1 Integrali multipli e curvilinei

1.0.1 Coordinate

Coordinate polari

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos\theta \\ y = y_0 + \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \rho$$

Coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho a \cos\theta \\ y = y_0 + \rho b \sin\theta \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = ab\rho$$

L'equazione canonica ellisse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

2 Analisi complessa

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, z_k) Res(f, z_k) \tag{1}$$

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left| \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right] \right|_{z=z_0} \tag{2}$$

Se $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ con g e h olomorfe e z_0 una singolarità di ordine 1 allora:

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \tag{3}$$

2.1 Calcolo di integrali reali con i residui

1. Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi tali che $grado(Q(x)) - grado(P(x)) > 1$ con $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Vale che:

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) \tag{4}$$

Dove le singolarità z_k sono tali che $Im(x_k) > 0$ per ogni $k = 0, 1, 2 \ldots n-1$

2. Sia dato il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} g(\sin\theta, \cos\theta) d\theta \tag{5}$$

Sostituendo:

$$\sin\theta = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$
$$\cos\theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

Risulta che:

$$\int_0^{2\pi} g(\sin\theta, \cos\theta) d\theta = \int_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\left(\frac{f(z)}{iz}, z_k\right) \tag{6}$$

Dove le singolarità z_k sono tali che $|(x_k)| < 1$ per ogni $k = 0, 1, 2 \ldots n - 1$

3.
$$\int_\infty^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) dx = Re\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\left(\frac{P(x)}{Q(x)} e^{aiz}, z_k\right)\right) \tag{7}$$
$$\int_\infty^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax) dx = Im\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\left(\frac{P(x)}{Q(x)} e^{aiz}, z_k\right)\right) \tag{8}$$

Dove le singolarità z_k sono tali che $Im(x_k) > 0$ per ogni $k = 0, 1, 2 \ldots n-1$

3 Trasformata di Laplace

3.1 Trasformate di funzioni elementari

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \tag{9}$$

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \tag{10}$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \tag{11}$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \tag{12}$$

$$\mathcal{L}[\sinh(at)](s) = \frac{a}{s^2 - a^2} \tag{13}$$

$$\mathcal{L}[\cosh(at)](s) = \frac{s}{s^2 - a^2} \tag{14}$$

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{15}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)](s) = e^{-st_0} \tag{16}$$

3.2 Proprietà

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a) \tag{17}$$

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s) \tag{18}$$

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{19}$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(F(s)) \tag{20}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(s)](s) = s^n F(s) - s^{n-1}f_+(0^+) - s^{n-2}f'_+(0)\cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{21}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dx\right] = \frac{F(s)}{s} \tag{22}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(t)] = \sum_{k=1}^{n} Res(F(s)e^{st}, s_k) \tag{23}$$

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] \tag{24}$$