Homework2 Rostagno

295706

December 13, 2024

- **Esercizio 1:**

  a) Per determinare se la catena è esplosiva dobbiamo verificare che

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$$

  dove $\lambda_n(x) = q(x, x+1) + q(x, x-1)$.
  Nel nostro caso abbiamo:

  $$\lambda(x) = \begin{cases} q(x, x+1) = 2^x, & \text{se } x = 0, \\ q(x, x+1) + q(x, x-1) = 2^x + 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

  La sommatoria da verificare è:

  $$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)}.$$

  Per $x = 0$:

  $$\frac{1}{\lambda(0)} = \frac{1}{2^0} = 1.$$

  Per $x \geq 1$:

  $$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{3 \cdot 2^x}.$$

  La sommatoria diventa:

  $$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x}.$$

  Calcoliamo la serie $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x}$:

  $$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x} = \frac{1}{3} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}.$$

Notiamo che la serie è una geometrica e quindi ne conosciamo la convergenza

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Abbiamo in conclusione che la serie diventa

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Quindi la catena è esplosiva.

b) Ripetiamo gli stessi passaggi del punto precedente

$$\lambda(x) = \begin{cases} q(x, x+1) = 2^x, & \text{se } x = 0, \\ q(x, x+1) + q(x, x-1) = 2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

La sommatoria da verificare è:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)}.$$

Per $x = 0$:

$$\frac{1}{\lambda(0)} = \frac{1}{2^0} = 1.$$

Per $x \geq 1$:

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{2 \cdot 2^x}.$$

La sommatoria diventa:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^x}.$$

Calcoliamo la serie $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^x}$:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^x} = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}.$$

Notiamo che la serie è una geometrica e quindi ne conosciamo la convergenza

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Abbiamo in conclusione che la serie diventa

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Quindi la catena è esplosiva.

c) Ripetiamo gli stessi passaggi del punto precedente

$$\lambda(x) = \begin{cases} q(x, x+1) = 2^{x+1}, & \text{se } x = 0, \\ q(x, x+1) + q(x, x-1) = 2^x + 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

La sommatoria da verificare è:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)}.$$

Per $x = 0$:

$$\frac{1}{\lambda(0)} = \frac{1}{2^{0+1}} = \frac{1}{2}.$$

Per $x \geq 1$:

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{3 \cdot 2^x}.$$

La sommatoria diventa:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x}.$$

Calcoliamo la serie $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x}$:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x} = \frac{1}{3} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}.$$

Notiamo che la serie è una geometrica e quindi ne conosciamo la convergenza

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Abbiamo in conclusione che la serie diventa

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Quindi la catena è esplosiva.

- **Esercizio 2:**

  a) Modelliamo come una CTMC, consideriamo un sistema con 6 stati ($n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) che rappresentano il numero di cartucce disponibili. Il tasso di transizione dipende dal numero di stampanti operative e dal numero di cartucce in ricarica:

  - $q(n, n+1) = min(5-n, 2) \cdot 1$
    avviene quando una cartuccia viene ricaricata.
  - $q(n, n-1) = min(n, 3) \cdot \frac{1}{6}$
    avviene quando una stampante consuma una cartuccia, con tasso proporzionale al numero di stampanti operative.

  Successivamente procedo a calcolare la matrice di transizione Q

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{-13}{6} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-7}{3} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

  Ora possiamo calcolare la distribuzione invariante π tali che

$$\pi Q = 0$$

  e otteniamo

$$\pi = (\frac{1}{3829}, \frac{12}{3829}, \frac{72}{3829}, \frac{288}{3829}, \frac{1152}{3829}, \frac{2304}{3829})$$

  Possiamo affermare che tutte e 3 le stampanti lavoreranno assieme se $n \geq 3$ quindi:

$$\frac{288}{3829} + \frac{1152}{3829} + \frac{2304}{3829} = \frac{3744}{3829}$$

  b) Iniziamo a calcolare il numero medio di stampanti operative giornaliero

$$\text{Media stamp. operative} = \sum_{n=0}^{5} (\text{stamp. operative nello stato n}) \cdot \pi(n)$$

  Esplicitiamo la formula

$$\pi(0) \cdot 0 + \pi(1) \cdot 1 + \pi(2) \cdot 2 + \pi(3) \cdot 3 + \pi(4) \cdot 3 + \pi(5) \cdot 3$$

Sostituendo i vari valori otteniamo

$$0 + \frac{12}{3829} + \frac{144}{3829} + \frac{864}{3829} + \frac{3456}{3829} + \frac{6912}{3829} = \frac{11388}{3829}$$

Ora sappiamo che vengono stampate 1000 pagine al giorno per ogni stampante funzionante e ci interessa sapere all'anno quante ne vengono stampate, quindi

$$\frac{11388}{3829} \cdot 1000 \cdot 365 = \frac{4156620000}{3829} = 1.085.562 \text{pagine}$$

- **Esercizio 3:**

  a) Iniziamo con il definire i valori di λ_1 e λ_2 in modo da definire la traffic equation

  $$\lambda_1 = \lambda$$
  $$\lambda_2 = \lambda + (1-p)\lambda_2 = \frac{\lambda}{p}$$

