Lezione 18 - Copertura minimale di un insieme di dipendenze - Esercizi

Prof.ssa Maria De Marsico
demarsico@di.uniroma1.it

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Parte del materiale è tratto dal materiale preparato dalla prof.ssa Moscarini per il canale A-L

Definizione

- **Definizione** Sia *F* un insieme di dipendenze funzionali. Una *copertura minimale* di *F* è un insieme *G* di dipendenze funzionali equivalente ad *F* tale che:
- per ogni dipendenza funzionale in *G* la parte **destra** è un **singleton**, cioè è costituita da un unico attributo (ogni attributo nella parte destra **è non ridondante**)
- per **nessuna** dipendenza funzionale $X \rightarrow A$ **in G** esiste $X' \subset X$ tale che $G \equiv G - \{X \rightarrow A\} \cup \{X' \rightarrow A\}$ (ogni attributo nella parte **sinistra** è non ridondante)
- per **nessuna** dipendenza funzionale $X \rightarrow A$ **in G**, $G \equiv G - \{X \rightarrow A\}$ (ogni **dipendenza** è **non ridondante**).

Come si calcola

- Per ogni insieme di dipendenze funzionali *F* esiste una copertura minimale **equivalente ad *F*** che può essere ottenuta in tempo **polinomiale** in tre passi:
- usando la regola della decomposizione, le parti destre delle dipendenze funzionali vengono ridotte a singleton;
- ogni dipendenza funzionale $A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_iA_{i+1} \ldots A_n \rightarrow A$ in F tale che

  $F \equiv F - \{ A_1A_2 \ldots \mathbf{A_{i-1}A_iA_{i+1}} \ldots A_n \rightarrow A \} \cup \{ A_1A_2 \ldots \mathbf{A_{i-1}A_{i+1}} \ldots A_n \rightarrow A \}$

  viene sostituita appunto da $A_1A_2 \ldots \mathbf{A_{i-1}A_{i+1}} \ldots A_n \rightarrow A$; se quest'ultima **appartiene già** ad F la dipendenza originaria viene **semplicemente eliminata**, altrimenti il processo viene ripetuto **ricorsivamente** su $A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n \rightarrow A$; il passo termina quando **nessuna** dipendenza funzionale può più essere **ridotta**, cioè quando tutti gli attributi delle parti sinistre delle dipendenze funzionali risultano non ridondanti;
- ogni dipendenza funzionale $X \rightarrow A$ in F tale che

  $F \equiv F - \{ X \rightarrow A \}$

  viene **eliminata**, in quanto risulta ridondante; in questo modo minimizziamo il numero di dipendenze funzionali.

Equivalenza

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Per ogni dipendenza esaminata al passo 2 dell'algoritmo per la copertura minimale:
- assumendo di indicare con F l' insieme che contiene la dipendenza originaria $A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_iA_{i+1} \ldots A_n \rightarrow A$ e con G l' insieme che contiene al suo posto la dipendenza $A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n \rightarrow A$, per verificare se $F \equiv G$ basta verificare se

$A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n \rightarrow A \in F^+$ (se $A \in (A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n)^+_{F;}$)

- se $A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n \rightarrow A \in F$, allora eliminiamo la dipendenza che stavamo esaminando
- se $A_1A_2 \ldots \ldots A_n \rightarrow A \in F$ e $Y \rightarrow A \in F$ con $Y \subseteq A_1A_2 \ldots A_n$, allora eliminiamo la dipendenza $A_1A_2 \ldots \ldots A_n \rightarrow A \in F$
- se $A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_iA_{i+1} \ldots A_n \rightarrow A \in F$ ma **non esiste** $Y \rightarrow A \in F$ con

$Y \neq A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_iA_{i+1} \ldots A_n$, allora è inutile provare ad eliminare attributi a sinistra della dipendenza;

- **non è necessario ricalcolare le chiusure** transitive degli attributi o di gruppi di attributi;

Riassumendo ...

