

Interazioni binarie su network

Esercizio 1. Fixation probability in evolutionary graph dynamics. Si consideri una dinamica evolutiva binaria tra una specie nativa 0 con fitness $f_0 = 1/2$ e una specie mutante 1 con fitness $f_1 = 1$. Si caratterizzino gli stati assorbenti e le probabilità di assorbimento per questa dinamica su un anello diretto, e si analizzino i limiti asintotici al crescere della dimensione del grafo.

Soluzione. I kernel della dinamica sono

$$\psi = I, \quad \varphi^{(i,j)}(c) = (1 - f_c)I + f_c \mathbf{1}(\delta^{(c)})^T, \quad (i, j) \in \mathcal{E}, \quad c \in \mathcal{A}$$

Dato che la dinamica è binaria e il grafo è bilanciato, il numero di archi da nodi in stato 0 a nodi in stato 1 coincide col numero di archi da nodi in stato 1 a nodi in stato 0. Possiamo quindi scrivere la dinamica di $N(X(t))$ (il numero di agenti in stato 1) in termini di $N(X(t))$ e $\zeta(X(t))$. In questo caso,

$$\varphi_{01}(1) = f_1, \quad \varphi_{10}(0) = f_0.$$

Il rate di crescita di N è

$$\lambda_+ = (n - N(x))\psi_{01} + \zeta(x)\beta\varphi_{01}(1) = \beta\zeta(x)f_1$$

e il rate di decrescita è

$$\lambda_- = N(x)\psi_{10} + \zeta(x)\beta\varphi_{10}(0) = \beta\zeta(x)f_0.$$

Si noti che i rate dipendono dal boundary, quindi $N(X(t))$ non è Markoviano. Siamo interessati a calcolare la probabilità che solo i mutanti sopravvivano e i nativi si estinguano, tipicamente quando i mutanti costituiscono una piccola frazione della popolazione. Dato che non siamo interessati al tempo, ma alle probabilità di assorbimento, possiamo studiare il relativo processo a tempo discreto. Sia $\rho = f_1/f_0$ la fitness relativa dei mutanti in relazione a quella dei nativi. Abbiamo due orologi di Poisson, uno con rate $\lambda_+ = \beta\zeta(X(t))f_1$ associato alla crescita di N , e uno con rate $\lambda_- = \beta\zeta(X(t))f_0$ associato alla decrescita di N . Dunque, la probabilità a tempo discreto di avere transizioni di crescita sarà

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-} = \frac{f_1}{f_0 + f_1}. \quad (1)$$

Di conseguenza, il rapporto tra la probabilità di crescita e di decrescita è

$$\frac{f_1}{f_0} = \rho = 2,$$

indipendente dalla configurazione. Dunque, la fixation probability su un grafo connesso e bilanciato di taglia n coincide con la probabilità che la catena di nascita e morte con probabilità di transizione definite sopra raggiunga lo stato n prima dello stato 0. Questa probabilità è calcolata nelle note del corso ed è uguale a

$$\mathbf{P} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \mathbf{1} | X(0) \right) = \frac{1 - \rho^{-N(0)}}{1 - \rho^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2^{N(0)}},$$

Si osservi che, anche in presenza di un solo mutante ($N(0) = 1$) in una rete infinitamente grande, la probabilità tende a $1/2$.

Teoria dei giochi

Richiami di teoria. Giochi in forma strategica.

Un **gioco** in forma strategica è una terna $(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \{u_i\}_{i \in \mathcal{V}})$ in cui:

- \mathcal{V} è l'insieme finito dei **giocatori**
- \mathcal{A} è l'insieme delle **azioni** disponibili per ogni giocatore. Le azioni $x_i \in \mathcal{A}$ scelte dai giocatori sono raccolte in un vettore $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ detto *configurazione*. Indichiamo l'insieme delle configurazioni con $\mathcal{X} = \mathcal{A}^{\mathcal{V}}$.
- per ogni giocatore $i \in \mathcal{V}$, la funzione di utilità $u_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ descrive l'**utilità** che il giocatore riceve in ciascuna configurazione: l'utilità dipende quindi dalla sua propria azione ma anche dall'azione degli altri giocatori.

Ad ogni giocatore $i \in \mathcal{V}$ si associa una funzione di **best response**, che associa a ogni configurazione degli altri giocatori le migliori azioni per i (cioè quelle che massimizzano la sua utilità)

$$\mathcal{B}_i(x_{-i}) = \arg \max_{x_i \in \mathcal{A}} u_i(x_i, x_{-i})$$

Un **equilibrio di Nash** è una configurazione $x^* \in \mathcal{X}$ tale che

$$x_i^* \in \mathcal{B}_i(x_{-i}^*), \quad i \in \mathcal{V}$$

Un **gioco** è **potenziale** se esiste una funzione potenziale $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ che descrive la variazione dell'utilità di ciascun giocatore quando questo cambia in modo unilaterale la sua azione. Cioè, $\forall i \in \mathcal{V}, \forall x, y \in \mathcal{X}$

$$x_{-i} = y_{-i} \implies u_i(y) - u_i(x) = \Phi(y) - \Phi(x)$$

Esercizio 2. Rock-scissors-paper game Si consideri il gioco "sasso-carta-forbice" con spazio delle configurazioni $\mathcal{A} = \{R, S, P\}$ e matrice delle utilità

	R	S	P
R	0,0	1, -1	-1, 1
S	-1, 1	0,0	1, -1
P	1, -1	-1, 1	0,0

- Esistono equilibri di Nash? Il gioco è potenziale?
- Si consideri la best response dynamics $X(t)$ per il gioco. Disegnare il grafo delle transizioni.
- Determinare la distribuzione invariante di probabilità di $X(t)$.

