Geometria e algebra lineare – 21/1/2016 **A**
Corso di laurea in Ing. Elett. Tel., Ing. Inf. Org. e Informatica
Correzione

Esercizio 1A

Sia π_1 il piano contenente i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, -1, 1)$, $C = (0, 0, 0)$ e π_2 il piano di equazione $x + y - z = 1$. Sia π_3 il piano di equazione cartesiana $2x + ky + z = 0$.

1. Stabilire per quali valori di k la retta r intersezione dei piani π_1 e π_2 è perpendicolare al piano π_3.
2. Per il valore di k determinato in 1, trovare il punto di intersezione dei tre piani π_1, π_2, π_3.

Troviamo l'equazione del piano π_1 imponendo che il determinante della matrice che ha sulle righe le componenti dei vettori geometrici $\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ sia nullo:

$$0 = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -(y + z)$$

Per trovare equazioni parametriche per la retta r mettiamo a sistema le equazioni di π_1 e π_2 e risolviamo:

$$\begin{cases} x + y - z & = 1 \\ \quad y + z & = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema (che ha z come variabile libera) sono

$$\begin{cases} x = & 1 + 2t \\ y = & -t \\ z = & t \end{cases}$$

e la direzione di r è quindi data dal fetore $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$. La direzione normale al piano π_3 è data da $\mathbf{w} = (2, k, 1)$; la retta r è perpendicolare a π_3 se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono dipendenti, e questo accade quando $k = -1$.

L'intersezione dei tre piani è l'intersezione della retta r con il piano π_3, e corrisponde al valore di t soluzione di

$$2(1 + 2t) - (-t) + t = 0,$$

cioè a $t = -1/3$. Il punto cercato è quindi $(1/3, 1/3, -1/3)$.

Esercizio 2A

Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (0, 2, k, 1), \ \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, k), \ \mathbf{v}_3 = (0, 2, 1, 1).$$

1. Si trovino i valori del parametro reale k per i quali i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono indipendenti.
2. Fissato $k = 1/2$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Consideriamo una matrice che abbia sulle colonne i vettori considerati (mettiamo per comodità $\mathbf{v}_2$ sulla prima colonna, $\mathbf{v}_3$ sulla seconda e $\mathbf{v}_1$ sulla terza, per avere un elemento non nullo al posto (1,1)):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-1)\\ E_{31}(1) \\ E_{41}(-k)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{E_{32}(-1/2)\\ E_{42}(-1/2)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I vettori sono indipendenti se e solo se la matrice ha rango massimo, e ciò accade se e solo se $k \neq 1$.

Per completare a una base i vettori dati, consideriamo la matrice ottenuta accostando la matrice che ha sulle colonne i tre vettori con la matrice che ha sulle colonne i vettori della base canonica, e riduciamola a scalini.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{E_{21}(-1)\\ E_{31}(1) \\ E_{41}(-1/2)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{E_{32}(-1/2)\\ E_{42}(-1/2)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1/2} & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1/2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I vettori corrispondenti alle colonne dei pivot formano una base, quindi una base con le proprietà richieste è $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2\}$.

Esercizio 4A

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo

$$T(x, y, z) = (x + y + 3\,z, x + 2\,y + 4\,z, -x - y - 5\,z, y - z).$$

1. Si trovi il nucleo di T.
2. Si trovino i valori di k per i quali il vettore $(0, 0, k, 1)$ appartiene all'immagine di T.
3. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$, e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si trovi la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(T)$.

Scriviamo la matrice rappresentativa di T rispetto alle basi canoniche e riduciamola per righe

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-1)\\ E_{31}(1)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{E_{42}(-1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{E_{43}(-1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 3, e quindi il nucleo è costituito dal solo vettore nullo.

Il vettore $(0, 0, k, 1)$ appartiene all'immagine se e solo se il sistema lineare di matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & k \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

ammette una soluzione

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & k \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{E_{21}(-1)\\E_{31}(1)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{E_{42}(-1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{E_{43}(-1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{array}\right]$$

Per il Teorema di Rouchè-Capelli ciò accade se e so se $k = 1$.

La matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ ha sulle colonne le componenti delle immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$ sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ed è quindi:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5A

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare con matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2+k & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & -2 & -2-k & 0 \end{bmatrix}$$

Si trovino i valori di k per quali f è diagonalizzabile, e, per $k = 2$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di f.

Sviluppando lungo la terza riga troviamo che il polinomio caratteristico di A è

$$\chi(t) = (k-t)\det \begin{bmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 0 & 3-t & 1 \\ 0 & -2 & -t \end{bmatrix} = (k-t)(1-t)(t^2-3t+2) = (t-k)(t-1)^2(t-2)$$

$\boxed{k = 1}$

Otteniamo $\chi(t) = (t-1)^3(t-2)$, e gli autovalori sono $t_1 = 1$, con molteplicità algebrica 3 e $t_2 = 2$, con molteplicità algebrica 1. L'autospazio $E(1)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo di matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Riducendo per righe troviamo

$$\xrightarrow[E_{41}(1)]{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 2, e quindi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ha dimensione $4-2=2$. Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è 2, e quindi per $k=1$ la funzione non è diagonalizzabile.

$\boxed{k=2}$

In questo caso $\chi_(t) = (t-1)^2(t-2)^2$, e gli autovalori sono quindi $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, entrambi con molteplicità algebrica pari a 2.

L'autospazio $E(1)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo di matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{41}(1)]{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(1/2)]{} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 2, e quindi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ha dimensione $4-2=2$. Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è 2.
Le soluzioni del sistema sono $(x, y, z, w) = (x, -w/2, 0, w) = x(1, 0, 0, 0) + w(0, -1/2, 0, 1)$, e quindi una base per l'autospazio $E(1)$ è formata dai vettori $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, -1/2, 0, 1)$.

L'autospazio $E(2)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo di matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{42}(2)]{D_1(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}(2)]{} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 2, e quindi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ha dimensione $4-2=2$. Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è 2.
Le soluzioni del sistema sono $(x, y, z, w) = (-w, -2z-w, z, w) = z(0, -2, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1)$, e quindi una base per l'autospazio $E(1)$ è formata dai vettori $(0, -2, 1, 0)$ e $(-1, -1, 0, 1)$.

Una base di autovettori per $k=2$ è quindi $\{(1, 0, 0, 0), (0, -1/2, 0, 1), (0, -2, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$.

$\boxed{k \neq 1, 2}$

In questo caso il polinomio caratteristico è $(t-k)(t-1)^2(t-2)$, e l'unico autovalore con molteplicità algebrica maggiore di uno è $t=1$. L'autospazio relativo è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo di matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2+k & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & -2 & -2-k & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{41}(1)]{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2+k & 1 \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 2 e quindi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ha dimensione $4-2=2$. Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è 2, e quindi f è diagonalizzabile.

Esercizio 1B

a) $k = -1$
b) $(1, 1/2, -1/2)$

Esercizio 2B

a) Per ogni k.
b) Ad esempio $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2\}$.

Esercizio 4B

a) Il nucleo di T è costituito dal solo vettore nullo.
b) Per $k = 1$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Esercizio 5B

Diagonalizzabile per $k \neq 2$

Base di autovettori per $k = 1$: $\{(0, -1/2, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (-1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$.

Esercizio 1C

a) $k = -1$
b) $(-1/3, 1/3, 1/3)$

Esercizio 2C

a) Per ogni k.
b) Ad esempio $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2\}$.

Esercizio 4C

a) Il nucleo di T è costituito dal solo vettore nullo.
b) Per $k = -1$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Esercizio 5C

Diagonalizzabile per $k \neq -1$

Base di autovettori per $k = 2$: $\{(0, -1/2, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (-1, -1, 0, 1), (0, -2/3, 1, 0)\}$.

Esercizio 1D

a) $k = 1$
b) $(-1, 0, 0)$

Esercizio 2D

a) Per ogni k.
b) Ad esempio $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2\}$.

Esercizio 4D

a) Il nucleo di T è costituito dal solo vettore nullo.
b) Per $k = 2$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

Esercizio 5D

Diagonalizzabile per $k \neq 1$

Base di autovettori per $k = -2$: $\{(0, -1/2, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (-1, -1, 0, 1), (0, -2/3, 1, 0)\}$.