MS 24/09/25

II° parte: Bayes e dintorni

Forma elementare del teorema di Bayes:

se $H_1 \dots H_d$ sono $\overbrace{\text{ipotesi di}}^{\text{indicatori di}}$ interesse sullo stato del mondo

e

E = indicatore di un evento, una evidenza empirica

e se conosciamo

$$\mathbb{P}(H_i) = \mathbb{P}(H_i = 1) = \qquad i = 1 \dots d$$

= probabilità dell'ipotesi i-esima

e

$\mathbb{P}(E=1 \mid H_i=1)$ = probabilità dell'evento E data la ipotesi H_i

allora

$$\mathbb{P}(H_i = 1 \mid E = 1) = \frac{\mathbb{P}(H_i = 1)\, \mathbb{P}(E = 1 \mid H_i = 1)}{\sum_{k=1}^{d} \mathbb{P}(H_k = 1)\, \mathbb{P}(E = 1 \mid H_k = 1)}$$

"aggiorniamo" le probabilità a priori $\mathbb{P}(H_i = 1)$ nelle probabilità a posteriori $\mathbb{P}(H_i = 1 \mid E = 1)$ avendo osservato l'evidenza empirica $E = 1$.

Esercizio preso dal foglio di esercizi odierno.
Contesto: screening epidemiologico di una popolazione, quindi $P(D=1)$ e' la prevalenza

1. Consider a binary screening situation formulated in terms of the following random variables:

- D = indicator whether a randomly sampled person is diseased
- T = indicator whether a single test given to the person is positive
- T_1, T_2 = similar indicators for two conditionally independent tests

and compute the following probabilities.

(a) Consider a single test. Assuming:
   - P(D = 1) = 0.01 (prevalence), = prevalenza = proporzione di malati (D) nella popolazione
   - P(T = 1|D = 1) = 0.90 (sensitivity) sensibilità
   - and P(T = 0|D = 0) = 0.95 (specificity), specificità

   compute

$$P(D = 1|T = 1) \quad \text{(positive predictive value)}$$

I test diagnostici non sono perfetti:

$$P(T=1 \mid D=1) \leq 100\%$$

$$P(T=0 \mid D=0) \leq 100\%$$

per quantificare

$$P(D=1 \mid T=1)$$

si usa il teorema di Bayes con

H_1 = la persona e' malata $(D=1)$

H_2 = la persona non e' malata $(D=0)$

$E=1$, cioè il fatto che la persona sia malata, è l'evidenza

$P(H=1) = P(D=1)$ = prevalenza = probabilità a priori

USATE BAYES

per calcolare la probabilità a posteriori

$P(D=1 \mid T=1)$