Time Series - Modelli

Vers. 1.0.1

Gianluca Mastrantonio

gianluca.mastrantonio@polito.it

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) I

Modello Autoregressivo

Prima di passare al caso generale, vediamo il modello autoregressivo di orgine 1, che assume

$$x_t = \alpha x_{t-1} + w_t$$

dove come sempre w_t è un white noise. In questo caso la serie ha una lunghezza infinita. Ne deriva quindi che, sostituendo,

$$x_t = \alpha(\alpha x_{t-2} + w_{t-1}) + w_t = \alpha^2 x_{t-2} + \alpha w_{t-1} + w_t = \alpha^3 x_{t-3} + \alpha^2 w_{t-2} + \alpha w_{t-1} + w_t$$

e

$$x_t = \alpha^\infty x_{t-\infty} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i w_{t-i}$$

e assumeremo che $|\alpha| < 1$ per far si che la formula sopra (e altre caratteristiche del processo) abbia senso, e quindi

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i w_{t-i}$$

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) II

Visto che è combinazione lineare di processi Gaussiani è ancora Gaussiano e ne possiamo vedere media e varianza. Possiamo vedere facilmente che

$$E(X_t) = 0$$

mentre per covarianza al tempo t e $t + k$ abbiamo

$$\gamma_t(k) = Cov(X_t, X_{t+k}) = Cov(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i W_{t-i}, \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j W_{t+k-j}) =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i \alpha^j Cov(W_{t-i}, W_{t+k-j}) = \sum_{\substack{i=0 \\ j=k+i}}^{\infty} \alpha^i \alpha^{k+i} Cov(W_{t-i}, W_{t+k-(k+i)}) =$$

$$\sigma^2 \sum_{\substack{i=0 \\ j=k+i}}^{\infty} \alpha^i \alpha^{k+i}$$

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) III

de cui possiamo ricavare

$$\gamma_t(k) = \alpha^k \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2i}.$$

che ci da varianza

$$\gamma_t(0) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2i}.$$

Ricordiamo che la serie geometrica ci dice che

$$\frac{1}{1-\theta} = \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i$$

se $|\theta| < 1$, altrimenti diverge. Quindi, visto che assumiamo che $|\alpha| < 1$ la covarianza è non diverge e

$$\gamma_t(k) = \frac{\alpha^k \sigma^2}{(1-\alpha^2)}$$

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) IV

e la varianza

$$\gamma_t(0) = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha^2)}$$

altrimenti la varianza (e covarianza) diverge per $|\alpha| \geq 1$.
Questa è la ragione per cui in un random walk, che è un AR(1) con $\alpha = 1$, si assume noto il valore del primo tempo, altrimenti il processo diverge, e in più è non stazionario. Un white noise è invece stazionario visto che è un AR(1) con $\alpha = 0$.

La funzione di autocovarianza non dipende dal tempo, ma solo da lag, i.e., $\gamma_t(k) \equiv \gamma(k)$, e la media è costantemente uguale a 0. Abbiamo allora che il processo è stazionario debole e anche forte (ricordatevi che per un processo gaussiano, se sono stazionari i momenti di ordine 1 e 2, è stazionario in maniera forte).
Calcoliamo i valori del correlogramma che è

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\sqrt{\gamma(0)\gamma(0)}} = \frac{\alpha^k \sigma^2}{(1-\alpha^2)} \frac{(1-\alpha^2)}{\sigma^2} = \alpha^k$$

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) V

Quindi, assumendo la stazionarietà, l'autocorrelazione decade con k, e se $\alpha < 0$, allora la correlazione alterna valori positivi e negativi. Vediamo degli esempi simulati. Fate attenzione che per simulare la congiunta possiamo usare la fattorizzazione

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1) \prod_{i=2}^{n} f(x_i|x_{i-1})$$

dove x_1 si deve simulare dalla marginale ($N\left(0, \frac{\sigma^2}{(1-\alpha^2)}\right)$) e $f(x_i|x_{i-1})$ della condizionata ($N\left(\alpha x_{i-1}, \sigma^2\right)$)

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) VI

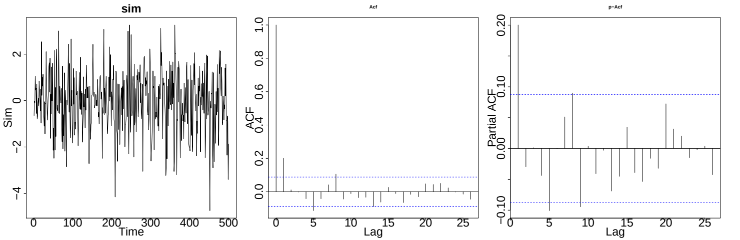

Figure: Simulazione di un AR(1) con $\alpha = 0.3$

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) VII

Code: Codice della figura

```
x = c()
alpha   = 0.3
sigma2  = 1.5
x[1] = rnorm(1,0,(sigma2/(1-alpha^2))^0.5)
for(i in 2:100)
{
  x[i] = rnorm(1,alpha*x[i-1],sigma2^0.5)
}
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim", cex.main=3,
        cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) VIII

```
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

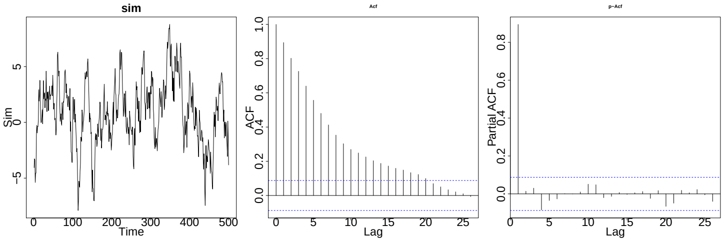

Figure: Simulazione di un AR(1) con $\alpha = 0.9$

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) IX

Code: Codice della figura

```
x = c()
alpha   = 0.9
sigma2  = 1.5
x[1] = rnorm(1,0,(sigma2/(1-alpha^2))^0.5)
for(i in 2:100)
{
  x[i] = rnorm(1,alpha*x[i-1],sigma2^0.5)
}
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim", cex.main=3,
        cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) X

```
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

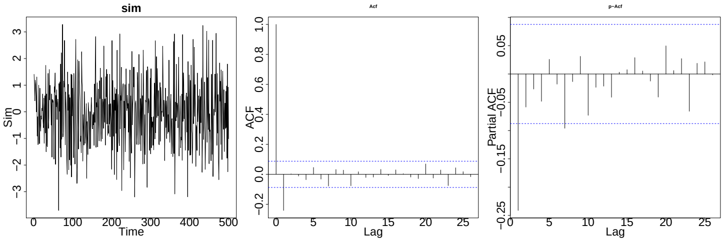

Figure: Simulazione di un AR(1) con $\alpha = -0.3$

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) XI

Code: Codice della figura

```
x = c()
alpha   = -0.3
sigma2  = 1.5
x[1] = rnorm(1,0,(sigma2/(1-alpha^2))^0.5)
for(i in 2:100)
{
  x[i] = rnorm(1,alpha*x[i-1],sigma2^0.5)
}
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim", cex.main=3,
        cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) XII

