LEZIONE 21/11/24

ULTIMA VOLTA (GASPARINI)

$$\text{N} \quad (*) \quad \frac{(C\beta - C\hat{\beta})\left(C(X'X)^{-1}C'\right)^{-1}(C\beta - C\hat{\beta})}{q \cdot \boxed{\dfrac{EE'}{m-p}}} \overset{d}{=} F(q, m-p)$$

$$MSR = \frac{RSS}{m-p}$$

MSR = mean squared residuals
RSS = residual sum of squares

CASO 1 (TEST TUTTO O NIENTE) LA MATRICE $C = I$

$$C \cdot \beta = \beta \qquad C(X'X)^{-1}C' = (X'X)^{-1}$$

① TEST D'IPOTESI PER β

$$H_0 : \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_p^* \end{pmatrix}$$

OSS: β^* può essere un qualsiasi valore di interesse. Se $\beta^* = \vec{0}$ allora siamo nel caso del test TUTTO/NIENTE (ultima riga del summary in R)

$$\frac{(\hat{\beta} - \beta^*)' \cdot (X'X) \cdot (\hat{\beta} - \beta^*)}{p \cdot MSR} = F(p, m-p)$$

RIFIUTO H_0 SE $\dfrac{(\hat{\beta} - \beta^*)(X'X)(\hat{\beta} - \beta^*)}{p \cdot MSR} > F_\alpha(p, m-p)$

"ACCETTO" H_0 SE $\dfrac{(\hat{\beta} - \beta^*)(X'X)(\hat{\beta} - \beta^*)}{p \cdot MSR} \leq F_\alpha(p, m-p)$

② COSTRUIAMO UNA REGIONE DI CONFIDENZA PARTENDO DA (*)

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\hat{\beta} - \beta)(X'X)(\hat{\beta} - \beta)}{p \cdot MSR} \leq F_\alpha(p, m-p)\right) = 1 - \alpha$$

$$\underbrace{(\hat{\beta} - \beta)(X'X)(\hat{\beta} - \beta) \leq p \cdot MSR \cdot F_\alpha(p, m-p)}$$

OSS: è un ellissoide di confidenza centrato in $\hat{\beta}$.
Se ripeto l'inferenza ∞ volte β cade nell'ellissoide

$(1-\alpha)\%$ volte

$\boxed{\text{CASO 2}}$ (TEST SINGOLO PREDITTORE)

$$C = (0, 0 \dots \underbrace{1}_{\substack{\text{componente} \\ i\text{-esima}}}, 0 \dots 0)$$

$$C\hat{\beta} = \hat{\beta}_{ii} \qquad C(X'X)^{-1}C' = (X'X)^{-1}_{ii}$$

$$C\beta = \beta_{ii}$$

DA (*)

$$\frac{(\hat{\beta}_i - \beta_i)^2}{MSR\ (X'X)^{-1}_{ii}} \overset{d}{=} F(1, n-p)$$

$$\mathbb{P}\left((\hat{\beta}_i - \beta_i)^2 \leq F_\alpha(1, n-p) \cdot (X'X)^{-1}_{ii} \cdot MSR \right) = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}\left(|\hat{\beta}_i - \beta_i| \leq \sqrt{F_\alpha(1, n-p)} \cdot \sqrt{(X'X)^{-1}_{ii} \cdot MSR} \right) = 1-\alpha$$

OSS: $$F(1, n-p) \overset{d}{=} \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(n-p)/n-p} \overset{d}{=} \frac{N(0,1)^2}{\chi^2(n-p)/n-p}$$

$$\overset{d}{=} \Bigg(\underbrace{\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-p)}{n-p}}}}_{\overset{d}{=}\ t(n-p)} \Bigg)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{F(1, n-p)} \overset{d}{=} t(n-p)$$

① INTERVALLO DI CONFIDENZA PER β_i

$$\hat{\beta}_i \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p) \sqrt{(X'X)^{-1} \cdot MSR}$$

② TEST D'IPOTESI PER $H_0 : \beta_i = \beta_i^*$

RIFIUTO H_0 SE $$\frac{(\hat{\beta}_i - \beta_i)^2}{MSR\ (X'X)^{-1}} > F_\alpha(1, n-p)$$

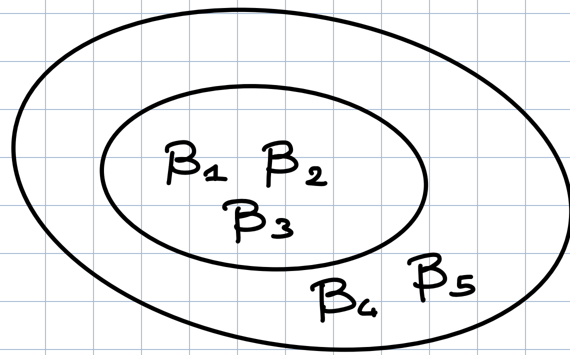
$$\left| \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{MSR\ (X'X)^{-1}}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p)$$

"ACCETTO" H_0 ALTRIMENTI

OSS: È un caso di interesse $\beta_i^* = 0$ perché va a testare la significatività dell'effetto i-esimo

CASO 3 (TEST PER MODELLI ANNIDATI)

MODELLO GRANDE : P PARAMETRI
MODELLO PICCOLO : P_0 PARAMETRI $1 \leq P_0 < P$



$H_0: \beta_4 = \beta_5 = 0$

OSS: (N) DENTRO (*) PUÒ ESSERE RISCRITTO COME

$$\text{(N)} = RSS_0 - RSS$$

$RSS \rightarrow$ modello grande

'0' indica il modello piccolo

$$q = P - P_0$$

$$F = \frac{RSS_0 - RSS}{\frac{q}{m-p} \cdot RSS} \sim F(q, m-p)$$

IN GENERALE $RSS_0 > RSS$ PERCHE' IL MODELLO CON PIU' PREDITTORI SARA' PIU' PRECISO (RESIDUI MINORI); TUTTAVIA SOTTO H_0 I MODELLI SONO EQUIVALENTI E $RSS_0 = RSS \longrightarrow F = 0$

RIFIUTO SE $\dfrac{RSS_0 - RSS}{\frac{q}{m-p} \cdot RSS} > F_\alpha(q, m-p)$

"ACCETTO" SE $\dfrac{RSS_0 - RSS}{\frac{q}{m-p} \cdot RSS} > F_\alpha(q, m-p)$