

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Matematica per l'Ingegneria

Tesi di Laurea

Stima delle Copule in Finanza: Analisi sul DAX



Relatori

Franco Pellerey

firma dei relatori

.....

Candidato

Andrea Rostagno

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2024-2025

Sommario

Questa tesi esplora il ruolo delle copule nella modellazione della dipendenza tra variabili casuali, con particolare attenzione alle applicazioni in finanza. Dopo un'introduzione ai concetti fondamentali delle copule e alla loro teoria matematica, vengono analizzate diverse famiglie di copule, le loro proprietà e il loro utilizzo nella gestione del rischio finanziario. Successivamente, si discutono i metodi di stima dei parametri delle copule, con un focus su metodi classici e bayesiani, e si presenta un'implementazione pratica sui dati finanziari del DAX. Infine, vengono confrontati i risultati ottenuti con diverse copule e si discutono le implicazioni per la gestione del rischio e l'ottimizzazione di portafoglio.

Ringraziamenti

Da scrivere

Indice

Elenco delle tabelle	5
Elenco delle figure	6
I Fondamenti delle Copule	7
1 Introduzione	9
1.1 Definizione e motivazione dello studio	9
2 Fondamenti Matematici delle Copule	11
2.1 Definizione di copula e Teorema di Sklar	11
2.1.1 Definizione di Copula	11
2.1.2 Teorema di Sklar	12
2.2 Famiglie principali di copule (Gaussiane, t-Student, Archimedee)	12
2.2.1 Famiglie di copule	12
2.2.2 Proprietà delle copule	13
II Applicazioni Finanziarie delle Copule	15
3 Copule e Gestione del Rischio Finanziario	17
3.1 Superamento della correlazione lineare nelle distribuzioni non normali . . .	17
3.2 Dipendenza di coda e impatti su Value-at-Risk (VaR) e Expected Shortfall	17
3.3 Pricing di derivati multivariati con copule	17

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

Parte I

Fondamenti delle Copule

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Definizione e motivazione dello studio

Le copule sono strumenti matematici che permettono di modellare e stimare la dipendenza tra diverse variabili casuali. Sono particolarmente utili in finanza, dove la dipendenza tra i rendimenti degli asset, i tassi di interesse e i tempi di default sono fattori cruciali per la valutazione del rischio e la determinazione del prezzo di strumenti finanziari complessi. L'importanza delle copule risiede nella loro capacità di separare la modellazione delle distribuzioni marginali delle singole variabili dalla modellazione della loro struttura di dipendenza.

In altre parole, invece di dover specificare una funzione di distribuzione congiunta per tutte le variabili, è possibile utilizzare una copula per combinare le distribuzioni marginali di ciascuna variabile in una distribuzione congiunta che rifletta la dipendenza desiderata. Questo approccio offre grande flessibilità nella modellazione, poiché consente di scegliere le distribuzioni marginali e la copula in modo indipendente, a seconda delle caratteristiche specifiche dei dati e del problema in esame.

Ad esempio, si potrebbe utilizzare una distribuzione t di Student per modellare i rendimenti degli indici azionari, che spesso presentano code più spesse rispetto alla distribuzione normale, e quindi utilizzare una copula di Gumbel per rappresentare la dipendenza asimmetrica tra i mercati, con una maggiore probabilità di movimenti congiunti al rialzo rispetto a quelli al ribasso.

La teoria delle copule si basa sul teorema di Sklar, che afferma che ogni funzione di distribuzione congiunta può essere espressa in termini di una copula e delle distribuzioni marginali delle variabili. Il teorema di Sklar garantisce l'esistenza e l'unicità della copula nel caso di variabili casuali continue.

Esistono diverse famiglie di copule, ciascuna con proprietà specifiche in termini di dipendenza di coda, simmetria e altre caratteristiche. Alcune delle famiglie di copule più utilizzate in finanza includono la copula gaussiana, la copula t di Student, le copule Archimedee (come la copula di Gumbel, la copula di Clayton e la copula di Frank) e la copula di Marshall-Olkin. La scelta della copula più adatta dipende dalla natura del problema e dalle caratteristiche della dipendenza che si desidera modellare.

Ad esempio, la copula *t* di Student é spesso preferita alla copula gaussiana quando si vogliono modellare dipendenze di coda più elevate, mentre le copule Archimedee consentono di modellare diversi tipi di dipendenza asimmetrica.

Le copule trovano applicazione in diversi ambiti della finanza, tra cui:

- **Pricing di opzioni multivariate e altri derivati:** le copule possono essere utilizzate per modellare la dipendenza tra i sottostanti di un'opzione basket, un'opzione rainbow o altri derivati multi-asset, consentendo una valutazione più accurata del prezzo di questi strumenti.
- **Gestione del rischio:** le copule sono ampiamente utilizzate nella modellazione del rischio di credito, dove consentono di stimare la probabilità di default congiunta di diverse attività o controparti. Le copule sono anche utilizzate nella stima del Value at Risk (VaR) di portafogli contenenti attività con distribuzioni non normali e dipendenze complesse.
- **Calibrazione e simulazione:** la flessibilità delle copule consente di calibrare i modelli ai dati di mercato in modo efficiente e di simulare scenari di mercato realistici che tengano conto della dipendenza tra le variabili.

In sintesi, le copule rappresentano uno strumento matematico versatile e potente per la modellazione della dipendenza in finanza, con un ampio spettro di applicazioni pratiche nella valutazione del rischio, nel pricing di derivati e nella gestione del portafogli.

