Teoria dei Grafi

Connettività, Teoria spettrale, Misure di centralità e Alberi.

Per contattarmi: leonardo.cianfanelli@polito.it

Esercizio 1. Si consideri il grafo descritto dalla seguente matrice di adiacenza:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini la matrice dei pesi normalizzata P e la matrice Laplaciana L del grafo e si verifichi che $L\mathbb{1} = 0$, $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$.

b) Si stabilisca se il grafo è bilanciato e/o regolare.

c) Si calcoli la misura di probabilità invariante π e la misura di probabilità invariante di Laplace $\bar{\pi}$.

Soluzione. a) Il vettore dei gradi uscenti, la matrice Laplaciana e la matrice dei pesi normalizzata sono:

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L = D - W = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } P = D^{-1}W = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $D = diag(w)$.

b) La matrice di adiacenza è simmetrica, dunque il grafo è indiretto e si può concludere immediatamente che è bilanciato. Alternativamente, si può osservare che w è autovettore di P' relativo all'autovalore 1 se e solo se il grafo è bilanciato. Perciò, poichè in questo caso vale che $P'w = w$, il grafo è bilanciato ($w^- = w^+ = w$). Si osserva che $\nexists \alpha : w = \alpha\mathbb{1}$, cioè il vettore dei gradi w non è un vettore costante, dunque il grafo non è regolare. Alternativamente, si può osservare che se il grafo è regolare, allora $\mathbb{1}$ è autovettore di P' relativo a 1. In questo caso $P'\mathbb{1} \neq \mathbb{1}$ perciò il grafo non è regolare.

c) Ricordiamo che si dicono distribuzione di probabilità invariante (π) e distribuzione di probabilità invariante di Laplace ($\bar{\pi}$) dei vettori non negativi tali che

$$\begin{aligned} \mathbb{1}'\pi &= \mathbb{1}'\bar{\pi} = 1 \\ P'\pi &= \pi \\ L'\bar{\pi} &= 0\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che la matrice W ha tutte le entrate non diagonali non nulle, da cui si deduce che il grafo è connesso. Sappiamo dunque che le due misure π e $\bar{\pi}$ sono uniche. Inoltre, abbiamo verificato al punto b) che $P'w = w$, cioè w è autovettore di P' relativo all'autovalore 1. Per ottenere π basta quindi normalizzare w:

$$\pi = \frac{w}{\mathbb{1}'w} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 3/8 \\ 2/8 \end{pmatrix}.$$

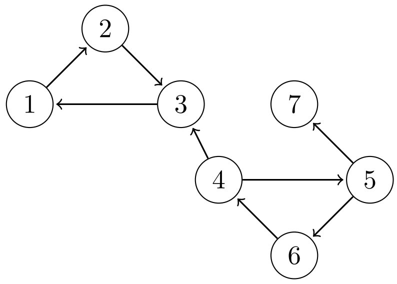
Infine, ricordiamo che un vettore $\bar{y}$ è nel nucleo di L' se e solo se $\bar{y} = D^{-1}y$ per qualche y tale che $P'y = y$. Quindi per ottenere $\bar{\pi}$ è sufficiente calcolare $D^{-1}w$, il cui risultato è

$$D^{-1}w = \mathbb{1}$$

e normalizzare il risultato, ottenendo

$$\bar{\pi} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Si noti che, come accade in generale, $\pi \neq \bar{\pi}$.



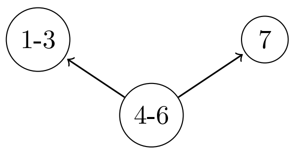
Esercizio 2. Si consideri il grafo in figura.

a) Si disegni il grafo di condensazione associato. Quanti sink contiene?

b) Il grafo è fortemente connesso?

c) Si determinino tutte le distribuzioni di probabilità inviarianti $\pi = P'\pi$ per la rete data.

Soluzione. a) Il grafo di condensazione contiene due sink ed è disegnato nella figura sottostante.



b) Il grafo non è fortemente connesso. Infatti, il grafo di condensazione non è costituito da un unico nodo.

c) Si ricordi che per un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ valgono i seguenti fatti: **(i)** Per ogni sink nel grafo di condensazione $\mathcal{H}$ di $\mathcal{G}$, esiste una distribuzione di probabilità invariante supportata sulla componente connessa di $\mathcal{G}$ corrispondente a tale sink. Queste distribuzioni sono dette estremali. **(ii)** Ogni distribuzione di probabilità invariante può essere ottenuta come combinazione convessa delle distribuzioni estremali associate ai sink del grafo di condensazione.

Nota. La combinazione deve essere convessa. Altre combinazioni lineari risulterebbero in vettori che non sono distribuzioni di probabilità.

