Flussi su reti

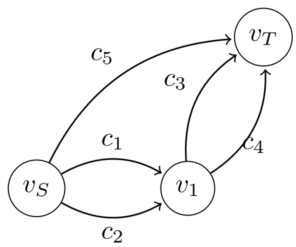
Teorema "Max-flow Min-Cut", Ottimizzazione

Esercizio 1. Per il grafo seguenti, calcolare

a) la matrice di incidenza nodi-archi;

b) la matrice di incidenza archi-cammini;

c) il massimo throughput da v_S a v_T, espresso come funzione delle capacità dei link.



Soluzione. a) Ordiniamo i nodi come (v_s, v_1, v_T) e i link come $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. La matrice di incidenza nodi archi è allora

$$B = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Ordiniamo i cammini dall'origine alla destinazione come $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$, dove $p_1 = (e_1, e_3)$, $p_2 = (e_1, e_4)$, $p_3 = (e_2, e_3)$, $p_4 = (e_2, e_4)$ e $p_5 = (e_5)$. La matrice di incidenza archi-cammini è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Per risolvere il problema, bisogna trovare la capacità di ogni possibile taglio, e selezionare il taglio minimo. Il risultato ottenuto è $f^{max} = c_5 + \min(c_1 + c_2, c_3 + c_4)$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice non-negativa

$$W = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \tag{1}$$

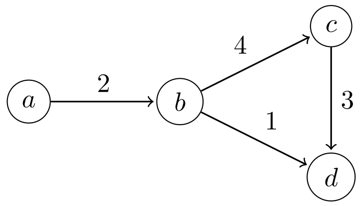
a) Si costruisca il grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ con matrice dei pesi W come in (1) e si pongano le capacità dei link di $\mathcal{G}$ pari ai pesi in W. Si determini il massimo throughput di un flusso ammissibile dal nodo a al nodo d.

b) Si immagini di poter rimuovere un totale di 2 unità di capacità dai link esistenti e di poter ottenere ogni flusso ammissibile sul grafo risultante. Quale sarebbe la scelta ottima in modo da minimizzare il throughput dal nodo a al nodo d? Si motivi la risposta.

c) Si immagini di poter allocare un totale di 4 unità aggiuntive di capacità ai link esistenti e di poter ottenere ogni flusso ammissibile sul grafo risultante. Quale sarebbe la scelta ottima in modo da massimizzare il throughput dal nodo a al nodo d? Si motivi la risposta.

d) Si aggiunga un arco (a, d) con capacità 0. Si immagini di poter allocare un totale di 3 unità aggiuntive di capacità ai link esistenti. Quale sarebbe la scelta ottimale per massimizzare il throughput?

Soluzione. Il grafo è rappresentato nella figura sottostante.



a) Il massimo throughput è pari alla capacità del min-cut, che è 2. Infatti, i cut U hanno capacità

- $U = \{a, b, c\}, U^C = \{d\} \to C_U = 3 + 1 = 4$
- $U = \{a, b\}, U^C = \{c, d\} \to C_U = 4 + 1 = 5$
- $U = \{a, c\}, U^C = \{b, d\} \to C_U = 2 + 3 = 5$
- $U = \{a\}, U^C = \{b, c, d\} \to C_U = 2$

b) La scelta migliore è rimuovere capacità dal min-cut. Infatti, la posizione del min-cut non cambia se si rimuove capacità dai link associati. Rimuovendo la capacità dal min-cut, cioè dall'arco (a, b), non ci sono più flussi ammissibili da a a d.

c) Si vuole aggiungere capacità al taglio di capacità minima. Tuttavia, il min-cut non rimane necessariamente lo stesso durante questa procedura. Ad esempio, se si aggiungono 4 unità di capacità all'unico arco che attraversa il min-cut $U = \{a\}, U^C = \{b, c, d\}$, la capacità del cut diventa uguale a 6. Così facendo, il taglio $U = \{a, b, c\}, U^C = \{d\}$ diventerebbe il nuovo min-cut, con capacità 4. La scelta ottimale è di allocare capacità 2 all'arco (a, b), così che la capacità dei cut diventa

- $U = \{a, b, c\}, U^C = \{d\} \to C_U = 4$
- $U = \{a, b\}, U^C = \{c, d\} \to C_U = 5$
- $U = \{a, c\}, U^C = \{b, d\} \to C_U = 5$
- $U = \{a\}, U^C = \{b, c, d\} \to C_U = 4$

