Equazioni cardinali della dinamica

Def. Dato un sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$, con $P_i \in \mathbb{R}^3$ ed $m_i > 0$, si chiama quantità di moto del sistema la grandezza vettoriale

$$\underline{Q} := \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i,$$

essendo $\underline{v}_i \in \mathbb{R}^3$ la velocità istantanea del punto P_i.

Teorema Sia $G \in \mathbb{R}^3$ il baricentro di un sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$. Allora

$$\underline{Q} = M \underline{v}_G,$$

dove $M := \sum_{i=1}^N m_i$ è la massa totale del sistema.

Dim. Dalla definizione di baricentro abbiamo:

$$G - O = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O)$$

e quindi, derivando rispetto al tempo entrambi i membri,

$$\underline{v}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i \implies M \underline{v}_G = \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i$$

da cui la tesi. $\not{D}$

Oss. Si noti che l'eguaglianza $\underline{Q} = M \underline{v}_G$ è vera indipendentemente da un eventuale vincolo di rigidità imposto sul sistema.

Def. Dato un sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$, con $P_i \in \mathbb{R}^3$ ed $m_i > 0$, chiamiamo momento della quantità di moto rispetto ad un dato polo $Q \in \mathbb{R}^3$

la grandezza vettoriale

$$\underline{k}_Q := \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m \underline{v}_i .$$

<u>Prop.</u> Sia $Q' \in \mathbb{R}^3$ un secondo polo rispetto a cui calcolare il momento delle quantità di moto di un sistema di punti materiali. Vale allora la seguente <u>legge di cambiamento del polo</u>:

$$\underline{k}_{Q'} = \underline{k}_Q + \underline{Q} \times (Q' - Q).$$

<u>Dim.</u> Dalla definizione di $\underline{k}_{Q'}$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
\underline{k}_{Q'} &= \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q') \times m \underline{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q + Q - Q') \times m \underline{v}_i \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m \underline{v}_i}_{\underline{k}_Q} + (Q - Q') \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i}_{\underline{Q}} \\
&= \underline{k}_Q + \underline{Q} \times (Q' - Q)
\end{aligned}$$

da cui la tesi. $\boxtimes$

Analogamente a quanto fatto per la quantità di moto, diamo ora un'espressione del momento delle quantità di moto che coinvolga caratteristiche più sintetiche del sistema di punti materiali in considerazione. In questo caso, tuttavia, abbiamo bisogno di richiamare esplicitamente il vincolo di rigidità.

Teorema Per un sistema rigido vale:

$$\underline{k}_Q = M(G-Q) \times \underline{v}_Q + \underline{\underline{I}}_Q \underline{\omega}$$

dove G è il baricentro, $\underline{\omega}$ è la velocità angolare e $\underline{\underline{I}}_Q$ è la matrice di inerzia rispetto a Q e rispetto ad una base di $\mathbb{R}^3$ coerente con quella in cui $\underline{\omega}$ è identificata con il vettore delle proprie componenti.

Dim. Per la legge di distribuzione delle velocità, che sappiamo essere equivalente al vincolo di rigidità, risulta:

$$\underline{v}_i = \underline{v}_Q + \underline{\omega} \times (P_i - Q), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
\underline{k}_Q &= \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \underline{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i [\underline{v}_Q + \underline{\omega} \times (P_i - Q)] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - Q) \right) \times \underline{v}_Q + \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i [\underline{\omega} \times (P_i - Q)] . \qquad (*)
\end{aligned}$$

Esaminiamo i due addendi separatamente:

(i)
$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - Q) \right) \times \underline{v}_Q &= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O) + \sum_{i=1}^{N} m_i (O - Q) \right) \times \underline{v}_Q \\
&= \left(M(G - O) + M(O - Q) \right) \times \underline{v}_Q \\
&= M(G - Q) \times \underline{v}_Q ,
\end{aligned}$$

dove $M := \sum_{i=1}^{N} m_i$ è la massa totale del sistema.

