# Gioco della diagonalizzazione

$V$ spazio vett. $f : V \longrightarrow V$ (end)

- obbiettivo: trovare una base $B$ di $V$ tale che $[M(f)]^B_B$ è diagonale

- strategia:

questa base di partenza non influisce il risultato

prendiamo $\mathcal{E}$ base di $V$, consideriamo $A = [M(f)]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$

$P_A(\lambda) = 0$ polinomio caratteristico di $A$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot id)$$

AUTO VALORI

troviamo le soluzioni $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_r$ in $\mathbb{R}$ di $P_A(\lambda) = 0$

$\forall_{i = (1 \ldots r)}$ calcoliamo $V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda \cdot id)$

AUTO SPAZI

$\forall_{i (1 \ldots r)}$ troviamo una base $B_{\lambda_i}$ di $V_{\lambda_i}$

Se $\bigcup_{i=1}^{r} B_{\lambda_i} = B$ base di $V$, allora $[M(f)]^B_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$

- Proposizione:

$A$ matrice quadrata

$P_A(\lambda)$ è invariante rispetto alla similitudine

I.e., se $A' = B^{-1} \cdot A \cdot B$ allora $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$

cioè

- Corollario: $V$ spazio vett. $f: V \longrightarrow V$

$B, B'$ basi di $V$, $A = [M(f)]_B^B$, $A' = [M(f)]_{B'}^{B'}$

$P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$

ricordiamo: Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ allora $\deg P_A(\lambda) = n$

degree = grado

DEFINIZIONE

- Se $A = [M(f)]_B^B$ allora $P_f(\lambda) = P_A(\lambda)$

- gli autovalori di $f$ sono i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\exists v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda \cdot v$

- Proposizione:
gli autovalori di $f$ sono le soluzioni di $P_f(\lambda)$

Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ allora il $P_f(\lambda)$ ha grado $n$ $\rightarrow$ ci sono al più $n$ autovalori contati con la molteplicità algebrica

$\Downarrow$

$\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n \qquad m(\lambda_1) \ldots m(\lambda_n) \Rightarrow m(\lambda_1) + \ldots + m(\lambda_n) \leq n$

$\dim V_{\lambda_i} = g(\lambda_i)$ $\rightarrow$ molteplicità geometrica di $\lambda_i$

Proposizione: $f: V \longrightarrow V$ end. $\dim V = n$

$\lambda_1 \dots \lambda_r$ autovalori $B_{\lambda_i}$ base di $V_{\lambda_i}$

$f$ è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow B = \bigcup_{i=1}^{r} B_{\lambda_i}$ è una base di $V$

DIMOSTRAZIONE

$\Leftarrow$

$B = \bigcup_{i=1}^{r} B_{\lambda_i}$ base di $V$

$$\# B = n = \sum_{i=1}^{r} \# B_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{r} g(\lambda_i)$$

cardinalità

$$\# B_{\lambda_i} = g(\lambda_i)$$

$$\{\underbrace{b_1^1 \dots b_{g(\lambda_1)}^1}_{B_{\lambda_1}}, b_1^2 \dots b_{g(\lambda_2)}^2, b^n \dots b_{g(\lambda_r)}^n\} = B$$

$$[M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \; \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$f(b_1^1) = \lambda_1 \cdot b_1^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$f(b_2^1) = \lambda_1 \cdot b_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

" $\longrightarrow$ "

$f$ diagonalizzabile $\longrightarrow$ $\exists$ una base $B$ tale che

$$[M(f)]^B_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

riordino le basi in modo di mettere i $\lambda_i$ uguali uno dopo l'altro

$$\Rightarrow [M(f)]^B_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \longrightarrow$$

avrò $g(\lambda_i)$ entrate uguali a $\lambda_i$

$i = 1 \dots r$

$$B_{\lambda_1} = \{ b_1 \dots b_{g(\lambda_1)} \} \quad B_{\lambda_2} = \{ b_{g(\lambda_1)} \dots b_{g(\lambda_1)} \}$$

basi degli autospazi

Come risparmiamo tempo?