Soluzione. a) Il gioco non ha equilibri di Nash. In ogni configurazione almeno uno dei due giocatori non ha payoff +1 e ha un incentivo a cambiare dalla sua azione corrente alla best response, che gli dà utilità +1. Non esistono strategie dove entrambi i giocatori hanno utilità +1.

Se un gioco finito (cioè con insieme delle configurazioni finito) è potenziale, allora l'insieme degli equilibri di Nash è non vuoto e contiene i massimi del potenziale Φ , cioè

$$\operatorname{argmax} \Phi(x) \subseteq \mathcal{N}.$$

b) Il grafo delle transizioni ha nodi corrispondenti alle 9 configurazioni e archi diretti che rappresentano le transizioni ammissibili per la best response dynamics. I pesi degli archi corrispondono ai tassi di tali transizioni (tutti pari a 1). Il grafo è mostrato nella Figura 1. Si noti che il grafo possiede un unico insieme trapping irriducibile, il 6-ciclo $RS \rightarrow RP \rightarrow SP \rightarrow SR \rightarrow PR \rightarrow PS \rightarrow RS$.

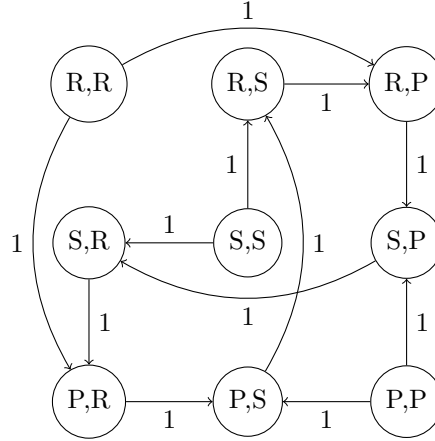


Figure 1: Grafo delle transizioni per la best response dynamics.

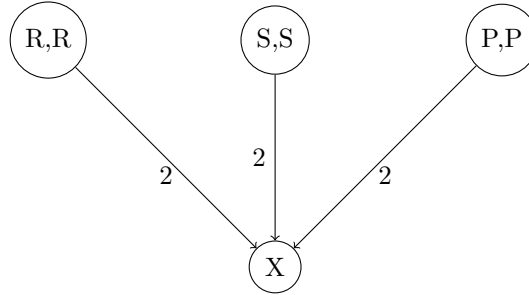


Figure 2: Grafo di condensazione.

c) Il grafo di condensazione è mostrato in Figura 2, dove il supernodo X racchiude tutte le configurazioni eccetto RR, SS, PP (quelle relative al pareggio). Ispezionando il grafo si conclude che esiste un unico sink, cioè $s_G = 1$. Sappiamo che la distribuzione invariante di probabilità è supportata sui nodi dell'unico sink del grafo di condensazione. Il sottografo corrispondente a tale sink è il 6-ciclo $RS \rightarrow RP \rightarrow SP \rightarrow SR \rightarrow PR \rightarrow PS \rightarrow RS$ ed è bilanciato (tutti i nodi hanno grado entrante 1 e grado uscente 1, quindi il sink è 1-regolare), dunque la misura di probabilità invariante ristretta al suo supporto si trova normalizzando il vettore degli out-degree. In questo modo si trova che $\pi_x = 1/6$, per $x \in \{RS, RP, SR, SP, PR, PS\}$ e $\pi_x = 0$ per $x \in \{RR, SS, PP\}$.

Esercizio 3. Si consideri un gioco a 2 giocatori, con insieme delle azioni $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ e utilità rappresentate nella tabella sottostante.

	0	1
0	0,0	c,-1
1	2,a	4,b

- Per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ il gioco è potenziale?
- Si può concludere che per tali insiemi di valori il gioco ammette equilibri di Nash?
- Si può concludere che se il gioco non è potenziale allora non esistono equilibri di Nash?

Soluzione. Utilizziamo il seguente risultato.

Proposizione. Per un gioco $u = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, \{u_i\}_{i \in \mathcal{V}})$ e un path finito $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ nel grafo delle configurazioni, definiamo la quantità

$$I(\gamma, u) = \sum_{k=1}^N [u_{i_k}(x_k) - u_{i_k}(x_{k-1})]$$

dove i_k è l'unico giocatore che modifica la sua azione al passo k , cioè $(x_k)_{i_k} \neq (x_{k-1})_{i_k}$ e $(x_k)_{-i_k} = (x_{k-1})_{-i_k}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. u è un gioco potenziale.
2. $I(\gamma, u) = 0$ per ogni path finito e chiuso nel grafo delle configurazioni.
3. $I(\gamma, u) = 0$ per ogni path semplice, finito e chiuso di lunghezza 4 nel grafo delle configurazioni.

a) Appliciamo adesso il risultato al nostro esercizio. Si consideri il percorso $\gamma_1 = (0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (0, 0)$. Ricordiamo che le utilità del gioco sono

	0	1
0	0,0	c,-1
1	2,a	4,b

Lungo questo percorso abbiamo che

$$I(\gamma_1, u) = (2 - 0) + (b - a) + (c - 4) + (0 - (-1)) = -1 - a + b + c.$$

Si può facilmente osservare che in giochi con due giocatori e due strategie ogni percorso chiuso con lunghezza 4 soddisfa

$$I(\gamma_i, u) = I(\gamma_1, u) \quad \text{o} \quad I(\gamma_i, u) = -I(\gamma_1, u),$$

dove il segno di I dipende da se il path gira in senso orario o antiorario nella tabella. Possiamo quindi applicare la proposizione per stabilire che il gioco è potenziale se e solo

$$I(\gamma_1, u) = -1 - a + b + c = 0. \quad (2)$$

b) Dato che il gioco è potenziale, deve necessariamente ammettere un equilibrio di Nash, che corrisponde col massimo del potenziale (esso esiste sempre grazie al teorema di Weierstrass). Ad esempio, nel caso $a = c = 0, b = 1$, che soddisfa (2), Il gioco corrispondente è