(ii) Ricordiamo la seguente proprietà del doppio prodotto vettoriale:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c})\,\underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{c})\,\underline{a}$$

per ogni $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$. La dimostrazione si può effettuare scrivendo $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ in componenti rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e usando le proprietà del prodotto vettoriale tra gli elementi della base.

Allora nel nostro caso risulta:

$$\sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \left[\underline{\omega} \times (P_i - Q)\right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(P_i - Q) \times \underline{\omega}\right] \times (P_i - Q)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i |P_i - Q|^2 \underline{\omega} - \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{\omega} \cdot (P_i - Q)\right)(P_i - Q)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i |P_i - Q|^2\right) \underline{\omega} - \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{\omega} \cdot (P_i - Q)\right)(P_i - Q).$$

Introduciamo ora una base ortonormale $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale sia:

$$P_i - Q = x_i\,\underline{i} + y_i\,\underline{j} + z_i\,\underline{k}$$
$$\underline{\omega} = \omega_1\,\underline{i} + \omega_2\,\underline{j} + \omega_3\,\underline{k},$$

allora il precedente calcolo prosegue come:

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\right)(\omega_1\,\underline{i} + \omega_2\,\underline{j} + \omega_3\,\underline{k})$$
$$- \sum_{i=1}^{N} m_i (\omega_1 x_i + \omega_2 y_i + \omega_3 z_i)(x_i\,\underline{i} + y_i\,\underline{j} + z_i\,\underline{k})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (\cancel{x_i^2} + y_i^2 + z_i^2)\right)\omega_1\,\underline{i} + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + \cancel{y_i^2} + z_i^2)\right)\omega_2\,\underline{j}$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + y_i^2 + \cancel{z_i^2})\right)\omega_3\,\underline{k}$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\cancel{x_i^2 \omega_1} + x_i y_i \omega_2 + x_i z_i \omega_3 \right) \right) \underline{i}$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i y_i \omega_1 + \cancel{y_i^2 \omega_2} + y_i z_i \omega_3 \right) \right) \underline{j}$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i z_i \omega_1 + y_i z_i \omega_2 + \cancel{z_i^2 \omega_3} \right) \right) \underline{k}$$

$$= I_x \omega_1 \underline{i} + I_y \omega_2 \underline{j} + I_z \omega_3 \underline{k} + I_{xy} \omega_2 \underline{i} + I_{xz} \omega_3 \underline{i}$$

$$+ I_{xy} \omega_1 \underline{j} + I_{yz} \omega_3 \underline{j} + I_{xz} \omega_1 \underline{k} + I_{yz} \omega_2 \underline{k}$$

$$= \left(I_x \omega_1 + I_{xy} \omega_2 + I_{xz} \omega_3 \right) \underline{i} + \left(I_y \omega_2 + I_{xy} \omega_1 + I_{yz} \omega_3 \right) \underline{j}$$

$$+ \left(I_z \omega_3 + I_{xz} \omega_1 + I_{yz} \omega_2 \right) \underline{k}$$

dove x, y, z denotano i tre assi coordinati di versori rispettivi $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ aventi origine nel punto Q. Osservando che

$$\underline{\underline{I}}_Q \, \underline{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \omega_1 + I_{xy} \omega_2 + I_{xz} \omega_3 \\ I_{xy} \omega_1 + I_y \omega_2 + I_{yz} \omega_3 \\ I_{xz} \omega_1 + I_{yz} \omega_2 + I_z \omega_3 \end{pmatrix}$$

si riconosce che l'espressione a cui siamo pervenuti è precisamente il prodotto $\underline{\underline{I}}_Q \, \underline{\omega}$ interpretato in componenti rispetto alla base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fissata.

Mettendo insieme (i) e (ii) abbiamo in definitiva:

$$(*) = M (G - Q) \times \underline{v}_Q + \underline{\underline{I}}_Q \, \underline{\omega}$$

da cui la tesi. $\square$

Oss.

