Università di Trento

Esame di Probabilità e Statistica del 07-04-2016 — ID 01

1. Quando eseguiamo un esame clinico per accertare la presenza di una certa patologia, il test può risultare positivo (abbiamo la patologia) oppure negativo. L'esame può commettere errore, ad esempio, il test puo' risultare positivo ma noi non abbiamo la patologia (si parla di falso positivo). La probabilità che il test sia negativo e noi non abbiamo la patologia è chiamata specificità, mentre, la probabilità che il test sia positivo quando effettivamente abbiamo la patologia è chiamata sensibilità. Infine la probabilità di avere una certa patologia è chiamata prevalenza. Vi siete sottoposti at test per accertare la presenza di HIV. Nella popolazione la prevalenza di HIV è di 6.1 casi su $1e+05$. Il test ELISA ha una sensibilità pari a 0.999, mentre i falsi positivi sono pari a $7e-04\%$.

   (a) Definire lo spazio probabilizzabile che serve per descrive questo esperimento.

   (b) Calcolare la probabilità che il test risulti positivo.

   (c) Calcolare la probabilità che siccome il test è positivo voi abbiate realmente l'HIV.

   (d) La probabilità che una persona con l'HIV sia un maschio è 0.976, mentre la probabilità che una persona che non ha l'HIV sia un maschio è 0.5. Inoltre la specificità e la sensibilità del test non dipende dal genere della persona. Alla luce di questa informazione, ricalcolate la probabilità che, dato che il test è positivo, voi abbiate realmente l'HIV.

2. Poniamo T l'evento il vostro test è positivo e H l'evento, voi avete l'HIV.

   (a) Lo spazio Ω è dato da $\{(T,H),(T,H^c),(T^c,H),(T^c,H^c)\}$. L'insieme delle parti può essere utilizzato per avere uno spazio probabilizzabile.

   (b) Abbiamo i seguenti dati

   - $\Pr(H) = 6.1e-05$;
   - $\Pr(T|H) = 0.999$;
   - $\Pr(T|H^c) = 7e-06$;

   allora usando il teorema delle probabilità totali abbiamo

$$\begin{aligned}\Pr(T) &= \Pr(T|H)\Pr(H) + \Pr(T|H^c)\Pr(H^c)\\ &= 0.999\ 6.1e-05 + 7e-06\ (1-6.1e-05)\\ &= 6.7938573e-05\end{aligned}$$

   (c) Usando il teorema di Bayes abbiamo

$$\begin{aligned}\Pr(H|T) &= \frac{\Pr(T|H)\Pr(H)}{\Pr(T|H)\Pr(H)+\Pr(T|H^c)\Pr(H^c)}\\ &= \frac{0.999\ 6.1e-05}{0.999\ 6.1e-05 + 7e-06\ (1-6.1e-05)}\\ &= \frac{6.0939e-05}{6.7938573e-05}\\ &= 0.89697\end{aligned}$$

   (d) Visto che la sensibilità non dipende dal genere allora abbiamo

$$\Pr(T|H,M) = \Pr(T|H)$$

   e così per gli altri eventi di questo tipo. Inoltre

$$\begin{aligned}\Pr(T,M|H) &= \frac{\Pr(T,M,H)}{\Pr(H)}\\ &= \Pr(T|H,M)\frac{\Pr(H,M)}{\Pr(H)}\\ &= \Pr(T|H,M)\Pr(M|H)\\ &= \Pr(T|H)\Pr(M|H)\end{aligned}$$

   Nella stessa maniera abbiamo

$$\Pr(T,M|H^c) = \Pr(T|H^c)\Pr(M|H^c)$$

Per cui, per il teorema di Bayes abbiamo

$$\begin{aligned}
\Pr(H|T,M) &= \frac{\Pr(H,T,M)}{\Pr(T,M)} \\
&= \frac{\Pr(T,M|H)\Pr(H)}{\Pr(T,M|H)\Pr(H)+\Pr(T,M|H^c)\Pr(H^c)} \\
&= \frac{\Pr(T|H)\Pr(M|H)\Pr(H)}{\Pr(T|H)\Pr(M|H)\Pr(H)+\Pr(T|H^c)\Pr(M|H^c)\Pr(H^c)} \\
&= \frac{0.999\ 0.976\ 6.1e-05}{0.999\ 0.976\ 6.1e-05+7e-06\ 0.5\ (1-6.1e-05)} \\
&= 0.94443
\end{aligned}$$

Nel caso di una femmina si ha invece

$$\begin{aligned}
\Pr(H|T,F) &= \frac{\Pr(H,T,F)}{\Pr(T,F)} \\
&= \frac{\Pr(T,F|H)\Pr(H)}{\Pr(T,F|H)\Pr(H)+\Pr(T,F|H^c)\Pr(H^c)} \\
&= \frac{\Pr(T|H)\Pr(F|H)\Pr(H)}{\Pr(T|H)\Pr(F|H)\Pr(H)+\Pr(T|H^c)\Pr(F|H^c)\Pr(H^c)} \\
&= \frac{0.999\ 0.024\ 6.1e-05}{0.999\ 0.024\ 6.1e-05+7e-06\ 0.5\ (1-6.1e-05)} \\
&= 0.29473
\end{aligned}$$

3. Nello spazio probabilizzabile $([0,\infty),\mathbb{B}([0,\infty))$ consideriamo la funzione di probabilità $p_1(x;\lambda)=\lambda^x\exp(-\lambda)/x!$ per $x\in\{0,1,2,3,...\}$, zero altrove e $\lambda=1$, inoltre consideriamo la funzione di densità $f_2(x)=cx^2I_{(0,2)}(x)$, dove $I_{(a,b)}(x)$ è la funzione indicatrice dell'intervallo (a,b).
   (a) calcolare c in modo che la $f_2(x)$ sia una funzione di densità.
   (b) calcolare la funzione di ripartizione $F_2(x)$ corrispondente a $f_2(x)$.
   (c) calcolare la funzione di ripartizione $F_1(x)$ corrispondente a $p_1(x)$ per $x=0,1,2,3$.
   (d) consideriamo la funzione di ripartizione $F(x)=0.5F_1(x)+0.5F_2(x)$, calcolare la probabilità degli eventi
      i. $(0,\pi]$;
      ii. $[0,2)$;
      iii. $(-3,\pi]$.

