PRINCIPI DELLA E.S.

- Legge di Coulomb → carica, campo elettrico
- Conservazione della carica
- Sovrapposizione degli effetti

INTERAZIONE ELETTROSTATICA:
Il potenziale elettrostatico

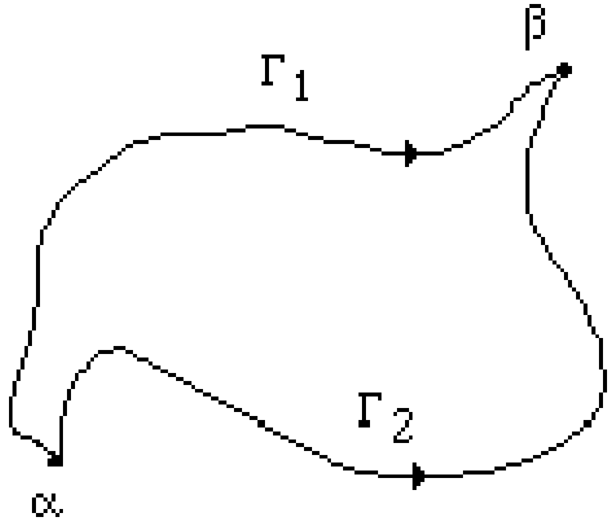
- **Il potenziale elettrostatico;**
- **Potenziale di una carica puntiforme;**
- **Potenziale di una distribuzione discreta di cariche puntiformi;**
- **Potenziale di una distribuzione continua di carica;**
- **Relazione tra campo e potenziale;**
- **Le superfici equipotenziali;**
- **Operatore «nabla»**
- **Conservatività del campo in formato differenziale**

POTENZIALE ELETTROSTATICO

Per poter introdurre il concetto di potenziale occorre discutere del lavoro che compie il campo su una carica che si sposta da un punto ad un altro in una regione dello spazio dove è presente un campo elettrico statico.

Sulla carica ***q’*** agisce una forza ***F*** dovuta al campo elettrico. Il lavoro ***W*** che il campo elettrico compie quando la carica ***q’*** si sposta dal punto α al punto β vale:

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



Si può dimostrare che tale lavoro non dipende dal percorso scelto Γ1 o Γ2 ma solo dagli estremi

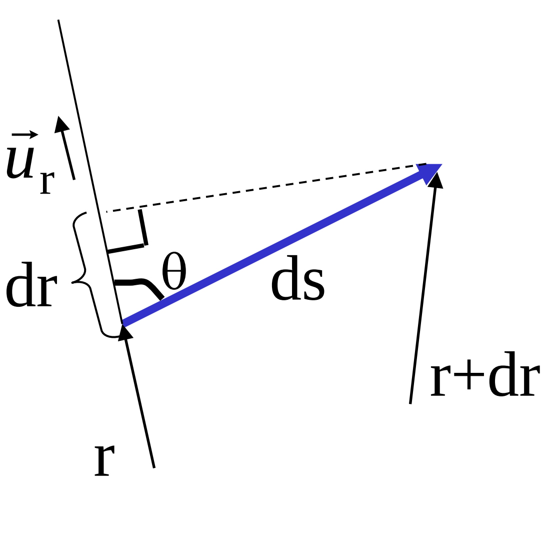
Cominciamo a considerare il campo statico generato da una carica puntiforme ***q***. Per il campo creato da una carica puntiforme ***q*** il lavoro compiuto delle forze del campo durante lo spostamento di una carica ***q'*** di prova da *A* a *B* dipende solo dalla posizione dei punti iniziale e finale:

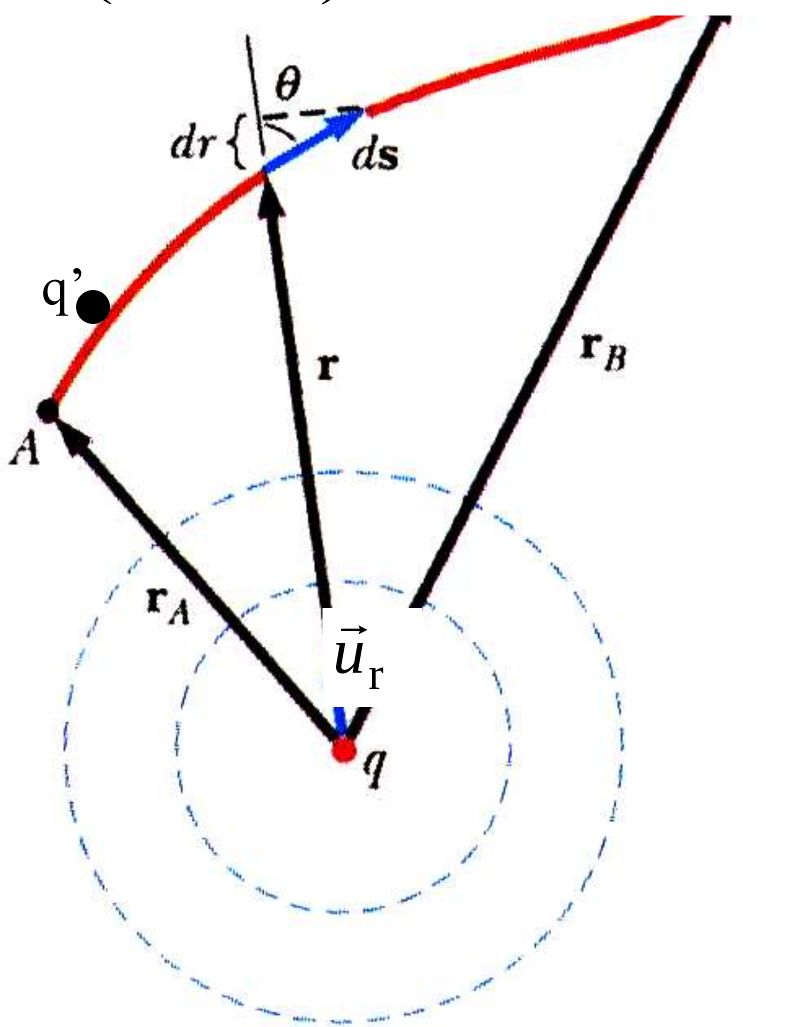
$$L = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_o} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\vec{u}_r \cdot d\vec{s}}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_o} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\cos\vartheta}{r^2} ds$$

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_o} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

B

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_r}$$





Quindi per il campo elettrico ***E*** generato da una carica puntiforme ***q*** abbiamo dimostrato che il lavoro compiuto dal campo elettrico durante lo spostamento di una carica ***q'*** da **A** a **B** è indipendente dal percorso e vale:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q' \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) =$$

$$= -\left(E_{P,B} - E_{P,A}\right) = -[\mathrm{var}.en.pot.]$$

$$\boxed{E_{P,B} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_B}, E_{P,A} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_A}}$$

Definiamo la differenza di potenziale tra A e B:

$$\frac{E_{P,B} - E_{P,A}}{q'} = V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Possiamo generalizzare la relazione potenziale - campo elettrico: $\frac{dL}{q'} = \vec{E} \cdot d\vec{s} = -dV$

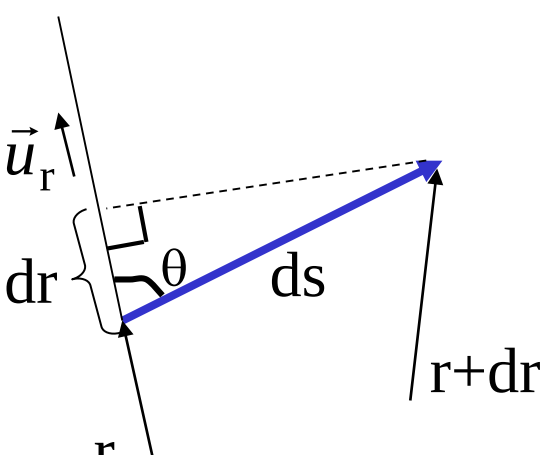
L'unità di misura del potenziale è nel S.I. il VOLT **V= J/C**

