• Una [matrice] è una tabella rettangolare di elementi ordinati in righe e colonne.

PRIMA LE RIGHE E POI LE COLONNE

$$A \; \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonne}} \Bigg\} \; m \text{ RIGHE}$$

a_{ij} → Corrisponde a un elemento della matrice

RIGHE

$M_{m,n}(\mathbb{R})$ ← I NUMERI AL SUO INTERNO

MATRICE

COLONNE

ESEMPIO

$M_{1,3}(\mathbb{R}) \to 1, 2, 3$

$M_{2,1}(\mathbb{R}) \to \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

• Una matrice si dice quadrata quando ha lo stesso numero di righe e colonne

- Una matrice quadrata è triangolare superiore se

$a_{ij} = 0 \quad \forall \, i > j$

QUALSIASI

$\neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & X & X & \\ & a_{22} & X & X \\ 0 & & a_{nn} & \end{pmatrix}$$

$= 0$

- Una matrice quadrata è triangolare inferiore se

$a_{ij} = 0 \quad \forall \, j > i$

$$\begin{pmatrix} a & & 0 \\ X & a & \\ X \; X & X & a \end{pmatrix}$$

- Una matrice quadrata è diagonale se

$a_{ij} = 0 \quad i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a & & 0 & \\ & a & & \\ & & a & \\ 0 & & & a \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ triangolare inferiore

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ triangolare inf.

$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ tri. superiore

$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale

Matrice trasposta

$A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$A^t = (a'_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

↑

la trasposta di A

$\left[a'_{ij} = a_{ji} \right] \longrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$4 \quad a_{2,1} \qquad a_{1,2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 4 & \pi & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -1 & \pi & -2 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Una matrice quadrata A si dice simmetrica se la $A^t = A$

- 2 matrici $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k,l}$ sono uguali se $m = k$, $n = l$

$(A_{ij}) = (B_{ij})$

SOMMA MATRICI

Posso sommare solo matrici uguali cioè, che abbiano lo stesso numero di righe e colonne

$$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

ESEMPIO SOMMO SOLO LE MATRICI UGUALI (STESSE RIGHE E COLONNE)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

MOLTIPLICAZIONE

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ c \in (\mathbb{R})$$

$$c \cdot A = (c \cdot a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad c \in (\mathbb{R}) \qquad c \cdot A = \begin{pmatrix} c & 2c & 3c \\ 4c & 5c & 6c \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix},\quad c = -1 \qquad -1 \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & +5 \end{pmatrix}$$

SOTTRAZIONE

$$A - B = A + (-1)B$$

Posso sottrarre solo matrici uguali cioè che abbiano lo stesso numero di righe e colonne

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ 1 & 4 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -\sqrt{2} \\ 1 & -3 \\ -\pi & 5 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 8 \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 4 & 9 \\ 2\pi & 5 \end{pmatrix}$$

MOLTIPLICAZIONI TRA MATRICI (NON È COMMUTATIVA)

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \quad B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \in M_{m,p}(\mathbb{R})$$

Posso moltiplicare solo 2 matrici in cui la prima ha il numero di colonne uguale al numero di righe della seconda

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0-3 & 0+2+0 \\ 16+0-6 & 0+5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

- Moltiplico la prima riga per entrambe le 2 colonne poi moltiplico la seconda riga per entrambe le 2 colonne (devo sommare i risultati quando moltiplico le intere righe e colonne)

ALTRO ESEMPIO

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 8+0 & 12+0 \\ 0+4 & 0+5 & 0+6 \\ -1+0 & -2+0 & -3+0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

SPIEGAZIONE

$$\begin{pmatrix} 4\cdot1+0\cdot4 & 4\cdot2+0\cdot5 & 4\cdot3\cdot0\cdot6 \\ 0\cdot1+1\cdot4 & 0\cdot2+1\cdot5 & 0\cdot3+1\cdot6 \\ -1\cdot1+0\cdot4 & -1\cdot2+0\cdot5 & -1\cdot3+0\cdot6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A CASA

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 14 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$ RISULTATO

$$\begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 & -3+0 & 0+0 \\ -4+0 & 0+14 & +12+0 & 0+-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 14 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$