Homework1 Rostagno

295706

November 24, 2024

Esercizio 1

- **Punto a:**

$$\begin{array}{lll} U = \{o\} & U^c = \{a, b, c, d\} & C_U = 6 \\ U = \{o, a\} & U^c = \{b, c, d\} & C_U = 6 \\ U = \{o, b\} & U^c = \{a, c, d\} & C_U = 8 \\ U = \{o, c\} & U^c = \{a, b, d\} & C_U = 7 \\ U = \{o, a, b\} & U^c = \{c, d\} & C_U = 7 \\ U = \{o, b, c\} & U^c = \{a, d\} & C_U = 6 \\ U = \{o, a, c\} & U^c = \{b, d\} & C_U = 7 \\ U = \{o, a, b, c\} & U^c = \{d\} & C_U = 5 \end{array}$$

  Ho calcolato la capacità di ogni taglio (C_U) dividendo insieme di partenza (U) e insieme di arrivo (U^c).
  La capacità minima da rimuovere affinché non sia più possibile alcun flusso fattibile dal nodo o al nodo d è 5, va rimossa dagli archi e_2 e_4 e_6.

- **Punto b:** Sia x la capacità extra da aggiungere, per poter massimizzare il throughput da o a d è necessario aggiungere la capacità su degli archi prestabiliti in un certo ordine. Dobbiamo inserire la prima unità sull'arco e_2, successivamente va aggiunta su e_4, poi su e_1 ed infine su e_3; dopodichè si ricomincia da e_2 e si ripete in base al valore di x. Questa è la sequenza che aumenta in maniera più rapida il throughput.
  Graficamente diventa:

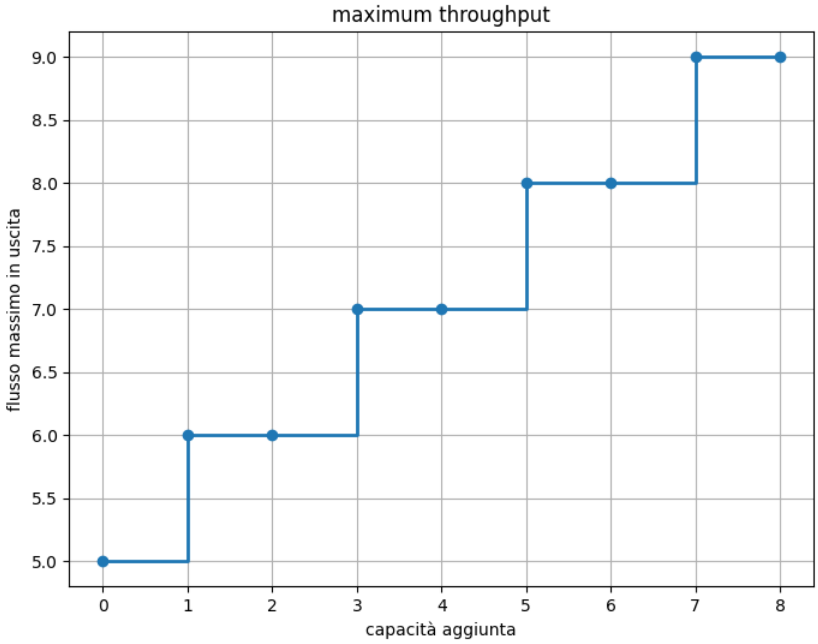

Figure 1: Massimo flusso in uscita in base alla capacità aggiunta

Nel caso in cui non si aggiunga capacità extra abbiamo come flusso max 5, se aggiungiamo una o due unità di capacità otteniamo 6 come flusso max mentre se aggiungiamo tre o quattro unità di capacità otteniamo 7 come flusso max. Dopo questi 4 valori notiamo che il grafico si ripete (come detto in precedenza).

