

Logica Matematica

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria
Politecnico di Milano

6 aprile 2022

La logica come formalismo descrittivo

Un ulteriore linguaggio di specifica

- Logica: un formalismo “universale” alternativo al linguaggio naturale
 - Vantaggi: non ambiguità, possibile dimostrare in modo automatico proprietà desiderate
- Applicata in contesti molto vari: da ingegneria informatica a ingegneria dei sistemi
- Esistono formalismi applicativi basati sulla logica:
 - Linguaggi di programmazione (Prolog, Datalog)
 - Linguaggi di specifica (Z è lo standard ISO/IEC 13568 per specifiche funzionali)

Usi esaminati in questo corso

- Specifica di linguaggi formali (logica monadica del primo e secondo ordine)
- Logica per la specifica di comportamento (I/O) di programmi

Logica del prim'ordine su parole finite

Sintassi ed interpretazione

- Consideriamo la logica del prim'ordine con predicati su una sola variabile. Consente di descrivere parole su un alfabeto \mathbf{I}
- Con $a \in \mathbf{I}$ una lettera predicativa per ogni simbolo di \mathbf{I} , una formula φ è :
 - $a(x)$: il predicato a applicato ad una variabile
 - $x < y$
 - $\neg\varphi$: negazione logica della formula
 - $\varphi \wedge \psi$: congiunzione (and Booleano) di due formule
 - $\forall x (\varphi)$: quantificatore universale
- Interpretazione:
 - il dominio delle variabili è un sottoinsieme finito di \mathbb{N} da pensare come posizioni
 - $<$ corrisponde alla relazione di minore tra le posizioni

Alcune abbreviazioni

Concetti ricorrenti

- Come sempre:
 - $\varphi_1 \vee \varphi_2 \triangleq \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$: legge di De Morgan
 - $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \triangleq \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$: definizione di implicazione semplice
 - $\exists x(\varphi) \triangleq \neg\forall x(\neg\varphi)$: proprietà dei quantificatori
 - $x = y \triangleq \neg(x < y) \wedge \neg(x > y)$: definizione di uguaglianza
 - $x \leq y \triangleq \neg(y < x)$
- In aggiunta:
 - La costante 0: $x = 0 \triangleq \forall y (\neg(y < x))$
 - La funzione successore $S(x)$: $S(x) = y \triangleq (x < y) \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)$
 - Le costanti 1, 2, 3, ... come $S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \dots$

Interpretazione come parole su \mathbf{I}

Interpretazione di $a(x)$

- $a(x)$ è vero \Leftrightarrow l' x -esimo simbolo di una parola $w \in \mathbf{I}^*$ è a
 - gli indici di w partono da 0

Esempi

- Formula vera su tutte e sole le parole non vuote che iniziano per a :
 $\exists x(x = 0 \wedge a(x))$
- Formula vera su tutte e sole le parole in cui ogni a è seguita da una b :
 $\forall x(a(x) \Rightarrow \exists y(y = S(x) \wedge b(y)))$
- Formula vera per la sola stringa vuota: $\forall x (a(x) \wedge \neg a(x))$
 - n.b. se problematico considerare ε , la formula non è mai vera

Altre abbreviazioni convenienti

Abbreviazioni per indici comodi

- $y = x + 1$ indica $y = S(x)$ (non esiste un'operatore di somma tra variabili)
- generalizzando, se $k \in \mathbb{N}, k > 1$ indichiamo con $y = x + k$
 $\exists z_1, z_2, \dots, z_{k-1} (z_1 = x + 1, z_2 = z_1 + 1, \dots, y = z_{k-1} + 1)$
- $y = x - 1$ indica $x = S(y)$, ovvero $x = y + 1$, così come $y = x - k$ indica $x = y + k$
- $last(x)$ indica $\neg \exists y (y > x)$

Esempi

- Parole non vuote terminanti per a : $\exists x (last(x) \wedge a(x))$
- Parole con almeno 3 simboli di cui il terzultimo è a
 $\exists x (a(x) \wedge \exists y (y = x + 2 \wedge last(y)))$ Abbreviando: $[\exists x (a(x) \wedge last(x + 2))]$

Semantica formale

Semantica dei componenti di una formula

- Dati $w \in \mathbf{I}^+$ e \mathbf{V}_1 insieme delle variabili, un assegnamento è una funzione $v_1 : \mathbf{V}_1 \rightarrow \{0, 1, \dots, |w| - 1\}$
 - $w, v_1 \models a(x)$ se e solo se $w = uav$ e $|u| = v_1(x)$
 - $w, v_1 \models x < y$ se e solo se $v_1(x) < v_1(y)$
 - $w, v_1 \models \neg\varphi$ se e solo se $w, v_1 \not\models \varphi$
 - $w, v_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ se e solo se $w, v_1 \models \varphi_1$ e $w, v_1 \models \varphi_2$
 - $w, v_1 \models \forall x(\varphi)$ sse $w, v'_1 \models \varphi$ per ogni v'_1 con $v'_1(y) = v_1(y)$ con y diversa da x