	0	1
0	0,0	0,-1
1	2,0	4,1

e si può facilmente vedere che $(1, 1)$ è un equilibrio di Nash per il gioco.

c) No, tale affermazione è falsa. L'esistenza di equilibri è condizione necessaria affinché un gioco sia potenziale, ma non sufficiente. Consideriamo il caso $a = -4, b = -2, c = 5$, che è non potenziale dato che non soddisfa (2). Il gioco corrispondente

	0	1
0	0,0	5,-1
1	2,-4	4,-2

non ammette equilibri di Nash, dunque non può essere potenziale. D'altra parte, è possibile che un gioco ammetta equilibri di Nash ma non sia potenziale, come nel caso $a = -4, b = -2, c = -2$,

	0	1
0	0,0	-2,-1
1	2,-4	4,-2

in cui $(1, 1)$ è un equilibrio di Nash pur non essendo il gioco potenziale.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo a stella con 4 nodi, dove l'insieme dei nodi è $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, v_0 è il nodo centrale e v_1, v_2 e v_3 sono i nodi foglia. Si consideri un gioco con giocatori \mathcal{V} , insieme delle azioni $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$ e funzione di utilità

$$u_0(x_0, x_{-0}) = - \sum_{j=1}^3 x_0 x_j, \quad u_i(x_i, x_{-i}) = x_i x_0, \quad i = 1, 2, 3.$$

1. Trovare gli eventuali equilibri di Nash del gioco e discutere se sia potenziale.
2. Disegnare il grafo delle transizioni della dinamica di best response a tempo continuo.
3. Indicato con $X(t) \in \mathcal{A}^{\mathcal{V}}$ il corrispondente processo di Markov, discutere l'unicità e calcolare la distribuzione di probabilità invariante.

Soluzione.

1. u_0 conta la differenza fra il numero di foglie con azione discorde da v_0 e il numero di foglie con azione concorde. Viceversa, ciascuna funzione u_i , $i = 1, 2, 3$ vale $+1$ se le azioni di v_0 e v_i coincidono, -1 altrimenti. Si possono interpretare le funzioni di utilità dicendo che nel gioco u il nodo centrale della stella mira ad anti-coordinarsi con le foglie, mentre le foglie mirano a coordinarsi con il centro.

Come conseguenza, è facile verificare che il gioco non ammette equilibri di Nash. Infatti, qualunque sia l'azione del centro x_0 , la best-response delle foglie consiste nel giocare la stessa azione, cioè $x_i = x_0$ per $i = 1, 2, 3$. D'altra parte, se il centro si trova circondato da foglie con la sua stessa azione, la sua best-response è passare all'azione opposta $-x_0$.

Per quanto già discusso, il gioco non è potenziale, perchè non ammette equilibri di Nash.

Osservazione: questo gioco può essere visto come un network game dove i giochi sottostanti sono potenziali (coordinamento o anticoordinamento) e il grafo è diretto, nel senso che il centro gioca un gioco di anticoordinamento contro le foglie, mentre le foglie giocano un gioco di coordinamento contro il centro. L'esistenza del potenziale in network games composto da giochi potenziali è garantita se il grafo sottostante è indiretto, condizione non verificata per il gioco in esame.

2. Il grafo delle transizioni della best response dynamics è mostrato in Figura 3. Nella dinamica a tempo continuo ogni giocatore ha un orologio di Poisson con rate 1. Quando l'orologio del giocatore si attiva, il giocatore seleziona un'azione con una probabilità uniforme sull'insieme delle sue best response. Le configurazioni sono raggruppate in quattro gruppi di simmetria, indicizzati con a,b,c,d.

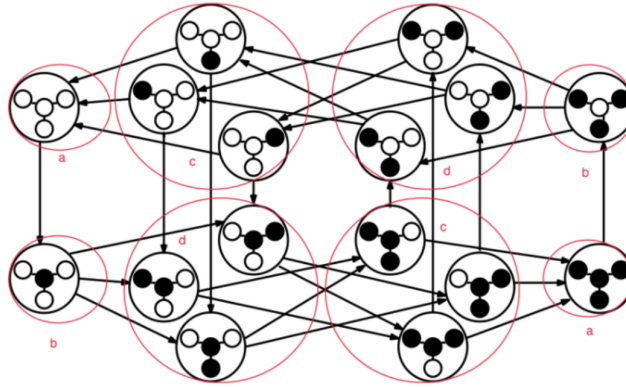


Figure 3: Grafo delle transizioni per la best response dynamics.

3. Poichè il grafo delle transizioni è fortemente connesso, la catena di Markov $X(t)$ è ergodica e ammette un'unica misura invariante di probabilità. Si osservi che in ogni configurazione x e per ogni giocatore i , l'insieme delle best-response $B_i(x_{-i})$ è un singoletto (che in questo caso contiene o x_i stesso o $-x_i$ a seconda della configurazione x). Di conseguenza, per ogni arco (x, y) del grafo delle transizioni, corrispondente a $x, y \in \mathcal{A}^{\mathcal{V}}$ tali che $y_i \neq x_i$ e $y_i \in B_i(x_{-i})$ per qualche $i \in \mathcal{V}$, il tasso della transizione $x \rightarrow y$ è

$$\Lambda_{xy} = 1/|B_i(x_{-i})| = 1.$$

Poniamo $\omega_x = \sum_{y \in \mathcal{A}^v} \Lambda_{xy}$ e definiamo la matrice laplaciana come

$$L = \text{diag}(\omega) - \Lambda.$$

L'unica misura invariante di probabilità π è la soluzione di

$$L'\pi = 0, \quad \mathbf{1}\pi' = 1.$$

Per simmetria, a nodi nello stesso gruppo è associato la stessa misura di probabilità. Definiamo quindi $\pi_a, \pi_b, \pi_c, \pi_d$ i quattro valori della probabilità invariante associati ai gruppi di nodi (non ai singoli nodi) a, b, c, d . Possiamo scrivere la matrice Λ e il corrispettivo Laplaciano come

