Calcolo Matriciale

Università degli Studi del Molise

Storia della matematica
Andrea D'Aguanno
A.A. 2019/2020

Matrice

Una matrice è una tabella di numeri, ovvero una tabella ordinata di elementi di un dato insieme.

Si chiama matrice di ‘m’ righe ed ‘n’ colonne una figura costituita da m x n numeri disposti in m righe ed n colonne.
A : {1, … , m} x {1, … , n} → K

Per indicare un generico elemento della matrice A scriveremo $\mathbf{a_{i,j}}$ oppure $\mathbf{[A]_{i,j}}$ dove ‘i’ indica la riga i-esima (i = 1, m) e ‘j’ indica la colonna j-esima (j = 1, n).

$$A = \begin{pmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & \cdots & [A]_{1,n} \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & [A]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [A]_{m,1} & [A]_{m,2} & \cdots & [A]_{m,n} \end{pmatrix}$$

Tipi di matrice

- **Matrice Riga (Vettore riga)**

A = ($a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{1,3}$,… $a_{1,n}$)

- **Matrice Colonna (Vettore colonna)**

$$A = \begin{pmatrix} a1,1 \\ a2,1 \\ a3,1 \\ \vdots \\ am,1 \end{pmatrix}$$

- **Matrice Rettangolare**

$$A = \begin{pmatrix} a1,1 & a1,2 & a1,3 & a1,4 \\ a2,1 & a2,2 & a2,3 & a2,4 \\ a3,1 & a3,2 & a,3,3 & a3,4 \end{pmatrix}$$

- **Matrice Quadrata**

$$A(n)= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$m=n$$

Le matrici quadrate hanno caratteristiche e proprietà specifiche rispetto alle altre che le rendono particolarmente utili nell'algebra lineare.

Le matrici quadrate sono caratterizzate dalla presenza di due diagonali

- **Diagonale principale**

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & a_{2,3} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \boxed{a_{3,3}} & a_{3,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \boxed{a_{m,n}} \end{pmatrix}$$

- **Diagonale Secondaria**

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \boxed{a_{1,n}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \boxed{a_{2,3}} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \boxed{a_{3,2}} & a_{3,3} & a_{3,n} \\ \boxed{a_{m,1}} & a_{m,2} & a_{m,3} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- **Matrice nulla**

$$[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- **Triangolare inferiore**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Triangolare superiore**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A è triangolare inferiore ⇔ ∀ i < j → ai,j = 0

A è triangolare superiore ⇔ ∀ i > j → ai,j = 0

- **Matrice diagonale**

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- **Matrice identità**

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matrice Trasposta**

Data una qualsiasi matrice $A_{m \times n}$, quadrata o rettangolare, l'operazione di trasposizione restituisce una nuova matrice A_T ottenuta scambiando ordinatamente le righe con le colonne e questa nuova matrice si chiamerà **matrice trasposta** di A.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad A^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

E' possibile definire delle operazioni sulla matrici quali la SOMMA, il PRODOTTO, la DIFFERENZA ed il PRODOTTO PER UNO SCALARE.

- **Somma**

Date due matrici A e B appartenenti ad Mm x n (aventi stessa grandezza), si definisce **somma** tra matrici A + B la matrice C tale che ai,j + bi,j = ci,j

ci,j = ai,j + bi,j, con i ∈ {1,2,…,m}, j ∈ {1,2,…,n}

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+(-2) \\ 1+3 & -2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Differenza**

Date due matrici A e B appartenenti ad $M_{m \times n}$ (aventi stessa grandezza), si definisce **differenza** tra matrici A - B la matrice C tale che $a_{i,j} - b_{i,j} = c_{i,j}$

$$\mathbf{c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}}, \text{ con } i \in \{1,2,\dots,m\},\ j \in \{1,2,\dots,n\}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 3-(-2) \\ 1-3 & -2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

- **Prodotto per uno scalare**

Data una matrice A, si definisce prodotto tra la matrice A ed un numero $x \in \mathbb{R}$, la matrice B ottenuta moltiplicando per quel numero ogni elemento della matrice A.

