Esercitazione 1
Probabilità e Statistica
2015-2016

Claudio Agostinelli
Michele Filosi

2 maggio 2016

1

Nell'assemblaggio delle ruote di bicicletta vengono effettuati due controlli per verificarne la funzionalità. Il primo controllo è effettuato sulla camera d'aria e sul pneumatico (C_1) mentre il secondo sulla centratura dei raggi e sulla regolazione del mozzo (C_2). Poniamo A l'evento il controllo C_1 è superato e B l'evento il controllo C_2 è superato. Da un'indagine svolta nel passato si è valutato che:

- $\Pr(A) = 0.8$
- $\Pr(B) = 0.9$
- $\Pr(A \cap B) = 0.75$

1. Si descriva lo spazio campionario relativo e lo si rappresenti con i diagrammi di Venn;
2. Si descrivano gli eventi $A \cup B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ e $\overline{A \cup B}$
3. Gli eventi A e B sono incompatibili?;
4. Si dica qual è la probabilità di ottenere una ruota di bicicletta che ha superato entrambi i controlli;
5. Si calcolino le probabilità degli eventi di cui al punto precedente;

Soluzione

1. Gli eventi possibili sono: $(A, B), (\bar{A}, B), (A, \bar{B}), (\bar{A}, \bar{B})$

2. $A \cup B$ La ruota ha superato il controllo C_1 o il controllo C_2 o entrambi;
   $(\bar{A} \cup \bar{B})$ La ruota ha non ha superato il controllo C_1 o il controllo C_2 entrambi;
   $A \cap \bar{B}$ La ruota ha superato il controllo C_1 ma non il controllo C_2;
   $\bar{A} \cap \bar{B}$ La ruota non ha superato il controllo C_1 e neanche il controllo C_2 ;
   $\overline{A \cap B}$ Per la regola di De Morgan si ha $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

3. Siccome $\Pr(A \cap B) = 0.75 \neq \emptyset$ gli eventi sono compatibili;

4. $(A \cap B)$ è l'evento di interesse e quindi la probabilità di avere una ruota che ha superato entrambi i controlli è 0.75

5. $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 0.8 + 0.9 - 0.75 = 0.95$
   $\Pr(\bar{A} \cup \bar{B}) = \Pr(\overline{A \cap B}) = 1 - \Pr(A \cap B) = 1 - 0.75 = 0.25$
   $\Pr(A \cap \bar{B}) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) = 0.8 - 0.75 = 0.05$
   $\Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) = \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) = 1 - 0.95 = 0.05$
   $\Pr(\overline{A \cup B}) =$ come sopra

2

Supponiamo $\Omega = \mathbb{N}/\{0\}$, e consideriamo lo spazio probabilizzabile $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Supponiamo di prendere un numero intero positivo in maniera casuale, in accordo alla funzione di probabilità Pr. Sappiamo che $\Pr(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 0.3$, $\Pr(\{4, 5, 6\}) = 0.4$, e che $\Pr(\{1\}) = 0.1$.

- Qual è il valore più grande e più piccolo che $\Pr(\{2\})$ può assumere dalle informazioni che abbiamo?

Soluzione

- Se $\Pr(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 0.3$ e $\Pr(\{1\}) = 0.1$ allora per additività abbiamo che $\Pr(\{2, 3, 4, 5\}) = 0.2$
  Sappiamo inoltre che $\Pr(\{4, 5, 6\}) = 0.4$

– Il valore massimo che può avere $\Pr(\{2\})$:
Se $\Pr(\{3\}) = \Pr(\{4\}) = \Pr(\{5\}) = 0$ allora $\Pr(\{2\}) = 0.2$;

– Il valore minimo che può avere $\Pr(\{2\})$:
Se $\Pr(\{2, 3, 4, 5\}) = 0.2$ allora $\Pr(\{2\}) = 0$.

