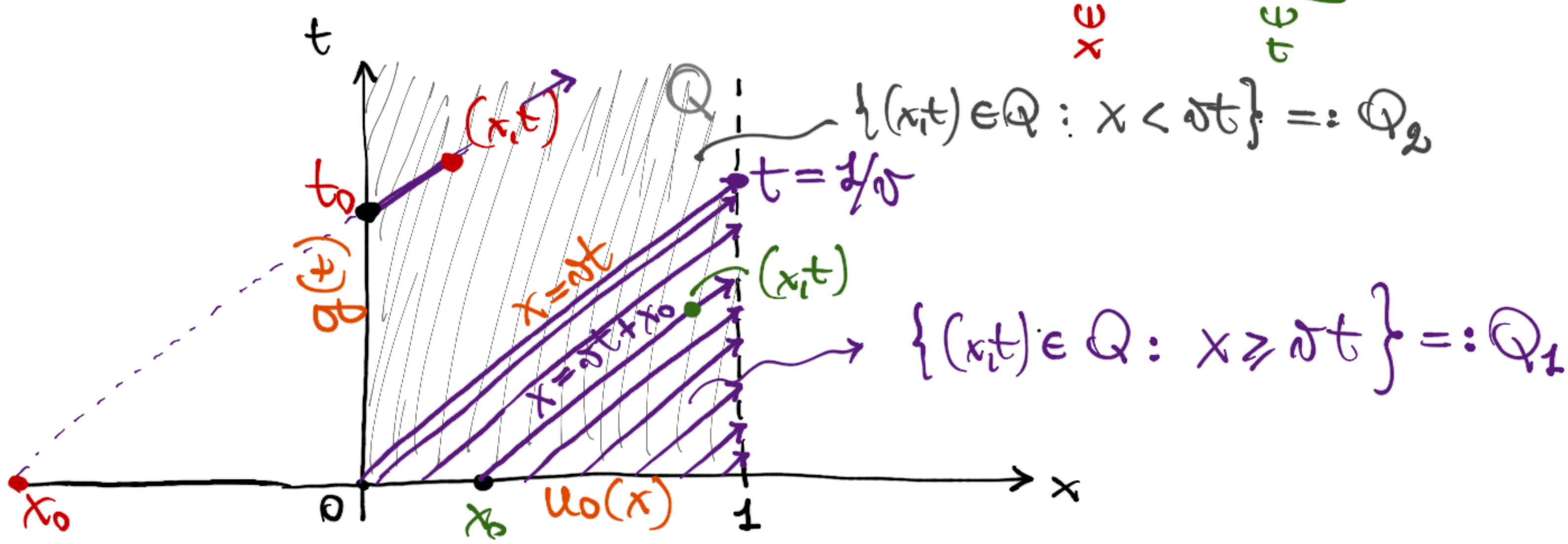
# Equazione del trasporto su un dominio spaziale limitato

$n = 1$, $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $v > 0$ velocità di trasporto costante

$$\partial_t u + v \partial_x u = 0 \quad \text{in} \quad Q = \underbrace{(0,1)}_{\ni x} \times \underbrace{(0,+\infty)}_{\ni t}$$




Usiamo il metodo delle caratteristiche per trovare $u$:

- equazione della generica caratteristica:

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x = vt + x_0, \qquad x_0 \in [0,1]$$

- soluzione costante sulle caratteristiche:

$$u(x,t) = u_0(x_0) = u_0(x - vt) \quad \text{per } (x,t) \in Q_1$$

- per determinare $u$ anche nella zona in cui $x < vt$ è necessario prescrivere un dato al bordo per $x = 0$:

$$u(0,t) = g(t) \quad \text{per } t > 0$$

dove $g$ è una funzione nota detta dato (o condizione) al bordo.

Allora in $Q_2$ avremo:

$$u(x,t) = u(0,t_0) = g(t_0)$$

essendo $t_0 > 0$ l'istante in cui la caratteristica passante per $(x,t) \in Q_2$ interseca il bordo $x=0$.

