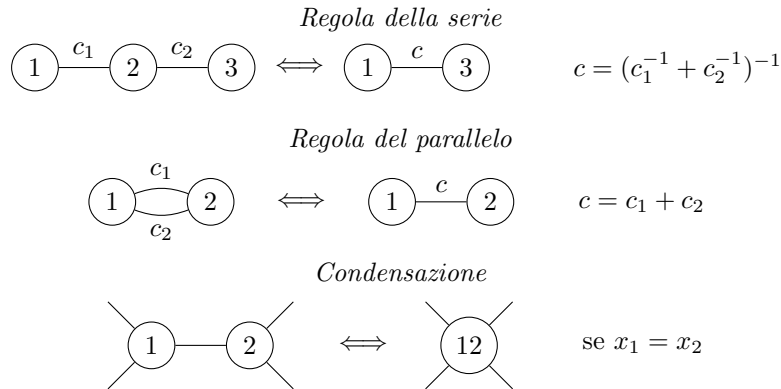


## Reti elettriche e dinamiche di opinione con stubborn

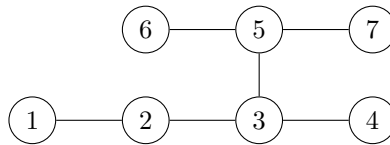
**Richiami di teoria.** Dato un grafo indiretto  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , indichiamo con  $c$  i pesi degli archi, definiti dalla matrice  $W$ : nell'analogia elettrica rappresentano delle conduttanze. Con  $x$  indichiamo il potenziale associato ai nodi, corrispondente all'opinione asintotica dei nodi in una dinamica di averaging con stubborn, e con  $\phi$  la corrente sugli archi. La legge di Ohm stabilisce il legame fra corrente, potenziale e conduttanze:  $\phi_{ab} = c_{ab}(x_a - x_b)$ . Richiamiamo i tre strumenti principali per risolvere le reti elettriche:



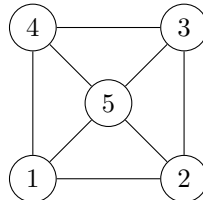
**Nota.** Di solito, dopo la condensazione si utilizza la regola del parallelo, poichè il grafo che risulta dal processo di condensazione è in genere un multi-grafo (cioè un grafo con più di un arco fra una coppia di nodi).

### Esercizio 1. Potenziale per grafi semplici.

- a) Calcolare il potenziale nel seguente grafo usando l'approccio migliore, assumendo che  $x_1 = 0$  e  $x_6 = 1$ .

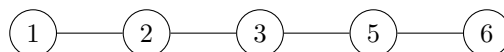


- b) Sia  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  il grafo seguente:



Calcolare il potenziale  $x$  assumendo che  $x_1 = 0$  e  $x_5 = 1$ . Eseguire il calcolo sia risolvendo l'equazione di Laplace (cioè trovando l'estensione armonica del potenziale dato) sia usando gli strumenti delle reti elettriche. Si assuma che ogni arco abbia peso/conduttanza unitario.

*Soluzione.* a) Osserviamo che il nodo 7 è connesso solo al nodo 5, perciò  $x_5 = x_7$ , e lo stesso ragionamento si applica al nodo 4 (per cui  $x_4 = x_3$ ). Quindi possiamo semplificare il grafo, che diventa una linea:

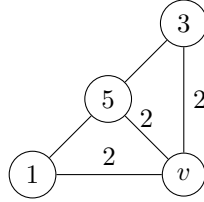


Si può applicare ripetutamente la regola della serie ai link fra i nodi 1 e 6 per ridursi a un grafo composto da un singolo arco con conduttanza  $C_{61} = \frac{1}{4}$ . Il flusso di corrente sulla linea è  $\phi_{61} = C_{61}(x_6 - x_1) = \frac{1}{4}$ . Infine, usando la legge di Ohm si ottiene  $\frac{1}{4} = C_{21}(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}$ . Allo stesso modo si trova che  $x_3 = \frac{1}{2}$  e  $x_5 = \frac{3}{4}$ .

