INTEGRALI DI SUPERFICIE

Sia $P : (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata dove Ω è una regione di $\mathbb{R}^2$.

Supponiamo P iniettiva su $\mathring{\Omega}$. Sia $S = \operatorname{Im} P$

Per quello detto a Lezione 25 pag. 18-23 e a Lezione 26, se f è una funzione (continua) su S, $f : S \to \mathbb{R}$ (tale f di solito è la restrizione ad S di una funzione definita su $\mathbb{R}^3$), possiamo definire come <u>integrale di superficie</u> della funzione f il seguente

$$\iint_\Omega f(P(u,v)) \, \|P_u \times P_v\| \, du \, dv = \iint_S f \, dS = \int_S f$$

Questa è una scrittura che si trova spesso

Π

Nel caso $f = 1$ ~~allora~~ l'integrale di pagina precedente coincide con l'area della superficie.

<u>OSSERVAZIONE</u>:

Non sempre è facile / possibile trovare un'unica parametrizzazione la cui immagine è la superficie che vogliamo studiare.

Per tali superfici possiamo considerare più parametrizzazioni, per esempio P_1 e P_2, tali che $S = P_1(\Omega_1) \cup P_2(\Omega_2)$ e $P_1(\Omega_1) \cap P_2(\Omega_2)$ un insieme di "misura nulla".

TEOREMA GAUSS - BONNET

Sia S una superfice compatta senza bordo
Sia K la sua curvatura di Gauss (che ricordiamo essere una funzione su S a valori reali)

Allora

$$\int_S K \, dS = 2\pi \chi(S)$$

dove $\chi(S)$ è la caratteristica di Eulero di S.

Cos'è la caratteristica di Eulero?

PARTIAMO dai Poliedri:

Sia Q un poliedro (un tetraedro, un cubo, ... un icosaedro)

allora

$$\chi(Q) = V + F - S$$

dove

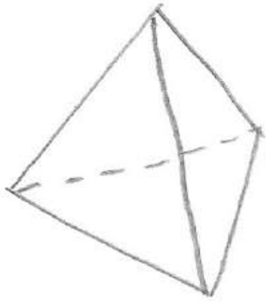
$V =$ numero di vertici

$F =$ numero di Facce

$S =$ numero di spigoli (lati)

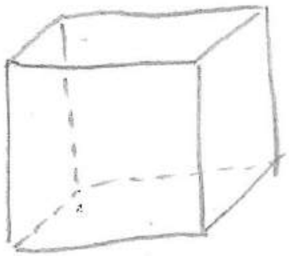
Esempi :

Tetraedro



$$\chi(\text{Tetraedro}) = V + F - S = 4 + 4 - 6 = 2$$

CUBO



$$\chi(\text{cubo}) = V + F - S = 8 + 6 - 12 = 2$$

$\vdots$

In realtà tutti i poliedri convessi
hanno caratteristica di Eulero <u>uguale a 2</u>

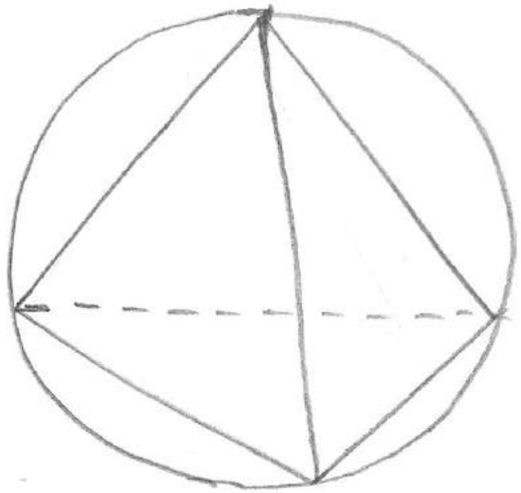
Questo lo si può vedere in virtù del seguente

<u>TEOREMA</u> : La caratteristica di Eulero è un
<u>invariante topologico</u> .

Infatti poiché il Tetraedro e il cubo sono
omeomorfi hanno la stessa caratteristica di Eulero

In realtà
<u>Tutte le superfici omeomorfe al tetraedro
hanno caratteristica di Eulero uguale a 2</u>