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Per ogni dipendenza esaminata al passo 3 dell'algoritmo per la copertura minimale:
- assumendo di indicare con F l' insieme che contiene la dipendenza originaria $X \rightarrow A$ e con G l' insieme che non la contiene, per verificare se $F \equiv G$ basta verificare se $X \rightarrow A \in G^+$ (se $A \in (X)^+_G$)
- se $X \rightarrow A \in F$ ma **non esiste** $Y \rightarrow A \in F$ con $Y \neq X$, allora è inutile provare ad eliminare $X \rightarrow A$
- le chiusure transitive degli attributi o di gruppi di attributi **vanno ricalcolate**

Esempio 1

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Dato il seguente schema di relazione

$$R = (A, B, C, D, E, H)$$

e il seguente insieme di dipendenze funzionali

$$F = \{ AB \rightarrow CD, C \rightarrow E, AB \rightarrow E, ABC \rightarrow D \}$$

trovare **una** copertura minimale G di F

- Per trovare la copertura minimale, prima di tutto riduciamo le parti destre a singleton (passo 1)

$$F = \{AB \rightarrow C, AB \rightarrow D ,C \rightarrow E, AB \rightarrow E, ABC \rightarrow D\}$$

Esempio 1: passo 2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{AB \rightarrow C, AB \rightarrow D, C \rightarrow E, AB \rightarrow E, ABC \rightarrow D\}$

- Ora dobbiamo verificare se nelle dipendenze ci sono ridondanze nelle parti sinistre.
- Cominciamo dalla dipendenza $AB \rightarrow C$ e controlliamo se $A \rightarrow C$ appartiene a F^+, cioè se C appartiene a $(A)^+_F$.
- Provando ad applicare l'algoritmo non potremmo inserire nessun attributo nella chiusura di A, in quanto non ci sono dipendenze che abbiano nella parte sinistra il solo attributo A, quindi $(A)^+_F = \{A\}$. Lo stesso si verifica per B, cioè $(B)^+_F = \{B\}$, quindi la parte sinistra della dipendenza non può essere ridotta.
- Lo stesso si verifica per le dipendenze $AB \rightarrow D$ e $AB \rightarrow E$. Proviamo allora a ridurre $ABC \rightarrow D$. Poiché nell'insieme di dipendenze esiste $AB \rightarrow D$, possiamo non solo eliminare l'attributo C ma anche tutta la dipendenza risultante che è un duplicato. Alla fine di questo passo abbiamo un insieme

$G = \{ AB \rightarrow C, AB \rightarrow D, C \rightarrow E, AB \rightarrow E\}$ di dipendenze equivalente ad F, che quindi diventa il nostro nuovo F

Esempio 1: passo 3

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{ AB \to C, AB \to D, C \to E, AB \to E\}$

- Vediamo ora se questo insieme contiene delle dipendenze ridondanti.
- Intanto possiamo considerare che C viene determinato unicamente da AB, quindi eliminando la dipendenza $AB \to C$ non riusciremmo più ad inserirlo nella chiusura di AB rispetto al nuovo insieme di dipendenze. Lo stesso vale per D.
- Proviamo allora ad eliminare la dipendenza $C \to E$. Rispetto al nuovo insieme di dipendenze di prova $G = \{ AB \to C, AB \to D, AB \to E\}$ abbiamo che $(C)^+_G = \{C\}$ in cui non compare E. La dipendenza dunque deve rimanere.
- Proviamo infine ad eliminare $AB \to E$. Rispetto a $G = \{ AB \to C, AB \to D, C \to E\}$ abbiamo che $(AB)^+_G = \{A,B,C,D,E\}$ in cui E viene aggiunto al secondo passo dell'algoritmo per il calcolo della chiusura. Ciò significa che E **rientra comunque** nella chiusura di AB perché la dipendenza $AB \to E$, pur non comparendo in G, si trova in G^+, e quindi può essere eliminata.
- La **copertura minimale** di F è $G = \{AB \to C, AB \to D, C \to E\}$.