- **Punto c:** Il nuovo collegamento e_8 di capacità 1 dovrebbe essere aggiunto in una posizione che contribuisca a migliorare il taglio minimo, di conseguenza l'ho aggiunto tra il nodo c e il nodo d in quanto era il collegamento più debole. La posizione delle capacità segue un andamento periodico come prima, vanno inserite in questo ordine e poi ripetute: e_3, e_2, e_4, e_1. Graficamente diventa:

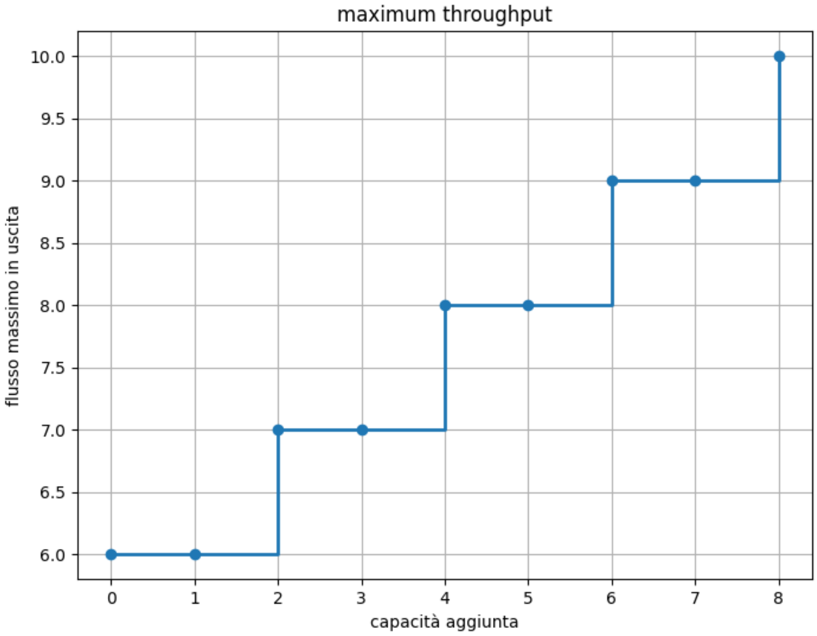

Figure 2: Massimo flusso in uscita in base alla capacità aggiunta

Notiamo che la capacità iniziale è aumentata di 1 e che dopo ogni 4 unità aggiunte il grafico si ripete.

Esercizio 2

- **Punto a:** Considerando che il throughput è uguale a 2 e si inserisce nel vertice o, abbiamo tre possibili percorsi che il flusso può seguire:
  - Percorso 1: e_1, e_2, e_4
  - Percorso 2: e_1, e_3, e_4
  - Percorso 3: e_5, e_6

  Chiamiamo le nostre tre variabili di flusso $f_1 f_2 f_3$ dove f_1 rappresenta il flusso che passa per il percorso 1, f_2 rappresenta il flusso che passa per il percorso 2 e f_3 rappresenta il flusso che passa per il percorso 3. Ora scriviamo il nostro problema di ottimizzazione:

  $$\min_{f_1, f_2, f_3} \quad f(x) = f_1 \cdot (5f_1 + 2) + f_2 \cdot (4f_2 + 4) + f_3 \cdot (5f_3 + 2)$$

  vincoli:

  $f_1 + f_2 + f_3 = 2,$

  $f_1, f_2, f_3 \geq 0.$

Facendo le opportune sostituzioni e gli opportuni calcoli si ottiene che la funzione viene minimizzata con $f = [1, 0, 1]$. Notiamo quindi che l'arco e_3 non viene utilizzato e che il flusso iniziale si divide a metà (un'unità nel percorso 1 ed un'unità nel percorso 3).
Costo totale=14.

- **Punto b:** Per calcolare l'equilibrio di Wardrop tutti i percorsi utilizzati da almeno un utente devono avere lo stesso ritardo. Impostiamo f_1, f_2, f_3 i flussi di persone ch percorrono corrispettivamente il percorso 1, il percorso 2 e il percorso 3 (gli stessi definiti nel punto precedente). Ora dobbiamo eguagliare i tre ritardi e dare un vincolo ai flussi ottenendo questo sistema:

$$\begin{cases} 5f_1 + 2 = 4f_2 + 4 = 5f_3 + 2 \\ f_1 + f_2 + f_3 = 2 \end{cases} \tag{1}$$

  Svolgendo i calcoli otteniamo $f_1 = \frac{10}{13}$ $f_2 = \frac{6}{13}$ $f_3 = \frac{10}{13}$
  I quali rispettano tutti i vincoli del grafo.
  Il costo totale è $\frac{2456}{169}$. L'ho ottenuto sostituendo i valori dei vari flussi nella formula del costo totale.
  Il prezzo di anarchia vale $\frac{1228}{1183} = 1.038$