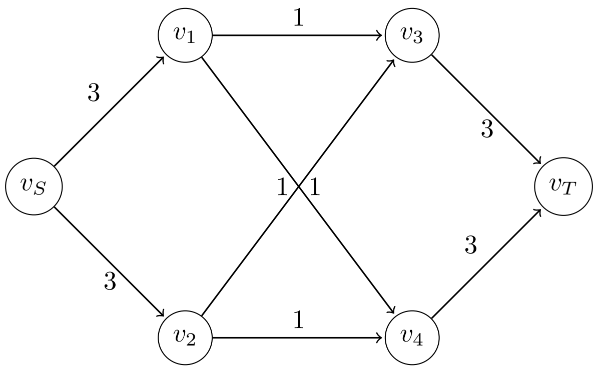
A questo punto, le restanti due unità di capacità vanno allocate in modo da incrementare le capacità del primo e del quarto taglio. Dato che i due tagli non hanno archi in comune, dovremo aggiungere un'unità sull'arco (a, b) e un'unità su uno tra (b, d) e (c, d). Il throghput risultante sarà 5.

d) Si allocano le tre unità di capacità sull'arco (a, d), dato che esso appartiene a tutti i tagli.

Esercizio 3. Si fornisca un controesempio della seguente affermazione: Dato un grafo $\mathcal{G}$ con capacità dei link fissate e min-cut $\mathcal{U}$, supponiamo di aumentare tutte le capacità di 4 unità, così che $c_i^{new} = c_i + 4$ per ogni arco i. Allora $\mathcal{U}$ è ancora il min-cut per il nuovo grafo così ottenuto.

Soluzione. L'affermazione è falsa. Ad esempio, si consideri il grafo disegnato sotto. Prima della modifica, il min-cut è $(\{v_S, v_1, v_2\})$, mentre dopo la modifica è (v_S) o $(\{v_S, v_1, v_2, v_3, v_4\})$.

Il motivo per cui l'affermazione è falsa è che si sta *aggiungendo* una quantità di capacità costante ad ogni arco: in questo modo, i cut che contengono più archi ricevono complessivamente un'aggiunta di capacità maggiore di quelli costituiti da meno archi e l'ordininamento delle capacità dei vari tagli può essere modificato. Seguendo lo stesso ragionamento si può dimostrare che l'affermazione è vera se la capacità di ogni arco viene moltiplicata per un fattore costante.



Esercizio 4. Cammini minimi. Si consideri il grafo in Figura 1, dove sono indicati i pesi degli archi che rappresentano la lunghezza delle strade corrispondenti. Si vuole trovare il cammino minimo dal nodo v_1 a v_3.

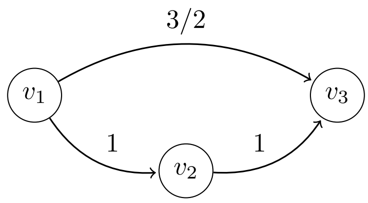


Figure 1: Il grafo per l'esercizio 4.

a) Si riformuli il problema dei cammini minimi come un problema di ottimizzazione di flussi.

b) Si risolva analiticamente il problema di ottimizzazione e si verifichi che la sua soluzione coincide con l'ovvio cammino minimo.

Soluzione. a) Ordiniamo gli archi nel seguente modo:

$$e_1 = (v_1, v_3), \quad e_2 = (v_1, v_2), \quad e_3 = (v_2, v_3).$$

Costruiamo la matrice di incidenza nodi-archi del grafo:

$$B = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assumiamo che i costi siano lineari nei flussi, cioè $c_e(f_e) = l_e f_e$. Il problema dei cammini minimi si può allora riformulare nel seguente problema di ottimizzazione di flussi:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{3}{2} f_1 + f_2 + f_3 \\ \text{subject to} \quad & Bf = \nu \\ & f \geq 0 \end{aligned}$$

dove $\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ è il flusso esogeno.

b) Includendo il vincolo di uguaglianza nella funzione obiettivo, il problema di ottimizzazione può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{3}{2} f_1 + (1 - f_1) + (1 - f_1) \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq f_1 \leq 1. \end{aligned}$$

La funzione obiettivo può essere riscritta come $\frac{3}{2}f_1+(1-f_1)+(1-f_1) = -\frac{1}{2}f_1+2$, che assume valore minimo nell'intervallo $[0,1]$ per $f_1 = 1$. Di conseguenza, i flussi ottimi sono $f_1 = 1$, $f_2 = f_3 = 0$ e il valore minimo della funzione obiettivo è $\frac{3}{2}$. Quindi, il cammino minimo ha lunghezza totale di $\frac{3}{2}$ e corrisponde all'arco e_1.