3

Supponiamo che il Sig. Rossi guardi, in un determinato giorno, il telegiornale delle 6, 2/3 delle volte, guardi il telegiornale delle 11, 1/2 delle volte, e infine guardi entrambi i telegiornali 1/3 delle volte. Consideriamo un giorno a caso.

- Construire uno spazio di probabilità che descriva l'esperimento casuale sopra descritto;
- Qual è la probabilità che il Sig. Rossi guardi solo il telegiornale delle 6?
- Qual è la probabilità che il Sig. Rossi non guardi i telegiornali in quel giorno?

Soluzione

Possiamo per prima cosa definire due eventi $A = \{\text{Sig. Rossi guarda il TG delle 6}\}$ e $B = \{\text{Sig. Rossi guarda il TG delle 11}\}$. Dal testo sappiamo che $\Pr(A) = \frac{2}{3}$, $\Pr(B) = \frac{1}{2}$ e che $\Pr(A \cap B) = \frac{1}{3}$

- Possiamo definire uno spazio di probabilità come segue:

$$\Omega = \{(A \setminus B), (A \cap B), (B \setminus A), (A \cup B)^c\} \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

- La probabilità che il Sig. Rossi guardi solo il TG delle 6 è data da: $\Pr(A \cap B^c)$

$$\Pr(A \cap B^c) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- La probabilità che il Sig. Rossi non guardi il TG quel giorno è data da: $\Pr(A^c \cap B^c)$

$$\Pr(A^c \cap B^c) = 1 - \Pr(A \cup B) = 1 - [\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)] = 1 - [\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}] = \frac{1}{6}$$

4

Un'urna contiene due palline nere e una rossa. Una seconda urna ne contiene una bianca e due rosse. Si estrae a caso una palla da ciascuna urna.

1. Descrivete uno spazio campionario per quest'esperimento;
2. Definite un'algebra adatta a studiare gli eventi descritti nei punti successivi;
3. Descrivete l'evento "prima pallina nera";
4. Qual è la probabilità che entrambe le palline siano dello stesso colore?
5. E che siano di colore diverso?

Soluzione

1. Lo spazio campionario Ω_0 può essere definito come prodotto cartesiano di due spazi campionari $\Omega_1 = \{N, R\}$ e $\Omega_2 = \{B, R\}$ e quindi abbiamo:

$$\Omega_0 = \{\{(N, B)\}, \{(N, R)\}, \{(R, B)\}, \{(R, R)\}\}$$

2. È facile definire l'algebra necessaria per Ω_1 e Ω_2 ed abbiamo $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, N, R, \Omega_1\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, N, R, \Omega_2\}$. Possiamo utilizzare l'algebra prodotto $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ su Ω_0. La funzione di probabilità fornita dal testo consente infine di ottenere uno spazio probabilizzato dove la funzione di probabilità Pr_0 su $\mathcal{A}_0$ è la funzione probabilità prodotto: $\mathrm{Pr}_1 \otimes \mathrm{Pr}_2$. Ora non ci resta che definire Pr_1 e Pr_2 da cui per gli eventi elementari abbiamo:

   - $\mathrm{Pr}_1(N) = \frac{2}{3}$
   - $\mathrm{Pr}_1(R) = \frac{1}{3}$
   - $\mathrm{Pr}_2(B) = \frac{1}{3}$
   - $\mathrm{Pr}_2(R) = \frac{2}{3}$

   Da cui ricaviamo:

   - $\mathrm{Pr}_0(\{(N, B)\}) = \mathrm{Pr}_1(N)\,\mathrm{Pr}_2(B) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

- $\Pr_0(\{(N,R)\}) = \Pr_1(N)\Pr_2(R) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
- $\Pr_0(\{(R,B)\}) = \Pr_1(R)\Pr_2(B) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- $\Pr_0(\{(R,R)\}) = \Pr_1(R)\Pr_2(R) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

3. L'evento "prima pallina nera" $\{\{(N,B)\},\{(N,R)\}\}$. Si noti che per studiare questo evento era sufficiente considerare $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \Pr_1)$

4. L'evento A di estrarre palline dello stesso colore corrisponde all'insieme $\{(R,R)\}$ la cui probabilità è $\frac{2}{9}$

5. L'evento B di estrarre palline di colore diverso è complementare ad A, quindi corrisponde agli eventi $\{\{(N,B)\},\{(N,R)\},\{(R,B)\}\}$ e la sua probabilità è 2/9 + 4/9 + 1/9 = 1 - 2/9 = 7/9

5

Si lanciano due dadi a sei facce bilanciati.

