Esercitazione 3
Probabilità e Statistica
2015-2016

Claudio Agostinelli
Michele Filosi

2 maggio 2016

1

Un dado bilanciato viene lanciato consecutivamente fino a che non esce la faccia con il 6 per la prima volta.

- Qual è la probabilità di fare almeno 3 lanci prima che appaia la faccia 6?
- Dato che il 6 non appare al primo lancio, qual è la probabilità che siano necessari più di 4 lanci?

Soluzione

- Definiamo l'evento A={"Appare il 6 dopo il 3º lancio"}

$$\Pr(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{D^*_{5,3}}{D^*_{6,3}} = \frac{5^3}{6^3}$$

- Definiamo l'evento B={"Appare il 6 dopo il 4º lancio"} e l'evento C={"Appare il 6 dopo il 1º lancio"}
  Ora possiamo definire la probabilità condizionata:

$$\Pr(B|C) = \frac{\Pr(B \cap C)}{P(C)}$$

Poiché $B \subset C$ allora $\Pr(B \cap C) = \Pr(B)$ e quindi:

$$\Pr(B|C) = \frac{\Pr(B)}{\Pr(C)} = \frac{\frac{5^4}{6^4}}{\frac{5}{6}} = \frac{5^3}{6^3} = 0.5787$$

2

L'urna A contiene 2 palline bianche e 2 nere; l'urna B ne contiene 3 bianche e 2 nere. Si trasferisce una pallina da A a B e poi si estrae da B una pallina che risulta essere bianca. Qual è la probabilità che fosse bianca anche la pallina trasferita da A a B?

Soluzione

Indichiamo con b_A="estraggo una pallina bianca dall'urna A", n_A="estraggo una pallina nera dall'urna A", b_B="estraggo una pallina bianca dall'urna B", n_B="estraggo una pallina nera dall'urna B".

Possiamo ora calcolare $\Pr(b_A|b_B)$ usando il Teorema di Bayes:

$$\Pr(b_A|b_B) = \frac{\Pr(b_B|b_A)\Pr(b_A)}{\Pr(b_B|b_A)\Pr(b_A) + \Pr(b_B|n_A)\Pr(n_A)}$$

A questo punto ci serve calcolare le probabilità degli eventi b_A e n_A e degli eventi $\Pr(b_B|b_A)$ e $\Pr(b_B|n_A)$.

- $\Pr(b_A) = \Pr(n_A) = 2/4 = 1/2$
- $\Pr(b_B|b_A) = 4/6 = 2/3$
- $\Pr(b_B|n_A) = 3/6 = 1/2$

E la probabilità desiderata è:

$$\Pr(b_A|b_B) = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

3

Due fornitori A e B di pneumatici per una fabbrica di automobili hanno rispettivamente 0.3% e 0.8% di pezzi difettosi nella loro produzione. Inoltre A fornisce il 60% del totale degli pneumatici acquistati dalla fabbrica e B il 40%.

1. Qual è la probabilità che uno pneumatico scelto a caso dal magazzino della fabbrica risulti difettoso?

2. Avendo trovato un pezzo difettoso, qual è la probabilità che sia stato fornito da A?

Soluzione

Indicando con D="pezzo difettoso", si ha che $\Pr(D|A) = 0.003$, $\Pr(D|B) = 0.008$, $\Pr(A) = 0.6$ e $\Pr(B) = 0.4$

- Usiamo il Teorema delle probabilità totali per calcolare $\Pr(D)$.

$$\Pr(D) = \Pr(D|A)\Pr(A) + \Pr(D|B)\Pr(B) = 0.005$$

- Usiamo ora il Teorema di Bayes per calcolare $\Pr(A|D)$:

$$\Pr(A|D) = \frac{\Pr(D|A)\Pr(A)}{\Pr(D)} = 0.36$$

4

Un'urna contiene due carte: una di esse ha entrambi i lati neri mentre l'altra ha un lato nero e uno bianco. Una carta viene estratta e se ne guarda uno solo dei lati: è nero. Qual è la probabilità che anche il secondo lato sia nero?

Soluzione

Definisco gli eventi A_1="estraggo la carta NN", A_2="estraggo la carta BN" e N="estraggo il lato N". Il problema ci chiede di trovare la probabilità $\Pr(A_1|N)$.

Calcolo la probabilità degli eventi elementari A_1 e A_2: $\Pr(A_1) = \Pr(A_2) = \frac{1}{2}$.
Per il Teorema delle Probabilità Totali posso calcolare

$$\Pr(N) = \sum_{i=1}^{2} \Pr(N|A_i) \Pr(A_i) \ .$$

Inoltre abbiamo $\Pr(N|A_1) = 1$ e $\Pr(N|A_2) = \frac{1}{2}$ e quindi:

$$\Pr(N) = 1 \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

e la probabilità condizionata è:

$$\Pr(A_1|N) = \frac{\Pr(N|A_1) \Pr(A_1)}{\Pr(N)} = \frac{1 \ \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \ .$$

5

Si pone un topo davanti a 4 labirinti. Il topo sceglie a caso un labirinto. Da esperienze precedenti si sa che la probabilità che il topo esca da ogni labirinto in 5 min sono, rispettivamente, 0.5, 0.8, 0.3, 0.4 .
Sapendo che il topo è uscito in 5 min, calcolare la probabilità che abbia scelto il terzo labirinto.