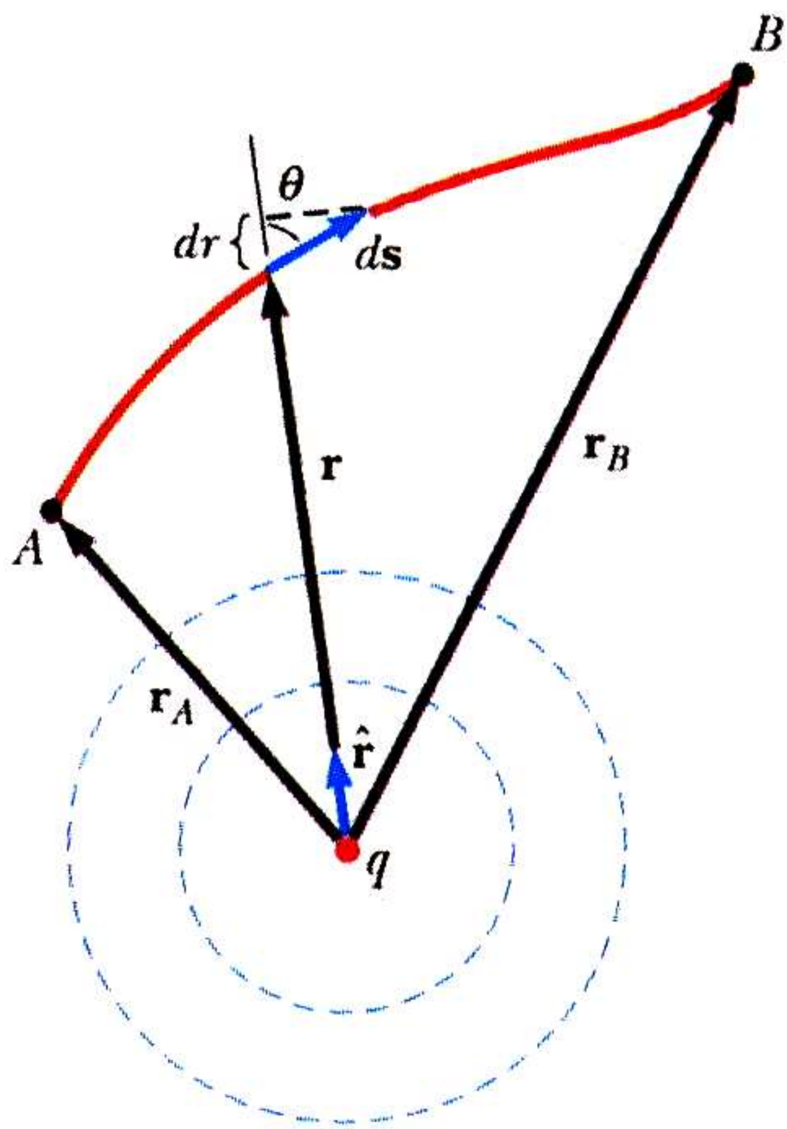
L'unità di misura del campo elettrico **[E]=V/m (equival. a N/C)**

Potenziale di una carica puntiforme *q*

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} + \text{costante}$$





Potenziale di una carica puntiforme *q*

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} + \text{costante}$$

il potenziale è noto a meno di una costante, di solito si sceglie arbitrariamente il suo valore in un punto.
Ad esempio: si pone **V=0** per **r** infinito

così:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

Il **POTENZIALE** ***V*** nel punto ***P*** assume quindi il significato di LAVORO (compiuto dal campo elettrico) NECESSARIO PER PORTARE UNA CARICA UNITARIA POSITIVA DAL PUNTO ***P*** DISTANTE $\boldsymbol{r_P}$ DALLA CARICA SORGENTE ***q*** ALL' **INFINITO**

Potenziale di una distribuzione di carica

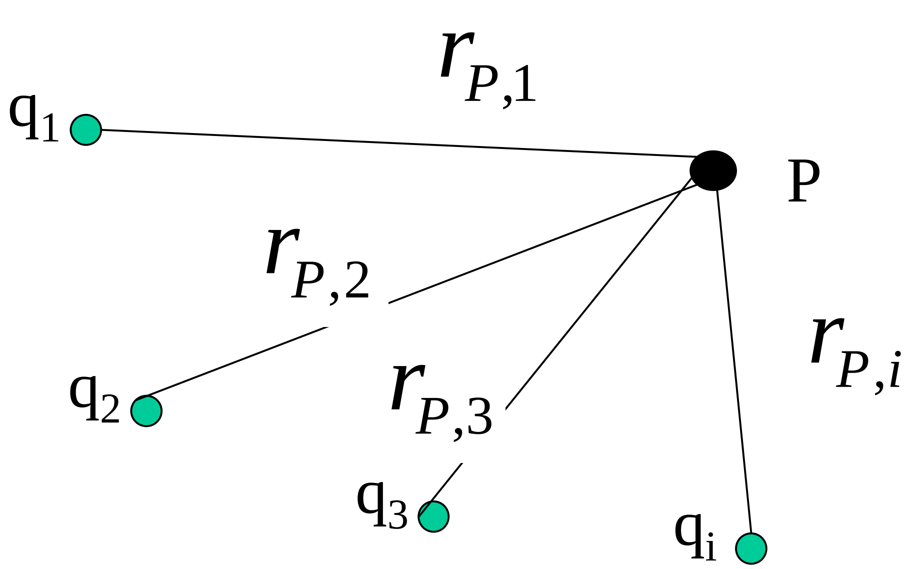
<u>DISTRIBUZIONE DISCRETA</u>:

avendo ***N*** cariche q_i i=1,2,…,N ognuna delle quali genera un potenziale V_i in ***P***

$$V_i(P) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_o r_{P,i}}$$

il principio di sovrapposizione degli affetti assicura che il Potenziale totale del sistema di cariche vale

$$V(P) = \sum_{i=1}^{N} V_i(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_{P,i}}$$



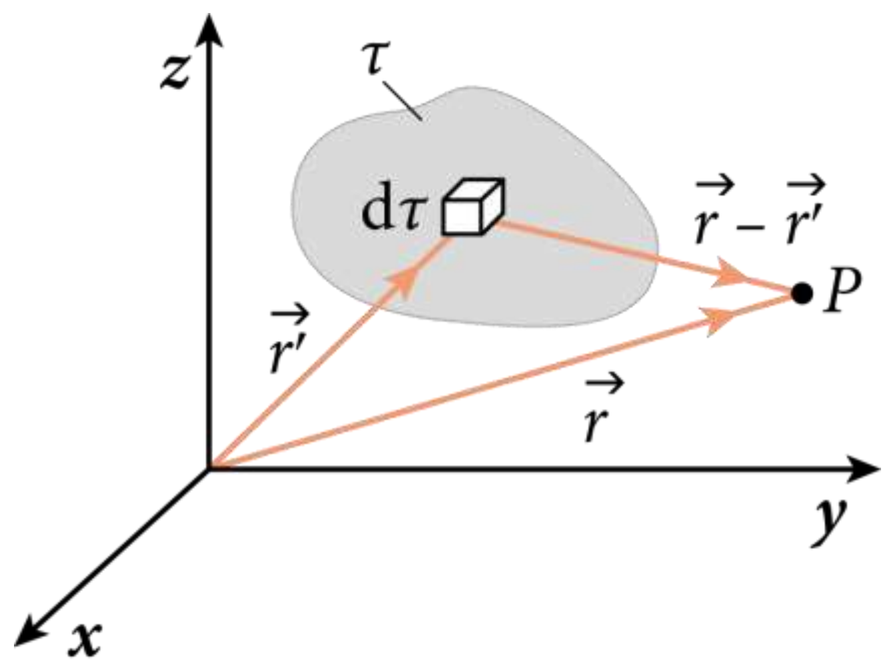
<u>DISTRIBUZIONE CONTINUA</u>:

avendo una carica ***Q*** continua, il potenziale **τ** in ***P*** può essere ottenuto scomponendo ***Q*** in tanti volumetti ***d* τ** di carica ***dq*** e sommando i potenziali delle infinitesime cariche puntiformi:

$$dV(P) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$$

Potenziale di una distribuzione continua di carica con densità ρ

$$\rho = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{d}\tau}$$



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{\rho}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} d\tau + \text{ costante}$$

<u>Per un CAMPO ELETTRICO QUALSIASI</u>

$\vec{E}(P)=\vec{E}(x,y,z)$

Il potenziale elettrostatico è definito a partire dal lavoro per unità di carica fatto dal campo

$$L = \int q' \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q' \Delta V$$

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$dV = -E_s \cdot ds$$

Con E_S la componente del campo in direzione $d\vec{s}$ quindi in coordinate cartesiane:

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right] = -\vec{\nabla} V$$

La differenza di potenziale tra due punti è proporzionale al lavoro fatto dalle forze del campo per spostare una carica di prova da un punto all’altro

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\frac{L_{AB}}{q'}$$

Esiste un’analoga relazione tra Forza elettr. ed Energia potenziale

$$L = \int q' \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\Delta E_P$$

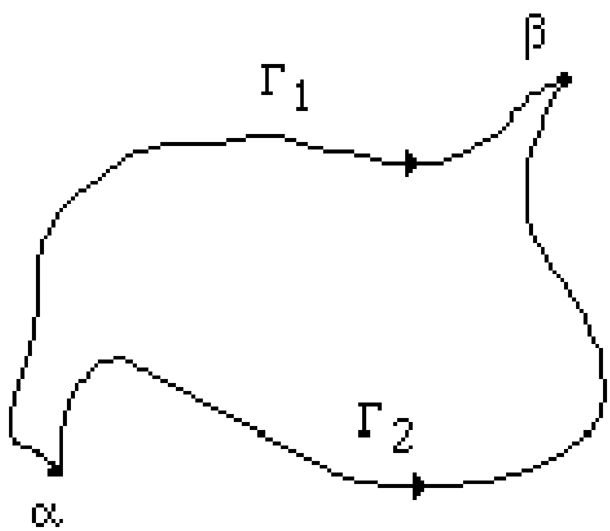
$$\vec{F} = -\left[\frac{\partial E_P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z} \vec{k} \right] = -\vec{\nabla} E_P$$

La differenza di energia potenziale tra due punti è pari al lavoro fatto dalle forze del campo per spostare una carica di prova da un punto all’altro

$$\Delta E_{P(AB)} = E_{P(B)} - E_{P(A)} = -L_{AB}$$

Il campo elettrostatico è conservativo

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



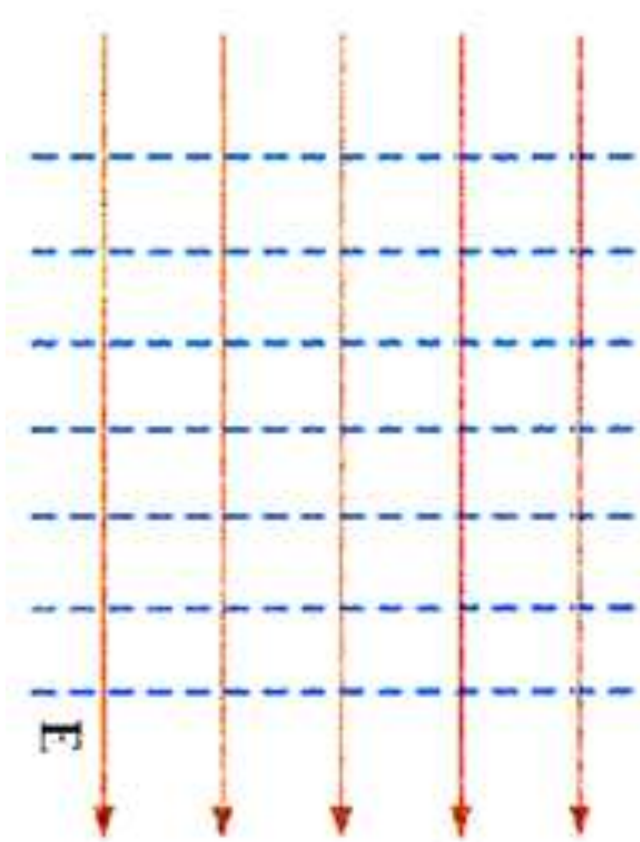
LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

sono caratterizzate dallo stesso potenziale elettrico in ogni punto;
quindi dalla equazione

V(P)= costante

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Le superfici equipotenziali sono in ogni punto perpendicolari alle linee di forza del campo elettrico



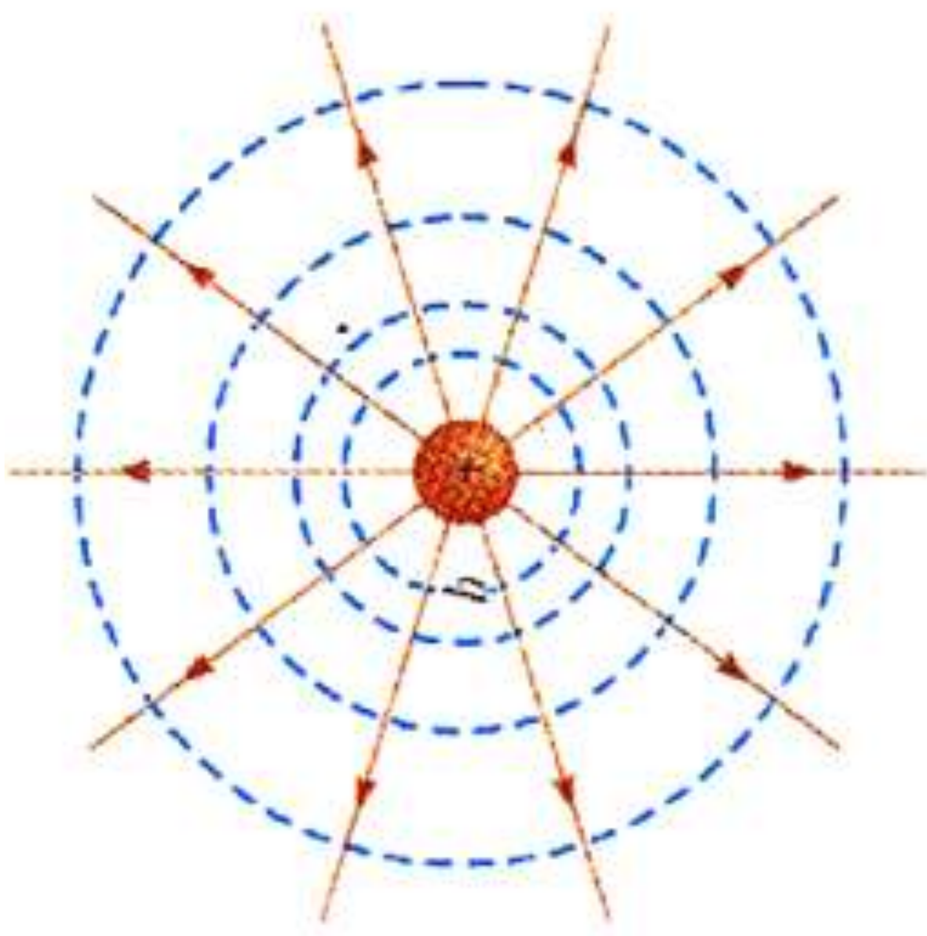
LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

sono caratterizzate dallo stesso potenziale elettrico in ogni punto;
quindi dalla equazione

V(P)= costante

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Le superfici equipotenziali sono in ogni punto perpendicolari alle linee di forza del campo elettrico



