

Homework 4 - Anno accademico 2018/2019

Andrea Cardone

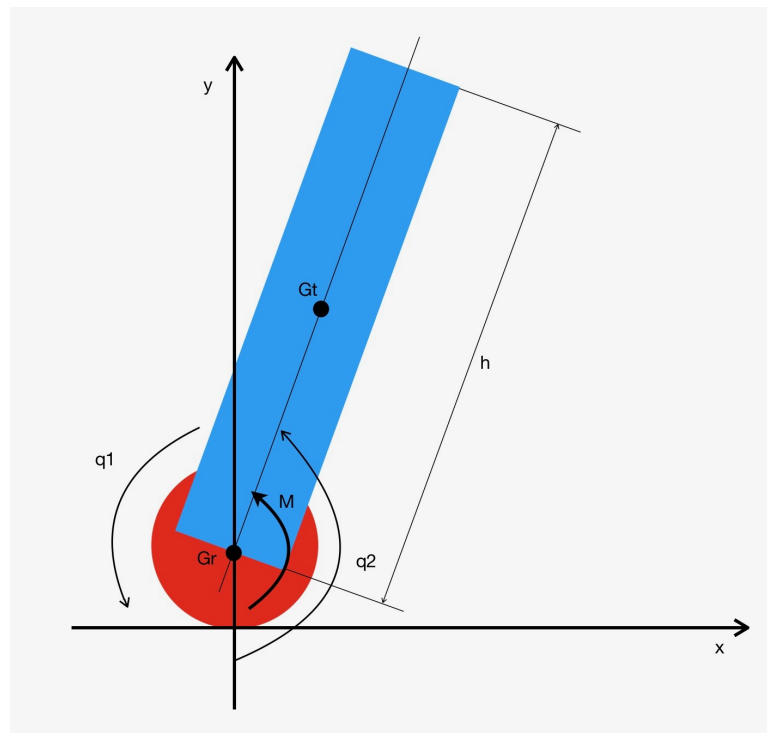
mat: 185096

e-mail: andrea.cardone-1@studenti.unitn.it

Si considera un modello del Segway composto di due corpi, ruota e telaio del veicolo. La ruota rotola senza strisciare sul suolo orizzontale. Il telaio è incernierato sul perno ruota. Un motore agisce fra ruota e telaio sulla cerniera (sia M la coppia motrice applicata alla ruota, $-M$ la reazione sul telaio).

Parametri della ruota: raggio r , massa m_r , momento d'inerzia centrale I_r .

Parametri del telaio: rettangolo di dimensioni $b \times h$, massa m_t , momento d'inerzia centrale I_t ;



- 1) Scrivere le equazioni del moto con le equazioni di Lagrange nella seconda forma ($L=T-V$). Scrivere le equazioni del moto con il PLV. Scrivere le equazioni del moto con Newton-Eulero. Confrontare i risultati.
- 2) Determinare una configurazione di equilibrio.
- 3) Linearizzare le equazioni del moto nell'intorno della configurazione di equilibrio. Studiare la stabilità della configurazione di equilibrio.
- 4) Confrontare la soluzione linearizzata e la soluzione non-lineare a partire da una posizione iniziale vicina alla configurazione di equilibrio, nella ipotesi che il motore non applichi alcun momento ($M=0$).
- 5) Si faccia l'ipotesi che il motore applichi un momento proporzionale ed opposto all'angolo di inclinazione del telaio ($M = -k \theta$) con k costante da studiare. Trovare la soluzione non-lineare a

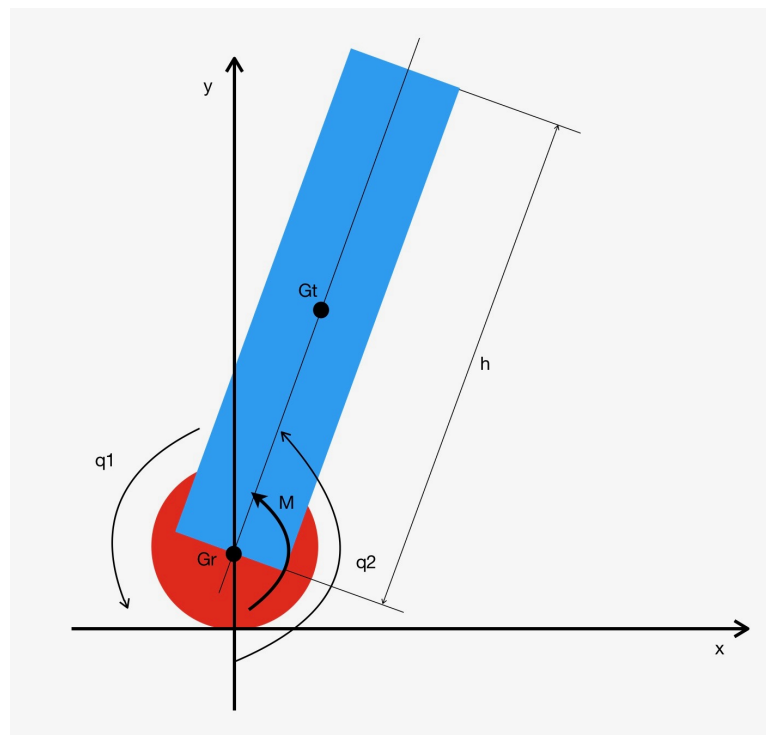
partire da una posizione iniziale vicina alla configurazione di equilibrio per diversi valori di k e commentare i risultati. Cercare un valore di k che rende il Segway appena appena stabile.

6) Determinare la forza normale e la forza di attrito fra la ruota e il suolo nei casi precedenti. Quale valore è necessario per il coefficiente di attrito al fine di evitare che la ruota scivoli?

1) Equazioni del moto

Per iniziare l'analisi del modello di Segway è necessario ottenere le equazioni del moto. In seguito le equazioni del moto vengono ricavate in tre differenti modi: con le equazioni di Lagrange nella forma ($L = T - V$); con il principio dei lavori virtuali e con le equazioni di Newton-Eulero

1.1) Equazioni del moto, metodo di Lagrange nella seconda forma ($L = T - V$)



Posizione del baricentro della ruota

$$\begin{aligned}x_r(t) &= -q_1(t) r \\y_r(t) &= r\end{aligned}$$

Posizione del baricentro del telaio

$$\begin{aligned}x_t(t) &= x_r(t) - \frac{h}{2} \sin(q_2(t)) \\y_t(t) &= y_r(t) + \frac{h}{2} \cos(q_2(t))\end{aligned}$$

Energia cinetica della ruota

$$K_r(t) = \frac{1}{2} m_r (\partial_t x_r(t))^2 + \frac{1}{2} I_r (\partial_t q_1(t))^2$$

Energia cinetica del telaio

$$K_t(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_t x_t(t) \\ \partial_t y_t(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_t & 0 \\ 0 & m_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t x_t(t) \\ \partial_t y_t(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} I_t (\partial_t q_2(t))^2$$

$$K_t(t) = \frac{1}{2} I_t q_2'(t)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} h^2 m_t \sin^2(q_2(t)) q_2'(t)^2 + m_t \left(-r q_1'(t) - \frac{1}{2} h \cos(q_2(t)) q_2'(t) \right)^2 \right)$$