(i) Se il polo Q è (istantaneamente) fermo allora $\underline{v}_Q = \underline{0}$ e quindi:

$$\underline{K}_Q = \underline{\underline{I}}_Q \underline{\omega}.$$

(ii) Analogamente, se come polo Q si sceglie il baricentro G del sistema allora $G - Q = \underline{0}$ e quindi

$$\underline{K}_G = \underline{\underline{I}}_G \underline{\omega}.$$

(iii) In generale, come si vede dalla dimostrazione del precedente teorema, il polo Q deve essere pensato come un punto dello spazio solidale, cioè un punto che si muove in modo solidale ai P_i, pur potendo non coincidere con alcuno dei P_i (come accade, ad esempio, nel caso $Q = G$).

Prima equazione cardinale della dinamica

Teorema Sia $\underline{R}^{(e)}$ il risultante di tutte le forze esterne (forze attive e reazioni vincolari) agenti sul sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^N$. Allora

$$\dot{\underline{Q}} = \underline{R}^{(e)}.$$

Dim. Per il secondo principio della meccanica, per ciascun punto P_i vale la relazione:

$$m_i \underline{a}_i = \underline{R}_i^{(a)} + \underline{\Phi}_i + \underline{F}_i^{(i)}$$

dove $\underline{R}_i^{(a)}$ è il risultante delle forze attive agenti su P_i, $\underline{\Phi}_i$ quello delle reazioni vincolari ed $\underline{F}_i^{(i)}$ quello delle forze interne (cioè le forze scambiate con altri punti del sistema). Sommando su tutti i punti abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\underline{R}_i^{(e)} + \underline{\Phi}_i \right)}_{=:\underline{R}^{(e)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(i)}}_{= \underline{0} \text{ per il terzo principio della meccanica}}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{v}}_i = \underline{R}^{(e)}$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i}_{\underline{Q}} = \underline{R}^{(e)}$$

da cui la tesi. $\square$

Corollario Vale:

$$M \underline{a}_G = \underline{R}^{(e)}.$$

Dim. Segue direttamente dal fatto che $\underline{Q} = M \underline{v}_G$. $\square$

Seconda equazione cardinale della dinamica

Teorema Sia $\underline{M}_Q^{(e)}$ il momento risultante delle forze esterne (attive e vincolari) rispetto ad un polo Q agenti sul sistema di punti materiali $\{(P_i, m_i)\}_{i=1}^{N}$. Allora:

$$\dot{\underline{K}}_Q + \underline{v}_Q \times \underline{Q} = \underline{M}_Q^{(e)}.$$

Dim. Richiamando nuovamente il secondo principio della meccanica per i singoli punti materiali del sistema abbiamo:

$$m_i \underline{a}_i = \underline{R}_i^{(a)} + \underline{\underline{\Phi}}_i + \underline{F}_i^{(i)}$$

da cui, moltiplicando vettorialmente entrambi i membri per $P_i - Q$,

$$(P_i - Q) \times m_i \underline{a}_i = (P_i - Q) \times (\underline{R}_i^{(a)} + \underline{\underline{\Phi}}_i) + (P_i - Q) \times \underline{F}_i^{(i)} .$$

Sommando i contributi dei vari punti e ricordando il terzo principio della meccanica (secondo cui il momento risultante delle forze interne è nullo in quanto le interazioni tra coppie di punti si rappresentano con coppie di forze di braccio nullo) troviamo successivamente:

$$\sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \underline{a}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - Q)(\underline{R}_i^{(a)} + \underline{\underline{\Phi}}_i)}_{\underline{M}_Q^{(e)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times \underline{F}_i^{(i)}}_{= \underline{0}}$$

da cui

$$\underline{M}_Q^{(e)} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \dot{\underline{v}}_i$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \underline{v}_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(P_i - Q) \times m_i \underline{v}_i$$

$$= \dot{\underline{k}}_Q - \sum_{i=1}^{N} (\underline{v}_i - \underline{v}_Q) \times m_i \underline{v}_i$$

$$= \dot{\underline{k}}_Q - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{v}_i \times m_i \underline{v}_i}_{= \underline{0}} + \underline{v}_Q \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i}_{\underline{Q}}$$

$$= \dot{\underline{k}}_Q + \underline{v}_Q \times \underline{Q}$$

e infine la tesi. $\boxtimes$

Oss. (i) Né la prima né la seconda equazione cardinale della dinamica fanno uso del vincolo di rigidità del corpo. In particolare, nella seconda equazione cardinale della dinamica il polo Q può essere un punto qualsiasi di $\mathbb{R}^3$ anche non appartenente allo spazio solidale.