IMPORTANTE

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- E' importante rispettare l'ordine dei passi 2 e 3 in quanto, se generalmente il risultato è comunque corretto, ci sono casi in cui questo non è vero.
- Prendiamo ad esempio $F = \{AB \rightarrow C, C \rightarrow B, A \rightarrow B\}$

- Eseguendo i passi 2 e 3 nell'ordine corretto, abbiamo:
- 2- $(A)^+_F = \{A, B, C\}$, $(B)^+_F = \{B\}$ quindi l'unica riduzione possibile è da $AB \rightarrow C$ a $A \rightarrow C$ quindi $F=\{A \rightarrow C, C \rightarrow B, A \rightarrow B\}$

- 3- C viene determinato solo grazie a $A \rightarrow C$ quindi inutile provare a togliere questa dipendenza. Proviamo con $C \rightarrow B$. Calcoliamo $(C)^+_G$ con $G=\{A \rightarrow C, A \rightarrow B\}$. Abbiamo $(C)^+_G = \{C\}$ quindi la dipendenza non si può eliminare perché B non rientrerebbe nella chiusura di C. Proviamo con $A \rightarrow B$. Calcoliamo $(A)^+_G$ con $G=\{A \rightarrow C, C \rightarrow B\}$. Abbiamo $(A)^+_G = \{A, C, B\}$ quindi B rientra comunque nella sua chiusura e la dipendenza si può eliminare.

- Dunque la copertura minimale è $\boxed{G=\{A \rightarrow C, C \rightarrow B\}}$

IMPORTANTE

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$\boxed{F = \{AB \to C,\ C \to B,\ A \to B\}}$

- Eseguendo i passi 3 e 2 nell'ordine inverso, abbiamo:
- 3- C viene determinato solo grazie a $AB \to C$ quindi inutile provare a togliere questa dipendenza. Proviamo con $C \to B$. Calcoliamo $(C)^+_G$ con $G=\{AB \to C, A \to B\}$. Abbiamo $(C)^+_G = \{C\}$ quindi la dipendenza non si può eliminare perché B non rientrerebbe nella chiusura di C. Proviamo con $A \to B$. Calcoliamo $(A)^+_G$ con $G=\{AB \to C, C \to B\}$. Abbiamo $(A)^+_G = \{A\}$ quindi B non rientra nella chiusura e la dipendenza non si può eliminare. F rimane invariato.
- 2- $(A)^+_F = \{A, B, C\}$, $(B)^+_F = \{B\}$ quindi l'unica riduzione possibile è da $AB \to C$ a $A \to C$ quindi $\boxed{F=\{A \to C, C \to B, A \to B\}}$

- Avremmo finito ma **questa NON E'** una copertura minimale, perché viola la terza proprietà. Infatti $A \to B$ è tale che

$$\{A \to C, C \to B, A \to B\} \equiv \{A \to C, C \to B, A \to B\} - \{A \to B\}$$

(lo abbiamo verificato svolgendo l'esercizio nel modo giusto)

IMPORTANTE

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{AB \rightarrow C, C \rightarrow B, A \rightarrow B\}$

- Invertendo i passi, non abbiamo avuto modo di ridurre correttamente la parte sinistra di una dipendenza ($AB \rightarrow C$) che **presentava** una ridondanza. Questa ridondanza ha impedito di inserire l'attributo a destra (C) nella chiusura di un sottoinsieme della parte determinante ($A \subset AB$) e questo fatto a sua volta ha impedito d inserire per transitività ($C \rightarrow B$) la parte destra (B) di un'altra dipendenza con lo stesso attributo determinato ($A \rightarrow B$) che a questo punto sarebbe risultata (correttamente) ridondante

Esempio 2

- Dato il seguente insieme di dipendenze funzionali

  $$F = \{ BC \rightarrow DE,\ C \rightarrow D,\ B \rightarrow D,\ E \rightarrow L,\ D \rightarrow A,\ BC \rightarrow AL \}$$

  trovare una copertura minimale di F.

