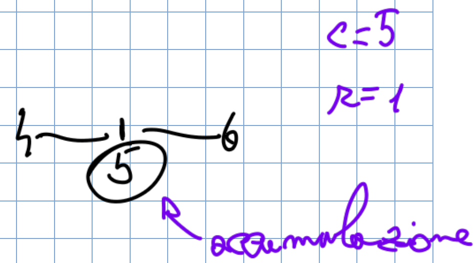
PUNTO DI ACCUMULAZIONE

$c \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X se $\forall R > 0$ in

$]c-R, c+R[\qquad \exists x \in X : x \neq c$



$D(X) \to$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE

OSS.

se $c \in D(X)$ in ogni suo intorno ci sono infiniti elementi di X $\Rightarrow$ un insieme finito NON HA punti di acc.

$X = \mathbb{Q} \to D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

$X = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \to D(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

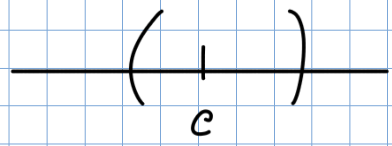
se $c \in X$ ma $c \notin D(X)$ allora c punto isolato

es. $X = [0,1] \cup \{4\}$

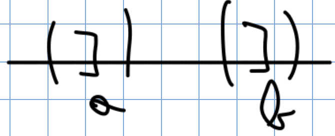
c è isolato se $\exists R > 0 : \;]c-R, c+R[\, \cap X = \{c\}$

$X = (a, b)$ $\quad D(X) = [a, b]$ infatti

$c \in \text{int}(X) \to c \in D(X)$



$a, b \in D(X)$



$F(X) \to$ punto di frontiera di X

$c \in F(X)$ se $\forall r > 0$ in $]c-r, c+r[$ ci sono elementi di X ed elementi $\notin X$

RELAZIONE

$c \in \text{int}(X) \Rightarrow c \in D(X)$

$c \in F(X) \Rightarrow c \notin \text{int}(X)$

$c \in \text{int}(X) \Rightarrow c \notin F(X)$

se c è isolato $\to c \notin D(X)$, $c \in F(X)$

se $c \in D(X) \to c \in F(X)$?

NON SEMPRE es. $c \in \text{int}(X)$

se $c \in F(X) \to c \in D(X)$?

NON SEMPRE es. c isolato

DEFINIZIONE

Un insieme X è chiuso se $\mathbb{R}-X$ è aperto

OSS.

$\mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow \emptyset$ chiuso

$\emptyset$ aperto $\Rightarrow \mathbb{R}$ chiuso

$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono gli unici ins. aperti e chiusi e sono gli unici ins. ... ovvero frontiera vuota

DEFINIZIONE

$$\overline{X} = X \cup D(X) = X \cup F(X)$$

$\overline{X}$ è chiuso

X è chiuso $\Leftrightarrow X = \overline{X}$

POTENZE

$a, b \in \mathbb{N}$ $\quad a^b$ si può fare $\forall a \in \mathbb{N}$

$\forall b \in \mathbb{N}_0$

DEFINIZIONE

$a^0 = 1$

$a^{n+1} = a^n \cdot a$

PROPRIETÀ

$$\begin{cases} a^b \cdot a^c = a^{b+c} \\ (a^b)^c = a^{bc} \\ a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b \end{cases}$$

$a \in \mathbb{N} \quad n \in \mathbb{N} \rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N} \rightarrow a^n$ e a^{-n} come nel caso in cui $a \in \mathbb{N}$

$a^{\frac{m}{n}}$?