Linguaggio definito da una formula

- $L(\varphi) = \{w \in \mathbf{I}^+ \mid \exists v : w, v \models \varphi\}$, con φ formula chiusa

Proprietà della MFO

Chiusura rispetto ad operazioni

- I linguaggi esprimibili con MFO sono chiusi per unione, intersezione, complemento
 - Basta combinare le formule con \wedge , \vee , \neg
- In MFO non posso esprimere $L = \{a^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ su $\mathbf{I} = \{a\}$
- MFO è strettamente *meno* potente degli FSA
 - Da una formula in MFO φ posso sempre costruire un FSA che riconosce $L(\varphi)$

Proprietà della MFO

Chiusura rispetto alla $*$ di Kleene

- I linguaggi definiti da una formula MFO non sono chiusi rispetto alla $*$ di Kleene
 - la formula $a(0) \wedge a(1) \wedge last(1)$ definisce $L = \{aa\}$
 - la $*$ -chiusura di L è il linguaggio delle stringhe di a pari
- MFO è in grado di definire i linguaggi *star-free*: sono i linguaggi ottenuti per unione, intersezione, concatenazione e complemento di linguaggi finiti
- Come definire tutti i REG?

Logica Monadica del Secondo Ordine (MSO)

Quantificare insiemi di posizioni

- Per avere lo stesso potere espressivo degli FSA basta “solo” permettere di quantificare sui predicati monadici
 - In pratica, quantificare su *insiemi* di posizioni
 - Quantificazione su predicati del prim'ordine \rightarrow logica del secondo ordine
- Ammettiamo formule come $\exists X (\varphi)$ con X appartenente all' insieme dei predicati monadici (insiemi di posizioni)
- Convenzione: usamo maiuscole e minuscole
 - Maiuscole per indicare variabili con dominio l'insieme dei predicati monadici
 - Minuscole per indicare variabili $\in \mathbb{N}$

Semantica

Assegnamento delle variabili

- L'assegnamento di variabili del 2^o ordine (insieme \mathbf{V}_2) è una funzione $v_2 : \mathbf{V}_2 \rightarrow \wp(\{0, 1, \dots, |w| - 1\})$
 - $w, v_1, v_2 \models X(x)$ se e solo se $v_1(x) \in v_2(X)$
 - $w, v_1, v_2 \models \forall X(\varphi)$ se e solo se $w, v'_1 \models \varphi$ per ogni v'_2 con $v'_2(Y) = v_2(Y)$, con Y diversa da X

Esempio

- Possiamo descrivere il linguaggio $L = \{a^{2^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$$\begin{aligned} \exists P(\forall x(& a(x) \wedge \\ & \neg P(0) \wedge \\ & \forall y(y = x + 1 \Rightarrow (\neg P(x) \Leftrightarrow P(y))) \wedge \\ & (last(x) \Rightarrow P(x)) \end{aligned} \quad))$$

Da MSO a FSA

Completare l'equivalenza

- Data una φ MSO, si può sempre costruire un FSA che accetta esattamente $L(\varphi)$ (teorema di Büchi-Elgot-Trakhtenbrot)
 - La dimostrazione dell'esistenza è costruttiva: mostra come costruire l'FSA a partire da una formula MSO (non la vediamo per semplicità)
- La classe dei linguaggi definibili via MSO coincide con REG

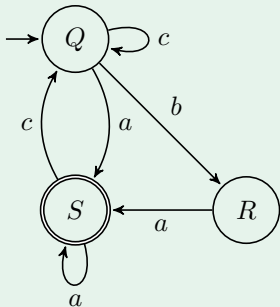
Da MSO a FSA

Un approccio costruttivo

- Per ogni $q \in \mathbf{Q}$ dell'FSA, definiamo una variabile \mathbf{X}_q che rappresenta l'insieme di posizioni in una stringa accettata dove l'automa si trova in q
- L'automa non è in due stati contemporaneamente: per ogni coppia $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j$, abbiamo $\neg \exists y (y \in \mathbf{X}_i \wedge y \in \mathbf{X}_j)$
- L'FSA parte da q_0 equivale a dire che $\forall x (x = 0 \Rightarrow x \in \mathbf{X}_{q_0})$ delle posizioni dei caratteri letti dall' FSA partendo da q
- Ogni transizione $\delta(q_i, a) = q_j$ diventa:
 $\forall x, y (y = x + 1 \Rightarrow (x \in \mathbf{X}_i \wedge a(x) \wedge y \in \mathbf{X}_j))$
- L' accettazione via $\delta(q_i, a) \in \mathbf{F}$ diventa: $\forall x (last(x) \Rightarrow \bigvee_{\delta(q_i, a) \in \mathbf{F}} (x \in \mathbf{X}_i \wedge a(x)))$

