

Complessità del calcolo

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria
Politecnico di Milano

20 aprile 2022

La complessità del calcolo

Quanto efficientemente risolviamo un problema?

- Razionalizzazione dei concetti di:
 - *costo* di una computazione (tempo e memoria)
 - misura e confronto del costo di soluzioni a un problema
- Primo passo: costruire strumenti per valutare la complessità di un calcolo
- Secondo passo: analisi di algoritmi e strutture dati notevoli
 - Alcuni problemi sono molto ricorrenti nella pratica
- Obiettivo: saper progettare e combinare algoritmi e strutture dati per realizzare soluzioni *efficienti* (oltre che corrette)

La complessità del calcolo

Quanto efficientemente risolviamo un problema?

- Posto che un dato problema sia calcolabile, ci domandiamo: a che costo?
- Effettueremo analisi *quantitative* di:
 - Tempo di calcolo impiegato
 - Spazio occupato (registri, caches, RAM, disco, nastro)
- Analisi fatta su criteri di costo oggettivi (e formalizzabili): non terremo conto di:
 - costi di sviluppo, organizzazione del software, testing
 - tradeoff ambientali tra obiettivi contrastanti

Oltre la (sola) risolvibilità

Dipendenza dal formalismo di calcolo

- Per la tesi di Church-Turing, un problema è calcolabile o meno indipendentemente dallo strumento usato (purché Turing completo)
- Possiamo dire lo stesso della complessità del calcolo?
 - Una somma in unario ha efficienza diversa da una in base $b > 1$
 - Calcolare una traduzione $y = \tau(x)$ decidendo se $\exists z \in L_\tau = \{x \uparrow y \mid y = \tau(x)\}$ può essere molto meno efficiente del calcolare la traduzione
- È verosimile assumere che cambiando modello di calcolo non cambi il tempo di esecuzione? Intuitivamente, no.

Costruire uno strumento generale

Costo di calcolo “indipendente” dal formalismo

- Non abbiamo una “tesi di Church-Turing” della complessità
- Ci serve uno strumento per valutare la complessità temporale e spaziale:
 - che tralasci “considerazioni superflue”
 - utilizzabile per la maggioranza dei modelli di calcolo
- Non avendo un formalismo di calcolo “preferito” per costruire il modello, partiamo dalle MT *deterministiche*
 - Almeno una MT, per preservare le capacità espressive
 - Una MT deterministica, perchè non possiamo costruire fisicamente una ND

Complessità temporale e spaziale

Complessità temporale

- Data la computazione $c_0 \vdash^* c_r$ di \mathcal{M} la complessità temporale è $T_{\mathcal{M}}(x) = r$ se \mathcal{M} si ferma in un dato c_r , ∞ altrimenti
- \mathcal{M} è *deterministica* \Rightarrow computazione unica sull'ingresso x

Complessità spaziale

- Data la computazione $c_0 \vdash^* c_r$ di \mathcal{M} la complessità spaziale è $S_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{j=1}^k \max_{i \in \{0, \dots, r\}} (|\alpha_{ij}|)$ con $|\alpha_{ij}|$ lunghezza del contenuto del j -esimo nastro alla mossa i -esima
 - Intuitivamente: la somma delle quantità massime di nastro occupate, per ogni nastro
- NB: $\forall x, \exists k \in \mathbb{N}, \frac{S_{\mathcal{M}}(x)}{k} \leq T_{\mathcal{M}}(x)$: mi serve almeno il tempo per scrivere i simboli

Esempio: riconoscere $L = \{wcw^R\}$ con MT a 1 nastro

Complessità temporale

- Se $x \in L$, $T_{\mathcal{M}}(x) = |x| + 2$
- Se $x \notin L$, $x = \alpha a. ucu^R. b\beta$, $T_{\mathcal{M}}(x) = |\alpha a. ucu^R. b|$
- Se $x \notin L$, $x \in \{a, b\}^*$, $T_{\mathcal{M}}(x) = |x| + 1$
- Se $x \in c^+.\{a, b\}^*$, $T_{\mathcal{M}}(x) = 2$

Complessità spaziale

- Se $x \in L$, $S_{\mathcal{M}}(x) = \left\lfloor \frac{|x|}{2} \right\rfloor$
- Se $x \notin L$, $x \in \{a, b\}^*$, $S_{\mathcal{M}}(x) = |x| + 1$
- Se $x \in c^+$, $S_{\mathcal{M}}(x) = 0$

Riducendo all'essenziale

Analisi su MT

- Contempla tutti i dettagli del funzionamento della MT
 - La complessità temporale dipende dal valore dell'input
 - Spesso più dettagliata di quanto ci interessi

