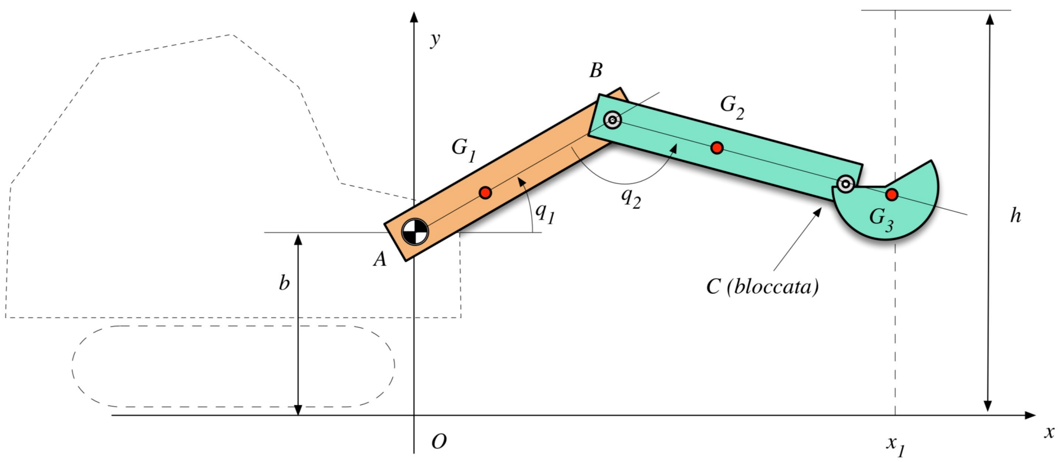
Homework 2 (testo 1)

Andrea Cardone
mat: 185096
e-mail: andrea.cardone-1@studenti.unitn.it

Analisi dinamica inversa

Si consideri un braccio scavatore come in figura, composto di: braccio (corpo 1) incernierato a telaio in A (spalla); avambraccio (corpo 2) incernierato al braccio in B (gomito); benna (corpo 3) incernierata al braccio in C (polso).



Equazioni di Newton-Eulero

Per procedere all'analisi di dinamica inversa considero i tre corpi singolarmente e scrivo le relative equazioni cardinali della dinamica

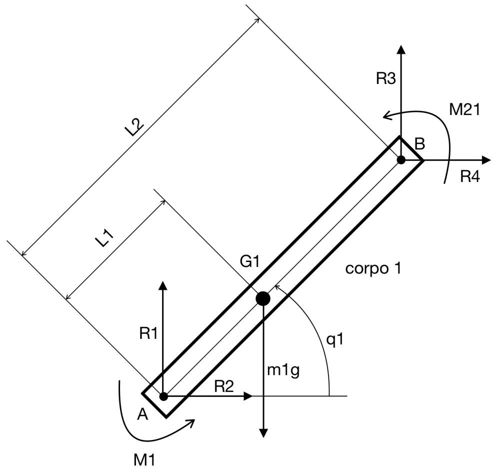
Prima equazione cardinale della dinamica: $\frac{dQ}{dt} = \sum F_e$

La derivata temporale della quantità di moto corrisponde alla somma delle forze attive e reattive esterne al sistema. In questo caso, dato che la massa dei corpi considerati rimane costante nel tempo, si può semplificare in: $\sum F_e = \sum m_i \ddot{s}_i = m_G \ddot{s}_G$

Seconda equazione cardinale della dinamica: $\frac{dK}{dt} + \dot{s} \wedge Q = \sum M_P$

La derivata temporale del momento della quantità di moto sommata al prodotto esterno tra la velocità assoluta del polo e la quantità di moto uguaglia la risultante dei momenti di tutte le forze attive e reattive esterne, rispetto ad un polo generico. Nel caso in analisi vengono con siderati i momenti delle forze e il momento d'inerzia dei corpi rispetto ai propri baricentri. Quindi la seconda equazione cardinale risulta essere: $\frac{dK}{dt} = I_G \dot{\omega} = \sum M_G$

