Laboratorio di Fisica Computazionale I

Prima prova in itinere

Autore: Andrea Belli Contarini (matricola: 1916927)

Roma, 8 novembre 2020

1 Sommario

1.1 Parte 1

Si è studiato il moto di una particella puntiforme di massa $m = 1$, che si muove lungo una retta con un moto determinato da una equazione differenziale (cfr. "introduzione"), partendo dalla condizione iniziale $x(0) = x_0 = 10$ e $v(0) = -v_0$.

1.2 Parte 2

Nella seconda parte si è studiato il moto della stessa particella, ma con l'aggiunta di un termine d'attrito. Per lo studio di questo punto è stato utilizzato un algoritmo diverso da quello precedente.

1.3 Parte 3

In quest'ultima parte si è studiato il cambiamento drastico nella posizione asintotica ad un tempo elevato ($T_{max} = 250$), al variare di v_0 in [0, 4] e di γ in [0, 0.2], individuando inoltre quella regione del piano (v_0, γ) per cui la posizione asintotica vale $x = 1$.

2 Introduzione

2.1 Parte 1

Con il programma "integratore.c" è stato studiato il moto della particella che ha un moto determinato dall'equaizone differenziale:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = e^{-x(t)/2} \cdot \log(x(t)) \cdot [\log(x(t)) - \frac{4}{x(t)}]$$

E' noto inoltre che per la soluzione esatta dell'equazione precedente vale:

$$\frac{1}{2}v(t)^2 + 2(\log(x(t)))^2 \cdot e^{-x(t)/2} = \text{costante} = \text{K}$$

Il programma integra l'equazione con un algoritmo del secondo ordine: *Verlet Velocità*.

E' stato poi creato un altro programma ("puntoCeD.c") per rispondere alle varie richieste della prima parte, ossia ottenere:

c) La stima di v_0^{min} tale che la particella raggiunga la posizione x =1.

d) Le stime dei tempi (t_1^* e t_2^*) per cui la particella passa per $x = 1$, fissato $v_0 = 1$ e $T_{max} = 20$.

2.2 Parte 2

E' stato studiato lo stesso moto della stessa particella con la "semplice" aggiunta di un termine d'attrito. L'equaizone da integrare risulta dunque:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = e^{-x(t)/2} \cdot \log(x(t)) \cdot [\log(x(t)) - \frac{4}{x(t)}] - \gamma \frac{dx(t)}{dt},$$

dove $\gamma = 0.1$ e la condizione iniziale è uguale a quella della Parte 1.
L'algoritmo utilizzato è stato, in questo caso, il *Runge-Kutta 2*.
Si è studiato il moto al variare di v_0 (punto *a*) e nel limite di tempi molto grandi (punto *b*, $T_{max} = 250$).
Si noti, infine, che è stato creato un terzo programma, "parte2e3.c", per poter rispondere ai quesiti.

3 Strumentazione

L'editor di testo utilizzato per scrivere i codici in linguaggio c è stato *X-code*, scaricabile dall'*app store* di ogni *Mac*.
Per eseguire i grafici è stato invece utilizzato il programma *Gnuplot*.

4 Presentazione e analisi dei dati

4.1 Parte 1

Innanzitutto si dimostra (graficamente) che l'algoritmo utilizzato (*Verlet Velocità*) è effettivamente un algoritmo del II ordine. Si studia dunque la dipendenza lineare di $\Delta K(t) = \frac{K(t) - K(0)}{K(0)}$ da Δt^2:

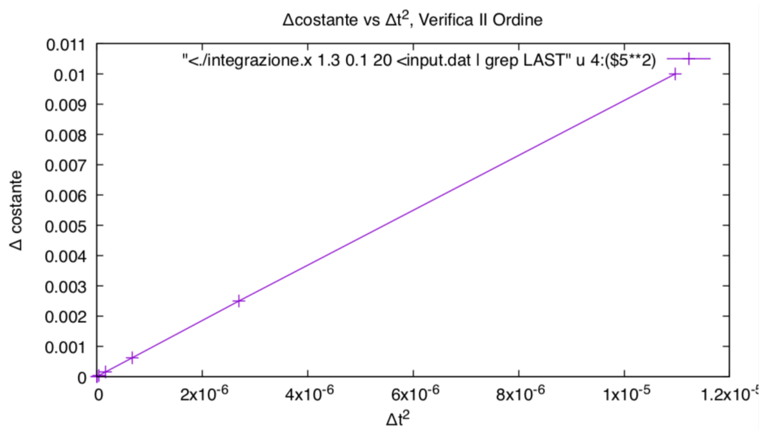

Figura 1: Fit: studio di $\Delta K(t)$ in funzione di Δt^2. I punti si dispongono chiaramente su di una retta.

