Homework1 Rostagno

295706

November 8, 2024

Esercizio 1

- **Punto a:**

$$
\begin{array}{lll}
U = \{o\} & U^c = \{a, b, c, d\} & C_U = 6 \\
U = \{o, a\} & U^c = \{b, c, d\} & C_U = 6 \\
U = \{o, b\} & U^c = \{a, c, d\} & C_U = 8 \\
U = \{o, c\} & U^c = \{a, b, d\} & C_U = 7 \\
U = \{o, a, b\} & U^c = \{c, d\} & C_U = 7 \\
U = \{o, b, c\} & U^c = \{a, d\} & C_U = 6 \\
U = \{o, a, c\} & U^c = \{b, d\} & C_U = 7 \\
U = \{o, a, b, c\} & U^c = \{d\} & C_U = 5
\end{array}
$$

  Ho calcolato la capacità di ogni taglio (C_U) dividendo insieme di partenza (U) e insieme di arrivo (U^c).
  La capacità minima da rimuovere affinché non sia più possibile alcun flusso fattibile dal nodo o al nodo d è 5, va rimossa dagli archi e_2 e_4 e_6.

- **Punto b:** Sia x la capacità extra da aggiungere, per poter massimizzare il throughput da o a d è necessario aggiungere la capacità su degli archi prestabiliti in un certo ordine. Dobbiamo inserire la prima unità sull'arco e_2, successivamente va aggiunta su e_4, poi su e_1 ed infine su e_3; dopodichè si ricomincia da e_2 e si ripete in base al valore di x. Questa è la sequenza che aumenta in maniera più rapida il throughput.
  Graficamente diventa:

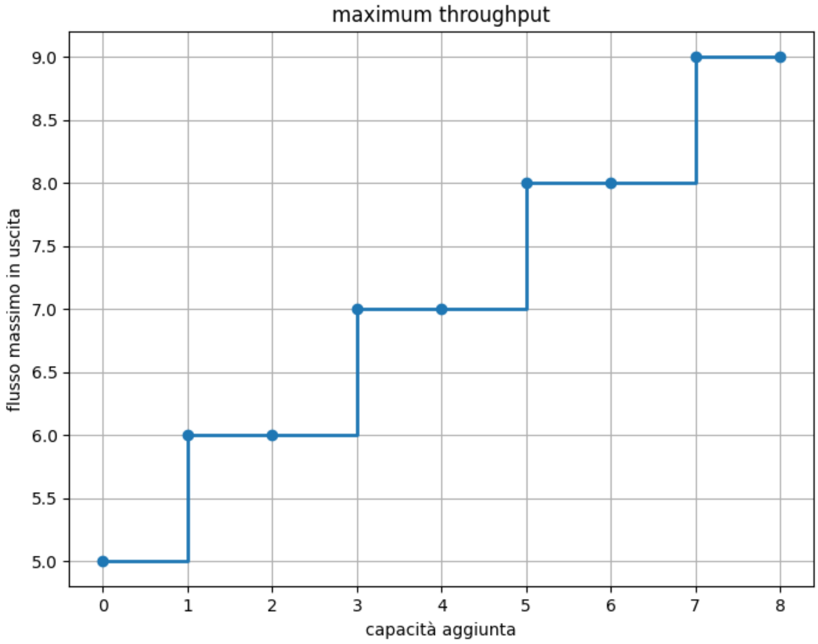

Figure 1: Massimo flusso in uscita in base alla capacità aggiunta

Nel caso in cui non si aggiunga capacità extra abbiamo come flusso max 5, se aggiungiamo una o due unità di capacità otteniamo 6 come flusso max mentre se aggiungiamo tre o quattro unità di capacità otteniamo 7 come flusso max. Dopo questi 4 valori notiamo che il grafico si ripete (come detto in precedenza).