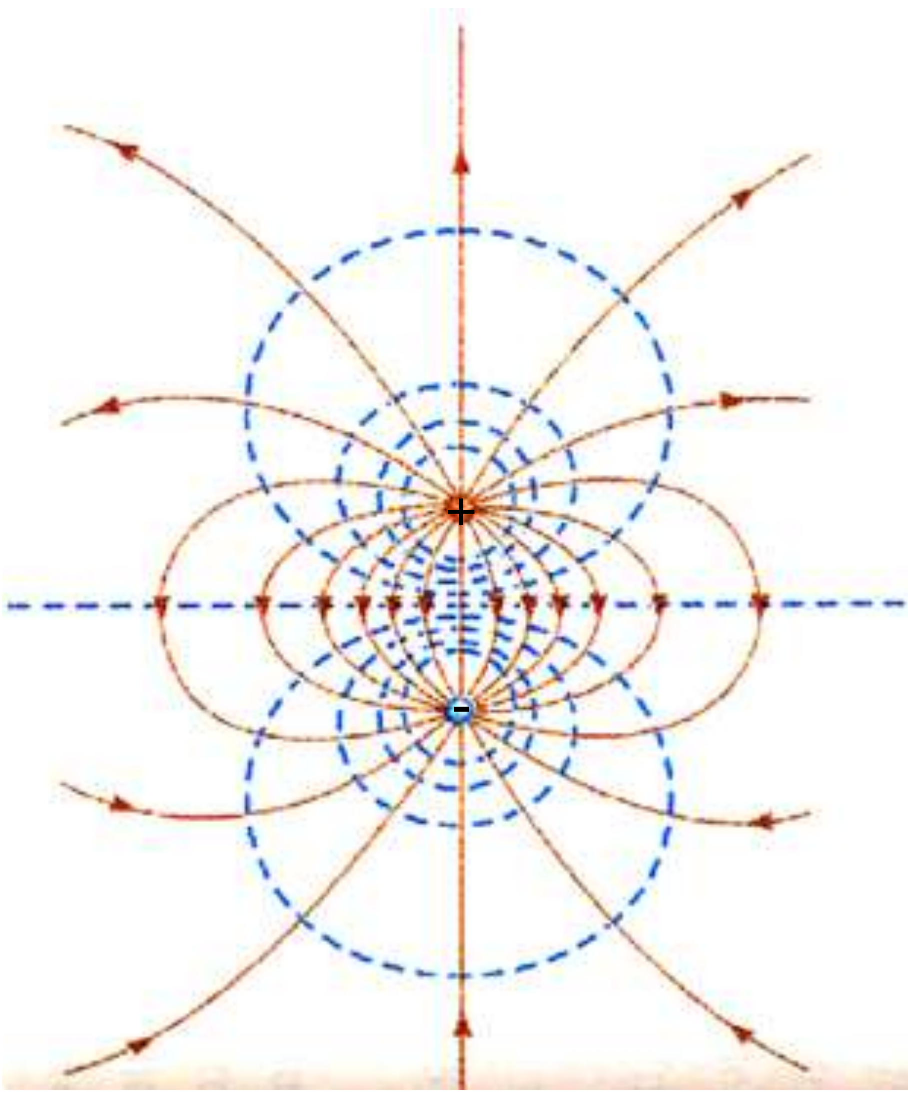
LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

sono caratterizzate dallo stesso potenziale elettrico in ogni punto;
quindi dalla equazione

V(P)= costante

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Le superfici equipotenziali sono in ogni punto perpendicolari alle linee di forza del campo elettrico



L'operatore ∇

Per trasformare le equazioni di Maxwell in una forma differenziale dobbiamo approfondire la nostra conoscenza dei metodi vettoriali e, in particolare, acquistare una certa familiarità con l'operatore ∇.

Nel par. 30-9 si è visto come si possono ottenere le componenti del (vettore) campo elettrostatico **E** in un punto qualsiasi mediante derivazione parziale della funzione potenziale scalare $V(x, y, z)$.

Così

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

in modo tale che il campo elettrostatico

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z$$

si possa scrivere nella forma

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right). \tag{A-5}$$

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right). \qquad \text{(A-5)}$$

Possiamo scrivere l'eq. A-5 in forma più sintetica come

$$\mathbf{E} = -\nabla V,$$

dove ∇ (nabla) è un operatore vettoriale definito come

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad \text{(A-6)}$$

Tale operatore è particolarmente utile nella trattazione dei campi scalari e vettoriali.

Dato un generico campo scalare ψ, possiamo costruire un campo vettoriale, chiamato gradiente di ψ e scritto grad ψ o $\nabla\psi$, semplicemente applicando a ψ l'operatore ∇.

Dato un campo vettoriale $\mathbf{U} = U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + U_z\mathbf{k}$ possiamo applicargli l'operatore ∇ in due diversi modi.

Un modo è quello di costruire il prodotto scalare di ∇ e di $\mathbf{U}$, per ottenere il campo scalare chiamato *divergenza* di $\mathbf{U}$ e scritto div $\mathbf{U}$ o $\nabla \cdot \mathbf{U}$. L'altro modo è quello di costruire il prodotto vettore di ∇ e $\mathbf{U}$ per ottenere il campo vettoriale chiamato *rotore* di $\mathbf{U}$ e scritto rot $\mathbf{U}$ o $\nabla \times \mathbf{U}$. Queste operazioni possono essere sintetizzate come segue

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla\psi = \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad \text{(A-7)}$$

$$\text{div } \mathbf{U} \equiv \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \qquad \text{(A-8)}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{U} \equiv \nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{i}&\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + \\ + \mathbf{j}&\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + \\ + \mathbf{k}&\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right). \end{aligned} \qquad \text{(A-9)}$$

Si noti che grad ψ e rot $\mathbf{U}$ sono vettori, mentre div $\mathbf{U}$ è uno scalare. Lo studente può acquistare una certa familiarità con queste operazioni eseguendo i seguenti esercizi: (1) dimostrare che rot (grad ψ) = 0 e (2) dimostrare che div (rot $\mathbf{U}$) = 0.

Un altro operatore frequentemente usato è ∇^2 (nabla quadrato). Esso è definito semplicemente come $\nabla \cdot \nabla$ o, come lo studente può dimostrare dall'eq. A-6.

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Applicando l'operatore ∇^2 a un campo scalare ψ si ottiene

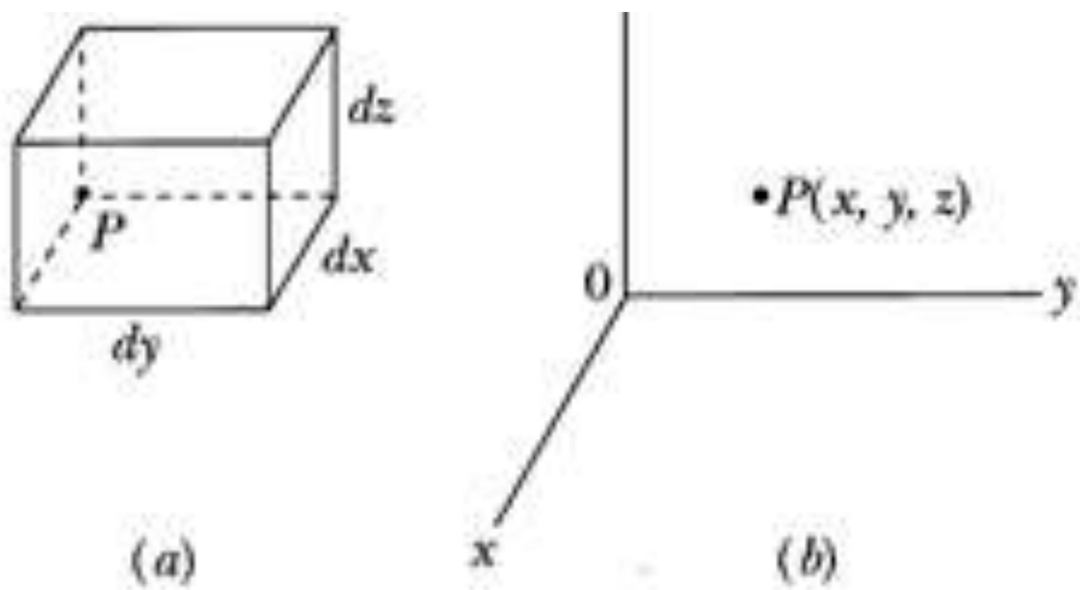
$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \qquad \text{(A-10)}$$

Per un campo vettoriale $\mathbf{U}$ l'operazione $\nabla^2 \mathbf{U}$ è definita come

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \mathbf{i}\, \nabla^2 U_x + \mathbf{j}\, \nabla^2 U_y + \mathbf{k}\, \nabla^2 U_z. \qquad \text{(A-11)}$$

Come esercizio dimostrare che rot (rot $\mathbf{U}$) = $-\nabla^2 \mathbf{U} +$ grad (div $\mathbf{U}$).