L'energia cinetica totale del Segway risulta essere

$$T(t) = K_r(t) + K_t(t)$$

$$T(t) = \frac{1}{8} ((h^2 m_t + 4 I_t) q_2'(t)^2 + 4 h m_t r q_1'(t) q_2'(t) \cos(q_2(t)) + 4 q_1'(t)^2 (I_r + r^2 (m_r + m_t)))$$

Energia potenziale del Segway

$$V(t) = m_t g y_t(t)$$

$$V(t) = -m_t g \left(r + \frac{1}{2} \cos(q_2(t)) \right)$$

Calcolo i termini delle funzioni di Lagrange

$$\partial_{q_1(t)} V = 0$$

$$\partial_{q_2(t)} V = \frac{1}{2} g h m_t \sin(q_2(t))$$

$$\partial_{q_1(t)} T = 0$$

$$\partial_t \partial_{q_1'(t)} T = \frac{1}{2} h m_t r q_2''(t) \cos(q_2(t)) - \frac{1}{2} h m_t r q_2'(t)^2 \sin(q_2(t)) + q_1''(t) (I_r + r^2 (m_r + m_t))$$

$$\partial_{q_2(t)} T = -\frac{1}{2} h m_t r q_1'(t) q_2'(t) \sin(q_2(t))$$

$$\partial_t \partial_{q_2'(t)} T = \frac{1}{4} ((h^2 m_t + 4 I_t) q_2''(t) + 2 h m_t r q_1''(t) \cos(q_2(t)) - 2 h m_t r q_1'(t) q_1'(t) \sin(q_2(t)))$$

Equazioni di Lagrange

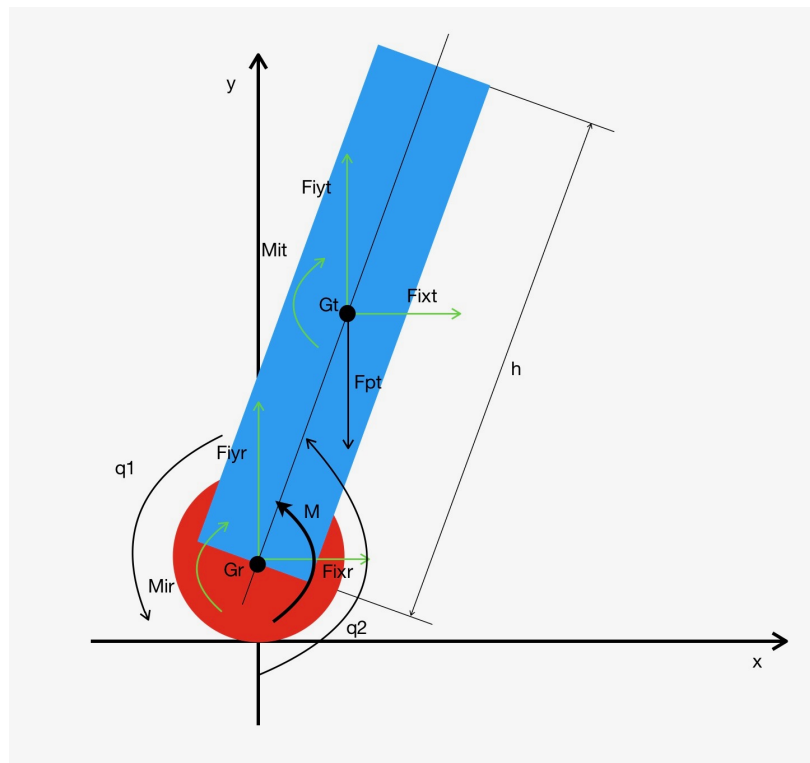
$$\text{eq1}_1 : \partial_t \partial_{q_1'(t)} T - \partial_{q_1(t)} T + \partial_{q_1(t)} V = M$$

$$\text{eq1}_2 : \partial_t \partial_{q_2'(t)} T - \partial_{q_2(t)} T + \partial_{q_2(t)} V = -M$$

$$\text{eq1}_1 : h m_t r q_2'(t)^2 \sin(q_2(t)) + 2 M = h m_t r q_2''(t) \cos(q_2(t)) + 2 q_1''(t) (I_r + r^2 (m_r + m_t))$$

$$\text{eq1}_2 : (h^2 m_t + 4 I_t) q_2''(t) + 2 h m_t r q_1''(t) \cos(q_2(t)) + 4 M + 2 g h m_t \sin(q_2(t)) = 0$$

1.2) Equazioni del moto, metodo del Principio dei Lavori Virtuali (PLV)



Per formulare il principio dei lavori virtuali si considera il segway come un sistema di corpi rigidi tra loro interconnessi da vincoli lisci e indeformabili elasticamente. Il moto di puro rotolamento tra la ruota e il terreno rende anche questo vincolo olonomo.

Per ottenere le equazioni del moto con il principio dei lavori virtuali bisogna considerare le forze apparenti di inerzia secondo il principio di D'Alembert. Quindi si aggiungono come forze fittizie i termini che nelle equazioni di Newton Eulero sarebbero a primo membro.

Vengono rappresentate in figura le forze di inerzia, il momento del motore e le forze peso, la forza peso della ruota non verrà considerata dato che non compie lavoro.

Non ci sono altre forze dato che le reazioni vincolari non compiono lavoro, viste le ipotesi fatte precedentemente.

In seguito viene scritto il lavoro virtuale, tenendo in considerazione l'immagine precedente.

$$\delta L = M_i \delta q_1 + F_{ix_r} \delta x_{G_r} + F_{iy_r} \delta y_{G_r} + M_t \delta q_2 + F_{ix_t} \delta x_{G_t} + F_{iy_t} \delta y_{G_t} + M \delta q_1 - M \delta q_2 - F_p \delta y_{G_t}$$

Si procede esprimendo le coordinate dei baricentri in funzione delle variazioni delle coordinate generalizzate δq_1 e δq_2

$$\begin{aligned} \delta x_{G_r} &= \tau_{x_{11}} \delta q_1 + \tau_{x_{12}} \delta q_2 \\ \delta y_{G_r} &= \tau_{y_{11}} \delta q_1 + \tau_{y_{12}} \delta q_2 \\ \delta x_{G_t} &= \tau_{x_{21}} \delta q_1 + \tau_{x_{22}} \delta q_2 \\ \delta y_{G_t} &= \tau_{y_{21}} \delta q_1 + \tau_{y_{22}} \delta q_2 \end{aligned}$$

L'espressione di δL risulta essere una combinazione lineare di δq_1 e δq_2 , per il principio dei lavori virtuali $\delta L = 0$, quindi δq_1 e δq_2 devono essere entrambi zero. Da questa considerazione si ottengono le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} M + M_i_r + \text{Fix}_r \tau_{x_{11}} + \text{Fix}_t \tau_{x_{21}} + \text{Fiy}_r \tau_{y_{11}} + \text{Fiy}_t \tau_{y_{21}} - F_p \tau_{y_{21}} &= 0 \\ -M + M_i_t + \text{Fix}_r \tau_{x_{12}} + \text{Fix}_t \tau_{x_{22}} + \text{Fiy}_r \tau_{y_{12}} + \text{Fiy}_t \tau_{y_{22}} - F_p \tau_{y_{22}} &= 0 \end{aligned}$$

Ora è necessario esprimere le forze di inerzia e i rapporti di velocità in funzione delle coordinate generalizzate $q_1(t)$ e $q_2(t)$ e quindi è necessario di fare l'analisi cinematica.