- Punto a

Si è quindi scritto il programma "intergatore.c" che integrasse l'equazione differenziale presentata in "Introduzione", prendendo in input dal terminale i valori (in ordine) di v_0, ΔT e T_{max}, leggendo invece da un file "input.dat" il valore di $x_0 = 10$.

- Punto b

Come da richiesta, si riporta di seguito il grafico che mostra le traiettorie per $v_0 = 0.1$ e $v_0 = 1.2$. Si noti che il passo d'integrazione utilizzato è stato $\Delta t = 0.01$.

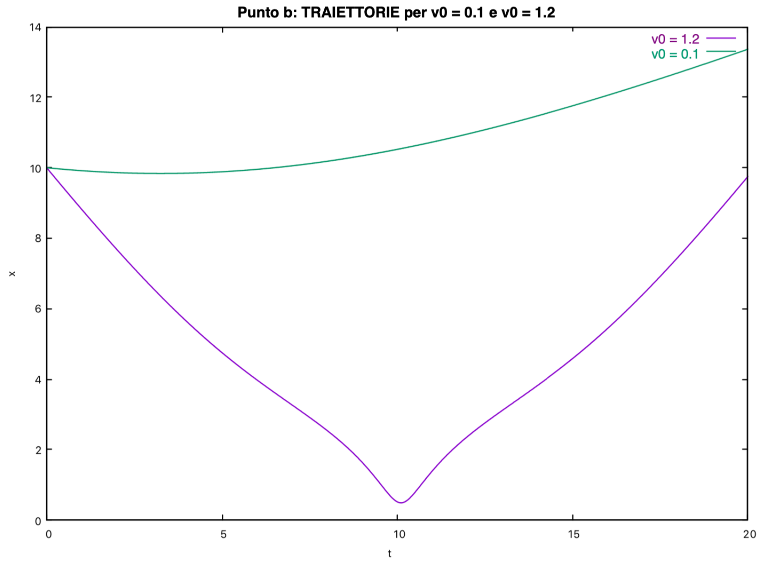

Figura 2: Traiettorie per $v_0 = 0.1$ e $v_0 = 1.2$, nell'intervallo $t \in [0,\, 20]$.

Eseguendo inoltre un grafico di $x(t)$ per diversi valori della velocità iniziale (nel range di $[0,\, 2]$), si è notato che aumentando v_0, il valore della x tende ad aumentare con una rapidità proporzionale al valore di v_0; ossia maggiore è (in modulo) la velocità iniziale, maggiore sarà la pendenza del grafico (ovviamente ciò accade da un certo tempo in poi, cfr. figura sottostante).

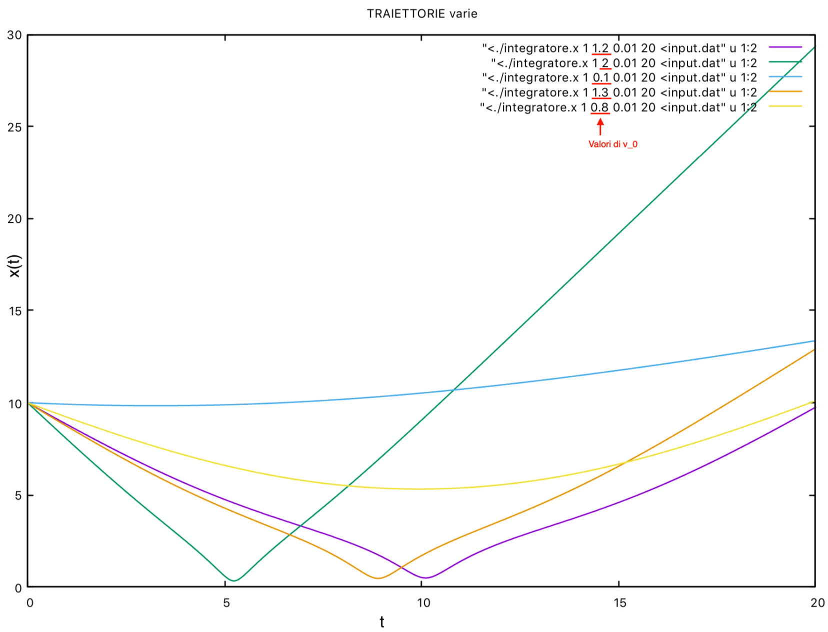

Figura 3: Traiettorie varie, nell'intervallo $t \in [0,\, 20]$.

