



**POLITECNICO**  
**MILANO 1863**

## Relazione di laboratorio del corso di Sperimentazione nei Propulsori

AA 2023-2024

Autore	Codice Persona	Matricola	Indirizzo Email
Andrea Bassi			

**Professore:** Giulio Angelo Guido Solero

## Abstract

Questo documento raccoglie i report delle varie attività laboratoriali svolte nell'ambito del corso di Sperimentazione nei Propulsori. Per ciascuna attività è presentata una sintesi di richieste, metodi risolutivi e risultati criticamente valutati.

*”παντα ρει”*

# Indice

<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>3</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>4</b>
<b>Elenco dei simboli</b>	<b>5</b>
<b>1 Misure di temperatura mediante termocoppia</b>	<b>7</b>
1.1 Risoluzione e analisi statistica . . . . .	7
<b>2 Stima dell'errore sistematico</b>	<b>10</b>
2.1 Risoluzione per serie corta . . . . .	12
2.2 Risoluzione per la serie lunga . . . . .	14
<b>3 Perdite per irraggiamento</b>	<b>17</b>
<b>4 Misura di portata mediante diaframma</b>	<b>18</b>
4.1 Presentazione del banco prova, dati e richieste . . . . .	18
4.2 Risoluzione . . . . .	19
<b>5 Misura di <math>C_D</math> al banco prova</b>	<b>22</b>
5.1 Presentazione del banco prova, dati e richieste . . . . .	22
5.2 Presentazione dei valori misurati . . . . .	23
5.3 Dipendenza da Reynolds e Mach . . . . .	26
<b>A Risultati aggiuntivi dell'analisi statistica delle serie di dati</b>	<b>28</b>
A.1 Classi, frequenze relative e frequenze cumulate normalizzate . . . . .	28
<b>Bibliografia</b>	<b>30</b>

## Elenco delle tabelle

1.1	Valori estremi di temperatura . . . . .	7
1.2	Indici statistici delle due distribuzioni . . . . .	8
1.3	Errore statistico delle due distribuzioni . . . . .	9
2.1	Tabella di calibrazione statica . . . . .	10
2.2	Risultati serie corta . . . . .	13
2.3	Coefficienti della legge di calibrazione . . . . .	13
2.4	Risultati serie lunga . . . . .	15
2.5	Coefficienti della legge di calibrazione . . . . .	16
4.1	Valori numerici delle quantità di Eq.(4.5) . . . . .	20
5.1	Grandezze misurate e conversioni . . . . .	23
5.2	Calcoli intermedi . . . . .	24
5.3	Valori di $C_D$ per ciascuna misura . . . . .	24
A.1	Risultati relativi alla serie corta . . . . .	28
A.2	Risultati relativi alla serie lunga . . . . .	29

## Elenco delle figure

1.1	Istogrammi delle due serie . . . . .	7
1.2	Frequenze relative per entrambe le serie . . . . .	8
1.3	Frequenze cumulate normalizzate per entrambe le serie . . . . .	9
2.1	Serie di dati della tabella di calibrazione statica . . . . .	11
2.2	Risultati del processo di ottimizzazione . . . . .	12
2.3	Curva di calibrazione statica . . . . .	13
2.4	Errore sistematico della soluzione ottimale per vari ordini di regressione . . . . .	14
2.5	Confronto errori per la serie 950-1200 °C . . . . .	14
2.6	Risultati del processo di ottimizzazione . . . . .	15
2.7	Curva di calibrazione statica . . . . .	15
4.1	Schema del banco prova . . . . .	18
4.2	Schema del diaframma (Fonte: UNI EN ISO 5167-1 Figura 5) . . . . .	18
5.1	Dipendenza di $C_D$ da $q_m$ . . . . .	25
5.2	Dipendenza di $C_D$ da $\Delta p$ . . . . .	25
5.3	Dipendenza di $C_D$ da $T$ . . . . .	25
5.4	Dipendenza di $C_D$ da $Re$ . . . . .	26
5.5	Dipendenza di $C_D$ da $Ma$ . . . . .	26

## Elenco dei simboli

Variabile	Descrizione	Unità
$\beta$	Rapporto dei diametri	—
$C$	Coefficiente di efflusso	—
$D$	Diametro interno del condotto a monte	m
$d$	Diametro dell'orifizio	m
$\epsilon_{STAT}$	Errore statistico	°C
$F$	Frequenza cumulata normalizzata	—
$f$	Frequenza relativa	—
$\gamma$	Rapporto dei calori specifici	—
$\kappa$	Esponente isoentropico	—
$L$	Distanza relativa di una presa di pressione	—
$\mu$	Viscosità dinamica	Pa s
$N$	Numero di campioni	—
$\nu$	Gradi di libertà	—
$p$	Pressione statica del fluido	Pa
$Re_D$	Numero di Reynolds riferito a D	—
$\rho$	Densità	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma_T$	Deviazione standard della temperatura	°C
$\sigma_{\bar{T}}$	Deviazione standard della temperatura media	°C
$SK$	Coefficiente di skewness	—
$T$	Temperatura	°C
$t_{95}$	Parametro t per intervallo di confidenza al 95%	—
$\bar{T}$	Temperatura media	°C
$T_{MEDIANA}$	Temperatura mediana	°C



# 1 Misure di temperatura mediante termocoppia

**Dati e richieste** Vengono fornite due serie di misure di temperatura allo scarico di una camera di combustione, eseguite mediante termocoppia di tipo B. La prima è costituita da 1599 valori ("Serie corta"), la seconda da 9999 ("Serie lunga"). Entrambe le serie sono campionate con una frequenza di campionamento di 100 Hz e vengono fornite mediante file testuale (.txt).

Si chiede di svolgere l'analisi statistica dei dati.

## 1.1 Risoluzione e analisi statistica

Si riportano i risultati emersi dall'elaborazione dei dati sperimentali. I calcoli sono stati svolti mediante il software *Matlab* e le funzioni built-in.

**Suddivisione in classi e istogramma** Entrambe le serie sono divise in 10 classi, di uguale ampiezza, costruite affinché non ci possa essere ambiguità nell'attribuzione dei valori: poiché le misure hanno 6 cifre decimali, gli estremi di classe sono definiti con 7 cifre decimali. L'estremo della prima classe viene scelto come il minimo valore di  $T$  a cui viene sottratto  $0.5e-7$  °C. Analogamente, l'estremo superiore dell'ultima classe viene calcolato sommando la stessa quantità al massimo valore di  $T$  nella serie. I valori estremi delle due serie sono mostrati in Tab.1.1, riportati integralmente per mettere in evidenza il numero di cifre decimali.

