Algoritmi e Principi dell'Informatica
Soluzioni al Tema d'esame

9 aprile 2022

Esercizio 1 (9 punti, si svolgano solo le parti a, c ed f in caso di riduzione del 30%)
Si denoti, come di consueto, con f_y la funzione calcolata dalla macchina di Turing con indice y. Per ciascuna delle seguenti funzioni si dica se è computabile, motivando opportunamente la risposta:

a) $g_1(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } f_{10}(10) > 10 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

b) $g_2(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } f_{10}(10) > 10 \\ \perp \text{ altrimenti} \end{cases}$

c) $g_3(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } f_y(10) > 10 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

d) $g_4(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } f_y(10) > 10 \\ \perp \text{ altrimenti} \end{cases}$

e) $g_5(y, x) = \begin{cases} 1 \text{ se } f_y(10) > x \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

f) $g_6(y, x) = \begin{cases} 1 \text{ se } f_y(10) > x \\ \perp \text{ altrimenti} \end{cases}$

Soluzione

a) Sì: la condizione $f_{10}(10) > 10$ è una domanda chiusa.

b) Sì: come sopra.

c) No per Rice: l'insieme di funzioni $\mathbf{F} = \{f_y \mid f_y(10) > 10\}$ non è né l'insieme vuoto, né l'insieme di tutte le funzioni computabili. Ad esempio, la funzione costante $f(x) = 11$ appartiene ad $\mathbf{F}$, mentre la funzione costante $g(x) = 9$ no.

d) Sì: basta mettere in esecuzione la macchina y-esima con l'ingresso 10 (recuperandone il suo diagramma degli stati con l'enumerazione di Gödel). Se termina, ce ne si accorge in tempo finito e si può confrontare l'esito con 10 (restituendo 1 se l'esito è maggiore ed entrando in un ciclo infinito negli altri casi); se non termina, questo è compatibile con la definizione della funzione g_4.

e) No: il problema di stabilire se $f_y(10) > x$ è una generalizzazione di quello del caso della funzione g_3, quindi se sapessimo risolverlo, sapremmo valutare anche il test della funzione g_3, che però non è calcolabile.

f) Sì: in modo analogo al caso della funzione g_4.

Esercizio 2 (7 punti)
Si considerino i linguaggi $L_s = \{a^n b^{2m} \mid n, m \geq 0\}$ e $L_d = \{\varepsilon, a, aa\}$.
Si realizzi un traduttore a potenza minima che calcoli la seguente traduzione da L_s a L_d:

$$\tau(a^n b^{2m}) = a^{n \bmod 3},$$

dove $x \bmod y$ indica il resto della divisione intera x/y.

Soluzione