Braccio (corpo 1)



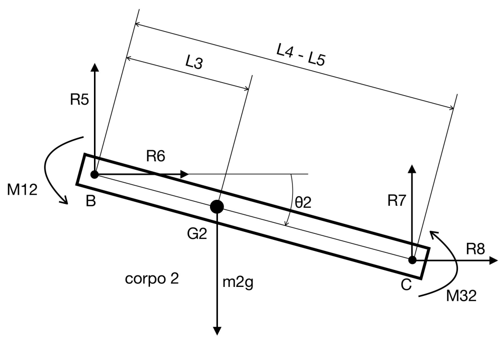
$m1\, x\ddot{G}1 = R2 + R4$

$m1\, y\ddot{G}1 = R1 + R3$

$I1\, \ddot{q}1 = -R1\, L1 \cos(q1) + R2\, L1 \sin(q1) + R3\, (L2 - L1) \cos(q1) - R4\, (L2 - L1) \sin(q1) + M1 + M21$

Avanbraccio (corpo 2)

Per l’avanbraccio considero l’angolo $\theta 2$ tra l’orizzontale e il proprio asse, uguale a q1 + q2 - π; per poi valutare le forze e i momenti in funzione di q1 e q2

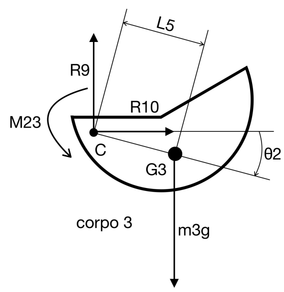


$m2\, x\ddot{G}2 = R6 + R8$

$m2\, y\ddot{G}2 = R5 + R7 - m2\, g$

$I2\, \ddot{\theta}2 = -R5\, L3 \cos(\theta 2) + R6\, L3 \sin(\theta 2) + R7\, (L4 - L3 - L5) \cos(\theta 2) - R8\, (L4 - L3 - L5) \sin(\theta 2) + M12 + M32$

Benna (corpo 3)



$m3\, x\ddot{G}3 = R10$

$m3\, y\ddot{G}3 = R9 - m3\, g$

$I3\, \ddot{\theta}2 = -R9\, L5 \cos(\theta 2) + R10\, L5 \sin(\theta 2) + M23$

Principio di azione e reazione

In seguito viene utilizzato il terzo principio della dinamica per ottenere le relazioni tra le reazioni vincolari e i momenti agenti sui tre corpi.

$R3 = -R5$

$R4 = -R6$

$R7 = -R9$

$R8 = -R10$

$M21 = -M12$

$M32 = -M23$

Posizione baricentri

Si ricavano le posizioni dei baricentri dei corpi 1 e 2, la posizione del baricentro del corpo 3 è nota.

$xG1 = L1 \cos(q1)$

$yG1 = b + L1 \sin(q1)$

$xG2 = L2 \cos(q1) + L3 \cos(\theta 2)$

$yG2 = b + L2 \sin(q1) + L3 \sin(\theta 2)$

Soluzione problema di dinamica inversa

Per prima cosa si risolve il sistema delle nove equazioni di Newton-Eulero scritte precedentemente e si calcolano le reazioni vincolari e i momenti in funzione di q1, q2. In seguito la soluzione letterale

$$R1 = g\,(m1 + m2 + m3) + \dot{q}1^2(-(\sin(q1)\,(L1\, m1 + L2\, m2) - L3\, m2 \sin(q1 + q2))) + L1\, m1\, \ddot{q}1 \cos(q1) + m2\left(L2\, \ddot{q}1 \cos(q1) - L3\left(\ddot{q}1 + \ddot{q}2\right) \cos(q1 + q2) + L3\, \dot{q}2^2 \sin(q1 + q2)\right) + 2\, L3\, m2\, q1'\, q2' \sin(q1 + q2) + m3\, y\ddot{G}3$$