Posizione del baricentro della ruota

$$\begin{aligned} x_r(t) &= -q_1(t) r \\ y_r(t) &= r \end{aligned}$$

Posizione del baricentro del telaio

$$\begin{aligned} x_t(t) &= x_r(t) - \frac{h}{2} \sin(q_2(t)) \\ y_t(t) &= y_r(t) + \frac{h}{2} \cos(q_2(t)) \end{aligned}$$

Espressioni dei rapporti di velocità

$$\begin{aligned} \tau_{x_{11}} &= \partial_{q_1(t)} x_{G_r}(t) = -r \\ \tau_{y_{11}} &= \partial_{q_1(t)} y_{G_r}(t) = 0 \\ \tau_{x_{21}} &= \partial_{q_1(t)} x_{G_t}(t) = -r \\ \tau_{y_{21}} &= \partial_{q_1(t)} y_{G_t}(t) = 0 \\ \tau_{x_{12}} &= \partial_{q_2(t)} x_{G_r}(t) = 0 \\ \tau_{y_{12}} &= \partial_{q_2(t)} y_{G_r}(t) = 0 \\ \tau_{x_{22}} &= \partial_{q_2(t)} x_{G_t}(t) = -\frac{1}{2} h \cos(q_2(t)) \\ \tau_{y_{22}} &= \partial_{q_2(t)} y_{G_t}(t) = -\frac{1}{2} h \sin(q_2(t)) \end{aligned}$$

Espressione delle forze fittizie

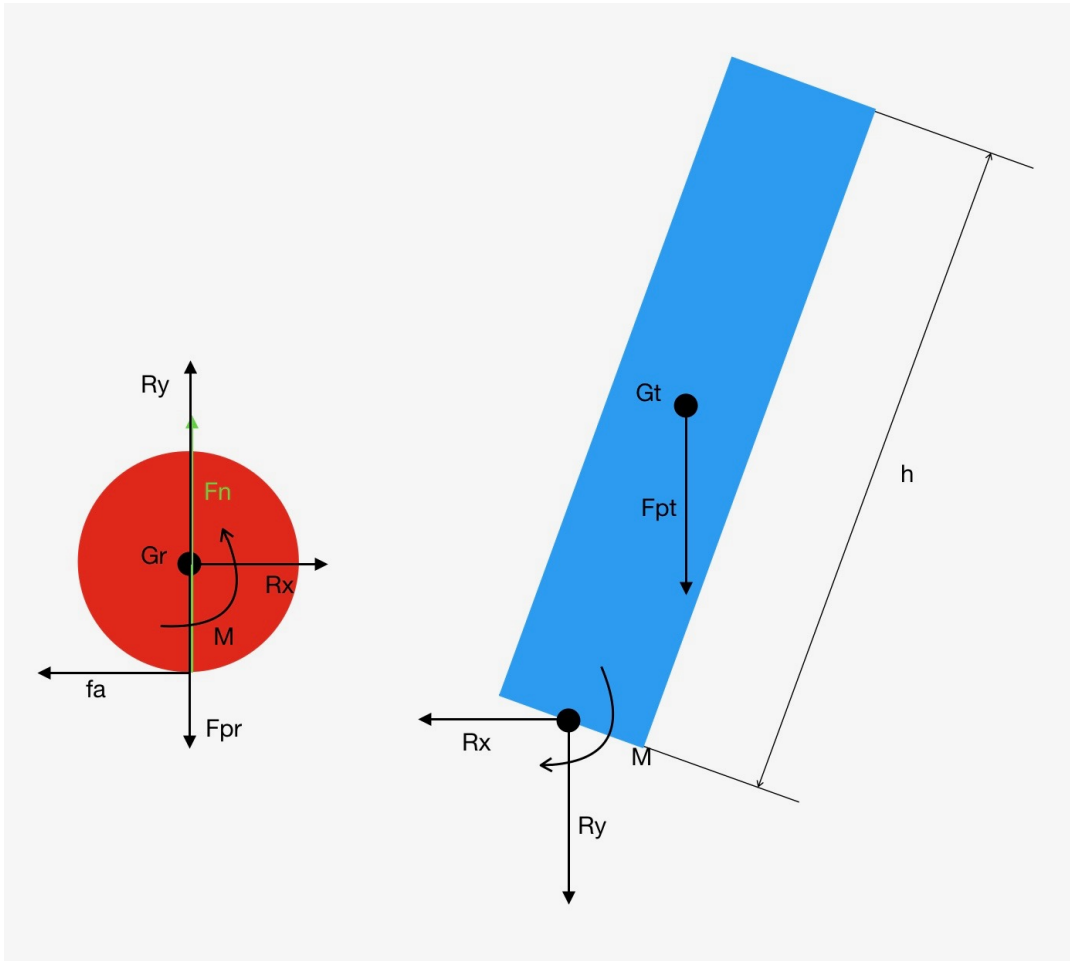
$$\begin{aligned} \text{Fix}_r &= -m_r x_{G_r}''(t) \\ \text{Fiy}_r &= -m_r y_{G_r}''(t) \\ M_i_r &= -I_r q_1''(t) \\ \text{Fix}_t &= -m_t x_{G_t}''(t) \\ \text{Fiy}_t &= -m_t y_{G_t}''(t) \\ M_i_t &= -I_t q_2''(t) \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni appena trovate nelle due equazioni del principio dei lavori virtuali si ottengono le seguenti equazioni

$$h m_t r q_2'(t)^2 \sin(q_2(t)) + 2 M = h m_t r q_2''(t) \cos(q_2(t)) + 2 q_1''(t) (I_r + r^2 (m_r + m_t))$$

$$(h^2 m_t + 4 I_t) q_2''(t) + 2 h m_t r q_1''(t) \cos(q_2(t)) + 4 M + 2 g h m_t \sin(q_2(t)) = 0$$