- **NOTA:** per calcolare la **copertura minimale non occorre** conoscere **R**

- Prima di tutto decomponiamo le parti **destre** delle dipendenze in F e otteniamo:

$$\boxed{F = \{ BC \rightarrow D,\ BC \rightarrow E\ ,\ C \rightarrow D,\ B \rightarrow D,\ E \rightarrow L,\ D \rightarrow A,\ BC \rightarrow A,\ BC \rightarrow L \}}$$

Esempio 2: passo 2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{ BC \rightarrow D, BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, BC \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

- Ora dobbiamo verificare se nelle dipendenze ci sono ridondanze nelle parti sinistre.
- Cominciamo dalla dipendenza $BC \rightarrow D$; dovremmo controllare se se $B \rightarrow D$ oppure $C \rightarrow D$ appartengono a F^+, cioè se $D \in (B)^+_F$ oppure $D \in (C)^+_F$. Notiamo però che **in F** abbiamo sia $C \rightarrow D$ che $B \rightarrow D$, quindi $BC \rightarrow D$ è sicuramente ridondante. La eliminiamo e il nostro F diventa

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, BC \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

Esempio 2: ancora passo 2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, BC \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

- Continuiamo con la dipendenza $BC \rightarrow E$; dobbiamo controllare se se $B \rightarrow E$ oppure $C \rightarrow E$ appartengono a F^+, cioè se $E \in (B)^+_F$ oppure $E \in (C)^+_F$. Applicando l'algoritmo della chiusura otteniamo:
- $(B)^+_F = \{B, D, A\}$ e $(C)^+_F = \{C, D, A\}$
- quindi non possiamo eliminare elementi a sinistra.
- In effetti bastava osservare che E compare a destra solo di questa dipendenza (**è determinato funzionalmente** solo da questa **coppia** di attributi) e quindi non avremmo potuto inserirlo nelle chiusure dei singoli attributi in nessun altro modo.
- Continuiamo con $BC \rightarrow A$. Abbiamo già calcolato le chiusure di B e C (**F non è cambiato** oppure **sarebbe un insieme equivalente**) , e in entrambe troviamo l'attributo A.
- **Attenzione**, questa volta le dipendenze $B \rightarrow A$ e $C \rightarrow A$ **non sono** in F, quindi non possiamo semplicemente eliminare $BC \rightarrow A$ ma va effettuata la sostituzione con **una delle due**

Esempio 2: ancora passo 2/1

- Esploriamo le due strade **alternative**

Questo significa che alla fine **potremmo avere due possibili coperture minimali**!

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, \mathbf{B \rightarrow A}, BC \rightarrow L \}$

- Continuiamo con la dipendenza $BC \rightarrow L$; dobbiamo controllare se se $B \rightarrow L$ oppure $C \rightarrow L$ appartengono a F^+, cioè se $L \in (B)^+_F$ oppure $L \in (C)^+_F$. Abbiamo già calcolato le chiusure di B e C, e verifichiamo che in nessuna delle due troviamo l'attributo L, quindi **non possiamo** eliminare elementi a sinistra.

Nota: In questo caso la verifica era necessaria, perché L appare a destra **di almeno un'altra dipendenza** e quindi avremmo potuto inserirlo tramite la **transitività**.

- Alla fine del passo 2 in questa esecuzione abbiamo quindi:

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, B \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

Esempio 2: passo 3/1

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, B \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

- Vediamo ora se questo insieme contiene delle dipendenze ridondanti.
- Intanto possiamo considerare che E **viene determinato unicamente** da BC, quindi eliminando la dipendenza $BC \rightarrow E$ non riusciremmo più ad inserirlo nella chiusura di BC rispetto al nuovo insieme di dipendenze.

- Proviamo allora ad eliminare la dipendenza $C \rightarrow D$. Rispetto al nuovo insieme di dipendenze di prova $G = \{BC \rightarrow E , B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, B \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$ abbiamo che $(C)^+_G = \{C\}$ in cui **non** compare D. <u>La dipendenza dunque deve rimanere.</u>

- Proviamo ad eliminare $B \rightarrow D$. Rispetto a $G = \{BC \rightarrow E , C \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, B \rightarrow A, BC \rightarrow L\}$ abbiamo che $(B)^+_G = \{B, A\}$ in cui **non** compare D. <u>La dipendenza dunque deve rimanere</u>.

- Proviamo ad eliminare $E \rightarrow L$. Rispetto a $G = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, D \rightarrow A, B \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$ abbiamo che $(E)^+_G = \{E\}$ in cui **non** compare L. <u>La dipendenza dunque deve rimanere</u>.