$$R2 = \dot{q}1^2(-(\cos(q1)\,(L1\, m1 + L2\, m2) - L3\, m2 \cos(q1 + q2))) - L1\, m1\, \ddot{q}1 \sin(q1) + m2\left(-L2\, \ddot{q}1 \sin(q1) + L3\left(\ddot{q}1 + \ddot{q}2\right) \sin(q1 + q2) + L3\, \dot{q}2^2 \cos(q1 + q2)\right) + 2\, L3\, m2\, q1'\, q2' \cos(q1 + q2) + m3\, x\ddot{G}3$$

$$R5 = g\,(m2 + m3) + m2\left(\dot{q}1^2(L3 \sin(q1 + q2) - L2 \sin(q1)) + L2\, \ddot{q}1 \cos(q1) - L3\left(\ddot{q}1 + \ddot{q}2\right) \cos(q1 + q2) + 2\, L3\, q1'\, q2' \sin(q1 + q2) + L3\, \dot{q}2^2 \sin(q1 + q2)\right) + m3\, y\ddot{G}3$$

$$R6 = m2\left(\dot{q}1^2(L3 \cos(q1 + q2) - L2 \cos(q1)) - L2\, \ddot{q}1 \sin(q1) + L3\left(\ddot{q}1 + \ddot{q}2\right) \sin(q1 + q2) + 2\, L3\, q1'\, q2' \cos(q1 + q2) + L3\, \dot{q}2^2 \cos(q1 + q2)\right) + m3\, x\ddot{G}3$$

$$R9 = m3\left(g + y\ddot{G}3\right)$$

$$R10 = m3\, x\ddot{G}3$$

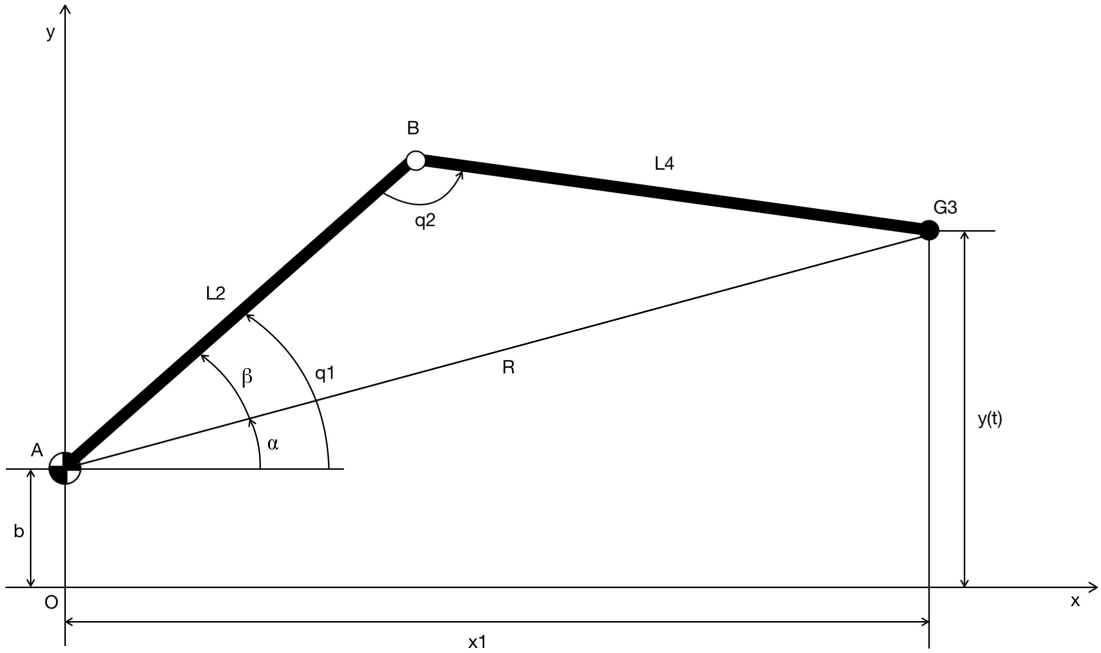
$$M1 = g \cos(q1)\,(L1\, m1 + L2\,(m2 + m3)) - g\,(L3\, m2 + L4\, m3) \cos(q1 + q2) + \ddot{q}1\left(I1 + I2 + I3 + L1^2\, m1\right) + (I2 + I3)\, \ddot{q}2 + L2^2\, m2\, \ddot{q}1 - 2\, L2\, L3\, m2\, \ddot{q}1 \cos(q2) + 2\, L2\, L3\, m2\, q1'\, q2' \sin(q2) - L2\, L3\, m2\, \ddot{q}2 \cos(q2) + L2\, L3\, m2\, \dot{q}2^2 \sin(q2) + m3\, y\ddot{G}3\,(L2 \cos(q1) - L4 \cos(q1 + q2)) - L2\, m3 \sin(q1)\, x\ddot{G}3 + L3^2\, m2\, \ddot{q}1 + L3^2\, m2\, \ddot{q}2 + L4\, m3\, x\ddot{G}3 \sin(q1 + q2)$$

$$M12 = -\cos(q1 + q2)\left(g\, L3\, m2 + g\, L4\, m3 + L4\, m3\, y\ddot{G}3\right) + \left(I2 + I3 + L3^2\, m2\right)\left(\ddot{q}1 + \ddot{q}2\right) - L2\, L3\, m2\, \ddot{q}1 \cos(q2) - L2\, L3\, m2\, q1'^2 \sin(q2) + L4\, m3\, x\ddot{G}3 \sin(q1 + q2)$$

$$M23 = L5\, m3\left(x\ddot{G}3 \sin(q1 + q2) - \left(g + y\ddot{G}3\right) \cos(q1 + q2)\right) + I3\left(\ddot{q}1 + \ddot{q}2\right)$$

Analisi cinematica

Ora abbiamo le reazioni vincolari e i momenti espressi in funzione di q1 e q2. Quindi non resta che ricavare q1 e q2, conoscendo xG3 e yG3. Si può ottenere questo risultato con il metodo delle catene cinematiche, in alternativa si possono ricavare q1 e q2 con delle semplici relazioni trigonometriche, in seguito viene utilizzato il secondo metodo per una maggior leggerezza di calcolo.



Con il teorema di pitagora si calcola la congiungente A-G3(R)

$R = \sqrt{xG3^2 + (yG3 - b)^2}$

$\alpha = arctan\left(\frac{yG3 - b}{xG3}\right)$

Con il teorema del coseno si ricava l'angolo q2

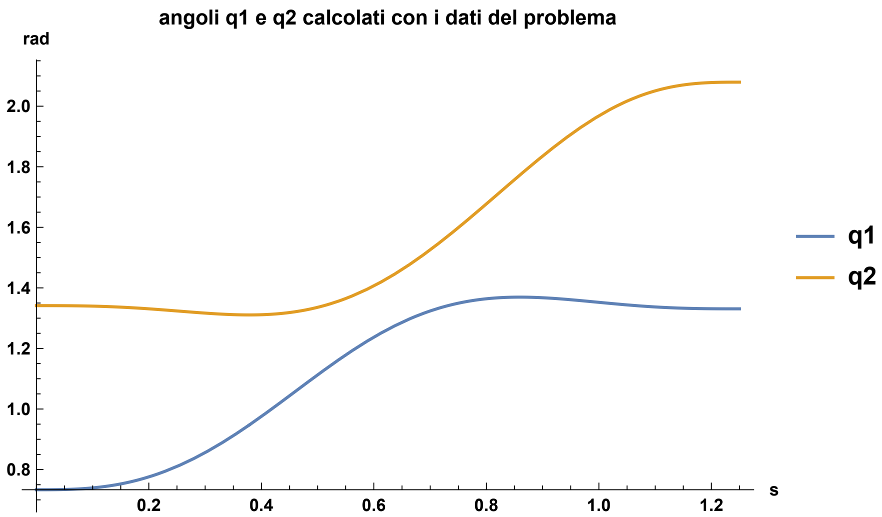
$q2 = arccos\left(\frac{L2^2 + L4^2 - R^2}{2\, L2\, L4}\right)$

