Homework 2

Rostagno 295706

November 24, 2024

Esercizio 1

- **Punto a:** Considerando la forma della matrice P e della matrice P_{lazy} date dall'esercizio, possiamo analizzare le convergenze come:

  - **Convergenza della dinamica** $x(t+1) = Px(t)$:
    La matrice P è stocastica, con autovalore dominante $\lambda_1 = 1$. Gli altri autovalori soddisfano $|\lambda_i| < 1$ per $i > 1$, garantendo la convergenza della dinamica. Quando $t \to \infty$, la distribuzione $\mathbf{x}(t)$ converge all'equilibrio, ovvero tutti i nodi assumono lo stesso valore, determinato dalla media pesata dello stato iniziale in base alla distribuzione invariante π:

    $$x_i(\infty) = \pi' \mathbf{x}(0), \quad \forall i \in V.$$

  - **Convergenza della dinamica** $x(t+1) = P_{lazy}x(t)$:
    La matrice $P_{\text{lazy}} = \frac{1}{2}(I + P)$ è anch'essa stocastica e conserva le proprietà di convergenza. Tuttavia, gli autovalori diversi da $\lambda_1 = 1$ vengono "diminuiti" nella forma:

    $$\lambda_i^{\text{lazy}} = \frac{1}{2}(1 + \lambda_i),$$

    dove λ_i sono gli autovalori di P.
    Questo rallentamento implica che il tempo necessario per raggiungere l'equilibrio sia maggiore rispetto alla dinamica $x(t+1) = Px(t)$.

- **Punto b:** Dobbiamo calcolare λ_2 della matrice P_{lazy} e determinarne il tempo di rilassamento in funzione di $n \to \infty$. Sappiamo che R_n è un grafo circolare, quindi gli autovalori della matrice di adiacenza W possono essere calcolati come:

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega_k^j$$

Dove c_j è la prima riga della matrice W mentre $\omega_k = exp\frac{2\pi i}{n}k$. Nel nostro caso c_j ha gli 1 della prima riga posizionati nelle posizioni: $j = 1$, $j = \frac{n}{2}$ e $j = n - 1$.
Sviluppando la sommatoria otteniamo

$$\omega_k + \omega_k^{n-1} + \omega_k^{\frac{n}{2}}$$

che diventa

$$\exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right) + \exp\left(\frac{2\pi(n-1)ik}{n}\right) + \exp\left(\pi ik\right)$$

Sviluppando le forme trigonometriche otteniamo

$$2\cos(\frac{2\pi k}{n}) + exp(i\pi k)$$

Essendo il grafo 3-regolare, $P = W/3$, dunque lo spettro della matrice P si può ottenere come:

$$\sigma(P) = \left\{ \lambda_k = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{3}\exp(i\pi k), \quad k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Di conseguenza lo spettro della matrice P_{lazy}:

$$\sigma(P_{lazy}) = \left\{ \lambda_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{3}\exp(i\pi k)), \quad k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Il secondo autovalore dominante di Q è:

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

corrispondente a $k = 1$. Ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin ($t \to 0$):

$$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3),$$

studiamo il comportamento asintotico di λ_2, e di conseguenza di $\tau_{\text{rel}} = \frac{1}{1-\lambda_2}$, per $n \to \infty$:

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2} + \frac{o(1)}{n^3}\right) \approx \frac{2}{3} - \frac{2\pi^2}{3n^2}.$$

Quindi:

$$\tau_{\text{rel}} = \frac{1}{1-\lambda_2} \approx \frac{3n^2}{n^2+2\pi^2}.$$

- **Punto c:**
- **Punto d:**