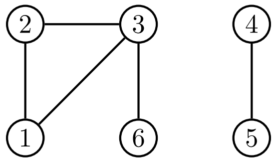
Dinamiche di Consenso su grafi

Esercizio 1. Sia $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ il seguente grafo



1. Caratterizzare il grafo $\mathcal{G}$ in termini di connettività e periodicità.
2. 1 è un autovalore di P? Se sì, con che molteplicità?
3. Si stabilisca, senza calcoli espliciti, se -1 è un autovalore di P.
4. Si determinino tutte le misure invarianti π.
5. Definiamo la dinamica $x(t+1) = Px(t)$. Converge a un vettore $\mathbb{1}\pi' x(0)$?
6. Si consideri il caso in cui viene aggiunto al grafo l'arco $(3,5)$ o l'arco $(5,3)$. In questi due casi la dinamica $x(t+1) = Px(t)$ converge a un vettore $\mathbb{1}\pi' x(0)$?

Soluzione. 1) Il grafo $\mathcal{G}$ non è connesso. Esso è formato da due componenti fortemente connesse. La componente $\{1,2,3,6\}$ è aperiodica. La componente $\{4,5\}$ ha periodo 2. Il grafo di condensazione associato è costituito da due sink.

2) Per il teorema di Perron-Frobenius, 1 è un autovalore di P. La molteplicità dell'autovalore 1 è pari al numero di sink nel grafo di condensazione, quindi è pari a 2.

3) La componente connessa $\{4,5\}$ è bipartita. Risulta quindi immediato verificare che -1 appartiene allo spettro di P. Infatti, l'autovalore -1 risulta associato all'autovettore $(0,0,0,1,-1,0)$.

4) Per trovare tutte le misure invarianti, osserviamo che, avendo l'autovalore 1 molteplicità 2, esistono due misure invarianti linearmente indipendenti. E' possibile trovarne una supportata sulla prima componente connessa ed una supportata sulla seconda (misure estremali). La prima misura estremale si può ottenere calcolando la misura invariante $\pi^{(1)}$ della restrizione della matrice P alla prima componente connessa e poi estendendola a zero sui nodi restanti. La prima componente connessa costituisce un grafo indiretto (quindi bilanciato), dunque la sua misura invariante $\pi^{(1)}$ è proporzionale al suo vettore dei gradi $w^{(1)}$:

$$\pi^{(1)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right)'.$$

Analogamente, per quanto riguarda la seconda componente connessa

$$\pi^{(2)} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)'.$$

Tutte le misure invarianti sono quindi generate da una combinazione convessa delle due estremali, ovvero:

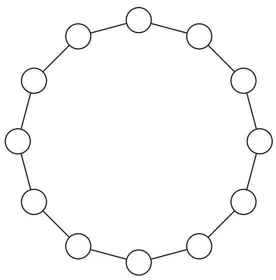
$$\pi = \tau\pi^{(1)} + (1-\tau)\pi^{(2)} = \left(\frac{\tau}{4}, \frac{\tau}{4}, \frac{3}{8}\tau, \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{8}\right)', \quad \tau \in [0,1].$$

5) La dinamica $x(t+1) = Px(t)$ non sempre converge ad un vettore della forma $\mathbb{1}\pi' x(0)$, dove π è una misura invariante. Ad esempio, considerando la condizione iniziale $x(0) = (0,0,0,-1,1,0)$

la dinamica oscilla, a causa della periodicità della componente connessa $\{4, 5\}$. Se entrambe le componenti fossero aperiodiche, la dinamica convergerebbe a consenso sui due sottografi, ma i due consensi potrebbero essere diversi. Ad esempio, aggiungendo un selfloop $(4, 4)$ che renda il grafo aperiodico, la condizione iniziale $x(0) = (1, 1, 1, 2, 2, 1)$ è un equilibrio della dinamica tale per cui nei due sottografi c'è consenso, ma il valore del consenso nelle due componenti connesse differisce.

6) Nel caso in cui si aggiunge l'arco $(3, 5)$ il grafo possiede una sola sink component, ma essa è periodica. La dinamica quindi in generale non converge al consenso, ma se $x_4(0) = x_5(0)$ la dinamica converge ad un consenso del tipo $\mathbb{1}x_4(0) = \mathbb{1}x_5(0)$. Invece, nel caso in cui si aggiunge l'arco $(5, 3)$ l'unico sink component del grafo è $\{1, 2, 3, 6\}$, che è aperiodico. La dinamica dunque convergerà ad un consenso, e il valore del consenso dipende esclusivamente dallo stato iniziale dei nodi della componente connessa $\{1, 2, 3, 6\}$.

Esercizio 2. Si consideri un anello C_n con n pari. Si determini se la dinamica $x(t + 1) = Px(t)$ converge. Si consideri poi il tempo di rilassamento della dinamica lazy su un grafo completo e lo si confronti col tempo di rilassamento su anello per $n \to +\infty$.



