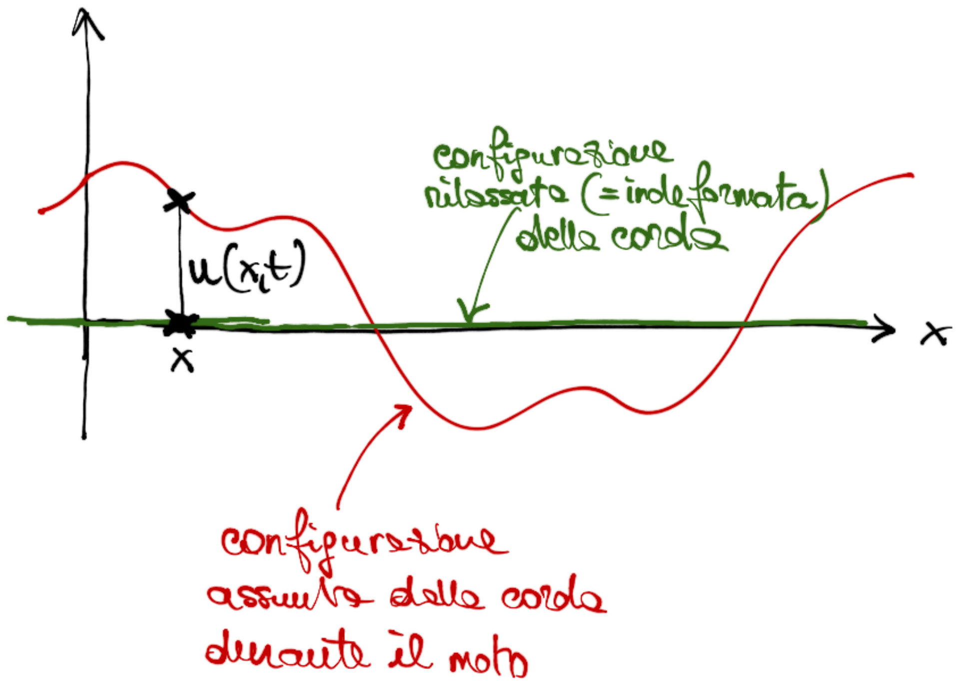
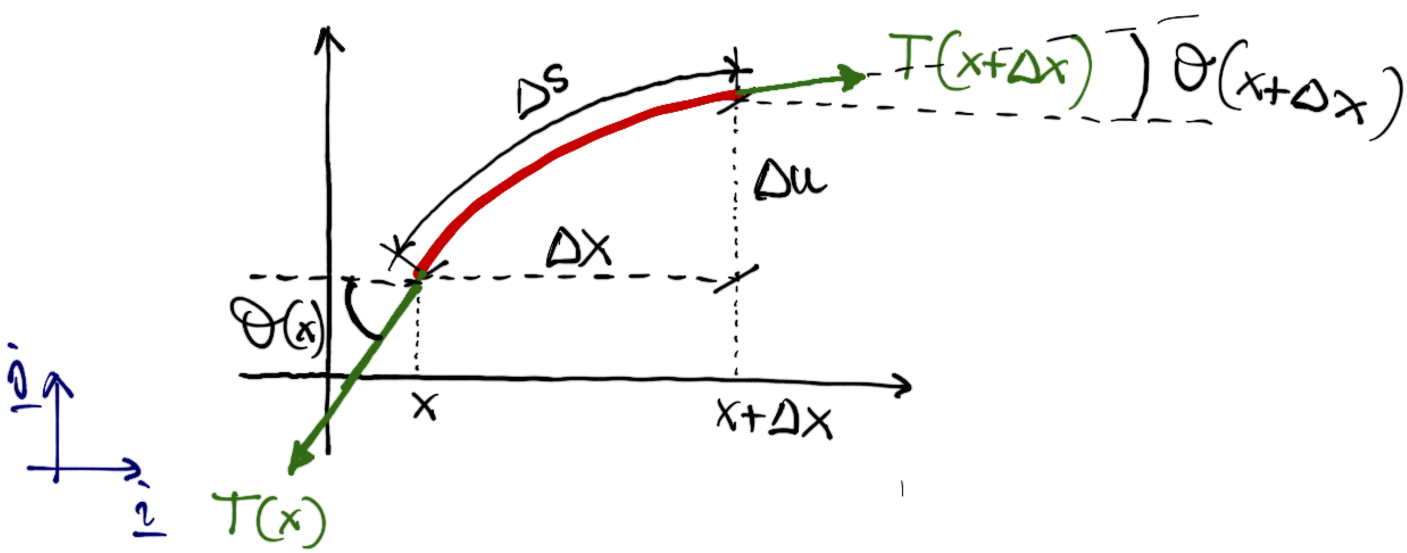
Derivazione dell'equazione delle onde 1D

Deriveremo l'equazione della corda vibrante.



