Sistemi lineari

$$\begin{cases} B + F + Z = 750\ g \\ B = 100\ g \\ F = 2(B + Z) \end{cases} \quad \begin{cases} F + Z = 650\ g \\ B = 100\ g \\ F = 2(100 + Z) \end{cases} \quad \begin{cases} Z = 150 \\ B = 100\ g \\ F = 500\ g \end{cases}$$

$$\begin{cases} B + F + Z + U + L + C = 1000\ kg \\ F = C + B \\ B = L \\ Z + U = F + 150\ g \\ F + C = Z + U \\ F + C = 2(L + B) \\ Z = \frac{2}{3} U \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

matrice dei coefficienti

matrice delle variabili

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matrice dei termini noti

$A \cdot X = B$ ← CORRISPONDE ALLA PRIMA EQ

(VADO AVANTI CON LE RIGHE E CORRISPONDONO ALLE ALTRE)

FORMA MATRICIALE

matrice completa

$$\left(A \mid B \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

SI FA GAUSS-JORDAN E TROVIANO LE SOLUZIONI

$$\begin{cases} B+F+Z+U+L+C=1000\,kg \\ F=C+B \\ B=L \\ Z+U=F+150\,g \\ F+C=Z+U \\ F+C=2(L+B) \\ Z=\frac{2}{3}U \end{cases}$$

devo portare tutto a primo membro

METTO I COEFFICENTI

$$\begin{array}{cccccc|c} B & F & Z & U & L & C & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1000 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ORA FACCIAMO GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} & \frac{6}{5} & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

GAUSS COMPLETO

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 150 \end{array}\right)$$

17/10/24

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

GAUSS - JORDAN

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

soluzioni = $\{(0,0,2)\}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - 3R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \nexists \text{ SOLUZIONI}$$

$$\underbrace{x_1 \cdot 0 \quad x_2 \cdot 0 \quad x_3 \cdot 0}_{0} = 1$$

NON PUÒ ESSERE

IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & +2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_4 = t$$

SOLUZIONI

$$= \{(1-t, 0, 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

funziona anche con matrici quadrate

Il sistema $A \cdot X = B$ con n variabili e m equazione

ha soluzione se:

$\mathrm{Rk}A = \mathrm{Rk}(A|B) \to R$ che chiameremo

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

in tal caso
- se $R = n$ (numero delle variabili) allora esiste 1 soluzione
- se $R < n$ allora esistono ∞ soluzioni che dipendono da $n - R$ parametri

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x - y + \alpha z = -1 \\ \alpha x + 2z = -2 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ (EVITARE CHE α SIA UN PIVOT)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2-2^2 & -2+2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

SCAMBIAMO LE RIGHE COSÌ NON ABBIAMO -2 COME PIVOT

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2-2^2 & -2+2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-2-2^2 & -2+2 2 \end{array}\right)$$

PIVOT

Se $2 \neq 1, -2$ il $\text{Rk}\, A = 3$ che è uguale a n allora $\exists$ 1 sola soluzione

$$2-2-2^2=0 \rightarrow 2^2+2-2=0 \quad (2-1)(2+2)=0$$

$$2=1, \quad 2=-2$$

Se $\alpha = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$x_3 = t$

SOLUZIONI

È UN PARAMETRO

$$\left\{ \left(-2-2x_3, -1-x_3, x_3 \right) \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\alpha = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \to \nexists \text{ SOLUZIONI}$$

se $a \neq 1, -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2(a-1)}{-(a-1)(a+2)} \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a+2} \end{array}\right)$$

SI CONTINUA NORMALE CON GAUSS - JORDAN

SISTEMI PARTICOLARI

- Sistemi omogenei $A \cdot X = 0$, ovvero $B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

SOLUZIONE BANALE $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dots\dots = 0 \\ \quad\ \ = 0 \\ \quad\ \ \vdots \\ \dots\dots = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che y e y' siano soluzioni di $A \cdot X = 0$ ovvero

$A \cdot y = 0 = A \cdot y' \rightarrow A(y - y') = Ay - Ay' = 0 - 0 = 0$

Come applichiamo questa regola a un sistema normale?

