CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA. CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 7– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2016/17

Esercizio 7.1 (8.1)**.** *Sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$*. Stabilire se* T *è lineare.*

Soluzione:
Se T fosse lineare in particolare dovrebbe essere $T(2v) = 2T(v)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Sia per esempio $v = (1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} &T(v) = T(1,0,0) = (1,0,0) \ \Rightarrow \ 2T(v) = (2,0,0) \\ &T(2v) = T(2,0,0) = (4,0,0) \end{aligned}$$

Quindi $T(2v) \neq 2T(v)$ e T non è lineare.

□

Esercizio 7.2 (8.2)**.** *Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici* $M_{2\times2}$ *a valori in* $\mathbb{R}$ *non è lineare.*

Soluzione:
Sia T la funzione determinante: $T(A) = \det(A)$. Se T fosse lineare in particolare dovrebbe essere $T(A) + T(B) = T(A + B)$ per ogni $A,\ B \in M_{2\times2}$. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} &T(A) = T(B) = 0 \ \Rightarrow \ T(A) + T(B) = 0 \\ &T(A + B) = 1 \end{aligned}$$

Quindi $T(A) + T(B) \neq T(A + B)$ e T non è lineare.

□

Esercizio 7.3 (8.3)**.** *Stabilire se esiste una applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,7) = (4,5), \qquad T(1,5) = (1,4)$$

Soluzione:
Se T fosse un'applicazione lineare dovrebbe in particolare verificare

$$T(1,2) + T(1,5) = T((1,2) + (1,5)) = T(1+1, 2+5) = T(2,7),$$

mentre

$$\begin{aligned} &T(1,2) + T(1,5) = (3,0) + (1,4) = (4,4) \\ &T(2,7) = (4,5) \end{aligned}$$

Quindi T non è un'applicazione lineare.

□

Esercizio 7.4 (8.4)**.** *Stabilire se esiste una applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che*

$$T(1,2) = (3,0), \qquad T(2,4) = (5,0), \qquad T(0,1) = (1,1)$$

Soluzione:
Se T fosse un'applicazione lineare dovrebbe in particolare verificare

$$2T(1,2) = T(2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = T(2,4),$$

mentre

$$\begin{aligned} &2T(1,2) = 2(3,0) = (6,0) \\ &T(2,4) = (5,0) \end{aligned}$$

Quindi T non è un'applicazione lineare.

□

Esercizio 7.5 (8.5)**.** *Determinare una applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che*

$$T(1,1) = (1,2), \qquad T(0,2) = (4,4)$$

Soluzione:

Possiamo procedere in due modi.

(1) Ricaviamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^2$ imponendo la linearità di T:

$$\begin{aligned} &2T(0,1) = T(0,2) = (4,4) \ \Rightarrow\ T(0,1) = (2,2) \\ &T(1,0) = T(1,1) - T(0,1) = (1,2) - (2,2) = (-1,0) \end{aligned}$$

Di conseguenza, preso il generico elemento $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in \mathbb{R}^2$, per la linearità di T deve essere

$$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(-1,0) + y(2,2) = (-x+2y, 2y)$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1,1) = (1,2)$ e $T(0,2) = (4,4)$ come richiesto.

(2) Alternativamente possiamo scrivire il generico elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ come combinazione lineare degli elementi di cui conosciamo l'immagine (che formano una base di $\mathbb{R}^2$): $(1,1)$ e $(0,2)$. Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$(x,y) = a(1,1) + b(0,2) \ \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ a + 2b = y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{-x+y}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza

$$(x,y) = x(1,1) + \frac{-x+y}{2}(0,2)$$

Essendo T lineare deve quindi essere

$$\begin{aligned} T(x,y) =& x\,T(1,1) + \frac{-x+y}{2}\,T(0,2) = x(1,2) + \frac{-x+y}{2}(4,4) \\ =&(x,2x) + (-2x+2y, -2x+2y) = (-x+2y, 2y) \end{aligned}$$

E' immediato verificare che T è lineare e che $T(1,1) = (1,2)$ e $T(0,2) = (4,4)$ come richiesto.