```
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

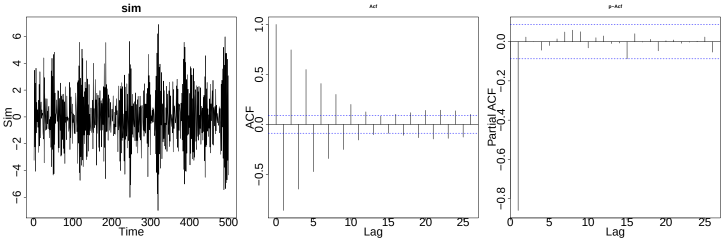

Figure: Simulazione di un AR(1) con $\alpha = -0.9$

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) XIII

Code: Codice della figura

```
x = c()
alpha   = -0.9
sigma2  = 1.5
x[1] = rnorm(1,0,(sigma2/(1-alpha^2))^0.5)
for(i in 2:100)
{
  x[i] = rnorm(1,alpha*x[i-1],sigma2^0.5)
}
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim", cex.main=3,
        cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Modello autoregressivo del primo ordine (AR(1)) XIV

```
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Fate attenzione che in questo caso è inutile calcolare l'autocorrelazione parziale, visto che è markoviano del primo ordine.

Possiamo passare dall AR(1) con media nulla, a uno con media μ con i passaggi già fatti prima definendo

$$\mathbf{X} - \mu = N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}),$$

con gli elementi di $\mathbf{\Sigma}$ dati dalla funzione di autocovarianza dell'AR(1),che ci da

$$(x_t - \mu) = \alpha(x_{t-1} - \mu) + w_t \Rightarrow x_t = \mu + \alpha(x_{t-1} - \mu) + w_t$$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) I

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p))

Passare da un modello AR(1) a un AR(p) è abbastanza semplice, e si può fare mettendo più "ritardi"

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + w_t$$

Quindi il processo al tempo t dipende dai p tempi precedenti con differenti parametri (Markoviano di ordine p).
Le proprietà del processo sono complesse da determinare. Per determinare se il processo è stazionario possiamo introdurre l'operatore B (backshift), per cui valgono le seguenti

$$Bx_t = x_{t-1}, \qquad B^p x_t = x_{t-p}$$

che si può dimostrare essere un'operatore lineare che segue le usuali regole dell'algebra. Possiamo allora scrivere l'AR(p) come

$$x_t = (\alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \cdots + \alpha_p B^p)x_t + w_t \Rightarrow (1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^p)x_t = w_t$$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) II

L'operatore ci servirà anche in futuro e definiamo

$$\theta_p(B) = (1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^p)$$

come il polinomio backshift che ci permette di esprimere un AR(p) come

$$\theta_p(B) x_t = w_t$$

Per studiare le condizioni di stazionarietà possiamo esprimere l'equazione sopra come

$$x_t = \theta_p(B)^{-1} w_t$$

Il polinomio $\theta_p(B)^{-1}$ ha una rappresentazione come serie

$$\theta_p(B)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i B^i$$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) III

con ha la proprietà che $c_i \Rightarrow 0$ se $i \Rightarrow \infty$, e la se la serie converge, se e solo se le radici del polinomio caratteristico di $\theta_p(B)$, i.e. le soluzioni di $\theta_p(B) = 0$, sono tutte maggiori di 1 in modulo.

Attenzione: Sono le radici del polinimio che devono essere in modulo maggiori di 1, non i coefficienti del modello. Cioè la richiesta è che le soluzioni di

$$1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^p = 0$$

debbano essere maggiore di 1 in modulo. Prendiamo per esempio il caso AR(1), il cui polinomio è

$$1 - \alpha B = 0$$

che ha come soluzione

$$B = 1/\alpha$$

che quindi è stazionario se $|1/\alpha| > 1$ che ci da $|\alpha| < 1$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) IV

Calcoliamo adesso varianza/covarianza e valore atteso Visto che abbiamo che

$$Var(X_t) = (\theta_p(B)^{-1})^2\sigma^2$$

questo ha varianza finita se e solo se $\sum_{i=1} c_i B^i$ converge. L'equazione

$$x_t = \theta_p(B)^{-1} w_t$$

ci dice anche che

$$E(X_t) = 0$$

Vedremo in seguito come

$$x_t = \theta_p(B)^{-1} w_t$$

è la rappresentazione Moving Average di un modello Autoregressivo

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) V

Il calcolo dell'autocovarianza e autocorrelazione è complicato ma sappiamo che l'autocorrelazione parziale di un AR(p) si annulla per lag superiori a p. Questo ci può facilmente vedere calcolando la covarianza (e visto che è markoviano del p-esimo ordine)

$$Cov(x_t, x_{t-p-k} | x_{t_1}, \ldots, x_{t_{t}-p-k+1}) =$$

$$\psi(p+k) = Cov(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + w_t, x_{t-p-k} | x_{t_1}, \ldots, x_{t-p-k+1})$$

che per $k > 0$ il primo argomento della covarianza non ha elementi in comune con x_{t-p+k}.

Per l'autocovarianza (e anche l'autocorrelazione) possiamo usare un calcolo iterativo visto se moltiplichiamo ambo i membri di

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + w_t$$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) VI

per x_{t-k} e calcoliamo il valore atteso

$$E(X_{t-k}X_t) = \alpha_1 E(X_{t-k}X_{t-1})+\alpha_2 E(X_{t-k}X_{t-2})+\cdots+\alpha_p E(X_{t-k}X_{t-p})+E(X_{t-k}w_t)$$

e ricordando che $E(X_t) = 0$ per ogni t, allora

$$\gamma(k) = \alpha_1\gamma(|k-1|) + \alpha_2\gamma(|k-2|) + \cdots + \alpha_p\gamma(|k-p|)$$

Se fossimo in grado di calcolare le prime p, possiamo calcolare tutte le altre. Se non possiamo farlo potremmo sempre vederne e studiarne il comportamente con metodi MC

Come per l'AR(1) posssiamo aggiungere un valore medio assumendo che $\mathbf{X} - \mu$ sia un AR(p) e quindi

$$(x_t - \mu) = \alpha_1(x_{t-1} - \mu) + \alpha_2(x_{t-2} - \mu) + \cdots + \alpha_p(x_{t-p} - \mu) + w_t \Rightarrow$$

$$x_t = \mu + \alpha_1(x_{t-1} - \mu) + \alpha_2(x_{t-2} - \mu) + \cdots + \alpha_p(x_{t-p} - \mu) + w_t$$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) VII

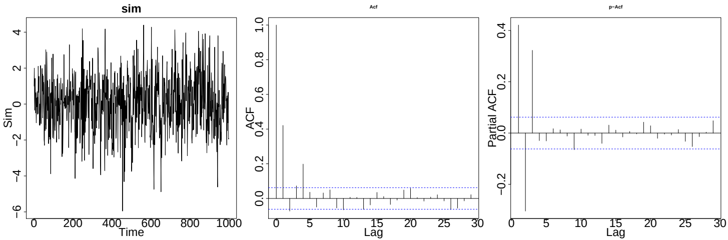

Figure: Simulazione di un AR(p) con $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = -0.5$, $\alpha_3 = 0.3$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) VIII