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Imponendo le due equazioni otteniamo il sistema

$$\begin{aligned} \pi_a &= \pi_c \\ 3\pi_b &= \pi_a \\ \pi_c &= \pi_d \\ \pi_a + \pi_b + \pi_c + \pi_d &= 1. \end{aligned}$$

Risolvendo otteniamo

$$\pi_a = \pi_c = \pi_d = 3/10, \quad \pi_b = 1/10.$$

Si noti che questa è la probabilità per la dinamica di trovarsi nei vari insiemi di configurazione, non in una singola configurazione del tipo a, b, c, d . Per trovare la probabilità per la singola configurazione, è sufficiente dividere i risultati ottenuti per il numero di configurazioni presenti in ogni insieme di configurazioni.

Se invece volessimo considerare la best response a tempo discreto, ad ogni istante di tempo un giocatore viene selezionato con probabilità uniforme, e il giocatore seleziona un'azione tra le sue best response. Se siamo in una configurazione a e si attiva una foglia, la dinamica rimane nella stessa configurazione, perché il nodo sta già giocando una best response. Quindi avremo $\bar{P}_{aa} = 3/4$. Se invece si attiva il nodo centrale, esso varierà la sua azione. Questo avviene con probabilità $1/4$, dunque $\bar{P}_{ab} = 1/4$. Con ragionamenti analoghi possiamo costruire tutta la matrice di probabilità associata, che è

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Si può anche mostrare che la distribuzione invariante della dinamica a tempo continuo e a tempo discreto coincidono.

Esercizio 5. Si consideri il grafo in Figura 4 su cui è definito un network coordination game. In particolare, fra ogni coppia di giocatori connessi da un arco è definito un gioco di coordinamento 2×2 con matrice dei payoff

	0	1
0	a,a	d,c
1	c,d	b,b

dove $a > c$ e $b > d$.

1. Calcolare i massimi globali del potenziale nel caso in cui $c = d = 0$, al variare di a e b .

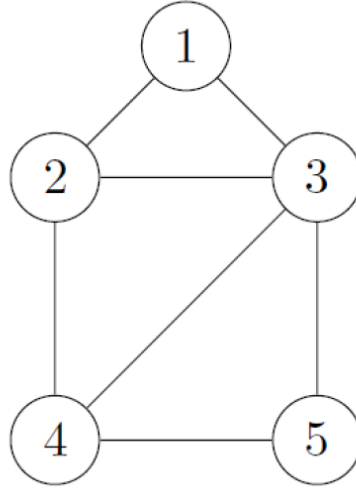


Figure 4: Grafo per il gioco di coordinamento.

2. Si consideri la noisy best response dynamics $X(t)$ nei due casi $a = b = 1$ e $a = 1, b = 1/2$, sempre assumendo $c = d = 0$. Calcolare il rapporto fra le frequenze di visita della configurazione $(1, 1, 1, 1, 1)$ e $(0, 0, 0, 0, 0)$ in stazionarietà.
3. Si confronti il comportamento asintotico della noisy best response nel limite di rumore nullo con il comportamento della best response.

Soluzione. 1. Ricordiamo che ciascun gioco di coordinamento 2×2 è potenziale con potenziale ϕ dato da

	0	1
0	a-c	0
1	0	b-d

Il potenziale Φ del network coordination game si esprime come combinazione dei potenziali dei giochi di coordinamento 2×2

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij} \phi(x_i, x_j).$$

Indipendentemente dalla struttura di \mathcal{G} , i massimi globali del potenziale di un network coordination game sono sempre configurazioni di consenso. Ci restringiamo quindi alle configurazioni $x \in \{(0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ e calcoliamo i valori di $\Phi(x)$ al variare di a e b per $c = d = 0$. Per $x = (0, 0, 0, 0, 0)$ abbiamo che

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij} \phi(x_i, x_j) = |\mathcal{E}| \phi(0, 0) = 7(a - c) = 7a$$

mentre per $x = (1, 1, 1, 1, 1)$ abbiamo che

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij} \phi(x_i, x_j) = |\mathcal{E}| \phi(1, 1) = 7(b - d) = 7b$$

Quindi,

$$\arg \max \Phi(x) = \begin{cases} (0, 0, 0, 0, 0) & \text{se } a > b \\ (1, 1, 1, 1, 1) & \text{se } a < b \\ \{(0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\} & \text{se } a = b. \end{cases}$$

2. Per ogni scelta di $\beta \geq 0$, la noisy best response dynamics è una catena di Markov irriducibile con misura invariante

$$\pi_x = \frac{e^{\beta\Phi(x)}}{Z_\beta}, \quad Z_\beta = \sum_{y \in \mathcal{X}} e^{\beta\Phi(y)}.$$

Di conseguenza,

$$\frac{\pi_{(1,1,1,1,1)}}{\pi_{(0,0,0,0,0)}} = \frac{e^{\eta\Phi(1,1,1,1,1)}}{e^{\beta\Phi(0,0,0,0,0)}} = \frac{e^{\beta 7a}}{e^{\beta 7b}}.$$

