Aglebra Booleana

Nell'algebra booleana ogni valore può assumere solo 2 valori: 0(falso) e 1(vero)

Le **3 principali** operazioni sono:
Somma Logica OR
Prodotto Logico AND
Negazione NOT
ciascuna prende in ingresso 1 o più variabili binarie e restituisce un'altra variabile binaria

OR
restituisce 1 solo se almeno un ingresso è 1
si denota con "+" o "v"

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x_1 \vee x_2$$

TAVOLA DI VERITA

x_1	x_2	$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Proprietà base della somma logica

Proprietà commutativa:

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

Proprietà associativa:

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$$

Estensione a più variabili:

$$f = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Proprietà dell’elemento neutro:

$$0 + x = x$$

AND

restituisce 1 solo se tutti i valori in ingresso sono 1

si denota con “·” o “∧”

$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 = x_1 \wedge x_2$

TAVOLA DI VERITA

x_1	x_2	$f(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Proprietà base del prodotto logico

Proprietà commutativa:

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

Proprietà associativa:

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$

Estensione a più variabili:

$$f = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Proprietà dell'elemento neutro:

$$1 \cdot x = x$$

NOT

restituisce 1 se l'ingresso è 0 (fa l'opposto del valore iniziale)

si denota con "¯" o "¬"

$$f(x) = \overline{x} = \neg x$$

- Proprietà di involuzione (doppia negazione):

$$\overline{\overline{x}} = x$$

TAVOLA DI VERITA

x	f(x) = ¬x
0	1
1	0

ALTRE PROPRIETA

SOMMA	PRODOTTO
Proprietà distributiva:	
$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
Proprietà di idempotenza:	
$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Proprietà di complemento:	
$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Proprietà dello 1 e dello 0:	
$1 + x = 1$	$0 \cdot x = 0$

Equivalenza tra espressioni logiche

- Due espressioni logiche sono **equivalenti** se rappresentano la **stessa funzione**
- Per dimostrare l'equivalenza di due espressioni logiche si possono confrontare le loro tabelle di verità

$$(x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x_2})(\overline{x_1} + x_2) = x_1 x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	$(x_1 + x_2)(x_1 + \neg x_2)(\neg x_1 + x_2)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

GLI OPERATORI HANNO DELLE PRECENDENZE SECONDO CUI VANNO ESEGUITE LE OPERAZIONI:

NOT = 1

AND = 2

OR = 3

Quindi in un'espressione vanno prima eseguite le negazioni, poi gli and e poi gli or

Per forzare la precedenza di un operatore si possono usare le parentesi

●**Mintermine**: funzione a n variabili che vale 1 solo per una specifica configurazione delle variabili
●**Maxtermine**: funzione a n variabili che vale 0 solo per una specifica configurazione delle variabili

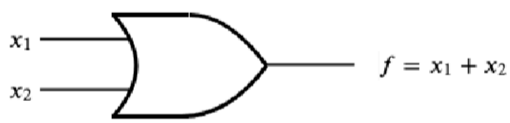
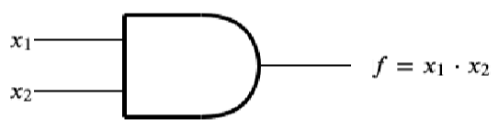
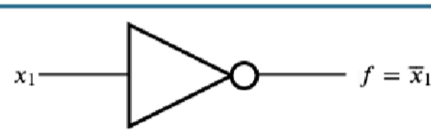
Forma minima
●**Una espressione si dice in forma minima quando non esiste nessun altra espressione equivalente con un costo inferiore**
●**il criterio di costo dei LETTERALI**: il costo di un espressione è dato dal numero di comparse di variabili nell'espressione stessa
●**Un'espressione in forma minima è più semplice ed economica da realizzare come circuito rispetto alle altre forme**

$$(x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x_2})(\overline{x_1} + x_2) = x_1 x_2$$

Costo 6 **Costo 2**

I circuiti che compongono AND NOT OR soni chiamano **porte**, una rete di porte logiche è una **rete combinatoria**

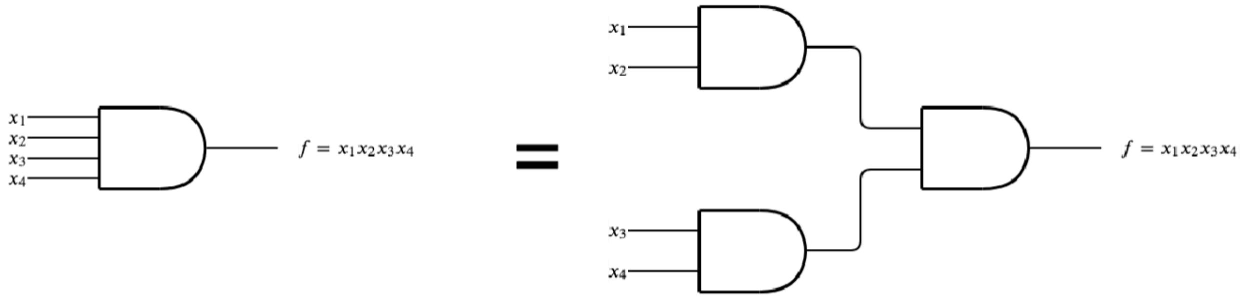
Ecco come si rappresentano queste porte logiche

OR	
AND	
NOT	

Grazie alla proprietà associativa AND e OR possono essere estese a più di 2 ingressi:

•Equivale a mettere in due livelli a **cascata** o ad **albero** porte AND o OR a due ingressi

Esempio porta AND a 4 ingressi:



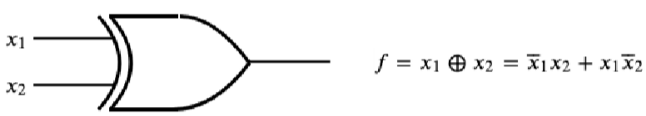
35

Un altro operatore logico importante è lo **XOR** (OR esclusivo) che restituisce 1 solo se le entrate 1 sono dispari, e si denota con “⊕”

TABELLA DI VERITA

x_1	x_2	$f(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Questa è la sua porta logica:

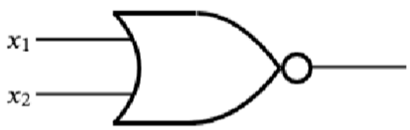


Altre 2 porte logiche di largo uso sono **NAND** e **NOR** (ovvero AND e OR negati)
si denotano con (NOR) "↓" (NAND)"↑"

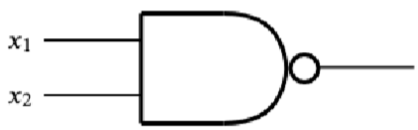
TABELLA DI VERITA

x_1	x_2	$\neg(x_1 + x_2)$	$\neg(x_1 x_2)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Sono rappresentati dalle seguenti **porte logiche**:



$$f = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2$$



$$f = x_1 \uparrow x_2 = \overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

●**NAND e NOR sono porte UNIVERSALI**: Si può realizzare una qualsiasi funzione combinatoria con reti logiche di soli NAND o soli NOR

NAND e NOR godono della proprietà commutativa ma non di quella associativa per questo la porta NAND a più ingressi si visualizza così: