Lezione X - Chiusure

Prof.ssa Maria De Marsico
demarsico@di.uniroma1.it

Parte del materiale è tratto dal materiale preparato dalla prof.ssa Moscarini per il canale A-L

CHIUSURE

- **IMPORTANTE:** La chiusura di un insieme X di attributi (appartenenti ad uno schema R) si calcola SOLO E SEMPRE rispetto ad un insieme F di dipendenze (**quelle definite su R**), cioè **non ha senso** parlare di chiusura di un insieme di attributi **senza considerare le dipendenze definite sullo schema.**

- Infatti quando scriviamo X^+ stiamo lasciando **sottinteso** l'insieme F perché in un certo contesto è l'unico preso in considerazione (non sorge ambiguità). Quando possono sorgere ambiguità invece occorre menzionare **esplicitamente** l'insieme di dipendenze di riferimento con la notazione X^+_F

- A parità di sottoinsieme di R la chiusura cambia a seconda delle dipendenze.

- R= ABCD e calcoliamo A^+_F
  - Se $F=\{A\rightarrow B, B\rightarrow D\}$ allora $A^+_F = ABD$
  - Se $F=\{B\rightarrow C, C\rightarrow D\}$ allora $A^+_F = A$

DA DOVE SI PARTE 1

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

I concetti di base sono quelli di **istanza legale** di uno schema (rispetto ad un insieme di dipendenze F) e di di **chiusura di un insieme di dipendenze**

DEFINIZIONE: Una istanza di uno schema R è legale se soddisfa TUTTE le dipendenze di F

Di nuovo dobbiamo tenere in considerazione F !

Basta una dipendenza non soddisfatta per poter affermare che l'istanza **non è legale**

R=ABCD r=

A	B	C	D
a1	b1	c1	d1
a1	b2	c1	d1

Se $F=\{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \rightarrow D\}$ allora **r non è legale**

Se $F=\{C \rightarrow AD, B \rightarrow C\}$ allora **r è legale**

DA DOVE SI PARTE 2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

DEFINIZIONE: La **chiusura F^+ di un insieme di dipendenze F** è l'insieme di **TUTTE** le **dipendenze funzionali** soddisfatte da **OGNI istanza legale** (rispetto ad F)

Attenzione! Le definizioni non sono circolari …

Per determinare **se un'istanza è legale** è sufficiente verificare che soddisfi **le sole dipendenze in F**

MA

Una volta verificato ciò, possiamo affermare che soddisfa ANCHE tutte quelle nella chiusura

COME SI CALCOLA F^+ 1

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

La definizione stabilisce la proprietà principale di F^+, ma non ci dice come calcolare questa chiusura.

Per fortuna scopriamo (c'è un teorema!) che $F^+ = F^A$, che è la chiusura di Armstrong di un insieme di dipendenze F, che sappiamo calcolare in base agli assiomi omonimi

ATTENZIONE! Il calcolo di **F^A** è esponenziale (nel numero di attributi dello schema!). Basta guardare la proprietà riflessiva: ogni insieme di cardinalità **n** ha sottoinsiemi **2^n**.

Di conseguenza, il calcolo di F^+ è esponenziale (visto che sono di fatto lo stesso insieme)

COME SI CALCOLA F^+ 2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Quindi abbiamo una definizione «formale»

F^+ è l'insieme di dipendenze soddisfatte da ogni istanza legale di R

e una «operativa»

F^+ può essere calcolata usando gli assiomi di Armstrong

Alla seconda si arriva in due passi.

- 1 - si introduce **F^A**, e cioè gli assiomi e le regole che permettono di individuarne gli elementi
- 2 - si dimostra che questo **F^A** coincide proprio con **F^+**
- di conseguenza sappiamo anche calcolare **F^+**

COME SI CALCOLA F^+ 3

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Errore frequente all'esame: siccome il calcolo di F^+ è esponenziale, al suo posto calcoliamo F^A.

NO! STIAMO PARLANDO DELLO STESSO INSIEME!

Per evitare il calcolo esponenziale, in alcuni casi ben precisi possiamo utilizzare un altro concetto, che è quello della chiusura di un insieme di attributi

Errore frequente all'esame: F^+ vuoto

F^+ non è mai vuoto! Contiene almeno F ...