1.3) Equazioni del moto, metodo di Newton-Eulero



Posizione del baricentro della ruota

$$x_{G_r}(t) = -q_1(t) r$$

$$y_{G_r}(t) = r$$

Equazioni di Newton-Eulero per la ruota

$$\text{eqrx} : m_r x_{G_r}''(t) = -fa + Rx$$

$$\text{eqry} : m_r y_{G_r}''(t) = Fp - Fpr + Ry$$

$$\text{eqq}_1 : I_r q_1''(t) = M - r fa$$

Posizione del baricentro del telaio

$$x_{G_t}(t) = x_{G_r}(t) - \frac{h}{2} \sin(q_2(t))$$

$$y_{G_t}(t) = y_{G_r}(t) + \frac{h}{2} \cos(q_2(t))$$

Equazioni di Newton-Eulero per il telaio

$$\text{eqtx} : m_t x G_t''(t) = -R_x$$

$$\text{eqty} : m_t y G_t''(t) = -R_y - F_{p_t}$$

$$\text{eqq}_2 : I_t q_2''(t) = -R_x \frac{h}{2} \cos(q_2(t)) - R_y \frac{h}{2} \sin(q_2(t)) - M$$

Ricavo f_a , R_x , R_y , F_n in funzione di $q_1(t)$ e $q_2(t)$ e delle relative derivate prime e seconde

$$f_a(t) = \frac{1}{2} (h m_t q_2''(t) \cos(q_2(t)) - h m_t q_2'(t)^2 \sin(q_2(t)) + 2 m_r r q_1''(t) + 2 m_t r q_1''(t))$$

$$R_x(t) = \frac{1}{2} (h m_t q_2''(t) \cos(q_2(t)) - h m_t q_2'(t)^2 \sin(q_2(t)) + 2 m_t r q_1''(t))$$

$$R_y(t) = \frac{1}{2} (-2 g m_t + h m_t q_2''(t) \sin(q_2(t)) + h m_t q_2'(t)^2 \cos(q_2(t)))$$

$$F_n(t) = \frac{1}{2} (2 g m_r + 2 g m_t - h m_t q_2''(t) \sin(q_2(t)) - h m_t q_2'(t)^2 \cos(q_2(t)))$$

Sostituendo queste funzioni nelle equazioni eqq_1 e eqq_2 , si ottengono le due equazioni del moto del segway.

$$h m_t r q_2'(t)^2 \sin(q_2(t)) + 2 M = h m_t r q_2''(t) \cos(q_2(t)) + 2 q_1''(t) (l_r + r^2 (m_r + m_t))$$

$$(h^2 m_t + 4 I_t) q_2''(t) + 2 h m_t r q_1''(t) \cos(q_2(t)) + 4 M + 2 g h m_t \sin(q_2(t)) = 0$$

1.4) Confronto tra le soluzioni

I tre metodi hanno come risultato le medesime equazioni del moto.

Con il metodo dei lavori virtuali e con quello di Lagrange abbiamo lo stesso numero di equazioni e di gradi di libertà, ma con entrambi gli approcci non si ottengono le reazioni vincolari, inoltre vengono solamente utilizzate grandezze scalari. L'approccio di newton euler ha un maggior numero di equazioni rispetto ai gradi di libertà, ma consente di conoscere le reazioni vincolari e la forza d'attrito.

2) Determinazione di una configurazione di equilibrio

Cerco una configurazione con $q_1(t)$ e $q_2(t)$ costanti, quindi con $q_1(t) = q_{10}$, $q_2(t) = q_{20}$, $q_1'(t) = 0$, $q_2'(t) = 0$, $q_1''(t) = 0$, $q_2''(t) = 0$

Sciegliendo le soluzioni di un qualsiasi metodo sostituendo tali valori nell'equazione di $q_1''(t)$ si ottiene:

$$M = 0$$

Sostituendo anche il valore di M appena trovato nell'equazione di $q_2''(t)$ si ottiene:

$$\frac{1}{2} g h m_t \sin(q_{20}) = 0$$

Le soluzioni di tale equazione sono per $q_{20} = 0$ e $q_{20} = \pi$, quindi nel nostro caso l'unica soluzione

ammissibile è $q_{20} = \pi$, il valore di $q_1(t)$ è indifferente, in seguito verrà scelto $q_{10} = 0$ per semplicità.

3) Linearizzazione delle equazioni del moto e stabilità

Una volta trovato il punto di equilibrio, si vuole ottenere $q_1(t)$ e $q_2(t)$ nell'intorno del punto di equilibrio. Per fare ciò è possibile eseguire lo sviluppo in serie delle equazioni, ottenute al primo punto, al primo ordine intorno al punto di equilibrio scelto, cioè $q_2(t) = \pi$. Considerando il momento del motore nullo.

La prima equazione linearizzata con sviluppo in serie al primo ordine risulta essere

$$2M + h m_t r q_2''(t) = 2(l_r + (m_r + m_t)r^2) q_1''(t)$$

La seconda equazione linearizzata con sviluppo in serie al primo ordine risulta essere

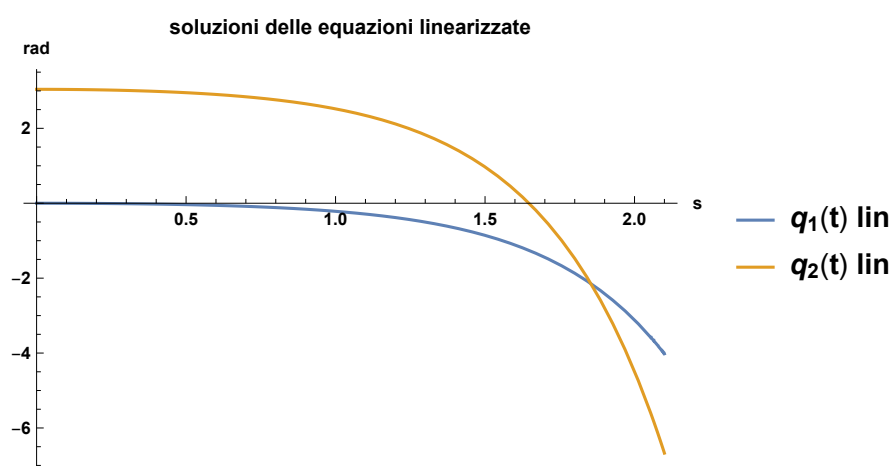
$$2\pi g h m_t + (h^2 m_t + 4l_t) q_2''(t) = 2h m_t (g q_2(t) + r q_1''(t))$$

Dopo aver linearizzato le equazioni è possibile ricavare le soluzioni $q_1(t)$ e $q_2(t)$ in forma analitica, una volta scelti i parametri, dato che le equazioni non lineari non sempre hanno tali soluzioni.

Per studiare la stabilità della configurazione di equilibrio è sufficiente applicare una piccola variazione ϵ alla configurazione iniziale dell'angolo $q_2(t=0) = q_{20} = \pi + \epsilon$.

