

Homework 2

Rostagno 295706

November 28, 2024

Esercizio 1

- **Punto a:** Considerando la forma della matrice P e della matrice P_{lazy} date dall'esercizio, possiamo analizzare le convergenze come:

- **Convergenza della dinamica** $x(t+1) = Px(t)$:

La matrice P è stocastica, con autovalore dominante $\lambda_1 = 1$. Gli altri autovalori soddisfano $|\lambda_i| < 1$ per $i > 1$, garantendo la convergenza della dinamica. Quando $t \rightarrow \infty$, la distribuzione $\mathbf{x}(t)$ converge all'equilibrio, ovvero tutti i nodi assumono lo stesso valore, determinato dalla media pesata dello stato iniziale in base alla distribuzione invariante π :

$$x_i(\infty) = \pi' \mathbf{x}(0), \quad \forall i \in V.$$

- **Convergenza della dinamica** $x(t+1) = P_{lazy}x(t)$:

La matrice $P_{lazy} = \frac{1}{2}(I + P)$ è anch'essa stocastica e conserva le proprietà di convergenza. Tuttavia, gli autovalori diversi da $\lambda_1 = 1$ vengono "diminuiti" nella forma:

$$\lambda_i^{lazy} = \frac{1}{2}(1 + \lambda_i),$$

dove λ_i sono gli autovalori di P .

Questo rallentamento implica che il tempo necessario per raggiungere l'equilibrio sia maggiore rispetto alla dinamica $x(t+1) = Px(t)$.

- **Punto b:** Dobbiamo calcolare λ_2 della matrice P_{lazy} e determinarne il tempo di rilassamento in funzione di $n \rightarrow \infty$. Sappiamo che R_n è un grafo circolare, quindi gli autovalori della matrice di adiacenza W possono essere calcolati come:

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega_k^j$$

Dove c_j è la prima riga della matrice W mentre $\omega_k = \exp \frac{2\pi i}{n} k$. Nel nostro caso c_j ha gli 1 della prima riga posizionati nelle posizioni: $j = 1$, $j = \frac{n}{2}$ e $j = n - 1$.

Sviluppando la sommatoria otteniamo

$$\omega_k + \omega_k^{n-1} + \omega_k^{\frac{n}{2}}$$

che diventa

$$\exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) + \exp\left(\frac{2\pi(n-1)ik}{n}\right) + \exp(\pi i k)$$

Sviluppando le forme trigonometriche otteniamo

$$2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \exp(i\pi k)$$

Essendo il grafo 3-regolare, $P = W/3$, dunque lo spettro della matrice P si può ottenere come:

$$\sigma(P) = \left\{ \lambda_k = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{3} \exp(i\pi k), \quad k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Di conseguenza lo spettro della matrice P_{lazy} :

$$\sigma(P_{lazy}) = \left\{ \lambda_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{3} \exp(i\pi k) \right), \quad k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Il secondo autovalore dominante di Q è:

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

corrispondente a $k = 1$. Ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin ($t \rightarrow 0$):

$$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3),$$

studiamo il comportamento asintotico di λ_2 , e di conseguenza di $\tau_{\text{rel}} = \frac{1}{1-\lambda_2}$, per $n \rightarrow \infty$:

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2} + \frac{o(1)}{n^3} \right) \approx \frac{2}{3} - \frac{2\pi^2}{3n^2}.$$

Quindi:

$$\tau_{\text{rel}} = \frac{1}{1 - \lambda_2} \approx \frac{3n^2}{n^2 + 2\pi^2}.$$

- **Punto c:** Conosciamo la disuguaglianza di Cheeger:

$$\frac{1}{2}\Phi_G^2 \leq 1 - \lambda_2 \leq 2\Phi_G.$$

Nel nostro caso specifico abbiamo un grafo Barbell con n nodi B_n e quindi avremo:

$$\Phi_{B_n} = \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1 \right)^{-1}.$$

Dalla disuguaglianza di Cheeger scriviamo:

$$\frac{\Phi_{B_n}^2}{2} \leq 1 - \lambda_2 \leq 2\Phi_{B_n}.$$

Sostituendo Φ_{B_n} :

$$\frac{\left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1 \right)^{-2}}{2} \leq 1 - \lambda_2 \leq 2 \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1 \right)^{-1}.$$

