EQUAZIONE DEL CALORE

– Esercizi –

Esercizio 1. Sia u una soluzione dell'equazione:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \, (n \geq 1)$$

verificare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, anche $v_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ è soluzione.

Esercizio 2. Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$ una soluzione dell'equazione:

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \, .$$

Utilizzare l'esercizio precedente per provare che anche $w(x,t) = xu(x,t) + 2tu_t(x,t)$ è soluzione.

Esercizio 3. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \, ,$$

della forma

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)$$

con $v \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $v(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $v'(0) = 0$.

Esercizio 4. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$u_t - \Delta u = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \quad (n \geq 1)$$

della forma

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} v\left(\frac{\|x\|}{t^{1/2}}\right) ,$$

con $v \in C^2([0,+\infty))$ tale che $v(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $v'(0) = 0$.

Esercizio 5. Dato il problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{se } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = e^{-3x^2} & \text{se } x \in \mathbb{R} \, . \end{cases}$$

a) Determinare il valore nel punto $(4, \frac{1}{4})$ della soluzione data dalla formula di rappresentazione.

b) Discutere la regolarità della soluzione data dalla formula di rappresentazione.

Esercizio 6. Dato il problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{se } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = e^{-2x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \, . \end{cases}$$

Determinarne la soluzione data dalla formula di rappresentazione.

Esercizio 7. Dato il problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{se } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \, . \end{cases}$$

Determinare la soluzione data dalla formula di rappresentazione.

Esercizio 8. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Determinare una formula di rappresentazione della soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - au_x - bu = 0 & \text{se } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \, . \end{cases}$$

Suggerimento: sfruttare la funzione ausiliaria $v\,(x,t) = e^{hx+kt} u\,(x,t)$ con h e k opportuni.

Esercizio 9. Dato il problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{se } (x,t) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{se } x \in (0,+\infty) \\ u(0,t) = 0 & \text{se } t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

con $g \in C^0([0,+\infty)) \cap L^\infty([0,+\infty))$. Determinare una formula di rappresentazione della soluzione estendendo il dato iniziale in modo dispari.

Esercizio 10. Dato il problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{se } (x,t) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{se } x \in (0,+\infty) \\ u_x(0,t) = 0 & \text{se } t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

con $g \in C^0([0,+\infty)) \cap L^\infty([0,+\infty))$. Determinare una formula di rappresentazione della soluzione estendendo il dato iniziale in modo pari.

Soluzione esercizio 1. Per ipotesi, u risolve l'equazione del calore omogenea. Scrivendo $u = u(y,s)$, si ha

$$u_s(y,s) - \Delta_y u(y,s) = 0 \quad (y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \, (n \geq 1)$$

da cui

$$u_s(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta_y u(\lambda x, \lambda^2 t) = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \, (n \geq 1)\,.$$

La tesi segue facilmente osservando che

$$(v_\lambda(x,t))_t = \lambda^2 u_s(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \text{e} \quad (v_\lambda(x,t))_{x_i x_i} = \lambda^2 u_{y_i y_i}(\lambda x, \lambda^2 t) \text{ per ogni } i = 1, ..., n\,,$$

da cui

$$(v_\lambda(x,t))_t - \Delta_x(v_\lambda(x,t)) = \lambda^2(u_s(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta_y u(\lambda x, \lambda^2 t)) = 0\,.$$

Soluzione esercizio 2. Dall'esercizio precedente sappiamo che $v_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ risolve l'equazione, sfruttando la regolarità di u ne segue che anche $\frac{\partial}{\partial\lambda} v_\lambda(x,t)$ è soluzione. Infatti, si ha che

$$0 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left((v_\lambda)_t - (v_\lambda)_{xx}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} v_\lambda\right)_t - \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} v_\lambda\right)_{xx} = 0\,.$$

Dal momento che $\frac{\partial}{\partial\lambda} v_\lambda(x,t) = x\, u_x(\lambda x, \lambda^2 t) + 2\lambda t\, u_t(\lambda x, \lambda^2 t)$, la tesi segue scegliendo $\lambda = 1$.