TEOREMA DELLA RADICE N-ESIMA ARITMETICA

Sia $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\exists$ uno e uno solo $b > 0 : b^n = a$

$b = \sqrt[n]{a}$ RADICE N-ESIMA ARITMETICA

⌈ discussione dell'eq. binomia $x^n = a$

$n \in \mathbb{R}, n \geq 2, a \in \mathbb{R}$ quante soluzioni ha? ⌋

$a > 0$ una soluzione > 0 $x = \sqrt[n]{a}$

$x = 0$ non è soluzione

sia $x < 0$ una soluzione

CONSIDERIAMO

$-x > 0$ e calcoliamo $(-x)^n = (-1)^n$ $\begin{cases} a & n \text{ pari} \\ -a & n \text{ dispari} \end{cases}$

n pari $\rightarrow (-x)^n = a$ ma $-x > 0 \rightarrow -x = \sqrt[n]{a} \rightarrow x = -\sqrt[n]{a}$

n dispari $\rightarrow (-x)^n = -a \rightarrow$ nessuna sol. negativa

$a = 0$ $\quad x = 0$ unica sol.

$a < 0$ $\quad x = 0$ non è sol.

$\quad x > 0$ non è sol.

Sia $x < 0$ una sol. e cons. $(-x)^n \begin{cases} a & \text{se } n \text{ è pari} \\ -a & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

n pari $(-x)^n = a \rightarrow$ nessuna sol.

n dispari $(-x)^n = -a \rightarrow -x = \sqrt[n]{-a} \rightarrow x = \sqrt[n]{-a}$

es. $\sqrt[3]{27} = 3$ $\quad \sqrt[3]{-27} = -3 = -\sqrt[3]{-(-27)}$

$x^n = a$

	$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$
	$x = 0$	$\pm\sqrt{a}$	— n p.
		$\sqrt[n]{a}$	$-\sqrt[n]{-a}$

$\sqrt[n]{0} = 0$

$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a}$

$a < 0$, n dispari

TORNIAMO ALLE POTENZE

$n \in \mathbb{N}$ DEF. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a \geq 0$

$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ DEF $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$a \geq 0$ se $\frac{m}{n} > 0$

$a > 0$ se $\frac{m}{n} < 0$

$s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $s = \pm s_0, s_1 s_2$

$a > 0$ se $s < 0$

$a \geq 0$ se $s > 0$

es. 2^{π} $2^{3,1} = 2^{3 \frac{1}{10}}$

$2^{3,14}$

$2^{3,141}$ si procede per stabilizzazione

se $a < 0$, $n \in \mathbb{N}$, n dispari $a^n < 0$ in tutti gli altri casi

$a^n > 0$ $\forall a > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$4 > 1 \qquad 4^{2} > 1 \qquad$ se $x > 0 \to a^{x} > 1$ se $a > 1$

$4^{-2} < 1 \qquad\qquad a^{x} < 1$ se $a < 1$

eq. $\ulcorner a^{x} = b \lrcorner \qquad a > 0 \qquad a \neq 1$

$b > 0$

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEL LOGARITMO

dati $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$, $\exists$ uno e uno solo

$x \in \mathbb{R}$: $\qquad a^{n} > b \qquad x = \log_a b$

DEF $\qquad a^{\log_a b} = b$

PROPRIETÀ LOGARITMI

$\log_a a = 1 \qquad\qquad \log_a 1 = 0$

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a b^{c} = c \log_a b$

$\log_a b = (\log_a c)(\log_c b)$

$1 = \log_a a = (\log_a b)(\log_b a) \to \log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

$\log_a b > 0 \iff a, b$ sono entrambi > 1

o entrambi < 1

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ $\log_4 \frac{1}{4} = -1$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ $\log_2 4 = 2$

FUNZIONI

$A, B \neq \emptyset$ f criterio che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B

(A, B, f) funzione definita in A valori in B

$f : A \to B$ A dominio

B codominio

f legge di definizione

$\forall x \in A \to f(x) \in B$ valore della funzione

$f(A) \{ f(x) : x \in A \}$ → IMMAGINE DI f

se $f(A) = B$ f SURIETTIVA (SU TUTTO B)

