# Homework III

- La soluzione degli esercizi *(ovvero un PDF contenente la risoluzione analitica degli esercizi e eventuali codici numerici* deve essere caricata sul portale del corso entro le ore 23:59 di domenica 19 Gennaio 2025, sotto il nome di Homework3. In caso di consegna in ritardo, il voto massimo sarà diminuito di 1 punto. In ogni caso, il PDF finale deve essere consegnato entro 5 giorni dalla data dell'esame orale.
- Le qualità dell'esposizione, la capacità di sintesi e la chiarezza del documento finale rientrano nella valutazione dell'homework. La scrittura del documento finale in Latex o in qualsiasi altro formato elettronico è fortemente incoraggiata. Se il documento finale è scritto a mano deve essere facilmente leggibile.
- La collaborazione e lo scambio di idee sono incoraggiati. In ogni caso, ogni studente deve sottomettere una copia del documento finale (in formato PDF) e del codice numerico (se presente), e specificare con chi ha collaborato e per quale specifica parte del lavoro.

---

**Esercizio 1.** Dato un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ di ordine $n = |\mathcal{V}| \geq 2$, privo di self-loop e tale che ogni nodo abbia grado uscente $w_i = \sum_j W_{ij} > 0$, si consideri il gioco quadratico con insieme dei giocatori $\mathcal{V}$, spazio delle azioni $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ coincidente con l'asse reale per ciascun giocatore e funzioni di utilità

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i \,, \qquad i \in \mathcal{V} \,,$$

dove $\beta \geq 0$ è un parametro scalare non negativo e $c \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}}$ è un vettore.

**(a)** Si determinino le funzioni di best response per ciascun giocatore.

**(b)** Si discutano esistenza e unicità degli equilibri di Nash al variare del parametro $\beta \geq 0$, dimostrando in particolare che esiste un unico equilibrio di Nash nel caso in cui

$$\beta w_i < 1 \,, \qquad \forall i \in \mathcal{V} \,. \tag{1}$$

**(c)** Si mostri che quando esiste ed è unico l'equilibrio di Nash

$$x^* = Mc$$

dipende linearmente dal vettore $c$, mostrando in particolare che, nel caso in cui vale la condizione (1), tale matrice $M$ ha componenti tutte non negative.

Si consideri ora il caso in cui vale la (1). Sia

$$y = \sum_{j \in \mathcal{V}} x_j^* \,.$$

**(d)** Si mostri che $y$ può essere espresso come il prodotto scalare tra il vettore $c$ e una versione opportunamente normalizzata del vettore di centralità di Katz del grafo.

**(e)** Si determini un'espressione per la varianza di $y$ nel caso in cui le componenti $c_i$ del vettore $c$ sono variabili aleatorie indipendenti a media nulla e varianza $\sigma_i^2$.

Nel caso in cui $c = \mathbb{1}$ e il grafo è indiretto, cioè $W' = W$, si consideri ora il problema di determinare il "key player" $i \in \mathcal{V}$ la cui rimozione dalla rete comporti la maggior riduzione di $y$. Più precisamente, per $i \in \mathcal{V}$, siano $W^{(-i)}$ la matrice ottenuta da $W$ rimuovendone la $i$-esima riga e la $i$-esima colonna e $\mathcal{G}^{(-i)}$ il grafo di insieme dei nodi $\mathcal{V} \setminus \{i\}$ e matrice dei pesi $W^{(-i)}$.

**(f)** Si mostri che per i $\beta$ per i quali la (1) è soddisfatta, il gioco quadratico sul grafo ristretto $\mathcal{G}^{(-i)}$ ammette un unico equilibrio di Nash

$$x^{*(-i)} = M^{(-i)} \mathbb{1} \,.$$

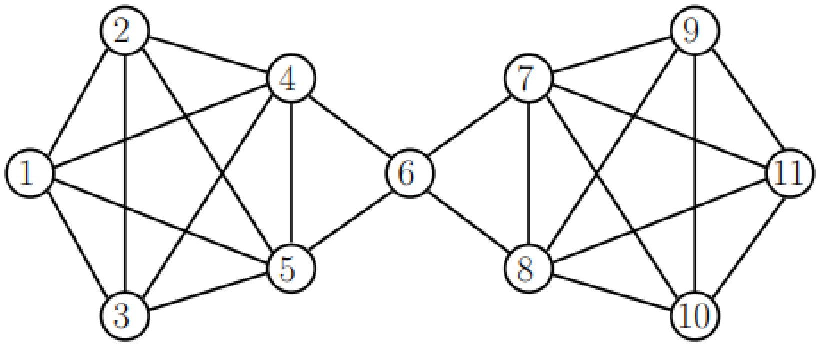


Figure 1: Grafo dell'Esercizio 1 (i).

**(g*) Facoltativo:** Si mostri che

$$M_{ij}M_{ik} = M_{ii}(M_{jk} - M_{jk}^{(-i)})$$

per ogni $k, j \in \mathcal{V} \setminus \{i\}$.

