$\mathcal{U}, W \subseteq V$ tale che $\mathcal{U} \cap W = \{0\}$ allora

$\mathcal{U} + W = \mathcal{U} \oplus W$, $V \in \mathcal{U} \oplus W$

$\exists ! \, u \in \mathcal{U}$, $w \in W$ tali che $u + w = v$

BASI DI SPAZI VETTORIALI

V spazio vettoriale , $S \subseteq V$ sottoinsieme

S è un insieme di generatori di V se $\langle S \rangle = V$

(S genera V)

perché ogni vettore di S può essere scritto come combinazione lineare

ESEMPIO:

$S = \{(0,1), (1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\langle S \rangle = \mathbb{R}^2$ $\quad (3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$

$R = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$

$\langle R \rangle = \mathbb{R}^2$ $\quad (3,4) = 3 \cdot (1,0) + 4(0,1) = 3 \cdot (1,1) + 4(0,1)$

$S \subseteq V$ sotto insieme, se $\forall\, V_1 \dots V_n \in S$

combinazione lineare

$$\lambda_1 \cdot V_1 + \dots\dots \lambda_n \cdot V_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0$$

allora S si dice linearmente indipendente

ESEMPIO

$$S = \{(0,1),(1,0)\}$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$

c. l. $\lambda_1(0,1) + \lambda_2(1,0) = (0,0)$

$$\Downarrow$$

(λ_2, λ_1) linearmente indipendente

è linearmente indipendente se l'unico modo che ho per far venire la c. l. $= 0$ è usare $\lambda = 0$

$R = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ linearmente dipendente

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = -1$

$$1(0,1) + 1 \cdot (1,0) - 1(1,1) = (0,0)$$

$V = \{(0,0)\} \longrightarrow 1(0,0) = (0,0)$ linearmente dipendente

è linearmente dipendente se per qualsiasi λ la combinazione lineare è $= 0$

• PROPOSIZIONE: $n > 1$, $S = \{V_1 \dots V_n\}$ linearmente dipendente

$\Rightarrow \exists\, j \in \{1 \dots n\}$ tale che $V_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mu_i \cdot V_i$

DIMOSTRAZIONE:

S linearmente dipendente $\Rightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_n$ non tutti ZERO tali che $\lambda_1 \cdot V_1 + \dots \lambda_n \cdot V_n = 0$

$\exists\, j \in \{1 \dots n\}$ tale che $\lambda_j \neq 0$

$\Rightarrow V_j = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \cdot V_i$, $\mu_i = - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$

$= \sum_{i=1,\, i \neq j}^{n} \mu_i \cdot V_i$

BASE

Un insieme $B \subseteq V$ è una base se:

SPAZIO VETTORIALE

1) $\langle B \rangle = V$

2) B è linearmente indipendente

ESEMPIO

$B = \{(0,1), (1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ = PIANO CARTESIANO

$\lambda(0,1) + \mu(1,0) \longrightarrow (\lambda, \mu)$ e quindi

REMARK

Una base viene considerata ordinata se

$$B = \{V_1, V_2\} \neq \{V_2, V_1\}$$

- Corollario

B è la base di $\overset{\text{S. V.}}{V}$, $B = \{V_1 \dots V_n\}$ allora

$\forall v \in V \ \exists! \ \lambda_1 \dots \lambda_n$ tale che $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_n \cdot v_n$

V spazio vettoriale, $\overset{\text{BASE}}{B} = \{b_1 \dots b_n\}$

$\forall v \in V \quad v = \lambda_1 \cdot b_1 \dots + \lambda_n \cdot b_n$ per unici $b_1 \dots b_n \in \mathbb{R}$

$v \longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$ coordinate di v rispetto alla base B

$$(V \simeq R^n)$$

• PROPOSIZIONE

V spazio vettoriale, $S = \{v_1 \dots v_n\}$ genera V

allora esiste un sottoinsieme di S che forma una base di V

• lemma di STEINTZ

V spazio vettoriale, $S = \{v_1 \dots v_n\}$ generatore di V

se $\{w_1 \dots w_r\}$ è linearmente indipendente allora $r \leq n$

• Corollario

se V è uno spazio vettoriale con base $B = \{b_1 \dots b_n\}$,

$S = \{w_1 \dots w_r\} \subseteq V$

1) S genera $V \to r \geq n$

2) S linearmente indipendente $\to r \leq n$

• Corollario

$B = \{ V_1 \ldots\ldots V_n \}$ e $B' = \{ W_1 \ldots W_R \}$ basi di V allora

$n = R$

DEFINIRE LA DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE V E IL NUMERO DI ELEMENTI CHE COMPONGONO UNA SUA BASE QUALUNQUE

R^n $\mathcal{E} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{e_n}, \ldots\ldots \right\}$ basi di $\mathbb{R}^n$

dimensione $\mathbb{R}^n = n$ base standard

• Corollario:

V spazio vettoriale, $\dim V = n$

$S = \{ V_1 \ldots V_n \} \subseteq V$

per vedere se è una base:

1) S linearmente indipendente $\rightarrow$ S è una base

2) S genera V $\rightarrow$ S è una base

ESEMPIO

$V = \{0\}$ SPAZIO VETTORIALE NULLO

non ho una base perché il sottoinsieme $S = \{0\}$ è linearmente dipendente (così come V)

$\dim V = 0$ non ha base

$V = \mathbb{R}$ $\quad B = \{1\}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \lambda \cdot 1,$

GENERA $\mathbb{R}$ $\quad 0 = \lambda \cdot 1 = \lambda = 0$

$\dim \mathbb{R} = 1$

$M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad$ base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim M_{2,2} = 4$

$M_{m,n}(\mathbb{R})$ $\quad \dim M_{m,n} = m \cdot n$

- Corollario

V spazio vettoriale, $\dim V = n$

$W \subseteq V$ sottospazio

$\dim W \leq \dim V$

in più la $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$

• PROPOSIZIONE V spazio vettoriale, $\dim V = n$ $\quad S \leq V$

$S = \{V_1 \dots V_r\}$ lin. indi. $(r \leq n)$ allora $\exists\, V_{r+1} \dots V_n$
s.v.

tali che $\{\underbrace{V_1 \dots\dots V_r}_{S \text{ base}}, \underbrace{V_{r+1} \dots\dots V_n}_{B \text{ base}}\}$ è una base di V

TEOREMA FORMULA DI GRASSMANN

V spazio vettoriale, $U, W \leq V$ sottospazi

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$