GLI ASSOCIAMO

$A \cdot X = B \longrightarrow A \cdot X = 0$

SIGMA MAIUSCOLO

Σ l'insieme delle soluzioni di $A \cdot X = B$ (È LO STESSO SIMBOLO DELLA SOMMATORIA)

Σ_0 l'insieme delle soluzioni di $A \cdot X = 0$

$$\Sigma = \left\{ y + y_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} y \text{ è una soluzione di } A \cdot X = B \\ y_0 \in \Sigma_0 \end{array} \right\}$$

con y soluzioni di $AX = B$

DIMOSTRAZIONE y soluzioni di $AX=B$

$y' \in \Sigma \rightarrow A \cdot y' = B$, consideriamo $y' - y$

$$A \cdot (y' - y) = A \cdot y' - A \cdot y = B - B = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow y' - y$ è soluzione di $AX = 0$

$\rightarrow y' - y = y_0 \in \Sigma_0 \rightarrow y' = y + y_0$, $y_0 \in \Sigma_0$

$y_0 \in \Sigma_0 \rightarrow A \cdot y_0 = 0$ e consideriamo $y + y_0$

$$A(y + y_0) = A \cdot y + A \cdot y_0 = B + 0 = B$$

$\rightarrow (y + y_0) \in \Sigma$

$\triangleright$

ESEMPIO

$A \cdot X = B$

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + 2z = -2 \\ y + z = -1 \end{cases} \longrightarrow$$

$A \cdot X = 0$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$A \cdot X = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{GAUSS}\dots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \quad x_3 = t \Rightarrow \Sigma_0 = \left\{ (-2x_3, -x_3, x_3), \ | x_3 \in \mathbb{R} | \right\}$$

MATRICE NORMALE $A \cdot X = B$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{GAUSS}\dots} \begin{cases} x_1 = -2 - 2x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 \end{cases} \quad x_3 = t$$

$$\Sigma = \left\{ (-2 - 2x_3 - 1 - x_3, x_3) \right\}$$

$$\Sigma = \{ (-2, -1, 0) + (-2x_3, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$$

Σ Σ

RACCOLGO x_3

$$\Sigma = \{ (-2, -1, 0) + x_3(-2, -1, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$$

TEOREMA DI CRAMER (MATRICE QUADRATA)

$A \cdot X = B$ sistema lineare, $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

Se A è invertibile allora $Ax = B$ ha un'unica soluzione

data da $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ dove A_i è la matrice

ottenuta da A sostituendo l'i-esima colonna con B

DIMOSTRAZIONE:

$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$, $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A} \rightarrow X = \dfrac{A^* \cdot B}{\det A}$

A è invertibile

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| (-1)^{i+j} b_j}_{} = \det A_i$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & b_2 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

with A over the first three columns and B over the last column.

det calcolato con Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \alpha^2 + \alpha - 2$$

SOSTITUISCO B CON OGNI COLONNA DI A

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A_1 = 2 - 2\alpha$$

calcolato con sarrus

colonna alla quale sostituire B

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \alpha & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A_2 = -\alpha(\alpha - 1)$$

calcolato con sarrus

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A_3 = -2\alpha + \alpha$$

calcolato con sarrus

Prendo ogni risultato e lo divido per det A

$\downarrow$

$$x_1 = \frac{2 - 2a}{a^2 + a - 2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{-2(a-1)}{(a+2)(a-1)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{-2}{a+2}$$

$$\underbrace{x_2 = \frac{-a}{a+2} \qquad x_3 = \frac{-2}{a+2}}_{\text{Questi sono già semplificati}}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2}{a+2} \\ x_2 = \dfrac{-a}{a+2} \\ x_3 = \dfrac{-2}{a+2} \end{cases}$$