Sistemi lineari di ODE

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sistema lineare: $\boxed{f(t,x) = Ax}$ con $\begin{cases} A \in \mathbb{R}^{n\times n} & \text{matrice a coefficienti costanti} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

È un sistema autonomo perché f non dipende esplicitamente da t.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x} = Ax \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Problema di Cauchy: $t_0 = 0$, $x_0 := x(0) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, & t > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad (*)$$

Poichè la funzione $f(t,x) = Ax$ soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Cauchy e inoltre è sublineare, il problema $(*)$ ammette sempre un'unica soluzione definita globalmente $\forall t \in \mathbb{R}$

(in particolare, $\forall t > 0$).

Consideriamo il caso particolare $n = 1$:

$$x \in \mathbb{R}, \quad A = a \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x(t) = x_0 e^{at}}$$

Vogliamo far vedere che per $n > 1$ la soluzione di $(*)$ si scrive:

$$x(t) = \underbrace{\boxed{e^{tA}}}_{\text{matrice esponenziale}} x_0$$

Costruzione della matrice esponenziale

Ricordiamo che se $a \in \mathbb{R}$ allora:

$$e^a := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Prendendo spunto da questa identità, diamo la seguente

Def. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si chiama esponenziale di A la matrice, denotata con $e^A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definita come:

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} .$$

Dobbiamo dimostrare che la serie che definisce e^A converga.

<u>Def.</u> (Convergenza di una serie di matrici)

Consideriamo una successione di matrici $\{M_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$.

Diciamo che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k$$

converge in $\mathbb{R}^{n\times n}$ se per ogni coppia di indici $1 \leq i, j \leq n$ converge in $\mathbb{R}$ la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_{ij}^{(k)} .$$

elemento di posto i, j della matrice M_k

<u>Def.</u> (Norma di una matrice)

Sia $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Chiamiamo norma di Hilbert-Schmidt di A la quantità

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} .$$

Oss. $\|\cdot\|_2$ è una norma in $\mathbb{R}^{n\times n}$ nel senso della definizione classica di norma perché di fatto coincide con la norma euclidea dei vettori in $\mathbb{R}^{n^2}$.

Lemma

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Allora:

$$\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2 .$$

Dim. Poniamo $C := AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

prodotto scalare

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \underbrace{A_{(i)}}_{\substack{\in \mathbb{R}^n \\ i\text{-esima} \\ \text{riga di } A}} \cdot \underbrace{B^{(j)}}_{\substack{\in \mathbb{R}^n \\ j\text{-esima colonna} \\ \text{di } B}}$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|c_{ij}| \leq \|A_{(i)}\|_2 \, \|B^{(j)}\|_2 .$$

Allora:

$$\|C\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|A_{(i)}\|_2^2 \, \|B^{(j)}\|_2^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \|A_{(i)}\|_2^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \|B^{(j)}\|_2^2 \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} b_{hj}^2 \right) = \|A\|_2^2 \, \|B\|_2^2 . \qquad \boxtimes$$

Vediamo ora la convergenza della serie di matrici che definisce e^A.

<u>Lemma</u>

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

<u>Dim.</u>

1. Facciamo vedere che converge la serie <u>numerica</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|_2 .$$

Infatti:

per il Lemma precedente

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\|_2 = \frac{1}{k!} \big\| \underbrace{A \cdot \overbrace{(A \cdot \ldots \cdot A)}^{k-1 \text{ volte}}}_{k \text{ volte}} \big\|_2 \leq \frac{1}{k!} \|A\|_2 \cdot \big\| \underbrace{A \cdot \overbrace{(A \cdot \ldots \cdot A)}^{k-2 \text{ volte}}}_{k-1 \text{ volte}} \big\|_2$$

$$\leq \frac{1}{k!}\|A\|_2\,\|A\|_2\,\|\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k-2\text{ volte}}\|_2$$

$$\leq \ldots \leq \frac{1}{k!}\|A\|_2^k.$$

Allora:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|_2 \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|_2^k}{k!} = e^{\|A\|_2} < +\infty$$

quindi $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|_2$ converge (perché è una serie a termini positivi maggiorata da una serie convergente).

2. Mostriamo infine che $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ converge.

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \sqrt{\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(a_{lm}^{(k)}\right)^2} = \|A^k\|_2,$$

$\forall i,j=1,\ldots,n$

elemento di posto (i,j) della matrice A^k

quindi:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}|a_{ij}^{(k)}| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\|A^k\|_2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|_2 < +\infty \text{ (per il punto 1.)}$$

allora la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{ij}^{(k)}|}{k!}$$

converge per ogni coppia (i,j). Allora:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}$$

converge assolutamente e quindi converge. Per definizione di convergenza di una serie di matrici, questo dice che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge. $\varnothing$