4. (a) Se la funzione è diversa da zero nell'intervallo $(0,k)$ allora abbiamo che

$$1=\int_0^k f_2(t)\ dt=c\int_0^k t^2\ dt=c\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^k=c\frac{k^3}{3}$$

   da cui

$$c=\frac{3}{k^3}=0.375\ .$$

   (b) La funzione di ripartizione è 0 per $x<0$ e 1 per $x\geq k$. Nell'intervallo $0\leq x<k$ abbiamo

$$F_2(x)=\int_0^x\frac{3}{k^3}t^2\ dt=\frac{3}{k^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x=\frac{x^3}{k^3}\ .$$

   (c)

$$\begin{aligned}
F_1(0)=p_1(0;\lambda)&=\frac{\lambda^0e^{-\lambda}}{0!}=e^{-\lambda}=0.3679 \\
F_1(1)=F_1(0)+\frac{\lambda^1e^{-\lambda}}{1!}&=e^{-\lambda}(1+\lambda)=0.7358 \\
F_1(2)=F_1(1)+\frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!}&=e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right)=0.9197 \\
F_1(3)=F_1(2)+\frac{\lambda^3e^{-\lambda}}{3!}&=e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{6}\right)=0.981
\end{aligned}$$

(d)

$$\Pr((0,\pi]) = 0.5F_2(\pi) + 0.5(F_1(\pi) - p_1(0;\lambda)) = 0.8066$$
$$\Pr((0,2)) = 0.5F_2(2) + 0.5F_1(1) = 0.8679$$

mentre $(-3,\pi]$ non è un evento.

5. Durante le festività natalizie avete una probabilità pari a 0.68 di ricevere un pacco dono da parte di vostro zio australiano. Data la distanza è possibile che vostro zio vi spedisca il pacco ma che questo vada perduto (e quindi voi non riceviate niente) con una probabilità di 0.06. Inoltre, è chiaro che la probabilità di ricevere un pacco dallo zio se lui non lo ha spedito è 0.

(a) Definire lo spazio campionario e una σ–algebra adatta a descrivere il fenomeno oggetto di studio;
(b) Qual è la probabilità che lo zio vi abbia spedito un pacco?
(c) Non avete ricevuto il pacco (e quindi non è stato spedito oppure è andato perso). È il caso di chiamare lo zio e ringraziarlo del pacco che vi ha spedito e voi non avete ricevuto (anche perché è già passata anche la Pasqua ...)?

6. Dato A l'evento "ho ricevuro un regalo" e S l'evento "lo zio mi ha spedito un regalo". Dal testo abbiamo che

- $\Pr(A) = 0.68$;
- $\Pr(A^c|S) = 0.06$;
- $\Pr(A|S^c) = 0$;

(a) Lo spazio campionario è $\Omega = \{(A,S),(A^c,S),(A,S^c),(A^c,S^c)\}$, la tribù può essere l'insieme delle parti di Ω.
(b) Dal teorema delle probabilità totali abbiamo

$$\Pr(A) = \Pr(A|S)\Pr(S) + \Pr(A|S^c)\Pr(S^c)$$

ma siccome $\Pr(A|S^c) = 0$ allora

$$\Pr(S) = \Pr(A)/(1 - \Pr(A^c|S)) = 0.7234\ .$$

(c)

$$\begin{aligned}\Pr(S|A^c) &= \frac{\Pr(S,A^c)}{\Pr(A^c)}\\ &= \frac{\Pr(A^c|S)\Pr(S)}{1-\Pr(A)} = 0.1356\ .\end{aligned}$$

7. Un dado bilanciato viene lanciato consecutivamente fino a che non esce la faccia con il 6 per la prima volta.

(a) Dato che il 6 non appare al primo lancio, qual è la probabilità che siano necessari più di 4 lanci?

8.

$$\begin{aligned}&= \Pr(\text{“più di 4 lanci”}|\text{“più di 1 lancio”})\\ &= \frac{\Pr(\text{“più di 4 lanci”} \cap \text{“più di 1 lancio”})}{\Pr(\text{“più di 1 lancio”})}\\ &= \frac{\Pr(\text{“più di 4 lanci”})}{\Pr(\text{“più di 1 lancio”})}\\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\frac{5^2}{6^2}\frac{1}{6}+\frac{5^3}{6^3}\frac{1}{6}\right)}{1-\frac{1}{6}}\\ &= \frac{1-0.518}{\frac{5}{6}}\\ &= 0.5787\end{aligned}$$

Oppure, possiamo scriverla come

$$\begin{aligned}&= \frac{\Pr(\text{“più di 4 lanci”})}{\Pr(\text{“più di 1 lancio”})}\\ &= \frac{\frac{5^4}{6^4}}{\frac{5}{6}}\\ &= \frac{5^3}{6^3}\\ &= 0.5787\end{aligned}$$