

Introduzione alle moltiplicazioni e fatti

Con le matrici si possono fare le seguenti cose:

- Somme tra matrici
- Prodotto tra due matrici è uno scalare
- Prodotto tra matrici (solo quando il numero di righe delle prime è uguale al numero di colonne delle seconde)

$$O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$A + O = A$$

$$O + A = A$$

$$A + (-A) = O$$

nelle somme lo O è una matrice nulla anche detta "identità"

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,m}(R)$$

$$\frac{1}{0}$$

$\xrightarrow{\text{id}_N}$ queste sono matrici chiamate "identità" che rendono vere queste cose

$$\text{id}_N \cdot A = A$$

$$A \cdot \text{id}_N = A$$

E' vero $\forall A \in \mathbb{M}_{m,m}(R) \exists B \in \mathbb{M}_{m,m}(R)$ tale che $A \cdot B = \text{id}_N = BA$?

- Se A ammette un tale elemento B , B si chiama l'inverso di A , e si scrive A^{-1}

Forma di echelon: una matrice $A \in \mathbb{M}_{m,m}(R)$ si dice in forma di echelon

- se tutte le righe nulle sono in fondo

- se in ogni riga il primo elemento non zero da sinistra (primo) è alle destra di tutti i primi delle righe superiori (ha tutti zero sotto)

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

è in forma di echelon

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ non è in forma di echelon}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è in forma di echelon}$$

Forme di echelon ridotte: se

- in forme di echelon
- tutti i pivot sono uguali ad 1
- ogni Pivot è l'unico elemento non-zero delle sue colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ queste sono in forme di echelon ridotte}$$

Metodo di Gauß-Jordan

Servire per trasformare una matrice in una matrice di echelon e poi in una matrice di echelon ridotta

$$A = \left\{ \begin{matrix} e_1 & \dots & e_m \\ e_{m+1} & \dots & e_{mn} \end{matrix} \right\} \in M_{m,n}(R)$$

Per convertire una matrice di echelon dobbiamo rispettare le seguenti regole (lavoriamo solo sulle righe)

- Scambio tra righe
- Moltiplicare ogni riga per uno scalare non nullo
- Sommare a una riga una combinazione lineare tra le altre righe

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_3 = x_3 - x_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 \leftrightarrow x_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_2 \rightarrow \frac{x_2}{3} \\ x_3 \rightarrow \frac{x_3}{3} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

forme di echelon

$$x_1 \rightarrow x_1 - 4x_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 & 0 & 0 & 5 - \left(4 \cdot \frac{2}{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Queste regole sono applicabili e qualsiasi matrice

Sottomatrice

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Una sottomatrice di A è la matrice che si ottiene prendendo le intersezioni di m' righe ed n colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne scelte casualmente

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

numeri delle intersezioni tra matrici

Metodo di Gauß-Jordan

- 1) Trovare il primo elemento non nullo nelle prime colonne se non esiste poniamo alle seconde e così via
traverso nel passaggio precedente
- 2) Scomponiamo x_i con x_1 . In questo modo abbiamo il pivot in posizione $(1,1)$
- 3) Sostituisci x_i con $x_i - c_{1i}x_1$. Quindi $c_{11} = 1$
- 4) Per ogni $i > 1$. Sostituisci x_i con $x_i - c_{1i}x_1$
- 5) In questo modo la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$
- 6) Ripeti i passaggi 1-5 per la sottomatrice
- 7) Ripeti fino a che non scoppia l'ultima riga o l'ultima colonna
- 8) Ottieniamo una matrice C in forme di Echelon con tutti i pivot uguali a 1
- 9) Se c_{LK} è l'ultimo pivot. Per ogni $i < L$ sostituisci x_i con $x_i - c_{ik}x_L$
- 10) Ripeti 9 per tutti i pivot dal basso verso l'alto
- 11) Ottieniamo una matrice D in forme di echelon ridotta

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad r_1 \rightarrow r_1 - r_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$r_2 \rightarrow r_2 - 3r_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad r_2 \rightarrow r_2 / 3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_3 \rightarrow r_3 + r_2 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r_1 \rightarrow r_1 + 2r_3 \\ r_2 \rightarrow r_2 - r_3 \end{array}$$

Forme di eccezione

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad C_{2,1K} = C_{3,1K}$$

$$R_1 = R_1 - C_{1,4} R_3 \rightarrow R_1 = R_1 + 2R_3$$

$$R_2 = R_2 - C_{2,4} R_3 \rightarrow R_2 = R_2 - R_3$$

Rango di una matrice

$A \in \mathbb{K}_{m,m}(\mathbb{R})$ il rango di A è il numero di pivot delle sue forme di echelon. $\text{rk } A$ (rank A)

$$0 \leq \text{rk } A \leq \min(m, n)$$

Si dice che A ha rango massimo se $\text{rk } A = \min(m, n)$

Calcoliamo l'insieme delle matrici $A \in \mathbb{K}_{m,m}(\mathbb{R})$ (solo per le matrici quadrate)

$$(A \mid \text{id}_n) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \dots & e_m \\ 1 & & \\ 0_{m,1} & \dots & e_m \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \ddots \\ & 1 \end{array} \right)$$

Dopo Gauss-Jordan

$$\left(D \mid D \right) \quad \text{Se } D = \text{id}_m \text{ allora } D^{-1} = A^{-1}$$

\downarrow

$$\left(\text{id}_m \mid A^{-1} \right)$$

Se $D \neq \text{id}_m$ allora A non invertibile

Ottieniamo l'identità se $\text{rk } A = m$

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

un solo pivot \neq de m

non invertibile
per $\text{rk } A = 1 \neq m = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\boxed{A^{-1}} = A$

$$A \cdot A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

Esempio delle Rangagne

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \rightarrow r_2 - \frac{1}{2}r_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$