Per questi parametri scelti: $m_r = 1, m_t = 3, r = 0.2, h = 1.6, g = 9.8, l_r = 1, l_t = 2, q_{10} = 0, q_{20} = \pi + \epsilon, \epsilon = 0.1$

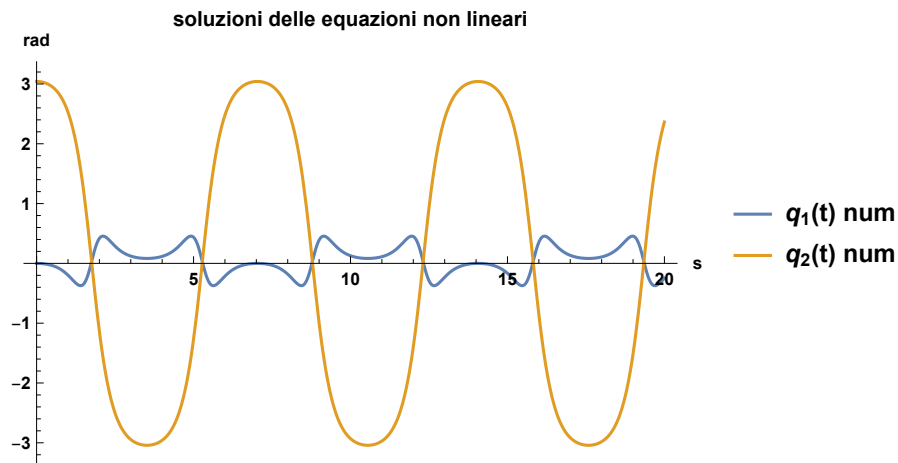
Le soluzioni di $q_1(t)$ e $q_2(t)$ risultano essere:



Si può notare che la configurazione d'equilibrio è instabile dato che per una piccola variazione dell'angolo q_2 la soluzione diverge

4) Soluzione numerica

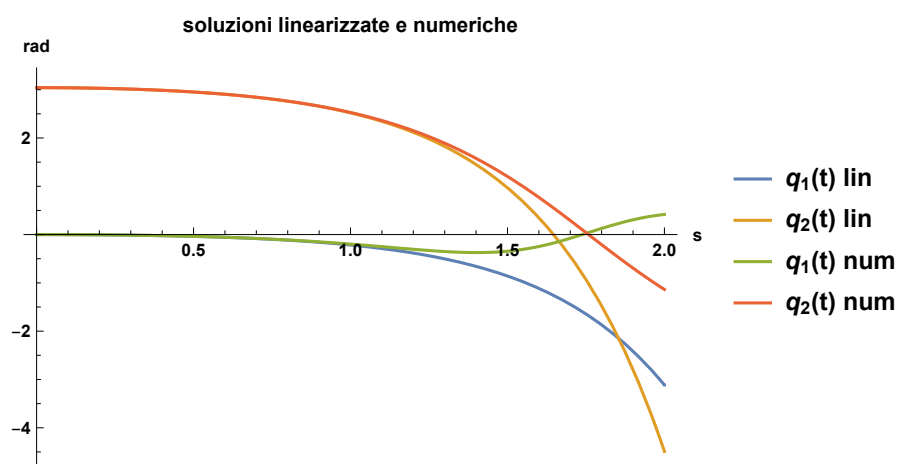
Le equazioni non lineari hanno una soluzione numerica una volta decisi i parametri del sistema. In seguito viene rappresentata l'andamento di $q_1(t)$ e $q_2(t)$ per gli stessi parametri del punto precedente.



La soluzione numerica può essere calcolata per un intervallo di tempo a piacere, a differenza della soluzione delle equazioni linearizzate che ha validità in un intorno del punto di equilibrio. In questa immagine si può notare come $q_2(t)$ per una piccolo discostamento dal valore di equilibrio si discosti da questo e presenta un'andamento oscillante attorno all'altro punto di equilibrio, il quale è stabile.

Confronto tra soluzione linearizzata e numerica

Come si può notare dal seguente grafico per un certo tempo la soluzione linearizzata e quella numerica sono pressoché identiche, poi iniziano a distanziarsi. La soluzione numerica mantiene la validità nell'intervallo utilizzato, al contrario la soluzione delle equazioni linearizzate dopo un piccolo intervallo di tempo perde validità. Per questo motivo nei seguenti punti verrà utilizzata la soluzione numerica delle equazioni non lineari.



5) Caso $M = -k\theta$

Si considera l'angolo di inclinazione del telaio rispetto alla verticale $\theta(t) = \pi - q_2(t)$. Quindi nelle due equazioni del moto si sostituirà M con $-k(\pi - q_2(t))$.

$$h m_t r q_2'(t)^2 \sin(q_2(t)) - 2 k(\pi - q_2(t)) = h m_t r q_2''(t) \cos(q_2(t)) + 2 q_1''(t) (l_r + r^2 (m_r + m_t))$$

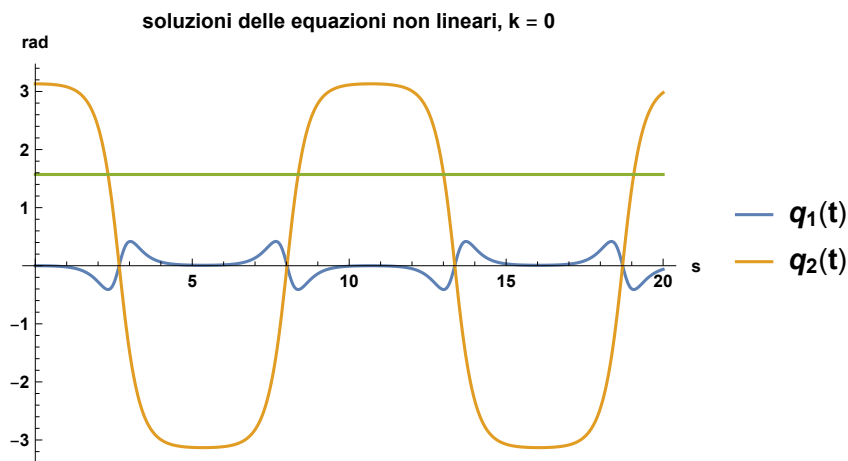
$$(h^2 m_t + 4 l_t) q_2''(t) + 2 h m_t r q_1''(t) \cos(q_2(t)) - 4 k(\pi - q_2(t)) = 2 g h m_t \sin(q_2(t))$$

Per calcolare la soluzione numerica di $q_1(t)$ e $q_2(t)$ vengono utilizzati gli stessi parametri dei casi precedenti: $m_r = 1$, $m_t = 3$, $r = 0.2$, $h = 1.6$, $g = 9.8$, $l_r = 1$, $l_t = 2$, $q_{10} = 0$, $q_{20} = \pi + \epsilon$, $\epsilon = 0.1$

Prechè il segway sia stabile ci si aspetta un'oscillazione dei valori di $q_1(t)$ e $q_2(t)$ attorno ai valori di equilibrio scelti: $q_{20} = \pi$ e $q_{10} = 0$.