1. Si definisca per ogni domanda che segue uno spazio probabilizzato adatto a studiare i risultati di interesse;

2. Qual è la probabilità che la somma dei risultati sia un numero pari?

3. E che sia uguale a 5?

4. Qual è la probabilità che la differenza in modulo fra i due risultati sia uguale a 3?

Soluzione

Poniamo $(\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}, A_1 = \mathcal{P}(\Omega), \Pr_1(A) = \#A/6)$ lo spazio che probabilizza il lancio di un solo dado.

1. Per le tre domande che seguono si può definire uno stesso spazio probabilizzato definito dalla terna $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ dove $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_1, \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1, \Pr = \Pr_1 \otimes \Pr_1$
   Abbiamo $\Omega = \{\{(i,j)\}, 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$ e la cardinalità è 36.
   Inoltre per ogni evento elementare di Ω nella forma $\{(i,j)\}$ abbiamo $\Pr(\{(i,j)\}) = \Pr_1(\{i\})\Pr_1(\{j\}) = 1/36$, quindi per ogni evento $A \in \mathcal{A}$

abbiamo $\Pr(A) = \#A/36$

Per rispondere alle domande diventa conveniente considerare la tabella:

	1	2	3	4	5	6
1	$\star$		$\star$	$\times$	$\star$	
2		$\star$	$/$	$\star$	$\backslash$	$\star$
3	$\star$	$/$	$\star$		$\star$	$\backslash$
4	$\times$	$\star$		$\star$		$\star$
5	$\star$	$\backslash$	$\star$		$\star$	
6		$\star$	$\backslash$	$\star$		$\star$

2. Qual è la probabilità che la somma dei risultati sia un numero pari? I risultati favorevoli sono 18 pari al numero di $\star$ e quindi

$$\Pr(\{\text{la somma dei due numeri è pari}\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

3. E che sia uguale a 5?
   In questo caso i risultati favorevoli sono 4 pari al numero di $/$ e $\times$ e quindi $\Pr(\{\text{la somma dei due numeri è 5}\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

4. Qual è la probabilità che la differenza in modulo fra i due risultati sia uguale a 3?
   I risultati favorevoli sono 6 pari al numero di $\times$ e $\backslash$ quindi
   $\Pr(\{\text{la differenza in valore assoluto è 3}\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

6

Da un'indagine svolta presso una certa scuola è emerso che nel tempo libero il 10% degli studenti studia musica, il 20% pratica sport, il 5% studia una lingua straniera. Inoltre il 5% studia musica e pratica anche uno sport, il 3% studia musica e una lingua straniera, il 2% studia una lingua e fa sport e l'1% fa tutte tre le cose. Scegliendo in modo casuale uno studente,

1. Qual è la probabilità che pratichi solo sport?

2. Che studi musica e una lingua ma non pratichi nessuno sport?

Soluzione

Per rispondere ai due quesiti dobbiamo prima considerare lo spazio probabilizzato di riferimento. Utilizzeremo i seguenti codici: $M =$"studia Musica", S $=$"pratica Sport" e $L =$"studia una Lingua straniera". Lo spazio campionario Ω_{MSL} sarà il prodotto cartesiamo di tre spazi del tipo $\Omega_M = \{\{M\}, \{M^c\}\}$, $\Omega_S = \{\{S\}, \{S^c\}\}$, $\Omega_L = \{\{L\}, \{L^c\}\}$ e l'algebra di riferimento sarà l'algebra prodotto delle tre algebre. In maniera analoga si possono definire $\Omega_{MS}, \Omega_{SL}, \Omega_{ML}$ e le rispettive algebre prodotto.