□

Esercizio 7.6 (v. 8.6)**.** *Sia* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione definita da* $T(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.

a) *Verificare che* T *è lineare.*
b) *Determinare Nucleo e Immagine di* T*.*
d) *Determinare* $T(1,2)$*.*

Soluzione:

a) Dobbiamo verificare che

$$\begin{aligned} &T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_i \in \mathbb{R}^2 \\ &T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Siano quindi $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, allora

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ T(v_1) + T(v_2) &= (x_1 + y_1, 2x_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, 2x_2, x_2 - y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Quindi la prima proprietà è verificata. Analogamente

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \\ \lambda T(v) &= \lambda(x+y, 2x, x-y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, \lambda x - \lambda y) \end{aligned}$$

Anche la seconda proprietà è verificata, quindi T è lineare.

b) Per definizione

$$\mathrm{N}(T) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid T(v) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y, 2x, x - y) = (0, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Si tratta quindi di cercare le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{(0, 0)\}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(v) \mid v \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3 \\ &= \{(x + y, 2x, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1, 2, 1)x + (1, 0, -1)y \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 2, 1),\ (1, 0, -1)\rangle \end{aligned}$$

A questo punto per trovare una base di $\mathrm{Im}(T)$ dobbiamo studiare la dipendenza lineare dei generatori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice ha rango due e i due generatori di $\mathrm{Im}(T)$ sono linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(1, 2, 1),\ (1, 0, -1)\}.$$

d) Con la definizione di T: $T(1, 2) = (1 + 2, 2 \cdot 1, 1 - 2) = (3, 2, -1)$

□

Esercizio 7.7 (v. 8.7)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^2$ nel seguente modo: $T(e_1) = (1, 2, 1),\ T(e_2) = (1, 0, -1)$.*

a) *Esplicitare $T(x, y)$.*
c) *Stabilire se $(3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.*

Soluzione:

a) Il generico vettore $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può esprimere come $v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$. Quindi per la linearità di T:

$$T(v) = x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2) = x \cdot (1, 2, 1) + y \cdot (1, 0, -1) = (x + y,\ 2x,\ x - y)$$

c) Il vettore $w = (3, 4, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$ se esiste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $T(x, y) = w$, ovvero se $(x + y, 2x, x - y) = (3, 4, 1)$. Si tratta quindi di stabilire se il seguente sistema ammette soluzione:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (3, 4, 1) = T(2, 1) \in \mathrm{Im}(T)$$

□

Esercizio 7.8 (8.11)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ la funzione lineare definita da*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2)$$

a) *Trovare una base del nucleo $\mathrm{N}(T)$ e una base dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$.*
b) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
c) *Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1 - k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?*

Soluzione:

Ricordiamo che $\mathrm{Im}(T)$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$ così definito:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(v) \mid v \in \mathbb{R}^4\} = \\ &= \{(x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(1, 1, 0, 0, -1) \cdot x_1 + (-1, 1, 1, 1, -1) \cdot x_2 + (0, 0, 0, 3, 0) \cdot x_3 + (0, 0, 0, 0, 0) \cdot x_4 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle (1, 1, 0, 0, -1),\ (-1, 1, 1, 1, -1),\ (0, 0, 0, 3, 0),\ (0, 0, 0, 0, 0)\rangle \end{aligned}$$

Quindi la dimensione di $\mathrm{Im}(T)$ equivale al rango della matrice A associata a tali vettori. Notiamo inoltre che tali vettori non sono altro che l'immagine della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Infatti:

$$T(e_1) = (1,1,0,0,-1), \qquad T(e_2) = (-1,1,1,1,-1)$$
$$T(e_3) = (0,0,0,3,0), \qquad T(e_4) = (0,0,0,0,0)$$

Inoltre v_k appartiene all'immagine di T se $v_k \in \langle T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)\rangle$.

