V spazio vettoriale

$f: V \longrightarrow V$ end.

fissiamo B base di V $\dim V = n$

f è rappresentato da $[M(f)]_B^B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

- esiste una base B tale che $[M(f)]_B^B$ è diagonale?

DEFINIZIONI

- Se una tale base esiste, f si dice diagonalizzabile (o semplice)

B' base di V

$$[M(f)]_{B}^{B'} = B^{-1} \cdot [M(f)]_B^B \cdot B$$

- Una matrice $M_{n,n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se $\exists\, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibile tale che $B^{-1} \cdot M \cdot B$ è diagonale

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot e_i$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i esima posizione}$$

$M \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ cerchiamo i vettori $V \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$M \cdot V = \underset{\substack{\nearrow \\ \text{autovalore}}}{\lambda} \cdot \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{autovettore}}}{V} \quad , \text{ per qualche } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$M \cdot V - \lambda V = 0$$

$$\parallel$$

$$M \cdot V - \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \cdot V = \overbrace{\left(M - \lambda \cdot id \right)}^{M_{n,n}(\mathbb{R})} \cdot V = 0$$

vuol dire che V è nel ker

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow M - \lambda\, id_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} - \lambda \\ \vdots & & \\ a_{n1} - \lambda & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\ker\left(M - \lambda\, id \right) = V_\lambda \subseteq V$$

Per quali valori di λ, $V_\lambda \neq \{0\}$?

Un autovalore è un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $V_\lambda \neq \{0\}$

Se λ è un autovalore, $v \in V_\lambda$ è detto un autovettore di M relativo a λ

V_λ è detto autospazio di M relativo a λ

il $\ker = \{0\} \Leftrightarrow RK$ è massimo $\Leftrightarrow \det \neq 0$

il $\ker \neq \{0\} \Leftrightarrow RK$ non è massimo $\Leftrightarrow \det = 0$

$$\det(M - \lambda \cdot id) = P(\lambda) = 0$$

polinomio caratteristico di M

ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = M \qquad M - \lambda \cdot id_3 \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 5 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

calcolo il $\det(M - \lambda \cdot id_3)$ con sarrus (faccio i calcoli)

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda - 20 = 0$$ ← risolvendola trovo gli autovalori

polinomio caratteristico di M

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow A - \lambda \cdot id_2 \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$ ← autovalori

$$\begin{pmatrix} -\frac{3+\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \frac{3+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$$

SOSTITUISCO IL RISULTATO NELLA MATRICE AL POSTO DI λ

• Proposizione: Gli autovalori di M sono le soluzioni dell'equazione

$P(\lambda) = 0$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \rightsquigarrow \quad M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$M(f) - \lambda \cdot id_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \lambda^2 + 1 = 0$$

f non è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda \cdot id_2 \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = +\lambda^2 - 4\lambda + 4$$

$$+\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} \qquad \lambda = 2$$

$$\downarrow$$

$$m(2) = 2$$

$m(\lambda)$ è la moltiplicità algebrica di λ (ovvero quante volte troviamo λ come soluzione)

$$m(a) = \max\{ \underset{\text{tale che}}{n \in \mathbb{N} :} (x-a)^n \underset{\text{divide}}{\mid} P(x) \}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda \cdot id \begin{pmatrix} -5-\lambda & 8 \\ -4 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = -35 - 5\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 32 = -3 - 2\lambda + \lambda^2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Delta = 16$$

$$\frac{+2 \pm 4}{2} \quad \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} m(-1) = 1 \\ m(3) = 1 \end{matrix}$$

$$\boxed{\lambda = 3} \to \ker \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{ x - y = 0$$

SOSTITUISCO IL 3 GAUSS....

$$\{ y = x = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{\lambda = -1} \to \ker \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{ x = 2y$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = V_{-1}$$

a questo punto abbiamo gli autospazi e la base

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\mathbb{R}^2$

$[M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ come si fa?

rispetto alla base standard:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} -5x + 8y \\ -4x + 7y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

rispetto a B?

$[M(f)]_B^B$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voglio scrivere $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base B

$Im \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è uguale a $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ poi va scritto come combinazione lineare dei vettori della base di destinazione

quindi: $[M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}c_1\\c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2c_2\\c_2\end{pmatrix}$$

$$x = c_1 + 2c_2 \qquad y = c_1 + c_2 \rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 3 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \begin{cases} \cancel{3} - c_2 + 2c_2 = \cancel{3} \\ c_1 = 3 - c_2 \end{cases} \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = c_1 + 2c_2 \\ -1 = c_1 + c_2 \end{cases} \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 2 = 0 \\ c_1 + c_2 + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} -c_2 - 1 + 2c_2 + 2 = 0 \\ c_1 = -c_2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

TEOREMA

Se l'unione delle basi degli autospazi formano una base di V allora f è diagonalizzabile

A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists B$ tale che

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}-5 & 8\\-4 & 7\end{pmatrix}$$