Capitolo 2

Fondamenti Matematici delle Copule

2.1 Definizione di copula e Teorema di Sklar

Le copule sono strumenti matematici che permettono di modellare e rappresentare la dipendenza tra variabili casuali. A differenza di misure di dipendenza tradizionali come la correlazione lineare, le copule catturano la dipendenza in modo più completo, includendo la dipendenza nelle code delle distribuzioni e non limitandosi a relazioni lineari.

Ecco una spiegazione delle formule e delle proprietà chiave:

2.1.1 Definizione di Copula

Una d -copula è una funzione $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$, dove $d \geq 2$ (numero di variabili; nelle proprietà seguenti consideriamo le copule bivariate), che soddisfa le seguenti proprietà:

1. **Groundedness:**

$$C(u,0) = C(0,v) = 0, \quad \forall u, v \in [0,1]^2$$

Ciò significa che la copula è zero se una delle variabili è zero.

2. **Marginalità:**

$$C(u,1) = u, \quad C(1,v) = v, \quad \forall u, v \in [0,1]^2$$

Questa proprietà assicura che la copula sia coerente con le distribuzioni marginali, ovvero che quando una delle variabili assume il suo valore massimo, la copula coincida con la funzione di ripartizione dell'altra variabile.

3. **2-crescita (o 2-increasing):**

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0, \quad \forall u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2 \in [0,1]^2$$

Questa proprietà assicura che la copula sia non decrescente in entrambe le variabili, il che è necessario affinché la copula rappresenti una dipendenza positiva o negativa tra le variabili.

2.1.2 Teorema di Sklar

Questo teorema, centrale nella teoria delle copule, stabilisce un legame tra le copule e le funzioni di distribuzione congiunta.

In breve, il teorema afferma che: Data una funzione di distribuzione congiunta $F(x, y)$ con marginali $F_1(x)$ e $F_2(y)$, esiste una copula C tale che:

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$$

Inoltre, se $F_1(x)$ e $F_2(y)$ sono continue, allora la copula C è unica.

Conseguenze del Teorema di Sklar

- **Costruzione di modelli di dipendenza:** Permette di costruire una funzione di distribuzione congiunta a partire da distribuzioni marginali arbitrarie e da una copula che ne modella la dipendenza. Questa proprietà è particolarmente utile per modellare dati reali, dove spesso si conoscono le distribuzioni marginali ma non la struttura di dipendenza.
- **Separazione tra marginali e dipendenza:** Mette in luce come la struttura di dipendenza tra le variabili sia completamente catturata dalla copula, indipendentemente dalle distribuzioni marginali.

2.2 Famiglie principali di copule (Gaussiane, t-Student, Archimedee)

2.2.1 Famiglie di copule

Esistono diverse famiglie di copule, classificate in base alla loro struttura o ai metodi utilizzati per la loro costruzione. Di seguito, vengono elencate alcune delle principali famiglie:

- **Fréchet-Hoeffding:** Questa famiglia include le copule che rappresentano i limiti inferiore (W) e superiore (M) della dipendenza tra due variabili casuali. La copula W rappresenta la perfetta dipendenza negativa, mentre la copula M rappresenta la perfetta dipendenza positiva.
- **Cuadras-Augé:** Questa famiglia di copule è costruita come una media geometrica ponderata delle copule M e P , dove P rappresenta l'indipendenza tra le variabili.
- **Marshall-Olkin:** Questa famiglia di copule è spesso utilizzata per modellare la dipendenza tra variabili casuali che rappresentano tempi di vita.
- **Archimedee:** Queste copule sono generate da una funzione detta "generatore". Le copule Archimedee sono popolari per la loro flessibilità e la relativa facilità di utilizzo.

2.2.2 Proprietà delle copule

Le copule possiedono diverse proprietà che le rendono utili per la modellazione della dipendenza. Alcune di queste proprietà sono:

- **Invarianza rispetto a trasformazioni monotone crescenti:** Le copule sono invarianti rispetto a trasformazioni strettamente crescenti delle variabili marginali.
- **Misure di concordanza:** Diverse misure di concordanza come la rho di Spearman e la tau di Kendall possono essere espresse in termini di copule.
- **Dipendenza di coda:** Le copule possono catturare la dipendenza tra le code delle distribuzioni marginali, ovvero la tendenza delle variabili ad assumere valori estremi congiuntamente.

Possiamo quindi affermare che le copule offrono un approccio potente e flessibile per la modellazione della dipendenza tra variabili casuali. La loro capacità di separare la struttura di dipendenza dalle distribuzioni marginali, la loro invarianza rispetto a trasformazioni monotone crescenti e la loro capacità di catturare la dipendenza di coda le rendono strumenti preziosi in molte applicazioni pratiche.

Parte II

**Applicazioni Finanziarie delle
Copule**

Capitolo 3

Copule e Gestione del Rischio Finanziario

- 3.1 Superamento della correlazione lineare nelle distribuzioni non normali
- 3.2 Dipendenza di coda e impatti su Value-at-Risk (VaR) e Expected Shortfall
- 3.3 Pricing di derivati multivariati con copule

Bibliografia

G. Galilei. *Nuovi studii sugli astri medicei*. Manuzio, 1612.

Duane J.T. Learning curve approach to reliability monitoring. *IEEE Transactions on Aerospace*, 2:563–566, 1964.

E. Torricelli. *La pressione barometrica*. Il Porcellino, 1606.

E. Torricelli and A. Vasari. Delle misure. *Atti Nuovo Cimento*, III(2):27–31, 1607.