Serie	$T_{MIN}$ [°C]	$T_{MAX}$ [°C]
Corta	953.745910	1193.110960
Lunga	931.352290	1449.917970

Tabella 1.1: Valori estremi di temperatura

Gli istogrammi relativi alle due serie sono mostrati in Fig.1.1.

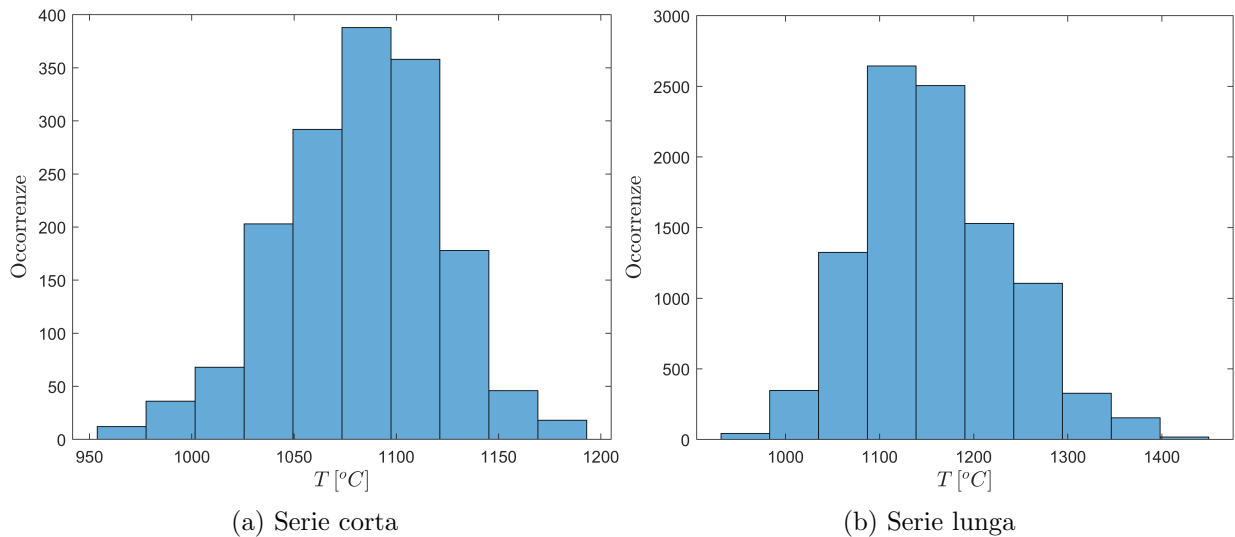


Figura 1.1: Istogrammi delle due serie





Figura 1.2: Frequenze relative per entrambe le serie

Si osserva come entrambe le distribuzioni di dati siano simili alla distribuzione gaussiana, mostrando tuttavia una evidente asimmetria. Quest'ultima è quantificabile dal coefficiente di skewness, riportato in Tab.1.2.

**Calcolo delle frequenze relative e cumulate** Successivamente vengono riportate delle rappresentazioni grafiche delle frequenze relative ( $f$ ), in Fig.1.2, e delle frequenze cumulate normalizzate ( $F$ ) delle varie classi, in Fig. 1.3. I risultati numerici sono riportati in Appendice A.

**Calcolo degli indici statistici** L'analisi statistica dei dati viene svolta mediante il calcolo degli indici statistici relativi alle due serie di dati. In particolare, si riportano media ( $\bar{T}$ ) e mediana ( $T_{MEDIANA}$ ) delle due serie, nonché deviazione standard ( $\sigma_T$ ) e skewness ( $SK$ ) delle distribuzioni. I risultati sono presentati in Tab.1.2.

Indice	Serie corta	Serie lunga
$\bar{T}$ [°C]	1082.8	1159.2
$T_{MEDIANA}$ [°C]	1085.7	1152.4
$\sigma_T$ [°C]	39.147	77.841
$SK$	-0.27	0.40

Tabella 1.2: Indici statistici delle due distribuzioni

**Stima dell'errore statistico** Lo studio statistico delle due serie di dati si conclude con la stima dell'errore statistico ( $\epsilon_{STAT}$ ). Risulta necessario calcolare la deviazione standard del valore medio



Figura 1.3: Frequenze cumulate normalizzate per entrambe le serie

di temperatura ( $\sigma_{\bar{T}}$ ) secondo:

$$\sigma_{\bar{T}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}} \quad (1.1)$$

dove  $N$  è il numero di campioni di ciascuna serie. Infine, il valore di  $\epsilon_{STAT}$  si ottiene con:

$$\epsilon_{STAT} = \sigma_{\bar{T}} t_{95\%} \quad (1.2)$$

dove  $t_{95}$  è ricavato dalla distribuzione t per un intervallo di confidenza al 95% (dove  $\nu = N - 1$ , dove 1 rappresenta il numero di gradi di libertà persi a seguito dell'introduzione di  $\bar{T}$ ).

Indice	Serie corta	Serie lunga
$t_{95\%}$	1.9614	1.9602
$\nu$	1598	9998
$\epsilon_{STAT} [^{\circ}\text{C}]$	$\pm 1.9202$	$\pm 1.5259$

Tabella 1.3: Errore statistico delle due distribuzioni

Da Tab.1.3 si nota come un numero elevato di campioni garantisca un errore statistico molto contenuto, che risulta minore di  $\sigma_T$  di un ordine di grandezza. Questo risultato deriva dalla presenza di  $\sqrt{N}$  in Eq.(1.1), il cui valore ammonta a  $\sim 40$  per la prima serie, a  $\sim 100$  per la seconda. Per quanto riguarda il valore di  $t_{95}$ , si osserva che tende al valore asintotico ( $\nu \rightarrow \infty$ ) di 1.960 in entrambi i casi, quindi l'influenza di tale parametro sull'errore statistico è pari per le due serie.

---

## 2 Stima dell'errore sistematico

**Dati e richieste** Viene fornita la tabella di calibrazione statica di una termocoppia di tipo B, riportata in Tab. 2.1. Si chiede di ricavare la relazione temperatura misurata-tensione mediante analisi di regressione, di determinare l'errore associato a tale processo, nonché il grado di adattamento del modello ai dati sperimentali. Infine si richiede di determinare l'errore totale associato alle misure di temperatura delle due serie di Sez.1.