Esempio 2: ancora passo 3/1

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, B \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

- Proviamo ad eliminare $D \rightarrow A$. Rispetto a $G = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, B \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$ abbiamo che $(D)^+_G = \{D\}$ in cui non compare A. La dipendenza dunque deve rimanere.

- Proviamo ad eliminare $B \rightarrow A$. Rispetto a $G = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$ abbiamo che $(B)^+_G = \{B, D, A\}$ in cui **compare** A. La dipendenza dunque **può essere eliminata**.

Nota: nel passo 3, avevamo già calcolato la chiusura di B ma era rispetto ad un insieme G diverso, quindi andava ricalcolata).

- Quindi la nostra F diventa:

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

Esempio 2: ancora passo 3/1

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, \ BC \rightarrow L \}$

- Proviamo ad eliminare $BC \rightarrow L$. Rispetto a $G = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A\}$ abbiamo che $(BC)^+_G = \{B, C, E, D, A, L \}$ in cui **compare** L. La dipendenza dunque **può essere eliminata**.

Nota: questa volta la parte determinante della dipendenza è un **insieme** di attributi (BC)!

- Quindi la nostra F diventa:

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A\}$

- che è una **copertura minimale** della F **iniziale**

Esempio 2: ancora passo 2/2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Esploriamo la seconda **alternativa**

$F = \{ BC \to E , C \to D, B \to D, E \to L, D \to A, \mathbf{C \to A}, BC \to L \}$

- Continuiamo con la dipendenza $BC \to L$; dobbiamo controllare se se $B \to L$ oppure $C \to L$ appartengono a F^+, cioè se $L \in (B)^+_F$ oppure $L \in (C)^+_F$. Abbiamo già calcolato le chiusure di B e C, e verifichiamo che in nessuna delle due troviamo l'attributo L, quindi **non possiamo** eliminare elementi a sinistra.

- Alla fine del passo 2 in questa esecuzione abbiamo quindi:

$F = \{ BC \to E , C \to D, B \to D, E \to L, D \to A, C \to A, BC \to L \}$

Esempio 2: passo 3/2

Sapienza
Università di Roma
Dipartimento di Informatica

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, C \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

- Vediamo ora se questo insieme contiene delle dipendenze ridondanti.
- Intanto possiamo considerare che E **viene determinato unicamente** da BC, quindi eliminando la dipendenza $BC \rightarrow E$ non riusciremmo più ad inserirlo nella chiusura di BC rispetto al nuovo insieme di dipendenze.

- Proviamo allora ad eliminare la dipendenza $C \rightarrow D$. Rispetto al nuovo insieme di dipendenze di prova $G = \{BC \rightarrow E , B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, C \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$ abbiamo che $(C)^+_G = \{C, A\}$ in cui **non** compare D. La dipendenza dunque deve rimanere.

- Proviamo ad eliminare $B \rightarrow D$. Rispetto a $G = \{BC \rightarrow E , C \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, C \rightarrow A, BC \rightarrow L\}$ abbiamo che $(B)^+_G = \{B\}$ in cui **non** compare D. La dipendenza dunque deve rimanere.

- Proviamo ad eliminare $E \rightarrow L$. Rispetto a $G = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, D \rightarrow A, C \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$ abbiamo che $(E)^+_G = \{E\}$ in cui **non** compare L. La dipendenza dunque deve rimanere.

Esempio 2: ancora passo 3/2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, C \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

- Proviamo ad eliminare $D \rightarrow A$. Rispetto a $G = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, C \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$ abbiamo che $(D)^+_G = \{D\}$ in cui non compare A. La dipendenza dunque deve rimanere.

