

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA



DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

Corso di Laurea Magistrale in Finanza e Metodi

Quantitativi per l' Economia

# **REPORT LABORATORIO DI CALCOLO FINANZIARIO ED ATTUARIALE**

BATTISTONI MIRCO

350831

# REPORT BATTISTONI MIRCO 350831

In questo report sono presentati i risultati ottenuti nei 7 problem set assegnati, esplicitando le richieste e l'interpretazione di ogni esercizio, con l'ausilio di grafici e commenti.

## PROBLEM SET 1

Nel primo problem set si considera un portafoglio azionario con prezzo corrente  $S_0=1000$ , la cui evoluzione del prezzo  $S_t$  è descritta dall'equazione differenziale stocastica:  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$ .

### ES.1 VALORI ATTESI E QUANTILI - FORMULE ESATTE

Assegniamo valori significativi a  $\mu$  e  $\sigma$  (0.2 e 0.7) come richiesto, ricavando

$\text{mustar} = \mu - ((\sigma^2)/2) = -0.0450$ .

Calcoliamo il valore atteso di  $S_t$  attraverso la formula  $E(S_t) = S_0 * (\exp(\mu * T)) = 1105.17$

Calcoliamo la deviazione standard  $STD = E(S_t) * (\sqrt{\exp(\sigma^2 * T) - 1}) = 582.31$

Utilizzando la funzione norminv abbiamo calcolato i percentili di  $S_t$  con  $\alpha$  pari a 0.1%, 0.5%, 99.5% e 99.9%. In ordine, i valori ottenuti sono:

Q0: 211.80

Q1: 273.22

Q2: 3498.98

Q3: 4513.56

Questi valori suggeriscono un'alta variabilità del valore atteso, la quale era prevedibile visto il  $\sigma=0.7$ . Di seguito abbiamo calcolato i valori attesi di  $S_t$  oltre il quantile con stesso  $\alpha$  e i risultati ottenuti sono:

$E(S_t)$ : -2.79

$E(S_{t1})$ : -2.80

$E(S_{t2})$ : -3.78

$E(S_{t3})$ : -3.79

Inoltre, abbiamo calcolato il tasso di rendimento atteso periodale del fondo IT e il tasso equivalente su base annua I, usando le formule  $IT = \exp(\mu * T) - 1 = 0.105$  e  $I = \exp(\mu) - 1 = 0.221$ .

Essendo  $T=0.5$  ci aspettavamo un valore del tasso periodale quasi corrispondente alla metà di quello annuale. Infine, abbiamo calcolato il log-return atteso periodale del fondo,

$RT = (\mu - ((\sigma^2)/2)) * T = -0.0225$ , e il log-return equivalente su base annua,

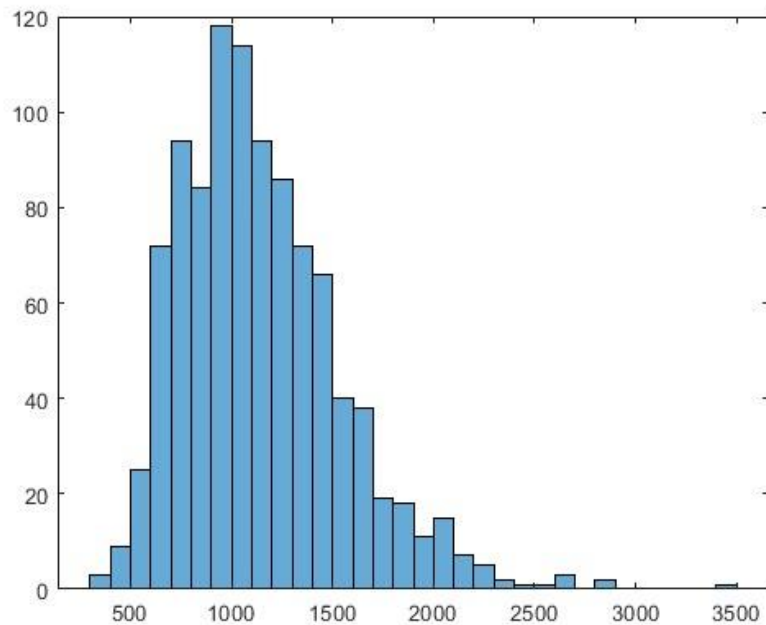
$R = (\mu - ((\sigma^2)/2)) = -0.045$ .

I valori negativi sono plausibili vista l'alta volatilità ( $\sigma=0.7$ ).

### ES.2 LA SIMULAZIONE

In questo esercizio dobbiamo effettuare delle simulazioni MonteCarlo per il valore finale di  $S_t$ , mantenendo gli stessi dati e fissando un passo di discretizzazione  $\Delta T$ , che si è scelto pari a  $T/100$ .

Dopo aver simulato 1000 valori finali di  $S_t$  utilizzando la funzione "normrnd" per generare numeri casuali dalla distribuzione normale standard, ne abbiamo illustrato la distribuzione empirica attraverso un istogramma.



Simuliamo con la medesima funzione i rendimenti effettivi e i rendimenti logaritmici, ottenendo due vettori  $1000 \times 1$ , il valore atteso di  $St$  (1134.82) e l'errore standard (411.15). I quantili della simulazione sono:

Q10: 180.80

Q11: 298.32

Q12: 3608.38

Q13: 4212.46

Dal confronto tra i percentili "simulati" e reali non si rilevano grandi differenze.

Come era prevedibile, all'aumentare del numero delle simulazioni, i valori empirici tendono a coincidere con quelli teorici. Infine, calcoliamo diversi valori della deviazione standard al variare di  $\sigma$ , concludendo che all'aumentare di  $\sigma$  vi è un aumento della deviazione standard e l'istogramma risulta più appiattito.

### ES.3 VALUTAZIONE MONTECARLO DI UNA CALL STANDARD

Sono dati i parametri  $S_0 = 1000$ ,  $K = 1000$ ,  $T = 0.5$  per la costruzione del modello.

Fissiamo  $\mu=0.02$  e  $\sigma=0.3$ .

Ci viene chiesto di ricavare il prezzo dell'opzione Call sul titolo rischioso  $S_0$ , con payoff

$CT = \max(ST-K, 0)$  ed è stato ottenuto come risultato 83.68; confrontandolo con il prezzo esatto (89.12) possiamo concludere che vi è un errore di approssimazione di 5,44.

Si ripete la stima MC del prezzo e la misurazione dell'errore di stima con  $M = (1000, 10000, 100000)$  e si ottengono i seguenti risultati:

Numero di simulazioni: 1000

Prezzo Monte Carlo dell'opzione: 84.6840

Errore di approssimazione: 4.4339

Numero di simulazioni: 10000

Prezzo Monte Carlo dell'opzione: 90.3734

Errore di approssimazione: 1.2555

Numero di simulazioni: 100000  
Prezzo Monte Carlo dell'opzione: 89.7663  
Errore di approssimazione: 0.6484

Concludiamo quindi che all'aumentare del numero di simulazioni il prezzo stimato si avvicina al prezzo esatto, e l'errore di approssimazione diminuisce, come ci potevamo immaginare.

## PROBLEM SET 2

In generale, un'opzione esotica è uno strumento derivato che spesso consente alle banche margini di intermediazione molto più elevati di quelli sui prodotti standard, detti plain vanilla. Queste opzioni sono più complesse da valutare e da gestire rispetto alle plain vanilla, e solitamente comportano una maggiore esposizione al rischio, ripagata dalla possibilità di personalizzare maggiormente la strategia.

### ES.1 VALUTAZIONE DI CONTRATTI DERIVATI ESOTICI

Sono dati diversi contratti derivati esotici da valutare, in particolare opzioni con barriera, opzioni asiatiche e opzioni lookback. Possiamo decidere se calcolare il prezzo di una put o quello di una call, se non è specificato nei dati.

I contratti derivati considerati sono:

- Opzione PUT con Barriera down and out fissata al valore  $H = 900$ , prezzo di esercizio  $K = 1100$  (modificato per ottenere un prezzo maggiore per l'opzione) e scadenza  $T = 1$  anno. Per valutare questa opzione, dobbiamo tener conto del fatto che se  $S_t$  durante il suo percorso scende al di sotto della barriera  $H$  l'opzione avrà payoff pari a zero (Usiamo un "if").

Abbiamo generato 10000 traiettorie del processo  $S_t$  da una normale standard e discretizzato il tempo in 250 passi giornalieri ( $dt=1/250$ ). Successivamente, abbiamo calcolato il prezzo dell'opzione Put con il metodo Monte Carlo. Il prezzo si ottiene calcolando la media scontata dei payoff (4.71).

- Opzione asiatica "average price" Call con prezzo di esercizio  $K = 1000$  e scadenza  $T = 0.5$  anni. Per questa opzione, abbiamo seguito lo stesso procedimento utilizzato per l'opzione Put. In questo caso, il payoff dell'opzione è dato dalla differenza tra il prezzo medio di  $S_t$  durante l'intervallo di tempo  $[0, T]$  e lo strike price  $K$ . Il prezzo si ottiene calcolando la media scontata per 0.5 anni dei payoff (53.87).

- Opzione asiatica "average strike" Put con scadenza  $T = 0.75$  anni. In questo caso, average strike rappresenta la media dei prezzi di  $S_t$  durante l'intervallo  $[0, T]$ . Il payoff dell'opzione è dato dalla differenza tra l'average strike e il prezzo corrente  $S_0$ , se positiva. Il prezzo si ottiene calcolando la media scontata per 0.75 anni dei payoff (97.04).

