

第 3 章课后习题参考

- 第 1 题：将 Markov 不等式或 Chebyshev 不等式变形可证。
- 第 2 题：将 Chebyshev 不等式变形可证。
- 第 3 题：略
- 第 4 题：（1）运用课本中或 ppt 里类似的方法可证；（2）该证明有两种思路，第一种是类似于下界不等式的泰勒级数展开，另一种是 ppt 中提示的函数逼近。
- 第 6 题：

首先将不等式变向，得

$$P(|\bar{X} - p| \leq \epsilon p) \geq 1 - \delta \Leftrightarrow P(|\bar{X} - p| > \epsilon p) < \delta$$

然后得到

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - p| > \epsilon p) &= P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - np\right| > \epsilon np\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i < (1 - \epsilon)np\right) + P\left(\sum_{i=1}^n X_i > (1 + \epsilon)np\right) \end{aligned}$$

通过 Chernoff 不等式得到

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i < (1 - \epsilon)np\right) < \exp\left(\frac{-np\epsilon^2}{2}\right)$$

和

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i > (1 + \epsilon)np\right) < \exp\left(\frac{-np\epsilon^2}{3}\right)$$

所以，我们得到题目中不等式成立的条件是

$$2 \exp\left(\frac{-np\epsilon^2}{3}\right) < \delta \Rightarrow \exp\left(\frac{-np\epsilon^2}{3}\right) < \delta/2 \Rightarrow \frac{np\epsilon^2}{3} > \ln(2/\delta) \Rightarrow n > \frac{3 \ln(2/\delta)}{p\epsilon^2}$$