Corollario 3: A' è la matrice ottenuta applicando una permutazione σ alle righe di A, allora $\det A' = sgn(\sigma) \det A$

CALCOLO DETERMINANTE

PROPOSIZIONE 4: 1) Se $\exists\, i \in \{1 \dots n\}$ tale che $A^{(i)} = (0 \dots 0)$, allora il $\det A = 0$

RIGA TUTTA 0

2) Se $\exists\, i, j \in \{1 \dots n\}$ tale che $\underbrace{A^{(i)} = A^{(j)} \text{ allora } \det A = 0}_{\text{2 RIGHE UGUALI IL DET A = 0}}$

VALE ANCHE PER LE COLONNE

3) $$\det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^{(i)} \to \alpha A^{(j)} \\ A^n \end{pmatrix} = \det A$$

cioè se moltiplico una riga per uno scalare il det A non cambia

TEOREMA DI BINET

Se abbiamo 2 matrici quadrate.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

DIMOSTRAZIONE: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) = \begin{cases} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ B^{(n)} \end{cases}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \text{MOLTIPLICAZIONE COME LE MOLTIPLICAZIONI DELLE MATRICI} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

• Corollario: $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibile

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

DIMOSTRAZIONE: $A \cdot A^{-1} = id$, $\det id = 1 = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$

$$\rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

• quindi se A è invertibile $\rightarrow \det A \neq 0$

METODO MIGLIORE PER CALCOLARE IL DETERMINANTE

$A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ $\quad i, j \in \{1 \dots n\}$

$A_{ij} \in M_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$ la sotto matrice ottenuta rimuovendo la i-esima riga e j-esima colonna

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Il minore di A corrispondente agli indici (i,j) come

$$m_{ij} = |A_{ij}| = \det A_{ij} \quad (\text{il } \det A = \det A_{ij})$$

TEOREMA DI LAPLACE

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, per ogni indice il

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

POSSIAMO SELEZIONARE UNA RIGA O UNA COLONNA, SI SCELGONO QUELLE CON PIÙ ZERI

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|A_{12}| + a_{1n}(-1)^{1+n}|A_{1n}|$$

ESEMPIO

CALCOLO IL DET

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$-$ $+$ $-$ $+$

$$= 1 \cdot 1^2 \cdot (0 + 2) - 1 \cdot 1^4 (-2 - 12) = 2 + 14 = 16$$

- $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ $\forall i, j \in \{1 \dots n\}$

$A^*_{i,j} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ cofattore di A rispetto agli

indici i, j cofattore di i, j

la matrice aggiunta di A è

$A^* = adj(A) = (a^*_{ij})^t \in M_{n,n}(\mathbb{R}$

(aggiunta in inglese)

$A \cdot A^* = \det A \cdot id_n \to A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$

- Corollario:

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

A è invertibile se $RkA = n$ o se $\det A \neq 0$

in tal caso $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$