- Proviamo ad eliminare $C \rightarrow A$. Rispetto a $G = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$ abbiamo che $(C)^+_G = \{C, D, A\}$ in cui **compare** A. La dipendenza dunque **può essere eliminata**.
- Quindi la nostra F diventa:

$F = \{ BC \rightarrow E , C \rightarrow D, B \rightarrow D, E \rightarrow L, D \rightarrow A, BC \rightarrow L \}$

Esempio 2: ancora passo 3/2

$F = \{ BC \to E , C \to D, B \to D, E \to L, D \to A, \ BC \to L \}$

- Proviamo ad eliminare $BC \to L$. Rispetto a $G = \{ BC \to E , C \to D, B \to D, E \to L, D \to A\}$ abbiamo che $(BC)^+_G = \{B, C, E, D, A, \ L \}$ in cui **compare** L. La dipendenza dunque **può essere eliminata**.

- **Nota**: questa volta la parte determinante della dipendenza è un **insieme** di attributi (BC)!

- Quindi la nostra F diventa:

$F = \{ BC \to E , C \to D, B \to D, E \to L, D \to A\}$

- In questo caso abbiamo ottenuto la stessa **copertura minimale** della F **iniziale**

Esempio 3

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Dato il seguente insieme di dipendenze funzionali

$$F = \{ AB \to C, A \to E, E \to D, D \to C, B \to A\}$$

trovare una copertura minimale di F.

- Non c'è bisogno di decomporre le parti **destre** delle dipendenze in F che **sono già singleton.**

Esempio 3: passo 2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{AB \rightarrow C, A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}$

- Verifichiamo se la dipendenza $AB \rightarrow C$ ha attributi ridondanti a sinistra. Verifichiamo se $C \in (A)^+_F$ oppure $C \in (B)^+_F$.
- $(A)^+_F = \{A, E, D, C\}$ e $(B)^+_F = \{B, A, E, D, C\}$
- Quindi $AB \rightarrow C$ può essere sostituito con $A \rightarrow C$ **oppure** con $B \rightarrow C$
- Alla fine del passo 2 avremo

$F = \{A \rightarrow C, A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}$

oppure

$F = \{B \rightarrow C, A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}$

- Continuiamo i procedimenti **separatamente**

Esempio 3: passo 3/1

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{A \rightarrow C, A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}$

- Verifichiamo se la dipendenza $A \rightarrow C$ può essere eliminata e a tale scopo calcoliamo $(A)^+_G$ rispetto a $G=\{A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}$.
- Otteniamo che $(A)^+_G = \{A, E, D, \mathbf{C}\}$ quindi la dipendenza **può essere eliminata.**

$F = \{A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}$

- **Notiamo** che nessun attributo compare a destra **di più di una** dipendenza, quindi non potrebbe rientrare nelle chiusure della parti sinistre per transitività, quindi nessuna altra dipendenza può essere eliminata!
- **L'insieme** $F = \{A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}$
- È una **copertura minimale** dell'insieme F iniziale.

Esempio 3: passo 3/2

- Eseguiamo il calcolo secondo l'altra alternativa:

$$\boxed{F = \{B \rightarrow C, A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}}$$

- Verifichiamo se la dipendenza $B \rightarrow C$ può essere eliminata e a tale scopo calcoliamo $(B)^+_G$ rispetto a $G=\{A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}$.
- Otteniamo che $(B)^+_G = \{B, A, E, D, \mathbf{C}\}$ quindi la dipendenza **può essere eliminata.**

$$\boxed{F = \{A \rightarrow E, E \rightarrow D, D \rightarrow C, B \rightarrow A\}}$$

- Abbiamo ottenuto la stessa **copertura minimale** della F **iniziale.**
- **Nei compiti scritti basta seguire una delle alternative**

Esempio 4

- Dato il seguente insieme di dipendenze funzionali

$$F = \{ A \rightarrow B, A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}$$

trovare una copertura minimale di F.