- **Punto c:** Il nuovo collegamento e_8 di capacità 1 dovrebbe essere aggiunto in una posizione che contribuisca a migliorare il taglio minimo, di conseguenza l'ho aggiunto tra il nodo c e il nodo d in quanto era il collegamento più debole. La posizione delle capacità segue un andamento periodico come prima, vanno inserite in questo ordine e poi ripetute: e_3, e_2, e_4, e_1. Graficamente diventa:

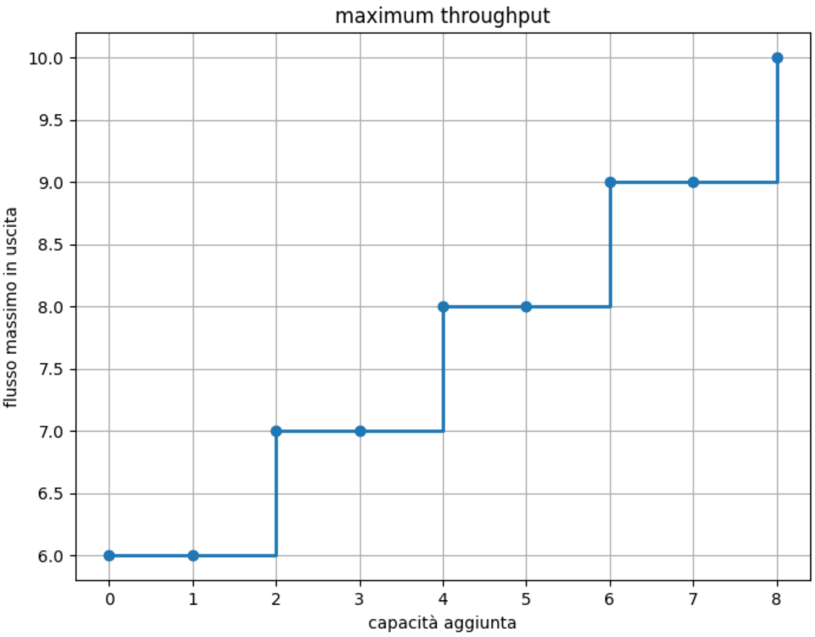

Figure 2: Massimo flusso in uscita in base alla capacità aggiunta

Notiamo che la capacità iniziale è aumentata di 1 e che dopo ogni 4 unità aggiunte il grafico si ripete.

Esercizio 2

- **Punto a:** Considerando che il throughput è uguale a 2 e si inserisce nel vertice o, abbiamo tre possibili percorsi che il flusso può seguire:
  - Percorso 1: e_5, e_6
  - Percorso 2: e_1, e_2, e_4
  - Percorso 3: e_1, e_3, e_4

  Chiamiamo le nostre quattro variabili di flusso $x_1 x_2 x_3 x_4$ dove x_1 rappresenta il flusso in e_1, x_2 rappresenta il flusso in e_5, x_3 rappresenta il flusso in e_3 e x_4 rappresenta il flusso in e_2. Ora scriviamo il nostro problema di ottimizzazione:

$$\min_{x_1,x_2,x_3,x_4} \quad f(x) = x_2 \cdot (2x_2 + 2 + 3x_2) + x_1 \cdot (3x_1 + x_1 + 1) + 3x_3 + x_4 \cdot (x_4 + 1)$$

vincoli:

$x_1 + x_2 = 2,$

$x_3 + x_4 = x_1,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

Facendo le opportune sostituzioni e gli opportuni calcoli si ottiene che la funzione viene minimizzata con $x = [1, 1, 0, 1]$. Notiamo quindi che l'arco e_3 non viene utilizzato e che il flusso iniziale si divide a metà (un'unità nel percorso 2 ed un'unità nel percorso 1).
Costo totale=14.

- **Punto b:** Sicuramente non esiste un flusso che permetta di avere il costo del pedaggio dei 3 percorsi uguale, in quanto il percorso 2 e il percorso 3 hanno due archi in comune e uguagliare gli archi e_2, e_3 vorrebbe dire avere un flusso di 2 unità nell'arco e_2, ma questo non è possibile perchè vorrebbe dire avere un pedaggio nullo nel percorso 1. Possiamo quindi eguagliare il costo del pedaggio del percorso 1 al percorso 2 o al percorso 3. Nel primo caso otteniamo lo stesso flusso del punto a, ovvero $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$. Nel secondo caso invece otteniamo $x_1 = \frac{8}{9}$ e $x_2 = \frac{10}{9}$.
I costi totali sono rispettivamente 14 per i percorsi 1 e 2, e $\frac{136}{9}$ per i percorsi 1 e 3.
I prezzi di anarchia sono corrispettivamente 1 e $\frac{68}{63}$.