Algoritmi e principi dell'informatica

Matteo Pradella
Email: matteo.pradella@polimi.it

DEIB, edificio 22, piano 3; tel: 3495

ricevimento
Mar. 16.30 (meglio: su appuntamento)

Algoritmi e Principi dell'Informatica

- 2 moduli:

1) Informatica Teorica

2) Algoritmi e Strutture Dati (ex Informatica 3)

Obiettivi e motivazioni

Perché l'informatica "teorica"?

La teoria stimolata dalla pratica:

generalità, rigore, "controllo"

- Comprendere a fondo e in maniera critica i principi dell'informatica (riesame approfondito di concetti elementari)
- Costruire basi solide per comprendere e dominare l'innovazione futura (esempio: multimedialità e modellazione della computazione concorrente)

Il programma (Modulo 1)

- **La modellizzazione informatica**
(Come descrivo un problema e la sua soluzione):
non tanto singoli modelli specialistici
piuttosto creare la capacità di capire e "inventare"
modelli vecchi e nuovi
- **La teoria della computazione**:
che cosa so/posso fare con lo strumento informatico
(quali problemi so risolvere)?

Il programma (Modulo 2)

- **Teoria della complessità**
  quanto *costa* risolvere un problema informatico?

- **Complessità di algoritmi e strutture dati**
  Algoritmi e strutture dati classiche: ordinamento, pile, liste, code, tabelle hash, alberi e grafi.

L’organizzazione

- Prerequisiti:
  - Le basi essenziali di Informatica
  - Elementi di matematica non continua (Algebra e Logica)

- Lezioni e esercitazioni (stile classico)
  - Interazione auspicata vivamente:
    - Intervento diretto a lezione
    - Ricevimento
    - Email

L'organizzazione (continua)

- Siti internet del corso:
  - WeBeep: https://webeep.polimi.it/course/view.php?id=3775

- Esame basato sulla *capacità di applicare, non di ripetere*:
  - principalmente scritto
  - possibilità di consultare testi
- Compitini e prove separate per modulo
  - Chi è globalmente insufficiente ma sufficiente in uno dei due moduli può rifare la sola parte insufficiente. Chi è globalmente sufficiente invece può solo accettare o rifiutare il voro intero.

L’organizzazione (continua)

- Materiale didattico (Mod. 1):
  - Testo ufficiale:
    Mandrioli, Spoletini: *Informatica teorica*, II ed., 2011
  - Eserciziario:
    Lavazza, Mandrioli, Morzenti, San Pietro, II ed., Esculapio
  - Mandrioli, Spoletini
    Mathematical logic for computer science: an Introduction,
    Esculapio
  - Temi d’esame risolti

L’organizzazione (continua)

- Materiale didattico (Mod. 2):

ufficiale: Algoritmi e Principi dell'Informatica,
ISBN 9781307547382, McGraw-Hill 2020 – versione Create.

(libro completo: Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduzione agli algoritmi e strutture dati, 3/ed)

Il libro è anche disponibile nella versione e-book dalla piattaforma *VitalSource Bookshelf*

I modelli in campo ingegneristico

- In ingegneria la fase di progetto si basa sull'uso di *modelli*
- Infatti è spesso impossibile o impraticabile la verifica di soluzioni nel mondo reale
- Talvola modelli *fisici* (es. ponte o diga in miniatura)
- Spesso modelli *formali*: oggetti matematici che fungono da rappresentazioni astratte di entità reali complesse

Uso dei modelli formali

1. Formalizzazione del problema: dalle entità reali ad astrazione matematica
2. Risoluzione del problema formalizzato
3. Interpretazione dei risultati ottenuti dal modello => valutazione/deduzione delle scelte di progetto

Il modello è *adeguato* se i risultati ottenuti riflettono le proprietà che ci interessano del sistema fisico (entro limiti di approssimazione accettabili)

I modelli per l’informatica

Fasi principali dell’Ingegneria del SW classica:

1. Analisi dei requisiti => *documento di specifica*

2. Progetto => *architettura sw*

3. Implementazione => *codice*

Tradizionalmente si usa linguaggio naturale o “pallogrammi” con semantica informale

La tendenza attuale è verso un uso sempre maggiore di linguaggi formali (o semi-) in tutte le fasi di produzione del sw

=>

Migliore affidabilità e facilità di manutenzione, ma soprattutto permette l’uso di **strumenti automatici**

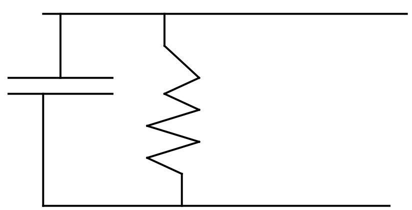
I modelli dell'informatica: qualche nota

- Non (sol)tanto discreti rispetto a continui
  (bit e byte rispetto a numeri reali ed equazioni varie)

- Quanto:

- *Generali*:
  il sistema informatico nel contesto (spesso) di un sistema più ampio: impianto, organizzazione, sistema “embedded”, …
- *Flessibili*:
  spesso non esiste il “modello già pronto”:
  occorre saper adattare modelli esistenti ad esigenze specifiche e impreviste
- esistono molti (troppi) modelli specialistici:
  occorre saper studiare/inventare nuovi modelli

- Occorre (maggiore) attitudine dinamica e critica:
  - confronto modello-realtà
  - analisi e sintesi del modello/progetto
- rispetto a:



$$\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2 = g(x, y, z)$$

- Spesso la vera difficoltà di un problema sta nel … formularlo!

  Che cosa significa:
  - “automatizzare una procedura d’ufficio”
  - “evitare incidenti ferroviari/aerei/…”
  - …

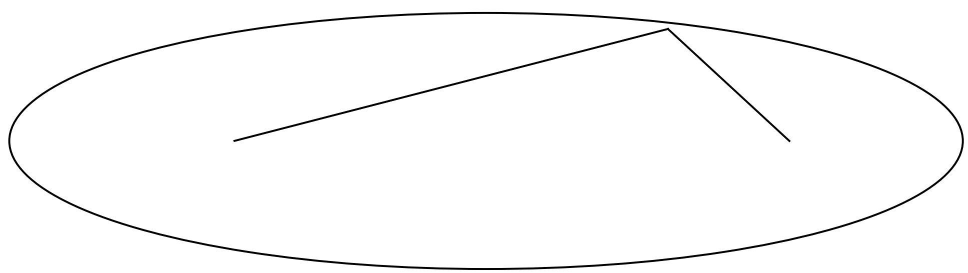
  ?

- Modelli operazionali
  (macchine astratte, sistemi dinamici, …)
  basati sul concetto di stato e di meccanismi
  (operazioni) per la sua evoluzione

- Modelli descrittivi
  tesi a formulare le proprietà desiderate o temute del
  sistema piuttosto del suo funzionamento

Esempi

- Modello operazionale dell’ellisse:



- Modello descrittivo dell’ellisse:

$$a\, x^2 + b\, y^2 = c$$

- Descrizione operazionale dell'ordinamento:
  - Calcola il minimo e mettilo al primo posto;
  - Calcola il minimo degli elementi rimasti e mettilo al secondo posto;
  - …
- Descrizione non-operazionale dell'ordinamento:
  - Individua una permutazione della sequenza data tale che $\forall i,\ a[i] \leq a[i+1]$

- In realtà le differenze tra modellizzazione operazionale e modellizzazione descrittiva non sono così nette: più che altro si tratta di un utile riferimento nel classificare un tipo di modello

Un primo, fondamentale, “meta”modello: il *linguaggio*

- Italiano, francese, inglese, …
- C, Pascal, Ada, …
  ma anche:
- Grafica
- Musica
- Multimedialità, ...

Gli elementi di un linguaggio

- Alfabeto o vocabolario
  (sinonimi, matematicamente parlando):
  Insieme finito di simboli base
  {a,b,c, …z}
  {0,1}
  {Do, Re, Mi, …}
  {abate, abbaino, …, zuzzurellone}
  ASCII
  ...

- Stringa (su un alfabeto A):
  sequenza ordinata e finita di elementi di A, anche con ripetizioni
  a, b, aa, alfa, giovanni, alla, nel mezzo del cammin, …
- Lunghezza di una stringa:
  $|a| = 1$, $|ab| = 2$
- La stringa nulla ε: $|\varepsilon| = 0$
- A^* = insieme di tutte le stringhe, inclusa ε, su A.
  $A = \{0,1\}$, $A^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, \ldots\}$

- Operazione su stringhe:
  concatenazione:
  x.y
  x = abb, y = baba, x.y = abbbaba
  x = Quel ramo, y = del lago di Como,
  x.y = Quel ramo del lago di Como
  "." : associativa, noncommutativa

- A*:
  monoide libero costruito su A mediante "."
- ε: elemento neutro rispetto a "."

Linguaggio

- L sottoinsieme di A*: L $\subseteq$ A*
  Italiano, C, Pascal, … ma anche:
  sequenze di 0 e 1 con numero pari di 1
  l’insieme degli spartiti in fa minore
  le matrici quadrate il cui determinante è 0
  …
- Concetto estremamente ampio, in un certo senso *universale*

Operazioni su linguaggi

- Operazioni insiemistiche:
  $\cup$, $\cap$, $L_1 - L_2$, $\neg L = A^* - L$ (complemento, a volte $\overline{L}$)

- Concatenazione (tra linguaggi):
  $L_1 . L_2 = \{x.y \mid x \in L_1, y \in L_2\}$

  $L_1 = \{0,1\}^*$, $L_2 = \{a,b\}^*$
  $L_1 .L_2 = \{\varepsilon$, 0,1, 0a, 11b, abb, 10ba, …. *Non* ab1!$\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^i = L^{i-1}.L$

- $L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$

- NB: $\{\varepsilon\} \neq \varnothing$!
  $\{\varepsilon\} . L = L$;
  $\varnothing . L = \varnothing$

- + = "* - 0": A^+ = insieme di tutte le stringhe su A.
  $A = \{0,1\}$, $A^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, \ldots\}$

- $L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$

Alcuni risvolti “pratici”

- L_1 : insieme dei documenti “Word/Mac”
- L_2 : insieme dei documenti “Word/Windows”
- $L_1 \cap L_2$: insieme dei documenti Word “compatibili Mac e Windows”
- Composizione di un messaggio su rete:
- x . y . z:
- x = testata (indirizzo, …)
- y = testo
- z = “chiusura”

- Il linguaggio: strumento di espressione …
- di un *problema*
- $x \in L$?
  - Un messaggio è corretto?
  - Un programma è corretto?
  - $y = x^2$?
  - $z = Det(A)$?
  - Il sonoro di un film è ben sincronizzato con il video?

- $y = \tau(x)$
  τ : traduzione: funzione da L_1 a L_2
  - τ_1 : raddoppio degli “1” (1 --> 11):
    $\tau_1(0010110) = 0011011110$, …
  - τ_2 : scambio a con b (a <---> b):
    $\tau_2(abbbaa) = baaabb$, …

  ma anche:
  - compressione di files
  - protocolli autocorrettori
  - compilazione da linguaggi di alto livello in linguaggi oggetto
  - traduzione italiano ---> inglese

Conclusione

Il concetto di linguaggio e le operazioni base ad esso associate forniscono un mezzo espressivo estremamente generale per descrivere sistemi di ogni tipo, loro proprietà e problemi ad essi connessi:

- Calcolare il determinante di una matrice;
- Stabilire se un ponte crollerà sotto un certo carico;
- ….
- In fin dei conti nel calcolatore ogni informazione è una stringa di bit ...

Modelli operazionali

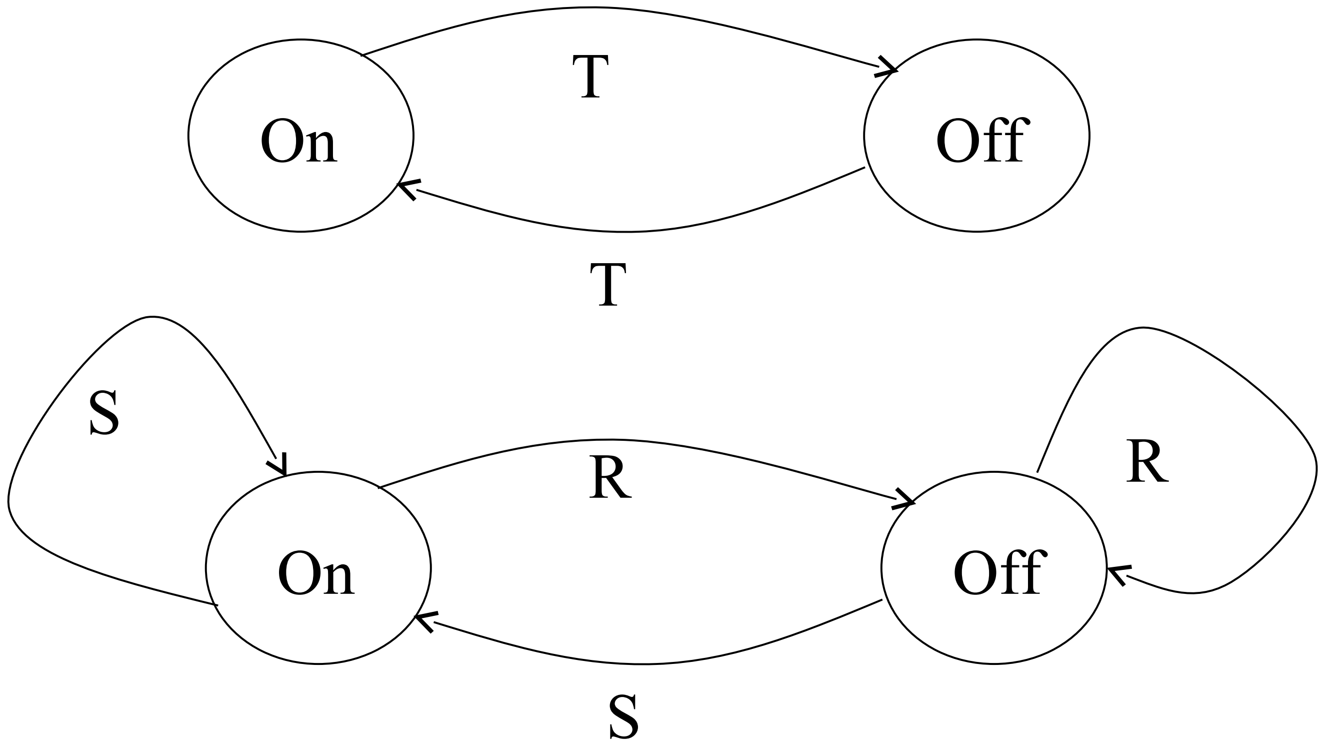
(macchine a stati, sistemi dinamici)

- Le macchine (*automi*) a *stati finiti (FSA)*:
  - Un insieme finito di stati:
    {Acceso, spento}, {on, off}, ….
    {1,2,3,4, …k}, {canali TV}, {fasce di reddito}, …

    Rappresentazione grafica:

Comandi (ingressi) e transizioni tra stati

- Due semplicissimi flip-flop:



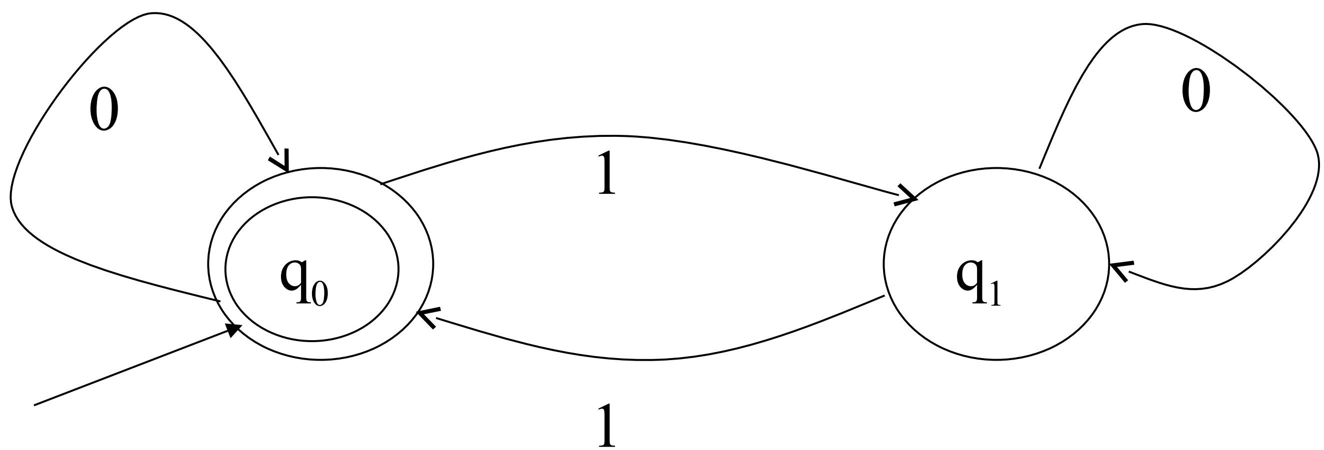
Accensione e spegnimento di luce, ...