Nel primo caso, $a = b = 1$, abbiamo che per ogni valore di β

$$\frac{\pi_{(1,1,1,1,1)}}{\pi_{(0,0,0,0,0)}} = 1.$$

Osserviamo che in base a quanto calcolato al punto precedente, per questi valori di a e b entrambe le configurazioni sono massimi globali del potenziale. Sappiamo che nel limite $\beta \rightarrow +\infty$ la misura invariante sarà supportata unicamente sui due massimi. Il risultato mostra che anche per valori finiti di β la dinamica visita con la stessa frequenza i due massimi in stazionarietà, e visita ogni altra configurazione con probabilità che converge a 0 al crescere di β . In altre parole, per ogni valore di β ,

$$\pi_{(1,1,1,1,1)} = \pi_{(0,0,0,0,0)}$$

e nel limite $\beta \rightarrow +\infty$,

$$\pi_{(1,1,1,1,1)} = \pi_{(0,0,0,0,0)} = 1/2.$$

Nel secondo caso $a = 1, b = 1/2$ abbiamo che

$$\frac{\pi_{(1,1,1,1,1)}}{\pi_{(0,0,0,0,0)}} = \frac{e^{\beta 7}}{e^{\beta 7/2}} = e^{\beta 7/2}$$

Ricordiamo che in base a quanto calcolato al punto precedente, per questi valori di a e b la configurazione $(1, 1, 1, 1, 1)$ è l'unico massimo globale del potenziale. Ciò mostra che per valori crescenti di β la misura invariante si concentra sempre di più su $(1, 1, 1, 1, 1)$, fino ad avere supporto su $(1, 1, 1, 1, 1)$ per $\eta \rightarrow \infty$.

3. Sappiamo che la dinamica best response converge in tempo finito con probabilità 1 ad un sottoinsieme di equilibri di Nash, noti come recurrent Nash equilibria e indicati da \mathcal{N}_∞ , che costituiscono gli insiemi di equilibri di Nash appartenenti a sink component nel best response graph del gioco. In generale, vale la seguente relazione:

$$\arg \max \Phi(x) \subseteq \mathcal{N}_\infty \subseteq \mathcal{N}.$$

Nella rete in esame non ci sono altri equilibri al di fuori dei consensi. Quindi abbiamo che per ogni $a, b > 0$

$$\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N} = \{(1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 0, 0)\}.$$

In particolare, se $a \neq b$, allora

$$\arg \max \Phi(x) \subset \mathcal{N}_\infty = \mathcal{N},$$

cioè la noisy best response spenderà quasi tutto il suo tempo in una sola delle due configurazione di consenso, mentre la best response convergerà in tempo finito a uno dei due elementi in \mathcal{N}_∞ . Invece, se $a = b$, allora

$$\arg \max \Phi(x) = \mathcal{N}_\infty = \mathcal{N}.$$

Si noti però che, anche se $\arg \max \Phi(x) = \mathcal{N}_\infty = \mathcal{N}$, la convergenza delle due dinamiche a \mathcal{N} avviene in due sensi diversi. Infatti, la best response non è irriducibile perché il potenziale è non decrescente lungo la dinamica. Quindi, una volta che la dinamica raggiunge \mathcal{N}_∞ , non potrà più uscire da tale insieme. D'altra parte, la noisy best response è irriducibile, dunque potrà visitare una qualsiasi configurazione, anche se nel limite di basso rumore la frazione di tempo spesa in configurazioni che non sono massimi del potenziale è trascurabile. Inoltre, la noisy best response trascorrerà 1/2 del tempo totale in ciascuna delle due configurazioni di consenso, indipendentemente dalla condizione iniziale.

Esercizio 6. Si consideri il minority game su un grafo linea indiretto con 4 nodi. Si caratterizzino la dinamica best response e la dinamica noisy best response (nel limite di rumore nullo) per tale gioco.

Soluzione. Sappiamo che la dinamica best response converge in tempo finito con probabilità 1 ad un sottoinsieme di equilibri, noti come recurrent Nash equilibria e indicati da \mathcal{N}_∞ , che costituiscono gli insiemi di equilibri di Nash appartenenti a sink component nel grafo della best response del gioco. In generale, vale

$$\mathcal{N}_\infty \subseteq \mathcal{N}.$$

Analizziamo gli equilibri di Nash del gioco. In particolare, il gioco ammette quattro equilibri di Nash, cioè

$$(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0).$$

Si può vedere che gli ultimi due equilibri non appartengono a \mathcal{N}_∞ . Infatti, data una configurazione $X(0) = (1, 0, 0, 1)$, la best response dynamics può effettuare le seguenti transizioni:

$$(1, 0, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1).$$

Una volta giunta in $(0, 1, 0, 1)$ la dinamica rimane bloccata, perché ogni giocatore sta giocando la sua unica best response data la configurazione. Di conseguenza, $(0, 1, 0, 1)$ appartiene a \mathcal{N}_∞ . Analogamente, anche $(1, 0, 1, 0)$ appartiene a \mathcal{N}_∞ mentre $(0, 1, 1, 0)$ non ci appartiene. Questo mostra che in generale \mathcal{N}_∞ può differire da \mathcal{N} . La dinamica convergerà in tempo finito con probabilità 1 uno dei due equilibri in \mathcal{N}_∞ , che è un insieme disconnesso. A quale dei due elementi di \mathcal{N}_∞ la dinamica convergerà dipende dalla condizione iniziale della dinamica, ma a parità di condizione iniziale dipende anche dalla realizzazione della dinamica, che è intrinsecamente stocastica. Infatti, partendo da $(0, 0, 0, 0)$ sono possibili sia

$$(0, 0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0)$$

che

$$(0, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1)$$

in base all'ordine di attivazione dei giocatori.