(ii) Se nella seconda equazione cardinale della dinamica il termine $\underline{v}_Q \times \underline{Q}$ è nullo possiamo scrivere più semplicemente:

$$\mathring{\underline{k}}_Q = \underline{M}_Q^{(e)} .$$

Ciò accade, ad esempio, quando Q è fisso oppure quando $Q = G$ o ancora quando Q ha velocità parallela a quella di G. Queste due ultime possibilità dipendono dal fatto che $\underline{Q} = M\underline{v}_G$, pertanto $\underline{v}_Q \times \underline{Q} = \underline{v}_Q \times M\underline{v}_G = \underline{0}$ se $\underline{v}_Q \parallel \underline{v}_G$.

Derivata temporale del momento delle quantità di moto

La seconda equazione cardinale della dinamica coinvolge il termine $\mathring{\underline{k}}_Q$, ovvero

$$\mathring{\underline{k}}_Q = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{N} (\underline{v}_i - \underline{v}_Q) \times m_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \underline{a}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underline{v}_i \times m_i \underline{v}_i}_{=\underline{0}\ \forall i=1,\dots,N} - \underline{v}_Q \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i}_{M\underline{v}_G} + \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \underline{a}_i$$

$$= -\underline{v}_Q \times M\underline{v}_G + \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \underline{a}_i$$

$$= -\underline{v}_Q \times \underline{Q} + \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \underline{a}_i ,$$

per cui la seconda equazione cardinale della dinamica si può anche riscrivere come:

$$\sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m_i \underline{a}_i = \underline{M}_Q^{(e)}.$$

Tuttavia, nel caso di un sistema rigido è possibile ottenere un'altra espressione di $\dot{\underline{K}}_Q$ punto che si rivela particolarmente utile per la scrittura in forma compatta della seconda equazione cardinale della dinamica.

Teorema Sia $Q \in \mathbb{R}^3$ un punto dello spazio solidale di un sistema rigido che sia istantaneamente fermo (quindi, in particolare, Q appartiene all'asse istantaneo di rotazione del sistema). Allora:

$$\dot{\underline{K}}_Q = \underline{\underline{I}}_Q \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times \underline{\underline{I}}_Q \underline{\omega},$$

dove $\underline{\underline{I}}_Q$ è riferita ad una base dello spazio solidale con origine in Q.

Dim. Ricordiamo che, nel caso di un sistema rigido, se Q è solidale ed è istantaneamente fermo allora $\underline{v}(Q) = \underline{0}$ e quindi $\underline{K}_Q = \underline{\underline{I}}_Q \underline{\omega}$. Per le formule di cinematica relativa abbiamo poi

$$\begin{aligned} \dot{\underline{K}}_Q &= \underline{K}_Q' + \underline{\omega} \times \underline{K}_Q \\ &= (\underline{\underline{I}}_Q \underline{\omega})' + \underline{\omega} \times \underline{\underline{I}}_Q \underline{\omega}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che nel sistema di riferimento solidale il punto Q è sempre fermo, non solo istantaneamente, e quindi in questo sistema non c'è variazione della matrice di inerzia. Dunque $(\underline{\underline{I}}_Q \underline{\omega})' = \underline{\underline{I}}_Q \underline{\omega}' = \underline{\underline{I}}_Q \dot{\underline{\omega}}$ poiché $\underline{\omega}' = \dot{\underline{\omega}}$, da cui segue la tesi.

N.B. Ovviamente per la validità di questa conclusione si assume che $\underline{\underline{I}}_Q$ sia scritta rispetto alla base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ dello spazio solidale con origine in Q.