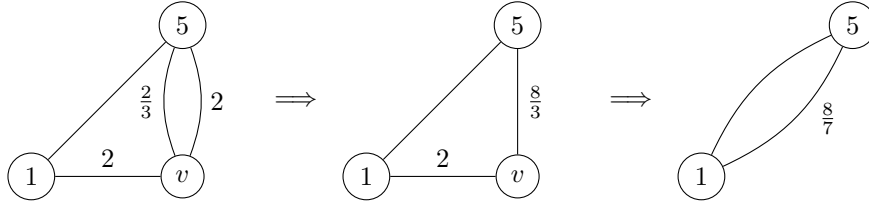
b) Il vettore  $x$  può essere ottenuto calcolando l'estensione armonica sui nodi 2, 4 e 3 della funzione che soddisfa  $x_1 = 0$  e  $x_5 = 1$ . Ciò significa risolvere il sistema di equazioni  $x_u = \sum_v P_{uv}x_v$ ,  $\forall u \notin \{1, 5\}$ , che fornisce:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3} \\ x_4 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Tuttavia spesso questo metodo richiede un grande numero di operazioni (specialmente in grafi di grandi dimensioni), per cui si rivela più utile ricorrere al formalismo delle reti elettriche. Per simmetria, si nota che il nodo 2 ha lo stesso potenziale del nodo 4, perciò è possibile condensarli come segue:



Quindi, si applica la regola della serie (sommando le resistenze) agli archi (5, 3) e (3, v), ottenendo un unico arco fra i nodi 5 e v di conduttanza  $\frac{2}{3}$ . Si applica quindi la regola del parallelo (sommando le conduttanze) all'arco così ottenuto e all'altro arco di conduttanza 2 già presente fra i nodi 5 e v, ottenendo un unico arco di conduttanza  $\frac{8}{3}$ . Infine, si applica la regola della serie per eliminare il nodo v, sostituendo i due archi (1, v) e (v, 5) con un unico arco di conduttanza  $\frac{8}{7}$ .



Quindi, la corrente che fluisce sull'arco (5, 1) con conduttanza  $\frac{8}{7}$  è data dalla legge di Ohm:

$$(x_5 - x_1) \frac{8}{7} = 1 \frac{8}{7} = \frac{8}{7}$$

e coincide con  $\phi_{v1}$ . Si trova allora  $x_v$ , poichè  $\phi_{v1} = C_{v1}(x_v - x_1) = 2x_v \Rightarrow x_v = \frac{4}{7}$ . Infine, applichiamo la legge di Kirchhoff al nodo 3, ottenendo  $\phi_{53} = \phi_{3v}$ ,  $C_{53}(x_5 - x_3) = C_{3v}(x_3 - x_v)$ , e per la legge di Ohm otteniamo l'espressione per  $x_3 = \frac{2}{3}x_v + \frac{1}{3}x_5 = \frac{5}{7}$ .

**Esercizio 2. Posizionamento ottimale di un nodo stubborn.** Si consideri il ciclo  $C_n$  con nodi  $\{1, \dots, n\}$ , dove il nodo 1 è un agente stubborn con opinione  $x_1 = 0$ . Tutti gli altri nodi sono non stubborn, tranne uno che è stubborn sul valore 1. Dove bisogna porre lo stubborn con opinione 1 per massimizzare la media delle opinioni asintotiche?

*Soluzione.* Consideriamo il ciclo  $C_n$  dove il nodo 1 è stubborn con opinione 0 mentre l'agente stubborn con opinione 1 è in un arbitrario nodo  $j \neq 1$ .

Sfruttiamo l'analogia tra opinioni asintotiche e potenziale in reti elettriche. Possiamo applicare la legge della serie e sostituire tutti i  $j-1$  archi di conduttanza 1 fra il nodo 1 e il nodo  $j$  (a destra nella figura) con un unico arco di conduttanza  $c_1 = \frac{1}{j-1}$ . Allo stesso modo possiamo sostituire gli  $n-(j-1)$  archi fra i nodi  $j$  e 1 (a sinistra nella figura) con un unico arco di conduttanza  $c_2 = \frac{1}{n+1-j}$ .

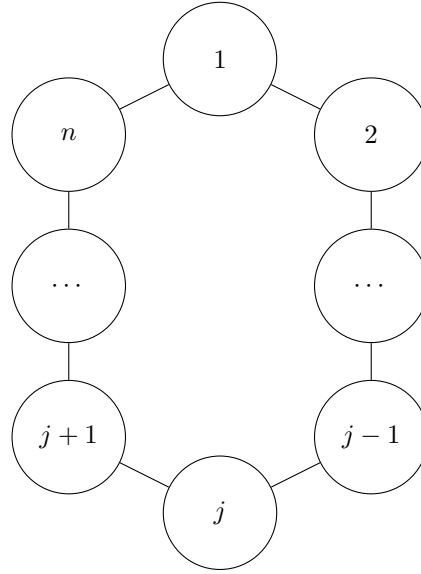


Figure 1

Si vede così che il potenziale cresce in modo lineare lungo i nodi. Lo stesso ragionamento si può ripetere sul ramo di sinistra, ottenendo che dal nodo  $j$  al nodo  $n$  il potenziale decresce linearmente.