- Opzione lookback "call" con scadenza  $T = 1$  anno e payoff  $DT := S_T - \min_{0 \leq t \leq T} S_t$

Le opzioni lookback hanno un payoff calcolato sulla base di prezzi del sottostante già realizzati. Sono differenti dalle opzioni asiatiche perché non considerano una media di prezzi in un determinato periodo ma il valore del sottostante più conveniente in tutto il suo percorso. Questo permette all'holder di scegliere il valore del prezzo del sottostante che garantisce il payoff più alto possibile. Infatti, il prezzo di tale opzione è il più elevato tra i valori considerati (225.44).

Per ciascuna opzione, abbiamo eseguito la valutazione utilizzando diversi numeri di simulazioni  $M$  (1000, 10000, 100000) per studiare l'effetto della precisione sulla stima dei prezzi. In ogni simulazione, abbiamo generato il numero specificato di traiettorie del processo  $S_t$  e calcolato i prezzi approssimati utilizzando il metodo Monte Carlo. Ad esempio, nel caso della put down out abbiamo ottenuto 3.57 con 1000, 4.71 con 10000 e 4.75 con 100000, quindi il prezzo è aumentato con l'aumentare del numero delle simulazioni, inoltre il miglioramento della stima tra 10000 e 100000 simulazioni non è così evidente.

## PROBLEM SET 3

Si considera un modello di Black & Scholes in cui il titolo rischioso  $S$ , ha prezzo  $S_0 = 1000$  e la sua evoluzione stocastica segue un moto browniano geometrico  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$ . L'intensità istantanea d'interesse del mercato  $r$  è data costante.

### ES.1 LE FORMULE CHIUSE PER LE GREEKS E APPLICAZIONI

Nella funzione per calcolare il prezzo di una call la formula principale è:

" $\text{CallPrice} = S_0 * N_1 - K * \exp(-r * T) * N$ ", nella funzione per il Delta è " $\text{Delta} = N_1$ ", mentre nella funzione per il Vega è " $\text{Vega} = S_0 * \sqrt{T} * \text{normpdf}(d_1)$ ".

Definite le tre funzioni e fissati i parametri di input  $S_0=1000$ ,  $K=1000$ ,  $r=0.03$ ,  $T=1$  e  $\sigma=0.3$  otteniamo:

```
>> CallPrice(1000, 1000, 0.03, 1, 0.3)
132.8331
```

```
>> Delta(1000, 1000, 0.03, 1, 0.3)
0.5987
```

```
>> Vega(1000, 1000, 0.03, 1, 0.3)
386.6681
```

Per le richieste al punto 2 e 3, inizialmente definiamo una funzione chiamata `sim_trajectories`. Impostiamo come Parametri di input  $M$ : Numero di traiettorie da simulare,  $N$ : Numero di passi, drift: Drift del processo, diffusion: Diffusione del processo, `initialValue`: Valore iniziale del sottostante.

Questa funzione restituisce una matrice in cui ogni riga rappresenta una traiettoria del prezzo del titolo.

In seguito, tenendo conto della riduzione progressiva della "time to maturity" e, tramite formule chiuse, calcoliamo il prezzo esatto dell'opzione ad ogni passo, con il codice che segue:

$\text{PriceCall}(i, j-1) = \text{sim\_trajectories}(i, j) * \text{normcdf}(d_1) - K * \exp(-r * \text{timeToMaturity}) * \text{normcdf}(d_2)$ .

Successivamente calcoliamo la media "`AvgPriceCall`" come "`mean(PriceCall)`" e utilizzando come prima un ciclo "for", impostiamo una strategia di Delta Hedging che ci renderebbe Delta Neutral in ogni istante se attuata. Nello specifico, la nostra posizione non risentirebbe di variazioni di prezzo del sottostante nell'arco di durata dell'investimento, grazie ai continui ribilanciamenti della quota di  $S$  acquistata. Un estratto del codice utilizzato è: `InvSt(i, j-1) = delta`; il quale calcola la quota di  $S_t$  da detenere ad ogni passo.

## ES.2 MONTECARLO E APPLICAZIONE AL CALCOLO DELLE GREEKS

Sono dati  $K=1000$  e  $T= 0.5$  anni e ci è richiesto di assegnare valori significativi agli altri parametri del modello. Utilizziamo il metodo Monte Carlo Finite Difference “forward”, ovvero con una piccola perturbazione in avanti, e il Monte Carlo Finite Difference “central”, ovvero con due piccole perturbazioni (una in avanti e una indietro), per calcolare il Delta e il Vega di una Call standard con scadenza in  $T$ . Ripetiamo la procedura variando il numero delle simulazioni da 1000 a 10000 e 100000.

Assegniamo i seguenti valori ai parametri del modello:

$S_0 = 1000$ ,  $K = 1000$ ,  $r = 0.05$ ,  $T = 0.5$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $M = 100000$ ,  $h=0.01$  (passo central)

I risultati ottenuti sono:

Monte Carlo Finite Difference “forward” (perturbazione  $Dx=0.01$ ):

$M=1000$      $\Delta = 0.6324$      $Vega = 376,74$

$M=10000$      $\Delta = 0.6353$      $Vega = 374,98$

$M=100000$      $\Delta = 0.6378$      $Vega = 375,04$

Monte Carlo Finite Difference “central” (Perturbazione  $Dx = +/- 0.01$ ):

$M=1000$      $\Delta = 0.6350$      $Vega = 375,18$

$M=10000$      $\Delta = 0.6361$      $Vega = 375,23$

$M=100000$      $\Delta = 0.6365$      $Vega = 375,24$

I valori teorici ottenuti tramite formula esatta sono  $\Delta = 0.6366$  e  $Vega = 375,24$ .

Le due greche rappresentano rispettivamente la derivata prima del prezzo rispetto al sottostante e la derivata prima del prezzo rispetto alla volatilità.

Concludiamo che le approssimazioni ottenute sono molto buone, e all’aumentare del numero di simulazioni convergono ai valori teorici. In particolare, con il metodo “central” siamo arrivati praticamente ad una convergenza perfetta; probabilmente considerando variazioni sia positive che negative la sua stima è più accurata.

Come opzione esotica a scelta del problem set 2, abbiamo optato per l’opzione lookback call. Calcolando il delta e il vega dell’opzione con il metodo Monte Carlo Finite Difference “central” abbiamo ottenuto:

$\Delta = 9.1345$      $Vega = -970,34$

Il Vega negativo può essere spiegato dal fatto che nell’opzione lookback la volatilità è un fattore critico, poiché aumenta la probabilità di oscillazione del prezzo, sia in positivo che in negativo. Infatti, il prezzo dell’opzione dipende dal valore minimo o massimo raggiunto dal prezzo del sottostante durante il periodo di vita dell’opzione.

## ES. 3 MONTE CARLO E HEDGING DINAMICO

Nel terzo esercizio del problem set, invece, ci viene richiesto di costruire una strategia dinamica di hedging tramite il metodo Monte Carlo.

Gli input utilizzati sono:

$S_0 = 1000$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $K = 1000$ ,  $T = 1$ ,  $M = 10000$  (numero di simulazioni Montecarlo),  $N = 250$  (numero di passi),  $\Delta t = T / N$ .

Simuliamo i 10000 percorsi MC per il sottostante, poi calcoliamo il valore dell'opzione in ogni scenario. Per ogni revisione, viene calcolato il delta dell'opzione utilizzando il metodo delle differenze finite e la posizione di copertura viene aggiornata in base al delta calcolato.

I risultati sono:

t0(partenza) : Prezzo opzione= 183, Prezzo Titolo=1000, Delta=0.81, Posizione=810

t1(1° revisione): Prezzo opzione= 321, Prezzo Titolo=1080, Delta=0.94, Posizione=975

t2(2° revisione): Prezzo opzione= 216, Prezzo Titolo=1032, Delta=0.83, Posizione=832,5

La prima conclusione è che l'errore di discretizzazione è significativo (maggiore di 0,20), come ci potevamo aspettare, visto che abbiamo un numero molto esiguo di revisioni (solo 2).

Tuttavia, il metodo permette di tenere conto delle fluttuazioni casuali dei prezzi degli strumenti finanziari nel tempo. Potenzialmente una strategia di hedging con un maggiore numero di revisioni può dare ottimi risultati. Nello specifico, si può valutare se la strategia ha generato profitti o perdite complessive, esaminare le posizioni di copertura per capire come la strategia ha mitigato il rischio e protetto il valore dell'opzione.

In conclusione, il metodo di simulazione Monte Carlo consente di adottare decisioni di copertura più informate e gestire meglio il rischio di portafoglio, date opportune condizioni come ad esempio l'ampiezza del numero di simulazioni.

## PROBLEM SET 4

In questo problem set lavoriamo con due file excel, EUROSTOXX-Daily e EUROSTOXX-Intraday, relativi ai prezzi dell'EUROSTOXX50 rispettivamente con frequenza giornaliera e a 5 minuti. Inoltre, abbiamo i prezzi delle opzioni CALL sullo stesso indice al giorno 10 marzo.

