

Stochastic processes and overview of the course

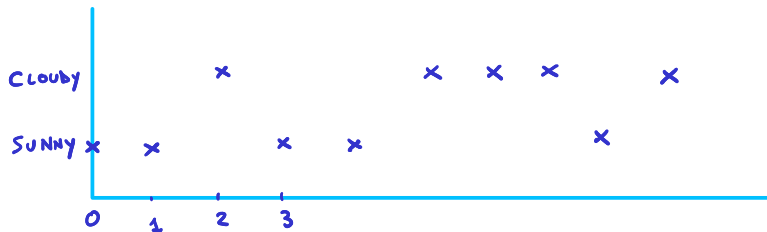
Stochastic processes are everywhere! Whenever there is something evolving in time, with a probabilistic outcome, we have a stochastic process.

Stochastic processes and overview of the course

Stochastic processes are everywhere! Whenever there is something evolving in time, with a probabilistic outcome, we have a stochastic process.

weather in different days

$$X_t \in \{\text{SUNNY}, \text{CLOUDY}\}$$

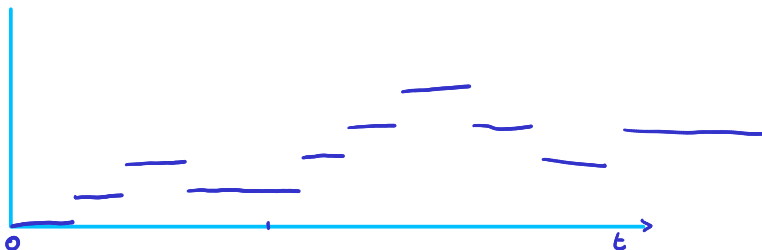


Stochastic processes and overview of the course

Stochastic processes are everywhere! Whenever there is something evolving in time, with a probabilistic outcome, we have a stochastic process.

number of job requests at a server

$$X_t \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

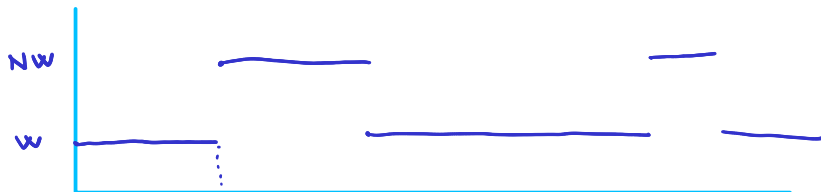


Stochastic processes and overview of the course

Stochastic processes are everywhere! Whenever there is something evolving in time, with a probabilistic outcome, we have a stochastic process.

whether a factory machine is working or not

$$X_t \in \{w, nw\}$$



Stochastic processes and overview of the course

Stochastic processes are everywhere! Whenever there is something evolving in time, with a probabilistic outcome, we have a stochastic process.

position of a pollen grain in a glass of water



$$X_t \in \mathbb{R}^2$$

$$\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$$

PROCESSO STOCASTICO

Stochastic processes and overview of the course

Definition

A stochastic process is a collection of random variables $\{X_i\}_{i \in I}$ for some set of ordered indices I , with the random variables sharing a common *state space* S .

- If S and I are discrete sets, we have a *discrete stochastic process with discrete time* (ex. weather day by day).
- If S is discrete and I is continuous, we have a *discrete stochastic process with continuous time* (ex. server requests, machine status).
- If S and I are continuous sets, we have a *continuous stochastic process with continuous time* (ex. pollen grain).

Definition

A stochastic process is a collection of random variables $\{X_i\}_{i \in I}$ for some set of ordered indices I , with the random variables sharing a common *state space* S .

- If S and I are discrete sets, we have a *discrete stochastic process with discrete time* (ex. weather day by day).
- If S is discrete and I is continuous, we have a *discrete stochastic process with continuous time* (ex. server requests, machine status).
- If S and I are continuous sets, we have a *continuous stochastic process with continuous time* (ex. pollen grain).

Definition

A stochastic process is a collection of random variables $\{X_i\}_{i \in I}$ for some set of ordered indices I , with the random variables sharing a common *state space* S .