Il tempo di rilassamento è dato da:

$$T_{\text{relax}} = \frac{1}{1 - \lambda_2}.$$

Sostituendo i limiti superiori e inferiori di $1 - \lambda_2$, otteniamo:

$$\frac{1}{2\Phi_{B_n}} \leq T_{\text{relax}} \leq \frac{2}{\Phi_{B_n}}.$$

Sostituendo Φ_{B_n} :

$$\frac{1}{2 \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1 \right)^{-1}} \leq T_{\text{relax}} \leq \frac{2}{\left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1 \right)^{-2}}.$$

Semplificando:

$$\frac{n^2/4 - n/2 + 1}{2} \leq T_{\text{relax}} \leq 2 \left(n^2/4 - n/2 + 1 \right)^2.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $n^2/4$ domina i termini $n/2$ e 1, quindi:

$$\Phi_{B_n} \sim \frac{4}{n^2}.$$

In conclusione possiamo dire che il tempo di rilassamento aumenta quadraticamente con n .

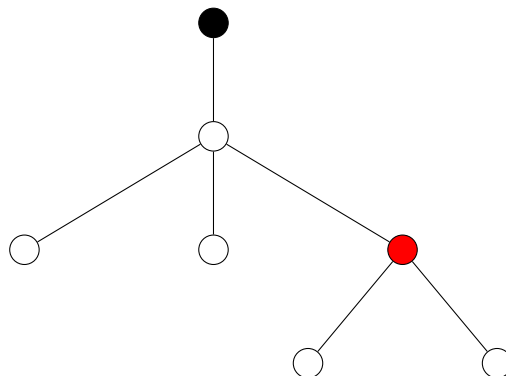
- **Punto d:**

Convergenza rapida $x(0)$: Quando metà dei nodi ha valore iniziale 0 e l'altra metà 1, il consenso viene raggiunto principalmente attraverso la mediazione del collegamento tra i due "gruppi" (i quattro nodi collegati fra loro). In questo caso, il tempo di convergenza non scala in modo significativo con il numero di nodi n , poiché la convergenza avviene "globalmente" e sfrutta la struttura simmetrica del grafo. $x(0)$ è fatta in modo che i nodi in uno dei due gruppi abbiano valore iniziale 0 e quelli nell'altro gruppo abbiano valore iniziale 1.

Convergenza lenta $y(0)$: Con $y(0)$, il tempo di convergenza scala quadraticamente con n . Questo è dovuto al fatto che la struttura alternata richiede che i gruppi convergano internamente prima di poter convergere tra loro. Questo fenomeno è dominato dal collo di bottiglia rappresentato dal singolo arco che connette i due gruppi. $y(0)$ è fatta in modo che i nodi all'interno dei gruppi abbiano valori alternati, in modo che i valori iniziali siano distribuiti tra 0 e 1 all'interno dei gruppi stessi.

Esercizio 2

- **Punto a:** Dopo alcuni tentativi ho trovato che il nodo stubborn P_B con opinione zero va posto nel nodo rosso



Ho disegnato solo la prima parte del grafo.

Ho calcolato che mettendo P_B in quella posizione avrei ottenuto un'opinione media di $\frac{10.5}{15} = 0.7$ che è la minore possibile.
(Altre opinioni medie ottenute sono state 0.77 , 0.73 , 0.75 mettendo P_B sui nodi estremi)

- **Punto b:** Dopo vari calcoli e tentativi, il posto migliore dove mettere P_B in modo da avere l'opinione media minima è metterlo nel nodo nero. In questo modo la massima opinione media ottenibile è $\frac{6}{15}$.

Esercizio 3

- **Punto a:** Come prima cosa calcolo la matrice P normalizzata

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Successivamente calcolo la distribuzione stazionaria π tali che

$$\pi = \pi P$$

Risolvendo i calcoli ottengo

$$\pi = \left(\frac{2}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{3} \right)$$

Il consenso asintotico vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pi' x(0)$$

Quindi la varianza sarà

$$\text{Var}(x^*) = \sum_{i=1}^4 \pi_i^2 \sigma_i^2 = \left(\frac{2}{9} \right)^2 (0.1) + \left(\frac{2}{9} \right)^2 (0.2) + \left(\frac{2}{9} \right)^2 (0.3) + \left(\frac{1}{3} \right)^2 (0.2).$$

Calcoliamo e otteniamo $\frac{7}{135} = 0.052$

- **Punto b:** La varianza del valore di consenso asintotico in forma vettoriale è:

$$\text{Var}(x^*) = \pi^\top \Sigma \pi,$$

dove:

- π è il vettore delle probabilità invarianti,

- Σ è la matrice delle varianze iniziali delle opinioni (in questo caso ha solo le varianze sulla diagonale).