Riguardo alla noisy best response, sappiamo che nel limite di rumore nullo, la dinamica spenderà una frazione 1 del proprio tempo (se osservata per tempi sufficientemente lunghi) nelle configurazioni che massimizzano il potenziale. Il potenziale in un minority game conta il numero di archi (indiretti) tra giocatori che giocano azioni diverse. Si può vedere facilmente che $\Phi(x) = 3$ per ogni x in \mathcal{N}_∞ , mentre $\Phi(x) = 2$ per ogni x in $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_\infty$. Dunque in questo caso abbiamo $\arg\max \Phi(x) = \mathcal{N}_\infty$. Di conseguenza, la noisy best response dynamics, nel limite di η infinito, spenderà metà tempo in $(1, 0, 1, 0)$ e l'altra metà $(0, 1, 0, 1)$. Si noti che, a differenza della best response dynamics, l'insieme $\arg\max \Phi(x)$ non è trapping per la noisy best response dynamics, perché la dinamica è sempre irriducibile, il che implica che da configurazioni in tale insieme è sempre possibile raggiungere ogni altra configurazione (seppur questo avvenga raramente). Al contrario \mathcal{N}_∞ per la best response è trapping, nel senso che la dinamica non può lasciare questo insieme. Questo gioco è un esempio in cui

$$\arg\max \Phi(x) = \mathcal{N}_\infty \subset \mathcal{N}.$$

Esercizio 7. Si consideri un gioco $(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \{u_i\})$ con insieme dei giocatori $\mathcal{V} = \{1, 2, 3\}$, insieme delle azioni $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$ e funzioni di utilità

$$u_1(x_1, x_{-1}) = x_1(x_2 + 1), \quad u_2(x_2, x_{-2}) = x_2(x_1 + 1) - x_2x_3, \quad u_3(x_3, x_{-3}) = -x_3x_2.$$

- (a) Si determinino gli equilibri di Nash (a strategia pura) del gioco;
- (b) Si dimostri che tale gioco è un gioco potenziale;
- (c) Si consideri la catena di Markov a tempo continuo corrispondente alla dinamica di *noisy best response* con parametro β , se ne determini la distribuzione di probabilità invariante e si trovi il limite di tale distribuzione per $\beta \rightarrow +\infty$.

Soluzione. (a) Data l'azione del giocatore 2, l'unica best response del giocatore 3 è giocare l'azione opposta, quindi all'equilibrio di Nash deve valere

$$x_3 = -x_2.$$

Fissando la relazione precedente, l'utilità dei giocatori 1 e 2 può essere vista come la somma di un'utilità derivante da un gioco di coordinamento tra essi, più una preferenza intrinseca verso la strategia +1. Sapendo che all'equilibrio $x_3 = -x_2$, l'utilità del giocatore 2 è $u(x_2, x_{-2}) = x_2(x_1 + 1) + 1$. Il risultato è che

$$\mathcal{B}_1(x_{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_2 = 1 \\ \{1, -1\} & \text{if } x_2 = -1 \end{cases}, \quad \mathcal{B}_2(x_{-2}) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_1 = 1 \\ \{1, -1\} & \text{if } x_1 = -1. \end{cases}$$

Di conseguenza, esistono due equilibri di Nash, $(1, 1, -1)$ e $(-1, -1, 1)$. In particolare, il primo equilibrio di Nash è anche stretto.

- (b) Si può dedurre a priori che il gioco è potenziale. Infatti, il gioco può essere visto come un network game su un grafo indiretto (a differenza dell'esercizio 4), dove i sottogiochi che lo compongono sono un gioco di coordinamento (tra 1 e 2) e uno di anticoordinamento (tra 2 e 3), entrambi potenziali. Alle funzioni di utilità si aggiunge un termine non strategico (per i giocatori 1 e 2) che dipende esclusivamente dalla strategia del giocatore stesso, che non interferisce con la proprietà di un gioco di essere potenziale. Le utilità si possono cioè scrivere come

$$u_i(x) = \sum_j W_{ij} \varphi^{(i,j)}(x_i, x_j) + \psi_i(x_i).$$

Se i giochi $\varphi^{(i,j)}$ sono potenziali (con potenziale $\phi^{(i,j)}$) e il grafo è indiretto, il network game è potenziale con potenziale

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij} \phi^{(i,j)}(x_i, x_j) + \sum_i \psi_i(x_i).$$

Per il gioco di coordinamento tra 1 e 2, abbiamo potenziale $\phi^{(1,2)}(x_1, x_2) = x_1 x_2$, mentre per il gioco di anticoordinamento tra 2 e 3 abbiamo $\phi^{(2,3)}(x_2, x_3) = -x_2 x_3$. In questo caso il gioco risultante non è semplicemente composto dalle interazioni a coppie, ma u_i contiene anche termini dipendenti dalla strategia del singolo giocatore i . Dunque,

$$\Phi(x) = x_1 x_2 - x_2 x_3 + x_1 + x_2.$$

- (c) Sappiamo che la noisy best response ammette distribuzione invariante

$$\pi_x = \frac{e^{\beta \Phi(x)}}{\sum_{y \in \mathcal{X}} e^{\beta \Phi(y)}}.$$

In particolare, nel limite $\beta \rightarrow +\infty$, la distribuzione invariante tenderà a $\arg \max \Phi(x)$ e sarà nulla per ogni altra x . Sappiamo inoltre che, indicando con \mathcal{N} l'insieme degli equilibri di Nash del gioco, vale

$$\arg \max \Phi(x) \subseteq \mathcal{N}.$$

Dunque, ci resta solo da capire se entrambi gli equilibri massimizzano il potenziale. Si può facilmente vedere che

$$\Phi((1, 1, -1)) = 4, \quad \Phi((-1, -1, 1)) = 0.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \pi_x = \begin{cases} 1 & \text{if } x = (1, 1, -1) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Si noti anche che $(1, 1, -1)$ appartiene a \mathcal{N}_∞ , mentre $(-1, -1, 1)$ non ci appartiene.