- If S and I are discrete sets, we have a *discrete stochastic process with discrete time* (ex. weather day by day).
- If S is discrete and I is continuous, we have a *discrete stochastic process with continuous time* (ex. server requests, machine status).
- If S and I are continuous sets, we have a *continuous stochastic process with continuous time* (ex. pollen grain).

Stochastic processes and overview of the course

Definition

A stochastic process is a collection of random variables $\{X_i\}_{i \in I}$ for some set of ordered indices I , with the random variables sharing a common *state space* S .

- If S and I are discrete sets, we have a *discrete stochastic process with discrete time* (ex. weather day by day).
- If S is discrete and I is continuous, we have a *discrete stochastic process with continuous time* (ex. server requests, machine status).
- If S and I are continuous sets, we have a *continuous stochastic process with continuous time* (ex. pollen grain).
- I IS DISCRETE AND S CONTINUOUS (MCMC ALGORITHMS)

Quiz time!

Which of the following ones are stochastic processes?

- 1 $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ with X_t being the number of customers in a shop at time t ;
- 2 $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ with X_t being the status of your computer (“on”, “off”, or “broken”) at time t ;
- 3 $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ with X_t being the position of a frog jumping around at time t .

TUTTI!

Quiz time!

Consider a sequence of i.i.d. random variables $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Is it a stochastic process?

Sì!

BORING

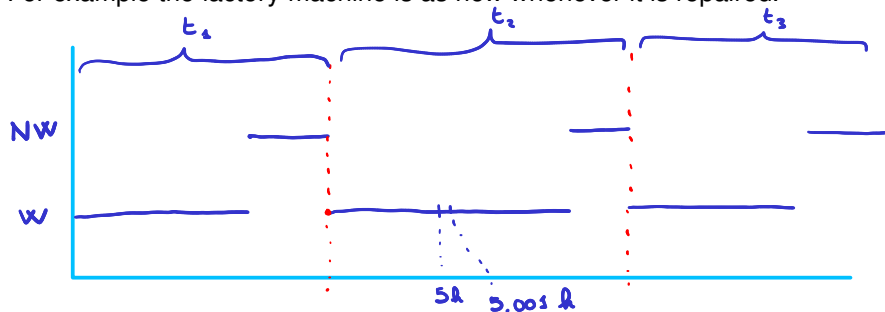
Stochastic processes and overview of the course

Things become interesting if there is some “structure”

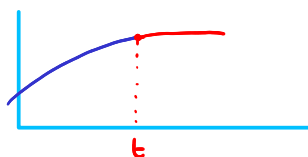
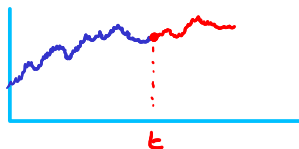
Stochastic processes and overview of the course

Things become interesting if there is some “structure”

Preview 1 What happens in different interval time intervals is **independent**.
For example the factory machine is as new whenever it is repaired.



Stochastic processes and overview of the course



$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x} = f(x) \end{cases}$$

Things become interesting if there is some “structure”

Preview 2 What happens in the future is **independent** of the past given the current state.

For example tomorrow's weather depends only on the current weather situation and not the past weather.

$$\{S, C\} \quad S = \text{SUNNY} \quad C = \text{CLOUDY}$$

$$P(X_{n+1} = S \mid X_n = C, X_{n-1} = C, \dots, X_0 = S)$$

$$= P(X_{n+1} = S \mid X_n = C) = 0.7$$

$$P(X_{n+1} = C \mid X_n = C) = 0.3$$

$$P(X_{n+1} = S \mid X_n = S) = 0.4$$

$$P(X_{n+1} = C \mid X_n = S) = 0.6$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

What you should know

Things that you are welcome to ask me about during office hours, but that I will consider as known during classes:

- basic concepts of **linear algebra**;
- basic concepts of **analysis**: convergent and divergent series, how to calculate multi-dimensional integrals, monotone convergence theorem, Fubini and Tonelli theorems, Lebesgue's dominated convergence theorem, Fatou's lemma;
- basic concepts of **probability**: discrete and continuous random variables, σ -algebras, mean, variance, covariance;
- **convergence of random variables**: weak convergence, convergence in probability, strong convergence, convergence in mean, weak and strong law of large numbers, central limit theorem;
- **dependence structure**: conditional distribution, conditional expectation given a σ -algebra (which is a random variable) and its properties.