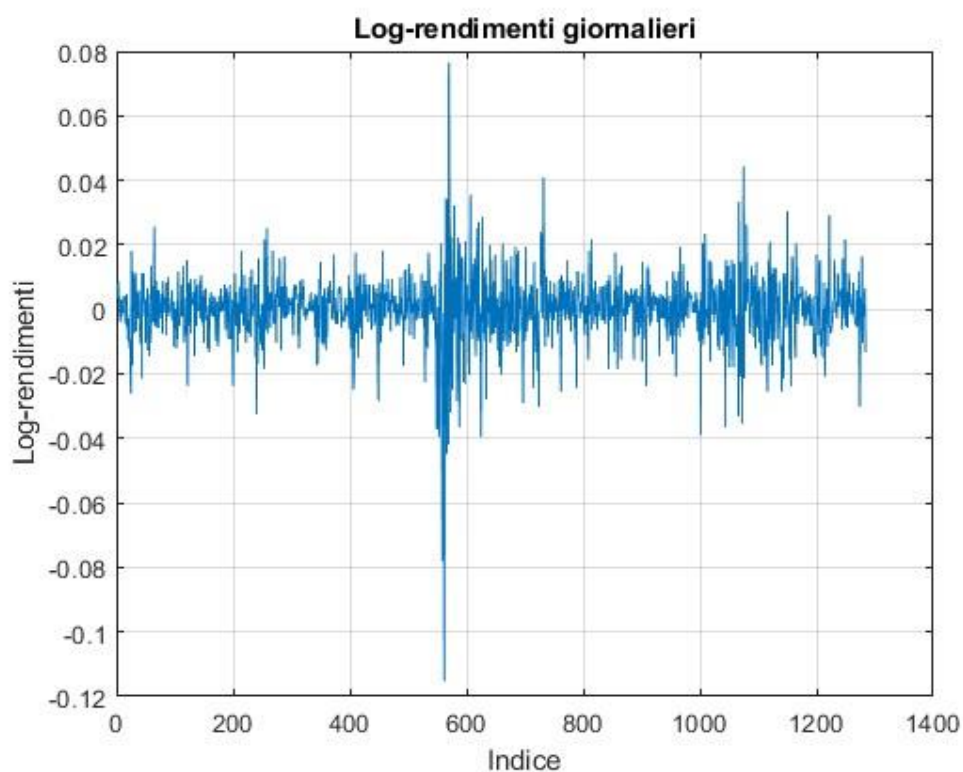
### ES.1 VOLATILITÀ STORICA

La volatilità storica è una misura statistica della volatilità di un titolo o di altri strumenti finanziari in riferimento ad un determinato periodo di tempo. Per la sua determinazione è necessario stabilire un periodo di tempo da usare come riferimento, si basa comunque su osservazioni almeno giornaliere. Il suo valore in percentuale indica la variazione in relazione al periodo di riferimento. Abbiamo diverse richieste, nelle quali spesso dobbiamo costruire grafici e analizzare i dati.

Rappresentiamo graficamente il prezzo giornaliero per la totalità della serie storica assegnata.



Calcolati i log-rendimenti giornalieri, costruiamo il grafico:



I log rendimenti hanno una media e una varianza relativamente costanti nel tempo e aumentano la facilità dell'interpretazione.



Ora effettuiamo un'analisi statistica descrittiva dei dati, di cui si riportano i risultati:

Media= 0.000111

Mediana= 0.000731

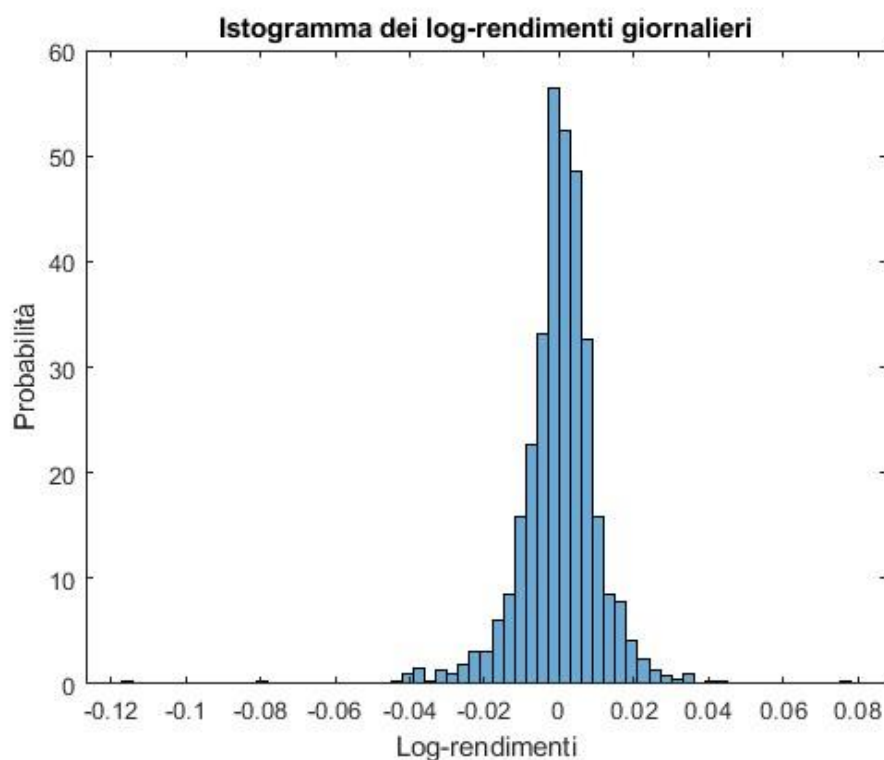
Varianza= 0.000119

Deviazione standard= 0.010862

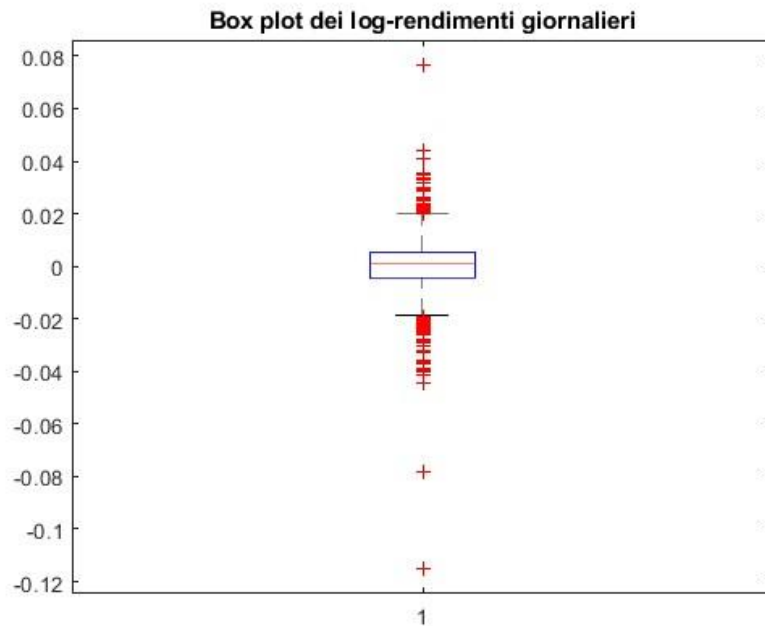
Skewness= -1.257120

Kurtosis= 17.817045

Notiamo che la deviazione standard ha un valore molto basso, quasi prossimo allo zero, il quale è giustificato dal valore altrettanto basso della media. Una skewness negativa indica che la coda della distribuzione è spostata verso sinistra, mentre una curtosi pari a 17 ci indica che le code della distribuzione sono più alte del normale, perciò abbiamo una maggiore probabilità di osservare valori estremi dei rendimenti (forti rialzi e anche forti cali del prezzo). Questo è un problema comune in finanza, molti asset finanziari sono soggetti a variazioni estreme più frequentemente di quanto è teorizzato nei modelli.



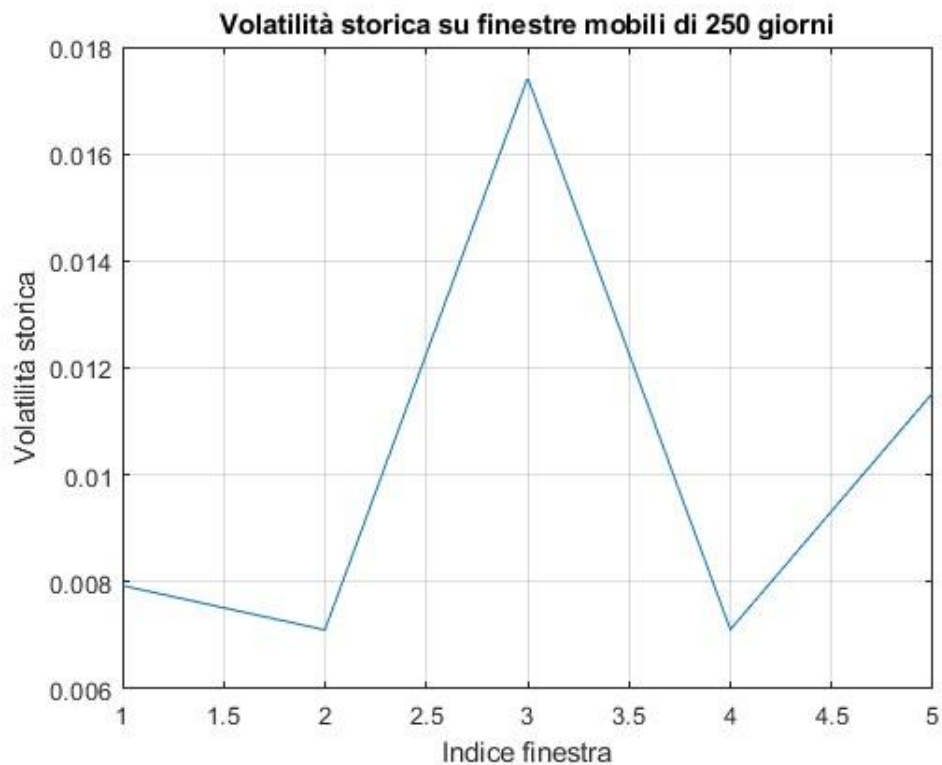
Osservando l'istogramma dei log rendimenti giornalieri, notiamo che conferma le nostre attese: la media sembra essere pari a zero, la dispersione è limitata e infine ha una leggera asimmetria verso sinistra.



