Homework 2

Rostagno 295706

December 14, 2024

Esercizio 1

- **Punto a:** Considerando la forma della matrice P e della matrice P_{lazy} date dall'esercizio, possiamo analizzare le convergenze come:

  – **Convergenza della dinamica** $x(t+1) = Px(t)$:
  La matrice P è stocastica, con autovalore dominante $\lambda_1 = 1$. Gli altri autovalori soddisfano $|\lambda_i| < 1$ per $i > 1$, garantendo la convergenza della dinamica. Quando $t \to \infty$, la distribuzione $\mathbf{x}(t)$ converge all'equilibrio, ovvero tutti i nodi assumono lo stesso valore, determinato dalla media pesata dello stato iniziale in base alla distribuzione invariante π:

  $$x_i(\infty) = \pi'\mathbf{x}(0), \quad \forall i \in V.$$

  – **Convergenza della dinamica** $x(t+1) = P_{lazy}x(t)$:
  La matrice $P_{\text{lazy}} = \frac{1}{2}(I + P)$ è anch'essa stocastica e conserva le proprietà di convergenza. Tuttavia, gli autovalori diversi da $\lambda_1 = 1$ vengono "diminuiti" nella forma:

  $$\lambda_i^{\text{lazy}} = \frac{1}{2}(1 + \lambda_i),$$

  dove λ_i sono gli autovalori di P.
  Questo rallentamento implica che il tempo necessario per raggiungere l'equilibrio sia maggiore rispetto alla dinamica $x(t+1) = Px(t)$.

- **Punto b:** Dobbiamo calcolare λ_2 della matrice P_{lazy} e determinarne il tempo di rilassamento in funzione di $n \to \infty$. Sappiamo che R_n è un grafo circolare, quindi gli autovalori della matrice di adiacenza W possono essere calcolati come:

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega_k^j$$

Dove c_j è la prima riga della matrice W mentre $\omega_k = exp\frac{2\pi i}{n}k$. Nel nostro caso c_j ha gli 1 della prima riga posizionati nelle posizioni: $j = 1$, $j = \frac{n}{2}$ e $j = n - 1$.
Sviluppando la sommatoria otteniamo

$$\omega_k + \omega_k^{n-1} + \omega_k^{\frac{n}{2}}$$

che diventa

$$\exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right) + \exp\left(\frac{2\pi(n-1)ik}{n}\right) + \exp\left(\pi ik\right)$$

Sviluppando le forme trigonometriche otteniamo

$$2\cos(\frac{2\pi k}{n}) + exp(i\pi k)$$

Essendo il grafo 3-regolare, $P = W/3$, dunque lo spettro della matrice P si può ottenere come:

$$\sigma(P) = \left\{\lambda_k = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{3}\exp(i\pi k), \quad k = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

Di conseguenza lo spettro della matrice P_{lazy}:

$$\sigma(P_{lazy}) = \left\{\lambda_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{3}\exp(i\pi k)), \quad k = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

Il secondo autovalore dominante di Q è:

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

corrispondente a $k = 1$. Ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin ($t \to 0$):

$$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3),$$

studiamo il comportamento asintotico di λ_2, e di conseguenza di $\tau_{\text{rel}} = \frac{1}{1-\lambda_2}$, per $n \to \infty$:

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2} + \frac{o(1)}{n^3}\right) \approx \frac{2}{3} - \frac{2\pi^2}{3n^2}.$$

Quindi:

$$\tau_{\text{rel}} = \frac{1}{1-\lambda_2} \approx \frac{3n^2}{n^2+2\pi^2}.$$

- **Punto c:** Conosciamo la disuguaglianza di Cheeger:

$$\frac{1}{2}\Phi_G^2 \leq 1-\lambda_2 \leq 2\Phi_G.$$

Nel nostro caso specifico abbiamo un grafo Barbell con n nodi B_n e quindi avremo:

$$\Phi_{B_n} = \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1\right)^{-1}.$$

Dalla disuguaglianza di Cheeger scriviamo:

$$\frac{\Phi_{B_n}^2}{2} \leq 1-\lambda_2 \leq 2\Phi_{B_n}.$$

Sostituendo Φ_{B_n}:

$$\frac{\left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1\right)^{-2}}{2} \leq 1-\lambda_2 \leq 2\left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1\right)^{-1}.$$

