Esercitazione 5
Probabilità e Statistica
2015-2016

Claudio Agostinelli
Michele Filosi

2 maggio 2016

1

Sia X una variabile aleatoria con funzione di distribuzione continua F. Trovare l'espressione delle distribuzioni delle seguenti variabili aleatorie:

1. X^2
2. $\sin(X)$
3. $\sqrt{X}$
4. $G^{-1}(X)$

Dove G é una funzione continua strettamente crescente.

Soluzione

Definiamo $Y = g(X)$ con $g(\cdot)$ definito come segue:

1. $Y = X^2$

$$\begin{aligned}\Pr(Y \le y) &= \Pr(X^2 \le y)\\ &= \Pr(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})\\ &= \Pr(-\sqrt{y} < X \le \sqrt{y}) + \Pr(X = -\sqrt{y})\\ &= \Pr(X \le \sqrt{y}) - \Pr(X \le -\sqrt{y}) + 0\\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\end{aligned}$$

2. $Y = \sin X$
   Se $-1 \le y \le 1$

$$\begin{aligned}\Pr(Y \le y) &= \Pr(\sin X \le y)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pr((2n+1)\pi - \sin^{-1} y \le X \le (2n+2)\pi + \sin^{-1} y)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_X((2n+2)\pi + \sin^{-1} y) - F_X((2n+1)\pi - \sin^{-1} y)\end{aligned}$$

3. $Y = \sqrt{X}$
   Assumendo $X \ge 0$

$$\begin{aligned}\Pr(Y \le y) &= \Pr(\sqrt{X} \le y)\\ &= \Pr(0 \le X \le y^2)\\ &= F_X(y^2)\end{aligned}$$

4. $Y = G^{-1}(X)$

$$\begin{aligned}\Pr(Y \le y) &= \Pr(G^{-1}(X) \le y)\\ &= \Pr(X \le G(y))\\ &= F_X(G(y))\end{aligned}$$

2

Data la funzione $p(x) = c2^{-x}$ (Geometrica) per gli interi positivi $x = 1, 2, 3, \cdots$

1. Trovare la costante c in modo che $p(x)$ sia una funzione di probabilità sugli interi positivi;

2. Sia X una v.a. con funzione di probabilità $p(x)$ trovare:

   (a) $\Pr(X > 1)$;

   (b) il valore modale di X;

   (c) la probabilità che X sia pari;

Soluzione

1. L'insieme $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, \}$ di interi positivi è un insieme numerabile, per cui $p(x)$ è una probabilità se:

$$\Pr(\{x\}) = p(x) \geq 0 \forall x \quad \text{and} \quad \sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$$

   Quindi,

$$c2^{-x} \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$$

   Consideriamo la somma della serie geometrica:

$$\sum_{x=1}^{\infty} c \left(\frac{1}{2}\right)^x = c\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = 1 \Rightarrow c = 1$$

2. La variabile X può assumere solo valori interi positivi, quindi:

   (a) $\Pr(X > 1) = 1 - \Pr(X = 1) = 1 - p(1) = 1 - 2^{-1} = \frac{1}{2}$

   (b) Moda $= \{\tilde{x} : \Pr(X = \tilde{x}) = p(\tilde{x}) \geq p(x)\ \forall x\} = \text{argmax}_{x \in \Omega} p(x)$
   Dato che $p(x)$ è una funzione decrescente:

$$\text{argmax}_{x \in \Omega} p(x) = \min_{x \in \Omega} x = 1$$

3. $\Pr(X\text{pari}) = \Pr(X = 2n),\ n$ intero.

$$\Pr(X = 2n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} - 1 = \frac{1}{3}$$

3

Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dimostrare che:

1. $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$;
2. $q_\alpha = -q_{1-\alpha}$;
3. $\Pr\{|X| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1 - \alpha$;
4. Dimostrare infine che se z_α è un quantile di ordine α di una v.a. con legge $\mathcal{N}(0,1)$, allora il quantile di ordine α di una v.a. con legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ è uguale a
$$q_\alpha = \sigma \cdot z_\alpha + \mu$$