Esercizio 8. Si consideri il minority game su un grafo completo K_n con insieme dei nodi $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$. Si assuma che ogni giocatore ha insieme delle azioni $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$ e si identifichi $\mathcal{A}^{\mathcal{V}}$ con \mathcal{A}^n . Data una configurazione $x \in \mathcal{A}^n$ si denoti con $n^+(x)$ e $n^-(x)$ il numero di componenti di x uguali a $+1$ e -1 rispettivamente.

1. Provare che $x \in \mathcal{A}^n$ è un Nash se e solo se $-1 \leq n^+(x) - n^-(x) \leq +1$
2. Caratterizzare gli equilibri di Nash analizzando separatamente il caso in cui n è pari e n è dispari
3. Specificare quali fra gli equilibri trovati al punto precedente sono stretti e quali sono massimi del potenziale.

Soluzione. 1. In una generica configurazione $x \in \mathcal{A}^n$, ogni giocatore i tale che $x_i = +1$ vedrà nel suo vicinato $n^+(x) - 1$ giocatori con azione $+1$ e $n^-(x)$ giocatori con azione -1 . Dunque, l'azione x_i è una best response per il giocatore i se e solo se

$$n^+(x) - 1 \leq n^-(x).$$

Similmente, ogni giocatore i tale che $x_i = -1$ vedrà nel suo vicinato $n^+(x)$ giocatori con azione $+1$ e $n^-(x) - 1$ giocatori con azione -1 . Dunque, l'azione x_i è una best response per il giocatore i se e solo se

$$n^+(x) \geq n^-(x) - 1.$$

Combinando le due disuguaglianze si ottiene che x è un equilibrio di Nash se e solo se

$$-1 \leq n^+(x) - n^-(x) \leq +1.$$

2. Imponendo il vincolo $n^+(x) + n^-(x) = n$, la condizione $-1 \leq n^+(x) - n^-(x) \leq +1$ può essere riscritta come

$$\begin{aligned} -1 &\leq n^+(x) - n^-(x) \leq +1 \\ -1 &\leq n^+(x) + n^+(x) - n^+(x) - n^-(x) \leq +1 \\ -1 &\leq 2n^+(x) - n \leq +1 \\ \frac{n-1}{2} &\leq n^+(x) \leq \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Se n è pari, c'è un unico numero intero nell'intervallo $[(n-1)/2, (n+1)/2]$, ed è $n/2$. Pertanto in questo caso gli equilibri di Nash sono caratterizzati come le configurazioni $x \in \mathcal{A}^n$ tali che

$$n^+(x) = n^-(x) = \frac{n}{2}.$$

Se n è dispari, ci sono due numeri interi nell'intervallo $[(n-1)/2, (n+1)/2]$, cioè $(n-1)/2$ e $(n+1)/2$. Pertanto in questo caso gli equilibri di Nash sono caratterizzati come le configurazioni $x \in \mathcal{A}^n$ tali che

$$n^+(x) = \frac{n-1}{2}, n^-(x) = \frac{n+1}{2}$$

oppure

$$n^+(x) = \frac{n+1}{2}, n^-(x) = \frac{n-1}{2}$$

3. Nel caso n pari, tutti gli equilibri ottenuti sono stretti. Infatti, consideriamo un equilibrio di Nash x e un giocatore i tale che $x_i = +1$. E' immediato verificare che l'utilità di i è strettamente maggiore di quella che avrebbe modificando la sua azione a -1

$$u_i(+1, x_{-i}) = n^-(x) = \frac{n}{2} > \frac{n}{2} - 1 = u_i(-1, x_{-i})$$

e un ragionamento analogo mostra che lo stesso vale se i è tale che $x_i = -1$.

Ricordiamo che il potenziale del minority game (in un grafo indiretto) è la funzione Φ che conta il numero di archi che collegano giocatori con azioni diverse:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} |x_i - x_j|, \quad \forall x \in \mathcal{A}^n.$$

Dunque, tutte le configurazioni $x \in \mathcal{A}^n$ tali che $n^+(x) = n^-(x) = \frac{n}{2}$ hanno lo stesso potenziale pari a

$$\Phi(x) = \frac{n}{2} \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

Poichè i massimi del potenziale sono equilibri di Nash, se esistesse una configurazione y diversa dalle precedenti tale che $\Phi(y) = \max_x \Phi(x) > n^2/4$ questa sarebbe un Nash. Abbiamo già verificato che tutti gli equilibri di Nash x soddisfano $n^+(x) = n^-(x) = \frac{n}{2}$, dunque non può esistere una tale configurazione y con potenziale maggiore e questi sono i massimi del potenziale.

Quando n è dispari invece, nessun equilibrio è stretto. Infatti consideriamo il caso in cui x sia un equilibrio tale che $n^+(x) = \frac{n+1}{2}, n^-(x) = \frac{n-1}{2}$ e un giocatore i tale che $x_i = -1$. L'utilità di i non è strettamente maggiore di quella che avrebbe modificando la sua azione a $+1$, infatti

$$u_i(-1, x_{-i}) = n^+(x) = \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} - 1 = u_i(+1, x_{-i})$$

così che l'equilibrio non è stretto. Un ragionamento identico si applica al caso in cui x sia un equilibrio tale che $n^+(x) = \frac{n+1}{2}, n^-(x) = \frac{n-1}{2}$, mostrando che un giocatore i tale che $x_i = +1$ non diminuisce strettamente la sua utilità nel modificare la sua azione a -1 .