**(h)** Usando il punto (g) si dimostri che un nodo $i^*$ in $\mathcal{V}$ massimizza

$$y - y^{(-i)}\,, \qquad y^{(-i)} = \sum_{j \neq i} x_j^{*(-i)}$$

se e solo se $i^*$ massimizza il rapporto

$$z_i^2/M_{ii}$$

dove $z = M\mathbb{1}$.

**(i)** Nell caso particolare in cui $W$ è la matrice di adiacenza del grafo semplice riportato in Figura 1, per valori $\beta = 0.1$ e $\beta = 0.2$, si calcolino le quantità $z_i$ e $M_{ii}$ per ciascun nodo $i$ e si individui un "key player" (potete risolvere numericamente il problema tramite Matlab o tramite qualsiasi altro software).

**Esercizio 2.** Si consideri un gioco $(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \{u_i\})$ con insieme dei giocatori $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ e insieme delle azioni $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$. I giocatori sono divisi in due classi, $\mathcal{V}_1 = \{1, \dots, n_1\}$ e $\mathcal{V}_2 = \{n_1 + 1, \dots n\}$, e le funzioni utilità sono date da

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |x_i + x_j| \text{ se } i \in \mathcal{V}_1 \\ \\ \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |x_i - x_j| \text{ se } i \in \mathcal{V}_2 \end{cases}$$

In altre parole i giocatori in $\mathcal{V}_1$ hanno la funzione utilità di un gioco di coordinamento, mentre quelli in $\mathcal{V}_2$ hanno la funzione utilità di un gioco di anti-coordinamento. Si determinino gli eventuali equilibri di Nash (a strategia pura) del gioco nei casi in cui $n = 3$ e:

**(a1)** $n_1 = 3$;

**(a2)** $n_1 = 2$;

**(a3)** $n_1 = 1$;

**(a4)** $n_1 = 0$.

Si studi in dettaglio la catena di Markov $X(t)$ corrispondente alla dinamica di *best response* asincrona per il gioco di sopra (potete scegliere se studiare la dinamica a tempo continuo o quella a tempo discreto). In particolare, se ne rappresenti il grafo delle transizioni di configurazione con i relativi *rate (o probabilità)* di transizione e si determini il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(X(t) = x | X(0) = (+1, -1, +1)) \, , \qquad x \in \{-1, +1\}^3$$

della distribuzione di probabilità condizionata alla configurazione iniziale $X(0) = (+1, -1, +1)$ nei casi in cui $n = 3$ e:

**(b1)** $n_1 = 3$;

**(b2)** $n_1 = 2$.

**Esercizio 3.** Si consideri una rete stradale con due nodi $\mathcal{V} = \{o, d\}$ e due link paralleli $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$, entrambi con nodo coda $o$ e nodo testa $d$. Il link $i$-esimo, per $i = 1, 2$, ha una funzione di ritardo $\tau_i(x)$ pedaggio $\omega_i \in [0, 1]$, così che il costo percepito dall'utente su tale link è $\omega_i + \tau_i(f_i)$, dove $f_i \geq 0$ è il flusso sul link $e_i$. Si assuma che

$$\tau_1(x) = 0\,, \qquad \tau_2(x) = \frac{3}{2}x\,,$$

e si consideri un flusso unitario $(f_1, f_2) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}}$, $f_1 + f_2 = 1$.

**(a)** Si determini il flusso di equilibrio di Wardrop $(f_1^{(\omega)}, f_2^{(\omega)})$ come funzione del vettore dei pedaggio $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

Si consideri ora un gioco a due giocatori con insieme delle azioni $\mathcal{A} = [0, 1]$ in cui i giocatori sono i gestori dei due link, e l'azione e la funzione di utilità del giocatore $i$-esimo sono rispettivamente il pedaggio $\omega_i$ e l'incasso al corrispondente equilibrio di Wardrop:

$$u_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i f_i^{(\omega)}\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

**(b)** Si determinino le funzioni *best response* $\mathcal{B}_1(\omega_2)$ e $\mathcal{B}_2(\omega_1)$;

**(c)** Si determini l'equilibrio di Nash del gioco.

**Esercizio 4.** Si consideri un modello SIR su un anello con $n$ nodi, dove al tempo $t = 0$ un solo nodo è infetto e tutti gli altri sono suscettibili. Si identifichino gli stati assorbenti che possono essere raggiunti e si calcolino la probabilità che il numero asintotico di recovered sia uguale a $k$, per ogni $k = 0, \cdots, n$.

**Esercizio 5.** Si consideri il modello Erdos-Renyi $\mathcal{G}(n, p)$.

1. Si calcoli la probabilità che il grafo sia una stella di $n$ nodi.
2. Si calcoli il numero atteso di stelle isolate di $k$ nodi contenute all'interno del grafo.