Homework1

October 18, 2024

Regole

- La consegna deve includere: i) il codice commentato (File1) e ii) un file PDF con i commenti agli output (File2).
- I nomi dei file devono essere nel formato “Homework1_Matricola_Cognome_NomeFile”.
- I file devono essere caricati sulla pagina del corso, nella sezione “Elaborati”, entro il 3/11/24.
- Il file con i commenti deve contenere la teoria utilizzata per risolvere gli esercizi, i calcoli svolti, e i risultati numerici o grafici che rispondono alle domande degli esercizi.
- I commenti nel codice devono spiegare sinteticamente cosa fanno le diverse parti del codice. Potete fare riferimento a formule presenti nel file PDF, purché siano numerate in modo appropriato.
- **Alternativa:** potete omettere i commenti nel codice e invece riportare i comandi nel File2, commentandoli lì. Il file con il codice eseguibile deve comunque essere consegnato.
- In tutti i codici, dovete impostare il seed in modo che, eseguendo il codice, si ottengano gli stessi risultati presenti nel PDF. Il seed deve essere il vostro numero di matricola.
- In tutti gli esercizi in cui è richiesto di stimare qualcosa con il metodo Monte Carlo (MC), le stime devono essere basate su almeno 1000 campioni. Negli algoritmi accept-reject, devono essere accettati almeno 1000 campioni.
- L’uso di chat-bot o intelligenza artificiale è ammesso solo come strumento per il controllo del testo, dei calcoli e del codice, ma non per la loro scrittura. L’uso di chat-bot o IA va dichiarato.
- È possibile lavorare in gruppo, ma è necessario dichiarare con chi si è collaborato nel “File2”.
- Se il lavoro svolto non è sufficiente, avrete un’altra opportunità per modificare, integrare o rifare l’homework.
- Non verrà assegnato un voto per l’homework, ma in caso di elaborati particolarmente meritevoli, ne verrà tenuto conto per la valutazione finale dell’esame.

1 Esercizio 1

Parametri

- a = un numero casuale preso da $U(2.5, 5.5)$
- b = 1

- p = 0.5
- λ = un numero casuale preso da $U(2,4)$

Abbiamo una variabile $Z \in \{0,1\}$ che segue la seguente distribuzione

$$Z \sim Bern(p)$$

e, condizionatamente a Z, abbiamo un variabile Y con la seguente distribuzione

$$Y|Z=0 \sim P(\lambda) \qquad Y|Z=1 \sim G(a,b)$$

1. Ottenete dei campioni dalla marginale di Y e plottate una stima MC della CDF
2. Stimate con MC il valore di $f(Y \in [3.5, 4.5])$ e $f(Y \in [3.5, 4.5]|Z=0)$, e stimate la varianza dello stimatore (Ricordate che $f(A|B) = \frac{f(A,B)}{f(B)}$).
3. Stimate con MC il valore di $f(Z=0|Y \in [1.5, 3.5])$ e $f(Z=1|Y \in [1.5, 3.5])$
4. Usando l'inversa generalizzata, stimare i quantili empirici a livello (probabilità) 0.1, 0.2, 0.5, 0.75 di Y e Z
5. (Opzionale) Stimare con MC, e poi plottare, quanto vale la $f(Y=y)$, separatamente, per la parte continua e discreta di y nei punti $y \in \{j/4; j=0,1,2,\dots,40\}$

2 Esercizio 2

Parametri

- μ = un numero casuale preso da $U(-1.5, 1.5)$
- σ^2 = un numero casuale preso da $U(0.5, 1.5)$

Un variabile aleatoria $X \in [0,1]$ segue una distribuzione logistic-normal (normal logistica) se ha densità

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x(1-x)}(2\pi\sigma^2)^{-0.5}\exp\left(-\frac{(logit(x)-\mu)^2}{2}\right)$$

dove

$$logit(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

1. simulare un set di $n=10$ dati dalla logistic-normal usando un metodo accept-reject
2. assumete una prior $\mu \sim N(0,100)$ e σ^2 noto e pari al valore usato nelle simulazioni. Derivate la a posteriori e ottenete dei campioni usando un campionamento diretto o il metodo accept-reject basato sul kernel.
3. simulate un set di $n=100$ dati dalla logistic-normal, e simulate dalla a posteriori di μ assumendo la stessa prior del punto precedente. Confrontate graficamente la prior, e le due a-posteriori.
4. valutare quanto vale $E(X)$ usando l'importance sampling e una $B(1.2, 1.2)$