Random variables we will be working with

During classes I will assume the law of the following random variables is known:

- exponential (my favourite one!);
- gaussian (or normal, also very cool);
- uniform (both discrete and continuous);
- Bernoulli;
- binomial;
- geometric;
- Poisson.

La verifica dell'apprendimento per questo modulo (processi stocastici) consiste nelle seguenti parti:

- un orale obbligatorio;
- un'attività facoltativa.

L'esame orale durerà all'incirca **mezz'ora**, il candidato potrà presentarsi direttamente all'orario concordato per il suo esame.

L'esame orale verterà **principalmente** su un **argomento** (una lista completa verrà fornita a fine corso) pescato a sorte dalla commissione. L'argomento viene comunicato al candidato 30 minuti prima del suo esame. Durante questi trenta minuti, il candidato può consultare liberamente il materiale del corso.

Esame: orale obbligatorio

Alla fine dell'esame orale verrà assegnato un punteggio massimo di 31 (corrispondente a 30 e lode). Verranno valutati:

Conoscenza della teoria : conoscenza delle definizioni, dei teoremi, delle dimostrazioni viste a lezioni (alcune saranno escluse);

Comprensione della teoria : comprensione del significato e della rilevanza dei teoremi (cosa permettono di concludere? perché ce n'era bisogno?) capacità di risolvere esercizi pratici e teorici non visti a lezione;

Capacità espositiva : Capacità dello studente di esporre i concetti in maniera chiara.

L'attività facoltativa consiste in:

Risposte settimanali ai quiz : sulla pagina moodle del corso appariranno dei quiz settimanali (con scadenza di **due** settimane) ai quali gli studenti risponderanno da remoto, in autonomia. A settimane alterne, questi quiz saranno preparati dal docente e dagli studenti stessi, secondo le modalità descritte sotto;

Formulazione delle domande : ogni due settimane, gli studenti lavoreranno in classe in gruppo per formulare delle domande a risposta multipla, con una sola risposta corretta e 5 possibili opzioni. Mezz'ora prima della fine della lezione, il docente analizzerà la chiarezza e la correttezza delle domande, e richiederà eventuali modifiche. Le domande saranno poi caricate su moodle dal docente e assegnate casualmente la settimana successiva.

Esame: attività facoltativa

L'attività facoltativa consiste in:

Risposte settimanali ai quiz : **Ogni settimana**, il martedì dopo lezione, sulla pagina moodle del corso appariranno dei quiz (**con scadenza di due settimane**) ai quali gli studenti risponderanno da remoto, in autonomia. A settimane alterne, questi quiz saranno preparati dal docente e dagli studenti stessi, secondo le modalità descritte sotto;

Formulazione delle domande : ogni due settimane, gli studenti lavoreranno in classe in gruppo per formulare delle domande a risposta multipla, con una sola risposta corretta e 5 possibili opzioni. Mezz'ora prima della fine della lezione, il docente analizzerà la chiarezza e la correttezza delle domande, e richiederà eventuali modifiche. Le domande saranno poi caricate su moodle dal docente e assegnate casualmente la settimana successiva.