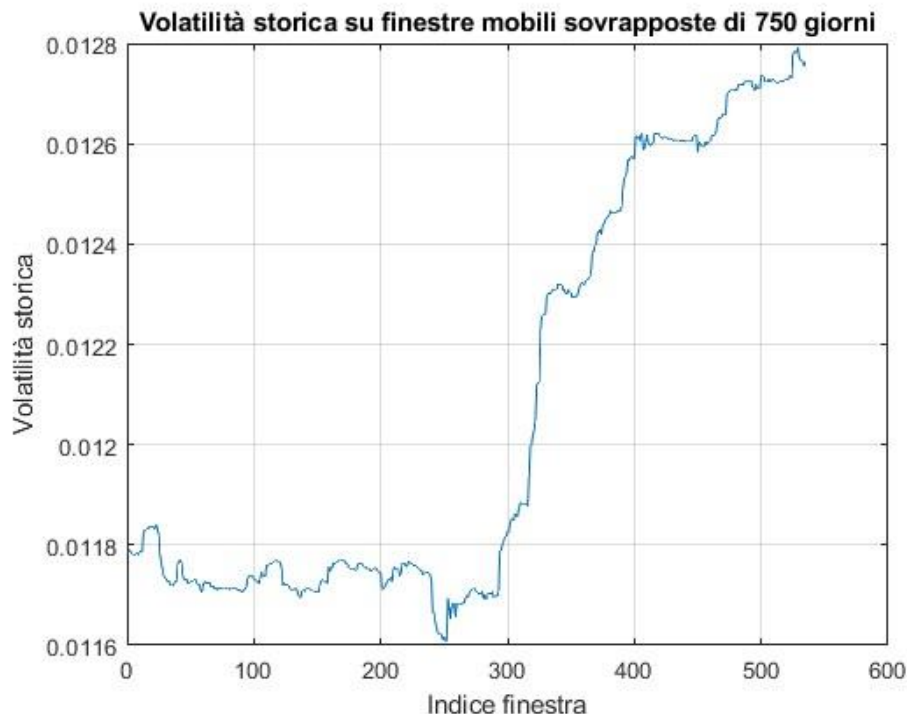
Presentiamo anche un box-plot dei rendimenti, il quale ci conferma che i valori sono ben centrati attorno alla mediana, ad eccezioni di qualche osservazione estrema. È evidente anche da questo grafico che la volatilità ha un valore molto basso.

Spostiamo ora il nostro focus sulla volatilità storica, calcolandola considerando tutte le osservazioni della serie e su finestre mobili di diversa lunghezza.

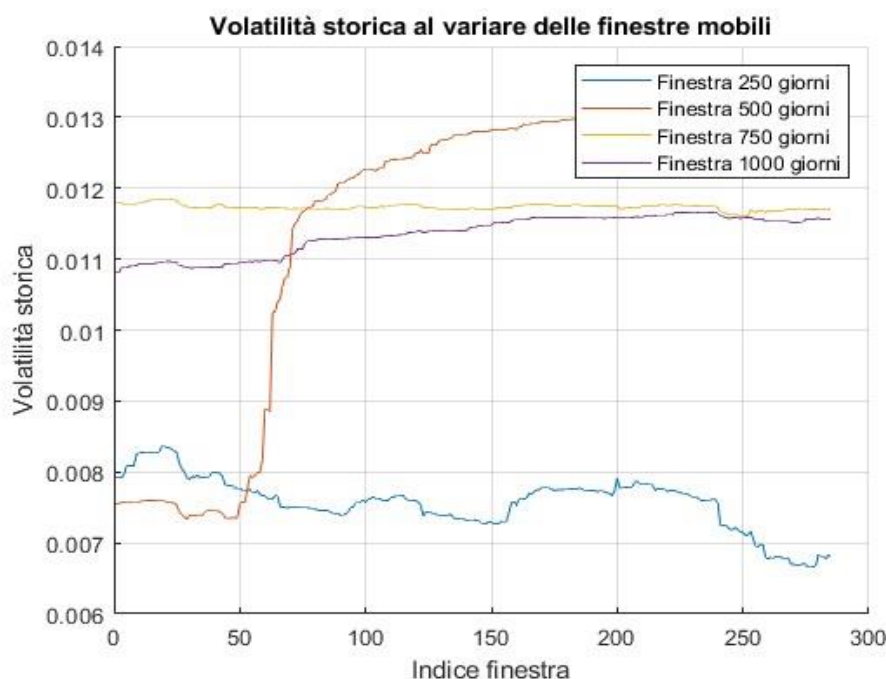
Il valore della volatilità storica considerando tutte le osservazioni della serie è pari a 0.011.



In questo grafico viene riportata la volatilità storica su finestre mobili di 250 giorni non overlapping. Il grafico mostra una forma insolita, che parte da un livello di partenza basso, raggiunge velocemente il picco e poi ritorna sostanzialmente al livello iniziale. La parte centrale si potrebbe interpretare come un periodo di elevata volatilità e di incertezza sui rendimenti.



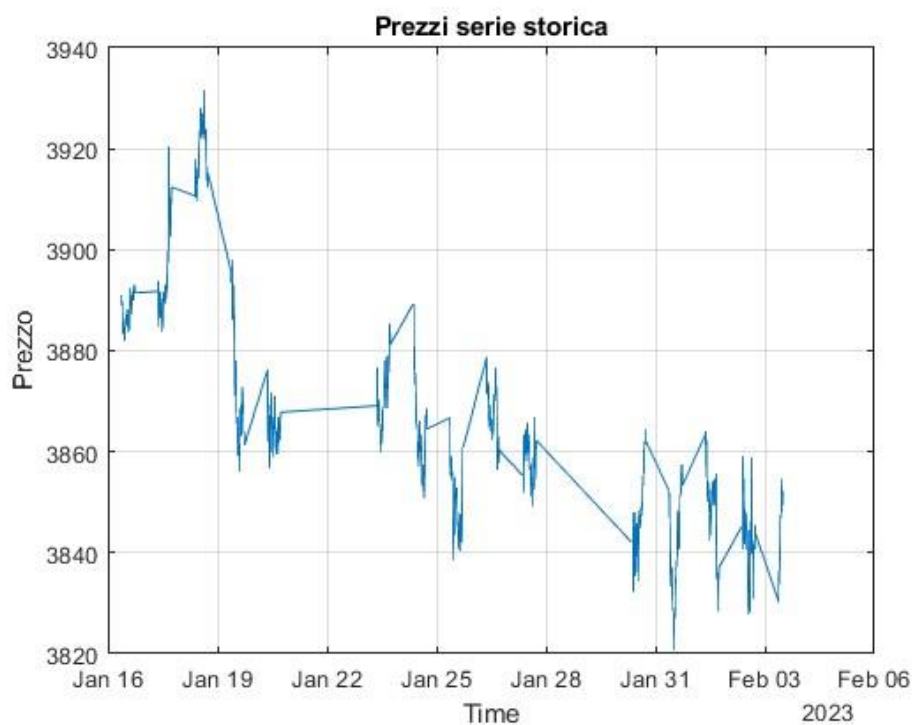
Questo grafico rappresenta la volatilità storica su finestre mobili sovrapposte di 750 giorni. Dopo un periodo iniziale di stasi, si nota un aumento molto rapido della volatilità, che viene poi mantenuto nel tempo. La volatilità storica parte da un valore di 0.0118 e raggiunge il suo valore massimo, circa 0.0128, dopo la finestra 500. Anche da questo grafico notiamo un periodo di elevata volatilità e incertezza sui rendimenti. Complessivamente, il grafico mostra una tendenza crescente della volatilità storica all'aumentare delle finestre mobili.



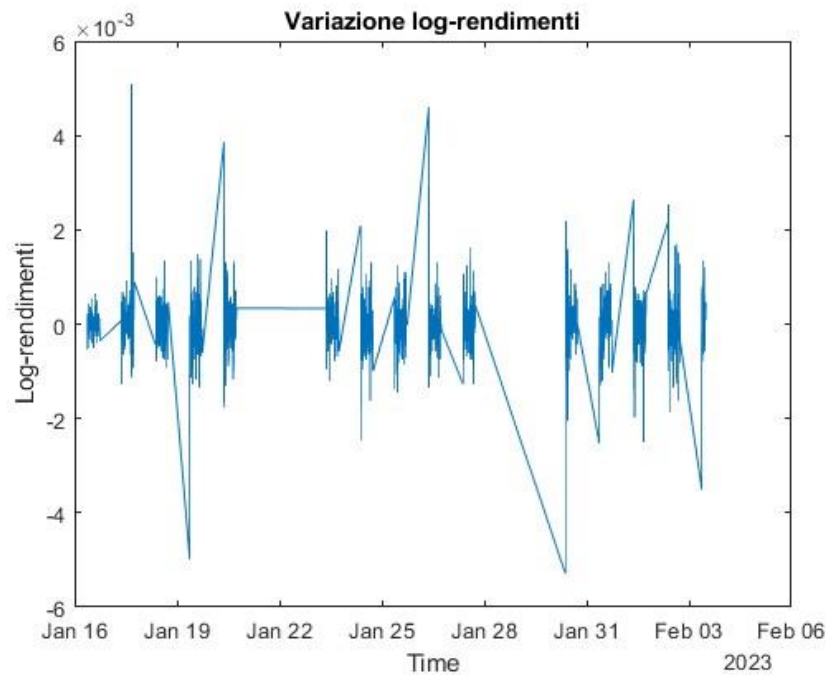
In questo grafico osserviamo i valori della volatilità storica al variare della lunghezza delle finestre mobili (250,500,750 e 1000 giorni). Ciò permette di osservare le diverse dinamiche della volatilità nel tempo. La prima finestra mostra un trend stabile nel breve periodo, la seconda finestra mobile mostra un trend crescente della volatilità storica, mentre le ultime due finestre sono vicine tra loro e mostrano un andamento quasi costante, indicando che nel lungo periodo le oscillazioni della volatilità sono limitate.