Poichè il grafo di condensazione $\mathcal{H}$ del grafo $\mathcal{G}$ dato ha esattamente due sink, esistono due distribuzioni estremali, $\pi^{(1)}$ e $\pi^{(2)}$. Queste sono supportate sulle componenti connesse corrispondenti ai due sink, cioè

$$\begin{aligned}\pi^{(1)} &= (\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \pi_3^{(1)}, 0, 0, 0, 0)\\ \pi^{(2)} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, \pi_7^{(2)})'\,.\end{aligned}$$

Le ultime tre equazioni del sistema $\pi^{(1)} = P'\pi^{(1)}$ sono $\pi_1^{(1)} = \pi_2^{(1)}$, $\pi_2^{(1)} = \pi_3^{(1)}$, e $\pi_3^{(1)} = \pi_1^{(1)}$. Dunque le componenti non nulle della distribuzione invariante $\pi^{(1)}$ sono uguali fra loro. Inoltre, $\pi^{(1)}$ è un vettore di probabilità, dunque i suoi elementi sommano ad 1. Come conseguenza, le distribuzioni estremali sono date da i vettori di probabilità

$$\pi^{(1)} = (1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, 0, 0)', \quad \pi^{(2)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)'.$$

Infine, ogni distribuzione di probabilità invariante si ottiene come

$$\pi = \alpha\pi^{(1)} + (1-\alpha)\pi^{(2)}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Esercizio 3. Sia $\mathcal{G}$ un anello diretto con n nodi.

a) Calcolare l'eigenvector centrality (normalizzata).

b) Calcolare la centralità di Katz con $\mu = \mathbb{1}$.

c) Calcolare la centralità di Katz con $\mu_1 = 1$ e $\mu_i = 0, \quad \forall i > 1$.

Soluzione. a) Si ricordi che, per un grafo fortemente connesso, l'eigenvector centrality è l'unico autovettore non-negativo normalizzato di W' corrispondente al suo autovalore dominante λ_W, che è reale e non-negativo. Per un anello diretto, la matrice di adiacenza è

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che implica $W'\mathbb{1} = \mathbb{1}$, perché W è stocastica per colonne. Per la matrice dei pesi $P = D^{-1}W$, vale in generale che $\lambda_P = 1$, cioè che 1 è l'autovalore dominante. Poichè in questo caso $W = P$ (le righe di W sommano già a 1), sappiamo che $\lambda_W = \lambda_P = 1$. Perciò, $\mathbb{1}/n$ è l'autovettore desiderato.

b) La centralità di Katz è definita come la soluzione di

$$x = \left(\frac{1-\beta}{\lambda_W}\right) W'x + \beta\mu, \tag{1}$$

dove $\beta \in (0, 1]$ e, in questo caso, $\mu = \mathbb{1}$ e $\lambda_W = 1$ è l'autovalore dominante di W'. La seguente formula può essere invertita per ricavare in forma esplicita la centralità tramite

$$x = \left(I - \frac{(1-\beta)}{\lambda_W} W'\right)^{-1} \beta\mu. \tag{2}$$

Si noti infatti che la matrice $\frac{(1-\beta)}{\lambda_W} W'$ ha raggio spettrale strettamente minore di 1 dato che $\beta > 0$, da cui segue l'unicità della centralità. Si osservi che

- W agisce su un vettore x producendo uno shift in avanti delle componenti del vettore, ovvero

  $$(Wx)_i = x_{i+1}$$

  dove $x_{n+1} = x_1$.

- W' agisce su un vettore x producendo uno shift indietro delle componenti del vettore, ovvero

  $$(W'x)_i = x_{i-1}$$

  dove $x_{1-1} = x_n$.

Per l'anello diretto la formulazione (1) equivale al sistema di equazioni

$$x_i = (1-\beta)x_{i-1} + \beta, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove $x_{1-1} = x_n$. Abbiamo già stabilito l'unicità della centralità, che implica che il sistema di equazioni ha un'unica soluzione. Si vede facilmente, per ragioni di simmetria, che $x_i = 1$ per ogni $i \in [1, n]$ è una soluzione e per quanto detto è l'unica. Il vettore di centralità di Katz è perciò dato da $x_i = 1$ per ogni i, che può essere normalizzato in $x_i = 1/n$.

c) Sfruttiamo l'espressione della centralità tramite (2), da cui si ottiene (ricordando che $\lambda_W = 1$)

$$\begin{aligned} x &= \big(I - (1-\beta)W'\big)^{-1}\beta\mu \\ &= \beta \sum_{k \geq 0} (1-\beta)^k (W')^k \mu \\ &= \beta\mu + \beta(1-\beta)W'\mu + \beta(1-\beta)^2(W')^2\mu + \dots \end{aligned}$$

Con $\mu_1 = 1$ e $\mu_i = 0$ per ogni $i > 1$, utilizzando la proprietà di $(W'x)$ si può calcolare x_1 come

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta\mu_1 + \beta(1-\beta)\mu_n + \beta(1-\beta)^2\mu_{n-1} + \dots \\ &= \beta + \beta(1-\beta)^n + \beta(1-\beta)^{2n} + \dots \\ &= \beta\sum_{k\geq 0}(1-\beta)^{kn} = \frac{\beta}{1-(1-\beta)^n}. \end{aligned}$$

