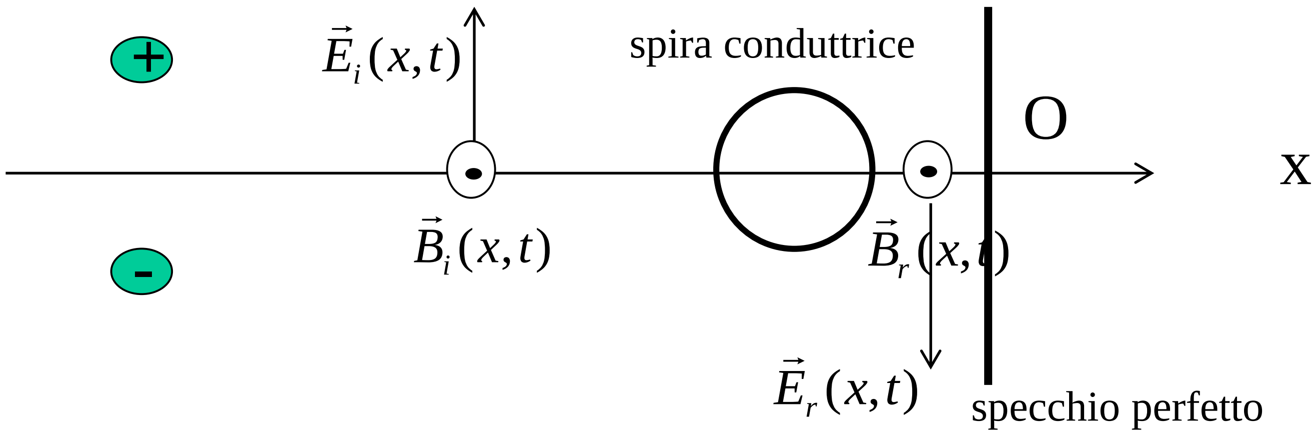
- Esperienza di Hertz
- Pressione di radiazione

- Rivisitazione del vettore di Poynting, fronti d’onda e raggi di una onda e.m.

Esperimento di HERTZ



Un dipolo oscillante genera una onda e.m. di pulsazione **ω** nota. L'onda si propaga lungo l'asse **x** e si riflette sullo specchio in **O**:

Onda progressiva — Onda regressiva

$$E(x,t) = E(x-ct) = E_{0,i}e^{i(kx-\omega t)} + E_{0,r}e^{-i(kx+\omega t)}$$

$$B(x,t) = B(x-ct) = B_{0,i}e^{i(kx-\omega t)} + B_{0,r}e^{-i(kx+\omega t)}$$

Se lo specchio in **O** è perfetto tutta l'energia dell'onda deve essere riflessa e quindi il campo **E** risultante sullo specchio deve essere nullo.

Da cui

$$0 = E_i(0,t) + E_r(0,t) = E_{0,i}e^{i(-\omega t)} + E_{0,r}e^{i(-\omega t)}$$

$$0 = E_{0,i}\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right) + E_{0,r}\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right)$$