## ES.2 VOLATILITÀ REALIZZATA

Ci riferiamo alle osservazioni con frequenza infragiornaliera, infatti la volatilità realizzata può essere calcolata anche intraday, addirittura per periodi di tempo nell'ordine dei minuti. Nel nostro caso la frequenza è pari a 5 minuti.

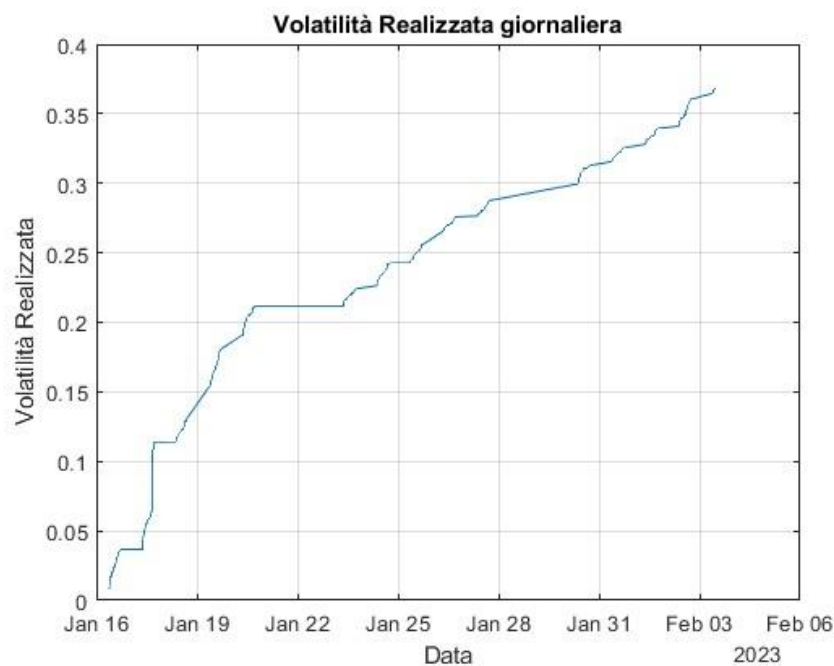


In questo grafico è rappresentato l'andamento dei prezzi intraday, nei giorni che vanno dal 16 gennaio 2023 al 6 febbraio 2023. Notiamo che il trend è complessivamente decrescente, ma che durante la singola giornata ci sono diversi rialzi, anche se non molto significativi. Rispetto al grafico con i prezzi giornalieri, il prezzo sembra più variabile, ma non ci dimentichiamo che stiamo osservando un periodo molto limitato di tempo e le variazioni di prezzo sono comunque inferiori all' 1.5%.



In questo grafico sono rappresentati i log-rendimenti intraday, in modo molto intuitivo possiamo trarre informazioni su quali sono state le giornate in cui la variabilità è stata generalmente maggiore.

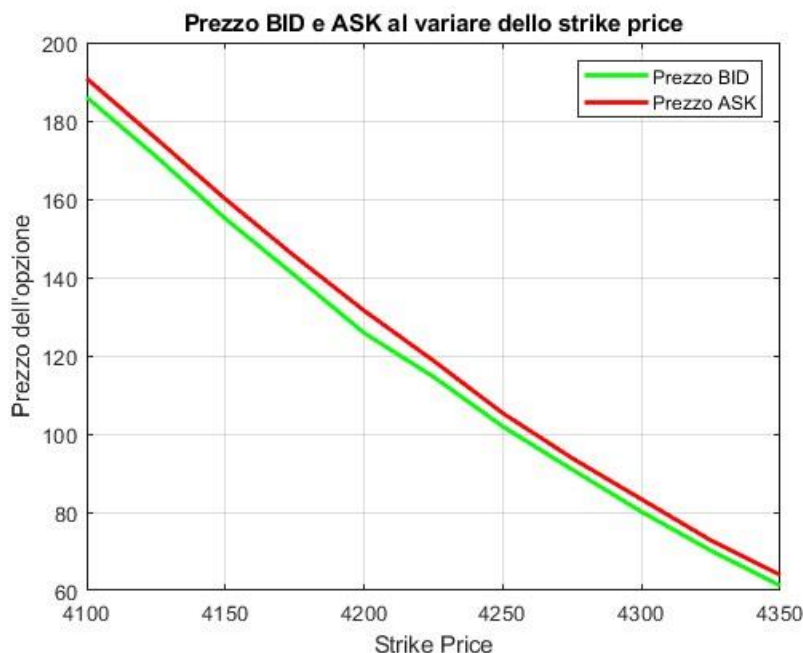
In seguito, abbiamo calcolato la realized volatility con la formula:  
 $\text{realizedVariance} = \text{cumsum}(\text{squaredReturns})$  ottenendo come risultato un vettore da 1489 valori,  
 infine abbiamo calcolato la realized volatility giornaliera (annualizzata) considerando le osservazioni della giornata e le abbiamo rappresentate con un grafico. La formula è :  
 $\text{realizedVolatility} = \text{sqrt}(\text{realizedVariance}) * \text{sqrt}(252)$ .



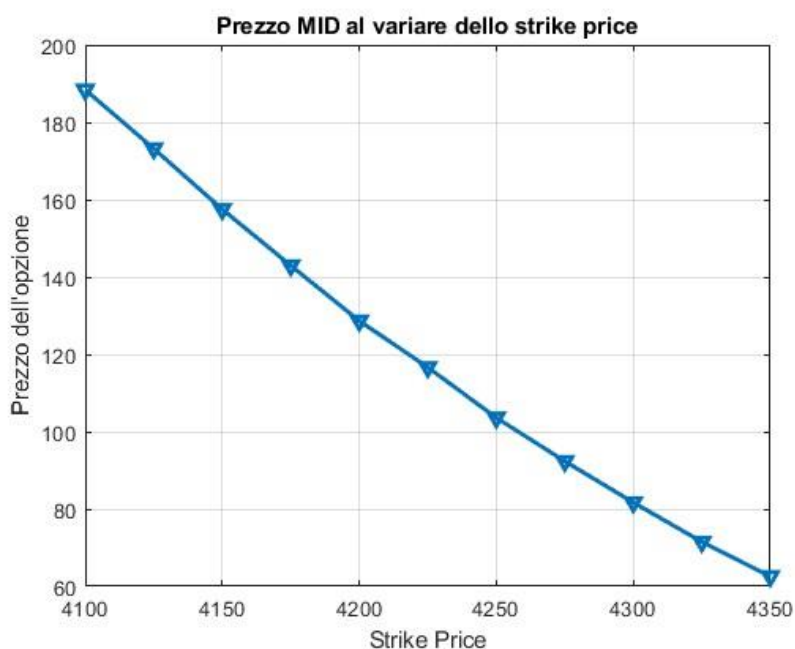
Notiamo un chiaro trend crescente, ma soprattutto una minore volatilità realizzata rispetto all'intraday, che era prevedibile considerando le fluttuazioni ripetute che subiscono i prezzi durante una giornata di borsa.

### ES.3 VOLATILITÀ IMPLICITA

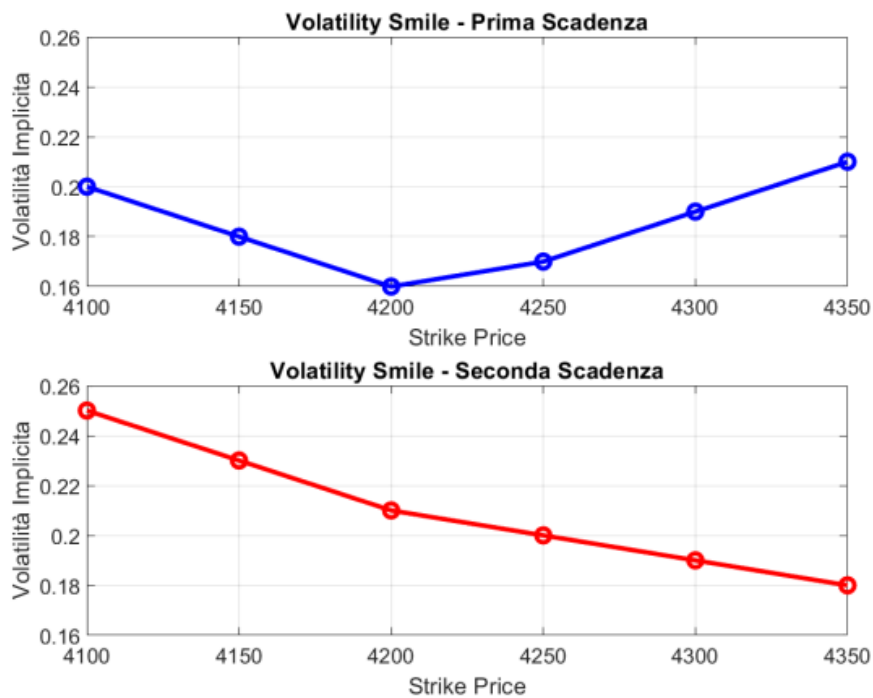
La volatilità implicita viene ottenuta dai prezzi di mercato delle opzioni e rappresenta ciò che il mercato si aspetta come volatilità per l'asset sottostante durante la vita dell'opzione. Essa viene usata per la valutazione delle opzioni, per la gestione del rischio e anche per la formulazione di strategie finanziarie.



In questo grafico sono rappresentati i prezzi BID e ASK (offerta e domanda) in riferimento a delle Call standard presenti su EuroStoxx50. Possiamo notare che sono molto vicini, come ci si aspetta in un mercato spesso, ma all'aumentare dello strike sembrano quasi convergere. Ovviamente il prezzo dell'opzione diminuisce all'aumentare dello strike, visto che parliamo di opzioni Call.



