ANALISI FUNZIONALE
PROF. ALESSIO MARTINI
A.A. 2023-2024

ESERCITAZIONE 3

1. Per ciascuno dei seguenti spazi vettoriali V e mappe $G : V \times V \to \mathbb{F}$, determinare se G è un prodotto scalare su V.
   (i) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da
   $$G(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
   (ii) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
   $$G(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \qquad \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$
   (iii) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $G : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ data da
   $$G(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \qquad \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2.$$
   (iv) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da
   $$G(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \qquad \forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$
   (v) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $V = C[-1, 1]$, $G : C[-1, 1] \times C[-1, 1] \to \mathbb{C}$ data da
   $$G(f, g) = \int_0^1 f(t)\, \overline{g(t)}\, dt \qquad \forall f, g \in C[-1, 1].$$
2. Sia V uno spazio vettoriale complesso non banale (cioè $\dim V > 0$). Sia $g : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma bilineare simmetrica, cioè tale che
   $$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha g(x, z) + \beta g(y, z) \qquad \forall x, y, z \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \\ g(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha g(x, y) + \beta g(x, z) \qquad \forall x, y, z \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \\ g(x, y) &= g(y, x) \qquad \forall x, y \in V. \end{aligned}$$
   Dimostrare che g non può essere definita positiva, cioè non è vero che
   $$g(x, x) > 0 \qquad \forall x \in V \setminus \{0\}.$$
3. Sia H uno spazio di Hilbert.
   (a) Siano $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in H e $z \in H$ tali che:
      (i) $\lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle z, y \rangle$ per ogni $y \in H$;
      (ii) $\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|z\|$.
      Dimostrare che $x_n \to z$ in H.
      [Suggerimento: sviluppare il quadrato di $\|x_n - z\|$.]
   (b) Vale il risultato del punto (a) se si assume solo (i) e non (ii)?
4. Sia $\underline{w} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tale che $w_k > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poniamo
   $$\ell^2(\underline{w}) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 w_k < \infty \right\}$$
   e $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_{\underline{w}} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k} w_k$ per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \ell^2(\underline{w})$.
   (a) Dimostrare che $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\underline{w}}$ è un prodotto scalare su $\ell^2(\underline{w})$.
   (b) Dimostrare che $(\ell^2(\underline{w}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\underline{w}})$ è uno spazio di Hilbert.
   (c) Esibire $\underline{w}$ tale che $(1, 2^{-2}, 3^{-3}, \dots) \notin \ell^2(\underline{w})$.
   (d) Esibire $\underline{w}$ tale che $\{\underline{x} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : |x_k| \le (1 + k)^{1+k}\ \forall k \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell^2(\underline{w})$.

5. Sia H uno spazio pre-hilbertiano. Dimostrare che nella disuguaglianza di Cauchy–Schwarz
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$
vale l'uguaglianza se e solo se i vettori $x, y \in H$ sono linearmente dipendenti.
[Suggerimento: rivedere la dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.]
6. Se H è uno spazio pre-hilbertiano su $\mathbb{R}$, definiamo l'*angolo* fra due vettori $x, y \in H$ non nulli come il numero
$$\arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$
   (a) Dimostrare che l'angolo fra $x, y \in H \setminus \{0\}$ è un ben definito elemento di $[0, \pi]$, e che l'angolo tra x e y è lo stesso dell'angolo tra y e x.
   (b) Dimostrare che l'angolo tra $x, y \in H \setminus \{0\}$ è uguale a 0 oppure π se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.
   [Suggerimento: esercizio 5.]

   Sia ora $H = L^2(-1, 1)$ con l'usuale prodotto scalare integrale.
   (c) Calcolare gli angoli fra le funzioni $f_1, f_2, f_3 \in L^2(-1, 1) \setminus \{0\}$ date da
$$f_1(t) = 1, \qquad f_2(t) = t, \qquad f_3(t) = t^2 \qquad \forall t \in (-1, 1).$$
7. Ricordiamo che, se V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$, possiamo anche considerare V come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ restringendo l'operazione di prodotto scalare-vettore.
Sia ora $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ uno spazio pre-hilbertiano su $\mathbb{C}$, e definiamo $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ ponendo
$$(x, y) = \mathfrak{Re}\langle x, y\rangle \qquad \forall x, y \in V.$$
   (a) Dimostrare che $(V, (\cdot, \cdot))$ è uno spazio pre-hilbertiano su $\mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che la norma indotta da $(\cdot, \cdot)$ su V coincide con la norma indotta da $\langle\cdot, \cdot\rangle$.
   (c) Dimostrare che $(V, (\cdot, \cdot))$ è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{R}$ se e solo se $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$.
8. Dimostrare che la norma integrale $\|\cdot\|_1$ sullo spazio $L^1(\mathbb{R})$ non è indotta da un prodotto scalare.
9. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato su $\mathbb{R}$. Assumiamo che la norma $\|\cdot\|$ soddisfi l'identità del parallelogramma:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \text{per ogni } x, y \in X.$$
Vogliamo dimostrare che $\|\cdot\|$ è indotta da un prodotto scalare.
   (a) Dimostrare che, per ogni $x_1, x_2, y \in X$,
$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 = 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 - x_2 + y\|^2.$$
   (b) Dimostrare che, per ogni $x_1, x_2, y \in X$,
$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 = \|x_1 + y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2 + y\|^2 + \|x_2\|^2 - (\|x_1 - x_2 + y\|^2 + \|x_2 - x_1 + y\|^2)/2.$$
   (c) Definiamo la mappa $\langle\cdot, \cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ ponendo
$$\langle x, y\rangle = (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)/4 \qquad \text{per ogni } x, y \in X.$$
   Dimostrare che, per ogni $x_1, x_2, y \in X$,
$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle.$$
   (d) Dimostrare che, per ogni $x, y \in X$ e $n \in \mathbb{N}$,
$$\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle.$$
   (e) Dimostrare che, per ogni $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle.$$
   [Suggerimento: si consideri prima il caso $\alpha \in \mathbb{Q}$, e poi si usi la continuità per il caso generale.]
   (f) Dimostrare che $\langle\cdot, \cdot\rangle$ è un prodotto scalare su X e che $\|\cdot\|$ è la norma indotta.
   (g) Come si può modificare l'argomento precedente nel caso X sia uno spazio normato su $\mathbb{C}$ anziché $\mathbb{R}$?