Una prima semplificazione

- Da $T_{\mathcal{M}}(x)$ e $S_{\mathcal{M}}(x)$ a $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$, dove n è la lunghezza dell'input
 - Nel caso precedente $n = |x|$
 - Esempi pratici: righe \times colonne di una matrice, numero di record in una tabella, numero di pacchetti in arrivo dalla rete
- NB: Si tratta di una semplificazione: in generale abbiamo che $|x_1|=|x_2| \not\Rightarrow T_{\mathcal{M}}(x_1)=T_{\mathcal{M}}(x_2)$, $|x_1|=|x_2| \not\Rightarrow S_{\mathcal{M}}(x_1)=S_{\mathcal{M}}(x_2)$

Gestire la variabilità dell'ingresso

Scelte possibili (sia per $T_{\mathcal{M}}(.)$ che per $S_{\mathcal{M}}(.)$)

- Caso pessimo: $T_{\mathcal{M}}(n) = \max_{x, |x|=n} T_{\mathcal{M}}(x)$
- Caso ottimo: $T_{\mathcal{M}}(n) = \min_{x, |x|=n} T_{\mathcal{M}}(x)$
- Caso medio: $T_{\mathcal{M}}(n) = \frac{\sum_{x, |x|=n} T_{\mathcal{M}}(x)}{\mathbf{I}^n}$ (con input uniformemente distribuiti su \mathbf{I}^n)

Scelte tipiche

- Consideriamo (quasi) sempre il caso pessimo:
 - È quello più rilevante: vogliamo essere sicuri di finire sempre in tempo
 - L'analisi risulta più semplice del caso medio

Tasso di crescita

Quanto crescono $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$?

- Sapere i valori esatti di $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$ per un dato n è utile, ma non fornisce un'idea globale del comportamento dell'algoritmo
 - Dovremmo calcolarli per ogni n di nostro interesse!
- Focalizziamoci su quanto $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$ crescono in funzione di n
- Osserviamo quindi $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$ quando $n \rightarrow \infty$
 - Non distingueremo quindi $T_{\mathcal{M}}(n) = n^2 + 13n$ da $3n^2$, hanno comportamenti “simili”
- Semplificazione aggressiva ($n^2 \approx 10^{80}n^2$) ma molto efficace se usata con raziocinio

Comportamento asintotico e notazione

Indicare i tassi di crescita

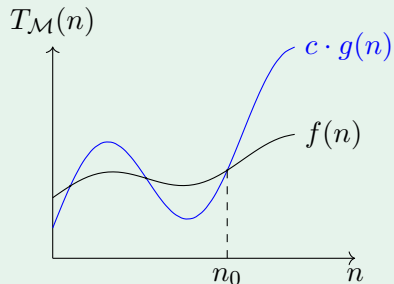
- Introduciamo una notazione per indicare il comportamento asintotico di una funzione:
 - La notazione \mathcal{O} -grande: limite asintotico superiore
 - La notazione Ω -grande: limite asintotico inferiore
 - La notazione Θ -grande: limite asintotico sia sup. che inf.
- Caveat pratico 1: comportamento asintotico \rightarrow per valori piccoli di n potrebbe non essere un buon modello
- Caveat pratico 2: in qualche (raro) caso valore “piccolo” per n non corrisponde alla nostra intuizione
 - Un algoritmo con complessità asintotica minore può essere più lento di uno a complessità maggiore per tutti i valori di n che ci interessano
 - Tutto funziona ... fin quando non crescono i dati in ingresso

Notazione \mathcal{O} -grande

Definizione

- Data una funzione $f(n)$, $\mathcal{O}(g(n))$ è l'insieme
 $\mathcal{O}(g(n)) = \{g(n) \mid \exists c > 0, n_0 > 0 \text{ tali che } \forall n > n_0, f(n) \leq c \cdot g(n)\}$

Graficamente



- Le funzioni in $\mathcal{O}(g(n))$ (e.g., $f(n)$) sono dominate da $c \cdot g(n)$ a partire da n_0
- Ogni elemento di $\mathcal{O}(g(n))$ ci dà un limite superiore al valore di $f(n)$ per $n \rightarrow \infty$ (a meno di una costante)

Esempi

Facilmente

- $3n^2 + 12n + 35 \in \mathcal{O}(n^2)$
- $5n^3 + 3 \in \mathcal{O}(n^3)$
- $2\log(n) + \log(\log(n)) \in \mathcal{O}(\log(n))$