$k = 0$

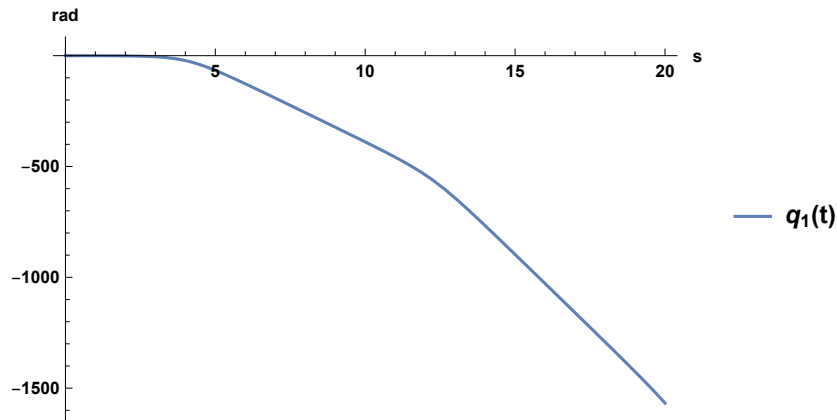
La soluzione di $q_1(t)$ e $q_2(t)$ corrisponde a quella calcolata al caso precedente per $M = 0$, come si può notare la soluzione di $q_2(t)$ va oltre $\frac{\pi}{2}$, difatti la soluzione oscilla attorno al punto di equilibrio $q_{20} = 0$.



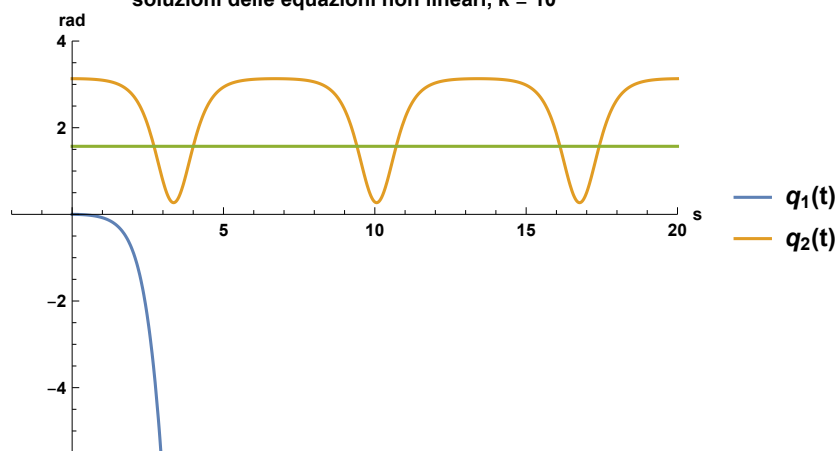
$k < 41$

$q_2(t)$ presenta un'andamento oscillante, ma non attorno al punto di equilibrio. Man mano che k aumenta diminuisce l'ampiezza dell'oscillazione.

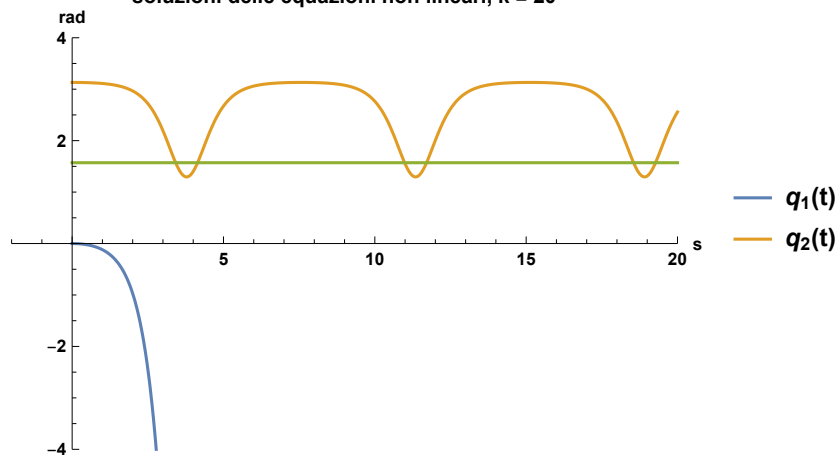
$q_1(t)$ diverge dalla posizione di equilibrio, al crescere di k si avvicina alla posizione di equilibrio

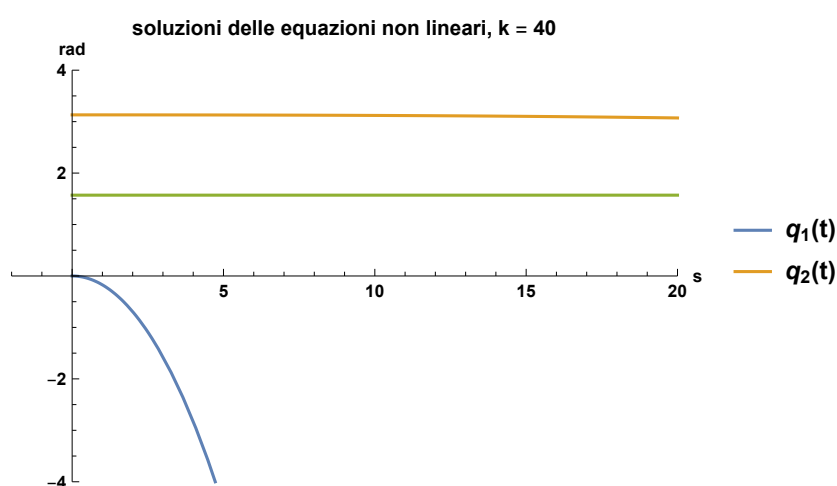
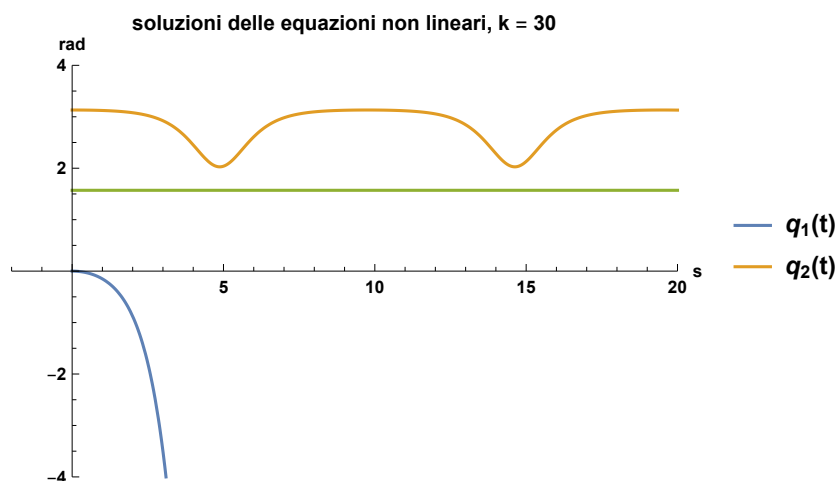


soluzioni delle equazioni non lineari, $k = 10$



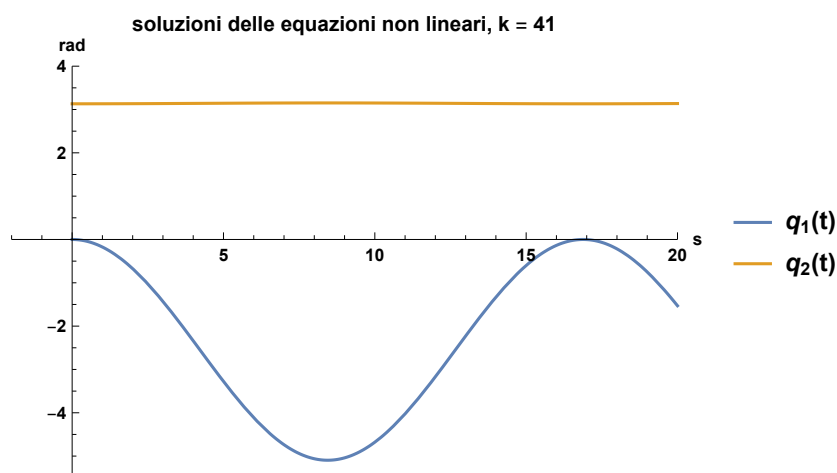
soluzioni delle equazioni non lineari, $k = 20$