Ciò implica tramite (1) che x_2 è dato da

$$x_2 = \beta\mu_2 + (1-\beta)x_1 = \frac{\beta(1-\beta)}{1-(1-\beta)^n}.$$

e x_k è dato da:

$$x_k = \frac{\beta(1-\beta)^{k-1}}{1-(1-\beta)^n}.$$

Applicando (1) al nodo 1 si può osservare che la relazione è verificata. Infatti,

$$x_1 = (1-\beta)x_0 + \beta = (1-\beta)x_n + \beta = \frac{\beta(1-\beta)^n}{1-(1-\beta)^n} + \beta = \frac{\beta}{1-(1-\beta)^n}.$$

Richiami di teoria. Un *albero* è un grafo semplice connesso e aciclico. Sia $m = |\mathcal{E}|/2$ il numero di archi indiretti, e $n = |\mathcal{V}|$ il numero di nodi della rete. Si può dimostrare (si vedano le note del corso) che per ogni albero vale la relazione $m = n - 1$.

Esercizio 4. Si dimostri che ogni albero ha almeno 2 foglie (nodi di grado uno). Si dimostri che un albero con esattamente 2 foglie è una linea.

Soluzione. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle foglie dell'albero, e sia w_v il grado del nodo v. Vale la seguente relazione:

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} w_v = |\mathcal{F}| + \sum_{v\in\mathcal{V}\setminus\mathcal{F}} w_v \geq |\mathcal{F}| + 2(n - |\mathcal{F}|). \tag{3}$$

Inoltre vale

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} w_v = |\mathcal{E}| = 2m = 2(n-1). \tag{4}$$

Tramite queste due relazioni si ottiene

$$2(n-1) \geq |\mathcal{F}| + 2(n - |\mathcal{F}|),$$

che implica la tesi $|\mathcal{F}| \geq 2$. Inoltre, se il grafo ha esattamente due foglie, l'uguaglianza in (4) implica

$$2(n-1) = \sum_{v\in\mathcal{V}\setminus\mathcal{F}} w_v + \sum_{v\in\mathcal{F}} w_v = \sum_{v\in\mathcal{V}\setminus\mathcal{F}} w_v + 2,$$

che implica

$$2 = \frac{\sum_{v\in\mathcal{V}\setminus\mathcal{F}} w_v}{n-2}.$$

Dato che i nodi che non sono foglie sono $n-2$, questa a sua volta implica che il grado medio dei nodi che non sono foglie è uguale a 2. Dato che il grado di ogni nodo che non è una foglia è maggiore o uguale a 2 per definizione, segue che il grado di ogni nodo che non è una foglia è esattamente uguale a 2, cioè il grafo è una linea.

Esercizio 5. Si calcoli lo spettro della matrice di adiacenza W e della matrice stocastica $P = D^{-1}W$ per un grafo completo K_n.

Soluzione. Per risolvere questo esercizio sfruttiamo il seguente fatto:

Nota. Sia λ un autovalore di A (indicato come $\lambda \in \sigma(A)$), allora $\mu = k\lambda + h$ è un autovalore di $B = kA + h\mathbf{I}$, $h, k \in \mathbb{R}$, relativo allo stesso autovettore. Di conseguenza, dato un grafo $\mathcal{G}$ d-regolare, allora le seguenti relazioni tra gli autovalori delle matrici W e $P = D^{-1}W = \frac{1}{d}W$ sono valide:

$$\lambda \in \sigma(W) \implies \frac{\lambda}{d} \in \sigma(P) \quad \text{e} \quad \lambda \in \sigma(P) \implies d\lambda \in \sigma(W).$$

La matrice di adiacenza di un grafo completo è una matrice di tutti 1, tranne che per la diagonale, ovvero

$$W = \mathbb{1}\mathbb{1}' - \mathbf{I}.$$

Consideriamo la matrice $\mathbb{1}\mathbb{1}'$. Essa, avendo tutte le colonne uguali, ha rango 1. Quindi ha $n-1$ autovalori μ_i pari a 0. L'unico autovalore non nullo può essere calcolato ricordando che, la somma di tutti gli autovalori di una matrice coincide con la sua traccia. Di conseguenza $\mu_1 = \sum_i (\mathbb{1}\mathbb{1}')_{ii} = n$. Sappiamo che

$$\mu \in \sigma[\mathbb{1}\mathbb{1}'] \implies \lambda = \mu - 1 \in \sigma[W] \implies \sigma[W] = \{n-1, -1, \dots, -1\}.$$

Essendo K_n un grafo $n-1$ regolare, possiamo calcolare lo spettro di $P = \frac{1}{n-1}W$ come

$$\mu \in \sigma[W] \implies \lambda = \frac{\mu}{n-1} \in \sigma[P] \implies \sigma[P] = \left\{1, -\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}\right\}.$$