$$x \cdot A = x \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 2 & x \cdot 1 & x \cdot 3 \\ x \cdot 1 & x \cdot 3 & x \cdot 4 \end{pmatrix}$$

- **Prodotto tra matrici (moltiplicazione righe per colonne)**

Definizione:

Sia A di taglia n × p, B di taglia p × m.
La matrice AB ha taglia n × m e $c_{i,j}$ è il prodotto della i-esima riga di A per la j-esima colonna di B.

$$c_{i,\,j} = (a_{i,1} \cdot b_{1,\,j}) + (a_{i,2} \cdot b_{2,\,j}) + \ldots + (a_{i,n} \cdot b_{n,\,j}) \; = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}i,k \;\; \mathbf{b}k,j$$

Esempio:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 19 & 6 \\ 11 & 9 & 27 & 8 \end{pmatrix}$$

La matrice identità I è neutra rispetto la moltiplicazione

$$A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE

Ad ogni matrice **A** ∈ M nxn a coefficienti reali è possibile associare un numero ℝ detto **determinante** di **A**.

- **Determinante di matrice quadrate di ordine 2**

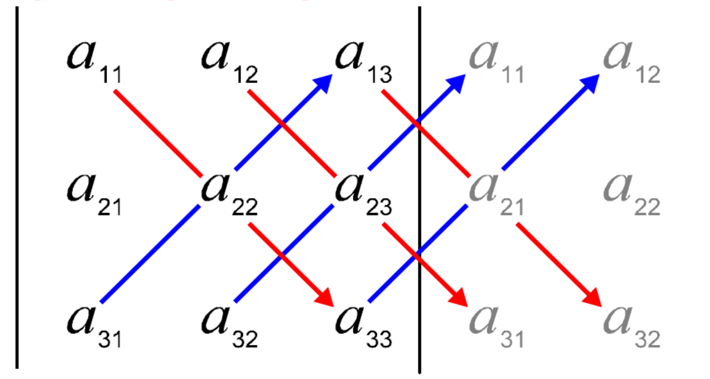
il determinante è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale ($a_{1,1} \cdot a_{2,2}$) meno il prodotto degli elementi nella diagonale secondaria ($a_{2,1} \cdot a_{1,2}$).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- **Determinante di matrice quadrate di ordine 3**

Il determinate di una matrice quadrata di ordine 3 possiamo applicare la **"Regola di Sarrus".**

Data una matrice A ∈ M_{3x3}, se $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$



$$\det(A) = (a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3}) + (a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1}) + (a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2})$$
$$- (a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3}) + (a_{3,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{1,1}) + (a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3})$$

- **Determinante tramite sviluppo di Laplace**

Data una matrice A di ordine n, lo sviluppo di Laplace trasforma il calcolo di un determinante di ordine n al calcolo di n determinanti di ordine n – 1. Può essere espressa attraverso un procedimento ricorsivo.

Fissata una colonna J arbitraria della matrice con $1 \leq j \leq n$, si procede sommando i determinanti delle sottomatrici minori $A_{(i,j)}$ ottenute eliminando la riga i e la colonna j della matrice A:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{(i,j)}|$$

Fissata una riga i arbitraria della matrice con $1 \leq i \leq n$, si ottiene la formula:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{(i,j)}|$$

Determinante di matrici triangolari: Se la matrice quadrata è una matrice triangolare (superiore o inferiore), allora il determinante è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale.

La **matrice inversa** è quella matrice che moltiplicata per la matrice di partenza, restituisce la matrice identità.

RANGO

Sia $A_{m \cdot n}$ una matrice con $m = n \vee m \neq n$, si definisce minore P, il determinante di una matrice di ordine P di A.
Si definisce **rango** di una matrice A, e lo si indice con $\rho(A)$, l'ordine massimo di un minore non nullo.

- **Teorema degli orlati**

Affinché una matrice $m \cdot n$ abbia rango P è necessario e sufficiente che valgano le seguenti due proprietà:

1. Esiste un minore di ordine P non nullo.

2. Sono nulli tutti i minori di ordine P+1 ottenuti orlando la corrispondente sottomatrice con una qualunque altra riga o colonna.

