

Esercizi Capitolo 10 - Code con priorità e insiemi disgiunti

Alberto Montresor

19 Agosto, 2014

Alcuni degli esercizi che seguono sono associati alle rispettive soluzioni. Se il vostro lettore PDF lo consente, è possibile saltare alle rispettive soluzioni tramite collegamenti ipertestuali. Altrimenti, fate riferimento ai titoli degli esercizi. Ovviamente, si consiglia di provare a risolvere gli esercizi personalmente, prima di guardare la soluzione.

Per molti di questi esercizi l'ispirazione è stata presa dal web. In alcuni casi non è possibile risalire alla fonte originale. Gli autori originali possono richiedere la rimozione di un esercizio o l'aggiunta di una nota di riconoscimento scrivendo ad `alberto.montresor@unitn.it`.

1 Problemi

1.1 Esecuzione `heapsort()` (Esercizio 10.2 del libro)

Si specifichi, passo dopo passo, il contenuto dello *heap* eseguendo la procedura `heapsort()` per ordinare alfabeticamente gli 11 elementi: O, R, D, I, N, A, M, E, N, T, O. Sorgono difficoltà dalla presenza di elementi con lo stesso valore?

Soluzione: Sezione 2.1

1.2 Dimensione dei livelli (Esercizio 10.4 del libro)

Si dimostri che in un albero *heap* di n elementi ci sono al più $\lceil n/2^{m+1} \rceil$ nodi di altezza m .

Soluzione: Sezione 2.2

1.3 Versione iterativa (Esercizio 10.5 del libro)

Per chiarezza di esposizione, `maxHeapRestore()` è una funzione ricorsiva. Nel caso pessimo, l'altezza dell'albero di ricorsione è potenzialmente pari a quello dell'albero *heap*; lo spazio aggiuntivo richiesto durante l'esecuzione dell'algoritmo Heapsort (oltre cioè a quello richiesto per memorizzare gli n elementi da ordinare) è quindi $O(\log n)$. Scrivere una versione iterativa di `maxHeapRestore()` che richieda uno spazio aggiuntivo costante.

Soluzione: Sezione 2.3

1.4 Indice iniziale dei vettori (Esercizio 10.6 del libro)

Per chiarezza di esposizione, le implementazioni della coda con priorità e di Heapsort viste in questo capitolo sono basate su vettori in cui l'indice del primo elemento è pari ad 1. Ma molti linguaggi di programmazione (Java e C/C++, per esempio) sono basati su vettori il cui primo elemento è 0. Scrivere una coda con priorità e un algoritmo Heapsort per un linguaggio con vettori di questo tipo.

Soluzione: Sezione 2.4

1.5 Altezza Heap

Dimostrare che uno *heap* con n nodi ha altezza $\Theta(\log n)$.

Soluzione: Sezione 2.5

1.6 heapBuild() basato su inserimenti

(a) Scrivere lo pseudocodice di una versione alternativa di `heapBuild()` basata sulla `insert()`. (b) Le due procedure creano lo stesso *heap*? Dimostrare che lo fanno o produrre un esempio contrario. (c) Qual è la complessità della versione alternativa di `heapBuild()`?

Soluzione: Sezione 2.6

1.7 k -merging

Supponete di avere k vettori, ognuno di m elementi. Si vuole ottenere un vettore ordinato di $n = km$. Per ordinarlo, un possibile algoritmo è il seguente: si fa il merge del primo vettore con il secondo, ottenendo un nuovo vettore di $2m$ elementi; poi si fa il merge del vettore così ottenuto con il terzo, ottenendo $3m$ elementi; e così via.

1. Calcolare la complessità di questo algoritmo
2. Mostrare un algoritmo più efficiente.

Soluzione: Sezione 2.8

1.8 Heap ternario

Uno *heap* ternario è simile ad uno *heap* binario, tranne che per il fatto che i nodi interni possono avere fino a tre figli.

1. È possibile rappresentare uno *heap* ternario in un vettore? Spiegare
2. Qual è l'altezza di uno *heap* ternario di n elementi (in funzione di n)?
3. Si scriva la funzione `deleteMax()` per gli *heap* ternari. Cosa cambia rispetto agli *heap* binari? Calcolare la complessità computazionale di tale funzione.
4. Si scriva la funzione `insert()` per gli *heap* ternari. Cosa cambia rispetto agli *heap* binari? Calcolare la complessità computazionale di tale funzione.

Soluzione: Sezione 2.9

1.9 Max in min-heap

Una semplice domanda. Supponete di avere un *min-heap* di n elementi, e di cercare il valore **massimo** (non minimo). In quali posizioni del vettore cercate? Giustificare la risposta.

Soluzione: Sezione 2.10

1.10 Verifica heap

Sia dato un vettore A contenente n valori numerici. Scrivere un algoritmo che verifica se tale vettore è un *max-heap* di n elementi. L'algoritmo effettua semplicemente la verifica, senza modificare lo *heap*.

