CAMPI VETTORIALI LUNGO PARAMETRIZZAZIONI

Sia $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata.

Sia $S = \Im(P)$ l'immagine di P, quindi

$$P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S = \Im(P) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Nota che S è immersa in $\mathbb{R}^3$, quindi ogni suo punto può essere descritto da <u>2 parametri</u> (tipicamente li abbiamo chiamati (u,v)) e ha <u>3 coordinate</u> (tipicamente le abbiamo chiamate $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Avremo che

$$P_{*q} : T_q\Omega \longrightarrow T_{P(q)}S \hookrightarrow T_{P(q)}\mathbb{R}^3 \qquad (\bullet)$$

Nota che la (•) di pag. 1

$$P_{*q} : T_q \Omega \longrightarrow T_{P(q)} \mathbb{R}^3$$

è <u>iniettiva</u> in quanto la matrice rappresentativa di P_{*q}, che è la Jacobiana di P nel punto $q \in \Omega$

$$\begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \\ z_u(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

dove $P(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ e $q = (u_0, v_0)$

è supposta di rango 2.

PROP: Abbiamo che

$$P_\star(\partial_u) = P_u \quad , \quad \text{cioè} \quad P_{\star\, q_0}\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0}\right) = P_u(q_0)$$

con $q_0 = (u_0, v_0)$

e

$$P_\star(\partial_v) = P_v \quad , \quad \text{cioè} \quad P_{\star\, q_0}\left(\frac{\partial}{\partial v}\Big|_{q_0}\right) = P_v(q_0)$$

La verifica di questa proposizione è quasi immediata

Infatti, per definizione,

$$P_{\star\, q_0}\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0}\right) = \frac{d}{dt}\Big|_0 P(\gamma(t)) \quad \text{dove } \gamma(0) = q_0 \text{ e } \gamma'(0) = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0}$$

ora la curva $\gamma(t)$ più semplice che soddisfa questi requisiti è $(u_0 + t, v_0)$

Considerando quindi $\gamma(t) = (u_0 + t, v_0)$

avremo che, in $q_0 = (u_0, v_0)$,

$$P_{*q_0}\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{q_0}\right) = \frac{d}{dt}\Big|_0 P(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 P(u_0 + t, v_0)$$

$$= \frac{d}{du}\Big|_{u_0} P(u, v_0) = P_u(u_0, v_0)$$

Stesso ragionamento per $P_{*q_0}\left(\frac{\partial}{\partial v}\Big|_{q_0}\right)$

Un ragionamento del tutto analogo porta alla seguente

<u>PROP</u>: Se $P : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow P(t) \in \mathbb{R}^3$ è una curva parametrizzata, allora

$$P_*\left(\frac{d}{dt}\right) = P', \quad \text{cioè} \quad P_{*t_0}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) = P'(t_0)$$

<u>Oss:</u> A pag. 3-4 abbiamo dimostrato che

$$P_*(\partial_u) = P_u \qquad (\bullet)$$

Lo potevamo vedere anche usando la Jacobiana di P.

Infatti

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$$

Jacobiana di $P(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$

componenti di ∂_u nella base (∂_u, ∂_v)

componenti di $P_*(\partial_u)$ nella base $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$

Come sempre possiamo guardare P_u come vettore (x_u, y_u, z_u) o come derivazione $x_u \partial_x + y_u \partial_y + z_u \partial_z$

Stesso discorso per $P_*(\partial_v)$ e $P_*\left(\frac{d}{dt}\right)$

DEF: Un campo vettoriale Y lungo un' applicazione

$$P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$ è un' applicazione

$$Y : q \in \Omega \longrightarrow Y(q) \in T_{P(q)} \mathbb{R}^m$$

Per sempio, se $P(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, $t \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$,

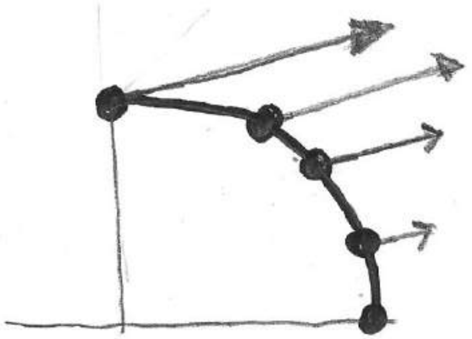
allora $Y : t \in I \longrightarrow \left(\frac{2t}{\pi}, \frac{t}{\pi}\right) \in T_{P(t)} \mathbb{R}^2$

o, nel nostro linguaggio,

$$Y(t) = \frac{2t}{\pi} \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{P(t)} + \frac{t}{\pi} \frac{\partial}{\partial v}\Big|_{P(t)}$$