Oss. La stessa conclusione di questo teorema vale se come polo Q si prende il baricentro G, anche se quest'ultimo non appartiene all'asse istantaneo di rota=

zione. Infatti, per un sistema rigido vale comunque $\underline{k}_G = \underline{\underline{I}}_G \underline{\omega}$, dunque si possono ripetere gli stessi passaggi della dimostrazione trovando:

$$\underline{\dot{k}}_G = \underline{\underline{I}}_G \underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times \underline{\underline{I}}_G \underline{\omega}.$$

Oss. Supponiamo di scegliere la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ dello spazio solidale coincidente con il riferimento principale di inerzia del sistema rigido con origine in Q. Allora:

$$\underline{\underline{I}}_Q = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

e inoltre $\underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3 \Rightarrow \underline{\dot{\omega}} = \underline{\omega}' = \dot{\omega}_1 \underline{e}_1 + \dot{\omega}_2 \underline{e}_2 + \dot{\omega}_3 \underline{e}_3$. Quindi

$$\underline{\underline{I}}_Q \underline{\dot{\omega}} = I_1 \dot{\omega}_1 \underline{e}_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \underline{e}_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \underline{e}_3$$

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \times \underline{\underline{I}}_Q \underline{\omega} &= \sum_{i=1}^{3} \omega_i \underline{e}_i \times \sum_{j=1}^{3} I_j \omega_j \underline{e}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} I_j \omega_i \omega_j \, \underline{e}_i \times \underline{e}_j \\ &= I_2 \omega_1 \omega_2 \underline{e}_3 - I_3 \omega_1 \omega_3 \underline{e}_2 \\ &\quad - I_1 \omega_2 \omega_1 \underline{e}_3 + I_3 \omega_2 \omega_3 \underline{e}_1 \\ &\quad + I_1 \omega_3 \omega_1 \underline{e}_2 - I_2 \omega_3 \omega_2 \underline{e}_1 \end{aligned}$$

da cui, in definitiva,

$$\begin{aligned} \underline{\dot{k}}_Q = &\left(I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \right) \underline{e}_1 \\ &+ \left(I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 \right) \underline{e}_2 \\ &+ \left(I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \right) \underline{e}_3 . \end{aligned}$$

Tenendo conto dei teoremi visti finora, le equazioni cardinali della dinamica per un sistema rigido possono essere formulate in definitiva come

$$\begin{cases} M\underline{a}_G = \underline{R}^{(e)} \\ \underline{\underline{I}}_Q\,\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega}\times\underline{\underline{I}}_Q\,\underline{\omega} = \underline{M}_Q^{(e)}, \end{cases}$$

essendo $Q\in\mathbb{R}^3$ un punto dello spazio solidale istantaneamente fermo e $\underline{\underline{I}}_Q$ la matrice di inerzia riferita ad una base dello spazio solidale con origine in Q.

La seconda equazione cardinale si può anche scrivere prendendo come riferimento il baricentro G. In tal caso, il sistema precedente diventa:

$$\begin{cases} M\underline{a}_G = \underline{R}^{(e)} \\ \underline{\underline{I}}_G\,\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega}\times\underline{\underline{I}}_G\,\underline{\omega} = \underline{M}_G^{(e)}. \end{cases}$$

È bene notare che ai vettori $\underline{R}^{(e)}$ ed $\underline{M}_Q^{(e)}$ (o $\underline{M}_G^{(e)}$) contribuiscono tutte le forze attive esterne e tutte le reazioni vincolari esterne agenti sul sistema.

Sistemi piani

Esaminiamo ora la forma assunta dalle equazioni cardinali della dinamica per sistemi piani.

Supponiamo che il piano in cui giace il sistema sia il piano Oxy. Sappiamo allora che $\underline{\omega}\parallel\underline{k}$, diciamo $\underline{\omega}=\omega\underline{k}$ con $\omega\in\mathbb{R}$, e che $\underline{k}$ è un autovettore della matrice di inerzia scritta rispetto a qualunque polo. Inoltre $\underline{k}$ può essere scelto come terzo versore di una qualunque base dello spazio solidale.

