Esercitazione 4
Probabilità e Statistica
2015-2016

Claudio Agostinelli
Michele Filosi

2 maggio 2016

1

Un dado bilanciato viene lanciato consecutivamente fino a che non esce la faccia con il 6 per la prima volta. Dato che il 6 non appare al primo lancio, qual è la probabilità che siano necessari più di 4 lanci?

Soluzione

Sia X la v.a. che conta il numero di lanci necessari prima che esca il 6. Questa segue una distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{6}$.
Vogliamo ora calcolare $\Pr(X > 4|X > 1)$ ma siccome la distribuzione geometrica gode della proprietà di mancanza di memoria (Ricordiamo che tale proprietaà ci dice che $\Pr(X = r + y|X > y) = \Pr(X = r)$ per $r > 0$ e $y > 0$ interi) allora $\Pr(X > 4|X > 1)$ si riconduce a calcolare $\Pr(X > 3)$.

Possiamo utilizzare $\Pr(X > k) = (1 - p)^k$

$$\Pr(X > 3) = (1 - p)^3 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = 0.579$$

2

Quanti lanci di una moneta equilibrata si devono effettuare affinchè la probabilità che venga testa almeno una volta sia maggiore di 0.8?

Soluzione

Sia X la v.a. che conta il numero di teste ottenute su n lanci fatti. Questa si distribuisce con legge binomiale di parametri n incognito e $p = 0.5$. Vogliamo calcolare l'n tale per cui

$$\Pr(X \geq 1) > 0.8$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq 1) &= 1 - \Pr(X = 0) \\
&= 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} \\
&= 1 - (1-p)^n = 1 - 0.5^n > 0.8
\end{aligned}$$

Risolvendo quindi la disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
1 - 0.5^n &> 0.8 \\
0.2 &> 0.5^n \\
\frac{2}{10} &> 2^{-n} \\
\frac{1}{10} &> 2^{-(n+1)} \\
2^{n+1} &> 10 \\
\log_2(2^{n+1}) &> \log_2(10) \\
n + 1 &> \log_2(10) \\
n &> \log_2(10) - 1 = 2.322
\end{aligned}$$

e siccome n deve essere intero abbiamo $n \geq 3$.

3

La probabilità che una albero di un certo frutteto non dia frutto è 0.04. Qual è:

1. la probabilità che su 200 alberi esattamente 7 non diano frutti?
2. la probabilità che meno di 2 piante non diano frutti?
3. la probabilità che almeno una pianta dia frutto?

Soluzione

Possiamo pensare di avere una variabile casuale X con distribuzione binomiale di parametri $n = 200$ e $p = 0.04$.

$$X \sim Bi(n, p) \;=\; Bi(200, 0.04)$$

1. Esattamente 7 piante non danno frutto è equivalente all'evento $\{X = 7\}$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 7) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \binom{200}{7} 0.04^7 \, 0.96^{193} = 0.14172\end{aligned}$$

2. Meno di due piante non danno frutto è equivalente all'evento $\{X < 2\}$

$$\begin{aligned}\Pr(X < 2) &= \Pr(X = 0) + p(X = 1) \\ &= \binom{200}{0} 0.04^0 \, 0.96^{200} + \binom{200}{1} 0.04^1 \, 0.96^{199} \\ &= 0.00266\end{aligned}$$

3. Almeno una pianta dà frutto è equivalente all'evento $\{X < 200\}$:

$$\Pr(X < 200) = 1 - \Pr(X = 200) = 1 - \binom{200}{200} 0.04^{200} \, 0.96^0 \approx 1$$

4

Sia X una v.a. di Poisson di parametro λ. Sapendo che $\Pr(X = 1) = \Pr(X = 2)$ calcolare $\Pr(X = 4)$