Code: Codice della figura

```
x = c()
alpha1    = 0.7
alpha2    = -0.5
alpha3    = 0.3
sigma2   = 1.5
x[1]  = 0
x[2]  = 1
x[3]  = 2
for(i in 4:500)
{
  x[i]  = rnorm(1,alpha1*x[i-1]+
                alpha2*x[i-2]+alpha3*x[i-3],
                sigma2^0.5)
```

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) IX

```
}
x = x[-c(1,400)]
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim", cex.main=3,
    cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) X

Previsione

In ambito di serie storiche, la previsione è un aspetto fondamentale. Ma la struttura gerarchica (definita come probabilità condizionate) di questi modelli ci permette di far previsione in maniera automatica, per esempio, nel modello AR(p), se abbiamo osservato il processo fino al tempo t, abbiamo che

$$x_{t+1} = \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p+1} + w_{t+1}$$

che è distribuita normalmente con media e varianza che si possono facilmente determinare. Abbiamo due casi, uno in cui le stime dei parametri sono considerate fisse, e in questo caso

$$x_{t+1} | x_t, \ldots, x_{t-p+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \sim N(\alpha_1 x_t + \alpha_2 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p+1}, \sigma^2)$$

naturalmente con $\alpha.$ e σ^2 si intende la loro stima $\hat{\alpha}.$ e $\hat{\sigma}^2$.

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) XI

L'altro caso è quello in cui i parametri α e σ non sono coonsiderati fissi e in questo caso va trovata la distribuzione di x_{t+1}, magari con metodi monte carlo se non si è in grado di trovarla, almeno approssimativamente. Generalmente si considerano fissi i parametri

Fate anche attenzione che se volete prevedere a una distanza c dovete prendere in considerazione che nel condizionante ci possono andare solo le osservazioni.
Prendiamo il caso di un AR(1):

$$x_t = \alpha x_{t-1} + w_t$$

La previsione al tempo $t+1$ è

$$x_{t+1} = \alpha x_t + w_{t+1} \sim N(\alpha x_t, \sigma^2)$$

se considero fissi i parametri, mentre la previsione al tempo $t+2$ è

$$x_{t+2} = \alpha x_{t+1} + w_{t+2} \sim N()$$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) XII

dove i parametri della normale sono

$$E(x_{t+2}|x_t) = \alpha E(x_{t+1}|x_t) = \alpha^2 x_t$$

e

$$Var(x_{t+2}|x_t) = \alpha^2 Var(x_{t+1}|x_t) + Var(w_{t+2}) = \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2 = (1+\alpha^2)\sigma^2$$

Lo stesso calcolo lo si può fare considerando

$$x_{t+2} = \alpha^2 x_t + \alpha w_{t+1} + w_{t+2}$$

oppure le medie e varianze condizionate della congiunta. Fate attenzione che in quest'ultimo caso ottenete

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{1-\alpha^2} - \frac{\alpha^{2k}}{1-\alpha^2} \right)$$

che è lo stesso risultato ottenuto prima visto che

$$\frac{1}{1-\alpha^2} - \frac{\alpha^4}{1-\alpha^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2i} - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{4+2i} = 1 + \alpha^2$$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) XIII

Si può continuare calcolando per lag superiori, e si può vedere

$$x_{t+k} = \alpha^k x_t + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i w_{t+k-i}$$

e quindi

$$E(x_{t+k}|x_t) = \alpha^k x_t$$

e

$$Var(x_{t+k}|x_t) = (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^{2k})\sigma^2$$

e per k elevati la varianza tende alla varianza marginale $\sigma^2/(1-\alpha^2)$.

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) XIV

Stima dei Parametri

Prendiamo il caso generale in cui la distribuzione congiunta dei dati è unaì normale multivariata con media diversa da zero

$$\mathbf{X} \sim N(\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Sigma})$$

dove le $\mathbf{Z}$ sono covariate, $\boldsymbol{\lambda}$ sono coefficienti regressive, e $\boldsymbol{\Sigma}$ dipende da dei parametri $\boldsymbol{\alpha}$ e σ^2 (potrei scrivere $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$). Possiamo scrivere questo modello utilizzando il formalismo della regressione, nel seguente modo

$$x_i = \lambda_0 + \lambda_1 z_{i,1} + \cdots + +\lambda_p z_{i,p} + \epsilon_i$$

con $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)' \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.
la verosimiglianza del modello è

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) = (2\pi)^{-2/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left(- \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda})}{2} \right)$$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) XV

Possiamo sempre trovare una matrice $\mathbf{A}$ tale per cui

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{\Sigma}$$

e possiamo scrivere la verosimiglianza come

$$(2\pi)^{-2/2}|\mathbf{A}'\mathbf{A}|^{-1/2}\exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda})'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda})}{2}\right)$$

che è uguale a

$$(2\pi)^{-2/2}|\mathbf{A}'\mathbf{A}|^{-1/2}\exp\left(-\frac{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda})'(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda})}{2}\right)$$

Se adesso definiamo $\mathbf{X}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}$ abbiamo che

$$\mathbf{X}^* \sim N(\mathbf{Z}^*\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{I})$$

Modello autoregressivo di ordine p (AR(p)) XVI

e quindi

$$x_i^* = \lambda_0 + \lambda_1 z_{i,1}^* + \cdots + +\lambda_p z_{i,p}^* + \epsilon_i^*$$

con ϵ_i^* iid da $N(0,1)$. Abbiamo quindi che se conoscessimo $\mathbf{\Sigma}$ (che equivavle a dire che conosciamo $\boldsymbol{\alpha}$ e σ), possiamo stimare $\boldsymbol{\lambda}$ con lo stimatore dei minimi quadrati

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = ((\mathbf{Z}^*)'\mathbf{Z}^*)^{-1}(\mathbf{Z}^*)'\mathbf{x}^* = (\mathbf{Z}'(\mathbf{A}^{-1})'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'(\mathbf{A}^{-1})'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} =$$

$$(\mathbf{Z}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Z}')^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}(1)$$

che è chiamato lo stimatore GLS (generalized least squared). Tra i possibili metodi di stima, il più semplice e generale è un algoritmo iterativo, che partendo da valori iniziali per $\boldsymbol{\alpha}$ e σ calcola $\hat{\mathbf{\Sigma}}$, da cui deriva lo stimatore di $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ in (1) e poi tenta di migliorarlo cambiando leggermente i valori di $\boldsymbol{\alpha}$ e σ, finchè si è raggiunto un massimo.