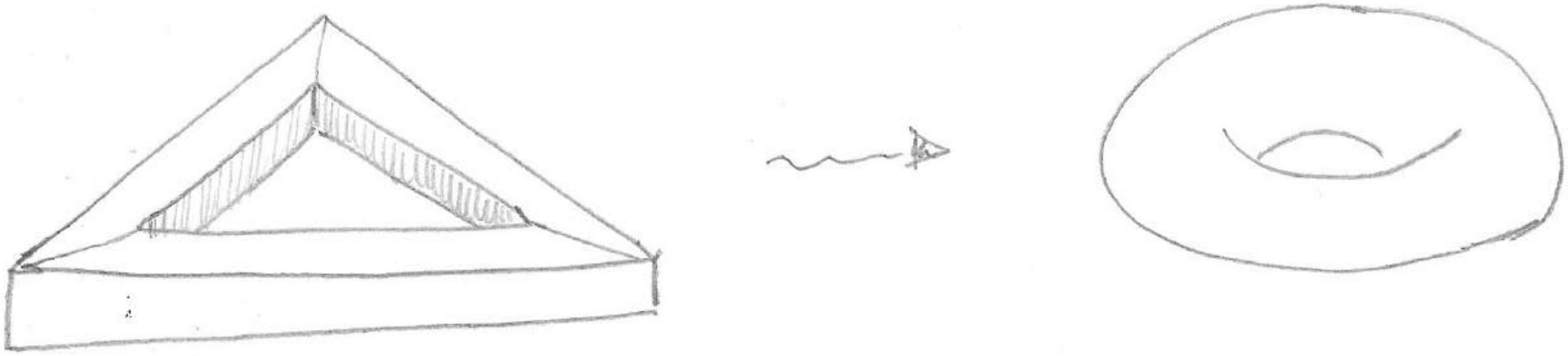
Per esempio la sfera ha caratteristica di Eulero uguale a 2 essendo omeomorfa al tetraedro



Infatti possiamo deformare il tetraedro in modo continuo fino ad ottenere la sfera.

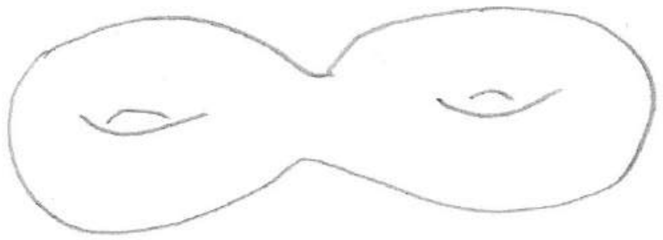
E il toro? Dobbiamo trovare un "poliedro non convesso", in questo caso con un buco al centro, che vada bene. Per esempio l'edificio del Pentagono

Ma ne esistono di più semplici

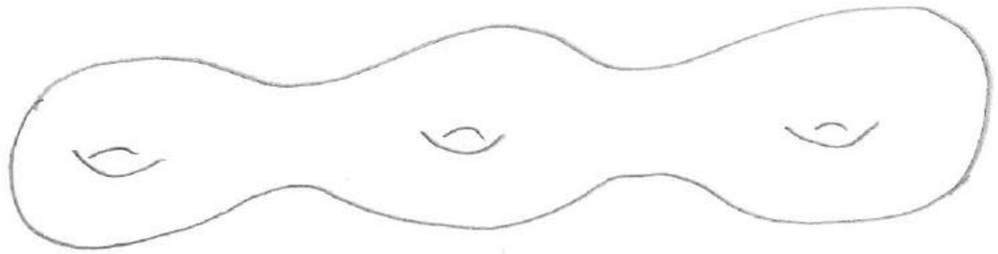


Provate a fare il conto: il toro ha caratteristica di Eulero uguale a zero

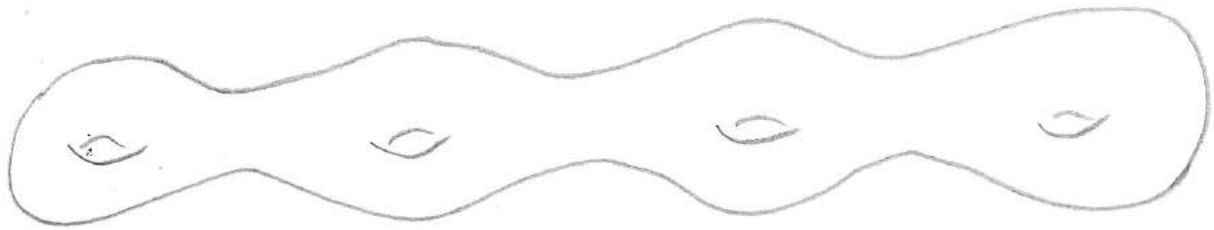
Si può dimostrare che



ha $\chi = -2$



ha $\chi = -4$



ha $\chi = -6$

e così via

Ex: Sia S la sfera di raggio r

Calcolare $\int_S K \, dS$ dove K è la curvatura Gaussiana di S

Una parametrizzazione della sfera di raggio r e centro l'origine è

$$P(u,v) = \left(r \operatorname{sen}(u)\cos(v),\ r \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v),\ r\cos(u)\right) \quad (u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

Facendo i conti $K = \frac{1}{r^2}$

Quindi

$$\int_S K \, dS = \int_S \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{r^2}\int_S dS = \frac{1}{r^2} \cdot \text{Area di } S =$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi = 2\pi \cdot 2$$ in accordo col teorema di Gauss-Bonnet

<u>Notare</u> : Nell'esercizio precedente potevamo avere anche un ellissoide. <u>Il risultato non sarebbe cambiato</u>

Una parametrizzazione dell'ellissoide è

$$P(u,v) = \left(a \operatorname{sen}(u)\cos(v),\ b \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v),\ c\cos(u)\right)$$

$$(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

Diciamo che i conti per arrivare alla curvatura Gaussiana sono un po' lunghi...

già la 1^a forma fondamentale è un po' lunga ...