Esercizio 5. Si consideri la rete in Figura 2. Si assuma un inflow unitario nel nodo v_1 e funzioni di ritardo $\tau_1(x) = x$ e $\tau_2(x) = 1$, che indicano il ritardo sperimentato da ogni utente che percorra una delle strade quando su di questa è presente un flusso x. Si immagini di dover pianificare il traffico con lo scopo di ottimizzare il tempo di viaggio totale, cioè la quantità

$$f_1\tau_1(f_1) + f_2\tau_2(f_2)\,.$$

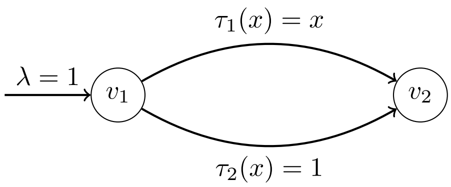


Figure 2: Grafo per l'esercizio 5.

a) Si formuli il problema di ottimo di sistema come un problema di ottimizzazione di flussi su rete.

b) Si risolva analiticamente il problema di ottimizzazione del punto a).

c) Si trovi l'equilibrio di Wardrop, ovvero l'ottimo degli utenti.

d) Si introducono dei pedaggi β che hanno l'effetto di aumentare il ritardo percepito sull'arco 1, cioè $\tau_1(x) = x + \beta$. Per quali valori di $\beta \geq 0$ l'equilibrio di Wardrop coincide con l'ottimo di sistema?

Soluzione. a) Scriviamo la matrice di incidenza nodi-archi e i vettori di inflow e outflow:

$$B = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \nu = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Il problema di ottimizzazione del costo totale (ottimo di sistema) si scrive allora come:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_1^2 + f_2 \\ \text{subject to} \quad & Bf = \nu \\ & f \geq 0 \end{aligned}$$

b) Per la conservazione del flusso ai nodi, abbiamo che $f_2 = 1 - f_1$ per $0 \leq f_1 \leq 1$. Sostituendo questa espressione nella funzione obiettivo stiamo includendo nell'obiettivo il vincolo di uguaglianza. Quindi il problema di ottimizzazione può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_1^2 - f_1 + 1 \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq f_1 \leq 1 \end{aligned}$$

La funzione $g(f_1) = f_1^2 - f_1 + 1$ assume il valore minimo in $f_1 = \frac{1}{2}$. Si ottiene così che all'ottimo $f_1 = \frac{1}{2}$ e di conseguenza $f_2 = \frac{1}{2}$. Il costo totale corrispondente a questi flussi è $\frac{3}{4}$.

c) L'equilibrio di Wardrop è la soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \int_0^{f_1} x dx + \int_0^{f_2} dx \\ \text{subject to} \quad & Bf = \nu \\ & f \geq 0 \end{aligned}$$

che può essere riscritto calcolando gli integrali e includendo nell'obiettivo il vincolo di uguaglianza

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{2} f_1^2 - f_1 + 1 \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq f_1 \leq 1 \end{aligned}$$

La funzione obiettivo $g(f_1) = \frac{1}{2}f_1^2 - f_1 + 1$ è quadratica e assume il valore minimo per $f_1 = 1$, a cui corrisponde $f_2 = 0$. Si osservi che in questa configurazione di flussi, il costo sociale (cioè il costo totale $f_1^2 + f_2$) è pari ad 1, cioè è maggiore di quello calcolato per l'ottimo di sistema al punto **b)** (pari a $\frac{3}{4}$).

d) Con la nuova funzione di costo $\tau_1(x) = x + \beta$, il problema dell'ottimo degli utenti diventa

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \int_0^{f_1} (x + \beta)\, dx + \int_0^{f_2} dx \\ \text{subject to} \quad & Bf = \nu \\ & f \geq 0 \end{aligned}$$

che può essere riscritto calcolando gli integrali e includendo nell'obiettivo il vincolo di uguaglianza

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{2} f_1^2 + (\beta - 1) f_1 + 1 \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq f_1 \leq 1 \end{aligned}$$

La funzione obiettivo $g(f_1) = \frac{1}{2}f_1^2 + (\beta - 1)f_1 + 1$ è quadratica, con derivata prima $g'(f_1) = f_1 + (\beta - 1)$. Ricordiamo che l'ottimo di sistema si ha per $f_1 = \frac{1}{2}$: l'ottimo di sistema coincide con l'equilibrio di Wardrop se $g'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \beta - 1 = 0$, cioè se $\beta = \frac{1}{2}$.

