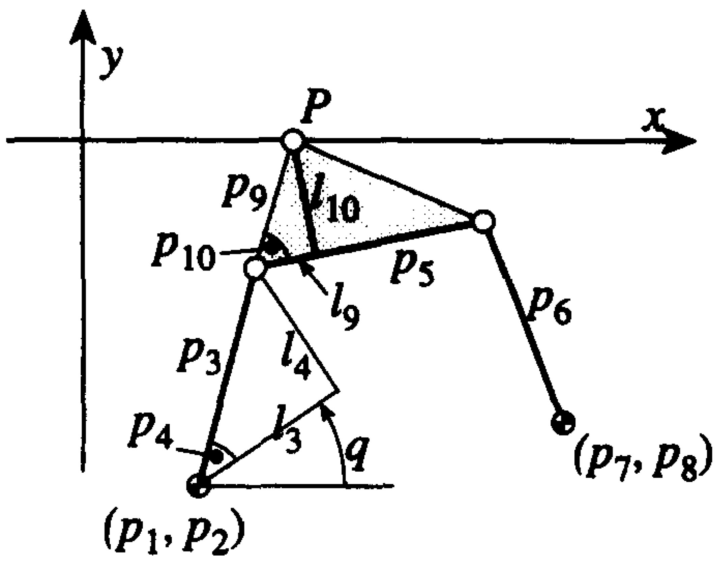
Homework 3 - Anno accademico 2018/2019

Andrea Cardone
mat: 185096
e-mail: andrea.cardone-1@studenti.unitn.it

Sintesi di un meccanismo generatore di traiettoria

1) Leggere l'articolo allegato (Robust Design of Linkages...)
2) Fare la sintesi di un meccanismo generatore di traiettoria, come nell'esemnpio riportato a pagina 926 dell'articolo. Si consideri solo il caso del meccanismo non robusto, come da equazione (8). Discutere i risultati ottenuti anche in confronto con quelli presenti nell'articolo.
3) Ripetere la sintesi modificando la traiettopria desiderata da rettilinea ad arco di cerchio di raggio scelto a piacere. Discutere i risultati in relazione al punto 1.
4) Illustrare il concetto di sintesi robusta, in base alla lettura dell'articolo (una pagina).

Per fare la sintesi di un meccanismo di traiettoria rettilinea si è scelto di utilizzare il meccanismo rappresentato nella seguente immagine. Gli oggetti indicati dalle lettere p sono i parametri di progetto, i quali verranno presi in considerazione durante l'ottimizzazione.



La sintesi consiterà in:

1- Definire la traiettoria desiderata

2- Ottenere la traiettoria realizzata dal punto P

3- Definire la funzione penalità

4- Minimizzare la funzione penalità

Funzione desiderata (traiettoria rettilinea)

La funzione desiderata considerata in questo caso si tratta di una traiettoria rettilinea che congiunge i punti (3, 0) e (7, 0), rappresentata in forma parametrica dalla funzione *f*

$$F(t) = (t, 0) \qquad t \in [3, 7]$$

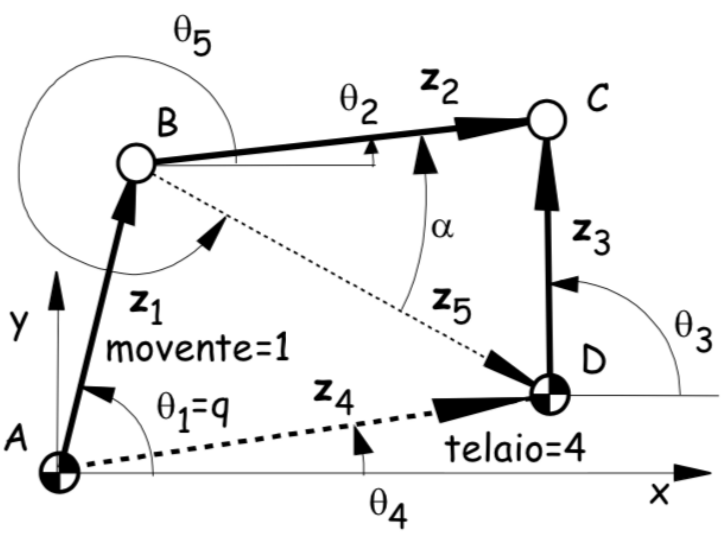
Funzione realizzata

La funzione realizzata viene prodotta da un quadrilatero modificato come in figura, quindi segue lo studio del quadrilatero. L'obiettivo è ricavare dallo studio del quadrilatero la traiettoria del punto P in funzione di q e dei parametri.