Si nota anche che la particella, per v_0 abbastanza grandi, viene "attirata" verso $x = 0$ (vertice molto "pronunciato" in figura), salvo poi ricrescere con una pendenza tanto maggiore quanto grande era il valore di v_0.

Si riporta di seguito il grafico dello spazio delle fasi.

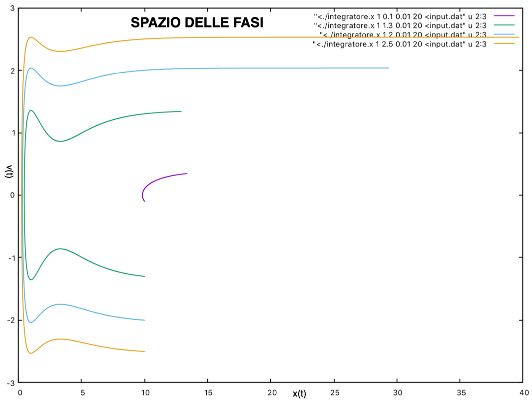

Figura 4: Grafico spazio delle fasi

Rappresentare lo spazio delle fasi, si vede, non è purtroppo di grande utilità; non ci permette di aggiungere altro.

- Punto c

Tramite il programma "puntoCeD.c", si riesce facilmente a stimare la velocità minima affinché la particella raggiunga il punto $x = 1$.

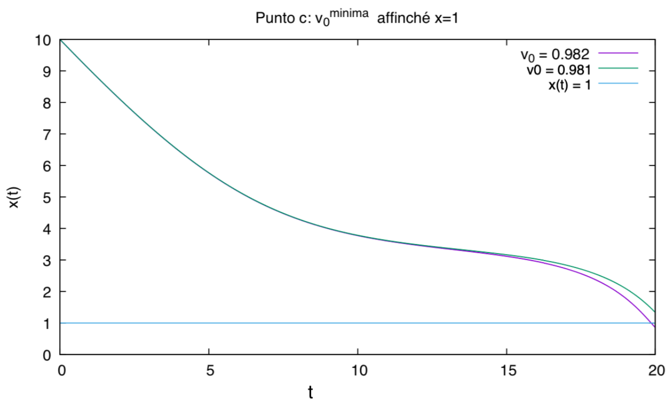

Figura 5: In viola la velocità limite $v_0^{min} = 0.982$; in verde $v_0^* = 0.981$

Tale valore è risultato $v_0^{min} = 0.982$ per uno studio limitato all'intervallo di tempo di prima: $t \in [0, 20]$. Per un T_{max} maggiore si otterrà un valore della velocità ovviamente diverso (minore). Ad esempio per $T_{max} = 25$, anche la velocità $v_0^* = 0.981$ raggiunge $x = 1$ (non sarà però il valore minimo).
Studiando infatti il moto in un intervallo più ampio, ad esempio per $T_{max} \geq 30$, si ottiene un valore $\overline{v}_0^{min} = 0.976$.

- Punto d

Fissato ora $v_0 = 1$, si sono stimati (sempre tramite "puntoCeD.c") i tempi t_1^* e t_2^* per cui la particella passa per $x = 1$. Essi sono risultati:

