SVOLGIMENTO DELLA SIMULAZIONE DEL 13/6

T1. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)<0$ e $f(b)>0$ (o viceversa). Allora, esiste $c\in\,]a,b[\, : f(c)=0$

DIM. Sia $x_0=\frac{a+b}{2}$. Se $f(x_0)=0$ si ha la tesi con $c=x_0$.
Se $f(x_0)<0$ poniamo $[a_1,b_1]=[x_0,b]$
Se $f(x_0)>0$ poniamo $[a_1,b_1]=[a,x_0]$
Si ha in ogni caso: $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$, $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$,
$a\le a_1<b_1\le b$
Poniamo $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ e costruiamo $[a_2,b_2]$ in modo analogo a quanto fatto prima, si avrà
$f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$, $b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2^2}$, $a\le a_1\le a_2<b_2\le b_1\le b$

Continuando allo stesso modo, se esiste $x_n : f(x_n)=0$ si ha la tesi, altrimenti si otterranno due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $\forall n\in\mathbb{N}$ si ha
$f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$, $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$, $a\le a_1\le\dots\le a_n<b_n\le\dots\le b$

La successione $\{a_n\}$ è crescente e limitata superiormente (b è un suo maggiorante) quindi converge, sia c il suo limite, si ha $a<c\le b$, $f(a_n)\to f(c)$ per la continuità, e dato che $f(a_n)\le 0$ $\forall n$ si ha $f(c)\le 0$ per la permanenza del segno.
Si ha poi $b_n=b_n-a_n+a_n=\underbrace{\frac{b-a}{2^n}}_{\downarrow\, 0}+\underbrace{a_n}_{\downarrow\, c}\to c$ e, come prima, si ottiene $f(c)\ge 0$.

Ne segue che $f(c)=0$.

T 2.

1. basta scegliere un insieme finito o uno in cui, in ogni caso, il minimo sia un punto isolato.

esempi: $X = \mathbb{N}$

$X = \{1; 2; 3\}$

$X = \{4\}$

$X = \{3\} \cup [5, 6]$

2. basta scegliere un intervallo aperto

$X =]0, 1[$

E 1. Cons. intanto

$$|a_n| = \frac{e^{\sin\frac{1}{3n^2+2}} - 1}{1-\cos\frac{1}{n}} = \underbrace{\frac{e^{\sin\frac{1}{3n^2+2}} - 1}{\sin\frac{1}{3n^2+2}}}_{\downarrow \atop 1} \; \underbrace{\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\cos\frac{1}{n}}}_{\downarrow \atop 2} \; \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{3n^2+2}}{\frac{1}{3n^2+2}}}_{\downarrow \atop 1} \; \underbrace{\frac{n^2}{3n^2+2}}_{\downarrow \atop \frac{1}{3}} \to \frac{2}{3}$$

allora per n pari $a_n \to \frac{2}{3}$ $\Rightarrow \{a_n\}$ non è regolare.
per n dispari $a_n \to -\frac{2}{3}$

Cons ora

$$|b_n| = 2^{\overbrace{\frac{3n^4+1}{2-n^2}}^{\to -\infty}} \to 0$$

$\{(-1)^n\}$ è limitata $\Rightarrow b_n \to 0$

E2.

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 - x + 1) & \text{in } [0, 1[\\ \log(x^2 + x - 1) & \text{in } [1, 2] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} & 0 < x < 1 \\ \dfrac{2x+1}{x^2+x-1} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 1 = f'_-(1)$$

$$\Rightarrow \nexists f'(1) \Rightarrow B = \{1\}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 3 = f'_+(1)$$

$$\frac{2x-1}{x^2-x+1} = 0 \quad \text{per } x = \frac{1}{2} \in]0, 1[$$

$$\frac{2x+1}{x^2+x-1} = 0 \quad \text{per } x = -\frac{1}{2} \notin]1, 2[$$

$$\Rightarrow A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$C = \{0, 2\}$$

$f(0) = 0$ $\qquad$ $f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log \frac{3}{4}$ $\qquad$ $f(2) = \log 5$

$$\min_{[0,2]} f = \log \frac{3}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\max_{[0,2]} f = \log 5 = f(2)$$