Tensione [mV]	Temperatura [°C]
0.786	400
1.791	600
2.431	700
2.784	750
3.158	800
3.551	850
3.963	900
4.395	950
4.844	1000
5.311	1050
5.793	1100
6.290	1150
6.800	1200
7.326	1250
7.866	1300
8.418	1350
8.979	1400
9.549	1450
10.124	1500
10.704	1550
11.286	1600

Tabella 2.1: Tabella di calibrazione statica

**Introduzione alla risoluzione** Dalla rappresentazione di Fig.2.1 si nota che i dati sono caratterizzati da un andamento non lineare sull'intero campo di misura, mentre a partire da circa 6 mV si ha un andamento quasi lineare. Di conseguenza, l'adozione di una legge di regressione non lineare appare ottimale per fornire un errore ridotto. Tuttavia la scelta del campo di misura è impattata

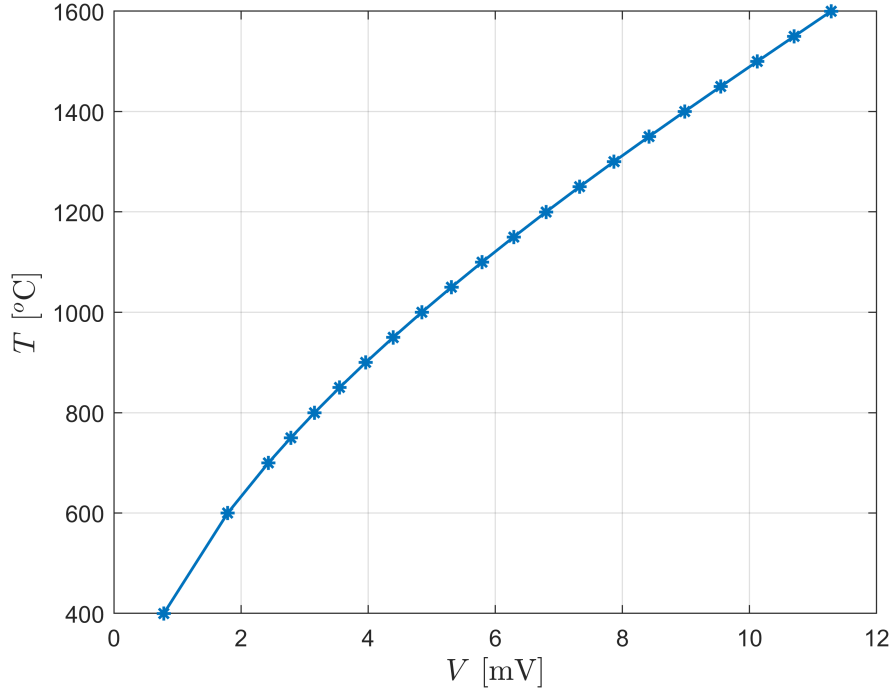


Figura 2.1: Serie di dati della tabella di calibrazione statica

da altri fattori, pertanto è opportuno delineare una strategia risolutiva che valuti più aspetti al fine di trovare la migliore soluzione.

Si consideri la quantità  $\sigma_\varepsilon$ , ossia l'errore di regressione, definita come:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{y}_i)^2}{N - G} \quad (2.1)$$

dove:

- $y_i$  è l'i-esimo valore misurato di  $T$ ;
- $\tilde{y}_i$  indica la stima di  $T$  ottenuta a ogni valore di tensione mediante la legge di regressione;
- $N$  indica il numero di coppie di dati usati per determinare i coefficienti di regressione.
- $G$  indica il numero di coefficienti di regressione (vale  $G = O + 1$ , dove con  $O$  si indica l'ordine del modello di regressione).

Utilizzare un numero elevato di punti permette di ridurre questo errore (aumento di  $N$ ), così come un modello di ordine superiore ( $G$  maggiore) riduce la somma degli scarti quadratici (numeratore della frazione), ma a parità di  $N$  provoca la riduzione del denominatore con conseguente aumento dell'errore.

Si evidenzia anche che il calcolo dell'errore sistematico ( $\epsilon_{SIST}$ ) prevede di moltiplicare  $\sigma_\varepsilon$  per la  $t_{95}$  relativa al numero di gradi di libertà  $\nu$ , ottenibile mediante  $\nu = N - G$  (il numero di gradi di libertà persi è pari al numero di coefficienti di regressione). A seguito di questa operazione si nota che la scelta di un numero limitato di punti per la regressione ( $N$  basso), associata a un modello di ordine alto, porta a  $\nu$  molto bassi che comportano un significativo aumento di  $\epsilon_{SIST}$ .

Queste osservazioni motivano uno studio di ottimizzazione, con lo scopo di trovare l'ordine e il numero di coppie di dati di calibrazione che minimizzano globalmente l'errore sistematico. Poiché le due serie di dati presentano estremi differenti, lo studio viene proposto separatamente per entrambe.

## 2.1 Risoluzione per serie corta

Si presenta lo studio di ottimo per la prima serie di dati, svolto con le stesse modalità anche per la seconda. Il punto di partenza sono gli estremi della serie di dati, ossia la minima e massima  $T$  misurata, che assumono rispettivamente il valore di 953 °C e di 1193 °C. Da Tab.2.1 si ricava che il minimo intervallo di dati su cui svolgere la regressione va da 950 °C a 1200 °C. A ogni iterazione questo secondo intervallo viene ampliato di un valore a sinistra dell'estremo inferiore e a destra dell'estremo superiore. Il più ampio intervallo possibile va da 400 °C a 1550 °C.

Per ogni intervallo di dati di calibrazione sono determinati i coefficienti di regressione dal primo al quarto ordine (mediante funzione *polyfit* di Matlab), poi vengono calcolate le stime  $\tilde{y}_i$  per tutti gli ordini; successivamente si calcolano i  $\sigma_\epsilon$  e, infine, i valori di  $\epsilon_{SIST}$ . Per ogni iterazione viene selezionato l'ordine del polinomio interpolante che garantisce il minimo  $\epsilon_{SIST}$ ; dopo aver ripetuto l'analisi per tutti gli intervalli si individua il miglior errore sistematico globale.

L'analisi si conclude con l'indicazione del valore di  $R^2$ , che rappresenta il grado di adattamento del modello ai dati sperimentali; segue la stima dell'errore totale ( $\epsilon_{TOT}$ ) del processo di misura, ottenuta mediante:

$$\epsilon_{TOT} = \sqrt{\epsilon_{STAT}^2 + \epsilon_{SIST}^2} \quad (2.2)$$

Lo svolgimento del processo porta a determinare i seguenti errori sistematici, rappresentati in Fig.2.2: tra di essi viene indicato il minimo errore globale.

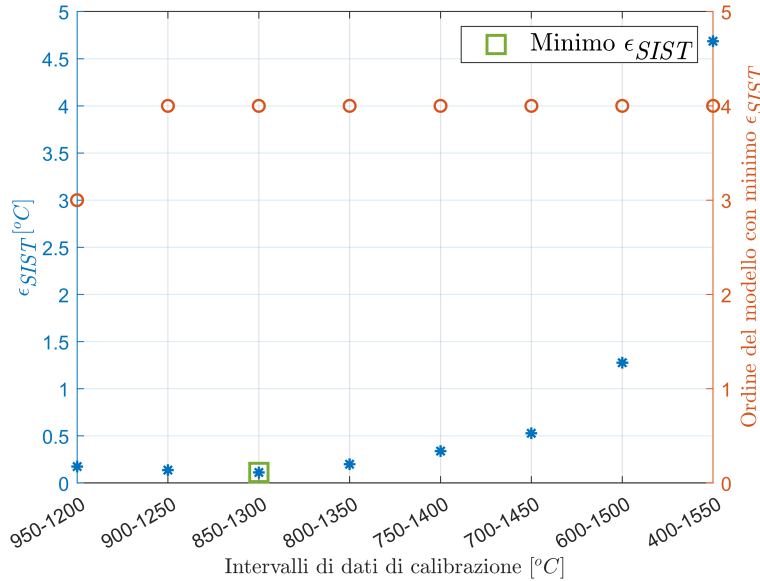


Figura 2.2: Risultati del processo di ottimizzazione

In Tab.2.2 si riportano i risultati associati alla migliore soluzione; segue la rappresentazione della legge di calibrazione del quarto ordine (Fig.2.3) e i coefficienti (Tab.2.3). La legge è nella forma:

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (2.3)$$

Risultato	Valore
$\epsilon_{SIST}$	0.1134 °C
$\epsilon_{SIST}$ come % F.S.	0.0087 %
Ordine	4
Intervallo	850-1300 °C
$R^2$	$\sim 1$
$\epsilon_{STAT}$ serie	1.9202 °C
$\epsilon_{TOT}$	1.9236 °C

Tabella 2.2: Risultati serie corta

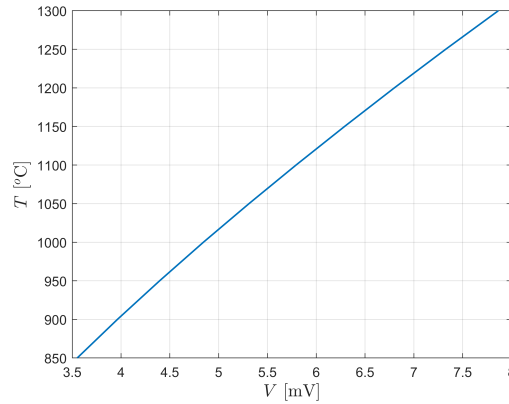


Figura 2.3: Curva di calibrazione statica

Coefficiente	Valore
a	-0.0715
b	1.9853
c	-23.2057
d	226.6665
e	260.2018

Tabella 2.3: Coefficienti della legge di calibrazione

Da questi risultati si osserva che l'errore sistematico è molto ridotto grazie all'adozione di un modello di ordine elevato. Si sottolinea, inoltre, come l'adozione di un campo di dati di calibrazione più ampio sia deleterio per l'errore sistematico anche con modelli di ordine elevato a causa dell'aumento dell'errore di interpolazione.

Infine, si riporta una rappresentazione (Fig.2.4) dell'errore sistematico per i vari ordini di modello usando l'intervallo ottimale di dati di calibrazione. Questa rappresentazione è particolarmente

significativa in quanto si riscontra che, nonostante il lieve incremento del valore di  $t_{95}$ , la soluzione migliore resta quella del quarto ordine.

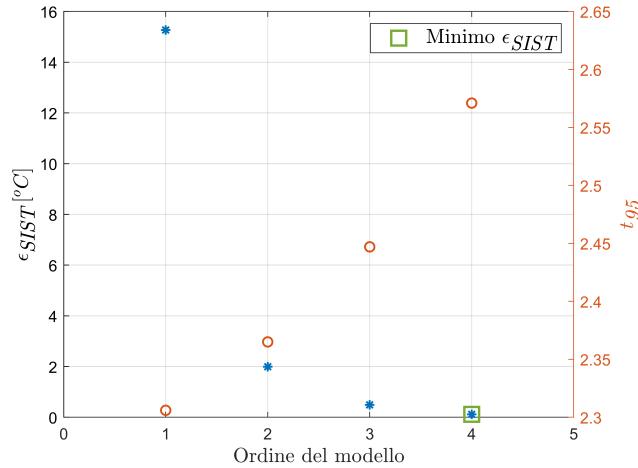


Figura 2.4: Errore sistematico della soluzione ottimale per vari ordini di regressione

Questo effetto è determinante nella penalizzazione della soluzione con intervallo 950-1200 °C, il cui errore di regressione è molto basso, ma viene moltiplicato per  $t_{95}$  elevato, con un risultato molto deleterio sull'errore sistematico.

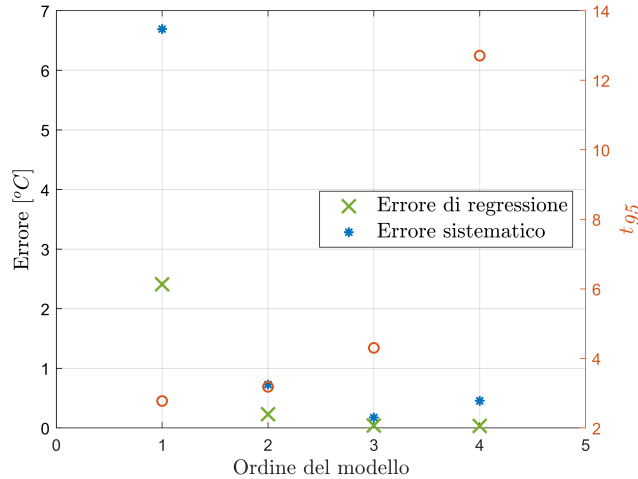


Figura 2.5: Confronto errori per la serie 950-1200 °C

## 2.2 Risoluzione per la serie lunga

Si impiega una strategia analoga per caratterizzare la serie lunga. Quest'ultima presenta una limitata possibilità di ottimizzazione in quanto l'intervallo di temperatura da misurare è da 931 °C a 1449 °C: questi valori comportano l'utilizzo di gran parte della tabella di calibrazione statica. Poiché l'analisi svolta è analoga alla precedente, vengono riportati soltanto i risultati. Si osserva che l'errore sistematico è ridotto e ha un impatto limitato sull'errore totale; inoltre, la legge di regressione che fornisce il miglior risultato è ancora quella del quarto ordine.

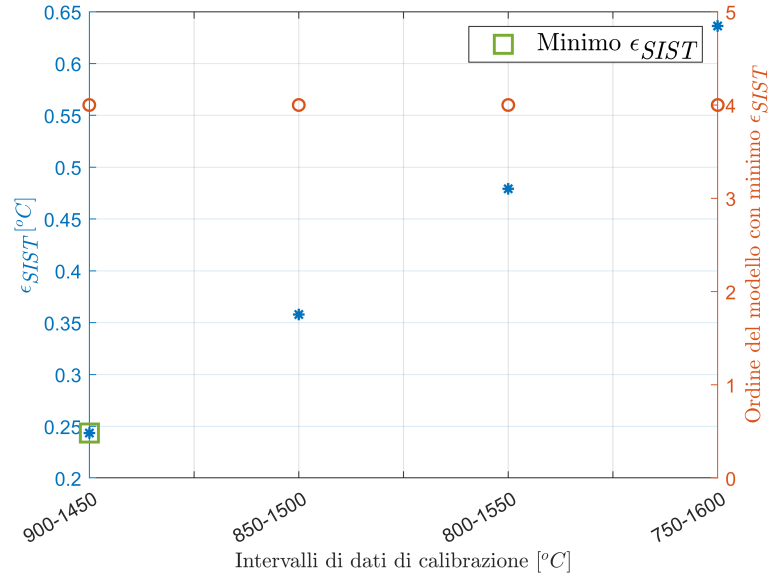


Figura 2.6: Risultati del processo di ottimizzazione

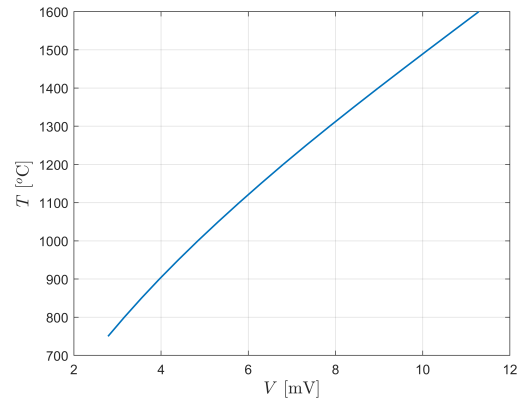


Figura 2.7: Curva di calibrazione statica

Risultato	Valore
$\epsilon_{SIST}$	0.2436 $^{\circ}C$
$\epsilon_{SIST}$ come % F.S.	0.017 %
Ordine	4
Intervallo	900-1450 $^{\circ}C$
$R^2$	$\sim 1$
$\epsilon_{STAT}$ serie	1.5259 $^{\circ}C$
$\epsilon_{TOT}$	1.5452 $^{\circ}C$

Tabella 2.4: Risultati serie lunga



<b>Coefficiente</b>	<b>Valore</b>
a	-0.0120
b	0.5696
c	-10.8105
d	179.4108
e	326.3550

Tabella 2.5: Coefficienti della legge di calibrazione

---

### 3 Perdite per irraggiamento

## 4 Misura di portata mediante diaframma

### 4.1 Presentazione del banco prova, dati e richieste

Viene assegnato un banco prova per misure di portata mediante diaframma normalizzato, rappresentato schematicamente in Fig.4.1.

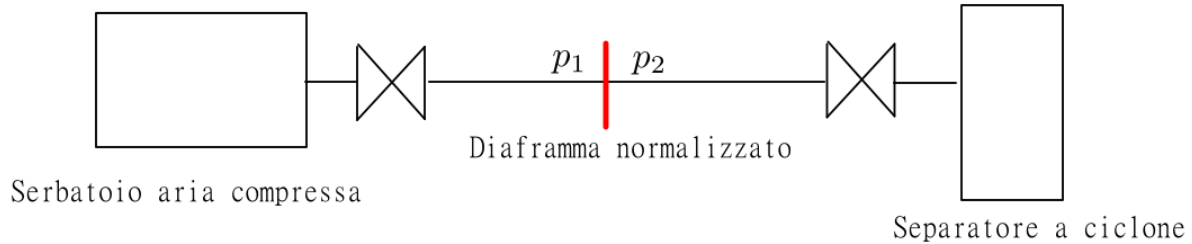


Figura 4.1: Schema del banco prova

In particolare, il separatore a ciclone opera nelle seguenti condizioni nominali:

- fluido di lavoro (fase gas): aria;
- portata di aria nelle condizioni operative nominali:  $96 \text{ Nm}^3/\text{h}$ ;
- pressione di lavoro: 4 bar;
- temperatura di lavoro (ambiente): 300 K.

Al fine di misurare la portata d'aria si sceglie di utilizzare un diaframma normalizzato conforme alla Norma UNI EN ISO 5167-1, rappresentato in Fig.4.2 e con le seguenti caratteristiche:

- $D = 42 \text{ mm}$ ;
- $d = 9.94 \text{ mm}$ ;
- Prese di pressione sulle flange.

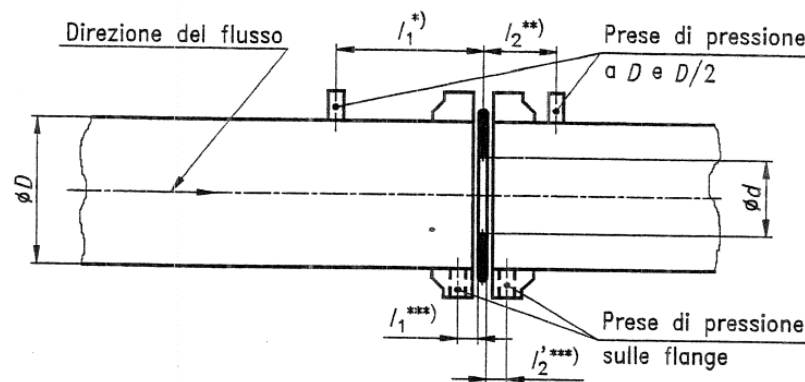


Figura 4.2: Schema del diaframma (Fonte: UNI EN ISO 5167-1 Figura 5)

**Richieste** Si chiede di valutare la pressione minima di esercizio nel serbatoio di alimentazione e di indicare il trasduttore di pressione differenziale da usare sul banco prova per la misura di portata.

## 4.2 Risoluzione

Facendo riferimento a Fig.4.1, si denotino con  $p_1$  e  $p_2$  le pressioni (in Pa) a monte e a valle del diaframma. Si indichi con  $T$  la temperatura di esercizio (in K).

### Ipotesi risolutive

- Le perdite di carico lungo il condotto e nelle valvole sono trascurate per mancanza di informazioni sull'impianto: di conseguenza  $p_1$  è la pressione incognita del serbatoio di alimentazione,  $p_2$  è la pressione operativa del separatore a ciclone.
- L'aria viene considerata come un gas perfetto, per cui  $\gamma = \kappa = 1.4$ , come indicato dalla Norma.
- Tutti i requisiti della Norma sono soddisfatti (Es. scabrosità del condotto, deformazione del diaframma, configurazione dello strumento).

**Riassunto dei dati e conversioni** Si riporta un riassunto sintetico dei dati del problema, convertiti in unità del Sistema Internazionale dove necessario.

Dato	Valore
$D$	4.2e-2 m
$d$	9.94e-3 m
$p_2$	4.053e5 Pa
$T_2$	300 K
$\gamma$	1.4
$q_{vN}$	96 Nm <sup>3</sup> /h
$q_m$	0.0344 kg/s

Al fine di convertire la portata volumetrica normalizzata in una portata massica si adotta la seguente espressione:

$$q_m = q_{vN} \rho_N / 3600 \quad (4.1)$$

con  $\rho_N = 1.293 \text{ kg/m}^3$  la densità dell'aria a 273.15 K e 101325 Pa.

**Svolgimento** La Norma fornisce una serie di equazioni da utilizzare per la misura di portata massica, al cui interno sono definite delle quantità calcolate secondo la Norma stessa. Le equazioni risolventi del problema sono le seguenti:

$$q_m = \frac{C}{\sqrt{1 - \beta^4}} \epsilon_2 \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2 \Delta p \rho_2} \quad (4.2)$$

$$\epsilon_1 = 1 - (0.41 + 0.35 \beta^4) \frac{\Delta p}{\kappa p_1} \quad (4.3)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 \sqrt{1 + \frac{\Delta p}{p_2}} \quad (4.4)$$

Le quantità qui presenti, il cui valore calcolato è riportato in Tab.4.1, sono definite come:

- $\Delta p = p_1 - p_2$ ;
- $C$  ottenuto mediante Eq.(4.5);
- $\beta = d/D$ ;
- $\rho_2 = p_2/(RT_2)$ , entrambe note, con  $R = 287 \text{ J/(kgK)}$  per l'aria secca;
- $\kappa = \gamma = 1.4$ .

$C$  viene calcolato con la seguente espressione:

$$C = 0.5959 + 0.0312\beta^{2.1} - 0.1840\beta^8 + 0.0029\beta^{2.5}(10^6/Re_D)^{0.75} + 0.0390L_1\beta^4(1 - \beta^4)^{-1} - 0.0337L'_2\beta^3 \quad (4.5)$$

dove:

- le quantità  $L$  sono calcolate in base alla Norma (per prese di pressione sulle flange vale  $L_1 = L'_2 = 25.4/D$ , con  $D$  in mm);
- il coefficiente di  $L_1\beta^4(1 - \beta^4)^{-1}$  è modificato in quanto  $D \leq 58.62 \text{ mm}$ ;
- $Re_D = 4q_m/(\pi\mu D)$ ;
- $\mu$  a 300 K ottenuta mediante interpolazione dei dati tabulati da Ref.[1].

Quantità	Valore
$C$	0.5979
$\beta$	0.2367
$\rho_2$	4.7073 kg/m <sup>3</sup>
$L_1, L'_2$	0.6048
$Re_D$	5.362e+4
$\mu$	1.945e-5 Pa·s

Tabella 4.1: Valori numerici delle quantità di Eq.(4.5)

Lo scopo dello svolgimento è determinare  $p_1$ : a questo fine è possibile riscrivere le Eq.(4.2), (4.3) e (4.4) in funzione di  $p_1$ , unica incognita del problema. Il risultato è:

$$q_m - C_2(1 - C_1 + C_1 \frac{p_2}{p_1}) \sqrt{p_1^2 - p_1 p_2} \quad (4.6)$$

dove  $C_1, C_2$  sono costanti ottenute rielaborando le equazioni e che assumono le seguenti espressioni:

$$C_1 = \frac{0.41 + 0.35\beta^4}{\gamma} \quad (4.7)$$

$$C_2 = \frac{C}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{2\rho_2}{p_2}} \quad (4.8)$$

Definendo Eq.(4.6) come  $\varepsilon(p_1)$ , è possibile utilizzare il metodo di Newton-Raphson (implementato in *fzero* di Matlab) per trovare il valore di  $p_1$  rende valida l'equazione  $\varepsilon(p_1) = 0$ . Sono utilizzate le tolleranze standard di Matlab. La condizione iniziale è  $p_1 = 5e5$ . Si osserva che il dominio della soluzione prevede  $p_1 \geq p_2 \vee p_1 > 0$ . Questo è coerente con la fisica del problema, che prevede una perdita di carico in corrispondenza del diaframma.

**Risultati** La risoluzione del problema numerico porta a determinare un valore di  $p_1$  pari a 460340 Pa, mentre il valore di  $\Delta p$  a cavallo del diaframma ammonta a 55039 Pa.

Affinchè Eq.(4.3) sia valida è necessario che  $p_2/p_1 \geq 0.75$ : calcolando questo rapporto con la soluzione ottenuta si ottiene circa 0.87, quindi la condizione richiesta è verificata.

Per misurare la pressione a cavallo del diaframma è possibile utilizzare un manometro differenziale per gas. Una possibile scelta è il manometro differenziale digitale *RS PRO RS DT*, con campo di misura da -2 bar a 2 bar.

---

## 5 Misura di $C_D$ al banco prova

### 5.1 Presentazione del banco prova, dati e richieste

Viene realizzato un banco prova per misure di temperatura mediante termocoppia. Tale banco è alimentato da gas naturale, che passa per un misuratore di portata a galleggiante, raggiunge una camera di stanca dove se ne misura la temperatura, poi viene accelerato da un ugello in un eiettore, che fornisce la portata d'aria per permettere la combustione. Un misuratore di pressione differenziale è inserito tra camera di stanca e ambiente esterno. Infine la miscela è combusta in un bruciatore.

Si richiede di misurare il coefficiente di efflusso ( $C_D$ ) dell'ugello utilizzando le misure a disposizione, di studiare l'andamento rispetto alla portata reale e al variare della pressione differenziale; infine, studiare l'andamento al variare di  $Ma$  e  $Re$ .

Gli strumenti di misura a disposizione sono i seguenti:

- Misuratore di portata a galleggiante con scala graduata in  $\text{Nl/min}$  (condizioni normali  $T_N = 273 \text{ K}$ ,  $P_N = 1 \text{ atm}$ );
- Barometro differenziale digitale in  $\text{mbar}$ ;
- Termometro digitale in  $^\circ\text{C}$ .