Esame: attività facoltativa

Sett.	Lezioni			Quiz su Moodle da
1	22/09	Sciopero	(da recuperare)	Docente
	23/09	8:30-11:30	Lezione	
2	29/09	14:30-16:00	Lezione	Docente
	30/09	8:30-10:00	Lezione	
	30/09	10:00-11:30	Attività di gruppo	
3	06/10	14:30-16:00	Lezione	Studenti!
	07/10	8:30-11:30	Lezione	
	13/10	14:30-16:00	Lezione	
4	14/10	8:30-10:00	Lezione	Docente
	14/10	10:00-11:30	Attività di gruppo	

Esame: attività facoltativa

Sett.	Lezioni			Quiz su Moodle da
5	20/10	14:30-16:00	Lezione	Studenti!
	21/10	8:30-11:30	Lezione	
6	27/10	14:30-16:00	Lezione	Docente
	28/10	8:30-10:00	Lezione	
	28/10	10:00-11:30	Attività di gruppo	
7	03/11	14:30-16:00	Lezione	Studenti!
	04/11	8:30-11:30	Lezione	
8	10/11	14:30-16:00	Lezione	Docente
	11/11	8:30-10:00	Lezione	
	11/11	10:00-11:30	Attività di gruppo	

Esame: attività facoltativa

Sett.	Lezioni			Quiz su Moodle da
9	17/11	14:30-16:00	Lezione	Studenti!
	18/11	8:30-11:30	Lezione	
10	24/11	14:30-16:00	Lezione	Docente
	25/11	8:30-10:00	Lezione	
	25/11	10:00-11:30	Attività di gruppo	
11	01/12	14:30-16:00	Lezione	Studenti!
	02/12	8:30-11:30	Lezione	
12	08/12	Festività		Docente
	09/12	8:30-10:00	Lezione	
	09/12	10:00-11:30	Attività di gruppo	

Esame: attività facoltativa

Sett.	Lezioni	Quiz su Moodle da
13	15/12 14:30-16:00 Lezione	Studenti!
	16/12 8:30-11:30 Lezione	
-	Vacanze di Natale	Docente (scadenza posticipata)

Punteggio: ogni settimana i quiz su Moodle avranno un punteggio massimo di 2 punti. Il punteggio finale di ogni singolo studente sarà calcolato così:

$$\sum_{i=1}^{14} P_i + \sum_{j=1}^6 5 * I_j * V_j$$

dove:

$0 \leq P_i \leq 2$ è il punteggio ottenuto con il quiz dell' i – esima settimana

$$I_j = \begin{cases} 0 & \text{se la } j\text{ – esima domanda formulata non è chiara o corretta} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$0 \leq V_j \leq 1$ è la proporzione di studenti che hanno sbagliato la j – esima domanda formulata

I primi tre classificati vinceranno un gadget **bellissimo** scelto dal docente, oltre che gloria imperitura!

Per ottenere un punto extra all'esame invece, basta partecipare ad almeno 4 attività di gruppo e rispondere (anche in maniera errata) ad almeno il 90% dei quiz su moodle.

Questo corso è un modulo di un corso più grande, per un totale di 12 crediti. Il voto finale sarà calcolato come media dei due voti parziali.

- Manterrò i voti parziali fino a che posso (cioè fino a che il corso non cambia, e fino a che io sarò il titolare);
- Se si rifiuta il voto ad un appello, mi aspetto che venga ritentato l'esame di **almeno uno** dei due moduli;
- Il punto extra dell'attività facoltativa, se ottenuto, **non scade**.

Ciò che mi rende felice
è vedervi sbagliare

Il forum è sulla pagina Moodle del corso, usatelo!

- Vi permette di avere tutte le domande e i dubbi raccolti in un'unico posto, comodo per studiare!
- Vi permette di sviluppare dubbi! Leggendo una domanda potreste capire di non aver capito qualcosa.
- Fa partire discussioni fra voi studenti, spesso più efficaci dell'interazione docente-studente
- Alla fine controllo sempre che ci sia una risposta corretta.

Durante il corso, individueremo **due** slot da 1,5 ore ciascuno in cui risponderò ai vostri **dubbi sul materiale e sugli esercizi**.

Sceghlieremo degli orari i più compatibili con i vostri impegni. Vi darò più dettagli più avanti.

Nuovo modello didattico

Questo è un corso sperimentale, in cui in vista dell'AA 2027/28 1 CFU corrisponde a:

- 25 ore di lavoro (come sempre);
- 8 ore di lezione frontale (invece di 10);
- 2 ore di impegno individuale assistito (attività di gruppo, sessioni di Q&A);
- 15 ore di studio individuale.