- Non c'è bisogno di decomporre le parti **destre** delle dipendenze in F che **sono già singleton.**

- Anche le parti sinistre sono singleton, quindi passiamo direttamente al passo 3

Esempio 4: passo 3/1

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}$

- Proviamo ad eliminare $A \rightarrow B$. Avremo $G=\{A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}$ e $(A)^+_G = \{A, C, D, B\}$ che contiene B quindi possiamo eliminare la dipendenza

$F = \{A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}$

- Se un attributo compare a destra di un'unica dipendenza questa sicuramente non si potrà eliminare.
- Proviamo allora ad eliminare $C \rightarrow D$. Avremo $G = \{A \rightarrow C, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}$ e $(C)^+_G = \{C, A\}$ che non contiene D quindi la dipendenza **non si può eliminare.**
- Proviamo allora ad eliminare $B \rightarrow D$. Avremo $G = \{A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow B, C \rightarrow A\}$ e $(B)^+_G = \{B\}$ che non contiene D quindi la dipendenza **non si può eliminare.**
- **Una copertura minimale è**

$F = \{A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}$

Esempio 4: passo 3/2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$$\boxed{F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}}$$

- Proviamo ad eliminare prima $C \rightarrow D$. Avremo $G=\{A \rightarrow B, A \rightarrow C, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}$ e $(C)^+_G$ $=\{C, A, B, D\}$ che contiene D quindi possiamo eliminare la dipendenza

$$\boxed{F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}}$$

- Se un attributo compare a destra di un'unica dipendenza questa sicuramente non si potrà eliminare.
- Proviamo allora ad eliminare ora $A \rightarrow B$. Avremo $G = \{ A \rightarrow C, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D \}$ e $(A)^+_G$ $=\{A, C\}$ che non contiene B quindi la dipendenza **non si può eliminare.**
- Proviamo allora ad eliminare $D \rightarrow B$. Avremo $G = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}$ e $(D)^+_G$ $=\{D\}$ che non contiene B quindi la dipendenza **non si può eliminare.**
- **Una seconda possibile copertura minimale è**

$$\boxed{F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, D \rightarrow B, C \rightarrow A, B \rightarrow D\}}$$

- **e notiamo che questa volta le due coperture minimali ottenute sono <u>diverse</u>**

Esempio 4: verifichiamo?

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Abbiamo ottenuto due diverse coperture minimali, con la stessa cardinalità ma dipendenze diverse

$$\boxed{F1 = \{A \to C, C \to D, D \to B, C \to A, B \to D\}}$$

$$\boxed{F2 = \{A \to B, A \to C, D \to B, C \to A, B \to D\}}$$

- A scopo didattico, verifichiamo che i due insiemi di dipendenze sono equivalenti (sono entrambi equivalenti ad F iniziale!) cioè che $F1 \equiv F2$ cioè che $F1^+ = F2^+$ cioè che $F1^+ \subseteq F2^+$ e $\boldsymbol{F2^+ \subseteq F1^+}$, cioè ancora (per il lemma sulle chiusure di insiemi di dipendenze) che $F1 \subseteq F2^+$ e $F2 \subseteq F1^+$. Per queste verifiche possiamo usare il lemma sulla chiusura di un insieme di attributi.

- Le dipendenze $A \to C$, $D \to B$, $C \to A$, $B \to D$ sono in entrambi gli insiemi, e quindi nelle loro chiusure quindi è inutile verificare.

- F1 contiene $C \to D$ che non appartiene a F2, quindi verifichiamo se $C \to D$ appartiene a $F2^+$, cioè se D è in $(C)^+_{F2}$ e $(C)^+_{F2}$ ={C, A, B, D} quindi OK

- F2 contiene $A \to B$ che non appartiene a F1, quindi verifichiamo se $A \to B$ appartiene a $F1^+$, cioè se B è in $(A)^+_{F1}$ e $(A)^+_{F1}$ ={A, C, D, B} quindi OK

Esempio 5

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Dato il seguente insieme di dipendenze funzionali

  $F = \{ A B \rightarrow C, AD \rightarrow BC, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}$

  trovare una copertura minimale di F.