- **Punto c:** Aggiungiamo un nuovo link (e_7) che collega il nodo n_1 con il nodo n_3. Otteniamo un nuovo percorso:

  - Percorso 4: $e_1e_7e_6$

  Indichiamo con f_4 il flusso che passa nel percorso 4 e risolviamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} 5f_1 + 2 = 4f_2 + 4 = 5f_3 + 2 = 7f_4 \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 2 \end{cases} \tag{2}$$

  Risolvendo il sistema a mano si ottengono questi valori di flusso:
  $f_1 = \frac{62}{111}$,$f_2 = \frac{22}{111}$,$f_3 = \frac{62}{111}$,$f_4 = \frac{76}{111}$
  Il costo totale è: $\frac{195592}{12321} = 15.87$, che è maggiore del costo totale precedente(14.53), quindi abbiamo fatto verificare il paradosso di Braess.
  Calcoliamo ora il flusso ottimale che minimizza questa nuova rete di nodi:

$\min_{f_1,f_2,f_3,f_4} \quad f(x) = (f_1+f_2+f_4)(3(f_1+f_2+f_4)) + f_3(2f_3+2) + f_4^2 + 3f_2 + f_1(f_1+1) + (f_1+f_2)(1+(f_1+f_2)) + (f_3+f_4)3(f_3+f_4)$
vincoli:
$f_1+f_2+f_3+f_4 = 2$
$f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0$
Dopo aver risolto in python il seguente problema di ottimizzazione otteniamo che l'ottimo è uguale al sistema precedente ovvero $f = [1,0,1,0]$ e quindi il costo totale all'ottimo è 14.
Il prezzo di anarchia è dunque $\frac{195592}{12321 \cdot 14} = 1.134$

- **Punto d:** Per trovare un vettore di pedaggi ottimale ω affinchè il prezzo di anarchia sia uguale a 1, ci basta applicare la seguente formula:
$\omega_e^* = f_e^* \tau_e'(f_e^*)$
Dove f_e^* sarebbero i flussi all'ottimo di sistema senza considerare i pedaggi e $\tau_e'(f_e^*)$ sarebbero le derivate delle funzioni ritardo rispetto all'ottimo di sistema.
Otteniamo quindi che il vettore di pedaggi vale $\omega_e^* = (3,1,0,1,2,3,0)$.

- **Punto e:** Iniziamo a calcolare l'ottimo di sistema, ovvero il valore dei tre flussi per cui il costo totale del grafo ha valore minimo. Risolviamo il seguente problema di ottimizzazione:

$$\min_{f_1,f_2,f_3} \quad f(x) = f_1 \cdot (5f_1+2) + f_2 \cdot (2+(4+\alpha)f_2) + f_3 \cdot (5f_3+2)$$

vincoli:

$$f_1+f_2+f_3 = \chi,$$
$$f_1, f_2, f_3 \geq 0.$$

Risolvendolo tramite il metodo del lagrangiano vincolato otteniamo i seguenti risultati:
$f_1 = \frac{(4+\alpha)\chi}{13+2\alpha}$ $f_2 = \frac{5\chi}{13+2\alpha}$ $f_3 = \frac{(4+\alpha)\chi}{13+2\alpha}$
Successivamente come suggerimento indicato nel testo calcoliamo l'equilibrio di Wardrop:

$$\begin{cases} 5f_1+2 = (4+\alpha)f_2+2 = 5f_3+2 \\ f_1+f_2+f_3 = \chi \end{cases} \tag{3}$$

Risolvendo il sistema otteniamo i seguenti risultati:
$f_1 = \frac{(4+\alpha)\chi}{13+2\alpha}$ $f_2 = \frac{5\chi}{13+2\alpha}$ $f_3 = \frac{(4+\alpha)\chi}{13+2\alpha}$
Possiamo notare che indipendentemente da α e χ il prezzo di anarchia vale già 1, poichè i flussi all'equilibrio di Wardrop coincidono con i

flussi all'ottimo. Di conseguenza il vettore ottimale dei pedaggi sarà $\omega_e^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.