Homework2 Rostagno

295706

December 10, 2024

- **Esercizio 1:**

  a) Per determinare se la catena è esplosiva dobbiamo verificare che

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$$

  dove $\lambda_n(x) = q(x, x+1) + q(x, x-1)$.
  Nel nostro caso abbiamo:

  $$\lambda(x) = \begin{cases} q(x, x+1) = 2^x, & \text{se } x = 0, \\ q(x, x+1) + q(x, x-1) = 2^x + 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

  La sommatoria da verificare è:

  $$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)}.$$

  Per $x = 0$:

  $$\frac{1}{\lambda(0)} = \frac{1}{2^0} = 1.$$

  Per $x \geq 1$:

  $$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{3 \cdot 2^x}.$$

  La sommatoria diventa:

  $$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x}.$$

  Calcoliamo la serie $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x}$:

  $$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x} = \frac{1}{3} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}.$$

Notiamo che la serie è una geometrica e quindi ne conosciamo la convergenza

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Abbiamo in conclusione che la serie diventa

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Quindi la catena è esplosiva.

b) Ripetiamo gli stessi passaggi del punto precedente

$$\lambda(x) = \begin{cases} q(x, x+1) = 2^x, & \text{se } x = 0, \\ q(x, x+1) + q(x, x-1) = 2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

La sommatoria da verificare è:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)}.$$

Per $x = 0$:

$$\frac{1}{\lambda(0)} = \frac{1}{2^0} = 1.$$

Per $x \geq 1$:

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{2 \cdot 2^x}.$$

La sommatoria diventa:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^x}.$$

Calcoliamo la serie $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^x}$:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^x} = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}.$$

Notiamo che la serie è una geometrica e quindi ne conosciamo la convergenza

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Abbiamo in conclusione che la serie diventa

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Quindi la catena è esplosiva.

c) Ripetiamo gli stessi passaggi del punto precedente

$$\lambda(x) = \begin{cases} q(x, x+1) = 2^{x+1}, & \text{se } x = 0, \\ q(x, x+1) + q(x, x-1) = 2^x + 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

La sommatoria da verificare è:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)}.$$

Per $x = 0$:

$$\frac{1}{\lambda(0)} = \frac{1}{2^{0+1}} = \frac{1}{2}.$$

Per $x \geq 1$:

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{3 \cdot 2^x}.$$

La sommatoria diventa:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x}.$$

Calcoliamo la serie $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x}$:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x} = \frac{1}{3} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}.$$

Notiamo che la serie è una geometrica e quindi ne conosciamo la convergenza

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Abbiamo in conclusione che la serie diventa

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Quindi la catena è esplosiva.

- **Esercizio 2:**

  a) Modelliamo come una CTMC, consideriamo un sistema con 6 stati ($n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) che rappresentano il numero di cartucce disponibili. Il tasso di transizione dipende dal numero di stampanti operative e dal numero di cartucce in ricarica:

  - $q(n, n+1) = min(5 - n, 2) \cdot 1$
    avviene quando una cartuccia viene ricaricata.
  - $q(n, n-1) = min(n, 3) \cdot \frac{1}{6}$
    avviene quando una stampante consuma una cartuccia, con tasso proporzionale al numero di stampanti operative.

  Successivamente procedo a calcolare la matrice di transizione Q

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{-13}{6} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-7}{3} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

  Ora possiamo calcolare la distribuzione invariante π tali che

$$\pi Q = 0$$

  e otteniamo

$$\pi = (\frac{1}{3829}, \frac{12}{3829}, \frac{72}{3829}, \frac{288}{3829}, \frac{1152}{3829}, \frac{2304}{3829})$$

  Possiamo affermare che tutte e 3 le stampanti lavoreranno assieme se $n \geq 3$ quindi:

$$\frac{288}{3829} + \frac{1152}{3829} + \frac{2304}{3829} = \frac{3744}{3829}$$

  b)

- **Esercizio 3:**

- **Esercizio 4:**

- **Esercizio 5:**