Le lezioni frontali (NON le attività di gruppo) e le sessioni di Q&A saranno offerte anche in [streaming](#) e [registrate](#).

Le [slide](#) saranno fornite sia **prima** che **dopo** la lezione (quindi con i gli scarabocchi del docente sopra).

Cerco di avere delle slide chiare, quindi [slide + videoregistrazioni](#) devono essere il vostro [materiale di riferimento su cui studiare per l'esame](#).

Non è richiesto leggere nessun libro di testo in particolare. I seguenti libri sono libri che conosco e che a me piacciono, il consiglio per approfondimenti personali o per cercare di capire meglio qualcosa non troppo chiaro nelle mie spiegazioni (nel qual caso, comunque, chiedete!!!)

- R. Durrett, "Essentials of Stochastic Processes", Springer, 2021 (online available).
- D. A. Levin, Y. Peres, E. L. Wilmer, "Markov chains and mixing times", AMS, 2008 (online available).
- S.M. Ross, "Introduction to Probability Models", Elsevier, 2010.
- J.M. Steele "Stochastic Calculus and Financial Applications", Springer, 2000.

Survey iniziale

VENERDI

Per favore compilate entro ~~domani~~ sera il survey su Moodle, così che possa avere un'idea della composizione studentesca e possa iniziare a formare i gruppi.

Some technical definition

$\mathcal{A} = \{ \dots \}$ INSIEME DI
SOTTOINSIEMI DI S

$$1) S \in \mathcal{A}$$

$$2) E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$$

$$3) E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$$

Recall what a σ -algebra is...

NON TUTTI I SOTTOINSIEMI DI S
SI POSSONO MISURARE (VITALI)

Some technical definition

IN PROBABILITA'

$P(E)$ LA CONSIDERIAMO
SOLO SE $E \in \mathcal{A}$

Why do we need σ -algebras?

Some technical definition

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (Z, \mathcal{B})$$

X v.a. se

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Recall what random variables are...

σ -ALGEBRA
GENERATA DA X

"TUTTI GLI EVENTI
INTERESSANTI LEGATI
A X "

$\sigma(X)$ E' LA PIU' PICCOLA
 σ -ALGEBRA DI Ω t.c.

$$X : (\Omega, \sigma(X)) \rightarrow (Z, \mathcal{B})$$

E' UNA V.A.

Some technical definition

A stochastic process is a random variable with infinite dimension: $\{X_i\}_{i \in I}$ is a random variable with image in

$$F = \{f : I \rightarrow S\}$$



$$\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$$

$$X(\omega) : [0, +\infty) \longrightarrow \{W, NW\}$$

Some technical definition

Definition

Let \mathcal{F} be a σ -algebra. A *filtration* is a sequence $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ of σ -algebras such that

- ① $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$ for all $i \in I$;
- ② $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ for all $i, j \in I$ with $i < j$.

AGGIUNGO EVENTI DI CUI
POSSO CALCOLARE LA PROB.



AGGIUNGO INFORMAZIONE
DA POTER STUDIARE

Definition

A stochastic process $\{X_i\}_{i \in I}$ is *adapted* to a filtration $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ if X_i is \mathcal{F}_i -measurable for all $i \in I$.

In practice, \mathcal{F}_i contains all the possible evolutions of the process up to time i (it can contain more info).

Some technical definition

Definition

Let \mathcal{F} be a σ -algebra. A *filtration* is a sequence $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ of σ -algebras such that

- 1 $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$ for all $i \in I$;
- 2 $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ for all $i, j \in I$ with $i < j$.

Definition

A stochastic process $\{X_i\}_{i \in I}$ is *adapted* to a filtration $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ if X_i is \mathcal{F}_i -measurable for all $i \in I$.

$$(\delta(X_i) \subseteq \mathcal{F}_i)$$

INFORMATION ON

In practice, \mathcal{F}_i contains all the possible evolutions of the process up to time i (it can contain more info).

