisce che sia necessaria una trattazione unificata dei due campi, che nel loro insieme prendono il nome di *campo elettromagnetico*. Sperimentalmente si osserva che il campo elettromagnetico si propaga sotto forma di *onde* che viaggiano nello spazio senza bisogno di alcun supporto materiale.

In generale si definisce come *onda* una qualsiasi perturbazione impulsiva o periodica che si propaga con una velocità v ben definita. Le onde hanno origine da una sorgente che produce la perturbazione: essa può essere una vibrazione di un corpo materiale che mette in movimento le molecole di un mezzo (onde elastiche) oppure un movimento di cariche elettriche (onde elettromagnetiche). Nel caso delle onde elettromagnetiche, le sorgenti sono cariche in accelerazione che producono un campo elettrico $\vec{E}(x, y, z, t)$ e magnetico $\vec{B}(x, y, z, t)$ correlati tra loro.

Definizioni e nomenclatura relativa alle onde

Una funzione $f(x, t)$ di x e t rappresenta un'onda di ampiezza costante che si propaga lungo l'asse x di un sistema cartesiano se la dipendenza dallo spazio x e dal tempo t è data dalla sola combinazione:

$$\xi = x \pm vt \quad \rightarrow \quad f(\xi) = f(x \pm vt)$$

con v costante positiva. L'onda si dice progressiva o regressiva in funzione che nella espressione di ξ compaia il segno (-) o il segno (+). Il motivo per cui un'onda è rappresentata da una funzione di argomento del tipo di ξ è il seguente.

Il valore f_0 assunto dalla funzione f in ξ_0, $f_0 = f(x_0 - vt_0)$, si ritrova in qualsiasi istante successivo $t > t_0$ nel punto x che soddisfa la condizione:

$$x - vt = x_0 - vt_0 \quad \text{ovvero} \quad x = x_0 + v(t - t_0)$$

relazione che esprime un moto rettilineo lungo x con velocità v. Analogamente $f(x + vt)$ rappresenta una grandezza che si muove lungo l'asse x, nel verso negativo, con velocità v. In entrambi i casi si tratta di una traslazione rigida, in cui la funzione non cambia mai forma.

Nella maggior parte dei fenomeni fisici le onde si propagano in tre dimensioni, si chiama allora fronte d'onda il luogo dei punti in cui, ad un fissato istante, la variabile $(x \pm vt)$ assume lo stesso valore. Un'onda bidimensionale si dice rettilinea o circolare se i suoi fronti d'onda sono rette o circonferenze (pensiamo per esempio all'effetto di un sasso lanciato in uno stagno). Un'onda tridimensionale si dice piana o sferica se i suoi fronti d'onda sono piani o superfici sferiche.

Se la funzione $f(x \pm vt)$ è periodica del suo argomento, l'onda è detta periodica. In particolare sono periodiche le onde sinusoidali (*onde armoniche*, per le quali si ha una espressione di questo tipo:

$$f(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \phi\right) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

tale funzione è periodica sia nella variabile x (fissato t), sia nella variabile t (fissato x). Il periodo temporale T e quello spaziale λ sono legati dalla relazione:

$$\frac{\lambda}{T} = v$$

Per un'onda sinuosiodale si definiscono i seguenti parametri:

- A è detta ampiezza dell'onda;
- $\nu = \dfrac{1}{T}$ è detta frequenza e si misura in Hz;
- $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ è detta pulsazione o frequenza angolare e si misura in rad/s;
- $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{v}$ è detto numero d'onda e si misura in m^{-1}

In un'onda armonica, l'argomento del seno o del coseno $(kx - \omega t + \phi)$ viene detto *fase* dell'onda. Per come è stata definita la velocità dell'onda (che è la velocità di un qualunque fronte d'onda), la velocità dell'onda altro non è che la velocità con cui si muove la fase dell'onda. Infatti tale fase $(kx - \omega t + \phi)$ risulta costante se la si osserva muovendosi sull'asse x con una legge oraria del tipo $x = vt + cost$ e $v = \omega/k$. Questa è la ragione percui la grandezza $v = \omega/k$ prende il nome di *velocità di fase* dell'onda.

