1 Definizione di trasformata di Fourier

$$X(f) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{1}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[X(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \tag{2}$$

2 Proprietà principali della trasformata di Fourier

Sia $X(f)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$. Allora valgono le seguenti proprietà:

Inversione di segno

$$\mathcal{F}[x(-t)] = X(-f) \tag{3}$$

Proprietà di dualità

$$\mathcal{F}[X(t)] = x(-f) \tag{4}$$

Cambiamento di scala

$$\mathcal{F}[x(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{f}{\alpha}\right) \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{5}$$

Integrazione nel tempo

$$\mathcal{F}\left[\int x(t)dt\right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} \tag{6}$$

Derivazione nel tempo

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = X(f)(j2\pi f)^n \tag{7}$$

Derivazione in frequenza

$$\mathcal{F}[(-t)^k x(t)] = \frac{1}{(j2\pi)^k}\frac{d^k}{df^k}X(f) \qquad \forall f \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Traslazione in frequenza

$$\mathcal{F}[x(t)e^{j2\pi f_0 t}] = X(f - f_0) \qquad \forall f_0 \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Traslazione nel tempo

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = X(t)e^{-j2\pi f t_0} \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R} \tag{10}$$

Proprietà di convoluzione

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{11}$$

$$\mathcal{F}[y(t)] = Y(f) = X(f)H(f) \tag{12}$$

3 Trasformate di Fourier notevoli

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \qquad \overset{\text{Dualità}}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \qquad \mathcal{F}[1] = \delta(t)$$

$$\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \delta(f - f_0)$$

$$\mathcal{F}[rect(t)] = sinc(f) \qquad \overset{\text{Dualità}}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \qquad \mathcal{F}[sinc(t)] = rect(f)$$

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \quad \alpha > 0 \qquad \overset{\text{Dualità}}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{\alpha + j2\pi t}\right] = e^{\alpha f} \quad \alpha > 0$$

$$\mathcal{F}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \quad \alpha > 0 \qquad \overset{\text{Dualità}}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{\alpha - j2\pi t}\right] = e^{-\alpha f} \quad \alpha > 0$$

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha|t|}] = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad \alpha > 0 \qquad \overset{\text{Dualità}}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \qquad \mathcal{F}\left[\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2}\right] = e^{-\alpha|f|} \quad \alpha > 0$$

$$\mathcal{F}[sgn(t)] = \frac{1}{j\pi f} \quad \forall f \qquad \overset{\text{Dualità}}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{j\pi t}\right] = -sgn(f)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = -j\pi sgn(f) \quad \forall f \qquad \overset{\text{Dualità}}{\overbrace{\Leftrightarrow}} \qquad \mathcal{F}\left[-j\pi sgn(t)\right] = -\frac{1}{f}$$

4 Segnali fondamentali

Gradino unitario

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & \forall t > 0 \end{cases}$$

Segno

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & \forall t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & \forall t > 0 \end{cases}$$

Impulso rettangolare unitario

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} & t = -\frac{T}{2}, t = \frac{T}{2} \\ 0 & t < -\frac{T}{2}, t > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Segnale sinc

$$sinc\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Segnale gaussiano unitario

$$gauss\left(\frac{t}{T}\right) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2}$$

Segnale unitario a decadimento esponenziale

$$u_e\left(\frac{t}{T}\right) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

Segnale a rampa

$$ramp\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{t}{T} u(t)$$

5 Teoria (presa dagli esercizi)

- Due segnali che abbiano spettri disgiunti in frequenza sono necessariamente ortogonali.

6 Codici

6.1 Teoria

Definizione dei concetti di *dataword* e *codeword* In un codice a blocchi, il data stream è segmentato in vettori di k bit detti ***dataword*** e viene posto in ingresso al codificatore il quale fornisce in uscita un vettore di n bit detto ***codeword***. Quindi in un **codice a blocchi (n,k)** le *dataword* consistono in k bit e le *codeword* in n bit.

Codificatore sistematico Un codificatore si dice **sistematico** quando i primi k bit di ogni *codeword* coincidono con i k bit della *dataword*; in tal caso i rimanenti $n-k$ bit verranno utilizzati come controlli di parità sui k bit d'informazione. Un codificatore sistematico è definito anche come codificatore *senza memoria*.