Esercizio 6. Ottimo di sistema, ottimo degli utenti e pedaggi. Ci sono due strade che collegano la città o alla città d: una passa per la città intermedia a e l'altra per la città intermedia b (si veda la Figura 3). Il ritardo in cui si incorre nel percorrere l'arco $e_1 = (o, a)$ è pari al doppio del flusso che lo attraversa, mentre il ritardo sul link $e_3 = (a, d)$ è costante e pari a 3 unità di tempo. Il ritardo sull'arco $e_2 = (o, b)$ è costantemente uguale a 2 unità di tempo, mentre il ritardo che si incorre nel percorrere $e_4 = (b, d)$ è pari a tre volte il flusso che lo attraversa. Si assuma di dover trasferire una unità di flusso da o a d.

a) Determinare il vettore dei flussi corrispondente a un equilibrio di Wardrop e il costo per il sistema all'equilibrio.

b) Determinare l'ottimo di sistema, definito come la configurazione di flussi che minimizza il costo totale $\sum_{e\in\mathcal{E}} \psi_e(f_e) = \sum_{e\in\mathcal{E}} \tau_e(f_e)f_e$, dove $\tau_e(f_e)$ sono le funzioni di ritardo.

c) Usando le risposte ai punti a) e b), determinare il prezzo dell'anarchia e suggerire una scelta per i pedaggi che riduce il prezzo dell'anarchia a 1.

d) Si consideri la possibilità di costruire una nuova strada diretta dal nodo o al nodo d, che possiamo rappresentare come un link aggiuntivo $e_5 = (o, d)$ con ritardo costante $\tau_{e_5}(f_{e_5}) = 4$. Questa decisione diminuirebbe il costo totale all'equilibrio di Wardrop o all'ottimo di sistema?

e) Invece di implementare la possibilità considerata al punto **d**, si costruisce una strada da a a b, rappresentata da un link $e_6 = (a, b)$ con percorrenza così rapida da poter modellare il suo ritardo come $\tau_{e_6}(f_{e_6}) = 0$. Cosa succede al costo totale all'equilibrio di Wardrop?

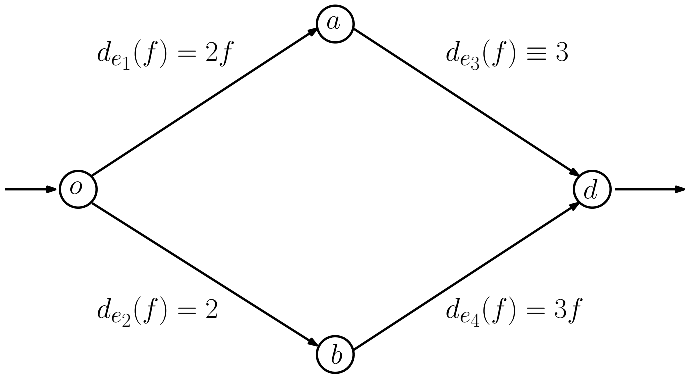


Figure 3

f) Dopo aver costruito la strada $e_6 = (a, b)$ con funzione di ritardo $\tau_{e_6}(f) = 0$ al punto **d**, si consideri di nuovo la possibilità discussa al punto **c**, cioè di costruire una strada diretta $e_5 = (o, d)$ con ritardo costante $\tau_{e_5}(f) = 4$. Questa scelta diminuirebbe il costo totale all'equilibrio di Wardrop rispetto al risultato del punto **d**?

Soluzione. a) Indichiamo con $p^{(1)}$ il cammino $o \to a \to d$ e con $p^{(2)}$ il cammino $o \to b \to d$. Siano z_1 e z_2, con $z_1 + z_2 = 1$, i flussi sul cammino $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$, rispettivamente. Il ritardo totale sul cammino $p^{(1)}$ è $\Delta_1 = 2z_1 + 3$ mentre il ritardo totale su $p^{(2)}$ è $\Delta_2 = 3z_2 + 2 = 5 - 3z_1$. Per definizione, una configurazione di flussi è un equilibio di Wardrop se per ogni flusso z_i associato a un cammino dall'origine alla destinazione, vale che $z_i > 0$ solo se $\Delta_i \leq \Delta_j$ per ogni altro cammino dall'origine alla destinazione $p^{(j)}$, dove Δ_i è il ritardo totale associato a $p^{(i)}$. Perciò se $z_1 > 0$, deve essere $\Delta_1 \leq \Delta_2 \Leftrightarrow 2z_1 + 3 \leq 5 - 3z_1 \Leftrightarrow z_1 \leq 2/5$. Inoltre se $z_2 > 0$, deve essere $\Delta_2 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow z_1 \geq 2/5$. Queste condizioni sono soddisfatte se $z_1 = 2/5$, che fornisce $z_2 = 1 - z_1 = 3/5$. Perciò la configurazione