... e, anche se F dovesse essere VUOTO, grazie all'assioma della riflessività, contiene almeno le dipendenze funzionali tra insiemi di attributi di R e i loro sottoinsiemi (comprese le dipendenze tra singleton e sé stessi!)

CHIUSURA INSIEME ATTRIBUTI 1

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Come viene stabilita la relazione tra i due tipi di chiusura?

DEFINIZIONE: $X^+_F = \{A \mid X \rightarrow A \in F^A\}$

In pratica la chiusura di un insieme di attributi X è quell'insieme (**ancora di attributi**!) che vengono determinati da X attraverso le **dipendenze derivabili dagli assiomi di Armstrong,** quindi prima di tutto quelle in F **ma non solo**

Errore frequente all'esame: X^+_F vuoto

X^+_F non è mai vuoto! Grazie all'assioma della riflessività, contiene <u>almeno</u> gli elementi di X stesso

Non dimentichiamo il Lemma che ci dice che

$$X \rightarrow Y \in F^A \Leftrightarrow \forall A \in Y \text{ si ha che } X \rightarrow A \in F^A$$

CHIUSURA INSIEME ATTRIBUTI 2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Errore frequente all'esame: X^+_F definito in base all'algoritmo che lo calcola

NO! L'algoritmo che calcola X^+_F <u>segue</u> **la definizione formale**

Infatti la definizione NON SI DIMOSTRA, <u>ma abbiamo bisogno di un teorema</u> per dimostrare che l'algoritmo è corretto, cioè calcola effettivamente l'insieme definito, nè più nè meno

NOTA: la variabile Z che conterrà X^+_F viene inizializzata a X perché per l'assioma della riflessività X^+_F contiene <u>sempre</u> <u>almeno</u> X stesso

CHIUSURA INSIEME ATTRIBUTI 3

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Ricordiamo il teorema che dimostra che $F^+ = F^A$

Tutto ciò che riguarda la relazione tra X^+_F ed F^A **vale anche se consideriamo la relazione tra X^+_F e F^+**

In particolare, cosa ci interessa ?

Ci interessa il fatto che

$$\boxed{X \rightarrow Y \in F^+ \Leftrightarrow Y \in X^+_F}$$

PERCHE'?

Ricordiamo che il calcolo di F^+ <u>è esponenziale</u>

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali 1

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Due insiemi di dipendenze funzionali H e K sono **equivalenti** (**H** $\equiv$ **K**) se hanno la **stessa chiusura**, cioè se **$H^+=K^+$**

- **In pratica questo significa che ammettono lo stesso insieme di istanze legali**

- **Infatti:**
- \- se una istanza di relazione è **legale** rispetto ad H, **soddisfa tutte le dipendenze in H e di conseguenza tutte quelle in H^+**

- \- **se $H^+ = K^+$** (ci sono le STESSE dipendenze!) , allora l'istanza soddisfa **anche tutte le dipendenze in K^+** , ma **K** $\subset$ **K^+** e quindi l'istanza **sarà legale anche rispetto a K**

- **ATTENZIONE! In nessun caso questo implica H = K**

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali 2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Quando dobbiamo dimostrare che due insiemi di dipendenze H e K sono equivalenti (cioè hanno la stessa chiusura), cioè che $\mathbf{H^+=K^+}$

<u>dovremmo</u> dimostrare la **doppia inclusione**, cioè $\mathbf{H^+ \subseteq K^+}$ **e** $\mathbf{K^+ \subseteq H^+}$

Questo porterebbe a calcoli esponenziali:

trovare tutte le dipendenze in $\mathbf{H^+}$

trovare tutte le dipendenze in $\mathbf{K^+}$

verificare che ogni dipendenza in $\mathbf{H^+}$ sia anche in $\mathbf{K^+}$ e viceversa.