In questo grafico è rappresentato il prezzo MID, ovvero la semisomma del prezzo BID e ASK, al variare dello strike, che quindi segue l'andamento del grafico precedente.



Infine, abbiamo calcolato la volatilità implicita con una funzione che utilizza la procedura iterativa di Newton. Questo grafico rappresenta il volatility smile per due scadenze prese a scelta. Osservando il primo, si può notare come assuma quasi la forma di uno smile, scendendo e poi risalendo, mentre il secondo mostra uno smirk, infatti all'aumentare dello strike price la volatilità decresce solamente.

## PROBLEM SET 5

Siamo in un modello di Heston in cui il titolo rischioso  $S_0$  con prezzo pari a 1000, ha evoluzione stocastica descritta dall' e.d.s.:

$$dS_t = r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_t$$

$$dv_t = \kappa (\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t$$

e il "money market account" ha intensità istantanea di interesse pari a  $r = 0.01$ .

### ES.1 SIMULAZIONE DELLA DINAMICA SOTTO Q

Assegniamo dei valori significativi ai parametri del modello (sotto la misura  $Q$ ) oltre a quelli già forniti:

$S_0 = 1000$ ,  $r = 0.01$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $M = 1000$ ,  $T = 1$ ,  $N = 250$ ,  $dt = T/N$ ,  
 $\kappa$  (tasso di ritorno alla media) = 1.5,  $\theta$  (volatilità di lungo periodo) = 0.05,  
 $\rho = -0.5$  (coefficiente di correlazione),  $V_0$  (varianza iniziale) = 0.04

Simuliamo la dinamica del modello di Heston per il log-prezzo dell'asset rischioso (ignorando il drift) e della sua varianza istantanea per  $M$  traiettorie e  $N$  passi considerando lo schema di discretizzazione di Eulero.



In seguito, verifichiamo se in alcune traiettorie la varianza diventa negativa ad un qualche passo dell'iterazione. Teoricamente la varianza nel modello di Heston non può essere negativa. Ripetiamo poi la simulazione adottando lo schema di "full-truncation", il quale risolve il problema precedente portando a zero la varianza istantanea se questa diventa negativa, quindi avremo solo valori positivi della varianza.

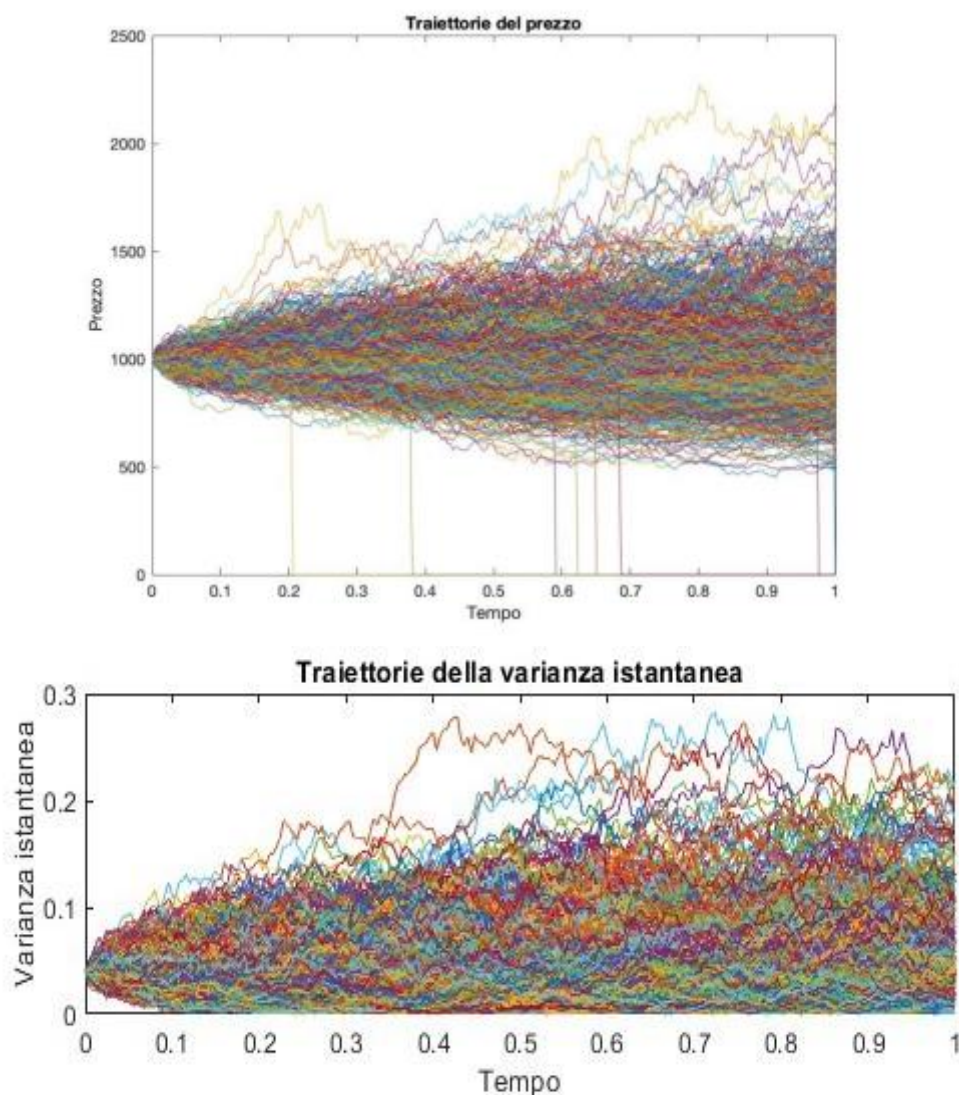
Infine, rappresentiamo con un istogramma i log-prezzi e la varianza istantanea al tempo T.

I risultati sono riportati di seguito:

Traiettorie con varianza negativa (Schema di Eulero): 15

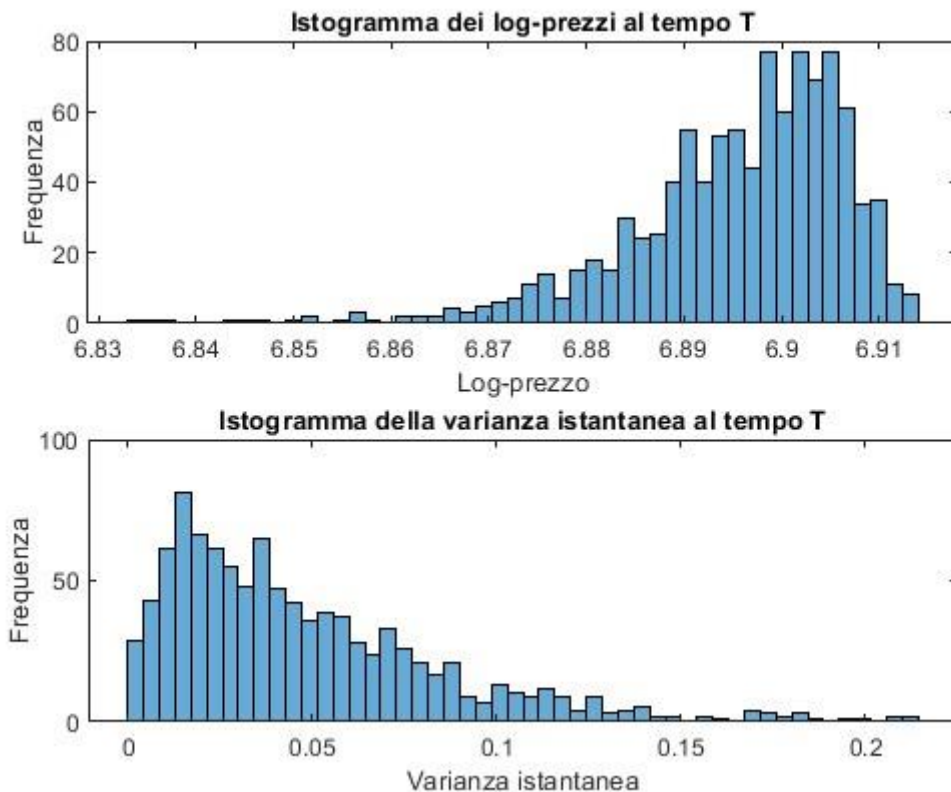
Traiettorie con varianza negativa (Modello con "full-truncation"): 0

Quindi effettivamente vi erano 15 traiettorie negative nella simulazione con lo schema di Eulero, problema poi risolto con lo schema "full-truncation".



In questi grafici osserviamo le traiettorie del prezzo e della varianza istantanea. Possiamo osservare come il prezzo ha quasi lo stesso numero di traiettorie negative e positive, mentre la varianza istantanea non ha traiettorie negative, come ci aspettavamo dopo aver applicato lo schema di "full truncation".





Da questi istogrammi possiamo osservare come i log-prezzi siano distribuiti come una log-normale, mentre la distribuzione della varianza istantanea ricorda una chi-quadrato non centrata.

## ES.2 VALUTAZIONE MONTECARLO DI PRODOTTI DERIVATI

Usando la simulazione effettuata nel primo esercizio, abbiamo ottenuto l'approssimazione del prezzo dei seguenti contratti derivati:

- Call Standard con scadenza in T e  $K=998$
- Opzione asiatica "average price" con scadenza in T e prezzo di esercizio  $K=1000$
- Opzione lookback "call" con scadenza in T

I risultati ottenuti sono:

Prezzo CALL standard: 0.40188

Prezzo opzione asiatica "average price": 0.056716

Prezzo opzione lookback "call": 0.56037

Osserviamo che i prezzi della Call standard e della lookback Call sono abbastanza vicini, mentre il prezzo dell'opzione asiatica "average price" è molto basso, quasi zero.