Soluzione esercizio 3. Imponendo che la funzione assegnata u risolva l'equazione del calore, si ottiene

$$0 = u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \frac{1}{t^{3/2}}\left(-\frac{1}{2} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right) - \frac{x}{2t^{1/2}} v'\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right) - v''\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)\right)\,.$$

Posto $y = \frac{x}{t^{1/2}}$, ne segue che v soddisfa l'equazione:

$$2v''(y) + yv'(y) + v(y) = 0 \quad (y \in \mathbb{R})\,.$$

Osservando che $2v''(y) + yv'(y) + v(y) = (2v'(y) + yv(y))'$, ne deduciamo che $2v'(y) + yv(y) = c$ per una certa $c \in \mathbb{R}$. Tuttavia, per ipotesi, $v(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $v'(0) = 0$ e quindi deve essere $c = 0$. Ci siamo quindi ricondotti all'equazione lineare di primo grado

$$2v'(y) + yv(y) = 0 \quad (y \in \mathbb{R})$$

la cui soluzione (imponendo $v(0) = \alpha$) è $v(y) = \alpha e^{-\frac{y^2}{4}}$. Tornando al problema di partenza, la soluzione cercata è $u(x,t) = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

Soluzione esercizio 4. Iniziamo osservando che u è una funzione radialmente simmetrica (in x), quindi posto $r = \|x\|$,

$$\Delta u(x,t) = u_{rr}(r,t) - \frac{n-1}{r} u_r(x,t)\,.$$

Imponendo che la funzione assegnata u risolva l'equazione del calore, si ottiene

$$0 = u_t(x,t) - \Delta u(x,t)$$

$$= \frac{1}{t^{(n+2)/2}}\left(-\frac{n}{2} v\left(\frac{r}{t^{1/2}}\right) - \frac{r}{2t^{1/2}} v'\left(\frac{r}{t^{1/2}}\right) - v''\left(\frac{r}{t^{1/2}}\right) - \frac{(n-1)t^{1/2}}{r} v'\left(\frac{r}{t^{1/2}}\right)\right)\,.$$

Posto $y = \frac{r}{t^{1/2}}$, ne segue che v soddisfa l'equazione:

$$2y^{n-1}v''(y) + 2(n-1)y^{n-2}v'(y) + y^n v'(y) + ny^{n-1}v(y) = 0 \quad (y \in \mathbb{R}_+)\,.$$

Osservando che $2y^{n-1}v''(y) + 2(n-1)y^{n-2}v'(y) + y^n v'(y) + ny^n v(y) = (2y^{n-1}v'(y) + y^n v(y))'$, ne deduciamo che $2y^{n-1}v'(y) + y^n v(y) = c$ per una certa $c \in \mathbb{R}$. Tuttavia, per ipotesi, $v(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $v'(0) = 0$ e quindi deve essere $c = 0$. Ci siamo quindi ricondotti all'equazione lineare di primo grado

$$2y^{n-1}v'(y) + y^n v(y) = 0 \quad (y \in \mathbb{R}_+)$$

la cui soluzione (imponendo $v(0) = \alpha$) è $v(y) = \alpha e^{-\frac{y^2}{4}}$. Tornando al problema di partenza, la soluzione cercata è $u(x,t) = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$.

Soluzione esercizio 5. a) La funzione $e^{-3x^2} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, per cui la formula risolutiva dell'equazione del calore risulta ben definita e si ottiene

$$u\left(4, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(4-y)^2} e^{-3y^2}\, dy = \frac{e^{-12}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2y-2)^2}\, dy = \frac{e^{-12}}{2}.$$

b) La funzione $e^{-3x^2} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e quindi, detta $u(x,t)$ la soluzione definita dalla formula di rappresentazione, si ha che $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ (vedere appunti lezioni per le giustificazioni) e vale:

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = e^{-3x_0^2} \quad \text{per ogni } x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Soluzione esercizio 6. Nonostante $e^{-x} \notin L^\infty(\mathbb{R})$, la formula di rappresentazione risulta ben definita e fornisce la soluzione $u(x,t) = e^{-2x+4t}$. Infatti, completando i quadrati, si ha

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{-2y}\, dy = \frac{e^{4t-2x}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y-4t)^2}{4t}}\, dy \\ &= \frac{e^{4t-2x}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = e^{-2x+4t}\,. \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 7. Applicando la formula risolutiva per l'equazione del calore si ottiene

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} y^2\, dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (x-y+x)^2\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (x-y)^2\, dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} 2x(x-y)\, dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} x^2\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} z^2\, dz + \frac{2x}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} z\, dz + \frac{x^2}{\sqrt{4\pi t}} \sqrt{4\pi t}\,.$$

Integrando per parti il primo addendo e osservando che il secondo addendo è nullo perchè l'integranda è dispari si conclude che $u(x,t) = 2t + x^2$.