Per rispondere a tutte le domande riduciamo a gradini la matrice $A|v_k$ associata al sistema lineare necessario per rispondere al punto c).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II-I \\ \\ IV-III \\ V+II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1-k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 2III-II \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ IV \\ III \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 2-k \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 3+k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dalla matrice dei coefficienti ridotta ricaviamo che questa ha rango 3 e che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T)) &= \mathrm{rg}(A) = 3 \\ \mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} \\ &= \{(1,1,0,0,-2),\ (-1,1,1,1,0),\ (0,0,0,3,0)\} \end{aligned}$$

Dal teorema di nullità più rango sappiamo che

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\text{spazio di partenza})$$

Quindi

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 - 3 = 1$$

Per ricavare esplicitamente la base $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T))$ notiamo che, dato un vettore v di $\mathbb{R}^4$,

$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{N}(T) \quad \text{sse} \quad T(v) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + 3x_3,\ -x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi gli elementi del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla precedente matrice A.

In sostanza basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice ridotta precedentemente a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{\ (0,0,0,1)\ \}$$

Anche senza utilizzare il teorema di nullità più rango potevamo ricavare esplicitamente da qui la dimensione del nucleo.

b) Abbiamo visto al punto precedente che

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 < 5 = \dim(\mathbb{R}^5) \ \Rightarrow \ T \text{ non è suriettiva}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ T \text{ non è iniettiva}$$

c) Il vettore $v_k \in \mathrm{Im}(T)$ se il sistema $A|v_k$ impostato all'inizio è compatibile. Dalla matrice ridotta a gradini vediamo che deve essere $k = 0$. In tale caso il rango della matrice completa e incompleta è 3, quindi il sistema è compatibile. Calcoliamo le soluzioni (anche se non era effettivamente richiesto) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 2 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$v_0 = T(1, 1, 1, t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

Esercizio 7.9 (8.12)**.** *Sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *la funzione lineare definita da:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2)$$

a) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di* T *al variare del parametro reale* k.
b) *Stabilire per quali valori di* k *il vettore* $v = (3, 3, 1, 0)$ *appartiene all'immagine di* T.

Soluzione:
Come nell'esercizio precedente notiamo che l'immagine di T è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \left\{T(v) \mid v \in \mathbb{R}^3\right\} = \\ &= \{(2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2k, 0, 1, 1) \cdot x_1 + (-1, 1, 1, -1) \cdot x_2 + (0, k, -1, 0) \cdot x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle (2k, 0, 1, 1),\ (-1, 1, 1, -1),\ (0, k, -1, 0)\rangle \\ &= \langle T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3)\rangle \end{aligned}$$

Analogamente il nucleo di T è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ così definito

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(T) &= \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 0\right\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid (2kx_1 - x_2,\ x_2 + kx_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2) = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2kx_1 - x_2 = 0,\ x_2 + kx_3 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\} \end{aligned}$$

Per risolvere a tutte le domande riduciamo quindi a gradini la seguente matrice $A|v$

$$A|v = \begin{bmatrix} 2k & -1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ III \\ II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 2k & -1 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ \\ IV - 2kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k & | & 3 \\ 0 & -1 + 2k & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III - II \\ 2IV - (2k-1)III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k + 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k - 1 & | & -2k + 7 \end{bmatrix}$$

Conviene forse interrompere la riduzione a questo punto.

a) $2k + 1$ e $2k - 1$ non possono essere entrambi nulli, quindi la matrice A ha sempre rango 3:

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 3 = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

b) Il sistema $A|v$ ammette soluzione quando $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|v)$. Abbiamo appena visto che $\mathrm{rg}(A) = 3$, quindi il sistema ammette soluzione se anche $\mathrm{rg}(A|v) = 3$, cioè se $\det(A|v) = 0$. Calcoliamo quindi il determinante della matrice ridotta:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2k + 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 2k - 1 & | & -2k + 7 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 2 \cdot [(2k + 1)(-2k + 7) - (2k - 1) \cdot 5] \\ &= 2 \cdot (-4k^2 + 2k + 12) \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado vediamo che il determinante si annulla per $k = -3, 4$.
Infine v appartiene all'immagine di T quando $k = -3, 4$.

