Esercitazione 7
Probabilità e Statistica
2015-2016

Claudio Agostinelli
Michele Filosi

24 Maggio 2016

1

Supponiamo che condizionatamente a $Y = y$, X è distribuita come una v.a. esponenziale di parametro y, e che Y sia una v.a. esponenziale di parametro $\beta > 0$.

- Qual è la distribuzione marginale di X?
- Qual è la distribuzione condizionata di Y dato $X = x$?

Soluzione

Dal testo dell'esercizio sappiamo che:

$$P(X|Y = y) \sim Exp(y)$$

e che

$$Y \sim Exp(\beta)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = y \exp(-yx)$$

$$f_Y(y) = \beta \exp(-\beta y)$$

Grazie a questo possiamo definire la funzione di densità congiunta come:

$$
\begin{aligned}
f_{XY}(x,y) &= y\exp(-yx)\beta\exp(-\beta y) \quad x>0, y>0 \quad \text{e } 0 \text{ altrimenti} \\
&= y\beta\exp(-(x+\beta)y)
\end{aligned}
$$

Calcoliamo ora la funzione di densità per la v.a. X come:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \\
&= \int_0^{\infty} y\beta\exp(-(x+\beta)y)\,dy \\
&\text{integrando per parti} \\
&= \beta\left\{\left[-(x+\beta)^{-1}\exp(-(x+\beta)y)y\right]_0^{\infty} + (x+\beta)^{-1}\int_0^{\infty}\exp(-(x+\beta)y)\,dy\right\} \\
&= \beta\left[0+\left[-(x+\beta)^{-2}\exp(-(x+\beta)y)\right]_0^{\infty}\right] \\
&= \beta(x+\beta)^{-2}\exp(0) \\
&= \frac{\beta}{(x+\beta)^2} \qquad 0<x,\ 0 \text{ altrimenti}
\end{aligned}
$$

Infine possiamo calcolare la distribuzione condizionata $f_{Y|X}(y|x)$ come:

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{y\beta\exp(-(x+\beta)y)}{\beta(x+\beta)^{-2}} \\
&= y(x+\beta)^2\exp(-(x+\beta)y)
\end{aligned}
$$

2

Sia data la seguente variabile casuale bivariata (X, Y)

Y	X		
	1	5	9
2	0.10	0.10	0.10
4	0.05	0.20	0.05
6	0.15	0.10	0.15

1. Dire se le variabili casuali X e Y sono incorrelate;
2. Determinare la funzione di ripartizione della variabile casuale condizionata $Y|X = 5$;
3. Calcolare $E(X|Y)$, $Var(X|Y)$
4. Calcolare $\mathrm{E}(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$;

Soluzione

1. Vediamo se le variabili X e Y sono incorrelate:
   Calcoliamo le distribuzioni marginali:

Y	X			
	1	5	9	
2	0.10	0.10	0.10	0.30
4	0.05	0.20	0.05	0.30
6	0.15	0.10	0.15	0.40
	0.30	0.40	0.30	1

   Per determinare se due variabili sono incorrelate possiamo calcolare il coefficiente di correlazione o la covarianza. In questo caso calcoliamo la covarianza:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov(X,Y) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} - \bar{x}\bar{y} \\
&= \mathrm{E}(X,Y) - \bar{x}\bar{y} \\
&= 1\ 2\ 0.10 + 1\ 4\ 0.05 + 1\ 6\ 0.15+ \\
&+ 5\ 2\ 0.10 + 5\ 4\ 0.20 + 5\ 6\ 0.10+ \\
&+ 9\ 2\ 0.10 + 9\ 4\ 0.05 + 9\ 6\ 0.15+ \\
&- \bar{x}\bar{y} \\
&= 21 - 5\ 4.2 = 0
\end{aligned}$$

2. Determiniamo la funzione di ripartizione della variabile casuale condizionata $Y|X = 5$;

Per fare questo usiamo la formula:

$$F(y_j|X = x_i) = \frac{\sum_{x \leq j} p_{ik}}{p_{i+}}$$

da cui con $X = 5$:

$$F(y_j|X = 5) = \frac{\sum_{x \leq j} p_{ik}}{0.4}$$

per cui si ottiene:

$$F(Y = 2|X = 5) = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$
$$F(Y = 4|X = 5) = \frac{0.1 + 0.2}{0.4} = 0.75$$
$$F(Y = 6|X = 5) = \frac{0.1 + 0.2 + 0.1}{0.4} = 1$$