Leggermente meno facilmente

- $3n^2 + 12n + 35 \in \mathcal{O}(n^{20})$
- $5n^3 + 3 \in \mathcal{O}(2^n)$
- $2\log(n) + \log(\log(n)) \in \mathcal{O}(n)$

Un abuso notazionale comunemente accettato

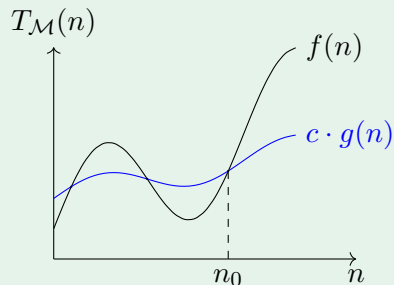
- È comune usare $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ al posto di $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ (o $f(n)$ è $\mathcal{O}(g(n))$)

Notazione Ω -grande

Definizione (Knuth)

- Data una funzione $f(n)$, $\Omega(g(n))$ è l'insieme
$$\Omega(g(n)) = \{g(n) \mid \exists c > 0, n_0 > 0 \text{ tali che } \forall n > n_0, f(n) \geq c \cdot g(n)\}$$

Graficamente



- Le funzioni in $\Omega(g(n))$ (e.g., $f(n)$) dominano $c \cdot g(n)$ a partire da n_0

Esempi

Direttamente dalla definizione

- $3n^2 + 12n + 35 \in \Omega(n^2)$
- $7n^2 \log(n) + 15 \in \Omega(n^2 \log(n))$
- $n2^n + n^{50} \in \Omega(n2^n)$

Di conseguenza, anche

- $3n^2 + 12n + 35 \in \Omega(n)$
- $5n^4 + 3 \in \Omega(\log(n))$, ma $5n^4 + 3 \notin \Omega(n^4 \log(n))$
- $n2^n + n^{13} \in \Omega(2^n)$, ma $n2^n + n^{13} \notin \Omega(2^{n^2})$

Proprietà

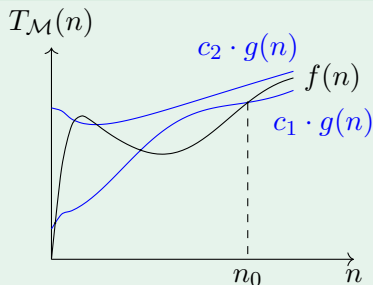
- Se e solo se $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ allora $g(n) \in \Omega(f(n))$

Notazione Θ -grande

Definizione

- Data $f(n)$, l'insieme $\Theta(g(n))$ è $\Theta(g(n)) = \{g(n) \mid \exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0 \text{ tali che } \forall n > n_0, c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$

Graficamente



- Le funzioni in $\Theta(g(n))$ sono comprese tra $c_1 \cdot g(n)$ e $c_2 \cdot g(n)$ a partire da n_0

Esempi

Direttamente dalla definizione

- $3n^2 + 12n + 35 \in \Theta(n^2)$
- $7n^2 \log(n) + 15 \in \Theta(n^2 \log(n))$
- $n2^n + n^{50} \in \Theta(n2^n)$

Tuttavia

- $3n^2 + 12n + 35 \notin \Theta(n)$
- $3n^2 + 12n + 35 \notin \Theta(\log(n))$
- $n2^n + n^{50} \notin \Theta(2^n)$
- $n2^n + n^{50} \notin \Theta(n^{100})$

Proprietà di \mathcal{O} , Ω , Θ

Proprietà di Θ

- Θ è una relazione di equivalenza sull'insieme di funzioni
 - Riflessiva: $f(n) \in \Theta(f(n))$
 - Simmetrica: $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$
 - Transitiva: $f(n) \in \Theta(g(n)) \wedge h(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(h(n))$

Proprietà di \mathcal{O} , Ω

- Esse sono riflessive: $f(n) \in \mathcal{O}(f(n))$, $f(n) \in \Omega(f(n))$
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se e solo se $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$
- \mathcal{O} e Ω sono relazioni d'ordine parziale

Confronti operativi

Definizioni come limiti

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, c \neq 0$ e $c \neq \infty$ allora $f(n) \in \Theta(g(n))$
 - Gli andamenti asintotici di f e g differiscono per una costante moltiplicativa
- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ allora $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, ma $f(n) \notin \Theta(g(n))$
 - Il comportamento di $f(n)$ è diverso in modo sostanziale da quello di $g(n)$ (in particolare, cresce più velocemente)
 - Si indica anche, con notazione più sintetica, $\Theta(f(n)) < \Theta(g(n))$
- L'uso della notazione $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$ estrae la porzione “più importante” di una funzione di complessità: il comportamento a meno di una costante moltiplicativa