Gli elementi di Ω_{MSL} sono:
$\{(M, S, L)\}, \{(M^c, S, L)\}, \{(M, S^c, L)\}, \{(M, S, L^c)\}, \ldots$.

Dal problema abbiamo le seguenti informazioni:

- $\mathrm{Pr}_M(\{M\}) = 0.1$
- $\mathrm{Pr}_S(\{S\}) = 0.2$
- $\mathrm{Pr}_L(\{L\}) = 0.1$
- $\mathrm{Pr}_{MS}(\{(M, S)\}) = 0.05$
- $\mathrm{Pr}_{ML}(\{(M, L)\}) = 0.03$
- $\mathrm{Pr}_{SL}(\{(S, L)\}) = 0.02$
- $\mathrm{Pr}_{MSL}(\{(M, S, L)\}) = 0.01$

da cui possiamo ricostruire completamente la funzione di probabilità definita su Ω_{MSL} dove abbiamo:

- $\mathrm{Pr}(\{(M, S, L)\}) = \mathrm{Pr}(M \cap S \cap L) = 0.01$
- $\mathrm{Pr}(\{(M^c, S, L)\}) = \mathrm{Pr}(S \cap L) - \mathrm{Pr}(M \cap S \cap L) = 0.02 - 0.01 = 0.01$
- Analogamente si possono calcolare $\mathrm{Pr}(\{(M, S^c, L)\})$ e $\mathrm{Pr}(\{(M, S, L^c)\})$
- $\mathrm{Pr}(\{(M^c, S^c, L)\}) = \mathrm{Pr}(L) - \mathrm{Pr}(M \cap L) - \mathrm{Pr}(S \cap L) + \mathrm{Pr}(M \cap S \cap L) = 0.05 - 0.03 - 0.02 + 0.01 = 0.01$
- Analogamente si possono calcolare $\mathrm{Pr}(\{(M^c, S, L^c)\})$ e $\mathrm{Pr}(\{(M, S^c, L^c)\})$

Ora siamo pronti a rispondere a:

- Qual è la probabilità che pratichi solo sport?
  Questo significa calcolare la probabilità dell'evento $\Pr(\{(M^c, S, L^c)\}) = 0.14$

- Che studi musica e una lingua ma non pratichi nessuno sport?
  L'evento da considerare è $\Pr(\{(M, S^c, L)\})$ che ha probabilità 0.02.

7

Da una lista di 10 ragazzi e 7 ragazze si deve formare un comitato comprendente 5 ragazzi e 3 ragazze. Quanti possibili comitati si possono formare?

Soluzione

Possiamo scegliere i ragazzi in $\binom{10}{5}$ modi diversi e per ognuno di questi modi possiamo scegliere le ragazza in $\binom{7}{3}$ modi e quindi

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{7}{3} = 8820$$

8

Un'urna contiene 100 palline di cui 30 bianche e 70 rosse. Si vuole conoscere la probabilità di estrarre 5 palline bianche in una successione di 10 estrazioni senza reimmissione.

Soluzione

I possibili risultati delle 10 estrazioni sono ovviamente gli allineamenti $(a_1, a_2, \cdots, a_{10})$ in cui $a_i = B$ ($B =$bianca) oppure $a_i = R$ ($R =$rossa), per $i = 1, 2, \cdots, 10$.

Quindi Ω sarà costituito da tutti questi allineamenti.

Si può assumere che ognuno di tali allineamenti abbia la stessa probabilità di venire estratto e il problema si riduce nel calcolare il numero di eventi elementati che implicano l'evento desiderato.