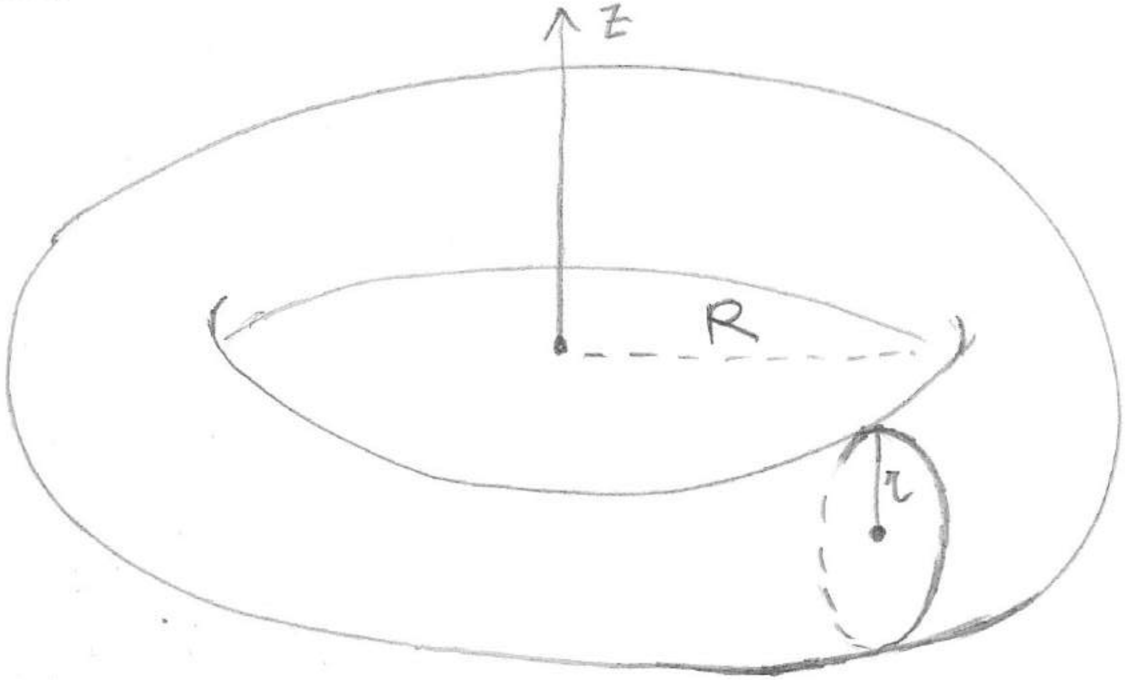
Ex: Calcolare $\int_S K \, dS$ dove S è il toro

Una parametrizzazione del toro di centro l'origine è

$$P(u,v) = \Big((R + r\cos(u))\cos(v) \,,\, (R + r\cos(u))\sin(v) \,,\, r \operatorname{sen}(u) \Big)$$

(L'asse di simmetria è l'asse z)

$(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$



Possiamo supporre $R > r > 0$ per semplicità

La prima forma fondamentale è

$$g_S = r^2\,du^2 + \left(R + r\cos(u)\right)^2 dv^2$$

mentre, dopo un po' di conti,

$$K = \frac{\cos(u)}{r\left(R + r\cos(u)\right)}$$

Quindi

$$\int_S K\,dS = \iint_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)} \frac{\cos(u)}{r\left(R+r\cos(u)\right)} \cdot \overbrace{r\left(R + r\cos(u)\right)}^{\sqrt{\det(g_S)} \,=\, \|P_u \times P_v\|}\,du\,dv$$

$$= \iint_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)} \cos(u)\,du\,dv = 0$$

Ex: Nelle stesse ipotesi dell'esercizio di pag. 12, calcolare l'area del toro.

Abbiamo visto che la prima forma fondamentale è

$$g_S = r^2\,du^2 + \left(R + r\cos(u)\right)^2 dv^2$$

quindi $\sqrt{\det g_S} = r\left(R + r\cos(u)\right)$

Abbiamo che

$$\text{Area Toro} = \int_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)} r\left(R + r\cos(u)\right) du\,dv = \int_0^{2\pi} r\left(Ru + r\,\mathrm{sen}(u)\right)\Big]_0^{2\pi} dv$$

$$= 2\pi R r\, v\Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2 R r$$