Da FSA a MSO

Un esempio pratico



$$\begin{aligned} \exists Q, R, S(\\ & \neg \exists z (\neg (Q(z) \wedge R(z)) \wedge \\ & \quad \neg (Q(z) \wedge S(z)) \wedge \\ & \quad \neg (R(z) \wedge S(z)))) \wedge \end{aligned}$$

$$\forall x (x = 0 \Rightarrow x \in Q) \wedge$$

$$\begin{aligned} \forall x, y (y = x + 1 \Rightarrow \\ & (Q(x) \wedge c(x) \wedge Q(y)) \vee \\ & (Q(x) \wedge b(x) \wedge R(y)) \vee \\ & (Q(x) \wedge a(x) \wedge S(y)) \vee \\ & (R(x) \wedge a(x) \wedge S(y)) \vee \\ & (S(x) \wedge a(x) \wedge S(y)) \vee \\ & (S(x) \wedge c(x) \wedge Q(y))) \wedge \end{aligned}$$

$$\forall x (last(x) \Rightarrow Q(x) \wedge a(x) \vee R(x) \wedge a(x) \vee S(x) \wedge a(x))$$

Logica per definire proprietà dei programmi

Un formalismo per definire gli effetti

- Specifica di un algoritmo di ricerca: la variabile $\text{found} \in \{0, 1\}$ deve valere 1 se e solo se esiste un elemento dell' array a di n elementi uguale all' elemento x cercato
 - $\text{found} \Leftrightarrow \exists i (a[i] = x \wedge 0 \leq i \leq n - 1)$
- Specifica di un algoritmo di inversione out-of-place di un array a in un array b
 - $\forall i, (0 \leq i \leq n - 1 \Rightarrow b[i] = a[n - 1 - i])$

Più in generale

Pre- e Post-condizioni

- Precondizioni: insieme di condizioni che devono essere vere prima dell'esecuzione di un programma P affinché sia vero un insieme di fatti (*post-condizioni*) dopo l'esecuzione
- Esempio: ricerca di un elemento x in un array ordinato a
 - Pre $\{\forall i, (0 \leq i \leq n - 2 \Rightarrow a[i] \leq a[i + 1])\}$
 - Esecuzione del programma P
 - Post $\{\text{found} \Leftrightarrow \exists i(a[i] = x \wedge 0 \leq i \leq n - 1)\}$
- Controesempio: un algoritmo di ricerca binaria non garantirebbe post se pre fosse semplicemente $\{True\}$
- N.B. le pre e post precedenti non implicano che P sia un algoritmo di ricerca binaria: una ricerca lineare funziona ugualmente

Un ulteriore esempio

Ordinamento di array di n elementi senza ripetizioni

Pre $\{\neg \exists i, j (0 \leq i \leq n-1 \wedge 0 \leq j \leq n-1 \wedge a[i]=a[j] \wedge i \neq j)\}$

- Esecuzione di ORD

Post $\{\forall i, (0 \leq i \leq n-2 \Rightarrow a[i] \leq a[i+1])\}$

“Buone” specifiche

- É una specifica “adeguata”?
- La specifica agisce come un “contratto” con chi deve sviluppare ORD, così come con chi usa il programma sviluppato

Ordinamento di array di n elementi senza ripetizioni

Una specifica più accurata

Pre $\{ \neg \exists i, j (0 \leq i \leq n-1 \wedge 0 \leq j \leq n-1 \wedge a[i] = a[j] \wedge i \neq j) \wedge \forall i (0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow a[i] = b[i]) \}$

- Esecuzione di ORD

Post $\{ \forall i, (0 \leq i \leq n-2 \Rightarrow a[i] \leq a[i+1]) \wedge$
 $\forall i (0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow \exists j (0 \leq j \leq n-1 \wedge a[i] = b[j])) \wedge$
 $\forall j (0 \leq j \leq n-1 \Rightarrow \exists i (0 \leq i \leq n-1 \wedge a[i] = b[j])) \}$

“Buone” specifiche

- Se eliminiamo la prima porzione della Pre, la specifica è ancora valida?
- La specifica data è un “buon” modello anche per l’ordinamento di una lista o un file?

Verso metodi e linguaggi di specifica

Verifiche di correttezza di implementazioni

- ➊ Specificare i requisiti di un algoritmo in un'opportuna logica
- ➋ Implementare l'algoritmo in un opportuno linguaggio
- ➌ Ottenere la correttezza dell'implementazione come dimostrazione (automatizzata) di un teorema

Logica come descrizione di "dati"

- É possibile scegliere un'opportuna logica per descrivere un insieme di concetti
 - e.g., RDF per pagine web, logiche descrittive per dati biomedici
- Se la logica è opportuna (= è possibile calcolare la verità di un dato teorema) possiamo automatizzare la validazione di nostre deduzioni su vaste quantità di dati