Equazione delle Onde Elettromagnetiche

Poniamoci nel vuoto in assenza di sorgenti di campo elettrico e magnetico del tipo correnti e densità di carica. Le equazioni ridiventano:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0;$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tali equazioni costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Proviamo ora a risolvere il sistema. Applichiamo l'operatore $\nabla\times$, per esempio alla equazione sul rotore del campo elettrico:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

ora, l'operazione di:

$$\nabla \times (\nabla \times) = \nabla (\nabla \cdot) - \nabla^2$$

pertanto

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

ma la $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ nel vuoto e dunque:

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$$

da cui, utilizzando l'equazione di Ampere-Maxwell:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Formalmente l'equazione di un onda trasversale che si propaga con velocità v è:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

pertanto le equazioni di Maxwell prevedono come soluzione particolare campi elettrici e magnetici che si propagano nello spazio come un'onda (che chiameremo elettromagnetica) di velocità:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}} \simeq 3 \cdot 10^8 \ m/s$$

E' da notare che per il campo magnetico si può risalire ad una equazione analoga utilizzando lo stesso procedimento e si ottiene che:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Onde Elettromagnetiche piane

L'equazione delle onde è una equazione differenziale alle derivate parziali, come tale le soluzioni sono determinate a meno di funzioni arbitrarie, che possono essere determinate solo sulla base delle condizioni iniziali e della condizioni al contorno.

L'espressione più semplice delle condizioni al contorno è una configurazione di onda *piana* (ad esempio ortogonale ad $\hat{x}$). In questo caso tutte le componenti di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono indipendenti da y e z e ad ogni istante di tempo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ hanno lo stesso valore su tutti i punti di un piano ortogonale a $\hat{x}$. Fisicamente questa condizione non è mai verificata, ma lo è in buona approssimazione tutte le volte che ci si limiti a descrivere una porzione piccola di spazio e molto lontana dalla sorgente (dove un fronte d'onda sferico e ben approssimabile localmente con il piano tangente).

Nel caso di onda piana tutte le derivate rispetto a y e z sono nulle, pertanto l'equazione d'onda viene semplificata:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

La soluzione di questa equazione è un'onda piana sinusoidale (*monocromatica* in quanto oscilla nel tempo con pulsazione ω) di forma:

$f(x,t) = E_0 \sin(kx-\omega t)$ oppure, per il campo $\vec{B}$: $f(x,t) = B_0 \sin(kx-\omega t)$

infatti:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -k^2 E_0 \cos(kx-\omega t) + \epsilon_0\mu_0 E_0 \omega^2 \cos(kx-\omega t)$$

ma ricordando che:

$$k = \frac{\omega}{v} \quad \rightarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

l'onda armonica piana è soluzione dell'equazione delle onde se la velocità di propagazione dell'onda vale

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$$

In un dielettrico generico avremo:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \simeq \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

dove si è considerato che per la stragrande maggioranza dei materiali (in pratica quelli non ferromagnetici) $\mu_r \approx 1$ e dove si è definito $n = \sqrt{\epsilon_r}$ *indice di rifrazione* del materiale. L'indice di rifrazione di un mezzo è dunque il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo:

$$n = \frac{c}{v}$$

Proprietà delle onde elettromagnetiche piane

Ricaviamo ora alcune ulteriori proprietà delle onde elettromagnetiche piane utilizzando le equazioni di Maxwell, che i campi elettrico e magnetico ad associati alle onde devono soddisfare. Ricordiamo che nel caso dell'onda piana che stiamo considerando tutte le componenti dei campi sono indipendenti da y e z e dunque:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Ricordando l'espressione delle componenti del rotore

$$\nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

dalle equazioni di Maxwell potremo ricavare le seguenti condizioni ulteriori:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad (a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \qquad (b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial B_x}{\partial t} = 0 & (c) \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \dfrac{\partial B_y}{\partial t} & (d) \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} & (e) \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0 & (f) \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon\mu \dfrac{\partial E_y}{\partial t} & (g) \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon\mu \dfrac{\partial E_z}{\partial t} & (h) \end{cases}$$

Dalle relazioni (a), (b), (c) e (f) si deduce che E_x e B_x sono costanti nello spazio e nel tempo, queste due componenti pertanto non contribuiscono alla propagazione dell'onda e si possono considerare nulle. In altri termini le onde elettromagnetiche sono trasversali, cioè la componente dei campi parallela alla direzione di propagazione non dà alcun contributo.

Dalle restanti relazioni (d), (e), (g) e (h) si nota che se l'onda ha una componente E_y deve avere anche una componente B_z e viceversa e se ha una componente E_z, deve avere anche una componente B_y e viceversa. D'altra parte grazie alla linearità delle equazioni di Maxwell, ogni combinazione lineare di soluzioni è soluzione delle equazioni. Non si ha dunque nessuna perdita di generalità se si considera un'onda il cui campo $\vec{E}$ sia orientato nella direzione di un asse, per esempio $\hat{y}$ ($\Rightarrow E_z = 0$). Una tale onda si dice polarizzata linearmente lungo l'asse $\hat{y}$. La più generale delle onde sarà scomponibile nella somma di un'onda polarizzata lungo $\hat{y}$ e una lungo $\hat{z}$ (polarizzazione ellittica o circolare in funzione che le ampiezze lungo le due direzioni siano differenti o uguali rispettivamente).

