Esercitazione 6
Probabilità e Statistica
2015-2016

Claudio Agostinelli
Michele Filosi

12 Maggio 2016

1

Siano date le seguenti variabili casuali indipendenti: $X \sim N(10, 4)$, $Y \sim N(12, 9)$ e $V \sim N(8, 3)$. Determinare la probabilità che la variabile casuale

$$Z = X + Y - 2V$$

assuma un valore inferiore a 11.

Soluzione

Essendo le variabili distribuite normalmente allora una loro combinazione lineare è ancora distribuita normalmente. Si ha:

$$\mu_z = \mu_x + \mu_y - 2\mu_v = 10 + 12 - 2\ 8 = 6$$

e

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (-2)^2\sigma_v^2 = 4 + 9 + 4\ 3 = 25$$

Ora, per calcolare la probabilità che Z assuma valori inferiori a 11 ci riferiamo alla variabile standardizzata, cioé:

$$
\begin{aligned}
P(Z \leq z) &= P\left(\frac{Z-\mu_z}{\sigma_z} \leq \frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right) \\
&= \left(\frac{Z-\mu_z}{\sigma_z} \leq \frac{11-6}{5}\right) \\
&= \Phi(1) = 0.841
\end{aligned}
$$

2

La variabile casuale X ha la seguente funzione di ripartizione:

x	$F(x)$
$x < 4$	0
$4 \leq x < 5$	0.10
$5 \leq x < 8$	0.25
$8 \leq x < 12$	0.55
$12 \leq x < 13$	0.90
$13 \leq x$	1

Trovare:

1. la funzione di probabilità di X;
2. la moda, la mediana, il primo quartile e l'ottantesimo centile di X;

Soluzione

Dalla funzione di ripartizione di X possiamo ottenere la funzione di probabilità, tenendo conto che $F(x) = P(X \leq x)$ e che:

$$p(x) = P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x)$$

Notiamo che gli unici punti in cui $p(x)$ è diverso da 0 sono i punti in corrispondenza dei salti della funzione di ripartizione e cioè $\{4, 5, 8, 12, 13\}$. La funzione di probabilità è dunque:

x	4	5	8	12	13
$p(x)$	0.1	0.15	0.30	0.35	0.10

La **moda** di X è il valore con la probabilità massima:

$$p(12) = 0.35$$

La **mediana** di X è il valore $x_{0.5} = \inf\{x : F(x) \geq 0.5\}$ che in questo caso è 8 in quanto $F(8) = 0.55$ e tutti i valori x minori di 8 hanno $F(X) \leq 0.25 < 0.5$

Il primo quartile di X è il valore $x_{0.25} = \inf\{x : F(x) \geq 0.25\}$; nel nostro esempio è 5 in quanto $F(5) = 0.25$

L'ottantesimo centile di X è il valore $x_{0.80} = \inf\{x : F(x) \geq 0.80\}$ nel nostro esempio è 12 in quanto $F(12) = 0.9$ e tutti i valori di x minori di 12 hanno $F(X) \leq 0.55 < 0.80$.

Il valore atteso puo' essere calcolato come:

$$E[X] = \sum xp(x) = 9.05$$

3

La densità discreta congiunta di X e Y è data da:

- $p(1, 1) = 1/8$
- $p(1, 2) = 1/4$
- $p(2, 1) = 1/8$
- $p(2, 2) = 1/2$

Si calcoli:

1. La densità discreta condizionata di X dato $Y = i, \ i = 1, 2$;
2. X e Y sono indipendenti?
3. Si calcolino: $P(XY \leq 3)$, $P(X + Y > 2)$ e $P(X/Y > 1)$

Soluzione

Calcoliamo la densità di X condizionata a Y con:

$$P(X = j|Y = i) = \frac{P(X = j, Y = i)}{P(Y = i)} = \frac{p(j, i)}{P(Y = i)}$$

Per fare questo dobbiamo calcolarci la distribuzione marginale di Y:

$$P(Y = i) = \sum_{j=1}^{2} P(X = j, Y = i) = p(1, i) + p(2, i)$$

Mettendo tutto insieme

$$P(X = j|Y = i) = \frac{p(j, i)}{p(1, i) + p(2, i)}$$

Da cui possiamo facilmente calcolare:

$$P(X = j|Y = 1) \begin{cases} \frac{1}{2} & j = 1 \\ \frac{1}{2} & j = 2 \end{cases}$$

e

$$P(X = j|Y = 2) \begin{cases} \frac{2}{3} & j = 1 \\ \frac{1}{3} & j = 2 \end{cases}$$

Possiamo ora calcolare anche la distribuzione marginale di X:

$$P(X = j) = \sum_{i=1}^{2} P(X = j, Y = i) = p(j, 1) + p(j, 2)$$

$$P(X = j) \begin{cases} \frac{3}{8} & j = 1 \\ \frac{5}{8} & j = 2 \end{cases}$$

Dato che in generale $P(X = j|Y = i) \neq P(X = j)$ possiamo dire che X e Y non sono indipendenti.

Risolviamo ora l'ultimo punto per cui:

$$P(XY \leq 3) = p(1, 1) + p(1, 2) + p(2, 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X + Y > 2) = p(1, 2) + p(2, 1) + p(2, 2) = \frac{7}{8}$$

$$P(X/Y > 1) = p(2, 1) = \frac{1}{8}$$

4

Si lancia una moneta che presenta testa con probabilità 0.6. Se il risultato è testa, si estraggono 4 palline con reinserimento da un'urna che contiene 6 palline bianche e 4 nere. Se esce croce, si estraggono dalla stessa urna 3 palline senza reinserimento.
Trovare funzione di probabilità e valore atteso della variabile che conta il numero di palline bianche estratte nell'esperimento.

Soluzione

Definiamo T="testa" e C="croce". Calcoliamo la probabilità di estrarre x palline bianche sapendo che è uscita testa. La v.a. che conta il numero di palline bianche in questo caso si distribuisce con legge binomiale di parametri 4 e $\frac{6}{10}$.

$$P(X = x|T) = \binom{4}{x}\left(\frac{6}{10}\right)^{x}\left(\frac{4}{10}\right)^{4-x}$$

Calcoliamo ora la probabilità di estrarre x palline bianche sapendo che è uscita croce. La v.a. che conta il numero di palline bianche in questo caso si distribuisce con legge ipergeometrica di parametri 3, 6, 10.

$$P(X = x|C) = \frac{\binom{6}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{10}{3}}$$

Utilizzando il teorema delle probabilità totali calcoliamo $P(X = x)$:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= P(X = x|T)P(T) \cdot P(X = x|C)P(C) \\ &= P(X = x|T)0.6 \cdot P(X = x|C)0.4 \end{aligned}$$

Ricordiamo che $E[X|T]$ è pari alla media di una v.a. che si distribuisce con legge binomiale di parametri 4 e $\frac{6}{10}$ mentre $E[X|C]$ è pari alla media di una v.a. che si distribuisce con legge ipergeometrica di parametri 3, 6, 10. Possiamo calcolare il valore atteso $E[X]$ come:

$$E[X] = E[X|T] * 0.6 + E[X|C] * 0.4 = 4\,\frac{6}{10}\,0.6 + 3\,\frac{6}{10}\,0.4 = 2.16$$