Modello MA(1) I

Modello Moving average

Il moving average al lag 1 (MA(1)) è scritto come

$$x_t = w_t + \beta w_{t-1} = (1 - \beta B)w_t$$

con $w_t \sim N(0, \sigma^2)$ rumore bianco per ogni t. Il MA è un modello "speculare" all AR(). Possiamo facilmente calcolare medie e varianze che sono

$$E(X_t) = E(w_t + \beta w_{t-1}) = 0 + \beta 0 = 0$$

$$Var(X_t) = Var(w_t + \beta w_{t-1}) = \sigma^2 + \beta^2\sigma^2 = \sigma^2(1 + \beta^2)$$

e funzione di autocovarianze

$$\gamma(k) = Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(w_t + \beta w_{t-1}, w_{t-k} + \beta w_{t-k-1})$$

Modello MA(1) II

e quindi

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2(1+\beta^2) & \text{se } k = 0 \\ \beta\sigma^2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è quindi stazionario. L'autocorrelazione è

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ \frac{\beta}{1+\beta^2} & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Visto che un MA(1) si può scrivere come

$$x_t = (1+\beta B)w_t \Rightarrow (1+\beta B)^{-1}x_t = w_t$$

Modello MA(1) III

mostra come un MA(1), se $|\beta| < 1$, è un particolare $AR(\infty)$ dato che (per gli stessi motivi del AR(p)) $(1 + \beta B)^{-1}$ ha una rappresentazione in serie convergente

$$(1 + \beta B)^{-1} x_t = x_t + \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_{t-j} = w_t$$

Quando è possibile invertire un MA per ottenere un $AR(\infty)$, si dice che il modello è invertibile e noi ci focalizzeremo solamente su questi modelli, perchè se non è invertibile non è neanche **indentificabile**.

Modello MA(1) IV

Facciamo una piccola digressione su cosa significa **identificabilità** di un modello. In statistica frequentista, noi stimiamo i parametri cercando quei valori che massimizzano la verosimiglianza. Ma cosa succede se più valori dei parametri la massimizzano? e se i valori sono infiniti? in questo caso noi non siamo in grado di distinguere tra i vari set di parametri che danno lo stesso valore (massimo) della verosimiglianza. Per esempio, se io assumo che

$$x_i \sim N(\lambda_1 - \lambda_2, 1), i = 1, \dots, n$$

e valessi stimare λ_1 e λ_2 e trovassi che la verosimilgianza si massimizza a $\hat{\lambda}_1$ e $\hat{\lambda}_2$, avrei lo stesso valore di verosimiglianza anche per qualsiasi $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ tale che

$$\lambda_1^* = c + \hat{\lambda}_1, \qquad \lambda_2^* = c + \hat{\lambda}_2$$

Se io sono interesasto solo alla previsione, potrebbe non essere un problema, ma se i coefficienti vanno interpretati, allora diventa un problema da risolvere.

Modello MA(1) V

Torniamo al processo e vediamo perchè non è identificabile.
Per capire perchè ricordate che il processo è completamente specificato da media e funzione di covarianza, e si può fa vedere che

$$x_t = w_t + \beta w_{t-1} (1)$$

con $w_t \sim N(0, \sigma^2)$, e

$$x_t = w_t + \frac{1}{\beta} w_{t-1} (1)$$

con $w_t \overset{iid}{\sim} N(0, \beta^2\sigma^2)$, producono lo stesso processo. Questo perchè' (1) e (2) hanno la stessa media, mentre la funzione di covarianza di (1) è

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2(1+\beta^2) & \text{se } k = 0 \\ \beta\sigma^2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello MA(1) VI

come avevamo visto prima, e se definiamo $\lambda = \frac{1}{\beta}$ e $\beta^2\sigma^2 = \tau^2$, abbiamo che (2) è uguale a

$$x_t = w_t + \lambda w_{t-1}, \qquad w_t \overset{iid}{\sim} N(0, \tau^2)$$

e allora la funzione di covarianza di (2) è

$$\gamma(k) = \begin{cases} \tau^2(1+\lambda^2) & \text{se } k = 0 \\ \lambda\tau^2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che sostituendo ci da

$$\gamma(k) = \begin{cases} \beta^2\sigma^2(1+\frac{1}{\beta^2}) & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{\beta}\beta^2\sigma^2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello MA(1) VII

che è uguale a

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2(\beta^2+1) & \text{se } k=0 \\ \beta\sigma^2 & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

come in (1).

Quindi per indentificare il modello possiamo assumere che il parametro deve essere $|\beta| \leq 1$. Se è $|\beta| < 1$ diciamo che è anche invertibile.

Modello MA(1) VIII

Possiamo vedere un MA(1) in diverso modo. Abbiamo che

$$x_t = \beta w_{t-1} + w_t$$

Possiamo anche scrivere

$$x_{t-1} = \beta w_{t-2} + w_{t-1} \Rightarrow w_{t-1} = x_{t-1} - \beta w_{t-2}$$

Potremmo pensare the prendere w_{t-1} come funzione della serie temporale e sostituire il suo valore in x_t. Sebbene questo sia possibile, dobbiamo fare attenzione quando calcoliamo le caratteristiche della serie

$$x_t = \beta(x_{t-1} - \beta w_{t-2}) + w_t = \beta x_{t-1} - \beta^2 w_{t-2} + w_t$$

questo perchè, quando calcoliamo la varianza, abbiamo che

$$Var(x_t) = \beta^2 Var(x_{t-1}) + \beta^4 Var(w_{t-2}) + Var(w_t) -$$

Modello MA(1) IX

$$2\beta^3 Cov(x_{t-1}, w_{t-2}) + 2\beta Cov(x_{t-1}, w_t) - 2\beta Cov(w_{t-2}, w_t)$$

Abbiamo

$$Cov(w_{t-2}, w_t) = Cov(x_{t-1}, w_t) = 0$$

ma

$$Cov(x_{t-1}, w_{t-2}) \neq 0$$

visto che nella sua definizione, x_{t-1}, che è

$$x_{t-1} = \beta w_{t-2} + w_{t-1}$$

dipende da w_{t-2}. Possiamo facilmente verificare che (x_{t-1}, w_{t-2}) è una normale bivariate, com medie zero, con le varianze marginali di x_{t-1} e w_{t-2} pari a $\sigma^2(1+\beta^2)$ e σ^2, mentre la covarianza è

$$\beta\sigma^2$$

Modello MA(1) X

Utilizzando le giuste covarianze, abbiamo che

$$Var(x_t) = \sigma^2(1+\beta^2)$$

Possiamo continuare a sostituire e avere

$$x_t = \beta x_{t-1} - \beta^2 w_{t-2} + w_t = \beta x_{t-1} - \beta^2(x_{t-2} - \beta w_{t-3}) + w_t =$$

$$\beta x_{t-1} - \beta^2 x_{t-2} + \beta^3 w_{t-3} + w_t$$

sostituiamo ancora e abbiamo

$$x_t = \beta x_{t-1} - \beta^2 x_{t-2} + \beta^3(x_{t-3} - \beta w_{t-4}) + w_t =$$

$$\beta x_{t-1} - \beta^2 x_{t-2} + \beta^3 x_{t-3} - \beta^4 w_{t-4} + w_t$$

Abbimao quindi che l'MA(1) originale si può scrivere come

$$x_t = w_t + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\beta^i x_{t-i}$$

che è un modello AR(∞)

Modello MA(1) XI

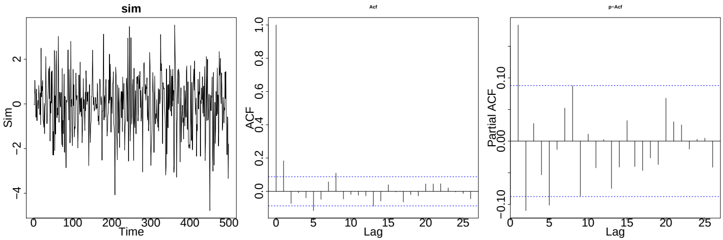

Figure: Simulazione di un MA(1) con $\beta = 0.3$

Modello MA(1) XII

Code: Codice della figura

```
x = c()
beta_   = 0.3
sigma2  = 1.5
w = rnorm(100, 0, sigma2^0.5)
x1 = 0
for(i in 2:100)
{
  x[i] = w[i]+beta_*w[i-1]
}
x = x[-1]
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim",
```

Modello MA(1) XIII

```
        cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3,
        xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Modello MA(1) XIV

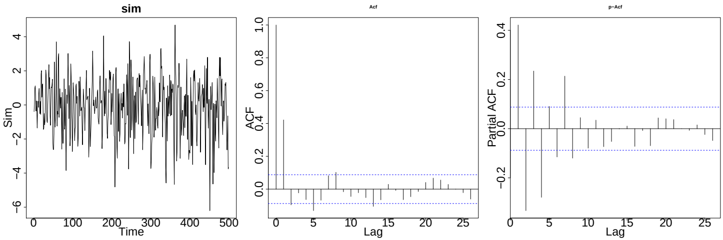

Figure: Simulazione di un MA(1) con $\beta = 0.9$

Modello MA(1) XV

Code: Codice della figura

```
x = c()
beta_   = 0.9
sigma2  = 1.5
w = rnorm(100, 0, sigma2^0.5)
x1 = 0
for(i in 2:100)
{
  x[i] = w[i]+beta_*w[i-1]
}
x = x[-1]
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim",
```

Modello MA(1) XVI

```
        cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3,
        xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Modello MA(1) XVII

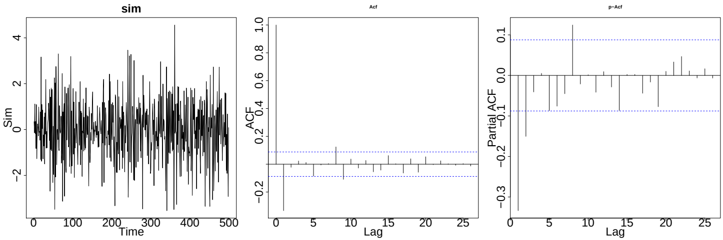

Figure: Simulazione di un MA(1) con $\beta = -0.3$

Modello MA(1) XVIII

Code: Codice della figura

```
x = c()
beta_   = -0.3
sigma2  = 1.5
w = rnorm(100, 0, sigma2^0.5)
x1 = 0
for(i in 2:100)
{
  x[i] = w[i]+beta_*w[i-1]
}
x = x[-1]
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim",
```

Modello MA(1) XIX

```
        cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3,
        xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Anche in questo caso, se vogliamo aggiungere un valore medio μ basta scrivere

$$(x_t - \mu) = w_t + \beta w_{t-1} \Rightarrow x_t = \mu + w_t + \beta w_{t-1}$$

Modello Moving Average di ordine q (MA(p)) I

Modello Moving Average di ordine q (MA(q))

Come con il modello autoregressivo, anche il moving average si può generalizzare introducendo più di un termine di ritardo

$$x_t = w_t + \beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \beta_3 w_{t-3} + \cdots + \beta_q w_{t-q}$$

e definendo il backward shift polynomial

$$\phi_q(B) = (1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \cdots + \beta_q B^q)$$

abbiamo allora che

$$x_t = \phi_q(B) w_t.$$

Il modello MA(q) è identificabile se $\phi_q(B)$ è invertibile, e $\phi_q(B)$ è invertibile se e solo se tutte le radici hanno valore assoluto maggiore di 1.

Modello Moving Average di ordine q (MA(p)) II

Come il caso precedente, è facile verificare che la media è 0 mentre la varianza è

$$Var(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2$$

assumendo $\beta_0 = 1$. La funzione di autocovarianza è

$$\gamma(k) = Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(\sum_{j=0}^{q} \beta_j w_{t-j}, \sum_{j=0}^{q} \beta_j w_{t-k-j})$$

che è uguale a

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 & \text{se } k = 0 \\ \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k} & \text{se } k = 1, \ldots, q \\ 0 & \text{se } k > q \end{cases}$$

Modello Moving Average di ordine q (MA(p)) III

che è quindi stazionario. L'autocorrelazione è

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k}}{\sum_{j=0}^{q} \beta_j^2} & \text{se } k = 1, \ldots, q \\ 0 & \text{se } k > q \end{cases}$$

Modello Moving Average di ordine q (MA(p)) IV

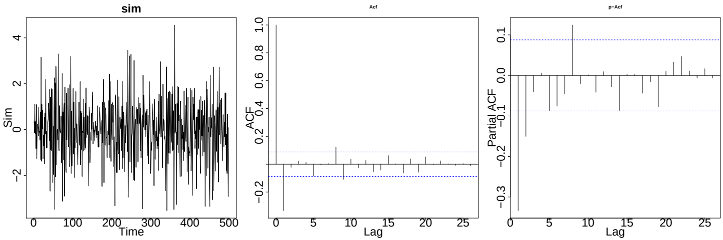

Figure: Simulazione di un MA(3) con $\beta_1 = 0.8$, $\beta_2 = -0.5$, $\beta_3 = 0.3$

Modello Moving Average di ordine q (MA(p)) V

Code: Codice della figura

```
x = c()
beta1    = 0.8
beta2    = -0.5
beta3    = 0.3
sigma2   = 1.5
w = rnorm(1000, 0, sigma2^0.5)
x1 = 0
for(i in 4:1000)
{
  x[i] = w[i]+beta1*w[i-1]+beta2*w[i-2]+beta3*w[i-3]
}
x = x[-c(1:500)]
par(mfrow=c(1,3))
```

Modello Moving Average di ordine q (MA(p)) VI

```
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim", cex.main=3,
    cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Anche in questo caso si può aggiungere un livello diverso da zero con

$$(x_t - \mu) = w_t + \beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \beta_3 w_{t-3} + \cdots + \beta_q w_{t-q} =$$

$$x_t = \mu + w_t + \beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \beta_3 w_{t-3} + \cdots + \beta_q w_{t-q}$$

e come per il modello AR, la previsione deriva direttamente dalle distribuzione condizionate. Per esempio per un MA(1) abbiamo

$$x_t = w_t + \beta w_{t-1}$$

Modello Moving Average di ordine q (MA(p)) VII

e la serie al tempo $t+1$ è

$$x_{t+1} = w_{t+1} + \beta w_t$$

Vediamo le connessioni con il modello AR(1). Il modello AR(1) è

$$(1-\alpha B)x_t = w_t \Rightarrow x_t = (1-\alpha B)^{-1} w_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j w_{t_j}$$

che quindi, può essere scritto come un $MA(\infty)$. Questo è vero anche per un generico $AR(p)$.
Un MA(q) può sempre essere visto come un AR(∞), e quindi non è mai markoviano'

ARMA model I

Modello ARMA(p,q)

I modelli AR e MA sono tutto ciò che ci serve per modellare processi gaussiani stazionari visto che

Teorema di rappresentazione di Wold

Qualsiasi processo stocastico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ debolmente stazionario di ordine 2 a media nulla può essere espresso come

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j w_t$$

con w_t rumore bianco (media zero e varianza finita, non per forza Gaussiano), assumendo

$$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 < \infty$$

Quindi un processo gaussiano si può sempre rappresentare con un $MA(\infty)$. La serie non deve per forza essere infinita.

ARMA model II

Possiamo mettere insieme il modello AR(p) e MA(q) in un unico modello, chiamato ARMA(p,q) nel seguente modo

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \dots \alpha_p x_{t-p} + w_t + \beta_1 w_{t-1} + \dots \beta_q w_{t-q}$$

In questo caso x_t segue un modello ARMA(p,q).

Attenzione: Nel modello ARMA, e in tutti i seguenti, visto che sono formati da componenti AR e MA, previsione, e valori medi diversi da zero si calcolano/aggiungono come si è fatto per i primi due modelli

Il modello si può scrivere in forma più concisa usanto i polinomi backshift

$$\theta_p(B) x_t = \phi_q(B) w_t$$

Notate che

ARMA model III

- Il processo è stazionario se le radici di $\theta_p(B)$ sono maggiori di 1 in valore assoluto
- Il processo è invertibile se le radici di $\phi_q(B)$ sono maggiori di 1 in valore assoluto
- ARMA(p,0) è un AR(p)
- ARMA(0,q) è un MA(q)
- In generale, la stima di un ARMA richiede meno parametri di quelle che sarebbero necessari per un AR() o un MA(), visto che se $\theta_p(B)$ e $\phi_q(B)$ hanno un fattore in comune, e il modello è stazionario, allora si possono semplificare. Per esempio, se

$$\left(1-\frac{1}{2}B\right)\left(1-\frac{1}{3}B\right)x_t=\left(1-\frac{1}{2}B\right)w_t$$

può essere semplificato in

$$\left(1-\frac{1}{3}B\right)x_t=w_t$$

ARMA model IV

Anche in questo caso trovare le proprietà (autocorrelazione e autocovarianza) per un generico ARMA(p,q) è complesso, ma possiamo farlo nel caso ARMA(1,1). Ipotizziamo di avere

$$x_t = \alpha x_{t-1} + w_t + \beta w_{t-1} \Rightarrow (1-\alpha B)x_t = (1+\beta B)w_t \Rightarrow x_t = (1-\alpha B)^{-1}(1+\beta B)w_t$$

che può essere anche scritto come

$$x_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j B^j\right)(1+\beta B)w_t = \left(1 + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j B^{j+1} + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j B^{j+1}\right) w_t =$$

$$w_t + (\alpha+\beta)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j B^{j+1} w_t = w_t + (\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{j-1} w_{t-j}$$

L'equazione di sopra mostra che $E(x_t) = 0$ e

$$Var(X_t) = \sigma^2 + \sigma^2(\alpha+\beta)^2 \frac{1}{1-\alpha^2}$$

ARMA model V

e possiamo calcolare facilmente

$$\gamma(k) = Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(w_t + (\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{j-1}w_{t-j}, w_{t-k} + (\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{j-1}w_{t-k-j})$$

$$\gamma(k) = (\alpha+\beta)\alpha^{k-1}\sigma^2 + (\alpha+\beta)^2\sigma^2\alpha^k\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{2j-2} =$$

$$(\alpha+\beta)\alpha^{k-1}\sigma^2 + (\alpha+\beta)^2\sigma^2\alpha^k\frac{1}{1-\alpha^2}$$

e si può dimostrare che

$$\rho(k) = \frac{\alpha^{k-1}(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)}{1+\alpha\beta+\beta^2} = \alpha\rho(k-1)$$

I modelli integrati I

Integreted model

Prendiamo un semplice caso di un modello che ha senso e potrebbe essere utile per analizzare un fenomeno, ma non è un ARMA:

$$x_t = x_{t-1} + w_t$$

Questa assomiglia a un AR(1), con parametro $\alpha = 1$, che abbiamo detto essere quindi non stazionario, ma è utile nei casi pratici perchè ci dice che la posizione al tempo t e una traslazione basata su w_t di dove eravamo al tempo precedente. Potremmo prendere le differenze prime

$$x_t^* = x_t - x_{t-1} = w_t$$

e il modello basato su x_t^* diventa un rumore bianco. Questa è la definizione base di un serie integrata di ordine 1 (I(1)).
In generale

I modelli integrati II

Modello Integrato I(d)

Una serie si dice integrata di ordine d se la differenziazioni di ordine d produce un rumore bianco:

$$(1 - B)^d x_t = (1 - B)(1 - B) \dots (1 - B) x_t = w_t$$

I modelli integrati III

Le serie integrate possono essere utili ma le differenze (di diversi ordini) si possono usare anche per passare da modelli non stazionari a modelli ARMA. Prendiamo un semplice esempio in cui

$$x_t = a + bt + w_t$$

non è stazionario. Se prendessimo le differenze prime

$$x_t - x_{t-1} = a + bt + w_t - a - b(t-1) - w_{t-1} = b + w_t - w_{t-1}$$

la serie è stazionaria. Fate attenzione che $x_t - x_{t-1} = (1-B)x_t$ è un MA(1), con parametro $\beta = -1$ e quindi non invertibile, con valore medio differente da zero.

Scriviamo

$$(1-B)x_t = b + (1-B)w_t$$

I modelli integrati IV

Se vogliamo togliere il valor medio, e renderlo zero. possiamo differenziare un'altra volta

$$(1-B)(1-B)x_t = (1-B)^2 x_t = b + (1-B)w_t - b - (1-B)w_{t-1} =$$

$$(1-B)(w_t - w_{t-1}) = (1-B)(1-B)w_t = (1-B)^2 w_t$$

che è anche uguale a

$$(1-B)(1-B)x_t = w_t - 2Bw_t + B^2 w_t = w_t - 2w_{t-1} + w_{t-2}$$

che è un MA(2). Vediamo sotto delle simulazioni di x_t e delle differenze prime e seconde

I modelli integrati V

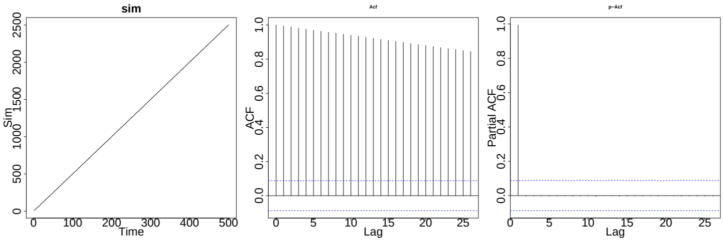

Figure: Simulazione di un rumore bianco con trend

I modelli integrati VI

Code: Codice della figura