Una prima formalizzazione

- Un automa a stati finiti è (costituito da):
  - Un insieme finito di stati: Q
  - Un insieme finito (alfabeto) di ingressi: I
  - Una funzione di transizione (*parziale*):
    $\delta: Q \times I \rightarrow Q$

L'automa come riconoscitore di linguaggi ($x \in L$?)

- Una *sequenza di mosse* parte da uno *stato iniziale* ed è accettata se giunge in uno *stato finale o di accettazione*.

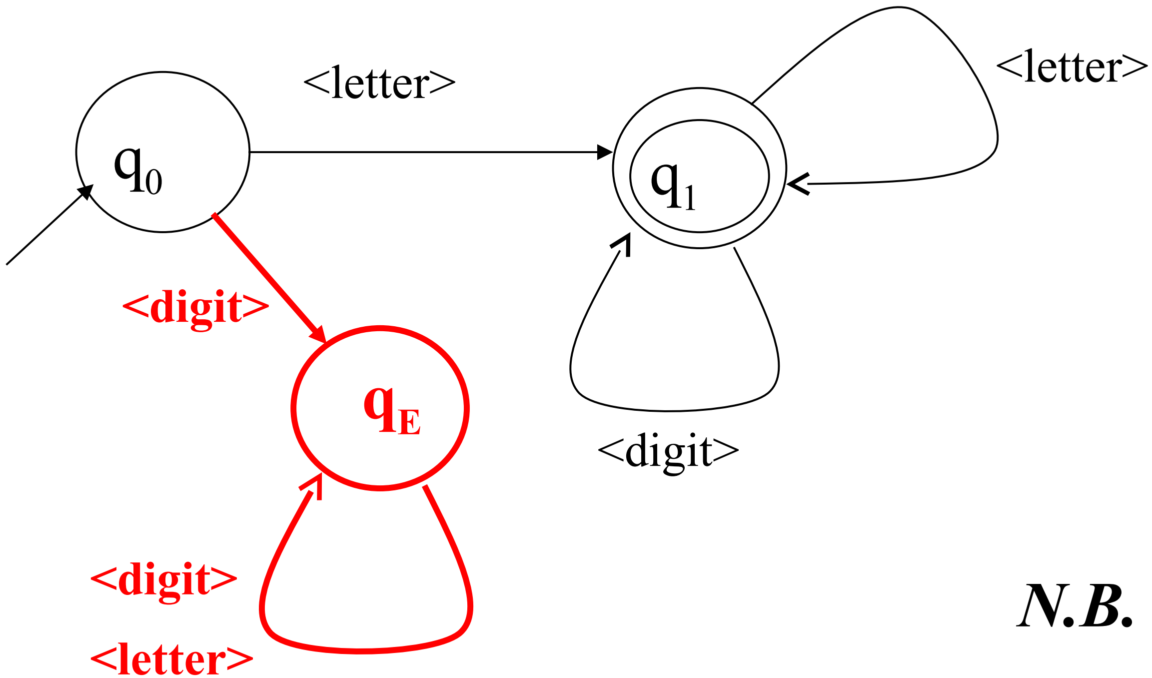


L = {stringhe con un numero pari di "1" e un numero qualsiasi di "0"}

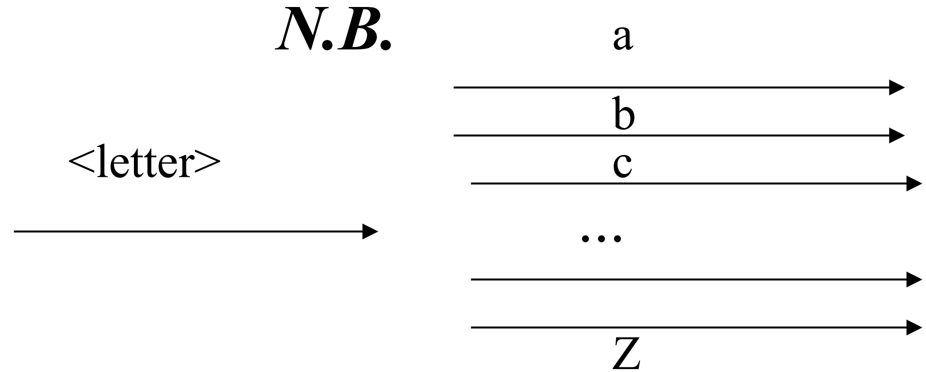
Formalizzazione del riconoscimento di L

- Sequenza di mosse:
  - $\delta^*: Q \times I^* \to Q$
    δ^* definita induttivamente a partire da δ:
    $\delta^* (q,\varepsilon) = q$
    $\delta^* (q,y.i) = \delta(\delta^*(q,y), i)$
- Stato iniziale: $q_0 \in Q$
- Stat*i* final*i* o di accettazione: $F \subseteq Q$
- $x \in L \leftrightarrow \delta^* (q_0,x) \in F$

Riconoscimento di identificatori Pascal

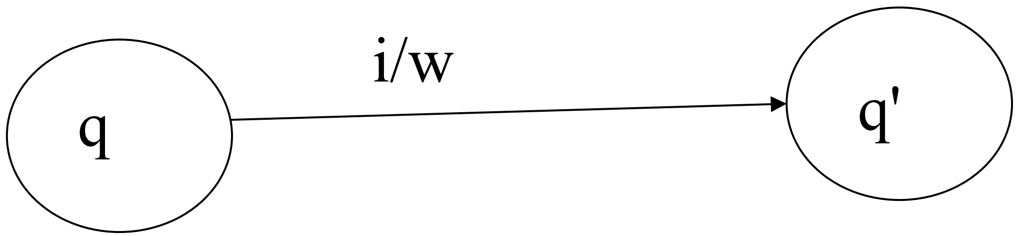


N.B.

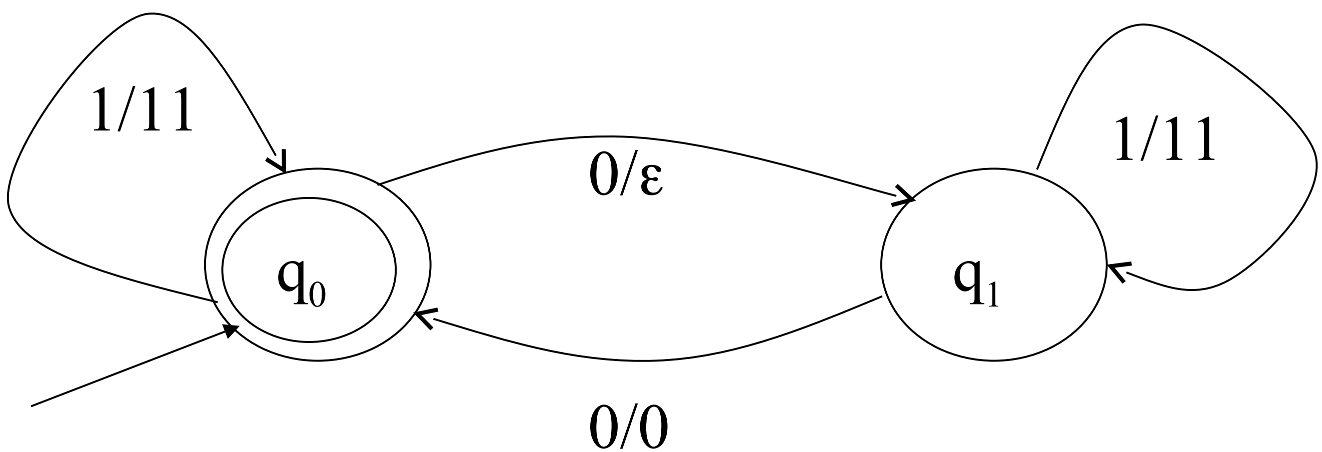


L'automa come traduttore di linguaggi
$y = \tau(x)$

Transizione con uscita:



τ: ogni due "0" se ne riscrive 1 e ogni "1" se ne scrivono due (gli "0" devono essere pari)



Formalizzazione degli automi traduttori

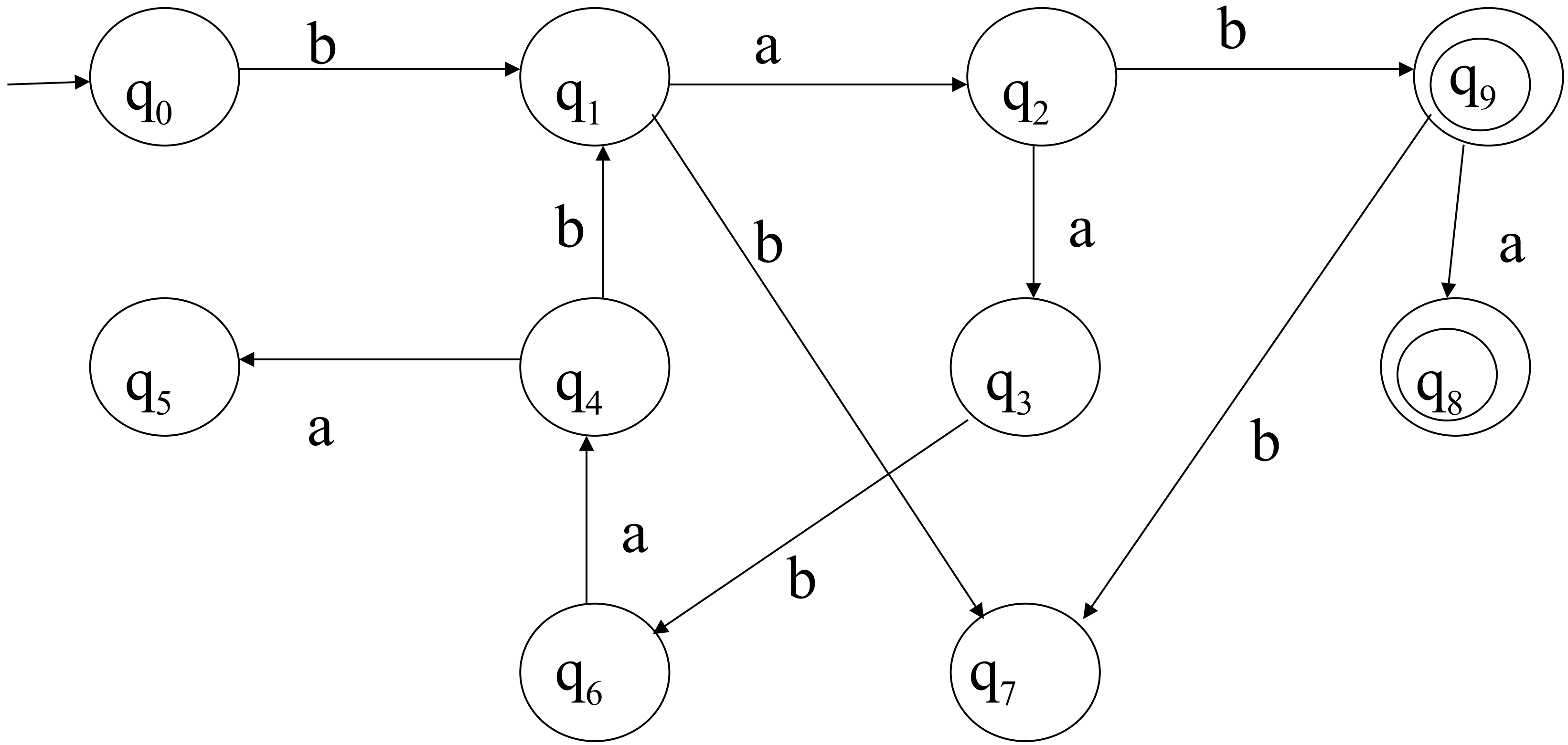
- $T = \langle Q, I, \delta, q_0, F, O, \eta \rangle$
  - $\langle Q, I, \delta, q_0, F \rangle$: come per A riconoscitore
  - O: alfabeto di uscita
  - $\eta : Q \times I \rightarrow O^*$
- $\eta^* : Q \times I^* \rightarrow O^*$

  $\eta^*(q,\varepsilon) = \varepsilon$

  $\eta^*(q,y.i) = \eta^*(q,y).\eta(\delta^*(q,y), i)$
- $\tau(x) = \eta^*(q_0,x)$ sse $\delta^*(q_0,x) \in F$

Analisi del modello a stati finiti
(per la sintesi si rimanda ad altri corsi - es. Calcolatori)

- Modello molto semplice ed intuitivo, applicato in molteplici settori, anche fuori dall'informatica
- Si pagherà un prezzo per tale semplicità?
- lo vedremo… (cosa si può e non si può fare)
- Una prima proprietà fondamentale: il *comportamento ciclico* degli automi a stati finiti



C’e` un ciclo q_1 ----aabab---> q_1

Se un ciclo è percorribile una volta, esso è anche percorribile 2, 3, …, n, … 0 volte =========>

Più formalmente:

- Se $x \in L$ e $|x| > |Q|$ allora
- esistono $q \in Q$ e $w \in I^+$ tali che:
  - $x = ywz$
  - $\delta^* (q,w) = q$
  - inoltre $\forall n \geq 0, yw^n z \in L$

viene detto *Pumping Lemma* (posso "pompare" i w)

Nota: per i dettagli è in generale utile guardare la dimostrazione per esteso sul libro

Dal pumping lemma derivano molte importanti proprietà degli FSA -positive e “negative”-

- $L = \emptyset$? $\exists\ x \in L \leftrightarrow \exists\ y \in L, |y| < |Q|$:
  - numero passi massimo per arrivare a stato finale: $|Q|-1$
- $|L| = \infty$? $\exists\ x \in L, |Q| <= |x| < 2|Q|$
  - come sopra, inoltre:
  - lunghezza massima di un ciclo: $|Q|$

Si noti che *in generale*, saper rispondere alla domanda “$x \in L$?” per un generico x, *non* implica saper rispondere alle altre domande! (Con FSA va bene, però non è sempre così)

Alcuni risvolti pratici

- Ci interessa un linguaggio di programmazione consistente di …
  0 programmi corretti?
- Ci interessa un linguaggio di programmazione in cui è possibile scrivere solo un numero finito di programmi?
- ...

Una conseguenza “negativa” del pumping lemma

- Il linguaggio $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ è riconosciuto da qualche FSA?
- Supponiamo, per assurdo, di sì:
- Consideriamo $x = a^m b^m$, $m > |Q|$ e applichiamo il P.L.
- Casi possibili:
  - $x = ywz$, $w = a^k$, $k > 0$ ====> $a^{m + r \cdot k} b^m \in L$, $\forall r$: NO
  - $x = ywz$, $w = b^k$, $k > 0$ ====> idem
  - $x = ywz$, $w = a^k b^s$, $k, s > 0$ ====> $a^{m-k} a^k b^s a^k b^s b^{m-s} \in L$: NO

- Più intuitivamente: per “contare” *n* qualsiasi occorre una memoria infinita!
- Rigorosamente parlando ogni calcolatore è un FSA, però si tratta di una astrazione sbagliata: numero di stati intrattabile!

  (analog. dinamica di un aereo studiandone ogni singola molecola)

- Passando dall’esempio “giocattolo” $\{a^n b^n\}$ a casi più concreti:
  - Il riconoscimento di strutture parentetiche tipiche dei linguaggi di programmazione non è effettuabile con memoria finita
- Occorrono perciò modelli “più potenti”

Le proprietà di *chiusura* dei FSA

- Il concetto matematico di chiusura:
  - I numeri naturali sono chiusi rispetto alla somma
  - ma non rispetto alla sottrazione
  - I numeri interi sono chiusi rispetto a somma, sottrazione, moltiplicazione, ma non …
  - I numeri razionali …
  - I numeri reali …
  - Importanza generale del concetto di **chiusura** (di operazioni e relazioni): *insieme più piccolo tale che ...*

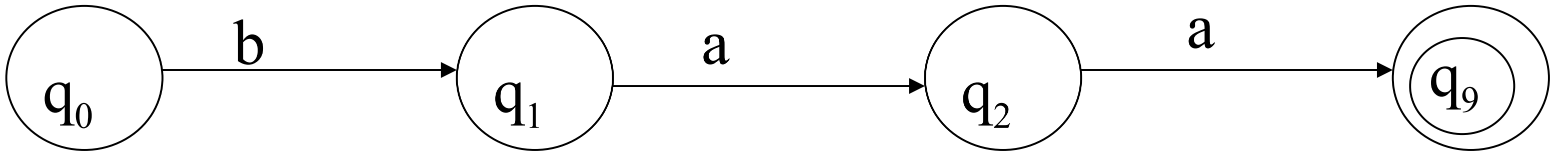
Nel caso dei linguaggi:

- $\boldsymbol{L} = \{L_i\}$: *famiglia* di linguaggi
- $\boldsymbol{L}$ chiusa rispetto a OP se e solo se per ogni $L_1, L_2 \in \boldsymbol{L}$, L_1 OP $L_2 \in \boldsymbol{L}$

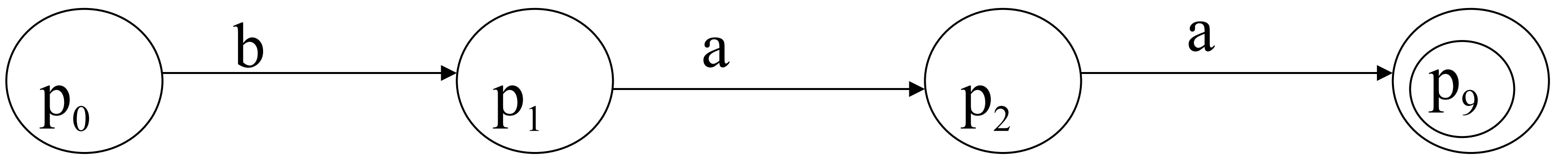
- ***REG***: linguaggi ***Regolari***, riconosciuti da FSA
- ***REG*** chiusa rispetto alle operazioni insiemistiche, alla concatenazione, la “*”, … e praticamente “tutte” le altre.

