Cinematica relativa - 1

Lezione 6 - 14/03/2017

Finora abbiamo considerato, nella descrizione della cinematica di un sistema rigido, un riferimento fisso $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ e uno solidale con il sistema $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Rispetto a quest'ultimo, i punti del sistema rigido non cambiano le loro coordinate durante il moto.

Vogliamo ora considerare un caso più generale in cui il riferimento $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ è in moto rispetto ad $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ ma non è necessariamente solidale con il sistema rigido in movimento. Ci chiediamo come si possano mettere in relazione le proprietà cinematiche del sistema rigido viste nei due riferimenti.

In questo contesto, il sistema di riferimento è usualmente chiamato osservatore. Parleremo dunque di osservatore fisso intendendo il sistema $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ con origine in un certo punto $O \in \mathbb{R}^3$ e di osservatore mobile intendendo il sistema $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ con origine in un certo punto $Q \in \mathbb{R}^3$ in generale non fisso. Inoltre chiameremo "assolute" le quantità cinematiche associate all'osservatore fisso e "relative" quelle associate all'osservatore mobile. Indicheremo le prime con il pedice "a" e le seconde con il pedice "r". Infine denoteremo con $\underline{\omega}$ la velocità angolare dell'osservatore mobile rispetto a quello fisso.

Derivata di un vettore rispetto ai due osservatori

Stabiliamo prima di tutto l'analogo del Teorema di Poisson in questo contesto più generale.

Sia $\underline{u} = \underline{u}(t) \in \mathbb{R}^3$; denotiamo con $\dot{\underline{u}}$ la derivata di $\underline{u}$ rispetto a t calcolata dall'osservatore fisso e con $\underline{u}'$ quella calcolata dall'osservatore mobile.

Teorema Vale: $\dot{\underline{u}} = \underline{u}' + \underline{\omega} \times \underline{u}$.

Dim. Rappresentiamo $\underline{u}$ in componenti rispetto all'osservatore mobile:

$$\underline{u}(t) = \sum_{k=1}^{3} u_k(t)\, \underline{e}_k(t),$$

dove ora anche gli scalari u_k possono dipendere da t in quanto l'osservatore mobile non è necessariamente solidale. Allora:

$$\underline{u}' = \sum_{k=1}^{3} \dot{u}_k \, \underline{e}_k$$

perché $\underline{e}_k' = \underline{0}$ in quanto i versori della terna mobile sono costanti rispetto all'osservatore mobile. Inoltre $u_k' = \dot{u}_k$ perché gli u_k sono quantità scalari. Ne segue, usando le formule di Poisson, NEL RIFERIMENTO FISSO:

LUNGHEZZE DI VETTORI NON CAMBIANO IN MECCAN. CLASSICA

$$\dot{\underline{u}} = \sum_{k=1}^{3} \left(\dot{u}_k \underline{e}_k + u_k \dot{\underline{e}}_k \right) = \sum_{k=1}^{3} \left(\dot{u}_k \underline{e}_k + u_k \underline{\omega} \times \underline{e}_k \right)$$

$$= \underline{u}' + \underline{\omega} \times \sum_{k=1}^{3} u_k \underline{e}_k = \underline{u}' + \underline{\omega} \times \underline{u}. \qquad \boxtimes$$

Oss. Se $\underline{u}$ è solidale con l'osservatore mobile abbiamo $\underline{u}' = \underline{0}$ e ritroviamo così la formula $\dot{\underline{u}} = \underline{\omega} \times \underline{u}$. $\boxtimes$

Corollario $\dot{\underline{\omega}} = \underline{\omega}'$, cioè la variazione nel tempo della velocità angolare è la stessa sia per l'osservatore fisso sia per quello mobile.