3. Calcoliamo $E(Y|X)$ e $Var(Y|X)$;
Per calcolare $E(Y|X)$ usiamo la formula:

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = \sum_{y \in R_y} y \; p_{Y|X}(y|x)$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y|X = 1) &= \sum_{y \in \{2,4,6\}} y \; p_{Y|X}(y|x = 1) \\
&= 2\ 0.1 + 4\ 0.05 + 6\ 0.15 \\
&= 0.2 + 0.2 + 0.9 = 1.3 \\
\mathrm{E}(Y|X = 5) &= \sum_{y \in \{2,4,6\}} y \; p_{Y|X}(y|x = 5) \\
&= 2\ 0.1 + 4\ 0.2 + 6\ 0.10 \\
&= 0.2 + 0.8 + 0.6 = 1.6 \\
\mathrm{E}(Y|X = 9) &= \sum_{y \in \{2,4,6\}} y \; p_{Y|X}(y|x = 9) \\
&= 2\ 0.1 + 4\ 0.05 + 6\ 0.15 \\
&= 0.2 + 0.2 + 0.9 = 1.3
\end{aligned}$$

Per calcolare $\mathrm{Var}(Y|X)$ usiamo la formula:

$$\mathrm{Var}(Y|X=x) = \sum_{y \in R_y} (y - \mathrm{E}(Y|X=x))^2 p_{Y|X}(y|x)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y|X=1) &= \sum_{y \in \{2,4,6\}} (y - \mathrm{E}(Y|X=1))^2 \; p_{Y|X}(y|x=1) \\
&= (2-1.3)^2 0.1 + (4-1.3)^2 0.05 + (6-1.3)^2 0.15 \\
&= 0.49 * 0.1 + 7.3 * 0.05 + 22.09 * 0.15 = 3.73 \\
\mathrm{Var}(Y|X=5) &= \sum_{y \in \{2,4,6\}} (y - \mathrm{E}(Y|X=5))^2 \; p_{Y|X}(y|x=5) \\
&= (2-1.6)^2 0.1 + (4-1.6)^2 0.20 + (6-1.6)^2 0.10 \\
&= 3.104 \\
\mathrm{Var}(Y|X=9) &= \sum_{y \in \{2,4,6\}} (y - \mathrm{E}(Y|X=9))^2 \; p_{Y|X}(y|x=9) \\
&= (2-1.3)^2 0.1 + (4-1.3)^2 0.05 + (6-1.3)^2 0.15 \\
&= 3.73
\end{aligned}$$

4. Dobbiamo calcolare i valori $\mathrm{E}(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$
   Abbiamo gia' calcolato il valore medio di $y = \bar{y} = 4.2$, non ci resta che calcolare $\mathrm{Var}(Y)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \sum_{j=1}^{3} (y_i - \bar{y})^2 p_{j+} \\
&= (2-4.2)^2 0.3 + (4-4.2)^2 0.3 + (6-4.2)^2 0.4 \\
&= 1.45 + 0.012 + 1.29 \\
&= 2.76
\end{aligned}$$

3

Uno studio dice che l'investimento in titoli di stato, rappresentato dalla v.a. X, e quello in azioni Y , hanno una distribuzione congiunta data da:

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} [1-(x+1)\cdot e^{-x}]\cdot[1-(y+1)\cdot e^{-y}], & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

calcolare la densità congiunta. Qual è la probabilità che un generico portafoglio azionario abbia un investimento in titoli di stato almeno doppio rispetto all'investimento azionario? Infine calcolare la densità marginale di X e discutere l'eventuale indipendenza delle 2 v.a. .

Soluzione

Calcoliamo velocemente le distribuzioni marginali:

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{XY}(x, y) = 1 - (x + 1) \cdot e^{-x}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{XY}(x, y) = 1 - (y + 1) \cdot e^{-y}$$

Per calcolare la densità congiunta calcoliamo la derivata rispetto x e y della funzione di ripartizione congiunta.

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot F_{XY}(x, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) \\ &= (-e^{-x} + (x + 1) \cdot e^{-x}) \cdot (-e^{-y} + (y + 1) \cdot e^{-y}) \\ &= x \cdot e^{-x} \cdot y \cdot e^{-y} \end{aligned}$$

per $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Possiamo ora calcolare le densità marginali con:

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = x \cdot e^{-x} \int_0^{\infty} y \cdot e^{-y} dy = x \cdot e^{-x}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = y \cdot e^{-y} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = y \cdot e^{-y}$$

Da cui deduciamo:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

E quindi le due v.a. sono indipendenti.

