OPERAZIONI TRA INSIEMI

$a \in A$ $A \subseteq B$ $\emptyset$

$A \cup B$ $A \cap B$ $A - B \neq B - A$

P_1, P_2 propr. degli elementi di A

$P_1 \rightarrow B \subseteq A$

$P_2 \Rightarrow P_1$

implica

$P_2 \rightarrow C \subseteq A$

$P_1 : n > 5$

P_2 è condizione sufficiente per P_1

$P_2 : n > 10$

P_1 è condi. necessario per P_2

$C \subseteq B$

a definizione $a + n$ $\forall n$ naturale

$$a + 0 = a$$

$$a + \overline{n} = \overline{a + n}$$

$\overline{n}$ = successivo di n

$\overline{0} = 1$ $\qquad a + 1 = a + \overline{0} = \overline{a + 0} = \overline{a}$

$$\begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot \overline{n} = a \cdot n + a \end{cases}$$

$a < b$ se $\exists$ $c : a + c = b$ $\rightarrow$ $\underset{a}{7} < \underset{b}{10}$ $\rightarrow$ $\underset{a}{7} + \underset{c}{3} = \underset{b}{10}$

$\mathbb{N}_0 = \{0 \ldots\}$ $\qquad \mathbb{N} = \{1 \ldots\}$ $\rightarrow$ NATURALI

$n \in \mathbb{N} \rightarrow$ $+n$ POSITIVO

$-n$ NEGATIVO

$\mathbb{Z} = \{0; +n; -n : n \in \mathbb{N}\}$

RELATIVI

$\mp n$ opposto di $\pm n$

RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \left\{ 0 \, ; \, \pm \frac{a}{b} : \pm a \in \mathbb{Z}, \, b \in \mathbb{N} \right\}$$

REALI

$$\mathbb{R} = \left\{ 0 \, ; \, \pm a_0 \, , a_1 \ldots\ldots : a_0 \in \mathbb{N}_0 \, , a_1 \ldots\ldots \in \{0 \ldots\ldots 9\} \right\}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{R})$$

la rapp. geometrica è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ e l'insieme dei punti su una retta su cui è fissato un sistema di ascisse

TEOREMA DI DENSITÀ (di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$) IN $\mathbb{R}$

dati 2 numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ esistono infiniti $r \in \mathbb{Q}$ e infiniti $s \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$: $a<r<b$ e $a<s<b$

$\mathbb{Q} \to$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME FRAZIONE: $\frac{3}{2}$

SPIEGAZIONE SEMPLICE

$\mathbb{R}-\mathbb{Q} \to$ NON PUÒ ESSERE SCRITTO COME FRAZIONE: $\sqrt{2}$ (1,414)

tra 2 numeri reali esistono infiniti numeri "nel mezzo": $a=1$ $b=2$

1 ... 1,1 .... 1,5 .... 1,9 2

INTERVALLO DI ESTREMI a, b

$[a,b] \to$ INT. CHIUSO

$]a,b[\to$ APERTO

$[a,b[\to$ SEMICHIUSI

} INT. LIMITATI

$[a, +\infty[\to$ } NON LIMITATI SUPERIORMENTE

$]-\infty, a[\to$ } NON LIMITATI INFERIORMENTE

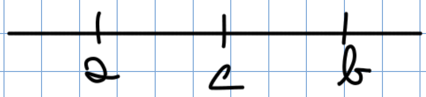
$(a,b) \to$ } INTERVALLO GENERICO

$]a,b[\to$ CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON $]0,1[$

$\mathbb{R} \to$ CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON $]-1,1[$

INTORNO DI UN NUMERO

$$c = \frac{a+b}{2}$$



$$c - a = b - c = r \to a = c - r$$
$$b = c + r$$

$$(a,b) = (c-r, c+r)$$

$c \in \mathbb{R}$ $r > 0$

$$\underbrace{]c-r, c+r[= I_r(c) = B(c,r)}$$

BALL $\to$ SFERA
$\downarrow$
INTORNO

posso usare una di queste 3 nozioni per dire: Intorno di c di raggio r

$X \subseteq \mathbb{R}$ $X \neq \emptyset$ INSIEME NUMERICO

MASSIMO DI X $\quad \max X = M \in X : M \geq x \ \forall x \in X$

il massimo è unico: se ce ne fossero 2, M_1 e M_2

$M_1, M_2 \in X$

$$\begin{matrix} M_1 \geq M_2 \\ M_2 \geq M_1 \end{matrix} \to M_1 = M_2$$

MINIMO DI X

$m = \min X$ se $m \in X$

$m \leq x \ \forall x \in X$ il minimo è unico

$h \in \mathbb{R}$ maggiorante per X se $h \geq x \quad \forall x \in X$

qualsiasi numero

$\overline{M}_X$ = ins. dei maggioranti

$\max X \in \overline{M}_X$

se $h \in \overline{M}_X$ e $h' > h \Rightarrow h' \in \overline{M}_X$

def.