```
set.seed(500)
n = 500
a = 1
b = 5
x = rnorm(n,a+b*1:n,2.5^0.5)
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(x, type="l", main="sim", cex.main=3,
        cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

I modelli integrati VII

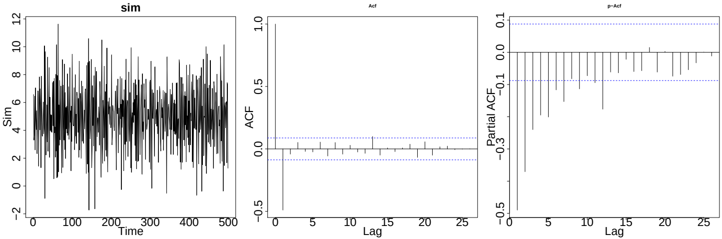

Figure: Simulazione di un rumore bianco con trend - differenze prime

I modelli integrati VIII

Code: Codice della figura

```
set.seed(500)
n = 500
a = 1
b = 5
x = rnorm(n,a+b*1:n,2.5^0.5)
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(diff(x), type="l", main="sim", cex.main=3,
        cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(diff(x), main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(diff(x), main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

I modelli integrati IX

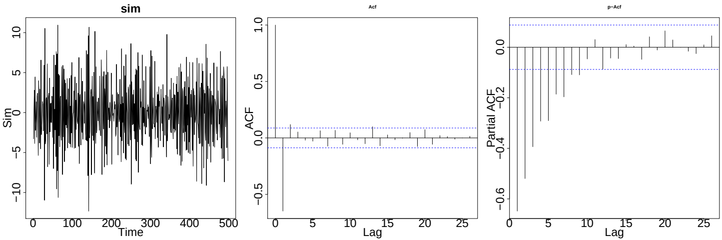

Figure: Simulazione di un rumore bianco con trend - differenze seconde

I modelli integrati X

Code: Codice della figura

```
set.seed(500)
n = 500
a = 1
b = 5
x = rnorm(n,a+b*1:n,2.5^0.5)
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(diff(diff(x)), type="l", main="sim", cex.main=3,
        cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(diff(diff(x)), main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=
pacf(diff(diff(x)), main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.ax
```

I modelli integrati XI

Si può dimostrare che un ARIMA

- per eliminare un trend deterministico di ordine d (del tipo $a + bt + ct^2 + \dots ht^d$), servono d differenziazioni
- per eliminare un trend stocastico di ordine d (del tipo $x_{t-1} + x_{t-2} + \dots, x_{t-d}$), servono d differenziazioni.
- se si differenzia a livello d per eliminare un trnd deterministivo, si introduce una componente stagionale di ordine d nella parte MA

Un modello che integrato d volte produce un ARMA si dice ARIMA di parametri (p,d,q) si può scrivere come

$$\theta_p(B)(1 - B)^d x_t = \phi_q(B) w_t$$

Attenzione: prima di integra, e poi il modello è ARMA sulle differenze.

Esempi:

I modelli integrati XII

Il modello

$$x_t = x_{t-1} + w_t + \beta w_{t-1}$$

si può scrivere come

$$x_t - x_{t-1} = (1 - B)x_t = w_t + \beta w_{t-1}$$

che è un ARMA(0,1,1), che si scrive anche come IMA(1,1), cioè integrated MA.
Un esempio di simulazione è mostrata sotto per il x_t (prima figura) e e per $(1 - B)x_t$ (seconda figura)

I modelli integrati XIII

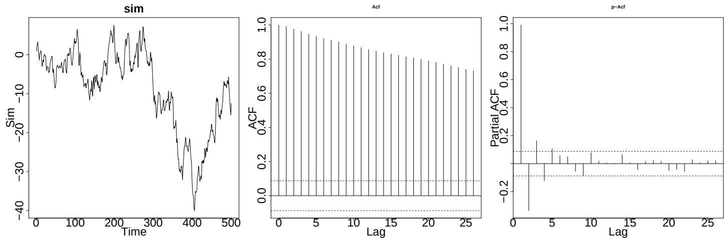

Figure: Simulazione dell ARIMA(0,1,1) dell'esempio precedente

I modelli integrati XIV

Code: Codice della figura

```
set.seed(100)
x = c()
beta1      = 0.5
sigma2   = 1.5
w = rnorm(1000, 0, sigma2^0.5)
x[1:4] = 0
for(i in 4:600)
{
  x[i] = x[i-1]+w[i]+beta1*w[i-1]
}
x = x[-c(1:100)]
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
```

I modelli integrati XV

```
plot(x, type="l", main="sim", cex.main=3,
    cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

I modelli integrati XVI

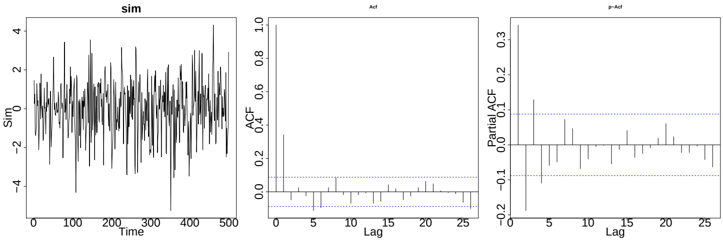

Figure: Simulazione dell ARIMA(0,1,1) dell'esempio precedente

I modelli integrati XVII

Code: Codice della figura

```
set.seed(100)
x = c()
beta1     = 0.5
sigma2  = 1.5
w = rnorm(1000, 0, sigma2^0.5)
x[1:4] = 0
for(i in 4:600)
{
  x[i] = x[i-1]+w[i]+beta1*w[i-1]
}
x = x[-c(1:100)]
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
```

I modelli integrati XVIII

```
plot(diff(x), type="l", main="sim", cex.main=3,
    cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(diff(x), main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(diff(x), main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Un altro esempio è il modello

$$x_t = \alpha x_{t-1} + x_{t-1} - \alpha x_{t-2} + w_t$$

si può scrivere come

$$(1-B)x_t = x_t - x_{t-1} = \alpha(x_{t-1} - x_{t-2}) + w_t = \alpha(1-B)x_{t-1} + w_t$$

è un ARIMA(1,1,0), o IAR(1,1). Un esempio di simulazione è mostrata sotto per il x_t (prima figura) e e per $(1-B)x_t$ (seconda figura)

I modelli integrati XIX

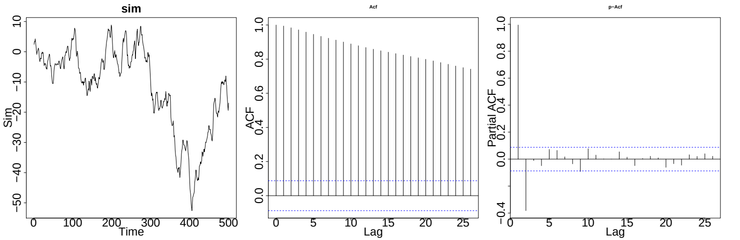

Figure: Simulazione dell ARIMA(1,1,0) dell'esempio precedente

I modelli integrati XX

Code: Codice della figura