- Decomponiamo le parti **destre** delle dipendenze in F
- $F = \{ A B \rightarrow C, AD \rightarrow B, AD \rightarrow C, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}$

- Calcoliamo le chiusure degli attributi che compaiono nelle parti sinistre per capire se queste possono essere ridotte al passo 2
- $(A)^+_F = \{A\}$ $(B)^+_F = \{BD\}$ $(C)^+_F = \{C\}$ $(D)^+_F = \{D\}$

- Nessuno attributo da solo ha una chiusura che contiene la parte sinistra di una dipendenza da ridurre, quindi il passo 2 lascia F invariato

Esempio 5: passo 3/1

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$F = \{ A B \rightarrow C, AD \rightarrow B, AD \rightarrow C, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}$

- Proviamo ad eliminare prima $AB \rightarrow C$. Avremo $G=\{AD \rightarrow B, AD \rightarrow C, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}$ e $(AB)^+_G =\{A, B, D, C\}$ che contiene C quindi possiamo eliminare la dipendenza

$F = \{AD \rightarrow B, AD \rightarrow C, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}$

- Proviamo allora ad eliminare $AD \rightarrow B$. Avremo $G = \{AD \rightarrow C, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}$ e $(AD)^+_G =\{A, D, C, B\}$ che contiene B quindi quindi possiamo eliminare la dipendenza.

$F = \{AD \rightarrow C, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}$

- Se un attributo compare a destra di un´ unica dipendenza questa sicuramente non si potrà eliminare. Quindi non possiamo eliminare altre dipendenze.
- L'insieme $F = \{AD \rightarrow C, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}$
- **È una copertura minimale dell'insieme di dipendenze funzionali di partenza.**

Esempio 5: passo 3/2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

F = { A B→ C, AD → B, AD → C, AC → B, B → D}

- Proviamo ad invertire l'ordine delle dipendenze e a provare prima ad eliminare B → D. Avremo G={A B→ C, AD → B, AD → C, AC → B} e $(B)^+_G$ ={B} che **non contiene D** quindi **non possiamo eliminare la dipendenza.**
- Proviamo allora ad eliminare AC → B. Avremo G = {A B→ C, AD → B, AD → C, B→ D} e $(AC)^+_G$ ={A, C} che **non contiene B quindi non possiamo eliminare la dipendenza.**
- Proviamo ad eliminare AD → C. Avremo G = {A B→ C, AD → B, AC→ B, B→ D} e $(AD)^+_G$ ={A, D, B, C} che **contiene C quindi possiamo eliminare la dipendenza.** F = {A B→ C, AD → B, AC→ B, B→ D}
- Proviamo allora ad eliminare AD → B. Avremo G = {A B→ C, AC→ B, B→ D} e $(AD)^+_G$ ={A, D} che **non contiene B quindi non possiamo eliminare la dipendenza.**
- Se un attributo compare a destra di un'unica dipendenza questa sicuramente non si potrà eliminare. Quindi non possiamo eliminare altre dipendenze.
- L'insieme F = {A B→ C, AD → B, AC→ B, B→ D}

è una copertura minimale dell'insieme di dipendenze funzionali di partenza.

Esempio 5: verifichiamo?

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Abbiamo ottenuto due diverse coperture minimali, con cardinalità **diversa**

$$\boxed{F1 = \{AD \rightarrow C, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}}$$

$$\boxed{F2 = \{AB \rightarrow C, AD \rightarrow B, AC \rightarrow B, B \rightarrow D\}}$$

- A scopo didattico, verifichiamo che i due insiemi di dipendenze sono equivalenti utilizzando le stesse considerazioni dell'Esempio 4.

- Le dipendenze $AC \rightarrow B$ e $B \rightarrow D$ sono in entrambi gli insiemi, e quindi nelle loro chiusure quindi è inutile verificare.

- F1 contiene $AD \rightarrow C$ che non appartiene a F2, quindi verifichiamo se $AD \rightarrow C$ appartiene a $F2^+$, cioè se C è in $(AD)^+_{F2}$ e $(AD)^+_{F2} = \{A, D, B, C\}$ quindi OK

- F2 contiene $AB \rightarrow C$ che non appartiene a F1, quindi verifichiamo se $AB \rightarrow C$ appartiene a $F1^+$, cioè se C è in $(AB)^+_{F1}$ e $(AB)^+_{F1} = \{A, B, D, C\}$ quindi OK

- F2 contiene $AD \rightarrow B$ che non appartiene a F1, quindi verifichiamo se $AD \rightarrow B$ appartiene a $F1^+$, cioè se B è in $(AD)^+_{F1}$ e $(AD)^+_{F1} = \{A, D, C, B\}$ quindi OK