Soluzione

Se $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ sappiamo che anche $-X \sim \mathcal{N}(0,1)$ grazie alla simmetria di $\mathcal{N}(0,1)$. Utilizzando ciò dimostriamo quanto richiesto:

1.
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq x) = \Pr(-X \leq x) \\ &= \Pr(X \geq -x) = 1 - \Pr(X \leq -x) \\ &= 1 - F_X(-x) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} q_\alpha &= \arg_x(F_X(x) = \alpha) \\ &= \arg_x(1 - F_X(-x) = \alpha) \\ &= \arg_x(F_X(-x) = 1 - \alpha) \\ &= -\arg_x(F_X(x) = 1 - \alpha) \\ &= 1 - q_{1-\alpha} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \Pr(|X| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) &= \Pr(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq X \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &= \Pr(X \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Pr(X \leq -q_{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha \end{aligned}$$

4. Sia $Y = \sigma \cdot Z + \mu$ una v.a. di legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}
q_\alpha &= \arg_y(\Pr(Y \leq y) = \alpha) \\
&= \arg_y(\Pr(\sigma \cdot Z + \mu \leq y) = \alpha) \\
&= \arg_y\left(\Pr\left(Z \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \alpha\right) \\
&= \mu + \sigma \cdot \arg_z(\Pr(Z \leq z) = \alpha) \\
&= \mu + \sigma \cdot z_\alpha
\end{aligned}$$

4

Sia $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. Trovare la densità di $Y = -\ln X$, sia con la formula di trasformazione, sia con il metodo della funzione di ripartizione.

Soluzione

1. Per risolvere col primo metodo la trasformazione consideriamo la proprietà della densità su X.

$$\int_0^1 1dx = 1$$

Effettuiamo un cambio di variabile

$$y = -ln(x)$$

$$x = e^{-y}$$

Ora calcoliamo il differenziale dx:

$$dx = -e^{-y}dy$$

Trasformiamo ora l'intervallo dell'integrale:

$$0 \to -ln(0) = \infty$$

$$1 \to -ln(1) = 0$$

Quindi l'integrale diventa:

$$\int_{\infty}^{0} -e^{-y}dy = \int_{0}^{\infty} e^{-y}dy$$

A questo punto abbiamo che la funzione di densità di Y è $f(y) = e^{-y}$ definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

2. Con il metodo della funzione di ripartizione:
dobbiamo prima passare alla funzione di ripartizione di X:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = x, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

A questo punto consideriamo la funzione di ripartizione di Y e facciamo i seguenti passaggi:

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(-\ln X \leq y) = \Pr(X \geq -e^{-y}) = 1 - \Pr(X \leq -e^{-y}) = 1 - e^{-y}$$

Anche in questo caso dobbiamo aggiornare il dominio della funzione a $0 \leq y \leq +\infty$ (ricordando che il dominio di X è $0 \leq x \leq 1$).

Quindi in conclusione

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y} & y \geq 0 \end{cases}$$

Possiamo ottenere la densità di Y derivando F_Y:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ e^{-y} & y \geq 0 \end{cases}$$

5

Sia X una v.a. con distribuzione uniforme nell'intervallo $[2, 6]$ e sia Y una v.a. esponenziale di media $\frac{1}{\lambda}$.
Si determini il valore λ per cui $\Pr(X \leq 4) = \Pr(Y \leq 4)$

Soluzione

$$\Pr(X \leq 4) = \frac{\mu(4)}{\mu(S)} = \frac{4-2}{6-2} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(Y \leq 4) = 1 - e^{-4\cdot\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} e^{-4\cdot\lambda} &= \frac{1}{2} \\ -4\cdot\lambda &= \ln\frac{1}{2} \\ \lambda &= -\frac{\ln 0.5}{4} = 0.17329 \end{aligned}$$