$$f_{e_1} = f_{e_3} = 2/5\,,\; f_{e_2} = f_{e_4} = 3/5$$

è un equilibrio di Wardrop. Il costo totale $\sum_{e \in \mathcal{E}} \psi_e(f_e) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \tau_e(f_e) f_e$ associato a questo equilibrio di Wardrop è 19/5.

b) Mantenendo la notazione introdotta al punto a), l'ottimo di sistema è la soluzione del problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z_1(2z_1 + 3) + z_2(2 + 3z_2) \\ \text{subject to} \quad & z_1 + z_2 = 1 \end{aligned}$$

che può essere riscritto in funzione del solo flusso z_2 come

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 5z_2^2 - 5z_2 + 5 \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq z_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Consideriamo la funzione obiettivo $f(z_2) = 5z_2^2 - 5z_2 + 5$. Abbiamo che $f'(z_2) = 10z_2 - 5$ e $f''(z_2) = 10 > 0$. Perciò $f(z_2)$ è convessa e il minimo si ottiene quando $f'(z_2) = 0$, cioè per $z_2 = 1/2$. Dunque l'ottimo di sistema è $z_1 = z_2 = 1/2$. Il costo totale corrispondente è

$$\frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 3\right) + \frac{1}{2}\left(2 + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4} < \frac{19}{5}.$$

c) Il prezzo dell'anarchia è

$$\frac{\frac{19}{5}}{\frac{15}{4}} = \frac{76}{75}.$$

E' possibile scegliere un vettore di pedaggi ω tale che se le funzioni di ritardo $\tau_e(f_e)$ sono sostituite con delle nuove funzioni di ritardo $\omega_e + \tau_e(f_e)$, l'equilibrio di Wardrop $f^{(\omega)}$ rispetto alle nuove funzioni di costo coincide con l'ottimo di sistema f^* nel caso senza pedaggi. Questo risultato si ottiene scegliendo $\omega_e^* = \psi_e'(f_e^*) - \tau_e(f_e^*) = f_e^* \tau_e'(f_e^*)$. I pedaggi dovrebbero quindi essere scelti pari a $\omega_1^* = 1$, $\omega_2^* = \omega_3^* = 0$ e $\omega_4^* = 3/2$.

d) I ritardi totali sui tre o-d path $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ e $p^{(3)} = o \to d$ sono $\Delta_1 = 2z_1 + 3$, $\Delta_2 = 3z_2 + 2$ e $\Delta_3 = 4$. Possiamo verificare che l'estensione dell'equilibrio di Wardrop trovato al punto **a**, cioè la configurazione di flussi $z_1 = 2/5$, $z_2 = 3/5$, $z_3 = 0$, è un equilibrio di Wardrop sul nuovo grafo. Infatti, in questa configurazione di flussi abbiamo $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ e $\Delta_1 = \Delta_2 = 19/5 < 4 = \Delta_3$, perciò è verificato che $\Delta_1 \leq \Delta_j$, per $j = 2, 3$ e $\Delta_2 \leq \Delta_j$ per $j = 1, 3$. Perciò il costo totale all'equilibrio di Wardrop non cambia rispetto al punto **a** ed è pari a $19/5$.

Invece, l'ottimo sociale è modificato. Infatti, si può notare (per esercizio) che all'ottimo sociale se un cammino p è utilizzato, allora deve valere che per ogni cammino r

$$\sum_{e:e\in p} \left(\tau_e(f_e) + f_e \tau_e'(f_e)\right) \leq \sum_{e:e\in r} \left(\tau_e(f_e) + f_e \tau_e'(f_e)\right). \tag{2}$$

Si supponga che tutti i cammini siano utilizzati. Allora,

$$2z_1 + 2z_1 + 3 = 4 = 2 + 3z_2 + 3z_2.$$

Utilizzando anche $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ si trova che $z_1 = 1/4, z_2 = 1/3, z_3 = 5/12$, con costo associato $85/24 < 19/5$.

e) I ritardi totali sui tre o-d path $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ e $p^{(3)} = o \to a \to b \to d$ sono $\Delta_1 = 2(z_1 + z_3) + 3$, $\Delta_2 = 3(z_2 + z_3) + 2$ e $\Delta_3 = 2(z_1 + z_3) + 3(z_2 + z_3)$. Sia z l'equilibrio di Wardrop.