$$f(q, parametri) = (g_x(q,\ parametri), g_y(q,\ parametri))$$

Analisi cinematica del quadrilatero

Per risolvere il quadrilatero è conveniente sfruttare alcune considerazioni geometriche per rendrere più agevole il calcolo delle soluzioni in forma chiusa, senza dover risolvere il sistema delle equazioni di chiusura.



In seguito viene riportata la funzione che risolve il quadrilatero, che ha come output un vettore che ha come primo elemeto la traiettoria del punto P.

```
Quadrilatero[q_, p1_, p2_, p3_, p4_,
  p5_, p6_, modo_, p7_, p8_, p9_, p10_modo_] := Module[
  {xB, yB, L5, θ5, c, α, θ2, xC, yC, θ3, xP, yP},
  xB = p1 + p3 Cos[q + p4];
  yB = p2 + p3 Sin[q + p4];
  L5 = √((p7 - xB)^2 + (p8 - yB)^2);
  θ5 = ArcTan[p7 - xB, p8 - yB];
  c = (L5^2 + p5^2 - p6^2) / (2 L5 p5);
  If[modo > 0, α = ArcCos[c], α = -ArcCos[c]];
  θ2 = θ5 + α;
  xC = xB + p5 Cos[θ2];
  yC = yB + p5 Sin[θ2];
  θ3 = ArcTan[xC - p7, yC - p8];
  xP = xB + p9 Cos[θ2 + p10];
  yP = yB + p9 Sin[θ2 + p10];
  {{xP, yP}, θ3, θ2, {{p1, p2}, {xB, yB}, {xC, yC}, {p7, p8}}}
 ]
```

Funzione realizzata

Le componenti x e y della traiettoria descritta dal punto P in funzione di q e dei parametri di progetto sono relativamente:

$$g_x(q,\ parametri) = p9\cos\Big(\tan^{-1}(-p1 - p3\cos(p4+q) + p7,\ -p2 - p3\sin(p4+q) + p8) + \cos^{-1}\Big(\big((-p1 - p3\cos(p4+q) + p7)^2 + (-p2 - p3\sin(p4+q) + p8)^2 + p5^2 - p6^2\big)\Big/ \Big(2\,p5\sqrt{\big((-p1 - p3\cos(p4+q) + p7)^2 + (-p2 - p3\sin(p4+q) + p8)^2\big)}\Big)\Big) + p10\Big) + p1 + p3\cos(p4+q)$$

$$g_x(q,\ parametri) = p9\sin\Big(\tan^{-1}(-p1 - p3\cos(p4+q) + p7,\ -p2 - p3\sin(p4+q) + p8) + \cos^{-1}\Big(\big((-p1 - p3\cos(p4+q) + p7)^2 + (-p2 - p3\sin(p4+q) + p8)^2 + p5^2 - p6^2\big)\Big/ \Big(2\,p5\sqrt{\big((-p1 - p3\cos(p4+q) + p7)^2 + (-p2 - p3\sin(p4+q) + p8)^2\big)}\Big)\Big) + p10\Big) + p2 + p3\sin(p4+q)$$

Sintesi via ottimizzazione traiettoria rettilinea

Definisco la distanza tra le due funzioni: funzione penalità

Per proseguire con l'ottimizzazione è prima di tutto necessario definire la "distanza" tra la funzione desiderata e quella generata: la funzione penalità. Si definisce la funzione *d* in funzione di q, dei parametri di progetto e di w_1 e w_2, che sono relativamente i pesi degli errori che commettono le componenti x e y della funzione realizzata rispetto a quelle della funzione desiderata

$$d(q, parametri) = w_1 \sum_{i=1}^{p} [\,g_x(q_i,\ parametri) \ - F_x(t_i)\,]^2 + w_2 \sum_{i=1}^{p} [\,g_y(q_i,\ parametri) \ - F_y(t_i)\,]^2$$