Con un ragionamento analogo al caso n pari, si vede che tutte le configurazioni $x \in \mathcal{A}^n$ tali che $n^+(x) = \frac{n+1}{2}, n^-(x) = \frac{n-1}{2}$ o $n^+(x) = \frac{n-1}{2}, n^-(x) = \frac{n+1}{2}$ hanno lo stesso potenziale pari a

$$\Phi(x) = \frac{n-1}{2} \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4}.$$

Poichè i massimi del potenziale sono equilibri di Nash, se esistesse una configurazione y diversa dalle precedenti tale che $\Phi(y) = \max_x \Phi(x) > (n^2-1)/4$ questa sarebbe un Nash. Abbiamo già verificato che tutti gli equilibri x di Nash soddisfano $n^+(x) = \frac{n+1}{2}, n^-(x) = \frac{n-1}{2}$ o $n^+(x) = \frac{n-1}{2}, n^-(x) = \frac{n+1}{2}$, dunque non può esistere una tale configurazione y con potenziale maggiore e questi sono i massimi del potenziale.

Si noti dunque che, se n è pari, la best response dynamics rimane bloccata nel primo equilibrio di Nash raggiunto. Dunque,

$$\arg \max \Phi(x) = \mathcal{N} = \mathcal{N}_\infty,$$

ma questi insieme sono formati da equilibri di Nash disconnessi nel best response transition graph. Invece se n è dispari, continua a valere

$$\arg \max \Phi(x) = \mathcal{N} = \mathcal{N}_\infty,$$

ma la best response dynamics continua a muoversi nello spazio degli equilibri e li visita con probabilità uniforme.

Grafi random

Esercizio 9. Si consideri la seguente distribuzione di probabilità definita sui numeri interi non negativi:

$$p_0 = \frac{29}{60}, \quad p_1 = \frac{1}{5}, \quad p_2 = \frac{3}{20}, \quad p_3 = \frac{1}{6},$$

$$p_k = 0, \quad \forall k \geq 4.$$

- (a) Si determini la probabilità di estinzione per un Galton-Watson branching process con distribuzione $\{p_k\}$.
- (b) Si consideri un grafo estratto dal configuration model con n nodi e distribuzione dei gradi $\{p_k\}$. Si determini la distribuzione dei gradi link-oriented $\{q_k\}$ per il configuration model del punto precedente.
- (c) Si dica se il grafo contiene una componente connessa la cui taglia cresce linearmente in n con alta probabilità quando n tende all'infinito.
- (d) Si determini la probabilità di sopravvivenza per un Galton-Watson branching process con distribuzione $\{q_k\}$.

Soluzione. (a) Data la distribuzione $\{p_k\}$, il valore atteso del numero di figli per un qualsiasi nodo del grafo è

$$\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{20} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

Siamo dunque nel regime critico ($\mu = 1$). Si ricordi che in tale regime $\theta_{ext} = 1$ se $p_1 < 1$ e $\theta_{ext} = 0$ se $p_1 = 1$. Di conseguenza, in questo caso abbiamo $\theta_{ext} = 1$.

- (b) Ricordiamo che la distribuzione link-oriented $\{q_k\}$ è definita come

$$q_k = \frac{(k+1)p_{k+1}}{\mu}, \quad \mu = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k.$$

Di conseguenza, abbiamo

$$q_0 = p_1 = \frac{1}{5}, \quad q_1 = \frac{3}{10}, \quad q_2 = \frac{1}{2},$$

e $q_k = 0$ per ogni $k \geq 0$.

- (c) Si ricordi che un configuration model ammette una giant component (componente connessa di dimensione lineare in n) con alta probabilità quando n va all'infinito se e solo se

$$\sum_{k \geq 0} p_k k(k-2) > 0.$$

In questo caso abbiamo

$$\sum_{k \geq 0} p_k k(k-2) = 3p_3 - p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} > 0,$$

dunque il grafo ammette una giant component con alta probabilità.

- (d) Si noti che

$$\nu = \sum_{k \geq 0} k q_k = \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{10} > 1,$$

dunque il processo è nel regime supercritico e la probabilità di sopravvivenza sarà strettamente positiva. Tale probabilità sarà il complementare della probabilità di estinzione θ_{ext} , che corrisponde al più piccolo punto fisso in $[0, 1]$ dell'equazione

$$\bar{\Phi}(x) = \sum_{k \geq 0} q_k x^k = x.$$

Dobbiamo quindi trovare gli zeri di

$$q_0 + (q_1 - 1)x + q_2 x^2 = \frac{1}{5} - \frac{7}{10}x + \frac{1}{2}x^2$$

Le due soluzioni di tale equazione di secondo grado sono $2/5$ e 1 , dunque la probabilità di estinzione sarà $2/5$ e quella di sopravvivenza sarà $1 - 2/5 = 3/5$.

Esercizio 10. Si consideri un grafo Erdos-Renyi $\mathcal{G}(n, p)$.

- (a) Si calcoli il numero atteso di cicli di lunghezza 3 nel grafo e se ne stimi il valore atteso per n grande quando $p = \lambda/n$.
- (b) Si calcoli il numero atteso di cicli isolati di lunghezza 3 nel grafo e se ne stimi il valore atteso per n grande quando $p = \lambda/n$.

Soluzione. (a) Ci sono $\binom{n}{3}$ terne di nodi nel grafo. Ognuna di esse è un ciclo con probabilità p^3 , quindi il numero atteso di cicli di lunghezza 3 è

$$\binom{n}{3} p^3.$$

Quando $p = \lambda/n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{3} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 = \frac{\lambda^3}{6}$$

- (b) Ci sono $\binom{n}{3}$ terne di nodi nel grafo. La probabilità che ciascuna di esse sia un ciclo isolato è uguale a $p^3 \cdot (1-p)^{3(n-3)}$, quindi il numero atteso di cicli isolati di lunghezza 3 è

$$\binom{n}{3} p^3 (1-p)^{3(n-3)}.$$

Quando $p = \lambda/n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{3} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{3(n-3)} = \frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda/3}$$