Se $\overline{M}_X \neq \emptyset$ si definisce $\sup X = \min \overline{M}_X$

estremo superiore

è il minimo dei maggioranti

se $\overline{M}_X = \emptyset$ si def. $\sup X = +\infty$

def.

X si dice limitato superiormente se $\overline{M}_X \neq \emptyset$

PROPRIETÀ SE LIMITATO SUPERIORMENTE:

$\sup X = L \Rightarrow$

1) $L \geq x \quad \forall x \in X$

è un maggiorante e un massimo

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X : x > L - \varepsilon$

numero generico

se $\exists\ M = \max X \Rightarrow \sup X = M$ infatti:

1) $L \geq x \quad \forall x \in X$

2) $\exists\ x \in X : x > M - \varepsilon$?

basta prendere come $x = M$ ← il massimo

MINORANTI

un numero $h \in \mathbb{R}$ si dice minorante di X se $h \leq x$ $\forall x \in X$ $\quad \min X \in \underline{M}_X$

se $h \in \underline{M}_X$, $h' < h \Rightarrow h' \in \underline{M}_X$

$h \notin \underline{M}_X$ se $\exists\ x \in X,\ x < h$

def

X limitato inferiormente se $\underline{M}_X \neq \emptyset$

$$\inf X = \begin{cases} \max \underline{M}_X & \text{se } \underline{M}_X \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } \underline{M}_X = \emptyset \end{cases}$$

PROPRIETÀ SE LIMITATO INFERIORMENTE

$\inf X = l \in \mathbb{R} \Rightarrow$

1) $l \leq x \quad \forall x \in X$

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, x \in X : x < l + \varepsilon$

def.

X è limitato se lo è sia sup. che inf.

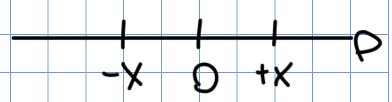
se non lo è da nessuna parte è non limitato

PROPRIETÀ DEL VALORE ASSOLUTO

$X = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots$

$-X = \mp a_0, a_1 a_2 \ldots$

def $|X| = \begin{cases} X & \text{se } X \geq 0 \\ -X & \text{se } X \leq 0 \end{cases}$



1) $|-x| = |x|$

2) $|x| \geq 0 \quad \forall x$

3) $|x| = 0 \iff x = 0$

IN GENERALE

$|x| = \max(x, -x)$

$|a - b| =$ ampiezza dell'intervallo (a, b)

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} \quad (a \neq 0)$

se $|x| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = 0$

X è limitato $\iff \exists\, M > 0 : |x| \leq M \quad \forall x \in X$

$|x| < a \quad (a > 0) \iff -a < x < a$

$c \in \quad R>0 \qquad]c-R, c+R[$ intorno di raggio R

$$\Downarrow$$

$$I_R(c) = B(c,R)$$

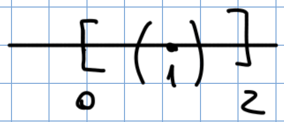
$X \subseteq \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}$

se $c \in X$ c è un interno ad X se

$\exists_R > 0 :]c-R, c+R[\subseteq X$

es.

$X = [0,2]$



1 è interno ad X

0 non è interno ad X

int X = insieme dei suoi interni

$\text{int}(a,b) =]a,b[$

X aperto se $X = \emptyset$ opp. tutti i suoi punti sono interni

X aperto $\Leftrightarrow$ $X = \text{int}(X)$

oss.