Una prima applicazione

Riconoscere $L = \{wcw^r\}$ con MT a 1 nastro

- $T_{\mathcal{M}}(n)$ è $\Theta(n)$, $S_{\mathcal{M}}(n)$ è anch'essa $\Theta(n)$
- Ci sono possibilità di miglioramento (= soluzioni a complessità inferiore)?
- Per $T_{\mathcal{M}}(n)$, è ben difficile (devo leggere tutta la stringa)
- Per $S_{\mathcal{M}}(n)$, sì. Ad esempio, con MT a 2 nastri:
 - Memorizzo solo la posizione del carattere da confrontare (in binario)
 - Sposto la testina e confronto i caratteri in posizione i e $n - i + 1$
- NB: la complessità spaziale tiene conto solamente le celle dei nastri memoria
 - Unica eccezione: MT a nastro singolo, dove contiamo le celle dell'unico nastro

Pseudocodice per MT a 2 nastri N_a, N_b

- ① Ciclo per trovare c , ad ogni passo incrementa il contatore memorizzato N_a [$T_M(n) = n \log(n)$, $S_M(n) = \log(n)$]
- ② Ripeti fino a quando il contatore su N_a è $= 0$
 - ① Copia il contenuto di N_a su N_b [$T_M(n) = S_M(n) = \log(n)$]
 - ② Sposta la testina di ingresso di N_b posti a sx, decrementando N_b [$T_M(n) = i \log(i)$, $S_M(n) = \log(n)$]
 - ③ Memorizza il carattere nello stato [$T_M(n) = S_M(n) = k$]
 - ④ Ritorna al carattere c [$T_M(n) = i, S_M(n) = k$]
 - ⑤ Copia il contenuto di N_a su N_b [$T_M(n) = S_M(n) = \log(n)$]
 - ⑥ Sposta la testina di ingresso di N_b posti a dx, decrementando N_b [$T_M(n) = i \log(i)$, $S_M(n) = \log(n)$]
 - ⑦ Confronta il carattere con lo stato, se diversi halt [$T_M(n) = S_M(n) = k$]
 - ⑧ Decrementa N_a e torna a c [$T_M(n) = \log(i) + i$, $S_M(n) = \log(n)$]

Considerazioni sul $T_{\mathcal{M}}(n)$ e $S_{\mathcal{M}}(n)$

Compromessi tra spazio e tempo

- La nuova soluzione è $S_{\mathcal{M}}(n) \in \Theta(\log(n))$, ma $T_{\mathcal{M}}(n) \in \Theta(n^2 \log(n))$
- È un caso di compromesso spazio-temporale: la soluzione è più lenta ma occupa meno spazio
 - È possibile spesso precalcolare alcuni risultati utilizzati spesso e andare a rileggerli da memoria al posto di ricalcolarli da zero
- Questo esempio giustifica perchè in una MT a k nastri, per convenzione la testina di ingresso si muove in entrambe le direzioni
 - Farla muovere in una sola direzione non cambia il potere computazionale della MT ...
 - ... ma previene esempi (non banali) di algoritmi con $S_{\mathcal{M}}(n)$ sub-lineare

Modelli di calcolo

Altri modelli *deterministici* di calcolo

- FSA: hanno sempre $S_{\text{FSA}}(n) \in \Theta(1)$, $T_{\text{FSA}}(n) \in \Theta(n)$
 - Tecnicamente, $T_{\text{FSA}}(n) = n$, leggono un carattere per mossa
- APD: hanno sempre $S_{\text{APD}}(n) \in \mathcal{O}(n)$, $T_{\text{APD}}(n) \in \Theta(n)$
- MT a nastro singolo?
 - È facile trovare una soluzione $T_{\mathcal{M}}(n) \in \Theta(n^2)$ per il riconoscimento di $L = \{wcw^r\}$
 - $S_{\mathcal{M}}(n)$ non potrà mai essere minore di $\Theta(n)$
 - Non esiste un algoritmo più efficiente di $T_{\mathcal{M}}(n) \in \Theta(n^2)$ per MT a nastro singolo (Intuizione: a ogni controllo di ognuna delle $\frac{n-1}{2}$ coppie di lettere, la TM scandisce una porzione di nastro che passa su c)
- In generale: MT a nastro singolo sono più potenti degli APD, ma ciò che eseguono può avere qualunque complessità spazio/temporale!