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x = v(t-t_0) \Rightarrow t_0 = t - \frac{x}{v}$$

Quindi in $Q_2$ la soluzione si scrive:

$$u(x,t) = g\left(t-\frac{x}{v}\right).$$

In definitiva, la soluzione $u$ è data da:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-vt) & \text{per } (x,t)\in Q_1 \\ g\left(t-\frac{x}{v}\right) & \text{per } (x,t)\in Q_2. \end{cases}$$

Il problema che questa $u$ risolve è il seguente problema ai valori iniziale e al bordo per l'equazione del traspor-to:

$$\begin{cases} \partial_t u + \vartheta \partial_x u = 0 & \text{in } Q \\ u = u_0 & \text{per } t = 0 \\ u = g & \text{per } x = 0 . \end{cases}$$

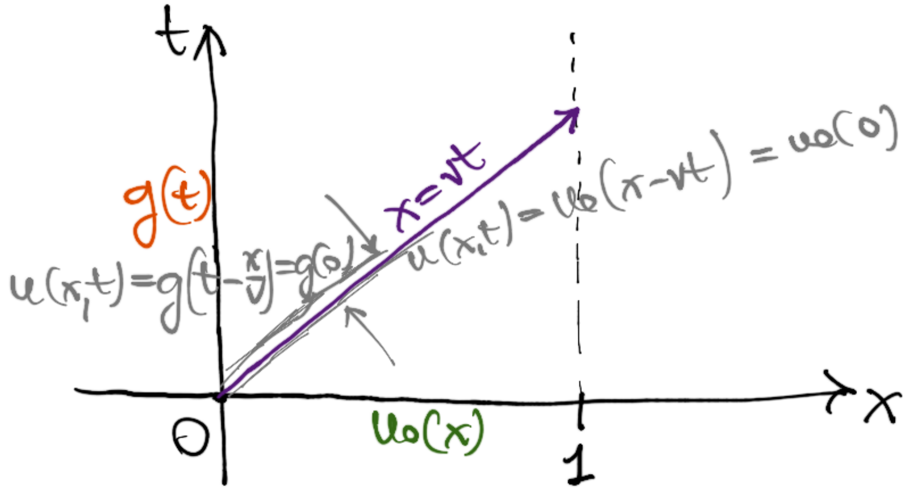
<u>Oss.</u> Il dato al bordo non si prescrive su tutto $\partial\Omega$ ma solo su quella porzione di $\partial\Omega$, detta bordo di afflusso, dalla quale le caratteristiche entrano in $Q$. Sulla restante porzione di $\partial\Omega$, detta bordo di deflusso, la soluzione è automaticamente determinata per trasporto del dato iniziale $u_0$ e del dato al bordo $g$.

I bordi di afflusso e deflusso dipendono dal segno di $\vartheta$.

Nel nostro caso, con $\vartheta > 0$ abbiamo:

- bordo di afflusso: $\{x=0\}$
- bordo di deflusso: $\{x=1\}$
- sul bordo di deflusso: $u(1,t) = \begin{cases} u_0(1-\vartheta t) & \text{per } t \le \frac{1}{\vartheta} \\ g\left(t-\frac{1}{\vartheta}\right) & \text{per } t > \frac{1}{\vartheta} . \end{cases}$

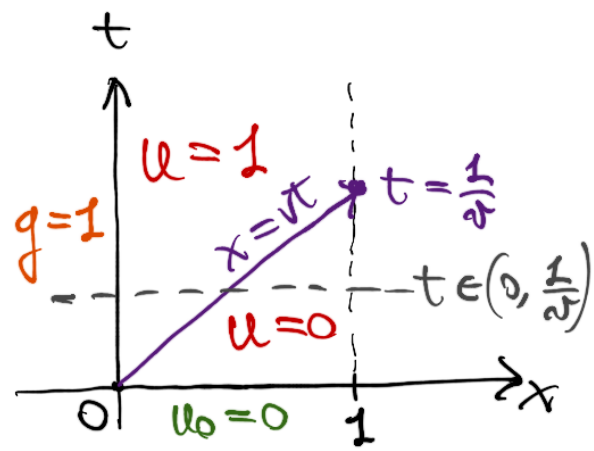
<u>Cosa succede attraverso la caratteristica $x = \vartheta t$ ?</u>