Soluzione: Sezione 2.11

2 Soluzioni

2.1 Esecuzione heapsort() (Esercizio 10.2 del libro)

Nella tabella successiva sono illustrati i vari passi dell'algoritmo. Nella prima colonna, lo stato del vettore ad ogni passo. Nella seconda colonna, l'operazione che ha portato il vettore in quello stato.

La tabella è ulteriormente divisa in due righe; la prima rappresenta l'esecuzione di `heapBuild()`, mentre la seconda rappresenta lo spostamento dell'elemento massimo dello *heap* nella posizione corretta.

Si noti che gli elementi che fanno effettivamente parte dello *heap* sono sottolineati; gli elementi non sottolineati sono elementi ordinati. Come è possibile vedere, elementi dello stesso valore non comportano difficoltà.

<u>ORDINAMENTO</u>	Iniziale
<u>ORDITAMENNO</u>	maxHeapRestore(5)
<u>ORDNTAMEINO</u>	maxHeapRestore(4)
<u>ORMNTADEINO</u>	maxHeapRestore(3)
<u>OTMNRADENO</u>	maxHeapRestore(2)
<u>TRMNOADENO</u>	maxHeapRestore(1)
<u>ORMNOADEINT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[11]$
<u>ROMNOADEINT</u>	maxHeapRestore(1)
<u>NOMNOADEIRT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[10]$
<u>OOMNNADEIRT</u>	maxHeapRestore(1)
<u>IOMNNADEORT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[9]$
<u>ONMINADEORT</u>	maxHeapRestore(1)
<u>ENMINADOORT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[8]$
<u>NNMIEADOORT</u>	maxHeapRestore(1)
<u>DNMIEANOORT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[7]$
<u>NIMDEANOORT</u>	maxHeapRestore(1)
<u>AIMDENNOORT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[6]$
<u>MIADENNOORT</u>	maxHeapRestore(1)
<u>EIADMNNOORT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[5]$
<u>IEADMNNOORT</u>	maxHeapRestore(1)
<u>DEAIMNNOORT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[4]$
<u>EDAIMNNOORT</u>	maxHeapRestore(1)
<u>ADEIMNNOORT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[3]$
<u>DAEIMNNOORT</u>	maxHeapRestore(1)
<u>ADEIMNNOORT</u>	$A[1] \leftrightarrow A[2]$

2.2 Dimensione dei livelli (Esercizio 10.4 del libro)

Si può dimostrare la proprietà per induzione su m . Sia n_m il numero di nodi ad altezza m nell'albero heap T .

Nel caso $m = 0$, vogliamo contare le foglie di T . Abbiamo visto che tutti i nodi compresi fra 1 e $\lfloor n/2 \rfloor$ sono nodi interni, quindi il valore di n_0 è pari a $n - \lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$. Questo prova il caso base.

Nel passo induttivo, supponiamo provata la proprietà per $m - 1$ e cerchiamo di dimostrarla per m . Sia T' l'albero ottenuto da T rimuovendo tutte le foglie. Per quanto detto sopra, T' ha $n' = \lfloor n/2 \rfloor$ nodi (gli ex nodi interni); inoltre, i nodi ad altezza m in T hanno altezza $m - 1$ in T' ; in altre parole, il numero n'_{m-1} di nodi ad altezza $m - 1$ in T' è pari a n_m . Per la proprietà induttiva, si ha:

$$n_m = n'_{m-1} = \lceil \frac{n'}{2^{m-1}} \rceil = \lceil \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2^{m-1}} \rceil \leq \frac{n}{2^{m+1}}$$

Questo conclude la dimostrazione.

2.3 Versione iterativa (Esercizio 10.5 del libro)

Il codice della versione iterativa è molto semplice: fa uso di una variabile *stop* per decidere quando sospendere l'esecuzione e la variabile *i* assume, di volta in volta, l'indice dell'elemento del vettore di cui verificare la proprietà *heap*.

```

maxHeapRestore(ITEM[] A, integer i, integer dim)
boolean stop ← false
while not stop do
    integer max ← i
    if l(i) ≤ dim and A[l(i)] > A[max] then max ← l(i)
    if r(i) ≤ dim and A[r(i)] > A[max] then max ← r(i)
    if i ≠ max then
        A[i] ↔ A[max]
        i ← max
    else
        stop ← true

```

2.4 Indice iniziale dei vettori (Esercizio 10.6 del libro)

Una versione in Java può essere trovata al seguente indirizzo:

<http://www.disi.unitn.it/~montreso/asd/appunti/codice/Heap.java>

2.5 Altezza *heap*

Il numero di nodi in uno *heap* di altezza h è compreso fra 2^h (tutti i primi $h - 1$ livelli sono completi e c'è un nodo a livello h) e $2^{h+1} - 1$ (tutti i livelli sono completi):

$$2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1 \leq 2^{h+1}$$

Applicando il logaritmo ad entrambi i lati della disequazione, si ottiene:

$$h \leq \log n \leq h + 1$$

Notando che $h + 1 \leq 2h$ per $h \geq 1$, si dimostra che $\log n = \Theta(h)$ (infatti, $c_1 h \leq \log n \leq c_2 h, \forall h \geq m$, con $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $m = 1$. Per la proprietà di simmetria di Θ , questo dimostra che $h = \Theta(\log n)$).