Possiamo quindi calcolare il potenziale medio, ovvero l'opinione asintotica media, come:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_k &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{j-1} i + \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{n+1-j} i \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{j-1} \frac{(j-1)j}{2} + \frac{1}{n+1-j} \frac{(n-j)(n+1-j)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left( \frac{j}{2} + \frac{n-j}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(dopo la prima uguaglianza, la prima somma si estende ai nodi del ramo di destra, inclusi 1 e  $j$ , mentre la seconda al ramo di sinistra). Per l'arbitrarietà della scelta di  $j$ , il risultato è indipendente dalla posizione dello stubborn con opinione 1. Questo dimostra che lo stubborn con opinione 1 può essere posto indifferentemente in ogni posizione nel grafo, senza che il risultato cambi: in ogni caso si ottiene che la media delle opinioni asintotiche è pari a  $\frac{1}{2}$ .

## Processi Markoviani e Interazioni Binarie su Network

### Richiami di teoria. Pairwise interacting network systems.

Consideriamo una popolazione finita di agenti, identificati coi nodi di un grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ . Ciascun agente  $i \in \mathcal{V}$  ha uno stato  $x_i \in \mathcal{A}$  e tutti gli stati sono raccolti nella configurazione  $x \in \mathcal{X} = \mathcal{A}^{\mathcal{V}}$ . Si considera un processo di evoluzione del vettore degli stati  $X(t)$  come conseguenza di interazioni binarie fra gli agenti vicini nel grafo e di mutazioni spontanee.

- Ciascun nodo ha un orologio di Poisson con tasso 1. Quando l'orologio scatta, l'agente si attiva e ha una mutazione spontanea. Le probabilità di mutazione spontanea (condizionate allo scatto dell'orologio) sono descritte dai nuclei di mutazione

$$\psi^{(i)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A} \times \mathcal{A}}, \quad i \in \mathcal{V}$$

- Ciascun arco diretto ha un orologio di Poisson con tasso  $\beta W_{ij}$ . Quando l'orologio scatta, l'arco si attiva, l'agente  $i$  incontra l'agente  $j$  e come conseguenza effettua una transizione. Le probabilità di transizione (condizionate allo scatto dell'orologio) sono descritte dai nuclei di interazione binaria

$$\varphi^{(i,j)}(c) \in \mathbb{R}^{\mathcal{A} \times \mathcal{A}}, \quad (i,j) \in \mathcal{E}, \quad c \in \mathcal{A}$$

I pairwise interacting network systems sono quindi catene di Markov con spazio degli stati  $\mathcal{X} = \mathcal{A}^{\mathcal{V}}$  e tassi di transizione

$$\Lambda_{x,y} = \begin{cases} \psi_{x_i, y_i}^{(i)} + \beta \sum_j W_{ij} \varphi_{x_i y_i}^{(i,j)}(x_j) & \text{se } x_i \neq y_i \text{ e } x_{-i} = y_{-i} \\ 0 & \text{se } x \text{ e } y \text{ differiscono in più di 1 entrata,} \end{cases}$$

I modelli epidemici più conosciuti sono:

$$\underline{\text{SI}}: \quad \psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{SIS}}: \quad \psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \varphi(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{SIR}}: \quad \psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi(S) = \varphi(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 3. Una utile riformulazione.** Si consideri un sistema  $X(t)$  di interazioni binarie omogenee su un grafo indiretto  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ , con spazio degli stati  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ , nuclei di mutazione  $\psi$  e nuclei di interazione  $\varphi(0)$  e  $\varphi(1)$ . Si assuma inoltre che interazioni binarie fra nodi che hanno lo stesso stato non abbiano nessun effetto, cioè  $\varphi_{ab}(a) = 0$ .

- a) Dare un'interpretazione dei processi  $N(X(t))$  e  $\zeta(X(t))$ , dove per ogni configurazione  $x$

$$N(x) = \mathbf{1}'x = \sum_{i \in \mathcal{V}} x_i \quad \text{and} \quad \zeta(x) = \sum_{i,j \in \mathcal{V}} W_{ij}(1 - x_i)x_j.$$

- b) Si assuma che il sistema sia in una certa configurazione  $x$ . Scrivere l'espressione dei tassi con cui il processo  $N(x)$  cresce di 1 e decresce di 1, espresso in termini di  $N(x)$ ,  $\zeta(x)$ ,  $\psi$ ,  $\varphi(0)$ ,  $\varphi(1)$  e del numero totale di nodi  $n = |\mathcal{V}|$ .
- c) E' vero in generale che il processo  $N(X(t))$  è Markoviano? Se no, cosa occorre richiedere affinché lo sia?

