Note per il corso di Geometria e algebra lineare 2016-17
Laurea in Ing.Inform. e Com., Ing.Info.Gest.Imp., Informatica

6 Basi

6.1 Coordinate

Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base (ordinata) di V. Sia $v \in V$. Si ha allora $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. I coefficienti x_i sono le *coordinate* di v rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$.

Indicheremo con $T_\mathcal{B}(v)$ la n-upla delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ (talvolta si usa anche il simbolo $(x_1, \ldots, x_n)_\mathcal{B}$ per indicare il vettore v). Si osservi che al cambiare della base le coordinate dello *stesso* vettore, in generale, cambiano.

Esempio. I vettori $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (-1, 2, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. Infatti la matrice

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 3 (e quindi determinante non nullo). Dunque le sue colonne v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Come vedremo nella prossima sezione, 3 vettori indipendenti di $\mathbb{R}^3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. Il vettore $v = (5, -4, 2)$ ha coordinate rispetto a $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ gli scalari x_1, x_2, x_3 tali che $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v$. Dunque $x = (x_1, x_2, x_3)$ è la soluzione del sistema lineare non omogeneo

$$Mx = v.$$

L'unica soluzione è $(2, -1, 3)$. Quindi $T_\mathcal{B}(v) = (2, -1, 3)$ e $v = (2, -1, 3)_\mathcal{B} = 2v_1 - v_2 + 3v_3$.

Rispetto alla *base canonica* di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

il vettore v ha coordinate uguali alle sue componenti: $T_\mathcal{E}(v) = (5, -4, 2)$.

L'uso di basi diverse da quella canonica è conveniente nel caso in cui un problema assuma una forma più semplice quando viene espresso usando le coordinate rispetto alla nuova base.

Esempio. Si voglia studiare il seguente problema di *interpolazione polinomiale*: fissati n punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ del piano, con ascisse x_i tutte distinte, trovare un polinomio il cui grafico passi per tutti gli n punti (cf. l'esempio in §5.3).

Il problema ha un'unica soluzione se il polinomio cercato ha grado al più $n - 1$. Per risolverlo, conviene utilizzare, al posto della base canonica $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$, la *base di Lagrange* costituita dai polinomi

$$f_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Il *polinomio di Lagrange* $f_i(x)$ ha la proprietà di annullarsi in x_j per ogni $j \neq i$ e valere 1 in x_i. L'insieme $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ è una base di $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Mostriamo che è linearmente indipendente: se

$$a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0,$$

valutando in x_k si ottiene $\sum_i a_i f_i(x_k) = a_k = 0$, per ogni $k = 1, \ldots, n$.

Mostriamo che $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{R}_{n-1}[x]$: la combinazione lineare

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$$

vale a_k in x_k ($k = 1, \ldots, n$). Dunque i polinomi $f(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ e $g(x) = \sum_i f(x_i) f_i(x)$ assumono gli stessi valori in $x_1, \ldots, x_n$. Ma allora devono coincidere: per il Teorema Fondamentale dell'Algebra il polinomio differenza $f(x) - g(x)$, che ha grado al più $n-1$, non può annullarsi in n valori distinti, a meno che non sia il polinomio nullo.

Data la base di Lagrange, il problema di interpolazione si risolve immediatamente: la combinazione lineare $f(x) = \sum_i y_i f_i(x)$ è un polinomio con grafico passante per i punti (x_i, y_i). Si noti che la base di Lagrange dipende solo dalle ascisse x_i, non dalle ordinate y_i.