## PROBLEM SET 6

In questo problem set si considerano le proprietà probabilistiche dei modelli univariati di Vasicek e di Cox, Ingelson e Ross (CIR), entrambi utilizzati per la valutazione di contratti derivati su tassi di interesse (IRS: Interest Rate Sensitive). In entrambi il tasso istantaneo d'interesse  $r_t$  rappresenta l'unica fonte di incertezza.

### ES.1a - LA DINAMICA DI VASICEK – FORMULE ESATTE

Il primo esercizio parte dal modello di Vasicek in cui lo short rate  $r_t$  ha evoluzione stocastica descritta dall'e.d.s.:  $dr_t = \alpha (\beta - r_t) dt + c dW_t$  con  $\alpha, \beta, c > 0$

In questo caso ci sono forniti i valori dei parametri del modello:

$\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $c = 0.01$  ed  $r_0 = 0.02$ .

Partiamo dal calcolo di valore atteso, deviazione standard e percentili con le formule esplicite:

-Valore atteso  $E[r_T]$  al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno: 0.025184

-Deviazione standard  $DevSt[r_T]$  al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno: 0.0086717

-Percentile  $Q1[r_T]$  al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno ( $p = 1\%$ ): 0.0050103

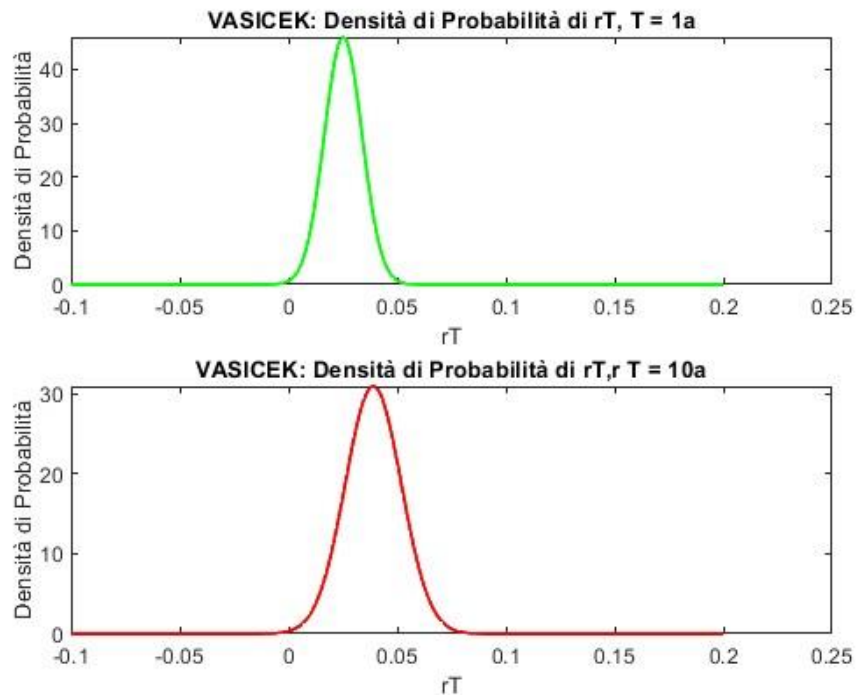
-Percentile  $Q99[r_T]$  al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno ( $p = 99\%$ ): 0.045

Precisiamo che i percentili  $Q1$  e  $Q99$  possono essere interpretati come una stima dei valori estremi assunti dai tassi nel modello. Di seguito è riportata la tabella con i valori attesi e le deviazioni standard dello short rate per  $T$  che va da 1 a 10 anni.

years    $E[r_T]$     $DevSt[r_T]$

years	$E[r_T]$	$DevSt[r_T]$
1	0.025184	0.0086717
2	0.029024	0.010792
3	0.031869	0.011795
4	0.033976	0.01231
5	0.035537	0.012584
6	0.036694	0.012732
7	0.037551	0.012813
8	0.038186	0.012857
9	0.038656	0.012881
10	0.039004	0.012894

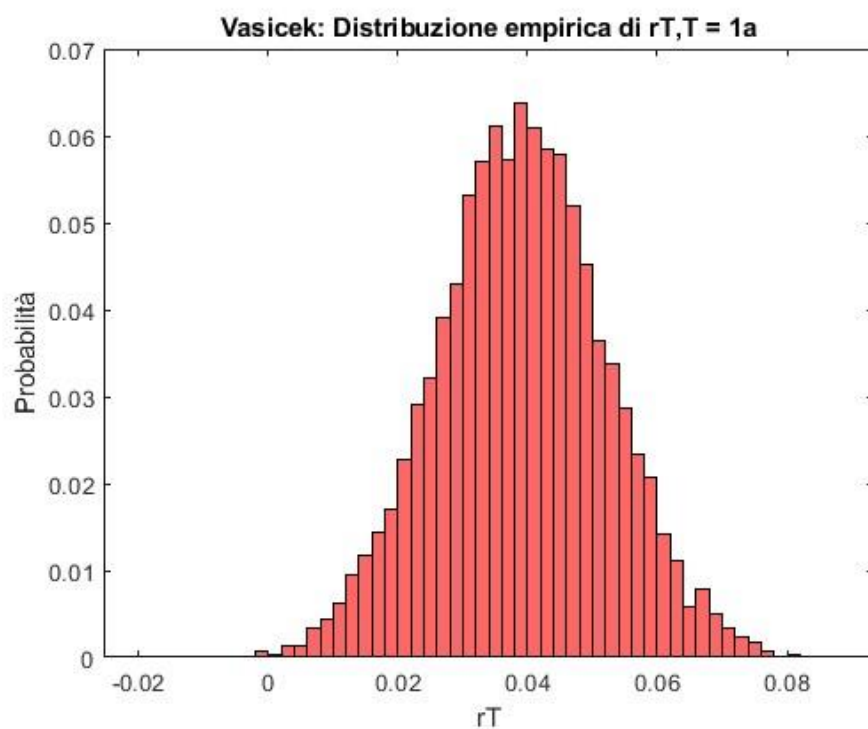
Infine, rappresentiamo la densità di probabilità di  $r_T$ , per  $T=1$  anno e per  $T=10$  anni.



## ES 1b – LA DINAMICA DI VASICEK- SIMULAZIONE MONTE CARLO

Considerando gli stessi valori dei parametri già assegnati, scegliamo un passo di discretizzazione pari a  $1/252$  e un numero di simulazioni pari a 10000, quindi procediamo alle stime richieste.

Simuliamo con il metodo MonteCarlo la distribuzione empirica di  $rT$  e la rappresentiamo con un'istogramma:



Confrontando il Valore di  $E[rT]$  teorico e i Percentili Q1 e Q99 teorici calcolati precedentemente con quelli stimati attraverso il metodo MonteCarlo siamo giunti ai seguenti risultati:

- Errore nell'approssimazione di  $E[rT]$  per  $T = 1$  anno: 0.013906
- Errore nell'approssimazione di  $Q1[rT]$  per  $T = 1$  anno (livello  $p = 1\%$ ): 0.004105
- Errore nell'approssimazione di  $Q99[rT]$  per  $T = 1$  anno (livello  $p = 99\%$ ): 0.02436

Quindi possiamo dire che gli errori di approssimazione sono stati in generali molto bassi, grazie al buon numero di simulazioni, pari a 10000.

Di seguito si presenta la tabella con valori attesi e deviazioni standard stimate, variando l'orizzonte temporale di simulazione dello short rate da 1 a 10 anni:

years	ErT_MCtable	DevStRT_MCtable
1	0.039855	0.013922
2	0.033022	0.012569
3	0.031768	0.012304
4	0.032286	0.012679
5	0.035427	0.013021
6	0.037693	0.013565
7	0.038221	0.013788
8	0.036326	0.013255
9	0.039796	0.013619
10	0.039214	0.013865

Osservando questi dati e confrontandoli con la tabella precedente, possiamo dire che l'errore di approssimazione MonteCarlo è relativamente basso. In generale questi valori sono leggermente sovrastimati rispetto ai precedenti, ma sicuramente aumentando il numero di stime la convergenza aumenterebbe.

## ES 2a - LA DINAMICA DI COX, INGELSON E ROSS – FORMULE ESPLICITE

Consideriamo ora il modello di CIR, in cui lo short rate ha evoluzione stocastica descritta dall'e.d.s:  $dr_t = \alpha (\beta - r_t) dt + c \sqrt{r_t} dW_t$  con  $\alpha, \beta, c > 0$ . Abbiamo i seguenti valori assegnati ai parametri del modello:  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $c = 0.06$ ,  $r_0 = 0.02$  e le richieste sono analoghe a quelle dell'esercizio 1, quindi procediamo all'illustrazione dei risultati.