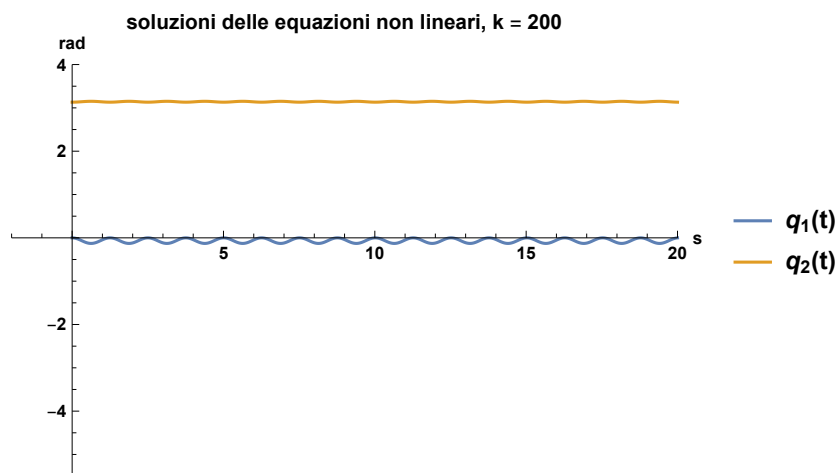
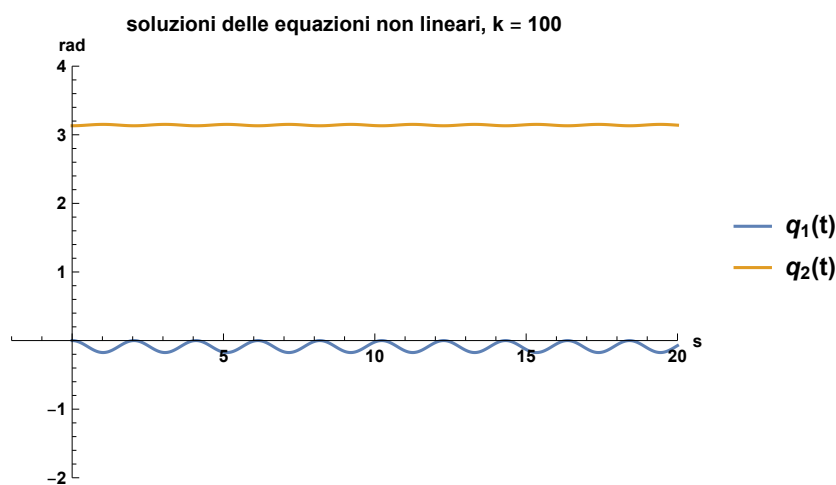
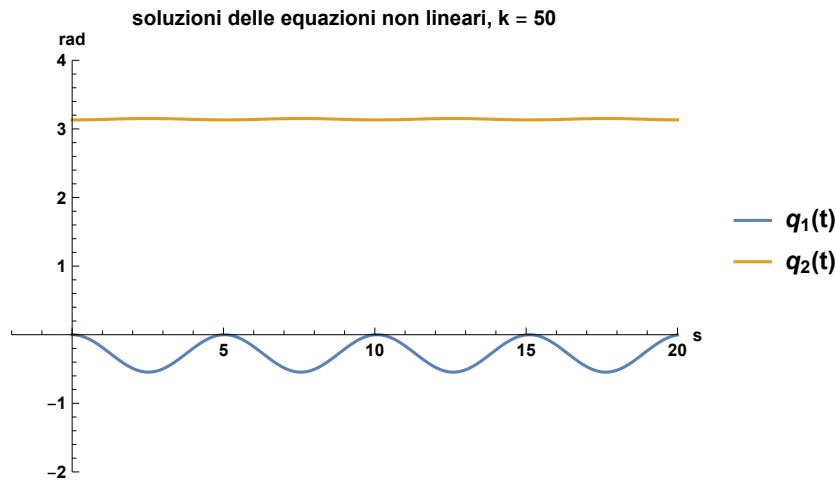




$k \geq 41$

$q_2(t)$ oscilla attorno al punto di equilibrio, al crescere di k aumenta la frequenza di oscillazione.
 $q_1(t)$ oscilla attorno al punto di equilibrio, al crescere di k aumenta la frequenza di oscillazione e diminuisce l'ampiezza.