con (u, v) coordinate su $\mathbb{R}^2$

è un campo lungo P. Andando a disegnare



Se <u>X è un campo vettoriale</u> su $\mathbb{R}^m$ e

$P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, allora

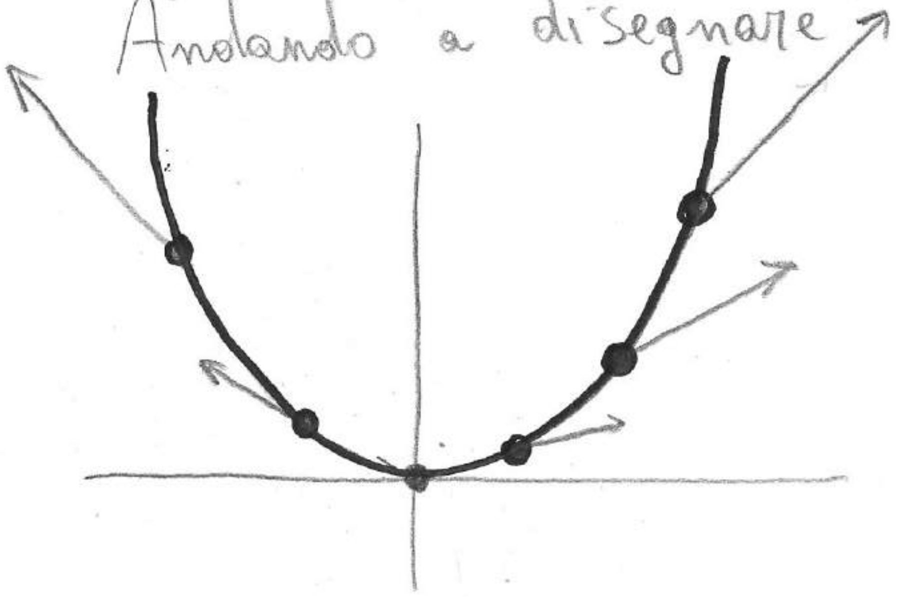
$$Y = X \circ P : q \in \Omega \longrightarrow X_{P(q)} \in T_{P(q)} \mathbb{R}^m$$

è un campo vettoriale lungo P.

Per esempio se $X = u\,\partial_u + v\,\partial_v$ e $P(t) = (t, t^2)$, $t \in I$,

allora $X \circ P : t \in I \longrightarrow X_{P(t)} = t\,\partial_u\big|_{P(t)} + t^2\,\partial_v\big|_{P(t)}$

Andando a disegnare



Dalla definizione di campo lungo un'applicazione P, non è detto che il campo sia <u>tangente</u> all'immagine di P. Anche il campo di pagina precedente non è tangente alla parabola.

Abbiamo la seguente

<u>PROP</u>: Sia $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Sia X un campo su Ω.

Allora $P_*(X) : q \in \mathbb{R}^n \longrightarrow P_{*_q}(X_q) \in T_{P(q)}\mathbb{R}^m$

è un campo lungo P <u>tangente</u> a $\operatorname{Im} P$

La dimostrazione è solo una generalizzazione dei risultati di pag. 3-4.

Gli esempi di pag. seguente riassumono la situazione.

Ex: Abbiamo visto che se $P : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva e se $a(t)\frac{d}{dt}$ è un campo vettoriale su I, allora

$$P_*\left(a(t)\frac{d}{dt}\right) = a(t)\, P_*\left(\frac{d}{dt}\right) \overset{\text{pag. 4}}{=} a(t)\, P'(t) \in T_{P(t)}\mathbb{R}^3$$

che, in ogni istante $t \in I$, è tangente a $\partial m P$ (cioè alla traiettoria di P) in $P(t)$.

Ex: Se $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è una superficie parametrizzata e $a(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial}{\partial v}$ un campo vettoriale su Ω, allora

$$P_*\left(a(u,v)\,\partial_u + b(u,v)\frac{\partial}{\partial v}\right) = a(u,v)\, P_*(\partial_u) + b(u,v)\, P_*(\partial_v)$$

$$\overset{\text{pag. 3}}{=} a(u,v)\, P_u + b(u,v) \in P_v \in T_{P(u,v)}S = \mathrm{Span}\left\{ P_u(u,v),\, P_v(u,v) \right\}$$

dove $S = \partial m P$

Sia $P : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata

Sia $S = \Im m\, P$. Supponiamo P iniettiva. Allora se X è un campo vettoriale su Ω,

$$P_*(X) \circ P^{-1} : s \in S \longrightarrow (P_* X)_{P^{-1}(s)} \in T_s S$$

è un campo vettoriale su S.