Il tempo di rilassamento è dato da:

$$T_{\text{relax}} = \frac{1}{1-\lambda_2}.$$

Sostituendo i limiti superiori e inferiori di $1-\lambda_2$, otteniamo:

$$\frac{1}{2\Phi_{B_n}} \leq T_{\text{relax}} \leq \frac{2}{\Phi_{B_n}}.$$

Sostituendo Φ_{B_n}:

$$\frac{1}{2\left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1\right)^{-1}} \leq T_{\text{relax}} \leq \frac{2}{\left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1\right)^{-2}}.$$

Semplificando:

$$\frac{n^2/4 - n/2 + 1}{2} \leq T_{\text{relax}} \leq 2\left(n^2/4 - n/2 + 1\right)^2.$$

Quando $n \to \infty$, $n^2/4$ domina i termini $n/2$ e 1, quindi:

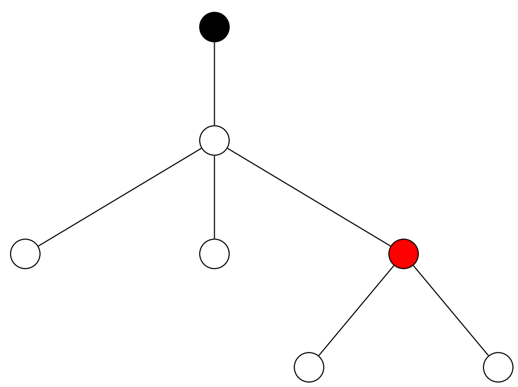
$$\Phi_{B_n} \sim \frac{4}{n^2}.$$

In conclusione possiamo dire che il tempo di rilassamento aumenta quadraticamente con n.

- **Punto d:**
  Convergenza rapida $x(0)$**:** Quando metà dei nodi ha valore iniziale 0 e l'altra metà 1, il consenso viene raggiunto principalmente attraverso la mediazione del collegamento tra i due "gruppi" (i quattro nodi collegati fra loro). In questo caso, il tempo di convergenza non scala in modo significativo con il numero di nodi n, poiché la convergenza avviene "globalmente" e sfrutta la struttura simmetrica del grafo. $x(0)$ è fatta in modo che i nodi in uno dei due gruppi abbiano valore iniziale 0 e quelli nell'altro gruppo abbiano valore iniziale 1.
  Convergenza lenta $y(0)$**:** Con $y(0)$, il tempo di convergenza scala quadraticamente con n. Questo è dovuto al fatto che la struttura alternata richiede che i gruppi convergano internamente prima di poter convergere tra loro. Questo fenomeno è dominato dal collo di bottiglia rappresentato dal singolo arco che connette i due gruppi. $y(0)$ è fatta in modo che i nodi all'interno dei gruppi abbiano valori alternati, in modo che i valori iniziali siano distribuiti tra 0 e 1 all'interno dei gruppi stessi.

Esercizio 2

- **Punto a:** Dopo alcuni tentativi ho trovato che il nodo stubborn P_B con opinione zero va posto nel nodo rosso



Ho disegnato solo la prima parte del grafo.

Ho calcolato che mettendo P_B in quella posizione avrei ottenuto un ' opinione media di $\frac{10.5}{15} = 0.7$ che è la minore possibile.
(Altre opinioni medie ottenute sono state 0.77 , 0.73 , 0.75 mettendo P_B sui nodi estremi)

- **Punto b:** Dopo vari calcoli e tentativi, il posto migliore dove mettere P_B in modo da avere l'opinione media minima è metterlo nel nodo nero. In questo modo la massima opinione media ottenibile è $\frac{6}{15}$.

Esercizio 3

- **Punto a:** Come prima cosa calcolo la matrice P normalizzata

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Successivamente calcolo la distribuzione stazionaria π tali che

$$\pi = \pi P$$

Risolvendo i calcoli ottengo

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Il consenso asintotico vale

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \pi' x(0)$$

Quindi la varianza sarà

$$\mathrm{Var}(x^*) = \sum_{i=1}^{4} \pi_i^2 \sigma_i^2 = \left(\frac{2}{9}\right)^2 (0.1) + \left(\frac{2}{9}\right)^2 (0.2) + \left(\frac{2}{9}\right)^2 (0.3) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 (0.2).$$

Calcoliamo e otteniamo $\frac{7}{135} = 0.052$

- **Punto b:** La varianza del valore di consenso asintotico in forma vettoriale è:

$$\mathrm{Var}(x^*) = \pi^\top \Sigma \pi,$$

dove:

  - π è il vettore delle probabilità invarianti,

- Σ è la matrice delle varianze iniziali delle opinioni (in questo caso ha solo le varianze sulla diagonale).