Intersezione

A

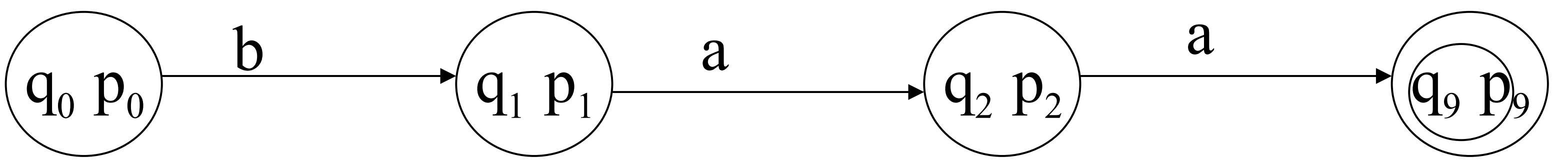


B

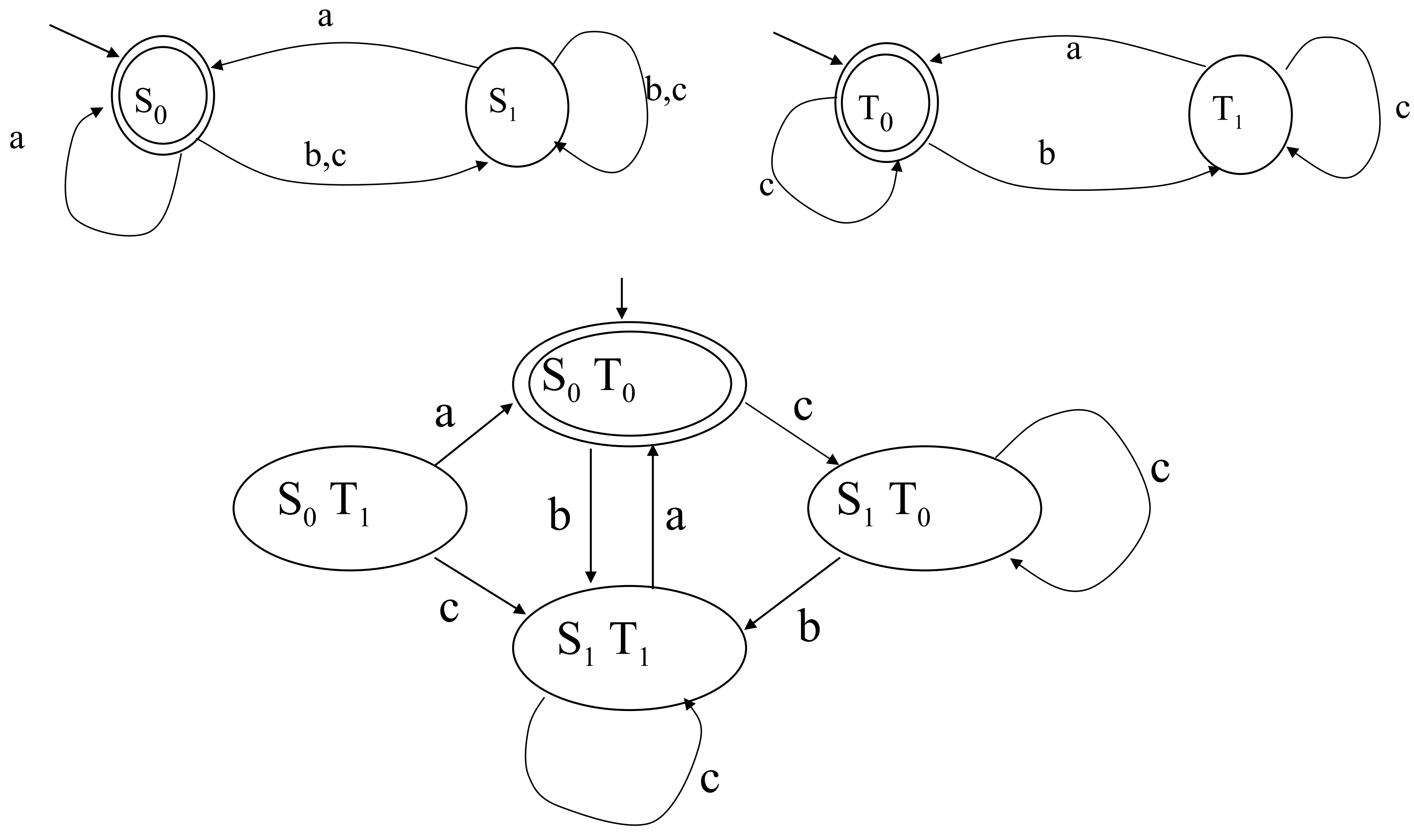


Posso simulare il “funzionamento parallelo” di A e B semplicemente “accoppiandoli”:

<A,B>



Intersezione: esempio



Formalmente:

- Dati $A^1 = <Q^1, I, \delta^1, q_0{}^1, F^1>$ e
  $A^2 = <Q^2, I, \delta^2, q_0{}^2, F^2>$
- $< A^1, A^2 > =$
  $<Q^1 \times Q^2, I, \delta, <q_0{}^1, q_0{}^2>, F^1 \times F^2>$
  $\delta(<q^1, q^2>, i) = <\delta^1(q^1, i), \delta^2(q^2, i)>$
- Una semplice induzione dimostra che
  $L(< A^1, A^2 >) = L(A^1) \cap L(A^2)$

Possiamo sfruttare la stessa costruzione per l'unione: come?

Unione

- Costruzione concettualmente simile:

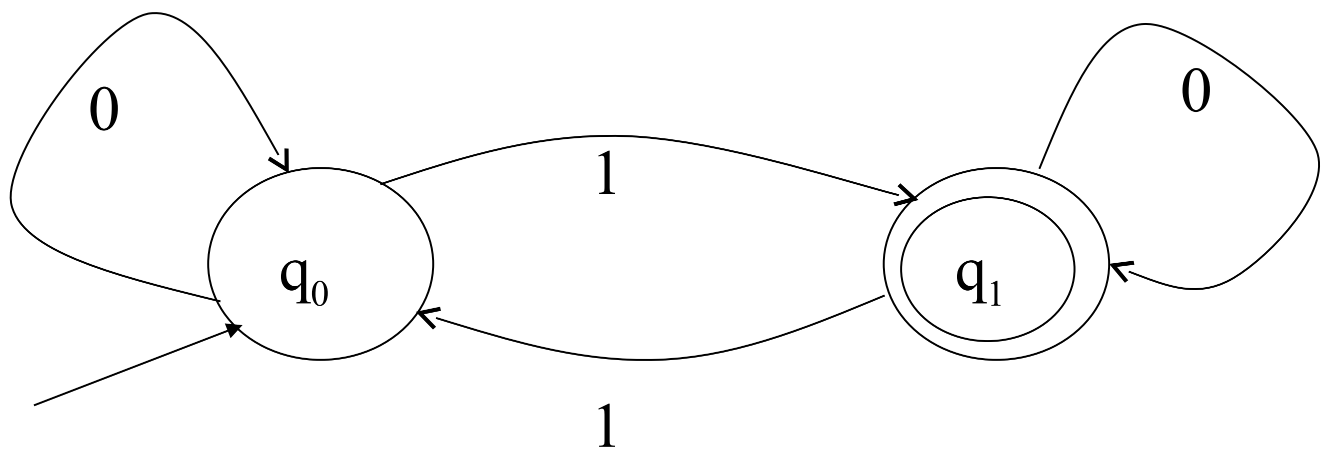
$$<Q^1 \times Q^2, I, \delta, <q_0^{\,1}, q_0^{\,2}>, F^1 \times Q^2 \cup Q^1 \times F^2>$$

funziona in tutti i casi?

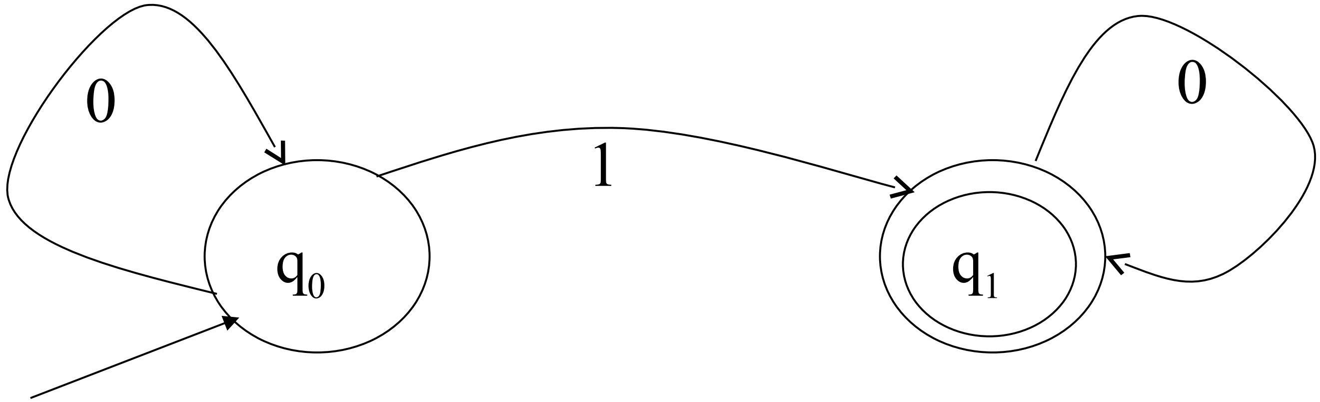
- Un'altra possibilità è sfruttare il complemento e De Morgan:

  $A \cup B = \neg(\neg A \cap \neg B)$

Complemento:

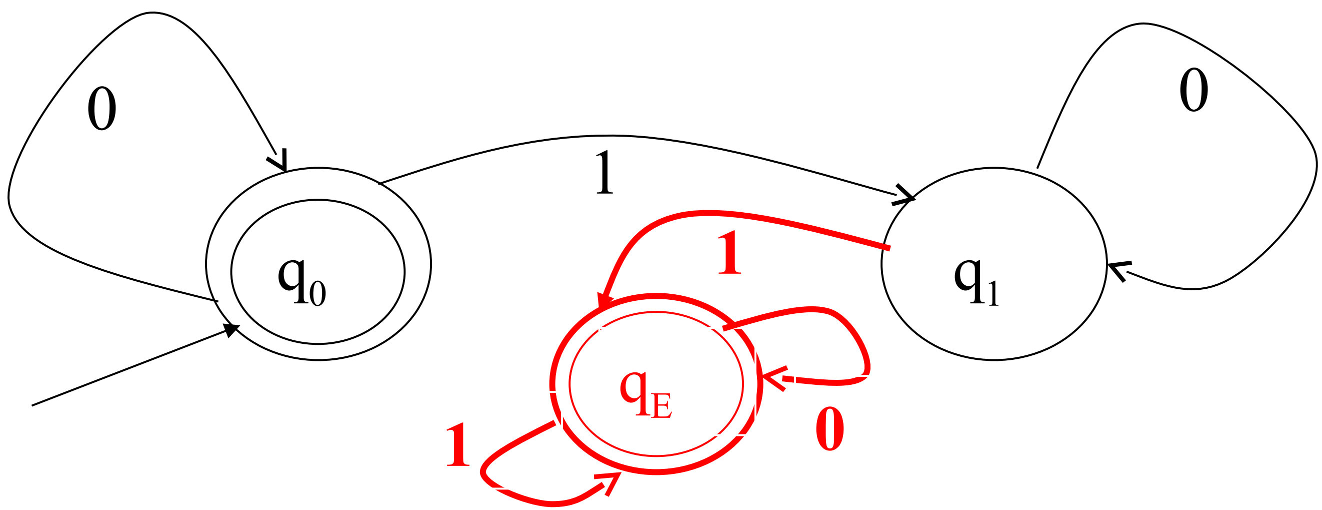


Idea: F^ = Q - F: Sì però …



Se mi limito a scambiare F con Q – F cosa succede?

Il problema nasce dal fatto che δ è parziale.