```
set.seed(100)
x = c()
alpha     = 0.5
sigma2  = 1.5
w = rnorm(1000, 0, sigma2^0.5)
x[1:4] = 0
for(i in 4:600)
{
  x[i] = alpha*x[i-1]+x[i-1]-alpha*x[i-2]+w[i]
}
x = x[-c(1:100)]
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
```

I modelli integrati XXI

```
plot(x, type="l", main="sim", cex.main=3,
    cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(x, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(x, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

I modelli integrati XXII

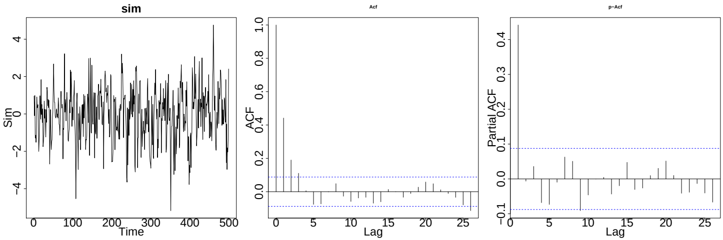

Figure: Simulazione dell ARIMA(1,1,0) dell'esempio precedente

I modelli integrati XXIII

Code: Codice della figura

```
set.seed(100)
x = c()
alpha      = 0.5
sigma2   = 1.5
w = rnorm(1000, 0, sigma2^0.5)
x[1:4] = 0
for(i in 4:600)
{
  x[i] = alpha*x[i-1]+x[i-1]-alpha*x[i-2]+w[i]
}
x = x[-c(1:100)]
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
```

I modelli integrati XXIV

```
plot(diff(x), type="l", main="sim", cex.main=3,
    cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(diff(x), main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(diff(x), main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```

Modello ARIMA stagionale I

Stagionalità

La stagionalità è una caratteristica spesso presente nelle serie temporale, sia in forma di modello integrato (trend stocatici e deterministici) che di AR o MA. Per esempio, immaginiamo che x_t sia la temperatura e t rappresenti il mese/anno. Potremmo avere

- 1) $x_t = a_{t\text{mod}12} + w_t$, un rumore bianco con un valore medio che cambia ongni mese e si ripete ogni 12
- 2) $x_t = x_{t-12} + w_t$, un modello integrato in cui la temperatura in un mese è una variazione dello stesso mese nell'anno precedente
- 3) $x_t = \alpha_1 x_{t-12} + \alpha_2 x_{t-24} + w_t$, un AR(2) ma su base stagionale
- 4) $x_t = w_t + \beta_1 w_{t-12} + \beta_2 w_{t-24}$, un MA(2) ma su base stagionale

Modello ARIMA stagionale II

Questi non sono gli unici casi, ma fanno capire le modellizzazioni. Come per i modelli ARIMA, il punto 1 e 2 si possono risolvere differenziando, ma con un distanza temporale di 12

$$(1 - B^{12})x_t = (1 - B^{12})w_t$$

e

$$(1 - B^{12})x_t = w_t$$

Il punto 3 si può scrivere come un AR(2) ma con polinomio autoregressivo a potenza 12

$$(1 - \alpha_1 B^{12} - \alpha_2 B^{24})x_t = w_t$$

Il punto 4 si può scrivere come un MA(2) ma con polinomio a media mobile a potenza 12

$$x_t = (1 + \beta_1 B^{12} - \beta_2 B^{24})w_t$$

Modello ARIMA stagionale III

I modello sopra potrebbero essere parti di modelli con componenti ARIMA standard, per esempio

$$x_t = x_{t-1} + \alpha x_{t-12} - \alpha x_{t-13} + w_t$$

si può scrivere come

$$(1 - B)x_t = \alpha(1 - B)x_{12} + w_t \Rightarrow (1 - \alpha B^{12})(1 - B)x_t = w_t$$

Se definiamo

$$\Theta_P(B^s) = (1 - \alpha_1^* B^{1s} - \alpha_2^* B^{2s} - \cdots - \alpha_P^* B^{Ps})$$

dove s rappresenta la stagionalità, e

$$\Phi_Q(B^s) = (1 + \beta_1^* B^{1s} + \beta_2^* B^{2s} + \cdots + \beta_P^* B^{Ps})$$

un modello che si può scrivere come

$$\Theta_P(B^s)\theta_p(B)(1 - B^s)^D(1 - B)^d x_t = \Phi_Q(B^s)\phi_q(B)w_t$$

Modello ARIMA stagionale IV

è un arima stagionale ARIMA$(p, d, q)(P, D, Q)_s$

Naturalmente un effetto stagionala di periodo s introduce correlazione tra osservazioni a distanze s. L'effetto stagionale può essere facilmente visto dal correlogramma.
Esempi classici di effetti stagionali deterministici sono

- un classico effetto "fattore", simile ai modelli regressivi, dove tutti i punti temporali $i + s$, con $s \in \mathbb{Z}$, hanno lo stesso valore del fattore:

$$x_t = a_{t \text{ mod } s} + w_t$$

- una funzione ciclica, del tipo seno/coseno

$$x_t = \psi \sin(2\pi\lambda t + \phi) + w_t$$

  dove (ψ, λ, ϕ) sono parametri.

Modello ARIMA stagionale V

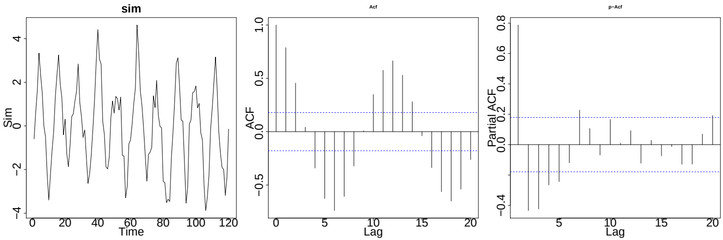

Figure: Simulazione di un AR(1) con effetto stagionale di lunghezza 12

Modello ARIMA stagionale VI

Code: Codice della figura

```
x = c()
alpha   = 0.8
sigma2  = 0.5
x[1] = rnorm(1,0,(sigma2/(1-alpha^2))^0.5)
beta = rep(c(0,1,2,3,2,1,0,-1,-2,-3,-2,-1), times=10)
for(i in 2:120)
{
  x[i] = rnorm(1,alpha*x[i-1],sigma2^0.5)
}
y = x+beta
par(mfrow=c(1,3))
par("mar"=c(5, 5, 4, 2))
plot(y, type="l", main="sim", cex.main=3,
```

Modello ARIMA stagionale VII

```
        cex.lab=3, cex.axis=3, xlab="Time", ylab="Sim")
acf(y, main="Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
pacf(y, main="p-Acf", cex.main=3, cex.lab=3, cex.axis=3)
```