$u(x,t)$ = spostamento verticale al tempo t del punto che nella configurazione indeformata si trova in x



Ipotesi:

(i) non c'è moto in direzione orizzontale (le oscillazioni della corda sono solo verticali);

(ii) la tensione (in modulo) della corda è costante rispetto a x: $|T(x)| = |T(x+\Delta x)| =: T > 0$;

(iii) l'angolo $\vartheta(x)$ di inflessione della corda sia "sufficientemente" piccolo $\forall x$.

Scriviamo l'equazione del moto dell'elemento di corda:

$$\overbrace{\rho \Delta s}^{\text{massa dell'elemento di corda}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \underline{j} = -T\cos\vartheta(x)\,\underline{i} - T\sin\vartheta(x)\,\underline{j} + T\cos\vartheta(x+\Delta x)\,\underline{i} + T\sin\vartheta(x+\Delta x)\,\underline{j}$$

densità lineare della corda, supposta costante (corda omogenea)

$$= \left[T\cos\vartheta(x+\Delta x) - T\cos\vartheta(x)\right]\underline{i} + \left[T\sin\vartheta(x+\Delta x) - T\sin\vartheta(x)\right]\underline{j}.$$

Proiettando lungo $\underline{j}$:

$$\rho \Delta s\, \partial_t^2 u = T\sin\vartheta(x+\Delta x) - T\sin\vartheta(x).$$

Oss.

(i) $$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}$$

(ii) $$\begin{cases} \sin\vartheta = \tan\vartheta \cdot \cos\vartheta \\ \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\tan^2\vartheta + 1\right)\cos^2\vartheta = 1$$

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{1+\tan^2\vartheta}$$

Assumendo $|\vartheta| \leq \pi/2$ (coerente con l'ipotesi (iii) fatta in precedenza) abbiamo:

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\vartheta}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\tan\vartheta}{\sqrt{1+\tan^2\vartheta}}.$$

Inoltre,

$$\tan\vartheta \approx \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

da cui

$$\sin\vartheta \approx \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}}. \qquad (*)$$

Ritornando all'equazione del moto:

$$\rho \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}\, \partial_t^2 u = T\left[\sin\vartheta(x+\Delta x) - \sin\vartheta(x)\right]$$

$$\rho \sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}\, \partial_t^2 u = T\ \frac{\sin\vartheta(x+\Delta x) - \sin\vartheta(x)}{\Delta x}.$$

Passando formalmente al limite $\Delta x \to 0^+$:

$$\rho \sqrt{1+(\partial_x u)^2}\, \partial_t^2 u = T\, \partial_x\left(\sin\vartheta(x)\right)$$

usando (*) $\longrightarrow$

$$= T\, \partial_x\left(\frac{\partial_x u}{\sqrt{1+(\partial_x u)^2}}\right).$$

Abbiamo così:

$$\partial_t^2 u = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_x u)^2}}\, \partial_x\left(\frac{\partial_x u}{\sqrt{1+(\partial_x u)^2}}\right). \quad (**)$$

Poiché assumiamo ϑ piccolo, la relazione (*) ci dice, nel limite $\Delta x \to 0^+$, che anche $\partial_x u$ è piccola e quindi $(\partial_x u)^2$ è trascurabile rispetto a 1, da cui:

$$\sqrt{1+(\partial_x u)^2} \simeq 1 .$$

Con questa approssimazione, l'equazione (**) diventa

$$\partial_t^2 u = \frac{T}{\rho} \partial_x^2 u ,$$

che è l'equazione delle onde 1D in spazio con

$$c^2 = \frac{T}{\rho} .$$

Dunque la velocità $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ delle oscillazioni lungo la corda è tanto maggiore quanto più la corda è tesa (o quanto meno la corda è densa) e tanto minore quanto più la corda è densa (o quanto meno la corda è tesa).

Esempi con Matlab

1. Corda vibrante con $x \in \mathbb{R}_+$ e condizione di Dirichlet omogenea in $x = 0$: $u(0,t) = 0, \ \forall t > 0.$

2. Corda vibrante con $x \in \mathbb{R}_+$ e condizione di Neumann omogenea in $x=0$: $\partial_x u(0,t)=0$, $\forall t>0$.

3. Corda vibrante con $x \in [0,1]$ e condizioni di Dirichlet omogenee in $x=0$ e $x=1$:

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \quad \forall t>0.$$