$$\begin{cases} t_1^* = 16.178 \\ \\ t_2^* = 17.394 \end{cases}$$

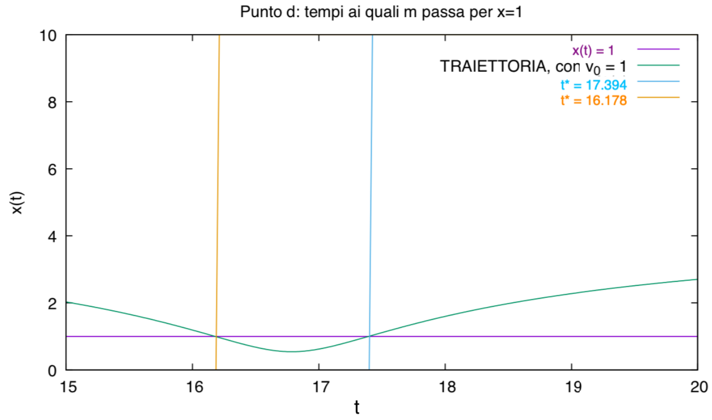

Figura 6: t_1^* in arancione e t_2^* in azzurro. Δt utilizzato: 0.01

Stampando poi su un classico file.dat i vari tempi t^* a cui avviene l'intersezione per $x = 1$, si è notato che, affinché il valore dei tempi t_1^* e t_2^* non cambi al variare del passo d'integrazione (prendendo in considerazione fino alla terza cifra decimale), è necessario un Δt pari a 0.024 o minore. Aumentando tale valore, infatti, il valore dei due tempi stampati risultava leggermente minore di quello esatto. Diminuendo invece il Δt da 0.024 in poi, si ottengono sempre i medesimi valori.

4.2 Parte 2

- Punto a

Si riporta in figura sottostante il moto della particella al variare di v_0 nel range [1, 2.5].

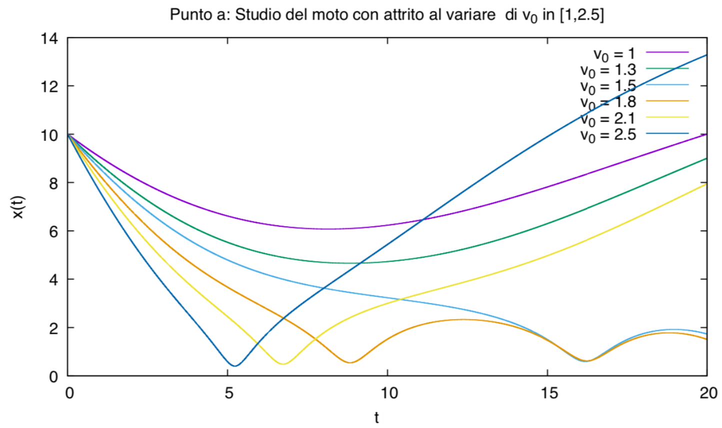

Figura 7: Traiettorie varie per $v_0 \in [1, 2.5]$

Si nota dalla figura (6) che per v_0 pari a 1.5 e 1.8 si ha un comportamento diverso rispetto a quando la particella parte con velocità diverse.
Con l'aggiunta le termine d'attrito infatti sembra che per certi intervalli di v_0, questi non permetta alla particella di proseguire il suo moto (con $x(t)$ che quindi va a crescere).
Si nota inoltre che per velocità "abbastanza piccole", quasi non si risente del termine d'attrito. Per velocità "grandi" (ad esempio pari a 2.1 o 2.5, mostrate in figura), invece, l'attrito non è tale da fermare la particella; essa riesce a proseguire.

- Punto b

Si vuole osservare, a questo punto, cosa succede alla particella nel limite di tempi molto grandi. Si è studiato dunque l'andamento di $x(t)$ per un intervallo di tempo $t \in [0, 250]$.
Tramite il terzo ed ultimo programma scritto ("parte2e3.c"), si è riuscito ad individuare quel range di v_0 per cui (con $T_{max} = 250$) si notano dei cambiamenti drastici.

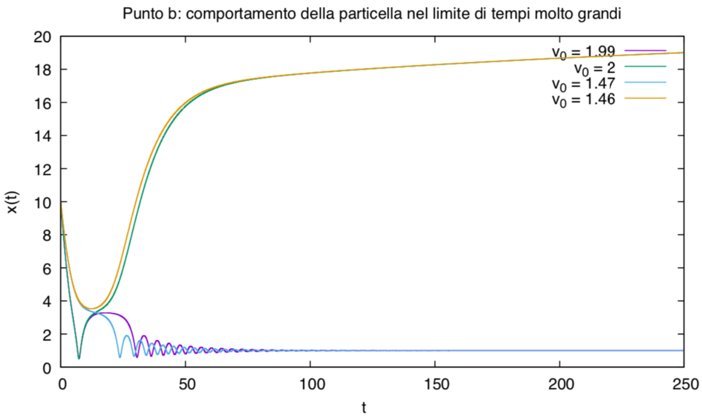

Figura 8: Cambiamento drastico nella posizione della particella per $T_{max} = 250$

Si conclude, allora, che per $1.47 \leq v_0 \leq 1.99$, la particella non riesce a "vincere" l'attrito e dunque tende, oscillando, a stabilizzarsi nella posizione $x = 1$.

