12 de marzo

estimador de $\mathbb{P}$: $\pi_1(A) = \frac{n(A)}{n}$

frecuentista (débil LGN)

UNIVERSIDAD La Salle

Facultad de Negocios

Estadística Multivariada

1. Ejercicios

Ejercicio 1. Suponga que $Y \in \{0, \ldots, K-1\}$ con $K \geq 2$. Si $f(x)$ es gaussiano: $X \mid Y = k \sim N(\mu_k, \Sigma_k)$, la regla de Bayes se escribe como

$$h^*(x) = \arg\max_k \delta_k(x),$$

donde

$$\delta_k = -\frac{1}{2}\log|\Sigma_k| - \frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k) + \log(\pi_k).$$

Sea $n_k = \sum_i \mathbf{1}_{\{y_i=k\}}$ para $k = 0, \ldots, K-1$. Demuestra que los estimadores puntuales de π_k, μ_k, Σ_k, y Σ son:

$$\hat{\pi}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{y_i=k\}}, \qquad \hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{\{i:y_i=k\}} X_i, \qquad \hat{\Sigma}_k = \frac{1}{n_k-1}\sum_{\{i:y_i=k\}}(X_i-\hat{\mu}_k)(X_i-\hat{\mu}_k)^T$$

y

$$\hat{\Sigma} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1}(n_k-1)\hat{\Sigma}_k}{n-K}.$$

Toma un conjunto de puntos y calcula tales valores estimados.

Ejercicio 2. Bajo el supuesto de que las observaciones en la k-ésima clase se toma a partir de una distribución normal, el clasificador de Bayes asigna una observación a la clase para la cual se maximiza la función discriminante. ¿Cuál es la función discriminante en este caso?

Ejercicio 3. Sean $\mu_1 = (1, 0)$. Considere la siguiente matriz:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Existe un vector gaussiano con media μ_1 y matriz de covarianza Σ?

Ejercicio 4. Sea $u \in (1, \infty)$ y (X_1, X_2, X_3) un vector aleatorio con densidad:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{u^2-1}}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(ux_1^2 + x_2^2 + ux_3^2 + 2x_1x_2)\right),$$

con $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Calcula la distribución de (X_1, X_2, X_3).

Ejercicio 5. $\mu_1 = (1, 0)$ y $\mu_2 = (-2, 2)$. Considere las siguientes matrices:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ¿Existe un vector gaussiano bivariado con media μ_1 y matriz de covarianza Σ_1?
- Si $\pi_k = 0.5$ para $k = 1, 2$ y si $f_1(x_1, x_2) \sim N(\mu_1, \Sigma_1)$ y $f_2(x_1, x_2) \sim N(\mu_2, \Sigma_1)$; calcule

$$L(x_1, x_2) = \log\left(\frac{f_1(x_1, x_2)\pi_1}{f_2(x_1, x_2)\pi_2}\right).$$

  Recuerda que asignamos (x_1, x_2) a Π_1 si: $L(x_1, x_2) > 0$.
- ¿A qué grupo asignas $(2, 1)$?

- Si $\pi_k = 0.5$ para $k = 1, 2$; calcule

$$Q(x_1, x_2) = \log\left(\frac{f_1(x_1, x_2)\pi_1}{f_2(x_1, x_2)\pi_2}\right).$$

  Recuerda que asignamos (x_1, x_2) a Π_1 si: $Q(x_1, x_2) > 0$.

- ¿A qué grupo asignas $(2, 1)$?

