Appunti lezione – Capitolo 6
Alberi Binari di Ricerca

Alberto Montresor

08 Ottobre, 2014

1 Domanda – Proprietà d'ordine

Q: Come devo visitare un albero binario di ricerca per ottenere la lista ordinata dei valori?
A: Una visita di tipo simmetrico restituisce i valori in ordine crescente.

2 Domanda – Altezza albero ABR, qual è il caso pessimo?

Qui bisognerebbe specificare meglio la domanda. Si intende: qual è l'albero di altezza massima? E' quello in cui valori sono disposti linearmente, per esempio a causa di un inserimento ordinato di valori. Nel qual caso $h = n$.

3 Domanda – Altezza albero ABR, qual è il caso ottimo?

Qui bisognerebbe specificare meglio la domanda. Si intende: qual è l'albero di altezza minima? E' quello meglio bilanciato, ovvero un albero completo o perfetto. Nel qual caso $h = \Theta(\log n)$.

4 Altezza massima di un albero rosso-nero con n nodi interni

Teorema 1. In un albero RB, un sottoalbero di radice u contiene almeno $n \geq 2^{b(u)} - 1$ nodi interni.

Dimostrazione. Dimostrazione per induzione sull'altezza (non sull'altezza nera).

- **Caso base**: $h = 0$. Allora u deve essere una foglia **nil** e il sottoalbero con radice in u contiene esattamente almeno $n \geq 2^{b(u)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$ nodi interni.

- **Passo induttivo**: $h > 1$. Allora v è un nodo interno con due figli. Ogni figlio v ha un'altezza nera $b(v)$ pari a $b(u)$ o a $b(u) - 1$, a seconda del suo colore (rosso: $b(u)$, nero: $b(u) - 1$). Usando l'ipotesi induttiva, possiamo dire che ogni figlio ha almeno $2^{b(u)-1} - 1$ nodi interni. Quindi, il sottoalbero con radice in u ha almeno:

  $$n \geq 2^{b(u)-1} - 1 + 2^{b(u)-1} - 1 + 1 = 2^{b(u)} - 1$$

  nodi

Questo dimostra il teorema. □

Teorema 2. In un albero RB, almeno la metà dei nodi dalla radice ad una foglia deve essere nera.

Dimostrazione. Per la proprietà 2, se un nodo è rosso, i suoi figli devono essere neri. Quindi la situazione in cui sono presenti il maggior numero di nodi neri è il caso in cui rossi e neri sono alternati, dimostrando il teorema. □

Teorema 3. In un albero RB, nessun percorso da un nodo v ad una foglia è lungo più del doppio del percorso da v ad un'altra foglia.

Dimostrazione. Per definizione, ogni percorso da un nodo ad una qualsiasi foglia contiene lo stesso numero di nodi neri. Dal teorema 2, almeno metà dei nodi in ognuno di questi percorsi sono neri. Quindi, al limite, uno dei due percorsi è costituito da solo nodi neri, mentre l'altro è costituito da nodi neri e rossi alternati. $\square$

Teorema 4. L'*altezza* massima di un albero rosso-nero con n nodi interni è al più $2\log(n+1)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} n \geq 2^{b(r)} - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad n \geq 2^{h/2} - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n + 1 \geq 2^{h/2} \\ &\Leftrightarrow \quad \log(n+1) \geq h/2 \\ &\Leftrightarrow \quad h \leq 2\log(n+1) \end{aligned}$$

$\square$