*Soluzione.* a) La quantità  $N(X(t))$  è il numero di nodi nello stato 1 al tempo  $t$  (perchè ogni nodo può essere solo nello stato 0 o nello stato 1). La quantità  $\zeta(X(t))$  è la così detta *frontiera attiva* nella configurazione  $X(t)$ . Rappresenta il numero di link che connettono un nodo nello stato 0 a un nodo nello stato 1. Ciò si vede notando che  $(1 - x_i)x_j$  è uguale a 1 se e solo se  $x_i = 0$  e  $x_j = 1$  (perchè  $x_i, x_j \in \{0, 1\}$ ).

b) Il tasso con cui  $N(x)$  ha un incremento a  $N(x) + 1$  è dato da

$$\begin{aligned} \sum_{i:x_i=0} \Lambda_{x,x+\delta^{(i)}} &= \sum_{i:x_i=0} \left( \psi_{01} + \beta \sum_j W_{ij} \varphi_{01}(x_j) \right) \\ &= \sum_{i:x_i=0} \psi_{01} + \sum_{i:x_i=0} \beta \sum_{j:x_j=1} W_{ij} \varphi_{01}(1) \\ &= \underbrace{(n - N(x))}_{\text{n. di nodi nello stato 0}} \psi_{01} + \underbrace{\zeta(x)}_{\substack{\text{n. di link } (i,j) \\ \text{t.c. } x_i = 0, x_j = 1}} \beta \varphi_{01}(1). \end{aligned}$$

Nella seconda uguaglianza, abbiamo usato il fatto che  $\varphi_{01}(0) = 0$ , che è stato assunto come ipotesi e che è vero in molte importanti applicazioni. Il tasso con cui  $N(x)$  ha un decremento a  $N(x) - 1$  è allo stesso modo dato da

$$\begin{aligned} \sum_{i:x_i=1} \Lambda_{x,x-\delta^{(i)}} &= \sum_{i:x_i=1} \left( \psi_{10} + \beta \sum_j W_{ij} \varphi_{10}(x_j) \right) \\ &= \sum_{i:x_i=1} \psi_{10} + \sum_{i:x_i=1} \beta \sum_{j:x_j=0} W_{ij} \varphi_{10}(0) \\ &= \underbrace{N(x)}_{\substack{\text{n di nodi} \\ \text{nello stato 1}}} \psi_{10} + \underbrace{\zeta(x)}_{\substack{\text{n di link } (i,j) \\ \text{t.c. } x_i = 1, x_j = 0}} \beta \varphi_{10}(0). \end{aligned}$$

Nella seconda uguaglianza, abbiamo usato di nuovo l'ipotesi  $\varphi_{10}(1) = 0$ . Nell'ultima uguaglianza abbiamo potuto usare  $\zeta(x)$  poichè il grafo è per ipotesi indiretto, il che significa che il numero di link  $(i, j)$  tali che  $x_i = 1$  e  $x_j = 0$  è uguale al numero di link  $(i, j)$  tali che  $x_i = 0$  e  $x_j = 1$ .

c)  $N(X(t))$  non è un processo di Markov in generale. Il processo  $N(X(t))$  rappresenta il numero di nodi nello stato 1 al tempo  $t$ . Affinchè sia Markoviano, i rate che determinano l'evoluzione di  $N(X(t))$  devono dipendere solo da  $N(X(t))$ . In generale, non abbiamo nessuna informazione riguardo alla frontiera attiva solo conoscendo  $N(X(t))$ . Tuttavia, se è possibile esprimere  $\zeta(X(t))$  in termini di  $N(X(t))$ , allora il processo  $N(X(t))$  è di Markov. Un esempio è il grafo completo, dove  $\zeta(x) = N(x)(n - N(x))$ . Un altro esempio è il grafo linea per la dinamica SI quando il primo nodo infetto è sul bordo della linea. Si noti invece che per la dinamica SIS questo non è più vero.

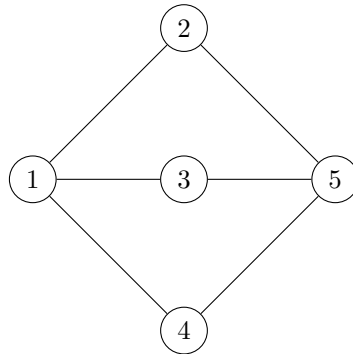


Figure 2

**Esercizio 4.** Si consideri il grafo indiretto in Figura 2 e si assuma che il nodo 1 sia infetto e tutti gli altri siano suscettibili. Si stimi il tempo atteso in cui tutti nodi diventano infetti per la dinamica SI.