Il rotore del campo elettrostatico e formulazione differenziale della conservativita del campo elettrostatico



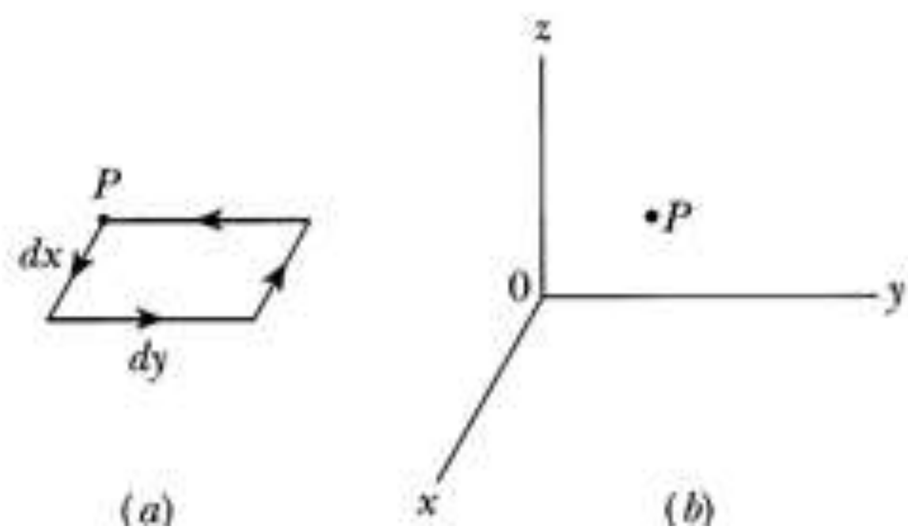
Mettiamoci in un punto P dello spazio in un sistema di riferimento cartesiano.
Consideriamo un parallelepipedo infinitesimo *dx dy dz*.

Applichiamo la relazione valida per il campo elettrostatico

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

sulle 3 facce coordinate.

Cominciamo con la faccia *dx dy*



$$\underset{circ.\gamma(dxdy)}{\left[\vec{E} \cdot d\vec{s}\right]} = \int_{dx} \vec{E} \cdot \vec{i}dx + \int_{dy} \left(\vec{E} + \frac{d\vec{E}}{dx} dx \right) \cdot \vec{j}dy +$$

$$+ \int_{dx} \left(\vec{E} + \frac{d\vec{E}}{dy} dy \right) \cdot \left(-\vec{i}dx\right) + \int_{dy} \vec{E} \cdot \left(-\vec{j}dy\right) = 0$$

$$
{}_{circ.\gamma(dxdy)}\left[\vec{E}\cdot d\vec{s}\right]=\int_{dx}E_x dx+\int_{dy}\left(E_y+\frac{dE_y}{dx}dx\right)dy+
$$

$$
-\int_{dx}\left(E_x+\frac{dE_x}{dy}dy\right)dx-\int_{dy}E_y dy=0
$$

$$
{}_{circ.\gamma(dxdy)}\left[\vec{E}\cdot d\vec{s}\right]=E_x dx+\left(E_y+\frac{dE_y}{dx}dx\right)dy-
$$

$$
-\left(E_x+\frac{dE_x}{dy}dy\right)dx-E_y dy=0
$$

$$
{}_{circ.\gamma(dxdy)}\left[\vec{E}\cdot d\vec{s}\right]=\left(\frac{dE_y}{dx}dx\right)dy-\left(\frac{dE_x}{dy}dy\right)dx=0
$$

$$
{}_{circ.\gamma(dxdy)}\left[\vec{E}\cdot d\vec{s}\right]=\frac{dE_y}{dx}\left(dxdy\right)-\frac{dE_x}{dy}\left(dydx\right)=0
$$

$$
\oint_{\gamma(dxdy)}\vec{E}\cdot d\vec{s}=\int_{dxdy}\left[\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\right]dxdy=0
$$

$$
\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=0
$$

Ripetendo lo stesso calcolo sulle faccia *dx dz*

$$\underset{circ.\gamma(dxdz)}{\left[\vec{E}\cdot d\vec{s}\right]} = \oint_{\gamma(dxdz)} \vec{E}\cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_{dxdz} \left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right] dxdz = 0$$

Ripetendo lo stesso calcolo sulle faccia *dy dz*

$$\underset{circ.\gamma(dydz)}{\left[\vec{E}\cdot d\vec{s}\right]} = \oint_{\gamma(dydz)} \vec{E}\cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_{dydz} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\right] dydz = 0$$

Definendo il vettore rotore di una funzione vettoriale come:

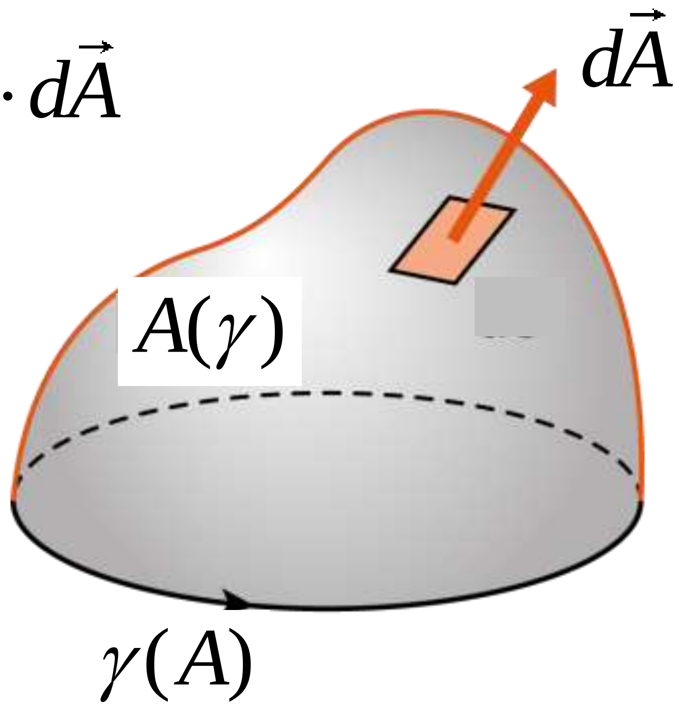
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{k}$$

Possiamo scrivere che l'integrale su una qualsiasi curva infinitesima γ chiusa del vettore campo E è uguale al flusso del vettore rotore del campo E attraverso una superficie infinitesima dA che ha come contorno γ(dA)

$$\oint_{\gamma(dA)} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Estendendo ad una curva chiusa finita γ che contorna una superficie aperta A, la circuitazione del campo elettrico E lungo una curva qualsiasi può essere scritta come

$$\oint_{\gamma(A)} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{A(\gamma)} \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{A}$$



La conservatività di E $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$

implica

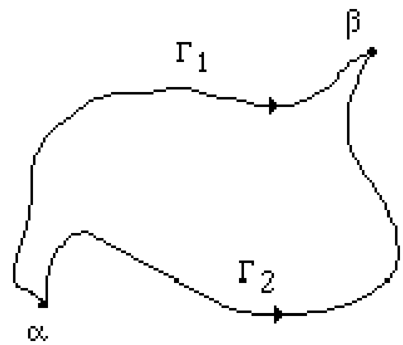
$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{k}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$$

che rappresenta la formulazione differenziale della legge.

Il campo elettrostatico è conservativo

1 $$\oint_{curva-chiusa} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



2 Esiste una funzione della posizione V(P) legata ell'energia che una carica unitaria ha in campo e.s.

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\left(V_B - V_A\right)$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = -dV$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = 0$$

3 $$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

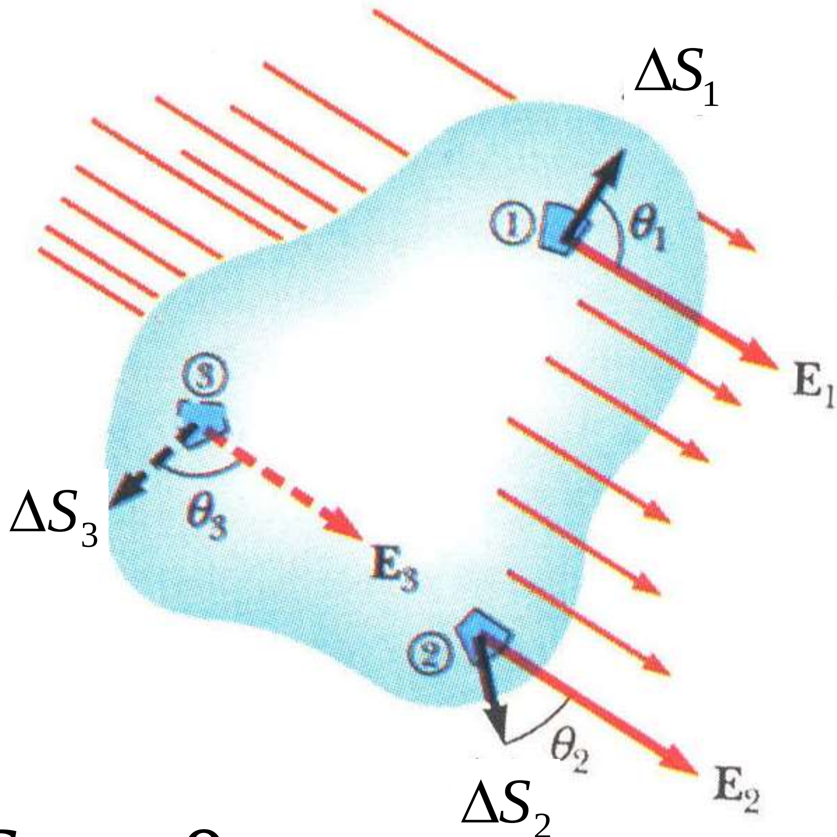
$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = 0$$