$$0 = E_{0,i} + E_{0,r} \qquad E_{0,r} = -E_{0,i}$$

Con questa condizione abbiamo

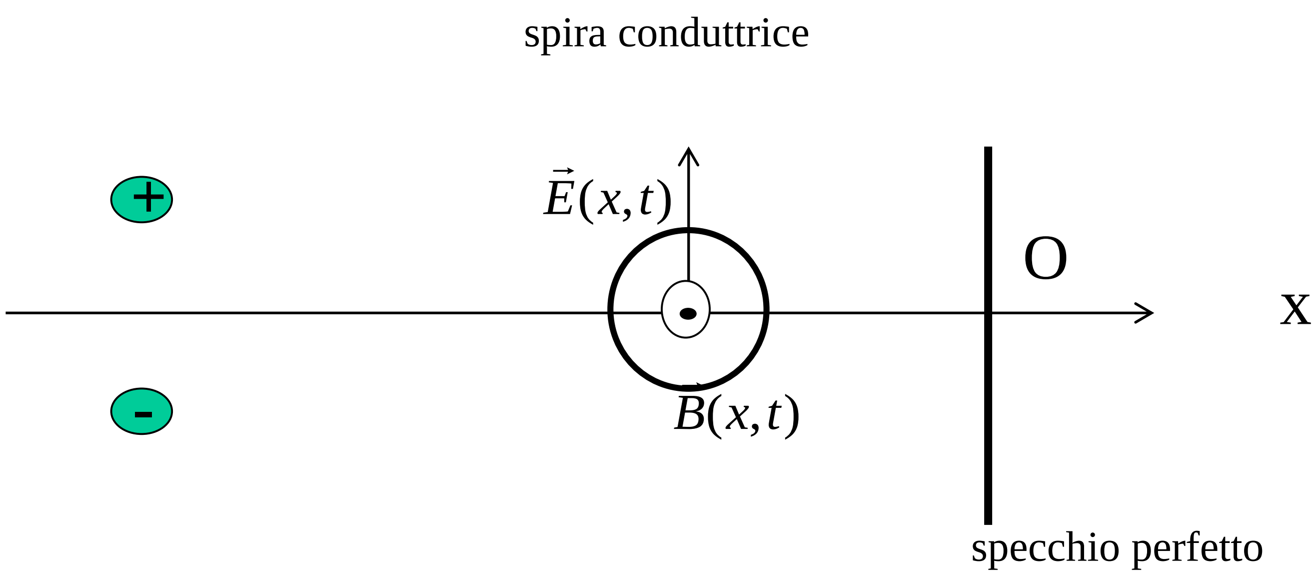
$$E(x,t) = E(x-ct) = E_0 e^{i(kx-\omega t)} - E_0 e^{-i(kx+\omega t)}$$

$$B(x,t) = B(x-ct) = B_0 e^{i(kx-\omega t)} + B_0 e^{-i(kx+\omega t)}$$

I campi risultanti diventano

$$E(x,t) = 2E_0 \sin(kx)\cos(\omega t)$$

$$B(x,t) = 2B_0 \cos(kx)\sin(\omega t)$$



Avendo una spira conduttrice mobile sul piano contenente **E** il campo **B** induce una corrente secondo la legge di Faraday-Henry.
Se la spira è piccola il campo **B** è quasi uniforme.

$$B(x,t) = 2B_0 \cos(kx)\sin(\omega t)$$

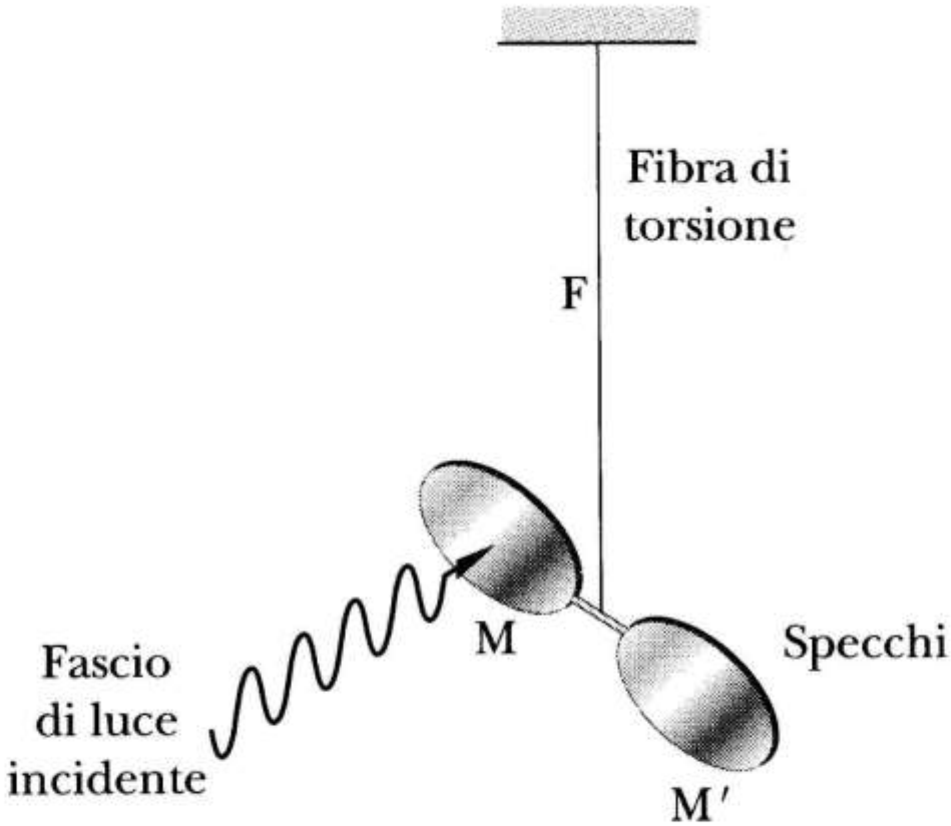
Il campo **B** presenta punti di annullamento permanenti lungo l’asse **x**.
Questi punti distano λ pari alla lunghezza d’onda dell’onda e.m.

