# MS 23/10/24

## TRASFORMAZIONI LINEARI E FORME QUADRATICHE DI VETTORI NORMALI

Abbiamo già notato che trasformazioni lineari di vettori normali sono normali.
Ci chiediamo quando, date due trasformazioni lineari, queste sono indipendenti.

Sia $X \sim N_n(\mu, \Sigma)$
e due sue trasf. lineari
$$\underset{m\times n \; n\times 1}{A X} \quad e \quad \underset{q\times n \; n\times 1}{B X}.$$
Allora
$$\begin{pmatrix} A\underline{x} \\ B\underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x \sim N_{m+q}\left( \begin{pmatrix} A\mu \\ B\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \Sigma (A' \; B') \right)$$
$$= N_{m+q}\left( \begin{pmatrix} A\mu \\ B\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A\Sigma A' & A\Sigma B' \\ B\Sigma A' & B\Sigma B' \end{pmatrix} \right)$$

dove

$$A\Sigma B' = \text{CrossCov}(Ax, Bx)$$
quindi $Ax$ e $Bx$ sono indipendenti
se e solo se
$$\underset{m\times n \; n\times n \; n\times q}{A\Sigma B'} = 0$$
matrice nulla $m\times q$

In particolare, se $\Sigma = I$, quando

$$AB' = 0$$

e se in aggiunta $B = B'$

$$AB = 0$$

E' interessante considerare anche forme quadratiche. Dovreste avere già visto che se

$$Z \sim N_k(0, I)$$

allora

$$Z'Z = \sum_{i=1}^{k} z_i^2 = Y = \|Z\|^2$$

e' distribuita come una "$\chi^2$ con k gradi di libertà", cioè una $\chi^2$ con parametro k, cioè una gamma con parametri $\frac{k}{2}$ e $\frac{1}{2}$

Scriveremo

$$Y \sim \chi^2(k)$$

oppure

$$Y \sim Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

la cui densità e'

$$f_Y(y) = \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} y^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \quad (y>0)$$

funzione gamma di Eulero

La funzione generatrice dei momenti è

$$fgm(t) = E(e^{tY}) = \int_0^\infty e^{ty} \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} y^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy$$

$$= \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty y^{\frac{k}{2}-1} e^{-(\frac{1}{2}-t)y} dy$$

$$= \frac{(1/2)^{k/2}}{\cancel{\Gamma(k/2)}} \frac{\cancel{\Gamma(k/2)}}{(\frac{1}{2}-t)^{k/2}} = \frac{1}{(1-2t)^{k/2}}$$

con la quale si dimostra che se

$$Y_1 \sim \chi^2(k_1) \quad e \quad Y_2 \sim \chi^2(k_2)$$

sono indipendenti, allora

definizione

esponenziale

$$fgm_{Y_1+Y_2}(t) = E(e^{t(Y_1+Y_2)}) = E(e^{tY_1} e^{tY_2})$$

$$= E(e^{tY_1}) E(e^{tY_2})$$

indipendenza

$$= \frac{1}{(1-2t)^{k_1/2}} \cdot \frac{1}{(1-2t)^{k_2/2}}$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}$$

cioè allora

$$Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(k_1+k_2)$$

C'è un inverso di questo risultato:

**TEO**

Se $Q_1 \sim \chi^2(k_1)$

e $Q_2 \sim \chi^2(k_2)$

con $k_1 > k_2$

e se

$$Q = Q_1 - Q_2$$

è indipendente da $Q_2$, allora

$$Q \sim \chi^2(k_1 - k_2)$$ □

Infatti la fgm di $Q_1$ è

$$\frac{1}{(1-2t)^{k_1/2}} \overset{\text{def di fgm}}{=} E(e^{tQ_1})$$

$$\overset{\text{def di } Q}{=} E(e^{t(Q+Q_2)})$$

$$\overset{\text{indip}}{=} E(e^{tQ})\, E(e^{tQ_2})$$

$$= E(e^{tQ}) \frac{1}{(1-2t)^{k_2/2}}$$

quindi

$$E(e^{tQ}) = \frac{1}{(1-2t)^{k_1/2}} (1-2t)^{k_2/2}$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{(k_1-k_2)/2}}$$ cioè

$$Q \sim \chi^2(k_1 - k_2)$$

c.v.d.

Veniamo ora al caso generale

$$X \sim \mathcal{N}_m(\mu, \Sigma)$$

e supponiamo che $\Sigma^{-1}$ esista (quindi anche la densità).

Nel caso $m=1$, $\sigma^2>0$ cosicché l'espressione

$$\frac{X-\mu}{\sigma}$$

ha senso ed è una standardizzazione.

L'equivalente di $\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$

è $$Y = \underset{1\times m}{(X-\mu)'}\,\underset{m\times m}{\Sigma^{-1}}\,\underset{m\times 1}{(X-\mu)}$$

DISTANZA DI MAHALANOBIS (oppure DISTANZA$^2$)

la quale è $\chi^2(m)$. Infatti

se $\Sigma^{-1}$ esiste $\Sigma^{-1/2}$ simmetrica tale che

$$\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1/2}\Sigma^{-1/2}$$

quindi

$$(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu) = (X-\mu)'\Sigma^{-1/2}\Sigma^{-1/2}(X-\mu)$$

$$= \left(\Sigma^{-1/2}(X-\mu)\right)'\Sigma^{-1/2}(X-\mu) = \|\Sigma^{-1/2}(X-\mu)\|^2$$

simmetria di $\Sigma^{-1/2}$

e poiché $\Sigma^{-1/2}(X-\mu) \sim \mathcal{N}_m(0, I)$,

otteniamo $Y \sim \chi^2(m)$

trasformazione affine
di $X$, quindi
$\Sigma^{-1/2}(X-\mu) \sim N(?,?)$

$E(\Sigma^{-1/2}(X-\mu)) = \Sigma^{-1/2} E(X-\mu) = 0$

$VarCov(\Sigma^{-1/2}(X-\mu)) = \Sigma^{-1/2} VarCov(X)(\Sigma^{-1/2})'$

$= \Sigma^{-1/2} \Sigma \Sigma^{-1/2} = I$

Quando due forme quadratiche dello stesso vettore normale sono indipendenti?
Abbiamo un risultato nel caso omoschedastico $\Sigma = \sigma^2 I$

scalare

TEO

Se $X \sim N_n(\mu, \sigma^2 I)$ e $A$ e $B$ sono matrice simmetriche tali che $AB = 0$, allora

1) $X'AX$ e $BX$ sono indipendenti
2) $X'AX$ e $X'BX$ sono indipendenti.

Dimo

$AX$ e $BX$ sono indipendenti x il risultato precedente

Inoltre

$X'AX = X'AA^{-}AX$

dove $A^{-}$ è l'inversa generalizzata

è funzione della sola $AX$

e similmente

$x'Bx$ è funzione della sola $Bx$

quindi ne consegue 2).

RIPASSO DI ALGEBRA LINEARE

Una matrice quadrata $P$ è una matrice di proiezione se e solo se è simmetrica e idempotente:

$$P = P' \qquad\qquad P = P^2$$

PROPRIETÀ:

1) se $P$ è una matrice di proiezione di rango $r \leq n$, allora $r$ dei suoi autovalori sono uguali a 1 e $n-r$ sono uguali a 0

Infatti se $P^2 = P$ e

$$Px = \lambda x \quad , \quad \underset{x \in R^n}{\lambda} \text{ costante (autovalore)}$$

allora

$$\lambda x'x \underset{\lambda \text{ costante}}{=} x'\lambda x = x'Px = x'P^2x$$

$$= (Px)'Px = \lambda x'\lambda x = \lambda^2 x'x$$

ma allora $\lambda = \lambda^2$

è possibile solo se $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$

e poiché $r$ = n° degli autovalori non nulli, ci sono $r$ autovalori uguali a 1 (gli altri sono 0).

2) grazie a 1), esiste una matrice $T$ di autovettori ortogonali tali che $T'T = I$

$$T'PT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Lambda$$

3) se $P$ è matrice di proiezione di rango $r \leq n$, allora

$$\operatorname{tr} P = \sum \lambda_i = r$$

$\square$

(Torniamo a probabilità)

Consideriamo di nuovo $X$ omosched. cioè

$$X \sim N_n(\mu, \sigma^2 I)$$

e studiamo la proiezione $\underset{n\times n\, n\times 1}{PX}$ di cui sappiamo

$$PX \sim N_n(P\mu, P\sigma^2 I P' = \sigma^2 P^2 = \sigma^2 P)$$

Dimostriamo infine

**TEO** Se $X \sim N_n(\mu, \sigma^2 I)$ e $P$ è una matrice di proiezione di rango $r$, allora

$$Q = \frac{(X-\mu)' P (X-\mu)}{\sigma^2} \sim \chi^2(r).$$

**DIMO**

Consideriamo

$$z = T'(x-\mu) \quad \text{dove } T \text{ e' } \dots$$

allora

$$z \sim N(?, ?)$$

$$E(z) = T' E(x-\mu) = 0$$

$$VarCov(z) = VarCov(T'(x-\mu))$$

$$= T' \sigma^2 I \, T = \sigma^2 T' T = \sigma^2 I$$

in particolare le componenti di $z$ sono

$$z_1 \dots z_n \quad \text{iid } N(0, \sigma^2)$$

quindi

$$Q = (x-\mu)' \frac{P}{\sigma^2} (x-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} (x-\mu)' T \Lambda T' (x-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} z' \Lambda z = \frac{1}{\sigma^2} z' \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \, 0 \end{bmatrix} z$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{r} z_i^2 \sim \chi^2(r)$$

per definizione di $\chi^2$

C.V.D.