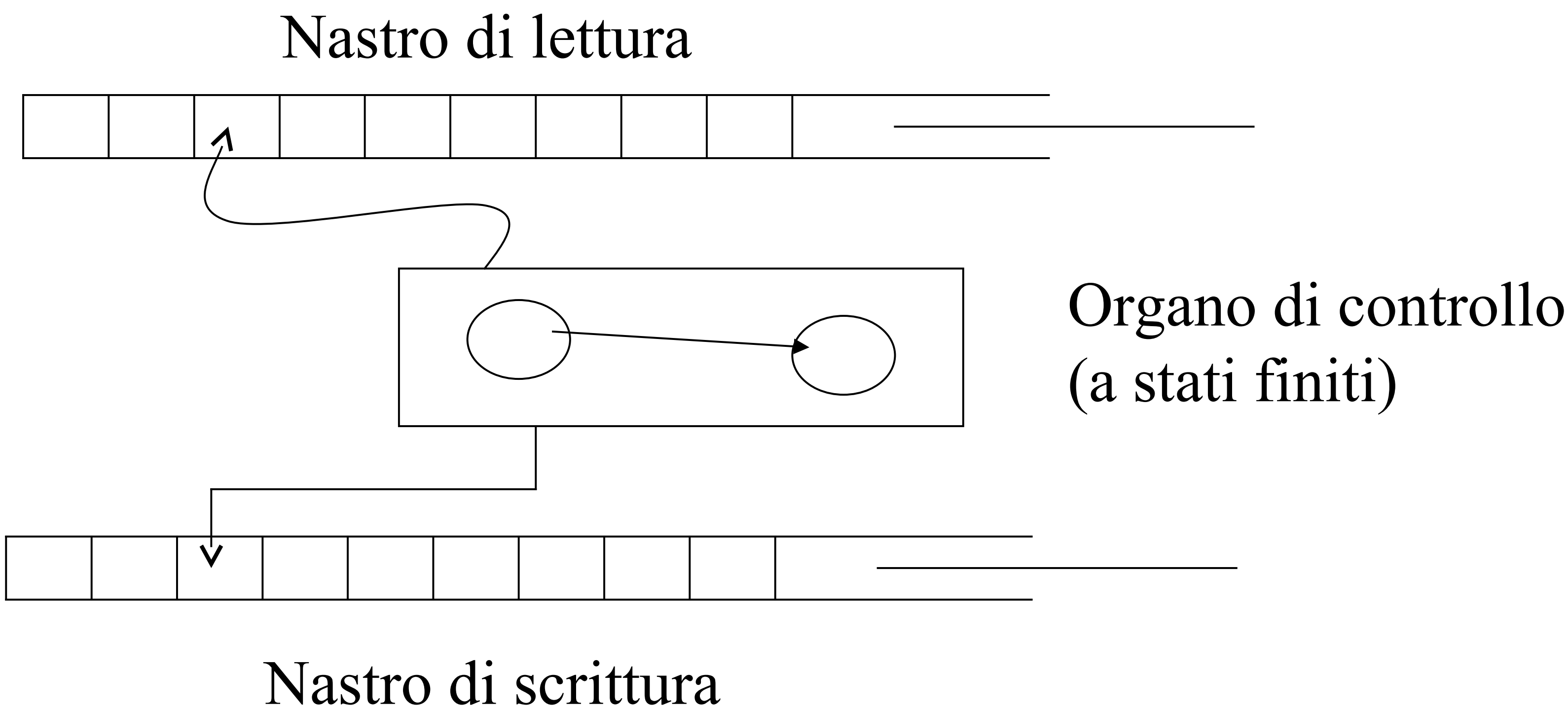


Filosofia generale del complemento

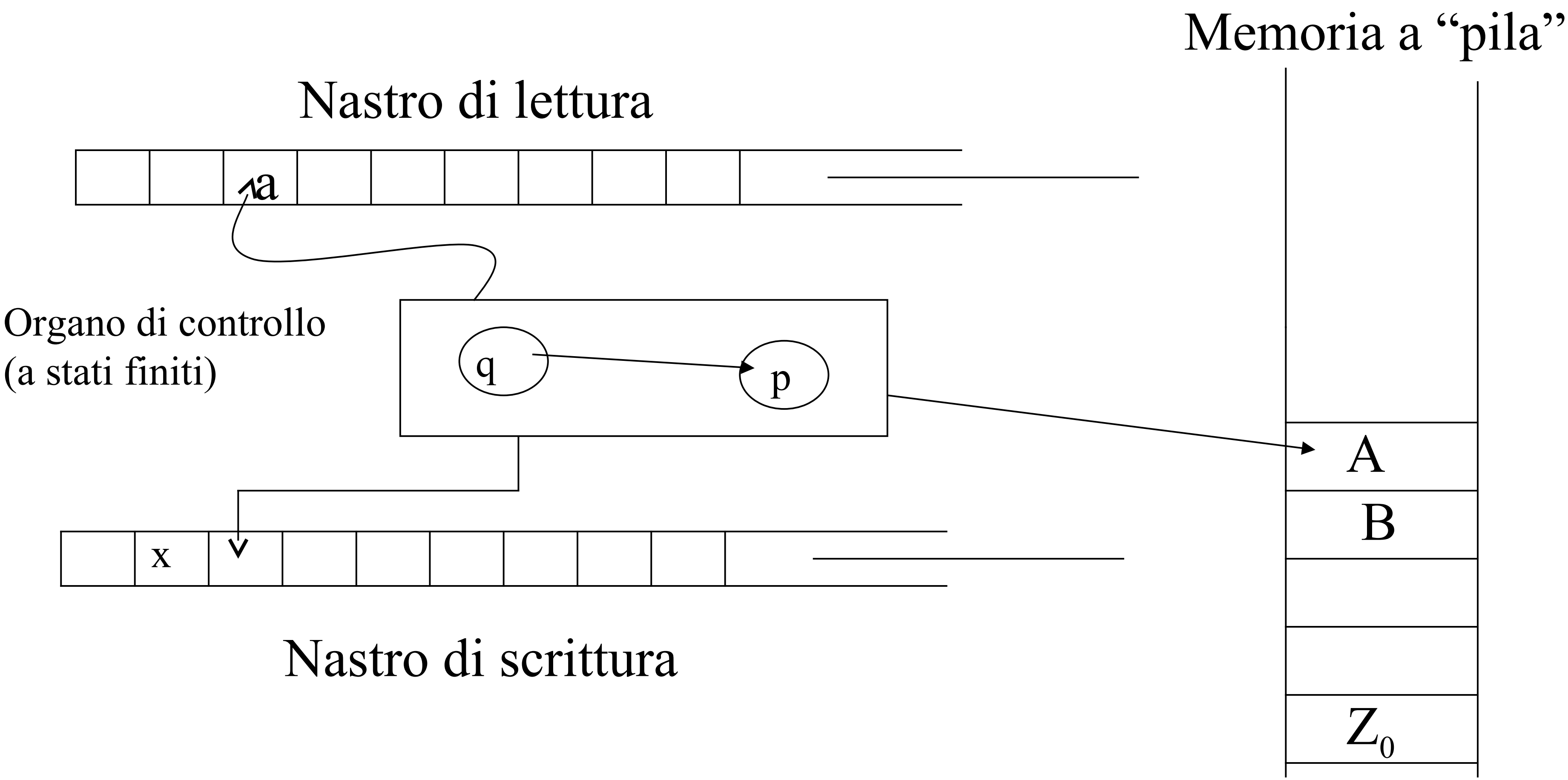
- Se esamino tutta la stringa allora basta “scambiare il sì con il no” (F con Q-F)
- Se però non riesco a giungere in fondo alla stringa (mi “blocco o …”) allora scambiare F con Q-F non funziona
- Nel caso dei FSA il problema è facilmente risolto …
- In generale occorre cautela nel considerare la risposta negativa a una domanda come problema equivalente al ricavare la risposta positiva.

Aumentiamo la potenza dei FSA aumentandone la memoria

- Una visione più “meccanica” del FSA:



- Ora “arricchiamolo” un po’:

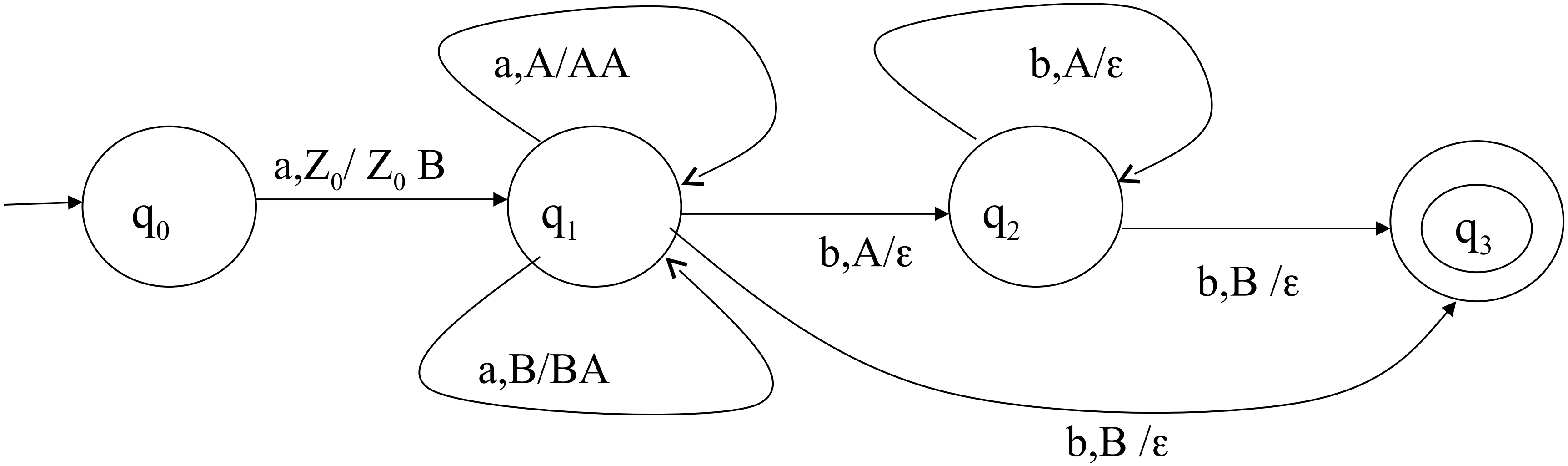


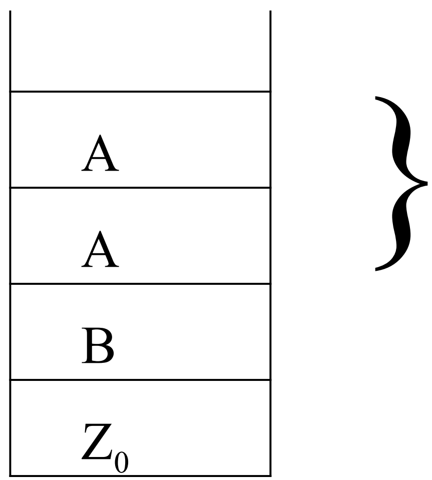
La mossa dell’automa a pila:

- In funzione del:
  - simbolo letto dal nastro di ingresso (però potrebbe anche non leggere nulla …)
  - simbolo letto dalla pila
  - stato dell’organo di controllo:
  - *cambia stato*
  - *sposta di una posizione la testina di lettura*
  - *sostituisce al simbolo A letto dalla pila una stringa α di simboli (anche nulla)*
  - *(se traduttore) scrive una stringa (anche nulla) nel nastro di uscita (spostando la testina di conseguenza)*

- La stringa di ingresso x viene riconosciuta (accettata) se
  - L'automa la scandisce completamente (la testina di lettura giunge alla fine di x)
  - Giunto alla fine di x esso si trova in uno stato di accettazione (come il FSA)
- Se l'automa è anche traduttore
  $\tau(x)$ è la stringa che si trova nel nastro di scrittura dopo che x è stata scandita completamente (se x è accettata, altrimenti $\tau(x)$ è indefinita: $\tau(x) = \perp$.
- ($\perp$: simbolo di "indefinito")

Un primo esempio: *riconoscimento* di $\{a^n b^n \mid n > 0\}$

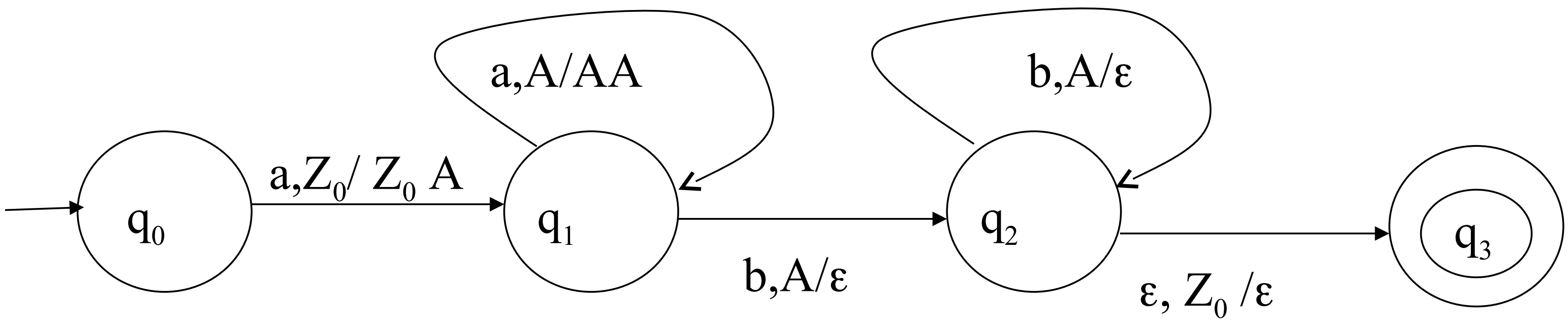




n - 1 A

uso B per vedere se ho finito

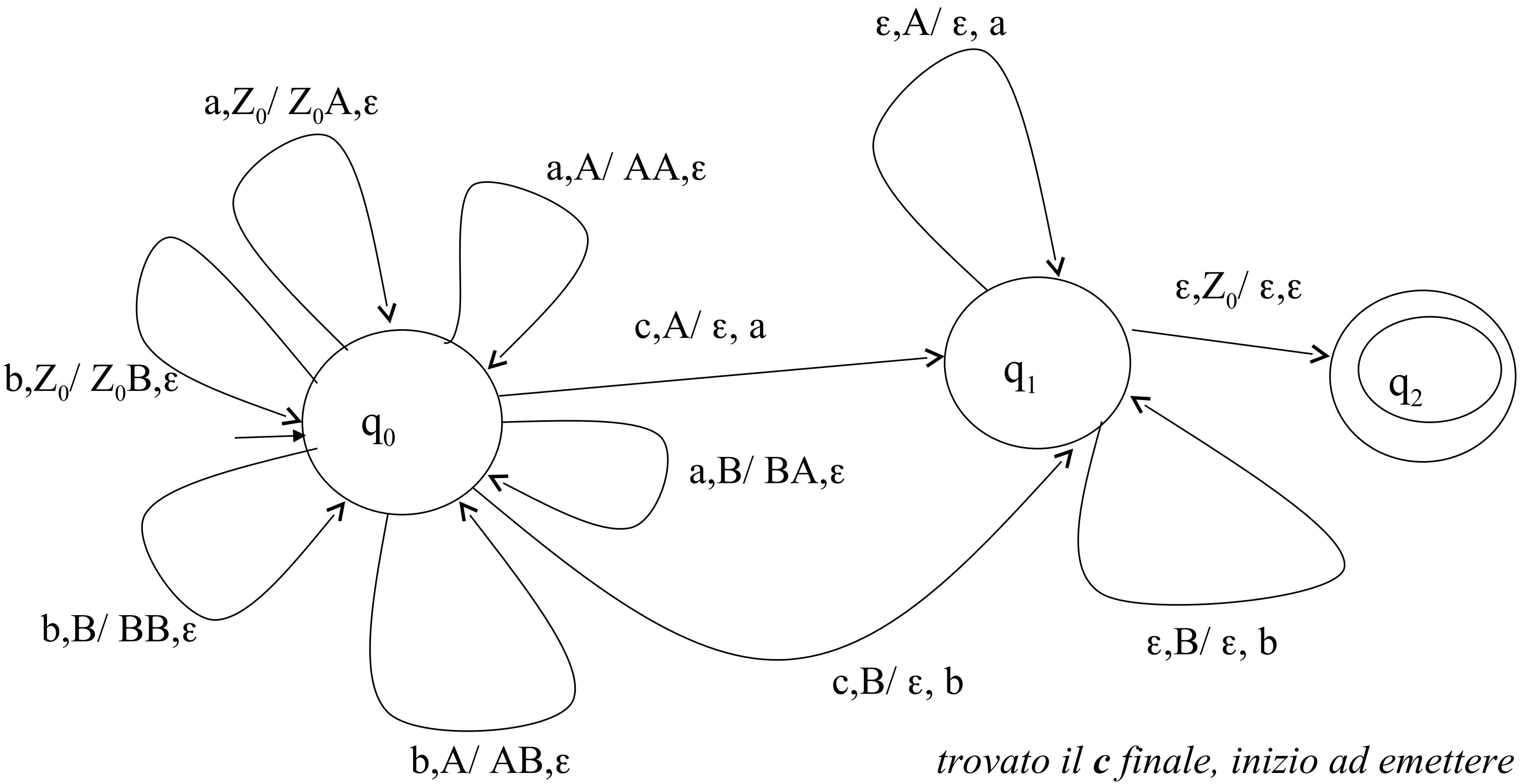
Oppure:



ε-mossa!

Non serve più B

Un (classico) automa-traduttore a pila



*trovato il **c** finale, inizio ad emettere **a** e **b**,*
in base a quello che trovo in pila:
di che traduzione si tratta?

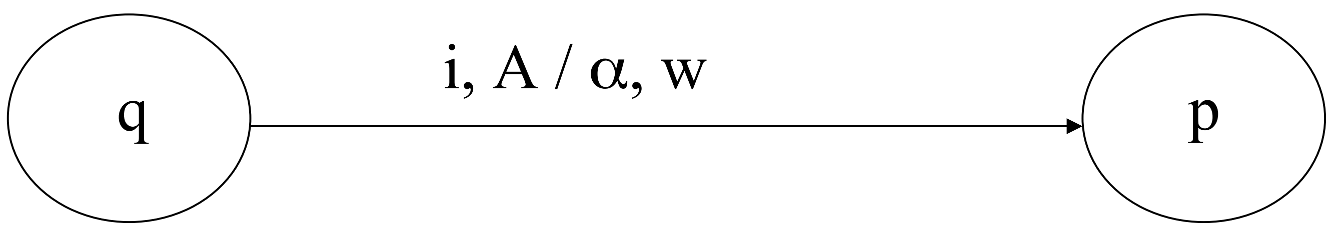
*sulla pila **A** e **B** per ogni **a** e **b***

Formalizziamo il funzionamento:

- Automa [traduttore] a Pila: $<Q, I, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\ [, O, \eta]>$
- Q, I, q_0, F [O] come FSA [T]
- Γ alfabeto di pila (per comodità disgiunto dagli altri)
- Z_0 : simbolo iniziale di pila
- $\delta: Q \times (I \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ $\qquad$ δ : parziale!
- $\eta: Q \times (I \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow O^*$ (η definita dove δ è definita)

Notazione grafica:

$$<p,\alpha> = \delta(q, i, A)$$
$$w = \eta(q, i, A)$$



Configurazione (concetto generale di *stato*): $c = \langle q, x, \gamma, [z] \rangle$:

- (indico con [ ] la parte per un traduttore)
- *q*: stato dell'organo di controllo
- *x*: stringa ancora da leggere nel nastro di ingresso (la testina è posizionata sul primo carattere di x)
- γ : stringa dei caratteri in pila (convenzione: sinistra-basso, alto-destra)
- *z*: stringa già scritta nel nastro di uscita

- Transizione tra configurazioni:

  $c = \langle q, i.y, \beta A, [z]\rangle \vdash c' = \langle q', x', \beta\alpha, [z.w]\rangle$

  Caso 1: $\delta(q, i, A) = \langle q', \alpha\rangle$ $[\eta(q, i, A) = w]$

  – $x' = y$

  Caso 2: $\delta(q, \varepsilon, A) = \langle q', \alpha\rangle$ $[\eta(q, \varepsilon, A) = w]$

  – $x' = i.y$

- NB: $\forall q, A\ (\delta(q, \varepsilon, A) \neq \perp \Rightarrow \forall i\ \ \delta(q, i, A) = \perp)$
- Altrimenti: *nondeterminismo* (lo vedremo più avanti)

- Accettazione [e traduzione] di una stringa
- $\vdash^*$: chiusura transitiva e riflessiva di $\vdash$

$$x \in L \ [z = \tau(x)]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$c_0 = \langle q_0, x, Z_0, [\varepsilon] \rangle \vdash^* c_F = \langle q, \varepsilon, \gamma, [z] \rangle, q \in F$$

Occhio alle ε-mosse, soprattutto a fine stringa!

L’automa a pila in pratica

- Cuore dei compilatori
- Memoria a pila (LIFO) adatta ad analizzare strutture sintattiche “nestate” (espressioni aritmetiche, istruzioni composte, …)
- Macchina astratta a run-time dei linguaggi con ricorsione
- ….
  Sfruttamento sistematico nel corso di linguaggi e traduttori

Proprietà degli automi a pila (soprattutto come riconoscitori)

- $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ riconoscibile da un automa a pila (non da un FSA)

  Però $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ ….

  – NO: dopo aver contato -mediante la pila- n a e "decontato" n b come facciamo a ricordare n per contare i c?