□

Esercizio 7.10 (8.17)**.**

a) *Verificare che le relazioni*

$$T(1,1,1) = (-1,2), \quad T(0,1,1) = (0,4), \quad T(1,1,0) = (2,1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$.

b) *Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.*

c) *Trovare basi di $Im(T)$ e di $N(T)$.*

Soluzione:

a) E' sufficiente verificare che l'insieme

$$\{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,1,0)\}$$

su cui è definita la relazione costituisce una base di $\mathbb{R}^3$:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

La matrice ha determinante diverso da zero, quindi ha rango 3 e l'insieme costituisce una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Dobbiamo determinare le immagini degli elementi e_i della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dal momento che conosciamo $T(v_i)$, $i = 1,2,3$, dobbiamo esprimere ogni e_i come combinazione lineare dei vettori v_i. Senza la necessità di risolvere sistemi, è immediato verificare che

$$e_1 = v_1 - v_2, \qquad e_3 = v_1 - v_3, \qquad e_2 = v_2 - e_3 = v_2 - v_1 + v_3$$

Per la linearità di T ricaviamo ora le immagini degli elementi della base canonica:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(v_1) - T(v_2) = T(1,1,1) - T(0,1,1) = (-1,2) - (0,4) = (-1,-2) \\ T(e_3) &= T(v_1) - T(v_3) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (-1,2) - (2,1) = (-3,1) \\ T(e_2) &= T(v_2) - T(v_1) + T(v_3) = T(0,1,1) - T(1,1,1) + T(1,1,0) \\ &= (0,4) - (-1,2) + (2,1) = (3,3) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a T rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Riduciamo a gradini la matrice A

$$II - 2I \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Una base dell'immagine è quindi:

$$\mathcal{B}(Im(T)) = \{T(e_1) = (-1,-2),\ T(e_2) = (3,3)\}$$

Risolviamo ora il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} -x + 3y - 3z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{7}{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(T)) = \left\{ \left(4, \frac{7}{3}, 1\right) \right\}$$

□

Esercizio 7.11 (8.30)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) *Stabilire se T invertibile.*

b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:

a) T invertibile se è biiettiva, cioè suriettiva e iniettiva, ovvero se la matrice A ha rango 4. In sostanza T è invertibile se e solo se lo è A.
Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{c} \\ 1/2II+I \\ III+1/2II \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-III \end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

A ha rango 3 quindi T non è invertibile. Notiamo che potevamo immediatamente affermare che $\text{rg}(A) < 4$ in quanto A ha la quarta colonna multipla della terza.
Probabilmente per rispondere alla domanda a) era più comodo calcolare il determinante di A (che è immediato sviluppando rispetto alla seconda riga), ma la riduzione ci serviva comunque per il punto successivo.

b) Poichè le prime tre colonne di A contengono un pivot, ne segue che

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{(1,-2,1,0),\ (0,0,1,1),\ (-1,0,0,-1)\}$$

Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x-z+w=0\\ y=0\\ -z+w=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=t\\ w=t\end{cases}$$

Quindi

$$\mathcal{B}(N(T)) = \{\ (0,0,1,1)\ \}$$

□

Esercizio 7.12 (8.16)**.** *Si consideri il seguente endomorfismo di* $\mathbb{R}^4$

$$T(x,y,z,w) = (-x+z,\ 2y,\ x-2z,\ w)$$

a) *Si determino le dimensioni di immagine e nucleo di* T *e si stabilisca se* T *è invertibile.*
b) *Si determini l'inversa* T^{-1}.