Dunque per calcolare il rango di una matrice si utilizza il metodo dei minori in concomitanza del Teorema degli orlati, nello specifico data una matrice A:

- Il rango di una matrice è un numero compreso tra zero ed il più piccolo tra m ed n:

$$\text{Se } A \in M_{m \times n} \rightarrow 0 \leq \rho(A) \leq \text{minore}(m, n)$$

- L'unica matrice che ha $\rho(A) = 0$ è la matrice nulla.

Sistema lineari e matrici

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Un sistema lineare è costruito da m equazioni in n incognite (x_1, x_2, …, x_n).

Il sistema si può esprimere utilizzando una matrice dei coefficienti che chiameremo A ∈ $\mathbb{R}^{m \times n}$, un vettore colonne delle incognite x ∈ $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ed un vettore colonne dei termini noti b ∈ $\mathbb{R}^{m \times 1}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Quindi il sistema lineare è espresso nella forma: **$\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$**

Teorema di Cramer

Il Teorema di Cramer è un metodo di risoluzione di un sistema lineare di n equazioni in n incognite (sistema quadrato). Il Teorema afferma che dato un sistema lineare quadrato Ax = b, esso ammette soluzione ⇔ |A| ≠ 0. Se invece |A| = 0 avremo zero o infinite soluzioni.

Indichiamo con Bi, i = (1,2, … , n) la matrice ottenuta sostituendo la colonna i-esima di A con il vettore temine noti "b":

$$B1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad B2 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & b_n & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \ldots \quad Bn = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Calcolato il determinate della matrice di partenza A, se diverso da zero, si procede alla risoluzione delle n incognite

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ come:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{|B_1|}{|A|} \\ x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} \\ \vdots \\ x_n = \frac{|B_n|}{|A|} \end{cases}$$

Teorema di Rouchè Capelli

Consideriamo un sistema di m equazioni in n incognite, definiamo la **matrice completa** e la indichiamo con (A | b) come la matrice ottenuta accostando ai coefficienti del sistema (matrice A) i termini noti (matrice b).

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Il teorema afferma che:

1. Se il rango di A è uguale al rango di (A|b) il sistema ammette soluzioni:

   1.1 Se $\rho(A) = \rho(A|b) = n$ esiste una ed una sola soluzione;
   1.2 Se $\rho(A) = \rho(A|b) < n$ il sistema ammette $\infty_{n-\rho(A)}$ soluzioni

2. Se $\rho(A) \neq \rho(A|b)$ il sistema è impossibile e non ammette soluzioni

Metodo di eliminazione di Gauss

Quindi considerando una matrice A $\in \mathbb{R}^{m\,x\,n}$ l'intendo del metodo di eliminazione di Gauss è ridurre A ad una **matrice a scalini**, di fatto annullando tutti i coefficienti al di sotto della diagonale principale.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per farlo si può:

- Moltiplicare una riga di A per un numero $\in \mathbb{R}$;
- Scambiare due righe (non si possono scambiare colonne);

Sia C_k, con $1 \leq k \leq n$, la prima colonna a partire da sinistra che contiene almeno un termine **a** $\neq 0$;

Se **a** non è un elemento della prima riga, scambiamo la riga che contiene **a** con la prima riga della matrice e si procede;
Se invece **a** è un coefficiente della prima riga della matrice si procede senza effettuare alcun scambio;

A questo punto lo scopo è quello di annullare tutti i restanti elementi della colonna di **a**.
Sostituiamo ogni riga al di sotto della riga di **a** e con il relativo coefficiente appartenete alla colonna di **a** non nullo (k-esimo elemento $\neq 0$)**,** con la somma tra la riga i-esima (R_i) e la prima riga(R_1) moltiplicata per uno scalare (λ), dove lambada è scelto in modo che $R_i + \lambda R_1$ abbia il k-esimo elemento nullo.

Per il calcolo del **determinante** il metro di eliminazione di Gauss consente di ridurre la matrice ad una triangolare superiore.
Per il calcolo del **rango** di una matrice coinciderà esattamente con il numero di elementi non nulli della diagonale principale.