$\emptyset$ è aperto

$\mathbb{R}$ è aperto

ESEMPIO

Determinare l'estremo inferiore e superiore precisando se sono minimo e massimo

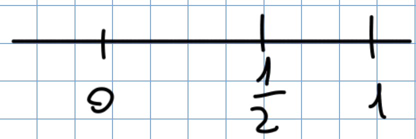
1) $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad X=(a,b)$ $\quad \inf X = a$ $\quad \sup X = b$

$X=[a,b]$ $\quad \min X = a$ $\quad \sup X = b$

ESEMPIO

2)

$$X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$



$\inf X = 0$ $\quad \begin{cases} 1)\ 0 \leq \frac{1}{n} \ \forall n ?\ \text{SI} \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$

$\sup X = \max X = 1$

3) $X = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{n} < 0$

minimo $= -1$

$\sup X = 0$

5) $X =]0,1[\cup \{3\}$ $\inf X = 0$ $\max X = 3$

6) $X = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 3\}$

$\Downarrow$

$-3 < x+2 < 3 \Rightarrow -5 < x < 1$ $\inf X = -5$

$\sup X = 1$

7) $X = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x^2 - |x| = 0\}$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x \leq 0 \end{cases}$$

ESERCIZI PER CASA

$X = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| - 2 < |x|\}$

~~A)~~ è lim inf

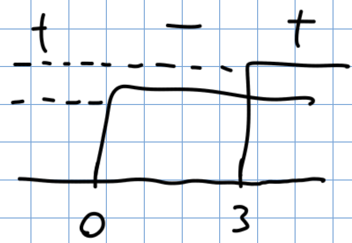
B) è lim sup

C) è lim sup e inf

D) non è lim sup e inf

$$|x-3|-2<|x|$$

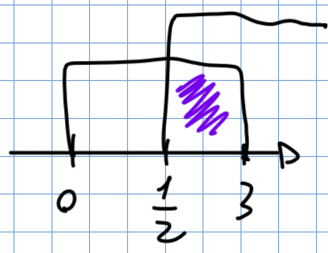
$$\left|\begin{array}{l} x-3\geq 0 \\ x\geq 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x\geq 3 \\ x\geq 0 \end{array}$$



$x\leq 0$ $\quad 0<x\leq 3$ $\quad x\geq 3$

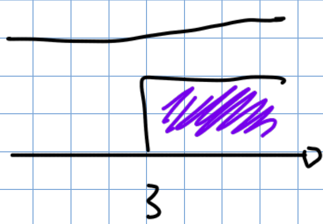
1°
$$\begin{cases} x\leq 0 \\ -\cancel{x}+3-2<-\cancel{x} \end{cases} \begin{cases} x\leq 0 \\ 0<-1 \end{cases} \quad \nexists\, x\in\mathbb{R}$$

2°
$$\begin{cases} 0\leq x\leq 3 \\ -x+3-2<x \end{cases} \begin{cases} 0\leq x\leq 3 \\ +\frac{2x}{2}>+\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} 0\leq x\leq 3 \\ x>+\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\frac{1}{2}<x\leq 3$$

3°
$$\begin{cases} x\geq 3 \\ \cancel{x}-3-2<\cancel{x} \end{cases} \begin{cases} x\geq 3 \\ 0<5 \end{cases}$$



$x\geq 3$

$|x-3|-2<|x|$

$|3-3|-2<3$

$-2<3$

$0<+5$ SI

$|0-3|-2<|0|$

$-3-2<0$

$-5<0$ SI

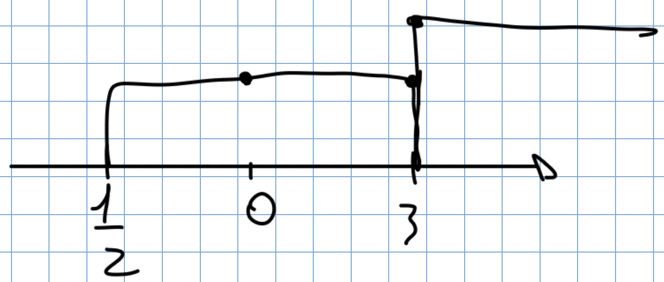
SOLUZIONI

$x=0$

$x=3$

$x\geq 3$

$\frac{1}{2}<x\leq 3$



$x>\frac{1}{2}$ $\quad$ $]\frac{1}{2},+\infty]$

$X = \{ x \in \mathbb{R} : | 2|x-1| - x + 3 | < 4 \}$

A) lim inf

B) lim sup

C) lim sup e inf

D) non lim sup e inf

$$|2|x-1| - x+3| < 4$$