Dove p è il numero dei punti di accuratezza $F_x(t_i)$, $F_y(t_i)$, cioè quei punti attraverso i quali si desidera

che passi il punto P con uno specifico q_i. In questa analisi sono stati utilizzati 41 punti dato che viene richiesto che il punto P compia la traiettoria desiderata durante una rotazione di 40°, quindi si ha un punto di precisione per ogni grado di rotazione. Inoltre i punti di accuratezza sono equispaziati quindi ad lo spostamento desiderato è linearmente proporzionale alla rotazione q.
Questa relazione viene utilizzata nel programma per avere un solo vettore di campionamento, difatti viene espressa la rotazione q in funzione di t.

$$q = \frac{(q_{\max}-q_{\min})}{(t_{\max}-t_{\min})}(t - t_{\min}) + q_{\min}$$

Minimizzazione della funzione penalità

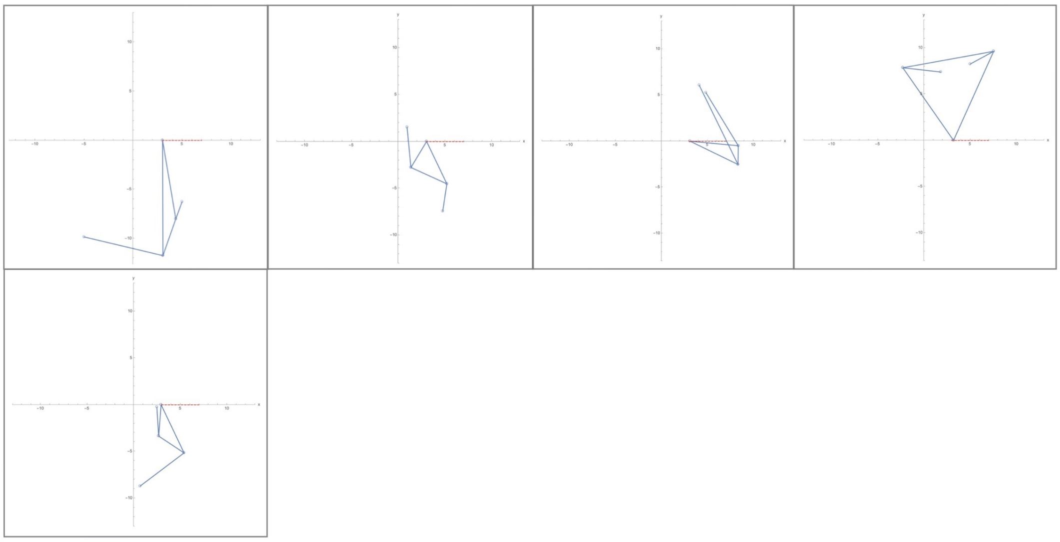
Una volta definita la funzione penalità si procedede con la ricerca dei minimi. Tale ricerca viene eseguita per mezzo del metodo numerico non derivativo Nelder-Mead.

Per la ricerca dei minimi eseguita è stata scelta come lunghezza massima 10 unità, è stato imposto che i vincoli a telaio siano all'interno del rettangolo con -5 < x < 5 e -12 < y < 12, $w_1 = 10$ e $w_2 = 1000$.

In seguito viene riportata la funzione utilizzata per comipiere la minimizzazione della funzione penalità

```
sol = Timing@ParallelTable[
    Block[{w1 = 10, w2 = 1000}, NMinimize[
      {penalty[w1, w2, p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, p10],
       -5 < p1 < 5,
       -12 < p2 < 12,
       1 < p3 < 10,
       1 < p5 < 10,
       1 < p6 < 10,
       -5 < p7 < 5,
       -12 < p8 < 12,
       0 < p9 < 10,
       0 < p10 < 10},
      {p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, p10},
      {Method → "NelderMead", "RandomSeed" → i}]], {i, 1, 10}];
```