• Proposizione

$f: V \longrightarrow V$ end., $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $f$

allora $\quad 1 \leq g(\lambda) \leq m(\lambda)$

teorema

$f : V \to V$

$f$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 \dots \lambda_m$ autovalori con

$$\sum_{i=1}^{r} m(\lambda_i) = n \qquad e \qquad \forall i = 1 \dots r \quad g(\lambda_i) = m(\lambda_i)$$

Osservazione $f: V \to V$ $\quad \lambda_1, \lambda_2$ autovalori di $f$

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$$

DIMOSTRAZIONE

$$f(v) = \lambda_1 v \to \lambda_1 \cdot v = \lambda_2 \cdot v \to \lambda_1 \cdot v - \lambda_2 \cdot v = 0 \to$$

$$\to \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot v = 0 \to v = 0$$

$f$ diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$

- Corollario (riassuntivo)

$V$ spazio vett. $f: V \longrightarrow V$ end. $\lambda_1 \dots \lambda_r$ autovalori (distinti)

le seguenti sono equivalenti

1) $f$ è diagonalizzabile

2) $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$

3) $\dim V = \sum_{i=1}^{r} g(\lambda_i)$

4) $P_f(\lambda) = 0$ ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ e $\forall i = 1 \dots r$

$m(\lambda_i) = g(\lambda_i)$

ESERCIZI

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda \cdot id) = \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (\lambda - 2)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \qquad m(\lambda) = 2$$

$$\boxed{\lambda = 2}$$

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g(2) = 1$$

---

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda \cdot id \quad \begin{pmatrix} -5-\lambda & 8 \\ -4 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

uso la regola del teorema e scopro che è diagonalizzabile

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda = 3 \quad m(3) = 1$$

$$\lambda = -1 \quad m(-1) = 1$$

$D\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ora devo calcolare gli autovettori

$\boxed{\lambda = 3}$ $\quad Ker\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \{ x = y$

$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\boxed{\lambda = -1}$ $\quad Ker\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \{ x = 2y$

$V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

BASE DIAGONALIZZANTE $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

noto che $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A \cdot B$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ end. definito da:

$f(v_1) = h \cdot v_1$ , $f(v_2) = (h-2) \cdot v_1 + 2v_2$

$f(v_3) = (2h+4) \cdot v_1 + 4v_2 - 2v_3$ $\qquad h \in \mathbb{R}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

per quali valori di h f è diagonalizzabile?

procedimento:

1) $v_1, v_2, v_3$ sono una base?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

faccio gauss e se il RK è massimo è una base

sono una base

2) $\overset{A}{\overset{\parallel}{[M(f)]^B_B}} = \begin{pmatrix} h & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$$\det(A-\lambda\cdot id) \quad \begin{pmatrix} h-\lambda & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

lo pongo a 0

$$\det = (h-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(-2-\lambda) = 0$$

$\lambda = h, 2, -2$ $\rightarrow$ se $h \neq \pm 2$ le molteplicità sono 1

è un autovalore

$f$ è diagonalizzabile

$\boxed{h=2}$ $\rightarrow$ calcolo il det di nuovo $m(2)=2$, $m(-2)=1$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$Ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \leftarrow Rk = 1$$

$Ker = Rk\,MAX - Rk$

$2 = 3 - 1$

$\dim V_2 = 2 = g(2) \Rightarrow f$ è diagonalizzabile

$\boxed{h = -2}$ $\Rightarrow$ $m(2) = 1$, $m(-2) = 2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lambda = -2}$

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim \ker = 1 = g(-2) \Rightarrow \text{non diagonalizzabile}$$

RISPOSTA:

f diag. $\forall h \in \mathbb{R}$ tranne $-2$

per i valori per cui f è diag. trovo la matrice diagonale

$\boxed{h \neq \pm 2}$ $\begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad h = 2$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$V_h = \langle V_1 \rangle$

$\boxed{\lambda = 2}$

$\boxed{h \neq 2}$

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} h-2 & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = V_2$$

$\boxed{\lambda = -2}$

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} h+2 & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$