Possiamo verificare l'indipendenza delle variabili calcolando anche la covarianza di X, Y ricordando:

$$Cov(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Per fare questo per prima cosa dobbiamo calcolare le aspettazioni $\mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{E}(Y)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx \\
&\text{integrando per parti} \\
&= \underbrace{\left|-x^2 e^{-x}\right|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty -2xe^{-x} dx \\
&= \underbrace{\left|-2xe^{-x}\right|_0^\infty}_{=0} + 2\int_0^\infty e^{-x} dx \\
&= 2\left|-e^{-x}\right|_0^\infty = 2(0+1) = 2
\end{aligned}$$

Visto che $f_X(x) = f_Y(y)$ da cui $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 2$.
Non ci resta che calcolare $\mathrm{E}(XY)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 y^2 e^{-(x+y)} dx dy \\
&= \int_0^\infty y^2 e^{-y} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx dy \\
&= 2 \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy \\
&= 2 \cdot 2 = 4
\end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare la covarianza come:

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\
&= 4 - 2 \cdot 2 = 0
\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo che le due variabili X e Y sono indipendenti.

La probabilità che un generico portafoglio azionario abbia un investimento in titoli di stato almeno doppio rispetto all'investimento azionario è $P(X \geq 2Y)$ ovvero l'insieme dei punti nell'insieme $A = (x,y) : x \geq 2y$.

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2Y) = P((X,Y) \in A) &= \int_0^\infty \int_{2y}^\infty f_{XY}(x,y)dx\,dy \\
&= \int_0^\infty \int_{2y}^\infty f_X(x) \cdot f_Y(y)dx\,dy \\
&= \int_0^\infty f_Y(y) \cdot |F_X(x)|_{2y}^\infty dy \\
&= \int_0^\infty y \cdot e^{-y} \cdot (1+2y) \cdot e^{-2y} dy \\
&= \int_0^\infty y \cdot (1+2y) \cdot e^{-3y} dy \\
&= \underbrace{\left| y(1+2y)\frac{e^{-3y}}{-3} \right|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \frac{1+4y}{-3} e^{-3y} dy \\
&= \frac{1}{3}\left\{ \underbrace{\left| (1+4y)\frac{e^{-3}}{-3} \right|_0^\infty}_{=\frac{1}{3}} -4 \int_0^\infty \frac{e^{-3}}{-3} dy \right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{ \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \underbrace{\left| \frac{e^{-3y}}{-3} \right|_0^\infty}_{=\frac{1}{3}} \right\} = \frac{7}{27}
\end{aligned}
$$

4

Trovare le densità condizionate e il valore atteso di Y dato X quando hanno funzione di densità congiunta:

- $f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}$ per $0 \leq x \leq y < \infty$

Soluzione

Come prima cosa calcoliamo la distribuzione marginale di X:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} dy \\ &= -\lambda[e^{-\lambda y}]_x^{\infty} \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Quindi $X \sim Exp(\lambda)$. Possiamo ora calcolare la densità $Y|X = x$ come:

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\lambda e^{-\lambda x}} \\ &= \lambda e^{-\lambda(y-x)} \end{aligned}$$

Da cui otteniamo $\mathrm{E}(Y|X = x)$ come:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y|X = x) &= \int_x^{\infty} y\lambda e^{-\lambda(y-x)} dy \\ &\text{integrando per parti} \\ &= e^{\lambda x}\left\{ \left| -ye^{-\lambda y} \right|_x^{\infty} - \int_x^{\infty} -e^{-\lambda y} dy \right\} \\ &= e^{\lambda x}\left\{ xe^{-\lambda x} + \left| -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \right|_x^{\infty} \right\} \\ &= e^{\lambda x}\left\{ xe^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right\} \\ &= x + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

5

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con la seguente densità congiunta:
Dopo aver verificato che si tratti di una densità ben data:

X Y	1	2	3
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0
2	$\frac{3}{12}$	0	$\frac{2}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

- calcolare la densità marginale di X e Y e discutere della loro eventuale indipendenza.
- calcolare poi la densità di X condizionata a Y.
- calcolare media, varianza di X e Y, covarianza e coefficiente di correlazione

Soluzione

Per verificare se la densità proposta è "ben data" verifichiamo la somma di tutti gli elementi della matrice che deve essere uguale a 1.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P(X = i, Y = i) = 1$$

- Calcoliamo le le distribuzioni marginali di X e Y. In questo caso si tratta di calcolare le somme per righe e per colonne. Ricordando la formula:

  $$p_X(X = x) = \sum_{y \in R_Y} p_{XY}(x, y)$$

  Da cui:

  $$P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

  Applicando a tutte le righe ed a tutte le colonne per Y otteniamo la tabella:

  Possiamo discutere la dipendenza delle variabili verificando la seguente uguaglianza valida per v.a. indipendenti:

  $$p_{XY}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$$

X / Y	1	2	3	
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{3}{12}$	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	1

In generale questo non è vero, in quanto esiste una coppia (x, y) tale per cui l'uguaglianza non è valida.