Dim. Infatti $\dot{\underline{\omega}} = \underline{\omega}' + \underline{\omega} \times \underline{\omega}$ e $\underline{\omega} \times \underline{\omega} = \underline{0}$. $\boxtimes$

Leggi di composizione

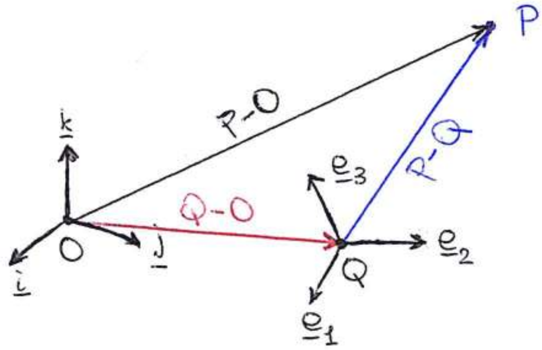
Teorema (di Galileo)

La velocità assoluta (cioè rispetto all'osservatore fisso) $\underline{v}_a$ di un punto P è legata a quella relativa (cioè rispetto all'osservatore mobile) $\underline{v}_r$ dello stesso punto dalla relazione:

$$\underline{v}_a = \underline{v}_r + \underline{v}_\tau \qquad (*)$$

dove $\underline{v}_\tau := \underline{v}_Q + \underline{\omega} \times (P - Q)$ è la velocità di trascinamento.

Dim.



Abbiamo $P-O = (P-Q) + (Q-O)$ ed evidentemente

$$\underline{v}_a = (P-O)^{\bullet}, \qquad \underline{v}_r = (P-Q)'$$

Allora:

per il teorema precedente

$$\underline{v}_a = \boxed{(P-Q)^{\bullet}} + (Q-O)^{\bullet}$$

$$= \boxed{(P-Q)' + \underline{\omega} \times (P-Q)} + \underline{v}_Q$$

$$= \underline{v}_r + \underbrace{\underline{\omega} \times (P-Q) + \underline{v}_Q}_{\underline{v}_\tau} .$$

$\square$

Oss. Se l'osservatore mobile è solidale con P allora $(P-Q)' = \underline{0}$ e quindi il teorema di Galileo si riduce a $\underline{v}_a = \underline{v}_\tau = \underline{v}_Q + \underline{\omega} \times (P-Q)$, ossia esattamente la legge di distribuzione delle velocità già vista. In generale, dunque, la velocità di trascinamento è la velocità che il punto P avrebbe (rispetto all'osservatore fisso) se fosse solidale con l'osservatore mobile e fosse quindi "trascinato" da quest'ultimo nel suo moto. QUI IL MOTO NON È RIGIDO; LA DISTANZA di P da Q PUÒ CAMBIARE $\square$

Oss. $\underline{v}_a = \underline{v}_r$ sse $\underline{v}_\tau = \underline{0}$. Quindi i due osservatori fisso e mobile misurano la stessa velocità di P, pur potendo avere origini e orientazioni diverse, sse $\underline{v}_Q = \underline{0}$ e $\underline{\omega} = \underline{0}$, ossia se non sono in moto l'uno rispetto all'altro. $\square$

La (*) è anche chiamata <u>legge di composizione delle velocità</u>.

Teorema (di Coriolis)

L'accelerazione assoluta $\underline{a}_a$ di un punto P è legata a quella relativa $\underline{a}_r$ dello stesso punto dalla relazione:

$$\underline{a}_a = \underline{a}_r + \underline{a}_\tau + \underline{a}_C \qquad (**)$$

dove $\underline{a}_\tau := \underline{a}_Q + \dot{\underline{\omega}} \times (P-Q) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (P-Q))$ è l'accelerazione di trascinamento e $\underline{a}_C = 2\underline{\omega} \times \underline{v}_r$ è l'accelerazione di Coriolis.

