SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^n$

fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{e_1, \dots\dots e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$

2 modi per rappresentare un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$

1) come spazio generato da un insieme di vettori

$W = \langle S \rangle$

RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA

2) come soluzioni di un sistema omogeneo $W = \{\text{soluzioni di } A \cdot X = 0\}$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

$(A \in M_{m,n}(\mathbb{R}))$

dato un sottospazio dobbiamo dare le 2 rappresentazioni e trovare una base

BASE DI UN SOTTOSPAZIO IN FORMA PARAMETRICA

$W = \langle S \rangle \leq \mathbb{R}^n \qquad S = \{V_1 \dots\dots V_m\}$

$$A = \begin{pmatrix} \overline{\quad V_1 \quad} \\ \overline{\quad V_2 \quad} \\ \overline{\quad V_3 \quad} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

ogni vettore è una riga

FACCIO GAUSS-JORDAN

(SI PUÒ FARE ANCHE ECHELON NORMALE)

$$A = \begin{pmatrix} \overline{V_1} \\ \overline{V_2} \\ \overline{V_n} \end{pmatrix}$$ le righe non nulle formano una base di W

ESEMPIO

$$S = \{(1,1,2)\ (0,0,1),(1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{FACCIO GAUSS-JORDAN}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la base di $\mathbb{R}^3$ è data da $W = \langle (1,1,2),(0,0,1) \rangle$

$\dim W = \operatorname{Rk} A$

$W = \text{ROW } A = \langle A^1 \ldots\ldots A^m \rangle$

righe

Corollario $S = \{ V_1 \dots\dots V_n \} \subseteq \mathbb{R}^n$, $A = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

S è linearmente indipendente se $RkA = m$

DIMOSTRAZIONE - esercizio - S lin di $\Leftrightarrow RkA < m$

BASE DI UN SOTTOSPAZIO IN FORMA CARTESIANA

$W \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad$ $\underbrace{W = \text{soluzioni di } A \cdot X = 0}_{\ker(A)}$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$\ker(A)$

kernel, nucleo

$\dim W = n - \mathrm{Rk}\, A = n - r$

n è il numero di variabili

ci sono $n - r$ parametri ovvero $n - r$ variabili libere

$$A \xrightarrow[\text{GAUSS-JORDAN}]{} B \longrightarrow \begin{cases} X_1 = b_{1,1} \cdot X_{r+1} + \ldots\ldots b_{1,n-r} \cdot X_n \\ \vdots \\ X_r = b_{r1} \cdot X_{r+1} + \ldots\ldots b_{r,n-r} \cdot X_n \end{cases}$$

ECHELON RIDOTTA

$$\begin{pmatrix} b_1 \cdot X_{r+1} + \ldots\ldots b_{n-r} \cdot X_n \\ b_{r1} \cdot X_{r+1} + \ldots\ldots b_{r,n-r} \cdot X_n \\ X_{r+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \text{soluzione}$$

$$\text{BASE} = \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_{1,n-r} \\ \vdots \\ b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n-r}$$

ESEMPIO

$$W = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$RK = 2$

numero variabili

$\dim W = 4 - 2 = 2$

RK

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & +4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS-JORDAN}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CONTINUO GAUSS-JORDAN

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 + 3x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -3x_3 + 8x_4 \\ x_2 = 3x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{pmatrix} -3x_3 + 8x_4 \\ 3x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1} \cdot x_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2} \cdot x_4 \Rightarrow \{w_1, w_2\}$$

base di W

POTREI CHIAMARLO KERNEL DI A

TEOREMA DEL RANGO

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$RK\,A + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}\,A)}_{\text{NULLITÀ DELLA MATRICE } A} = n$$

Impariamo a passare da una rappresentazione all'altra

DA FORMA CARTESIANA A FORMA PARAMETRICA

$W = \ker A = \{ \text{soluzioni di } A \cdot X = 0 \}$

troviamo una base $B = \{ b_1 \ldots\ldots b_r \}$

$W = \langle b_1 \ldots\ldots b_r \rangle$

DA FORMA PARAMETRICA A CARTESIANA

- PROPOSIZIONE A, B due matrici

$\ker A = \text{row } B \iff \ker B = \text{row } A$

$W = \langle S \rangle = \langle V_1 \ldots V_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Consideriamo $\ker A \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia $B = \{ b_1 \ldots\ldots b_r \}$ una base di $\ker A$

$$B = \begin{pmatrix} \underline{\quad b_1 \quad} \\ \vdots \\ \underline{\quad b_r \quad} \end{pmatrix} \in M_{r,n}(\mathbb{R})$$

$\ker A = \mathrm{row}\, B \rightarrow \ker B = \mathrm{row}\, A = W$

$$W = \ker B$$

sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$

- forma cartesiana

$V =$ soluzioni di $A \cdot X = 0$

$= \ker A$

- forma parametrica

$V = \langle V_1 \ldots\ldots V_m \rangle$

$= \mathrm{row}\, A$

ESEMPIO

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

FORMA PARAMETRICA

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GAUSS-JORDAN}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

FORMA CARTESIANA

$$\begin{pmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \Rightarrow \ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

DI NUOVO FORMA PARAMETRICA

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \ker A = \text{row } B$$

$$\ker B = \text{row } A = V$$

$$\Rightarrow V : \{ 2x_1 + x_3 = 0 \}$$

(DIMOSTRA CHE POSSO PASSARE DA PARAMETRICA A CARTESIANA E VICEVERSA)

(dei sottospazi posso fare somma e intersezione)

INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI

dati $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ determinare $W_1 \cap W_2$

$W_1 = \ker A_1$ $\qquad$ $W_2 = \ker A_2$

FORME CARTESIANE

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix} \qquad W_1 \cap W_2 = \ker A$$

NON E' UN DIVISO

ESEMPIO

$$W_1 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{ -x_1 + x_3 = 0 \}$$

$$W_2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$W_1 \cap W_2 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

per evitare che ci siano equazioni inutili riduco fino in forma di echelon ridotta

SOMMA DI SOTTOSPAZI

$W_1 = \text{Row } A_1 , \quad W_2 = \text{Row } A_2 \quad \leq \mathbb{R}^n$

FORME PARAMETRICHE

$A = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)$

$W_1 + W_2 = \text{Row } A$

ESEMPIO:

$W_1 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ x_1 = x_3 \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3 \qquad W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$W_1 = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$W_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$W_1 + W_2 = \text{Row} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS...}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\dim W_1 + W_2 = 3$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$