2.6 `heapBuild()` basato su inserimenti

- Versione alternativa:

```

heapBuild(ITEM[] A, integer n)
PRIORITYQUEUE H ← new PriorityQueue(n)
for i ← 1 to n do
    H.insert(A[i])

```

- Controesempio per l'uguaglianza degli *heap*: Costruire un *max-heap* a partire dai valori 4, 7, 9, 10.
- Complessità di `heapBuild()`: Consideriamo $n = 2^{h+1} - 1$, quindi un albero perfetto di altezza h . Al livello più basso, ci sono $\lceil n/2 \rceil$ nodi. Se i valori sono già ordinati, ogni nuovo inserimento deve risalire fino alla radice. Quindi $T(n) \geq n/2 \log n = \Omega(n \log n)$.

Inoltre, il costo totale può essere limitato superiormente in questo modo:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \log n \rfloor} 2^i i \\
 &\leq \sum_{i=0}^{\lfloor \log n \rfloor} 2^i \log n \\
 &= \log n \sum_{i=0}^{\lfloor \log n \rfloor} 2^i \\
 &= \log n (2^{\lfloor \log n \rfloor + 1} - 1) = O(n \log n)
 \end{aligned}$$

Quindi $T(n) = \Theta(n \log n)$.

2.7 Foglie in heapBuild()

Supponiamo che per assurdo che $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ non sia una foglia. Allora $2\lfloor n/2 \rfloor + 2$ fa parte dello *heap*. Ma $2\lfloor n/2 \rfloor + 2$ è uguale a $n + 2$ o $n + 1$, che sono entrambi fuori dallo *heap*. Assurdo.

2.8 k -merging

Parte (1)

$$T(n) = 2m + 3m + \dots + km = \sum_{i=2}^k im = m \sum_{i=2}^k i = O(mk^2) = O(nk)$$

Parte (2) Utilizziamo un *min-heap* binario di dimensione k , inizializzato con i primi valori di tutte le liste. Viene estratto il valore minimo dallo *heap*, che viene collocato nella prima posizione libera del vettore finale. Si inserisce quindi nello *heap* il prossimo valore preso dalla lista cui apparteneva il valore minimo appena rimosso (se ne esistono ancora). Il costo totale è quindi $n \log k$. Si è utilizzata la notazione $\langle i, v \rangle$ per operare su una struttura contenente una coppia di elementi.

```

integer [][] merge(integer[][] A, integer k, integer m)
    PRIORITYQUEUE Q ← new PriorityQueue(k)           % Coda con priorità per decidere il minimo
    integer[] V ← new integer[km]                       % Vettore unito
    integer[] p ← new integer[k]                       % Posizione attuale di ognuno dei vettori da unire
    for i ← 1 to k do
        p[i] ← 2
        Q.insert(⟨i, A[i][1]⟩, A[i][1])
    integer c ← 1                                       % Posizione nel vettore unito
    while not Q.isEmpty() do
        ⟨i, v⟩ ← Q.deleteMin()
        V[c] ← v
        c ← c + 1
        if p[i] ≤ m then
            Q.insert(⟨i, A[i][p[i]]⟩, A[i][p[i]])
            p[i] ← p[i] + 1
    return V

```

2.9 Heap ternario

1. La radice è memorizzata nella casella $A[1]$; i figli della posizione i sono memorizzati nelle posizioni $3i - 1, 3i, 3i + 1$.
2. Dato che ogni nodo ha 3 figli, l'altezza di uno *heap* ternario con n nodi è $\Theta(\log_3 n)$.
3. La procedura non viene modificata, l'unica modifica deve essere apportata alla `maxHeapRestore()`, che deve confrontare il nodo passato con tre figli invece che con due. La complessità della `deleteMax()` è quindi ancora quella della `maxHeapRestore()`, che essendo proporzionale all'altezza dell'albero è $\Theta(\log_3 n)$.
4. La procedura non viene modificata, rimane proporzionale all'altezza dell'albero: $\Theta(\log_3 n)$

2.10 Max in *min-heap*

Ogni posizione interna (non-foglia) i ha almeno un figlio $2i$ che ha valore maggiore di quello in i . Quindi non può essere massimo. Si può quindi cercare nelle sole posizioni $[n/2] + 1 \dots n$, il cui numero è comunque $O(n)$.

2.11 Verifica *heap*

CHECKMAXHEAP(**integer** $[\]$ A , **integer** n)

```
for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
    if  $A[i/2] < A[i]$  then
        return false;
return true
```

3 Problemi aperti

3.1 Complessità (Esercizio 10.3 del libro)

Si dimostri che la procedura `minHeapRestore()` ha complessità $O(1 + \log(dim/i))$.