Proposizione

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$

$B = \{ b_i \}_{i=1 \dots n}$ base di V

1) Un omomorfismo $f: V \longrightarrow W$ è determinato dalle immagini $f(b_i)$ dei vettori di B

2) $\{ w_1 \dots w_n \} \subseteq W$ allora $\exists !$ omomorfismo $f: V \longrightarrow W$ tale che $f(b_i) = w_i \quad \forall i = 1 \dots n$

DIMOSTRAZIONE

1) $v \in V$, calcolo $f(v)$

poiché $B = \{ b_i \}$ è una base, $\exists \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tale che

$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_n b_n \longrightarrow f(v) = f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)$

comb. linear.

$= \lambda_1 f(b_1) \dots + \lambda_n f(b_n)$

comb. line.

2) $f: V \longrightarrow W$ Il punto 1 ci dice che è determinata

$$v_i \longmapsto w_i$$
$$\downarrow$$
$$f(b_i)$$

supponiamo che $g: V \to W$ tale che $g(b_i) = w_i$

$$g(v) = \lambda_1 g(b_1) + \lambda_n g(b_n) = \lambda_1 w_1 + \lambda_n \cdot w_n =$$

$$= \lambda_1 f(b_1) + \lambda_n \cdot f(b_n) = f(v)$$

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 \dots \lambda_n \cdot v_n$$

- Corollario 1

V, W spazi vet. su $\mathbb{R}$, $B = \{b_1 \dots b_n\}$ base di V

$f: V \longrightarrow W$ omomorfismo

1) f è iniettiva $\iff \{f(b_1) \dots f(b_n)\}$ è lin. indi.

2) f è suriettiva $\iff \{f(b_1) \dots f(b_n)\}$ genera W

3) f è biettiva $\iff \{f(b_1) \dots f(b_n)\}$ base di W

DIMOSTRAZIONE

1) f è iniettiva $\Leftarrow$ il $\ker(f) = \{0\}$

Sia $v \in V$ tale che $f(v) = 0$

Poiché B è una base di V allora $\exists \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tale che

$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_n \cdot b_n$

$0 = f(v) = f(\lambda_1 \cdot b_1 + \dots \dots \lambda_n \cdot b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \dots \lambda_n f(b_n)$

lin. ind.

$\Rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \ker = \{0\} \Rightarrow f$ iniettiva

2) $\{f(b_1) \dots \dots f(b_n)\}$ generano W

dimostriamo che f è suriettiva, cioè $\operatorname{Im} f = W$

cioè $\forall w \in W \ \exists v \in V$ tale che $w = f(v)$

Sia $w \in W$, poiché $W = \langle f(b_1) \dots f(b_n) \rangle$

$\exists \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tale che $w = \lambda_1 f(b_1) \dots + \lambda_n f(b_n) =$

$$= f\cdot(\underbrace{\lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_n \cdot b_n}_{v \in V}) \Rightarrow w = f(v) \Rightarrow w \in \mathrm{Im}(f)$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = W \Rightarrow f$ è suriettiva

3) Immediata usando i punti precedenti

ESERCIZIO $f : V \longrightarrow W$

1) Se f è iniettiva e $\{v_1 \dots v_n\} \subseteq V$ lin. ind.

allora $\{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ lin. ind. ?

$\nwarrow$ IMMAGINI

2) Se $\{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ è lin. ind. allora

$\{v_1 \dots v_n\}$ lin. ind.

$\Downarrow$

1) f iniettiva $\Leftrightarrow$ $\ker = 0$

devo dimostrare che tutti i coefficienti (λ) siano 0

$$\begin{cases} \lambda_1 (f v_1) + \dots \lambda_n (f v_n) = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

VOGLIO DIMOSTRARE QUESTO:

$$\lambda_1 (f v_1) + \dots \lambda_n (f v_n) = 0$$

$$\parallel$$

$$f(\lambda_1 \cdot v_1) + \dots f(\lambda_n \cdot v_n) = 0$$

$$\parallel$$

$$f(\lambda_1 \cdot v_1 + \dots \lambda_n \cdot v_n) \longrightarrow \lambda_1 \cdot v_1 + \dots \lambda_n \cdot v_n \in \ker(f)$$

$$\ker(f) = 0 \longrightarrow \lambda_1 \cdot v_1 + \dots \lambda_n \cdot v_n = 0 \quad \text{lin. ind.}$$

$$\lambda_1 \dots \lambda_n = 0$$

2) $f: V \longrightarrow W$ app. lin., $\{v_1 \dots v_r\} \subseteq V$

se $\{f(v_1) \dots f(v_r)\}$ lin. ind.

allora $\{v_1 \dots v_r\}$ lin. ind.?

PROCEDIMENTO

$$\lambda_1 \cdot v_1 \dots + \lambda_r \cdot v_r = 0$$

$$\Downarrow$$

so che $f(0) = 0$

$$f(\lambda_1 \cdot v_1 \dots + \lambda_r \cdot v_r) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 f(v_1) \dots + \lambda_r f(v_r) = 0 \iff \lambda_1 \dots \lambda_r = 0$$

Corollario:

$f : V \longrightarrow W$ omomorfismo

$\dim V = m$, $\dim W = n$

1) Se f è iniettiva $m \leq n$

2) Se f è suriettiva $m \geq n$

3) Se f è biettiva $m = n$

Viceversa non è vero

$$0 : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto 0$$

DIMOSTRAZIONE

1) Sia B una base di V

Poiché $\dim V = m \longrightarrow B = \{b_1 \ldots\ldots b_m\}$

$\Rightarrow \{f(b_1) \ldots\ldots f(b_m)\} \subseteq W$ lin. ind.

$\Rightarrow \dim W \geq m$

$\quad\;\; \| $

$\quad\;\; n$

2) Sia $B = \{b_1 \ldots\ldots b_m\}$ una base di V

$\Rightarrow \{f(b_1) \ldots\ldots f(b_m)\}$ genera W

$\Rightarrow \dim W \leq m \rightarrow n \leq m$

TEOREMA DELL'ISOMORFISMO (il più importante)

isomorfismo = appli. line. biettiva

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n. Allora $V \underset{\text{è isomorfo}}{\cong} \mathbb{R}^n$

DIMOSTRAZIONE:

fissiamo $B = \{b_1 \ldots b_n\}$ base di V e sia $\mathcal{E} = \{e_1 \ldots e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$

$f: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\quad b_i \longmapsto e_i$

$$B \longrightarrow \{ f(b_1) \dots f(b_n) \}$$

$$\mathcal{E}$$

è una base e in base al corollario 1

f è un isomorfismo

ESEMPIO:

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ ax^2 + bx + c \mid a\, b\, c \in \mathbb{R} \}$$

troviamo una base $B = \{ x^2, x, 1 \}$ ← base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$$\Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \simeq \mathbb{R}^3$$

$$f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x^2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$