Nota. Sia C una matrice circolante, ovvero una matrice la cui prima riga è il vettore $c = (c_0, \dots, c_{n-1})$ e le righe successive sono ottenute con uno shift di una posizione verso destra della riga precedente e mettendo nella prima posizione l'ultimo della riga precedente. Un esempio di matrice circolante è

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $c = (0, 0.2, 0.8, 0)$. Siano $\omega_k = \exp\left\{\frac{2\pi i}{n}k\right\}$ $(k = 0, \dots, n-1)$ le n radici n-esime dell'unità in $\mathbb{C}$. Si può dimostrare che $\sigma(C) = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}\}$ è formato dai seguenti autovalori

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega_k^j,$$

con i rispettivi autovettori $x^{(k)} = (1, \omega_k, \omega_k^2, \dots, \omega_k^{n-1})'$.

Soluzione. Osserviamo che il grafo è fortemente connesso ma, se n è pari, C_n è bipartito, dunque non è aperiodico e la convergenza della dinamica lineare di averaging non può essere garantita. Per ottenere l'aperiodicità, definiamo la matrice Q di un LRW su C_n. Si avrà così convergenza della dinamica $x(t + 1) = Qx(t)$, dove

$$Q = \frac{1}{2}(I + P).$$

Il valore limite per $x(t)$ è $(\pi' x(0))\mathbb{1}$, dove $\pi = \frac{1}{n}\mathbb{1}$ è la distribuzione di probabilità invariante di P. Lo spettro di Q può essere ottenuto considerando che

$$\mu \in \sigma(P) \iff \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu \in \sigma(Q).$$

C_n è circolante, con $c = (0, 1, 0, \cdots, 1)$. Otteniamo che gli autovalori di W sono nella forma

$$\begin{aligned}\mu_k &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega_k^j = \omega_k + \omega_k^{n-1} = \exp\left\{\frac{2\pi i}{n}k\right\} + \exp\left\{\frac{2\pi(n-1)i}{n}k\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{2\pi i}{n}k\right\} + \exp\left\{-\frac{2\pi i}{n}k\right\} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,\end{aligned}$$

Essendo il grafo 2-regolare, $P = W/2$, dunque lo spettro della matrice P si può ottenere come

$$\sigma(P) = \left\{\lambda_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right), \quad k = 0, \dots, n-1\right\}.$$

Di conseguenza

$$\sigma(Q) = \left\{\lambda_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right), \quad k = 0, \dots, n-1\right\}.$$

Il secondo autovalore dominante di Q è

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

corrispondente a $k = 1$. Ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin ($t \to 0$):

$$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3),$$

studiamo il comportamento asintotico di λ, e di conseguenza di $\tau_{rel} = \frac{1}{1-\lambda}$, per $n \to \infty$:

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \approx 1 - \frac{\pi^2}{n^2}.$$

Quindi

$$\tau_{rel} = \frac{1}{1-\lambda} \approx \frac{n^2}{\pi^2} \in O(n^2).$$

Per quanto riguarda il grafo completo abbiamo che

$$W = \mathbf{11'} - I.$$

Dato che $\mathbf{11'}$ ha tutte colonne uguali, il suo rango è 1. Quindi $\mathbf{11'}$ ha $n-1$ autovalori uguali a 0. L'ultimo autovalore può essere trovato usando il fatto che la somma degli autovalori è uguale alla traccia della matrice, che è 0 per la matrice in esame. Di conseguenza, lo spettro di W è

$$\sigma_W = \{n-1, -1, \cdots, -1\}$$

Dato che il grafo completo è regolare con grado $n-1$, $P = W/(n-1)$. Quindi lo spettro di P è

$$\sigma_P = \{1, -\frac{1}{n-1}, \cdots, -\frac{1}{n-1}\},$$

e lo spettro di Q è

$$\sigma_Q = \{1, -\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}\}$$

Questo implica che $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n-1)} = \frac{n-2}{2(n-1)}$. Ne consegue che

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_{rel} = 2,$$

cioè che per grafi completi infinitamente larghi il tempo di rilassamento è finito. Si noti che il tempo di rilassamento sul grafo completo è molto minore che sul grafo anello. Questo è dovuto al maggior numero di connessioni del grafo completo. Possiamo anche calcolare il ratio bottleneck delle due reti, definito come

$$\Phi = \min_{\substack{\mathcal{U}\subset\mathcal{V}:\\ 0<w_{\mathcal{U}}\leq\frac{1}{2}\mathbf{1}'w}} \frac{|\partial_{\mathcal{U}}|}{w_{\mathcal{U}}} \tag{1}$$