I teoremi di accelerazione lineare

Teorema (Compressione dello spazio)

Se L è accettato da una MT \mathcal{M} a k nastri in $S_{\mathcal{M}}(n)$, per ogni $c \in \mathbb{Q}, c > 0$ posso costruire una MT \mathcal{M}' a k nastri con $S_{\mathcal{M}'}(n) < c \cdot S_{\mathcal{M}}(n)$

Schema della dimostrazione

- Scelgo un fattore di compressione r tale che $r \cdot c > 2$
- Per ognuno degli i nastri di \mathcal{M} , considero l'alfabeto Γ_i e costruisco Γ'_i di \mathcal{M}' creando un elemento in Γ'_i per ogni $s \in \Gamma_i^r$
- Costruisco l'OC di \mathcal{M}' in modo tale per cui:
 - Calcoli con i nuovi simboli sui nastri emulando le mosse di \mathcal{M} spostando le testine sui nastri ogni r movimenti di \mathcal{M}
 - Memorizzi la posizione della testina "all'interno" dei nuovi simboli degli alfabeti di nastro Γ_i usando gli stati

I teoremi di accelerazione lineare - 2

Teorema (Da k a 1 nastro di memoria)

Se L è accettato da una MT \mathcal{M} a k nastri in $S_{\mathcal{M}}(n)$, posso costruire una MT \mathcal{M}' a 1 nastro (non nastro singolo) con $S_{\mathcal{M}'}(n) = S_{\mathcal{M}}(n)$ (concateno i contenuti dei k nastri su uno solo)

Teorema

Se L è accettato da una MT \mathcal{M} a k nastri in $S_{\mathcal{M}}(n)$, per ogni $c \in \mathbb{R}, c > 0$ posso costruire una MT \mathcal{M}' a 1 nastri con $S_{\mathcal{M}'}(n) < c \cdot S_{\mathcal{M}}(n)$ (come sopra + compressione)

I teoremi di accelerazione lineare - 3

Teorema

Se L è accettato da una MT \mathcal{M} a k nastri in $T_{\mathcal{M}}(n)$, per ogni $c \in \mathbb{Q}, c > 0$ posso costruire una MT \mathcal{M}' a $k + 1$ nastri con $T_{\mathcal{M}'}(n) = \max(n + 1, c \cdot T_{\mathcal{M}}(n))$ (come sopra + compressione)

Schema di dimostrazione

- Approccio simile alla complessità spaziale: codifichiamo in modo compresso i simboli dell'alfabeto di \mathcal{M}
- Dobbiamo considerare che la compressione è fatta a runtime: il minimo costo per effettuare la compressione è lineare nel numero di simboli da comprimere
- Comprimendo r simboli in uno, nel caso pessimo, possono servirmi 3 mosse di \mathcal{M}' per emularne $r+1$ di \mathcal{M}

Conseguenze pratiche

L'unico “pasto gratis” è lo speedup lineare

- Lo schema di dimostrazione usato per le MT vale anche per i calcolatori a-la Von Neumann
 - Equivale a cambiare la dimensione della word della macchina ($32b \rightarrow 64b$) o, equivalentemente, ad usare operazioni vettoriali (SSE/AVX, Neon, AltiVec)
- Possiamo avere speedup *lineari* arbitrariamente grandi, aumentando il parallelismo fisico (stanti i limiti della termodinamica/trasmissione dei segnali)
- Miglioramenti più che lineari nel tempo di calcolo possono essere ottenuti solo *cambiando algoritmo*
 - Concepire/utilizzare algoritmi efficienti è di gran lunga più efficace della forza bruta

Modelli di calcolo a confronto

MT vs. calcolatori reali

- Differenze “marginali”: un calcolatore è in grado di fare operazioni aritmetiche su tipi a dimensione finita in tempo costante (e.g., add in un ciclo di clock), la MT necessita di propagare gli effetti al singolo bit uno per uno
 - Il calcolatore opera con un alfabeto molto vasto, $|\mathbf{I}| = 2^w$, dove w è la dimensione della parola architetturale
- Un calcolatore può accedere direttamente ad una cella di memoria, una MT impiega $\Theta(n)$ dove n è la distanza della stessa dalla posizione della testina
- Cambiamo modello di calcolo, avvicinandoci ai calcolatori reali

La macchina RAM

Un calcolatore semplificato

- La macchina RAM è dotata di un nastro di lettura In e uno di scrittura Out come la MT
- Assumiamo il programma cablato nell'OC, così come la logica del program counter
- La RAM è dotata di una memoria con accesso a indirizzamento diretto $M[n]$, $n \in \mathbb{N}$ al posto dei nastri di memoria: l'accesso non necessita di scorrimento delle celle
- Le istruzioni di un programma usano come primo operando sorgente e come operando destinazione $M[0]$
- Ogni cella contiene *un intero* ($x \in \mathbb{N}$)

