ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 10

1. Pensiamo $\mathbb{R}^2$ come spazio di Hilbert con il prodotto scalare euclideo, e identifichiamo gli operatori lineari su $\mathbb{R}^2$ con le matrici associate. Sia $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dato da
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare se A è un operatore autoaggiunto, unitario o normale.
   (b) Dimostrare che $\sigma(A) = \emptyset$.
   (c) Come cambia la soluzione dei punti precedenti se si considera invece la matrice A come operatore lineare su $\mathbb{C}^2$? (Qui $\mathbb{C}^2$ è pensato come spazio di Hilbert complesso con il prodotto scalare euclideo.)
2. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia $T_x : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'operatore di traslazione definito da
$$T_x f(t) = f(t - x)$$
per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Dimostrare che $T_x \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e calcolarne la norma operatoriale.
   (b) Dimostrare che $T_{x+y} = T_x T_y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e che $T_0 = \mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R})}$.
   (c) Sia $x \in \mathbb{R}$. Calcolare l'aggiunto T_x^*, e determinare se T_x è un operatore autoaggiunto, unitario o normale.

   Ricordiamo che, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ è continua, il *supporto* di f è l'insieme
$$\operatorname{supp} f = \overline{\{t \in \mathbb{R} \,:\, f(t) \neq 0\}},$$
cioè la chiusura dell'insieme dei punti dove f non si annulla. Inoltre $C_c(\mathbb{R})$ denota l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}$ (vedi esercitazione 2, esercizio 11).
   (d) Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dimostrare che, se $f \in C_c(\mathbb{R})$ e $\operatorname{supp} f \subseteq (-|x|/2, |x|/2)$, allora
$$\|T_x f - f\|_2 = \sqrt{2}\|f\|_2.$$
   (e) Dimostrare che $\|T_x - T_y\|_{\mathrm{op}} \geq \sqrt{2}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$.
   (f) Dimostrare che la mappa $x \mapsto T_x$ non è continua da $\mathbb{R}$ a $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$.
3. Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli di misura di Lebesgue positiva. Ricordiamo che, per ogni $K \in L^2(I \times J)$, denotiamo con $T_K : L^2(J) \to L^2(I)$ l'operatore integrale con nucleo integrale K, dato da
$$T_K f(x) = \int_J K(x, y)\, f(y)\, dy$$
per ogni $f \in L^2(J)$ e quasi ogni $x \in I$.
   (a) Dimostrare che la mappa $K \mapsto T_K$ è un operatore limitato da $L^2(I \times J)$ a $\mathcal{B}(L^2(J), L^2(I))$.
   (b) Dimostrare che $T_K = 0$ se e solo se $K \perp \{f \otimes g \,:\, f \in L^2(I),\, g \in L^2(J)\}$ in $L^2(I \times J)$, dove $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$.
   (c) Dimostrare che la mappa $K \mapsto T_K$ del punto (a) è iniettiva.
   [Suggerimento: scegliere un'opportuna base ortonormale di $L^2(I \times J)$.]
4. Sia $A : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ definito da $Af(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ per ogni $f \in L^2(0, 1)$ e $t \in (0, 1)$.
   (a) Verificare che $A \in \mathcal{B}(L^2(0, 1))$.
   (b) Determinare l'aggiunto A^* di A.
   (c) Determinare se A è un operatore autoaggiunto, unitario, o normale.
5. Sia $T : \ell^2 \to \ell^2$ definito da
$$(T\underline{x})_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0, \\ 4x_{k-1} & \text{se } k > 0,\ k \text{ pari}, \\ -2x_{k-1} & \text{se } k > 0,\ k \text{ dispari}. \end{cases}$$
per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\underline{x} \in \ell^2$.
   (a) Verificare che $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$.
   (b) Determinare l'aggiunto T^* di T.
   (c) Determinare se T è un operatore autoaggiunto, unitario, o normale.
   (d) Determinare $\sigma_p(T)$ e $\sigma_r(T^*)$.
   (e) Determinare $\sigma_p(T^*)$ e $\sigma_r(T)$.