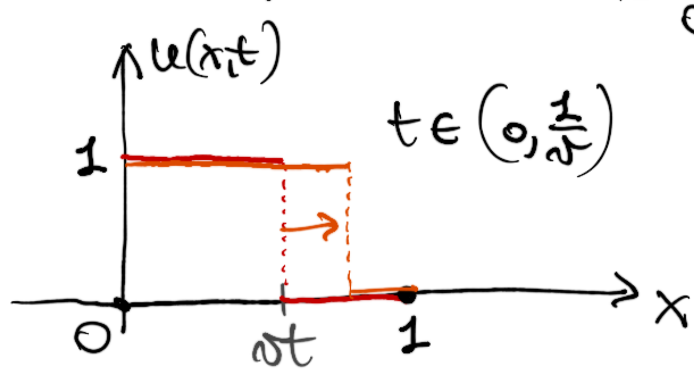

Se $u_0(0) \neq g(0)$ la $u$ è discontinua attraverso la caratteristica $x = vt$.

Esempio

$$\begin{cases} \partial_t u + v\,\partial_x u = 0 & \text{in } (0,1)\times(0,+\infty) \quad \text{con } v>0 \\ u = \underbrace{0}_{u_0} & \text{per } t = 0 \\ u = \underbrace{1}_{g} & \text{per } x = 0 \end{cases}$$




$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \geq vt \\ 1 & \text{per } x < vt \end{cases}$$

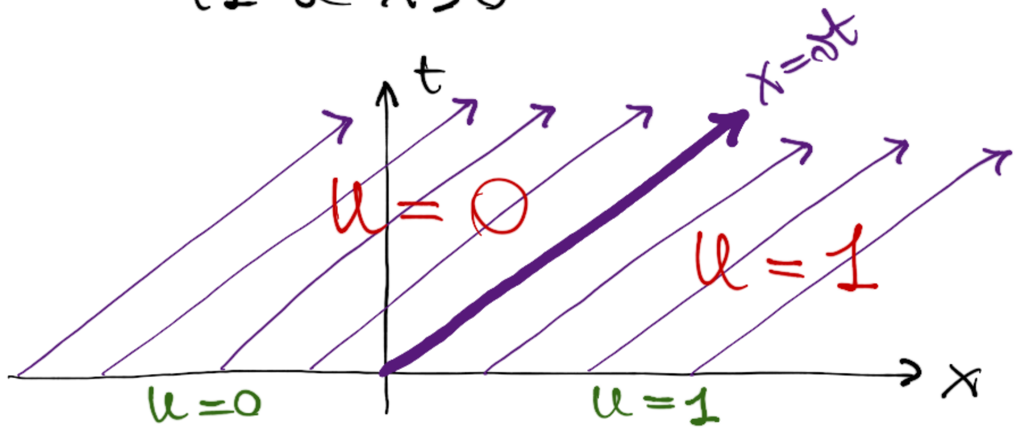


Soluzioni poco regolari, ad esempio discontinue, si possono avere anche nel problema su tutto $\mathbb{R}$, quindi senza bisogno di "interferenze" tra i dati iniziale e al bordo:

$$\begin{cases} \partial_t u + v \partial_x u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \quad (v>0) \\ u(x,0) = H(x) \end{cases}$$

dove

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases} \quad \text{(funzione di Heaviside).}$$




$$u(x,t) = H(x-vt) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<vt \\ 1 & \text{se } x>vt \end{cases}$$