LEGGE DI GAUSS

- **Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie;**
- **La Legge di Gauss per il campo elettrico;**
- **Esempi**
- **Legge di Gauss in forma differenziale**
- **Equazione di Poisson**

Flusso del campo elettrico attraverso una superficie

$$\Delta\Phi_i = E_i \Delta S_i \cos\vartheta_i$$



se $\Delta S_i \to 0$

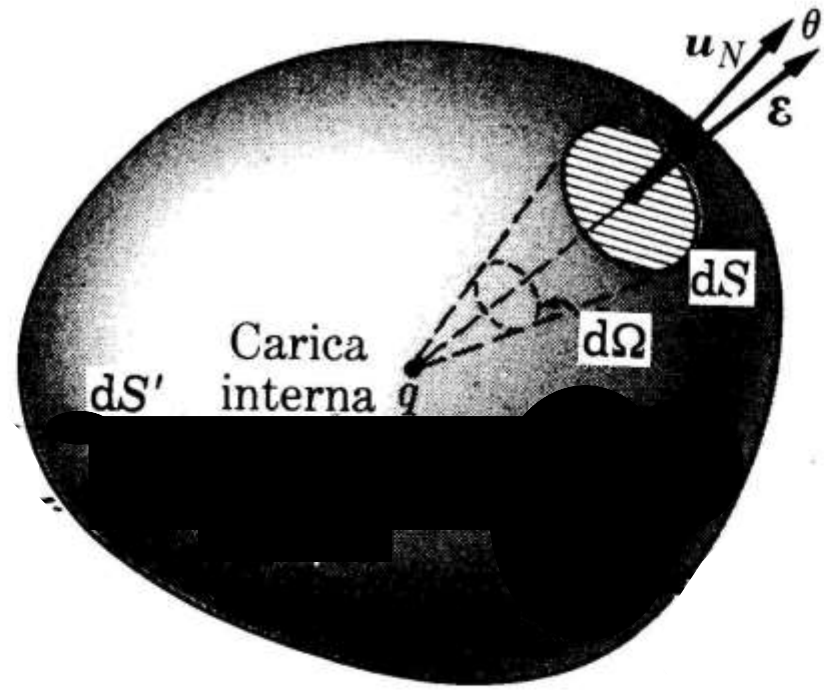
$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS$$

$\vec{u}_n$ è il versore perpendicolare a dS

Sommando su tutta una superficie chiusa:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS$$

Derivazione della Legge di Gauss

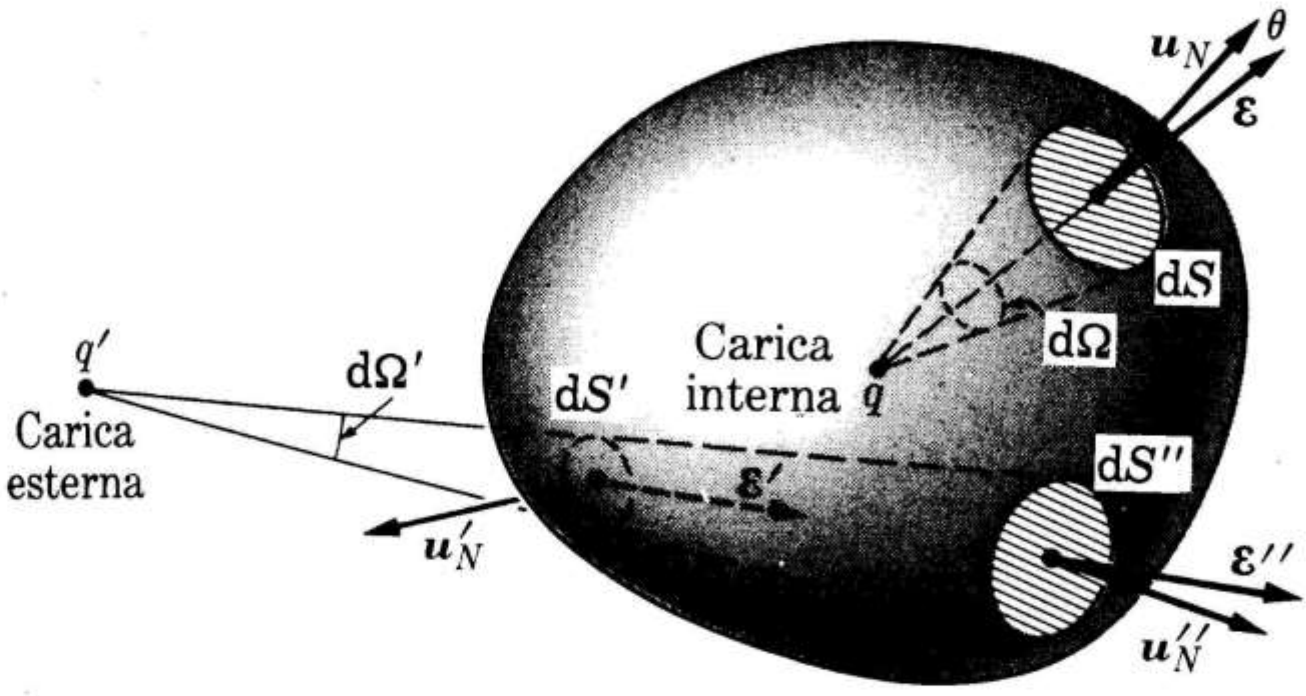


CASO 1) Consideriamo una carica ***q*** all'interno di una superficie chiusa ***S***. Il flusso totale del campo elettrico prodotto da ***q*** attraverso ***S*** vale:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \oint E \cos\theta dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\cos\theta \, dS}{\mathrm{r}^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

perchè $\dfrac{\cos\theta \, dS}{\mathrm{r}^2} = d\Omega$ angolo solido



CASO 2) Consideriamo una carica ***q'*** esterna alla superficie chiusa ***S***.

Il flusso del campo elettrico prodotto da ***q'*** attraverso la superficie **dS'** è uguale in valore assoluto ma di segno opposto al flusso attraverso **d*S"*** perché l'angolo solido è uguale per entrambe le aree e pertanto i flussi si sommano a zero.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

LEGGE DI GAUSS

Una carica interna

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

N cariche interne

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

La Legge di Gauss per il campo elettrico è valida sempre e costituisce una delle

<u>equazioni di Maxwell (la prima equazione)</u>

L'operatore ∇

Per trasformare le equazioni di Maxwell in una forma differenziale dobbiamo approfondire la nostra conoscenza dei metodi vettoriali e, in particolare, acquistare una certa familiarità con l'operatore ∇.

Nel par. 30-9 si è visto come si possono ottenere le componenti del (vettore) campo elettrostatico **E** in un punto qualsiasi mediante derivazione parziale della funzione potenziale scalare $V(x, y, z)$.

Così

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

in modo tale che il campo elettrostatico

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z$$

si possa scrivere nella forma

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right). \qquad \text{(A-5)}$$

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right). \qquad \text{(A-5)}$$

Possiamo scrivere l'eq. A-5 in forma più sintetica come

$$\mathbf{E} = -\nabla V,$$

dove ∇ (nabla) è un operatore vettoriale definito come

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad \text{(A-6)}$$

Tale operatore è particolarmente utile nella trattazione dei campi scalari e vettoriali.

Dato un generico campo scalare ψ, possiamo costruire un campo vettoriale, chiamato gradiente di ψ e scritto grad ψ o $\nabla\psi$, semplicemente applicando a ψ l'operatore ∇.

Dato un campo vettoriale $\mathbf{U} = U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + U_z\mathbf{k}$ possiamo applicargli l'operatore ∇ in due diversi modi.