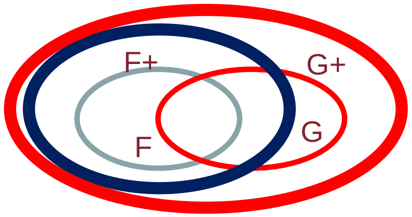
Ricorriamo a delle "**scorciatoie**" (che però sappiamo essere corrette per dimostrazione)

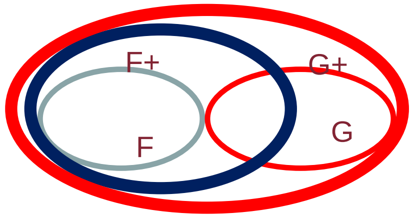
Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali 3

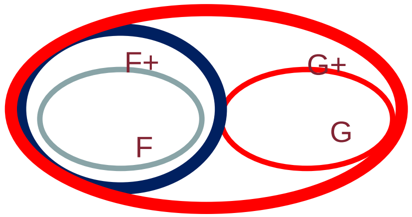
Ci basiamo prima di tutto sul **lemma** che dice che la chiusura I^+ di un insieme di dipendenze I è contenuta nella chiusura L^+ di un insieme di dipendenze L **se e solo se** I è contenuto in L+

NOTA: non è un caso se usiamo F e G, oppure H e K, oppure I e L … le proprietà di cui stiamo parlando! **valgono per QUALUNQUE coppia di insiemi di dipendenze** e usare lettere diverse in momenti diversi consente di evitare confusione

I







Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali 4

In base al lemma citato, per verificare se H^+ è contenuto in K^+ e se K^+ è contenuto in H^+, ci basta dimostrare che ogni dipendenza in H sta anche in K^+ (ma dovremmo calcolare K^+) e che ogni dipendenza in K sta anche in H^+ (ma dovremmo calcolare H^+).

Il problema sembra risolto a metà, perché comunque dovremmo **calcolare le due chiusure**.

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali 5

Invece possiamo usare una ulteriore "scorciatoia" che si basa appunto sulla definizione della chiusura di un insieme di attributi e sul relativo Lemma

$$X \rightarrow Y \in F^+ \Leftrightarrow Y \in X^+_F$$

Cioè $X \rightarrow Y \in F^+$ se e solo se **Y è contenuto in** X^+_F

Quindi per vedere se una dipendenza $V \rightarrow W$ di H è in **K⁺**, basta calcolare la chiusura di V rispetto all'insieme di dipendenze K : se in questo insieme troviamo anche W, allora la dipendenza di H sta anche in K+, altrimenti no

Vale il viceversa per le dipendenze in K

NOTA: dai ragionamenti precedenti, risulta che le chiusure di un insieme di attributi X rispetto a due insiemi di dipendenze equivalenti F e G sono uguali.

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali - decomposizioni 1

Nel caso della decomposizione di uno schema R su cui è definito un insieme di dipendenze F, vogliamo verificare che l'insieme di dipendenze G (**ottenuto applicando a F la medesima «decomposizione» definita per R**) sia equivalente all'insieme F originario.

Quindi **questo è un caso particolare** (ciò che dimostriamo **vale solo in questo caso**), in cui uno dei due insiemi di dipendenze è **proprio** quello ottenuto dalle proiezioni di F, che abbiamo chiamato G.

Anche in questo caso dobbiamo verificare che la sua chiusura G+ contiene le stesse dipendenze di F+… ma **possiamo sfruttare le particolarità di questo caso**.

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali - decomposizioni 2

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

In questo caso **sappiamo già** che **G è contenuto in F^+** per costruzione, e quindi G^+ è contenuto in F^+ per il lemma. Ci manca di dimostrare che F^+ è contenuto in G^+

Sempre per lo stesso lemma **basta dimostrare che F è contenuto in G^+.** Quindi prendiamo le **dipendenze in F** una per una e verifichiamo **se sono in G+** (come al solito calcolando le chiusure delle parti sinistre per vedere se ci sono le parti destre).

Per fare questa verifica **dovremmo calcolare G^+**, quindi dovremmo conoscere G … ma G viene dall'unione delle proiezioni di F, che contengono dipendenze di F^+ … quindi **dovremmo conoscere F^+** … ma questo calcolo è esponenziale!

L'algoritmo (di cui dimostriamo la correttezza) ci permette di calcolare la chiusura $\mathbf{X^+_G}$ di un insieme di attributi X rispetto a G utilizzando **indirettamente F^+** attraverso **le chiusure rispetto a F** di sottoinsiemi di attributi che partono da X (vedi quanto detto in precedenza)

Ultima scorciatoia: possiamo **evitare di verificare** le dipendenze in F che hanno l'unione di parte destra e sinistra in un sottoschema, **perché quelle sono per definizione in G** (e quindi in G+).

