OSSERVAZIONE NOTAZIONALE su f_*, f^*, df ecc.

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

In molti testi $f_* : T_q \mathbb{R}^n \to T_{f(q)} \mathbb{R}^m$ viene denotata con df. Questo perché nel caso particolare $m = 1$,

$$f_* : T_q \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(q)} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \qquad (\bullet)$$

coincide con il classico differenziale della funzione f.

Nel caso $(\bullet)$ la matrice Jacobiana di f coincide con il gradiente di f:

$$Jf = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots\cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad = \nabla f$$

Più in generale, se $f = (f_1, \ldots, f_m)$ con f_i funzioni su Ω, allora

$$Jf = \begin{pmatrix} - & \nabla f_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \nabla f_m & - \end{pmatrix}$$

Per quanto detto, f_* viene anche detto <u>differenziale</u> della funzione (vettoriale) f, mentre f^* viene anche detto <u>co-differenziale</u>

Per esempio, nel caso di una superficie parametrizzata $P : (u,v) \in \Omega \to P(u,v) \in \mathbb{R}^3$, la mappa $P_* : T\Omega \to T\mathbb{R}^3$ viene spesso denotata da dP:

$$\boxed{dP := P_*} \qquad (\bullet)$$

Una formula "evocativa" presente in moltissimi testi è la seguente:

$$dP = P_u\, du + P_v\, dv \qquad (\bullet)$$

La formula $(\bullet)$ trova la seguente giustificazione:

$$P(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \big) \Longrightarrow$$

$$dP(u,v) = \big(dx(u,v),\ dy(u,v),\ dz(u,v) \big) =$$

$$= \big(x_u\, du + x_v\, dv,\ y_u\, du + y_v\, dv,\ z_u\, du + z_v\, dv \big)$$

$$= P_u\, du + P_v\, dv$$

dP agisce su un campo vettoriale X su Ω nel seguente modo: $dP(X) = du(X)\, P_u + dv(X)\, P_v = X(u)\, P_u + X(v)\, P_v$

In particolare $dP(\partial_u) = P_u$ e $dP(\partial_v) = P_v$, in accordo con $(\bullet)$ di pag. 0b, in quanto $P_*(\partial u) = P_u$ e $P_*(\partial v) = P_v$

Osservazioni / Chiarimenti

Molte volte abbiamo supposto $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (superficie paramametrizzata) o anche $P : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (curva parametrizzata) iniettive.

Questo teoricamente non è restrittivo, in quanto quello che andiamo a calcolare ha carattere "locale". Per esempio abbiamo calcolato la curvatura e la torsione <u>in un punto</u> e per fare questo ci basta solo il comportamento delle curve/superficie nell'<u>intorno</u> di un punto

Esempio: Consideriamo la curva $P : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la cui traiettoria è 

$(\bullet)$

Sia $Q = P(1) = P(\frac{3}{2})$ il punto di autointersezione

P sicuramente non è un'applicazione iniettiva.

Però la traiettoria $(\bullet)$ può essere vista come l'unione di due traiettorie $\mathrm{Im}\, P_1 \cup \mathrm{Im}\, P_2$ con $P_i = I_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ iniettive. Infatti

$$P_1 = P\Big|_{(0, \frac{5}{4}]} \quad \text{e} \quad P_2 = P\Big|_{[\frac{5}{4}, 2)} \quad \Bigg\} \; P_1 \text{ e } P_2 \text{ sono iniettive}$$

$\downarrow$ traiettoria

$\downarrow$ traiettoria

$\Longrightarrow$ L'unione delle due traiettorie è $(\bullet)$

Una cosa simile vale anche per le superfici

L'importante è che in entrambi i casi si abbia P_* iniettiva, cioè P è <u>localmente</u> iniettiva (vedi anche PROP. della Lezione 13, pag. 13 d)

Questo è sempre vero in quanto dalla definizione di curva e superficie parametrizzata abbiamo P_{*_q} iniettivo $\forall\, q \in$ dominio.

OSSERVAZIONI: CAMPI VETTORIALI, FORME DIFFERENZIALI E TENSORI

Sia W una forma differenziale su $\mathbb{R}^n$, cioè

$$W : q \in \mathbb{R}^n \to W_q \in T_q^* \mathbb{R}^n$$

Abbiamo visto (Lezione 10) che W_q è un tensore di tipo $(0,1)$ sullo spazio vettoriale $T_q \mathbb{R}^n$.

Quindi possiamo anche dire che

W è un campo tensoriale di tipo $(0,1)$ su $\mathbb{R}^n$

Analogamente, un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ (o su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$)

$$X : q \in \mathbb{R}^n \to X_q \in T_q \mathbb{R}^n$$

è un campo tensoriale di tipo $(1,0)$ su $\mathbb{R}^n$

DEF: <u>Una metrica</u> su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$,

è una corrispondenza

$$q \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow g_q \in Bil(T_q\Omega) = Bil(T_q\mathbb{R}^n)$$

(dove ricordiamo che $Bil(T_q\Omega)$ è lo spazio vettoriale delle forme bilineari su $T_q\Omega$)

dove g_q è una metrica su $T_q\Omega$.

Notiamo che una metrica è un campo tensoriale di tipo $(0,2)$, cioè un'applicazione che ad ogni $q \in \Omega$ associa un (particolare) tensore di tipo $(0,2)$ su $T_q\Omega$.

TRATTIAMO IL CASO $n=2$

Dalla Lezione 10 sappiamo che, se (u,v) è un sistema di coordinate su un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ (per esempio quello cartesiano standard, ma anche altri come quello polare ecc.) allora, se $q \in \Omega$,

$$\begin{aligned} g_q &= g_{11}(q)(du)_q \otimes (du)_q + g_{12}(du)_q \otimes (dv)_q \\ &\quad + g_{21}(q)(dv)_q \otimes (du)_p + g_{22}(dv)_q \otimes (dv)_q \\ &= g_{11}(q)(du)_q \odot (du)_q + 2g_{12}(q)(du)_q \odot (dv)_q + g_{22}(dv)_q \odot (dv)_q \qquad (\bullet) \end{aligned}$$

Quindi una metrica g su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ può essere scritta come segue:

$$\boxed{g = g_{11}\, du \odot du + 2 g_{12}\, du \odot dv + g_{22}\, dv \odot dv}$$

dove g_{ij} sono funzioni su Ω.

In altri termini g associa ad ogni $q \in \Omega$ il tensore $(\bullet)$ di pagina precedente.

La metrica di sopra viene spesso (quasi sempre) scritta come segue

$$\boxed{g = g_{11}\, du^2 + 2 g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2}$$

i coefficienti g_{11}, g_{12} e g_{22} sono detti
<u>coefficienti metrici</u>.

Se ho una metrica g su un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$, se (u,v) sono coordinate su Ω, allora

$$g_{11} = g(\partial_u, \partial_u) \qquad g_{12} = g(\partial_u, \partial_v) \qquad g_{22} = g(\partial_v, \partial_v)$$

dove, per la precisione, $g(\partial_u, \partial_u)$ è la funzione

$$q \in \Omega \longrightarrow g_q\left(\partial_u|_q, \partial_u|_q\right) \in \mathbb{R}$$

Tutto quello che abbiamo detto si generalizza facilmente a qualsiasi dimensione.

Una metrica g su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, se $(x_1, \dots, x_n)$ è un sistema di coordinate su Ω, è esprimibile come

$$g = g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$$

(Ricordarsi sempre la convenzione di Einstein)

Avremo che

$$g_{ij} = g\left(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}\right)$$