*Soluzione.* Si noti che per simmetria è ininfluente se ad infettarsi è il nodo 2, il nodo 3, o il nodo 4. Per questo motivo, indichiamo con  $y \in \mathbf{R}^3$  il vettore tale che  $y_1$  conta il numero di infetti in  $\{1\}$ ,  $y_2$  conta il numero di infetti in  $\{2, 3, 4\}$  e  $y_3$  conta il numero di infetti in  $\{5\}$ . La configurazione di partenza sarà quindi  $(1, 0, 0)$ .

Dato che ci sono tre archi attivi, il rate con cui avviene la prima infezione è  $3\beta$ . Il tempo medio con cui si raggiungono due infetti sarà quindi  $1/(3\beta)$  e si entrerà nella configurazione  $y = (1, 1, 0)$  con probabilità 1.

Il boundary in questa configurazione è 3, dunque il tempo medio atteso per la successiva infezione sarà ancora  $1/(3\beta)$  e sono possibili due transizioni: la nuova configurazione sarà  $(1, 1, 1)$  oppure sarà  $(1, 2, 0)$ . Dobbiamo calcolare la probabilità per le due transizioni. Si noti che i rate associati alle due transizioni sono rispettivamente  $\lambda_1 = \beta$  e  $\lambda_2 = 2\beta$ . Dunque, la probabilità che avvenga la transizione a  $(1, 1, 1)$  è uguale alla probabilità che l'istante di tempo  $T_1$  in cui scatta l'orologio di Poisson con rate  $\beta$  sia minore dell'istante di tempo  $T_2$  in cui scatta l'orologio di Poisson con rate  $2\beta$ . Condizionando sul primo orologio di Poisson, la probabilità sarà uguale a

$$\mathbf{P}(T_1 < T_2) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_2 > t) \cdot f_{T_1}(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_1 t} \lambda_1 dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (1)$$

Condizionando alla probabilità che scatti prima l'orologio 1, il valore atteso di  $T_1$  sarà

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[T_1 | T_1 < T_2] &= \frac{\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_2 > t) \cdot f_{T_1}(t) \cdot t \cdot dt}{\mathbf{P}(T_1 < T_2)} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_1 t} \lambda_1 t \cdot dt \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1}}{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) t \left( -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \right) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza deriva dal teorema di Bayes, la seconda da (1) e la terza si ottiene integrando per parti. Analogamente,

$$\mathbf{E}[T_2 | T_2 < T_1] = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Questo mostra che il rate di uscita da una configurazione non dipende dalla configurazione successiva in cui si troverà la catena di Markov, e tale rate di uscita è sempre uguale alla somma totale dei rate delle possibili transizioni data la configurazione. Possiamo quindi rappresentare l'insieme dei possibili percorsi che la configurazione  $y(t)$  può compiere (si veda Figura 3, dove il primo numero rappresenta il rate associato alla transizione e il secondo la probabilità che si realizzi).

Guardando il grafo in Figura 3 si può osservare che ci sono tre possibili traiettorie che portano dalla configurazione iniziale  $(1, 0, 0)$  alla configurazione assorbente  $(1, 3, 1)$ . Le traiettorie sono le seguenti, dove il primo numero sulla freccia indica il rate della transizione e il secondo numero la probabilità ad essa associata:

1.  $(1, 0, 0) \xrightarrow{3\beta, 1} (1, 1, 0) \xrightarrow{3\beta, 2/3} (1, 2, 0) \xrightarrow{3\beta, 1/3} (1, 3, 0) \xrightarrow{3\beta, 1} (1, 3, 1)$
2.  $(1, 0, 0) \xrightarrow{3\beta, 1} (1, 1, 0) \xrightarrow{3\beta, 2/3} (1, 2, 0) \xrightarrow{3\beta, 2/3} (1, 2, 1) \xrightarrow{2\beta, 1} (1, 3, 1)$
3.  $(1, 0, 0) \xrightarrow{3\beta, 1} (1, 1, 0) \xrightarrow{3\beta, 1/3} (1, 1, 1) \xrightarrow{4\beta, 1} (1, 2, 1) \xrightarrow{2\beta, 1} (1, 3, 1)$

Mettendo tutto insieme, la probabilità della traiettoria 1 sarà  $2/9$  e il tempo atteso per l'assorbimento in questo caso sarà  $4\beta/3$ . La probabilità della seconda traiettoria sarà  $4/9$  e il tempo atteso in

