# Esercitazione 2
# Probabilità e Statistica
# 2015-2016

Claudio Agostinelli
Michele Filosi

2 maggio 2016

## 1

Da un'indagine svolta presso una certa scuola è emerso che nel tempo libero il 10% degli studenti studia musica, il 20% pratica sport, il 5% studia una lingua straniera. Inoltre il 5% studia musica e pratica anche uno sport, il 3% studia musica e una lingua straniera, il 2% studia una lingua e fa sport e l'1% fa tutte tre le cose. Scegliendo in modo casuale uno studente,

1. Qual è la probabilità che pratichi solo sport?
2. Che studi musica e una lingua ma non pratichi nessuno sport?

### Soluzione

vd. Esercitazione 1

## 2

Un'urna contiene 100 palline di cui 30 bianche e 70 rosse. Si vuole conoscere la probabilità di estrarre 5 palline bianche in una successione di 10 estrazioni senza reimmissione.

## Soluzione

vd. Esercitazione 1

# 3

Da un mazzo ben mescolato di 52 carte se ne estraggono 5. Si calcoli la probabilità di ottenere:

- poker
- poker d'assi
- cinque carte dello stesso seme
- cinque carte di cuori

## Soluzione

vd. Esercizatione 1

# 4

Data la funzione di ripartizione $F$

$$F(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$$

Sia Pr data da:

$$\Pr((-\infty, x]) = F(x)$$

Trovare la probabilità dei seguenti eventi:

- $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- $B = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
- $C = (\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$
- $D = [0, 2)$
- $E = (3, \infty)$

## Soluzione

Dato che un singoletto è un insieme di Borel, dalle assunzioni possiamo scrivere:

$$\Pr((-\infty, x]) = F(x)$$

Quindi:

$$\Pr((-\infty, x)) = \Pr((-\infty, x] \setminus \{x\}) = \lim_{t \uparrow x} F(t) = F(x^-)$$

Dobbiamo però fare attenzione alle discontinuità della $F(x)$. Infatti $F(x)$ è sempre continua da destra ma può non esserlo da sinistra, per esempio: $\frac{3}{4} = F(2^-) \neq F(2^+) = 2$, dove $F(2^-) = \lim_{x\uparrow 2} F(x), F(2^+) = lim_{x\downarrow 2}F(x)$

-
$$\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \Pr\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \setminus \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \Pr\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right) - \Pr\left(\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= F\left(\frac{1}{2}^-\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

  Si noti che $x = \frac{1}{2}$ è un punto di continuità perchè $F\left(\frac{1}{2}^-\right) = F\left(\frac{1}{2}^+\right) = F\left(\frac{1}{2}\right)$

- $\Pr(B) = \Pr\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = F\left(\frac{3}{2}^-\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

- $\Pr(C) = \Pr\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right)\right) F\left(\frac{5}{2}^-\right) - F\left(\frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

-
$$\begin{aligned}
\Pr(D) &= \Pr([0, 2)) \\
&= \Pr((-\infty, 2) \setminus (- - \infty, 0)) \\
&= F(2^-) - F(0^-) = F(1) - F(0^-) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

- $\Pr(E) = \Pr((3,\infty)) = F(\infty^-) - F(3) = (\lim_{x\uparrow\infty} F(x)) - F(3) = 1 - 1 = 0$

# 5

Consideriamo la distribuzione uniforme nello spazio $([0,1], \mathcal{B}([0,1])$.

- Calcolare:
$$\lim_{n\to\infty} (\Pr([1/4, 1 - e^{-n}]))$$

## Soluzione

Sia $A_n = \{[1/4, 1 - e^{-n}]\}$, e la sua sequenza crescente $(A_n)_{n=1}^{\infty}$. Dato che per sequenze monotone abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \Pr(A_n) = \Pr(\lim_{n\to\infty} A_n)$ dobbiamo valutare il $\lim_{n\to\infty} A_n$ che è uguale a $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = [1/4, 1]$ (per sequenze monotone crescenti). Quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Pr(A_n) &= \Pr([1/4, 1]) \\
&= \Pr((1/4, 1]) \\
&= F(1) - F(1/4) \\
&= 1 - 1/4 = 3/4
\end{aligned}$$