6. Siano H uno spazio di Hilbert. Poniamo $I = \mathrm{id}_H$.
   (a) Dimostrare che, se $T \in \mathcal{B}(H)$ è autoaggiunto, allora
   $$4\,\mathfrak{Re}\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), (x-y)\rangle$$
   e, se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,
   $$4\,\mathfrak{Im}\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+iy), x+iy\rangle - \langle T(x-iy), (x-iy)\rangle$$
   per ogni $x, y \in H$.
   (b) Dimostrare che, se $T, S \in \mathcal{B}(H)$ sono autoaggiunti, allora $T = S$ se e solo se
   $$\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle \qquad \forall x \in H$$
   (in altre parole, gli operatori autoaggiunti sono univocamente determinati dai valori sulla diagonale delle associate forme sesquilineari).
   (c) Dimostrare che $T \in \mathcal{B}(H)$ è un operatore normale se e solo se
   $$\|Tx\|_H = \|T^*x\|_H \qquad \forall x \in H.$$
   [Suggerimento: applicare (b) agli operatori T^*T e TT^*.]
   (d) Dimostrare che, per ogni $T \in \mathcal{B}(H)$ e $\alpha \geq 0$,
   $$\|(T^*T + \alpha I)x\|_H \geq \alpha\|x\|_H \qquad \forall x \in H.$$
   (e) Dimostrare che $\sigma(T^*T) \subseteq [0, \|T\|_{\mathrm{op}}^2]$ per ogni $T \in \mathcal{B}(H)$.
7. Sia H uno spazio di Hilbert. Poniamo $I = \mathrm{id}_H$. Sia $P \in \mathcal{B}(H)$ una proiezione ortogonale.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{Ker}\, P$ e $\mathrm{Im}\, P$ sono sottospazi vettoriali chiusi di H e che sono l'uno il complemento ortogonale dell'altro.
   Poniamo $Q = I - P$.
   (b) Dimostrare che Q è una proiezione ortogonale, con $\mathrm{Ker}\, Q = \mathrm{Im}\, P$ e $\mathrm{Im}\, Q = \mathrm{Ker}\, P$, e che inoltre $PQ = QP = 0$. [Q è detta la *proiezione ortogonale complementare* a P.]
   Per $a, b \in \mathbb{F}$, poniamo $S_{a,b} = aP + bQ$.
   (c) Dimostrare che $S_{a,b}S_{c,d} = S_{ac,bd}$ per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{F}$, e che $S_{1,1} = I$.
   (d) Dimostrare che $P - \lambda I = S_{1-\lambda,-\lambda}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{F}$.
   (e) Supponiamo che $0 \neq P \neq I$. Dimostrare che $\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0, 1\}$.
8. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo di misura di Lebesgue positiva. Sia $Y \subseteq L^2(I)$ un sottospazio vettoriale di dimensione finita.
   (a) Dimostrare che la proiezione ortogonale $P_Y \in \mathcal{B}(L^2(I))$ sul sottospazio Y è un operatore integrale e trovare una formula per il corrispondente nucleo integrale $K_Y \in L^2(I \times I)$.
   [Suggerimento: fissare una base ortonormale di Y.]
   (b) Dimostrare che $\|K_Y\|_2 = \sqrt{\dim Y}$.
   Come nell'esercizio 3., denotiamo con $T_K \in \mathcal{B}(L^2(I))$ l'operatore integrale con nucleo integrale $K \in L^2(I \times I)$.
   (c) Dimostrare che la mappa $K \mapsto T_K$ non è un'isometria lineare da $L^2(I \times I)$ a $\mathcal{B}(L^2(I))$, e non è nemmeno coerciva in norma.
   (d) Determinare se la mappa $K \mapsto T_K$ da $L^2(I \times I)$ a $\mathcal{B}(L^2(I))$ è suriettiva.
   [Suggerimento: teorema dell'isomorfismo di Banach.]
   (e) Determinare se la mappa $K \mapsto T_K$ da $L^2(I \times I)$ a $\mathcal{B}(L^2(I))$ ha immagine chiusa in $\mathcal{B}(L^2(I))$.
9. Sia H uno spazio di Hilbert e poniamo $I = \mathrm{id}_H$. Ricordiamo che, per ogni $T \in \mathcal{B}(H)$ e per ogni polinomio $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j \in \mathbb{F}[z]$, si definisce l'operatore $p(T) = \sum_{j=0}^n a_j T^j \in \mathcal{B}(H)$.
   (a) Dimostrare che, se $T \in \mathcal{B}(H)$ è normale, allora $p(T)$ è normale per ogni polinomio $p \in \mathbb{F}[z]$.
   (b) Dimostrare che, se $T \in \mathcal{B}(H)$ è autoaggiunto e il polinomio p è a coefficienti reali, allora $p(T)$ è autoaggiunto.
   Ricordiamo (vedi esercitazione 7, esercizio 9) che, per ogni operatore $T \in \mathcal{B}(H)$, è definito l'esponenziale $\exp(T) = \sum_{n=0}^\infty T^n/n! \in \mathcal{B}(H)$.
   (c) Dimostrare che se $T \in \mathcal{B}(H)$ è normale allora $\exp(T)$ è normale, e che se T è autoaggiunto allora lo è anche $\exp(T)$.
   (d) Dimostrare che se $T \in \mathcal{B}(H)$ è *antiautoaggiunto* (cioè $T^* = -T$) allora $\exp(T)$ è unitario.
   (e) Dimostrare che, se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{B}(H)$ è autoaggiunto, allora $\exp(iT)$ è unitario.
   (f) Nel caso $H = \mathbb{R}^2$, detta A la matrice dell'esercizio 1., dimostrare che
   $$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$
   [Suggerimento: calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.]
10. Sia H uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$. Per ogni $T \in \mathcal{B}(H)$, definiamo
   $$\mathfrak{Re}\, T = (T + T^*)/2, \qquad \mathfrak{Im}\, T = (T - T^*)/(2i).$$
   (a) Dimostrare che $\mathfrak{Re}\, T, \mathfrak{Im}\, T \in \mathcal{B}(H)$ sono operatori autoaggiunti di norma non superiore a $\|T\|_{\mathrm{op}}$.
   (b) Dimostrare che $T = \mathfrak{Re}\, T + i\,\mathfrak{Im}\, T$ e $T^* = \mathfrak{Re}\, T - i\,\mathfrak{Im}\, T$.
   (c) Dimostrare che T è normale se e solo se $\mathfrak{Re}\, T$ e $\mathfrak{Im}\, T$ commutano.
   (d) Dimostrare che T è autoaggiunto se e solo se $\mathfrak{Im}\, T = 0$.