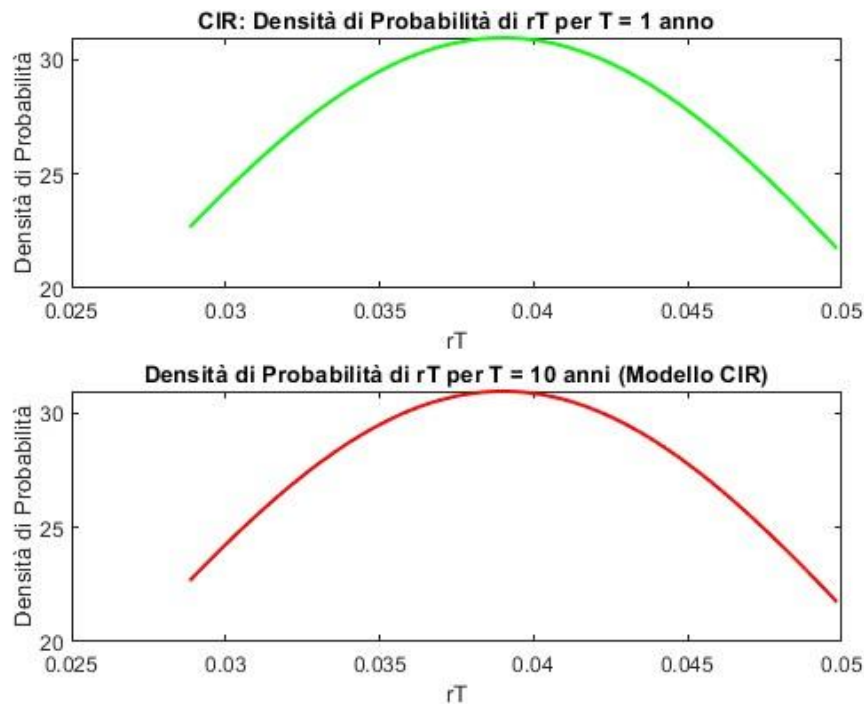
Partiamo dal calcolo di valore atteso, deviazione standard e percentili con le formule esplicite:

- Valore atteso  $E[rT]$  al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno: 0.0390
- Deviazione standard  $DevSt[rT]$  al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno: = 0.0129
- Percentile  $Q1[rT]$  al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno ( $p = 1\%$ ): 0.0090
- Percentile  $Q99[rT]$  al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno ( $p = 99\%$ ): 0.0690

I valori stimati risultano generalmente molto più alti rispetto ai valori stimati considerando il modello Vasicek, in cui il valore atteso è pari a  $a = 0.0025$  e la varianza è quasi nulla.

Di seguito è riportata la tabella con i valori attesi e la deviazione standard dello short rate per T che va da 1 a 10 anni:

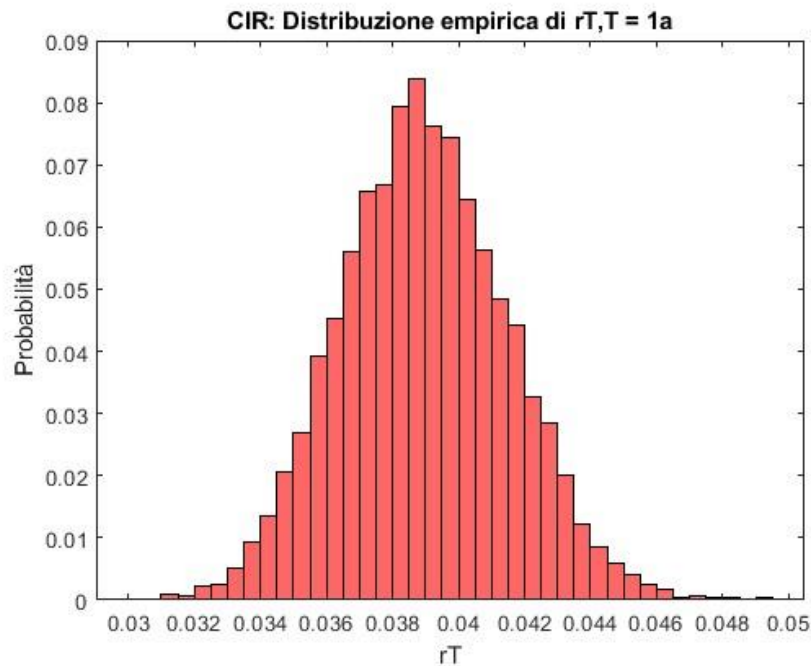
years	ErT_table_CIR	DevStRT_table_CIR
1	0.025184	0.0086717
2	0.029024	0.010792
3	0.031869	0.011795
4	0.033976	0.01231
5	0.035537	0.012584
6	0.036694	0.012732
7	0.037551	0.012813
8	0.038186	0.012857
9	0.038656	0.012881
10	0.039004	0.012894



Osserviamo due densità di probabilità simili per i 2 intervalli temporali, con una curva che non sembra tendere alla normalità.

## ES 2b - LA DINAMICA DI COX, INGELSON E ROSS – SIMULAZIONE MONTECARLO

Passiamo ora a simulare la dinamica di CIR utilizzando il metodo MonteCarlo, considerando gli stessi valori dei parametri precedenti. Ricaviamo tramite simulazione MC la distribuzione empirica di  $rT$  per  $T=1$  anno e la rappresentiamo con un istogramma:



Abbiamo ricavato tramite simulazione il valore dei percentili stimati Q1 e Q99:

- Percentile Q1[ $rT$ ] al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno ( $p = 1\%$ ): 0.0090085
- Percentile Q99[ $rT$ ] al tempo  $t = 0$  per  $T = 1$  anno ( $p = 99\%$ ): 0.069341

Notiamo che l'errore di approssimazione è in entrambi i casi attorno a 0.024 rispetto ai valori calcolati tramite formule esplicite, quindi possiamo ritenere soddisfacente la precisione della simulazione.

Infine, si presenta la tabella con valori attesi e deviazioni standard stimate, variando l'orizzonte temporale di simulazione dello short rate da 1 a 10 anni:

years     $ErT\_mc\_table\_CIR$      $DevStRT\_mc\_table\_CIR$

1	0.038962	0.0024684
2	0.038942	0.0024639
3	0.038935	0.002555
4	0.039067	0.0024563
5	0.038959	0.0025278
6	0.039083	0.0024885
7	0.039018	0.0024823
8	0.039084	0.0025909
9	0.038833	0.0024212
10	0.038902	0.0025738

## PROBLEM SET 7

In questo problem set 7 cambiamo ambito e parliamo di polizze assicurative. Prendiamo in considerazione una polizza di assicurazione sulla vita di tipo rivalutabile, più nello specifico con “capitalizzazione pura a premio unico”.

Supponiamo che la polizza sia emessa in  $t = 0$ , con durata di  $T$  anni e un capitale assicurato iniziale di  $C_0$ . Il tasso di rivalutazione del capitale assicurato alla  $k$ -esima ricorrenza annuale è stato calcolato con la regola:  $\rho_k = [(1 + \max(\beta I_k, i)) / (1+i)] - 1$

dove  $i$  è il tasso tecnico,  $\beta$  l'aliquota di retrocessione e  $I_k$  il tasso di rendimento di mercato nell'anno  $[k - 1, k]$  di un fondo di investimento di riferimento.

Il fondo è puramente obbligazionario e default-free, gestito con una strategia di compravendita, con periodicità  $\delta$ , di ZCB unitari con vita a scadenza  $D \geq \Delta$ .

Si indichi con

$$\Phi_T = \prod_{k=1}^T (1 + \rho_k),$$

il fattore di rivalutazione da 0 a  $T$  della polizza e con

$$\Phi_T^B = \prod_{k=1}^T \frac{1 + \beta I_k}{1 + i},$$

il corrispondente fattore di rivalutazione base.

La prestazione  $Y_T$  fornita dalla polizza è data da  $Y_T = C_0 \Phi_T$  e la sua componente base, ovvero la ipotetica prestazione che si avrebbe senza garanzie di rendimento minimo) da  $Y_T^B := C_0 \Phi_T^B$ .

Utilizziamo per il prezzo di mercato del payoff la rappresentazione no-arbitrage e il modello CIR univariato con parametri assegnati:  $T = 20$  anni,  $C_0 = 100$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $i = 0.5\%$ .

Per il montante degli investimenti  $W_t$  si è assunto un intervallo di trading  $\delta = 6$  mesi e ZCB con time-to-maturity  $D = 4$  anni.

Per le quantità non esprimibili in forma chiusa si richiede di costruire un'opportuna procedura di simulazione Monte Carlo. Inoltre, si consiglia l'utilizzo dei percentili ricavati nel problem set 6.

Le richieste sono molteplici, si parte dal valutare il valore di mercato della prestazione della polizza nonché il valore della componente di base e della componente garantita. Si chiede inoltre di calcolare il valore delle componenti put e call e il “Value of Business in Force” della polizza.

Infine, utilizzando il modello CIR si chiede di determinare il worst-case value, prima delle liability e poi del fondo di investimento di riferimento mediante metodo Monte Carlo.

Di seguito sono riportati i risultati, approssimati alla seconda cifra decimale:

-Valore della prestazione = 68.06

-Valore componente base= 29.92

-Valore componente garantita= 33.94

-Valore componenti PUT e CALL= 29.92 e 33.94

-VBIF = 63.86

-Worst-case value liability (99.5%) = 35.85    Worst-case value asset (99.5%) = 66.26

Procediamo infine a commentare i risultati ottenuti.

Il valore "market consistent" della prestazione della polizza rappresenta la stima del valore attuale delle prestazioni future promesse nella polizza. La polizza è strutturata in modo da poter essere suddivisa in una componente base, che rappresenta l'ipotetica prestazione senza garanzie di rendimento minimo, e una componente garantita, che invece considera il tasso di rivalutazione. Possiamo osservare che queste due componenti hanno lo stesso valore, rispettivamente, della componente PUT e della componente CALL, le quali forniscono una valutazione del rischio di mercato associato alla polizza.

Il VBIF viene calcolato sottraendo il valore market consistent della prestazione dal valore della riserva matematica e rappresenta il valore attuale dei flussi di cassa futuri generati dalla polizza. Mediante simulazione Monte Carlo, è possibile determinare il "worst-case value" delle liability (VaR della prestazione) e degli asset (VaR del fondo di investimento). In pratica, stiamo stimando a quanto potrebbero ammontare le perdite subite in situazioni di mercato estremamente sfavorevoli. Il calcolo di tali misure di rischio consente all'assicuratore di valutare la sua capacità di far fronte a scenari particolarmente avversi.