A tale scopo osserviamo che la cardinalità di Ω è

$$\#\Omega = C_{100,10} = \binom{100}{10}$$

in quanto non è importante l'ordine con cui compaiono. Vi sono poi 30 palline bianche da cui possiamo estrarne 5 sicché esse possono essere selezionate in

$$C_{30,5} = \binom{30}{5}$$

modi diversi. Per ogni scelta delle palline bianche, le 5 rosse possono essere scelte tra le 70 disponibili, in $C_{70,5} = \binom{70}{5}$ modi. Pertanto il numero degli allineamenti che contengono 5 palline bianche è

$$\binom{30}{5} \cdot \binom{70}{5}$$

e la probabilità dell'evento desiderato è

$$\Pr(\{5 \text{ palline bianche e } 5 \text{ rosse}\}) = \frac{\binom{30}{5} \cdot \binom{70}{5}}{\binom{100}{10}} \simeq 0.0996 \ .$$

Un altro modo per determinare la probabilità cercata è quello di fare riferimento al numero degli allineamenti che tengono conto anche dell'ordine in cui si presentano le palline. Il numero degli allineamenti di 100 palline prese a gruppi di 10 è $D_{100,10}$.

Le cinque posizioni occupate dalle palline bianche nella successione delle 10 estrazioni possono essere scelte in $C_{10,5}$ modi.

Quando una tale scelta è fatta, la prima pallina bianca può essere scelta in 30 modi, la seconda in 29, la terza in 28, la quarta in 27 e la quinta in 26 cioè $D_{30,5}$ e nello stesso modo per le palline rosse: $D_{70,5}$.

In definitiva il numero degli allineamenti contenenti 5 palline bianche e 5 rosse sarà

$$\binom{10}{5} \cdot D_{30,5} \cdot D_{70,5}$$

e la probabilità

$$\Pr(\{5 \text{ palline bianche e } 5 \text{ rosse}\}) = \frac{\binom{10}{5} \cdot D_{30,5} \cdot D_{70,5}}{D_{100,10}}$$

9

Una mano di poker è formata da cinque carte estratte a caso senza reimmissione da un mazzo di 52 carte. Determinare le probabilità dei seguenti eventi

- E$_1$ = { la mano contiene 5 carte dello stesso colore (che possono essere messe) in scala, 10 , J , Q , K , A (scala reale)};
- E$_2$ = {la mano contiene 5 carte, di uno stesso colore, con valori in successione (ad esempio, A , 2 , 3 , 4 , 5 , ecc.) che non sia una scala reale};
- E$_3$ = {la mano contiene quattro carte di eguale valore};
- E$_4$ = {la mano contiene due carte di eguale valore e tre carte di eguale valore (Full)}

Soluzione

Possiamo definire uno spazio campionario $\Omega = \{$Tutte le combinazioni di 5 carte da 52$\}$. A questo punto $|\Omega| = \binom{52}{5}$.

- Per l'evento E$_1$ abbiamo che $|E_1| = 4$ da cui

$$\Pr(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{4}{\binom{52}{5}}$$

- Analogamente possiamo calcolare $|E_1|$ che è uguale a 36. Quindi

$$\Pr(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{36}{\binom{52}{5}}$$

- Per calcolare la probabilità dell'evento E$_3$ possiamo procedere fissando un valore per la carta (A, 2, 3, ..., K). Abbiamo $\binom{4}{4}$ modi per scegliere 4 carte dello stesso valore. L'ultima carta invece la posso scegliere utilizzando le combinazioni $C_{48,1} = \binom{48}{1}$.
  Dato che per ogni seme ho in totale 13 carte, $|E_3| = 13\binom{4}{4}\binom{48}{1}$ da cui possiamo calcolare la probabilità:

$$\Pr(E_3) = \frac{|E_3|}{|\Omega|} = \frac{13\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{\binom{52}{5}}$$

- In maniera analoga all'evento E$_3$ possiamo determinare la cardinalità di E$_4$ fissando due numeri tra i 13 per ogni seme, calcolando la cardinalità $|E_4|$ e la probabilità come $\Pr(E_4) = \frac{|E_4|}{|\Omega|}$, dove $|E_4| = 13\ 12\binom{4}{3}\binom{4}{2}$