La macchina RAM

Instruction set e semantica pseudo-RTL

Istruzione	Semantica
LOAD X	$M[0] \leftarrow M[X]$
LOAD= X	$M[0] \leftarrow X$
LOAD* X	$M[0] \leftarrow M[M[X]]$
STORE X	$M[X] \leftarrow M[0]$
STORE* X	$M[M[X]] \leftarrow M[0]$
ADD X	$M[0] \leftarrow M[0] + M[X]$
SUB X	$M[0] \leftarrow M[0] - M[X]$
MUL X	$M[0] \leftarrow M[0] \times M[X]$
DIV X	$M[0] \leftarrow M[0] / M[X]$
HALT	—

Istruzione	Semantica
READ X	$M[X] \leftarrow In$
READ* X	$M[M[X]] \leftarrow In$
WRITE X	$Out \leftarrow M[X]$
WRITE= X	$Out \leftarrow X$
WRITE* X	$Out \leftarrow M[M[X]]$
JUMP l	$PC \leftarrow l$
JZ l	Se $M[0] = 0$ $PC \leftarrow l$
Ci sono JGT, JGZ, JLT, JLZ	

Test (semplice) di primalità in assembly RAM

Stampa 1 se l'intero su nastro è primo 0 altrimenti

1	READ 1	12	MUL 2
2	LOAD= 1	13	SUB 1
3	SUB 1	14	JZ no
4	JZ no	15	LOAD 2
5	LOAD= 2	16	ADD= 1
6	STORE 2	17	STORE 2
7	loop: LOAD 1	18	JUMP loop
8	SUB 2	19	yes: WRITE= 1
9	JZ yes	20	HALT
10	LOAD 1	21	no: WRITE= 0
11	DIV 2	22	HALT

Complessità del precedente programma

Analisi di complessità temporale e spaziale

- Per la RAM, valutiamo la complessità in funzione del numero di mosse/numero di celle di memoria
- Assunzione di base: istruzioni singole a costo costante c_i , dove i è l'indice della riga
- Le istruzioni 1 – 6 sono eseguite al più una volta \rightarrow costo $= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$, è una costante k_1
- Analogamente per le istruzioni 19 – 22, costo costante k_2
- Le istruzioni 7 – 18 hanno costo costante k_3 , ma sono eseguite, nel caso pessimo n volte
- $T_{RAM}(n) = k_1 + nk_3 + k_2 = \Theta(n)$
- $S_{RAM}(n) = 3 = \Theta(1)$ (uso solo 3 celle di mem)

Analisi di altri algoritmi

Riconoscere $L = \{wcw^R\}$

- $T_{\mathcal{RAM}}(n) = \Theta(n)$
- $S_{\mathcal{RAM}}(n) = \Theta(n)$

Ricerca Binaria

- Input: una sequenza ordinata di interi, ed un numero da cercare in essa
- Output: 1 se l'elemento cercato esiste nella sequenza, 0 altrimenti
- Analizziamo la porzione di codice dopo che:
 - La sequenza è stata caricata in memoria
 - $M[1]$ e $M[2]$ contengono gli indirizzi della prima e dell'ultima cella della sequenza stessa

Ricerca Binaria: codice

1	READ 3	16	JZ yes
2	LOAD 1	17	JLT low
3	STORE 4	18	JUMP high
4	ADD 2	19	low: LOAD 6
5	SUB= 1	20	SUB= 1
6	STORE 5	21	STORE 5
7	loop: LOAD 5	22	JUMP loop
8	SUB 4	23	high: LOAD 6
9	JZ no	24	ADD= 1
10	LOAD 5	25	STORE 4
11	ADD 4	26	JUMP loop
12	DIV= 2	27	yes: WRITE= 1
13	STORE 6	28	HALT
14	LOAD* 6	29	no: WRITE= 0
15	SUB 3	30	HALT

Costo complessivo: $T_{\text{ricerca}}(n) = \Theta(\log(\text{lunghezza vettore}))$

Limiti del criterio di costo

Numeri molto grandi

- Consideriamo il caso del calcolo di 2^{2^n} con una RAM
- Uno schema di implementazione possibile è

```
read(n); x=2;
for(int i=0 ; i< n; i++) {x = x*x;}
write(n);
```
- Che complessità temporale ha l'implementazione qui sopra?
 $T_{RAM}(n) = k_1 + nk_2 + k_3 = \Theta(n)$
- Qualcosa non va: mi servono 2^n bit solo per scrivere il risultato!