    La pila è una memoria distruttiva: per leggerla occorre distruggerla!
    Questa limitazione dell'automa a pila può essere dimostrata formalmente mediante un'estensione del pumping lemma.

Proprietà degli automi a pila (cont.)

- $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ riconoscibile da un automa a pila;
  $\{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ riconoscibile da un automa a pila
- Però $\{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ …
  - Ragionamento -intuitivamente- simile al precedente:
  - Se svuoto tutta la pila con n b perdo memoria se ci sono altri b
  - Se ne svuoto solo metà e non trovo più b non posso sapere se effettivamente sono a metà pila
  - La formalizzazione però non è la stessa cosa …

    (piuttosto complicata: non c'è sul libro)

Alcune conseguenze

- ***LP*** = classe dei linguaggi riconosciuti da automi a pila
- ***LP*** non chiusa rispetto all'unione né all'intersezione
- Perché?
- Quanto al complemento …
  Il principio è lo stesso dei FSA: scambiare stati di accettazione con stati di non accettazione.
  Nascono però nuove difficoltà

- La δ va completata (come per gli FSA) con lo stato di errore. Occhio però al nondeterminismo causato dalle ε-mosse!

- Le ε-mosse possono causare cicli $\rightarrow$ non si giunge mai in fondo alla stringa $\rightarrow$ la stringa non è accettata, ma non è accettata neanche dall'automa con $F\hat{} = Q - F$.

- Esiste però una costruzione che ad ogni automa associa un automa equivalente aciclico (= senza cicli di ε-mosse)

- Non è ancora finita: che succede se si ha una sequenza di ε-mosse a fine scansione con alcuni stati in F e altri no? Cioè:

$<q_1, \varepsilon, \gamma_1> \vdash <q_2, \varepsilon, \gamma_2> \vdash <q_3, \varepsilon, \gamma_3> \vdash \ldots$

$q_1 \in F$, $q_2 \notin F$, …. ?

- Occorre “obbligare” l’automa a decidere l’accettazione solo alla fine di una sequenza (necessariamente finita) di ε-mosse.
- Anche questo è possibile mediante apposita costruzione.

Anche in questo caso più che i tecnicismi della costruzione/dimostrazione interessa il meccanismo generale per riconoscere il complemento di un linguaggio: talvolta la stessa macchina che risolve il “problema positivo” può essere impiegata per risolvere anche quello negativo in modo semplice; ma ciò non è sempre banale: occorre la sicurezza di “poter arrivare in fondo”.

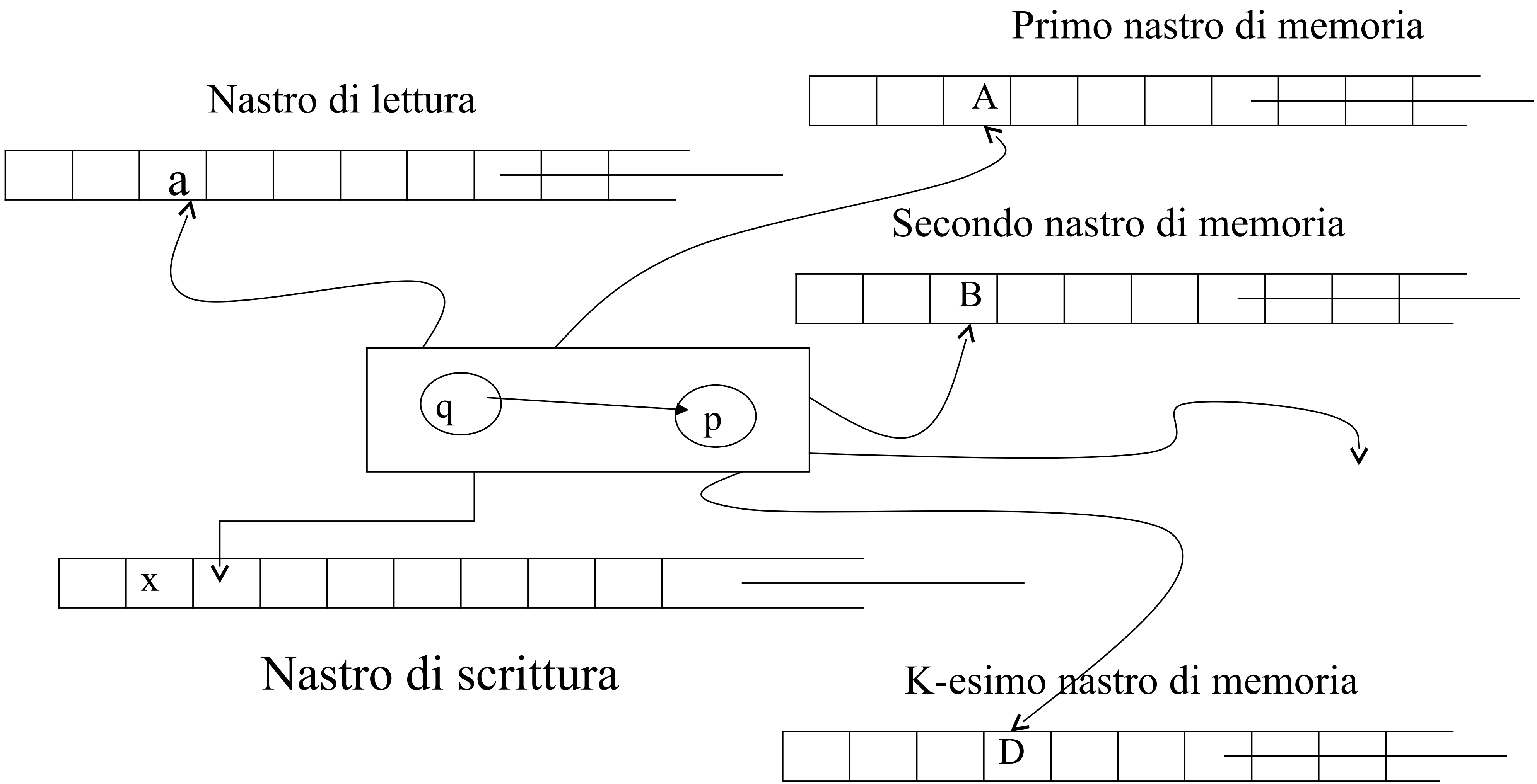
Gli automi a pila [riconoscitori (AP) o traduttori (TP)] sono più potenti di quelli a stati finiti (un FSA è un banale caso particolare di AP; in più gli AP hanno capacità di conteggio illimitato che gli FSA non hanno)
Però anche gli AP/TP hanno i loro limiti …

… un nuovo e "ultimo" (per noi) automa:

La ***Macchina di Turing*** **(MT)** (Alan Turing, 1912-1954)
Modello "storico" di "calcolatore", nella sua semplicità di notevole importanza concettuale da diversi punti di vista.
Ora lo esaminiamo come automa; successivamente ne ricaveremo proprietà universali del calcolo automatico.

Per ora versione a *k-nastri*, un po' diversa dal (ancora più semplice) modello originario. Spiegheremo poi il perché di questa scelta.

MT a k-nastri


Primo nastro di memoria
A
Nastro di lettura
a
Secondo nastro di memoria
B
q
p
x
Nastro di scrittura
K-esimo nastro di memoria
D

Descrizione informale e parziale formalizzazione del funzionamento della MT (*formalizzazione completa: esercizio*)

- Stati e alfabeti come per gli altri automi (ingresso, uscita, organo di controllo, alfabeto di memoria)
- Per convenzione storica e convenienza di certe "tecnicalità matematiche" i nastri sono rappresentati da sequenze *infinite* di celle [0,1,2, …] invece che da stringhe finite. Però esiste un simbolo speciale *blank* (" ", o $\not b$ "barrato" o "_") o spazio bianco e si assume che ogni nastro contenga solo un numero finito di celle non contenenti il blank. Evidente l'equivalenza tra i due modi di rappresentare il contenuto dei nastri.
- Testine di lettura/scrittura, simili alle altre testine

- La mossa della macchina di Turing:
- Lettura:
  - carattere in corrispondenza della testina del nastro di ingresso
  - k caratteri in corrispondenza delle testine dei nastri di memoria
  - stato dell'organo di controllo
- Azione conseguente:
  - cambiamento di stato: q ----> q'
  - riscrittura di un carattere al posto di quello letto su ogni nastro di memoria: A_i ----> A_i', 1 <= i <= k
  - [scrittura di un carattere sul nastro di uscita]
  - spostamento delle k + 2 testine:
    - le testine di memoria *e di ingresso* possono spostarsi di una posizione a destra (R) o a sinistra (L) o stare ferme (S)
    - la testina del nastro di uscita può spostarsi di una posizione a destra (R) o stare ferma (S) (se ha scritto "e` bene" che si sposti; se si sposta senza aver scritto lascia il blank)

Di conseguenza:

$$\delta, [\eta] : Q \times I \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{R,L,S\}^{k+1} [\times O \times \{R, S\}]$$

(parziali!)

Notazione grafica:

$$q \xrightarrow{i,<A_1,A_2, \ldots A_k>/[o], <A'_1, A'_2 \ldots A'_k>, <M_0, M_1 \ldots M_k, [M_{k+1}]>} q'$$

$M_i \in \{R,L,S\}$ $M_{k+1} \in \{R,S\}$

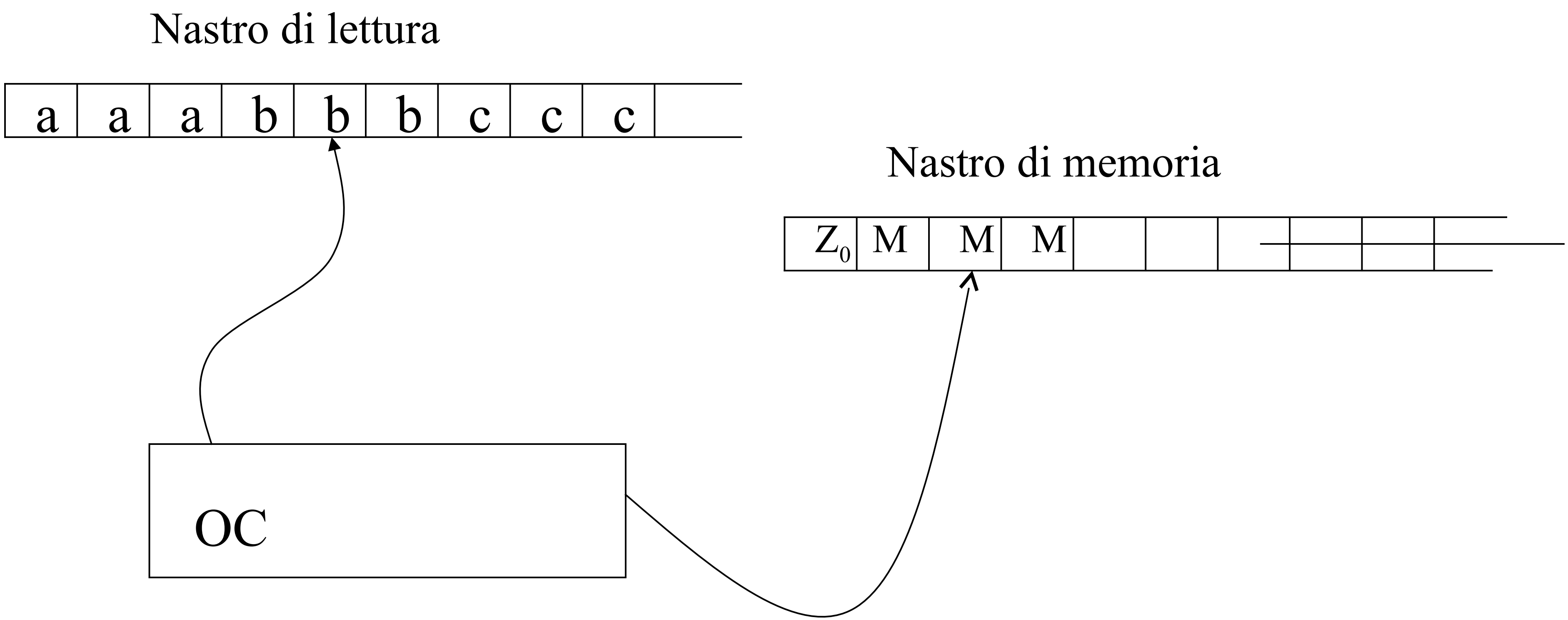
Perché non si perde generalità usando O invece che O^* in uscita?

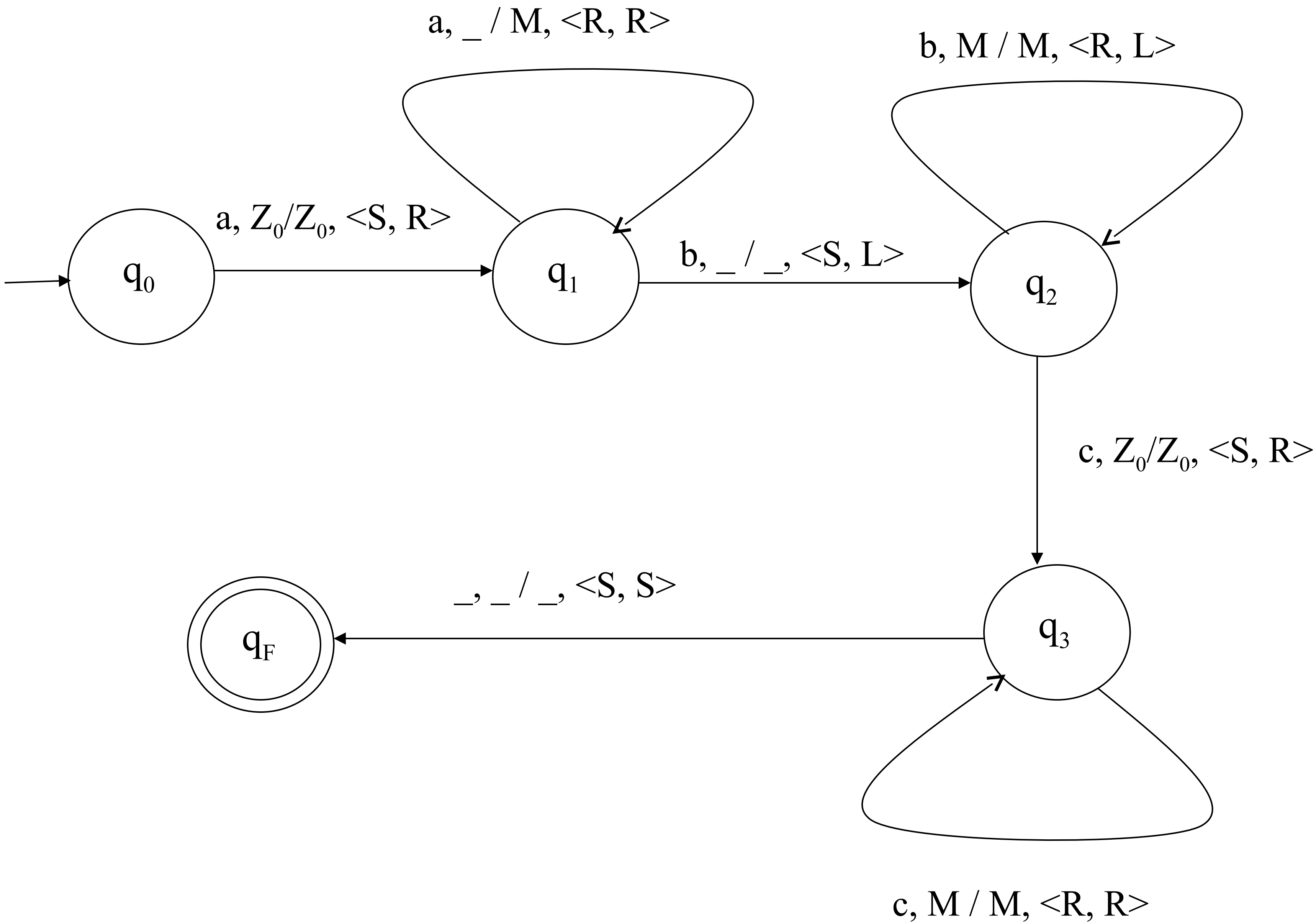
- Configurazione iniziale:
  - Z_0 seguito da tutti blank nei nastri di memoria
  - [nastro di uscita tutto blank]
  - Testine nelle posizioni 0-esime di ogni nastro
  - Stato iniziale dell'organo di controllo q_0
  - Stringa di ingresso x a partire dalla 0-esima cella del nastro corrispondente, seguita da tutti blank

- Configurazione finale:
  - Stati di accettazione $F \subseteq Q$
  - Per comodità, convenzione:
    $\delta, [\eta] (q, \ldots) = \perp \ \forall \ q \in F$:
  - La macchina si ferma quando $\delta, [\eta] (q, \ldots) = \perp$
  - La stringa x di ingresso è accettata se e solo se:
    - dopo un numero finito di mosse la macchina si ferma (si trova in una configurazione in cui $\delta, [\eta] (q, \ldots) = \perp$
    - lo stato q in cui si trova quando si ferma $\in F$
- NB:
  - x *non* è accettata se:
    - la macchina si ferma in uno stato $\notin F$; oppure
    - la macchina non si ferma
  - C'è una somiglianza con l'AP (anche l'AP non loop-free potrebbe non accettare per "non fermata"), però… esiste la MT loop-free?

