Geometria e algebra lineare – 11/2/2016 **A**
Corso di laurea in Ing. Elett. Tel., Ing. Inf. Org. e Informatica
Correzione

Esercizio 1A

Siano P il punto di coordinate $(1,0,0)$, r la retta di equazioni cartesiane $x+y = x+2y-z = 0$. e π il piano di equazione $y+z=-2$. Si trovino

1. Il piano π' che contiene r e P.
2. Equazioni parametriche per la retta s intersezione di π e π'
3. Il punto Q intersezione di r ed s.

Consideriamo il fascio di piani di sostegno r, dato da

$$\lambda(x+y)+\mu(x+2y-z)=0,$$

ed imponiamo il passaggio per il punto P, ottenendo

$$\lambda+\mu=0.$$

Il piano cercato corrisponde quindi a $\lambda=-\mu$. Posto $\mu=1$ troviamo che un'equazione del piano cercato è

$$y-z=0.$$

La retta s ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y+z &= -2 \\ y-z &= 0 \end{cases}$$

Volendo scriverne equazioni parametriche osserviamo che le soluzioni del sistema appena scritto sono $(x,y,z)=(t,-1,-1)$, e quindi equazioni parametriche per s sono

$$\begin{cases} x= & t \\ y= & -1 \\ z= & -1 \end{cases}$$

Sostituendo nelle equazioni di r troviamo $t-1=t-1=0$, e quindi il punto Q cercato ha coordinate $(1,-1,-1)$.

Esercizio 2A

Sia $M_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2, a coefficienti reali, e

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si mostri che $U = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AS = SA\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e se ne trovi una base.

2. Si trovino le matrici non invertibili appartenenti ad U, e si mostri che formano un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Per mostrare che U è un sottospazio dobbiamo mostrare che $\lambda A + \mu B \in U$ per ogni scelta di $A, B \in U$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ciò è immediato, essendo

$$(\lambda A + \mu B)S = \lambda AS + \mu BS = \lambda SA + \mu SB = S(\lambda A + \mu B).$$

La generica matrice di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ può essere scritta come

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Le condizioni di appartenenza ad U si scrivono imponendo che

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

cioè che

$$\begin{bmatrix} x & -2x + y \\ z & -2z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2z & y - 2w \\ z & w \end{bmatrix}$$

Da cui otteniamo $z = 0$ e $x = w$. Il generico elemento di U sarà quindi

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una base di U è quindi costituita da

$$\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

La generica matrice di U è della forma

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

ed è quindi non invertibile se e solo se il suo determinante, uguale ad x^2 è uguale a zero.
Le matrici non invertibili contenute in U sono dunque le matrici del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che una combinazione lineare di due matrici di questo tipo è ancora una matrice di questo tipo:

$$\lambda \begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda y_1 + \mu y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4A

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + kx_3 - x_4, x_2 + x_4, -x_1 + 2x_3 + kx_4, x_3).$$

1. Stabilire per quali valori del parametro reale k la funzione T è invertibile.
2. Posto $k = 1$, calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}.$$

La matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo il suo determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{4R}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & k \end{bmatrix} \overset{3R}{=} -\left(-\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$-(-3 + k) = -k + 3$$

La funzione è invertibile se e solo se il determinante della matrice rappresentativa è diverso da zero, quindi per $k \neq 3$.

Detta $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, è immediato costruire la matrice di passaggio $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ calcoliamo la sua inversa:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{E_{32}(-1) \\ E_{42}(-1)}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{43}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Abbiamo trovato che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice cercata si ottiene come prodotto $M_{\mathcal{B}}(T) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} M_{\mathcal{C}}(T) M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5A

Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Trovare il nucleo di A.
2. Trovare gli autovalori di A e dire, senza trovarla esplicitamente, se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Il nucleo di A è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per trovarlo portiamo A nella forma a scalini ridotta per righe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} \longrightarrow \\ E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \end{matrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; \xrightarrow[E_{12}(-1)]{} \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le soluzioni del sistema sono quindi $x = -z, y = 0$, che riscriviamo come $(-z, 0, z) = z(-1, 0, 1)$. Pertanto $\mathrm{Ker}(A) = \langle(-1, 0, 1)\rangle$.

Per rispondere al secondo quesito troviamo il polinomio caratteristico di A (dal punto precedente sappiamo già che zero è una radice di tale polinomio):

$$\chi_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{bmatrix} \overset{1R}{=} (1-t)((2-t)(1-t)-1) - (1-t-1) + (1-2+t) =$$

$$= (1-t)(t^2 - 3t + 1) + t + t - 1 = t^2 - 3t + 1 - t^3 + 3t^2 - t + 2t - 1 =$$

$$= -t^3 + 4t^2 - 2t = -t(t^2 - 4t + 2)$$

Le radici del secondo fattore sono

$$t_{1,2} = \frac{-4 \mp \sqrt{16-8}}{2} = -2 \mp \sqrt{2}$$

Gli autovalori sono quindi $0, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$.

La base richiesta esiste in quanto A è una matrice simmetrica.

Esercizio 1B

1. $y - 2z = -1$
2. $$\begin{cases} x = & t \\ y = & 1 \\ z = & 1 \end{cases}$$
3. $(3, 1, 1)$

Esercizio 2B

Analogo a 2A

Esercizio 4B

$k \neq 3$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5B

$\mathrm{Ker}(A) = \langle (0, -1, 1) \rangle$.
$0, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$
Sì, perché A è una matrice simmetrica.

Esercizio 1C

1. $x - z = 0$
2. $$\begin{cases} x = & -1 \\ y = & t \\ z = & -1 \end{cases}$$
3. $(-1, -1, 1)$

Esercizio 2C

Analogo a 2A

Esercizio 4C

$k \neq 3$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5C

$\mathrm{Ker}(A) = \langle(-1, 1, 0)\rangle$.
$0, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$
Sì, perché A è una matrice simmetrica.

Esercizio 1D

1. $2x - z = 1$
2. $$\begin{cases} x = & 1 \\ y = & t \\ z = & 1 \end{cases}$$
3. $(1, 3, 1)$

Esercizio 2D

Analogo a 2A

Esercizio 4D

$k \neq 3$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5D

$\mathrm{Ker}(A) = \langle(-1, 0, 1)\rangle$.
$0, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$
Sì, perché A è una matrice simmetrica.