Un modo è quello di costruire il prodotto scalare di ∇ e di $\mathbf{U}$, per ottenere il campo scalare chiamato *divergenza* di $\mathbf{U}$ e scritto div $\mathbf{U}$ o $\nabla \cdot \mathbf{U}$. L'altro modo è quello di costruire il prodotto vettore di ∇ e $\mathbf{U}$ per ottenere il campo vettoriale chiamato *rotore* di $\mathbf{U}$ e scritto rot $\mathbf{U}$ o $\nabla \times \mathbf{U}$. Queste operazioni possono essere sintetizzate come segue

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla \psi = \mathbf{i}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad \text{(A-7)}$$

$$\text{div } \mathbf{U} \equiv \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \qquad \text{(A-8)}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{U} \equiv \nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + \\ + \mathbf{j}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + \\ + \mathbf{k}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right). \end{aligned} \qquad \text{(A-9)}$$

Si noti che grad ψ e rot $\mathbf{U}$ sono vettori, mentre div $\mathbf{U}$ è uno scalare. Lo studente può acquistare una certa familiarità con queste operazioni eseguendo i seguenti esercizi: (1) dimostrare che rot (grad ψ) $= 0$ e (2) dimostrare che div (rot $\mathbf{U}$) $= 0$.

Un altro operatore frequentemente usato è ∇^2 (nabla quadrato). Esso è definito semplicemente come $\nabla \cdot \nabla$ o, come lo studente può dimostrare dall'eq. A-6.

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Applicando l'operatore ∇^2 a un campo scalare ψ si ottiene

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \qquad \text{(A-10)}$$

Per un campo vettoriale $\mathbf{U}$ l'operazione $\nabla^2 \mathbf{U}$ è definita come

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \mathbf{i}\, \nabla^2 U_x + \mathbf{j}\, \nabla^2 U_y + \mathbf{k}\, \nabla^2 U_z. \qquad \text{(A-11)}$$

Come esercizio dimostrare che rot (rot $\mathbf{U}$) $= -\nabla^2 \mathbf{U} +$ grad (div $\mathbf{U}$).

Equazioni di Maxwell in forma differenziale

In questo paragrafo mostreremo come si possono scrivere le prime due equazioni di Maxwell in forma differenziale (eq. A-1, 2). Applichiamo l'eq. A-1 a un elemento infinitesimo di volume a forma di parallelepipedo rettangolo contenente un punto P nel quale (e nelle vicinanze) esista un campo elettrico (fig. A-1*a*). Il

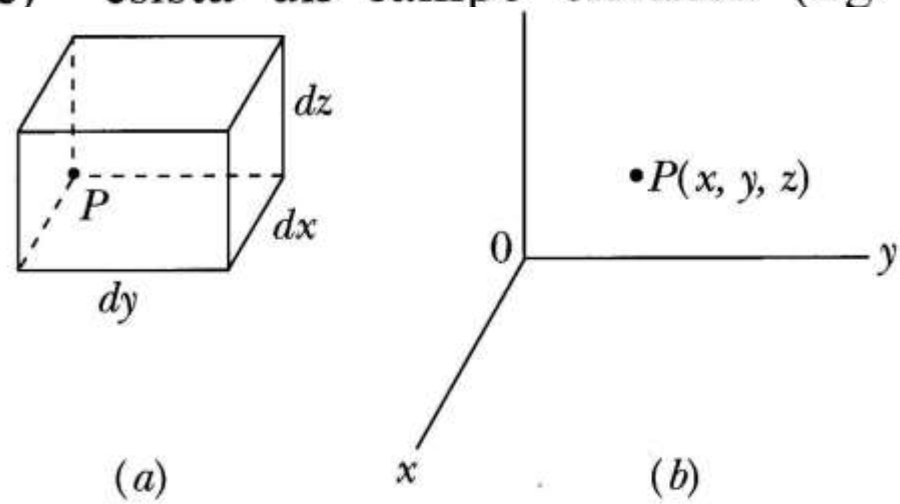


Figura A-1

punto P è situato in x, y, z nel sistema di riferimento della fig. A-1*b* e i lati del parallelepipedo hanno lunghezza dx, dy, dz.

Possiamo scrivere il vettore superficie della faccia posteriore del parallelepipedo come $d\mathbf{A} = -\mathbf{i}\, dy\, dz$. Il segno meno è dovuto al fatto che $d\mathbf{A}$ è scelto orientato come la normale *verso l'esterno*, che è descritta dal versore $-\mathbf{i}$. Per la faccia anteriore avremo: $d\mathbf{A} = +\mathbf{i}\, dy\, dz$.

Se il campo elettrico sulla faccia posteriore è $\mathbf{E}$, quello sulla faccia anteriore, che si trova a distanza dx da quella posteriore, sarà $\mathbf{E} + (\partial \mathbf{E}/\partial x)dx$, dove il secondo termine rappresenta la variazione di $\mathbf{E}$ associata alla variazione dx di x.

Il flusso attraverso tutta la superficie del parallelepipedo è $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ e il contributo delle sole due facce a questo flusso è:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{E})(-\mathbf{i}\, dy\, dz) + \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} dx\right)(+\mathbf{i}\, dy\, dz) &= \\
&= dx\, dy\, dz \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \cdot \mathbf{i}\right) = \\
&= dx\, dy\, dz \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}) = dx\, dy\, dz \frac{\partial E_x}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

Essendovi da parte delle altre quattro facce un analogo contributo, il flusso elettrico totale è

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = dx\, dy\, dz \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right).$$

Dall'eq. A-8 possiamo scrivere

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = dx\, dy\, dz \operatorname{div} \mathbf{E}. \tag{A-12}$$

Ora il secondo membro dell'eq. A-1, che dà la carica racchiusa nella superficie, può essere scritto in generale come $q = \int \varrho \, dV$ e, in particolare, per l'elemento infinitesimo di volume centrato in P, come

$$q = \varrho \, dx \, dy \, dz, \tag{A-13}$$

dove ϱ è la densità volumica di carica in P. Sostituendo le eqq. A-12 e 13 nell'eq. A-1 ed eliminando il fat-

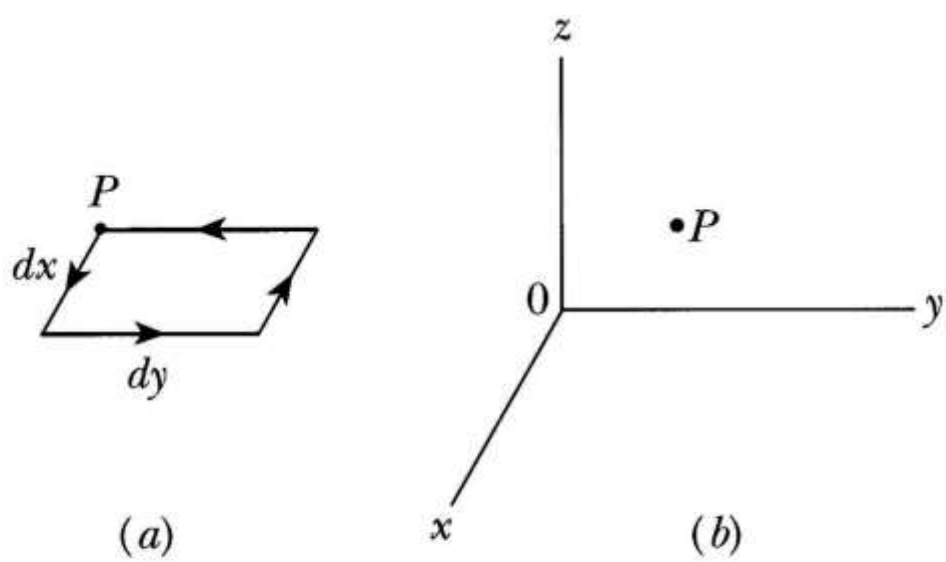


Figura A-2

tore comune $dx \, dy \, dz$ abbiamo alla fine

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho, \tag{A-14}$$

che rappresenta la prima equazione di Maxwell (eq. A-1) in forma differenziale.

