DETERMINANTE (DI UNA MATRICE QUADRATA)

PERMUTAZIONE: S insieme finito $S = \{a_1, a_n\}$, $n \in \mathbb{R}$

è una mappa biettiva $\sigma : S \longrightarrow S$

SCAMBIO DELL' ORDINE DEGLI ELEMENTI

$a_i \longrightarrow a_j$

ad a_i gli mandiamo a_j

UN ALTRO INDICE

ESEMPIO: $S = \{1, 2, 3, 4\}$

$\sigma : (2, 3, 1, 4)$

$\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 4$

$S_n = \{$ l'insieme delle permutazioni di $\{1 \dots n\}\}$

lemma : $\# S_n = n! = n(n-1)\cdot(n-2) \dots$

n fattoriale

DIMOSTRAZIONE: per $\sigma(1)$ abbiamo n scelte,
per $\sigma(2)$ abbiamo $n-1$ scelte,
per $\sigma(3)$ abbiamo $n-2$ scelte
perché non possono andare in 2 nello stesso slot.

ESEMPIO: $S = \{1, 2, 3\}$

$$S_3 = \{ (1,2,3)_1, \quad (1,3,2)_2, \quad (2,1,3)_3, \quad (2,3,1)_4, \quad (3,1,2)_5, \quad (3,2,1)_6 \}$$

$3! = 6$

$S = \{1,2,3,4\} \to \sigma : \{2\ 3\ 1\ 4\} \to \tau\ \{1\ 4\ 2\ 3\}$

- Permutando un'altra permutazione otteniamo un'altra permutazione. Possiamo anche tornare indietro

---

$\sigma \in S_n$ in σ c'è un'inversione ogni qual volta diciamo che $i < j$ ma $\sigma(i) > \sigma(j)$

Chiamiamo $i(\sigma)$ il numero di inversioni di σ

ESEMPIO: $\sigma : (2, 3, 1, 4)$ $\quad i(\sigma) = 2$

VEDO SE I NUMERI, DA SINISTRA VERSO DESTRA, SONO GIUSTI.

2 viene prima del 3? (SI)

2 viene prima di 1? (NO) 1σ

3 viene prima di 1? (NO) 1σ

$\to 1+1 = 2\sigma$

1 viene prima di 4? (SI)

Una permutazione è pari se $i(\sigma)$ è pari, altrimenti dispari.

Il segno di σ è: $\begin{cases} 1 & \text{se è pari} \\ -1 & \text{se è dispari} \end{cases}$

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

$A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

il determinante di A è

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{segno}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$\prod$ ← PRODUTTORIA

$\sum$ ← SOMMATORIA

ESEMPIO: 2×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$-$ $+$

$$S_2 = \{ (1,2), (2,1) \}$$

0 1 NUMERO DI INVERSIONI

1 -1

PARI DISPARI

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \{ (1,2,3) \quad (1,3,2) \quad (2,1,3) \quad (2,3,1) \quad (3,1,2) \quad (3,2,1) \}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$$

$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

METODO SEMPLICE

METODO DI SARRUS

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & +,\ - & + & + \end{array}\right.$$

SCRIVO LA MATRICE E RICOPIO LE PRIME 2 COLONNE

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE: } \det A^t = \det A}$

PROPOSIZIONE: SE $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonale, tri. sup. o inf. allora il $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

lemma 1: $A^{(i)}$ i-esima riga

$A^{(i)} = \alpha \cdot V + \alpha' \cdot V'$ allora

$$\det A = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} A^{(i)} \\ A^{(i-1)} \\ A^{(i+1)} \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + \alpha' \det \begin{pmatrix} A^{(i)} \\ \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$$

lemma 2: Sia A^1 la matrice ottenuta scambiando 2 righe di A

$\det A^1 = -\det A$

Se A^1 è la matrice ottenuta applicando una commutazione σ alle righe di A^1 allora $\det A = \text{segno}(\sigma) \det A$