Il diametro dell'ugello ( $D_U$ ) è pari a  $2.7 \text{ mm}$ . La pressione ambiente ( $P_{AMB}$ ) ammonta a  $100600 \text{ Pa}$ .

La procedura per definire  $C_D$  parte dalla definizione del coefficiente di efflusso:

$$C_D = \frac{\dot{m}_{REALE}}{\dot{m}_{TEORICA}} \quad (5.1)$$

dove  $\dot{m}_{REALE} = q_M$ , mentre  $\dot{m}_{TEORICA}$  viene ottenuta mediante alcune assunzioni.

Per quanto riguarda  $q_m$ , essa è ottenuta dalla portata misurata mediante galleggiante usando  $q_M = q_{MN} \rho_N$ .

Per il calcolo di  $\dot{m}_{TEORICA}$  è possibile utilizzare il teorema di Bernoulli e determinare  $V_{TEORICA}$  mediante:

$$V_{TEORICA} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (5.2)$$

per poi trovare  $\dot{m}_{TEORICA}$  mediante:

$$\dot{m}_{TEORICA} = \rho V_{TEORICA} A \quad (5.3)$$

**Ipotesi** Lo svolgimento della misura richiede l'assunzione di alcune ipotesi, alcune delle quali sono poi verificate a seguito della misura stessa.

- Assunzione di profilo di velocità uniforme nella sezione di efflusso.
- Effetti di viscosità trascurabili e flusso incomprimibile (per la validità del teorema di Bernoulli).
- Gas naturale considerabile come puro metano, nonché come gas perfetto.

## 5.2 Presentazione dei valori misurati

A seguito delle misure sono rilevati i valori riportati in Tab.5.1, a cui è associata la conversione nelle unità di misura opportune. In particolare, per convertire  $q_{NM}$  in  $q_m$  si utilizza la seguente relazione:  $q_M = q_{NM}\rho_N/6e4$ , dove  $6e4$  è un fattore di conversione per passare da  $\text{Nl/min}$  a  $\text{kg/s}$ , mentre  $\rho_N$  è ottenuto a 1 atm e 273 K tramite  $\rho_N = p/(RT) = 0.7142 \text{ kg/m}^3$ . Il valore di  $R$  è pari a quello per il metano, che ammonta a  $520 \text{ J/(kgK)}$ .

Misura	$q_{MN} [\text{Nl/min}]$	$q_M [\text{kg/s}]$	$\Delta p [\text{mbar}]$	$\Delta p [\text{Pa}]$	$T [^\circ\text{C}]$	$T [\text{K}]$
1	7	8.33e-05	0.5	50	32.1	305.1
2	9	1.07e-04	1.8	180	32.1	305.1
3	10	1.19e-04	3.6	360	32.0	305.0
4	11	1.31e-04	4.4	440	31.9	304.9
5	12	1.43e-04	5.5	550	31.8	304.8
6	14	1.67e-04	7.8	780	31.7	304.7
7	15	1.79e-04	9.5	950	31.7	304.7
8	16	1.90e-04	11.3	1130	31.6	304.6
9	17	2.02e-04	12.8	1280	31.6	304.6
10	18	2.14e-04	14.2	1420	31.5	304.5
11	19	2.26e-04	15.9	1590	31.5	304.5
12	20	2.38e-04	17.5	1750	31.5	304.5

Tabella 5.1: Grandezze misurate e conversioni

Successivamente vengono calcolate le seguenti quantità:

- $\rho$  mediante l'ipotesi di gas perfetto ( $\rho = p/(RT)$ ); il valore di  $p$  è ottenuto tramite  $p = p_{AMB} + \Delta p$ .
- $V_{TEORICA}$  mediante Eq.(5.2).
- $\dot{m}_{TEORICA}$  tramite Eq.(5.3).



Misura	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$V_{TEORICA}$ [m/s]	$\dot{m}$ [kg/s]
1	0.635	12.6	4.56e-05
2	0.636	23.8	8.66e-05
3	0.637	33.6	1.23e-04
4	0.638	37.1	1.36e-04
5	0.639	41.5	1.52e-04
6	0.640	49.4	1.81e-04
7	0.641	54.4	2.00e-04
8	0.643	59.3	2.18e-04
9	0.644	63.1	2.32e-04
10	0.645	66.4	2.45e-04
11	0.646	70.2	2.59e-04
12	0.647	73.6	2.72e-04

Tabella 5.2: Calcoli intermedi

Da questi valori è possibile ottenere una stima del valore di  $C_D$  per ciascuna misura. Si presentano anche i grafici che rappresentano la dipendenza di  $C_D$  dalle tre misure al fine di evidenziare eventuali dipendenze ed errori.

Misura	$C_D$
1	1.827
2	1.237
3	0.971
4	0.965
5	0.941
6	0.921
7	0.893
8	0.873
9	0.871
10	0.875
11	0.872
12	0.874