Teorema rilevazione errore Un codice lineare a blocchi (n, k) con distanza minima d_{min} può rilevare tutti i vettori errore di peso non maggiore di:

$$r = d_{min} - 1 \tag{13}$$

Teorema correzione errore Un codice lineare a blocchi (n, k), con distanza minima d_{min}, può correggere tutti i vettori d'errore contenenti un numero di errori non maggiore di:

$$t = \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor \tag{14}$$

dove $\lfloor a \rfloor$ denota il più grande intero contenuto in a. Si dice anche che un codice a blocchi (n, k) con distanza minima d_{min} è un codice a correzione di t errori (*t-error correcting code*), o codice (n, k, t).

Codice lineare a blocchi ciclico Un codice lineare a blocchi (n, k) è **ciclico** se e solo se ogni traslazione ciclica di una *codeword* produce un'altra *codeword*. Analizziamo due esempi:

BCH (Bose-Chauduri-Hocquenghem) Sono codici ciclici **non necessariamente binari** che costituiscono una generalizzazione dei codici di Hamming. Si ha che:

$$BCH(n, k) \Rightarrow n = 2^m - 1, \qquad n - k \leq mt, \qquad d_{min} \geq 2t + 1 \qquad \text{con } m \geq 3 \tag{15}$$

dove m è un numero intero positivo mentre t indica il numero di errori correggibili.

RS (Reed Solomon) Cono codici ciclici **non binari** che rappresentano una sottoclasse dei codici BCH non-binari. Si ha che:

$$RS(n, k) \Rightarrow n = 2^m - 1, \qquad n - k = 2t, \qquad d_{min} = n - k + 1 \tag{16}$$

dove m è un numero intero positivo mentre t indica il numero di errori correggibili.

Codifica di canale La **codifica di canale** è un'operazione finalizzata ad aggiungere *ridondanza* e *memoria* all'informazione trasmessa così da rivelare e/o correggere errori. Ad esempio, ogni k bit informativi si generano blocchi di n bit codificati. Quando utilizziamo una codifica di canale dobbiamo prestare attenzione a:

- La sorgente trasmette un flusso di bit di informazione alla frequenza f_b (*frequenza di bit*) con un energia pari E_b (*energia di bit*);
- Il codificatore applica una codifica (n, k) con un efficienza di codifica pari a $R_c = \frac{k}{n}$;
- Il codificatore, dopo aver applicato una codifica (n, k), trasmette un flusso di bit informativi codificati alla frequenza f_c (*frequenza bit codificati*) con un energia pari a $E_b^{(c)}$ (*energia di bit codificato*) dove:

$$E_b^{(c)} = E_b \frac{k}{n} \tag{17}$$

Più in generale si ha che:

$$E_b^{(c)} = E_b \frac{\text{Bit informativi totali}}{\text{Bit informativi totali} + \text{Bit totali con codifica}} \tag{18}$$

dove:

$$\text{Bit totali codificati} = \frac{\text{Bit codificati} \cdot (n - k)}{k} \tag{19}$$

Probabilità di non sbagliare Supponiamo che la sorgente trasmetta un flusso di bit informativi con una certa frequenza ed energia di bit. Definiamo **probabilità di errore sui bit** come segue:

$$P_b = \frac{e^{-\frac{E_b}{n_0}}}{3\pi} \tag{20}$$

Applicando una codifica (n, k), definiamo **probabilità di errore sui bit codificati** come segue:

$$P_{bc} = \frac{e^{-\frac{E_b^{(c)}}{n_0}}}{3\pi} = \frac{e^{-\frac{E_b}{n_0}\frac{k}{n}}}{3\pi} \tag{21}$$

In generale la probabilità di avere i bit errati su un totale di n bit totali codificati è pari a:

$$P(X = i) = \binom{n}{i}(P_{bc})^i(1 - P_{bc})^{n-i} \tag{22}$$

Se il codificatore applica una codifica capace di correggere t errori possiamo definire **la probabilità di non sbagliare** P_{ns} come segue:

$$P_{ns} = \sum_{c=0}^{t} \binom{n}{t}(P_{bc})^t(1 - P_{bc})^{n-t} \tag{23}$$

Infine se P_{bc} è sufficientemente piccola possiamo dire che:

$$P_b = P_{ns}\frac{2t + 1}{n} \tag{24}$$

Ricorda che quando utilizzo una codifica **a PARITA' di probabilità di errore** sui bit d**iminuisce l'energia per bit** disponibile poiché **aumenta** il numero di bit trasmessi. In tal caso si parla infatti di **guadagno di codifica** cioè la differenza (in decibel) nel valore di $\frac{E_b}{n_0}$ richiesto per ottenere una data probabilità di errore sui bit tra una trasmissione binaria antipodale non codificata e quella codificata.