Se Q è un punto di questo spazio solidale istantaneamente fermo allora:

$$\underline{M}_Q^{(e)} = \dot{\underline{k}}_Q = \underline{\underline{I}}_Q\,\dot{\omega}\underline{k} + \omega\underline{k}\times\underline{\underline{I}}_Q\,\omega\underline{k}$$

$$= I_{zQ}\,\dot{\omega}\,\underline{k} + \omega^2\underline{k}\times\underline{\underline{I}}_Q\,\underline{k} \qquad (\text{ma } \underline{\underline{I}}_Q\underline{k} = I_z\underline{k})$$

$$= I_{z,Q}\,\dot{\omega}\,\underline{k} + \omega^2 I_{zQ}\underbrace{\underline{k}\times\underline{k}}_{=\underline{0}} = \quad \dot{\omega}\,\underline{k},$$

quindi la seconda equazione cardinale della dinamica assume una forma particolarmente semplice:

$$I_{z,Q}\,\dot{\omega}\,\underline{k} = \underline{M}_Q^{(e)},$$

essendo $I_{z,Q}$ il momento di inerzia rispetto all'asse parallelo a z e passante per Q. Inoltre, poiché anche $\underline{M}_Q^{(e)}$ dovrà essere parallelo all'asse z (perché tutte le forze esterne e i vettori posizione giacciono nel piano Oxy) potremo scrivere $\underline{M}_Q^{(e)} = M_Q^{(e)}\underline{k}$ con $M_Q^{(e)} \in \mathbb{R}$. Perveniamo quindi all'equazione <u>scalare</u>

$$I_{z,Q}\,\dot{\omega} = M_Q^{(e)}.$$

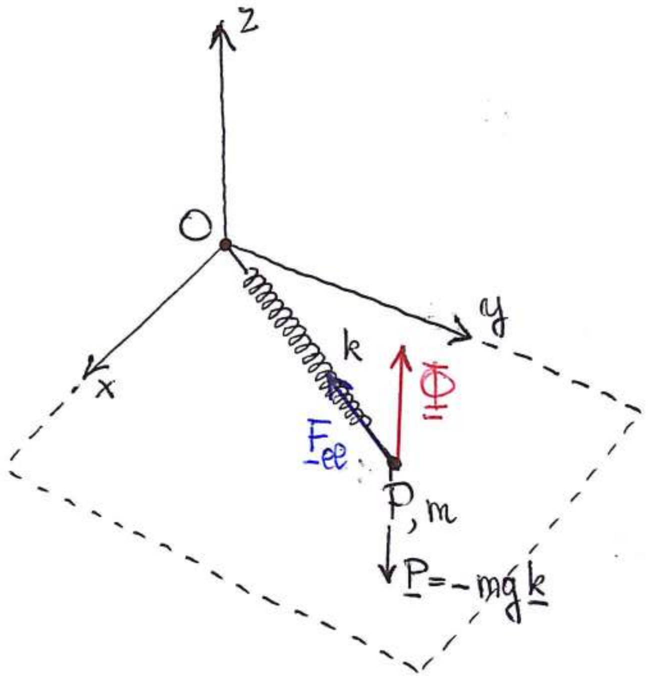
<u>Equazioni pure del moto</u>

In generale, nei termini $\underline{R}^{(e)}$ ed $\underline{M}_Q^{(e)}$ delle equazioni cardinali della dinamica è contenuto il contributo delle reazioni vincolari, le quali per loro natura <u>non</u> sono forze attive. Non è quindi nota a priori la loro dipendenza dall'atto di moto del sistema ed esse devono pertanto essere considerate a tutti gli effetti <u>incognite</u> del moto.

Può però accadere che proiettando le equazioni cardinali della dinamica lungo particolari direzioni in cui le reazioni vincolari non esplicano la propria azione, oppure scegliendo un polo Q rispetto al quale le reazioni vincolari non abbiano momento, si ottengano equazioni che non contengono le reazioni vincolari. Queste sono allora dette <u>equazioni pure</u> del moto.