Un criterio di costo più preciso

Quando contare i singoli bit serve

- Il criterio di costo precedente considera un intero arbitrario di dimensione costante
 - È una semplificazione: “1” è più corto di “1000000”
- L'approssimazione regge fin quando una singola parola della macchina reale contiene gli interi che maneggiamo
- Se questo non accade, dobbiamo tenere conto del numero di cifre necessarie per rappresentare un intero
 - Caricare e salvare interi non è più a costo costante
 - Le operazioni elementari (somma, prodotto...) neppure
 - Anche gli indirizzi di memoria sono interi → stesse problematiche nel (raro) caso in cui parola della macchina non riesce a contenere il massimo indirizzo (μC a 8 bit)

Criterio di costo logaritmico

Contare i singoli bit

- Copiare/spostare/scrivere/leggere un intero i costa tanto quanto il suo numero di cifre in base b : $\log_b(i) = \Theta(\log(i))$
 - Con $b = 2$ il costo è il numero di bit usati per rappresentare i
- Il costo delle operazioni aritmetico/logiche elementari dipende dall'operazione (definiamo $d = \log_2(i)$)
 - Addizioni, sottrazioni, op. al bit $\Theta(d)$
 - Moltiplicazioni: metodo scolastico $\Theta(d^2)$
 - Primo miglioramento: $\Theta(d^{\log_2(3)}) \approx \Theta(d^{1.58})$
 - Ulteriore miglioramento: $\Theta(d \log(d) \log(\log(d)))$
 - Miglior algoritmo attuale: $\Theta(d \log(d))$
 - Divisioni: metodo scolastico $\Theta(d^2)$, o al costo dell'algoritmo di moltiplicazione scelto per $\log^2(d)$
- JUMP e HALT sono a costo costante, così come le Jcc (il valore del codice di condizione è nella PSW, già calcolato)

Calcolo di 2^{2^n} , complessità a costo logaritmico

Analisi di caso pessimo, MUL scolastica

1	READ 2	$\log(n)$
2	LOAD= 2	$\log(2) = k$
3	STORE 1	$\log(2) = k$
4	loop: LOAD 1	$\log(2^{2^{n-1}}) = 2^{n-1}$
5	MUL 1	$(\log(2^{2^{n-1}}))^2 = (2^{n-1})^2 = 2^{2n-2}$
6	STORE 1	$\log(2^{2^n}) = 2^n$
7	LOAD 2	$\log(n)$
8	SUB= 1	$\log(n)$
9	STORE 2	$\log(n - 1)$
10	JGT loop	1
11	WRITE 1	$\log(2^{2^n}) = 2^n$
12	HALT	1

$$T_{\mathcal{RAM}}(n) = \log(n) + n(2^{n-1} + 2^{2n-2} + 2^n + 3\log_2(n)) + 2^n = \Theta(n2^{2n-2})$$

Rapporti tra criteri di costo

Ri-analizzando

- Riconoscere $L = \{w c w^R\}$ è $\Theta(n \log(n))$ (colpa del contatore)
- Ricerca binaria: $\Theta(\log(n)^2)$ (colpa degli indici)

Quale criterio scegliere?

- Se la dimensione di ogni singolo elemento in ingresso non varia significativamente nell'esecuzione dell'algoritmo (= stesso numero di cifre per tutta l'esecuzione): costo costante
- Nel caso in cui ci sia un significativo cambio nella dimensione dei singoli elementi in ingresso (= il numero di cifre cresce in modo significativo): costo logaritmico

Rapporti tra complessità con diversi modelli di calcolo

Modelli di calcolo diversi \rightarrow diversa efficienza

- Risolvere lo stesso problema con macchine diverse può dare luogo a complessità diverse
- Non esiste un modello migliore in assoluto

Tesi di correlazione polinomiale

- Sotto “ragionevoli” ipotesi di criteri di costo, se un problema è risolvibile da \mathcal{M} in $T_{\mathcal{M}}(n)$, allora è risolvibile da un qualsiasi altro modello (Turing-completo) \mathcal{M}' in $T_{\mathcal{M}'}(n) = \pi(T_{\mathcal{M}}(n))$ dove $\pi(\cdot)$ è un opportuno polinomio
- Dimostriamo il teorema di correlazione (temporale) polinomiale tra MT e RAM