\mathcal{F}_i CONTIENE INFO SU X_i

$\mathcal{F}_i \supset \mathcal{F}_j \quad j < i \quad \Rightarrow \quad \text{CONTIENE INFO SU } X_j \text{ CON } j < i$

Example

For $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ let $Y_i \sim \text{Uniform}(0, 1)$, and

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{if } Y_i < 0.5 \\ 1 & \text{if } Y_i \geq 0.5 \end{cases}$$

Let $\mathcal{F}_i = \sigma\{Y_j : j \leq i\}$. Is $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ adapted to $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^\infty$?

X_i \mathcal{F}_i -MEASURABLE?

$$\sigma(X_i) = \sigma(\delta(Y_i)) \subseteq \sigma(Y_i) \subseteq \mathcal{F}_i \quad \checkmark$$

$\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^\infty$ NON E' LA FILTRAZIONE NATURALE DI

$\{X_i\}_{i=1}^\infty$ PERCHE' $\mathcal{F}_i \not\supseteq \sigma(X_j : j \leq i)$

$\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^\infty$ FILTRAZIONE?
 $\mathcal{F} = \sigma(Y_j : 1 \leq j)$
 $\mathcal{F}_i = \sigma(Y_j : 1 \leq j \leq i)$
 $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$
 $\mathcal{F}_i = \sigma(Y_j : 1 \leq j \leq i)$
 $\subseteq \sigma(Y_j : 1 \leq j \leq k)$
 $= \mathcal{F}_k$
 FILTRAZIONE \checkmark

Some technical definition

Definition

Let $\{X_i\}_{i \in I}$ be a stochastic process. Its *natural filtration* is given by

$$\mathcal{F}_i = \sigma\{X_j : j \leq i\}.$$

By definition, a stochastic process is always adapted to its natural filtration.

$$\sigma(X_i) \subset \mathcal{F}_i$$

Counting processes

If we count how many times something happened up to a certain time, then we have a counting process!

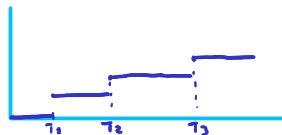
For example:

- X_t is the number of waves hitting a rock by time t ;
- X_t is the number of customers entering a shop by time t ;
- X_t is the number of times a machine has been repaired by time t ;

TEMPO DISCRETO



TEMPO CONTINUO



Counting processes

Formal definition:

Definition

A counting process is a discrete stochastic process with state space $\{0, 1, 2, \dots\}$ that can only increase by one and can never decrease.

Strong law of large numbers

Theorem (Strong law of large numbers)

Let $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a collection of i.i.d. random variables for which $E[X_1]$ exists (it could be infinite). Then, with probability 1 we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = E[X_1]$$

Extremely useful! For example in statistics to estimate the proportion of people voting for a given candidate we can take the average of n trials.

Strong law of large numbers

Theorem (Strong law of large numbers)

Let $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a collection of i.i.d. random variables for which $E[X_1]$ exists (it could be infinite). Then, with probability 1 we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = E[X_1]$$

Extremely useful! For example in statistics to estimate the proportion^p of people voting for a given candidate we can take the average of n trials.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ VOTA PER A} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \sim \text{Bern}(p) \quad p = E[X_i]$$
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = E[X_i] = p$$

Strong law of large numbers and stochastic processes

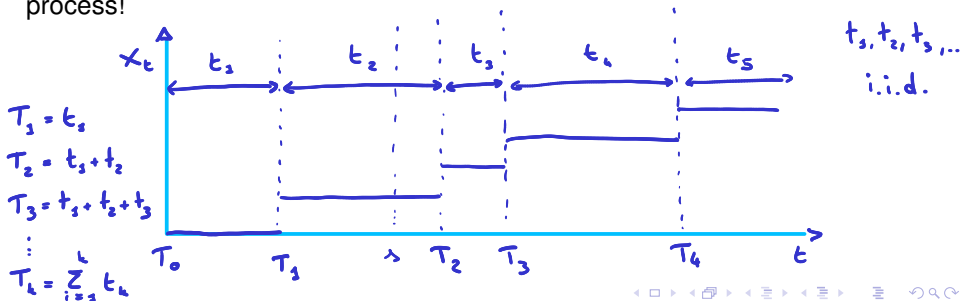
Independence is important to derive the law of large numbers, but a sequence of independent random variables is a boring stochastic process...