Con il teorema del seno si calcola l'angolo β

$\beta = arcsin\left(\frac{L4\, Sin(q2)}{R}\right)$

$q1 = \alpha + \beta$

In seguito vengono rappresentati q1 e q2



Rappresentazione M1, M12 e reazioni vincolari in C

Per calcolare i momenti e le reazioni vincolari non rimane che calcolare q1 e q2 con i valori assegnati e sostituirli all'interno delle equazioni precedentemente calcolate.

Dati del problema

$b = 0.5$

$L1 = 0.9$

$L2 = 2$

$L3 = 0.8$

$L4 = 2.1$

$L5 = 0.2$

$m1 = 140$

$m2 = 120$

$m3 = 250$

$I1 = 47$

$I2 = 32$

$I3 = 11$

$h = 3$

$T1 = 1.25$

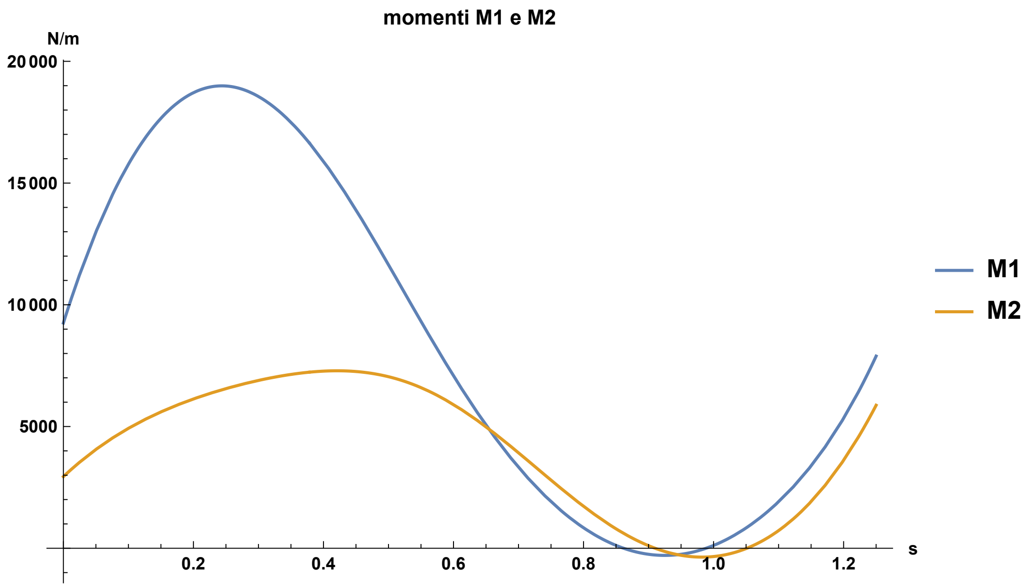
$x1 = 2.5$

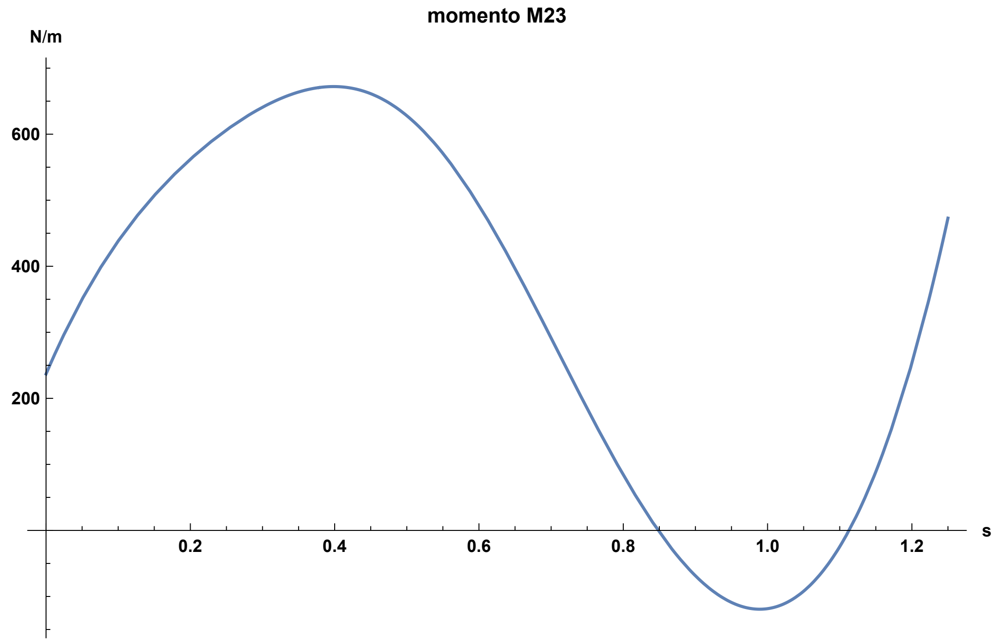
$g = 9.81$

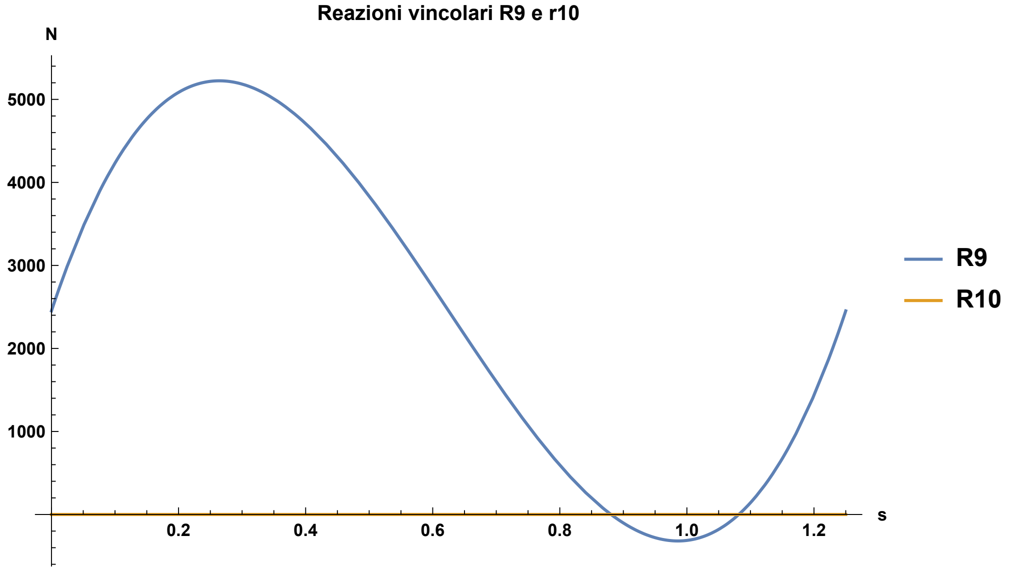
$xG3 = x1$

$$yG3 = \frac{6\,h\,t^5}{T1^5} - \frac{15\,h\,t^4}{T1^4} + \frac{10\,h\,t^3}{T1^3}$$

Rappresentazione grafica






Reazioni vincolari R9 e r10
N
5000
4000
3000
2000
1000
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
s
R9
R10