Alcuni esempi

- MT che riconosce $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$




a, _ / M, <R, R>
b, M / M, <R, L>
a, Z_0/Z_0, <S, R>
q_0
q_1
b, _ / _, <S, L>
q_2
c, Z_0/Z_0, <S, R>
_, _ / _, <S, S>
q_F
q_3
c, M / M, <R, R>

Calcolo del successore di un numero codificato in cifre decimali

- M copia tutte le cifre di n su T_1, alla destra di Z_0.
  Così facendo sposta la testina di T_2 dello stesso numero di posizioni.
- M scandisce le cifre di T_1 da destra a sinistra. Scrive in T_2 da destra a sinistra modificando opportunamente le cifre (i 9 diventano 0, la prima cifra ≠ 9 diventa la cifra successiva, poi tutte le altre vengono copiate uguali, …)
- M ricopia T_2 sul nastro di uscita.

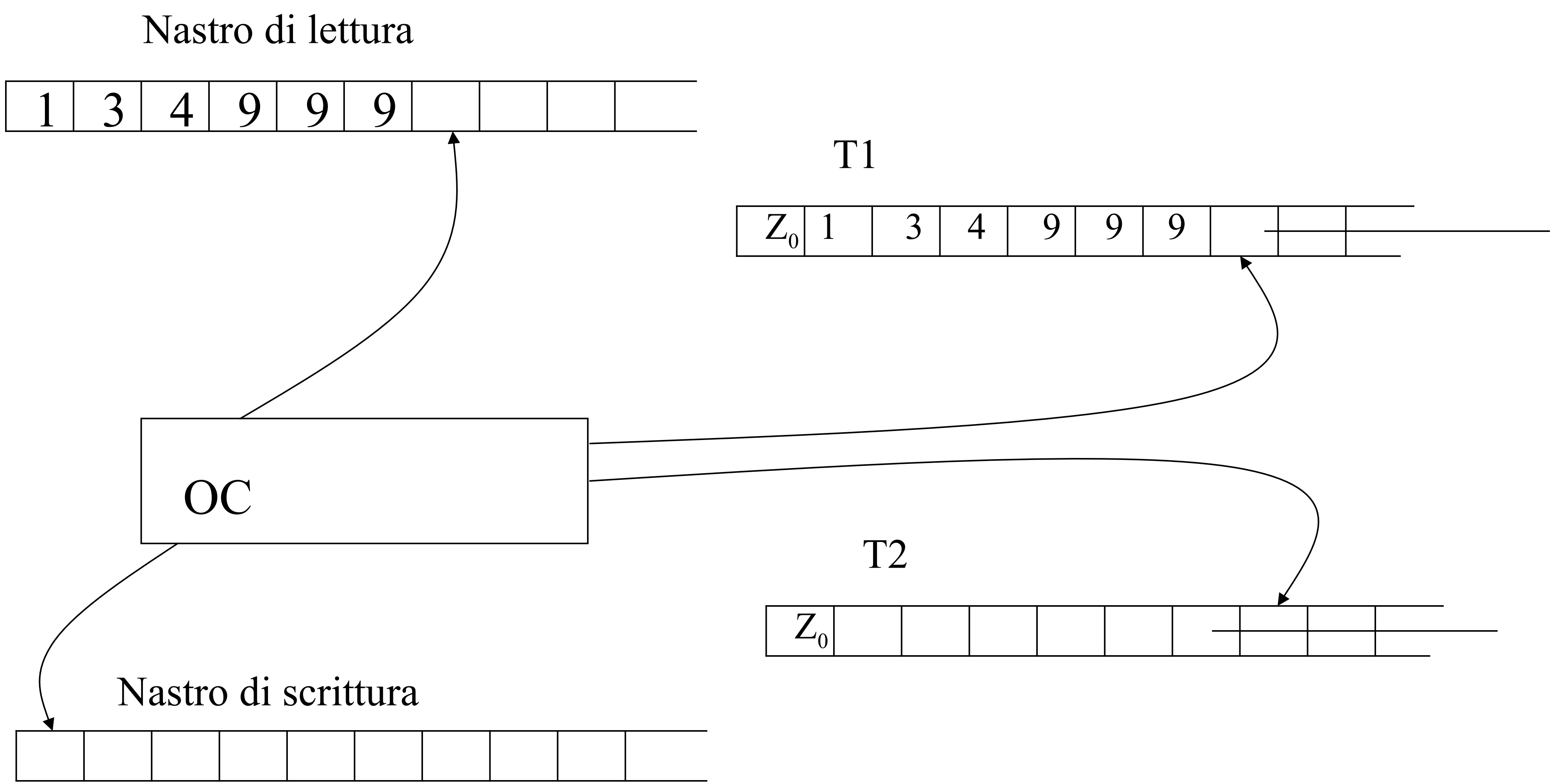
Notazione:

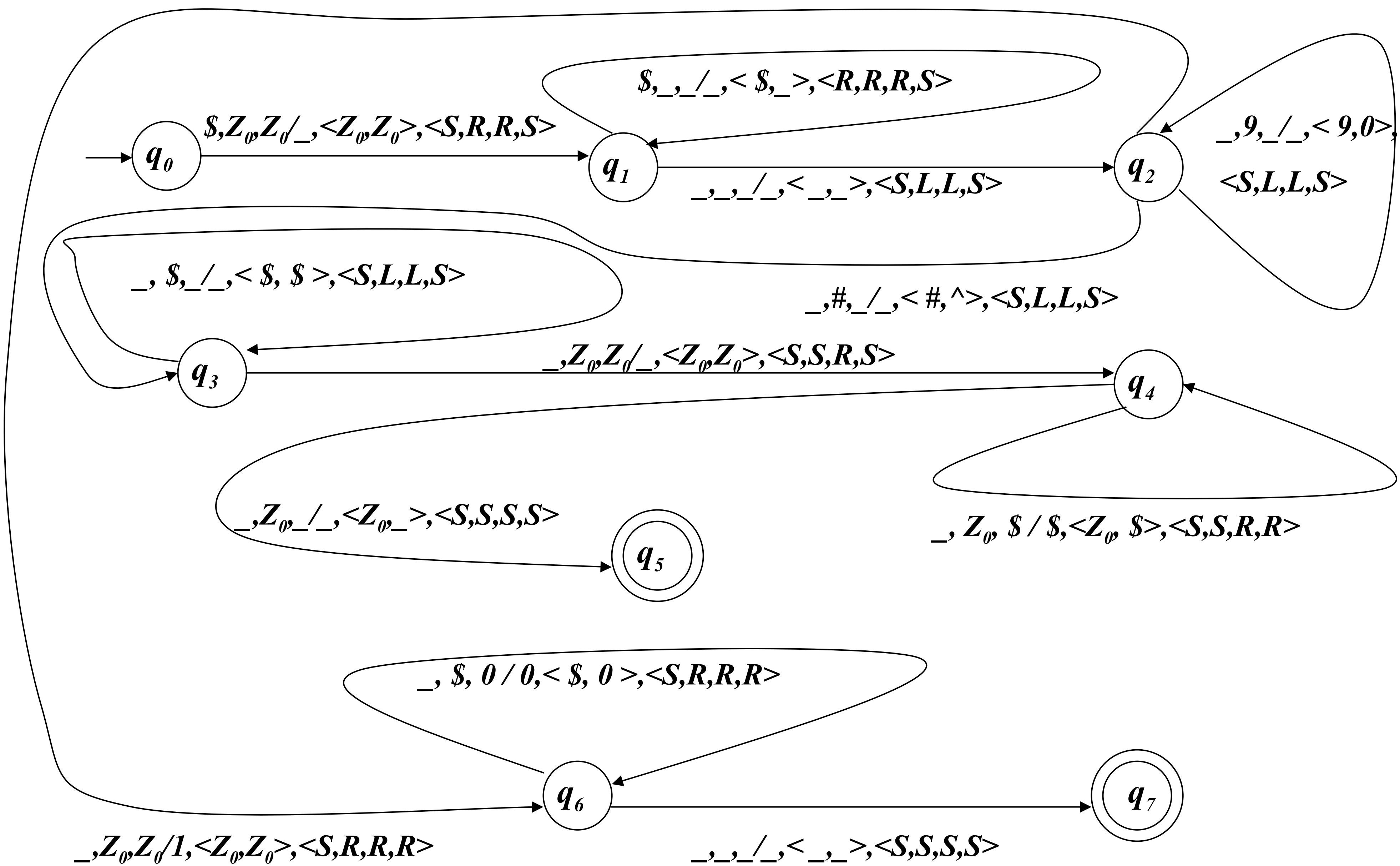
$: qualsiasi cifra decimale

_ : blank

 # : qualsiasi cifra ≠ 9

^ : il successore della cifra denotata da # (nella stessa transizione)


Nastro di lettura
1 3 4 9 9 9
T1
Z0 1 3 4 9 9 9
OC
T2
Z0
Nastro di scrittura


$,Z0,Z0/_,<Z0,Z0>,<S,R,R,S>
$,_,_/_,< $,_>,<R,R,R,S>
_,_,_/_,< _,_>,<S,L,L,S>
_,9,_/_,< 9,0>,
<S,L,L,S>
_, $,_/_,< $, $ >,<S,L,L,S>
_,#,_/_,< #,^>,<S,L,L,S>
_,Z0,Z0/_,<Z0,Z0>,<S,S,R,S>
_,Z0,_/_,<Z0,_>,<S,S,S,S>
_, Z0, $ / $,<Z0, $>,<S,S,R,R>
_, $, 0 / 0,< $, 0 >,<S,R,R,R>
_,Z0,Z0/1,<Z0,Z0>,<S,R,R,R>
_,_,_/_,< _,_>,<S,S,S,S>
q0
q1
q2
q3
q4
q5
q6
q7

Proprietà di chiusura delle MT

- $\cap$: OK (una MT puo, facilmente simularne due, sia “in serie” che “in parallelo”)
- $\cup$: OK (idem)
- Idem per altre operazioni (concatenazione, *, ….)

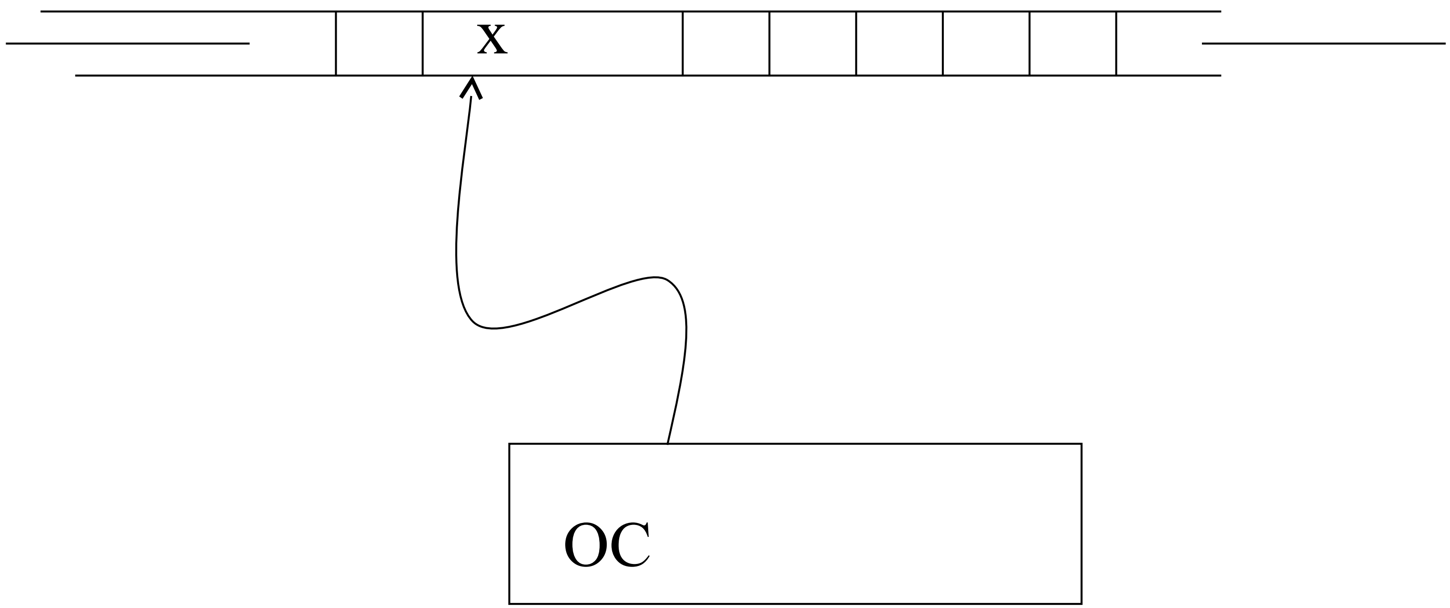
- E il complemento?

  Risposta negativa! (Dimostrazione in seguito)
  Certo se esistessero MT loop-free come gli AP, sarebbe facile: basterebbe definire l’insieme degli stati di halt (facile renderlo disgiunto dagli stati non di halt) e partizionarlo in stati di accettazione e stati di non accettazione.
  ===>
  Evidentemente il problema sta nelle *computazioni che non terminano*

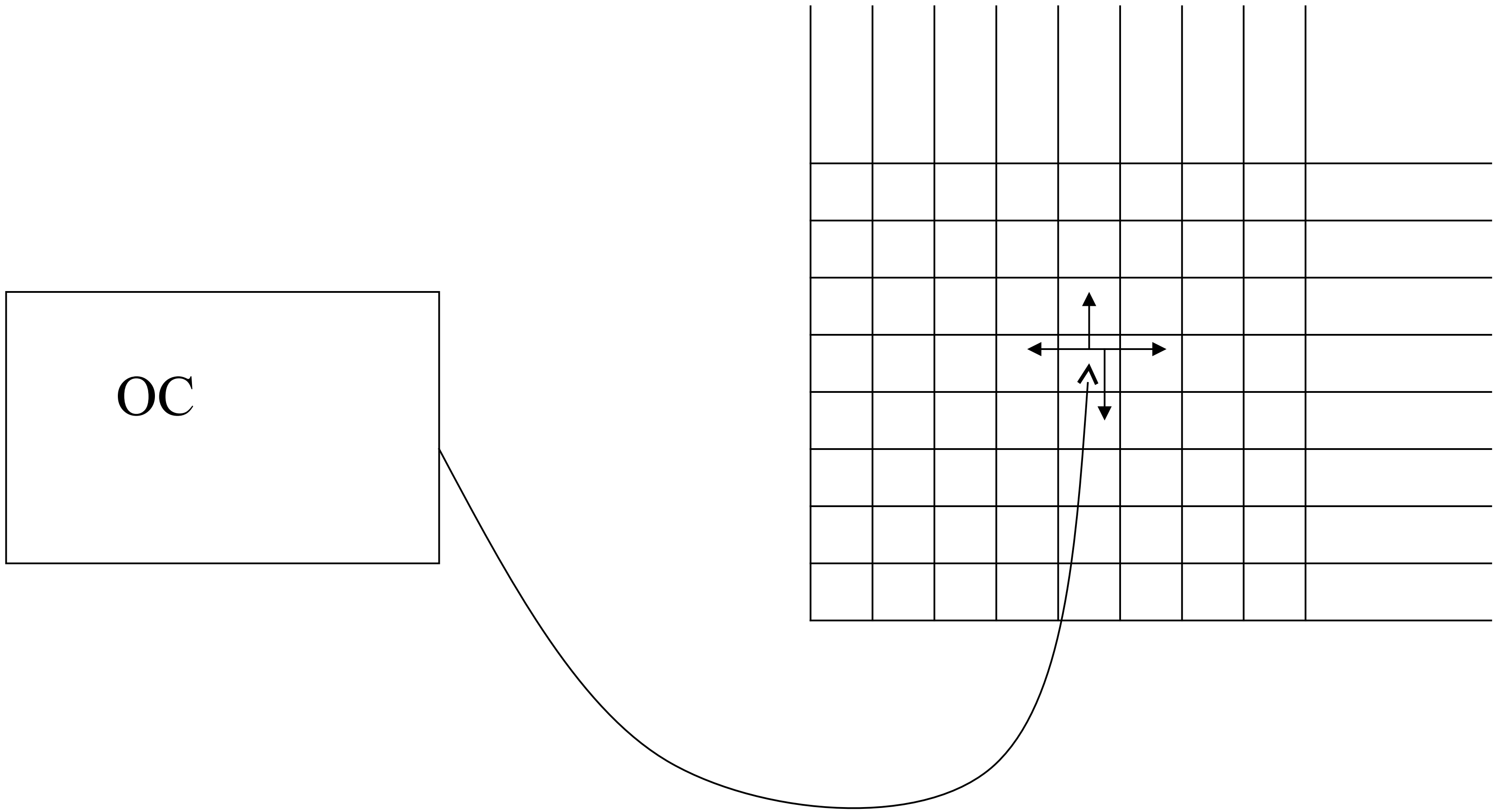
Modelli equivalenti di MT

- MT a nastro singolo (≠ da MT a un nastro - di memoria!)