Sweet spot! We can consider **independent** inter-arrival times in a counting process!

Strong law of large numbers and stochastic processes

Independence is important to derive the law of large numbers, but a sequence of independent random variables is a boring stochastic process...

Sweet spot! We can consider **independent** inter-arrival times in a counting process!



Definition

A *renewal process* is a counting process such that the times in between consecutive arrivals are a sequence of i.i.d. random variables.

Formally, the arrival times are defined by $T_0 = 0$ and:

$$T_\ell = \inf\{i \in I : X_i = \ell\} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \dots$$

The inter-arrival times are defined by:

$$t_{\ell+1} = T_{\ell+1} - T_\ell$$

for all $\ell \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Renewal processes

Theorem

Let $\{X_i\}_{i \in I}$ be a renewal process with inter-arrival times $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, such that $0 < E[t_1]$ and $P(t_1 < \infty) = 1$. Then, with probability 1

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{X_i}{i} \right)}_{\substack{\text{FREQUENZA DI ARRIVI}}} = \frac{1}{E[t_1]}. \quad (= 0 \text{ se } E[t_1] = \infty)$$

Why?

FREQUENZA DI ARRIVI

Renewal processes

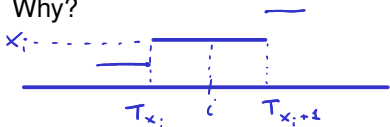
Theorem

Let $\{X_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ be a renewal process with inter-arrival times $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, such that $0 < E[t_1]$ and $P(t_1 < \infty) = 1$. Then, with probability 1

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{X_i}{i} = \frac{1}{E[t_1]}.$$



Why?



SINCE $E[t_1] > 0$, $X_i < \infty$ A.S.

AND $T_{x_i} \leq i < T_{x_i+1}$

$$\sum_{j=1}^{x_i} t_j \leq i < \sum_{j=1}^{x_i+1} t_j$$

DIVIDENDO TUTTO PER X_i

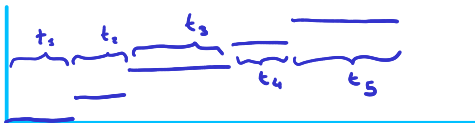
$$\frac{\sum_{j=1}^{x_i} t_j}{X_i} \leq \frac{i}{X_i} \leq \frac{\sum_{j=1}^{x_i+1} t_j}{X_i+1} \cdot \frac{X_i+1}{X_i}$$

$\downarrow \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \text{A.S.}$ $E[t_1]$
 $\downarrow \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \text{A.S.}$ $E[t_1]$
 $\downarrow \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \text{A.S.}$ 1

PERCHÉ $P(t_1 < \infty) = 1 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow +\infty} X_i = \infty$ A.S.

QUINDI $\frac{i}{X_i} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \text{A.S.} E[t_1] \Rightarrow \frac{X_i}{i} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \text{A.S.} \frac{1}{E[t_1]}$

Application



$$E[t_1] = 5 \text{ s}$$

Assume that the times between requests to a server are i.i.d. with mean $\mu = 5$ seconds. After a day, how many requests per second have been received?

$$\frac{X_{60 \cdot 60 \cdot 24}}{60 \cdot 60 \cdot 24} \approx \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{X_i}{i} = \frac{1}{E[t_1]} = \frac{1}{5} \text{ s}^{-1}$$

Renewal-reward processes

To extend the possible applications, we assume that in each inter-arrival interval $[T_\ell, T_{\ell+1})$ a reward $r_{\ell+1}$ is given.

Example: if the factory machine does not break for at least one month, the technician receives a bonus of 5 euros.

In the long run, how much does the technician gain in bonuses per week?

