Estratto da Gasparini, M. (2014) *Modelli probabilistici e statistici*, CLUT.

ANOVA a un fattore (a una via), modello bilanciato e sovraparametrizzato (rango non pieno)

$Y_{ik} = \nu + \alpha_i + \epsilon_{ik}, i = 1, \ldots, I,\ k = 1, \ldots, K,$

$Y_{ik} =$ $k-$esima osservazione all' $i-$esimo livello del trattamento (o fattore)

$\alpha_i =$ $i-$esimo effetto principale del trattamento

fonte	somme di quadrati	gradi di libertà	medie di quadrati	valori F
trattamento (between)	$\mathrm{SS_T} = \mathrm{RSS_0} - \mathrm{RSS} = K\sum_{i=1}^{I}(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$	$I - 1$	$\mathrm{MS_T} = \frac{\mathrm{SS_T}}{(\mathrm{I}-1)}$	$\frac{\mathrm{MS_T}}{\mathrm{MSR}}$ test di tutti $\alpha_i = 0$
residui (within)	$\mathrm{RSS} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ik} - \bar{Y}_{i.})^2$	$I(K-1)$	$\mathrm{MSR} = \frac{\mathrm{RSS}}{I(K-1)}$	
totale	$\mathrm{RSS_0} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ik} - \bar{Y}_{..})^2$	$IK - 1$		

Estratto da Gasparini, M. (2014) *Modelli probabilistici e statistici*, CLUT.

ANOVA a due fattori (a due vie), modello bilanciato e sovraparametrizzato (rango non pieno)

$$
\begin{aligned}
Y_{ijk} &= \nu + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} + \epsilon_{ijk}, i = 1, \ldots, I,\ j = 1, \ldots, J,\ k = 1, \ldots, K, \\
Y_{ijk} &= k\text{−esima osservazione all' } i\text{−esimo livello del fattore A e al } j\text{−esimo livello del fattore G} \\
\alpha_i &= i\text{−esimo effetto principale del fattore A} \\
\gamma_j &= j\text{−esimo effetto principale del fattore G} \\
(\alpha\gamma)_{ij} &= ij\text{−esima interazione tra A e G}
\end{aligned}
$$

fonte	somme di quadrati	gradi di libertà	medie di quadrati	valori F
effetti A	$\mathrm{SS_A} = JK\sum_{i=1}^{I}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$	$I-1$	$\mathrm{MS_A} = \frac{\mathrm{SS_A}}{(I-1)}$	$\frac{\mathrm{MS_A}}{\mathrm{RMS}}$ test di tutti $\alpha_i = 0$
effetti G	$\mathrm{SS_G} = IK\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$	$J-1$	$\mathrm{MS_G} = \frac{\mathrm{SS_G}}{(J-1)}$	$\frac{\mathrm{MS_G}}{\mathrm{RMS}}$ test di tutti $\gamma_j = 0$
interazioni AG	$\mathrm{SS_{AG}} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2$	$(I-1)(J-1)$	$\mathrm{MS_{AG}} = \frac{\mathrm{SS_{AG}}}{(I-1)(J-1)}$	$\frac{\mathrm{MS_{AG}}}{\mathrm{RMS}}$ test di tutti $(\alpha\gamma)_{ij} = 0$
residui	$\mathrm{RSS} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$	$IJ(K-1)$	$\mathrm{RMS} = \frac{\mathrm{RSS}}{IJ(K-1)}$	
totale	$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$	$IJK-1$		

Esempi di applicazioni in R alla pagina web: `https://www.statmethods.net/stats/anova.html`