Per trovare il valore che π dovrebbe assumere per minimizzare la varianza impostiamo un piccolo problema di ottimizzazione vincolata:

$$\text{Minimizzare } \text{Var}(x^*) = \pi^\top \Sigma \pi$$

vincoli:

$$\begin{cases} \pi^\top \mathbf{1} = \sum_i \pi_i = 1, \\ \pi_i \geq 0. \end{cases}$$

Risolviamo con il metodo del lagrangiano e otteniamo:

$$\pi = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}}.$$

Riscrivendo questo risultato in termini non vettoriali otteniamo:

$$\pi_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2}}.$$

- **Punto c:** La nuova matrice di adiacenza varia, avendo sulla diagonale i termini a_i . Di conseguenza la somma di ogni riga sarà $2 + a_1, 2 + a_2, 2 + a_3, 3 + a_4$. Per prima cosa dobbiamo trovare la nuova distribuzione invariante che è nella forma

$$\pi = \left(\frac{2 + a_1}{9 + \sum_{i=1}^4 a_i}, \frac{2 + a_2}{9 + \sum_{i=1}^4 a_i}, \frac{2 + a_3}{9 + \sum_{i=1}^4 a_i}, \frac{3 + a_4}{9 + \sum_{i=1}^4 a_i} \right)$$

Dal punto precedente sappiamo che per minimizzare la varianza, π deve essere nella forma:

$$\pi_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2}}.$$

Calcoliamo i valori di π nel nostro caso:

$$\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} = 10 + 5 + 5 + \frac{10}{3} = \frac{70}{3}$$

quindi

$$\begin{cases} \pi_1 = 10 \cdot \frac{3}{70} = \frac{3}{7} \\ \pi_2 = 5 \cdot \frac{3}{70} = \frac{3}{14} \\ \pi_3 = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{70} = \frac{1}{7} \\ \pi_4 = 5 \cdot \frac{3}{70} = \frac{3}{14} \end{cases}$$

Questi sono i valori di π per cui la varianza è minimizzata.

Adesso uguagliamo questi valori con i corrispettivi valori della π del nuovo grafo:

$$\begin{cases} \frac{2+a_1}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{3}{7} \\ \frac{2+a_2}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{3}{14} \\ \frac{2+a_3}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{1}{7} \\ \frac{3+a_4}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{3}{14} \end{cases}$$

Otteniamo che il vettore α vale:

$$\alpha = (4 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

- **Punto d:** Come distribuzione invariante abbiamo sempre

$$\pi = \left(\frac{2}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{3} \right)$$

Adesso per calcolare la varianza lo dobbiamo fare in forma vettoriale, cioè

$$\text{Var}(x^*) = \pi^\top \Sigma \pi$$

dove Σ è la matrice di covarianza.

Otteniamo

$$\text{Var}(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Svolgiamo i calcoli e otteniamo

$$\text{Var}(x^*) = \frac{83}{810} = 0.102$$

- **Punto e:** Per trovare π usiamo la forma vettoriale ottenuta sempre nel punto b)

$$\pi = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}.$$

Per calcolare la matrice inversa e ottenere i valori di π che minimizzerebbero la varianza calcoliamo questo rapporto in matlab ed otteniamo:

- Come matrice inversa Σ^{-1}

$$\begin{bmatrix} 9.3750 & -3.1250 & -5.6250 & 1.8750 \\ -3.1250 & 4.3750 & 1.8750 & -0.6250 \\ -5.6250 & 1.8750 & 9.3750 & -3.1250 \\ 1.8750 & -0.6250 & -3.1250 & 4.3750 \end{bmatrix}$$