Se l'onda è polarizzata linearmente, per esempio lungo $\hat{y}$, allora avremo che $E_z = 0$, perciò:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

da cui si ricava che la componente lungo $\hat{y}$ del campo magnetico è uniforme nello spazio e costante nel tempo e dunque non contribuisce anch'essa alla propagazione dell'onda. Questo significa che l'unica componente che rimane per il campo magnetico sarà in questo caso B_z e cioè in un'onda elettromagnetica, il campo elettrico e magnetico sono tra essi perpendicolari.

Dentro alle equazioni (e) e (g) è nascosta un'altra informazione rilevante che riguarda le ampiezze relative dei campi elettrico e magnetico. Supponiamo infatti di applicare la (e) per esempio all'onda piana monocromatica sinusoidale:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E_y \sin(kx - \omega t)\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(B_z \sin(kx - \omega t)\right)$$

svolgendo i conti:

$$kE_y \cos(kx - \omega t) = \omega B_z \cos(kx - \omega t) \quad \rightarrow \quad \frac{E_y}{B_z} = \frac{\omega}{k} = v$$

cioè il rapporto tra le ampiezze dei due campi è pari alla velocità di propagazione dell'onda (c se ci si trova nel vuoto, c/n in un dielettrico di indice di rifrazione pari a n). Tenendo conto delle direzioni relative dei vettori $\vec{E}$, $\vec{B}$ e della velocità di propagazione $\vec{v}$, paralleli rispettivamente a $\hat{y}$, $\hat{z}$ e $\hat{x}$, potremo scrivere che:

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$$

Energia di un'onda Elettromagnetica

Se da un punto di vista dell'ampiezza relativa, il rapporto tra $\vec{E}$ e $\vec{B}$ è molto grande ($c \approx 3 \cdot 10^8\ m/s$), tale confronto numerico non ha significato da un punto di vista fisco in quanto si stanno mettendo in relazione grandezze caratterizzate da differenti unità di misura. Per confrontare in maniera significativa campo elettrico e magnetico di un'onda andiamo a verificare punto per punto ed istante per istante la densità di energia associata al campo elettrico e magnetico dell'onda:

$$u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\epsilon_0 E^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = u_e$$

in un'onda elettromagnetica, punto per punto ed istante per istante la densità di energia associata al campo elettrico e magnetico sono uguali!

Vettore di Poynting

Consideriamo una superficie chiusa Σ di forma costante che racchiude un volume τ. Dentro la superficie sia contenuto un campo elettromagnetico non ovunque nullo e non siano presenti densità di corrente $\vec{j}$. L'energia posseduta dal campo elettromagnetico sarà:

$$U = \int_\tau u_e d\tau + \int_\tau u_m d\tau = \int_\tau \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau + \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

Eseguiamo ora la derivata temporale di questa espressione:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_\tau \left[\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] d\tau$$

usando le equazioni di Maxwell sul rotore di $\vec{E}$ e sul rotore di $\vec{B}$ che riportiamo qui di seguito:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}; \qquad \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

si può scrivere:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_\tau \left[\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla \times \vec{E})\right] d\tau$$

Sfruttiamo ora la seguente identità vettoriale:

$$\vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) = -\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

che permette di riscrivere:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\int_\tau \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\tau$$

applicando il teorema della divergenza, approdiamo al seguente risultato:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\int_\Sigma \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

il vettore:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

prende il nome di vettore di Poynting.

Se nel tempo dt l'energia contenuta nel volume τ diminuisce di una quantità pari a dU, la diminuzione per unità di tempo dell'energia è pari al flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie Σ che racchiude il volume τ. Considerata un'onda elettromagnetica, il flusso del vettore $\vec{S}$ attraverso un elemento di superficie $d\vec{\Sigma}$ rappresenta dunque l'energia elettromagnetica che l'onda trasporta nell'unità di tempo attraverso $d\vec{\Sigma}$. Le dimensioni fisiche del vettore di Poynting sono, coerentemente con quanto detto:

$$[S] = \frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$$

Vettore di Poynting e onde armoniche piane

Se consideriamo un'onda piana monocromatica con campo elettrico e magnetico associati:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{u_y}; \qquad \vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t)\hat{u_z}$$

il vettore di Poynting associato all'onda sarà:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_0^2 \sin^2(kx - \omega t)\hat{u}_x$$

Essendo l'onda elettromagnetica oscillante, è importante non tanto calcolare il flusso istantaneo di energia, quanto il flusso medio, mediato su tanti periodi di oscillazione ($t \gg T$):

$$\overline{S} = \epsilon_0 c \overline{E^2} = \epsilon_0 c \frac{1}{t} \int_0^t E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

tale risultato rappresenta dunque l'intensità associata ad una onda elettromagnetica piana armonica.