4.3 Parte 3

Si è inizialmente osservato, in generale, l'andamento della particella prima descritto al variare di v_0 in (0, 4] e di γ in (0, 0.2]. Si presentano i seguenti grafici a titolo di esempio.

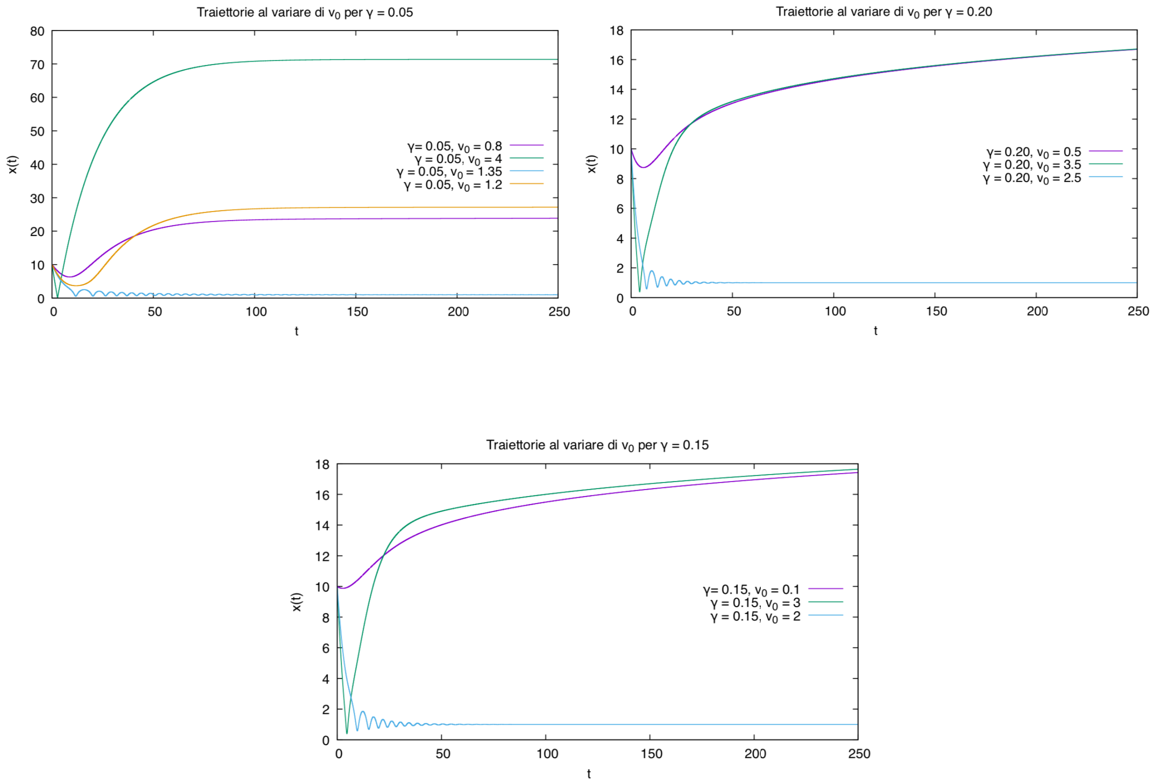

Figura 9: Cambiamento drastico nella posizione della particella ($T_{max} = 250$), al variare di γ e v_0.

Infine è stato studiato il cambiamento drastico nella posizione con v_0 e γ che variano negli intervalli prima citati.
Si è in particolare individuata quella regione del piano (v_0, γ) in cui la posizione asintotica vale x =1.