Per trovare il valore che π dovrebbe assumere per minimizzare la varianza impostiamo un piccolo problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned}&\text{Minimizzare} \quad \mathrm{Var}(x^*) = \pi^\top \Sigma \pi \\ &\text{vincoli:} \\ &\begin{cases} \pi^\top 1 = \sum_i \pi_i = 1, \\ \pi_i \geq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Risolviamo con il metodo del lagrangiano e otteniamo:

$$\pi = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}.$$

Riscrivendo questo risultato in termini non vettoriali otteniamo:

$$\pi_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2}}.$$

- **Punto c:** La nuova matrice di adiacenza varia, avendo sulla diagonale i termini a_i. Di conseguenza la somma di ogni riga sarà $2+a_1, 2+a_2, 2+a_3, 3+a_4$. Per prima cosa dobbiamo trovare la nuova distribuzione invariante che è nella forma

$$\pi = (\frac{2+a_1}{9+\sum_{i=1}^4 a_i}, \frac{2+a_2}{9+\sum_{i=1}^4 a_i}, \frac{2+a_3}{9+\sum_{i=1}^4 a_i}, \frac{3+a_4}{9+\sum_{i=1}^4 a_i},)$$

Dal punto precedente sappiamo che per minimizzare la varianza, π deve essere nella forma:

$$\pi_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2}}.$$

Calcoliamo i valori di π nel nostro caso:

$$\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} = 10 + 5 + 5 + \frac{10}{3} = \frac{70}{3}$$

quindi

$$\begin{cases} \pi_1 = 10 \cdot \frac{3}{70} = \frac{3}{7} \\ \pi_2 = 5 \cdot \frac{3}{70} = \frac{3}{14} \\ \pi_3 = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{70} = \frac{1}{7} \\ \pi_4 = 5 \cdot \frac{3}{70} = \frac{3}{14} \end{cases}$$

Questi sono i valori di π per cui la varianza è minimizzata.
Adesso uguagliamo questi valori con i corrispettivi valori della π del nuovo grafo:

$$\begin{cases} \frac{2+a_1}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{3}{7} \\ \frac{2+a_2}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{3}{14} \\ \frac{2+a_3}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{1}{7} \\ \frac{3+a_4}{9+\sum_{i=1}^4 a_i} = \frac{3}{14} \end{cases}$$

Otteniamo che il vettore α vale:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Invece se imponiamo che i pesi α_i siano diversi da zero otteniamo:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Punto d:** Come distribuzione invariante abbiamo sempre

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Adesso per calcolare la varianza lo dobbiamo fare in forma vettoriale, cioè

$$\mathrm{Var}(x^*) = \pi^\top \Sigma \pi$$

dove Σ è la matrice di covarianza.
Otteniamo

$$\mathrm{Var}(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Svolgiamo i calcoli e otteniamo

$$\mathrm{Var}(x^*) = \frac{83}{810} = 0.102$$

- **Punto e:** Per trovare π usiamo la forma vettoriale ottenuta sempre nel punto b)

$$\pi = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}.$$

Per calcolare la matrice inversa e ottenere i valori di π che minimizzerebbero la varianza calcoliamo questo rapporto in matlab ed otteniamo:

  - Come matrice inversa Σ^{-1}

$$\begin{bmatrix} 9.3750 & -3.1250 & -5.6250 & 1.8750 \\ -3.1250 & 4.3750 & 1.8750 & -0.6250 \\ -5.6250 & 1.8750 & 9.3750 & -3.1250 \\ 1.8750 & -0.6250 & -3.1250 & 4.3750 \end{bmatrix}$$

  - Come numeratore

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

  - Come denominatore

$$10$$

  - Infine otteniamo che la π che minimizza la varianza vale

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Sappiamo che la π del nostro grafo vale

$$\pi = (\frac{2+a_1}{9+\sum_{i=1}^{4} a_i}, \frac{2+a_2}{9+\sum_{i=1}^{4} a_i}, \frac{2+a_3}{9+\sum_{i=1}^{4} a_i}, \frac{3+a_4}{9+\sum_{i=1}^{4} a_i})$$