Soluzione

Definendo l'evento U="il topo esce in 5 minuti" e A_i="il topo sceglie l'i-esimo labirinto" la probabilità $\Pr(A_i) = \frac{1}{4}$. Dai dati possiamo anche definire le probabilità condizionali:

- $\Pr(U|A_1) = 0.5$, $\Pr(U|A_2) = 0.8$, $\Pr(U|A_3) = 0.3$, $\Pr(U|A_4) = 0.4$

  Possiamo calcolare la probabilità dell'evento U come:

$$\begin{aligned}\Pr(U) &= \sum_{i=1}^{4} \Pr(U|A_i) \Pr(A_i) \\ &= (0.5 + 0.8 + 0.3 + 0.4) \ \frac{1}{4} = 0.5\end{aligned}$$

  Ora la probabilità

$$\Pr(A_3|U) = \frac{\Pr(U|A_3) \Pr(A_3)}{\Pr(U)} = \frac{0.3 \ \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 0.15$$

6

Dieci urne contengono tutte 4 palline rosse (R) e un numero variabile di palline bianche (B). Più precisamente l'urna i-esima contiene 4 palline R e i palline B. Un'urna viene scelta a caso e da essa vengono estratte due palline.

1. Qual è la probabilità che le due palline siano una B e una R?
2. Supponiamo che l'estrazione abbia dato come risultato una pallina B e una R. Qual è la probabilità p_i che l'urna prescelta sia la i-esima? Qual è l'urna più probabile?
3. Supponiamo invece che vi siano 2 urne contenenti 4 palline R e 10 B (le urne sono quindi 11). Se l'estrazione ha dato come risultato una pallina B ed una R, qual è ora la probabilità che l'urna prescelta sia di tipo i (cioè contenga i palline B)? Qual è ora il valore i più probabile?

Soluzione

Definiamo gli eventi A$_i$="estraggo dall'urna i-esima" e B="estraggo una pallina B (bianca) e una R (rossa)".
Poiché ogni urna può essere scelta con eguale probabilità abbiamo $\Pr(A_i) = \frac{1}{10}$.

1. Per prima cosa calcoliamo la probabilità condizionata in funzione di i:

$$\Pr(B|A_i) = \frac{4i}{C_{4+i,2}}$$

Calcoliamo ora la probabilità dell'evento B come:

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \sum_{i=1}^{10} \Pr(B|A_i)\Pr(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{10} \frac{4i}{C_{4+i,2}}\frac{1}{10} \\ &= 0.506\end{aligned}$$

2. Calcoliamo la probabilità $\Pr(A_i|B)$:

$$\begin{aligned}\Pr(A_i|B) &= \frac{\Pr(B|A_i)\Pr(A_i)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{4i}{C_{4+1,2}}\frac{1}{10}\frac{1}{0.506} \\ &= \frac{4i}{\binom{4+i}{2}}\ \frac{1}{5.06} \\ &= \frac{4i(2!)(4+i-2)!)}{(4+i)!}\ \frac{1}{5.06} \\ &= 1.58\frac{i}{(i+4)(i+3)}\end{aligned}$$

Massimiziammo il valore $p_i = \Pr(A_i|B)$

$$\arg\max_{i\in[1,10]} p_i = \{3,4\}$$

3. Per definizione sappiamo che l'urna 11 è uguale all'urna 10 (A_{11}=A_{10}), e continuiamo ad avere $\Pr(A_i) = \frac{1}{11}$ (perché adesso le urne sono 11). Possiamo calcolare nuovamente la probabilità dell'evento B come:

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \sum_{i=1}^{11}\Pr(B|A_i)\Pr(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{10}\Pr(B|A_i)\Pr(A_i) + \Pr(B|A_{10})\Pr(A_{10}) \\ &= \sum_{i=1}^{10}\frac{4i}{C_{4+i,2}}\frac{1}{11} + \frac{40}{C_{14,2}}\frac{1}{11} = 0.499\end{aligned}$$

$$p_i = \frac{\Pr(B|A_i)\Pr(A_i)}{\Pr(B)} = \frac{4i}{C_{4+i,2}}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{0.499} = 1.4546\ \frac{i}{(i+4)(i+3)}$$

7

Consideriamo la seguente funzione

$$f(x) = \frac{c}{x^2}\mathbf{1}_{(100,\infty)}(x)$$

dove $\mathbf{1}_A(x)$ è la funzione indicatrice che assume valore 1 se $x \in A$, 0 altrimenti.

- Trovare il valore di c per cui questa funzione è una funzione di densità;
- Calcolare la corrispondente funzione di ripartizione.

Soluzione

1. Perché $f(x)$ sia una funzione di densità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dobbiamo avere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{100}^{+\infty} \frac{c}{x^2}\, dx = c \cdot \left| -\frac{1}{x} \right|_{100}^{\infty} = 1 \Rightarrow c = 100$$

   inoltre è facile verificare che la funzione è non negativa su tutto $\mathbb{R}$.

2. La funzione di ripartizione è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 100 \\ 100 \cdot \int_{100}^{x} \frac{1}{x^2}\, dx = 100 \cdot \left| -\frac{1}{x} \right|_{100}^{x} = 1 - \frac{100}{x} & \text{altrimenti} \end{cases}$$