$y \in B$ $f^{-1}(y) \{ x \in A : f(x) = y \}$ → immagine inversa di y

se $y \subseteq B$ $f^{-1}(y) = \{ x \in A : f(x) \in y \}$ → immagine inversa di y

se $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ f iniettiva / invertibile

allora $\forall y \in f(A)$ $\exists$ un unico $x \in A : f(x) = y$

in questo caso si costruisce $f^{-1} : f(A) \to A$

$f^{-1}(y) =$ l'unico $x \in A : f(x) = y$

FUNZIONE INVERSA

$f : A \to f(A)$

$f^{-1} : f(A) \to A$

ALTRE NOTAZIONI GENERALI:

$$f : A \to B \qquad \mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$$

GRAFICO

FUNZIONE COMPOSTA

$f(c) \to f : C \to B$

$\|$

$f : A \to B$

$g : C \to A$

$$x \in C \to \underset{\in A}{g(c)} \to f(g(c)) \in B$$

$f : \to$ funzione esterna

$g : \to$ funzione interna

FUNZIONI REALE DI VARIABILE REALE

$X \subseteq \mathbb{R} \qquad f : X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x-1}}$$

$$\begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases} \to m > -1$$

$$X =]-1, +\infty[$$

$$f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$$

PROPRIETÀ ANALITICHE DELLE FUNZIONI

$X \subseteq \mathbb{R} \quad f: X \to \mathbb{R} \quad f(X) \subseteq \mathbb{R}$

DEF. f limitata se lo è $f(X)$

cioè $\exists\, a, b \in \mathbb{R} : a \leq f(x) \leq b \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$\sup f = \sup f(X)$

$\inf f = \inf f(x)$

se $\exists\, M = \max f(x)$ $\quad M = \max f$ massimo assoluto di f in X

// $\quad$ // $\quad$ minimo assoluto

se $M = f(x)$ $\quad x =$ punto di massimo

se $m = f(x)$ $\quad x =$ punto di minimo

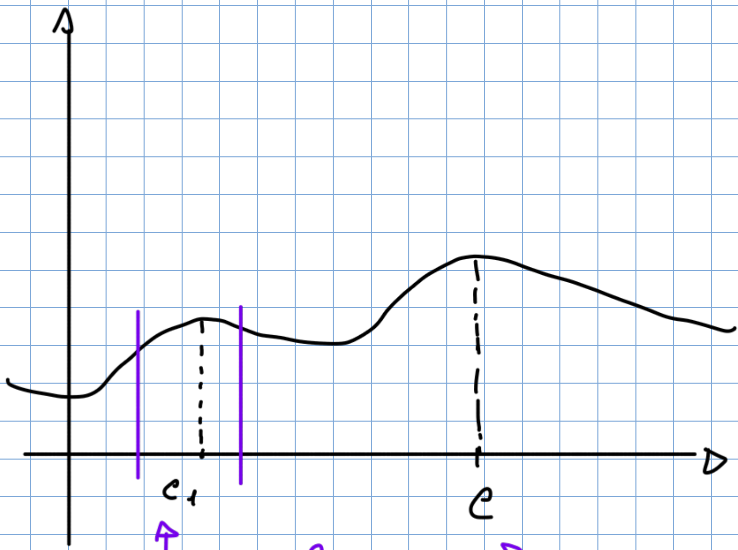
Il massimo è uno solo, i punti di massimo possono essere tanti

massimo e minimo assoluti = estremi assoluti

estremi relativi o locali

$c \in X$ punto di minimo (massimo) relativo se

$\exists\, r > 0$: se $x \in X \cap B(c,r)$ si ha $f(x) \geq f(c)$ $(\leq)$



massimo relativo rispetto all'intorno c_1

massimo assoluto

MONOTONIA

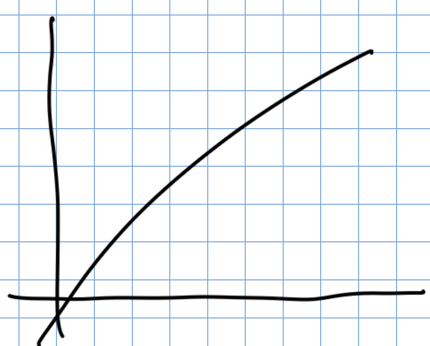
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ se $x < y \to f(x) \leq f(y)$ f crescente

$f(x) < f(y)$ f strett. "

$f(x) \geq f(y)$ f decrescente

$f(x) > f(y)$ " strett.

CRESCENTE



STRET. CRESCENTE