Adesso uguagliamo questi valori con i corrispettivi valori della π del nuovo grafo:

$$\begin{cases} \frac{2+a_1}{9+\sum_{i=1}^{4} a_i} = \frac{1}{4} \\ \frac{2+a_2}{9+\sum_{i=1}^{4} a_i} = \frac{1}{4} \\ \frac{2+a_3}{9+\sum_{i=1}^{4} a_i} = \frac{1}{4} \\ \frac{3+a_4}{9+\sum_{i=1}^{4} a_i} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Otteniamo che il vettore α vale:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Invece se imponiamo che i pesi α_i siano diversi da zero otteniamo:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4

- **Punto a:** Il tempo atteso tra un'infezione e la successiva ha una distribuzione esponenziale con tasso $\beta B(t)$.

  Condizionando allo stato $X(t)$, il tempo medio di attesa per la prossima infezione è:

  $$\frac{1}{\beta B(t)}.$$

  Sommando su tutte le infezioni fino a $N(t) = n$ (cioè fino a quando tutti i nodi sono infetti) e considerando che la conduttanza $\gamma(k)$ fornisce un limite inferiore a $B(t)$, che a sua volta influenza il tempo di assorbimento, otteniamo:

  $$\tau \leq \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma(k)}.$$

  Sappiamo inoltre che la conduttanza è simmetrica, ovvero:

  $$\gamma(k) = \gamma(n-k)$$

  in quanto ci troviamo in un grafo non orientato.
  Utilizziamo quindi la simmetria della conduttanza:

  $$\tau \leq \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma(k)} \leq \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)}.$$

- **Punto b:** In base ai dati del testo possiamo riscrivere la disuguaglianza del punto a) come:

  $$\tau \leq \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

  Riscriviamo la somma come:

  $$\tau \leq \frac{\sqrt{2}}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

La somma $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}}$ è nota per essere approssimabile per N grande come:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{N}.$$

Quindi per N grande, possiamo stimare.

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Sostituendo il risultato nella formula di τ:

$$\tau \leq \frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot 2\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Per n grande, $\lfloor n/2 \rfloor \sim n/2$, quindi:

$$\tau \sim \frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot 2\sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{2}{\beta}\sqrt{n}.$$

In conclusione possiamo affermare che τ in una griglia bidimensionale cresce come:

$$\tau \sim \frac{\sqrt{n}}{\beta}$$

- **Punto c:** Il grafo di Barbell è diviso in due grafi completi collegati da un unico arco (chiamiamoli C_1 e C_2). Calcoliamo ora la conduttanza. La conduttanza è:

$$\gamma(k) = \min_{S \subseteq V, |S|=k} \sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} W_{ij}.$$

  Due casi principali:

  - **Caso 1:** tutti i nodi infetti sono in un solo grafo.
    * Supponiamo che i k nodi infetti siano in C_1.
    * I nodi di C_1 sono fortemente connessi, ma i collegamenti con C_2 sono limitati al singolo arco.
    * In questo caso, il flusso minimo è dato solo dal collegamento tra C_1 e C_2:

$$\gamma(k) = 1.$$

- **Caso 2:** almeno un nodo infetto è in entrambi i grafi.
  * Una volta che un nodo in C_2 viene infettato, l'infezione si propaga rapidamente all'interno di C_2, grazie alla struttura di grafo completo.
  * In questo caso, la conduttanza cresce rapidamente perché i collegamenti interni dei grafi dominano:
$$\gamma(k) \sim n.$$

Dopo aver stimato il valore della conduttanza nei due casi, possiamo procedere con la stima del tempo τ.
Caso 1:

- Poiché $\gamma(k) = 1$:
$$\frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)} = \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 1 = \frac{n}{\beta}.$$
  Quindi per $n \to \infty$ il tempo τ si comporta come:
$$\tau \sim \frac{n}{\beta}.$$

Caso 2:

- Poichè $\gamma(k) = n$:
$$\frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{\gamma(k)} = \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{n} = \frac{2}{\beta} \frac{1}{n} \frac{n}{2} = \frac{1}{\beta}.$$
  Quindi per $n \to \infty$ il tempo τ si comporta come:
$$\tau \sim \frac{1}{\beta}.$$