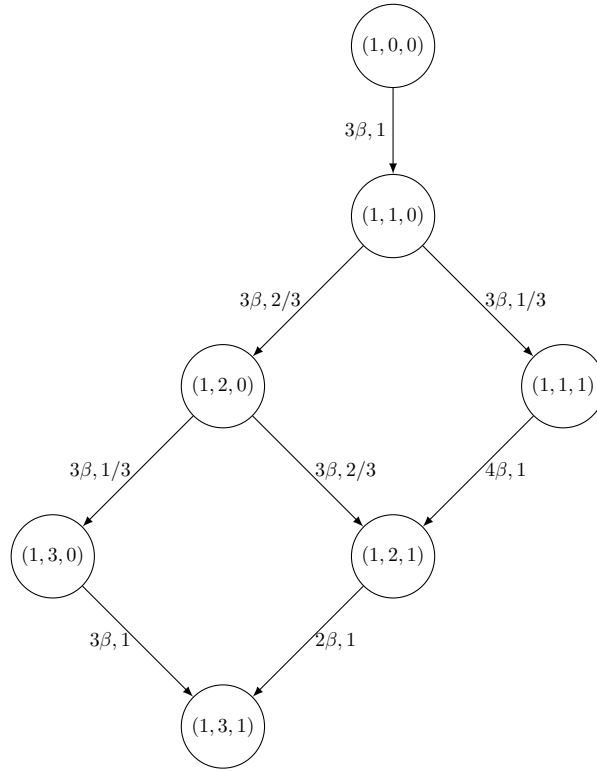


Figure 3

questo caso sarà  $3\beta/2$ . Per il terzo caso, la probabilità sarà  $1/3$  e il tempo atteso sarà  $17\beta/12$ . Dunque il tempo medio sarà

$$\frac{1}{\beta} \left( \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{17}{12} \right) = \frac{155}{108 \cdot \beta}.$$

**Esercizio 5. SIR su linea.** Si consideri un modello SIR su una linea con  $n$  nodi, dove al tempo  $t = 0$  il primo nodo della linea è infetto e tutti gli altri sono suscettibili. Si identifichino gli stati assorbenti che possono essere raggiunti e si calcolino le probabilità di ingresso in ciascuno stato assorbente.

*Soluzione.* Osserviamo che in un modello SIR, gli stati assorbenti sono tutte e sole le configurazioni  $y \in \{S, R\}^V$ . Osserviamo che, essendo  $X_1(0) = I$ , necessariamente  $X_1(\infty) = R$ . Inoltre, se l'epidemia raggiunge il nodo  $i$ , allora deve necessariamente aver raggiunto prima tutti i nodi  $j < i$ . In conclusione gli stati assorbenti sono tutte e sole le configurazioni  $\{R\mathbf{1}_{i \leq k}, S\mathbf{1}_{i > n-k}\}$ , con  $k = \{1, 2, \dots, n\}$ . Per semplicità di notazione identifichiamo con  $[i]$  lo stato assorbente dove l'epidemia si è diffusa ai primi  $i$  nodi ed indichiamo con  $e_i = \mathbb{P}[X(\infty) = [i]]$ .

Osserviamo che, affinché lo stato assorbente sia  $[i]$ , una volta che il nodo  $i$  è stato infettato, il medesimo nodo deve spontaneamente cambiare stato in  $R$  prima che l'arco  $(i+1, i)$  si attivi, altrimenti anche il nodo  $i+1$  si infetta. Cominciamo calcolando la probabilità che l'epidemia, raggiunto il nodo  $i$ , propaghi ulteriormente, ovvero la probabilità che l'arco  $(i+1, i)$  si attivi prima del nodo  $i$ :

$$p(i) = \frac{\beta}{1 + \beta}.$$

Osserviamo che questa probabilità non dipende da  $i$  (fintanto che  $i < n$ ). Di conseguenza è immediato calcolare  $e_i$  come la probabilità che l'epidemia compia  $i-1$  propagazioni, prima che il nodo estremo diventi  $R$  prima di un'ulteriore propagazione:

$$e_i = \left[ \prod_{k=1}^{i-1} p(k) \right] [1 - p(i)] = \left( \frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{i-1} \frac{1}{1 + \beta} = \frac{\beta^{i-1}}{(1 + \beta)^i}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

mentre, non essendo presente alcun arco dopo  $n$ , abbiamo che la probabilità di ulteriore propagazione quando l'infezione ha raggiunto il nodo  $n$  è nulla, ovvero  $p(n) = 0$ ,

$$e_n = \left[ \prod_{k=1}^{n-1} p(k) \right] [1 - p(n)] = \left( \frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{n-1}.$$

**Esercizio 6. SIR su stella.** Si consideri un modello SIR su una stella, con nodo centrale  $i = 1$  e  $n - 1$  nodi foglia  $i = 2, 3, \dots, n$ . Si consideri una condizione iniziale  $X(0) = x$  in cui il nodo foglia  $i = 2$  è infetto e tutti gli altri nodi sono suscettibili,

$$x_2(0) = 1, \quad x_i(0) = 0, \quad i = 1, 3, \dots, n.$$

- a) Caratterizzare il comportamento asintotico della dinamica.
- b) Si denoti con  $R$  il numero di nodi recovered nello stato finale. Calcolare il valore atteso di  $R$ .
- c) Calcolare la distribuzione di  $R$ .

