ESERCIZI

2) $V_1 = (1, 0, 1\ 0)$, $V_2 = (H, 2, H, 2)$, $V_3 = (1, 1+H, 1, 2 \cdot H)$

$\subseteq R^4$, $H \in \mathbb{R}$

1) determinare per quali valori di H il vettore $V(4, 1, 4, 2)$

è combinazione lineare di V_1, V_2, V_3

$$V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$$

$$(4, 1, 4, 2) = \lambda_1 (1, 0, 1, 0) + \lambda_2 (H, 2, H, 2) + \lambda_3 (1, 1+H, 1, 2 \cdot H)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + H\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3(1+\lambda) \\ \lambda_1 H\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_2 + 2H\lambda_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 4 = \lambda_1 + H\lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = 2\lambda_2 + \lambda_3(1+H) \\ 4 = \lambda_1 H\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2 = 2\lambda_2 + 2H\lambda_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & H & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1+H & 1 \\ 1 & H & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2H & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{GAUSS-JORDAN}}$$

la prima riga é = alla terza quindi levo la terza

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & H & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1+H & 1 \\ 0 & 2 & 2H & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & H' & 1 & 4 \\ 0 & 1 & H' & 1 \\ 0 & 0 & 1-H & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

se $h = 1 \rightarrow RkA = 2$

$\rightarrow RkA|B = 3$

ROUCHÈ-CAPELLI DICE CHE NON ESISTONO SOLUZIONI

se $h \neq 1$ $\exists$ una sola soluzione

---

per quali valori di h

$v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$$\begin{pmatrix} \underline{v_1} \\ \underline{v_2} \\ \underline{v_3} \\ \underline{v} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 3)

$V_1, V_2, V_3 \in V$ e sono linearmente indipendenti

MOSTRARE $\{V_1 - V_2, V_2 - V_3, V_3 - V_1\}$ è lin. ind.

$W = \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$

$W = \{\lambda_1 V_1, \lambda_2 V_2, \lambda_3 V_3\} \sim \mathbb{R}^3$

$$V_1 - V_2 \rightarrow (1, -1, 0)$$
$$V_2 - V_3 \rightarrow (0, 1, -1)$$
$$V_3 - V_1 \rightarrow (-1, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

O USO GASS-JORDAN PER TROVARE IL RANGO O, DATO CHE È QUADRATA POSSO TROVARE IL DET CON SARRUSS

$\det = 0$

$\{V_1, V_2, V_3\} \rightarrow$ linearmente dipendenti

$$(V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_1) = 0$$

ESERCIZIO 9)

$$V = \langle (1,2,3), (0,1,2), (0,0,1), (1,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

trovare una base di V

$$(1,2,3) = (0,1,2) + (1,1,1)$$

$$V = \langle (0,1,2), (1,1,1), (0,0,1) \rangle$$

per vedere se è una base bisogna vedere se sono linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{R}^3$$

ESERCIZIO 10) n 3 $\{(1,1,0,0),(3,0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

l'uno non è multiplo dell'altro sono linearmente indipendenti

(se io faccio $\lambda \cdot (1,1,0,0) = (\lambda, \lambda, 0, 0) \neq (3,0,0,1)$)

1) non é un insieme di generatori perche la terza coordinata è 0 in entrambi

2) $\mathbb{R}^4$ vuol dire che un insieme di generatori deve contenere almeno 4 elementi in questo caso, qui sono solo 2

Vuole 4 vettori

prendo $(0,0,1,0)$ ← ci serve un elemento che non sia 0 nella terza posizione

prendo anche $(0,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ calcoliamo il RK

il RK è = 4 quindi è lin. indip. e quindi

è una base

ESERCIZIO 10) n 4

$(2,1,0)+(0,3,1)=(2,4,1)$

$$V = \{(2,1,0),(0,3,1),\cancel{(2,4,1)},(1,2,3),(3,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

questo è in più

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS...}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RANK MASSIMO QUINDI È UNA BASE

$$B = \{(2,1,0),(0,3,1),(1,2,3)\}$$

ESERCIZIO 11)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$\text{RK}\,A + \text{NULL}(A) =$ numero di colonne

$\downarrow$

dimensione Ker A

$\text{RK}\,A = 1$

$1 + \text{NULL}(A) = 3 \quad \rightarrow \quad \text{NULL}(A) = 2$

Qual è la base associata alla prima riga?

$$\left\{ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x_1 + 3x_3 = x_2 \right.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 = R_3 - R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 = R_3 - R_2$$

$$-1 \quad +1 \quad 0$$

$$0 \quad -1 \quad +1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \frac{R_3}{2} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 = R_2 + R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 = R_1 + R_2$$

$(1,2,3), (0,1,2), (0,0,1), (1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} R_3 = R_3 - R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_3 = R_3 + R_2$$

$$-1 \quad -2 \quad -3$$

$$B = \langle (1,2,3), (0,1,2), (0,0,1) \rangle$$