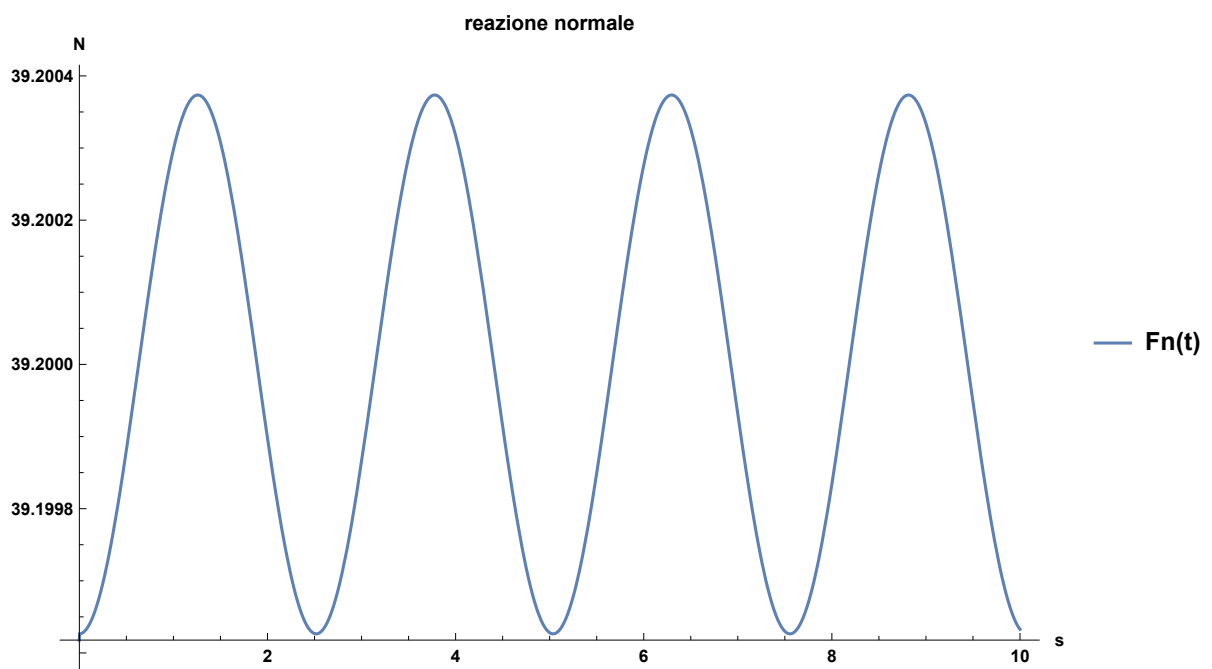
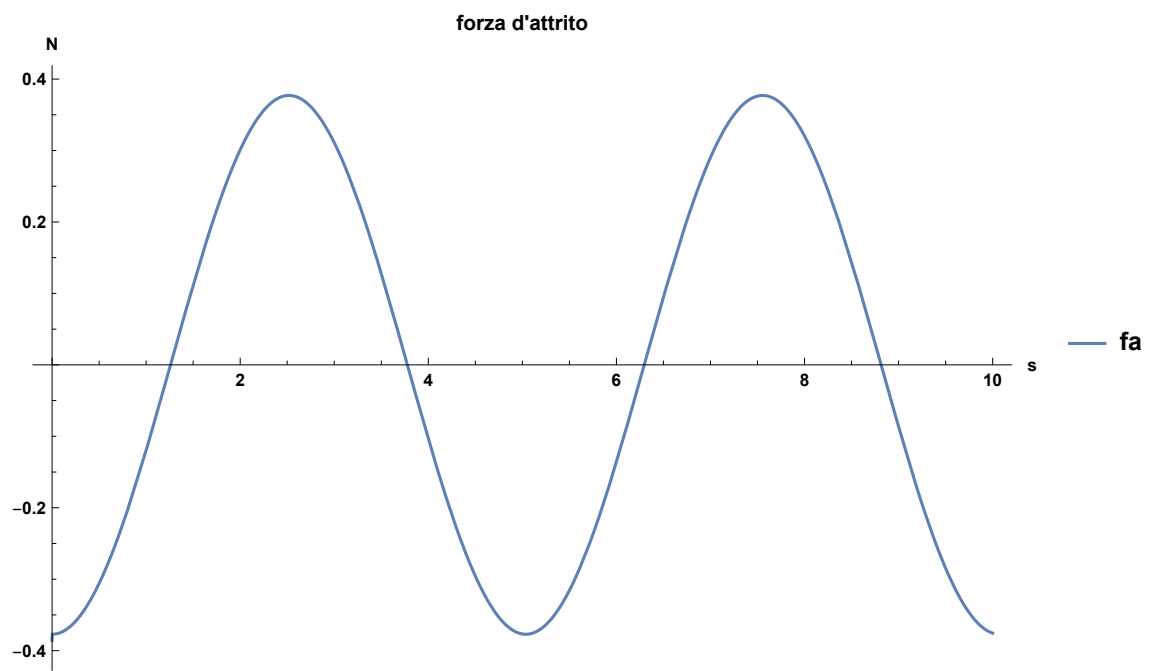


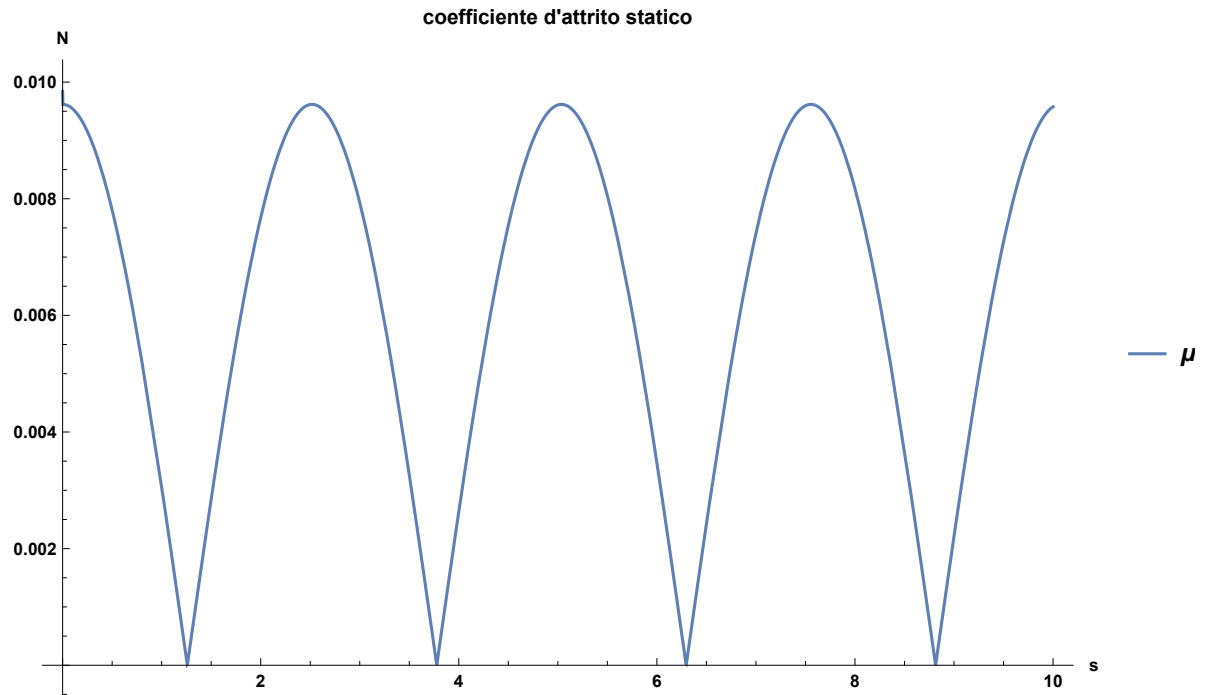
6) Forza normale e forza d'attrito

Con il metodo di Newton-Eulero (punto 1.3) è stato possibile ricavarsi la reazione vincolare del terreno e la forza d'attrito, oltre alle reazioni vincolari, con i parametri utilizzati nei punti precedenti.

Sapendo che $f_a = \mu_s F_n$ il coefficiente d'attrito statico risulta essere $\mu_s = \frac{f_a}{F_n}$.

In seguito vengono rappresentati gli andamenti della forza d'attrito, della reazione normale e del coefficiente d'attrito statico per un valore di k pari a 50.





Come si può notare il coefficiente d'attrito statico ha un'andamento variabile nel tempo, quindi per garantire il moto di puro rotolamento è necessario che tra la il piano e la ruota ci sia un coefficiente d'attrito $\mu_s \geq \max(\mu_s(t))$.