$$O \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Per ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$A + O = A = O + A$$

$$A + (-A) = O$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \qquad \forall A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

id_M $\qquad\qquad id_M \cdot A = A = A \cdot id_M$

MATRICE IDENTITÀ $\longrightarrow$ È SEMPRE UNA MATRICE QUADRATA

È vero che per ogni $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ $\exists$ $B \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot B = id_M = B \cdot A$?

NON ESISTE

- Se A ammette un tale elemento B, B si chiama l'inverso di A, e si scrive A^{-1}

FORMA DI ECHELON: una matrice qualsiasi si dice in forma di echelon (o a gradini) se
- tutte le righe nulle sono in fondo
- in ogni riga il primo elemento non 0 da sinistra, (pivot) è alla destra di tutti i pivot delle righe superiori (o equivalentemente ha tutti 0 sotto)

ESEMPIO

IL PIVOT È IL PRIMO ELEMENTO NON ZERO DELLA SUA RIGA

$$\begin{array}{c} \text{1° PIVOT} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \text{ a echelon}$$

2° PIVOT

3° PIVOT

1° PIVOT

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3° PIVOT

2° PIVOT

← NON echelon

← QUESTA NON SODDISFA I REQUISITI

FORMA DI ECHELON RIDOTTA: Una matrice è in forma di echelon ridotta se

- è in forma di echelon
- tutti i pivot sono = 1
- ogni pivot è l'unico elemento non zero della sua colonna

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

METODO DI GAUSS - JORDAN

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

LA PORTIAMO IN FORMA DI ECHELON RIDOTTA

ATTRAVERSO LE SEGUENTI OPERAZIONI SULLE RIGHE

- SCAMBIO DI RIGHE
- MOLTIPLICAZIONE O DIVISIONE DI UNA RIGA PER UNO SCALARE NON NULLO
- SOMMARE A UNA RIGA UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE ALTRE RIGHE

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SCAMBIO $R_2 - R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 : 3]{R_2 : 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

NO

SOMMARE

$R_1 \quad R_1 - 4R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5-4\cdot\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

SOTTO MATRICE: data una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una sottomatrice di A è la matrice che si ottiene prendendo le entrate all'intersezione di r righe e r colonne

ESEMPIO

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

devo scegliere un numero di righe e colonne che sia ≤ al numero di colonne o righe della prima matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

→ SOTTO MATRICE

GAUSS-JORDAN (11 PASSI)

SERVE A TROVARE LA FORMA ECHELON RIDOTTA PARTENDO DA UNA NORMALE MATRICE

1) Trovare il primo elemento non nullo a_{ij} nella prima colonna (se non esiste passiamo a quelle successive)

2) Scambiamo R_i con R_1. In questo modo abbiamo il pivot in posizione $1,1$

3) Sostituiamo R_1 con R_1/a_{11}, così il primo pivot è $= 1$

4) Per ogni $i > 1$ sostituiamo R_i con $R_i - a_{ij} \cdot R_1$ così ho tutti 0 sotto il pivot

5) La nostra matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

6) Ripeti i passaggi 1-5 per la sotto matrice

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

7) Ripeti fino a che non raggiungi l'ultima riga o l'ultima colonna

8) Otteniamo una matrice C in forma di echelon con tutti i pivot uguali a 1

9) Sia C_{lk} l'ultimo pivot. Per ogni $i < l$ sostituiamo R_i con $R_i - a_{ik} \cdot R_l$

10) Ripeti il punto 9 per tutti gli altri pivot dal basso verso l'alto

11) Otteniamo una matrice D in forma di echelon ridotta

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = R_1/2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 = R_3 - R_1]{R_2 = R_2 - 3R_1}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2/3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$R_3$$

$$R_3 = R_3 + 1R_2 \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{FORMA DI ECHELON}} \xrightarrow[R_2 = R_2 - R_3]{R_1 = R_1 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{e_{l,K}} = e_{3,4}$$

$$R_1 = R_1 - e_{1,4} R_3 \rightarrow R_1 = R_1 + 2R_3$$

$$R_2 = R_2 - e_{2,4} R_3 \rightarrow R_2 = R_2 - R_3$$

RANGO: $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ il rango di A è il numero di pivot della sua forma di echelon (ridotta)

Rk A

OSSERVAZIONE:

$$0 \leq \text{Rk}A \leq \min\{m,n\}$$

MINIMO TRA N e M

Si dice che A ha rango massimo se

$$\text{Rk}A = \min\{m,n\}$$

Calcoliamo l'inversa di una matrice (SI PUÒ FARE SOLO PER LE MATRICI QUADRATE)

$$(A \mid id_n) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & & 1 & \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & 0 & & & 1 \end{array}\right)$$

GAUSS-JORDAND SU A

$$(D \mid D)$$

Se $D = id_n$ allora

$$D = A^{-1}$$

È L'INVERSA DI A

se $D \neq id_n$

allora A non è invertibile

Otteniamo l'identità se $Rk A$ è massimo
(A è invertibile)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ A PRIORI NON È INVERTIBILE

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$