Ejercicio 1. Suponga que $Y \in \{0, \ldots, K-1\}$ con $K \geq 2$. Si $f(x)$ es gaussiano: $X \mid Y = k \sim N(\mu_k, \Sigma_k)$, la regla de Bayes se escribe como

$$h^*(x) = \arg\max_k \delta_k(x),$$

donde

$$\delta_k = -\frac{1}{2}\log|\Sigma_k| - \frac{1}{2}(x-\mu_k)^T\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k) + \log(\pi_k).$$

Sea $n_k = \sum_i \mathbf{1}_{\{y_i=k\}}$ para $k = 0, \ldots, K-1$. Demuestra que los estimadores puntuales de π_k, μ_k, Σ_k, y Σ son:

$$\hat{\pi}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{y_i=k\}}, \qquad \hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{\{i:y_i=k\}} X_i, \qquad \hat{\Sigma}_k = \frac{1}{n_k-1}\sum_{\{i:y_i=k\}}(X_i-\hat{\mu}_k)(X_i-\hat{\mu}_k)^T$$

y

$$\hat{\Sigma} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1}(n_k-1)\hat{\Sigma}_k}{n-K}.$$

Toma un conjunto de puntos y calcula tales valores estimados.

Tenemos

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Sigma_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

$$\Sigma_k^n = \frac{1}{n_k-1}\sum (x_i-\mu_x)^2 \Longrightarrow \frac{1}{n_{k-1}}\sum (x_i-\hat{\mu}_k)(y_i-\mu_x)$$

ahora

$$\pi^k = \pi(x \in \pi_k) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

entonces

$$\hat{\pi}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\pi_{y_k}(x)$$

Ejercicio 2. Bajo el supuesto de que las observaciones en la k-ésima clase se toma a partir de una distribución normal, el clasificador de Bayes asigna una observación a la clase para la cual se maximiza la función discriminante. ¿Cuál es la función discriminante en este caso?

Solución. . .

$$\ln\left(\frac{f_1(x)\pi_1}{f_k(x)\pi_k}\right) = -\frac{1}{2}(x-\mu_k)\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)^T + \log(\pi_k)$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_k|}\right) - \frac{1}{2}\left((x-\mu_1)\Sigma_k^{-1}(x-\mu_1)^T - (x-\mu_k) * \Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)^T\right) + \log\left(\frac{\pi_1}{\pi_k}\right)$$

Ejercicio 3. Sean $\mu_1 = (1, 0)$. Considere la siguiente matriz:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Existe un vector gaussiano con media μ_1 y matriz de covarianza Σ?

Solución. . .

① La matriz tiene que ser simétrica, entonces

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Sigma^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{cambiamos filas por columnas}}$$

es la misma $\therefore$ podemos continuar. Sustituimos en

$$\det(\Sigma - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-\lambda & 8 \\ 8 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

para sacar el determinante hacemos

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 8 \\ 8 & 4-\lambda \end{bmatrix} \longrightarrow (4-\lambda)(4-\lambda) - 64 = 0$$

$$16 - 8\lambda + \lambda^2 - 64 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 48 =$$

$$\pm \quad \times$$

$(\lambda - 12)$ | $(\lambda + 4)$

$\lambda - 12 = 0$ | $\lambda + 4 = 0$

$\boxed{\lambda = 12}$ | $\boxed{\lambda = -4}$

! no es positiva definida ∴ no existe el vector Gaussiano ejercicio #5

$\mu_1 = (1,0)$ y $\mu_2 = (-2,2)$. Considere las siguientes matrices:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ¿Existe un vector gaussiano bivariado con media μ_1 y matriz de covarianza?

Sabemos que

$$\log\left(\frac{f_1(x)\pi_1}{f_2(x)\pi_1}\right) = \log\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^{tr}\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)}}{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^{tr}\Sigma_1^{-1}(x-\mu_2)}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x-\mu_2)^{tr}\Sigma_1^{-1}(x-\mu_2) - \frac{1}{2}(x-\mu_1)^{tr}\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) \quad . \quad ①$$

Tenemos que la inversa de sigma es

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{bmatrix} \quad \wedge$$

y

$$x - \mu_1 = x - (1,0) = (x-1, x) \quad // \quad x - \mu_2 = x - (-2,2) = (x+2, x-2)$$

sustituyendo en ① tenemos

$$= \frac{1}{2}(x+2, x-2)\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x+2 \\ x-2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x-1, x)\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2(x^2-6x+12)}{3} - \left(\frac{4x^2+2x-1}{6}\right)$$