<u>PROP</u> : $\gamma : I \longrightarrow S$ è una curva integrale di $P_*(X) \circ P^{-1}$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha := P^{-1} \circ \gamma : I \to \Omega$ è una curva integrale di X

<u>DIM</u>

$\Longleftarrow$ Sia $\alpha = P^{-1} \circ \gamma$ una curva integrale di X. Allora

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)} \qquad (*)$$

Voglio dimostrare che $P \circ \alpha$ è una curva integrale di $P_*(X) \circ P^{-1}$.

Infatti $\dfrac{d}{dt} P(\alpha(t)) = P_{*_{\alpha(t)}}(\alpha'(t)) \overset{(*)}{=} P_{*_{\alpha(t)}}\left(X_{\alpha(t)}\right) = (P_* X)_{\alpha(t)}$

$= \left((P_* X) \circ P^{-1}\right)_{P(\alpha(t))}$ che era quello che volevamo dimostrare

$\Longrightarrow$ Vogliamo dimostrare che $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$ (★)

Andiamo a calcolare.

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt} p^{-1}(\gamma(t)) = p^{-1}_{*\,\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) =$$ Poiché stiamo supponendo che $\gamma(t)$ sia una curva integrale di $p_*(X)\circ p^{-1}$

$$= p^{-1}_{*\,\gamma(t)}\left(p_* X\right)_{p^{-1}(\gamma(t))}$$

$$= \underbrace{p^{-1}_{*\,\gamma(t)}\; p_{*\,p^{-1}(\gamma(t))}}_{=\text{ identità}} X_{p^{-1}(\gamma(t))} = X_{p^{-1}(\gamma(t))} = X_{\alpha(t)}$$

Cioè $\alpha(t)$ è una curva integrale di X in quanto abbiamo dimostrato (★)

Ex: Sia $P: (u,v) \in \Omega \to (u, v, u^2+v^2) \in \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata.

Sia $X = v\,\partial_u - u\,\partial_v$ un campo vettoriale su Ω. Calcolare le curve integrali di $(P_* X)\circ P^{-1}$ e $P_* X$

È facile vedere che P è iniettiva.

Più precisamente abbiamo che $S = \operatorname{Im} P$ è il grafico della funzione $F(u,v) = u^2+v^2$

(Ricordiamo che il grafico di una funzione $F(u,v)$ è l'insieme dei punti $(u, v, F(u,v))$.

Per quello detto a pag. 9-10 le curve integrali di $(P_* X)\circ P^{-1}$ sono $P\circ \lambda$ con λ curva integrale di X

Abbiamo già visto nella lezione precedente che le curve integrali $\alpha(t)$ di $X = v\partial_u - u\partial_v$ sono

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)) =$$

$$(u_0 \cos(t) + v_0 \operatorname{sen}(t), -u_0 \operatorname{sen}(t) + v_0 \cos(t))$$

Quindi

$$P(\alpha(t)) = (u_0 \cos(t) + v_0 \operatorname{sen}(t), -u_0 \operatorname{sen}(t) + v_0 \cos(t), u_0^2 + v_0^2)$$

Calcoliamo ora $P_*(X)$.

Abbiamo che

$$P_*(X) = P_*(v\partial_u - u\partial_v) \overset{\text{linearità}}{=} v P_*(\partial_u) - u P_*(\partial_v)$$

$$= v P_u - u P_v$$

Riscrivo $P_*(X)$:

$$P_*(X) = v\, P_u - u\, P_v$$

e tenendo conto che, in questo caso,

$$P_u = (1, 0, 2u) \xrightarrow[\text{derivazione}]{\text{come}} \partial_x + 2u\, \partial_z$$

$$P_v = (0, 1, 2v) \xrightarrow[\text{derivazione}]{\text{come}} \partial_y + 2v\, \partial_z$$