Misurato λ e conoscendo ω si può dedurre la velocità dell'onda generata dal dipolo dalla relazione

$$\frac{\lambda\omega}{2\pi} = velocit\grave{a} = c$$

Con questa esperienza a fine ottocento Hertz in un sol colpo dimostrò l'esistenza delle onde e.m. previste dalle equazioni di Maxwell e determinò per la prima volta la loro velocità di propagazione.

La pressione di radiazione



Il fatto che le onde e.m. abbiano quantità di moto può essere verificato sperimentalmente misurando la forza (o meglio la pressione) su di una superficie investita da una onda elettromagnetica.

Quantità di moto di un'onda elettromagnetica

Abbiamo dimostrato che il campo e.m. propagandosi trasporta energia.

Vediamo adesso di mostrare che il campo e.m. è dotato di ***quantità di moto***.

Per fare questo prendiamo un'onda e.m. piana di equazioni:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 sin(kx - \omega t)$$

Cioè che si propaga in direzione **x**
con campo ***E*** parallelo a **y** e campo ***B*** a **z**.

Facciamo incidere l'onda su un piano posto parallelo a **yz** nell'origine **x=0**.

Sugli elettroni del materiale che costituisce il piano agiscono:

una forza elettrica $\vec{F}_E = -e\vec{E}$, che mette in moto gli elettroni lungo **y**;

un forza magnetica $\vec{F}_x = -e\vec{v} \times \vec{B}$ dovuta al moto degli elettroni.

Si può dimostrare (<u>con le leggi della dinamica</u>) che il moto degli elettroni è di direzione parallela al campo ***E***.

La forza magnetica vale:

$$F_x = evB$$

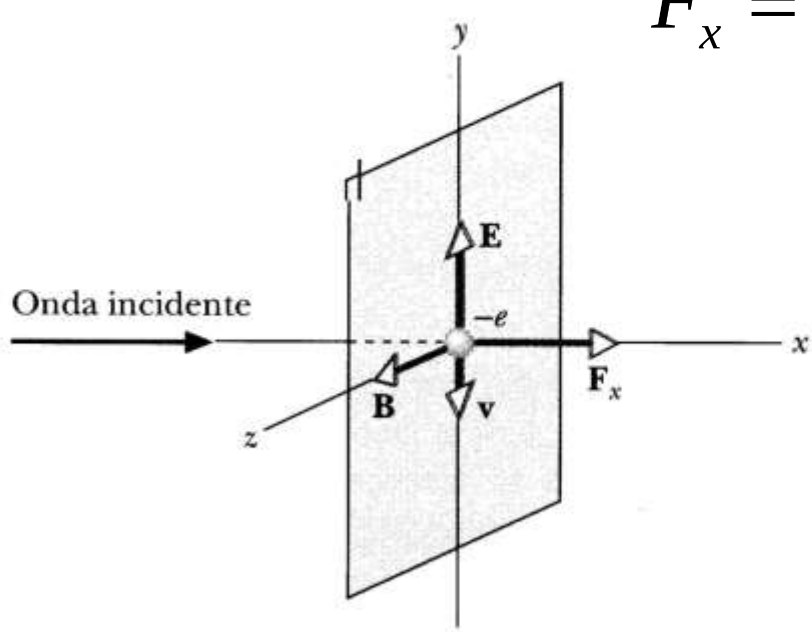


Figura 14 Un'onda incidente piana luminosa agisce su un elettrone in un sottile foglio resistivo. Sono mostrati i valori istantanei di **E**, **B**, della velocità **v** e della forza di radiazione $\mathbf{F}_x$.

La forza magnetica è sempre concorde all'asse **x** e agisce come una pressione sulla superficie del materiale.

La forza magnetica $\mathbf{F_x}$ trasferisce una quantità di moto all'elettrone su cui opera, secondo la legge di Newton

$$F_x = \frac{dp_{el}}{dt} = evB$$

Contemporaneamente la forza elettrica $\mathbf{F_E}$ fa lavoro sull'elettrone e gli trasferisce una energia per unità di tempo con una legge

$$\frac{dU_{el}}{dt} = F_E v = eEv$$

Ricordando che **E=cB** riusciamo a legare la quantità di moto trasferita all'elettrone alla energia trasferita nello stesso intervallo di tempo

$$\frac{dU_{el}}{dt} = c\,\frac{dp_{el}}{dt}$$

$$\Delta U_{el} = c\Delta p_{el}$$

Quindi ***la quantità di moto trasferita in un certo intervallo di tempo ad un elettrone in un materiale investito da una onda e.m. è pari alla energia e.m. assorbita dal materiale nello stesso intervallo di tempo diviso la velocità della luce***

$$\Delta p_{el} = \frac{\Delta U_{el}}{c}$$

Ovviamente l'energia assorbita viene dall'energia del campo e.m. e anche per la quantità di moto trasferita dall'onda all'elettrone dobbiamo concludere che era trasportata dal campo e.m.

Se consideriamo tanti elettroni investiti dall'onda e ragioniamo in termini di una superficie unitaria e di un volume unitario di campo,
otteniamo che ***le onde e.m. trasportano una quantità di moto per unità di volume pari alla densità di energia del campo e.m. diviso c***

