Usando il det si può calcolare il Rk senza usare Gauss-Jordan? (SI)

- PROPOSIZIONE : $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

1) $Rk(A \cdot B) \leq \min \{Rk A, Rk B\}$

2) Se $m=n$ e A è invertibile allora il $Rk(A \cdot B) = Rk B$

3) Se $n=p$ e B è invertibile allora il $Rk(AB) = Rk A$

- lemma : $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

B è una sottomatrice di A

$Rk B \leq Rk A$

TEOREMA

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$Rk A$ è uguale alla dimensione della più grande sottomatrice quadrata di A con det. non nullo (deve essere invertibile)

ESEMPIO

↓

prendo questa perché il suo det $\neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

det $= 0$

det $= 0$

ecc....

non esistono sottomatrici 3×3 con det $\neq 0$

(la massima dimensione è 2×2)

Quindi il $\text{Rk}\,A = 2$

TEOREMA DEGLI ORLATI

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

B è una sottomatrice quadrata $p \times p$ tale che $\det B \neq 0$

Se tutte le sottomatrici di A di ordine $p+1 \times p+1$

ottenute orlando B hanno $\det = 0$ allora il $\operatorname{RK} A = p$

vuol dire aggiungendo 1 riga e
1 colonna

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango almeno 1 e massimo 5

Scegliamo una matrice 2×2 con $\det \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aggiungendo le righe evidenziate otteniamo

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det = \ldots 24 - 24 = 0$$

Cerchiamo un'altra matrice:

righe possibili $= 1, 5$

colonne possibili $= 1, 5$

il det è sempre $= 0$

il $RkA = 2$