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali - copertura minimale 1

In alcuni casi è opportuno usare, invece dell'insieme di dipendenze originario F, un insieme che ne sia una copertura minimale (può essercene più di una), che si ottiene seguendo tre passi.

L'insieme finale che si ottiene (la copertura minimale) **deve essere equivalente** a (avere la stessa chiusura di) quello di partenza.

Il primo passo della procedura consiste nell'avere tutti i determinati (parti destre) ridotti a singleton; questo è banale perché la decomposizione vale sempre.

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali - copertura minimale 2

Nel secondo passo e nel terzo passo, dobbiamo essere sicuri di sostituire **sempre** un insieme di dipendenze (**all'inizio quello originario**) con uno **equivalente** (**stessa chiusura**)

Questa considerazione vale anche per il terzo passo.

Anche questi **due casi**, **ognuno in modo diverso**, sono dei **casi particolari** in cui la verifica dell'equivalenza è semplificata, perché ogni volta **l'insieme di partenza e quello di arrivo differiscono per una sola dipendenza.**

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali - copertura minimale 3

Nel secondo passo, si modificano **una per volta** le dipendenze, se possibile, riducendo la parte sinistra. Cioè si passa da una dipendenza f ad una dipendenza g che ha a sinistra un attributo in meno.

Per ogni verifica occorre tenere conto che tra F che contiene f di partenza e G ottenuto sostituendo f con g c'è **questa sola differenza** mentre tutte le altre sono UGUALI.

Quindi, con un ragionamento analogo a quello precedente, basterebbe verificare che f sta anche nella chiusura di G e che g sta nella chiusura di F. In **entrambi i casi** lo farei calcolando le **chiusure delle parti sinistre** per vedere se trovo la parte destra, ma rispetto all'insieme che contiene L'ALTRA dipendenza (cioè dovrei calcolare la chiusura della parte sinistra originaria rispetto a G, e della parte sinistra ridotta rispetto a F).

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali - copertura minimale 4

La prima condizione, **in questo caso**, è **sempre verificata** … quindi inutile da verificare ...

Supponiamo di avere una dipendenza f = ABC→ D, e di voler provare a ridurla in una g = AB→D Nell'algoritmo che calcola la chiusura della parte sinistra di f (in questo caso ABC) rispetto al nuovo insieme di dipendenze in cui ho g = AB-->D, è ovvio che mettendo all'inizio Z=ABC, per come funziona l'algoritmo della chiusura di un insieme X, potrò SUBITO SICURAMENTE usare AB-->D (AB è OVVIAMENTE contenuto in Z ...) e inserire D nella chiusura.

Resta da verificare l'altra inclusione, cioè che, nel nostro esempio, g= AB--> D sta nella chiusura dell'insieme F dove ho **SOLO** ABC-->D. Per fare questo, calcolo la chiusura di AB sempre con lo stesso algoritmo. Questa volta Z=AB, quindi D lo potrò inserire solo se ad un certo punto sarò riuscito **anche** a inserire prima C.

NOTA: Poiché le chiusure utili sono calcolate rispetto all'insieme originario F, o rispetto ad uno ottenuto nel corso della procedura ma SICURAMENTE equivalente a F, **le chiusure degli insiemi di attributi non devono essere ricalcolare perché rimangono le stesse**.

Equivalenza di insiemi di dipendenze funzionali - copertura minimale 5

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Il terzo passo segue un ragionamento analogo, perché **anche in questo caso l'insieme di partenza e quello ottenuto differiscono per una sola dipendenza**.

Questa volta in G **MANCA** una certa dipendenza f, quindi uno dei due versi comunque viene a mancare. Devo solo verificare che la **dipendenza f che ho tolto** sia nella **chiusura dell'insieme G in cui non è presente esplicitamente**.

Quindi occorre calcolare la chiusura della parte sinistra di f rispetto a G, dove f manca.

NOTA: questa volta la chiusura è calcolata rispetto all'insieme G, che non sappiamo ancora essere equivalente all'insieme di partenza, quindi **le chiusure degli insiemi di attributi vanno ricalcolate perché potrebbero cambiare** (**se G non è equivalente** all'insieme di partenza)

NOTA: alla fine di ogni riduzione, in ognuno dei tre passi, l'insieme di dipendenze viene eventualmente modificato ed al prossimo passaggio si utilizza quello nuovo.