Nastro unico (di solito illimitato a destra e sinistra):
funge da ingresso, memoria e uscita



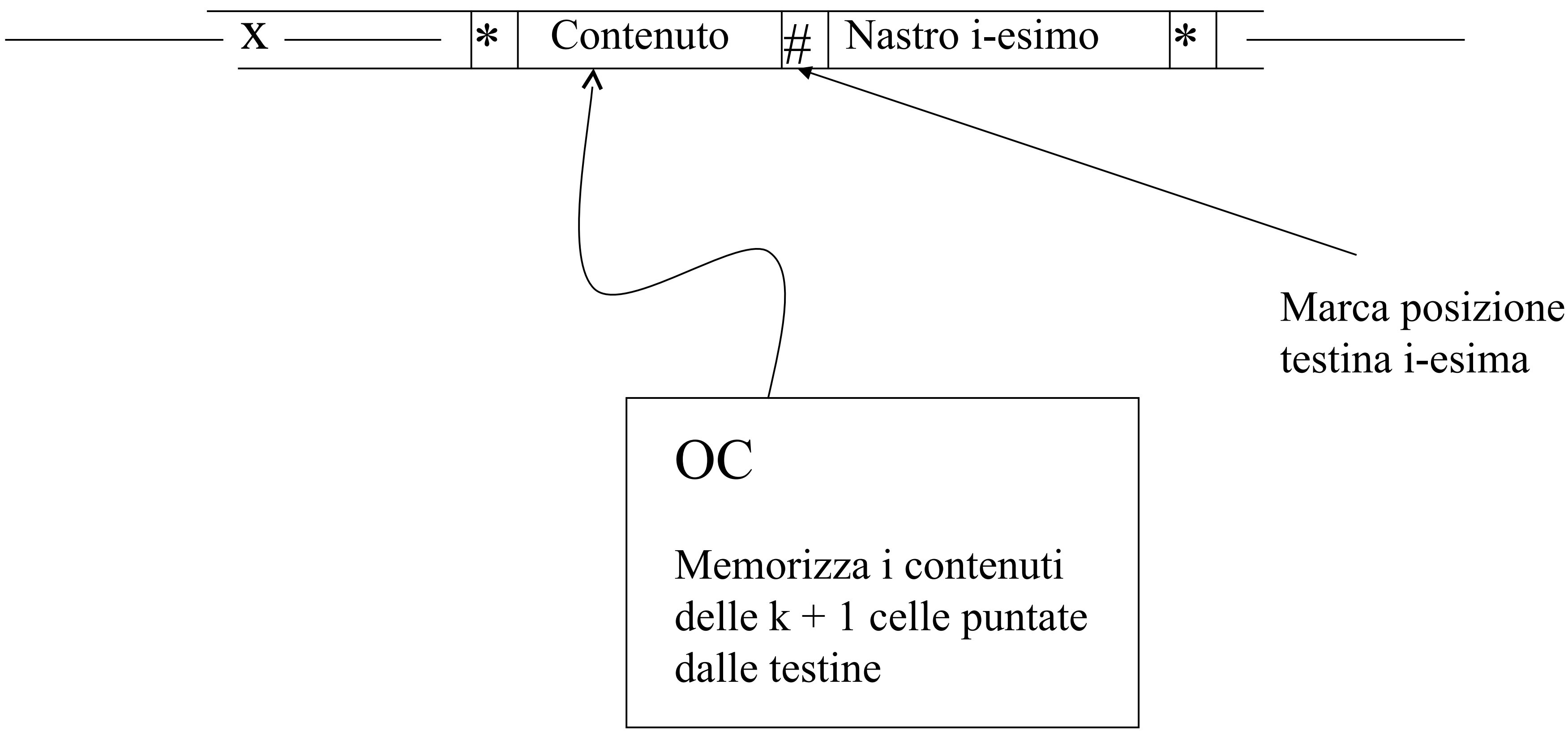
- MT a nastro bidimensionale



- MT a k testine per nastro

- …..

Le varie versioni di MT sono tutte tra loro equivalenti, rispetto alla capacità riconoscitiva/traduttiva:
ad esempio:



Che relazioni sussistono tra automi vari (MT in particolare) e modelli di calcolo più tradizionali e realistici?

- La MT può simulare una macchina di von Neumann (pur essa "astratta")
- La differenza fondamentale sta nel meccanismo di accesso alla memoria: sequenziale invece che "diretto"
- La cosa non inficia la potenza della macchina dal punto di vista della capacità computazionale (classe di problemi risolvibili)
- Può esserci invece impatto dal punto di vista della complessità del calcolo
- Esamineremo implicazioni e conseguenze in entrambi i casi

I modelli (operazionali) non deterministici

- Solitamente si tende a pensare ad un algoritmo come una sequenza di operazioni *determinata*: in un certo stato e con certi ingressi non sussistono dubbi sulla "mossa" da eseguire
- Siamo sicuri che ciò sia sempre auspicabile?

Confrontiamo

if x > y **then** max := x **else** max := y

con

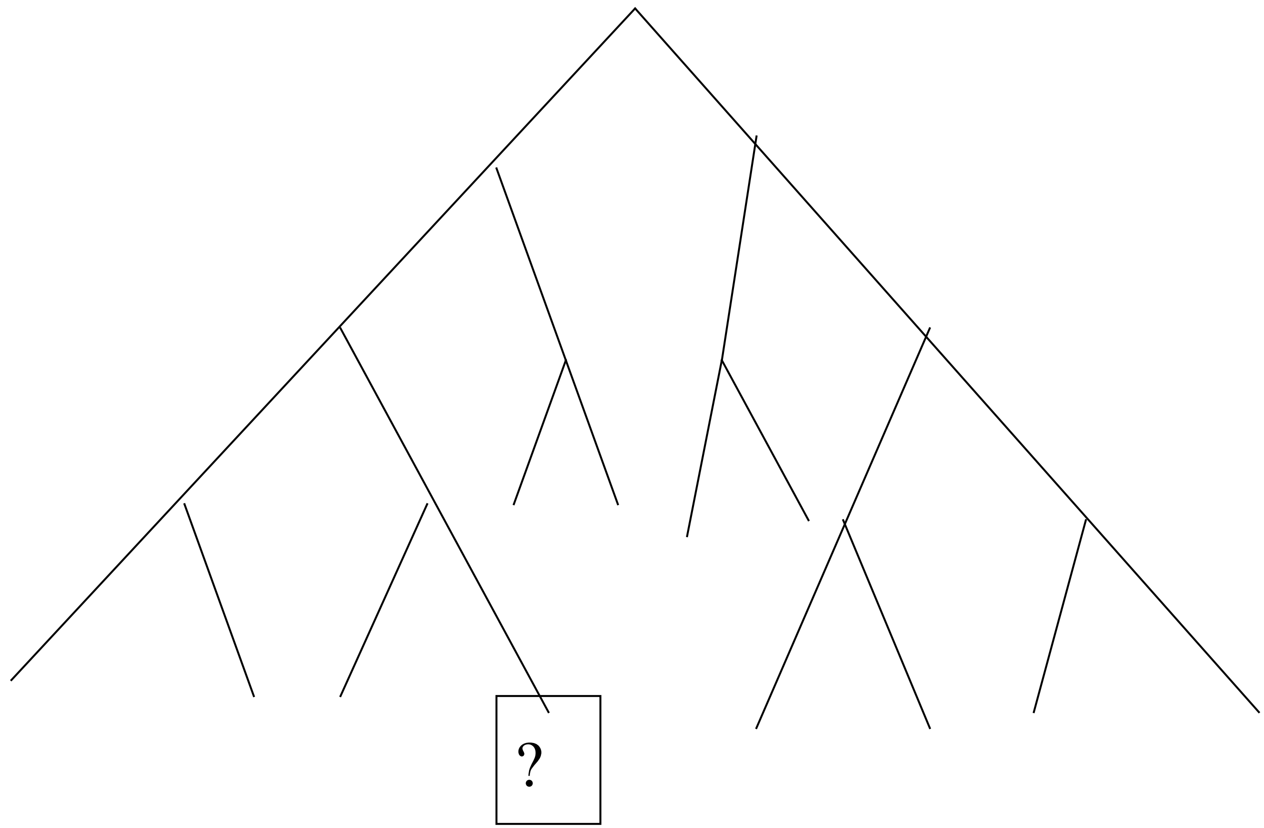
if   x >= y **then** max := x
         y >= x **then** max := y
fi

- E` solo una questione di eleganza?

- Pensiamo al costrutto **case** del Pascal & affini:
  perché non un

- **case**
  - x = y **then** S1
  - z > y +3 **then** S2
  - …. **then** …
- **endcase**
  ?

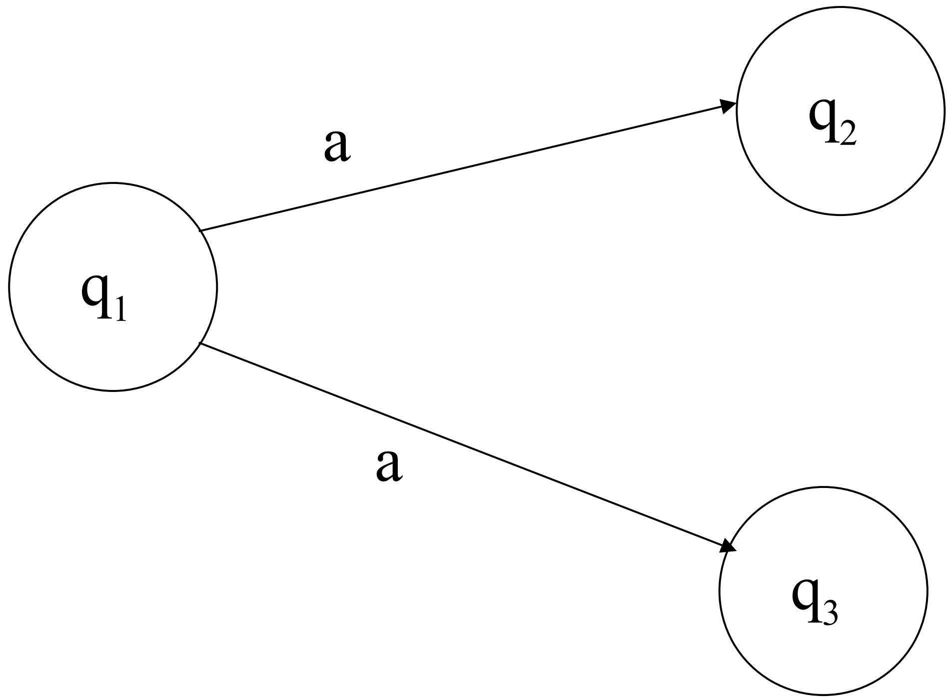
Un’altra forma di nondeterminismo “nascosto”: la ricerca “cieca”



- In realtà i vari algoritmi di ricerca sono una “simulazione” di algoritmi sostanzialmente nondeterministici:
- L’elemento cercato si trova nella radice dell’albero?
- Se sì OK. Altrimenti
  - Cerca nel sottoalbero di sinistra
    oppure
  - cerca nel sottoalbero di destra
- scelte o priorità tra le diverse strade sono spesso arbitrarie
- Se poi fossimo in grado di assegnare i due compiti in parallelo a due diverse macchine ---->
- *Nondeterminismo come modello di computazione o almeno di progettazione di calcolo parallelo*
  (Ad esempio Ada ed altri linguaggi concorrenti sfruttano il nondeterminismo)

Tra i tanti modelli nondeterministici (ND): versioni ND dei modelli già noti

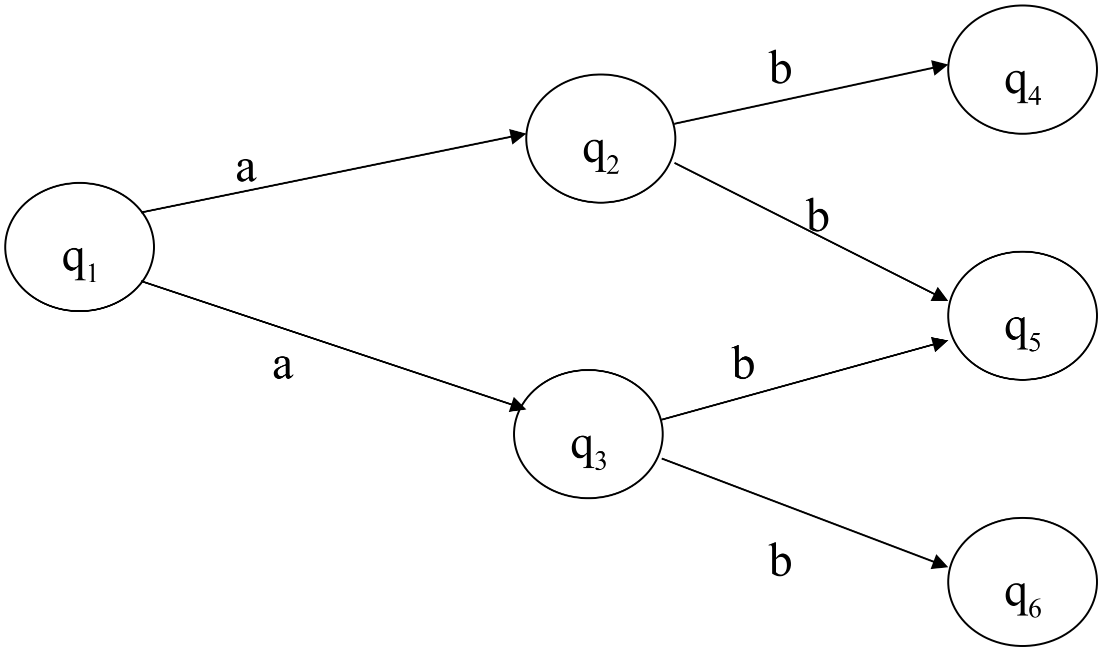
- FSA ND (ne vedremo tra poco la “comodità”)



Formalmente: $\delta(q_1,a) = \{q_2, q_3\}$

$\delta : Q \times I \rightarrow \wp(Q)$

δ^* : formalizzazione della sequenza di mosse



$\delta(q_1,a) = \{q_2, q_3\}$, $\delta(q_2,b) = \{q_4, q_5\}$, $\delta(q_3,b) = \{q_6, q_5\}$ $\delta^*(q_1,ab) = \{q_4, q_5, q_6\}$

$$\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\}$$

$$\delta^*(q, y.i) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q, y)} \delta(q', i)$$

Come accetta un FSA ND?