Se $z_1 > 0$, si deve avere $\Delta_1 \leq \Delta_2$ e $\Delta_1 \leq \Delta_3$. In particolare, $\Delta_1 \leq \Delta_3$ implica che $2(z_1 + z_3) + 3 \leq 2(z_1 + z_3) + 3(z_2 + z_3) \Leftrightarrow 3 \leq 3(z_2 + z_3)$ che è falso, poichè $3(z_2 + z_3) < 3$ non è compatibile con $z_1 > 0$. Perciò, $z_1 = 0$.

Allo stesso modo, se $z_2 > 0$ si deve avere $\Delta_2 \leq \Delta_1$ e $\Delta_2 \leq \Delta_3$. In particolare, $\Delta_2 \leq \Delta_3$ implica che $3(z_2 + z_3) + 2 \leq 2(z_1 + z_3) + 3(z_2 + z_3) = 2z_3 + 3(z_2 + z_3)$ (l'ultima uguaglianza deriva da $z_1 = 0$). Ma questo è falso poichè $2z_3 < 2$ avendo assunto $0 < z_2 = 1 - z_3$. Perciò deve essere $z_2 = 0$. Quindi, da $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ segue che $z_3 = 1$. Riassumendo, $z_1 = z_2 = 0$ e $z_3 = 1$ è un equilibrio di Wardrop con costo totale uguale a 5.

La spiegazione intuitiva di questo risultato è la seguente. All'equilibrio di Wardrop sul nuovo grafo, ogni utente sceglie di percorrere il cammino $p^{(3)} = o \to a \to b \to d$ con ritardo di 5. Dirigere parte del flusso sugli altri cammini renderebbe il ritardo sperimentato su $p^{(3)}$ minore di quello sperimentato su $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$. Dunque il flusso deve essere nullo su $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ all'equilibrio di Wardrop. Si noti che il costo totale in questo equilibrio di Wardrop è 5, che è maggiore di quanto calcolato al punto **a** nel setting iniziale. Ciò mostra che l'aggiunta di nuove strade, anche se a percorrenza molto rapida, può aumentare il congestionamento del sistema, cioè al paradosso di Braess.

f) I ritardi totali sui quattro o-d path $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)} = o \to a \to b \to d$ e $p^{(4)} = o \to d$ sono $\Delta_1 = 2(z_1 + z_3) + 3$, $\Delta_2 = 3(z_2 + z_3) + 2$, $\Delta_3 = 2(z_1 + z_3) + 3(z_2 + z_3)$ e $\Delta_4 = 4$. Sia z equilibrio di Wardrop. Si noti che z_4 non compare nell'espressione di Δ_1, Δ_2 e Δ_3. Perciò seguendo lo stesso ragionamento fatto al punto e) (e con gli stessi passaggi) si ottiene che z_1 e z_2 sono nulli. Dunque dobbiamo determinare z_3 e z_4 affinchè $z_3 + z_4 = 1$, cioè dobbiamo soltanto capire come il flusso unitario si divide fra $p^{(3)}$ e $p^{(4)}$. Se $z_3 > 0$, si deve avere che $\Delta_3 \leq \Delta_4 \Leftrightarrow 2z_3 + 3z_3 \leq 4 \Leftrightarrow z_3 \leq 4/5$. Inoltre se $z_4 > 0$ si deve avere che $\Delta_4 \leq \Delta_3 \Leftrightarrow z_3 \geq 4/5$. Entrambe queste condizioni sono soddisfatte da $z_3 = 4/5$, che pertanto corrisponde a un equilibrio di Wardrop. Dunque all'equilibrio di Wardrop sul nuovo grafo $4/5$ del flusso segue il cammino $p^{(3)} = o \to a \to b \to d$ e il restante $1/5$ segue il cammino $p^{(4)} = o \to d$, sperimentando in entrambi i casi un ritardo di $\Delta_3 = \Delta_4 = 4$ unità. Di nuovo, si noti che il costo totale all'equilibrio di Wardrop ottenuto in questa situazione è 4, maggiore di quello iniziale.