Sappiamo anche che

$$\frac{1}{2}\Phi^2 \leq 1-\lambda_2 \leq 2\Phi$$

Per il grafo ad anello, il sottoinsieme che consideriamo è quello connesso che contiene metà dei nodi della rete. In particolare si ha che il ratio bottleneck per l'anello è uguale a

$$\Phi = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}, \tag{2}$$

da cui si ricava la disuguaglianza

$$\frac{1}{2n^2} \leq 1-\lambda_2 \leq \frac{2}{n}.$$

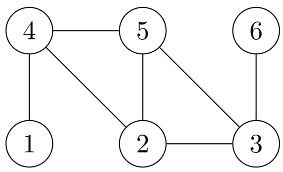
Per il grafo completo ogni sottoinsieme con $n/2$ nodi massimizza il ratio bottleneck, che in tal caso risulta uguale a

$$\Phi = \frac{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}\cdot(n-1)}, \tag{3}$$

il cui limite per $n\to+\infty$ è uguale $1/2$. In questo caso si ottiene che, quando $n\to+\infty$,

$$\frac{1}{8} \leq 1-\lambda_2 \leq 1.$$

Esercizio 3. Sia $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ il seguente grafo semplice



1. Caratterizzare il grafo $\mathcal{G}$ in termini di connettività e periodicità.
2. 1 è un autovalore di P? Se sì, con che molteplicità?
3. Si stabilisca, senza calcoli espliciti, se -1 è un autovalore di P?.
4. Si definisca la dinamica di massa $x(t+1)=P'x(t)$. Si mostri che $x(t)\to\pi\mathbf{1}'x(0)$. Si sfrutti questo fatto per la costruzione di un algoritmo iterativo per il calcolo distribuito della invariant distribution centrality.

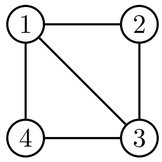
Soluzione. 1) Il grafo $\mathcal{G}$ è fortemente connesso e aperiodico.

2) Per il teorema di Perron-Frobenius, 1 è un autovalore di P ed ha molteplicità 1 perchè il grafo è fortemente connesso.

3) Il grafo $\mathcal{G}$ è fortemente connesso e aperiodico, di conseguenza tutti gli autovalori di P eccetto quello principale, hanno modulo strettamente minore di 1. Dunque -1 non è un autovalore di P.

4) Il grafo $\mathcal{G}$ è fortemente connesso e aperiodico, quindi la dinamica convergerà a una distribuzione proporzionale all'unica invariant distribution centrality della rete. La costante di proporzionalità è determinata dalla condizione iniziale ed è $\mathbf{1}'x(0)$. Dunque, l'algoritmo consiste nel considerare una qualsiasi condizione iniziale normalizzata e simulare la dinamica fino a convergenza a π (che è l'invariant distribution centrality).

Esercizio 4. Si consideri il seguente grafo



e si assuma che lo stato di ogni nodo rappresenti una stima di uno stato reale μ affetta da rumore, cioè

$$x_i = \mu + y_i,$$

con $E[y_i] = 0$. Si assuma che le y_i siano variabili i.i.d., con $\sigma^2(y_i) = \sigma^2$ per ogni i.

1. Si caratterizzi il comportamento asintotico della dinamica $x(t+1) = Px(t)$ con condizioni iniziale $x_i = \mu + y_i$.

2. Si quantifichi la varianza del consenso a cui la dinamica converge.

3. Si aggiunga o si rimuova un arco indiretto con l'obiettivo di minimizzare la varianza del valore di consenso della dinamica $x(t+1) = Px(t)$ sul grafo.

Soluzione. 1) Il grafo è connesso e aperiodico, dunque al convergenza è al consenso è garantita, cioè

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \alpha \mathbf{1}.$$

Il valore di consenso si può scrivere come

$$\alpha = \pi'(\mu \mathbf{1} + y) = \mu + \pi' y,$$

quindi

$$E[\alpha] = \mu + \pi' E[y] = \mu,$$

cioè, il valore di consenso è una variabile stocastica che non presenta bias.

2) La varianza è

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma^2 \sum_i \pi_i^2 \leq \sigma^2.$$

Si osservi che $\sum_i \pi_i^2 < 1$ a meno che la invariant distribution centrality sia nella forma $\pi = \delta^{(j)}$ per un qualche nodo j in $\mathcal{V}$, cioè la varianza del consenso è minore della varianza della condizione iniziale del singolo nodo. Questo effetto è noto come *wisodm of crowds.*

3) Il nostro obiettivo dunque diventa quello di aggiungere un arco che minimizzi $\sum_i \pi_i^2 < 1$, ricordando che per costruzione $\sum_i \pi_i = 1$. Questo problema di minimizzazione è risolto da $\pi_i = \mathbb{1}/4$. Il grafo in questione è indiretto, quindi $\pi_i \propto w_i$. Dobbiamo quindi intervenire sulla rete per rendere il grado di tutti i nodi uguale. Questo può essere ottenuto aggiungendo l'arco $\{2, 4\}$, o rimuovendo l'arco $\{1, 3\}$. Tuttavia, rimuovendo l'arco $\{1, 3\}$ il grafo diventa periodico, dunque la dinamica non converge più al consenso. Di conseguenza, l'unica possibilità è aggiungere l'arco $\{2, 4\}$.