Legge di Gauss in forma differenziale

Sia ρ la densità volumica di carica nel punto
P=(x,y,z)

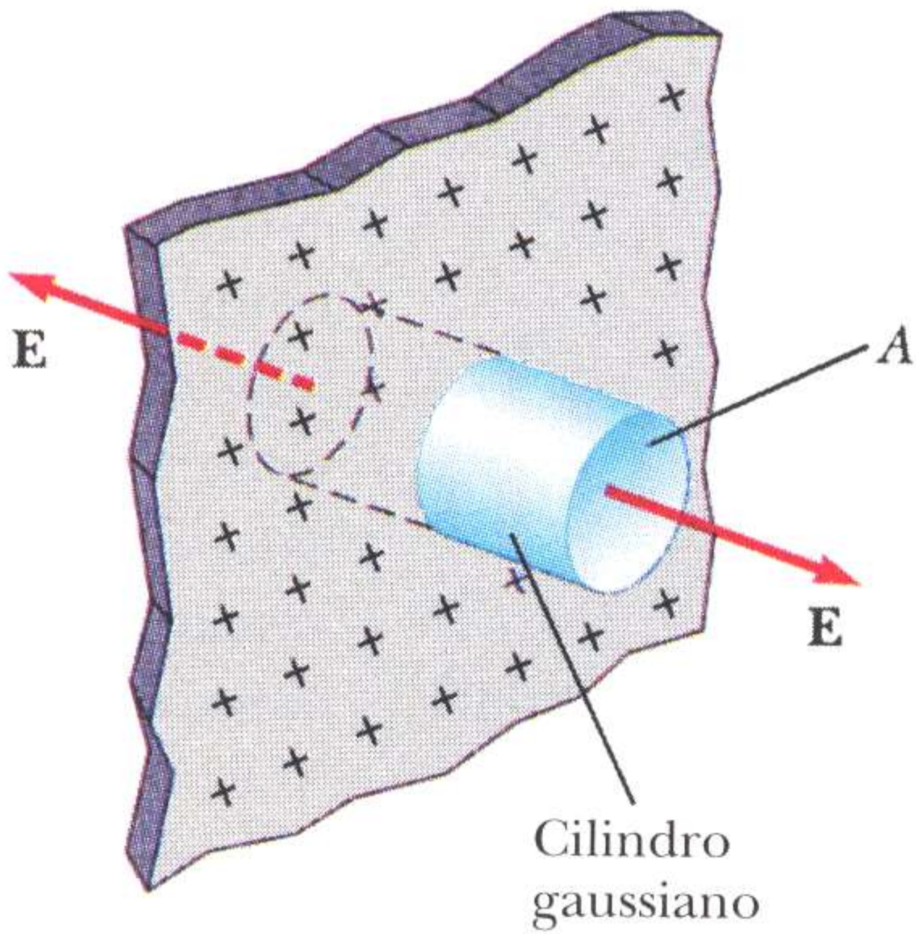
$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_o}=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

Essendo V il volume delimitato dalla superficie
chiusa S, integrando:

$$\int_{vol-V}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}dV=\int_{vol-V}\frac{\rho}{\varepsilon_o}dV=\oint_{S-chiusa}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

TEOREMA DI GUASS o DELLA DIVERGENZA

Campo di una distribuzione di carica piana uniforme indefinita

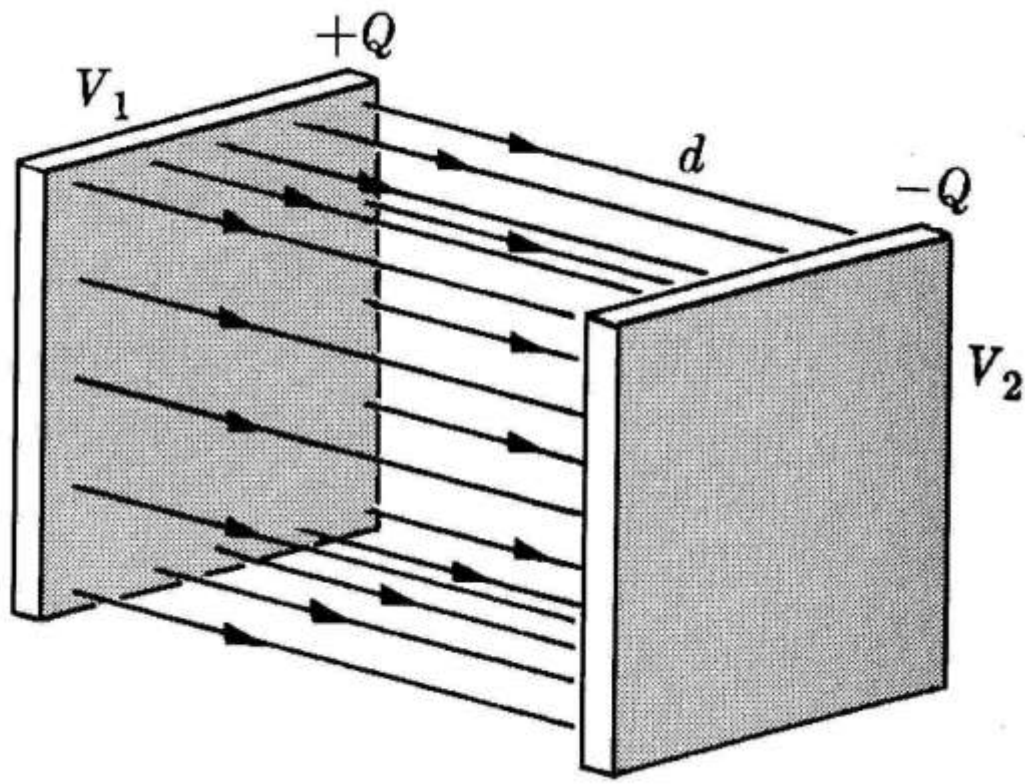


Sia σ la densità superficiale di carica

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Campo generato da due piani infiniti uniformemente carichi (con segno opposto)

Siano: ***Q*** la carica sui piani
S l'area dei piani



Sia **σ** la densità superficiale di carica
(+ **σ** piano a sinistra, - **σ** piano a destra):

σ=Q/S

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

Equazione di Poisson

La conservatività del campo elettrostatico implica che

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{k}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V$$

Partendo dalla Legge di Gauss in formato differenziale

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_o}=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

Otteniamo

$$\frac{\rho}{\varepsilon_o} = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} V \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon_o} = -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

$$-\frac{\rho}{\varepsilon_o} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 V = \Delta V(x, y, z)$$

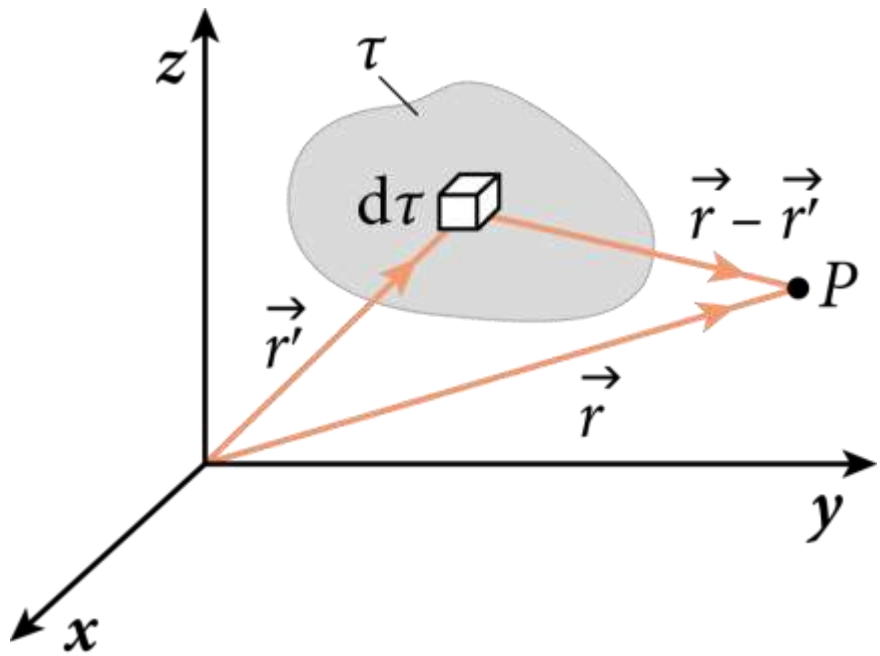
L’equazione

$$\nabla^2 V = \Delta V(x, y, z) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

Prende il nome di equazione di Poisson

La sua soluzione è nota.
Infatti sappiamo che una distribuzione di carica genera in ogni punto dello spazio un potenziale

$$\rho = \frac{dq}{d\tau}$$



$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{\rho}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau$$