*Soluzione.* a) Sappiamo che gli stati assorbenti del modello SIR sono tutte le configurazioni  $x \in \{0, 2\}^V$  in cui non sono presenti nodi infetti. Poichè l'insieme degli stati assorbenti è globalmente raggiungibile, il processo  $X(t)$  convergerà a uno stato assorbente in tempo finito con probabilità 1. Siccome nello stato iniziale il nodo 2 è infetto, nello stato finale il nodo 2 sarà recovered (perchè il nodo centrale effettuerà la transizione a recovered con probabilità 1). I nodi  $i = 3, \dots, n$  potranno essere recovered solo se anche il nodo 1 lo sarà.

b) Sappiamo che

$$\mathbb{P}(R \geq 1) = 1$$

perchè certamente nello stato finale il nodo 2 sarà recovered. Affinchè ci siano altre infezioni, è necessario che si infetti il nodo centrale. Il nodo centrale si infetta se il link  $(1, 2)$  (esponenziale di tasso  $\beta$ ) si attiva prima del nodo 2 (esponenziale di tasso 1). Quindi con probabilità  $1/(\beta + 1)$  avremo  $R = 1$ , mentre con probabilità  $\beta/(\beta + 1)$  il nodo centrale si infetterà. Tutte le successive infezioni avvengono fra l'istante di tempo in cui il nodo centrale si infetta e l'istante di tempo in cui il nodo centrale guarisce. Una volta che il nodo centrale è recovered, non ci sono più infezioni e le foglie infettate fino a quell'istante prima o poi diventeranno recovered certamente, mentre le altre resteranno suscettibili. La probabilità che una foglia abbia stato recovered nella configurazione finale è quindi pari alla probabilità che la foglia si infetti. Inoltre, la foglia si infetta se l'arco che la collega al nodo centrale si attiva prima che il nodo centrale effettui la transizione, ovvero se il tempo di attivazione dell'arco (esponenziale di tasso  $\beta$ ) è minore del tempo di attivazione del nodo (esponenziale di tasso 1).

$$\mathbb{P} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) = 2 \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} X_2(t) = 2 \right) = \frac{\beta}{1 + \beta}, \quad i = 3, \dots, n$$

Possiamo scrivere  $R$  come

$$R = 1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \mathbb{I} \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) = 2 \right\}$$

Segue che il valore atteso del numero di nodi recovered nella configurazione finale è

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R] &= \mathbb{E} \left[ 1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \mathbb{I} \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) = 2 \right\} \right] \\ &= 1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \mathbb{E} \mathbb{I} \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) = 2 \right\} \\ &= 1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \mathbb{P} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} X_i(t) = 2 \right) \\ &= 1 + \frac{\beta}{\beta + 1} + (n - 2) \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{\beta}{\beta + 1} = 1 + \frac{(n - 1)\beta^2 + \beta}{(1 + \beta)^2}. \end{aligned}$$



Si osservi che nei casi limite  $\beta = 0$  e  $\beta \rightarrow +\infty$  si ottiene  $\mathbb{E}[R] = 1$  e  $\mathbb{E}[R] = n$ , come ci aspettiamo.

c) La probabilità che  $R = 1$  è semplicemente la probabilità che il nodo 2 (che ha tasso di attivazione uguale a 1) si attivi prima dell'arco  $\{1, 2\}$  (che ha rate  $\beta$ ), quindi

$$\mathbb{P}(R = 1) = \frac{1}{\beta + 1}.$$

Affinché  $R \geq 2$  è necessario che si attivi il nodo centrale, quindi

$$\mathbb{P}(R \geq 2) = \frac{\beta}{\beta + 1}.$$

Si noti che la probabilità che il nodo centrale infetti almeno un'altra foglia in presenza di  $j$  foglie suscettibili è uguale alla probabilità che il minimo dei tempi di attivazione dei  $j$  link tra nodo centrale e foglie suscettibili (tale minimo ha tasso  $\beta j$ ) sia minore del tempo di attivazione del nodo centrale (tasso 1), ed è quindi uguale a  $\beta j / (\beta j + 1)$ . Possiamo adesso scrivere la seguente relazione:

$$\mathbb{P}(R \geq k + 1 | R \geq k) = \frac{(n - k)\beta}{1 + (n - k)\beta}, \quad n - 1 \geq k \geq 2.$$