Ad esempio, se le ascisse dei punti sono $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 5$, i polinomi di Lagrange sono

$$f_1(x) = \tfrac{1}{6}(x-4)(x-5), \;\; f_2(x) = -\tfrac{1}{2}(x-2)(x-5), \;\; f_3(x) = \tfrac{1}{3}(x-2)(x-4)$$

e il polinomio con grafico passante per i punti $(2,1), (4,2), (5,0)$ è

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \cdot f_1(x) + 2 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x) &= \tfrac{1}{6}(x-4)(x-5) - (x-2)(x-5) \\ &= -\tfrac{1}{6}(x-5)(5x-8). \end{aligned}$$

6.2 Proprietà delle basi di $\mathbb{R}^n$

Si è visto negli esempi che lo spazio di n-uple $\mathbb{R}^n$ ha molte basi. Tuttavia, con gli enunciati seguenti si dimostra che le basi di $\mathbb{R}^n$ hanno tutte lo stesso numero n di vettori.

Proposizione 1. *In $\mathbb{R}^n$ m vettori, con $m > n$, sono sempre linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Si consideri la matrice M, di tipo (n, m), le cui colonne sono gli m vettori. Essendo $rg(M) \leq n$, si ha $null(M) = m - rg(M) > 0$ e quindi il sistema $Mx = 0$ ha soluzioni non nulle: le colonne di M sono dipendenti. □

Proposizione 2. *Qualunque n-upla di vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Basta considerare la matrice M, di tipo $(n, n+1)$, che ha come prime n colonne i vettori indipendenti, e come $(n+1)$-esima colonna un qualunque altro vettore $v \in \mathbb{R}^n$, e ridurre M per righe. L'ultima colonna della matrice $rref(M)$ contiene i coefficienti della combinazione lineare degli n vettori che genera il vettore v. □

Proposizione 3. *Un insieme $\{v_1, \ldots, v_m\}$ di vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$, con $m < n$, può sempre essere completato a una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $n - m$ vettori.*

Dimostrazione. Si consideri la matrice M, di tipo $(n, m+n)$, con colonne gli m vettori $v_1, \ldots, v_m$ e gli n elementi $e_1, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$. La matrice M ha rango n, poiché contiene n colonne indipendenti. La forma ridotta $rref(M)$ ha $e_1, \ldots, e_m$ nelle prime m colonne, poiché le prime m colonne di M sono indipendenti, ed esistono altre $n-m$ colonne di M (corrispondenti ai pivot di $rref(M)$) che sono indipendenti da $v_1, \ldots, v_m$. Aggiungendo all'insieme $\{v_1, \ldots, v_m\}$ questi $n-m$ elementi della base canonica, si ottiene un insieme indipendente e quindi una base per la proposizione precedente. □

Esempio. Per completare l'insieme indipendente

$$\{v_1 = (1, 0, 2, 1), v_2 = (1, 1, -2, -1)\}$$

a una base di $\mathbb{R}^4$, basta considerare la riduzione per righe

$$rref \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Le colonne 1,2,3,5 sono indipendenti. Quindi l'insieme

$$\{v_1, v_2, e_1, e_3\}$$

forma una base di $\mathbb{R}^4$. Si osservi che è sufficiente ottenere una qualsiasi matrice a scalini (non necessariamente ridotta) per individuare le colonne indipendenti e quindi gli elementi da aggiungere per ottenere una base.

Teorema 1. *Ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene n vettori.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1, rimane solo da stabilire che non può esistere una base formata da m vettori, con $m < n$. Supponiamo che $v_1, \ldots, v_m$ siano m vettori indipendenti, con $m < n$. Per la proposizione precedente esistono vettori $v_{m+1}, \ldots, v_n$ tali che l'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sia una base di $\mathbb{R}^n$. Ma allora $v_{m+1}, \ldots, v_n \notin \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ e i vettori $v_1, \ldots, v_m$ non possono essere generatori e quindi non sono una base di $\mathbb{R}^n$. □

Lo stesso procedimento seguito sopra per $\mathbb{R}^n$ mostra che in ogni spazio di n-uple $\mathbb{K}^n$ ogni base ha n elementi.