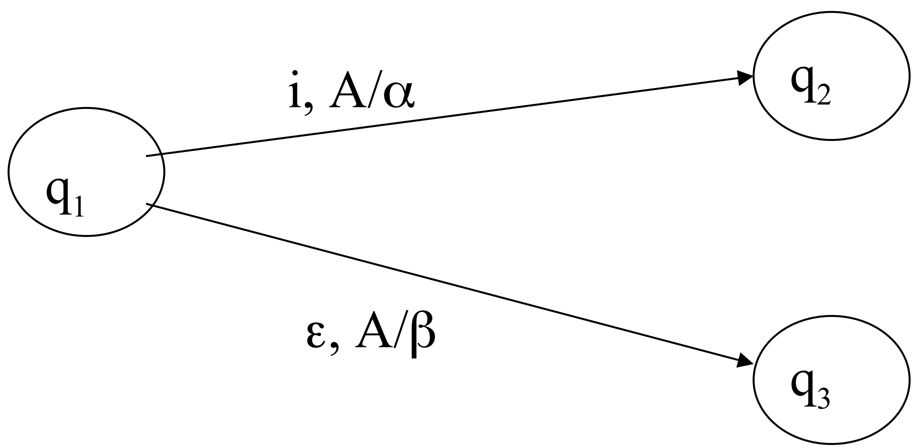
$$x \in L \leftrightarrow \delta^*(q_0,x) \cap F \neq \emptyset$$

Tra i vari modi di funzionamento dell'automa è sufficiente che uno di essi abbia successo per accettare la stringa di ingresso

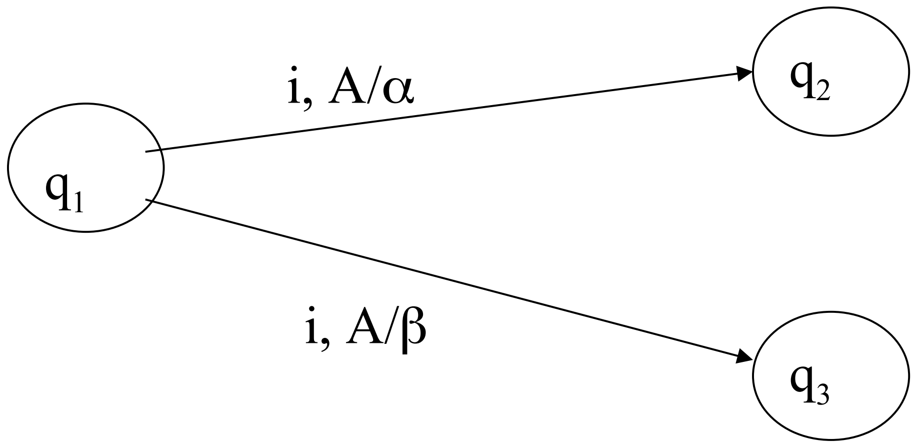
Sono possibili convenzioni diverse, es. $\delta^*(q_0,x) \subseteq F$

Gli AP nondeterministici (APND)

- In realtà essi nascono ND di natura:

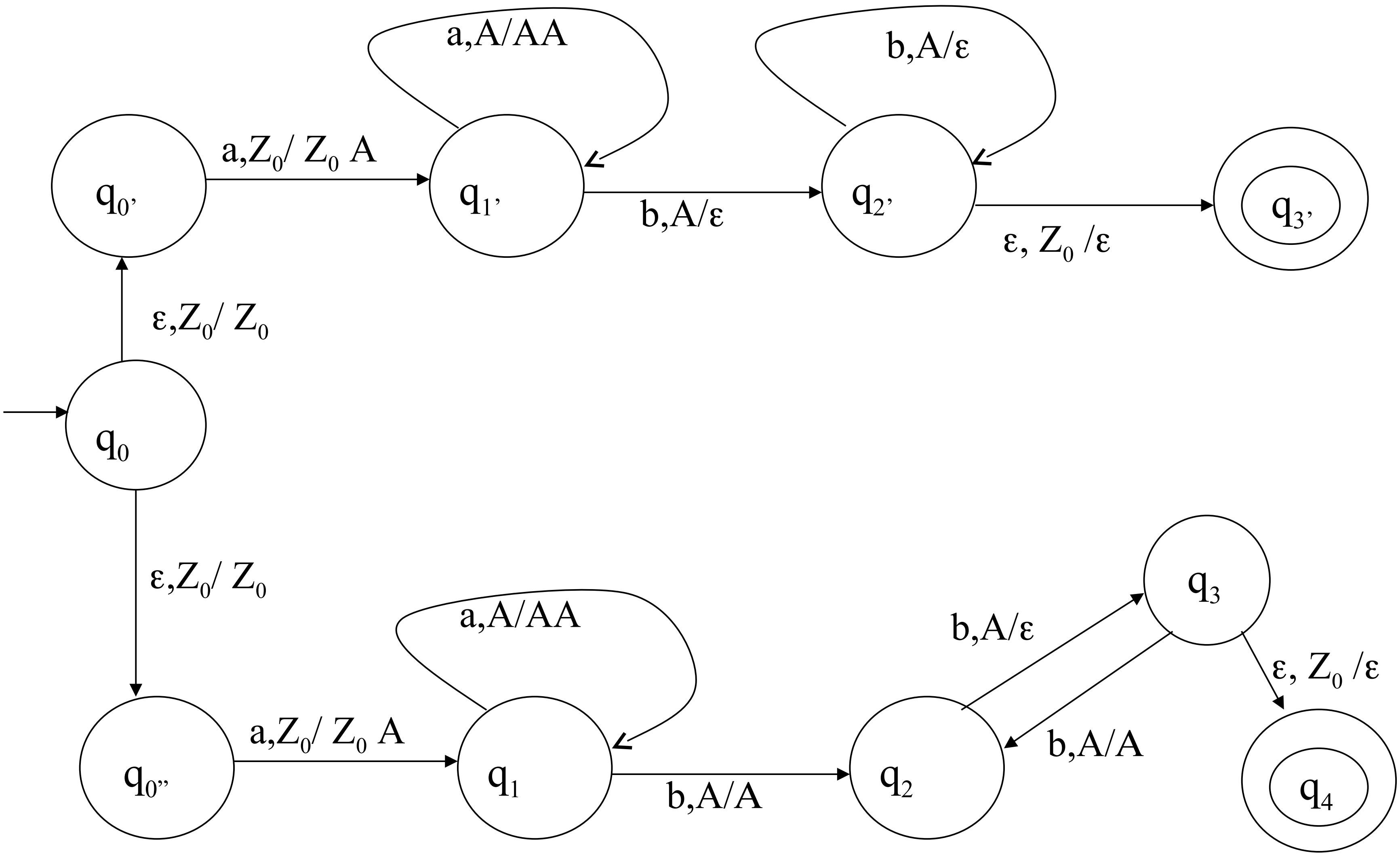


- Tanto vale rimuovere la restrizione del determinismo e generalizzare:



- $\delta : Q \times (I \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \wp_F(Q \times \Gamma^*)$
- Perché l'indice F? (sta per *Finito*...)
- Al solito l'APND accetta x se *esiste* una sequenza
- $c_0 \vdash^* \langle q, \varepsilon, \gamma \rangle,\ q \in F$
- $\vdash$ è non più univoca!

Un “banale” esempio



Alcune immediate ma significative conseguenze

- Gli APND possono riconoscere un linguaggio non riconoscibile dagli AP deterministici ---->
  sono più potenti
- La costruzione precedente può essere facilmente generalizzata ottenendo una dimostrazione *costruttiva* (come altre precedenti) di chiusura rispetto all'unione degli APND
  -proprietà non sussistente per gli AP deterministici
- La chiusura rispetto all'intersezione invece continua a non sussistere ($\{a^n b^n c^n\} = \{a^n b^n c^*\} \cap \{a^* b^n c^n\}$ non è riconoscibile mediante una pila, neanche in modo ND)
  -I due controesempi precedenti $\{a^n b^n c^n\}$ e $\{a^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$ non sono poi così simili tra loro …

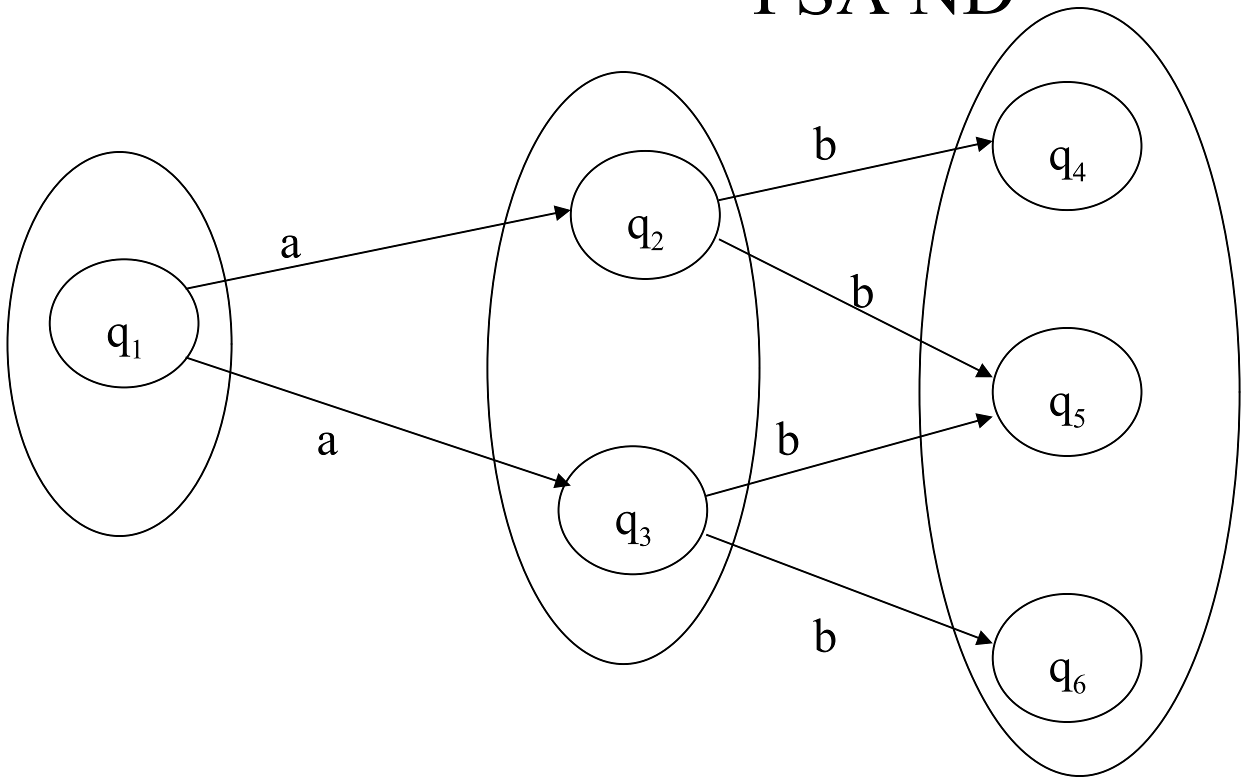
- Se una famiglia di linguaggi è chiusa rispetto all'unione e non rispetto all'intersezione
non può essere chiusa rispetto al complemento (perché?)

- Ciò mette in evidenza il profondo cambiamento causato dal nondeterminismo rispetto alla complementazione di un problema - in generale -:
se il modo di funzionamento della macchina è univoco e se la sua computazione giunge al termine, allora:
- sufficiente scambiare la risposta positiva con quella negativa per ottenere la soluzione di un "problema complemento" (ad esempio *presenza* invece di *assenza* di errori in un programma)

- Nel caso degli APND pur essendo possibile, come per gli APD, far sì che una computazione giunga sempre al termine, potrebbero darsi due computazioni
  - $c_o \vdash^* \langle q_1, \varepsilon, \gamma_1 \rangle$
  - $c_o \vdash^* \langle q_2, \varepsilon, \gamma_2 \rangle$
  - $q_1 \in F$, $q_2 \notin F$
- In questo caso x è accettata
- Però se scambio F con Q-F, x continua ad essere accettata: nell'ambito del nondeterninismo scambiare il sì con il no non funziona!

- E gli altri tipi di automi?

FSA ND



Partendo da q_1 e leggendo ab l'automa si trova in uno stato che appartiene all'insieme $\{q_4,q_5,q_6\}$

Chiamiamo nuovamente "stato" l'insieme dei possibili stati in cui si può trovare l'automa ND durante il suo funzionamento.

Sistematizzando ...

- Dato un FSA ND ne costruisco *automaticamente* uno equivalente deterministico ---->
- gli automi FSA ND non sono più potenti dei loro fratelli deterministici (diversamente dagli AP)
  (e allora a che cosa servono?)
- $A_{ND} = (Q_N, I, \delta_N, q_{0N}, F_N)$
- $A_D = (Q_D, I, \delta_D, q_{0D}, F_D)$
  - $Q_D = \wp(Q_N)$
  - $\delta_D(q_D, i) = \bigcup_{q_N \in q_D} \delta_N(q_N, i)$
  - $q_{0D} = \{q_{0N}\}$
  - $F_D = \{Q' \subseteq Q \mid Q' \cap F_N \neq \emptyset\}$

- E` bensì vero che, per ogni automa FS ND ne posso trovare (e *costruire*) uno equivalente deterministico
- Ciò non significa che sia superfluo usare gli FSA ND:
  - Può essere più facile "progettare" un AND e poi ricavarne automaticamente uno deterministico, risparmiandosi la fatica di costruirlo noi stessi deterministico fin da subito (ne vedremo un'applicazione tra breve)
  - Da un AND a 5 stati (ad esempio), ne ricavo, nel caso pessimo, uno con 2^5 stati!

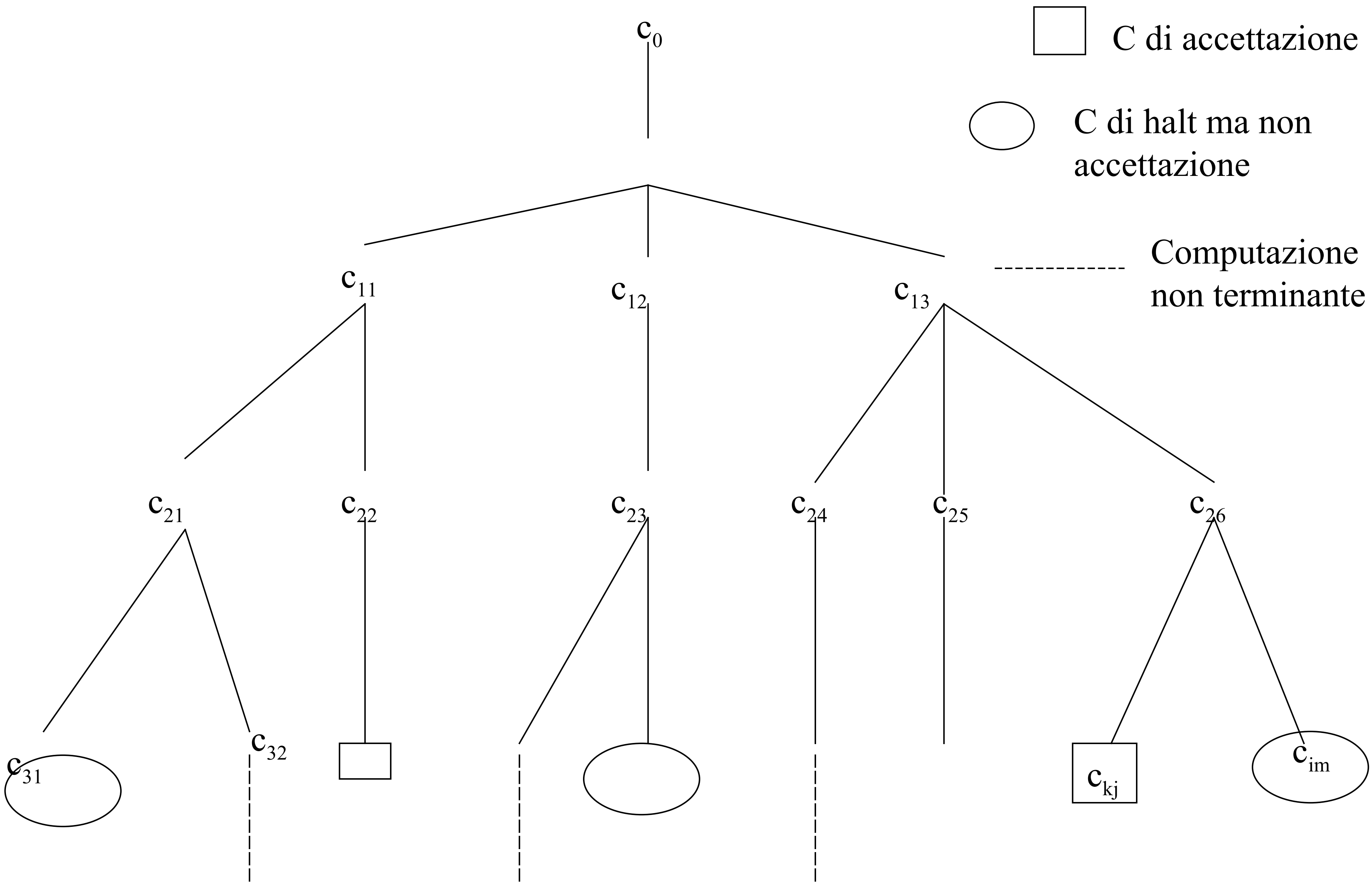
- Resta da esaminare la MT ...

Le MT nondeterministiche

$$\delta, [\eta] : Q \times I \times \Gamma^k \rightarrow \wp(Q \times \Gamma^k \times \{R,L,S\}^{k+1} [\times O \times \{R, S\}])$$

- è necessario l'indice F?
- configurazioni, transizioni, sequenze di transizioni e accettazione sono definite come al solito
- il nondeterminismo aumenta la potenza delle MT?

Albero delle computazioni



- x è accettata da una MT ND se e solo se esiste una computazione della MND che termina in uno stato di accettazione
- può una MT deterministica stabilire se una sua “sorella” ND accetta x, ossia accettare a sua volta x se e solo se la MND la accetta?
- Si tratta di percorrere o “visitare” l’albero delle compoutazioni ND per stabilire se esiste in esso un cammino che termina in uno stato di accettazione
- Questo è un (quasi) normale e ben noto problema di visita di alberi, per il quale esistono classici algoritmi di visita
- Il problema è perciò ridotto ad implementare un algoritmo di visita di alberi mediante MT: compito noioso ma sicuramente fattibile … a meno del “quasi” di cui sopra ...

- Tutto facile se l'albero delle computazioni è finito
- Però potrebbe darsi il caso che alcuni cammini dell'albero siano infiniti (descrivono computazioni che non terminano)
- In tal caso, un algoritmo di visita in *profondità* (ad esempio, in preordine sinistro) potrebbe infilarsi in un cammino infinito senza scoprire che in un altro punto dell'albero ne esiste uno finito che porta all'accettazione.
- Il problema è però facilmente risolvibile adottando ad esempio un algoritmo di visita in *ampiezza* (che usa una struttura a coda invece di una a pila per accumulare i vari nodi da esaminare: ne parleremo nel II modulo del corso).

Conclusioni

- Nondeterminismo: utile astrazione per descrivere problemi/algoritmi di ricerca; situazioni in cui non esistono elementi di scelta, o sono tra loro indifferenti; computazioni parallele
- In generale non aumenta la potenza di calcolo, almeno nel caso delle MT (che sono l'automa più potente tra quelli visti finora) però può fornire descrizioni più compatte
- Aumenta la potenza degli automi a pila