$$p = \frac{w}{c}$$

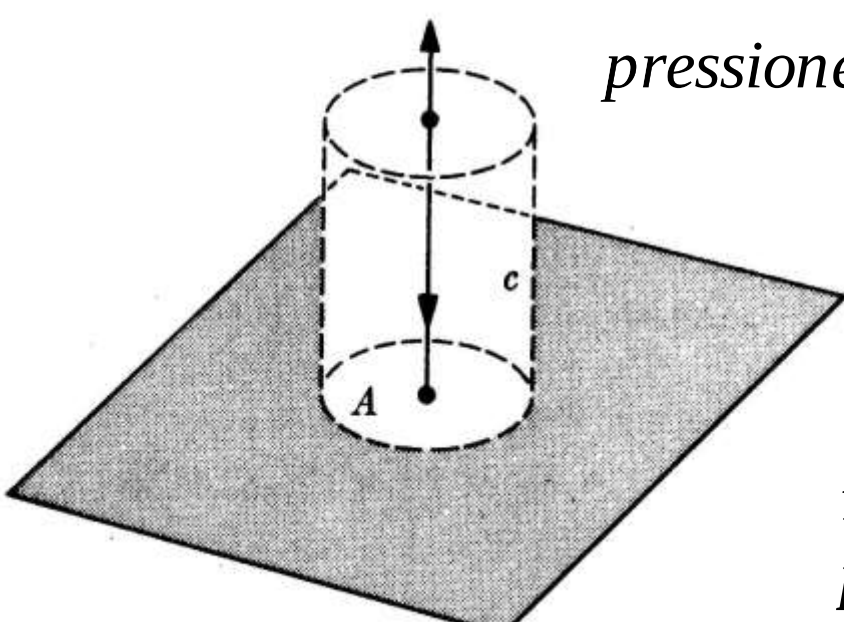
Calcolo della pressione di radiazione

Calcoliamo la pressione esercitata da una onda e.m. piana che incide ortogonalmente su una superficie piana e viene assorbita completamente.

Da quanto abbiamo visto l'onda trasporta e trasferisce quantità di moto alla superficie quindi dalla legge di Newton la superficie subisce una forza. Se prendiamo un'area ***A*** di superficie e consideriamo la quantità di moto trasferita nel tempo **Δt** che viene dal volume **A(cΔt)** del campo e.m., abbiamo

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = F_{\perp} = \frac{\frac{w}{c}\left(Ac\Delta t\right)}{\Delta t} = wA$$

$$pressione = \frac{F_{\perp}}{A} = w$$



Se la superficie fosse riflettente ***pressione=2w***

Nel caso di onde e.m. con incidenza non ortogonale sulla superficie allora la quantità di moto trasportata dall’onda che raggiunge la superficie su un’area **A** nel tempo **Δt** è quella contenuta nel cilindro di **volume = Acosθ c Δt**

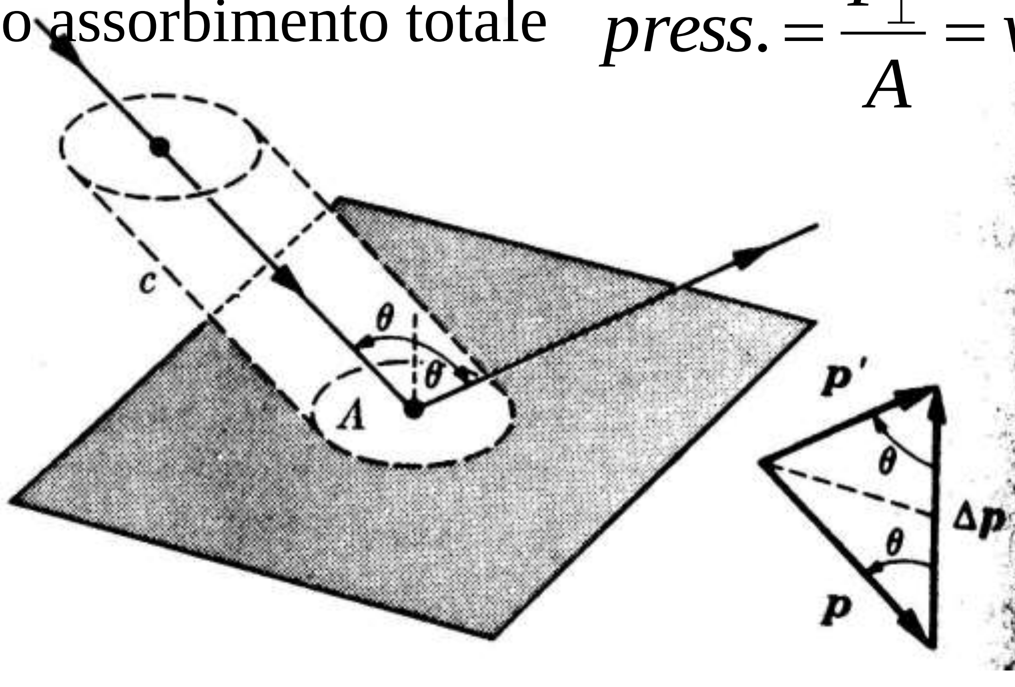
quindi la quantità di moto totale che raggiunge l’area **A** nel tempo **Δt** vale

$$P = \frac{w}{c} A\cos\theta c\Delta t$$

Quindi la pressione esercitata vale

caso riflessione totale
$$press. = \frac{F_\perp}{A} = 2w\cos^2\theta$$

caso assorbimento totale
$$press. = \frac{F_\perp}{A} = w\cos^2\theta$$



Il vettore di Poynting

Come tutte le onde, anche quelle e.m. trasportano energia propagandosi.

Tale energia può essere visualizzata come <u>un flusso di energia per unità di tempo e di superficie</u>.

Si descrive il modulo e la direzione del flusso di energia, trasportata dal campo E e B che si propaga, attraverso un vettore detto **_vettore di Poynting_**, e definito come:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

<u>In conclusione il vettore di Poynting definisce</u>:

- come direzione e verso la direzione e verso del flusso di energia;
- come modulo l'energia per unità di tempo e superficie attraverso una area posta ortogonale alla direzione di propagazione.

<u>Vediamo una rapida giustificazione alla forma algebrica del vettore di Poynting</u>.

Il campo e.m. nel vuoto immagazzina energia nello spazio con una densità (energia per unità di volume) ***w***

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Tra i moduli dei campi ***E*** e ***B*** c'è la relazione:

$$E = cB$$

La velocità di propagazione del campo e.m. è

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

La direzione di propagazione del campo, e quindi quella del flusso di energia, è: $\vec{E} \times \vec{B}$

Combinando il tutto, la densità di energia del campo e.m. diventa:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (cB)^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{E^2}{c^2 \mu_0}$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Tale energia si propaga con il campo e.m. a velocità c in direzione perpendicolare a E e B, quindi:

$$wc = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

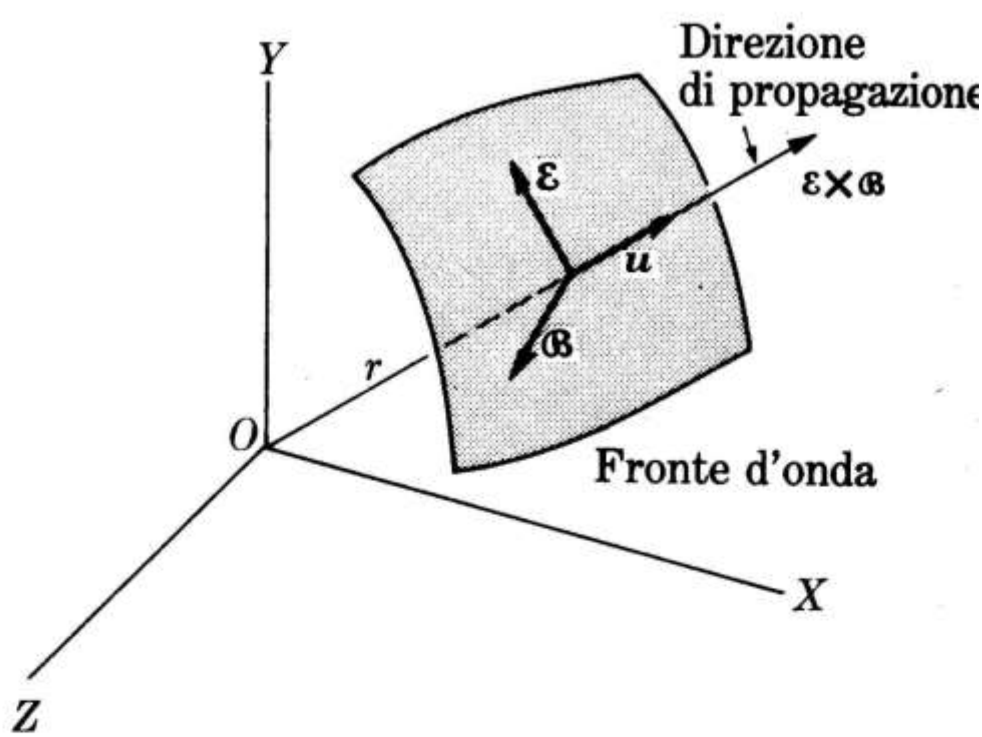
Vettorialmente:

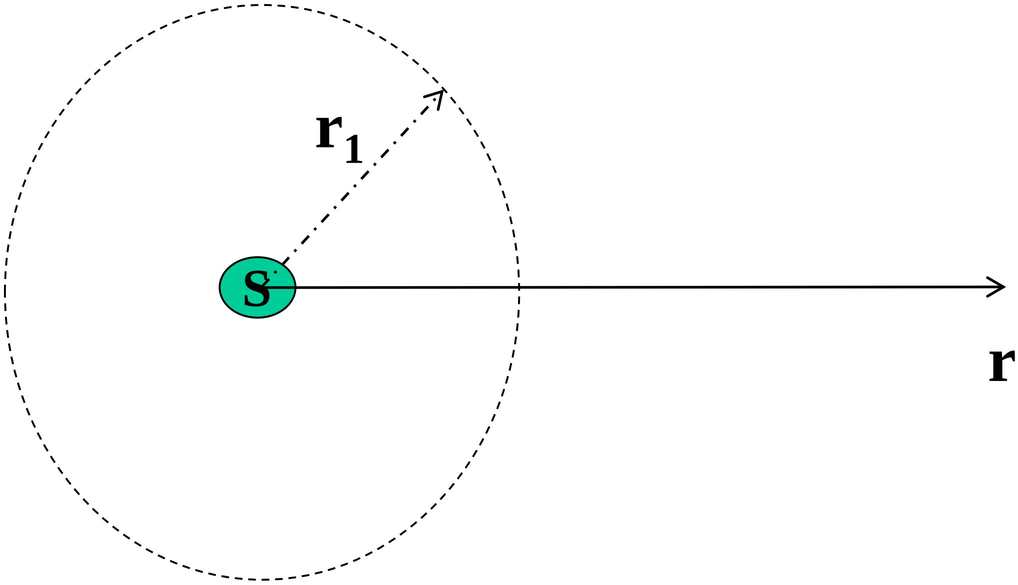
$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Onde elettromagnetiche sferiche

Le equazioni di Maxwell (sotto forma delle equazioni delle onde) ammettono soluzioni anche del tipo ***onde sferiche*** e ***onde cilindriche***.

Ad esempio per le onde sferiche il campo ***E*** e ***B*** è tangente alla superficie di una sfera e la direzione di propagazione è quella radiale.





Un'onda di equazione viene emessa dalla sorgente **S** isotropicamente

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin\left(kr - \omega t\right)$$

La sorgente emette una potenza **$P_S(t)$**

Attraverso ogni sfera di raggio **r_1** fluisce la potenza **$P(r_1,t)$**

$$P(r_1,t) = \left|\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right| 4\pi r^2 = \frac{E^2}{c\mu_0}4\pi r^2 = \frac{4\pi r^2}{c\mu_0}E_0^2 \sin^2(kr - \omega t)$$

Si può supporre che il flusso di energia in funzione del tempo non sia lo stesso allo stesso istante attraverso le superfici sferiche di raggio diverso, a causa del ritardo di propagazione.

Ma possiamo aspettarci che la media su un periodo abbia lo stesso valore a qualsiasi **r**

$$\langle P_S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P_S dt$$

$$\langle P(r_1) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(r_1,t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{4\pi r^2}{c\mu_0} E_0^2 \sin^2(kr-\omega t)$$

$$\langle P_S \rangle = \langle P(r_1) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{4\pi r^2}{c\mu_0} E_0^2 \sin^2(kr-\omega t) = \frac{2\pi r^2}{c\mu_0} E_0^2$$

Quindi
$$E_0^2 = \frac{\langle P_S \rangle c\mu_0}{2\pi}\frac{1}{r^2}$$

Cioè
$$E_0 \propto \frac{1}{r^2}$$

L’ampiezza di una onda sferica decresce come 1/r