Correlazione temporale tra MT a k nastri e RAM

RAM simula MT a k nastri: simulazione delle azioni

- Mappiamo la MT sulla RAM:
 - Stato della MT \rightarrow Prima cella di memoria della RAM
 - Una cella RAM per ogni cella del nastro
 - Suddividiamo la restante memoria della RAM in blocchi da k celle
- Riempiamo i blocchi con questa strategia:
 - Blocco 0 : posizione delle k testine
 - Blocco n , $n > 0$: n -esimo simbolo di ognuno dei k nastri
- La RAM emula la lettura di un carattere sotto la testina con un accesso indiretto, usando l'indice contenuto nel blocco 0

Correlazione temporale tra MT a k nastri e RAM

RAM simula MT a k nastri: lettura

- Lettura del blocco 0 e dello stato ($\Theta(k)$ mosse)
- Lettura dei valori sui nastri in corrispondenza delle testine ($\Theta(k)$ accessi indiretti)

RAM simula MT a k nastri: Scrittura

- Scrittura dello stato ($\Theta(1)$)
- Scrittura delle celle dei nastri ($\Theta(k)$ accessi indiretti)
- Scrittura nel blocco 0 per aggiornare le posizioni delle k testine ($\Theta(k)$)

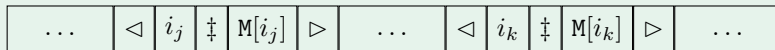
Complessità dell' emulazione

- RAM emula una mossa della MT con un k di mosse: $T_{RAM}(n) = \Theta(T_M(n))$
($= \Theta(T_M(n) \log(T_M(n)))$ costo log.)

Correlazione temporale tra MT a k nastri e RAM

MT a k nastri simula RAM (senza MUL/DIV per semplicità)

- Organizziamo un nastro della MT così:



- Il nastro è inizialmente vuoto: salviamo solo le celle in cui è avvenuta una STORE
- Usiamo un ulteriore nastro per contenere $M[0]$ in binario
- Usiamo un ultimo nastro come stoccaggio temporaneo per quando serve salvare per la prima volta $M[i_j]$ ma $M[i_k]$ e $M[i_l]$, $i_k < i_j < i_l$, sono state già salvate

Correlazione temporale tra MT a k nastri e RAM

MT a k nastri simula RAM: simulare istruzioni

- **LOAD x :** cerco x sul nastro principale, copio la porzione accanto nella zona dati di $M[0]$ usando il nastro di supporto
- **STORE x :** cerco x sul nastro principale:
 - Se lo trovo, salvo il valore di $M[0]$
 - Altrimenti, creo dello spazio usando il nastro di servizio se necessario e salvo
- **ADD x :** cerco x , copio $M[x]$ sul nastro di supporto, calcolo la somma scrivendo direttamente in $M[0]$
- In generale: simulare una mossa della RAM richiede alla MT un numero di mosse \leq da $c \times$ (lunghezza del nastro principale)

Correlazione temporale tra MT a k nastri e RAM

Lemma (Occupazione sul nastro principale)

Lo spazio occupato sul nastro principale è $\mathcal{O}(T_{\mathcal{RAM}}(n))$

Dimostrazione.

- Ogni cella della RAM occupa $\log(i_j) + \log(M[i_j])$
- Ogni cella della RAM viene materializzata solo se la RAM effettua una STORE
- La STORE costa alla RAM $\log(i_j) + \log(M[i_j])$
- Per riempire r celle la RAM ci mette $\sum_{j=1}^r \log(i_j) + \log(M[i_j])$ in tempo: quantità identica allo spazio che occupano sul nastro della MT ■

Correlazione temporale tra MT a k nastri e RAM

Concludendo

- La MT impiega al più $\Theta(T_{RAM}(n))$ per simulare una mossa della RAM
- Se la RAM ha complessità $T_{RAM}(n)$ essa effettua al più $T_{RAM}(n)$ mosse (ogni mossa costa almeno 1)
- La simulazione completa della RAM da parte della MT costa al più $\Theta((T_{RAM}(n))^2)$ il legame tra $T_{RAM}(n)$ e $T_{MT}(n)$ tra è polinomiale

Conseguenze della correlazione temporale tra MT RAM

Implicazioni della correlazione polinomiale

- La relazione polinomiale tra il tempo di calcolo su $T_{RAM}(n)$ e $T_{MT}(n)$ ci consente di definire la classe di problemi risolvibili in tempo/spazio polinomiale (classe P)
- Questo risultato ha portato alla formulazione di una “tesi di trattabilità”: i problemi risolvibili in P sono quelli trattabili
- La classe P comprende anche polinomi come n^{30} , ma l'esperienza pratica conferma che la maggioranza dei problemi polinomiali di interesse pratico ha anche un grado del polinomio accettabile