Analisi Funzionale

Aggiunto e spettro in spazi di Hilbert

Prof. Alessio Martini

Politecnico di Torino
a.a. 2023/2024

Aggiunto di un operatore limitato

Prop. Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert su $\mathbb{F}$. Per ogni $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ esiste un unico $B \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ tale che

$$\langle Ax, y\rangle_{H_2} = \langle x, By\rangle_{H_1} \qquad \forall x \in H_1,\ y \in H_2, \tag{$\dagger$}$$

e si ha $\|A\|_{\mathrm{op}} = \|B\|_{\mathrm{op}}$.

Def. Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert su $\mathbb{F}$. Per ogni $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, l'unico operatore $B \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ che soddisfa $(\dagger)$ è detto *aggiunto* dell'operatore A e si denota con A^*.

Oss. Se $H_1 = \mathbb{F}^n$ e $H_2 = \mathbb{F}^m$ con il prodotto scalare euclideo, possiamo identificare $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ e $\mathcal{B}(H_2, H_1)$ con gli spazi di matrici $\mathbb{F}^{m\times n}$ e $\mathbb{F}^{n\times m}$. Allora la matrice associata all'operatore aggiunto A^* è la *trasposta coniugata* della matrice associata all'operatore A. Questo è vero più in generale per spazi di Hilbert H_1 e H_2 di dimensione finita, ove le matrici siano relative a basi ortonormali.

Esempi di aggiunti di operatori limitati

1. Se H è uno spazio di Hilbert, si ha $\mathrm{id}_H^* = \mathrm{id}_H$.
2. Sia $H = \ell^2$. Sia $S : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore di *shift verso sinistra*:
$$S(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots) \qquad \forall \underline{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2;$$
Allora
$$S^*(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots) \qquad \forall \underline{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2,$$
cioè S^* è l'operatore di *shift verso destra con aggiunta di zero*.
3. Sia $D_{\underline{w}} \in \mathcal{B}(\ell^2)$ l'operatore di moltiplicazione per $\underline{w} \in \ell^\infty$. Allora
$$D_{\underline{w}}^* = D_{\underline{\overline{w}}},$$
ove $\underline{\overline{w}} = (\overline{w_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è il coniugato componente per componente di $\underline{w}$.
4. Siano $[a, b], [c, d] \subseteq \mathbb{R}$. Sia $T_K \in \mathcal{B}(L^2(c, d), L^2(a, b))$ l'operatore integrale con nucleo integrale $K \in L^2((a, b) \times (c, d))$. Allora
$$T_K^* = T_{K^*},$$
ove
$$K^*(y, x) = \overline{K(x, y)} \qquad \forall x \in [a, b],\ y \in [c, d].$$

Proprietà dell'aggiunto

Prop. Siano H_1, H_2, H_3 spazi di Hilbert.

(i) Se $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, allora $A^{**} = A$ *($A \mapsto A^*$ è involutiva)*.

(ii) Se $A, B \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, allora $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$ *($A \mapsto A^*$ è antilineare)*.

(iii) Se $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ e $B \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$, allora $(BA)^* = A^* B^*$ *($A \mapsto A^*$ è antimoltiplicativa)*.

(iv) Se $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, allora $\|A^* A\|_{\text{op}} = \|A\|_{\text{op}}^2$ *(condizione C^*)*.

(v) Se $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ è un isomorfismo, allora anche $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ lo è, e inoltre $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(vi) Se $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, allora $\operatorname{Ker}(A^*) = (\operatorname{Im} A)^\perp$ e $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Ker}(A^*)^\perp$. Di conseguenza, si ha la decomposizione ortogonale

$$H_2 = \operatorname{Ker}(A^*) \oplus \overline{\operatorname{Im} A}.$$

(vii) Sia $A \in \mathcal{B}(H_1)$ e sia $V \subseteq H_1$ un sottospazio vettoriale chiuso *invariante* per A e A^*, cioè $A(V) \subseteq V$ e $A^*(V) \subseteq V$. Allora

$$(A|_V)^* = A^*|_V,$$

dove $A|_V, A^*|_V \in \mathcal{B}(V)$ sono le restrizioni di A e A^* a V, pensato come spazio di Hilbert con il prodotto scalare indotto da H_1.

Proprietà dell'aggiunto - 2

Coroll. Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert. La mappa $A \mapsto A^*$ è un anti-isomorfismo isometrico da $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ a $\mathcal{B}(H_2, H_1)$.