Soluzione:

Consideriamo la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica:

$$M(T) = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Notiamo che $\det(A) = 2 \neq 0$, quindi T è invertibile.
Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo $M(T)$ a gradini, affiancondola alla matrice identica:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ \\ III+I \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} I-III \\ 1/2II \\ -III \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

a) La matrice $M(T)$ ha rango 4, quindi $\text{Im}(T)$ ha dimensione 4 e T è suriettiva. Analogamente il nucleo di T ha dimensione $4-\text{rg}(A) = 0$, quindi T e iniettiva. Poiché T è sia iniettiva che suriettiva, T è biiettiva e quindi invertibile.

b) La matrice $M\left(T^{-1}\right)$ associata all'endomorfismo T^{-1} è l'inversa della matrice $M(T)$. Dai calcoli precedenti

$$M\left(T^{-1}\right) = \begin{bmatrix}-2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T^{-1}(x,y,z,w) = \left(-2x-z,\ \frac{1}{2}y,\ -x-z,\ w\right)$$

$\square$

Esercizio 7.13 (8.34)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo*

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ 3x - z,\ 2x - y + z)$$

e sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(x, y, z) = (x + z,\ x - y + z,\ y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ e $f \circ g$.

Soluzione:

Calcoliamo le matrici associate a f e g (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$):

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizzando le matrici associate a f e g possiamo calcolare direttamente la matrice associata alle due funzioni composte. Infatti la matrice associata a $g \circ f$ è $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$ e la matrice associata a $f \circ g$ è $M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$. Quindi

$$M(g \circ f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M(f \circ g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare la dimensione dei nuclei basta calcolare il rango delle matrici. Riducendo a gradini:

$$M(g \circ f) \ \Rightarrow \ \begin{array}{c} \\ \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(f \circ g) \ \Rightarrow \ \begin{array}{c} III \\ I \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 2I \\ III - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine

$$\dim(\mathrm{N}(g \circ f)) = 3 - \mathrm{rg}\,(M(g \circ f)) = 3 - 1 = 2$$
$$\dim(\mathrm{N}(f \circ g)) = 3 - \mathrm{rg}\,(M(f \circ g)) = 3 - 2 = 1$$

$\square$

Esercizio 7.14 (8.32)**.** *Si consideri la funzione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice*

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.*
b) *Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(T)$ al variare di k.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice scambiando la prima e quarta colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2k \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi per ogni k

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 < 4 \text{ e } T \text{ non è suriettiva.}$$
$$\dim(N(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1 \text{ e } T \text{ non è iniettiva.}$$

□

Esercizio 7.15 (8.15). *Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) *Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T.*
b) *Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.*

Soluzione:
La matrice associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per risponedere alla domanda b) dobbiamo risolvere il sistema $A \cdot (x, y, z)^T = (3, 3, k)^T$; riduciamo quindi direttamente a gardini la matrice A affiancata dalla colonna $(3, 3, k)^T$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + I \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & k-6 \end{array}\right]$$

a) Considerando la matrice A otteniamo che una base dell'immagine di T è data da

$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(2, -2, 0),\ (0, 1, 1)\}$$

Risolvendo il sistema $Ax = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right) \right\}$$

b) T non è iniettiva in quanto il nucleo di T ha dimensione 1.
Risolviamo il sistema $Ax = (3, 3, k)^T$. Il sistema ha soluzione solo se $k = 6$ quando otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 6 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Infine $(3, 3, k)$ appartiene all'imangine di T solo se $k = 6$. In tale caso i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$ sono i vettori del tipo $v = \left(\frac{3}{2}, 6, 0\right) + \left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right) t,\ \forall t \in\ R$.
Notiamo che i vettori del tipo $\left(-\frac{1}{2}, -2, 1\right) t$ sono gli elementi del nucleo. Infatti se $v_0 = \left(\frac{3}{2}, 6, 0\right)$ e $w \in \mathrm{N}(T)$, poiché $T(v_0) = (3, 3, 6)$, allora $T(v_0 + w) = T(v_0) + T(w) = (3, 3, 6) + (0, 0, 0) = (3, 3, 6)$.

□

Esercizio 7.16 (8.9). *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi :\quad x + 2y = 0$.

Soluzione:
Il piano π ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow \quad \pi = \{(x, y, z) = (-2t, t, s) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

Notiamo che poichè il piano passa per l'origine, i suoi punti costituiscono uno spazio vettoriale.