Soluzione

Se X è una v.a. di Poisson sappiamo che la sua funzione di probabilità è $\Pr(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ per $\lambda > 0$ e $x = 0, 1, 2, \cdots$, allora perché $\Pr(X = 1) = \Pr(X = 2)$ dobbiamo avere

$$\begin{aligned} \Pr(X = 1) &= \Pr(X = 2) \\ e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} &= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \\ \lambda &= \frac{\lambda^2}{2} \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare la $\Pr(X = 4)$:

$$\Pr(X = 4) = e^{-2} \frac{2^4}{4!} = e^{-2} \frac{16}{24} = 0.090224$$

5

In una linea elettrica, per la distribuzione di energia alla tensione di 380Kv, il tempo intercorso (in giorni) tra due successivi guasti può essere rappresentato attraverso una variabile aleatoria X di tipo esponenziale con densità:

$$f(x) = \lambda \ \exp(-\lambda x), \quad x \in [0, \infty) \text{ e } \lambda = 1/100 \ .$$

1. Qual è la probabilità che un guasto avvenga tra il cinquantesimo e l'ottantesimo giorno dall'ultimo guasto.
2. Sapendo che sono trascorsi 50 giorni dall'ultimo guasto si calcoli la probabilità che il prossimo guasto avvenga non prima di 30 giorni.

Soluzione

1. Per valutare $\Pr(50 < X \leq 80)$ è comodo utilizzare la funzione di ripartizione:
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - \exp(-\lambda x)$$
quindi:
$$\Pr(50 < X \leq 80) = F(80) - F(50) \simeq 0.551 - 0.393 = 0.158$$

2. La probabilità di un guasto non prima di 30 giorni dato che sono passati 50 giorni dall'ultimo guasto può essere calcolata notando che:

$$
\begin{aligned}
\Pr(X > t + s | X > s) &= \frac{\Pr(X > t + s, X > s)}{\Pr(X > s)} &(1)\\
&= \frac{\Pr(X > t + s)}{\Pr(X > s)} &(2)\\
&= \frac{1 - \Pr(X \leq t + s)}{1 - \Pr(X \leq s)} &(3)\\
&= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+s)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} &(4)\\
&= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} &(5)\\
&= \exp\left(\lambda(t + s - s)\right) &(6)\\
&= \exp\left(\lambda t\right) &(7)\\
&= \Pr(X > t) = 1 - \Pr(X \leq t) = 1 - F(t) &(8)
\end{aligned}
$$

quindi:

$$\Pr(X > 30 + 50 | X > 50) = \Pr(X > 30) = 1 - 0.259 = 0.741$$

6

Il peso delle scatole di pelati dell'azienda A si distribuisce secondo una legge normale di media 1 kg e deviazione standard 0.009 kg. Si calcoli:

1. la probabilità che una scatola scelta a caso pesi meno di 980 grammi;
2. la probabilità che fra 10 scatole scelte a caso ve ne siano almeno 2 che pesano meno di 980 grammi;
3. la probabilità che fra 200 scatole scelte a caso ve ne siano 3 che pesano meno di 980 grammi

Soluzione

Possiamo rappresentare il peso della scatola di pelati della ditta A come una distribuzione normale $\mathcal{N}(1, 0.009^2)$.

1. Per rispondere alla domanda dobbiamo calcolare la probabilità $\Pr(X < 0.980)$. Per prima cosa dobbiamo standardizzare la variabile X in modo da poter usare la funzione di ripartizione per la distribuzione normale standard, cioè, se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ allora

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

è distribuita come una normale standard. Quindi:

$$\begin{aligned}\Pr(X < 0.980) &= \Pr\left(\frac{X-1}{0.009} < \frac{0.980-1}{0.009}\right) \\ &= \Pr(Z < -2.22) \\ &= \Phi(-2.22) \approx 0.013\end{aligned}$$

Dove Φ indica la funzione di ripartizione di Z. La probabilità $\Phi(-2.22)$ si può calcolare o numericamente con un calcolatore o attraverso apposite tavole oppure approssimata usando la seguente formula:

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{1 + \exp(-at(1 + bt^2))}$$

con $a = 1.5976$ e $b = 0.044$.