Dim. Usando la legge di composizione delle velocità abbiamo:

$$\underline{a}_a = \dot{\underline{v}}_a = \dot{\underline{v}}_r + \underbrace{\dot{\underline{v}}_Q}_{\underline{a}_Q} + \dot{\underline{\omega}} \times (P-Q) + \underline{\omega} \times (P-Q)^\circ.$$

Ma

$$\dot{\underline{v}}_r = \underline{v}_r' + \underline{\omega} \times \underline{v}_r = \underline{a}_r + \underline{\omega} \times \underline{v}_r$$

$$(P-Q)^\circ = (P-Q)' + \underline{\omega} \times (P-Q) = \underline{v}_r + \underline{\omega} \times (P-Q)$$

da cui:

$$\begin{aligned} \underline{a}_a &= \underline{a}_r + \underline{\omega} \times \underline{v}_r + \underline{a}_Q + \dot{\underline{\omega}} \times (P-Q) + \underline{\omega} \times [\underline{v}_r + \underline{\omega} \times (P-Q)] \\ &= \underline{a}_r + \underbrace{\left(\underline{a}_Q + \dot{\underline{\omega}} \times (P-Q) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (P-Q))\right)}_{\underline{a}_\tau} + \underbrace{2\underline{\omega} \times \underline{v}_r}_{\underline{a}_C}. \end{aligned}$$

$\boxtimes$

Oss. Anche in questo caso osserviamo che se l'osservatore mobile è solidale con P allora $\underline{v}_r = \underline{0}$ e dunque $\underline{a}_r = \underline{a}_C = \underline{0}$, mentre $\underline{a}_a = \underline{a}_\tau$. Dunque l'accelerazione di trascinamento è quella che P avrebbe (rispetto all'osservatore fisso) se fosse "trascinato" dal moto dell'osservatore mobile. Notiamo che, in tal caso, la relazione $\underline{a}_a = \underline{a}_\tau$ coincide con la legge di distribuzione delle accelerazioni.

$\boxtimes$

Oss. Si ha $\underline{a}_a = \underline{a}_r$ sse $\underline{a}_Q = \underline{0}$, $\underline{\omega} = \underline{0}$, $\dot{\underline{\omega}} = \underline{0}$. Dunque i due osservatori osservano la stessa accelerazione di P se uno si muove al più di moto rettilineo ($\underline{\omega} = \underline{0}$) uniforme ($\underline{a}_Q = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_Q = \text{costante}$) rispetto all'altro. In tal caso abbiamo:

$$\begin{cases} \underline{v}_a = \underline{v}_r + \underline{v}_Q \\ \underline{a}_a = \underline{a}_r \end{cases}$$

che sono dette <u>trasformazioni di Galileo</u>.

La (**) è anche detta <u>legge di composizione delle accelerazioni</u>.

<u>Teorema</u> Siano $\underline{\omega}_a$, $\underline{\omega}_r$ le velocità angolari di un sistema rigido rispettivamente rispetto all'osservatore fisso e a quello mobile. Allora:

$$\underline{\omega}_a = \underline{\omega}_r + \underline{\omega}. \qquad (***)$$

<u>Dim.</u> Prendiamo un vettore $\underline{u}$ solidale con il corpo rigido. Allora, per definizione di $\underline{\omega}_a$, $\underline{\omega}_r$, il Teorema di Poisson applicato prima nel riferimento fisso e poi in quello mobile dà:

$$\dot{\underline{u}} = \underline{\omega}_a \times \underline{u}, \qquad \underline{u}' = \underline{\omega}_r \times \underline{u}.$$

D'altra parte, usando la velocità angolare $\underline{\omega}$ dell'osservatore mobile rispetto a quello fisso abbiamo:

$$\dot{\underline{u}} = \underline{u}' + \underline{\omega} \times \underline{u}$$

e quindi

$$\underline{\omega}_a \times \underline{u} = \underline{\omega}_r \times \underline{u} + \underline{\omega} \times \underline{u}$$

$$(\underline{\omega}_a - \underline{\omega}_r - \underline{\omega}) \times \underline{u} = \underline{0}.$$

Ma poiché $\underline{u}$ è arbitrario da qui deduciamo $\underline{\omega}_a - \underline{\omega}_r - \underline{\omega} = \underline{0}$ e dunque la tesi.

$\boxtimes$

Oss. Se il sistema rigido è solidale con l'osservatore mobile allora $\underline{\omega}_r = \underline{0}$ e $\underline{\omega}_a = \underline{\omega}$. Per analogia con i casi precedenti, possiamo chiamare $\underline{\omega}$ la velocità angolare di trascinamento.

La (***) è anche detta legge di composizione delle velocità angolari.