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{4} \neq p_X(X=1)\, p_Y(Y=1) = \frac{1}{3}\,\frac{7}{12} = \frac{7}{36}$$

- Calcoliamo ora la probabilità condizionata $P(X|Y)$:

$$p_{X|Y}(X=x|Y=y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$p(X=1|Y=1) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

$$p(X=2|Y=1) = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

$$p(X=1|Y=2) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{12}} = \frac{1}{2}$$

- calcolare media, varianza di X e Y, covarianza e coefficiente di correlazione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k \in \{1,2,3\}} k \cdot p_X(X=k) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{12} + 3 \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{23}{12}
\end{aligned}$$

X / Y	1	2	3
1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \sum_{k \in \{1,2,3\}} k \cdot p_Y(Y = k) \\
&= 1 \cdot \frac{7}{12} + 2 \cdot \frac{2}{12} + 3 \cdot \frac{3}{12} \\
&= \frac{20}{12} = \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \left(\sum_{k \in \{1,2,3\}} k^2 \cdot p_X(X = k) \right) - \left(\frac{23}{12} \right)^2 \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{5}{12} + 9 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{23}{12} \right)^2 \\
&= \frac{51}{12} - \left(\frac{23}{12} \right)^2 = \frac{83}{144}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \left(\sum_{k \in \{1,2,3\}} k^2 \cdot p_Y(Y = k) \right) - \left(\frac{5}{3} \right)^2 \\
&= 1 \cdot \frac{7}{12} + 4 \cdot \frac{2}{12} + 9 \cdot \frac{3}{12} \\
&= \frac{42}{12} - \left(\frac{5}{3} \right)^2 = \frac{13}{18}
\end{aligned}
$$

$$Cov(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) = & \sum_{k,j \in \{1,2,3\}} k \cdot j \cdot p_{XY}(X=k, Y=j) \\
& = 1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{12} + 2\frac{3}{12} + 2 \cdot 3\frac{2}{12} + \\
& + 3\frac{1}{12} + 3 \cdot 2\frac{1}{12} + 3 \cdot 3\frac{1}{12} \\
& = \frac{41}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) & = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\
& = \frac{41}{12} - \frac{23}{12} \cdot \frac{5}{3} \\
& = \frac{41}{12} - \frac{115}{36} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) & = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \\
& = \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{83}{12} \cdot \frac{13}{18}}} \\
& = 0.344
\end{aligned}$$

6

Se $\rho(X,Y) = -1$ allora:

1. $Y = X^{-1}$;
2. $Y = g(X)$;
3. $Y = a + bX$

con $a \in \mathbb{R}$ e $b < 0$

Soluzione

Ricordiamo la formula del coefficiente di correlazione:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

e la formula della covarianza:

$$Cov(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

1. Escludiamo la prima ipotesi perché Y non è definita nel punto $X = 0$
2. Escludiamo la seconda ipotesi $Y = g(X)$ in quanto si tratta di una funzione sconosciuta e quindi non possiamo determinare il valore di ρ
3. Calcoliamo ora la $Cov(X,Y)$ con $Y = a + bX$:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= Cov(X, a+bX) \\ &= \mathrm{E}(X(a+bX)) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(a+bX) \\ &= \mathrm{E}(aX + bX^2) - \mathrm{E}(X)(a + b\mathrm{E}(X)) \\ &= a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(X^2) - a\mathrm{E}(X) - b\mathrm{E}(X)^2 \\ &= bVar(X) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora:

$$\begin{aligned} Var(X)Var(a+bX) &= Var(X)b^2Var(X) \\ &= b^2Var(X)^2 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora ρ:

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) &= \rho(X, a+bX) \\ &= \frac{bVar(X)}{\sqrt{b^2Var(X)^2}} \\ &= \frac{bVar(X)}{|b|Var(X)} \\ &= \frac{b}{|b|} \end{aligned}$$