CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 1– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2016/17

Esercizio 1.1. *[2.1]* Determinare l'equazione parametrica e cartesiana della retta del piano

(a) Passante per i punti $A(1, 2)$ e $B(-1, 3)$.
(b) Passante per il punto $C(2, 3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OP} = (-1, 2)$.
(c) Di equazione Cartesiana $y = 2x + 5$. Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Esercizio 1.2. *[2.2]* Determinare l'equazione parametrica e cartesiana della retta dello spazio

(a) Passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(3, -1, 0)$.
(b) Passante per il punto $P(1, 3, 1)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OQ} = (2, 0, 0)$.
(c) Di equazioni Cartesiane

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Esercizio 1.3. *[2.3]*

a) Determinare l'equazione parametrica e cartesiana del piano π passante per i punti $A(1, 3, 1)$, $B(2, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$. Il punto $P(0, 2, 0)$ appartiene a tale piano?
b) Determinare una equazione della retta passante per A ortogonale a π.

Esercizio 1.4. *[2.4]* Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $A(1, -1, 2)$ e $B(-2, 0, 1)$, e sia s la retta contenente $C(1, 3, -3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD}(2, -2, 3)$.

a) Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).
b) Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.

Esercizio 1.5. *[2.7]*

a) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A = (2, 3, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$ e della retta s passante per i punti $C = (0, 0, 0)$ e $D = (4, 6, 0)$.
b) Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s.

Esercizio 1.6. *[2.9]* Si considerino le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente r e s.
b) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $C = (1, 2, -3)$ e perpendicolare a r.
c) Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare alle due rette r e s.

Esercizio 1.7. *[2.10]* Sia r la retta nello spazio passante per i punti $A = (0, 0, 1)$ e $B = (-2, -1, 0)$. Sia s la retta passante per i punti $C = (1, 1, 1)$ e $D = (-1, 0, 0)$.

a) Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.
b) Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano π del punto a).

Esercizio 1.8. *[2.13]* Si considerino i piani dello spazio

$$\pi \ : \ x - y + z = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi' \ : \ 8x + y - z = 0.$$

a) Stabilire la posizione reciproca dei due piani.
b) Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare ai piani π e π'.

Esercizio 1.9. *[2.18]* Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni

$$\begin{aligned} \pi_1 &: z - 3 = 0 \\ \pi_2 &: x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: 3x + 3y - z + 9 = 0 \end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) Si stabilisca se il piano π_3 contiene r.
b) Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r.
c) Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1.

Esercizio 1.10. *[12.9]* Si determini la distanza del punto $P(3, 1, 2)$ dalla retta r di equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

Esercizio 1.11. *[12.10]* Si determini la distanza del punto $P(-1, 0, 2)$ dal piano π di equazione $\pi : x - 2y + 3z = -9$.

Esercizio 1.12 (2.5).

a) *Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:*

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases}$$

b) *Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.*

Esercizio 1.13 (2.21). *Nel piano, si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \qquad r_2 : x - 2y + 1 = 0, \qquad r_3 : 2x + y - 2 = 0.$$

a) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta r parallela a r_1 e passante per il punto $A = r_2 \cap r_3$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta s perpendicolare a r_1 e passante per A.*
c) *Si calcoli l'angolo tra le rette r_1 e r_2 e tra le rette r_2 e r_3.*

Esercizio 1.14 (2.27). *Siano assegnati il punto $A = (1, 2, 1)$ il piano π e la retta s di equazioni*

$$\pi : x + z = 4, \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) *Si determini il punto B, proiezione ortogonale di A su π e la retta r passante per A e per B.*
b) *Indicato con C il punto di intersezione tra s e r e con D il punto di intersezione tra s e π, si determini un'equazione della retta CD.*
c) *Si determini l'angolo tra r e la retta CD.*

Esercizio 1.15 (12.16). *Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0, 0)$, $A_2(4, 2)$ e $A_3(1, k)$ ha area 5.*

Esercizio 1.16 (v. 12.23). *Siano $A = (0, -1, 0)$, $B = (-2, 0, -3)$, $C = (-1, 0, -1)$ punti dello spazio.*

a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.*
b) *Stabilire se il punto $D = (2, 2, 2)$ appartiene al piano contenente A, B, C.*

Esercizio 1.17 (12.19). *Calcolare il volume del parallelepipedo di lati $u(1, 0, 0)$, $v(-3, 1, 1)$ e $w(-2, 2, 5)$.*

Esercizio 1.18 (12.20). *Siano $P_1 = (1, -1, 0), P_2 = (1, 0, -1), P_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, e $P_4 = (1, 2, 1)$ quattro punti nello spazio.*

a) *Calcolare l'angolo tra i vettori* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $\overrightarrow{P_2P_3}$.
b) *Calcolare il volume del prisma con base il triangolo* $P_1P_2P_3$ *e lato il segmento* P_1P_4.

Esercizio 1.19 (12.22)**.** *Si considerino i piani* $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$ *di equazioni:*

$$\pi_1:\ 2x-y=1, \qquad \pi_2:\ x+y+z=0, \qquad \pi_3:\ x-2z=1.$$

a) *Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.*
b) *Si trovi il piano* π_4 *passante per l'origine e perpendicolare alla retta* $r=\pi_1\cap\pi_2$.
c) *Si determini l'area del triangolo di vertici* A,B,C, *con* $A=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$, $B=\pi_1\cap\pi_3\cap\pi_4$, $C=\pi_2\cap\pi_3\cap\pi_4$.