Week1 One-way ANOVA

背景描述

为了调查吃巧克力对心血管健康的影响，实验由三种类型的巧克力组成：

100g的黑巧克力，含有200mg全脂牛奶的100g黑巧克力和200g的牛奶巧克力。

12个实验对象：7女5男。在不同的天数里，每个实验对象将吃一种类型的巧克力，一个小时后测量他们血浆的总抗氧能力。

这是一个因子水平数 a = 3 和重复次数 m = 12 的单因子实验

数据描述

数据集包含巧克力的种类，血浆浓度的数据

In [1]:
```
import pandas as pd
df=pd.read_csv('C:\\Users\\asus\\Desktop\\HW1\\Project1.csv')
df
```

Out[1]:

	Obs	Chocolate	Capacity
0	1	1	118.8
1	2	1	122.6
2	3	1	115.6
3	4	1	113.6
4	5	1	119.5
5	6	1	115.9
6	7	1	115.8
7	8	1	115.1
8	9	1	116.9
9	10	1	115.4
10	11	1	115.6
11	12	1	107.9
12	1	2	105.4
13	2	2	101.1
14	3	2	102.7
15	4	2	97.1
16	5	2	101.9
17	6	2	98.9
18	7	2	100.0
19	8	2	99.8

	Obs	Chocolate	Capacity
20	9	2	102.6
21	10	2	100.9
22	11	2	104.5
23	12	2	93.5
24	1	3	102.1
25	2	3	105.8
26	3	3	99.6
27	4	3	102.7
28	5	3	98.8
29	6	3	100.9
30	7	3	102.8
31	8	3	98.7
32	9	3	94.7
33	10	3	97.8
34	11	3	99.7
35	12	3	98.6

变量名	变量含义	变量类型	变量取值范围
（自变量）Chocolate	巧克力类型	categorical variable	[1, 2, 3]
（因变量）Capacity	血浆浓度	continuous variable	$\mathbb{R}$

问题

注：这里使用 $\alpha=0.05$ 的显著性水平

1. 试用两样本t检验两两比较 3 种巧克力对心血管健康的影响是否存在差异.
2. 试使用One-way ANOVA判断食用的 3 种巧克力对心血管健康的影响是否有差异.
3. 试判断该实验用One-way ANOVA模型是否恰当.
4. 估计食用这 3 种巧克力 1h 后血浆的总抗氧能力均值和误差的方差.

解决方案

In [2]:
```
#导入所需库
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy.stats as stats
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from statsmodels.formula.api import ols
from statsmodels.stats.anova import anova_lm
from scipy.stats import f
from scipy.stats import t

#显著性水平
alpha = 0.05
```

```
#因子
a = 3
#水平
m = 12

#提取所需要的列
df = df[['Chocolate','Capacity']]
#构建根据不同种类区分的group
data = df.values
Group = [data[data[:,0] == atype,1] for atype in [1, 2, 3]]
```

Q1: 试用两样本t检验两两比较 3 种巧克力对心血管健康的影响是否存在差异.

两种方法，拒绝域法和p值法

1. 类型 1 , 2 进行两样本t检验

In [3]:
```
# 得到t值和p值
t1, p1 = stats.ttest_ind(Group[0], Group[1])

# 拒绝域法
t_val = t.ppf(1 - alpha / 2, 2 * (m - 1))#自由度为2*(m-1)的t分布的alpha分位数
if abs(t1) > abs(t_val):
    print('t1 =', t1,'  t =', t_val , ', 拒绝 H0.')
else:
    print('接受 H0.')

# p值法
if p1 < alpha:
    print('p1 =',p1, '< 0.05, 拒绝 H0')
else:
    print('接受 H0')
```

```
t1 = 11.10565260090929   t = 2.0738730679040147 , 拒绝 H0.
p1 = 1.7330939682091152e-10 < 0.05, 拒绝 H0
```

故拒绝原假设，认为类型1与类型2巧克力对心血管健康的影响存在显著差异

1. 类型 2 , 3 进行两样本t检验

In [4]:
```
# 得到t值和p值
t2, p2 = stats.ttest_ind(Group[1], Group[2])

# 拒绝域法
t_val = t.ppf(1 - alpha / 2, 2 * (m - 1))#自由度为2*(m-1)的t分布的alpha分位数
if abs(t2) > abs(t_val):
    print('t2 =', t2,'  t =', t_val , ', 拒绝 H0.')
else:
    print('接受 H0.')

# p值法
if p2 < alpha:
    print('p2 =',p2, '< 0.05, 拒绝 H0')
else:
    print('接受 H0')
```

```
接受 H0.
接受 H0
```

故接受原假设，认为类型2与类型3巧克力对心血管健康的影响不存在差异

1. 类型1， 3进行两样本t检验

In [5]:
```
# 得到t值和p值
t3, p3 = stats.ttest_ind(Group[0], Group[2])

# 拒绝域法
t_val = t.ppf(1 - alpha / 2, 2 * (m - 1))#自由度为2*(m-1)的t分布的alpha分位数
if abs(t3) > abs(t_val):
    print('t3 =', t3,'  t =', t_val , ', 拒绝 H0.')
else:
    print('接受 H0.')

# p值法
if p3 < alpha:
    print('p-value =',p3, '< 0.05, 拒绝 H0')
else:
    print('接受 H0')
```

```
t3 = 12.047774079768462   t = 2.0738730679040147 , 拒绝 H0.
p-value = 3.6833891525708707e-11 < 0.05, 拒绝 H0
```

故拒绝原假设，认为类型1与类型3巧克力对心血管健康的影响存在显著差异

综上，类型2与类型3巧克力对心血管健康的影响不存在差异，类型1与类型3巧克力和类型1与类型2巧克力对心血管健康的影响存在显著差异

Q2: 试使用One-way ANOVA判断食用的 3 种巧克力对心血管健康的影响是否有差异.

检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 $; $H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3$不全相等

两种方法：F统计量法和p值法

In [6]:
```
# 绘制方差分析表
model = ols('Capacity ~ C(Capacity)', df).fit()
anovaResults = round(anova_lm(model), 3)
print('\n方差分析表: \n', anovaResults)

F0, p0 = stats.f_oneway(Group[0], Group[1], Group[2])

# F统计量法:
F = f.ppf(1 - alpha, dfn = a - 1, dfd = a * (m - 1))
if F0 > F:
    print('\n F0 =', F0,'> F(0.05,2,33) =',F, ', 拒绝 H0.')
else:
    print('\接受 H0.')

# p值法:
if p0 < alpha:
    print('\np-value =', p0, '< 0.05, 拒绝 H0.')
else:
    print('\n接受 H0.')
```

```
方差分析表:
                 df   sum_sq  mean_sq             F  PR(>F)
C(Capacity)   32.0  2296.95    71.78  5.530639e+26     0.0
Residual       3.0     0.00     0.00           NaN     NaN

 F0 = 93.57559776071176 > F(0.05,2,33) = 3.2849176510382883 , 拒绝 H0.

p-value = 2.5152590041683006e-14 < 0.05, 拒绝 H0.
```

由方差分析表可知，P值小于 0.05 且F值大于 3.285，故拒绝原假设，即食用的 3 种巧克力对心血管健康的影响存在差异。

Q3: 试判断该实验用One-way ANOVA模型是否恰当.

单因子方差分析的基本假定有3个，分别是：

1.正态性：第i个水平下的数据$y_{i1},y_{i2},...$是来自正态总体$N(\mu{i},\sigma{i}^2)$的一个样本

2.等方差性：a个方差相同

3.独立性：个数据$y{ij}$都相互独立

故要判断该实验用One-way ANOVA模型是否恰当需要进行正态性检验、方差齐性检验和独立性检验

1. 正态性检验

法1： qq图

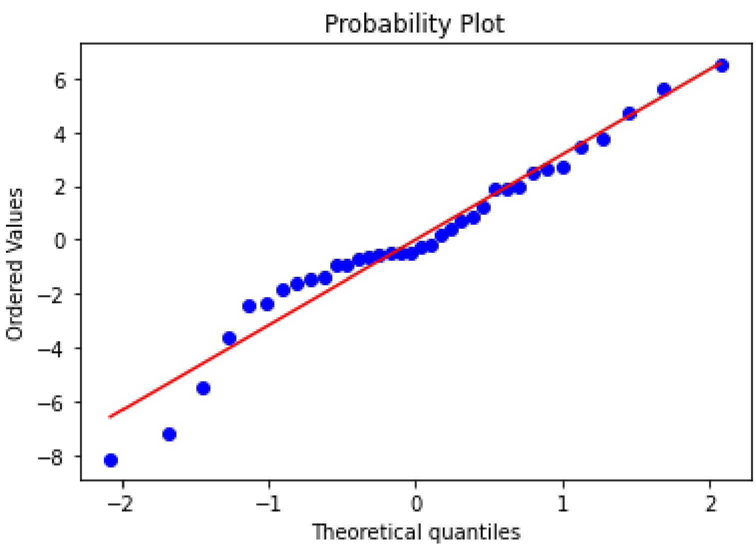
利用qq图（The quantitle-quantile plot），来检验数据分布的相似性。令X轴为正态分布的分位数，Y轴为样本分位数，如果这两者构成的点分布在一条直线上，就证明样本数据与正态分布存在线性相关性，即服从正态分布。

In [7]:
```
# 用qq图进行正态性检验
data_res = data * 1

for k in [1,2,3]:
    groups = data_res[data_res[:,0] == k,1]
    data_res[data_res[:,0] == k,1] = groups - np.mean(groups)

res = data_res[:, 1]

res = res.astype(float) * 1
stats.probplot(res, dist = 'norm', plot = plt)
plt.show()
```



从图中可以看到，整体上误差分布是近似正态的

法2：利用Shapiro-Wilk检验

SW检验有两个基本假设，H0：样本中所有来自总体分布服从正态分布 H1：样本中所有来自总体分布不服从正态分布 利用方法stats.shapiro()检验正态性，输出结果中第一个为统计量，第二个为P值（统计量越接近 1 越表明数据和正态分布拟合的好，P值大于指定的显著性水平，接受原假设，认为样本来自服从正态分布的总体）

In [8]:
```
# 用Shapiro-Wilk检验进行正态性检验
SW, pVal1 = stats.shapiro(res)
```

```
print(SW)
print(pVal1)

if pVal1 > alpha:
    print('\n接受H0')
else:
    print('\np-value < 0.05, 拒绝H0')
```

```
0.9625394940376282
0.2571522891521454

接受H0
```

由上述分析可知，统计量约为 0.96，接近 1；且P值约为 0.26，大于指定的显著性水平 0.05。故认为残差来自服从正态分布的总体。

2. 方差齐性检验

法1： Bartlett检验

Bartlett检验的核心思想是通过求取不同组之间的卡方统计量，然后根据卡方统计量的值来判断组间方差是否相等。该方法极度依赖于数据是正态分布，如果数据非正态分布，则的出来的结果偏差很大。
Bartlett检验统计量为： $$\chi_0^2 = 2.3026\frac{q}{c}$$ 其中， $$q = (N - a)log_{10}S_p^2 - \sum_{i=1}^a(n_i - 1)log_{10}S_i^2$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(a-1)}(\sum_{i=1}^a(n_i-1)^{-1} - (N - a)^{-1})$$$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^a\quad(n_i-1)S_i^2}{N - a}$$
且S_i^2是第 i 个总体的样本方差；当$\chi_0^2 > \chi_{\alpha,a-1}^2$ 时，拒绝H_0，其中$\chi_{\alpha,a-1}^2$是自由度为$a-1$的卡方分布上的 α 分位数。

In [9]:
```
# 用Bartlett检验进行方差齐性检验
bart, pVal2 = stats.bartlett(Group[0], Group[1], Group[2])
bart_stat = stats.chi2.isf(alpha, a-1)

# p值检验
print('Bartlett检验的P值为：', pVal2)
if pVal2 < alpha:
    print('p-value < 0.05, 拒绝 H0.')
else:
    print('接受 H0')

# Bartlett检验统计量检验
print('Bartlett检验统计量：', round(bart, 2))
print('χ_(α,a-1)^2: ', round(bart_stat, 2))
if bart > bart_stat:
    print('χ_0^2 > χ_(α,a-1)^2, 拒绝 H0.')
else:
    print('接受 H0')
```

```
Bartlett检验的P值为： 0.8086822761266198
接受 H0
Bartlett检验统计量： 0.42
χ_(α,a-1)^2:  5.99
接受 H0
```

由分析可知，Bartlett检验的P值大于 0.05 且Bartlett检验统计量小于5.99，故接受原假设，即残差具有方差齐性。

法2：Levene检验

Levene检验是将每个值先转换为该值与其组内均值的偏离程度，然后再用转换后的偏离程度去做方差分析，即组间方差/组内方差。修正后的Levene检验中的均值采用中位数的计算方法，因此这里的偏差用每个处理的观测值y_{ij}与该处理中的中位数$\tilde{y}_{i·}$的偏差的绝对值来表示：$d_{ij} = |y_{ij} - \tilde{y}_{i·}|, i = 1,2,…,a;j = 1,2,…,n$

In [10]:
```
# 用Levene检验进行方差齐性检验
lene, pVal3 = stats.levene(Group[0], Group[1], Group[2])
print('Levene检验的P值为：', pVal3)
if pVal3 < alpha:
    print('p-value < 0.05, 拒绝 H0.')
else:
    print('接受 H0')
```

```
Levene检验的P值为：  0.9789607652073091
接受 H0
```

由分析可知，Levene检验的P值大于 0.05，故残差具有方差齐性。

3. 独立性检验

Durbin-Watson 检验，又称 DW 检验，是用来检验回归分析中残差的一阶自相关性的(尤其针对时间序列数据)。在本实验中，数据不是时间序列数据，但也可以进行检验 各残差的相关性方程为：$e_i = \rho * e_{i-1} + v_i$，检验的原假设为：$\rho = 0$，备择假设为：$\rho \neq 0$
检验统计量为：$d = \frac{\sum^T_{t=2}\quad(e_i-e_{i-1})^2}{\sum^T_{t=1}\quad e_i^2}$
由于d近似等于2(1-ρ),该统计量值越接近 2 越好，一般在 1~3 之间说明没问题，小于 1 这说明残差存在自相关性（有临界值表可以查）。
若没有通过 DW 检验，则需要修改模型或对数据进行处理。

In [11]:
```
# 用Durbin-Watson检验进行独立性检验
def durbin_watson(residuals):
    nume = sum(np.diff(residuals.T) ** 2)
    deno = sum(residuals ** 2)
    return nume / deno
dw = durbin_watson(res)
print('Durbin-Watson检验的统计量为：',dw)
```

```
Durbin-Watson检验的统计量为：  2.299061678853025
```

Durbin-Watson检验的统计量约为：2.3，非常接近2，在 1~3 之间，故没有违反独立性的假定。

综上三个方面，可以知道该实验用One-way ANOVA模型是恰当的

Q4: 估计 3 个饮食方式水平下的均值和误差的方差.

估计 μ_i 和 σ^2

各水平均值μ_i的估计为$y{i}$的均值

误差方差σ^2的估计为sse/a(m-1)

In [12]:
```
mu = [round(np.mean(Group[i]), 3) for i in range(a)]
print('3 个饮食方式水平下的均值：{0}'.format(mu))

sse = 0
list_type=[1,2,3]
for i in range(a):
    se = 0
    list_ = data[data[:,0] == list_type[i],1]
    for j in range(m):
        se += (list_[j] - mu[i]) ** 2
    sse += se
```

```
var = round(sse / (a * (m - 1)),2)
print('3 个饮食方式水平下的误差的方差：{0}'.format(var))
```

```
3 个饮食方式水平下的均值：[116.058, 100.7, 100.183]
3 个饮食方式水平下的误差的方差：10.43
```

由上述分析可知，食用这 3 种巧克力 1h 后血浆的总抗氧能力均值的估计值分别为：116.058, 100.7, 100.183 其方差的估计值为：10.43