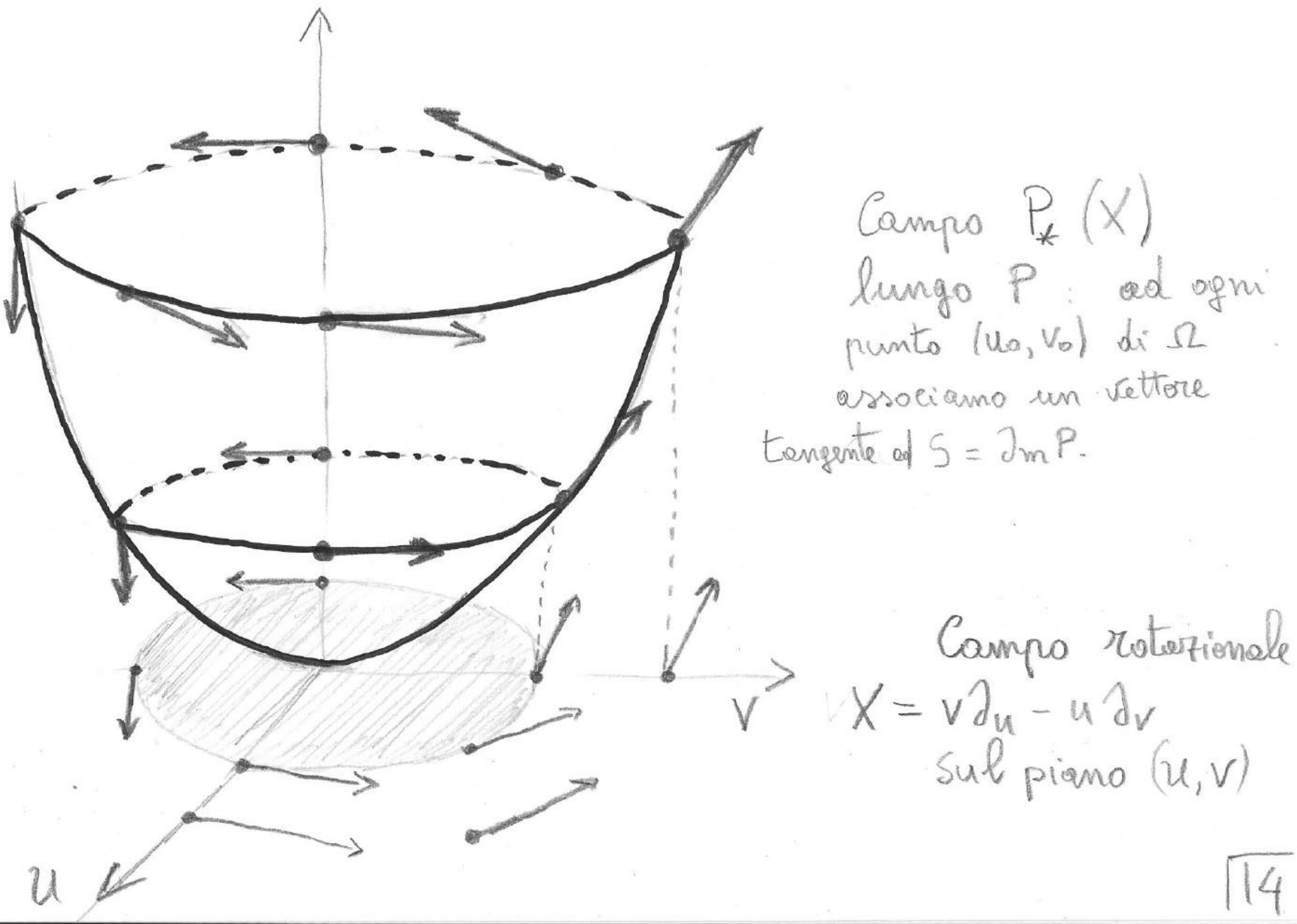
abbiamo anche che $P_*(X) = v\, \partial_x - u\, \partial_y$

Osserviamo che tutti i campi di sopra sono campi lungo P e quindi il vettore risultante va applicato in $P(u,v)$

Per esempio, P_u associa al punto (u_0, v_0) il vettore $(1, 0, 2u_0)$ applicato nel punto $P(u_0, v_0) = (u_0, v_0, u_0^2 + v_0^2)$

o, in altre parole, $\partial_x \big|_{P(u_0,v_0)} + 2u_0\, \partial_z \big|_{P(u_0,v_0)}$

<u>Facciamo un disegno</u>: in questo caso $S = \operatorname{Im} P$ è un "paraboloide" e $P_*(X) \circ P^{-1}$ definisce un campo vettoriale su S.



Ex: Sia $P : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (u^2+v,\ uv,\ u+v)$

Sia $X = u\,\partial_u + v\,\partial_v$.

Calcolare $(P_* X)$ e le curve integrali di $(P_* X)\circ P^{-1}$

Molto simile all' esercizio precedente.

$$P_*(X) = P_*(u\,\partial_u + v\,\partial_v) = u\,P_*(\partial_u) + v\,P_*(\partial_v) = u\,P_u + v\,P_v$$

$$= u(2u, v, 1) + v(1, u, 1) = (2u^2+v,\ 2uv,\ u+v)$$

$$\longrightarrow (2u^2+v)\,\partial_x + 2uv\,\partial_y + (u+v)\,\partial_z$$

Le curve integrali di $P_*(X)\circ P^{-1}$ sono le curve $P(\alpha(t))$ con $\alpha(t)$ curve integrali di X. Poiché abbiamo già visto in qualche lezione precedente che $\alpha(t) = (u(t), v(t)) = (u_0 e^t, v_0 e^t)$ abbiamo che $P(\alpha(t)) = (u_0^2 e^{2t} + v_0 e^t,\ u_0 v_0 e^{2t},\ (u_0+v_0)e^t)$