2. Possiamo indicare con Y la variabile casuale che conta il numero di scatole di pelati che pesano meno di 980 grammi su 10 prese a caso, si ha che $Y \sim Bin(10, 0.013)$.
Quindi la probabilità che ci siano almeno 2 scatole che pesano meno di 980 grammi è pari a:

$$\begin{aligned}\Pr(Y \geq 2) = 1 - \Pr(Y < 2) &= 1 - \Pr(Y = 0) - \Pr(Y = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.013^0\, 0.987^{10} - \binom{10}{1} 0.013^1\, 0.987^9 \\ &= 1 - 0.987^{10} - 10 \cdot 0.013 \cdot 0.987^9 = 0.007\end{aligned}$$

3. In maniera analoga al punto precedente possiamo definire una v.a. $Y_1 \sim Bin(200, 0.013)$ e calcolare la probabilità

$$\Pr(Y_1 = 3) = \binom{200}{3} p^3 (1 - p)^{200-3} = \binom{200}{3} 0.013^3\, 0.987^{197} = 0.219$$

7

Una ditta acquista una partita di 1000000 di guarnizioni con la garanzia che la frazione di pezzi difettosi non superi il 10%. Si decide di estrarre un campione casuale con reinserimento di n = 8 unità e di accettare la partita se nel campione risultano meno di due pezzi difettosi, altrimenti la partita viene contestata. Descrivere, con una opportuna variabile casuale il numero di pezzi difettosi nel campione:

- se la partita è conforme al contratto (p=10%)
- se la partita contiene il 50% di pezzi difettosi
- calcolare il rischio del venditore di veder rifiutata la partita conforme al contratto p=10%

Soluzione

1. Poiché l'estrazione avviene con reinserimento, la v.c. adatta a descrivere i risultati di n=8 estrazioni casuali ed indipendenti è una **variabile binomiale** di parametri n=8 e, se la partita è conforme alle clausole contrattuali, con p = 10%. La funzione di probabilità è quindi:

$$\Pr(X = x) = \binom{8}{x} 0.1^x \, 0.9^{8-x}$$

con $x = 0 \ldots 8$ rappresentato in tabella come segue:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Pr(X = x)\%$	43.04	38.26	14.88	3.30	0.45	0.04	0.002	0.000072	0.000001

Si rileva che è assai probabile ottenere pochi pezzi difettosi (0 oppure 1) se la frazione di pezzi di scarto è pari al 10%, al contrario è molto improbabile ottenerne un numero superiore a 5 ($\Pr(X > 5) = 0.002341\%$).

2. La situazione cambia radicalmente se la partita contiene il 50% di pezzi difettosi.

La variabile aleatoria che descrive questa partita diventa una variabile binomiale con $n = 8$ e $p = 0.5$, otteniamo che la funzione di probabilità è data da:

$$\Pr'(X = x) = \binom{8}{x} p^x (1-p)^{8-x} = \binom{8}{x} 0.5^x \; 0.5^{8-x}$$

con $x = 0 \ldots 8$. Per questo nuovo caso abbiamo:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Pr'(X = x)\%$	0.39	3.12	10.93	21.87	27.34	21.87	10.93	3.12	0.39

Da cui $\Pr'(X > 5) = 28.13\%$.

3. Definiamo il rischio del rivenditore la probabilità di veder rifiutare la partita quando essa andrebbe accettata perché conforme al contratto. Ciò accade se, dato p = 10%, nel campione si ottengono 2 o più difettosi. Analiticamente risulta:

$$\alpha = \Pr(X \geq 2 | p = 10\%)$$

Quindi:

$$\alpha = \sum_{x=2}^{8} \Pr(X = x) = 1 - \Pr(0) - \Pr(1) = 18.68\%$$