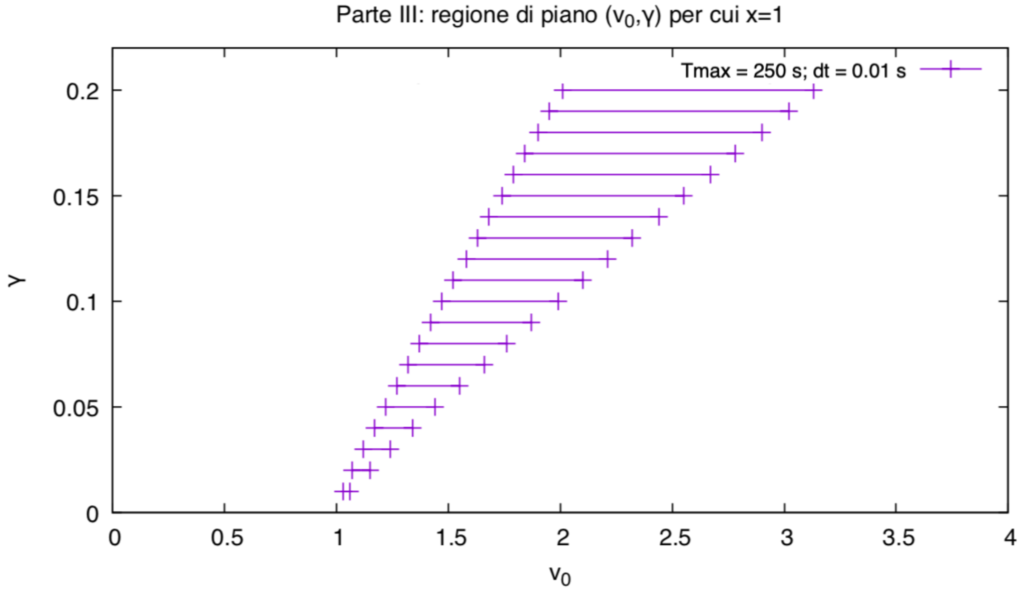

Figura 10: Regione di piano (v_0, γ) in cui x =1.

5 Conclusioni

5.1 Parte 1

In primo luogo, l'algoritmo *Verlet Velocità* è risultato del II ordine, come ipotizzato.

Si è ottenuto, poi, un valore di v_0^{min} tale che per $T_{max} = 20$ la particella passi per $x = 1$, pari a 0.982. Si deve far notare, però, che se viene preso in consideraizone un intervallo di tempo maggiore, v_0^{min} assumerà un altro risultato (minore di 0.982). Per valori di $T_{max} \geq 30$, v_0^{min} sarà sempre pari a 0.976.

Infine i tempi per cui $x = 1$, fissando $v_0 = 1$, sono risultati $t_1^* = 16.178$ e $t_2^* = 17.394$. E' necessario, inoltre, per ottenere sempre questi valori, integrare con un passo di integrazione $\Delta t \leq 0.024$. Questo è chiaro, aumentando il numero di passi (diminuendo il valore del passo d'integrazione), si ottiene una traiettoria fatta di punti sempre più vicini, e quindi più precisa. Si rischia dunque di eseguire un'integrazione troppo "grossolana" se i valori di Δt sono eccessivamente grandi.

5.2 Parte 2

Studiando il moto nell'intervallo di t [0, 250], si è notato che la particella resta ad oscillare attorno a $x = 1$ per valori di v_0 appartenenti all'intervallo [1.47, 1.99], in cui la particella non riesce a vincere l'attrito e tende, oscillando, a stabilizzarsi nella posizione $x = 1$.

5.3 Parte 3

Dal grafico in figura 10, si nota facilmente che all'aumentare del valore di γ, l'intervallo delle v_0, affinché $x = 1$, sarà più ampio, come ci si aspettava.
Una volta individuata la regione di piano (v_0, γ) per cui la particella tende a $x = 1$, si risponde allora all'ultimo quesito...
Per $\gamma \longrightarrow 0$, si torna al problema da studiare nella prima parte, ossia senza attrito (Parte I, punto c). Quindi, ad esempio, per un $T_{max} = 20$, il valore di v_0 tenderà a 0.982.
Per ottenere, invece, il valore di v_0 quando $\gamma \longrightarrow 0$, per $T_{max} = 250$, ci si avvale dell'algoritmo nel codice "puntoCeD.c" (funzione "*Calcolo_ Vmin*"), e si trova un valore di $\overline{v}_0^{min} = 0.976$ (sempre in valore assoluto).