  Siccome ci troviamo in code del tipo (M/M/1), la condizione per cui siano positivamente ricorrenti è $\lambda < \mu$, nel nostro caso

  $$\lambda < \mu_1$$
  $$\lambda < p\mu_2$$

  Supponiamo di essere sotto tali condizioni, la distribuzione stazionaria sarà $\pi(n_1, n_2) = \pi_1(n_1)\pi_2(n_2)$, nello specifico

  $$\pi_1(n_1) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{n_1}$$
  $$\pi_1(n_2) = \left(1 - \frac{\lambda}{p\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda}{p\mu_2}\right)^{n_2}$$

  b) In due ore, il numero di oggetti che passano l'ispezione segue un processo di Poisson con tasso:

  $$\lambda_{pass} = 2 \cdot \lambda \cdot p$$

  Dobbiamo calcolare la probabilità che meno di 3 oggetti passino:

  $$P(\text{meno di 3 passano}) = P(X < 3)$$

  Usiamo la formula della distribuzione di Poisson:

  $$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
  $$P(X < 3) = e^{-\lambda_{\text{pass}}}\left(1 + \lambda_{\text{pass}} + \frac{\lambda_{\text{pass}}^2}{2}\right).$$

  c) Iniziamo a calcolare il tasso effettivo di arrivo al centro macchine, ovvero:

  $$\lambda_{eff} = \lambda + (1-p)\frac{\lambda}{p} = \frac{\lambda}{p}$$

Adesso posso calcolare il numero medio di pezzi al centro macchine

$$\mathbb{E}[N_{\text{macchine}}] = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\mu_1 - \lambda_{\text{eff}}}.$$

- **Esercizio 4:**

  a) Nell'urna ci sono $n \geq 2$ palline, alcune bianche (W) e alcune nere (B). Definiamo il numero totale di palline $n = W + B$ ricordando che rimane costante. Il gioco modifica il numero di palline bianche o nere ma mantiene inalterata la somma.
  Definiamo una funzione di variabilità come il prodotto

  $$V = W \cdot B$$

  Questa quantità rappresenta il prodotto tra il numero di palline bianche e nere.

  - Caso 1: Se vengono estratte due palline dello stesso colore, W e B rimangono invariati, quindi anche V non cambia.
  - Caso 2: Se vengono estratte due palline di colori diversi:
    * W aumenta di 1 e B diminuisce di 1 (o viceversa) con uguale probabilità.
    * Questo modifica V come segue:

      $$V_{\text{nuovo}} = (W + 1) \cdot (B - 1) = W \cdot B + (B - W - 1).$$

    Il cambiamento in V è decrescente in media perché $B - W - 1$ è negativo quando W e B non sono bilanciati.

  Quindi, la funzione V decresce stocasticamente ad ogni iterazione, tranne quando W o B sono già massimi (cioè $V = 0$).

  Gli stati $W = 0$ (tutte le palline nere) e $B = 0$ (tutte le palline bianche) sono stati *assorbenti*, poiché non possono più verificarsi cambiamenti nel sistema. In questi stati, $V = 0$.

  La quantità V è una supermartingales perché decresce stocasticamente ad ogni iterazione, come dimostrato sopra.
  Per il teorema di convergenza delle closed martingales, un processo stocastico limitato e decrescente converge quasi sicuramente a un valore limite.
  Essendo che abbiamo due possibili stati assorbenti, il sistema convergerà necessariamente a uno di essi.
  Quindi possiamo affermare che alla fine del processo avremo le palline tutte dello stesso colore.

  b) La probabilità che tutte le palline diventino bianche $P(W = n)$ è proporzionale alla quantità iniziale di palline bianche rispetto al totale:

$$P(W = n) = \frac{W_0}{W_0 + B_0} = \frac{10}{10 + 20} = \frac{1}{3}$$

c) Possiamo ricalcolare $P(W = n \mid W_\sigma = 12)$ come se $W_\sigma = 12$ fosse il nuovo stato iniziale, con $n = 30$.

$$P(W = n \mid W_\sigma = 12) = \frac{W_\sigma}{W_\sigma + B_\sigma} = \frac{12}{12 + 18} = \frac{2}{5}$$

- **Esercizio 5:**

L'equazione data è:

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) - f(X_n) \mid X_n] = \mathbb{E}[g(X_{n+1}) - g(X_n) \mid X_n].$$

Applichiamo la propietà della linearità:

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \mid X_n] - \mathbb{E}[f(X_n) \mid X_n] = \mathbb{E}[g(X_{n+1}) \mid X_n] - \mathbb{E}[g(X_n) \mid X_n].$$

Semplifichiamo:

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \mid X_n] - f(X_n) = \mathbb{E}[g(X_{n+1}) \mid X_n] - g(X_n).$$

Spostando i termini, otteniamo:

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \mid X_n] - \mathbb{E}[g(X_{n+1}) \mid X_n] = f(X_n) - g(X_n).$$

Definiamo:

$$h(X_n) = f(X_n) - g(X_n).$$

Quindi, l'equazione diventa:

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1}) \mid X_n] = h(X_n).$$

Questa equazione implica che $(h(X_n))_{n=0}^{\infty}$ è un martingales rispetto alla filtrazione generata da (X_n) in quanto ci troviamo in un DTMC ricorrente. Questo implica che il valore medio condizionato di $h(X_n)$ rimane costante.
Dato che (X_n) è ricorrente, possiamo concludere che $h(X_n)$ deve essere costante su S. Pertanto:

$$h(x) = f(x) - g(x) = C,$$

dove C è una costante indipendente da x.
Poiché $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in S$, abbiamo:

$$C = f(x) - g(x) \geq 0.$$

Abbiamo dimostrato che:

$$f(x) = g(x) + C$$