Coroll. (criterio di invertibilità in spazi di Hilbert)
Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert. Sia $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Allora T è un isomorfismo se e solo se valgono <u>entrambe</u> le seguenti proprietà:

(a) $\mathrm{Ker}(T^*) = \{0\}$
(l'aggiunto T^* è iniettivo);

(b) esiste $C \in (0, \infty)$ tale che

$$\|x\|_{H_1} \leq C\|Tx\|_{H_2} \qquad \forall x \in H_1$$

(T è coercivo in norma).

Operatori autoaggiunti, unitari e normali

Utilizzando la nozione di aggiunto possiamo descrivere alcune classi di operatori su spazi di Hilbert.

Def. Sia H uno spazio di Hilbert. Un operatore $T \in \mathcal{B}(H)$ si dice:

(a) *autoaggiunto*, se $T^* = T$ (T è uguale al suo aggiunto);
(b) *normale*, se $T^* T = T T^*$ (T commuta con il suo aggiunto);
(c) *unitario*, se $T^* T = T T^* = \mathrm{id}_H$ (l'aggiunto è l'inverso di T).

Def. Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert. Un operatore $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ si dice *unitario* se $T^* T = \mathrm{id}_{H_1}$ e $T T^* = \mathrm{id}_{H_2}$.

Oss. Per un operatore $T \in \mathcal{B}(H)$ su uno spazio di Hilbert H, valgono le implicazioni

$$T \text{ autoaggiunto} \quad \Longrightarrow \quad T \text{ normale} \quad \Longleftarrow \quad T \text{ unitario.}$$

Le implicazioni opposte in generale non valgono.

Esempi di operatori autoaggiunti, unitari e normali

1. Sia $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ l'operatore di shift verso sinistra. Allora
$$SS^* = \mathrm{id}_{\ell^2} \neq S^*S,$$
dunque S non è un operatore normale
(quindi nemmeno autoaggiunto o unitario).

2. Se $\underline{w} = (w_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, l'operatore di moltiplicazione $D_{\underline{w}}$ è:
   - sempre un operatore normale;
   - autoaggiunto se e solo se $\underline{w}$ è a valori reali;
   - unitario se e solo se $|w_k| = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

3. Se H_1, H_2 sono spazi di Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, allora
$$(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T,$$
dunque $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ è autoaggiunto
(e a maggior ragione T^*T è normale).

Proprietà degli operatori autoaggiunti, unitari e normali

Prop. Siano H_1 e H_2 spazi di Hilbert. Un operatore $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ è unitario se e solo se $T : H_1 \to H_2$ è un isomorfismo isometrico.

Prop. Supponiamo che $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Siano H uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$. Allora T è autoaggiunto se e solo se

$$\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in H.$$

Prop. Sia H uno spazio di Hilbert. Sia $T \in \mathcal{B}(H)$ un operatore normale. Allora:

(i) $\|Tx\|_H = \|T^*x\|_H$ per ogni $x \in H$;

(ii) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker}(T^*)$;

(iii) $T - \lambda \, \mathrm{id}_H$ è normale per ogni $\lambda \in \mathbb{F}$.

In particolare

(iv) $\operatorname{Ker}(T - \lambda \, \mathrm{id}_H) = \operatorname{Ker}(T^* - \overline{\lambda} \, \mathrm{id}_H)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{F}$.

Proiezioni ortogonali

Prop. Siano H uno spazio di Hilbert e $P \in \mathcal{B}(H)$.
Sono fatti equivalenti:

(i) P è la mappa di proiezione ortogonale P_Y su un qualche sottospazio vettoriale chiuso Y di H.

(ii) $P^2 = P = P^*$.

Inoltre, in tal caso, $Y = \operatorname{Im} P = \{x \in H : Px = x\}$ e $Y^\perp = \operatorname{Ker} P$.

Prop. Sia H uno spazio di Hilbert. I seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{B}(H)$ sono chiusi (topologicamente):

(i) l'insieme degli operatori normali;

(ii) l'insieme degli operatori autoaggiunti;

(iii) l'insieme degli operatori unitari;

(iv) l'insieme delle proiezioni ortogonali.

Spettro di un operatore limitato

Nel seguito $H \neq \{0\}$ è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{F}$ e $I = \mathrm{id}_H$.

Def. Sia $T \in \mathcal{B}(H)$. Lo *spettro* di T è l'insieme

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} : T - \lambda I \text{ non è invertibile in } \mathcal{B}(H)\}.$$

L'*insieme risolvente* $\rho(T)$ di T è il complementare $\mathbb{F} \setminus \sigma(T)$ dello spettro.

Oss. Se $\dim H < \infty$, allora

$$\begin{aligned} T - \lambda I \text{ non è invertibile } &\overset{(\dagger)}{\iff} T - \lambda I \text{ non è iniettivo} \\ &\iff \mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\} \iff \lambda \text{ è autovalore di } T \end{aligned}$$

Se $\dim H = \infty$, tuttavia, in $(\dagger)$ si ha solo l'implicazione $\Longleftarrow$.

