APPLICAZIONI LINEARI (omomorfismi di spazi vettoriali)

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.

Un'applicazione lineare tra V e W è una funzione

DOMINIO CODOMINIO

$f : V \longrightarrow W$ tale che

immagine

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

2) $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$

ESEMPIO

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+x') \\ (x+x')+(y+y') \\ 2(y+y') \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x' \\ x'+y' \\ 2y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \parallel & & \parallel \\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & & f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{matrix}$$

REGOLA 1) VERIFICATA

---

ora per uno scalare

$$f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ \lambda x + \lambda y \\ 2\lambda y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

REGOLA 2) VERIFICATA

ESEMPIO:

$$V \longrightarrow W$$

$$v \longrightarrow 0$$ ← manda tutti v a 0 (ZERO APPARTIENE A W)

$$f(v_1 + v_2) = \underbrace{0}_{f(v_1)} + \underbrace{0}_{f(v_2)} = 0$$

ESEMPIO:

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x^2 + y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

← qui non viene rispettata la prima regola quindi non è app. lin.

• proposizione

$f : V \to W$ applicazione lineare allora $f(\underset{V}{0}) = \underset{W}{0}$

DIMOSTRAZIONE CON LA SECONDA REGOLA

$$f(\underset{V}{0}) = f(\underset{\mathbb{R}}{0} \cdot \underset{V}{0}) = \underset{\mathbb{R}}{0} \cdot f(\underset{V}{0}) = \underset{W}{0}$$

$f : V \to W$ applicazione lineare

$$\underbrace{\operatorname{Im}}_{\text{immagine}}(f) = \left\{ w \in W \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, v \in V \text{ tale che} \\ f(v) = w \end{array} \right\} \subseteq W$$

$$\operatorname{Ker}(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \subseteq V$$

$$\| \\ f^{-1}(0)$$

- proposizione

$f : V \longrightarrow W$ omomorfismo

$Im(f) \subseteq W$ sottospazio

$Ker(f) \subseteq V$ sottospazio

DIMOSTRAZIONE

$Im(f) \ni 0$

$w_1, w_2 \in Im \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

domanda: $\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 \in Im(f)$? (SI)

$\exists v_1, v_2 \in V$ tale che $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2)$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \underbrace{f(\lambda_1 \cdot v_1) + f(\lambda_2 \cdot v_2)}_{\text{REGOLA 2}} =$$

$$\underbrace{f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2)}_{\text{REGOLA 1}}$$

$$\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 \in Im(f)$$

DIMOSTRAZIONE (KERNEL)

• proposizione : l' Im di una base non per forza è anch' essa una base

$f : V \longrightarrow W$ omomorfismo

se $V = \langle v_1 \ldots\ldots v_n \rangle$ allora $Im(f) = \langle f(v_1) \ldots\ldots f(v_n) \rangle$

DIMOSTRAZIONE (ESERCIZIO)

ESEMPIO

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ app. lin.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$e_1 \quad e_2 \quad e_3$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(e_2)$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \longrightarrow Im(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$f : V \longrightarrow W$ app. lin.

$Ker(f) \leq V \qquad dim(Ker(f)) = null(f)$

$Im(f) \leq W \qquad dim(Im(f)) = RK(f)$

TEOREMA DELL'OMOMORFISMO

$$null(f) + RK(f) = dim\, V$$

V, W, U spazi vettoriali

devono essere uguali

$f: V \longrightarrow W, \quad g: W \longrightarrow U$ app. lin.

$$g \circ f : V \longrightarrow U$$
$$v \longmapsto g(f(v))$$

COMPOSTA

- lemma $g \circ f$ è un applicazione lineare

DIMOSTRAZIONE (esercizio)

$h : V \longrightarrow V$ applicazione lineare = endomorfismo

V, W spazi vettoriali

$L : (V, W) = \{ V \longrightarrow W \text{ app. lin} \}$

$f, g \in L(V, W)$ $\quad f + g : V \longrightarrow W$

$v \longmapsto f(v) + g(v)$

$\lambda \cdot f : V \longrightarrow W$

$v \longmapsto f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

lemma $(L(V, W), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE esercizio

$L(V,V) = End(V)$

DEFINIZIONI $f: V \longrightarrow W$ omo

1) f iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\left(\begin{array}{l} \forall v, v' \in V \\ \text{tale che } v \neq v' \\ f(v) \neq f(v') \end{array} \right)$

(monomorfismo)

2) f suriettiva $\Longleftrightarrow$ $\left(\begin{array}{l} \text{Se } \forall w \in W \\ \exists v \in V \text{ tale che} \\ f(v) = w \end{array} \right)$

(epimorfismo)

3) f biettiva $\Longleftrightarrow$ iniettiva e suriettiva

f invertibile $\Longleftrightarrow$ $\exists g: W \longrightarrow V$ tale che

$g \circ f = id\,V$

$f \circ g = id\,V$ questa g la chiamiamo f^{-1}

COMPOSTA

inversa

- proposizione

$f: V \longrightarrow W$

f invertibile $\Longleftrightarrow$ f biettiva

se f è un omo... biettivo

allora f^{-1} è un omo

Un omomorfismo biettivo è detto un isomorfismo.

2 spazi vettoriali V, W

sono isomorfi se $\exists$ $V \longrightarrow W$ isomorfismo proposizione

$f : V \to W$ app. lin.

f iniettiva $\iff \ker(f) = \{0\}$

DIMOSTRAZIONE "$\Rightarrow$" banale

"$\Leftarrow$" $\ker f = \{0\}$ supponiamo che abbiamo $v_1, v_2 \in V$ tale che

$$f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow \underbrace{f(v_1) - f(v_2)}_{= f(v_1 - v_2)} = 0 \to v_1 - v_2 \in \ker(f) = \{0\}$$

proposizione

V, W spazio vettoriale $B = \{b_1 \dots b_n\}$ base di V

1) un app. lin. $f : V \to W$ è completamente determinata da $f(b_1) \dots f(b_n) \in W$

DIMOSTRAZIONE:

$v \in V \Rightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_n$ tale che $v = \lambda_1 \cdot b_1 \dots + \lambda_n \cdot b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow f(v) = f(\lambda_1 \cdot b_1 + \dots \lambda_n \cdot b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \lambda_n f(b_n)$

2) $\{w_1 \dots w_n\} \subseteq W$

$\exists!\ f : V \longrightarrow W$ tale che

$f(b_i) = w_i$