

Esercizio 1

E' facile osservare che un limite inferiore per $T(n)$ è $\Omega(2^n)$, in quanto la componente non ricorsiva è pari a 2^n . Proviamo quindi a dimostrare che $T(n) = O(2^n)$.

- Caso base: $T(1) = 1 \leq c2^1$, il che è vero è per $c \geq 1/2$.
- Ipotesi induttiva: $T(n') \leq c2^{n'}$, per ogni $n' < n$.
- Passo induttivo:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + 2^n \\ &\leq c2^{n/2} + 2^n \\ &\leq c2^n \end{aligned}$$

L'ultima disequazione è vera per $c \geq \frac{2^{n/2}-1}{2^{n/2}}$. Poichè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n/2}-1}{2^{n/2}} = 1$ e $\frac{2^{n/2}-1}{2^{n/2}} < 1$ per ogni $n \geq 1$, la disequazione è soddisfatta da $c = 1$ e $m = 1$.

Esercizio 2

Per valutare se un albero T è k -bilanciato, utilizziamo una procedura **balance**(TREE T , **integer** k) che restituisce -1 se il T non è k -bilanciato, oppure l'altezza di T se T è k -bilanciato e questa proprietà vale per tutti i suoi sottoalberi.

```
integer balance(TREE  $T$ , integer  $k$ )
if  $T = \text{nil}$  then
   $\hookrightarrow$  return 0
integer  $L \leftarrow$  balance( $T.left$ )
integer  $R \leftarrow$  balance( $T.right$ )
if  $L < 0$  or  $R < 0$  or  $|L - R| > k$  then
   $\hookrightarrow$  return  $-1$ 
else
   $\hookrightarrow$  return max( $L, R$ ) + 1
```

Trattandosi di visita in profondità, la complessità della procedura è $O(n)$, dove n è il numero di nodi dell'albero.

Esercizio 3

Un modo semplice, ma poco efficiente per scrivere tale algoritmo è il seguente:

```
boolean 4cycles
(GRAPH  $G$ ) foreach  $u \in G.V()$  do
  foreach  $v \in u.adj()$  do
    foreach  $w \in v.adj() - \{u, v\}$  do
      foreach  $x \in w.adj()$  do
        if  $u \in x.adj()$  then
           $\hookrightarrow$  return true
return false
```

Questa procedura ha una complessità pari a $O(n^5)$.

E' possibile costruire una matrice di adiacenza M di dimensione $n \times n$ tale per cui $M[u, v] = \mathbf{true}$ se e solo se esiste w tale per cui $(u, w) \in E$ e $(w, v) \in E$. In quel caso, esiste un ciclo di dimensione 4 se esistono due nodi u, v tali per cui $M[u, v] = M[v, u] = \mathbf{true}$. Tale algoritmo ha complessità $O(n^3)$ per la costruzione della matrice.

boolean 4cycles(GRAPH G)

```

integer[][]  $M \leftarrow$  new integer[1... $G.n$ ][1... $G.n$ ]
{ Costruzione della matrice di adiacenza  $M$ , costo  $O(n^3)$  }
foreach  $u \in G.V()$  do
    foreach  $v \in G.V()$  do
         $M[u, v] \leftarrow \exists w \in G.V() - \{u, v\} : w \in u.adj(v) \text{ and } v \in u.adj(w)$ 
foreach  $u \in G.V()$  do
    foreach  $v \in G.V()$  do
        if  $M[u, v]$  and  $M[v, u]$  then
            return true
return false

```

Esercizio 4

Il problema si risolve semplicemente utilizzando la programmazione dinamica. Sia $T(n)$ il numero di modi in cui è possibile scegliere n scalini; allora $T(n)$ può essere espresso nel modo seguente:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \sum_{k=1}^{\min\{n,4\}} T(n-k) & n > 0 \end{cases}$$

Un algoritmo basato su programmazione dinamica per risolvere il problema è il seguente:

integer countStairs(integer n)

```

integer[]  $T \leftarrow$  new integer[0... $n$ ]
 $T[0] \leftarrow 1$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
     $T[i] \leftarrow 0$ 
    for  $k \leftarrow 1$  to  $\min(i, 4)$  do
         $T[i] \leftarrow T[i] + T[i-k]$ 
return  $T[n]$ 

```

La complessità della procedura è pari a $O(n)$.

Notate che $T(n)$ è uguale al valore del $(n+1)$ -esimo "Tetranacci number"

<http://mathworld.wolfram.com/TetranacciNumber.html>