6.3 Dimensione degli spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, che possiede una base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Attraverso la funzione $T_{\mathcal{B}}$ che fa corrispondere a ogni vettore le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$, tutte le proprietà dimostrate per le basi di $\mathbb{K}^n$ si dimostrano per lo spazio V.

Proposizione 4. *La funzione $T_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ ha le seguenti proprietà:*
(i) è iniettiva e suriettiva (cioè biunivoca);
(ii) è lineare*: $T_{\mathcal{B}}(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T_{\mathcal{B}}(v_1) + a_2 T_{\mathcal{B}}(v_2)$, per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2 \in V$. In particolare, ponendo $a_1 = a_2 = 0$, si ha $T_{\mathcal{B}}(0) = 0$.*

Dimostrazione. (i) è immediata dalla definizione, essendo $T_{\mathcal{B}}$ invertibile:

$$T_{\mathcal{B}}^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \textstyle\sum_i x_i e_i .$$

(ii) se $v_1 = \sum_i x_i e_i$ e $v_2 = \sum_i y_i e_i$, si ha

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = \textstyle\sum_i (a_1 x_i + a_2 y_i) e_i.$$

□

Definizione 1. Una funzione lineare biunivoca è detta *isomorfismo* tra i due spazi vettoriali.

L'esistenza dell'isomorfismo $T_{\mathcal{B}}$ tra V e $\mathbb{K}^n$ permette di ottenere per V tutti i risultati noti per $\mathbb{K}^n$. Infatti vale la seguente:

Proposizione 5. *I vettori $v_1, \dots, v_m$ di V sono indipendenti (o generatori, o base di V) se e solo se le immagini $T_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, T_{\mathcal{B}}(v_m)$ sono indipendenti (rispettivamente generatori, base di $\mathbb{K}^n$).*

Ad esempio, se $v_1, \dots, v_m$ sono indipendenti, e $\sum_i a_i T_{\mathcal{B}}(v_i) = 0$, si ha $T_{\mathcal{B}}(\sum_i a_i v_i) = 0 = T_{\mathcal{B}}(0)$. Per l'iniettività deve essere $\sum_i a_i v_i = 0$, e quindi $a_i = 0\ \forall i$ per l'indipendenza dei v_i. Dunque le immagini sono indipendenti. Si procede in modo simile per le altre condizioni.

Esempio. Si considerino i polinomi $p_1(x) = x^2 - 2x$, $p_2(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 2$, $p_3(x) = x^3 + x + 1$ in $\mathbb{R}_3[x]$. Per stabilirne la in/dipendenza lineare basta considerare le quadruple delle coordinate rispetto ad una qualsiasi base di $\mathbb{R}_3[x]$. Scegliendo $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$, si ottengono i tre vettori di $\mathbb{R}^4$

$$T_{\mathcal{B}}(p_1) = (0, 1, -2, 0),\ T_{\mathcal{B}}(p_2) = (2, -1, 4, 2),\ T_{\mathcal{B}}(p_3) = (1, 0, 1, 1)$$

Dalla matrice

$$rref \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene che p_1 e p_2 sono indipendenti, e $p_3 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$.

La Proposizione 5 permette di dimostrare facilmente il fondamentale teorema della base, che permette di definire la dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato.

Teorema 2. *(della base) In uno spazio vettoriale V finitamente generato tutte le basi hanno lo stesso numero (finito) di vettori. Tale numero è la* dimensione *dello spazio V, indicata con* $\dim V$. $\square$

Si osservi che uno spazio vettoriale finitamente generato ha sempre una base. Infatti, se $V = \langle S \rangle$, $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ e S è dipendente, è sempre possibile, eliminando un vettore alla volta, scegliere in S vettori indipendenti che generano S, e quindi generano tutto lo spazio V.

Lo *spazio nullo* $\{0\}$, contenente solo il vettore nullo, non contiene alcun vettore indipendente. Per questo si *conviene* di porre $\dim\{0\} = 0$.