L'immagine del generico punto $(x, y, z) = (-2t, t, s)$ di π è quindi data da

$$T(x, y, z) = A \cdot (x, y, z) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7t \\ -5t \\ 2t + s \end{bmatrix} = (7t, -5t, 2t + s).$$

Infine l'immagine di π è il piano di equazioni parametrica e cartesiana:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -5t \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}, \\ z = 2t + s \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad T(\pi): \quad 5x + 7y = 0$$

□

Esercizio 7.17 (8.22)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y) = (kx + 4y,\ x + ky,\ y)$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro k.

Soluzione:

Notiamo innanzittutto che

- T è iniettiva se $\mathrm{N}(T) = \{(0, 0)\}$, ovvero se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$.
- T è suriettiva se $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, ovvero se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

Si tratta quindi di trovare immagine e nucleo di T.

Calcoliamo $T(e_1)$ e $T(e_2)$ per determinare la matrice associata a T:

$$T(e_1) = (k, 1, 0)$$
$$T(e_2) = (4, k, 1)$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} k & 4 \\ 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo la matrice A a gradini.

$$\Rightarrow \begin{array}{r} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ k & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 - k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - (4 - k^2)II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto che $\mathrm{rg}(A) = 2$, quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \ \Rightarrow \ T \ \text{ non è suriettiva}$$

Notiamo che lo stesso risultato lo potevamo ottenere osservando che

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(e_1),\ T(e_2) \rangle$$

quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. In nessun caso infatti una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ può essere suriettiva.

Per il teorema di nullità più rango

$$\dim(\mathrm{N}(T)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 - 2 = 0$$

Quindi

$$\mathrm{N}(T) = \{(0, 0)\} \ \Rightarrow \ T \ \text{ è iniettiva}$$

Lo stesso risultato lo potevamo ottenere risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + ky = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}(T) = \{(0, 0)\}$$

□

Esercizio 7.18 (8.23)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice*

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Discutere l'iniettività e suriettività di T al variare del parametro reale k.*
b) *Determinare la dimensione di immagine e nucleo di T al variare di k.*

Soluzione:

a) T è suriettiva se $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$, cioè se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 4$. Inoltre T è iniettiva se $\mathrm{N}(T) = \{(0,0,0,0)\}$, cioè se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 0$. Si tratta perciò di calcolare il rango di A. Utilizziamo il calcolo del determinante, che sviluppiamo rispetto alla quarta colonna:

$$\det(A) = -1 \cdot (k+3) \cdot \det \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 \\ k+1 & 0 & 0 \\ 2k^2 & 0 & k \end{bmatrix}$$
$$= -1 \cdot (-1) \cdot (k+3) \cdot (k+1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3k+4 \\ 0 & k \end{bmatrix} = (k+3) \cdot (k+1) \cdot k$$

– Se $k \neq -3, -1, 0$, allora $\det(A) \neq 0$ e $\mathrm{rg}(A) = 4$. Quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 4 \quad \Rightarrow \quad T \text{ è suriettiva}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad T \text{ è iniettiva}$$

– Se $k = -3, -1$ o 0, allora

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) \leq 3 \quad \Rightarrow \quad T \text{ non è suriettiva}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad T \text{ non è iniettiva}$$

b) Abbiamo già visto la dimensione di immagine e nucleo per $k \neq -3, -1, 0$. Consideriamo ora gli altri casi.

– Se $k = -3$ allora $\det(A) = 0$ e $\mathrm{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A diventa

$$A = \begin{bmatrix} -15 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} -15 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2(1+10) = 22 \neq 0$$

Quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1$$

– Se $k = -1$ allora $\det(A) = 0$ e $\mathrm{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A diventa

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

Quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A) = 3 \qquad \dim(\mathrm{N}(T)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 1$$

– Se $k = 0$ allora $\det(A) = 0$ e $\text{rg}(A) \leq 3$. Inoltre A diventa

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In A troviamo una sottomatrice 3×3 che ha determinante non nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 20 = -19 \neq 0$$