Tabella 5.3: Valori di  $C_D$  per ciascuna misura

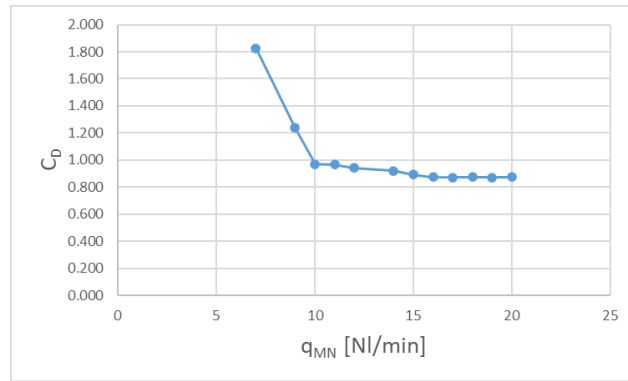


Figura 5.1: Dipendenza di  $C_D$  da  $q_m$

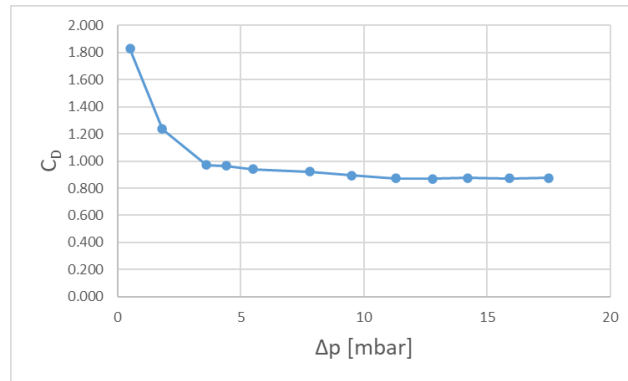


Figura 5.2: Dipendenza di  $C_D$  da  $\Delta p$

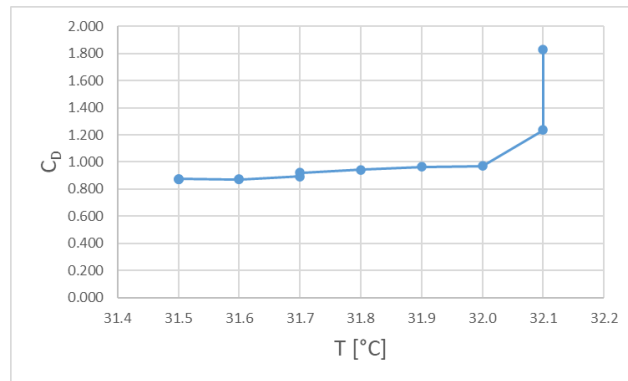


Figura 5.3: Dipendenza di  $C_D$  da  $T$

Da Fig.5.1, così come da Fig.5.2, si osserva che le prime due misure risultano affette da errore significativo, il quale porta a ottenere valori di  $C_D$  maggiori di 1 che non hanno significato fisico. Si osserva anche che la stima di  $C_D$  si assesta attorno a 0.875 a partire dalla settima misura.

Si nota anche che l'utilizzo di una pressione ambiente non standard ha un impatto limitato in quanto non porta a variazioni significative di  $C_D$ : in media, avere  $P_{AMB}$  pari a 1 atm porta a un decremento di circa 0.35 %.

Infine, la variazione di  $T$  misurata non porta a variazioni significative di  $C_D$ . Gli unici valori anomali corrispondono alle prime due misure, affette da significativo errore.

### 5.3 Dipendenza da Reynolds e Mach

Si riportano dei grafici rappresentanti la dipendenza di  $C_D$  dal numero di Reynolds (Fig.5.4) e dal numero di Mach (Fig.5.5). Al fine di calcolare il valore di  $\mu$  al variare di  $T$  viene utilizzata la legge di Sutherland nella forma:

$$\mu = \mu_{REF} \left( \frac{T}{T_{REF}} \right)^{1.5} \quad (5.4)$$

con  $\mu_{REF} = 1.03\text{e-}5$  Pas e  $T_{REF} = 273$  K. La variazione di  $\mu$  è molto limitata in quanto  $T$  mantiene approssimativamente lo stesso valore per tutte le misure.

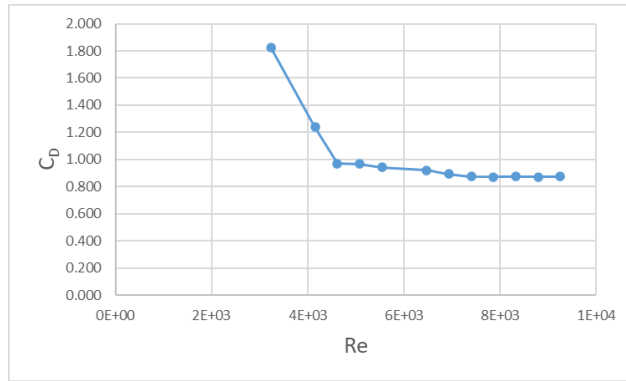


Figura 5.4: Dipendenza di  $C_D$  da  $Re$

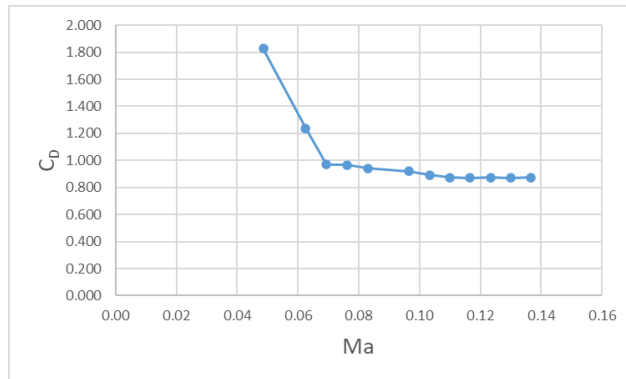


Figura 5.5: Dipendenza di  $C_D$  da  $Ma$

Dai grafici è possibile osservare che:

- i primi valori di  $C_D$  non sono significativi;
- $Re$  varia tra 3000 e 9000; ne deriva che il flusso nell'ugello è turbolento e valgono le ipotesi di profilo di velocità uniforme e di assenza di effetti viscosi significativi;
- $Ma$  è sempre ridotto, pertanto vale l'ipotesi di flusso incomprimibile.

---

## A Risultati aggiuntivi dell'analisi statistica delle serie di dati

### A.1 Classi, frequenze relative e frequenze cumulate normalizzate

Classe	Estremi	Occorrenze	$f$	$F$
1	953.74590995 977.68241496	12	0.007	0.007
2	977.68241496 1001.61891997	36	0.023	0.030
3	1001.61891997 1025.55542498	68	0.043	0.073
4	1025.55542498 1049.49192999	203	0.127	0.199
5	1049.49192999 1073.42843500	292	0.183	0.382
6	1073.42843500 1097.36494001	388	0.243	0.625
7	1097.36494001 1121.30144502	358	0.224	0.849
8	1121.30144502 1145.23795003	178	0.111	0.960
9	1145.23795003 1169.17445504	46	0.029	0.989
10	1169.17445504 1193.11096005	18	0.011	1.000

Tabella A.1: Risultati relativi alla serie corta

<b>Classe</b>	<b>Estremi</b>	<b>Occorrenze</b>	<b><math>f</math></b>	<b><math>F</math></b>
1	931.352289950 983.208857960	43	0.0043	0.0043
2	983.208857960 1035.06542597	347	0.0347	0.0390
3	1035.06542597 1086.92199398	1325	0.1325	0.1715
4	1086.92199398 1138.77856199	2645	0.2645	0.4360
5	1138.77856199 1190.63513000	2505	0.2505	0.6866
6	1190.63513000 1242.49169801	1530	0.1530	0.8396
7	1242.49169801 1294.34826602	1106	0.1106	0.9502
8	1294.34826602 1346.20483403	328	0.0328	0.9830
9	1346.20483403 1398.06140204	153	0.0153	0.9983
10	1398.06140204 1449.91797005	17	0.0017	1.0000

Tabella A.2: Risultati relativi alla serie lunga

““

## Bibliografia

- [1] Yunus A. Cengel. *Termodinamica e trasmissione del calore*. McGraw-Hill.