Rappresentazioni di alcune configurazioni



Considerazioni

La funzione penalità presenta un numero molto elevato di minimi locali quindi il metodo untilizzato ottiene una notevole quantità di configurazioni che hanno una penalità alta. Si può quindi provare ad utilizzare dei metodi di ottimizzazione alternativi al metodo “Nelder-Mead” come ad esmpio il metodo “DifferentialEvolution” che risulta essere più pesante dal punto di vista computazionale, ma che risulta essere più indicato per problemi di ottimizzazione con un elevato numero di minimi locali. In alternativa si può aumentare il numero di tentativi con il metodo Nelder-Mead utilizzando dei semi random per la configurazione iniziale del simplesso, si può inoltre aumentare il numero di iterazioni per arrivare a convergenza. Un’altra possibilità consiste nel variare i vincoli imposti ai parametri di progetto, in base alle minimizzazioni precedenti, andando così a cercare delle soluzioni possibilmente migliori in uno spazio più ristretto, avvicinando i vincoli ad una buona soluzione ricavata in precedenza.
Dall’analisi delle soluzioni si può notare che ci sono delle configurazioni riccorenti che presentano una buona penalità, che possono essere ricondotte al meccanismo di Watt e a quello di Robert.

In relazione alle configurazioni riportate nell’articolo di riferimento, si può constatare che sono state trovate delle configurazioni simili anche se non con quasi esattamente gli stessi valori dei parametri di progetto, questo può essere interpretato come il fatto che la minimizzazione della funzione di penalità porti ad un elevato numero di configurazioni simili, conseguenza di un elevato numero di minimi locali. Inoltre alcune configurazioni analoghe a quelle presenti nell’articolo non sono state trovate, ciò può significare che alcune soluzioni siano più frequenti di altre.

Sintesi via ottimizzazione traiettoria curvilinea

Funzione desiderata

La funzione desiderata ora è l’arco della circonferenza di centro C(5,-15) passante per i punti (3,0) e

(7,0) descritta dall'equazione $(x - 5)^2 + (y + 15)^2 = 229$, si procede analogamente al caso precedente.

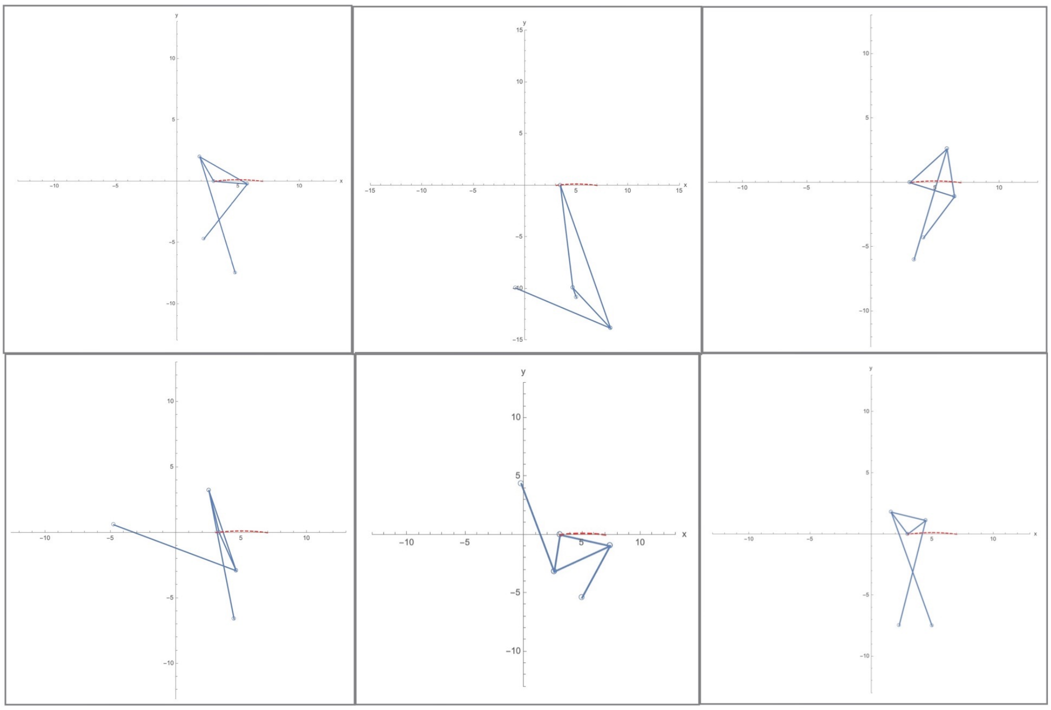
$$Fc(t) = (Cx + R\cos(t), Cy + R\sin(t)) \qquad \frac{\pi}{2} - \gamma \leq t \leq \frac{\pi}{2} + \gamma$$