- Come numeratore

$$[2.5 \quad 2.5 \quad 2.5 \quad 2.5]$$

- Come denominatore

$$10$$

- Infine otteniamo che la π che minimizza la varianza vale

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Sappiamo che la π del nostro grafo vale

$$\pi = \left(\frac{2 + a_1}{9 + \sum_{i=1}^4 a_i}, \frac{2 + a_2}{9 + \sum_{i=1}^4 a_i}, \frac{2 + a_3}{9 + \sum_{i=1}^4 a_i}, \frac{3 + a_4}{9 + \sum_{i=1}^4 a_i} \right)$$

Adesso uguagliamo questi valori con i corrispettivi valori della π del nuovo grafo:

$$\begin{cases} \frac{2+a_1}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{1}{4} \\ \frac{2+a_2}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{1}{4} \\ \frac{2+a_3}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{1}{4} \\ \frac{3+a_4}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Otteniamo che il vettore α vale:

$$\alpha = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$$

Esercizio 4

- **Punto a:** Il tempo atteso tra un'infezione e la successiva ha una distribuzione esponenziale con tasso $\beta B(t)$.

Condizionando allo stato $X(t)$, il tempo medio di attesa per la prossima infezione è:

$$\frac{1}{\beta B(t)}.$$

Sommando su tutte le infezioni fino a $N(t) = n$ (cioè fino a quando tutti i nodi sono infetti) e considerando che la conduttanza $\gamma(k)$ fornisce un limite inferiore a $B(t)$, che a sua volta influenza il tempo di assorbimento, otteniamo:

$$\tau \leq \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma(k)}.$$

Sappiamo inoltre che la conduttanza è simmetrica, ovvero:

$$\gamma(k) = \gamma(n - k)$$

in quanto ci troviamo in un grafo non orientato.

Utilizziamo quindi la simmetria della conduttanza:

$$\tau \leq \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma(k)} \leq \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)}.$$

- **Punto b:** In base ai dati del testo possiamo riscrivere la disuguaglianza del punto a) come:

$$\tau \leq \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

Riscriviamo la somma come:

$$\tau \leq \frac{\sqrt{2}}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

La somma $\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}}$ è nota per essere approssimabile per N grande come:

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{N}.$$

Quindi per N grande, possiamo stimare.

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Sostituendo il risultato nella formula di τ :

$$\tau \leq \frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot 2\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Per n grande, $\lfloor n/2 \rfloor \sim n/2$, quindi:

$$\tau \sim \frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot 2\sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{2}{\beta}\sqrt{n}.$$

In conclusione possiamo affermare che τ in una griglia bidimensionale cresce come:

$$\tau \sim \frac{\sqrt{n}}{\beta}$$

- **Punto c:** Il grafo di Barbell è diviso in due grafi completi collegati da un unico arco (chiamiamoli C_1 e C_2). Calcoliamo ora la conduttanza. La conduttanza è:

$$\gamma(k) = \min_{S \subseteq V, |S|=k} \sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} W_{ij}.$$

Due casi principali:

- **Caso 1:** tutti i nodi infetti sono in un solo grafo.
 - * Supponiamo che i k nodi infetti siano in C_1 .
 - * I nodi di C_1 sono fortemente connessi, ma i collegamenti con C_2 sono limitati al singolo arco.
 - * In questo caso, il flusso minimo è dato solo dal collegamento tra C_1 e C_2 :

$$\gamma(k) = 1.$$

- **Caso 2:** almeno un nodo infetto è in entrambi i grafi.
 - * Una volta che un nodo in C_2 viene infettato, l'infezione si propaga rapidamente all'interno di C_2 , grazie alla struttura di grafo completo.

- * In questo caso, la conduttanza cresce rapidamente perché i collegamenti interni dei grafi dominano:

$$\gamma(k) \sim n.$$

Dopo aver stimato il valore della conduttanza nei due casi, possiamo procedere con la stima del tempo τ .

Caso 1:

- Poiché $\gamma(k) = 1$:

$$\frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)} = \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 1 = \frac{n}{\beta}.$$

Quindi per $n \rightarrow \infty$ il tempo τ si comporta come:

$$\tau \sim \frac{n}{\beta}.$$

Caso 2:

- Poiché $\gamma(k) = n$:

$$\frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)} = \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{n} = \frac{2}{\beta} \frac{1}{n} \frac{n}{2} = \frac{1}{\beta}.$$

Quindi per $n \rightarrow \infty$ il tempo τ si comporta come:

$$\tau \sim \frac{1}{\beta}.$$