Soluzione esercizio 8. Sia $v(x,t) = e^{hx+kt} u(x,t)$, ricordando che u risolve l'equazione assegnata, ne segue che

$$\begin{aligned} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) &= e^{hx+kt} \left(ku(x,t) + u_t(x,t) - h^2 u(x,t) - 2hu_x(x,t) - u_{xx}(x,t)\right) \\ &= e^{hx+kt} \left((k+b-h^2)u(x,t) + (a-2h)u_x(x,t)\right)\,. \end{aligned}$$

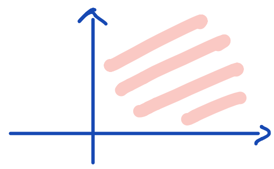
Quindi, v risolve l'equazione del calore omogenea per $h = a/2$ e $k = -b + a^2/4$ e, con questa scelta di parametri, si conclude che

$$u(x,t) = e^{-(a/2)x-(-b+a^2/4)t} v(x,t) = \frac{e^{-(a/2)x+(b-a^2/4)t}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{(a/2)y} g(y)\, dy\,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è anche sfruttato il fatto che $v(x,0) = e^{(a/2)x}u(x,0) = e^{(a/2)x}g(x)$.

Esercizio 9 Dato il problema

$$(P)\quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{se } (x,t) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{se } x \in (0,+\infty) \\ u(0,t) = 0 & \text{se } t \in (0,+\infty) \end{cases}$$



con $g \in C^0([0,+\infty)) \cap L^\infty([0,+\infty))$. Determinare una formula di rappresentazione della soluzione estendendo il dato iniziale in modo dispari.

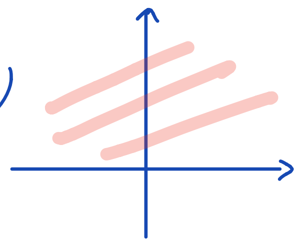
Sol.

Sia $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'ESTENSIONE DISPARI di g:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -g(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Considero ora il problema

$$(\tilde{P})\quad \begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{g}(x) \end{cases}$$



Grazie alla formula di rappresentazione ho

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \tilde{g}(y)\, dy$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(-y)\, dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)\, dy$$

$$\underset{z=-y}{=} \frac{-1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x+z)^2}{4t}} g(z)\, dz + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{0}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right] g(y)\, dy$$

La restrizione u di $\tilde{u}$ al I quadrante soddisfa l'eq. e la prima condiz. in (P).

Inoltre, si può osservare che

$$u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\frac{y^2}{4t}} - e^{-\frac{y^2}{4t}} \right] g(y)\, dy = \underline{0}$$

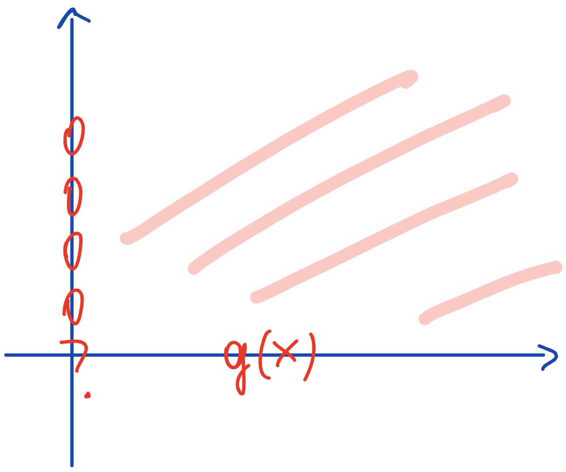
Quindi, u soddisfa la condiz. di Dirichlet sulla retta $x=0$, $t>0$, ovvero (P).

D'altra parte, se $x_0 \neq 0$ $\displaystyle\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \tilde{u}(x,t) = \tilde{g}(x)$

(essendo $g \in C^0([0,+\infty))$, vedere teoria) e quindi

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0) \quad \forall x_0 > 0 .$$

In particolare u può essere continua in $(0,0)$ solo se $g(0) = 0$



Esercizio 10 Dato il problema

$$(Q)\quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{se } (x,t) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{se } x \in (0,+\infty) \\ u_x(0,t) = 0 & \text{se } t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

con $g \in C^0([0,+\infty)) \cap L^\infty([0,+\infty))$. Determinare una formula di rappresentazione della soluzione estendendo il dato iniziale in modo pari.

la strategia è analoga a quella dell'esc. precedente, ma ora

$\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'ESTENSIONE PARI di g:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \to \tilde{g} \text{ CONT. in } x=0$$

QUI NON HO PB. di CONTINUITÀ

e ottengo

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right] g(y)\, dy$$

la restrizione u di $\tilde{u}$ al I quadrante soddisfa l'eq. e la prima condiz. in (Q).

D'altra parte, per $t>0$ si può DERIVARE sotto il segno di integrale e ho:

$$\tilde{u}_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{\infty} \left[-\frac{(x-y)}{2t} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - \frac{(x+y)}{2t} e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right] g(y)\, dy$$

$$\tilde{u}_x(0,t) \underset{t>0}{=} 0 \implies u_x(0,t) = 0$$

$\boxtimes$