L'angolo γ corrisponde alla metà dell'angolo relativo all'arco di ciconferenza scelto come traiettoria, in questo caso $\gamma = 0.1325$ rad

Minimizzazione della funzione penalità

Analogamente al caso precedente vengono ricavate la funzione realizzata, e la funzione penalità. Si prosegue con la ricerca dei punti di minimo. Per poter paragonare i risultati di questa seconda ottimizzazione a quella dove è stata scelta una traiettoria rettilinea sono stati utilizzati gli stessi pesi w_1 e w_2.

Rappresentazione di alcune configurazioni



Considerazioni

Utilizzando lo stesso metodo e la medesima funzione penalità si possono paragonare i risultati di questo caso con il precedente. Si nota che in media la penalità delle cofigurazioni ottenute è in media di uno o due ordini di grandezza inferiore rispetto al caso precedente. Si può quindi ipotizzare che il meccanismo scelto abbia una miglior predisposizione a compiere traiettorie curvilinee rispetto ad una rettilinea.

Sintesi robusta

La sintesi robusta si differenzia da quella non robusta perchè vengono presi in considerazione i fattori di rumore dei collegamenti. Ad esempio questi sono rappresentati dalle tolleraze utilizzate durante il processo di produzione, la deformazione indotta dai carichi, dall'usura, dal calore. Questi fattori hanno tutti lo stesso effetto, cioè quello di modificare le dimensioni dei collegameti. Quindi si può considerare appunto la variazione dei collegamenti.
Per semplicità si può considerare che le deformazioni non siano correlate e che seguano una distribuzione normale. Tramite questa semplificazione non si tiene conto di alcuni casi dove la variazione indotta delle dimensioni non segue un andameto normale, inoltre ci possono essere casi dove le variazioni possono essere correlate come nel caso di alcuni processi di produzione.
Per procedere con la sintesi bisogna individuare quali sono le variabili che caratterizzano la performance del meccanismo, che nel caso di un generatore di traiettoria possono essere le componenti x e y della traiettoria del punto P. Viene quindi tenuto in considerazione che, a differenza dell'analisi del meccanismo non robusto, le funzioni x e y sono in funzione delle dimensioni del meccanismo, delle quali non si conosce l'esatto valore, ma solamente il valore medio e la varianza.
Date queste premesse risulta inutile applicare una funzione di penalità come quella utilizzata nella sintesi non robusta, dato che appunto non si conosce il valore delle dimensioni del meccanismo.
Quindi la funzione di penalità viene cambiata in modo che calcoli il valore medio degli errori, inoltre si può valutare di attribuire differenti pesi alla componente dell'errore dovuto al valore medio della dimensione del collegamento e a quella dovuta dalla sua varianza.
Dopo aver definito la funzione di penalità, si prosegue con la minimizzazione di questa funzione con metodi numerici. Quindi la sintesi di un meccanismo robusto può essere ottenuta risolvendo un problema di ottimizzazione non lineare, facendo attenzione a definire una valida funzione di penalità.
Dall'analisi dei risultati presenti nell'articolo di riferimento, si può dedurre che alcuni meccanismi che hanno un basso valore della funzione di penalità nella sintesi non robusta non ottengono un altrettanto buon valore se si considera una funzione di penalità caratteristica della sintesi robusta.
In conclusione si nota che alcuni meccanismi, nonostante compiano la stessa funzione, possono avere una sensibilità notevolmente diversa alla variazione delle dimensioni dei collegamenti. Ad esempio, ciò può essere causato dal fatto che il meccanismo può essere allungato o molto assimetrico, rendendolo così più sensibile oppure alla vicinanza del meccanismo a delle configurazioni singolari, che renderebbero l'effetto delle variazioni delle dimensioni incontrollato.
Un'altro caso interessante è quello di meccanismi più sofistcati basati su un maggior numero di collegamenti, dai quali si possono certamente ottenere risultati migliori riguardo alla generazione della traiettoria desiderata, ma che appunto per la loro complessità presentano un'elevata sensibilità ai disturbi, dato che è proprio l'aumento del numero di collegamenti che aumenta il numero delle sorgenti di questi disturbi.