Renewal-reward processes

To extend the possible applications, we assume that in each inter-arrival interval $[T_\ell, T_{\ell+1})$ a reward $r_{\ell+1}$ is given.

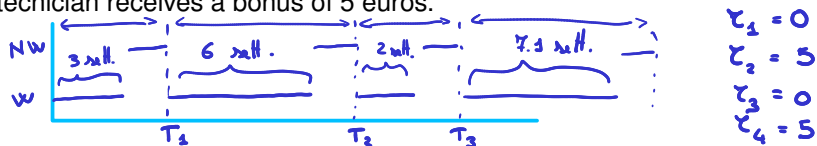
Example: if the factory machine does not break for at least one month, the technician receives a bonus of 5 euros.

In the long run, how much does the technician gain in bonuses per week?

Renewal-reward processes

To extend the possible applications, we assume that in each inter-arrival interval $[T_\ell, T_{\ell+1})$ a reward $r_{\ell+1}$ is given.

Example: if the factory machine does not break for at least one month, the technician receives a bonus of 5 euros.



In the long run, how much does the technician gain in bonuses per week?

$$R(t) = \sum_{i=1}^{X_t} \zeta_i$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R(t)}{t}$$

Renewal-reward processes

Rewards can be:

- discrete (ex. fixed amounts of 5 euros);
- continuous (ex. the time the machine works);
- negative (ex. the repair may have a cost of 10 euros).

Renewal-reward processes

Rewards can be:

- discrete (ex. fixed amounts of 5 euros);
- continuous (ex. the time the machine works);
- negative (ex. the repair may have a cost of 10 euros).

Renewal-reward processes

Rewards can be:

- discrete (ex. fixed amounts of 5 euros);
- continuous (ex. the time the machine works);
- negative (ex. the repair may have a cost of 10 euros).

Renewal-reward processes

Rewards can be:

- discrete (ex. fixed amounts of 5 euros);
- continuous (ex. the time the machine works);
- negative (ex. the repair may have a cost of 10 euros).

Renewal-reward processes

Definition

Let $\{X_i\}_{i \in I}$ be a renewal process with inter-arrival times $\{t_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ and rewards $\{r_\ell\}_{\ell=1}^\infty$. If the random variables $\{(t_\ell, r_\ell)\}_{\ell=1}^\infty$ are i.i.d. then we have a *renewal-reward process*.

Theorem

Let $\{X_i\}_{i \in I}$ be a renewal process with $E[t_1] > 0$, and $P(t_1 < \infty) = 1$. Then, with probability 1,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{R_i}{i} = \frac{E[r_1]}{E[t_1]},$$

where

$$R_i = \sum_{\ell=1}^{X_i} r_\ell$$

is the cumulative reward up to time i .

Renewal-reward processes

Definition

Let $\{X_i\}_{i \in I}$ be a renewal process with inter-arrival times $\{t_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ and rewards $\{r_\ell\}_{\ell=1}^\infty$. If the random variables $\{(t_\ell, r_\ell)\}_{\ell=1}^\infty$ are i.i.d. then we have a *renewal-reward process*.

Theorem

Let $\{X_i\}_{i \in I}$ be a renewal process with $E[t_1] > 0$, and $P(t_1 < \infty) = 1$. Then, with probability 1,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{R_i}{i} = \frac{E[r_1]}{E[t_1]},$$

where

$$R_i = \sum_{\ell=1}^{X_i} r_\ell$$

is the cumulative reward up to time i .

Handwritten notes explaining the theorem:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{R_i}{i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\ell=1}^{X_i} r_\ell}{X_i} = \frac{E[r_1]}{E[t_1]}$$

Assume a machine create a revenue of 10 euros per day when it works, repairing it costs 50 euros of transportation plus a repairing cost of approximately 40 euros per day. The machine does not break down for times with mean 30 days and repairing it takes on average 5 days. Assume that when the machine is repaired, it can be considered as new.

After 10 years of usage, how much revenue per day has the machine produced?

In the previous question, how does the answer change if repair times are geometric random variables, and times until break-downs are Poisson?