<u>Esempio</u> (Punto vincolato al piano Oxy)

Consideriamo un punto materiale (P, m) vincolato a muoversi sul piano Oxy, supposto liscio. Supponiamo inoltre che il punto P sia collegato all'origi= ne da una molla di costante elastica $k > 0$.



Sul punto P agiscono le forze attive

$$\underline{F}_{el} = k(O-P)$$

$$\underline{P} = -mg\,\underline{k}$$

e la reazione vincolare $\underline{\Phi}$ esplicata dal piano Oxy. Stante l'ipotesi di vincolo liscio, $\underline{\Phi}$ dev'essere ortogonale al piano Oxy (si osservi peraltro che il vincolo di stare sul piano Oxy è della forma $z = 0$, cioè è olonomo e bilatero, dunque lo spazio degli spostamenti virtuali di P comprende tutti e soli sposta= menti invertibili). Quindi potremo scrivere $\underline{\Phi} = \Phi\underline{k}$, $\Phi \in \mathbb{R}$.

Rappresentando la posizione di P mediante le coordinate lagrangiane $x, y \in \mathbb{R}$ avremo:

$$P-O = x\underline{i} + y\underline{j}$$

e quindi, dalla prima equazione cardinale della dinamica:

$$m(\ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}) = -mg\underline{k} + k(-x\underline{i} - y\underline{j}) + \Phi\underline{k}$$

Ovvero

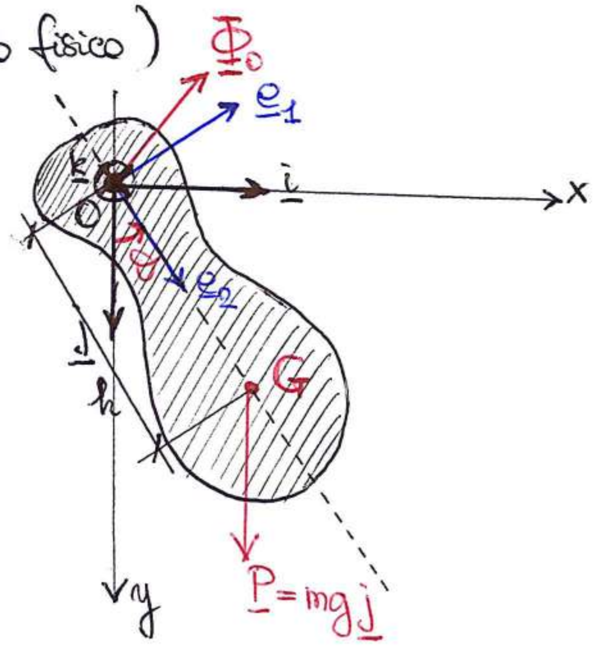
$$m(\ddot{x}\underline{i}+\ddot{y}\underline{j}) = -k(x\underline{i}+y\underline{j}) + (\Phi - mg)\underline{k},$$

che non è un'equazione pura del moto in quanto contiene la reazione vincolare incognita. Tuttavia, proiettando questa equazione lungo le direzioni $\underline{i}$ e $\underline{j}$ otteniamo

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx & (\text{lungo } \underline{i}) \\ m\ddot{y} = -ky & (\text{lungo } \underline{j}) \end{cases}$$

Che sono due equazioni pure che permettono di determinare il moto di P. Infine, proiettando lungo $\underline{k}$ otteniamo $\Phi - mg = 0$, da cui in questo caso possiamo determinare anche la reazione vincolare $\underline{\Phi} = mg\,\underline{k}$.

<u>Esempio</u> (Pendolo fisico)



Consideriamo un corpo rigido di massa m vincolato ad oscillare nel piano Oxy attorno al suo punto fisso O. Supponiamo che il baricentro G si trovi ad una distanza $h \geq 0$ da O lungo l'asse del corpo come in figura. Scelta come coordinata lagrangiana l'angolo θ indicato in figura abbiamo:

$$G - O = h\,\underline{e}_2 = h(\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}),$$