Prop. Sia $T \in \mathcal{B}(H)$. Allora si ha la decomposizione

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$$

dello spettro di T in tre sottoinsiemi a due a due disgiunti:

- $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$ (spettro puntuale)
- $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \{0\},\ \overline{\mathrm{Im}(T - \lambda I)} \neq H\}$ (spettro residuo)
- $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \{0\},\ \overline{\mathrm{Im}(T - \lambda I)} = H,\ \mathrm{Im}(T - \lambda I) \neq H\}$ (spettro continuo)

Proprietà dello spettro

Prop. Sia $T \in \mathcal{B}(H)$.

(i) Lo spettro $\sigma(T)$ è un sottoinsieme chiuso della palla $\overline{B}(0, \|T\|_{\mathrm{op}})$ in $\mathbb{F}$.

(ii) Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, lo spettro $\sigma(T)$ è non vuoto.

Prop. Sia $T \in \mathcal{B}(H)$.

(i) $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

(ii) T è invertibile in $\mathcal{B}(H)$ se e solo se $0 \notin \sigma(T)$.
Inoltre, in tal caso, $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

(iii) $\sigma(\alpha I) = \{\alpha\}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{F}$.

(iv) Supponiamo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ oppure $n \leq 1$. Se $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \in \mathbb{F}[z]$ è un polinomio, posto $p(T) := \sum_{j=0}^{n} a_j T^j$, si ha $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.
(teorema della mappa spettrale)

Prop. Sia $T \in \mathcal{B}(H)$.

(i) Se T è normale, allora $\sigma_r(T) = \emptyset$.

(ii) Se T è autoaggiunto, allora $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

(iii) Se T è unitario, allora $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| = 1\}$.

Esempi di calcolo dello spettro

1. Sia $\underline{w} = (w_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Allora
$$\sigma(D_{\underline{w}}) = \overline{\{w_k : k \in \mathbb{N}\}}$$
e specificamente
$$\sigma_p(D_{\underline{w}}) = \{w_k : k \in \mathbb{N}\}, \quad \sigma_r(D_{\underline{w}}) = \emptyset, \quad \sigma_c(D_{\underline{w}}) = \sigma(D_{\underline{w}}) \setminus \sigma_p(D_{\underline{w}}).$$

2. Sia $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ l'operatore di shift verso sinistra. Allora
$$\sigma(S) = \sigma(S^*) = \overline{B}(0,1)$$
e specificamente
$$\sigma_p(S) = B(0,1), \quad \sigma_r(S) = \emptyset, \quad \sigma_c(S) = \partial B(0,1),$$
$$\sigma_p(S^*) = \emptyset, \quad \sigma_r(S^*) = B(0,1), \quad \sigma_c(S^*) = \partial B(0,1).$$

Proprietà degli autospazi di un operatore lineare

Ricordiamo che, se $T \in \mathcal{B}(H)$,

- $E_T(\lambda) := \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ è l'*autospazio* di T relativo a $\lambda \in \mathbb{F}$;
- ogni $v \in E_T(\lambda) \setminus \{0\}$ si dice *autovettore* di T di autovalore λ;
- $\lambda \in \mathbb{F}$ è un *autovalore* di T se e solo se $E_T(\lambda) \neq \{0\}$;
- un sottospazio vettoriale $V \subseteq H$ si dice *invariante* per T se $T(V) \subseteq V$.

Prop. Siano $T, S \in \mathcal{B}(H)$.

(i) Sia $n \in \mathbb{N}_+$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ sono distinti, allora
$$E_T(\lambda_n) \cap (E_T(\lambda_1) + \dots + E_T(\lambda_{n-1})) = \{0\}.$$
In altre parole, gli autospazi dell'operatore T sono in somma diretta.

(ii) Se $TS = ST$, allora l'immagine $\mathrm{Im}\, T$ e gli autospazi $E_T(\lambda)$ di T sono invarianti per S, per ogni $\lambda \in \mathbb{F}$.

(iii) Se T è normale, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ e $\lambda \neq \mu$, allora $E_T(\lambda) \perp E_T(\mu)$.

(iv) Se V è un sottospazio vettoriale di H invariante per T, allora anche $\overline{V}$ è invariante per T, mentre $V^\perp$ è invariante per T^*.

(v) Sia $n \in \mathbb{N}_+$. Se $V_1, \dots, V_n$ sono sottospazi invarianti per T, allora anche $V_1 + \dots + V_n$ e $V_1 \cap \dots \cap V_n$ sono invarianti per T.