Quindi $\text{rg}(A) = 3$ e

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 3 \qquad\qquad \dim(\text{N}(T)) = 4 - \text{rg}(A) = 1$$

□

Esercizio 7.19 (8.24)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che*

$$T(x, y, z, w) = (-x - y + z + w,\ -x + 2y - z,\ -x + y + 3z - 3w)$$

a) *Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.*
b) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^3$.
c) *Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale* $\text{N}(T) \subseteq \mathbb{R}^4$

Soluzione:

a) Calcoliamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$T(e_1) = (-1,\ -1,\ -1) \qquad T(e_2) = (-1,\ 2,\ 1)$$
$$T(e_3) = (1,\ -1,\ 3) \qquad T(e_4) = (1,\ 0,\ -3)$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Poichè

$$\text{Im}(T) = \langle T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3),\ T(e_4) \rangle$$

ovvero $\text{Im}(T)$ è generato dai vettori colonna di A, per determinarne dimensione e base riduciamo la matrice A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II - I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{c} \\ \\ III - 3II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/5III \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

LA matrice A ha rango 3, quindi

$$\dim(\text{Im}(T)) = 3$$

Inoltre le prime tre colonne di A sono linearmente indipendenti quindi possiamo prendere come base di $\text{Im}(T)$ i tre vettori $T(e_1), T(e_2),\ T(e_3)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\text{Im}(T)) &= \{T(e_1), T(e_2),\ T(e_3)\} \\ &= \{(-1, -1, -1),\ (-1, 2, 1),\ (1, -1, 3)\} \end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso $\text{Im}(T)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3, quindi $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ (e T è suriettiva).

c) Gli elementi di $\mathrm{N}(T)$ sono i vettori di $\mathbb{R}^4$, soluzione del sistema omogeneo a cui è associata la matrice A. Prendiamo la matrice già ridotta a gradini:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y+z+w=0 \\ y+z-2w=0 \\ -z+w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \\ w=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$\mathrm{N}(T) = \{(1,1,1,1)t \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$\dim(\mathrm{N}(T)) = 1$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{N}((T)) = \{(1,1,1,1)\}$$

Notiamo che, come ci aspettavamo dal teorema di nullità più rango:

$$\dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

□

Esercizio 7.20 (8.26)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da*

$$T(x,y,z) = (x-y, 2x-3y)$$

a) *Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.*

Soluzione:
Ricaviamo la matrice A associata all'applicazione T calcolando le immagini degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,2)$$
$$T(e_2) = T(0,1,0) = (-1,-3)$$
$$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0)$$

quindi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Rispondiamo ad entrambi i quesiti contemporaneamente ricordando che un'applicazione è iniettiva se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo, ovvero se $\dim(\mathrm{N}(T)) = 0$, ed è suriettiva se la sua immagine è tutto lo spazio di arrivo, ovvero in questo caso se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

Poichè la matrice A contiene la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

di determinante $-1 \neq 0$, la matrice A ha rango 2. Quindi
- $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 \Rightarrow T$ è suriettiva.
- Per il teorema di nullità più rango: $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow T$ non è iniettiva.

□

Esercizio 7.21 (8.53)**.** *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che:*

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) *Si calcoli la matrice associata a T rispetto ad $\mathcal{E}$.*
b) *Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T e stabilire se T è invertibile.*

Soluzione:
Dalla definizione otteniamo

$$T(e_1) = (3,-1,1)$$
$$T(e_2) = (0,1,-1)$$
$$T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2) = (6,-2,2) + (0,1,-1) = (6,-1,1)$$

a) La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo T a gradini

$$\begin{matrix} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza una base dell'immagine di T è $\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(3, -1, 1),\ (0, 1, -1)\}$.
Per trovare il nucleo risolviamo il sistema omogeno associato a T:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

e una base del nucle di T è $\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-2, -1, 1)\}$.

b) Dai conti svolti nel punto precedente vediamo che A ha rango 2, quindi non è invertibile. Altrettanto l'endomorfismo T non è invertibile.

□