Inoltre abbiamo che

$$\mathbb{P}(R = k | R \geq k) = \frac{1}{1 + (n - k)\beta}, \quad n - 1 \geq k \geq 2.$$

Possiamo così trovare in maniera ricorsiva a partire dal caso  $k = 2$  tutte le probabilità  $\mathbb{P}(R \geq k)$ :

$$\mathbb{P}(R \geq k) = \mathbb{P}(R \geq 2) \prod_{2 \leq j \leq k-1} \mathbb{P}(R \geq j + 1 | R \geq j) = \frac{\beta}{\beta + 1} \prod_{2 \leq j \leq k-1} \frac{(n - j)\beta}{1 + (n - j)\beta}$$

e infine, per ogni  $k < n$ , abbiamo

$$\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}(R = k | R \geq k) \mathbb{P}(R \geq k) = \frac{\beta}{\beta + 1} \prod_{2 \leq j \leq k-1} \frac{(n - j)\beta}{1 + (n - j)\beta} \cdot \frac{1}{1 + (n - k)\beta}.$$

Quando  $k = n$ ,

$$\mathbb{P}(R = n) = \mathbb{P}(R \geq n) = \frac{\beta}{\beta + 1} \prod_{2 \leq j \leq n-1} \frac{(n - j)\beta}{1 + (n - j)\beta}.$$

**Esercizio 7. Fixation probability in evolutionary graph dynamics.** Si consideri una dinamica evolutiva binaria tra una specie nativa 0 con fitness  $f_0 = 1/2$  e una specie mutante 1 con fitness  $f_1 = 1$ . Si caratterizzino gli stati assorbenti e le probabilità di assorbimento per questa dinamica su un anello diretto, e si analizzino i limiti asintotici al crescere della dimensione del grafo.

*Soluzione.* I kernel della dinamica sono

$$\psi = I, \quad \varphi^{(i,j)}(c) = (1 - f_c)I + f_c \mathbf{1}(\delta^{(c)})^T, \quad (i, j) \in \mathcal{E}, \quad c \in \mathcal{A}$$

Dato che la dinamica è binaria e il grafo è bilanciato, il boundary entrante coincide col boundary uscente, e possiamo scrivere la dinamica di  $N(X(t))$  (il numero di agenti in stato 1) in termini di  $N(X(t))$  e  $\zeta(X(t))$ . In questo caso,

$$\varphi_{01}(1) = f_1, \quad \varphi_{10}(0) = f_0.$$

Il rate di crescita di  $N$  è

$$\lambda_+ = (n - N(x))\psi_{01} + \zeta(x)\beta\varphi_{01}(1) = \beta\zeta(x)f_1$$

e il rate di decrescita è

$$\lambda_- = N(x)\psi_{10} + \zeta(x)\beta\varphi_{10}(0) = \beta\zeta(x)f_0.$$

Si noti che i rate dipendono dal boundary, quindi  $N(X(t))$  non è Markoviano. Siamo interessati a calcolare la probabilità che solo i mutanti sopravvivano e i nativi si estinguano, tipicamente quando i mutanti costituiscono una piccola frazione della popolazione. Dato che non siamo interessati al tempo, ma alle probabilità di assorbimento, possiamo studiare il processo a tempo discreto. Sia  $\rho = f_1/f_0$  la fitness relativa dei mutanti in relazione a quella dei nativi. Abbiamo due orologi di Poisson, uno con rate  $\lambda_+ = \beta\zeta(X(t))f_1$  associato alla crescita di  $N$ , e uno con rate  $\lambda_- = \beta\zeta(X(t))f_0$  associato alla decrescita di  $N$ . Dunque, la probabilità a tempo discreto di avere transizioni di crescita sarà

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-} = \frac{f_1}{f_0 + f_1}. \quad (2)$$

Di conseguenza, il rapporto tra la probabilità di crescita e di decrescita è

$$\frac{f_1}{f_0} = \rho = 2,$$

indipendente dalla configurazione. Dunque, la fixation probability su un grafo connesso e bilanciato di taglia  $n$  coincide con la probabilità che la catena di nascita e morte con probabilità di transizione definite sopra raggiunga lo stato  $n$  prima dello stato 0. Questa probabilità è calcolata nelle note dle corso ed è

$$\mathbf{P} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \mathbf{1} | X(0) \right) = \frac{1 - \rho^{-N(0)}}{1 - \rho^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2^{N(0)}},$$

Si osservi che, anche in presenza di un solo mutante ( $N(0) = 1$ ) e di una rete infinitamente grande, la probabilità tende a  $1/2$ .