6.2 Riepilogo grandezze fisiche utilizzate

Banda lorda $B_{\textbf{lorda}}$ **dove** $B_{\textbf{lorda}} = B_{\textbf{netta}}(1 + \textbf{roll-off})$

Frequenza di bit f_b (bit/s)

Frequenza di simbolo f_s $(simboli/s)$ **con** $f_s = \frac{f_b}{log_2(N)}$

Occupazione di banda B (Hz)

Quantità di simboli utilizzati N **costituiti da** $log_2(N)$ **bit**

Tempo di simbolo T_s **con** $T_s = \frac{1}{f_s}$

Tempo di bit T_b **con** $T_s = \frac{1}{f_b}$

Energia media di simbolo E_s **con** $E_s = PT_s = \frac{P}{f_s}$ **e** $E_s = \frac{E_b f_b}{f_s}$

Energia media di bit E_b **con** $E_b = PT_b = \frac{P}{f_b}$ **e** $E_b = \frac{E_s f_s}{f_b}$

Banda minima in *banda base* $B_{min} = \frac{1}{2T_s}$

Banda minima nelle modulazioni lineari ASK, PSK, QAM e DSB $B_{min} = f_s = \frac{f_b}{log_2(N)}$

Banda minima per il segnale in modulazione $B_{min} = \dfrac{1}{T_s}$

Densità spettrale di rumore n_0

Rapporto segnale rumore $SNR = \dfrac{P}{n_0 B}$

Bit Error Ratio BER **indicato anche come** P_b **(Probabilità di errore sul bit)**

Probabilità di ritrasmissione indicato spesso con P_{ARQ} **dove** $(1 - P_{ARQ}) = (1 - P_b)^{\mathbf{bit}}$

Parametro γ**, dove** $\gamma = \dfrac{E_b}{n_0}$

Un canale con trasmissione binaria antipodale $\Rightarrow 2PSK$

6.3 Modulazioni

Le modulazioni "traslano" l'informazione di banda base in **banda traslata** cioè bit o gruppi di bit da trasmettere sono associati a variazioni discrete dei parametri della portante trasmissiva (ampiezza, fase o frequenza), così che il ricevitore possa ricostruirli a partire dalla portante modulata ricevuta.

Il modulatore emette, con **frequenza di simbolo** f_s (simboli/s) un "segnale" scelto tra M disponibili (più propriamente, scelto tra M variazioni discrete di ampiezza, di fase o di frequenza), associandolo a gruppi di simboli binari costituiti da $log_2(N)$ bit.

L'occupazione di banda B è legata direttamente alla frequenza di simbolo: la banda minima è Bmin= 2·fN= fs

$$B_{min} = 2f_N = f_s = \frac{f_b}{log_2(N)} \tag{25}$$

dove f_N è la metà della frequenza di simbolo.

Modulazioni di ordine superiore richiedono $\dfrac{E_b}{n_0}$ maggiori a **PARITA' di probabilità di errore** ma sono più efficienti in banda, cioè consentono data rate maggiori.

2 PSK

$$N = 2 \qquad P_b = \frac{e^{-\gamma}}{3\pi} \qquad B_{min} = f_s = \frac{f_b}{log_2(2)} = f_b$$

4 PSK

$$N = 4 \qquad P_b = \frac{e^{-\gamma}}{3\pi} \qquad B_{min} = f_s = \frac{f_b}{log_2(4)} = \frac{f_b}{2}$$

8 PSK

$$N = 8 \qquad P_b = \frac{e^{-\gamma}}{3\pi} \qquad B_{min} = f_s = \frac{f_b}{log_2(8)} = \frac{f_b}{3}$$

16 QAM

$$N = 16 \qquad P_b = \frac{3}{4}\frac{e^{-\dfrac{2\gamma}{5}}}{3\pi} \qquad B_{min} = f_s = \frac{f_b}{log_2(16)} = \frac{f_b}{4}$$

64 QAM

$$N = 64 \qquad P_b = \frac{2}{3}\frac{e^{-\dfrac{\gamma}{7}}}{3\pi} \qquad B_{min} = f_s = \frac{f_b}{log_2(64)} = \frac{f_b}{6}$$

256 QAM

$$N = 256 \qquad P_b = \frac{2}{4}\frac{e^{-\dfrac{\gamma}{20}}}{3\pi} \qquad B_{min} = f_s = \frac{f_b}{log_2(256)} = \frac{f_b}{8}$$

7 Alcuni appunti

$$\frac{d}{dt}abs(t) = sgn(t)$$

$$\frac{sgn(t)}{abs(t)} = \frac{1}{t}$$