# 6

Consideriamo la seguente funzione $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c+x}{5} & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 + \frac{7}{20\sqrt{x}} & 0 < x \leq 0.25 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Calcolare il valore di $c$ in modo che $f(x)$ sia una funzione di densità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

## Soluzione

Calcoliamo il valore della costante $c$ in modo che l'integrale esteso a tutto il dominio risulti pari a 1.

$$\begin{aligned}\int_0^{1/4} 1+\frac{7}{20\sqrt{x}}\,dx &= \left[x+2\frac{7}{20}\sqrt{x}\right]_0^{1/4}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{7}{10}\frac{1}{2}\\ &= 0.6\end{aligned}$$

Inoltre, $\int_{-\infty}^{-2} f(x)dx = \int_{1/4}^{+\infty} f(x)dx = 0$. Questo significa che il sequente integrale deve valere 0.4:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} \frac{c+x}{5}\,dx &= \frac{1}{5}\left[cx+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}\\ &= \frac{2(c-1)}{5} = 0.4\end{aligned}$$

Risolvendo l'ultima equazione in $c$ otteniamo $c = 2$. Ci rimane quindi da verificare che in tutto l'intervallo $[-2, 0.25]$, $f(x)$ sia non negativa. È facile da verificare che nell'intervallo $(0, 0.25]$ la funzione $f(x)$ è sempre positiva, mentre si noti che $(2+x)/5 < 0$ per $x > -2$. Quindi, nell'intervallo $[-2, 0]$, la funzione $f(x)$ è non negativa. Ne segue che si tratta di una funzione densità per $c = 2$.

# 7

Sia data la funzione di densità $f(x)$ definita su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1,\\ 2-x, & 1 \le x < 2,\\ 0, & \textit{altrimenti}, \end{cases}$$

Disegnare $f(x)$, e trovare la funzione di ripartizione $F(x)$.

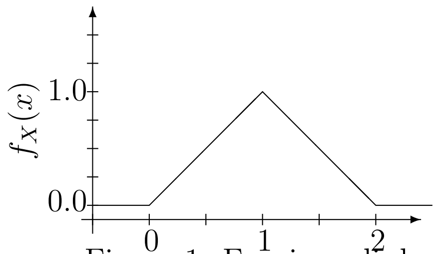


Figura 1: Funzione di densità.

## Soluzione

1. La funzione di densità è rappresentata in figura 1.

2. La funzione di ripartizione si può definire come segue:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x t dt & 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 t dt + \int_1^x 2 - t dt & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

   che risulta:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x = 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

   Il disegno della funzione di ripartizione viene lasciato come esercizio per casa.

# 8

La funzione $f$ è definita come segue:

$$f(x) = k/x^{k+1}, \qquad x > 1$$

e zero altrove. Per quali valori di $k$ è $f$ una funzione di densità? Trovare la corrispondente funzione di ripartizione per tutti i valori di $k$ possibili.

## Soluzione

Per prima cosa dobbiamo definire la funzione primitiva di $f$ come:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{k}{x^{k+1}}dx = \left[-x^{-k}\right]_1^\infty$$

Ora dobbiamo distinguere i casi per diversi valori di $k$:

- $k < 0$ l'integrale diverge come si può vedere da: $\lim_{x\to\infty} -x^{-k} + 1^{-k}$, quindi $f(x)$ non è una densità.
- $k = 0$ l'integrale è uguale a 0, infatti $\lim_{x\to\infty} -x^{-k} + 1^{-k} = -1 + 1 = 0$ e quindi $f(x)$ non è una densità.
- $k > 0$ si ha $\lim_{x\to\infty} -x^{-k} + 1^{-k} = 0 + 1 = 1$. Inoltre $f(x)$ è sempre positiva in $[1, \infty]$ e quindi $f(x)$ è una densità.

Ora possiamo definire la funzione di ripartizione per $k > 0$ e $x \geq 1$ che risulta:

$$\begin{aligned} F(x) = \int_1^x f(y)dy &= \int_1^x \frac{k}{y^{k+1}}dy \\ &= \left[-y^{-k}\right]_1^x \\ &= 1 - x^{-k} \end{aligned}$$

e 0 altrimenti ($x < 1$).