CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA. CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 9– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2016/17

Esercizio 9.1. *[10.6]* Determinare il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che i vettori

$$v = (1, 3, 7, -1), \qquad w = (3, 5, 1, k)$$

siano ortogonali.

Esercizio 9.2. *[10.9]* Siano $u = (4, 2, -2)$ e $v = (3, -3, 2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$.

a) Calcolare le lunghezze di u e di v (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$).
b) Trovare tutti i vettori w di lunghezza 1 ortogonali a u e a v.

Esercizio 9.3. *[10.7]* Siano assegnati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v = (2, -1, 0, 1), \qquad w = (-1, 2, 0, 2)$$

a) Si calcoli l'angolo tra i due vettori.
b) Si determini la proiezione ortogonale di v su w.
c) Si scriva v come somma di un vettore v_1 multiplo di w e di un vettore v_2 ortogonale a w.

Esercizio 9.4. *[10.8]* Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v = (3, 4, -2), \qquad w = (2, 1, -1)$$

Esercizio 9.5. *[10.11]* Data la base

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1, 0, 1),\ v_2 = (0, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 1)\}$$

di $\mathbb{R}^3$, si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da $\mathcal{B}$.

Esercizio 9.6. *[10.12]* Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (0, 0, 1)\}$$

Esercizio 9.7. *[10.15]* Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1).$$

a) Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2.
b) Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2.
c) Trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori v_1 e v_2.

Esercizio 9.8. *[10.16]* Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $2x_1 + x_2 = 0$. Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare ordinario di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 9.9. *[10.21]* Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare tale che

$$T(1, -2, 1) = (2, 1),\ T(1, 0, 0) = (-1, 2),\ T(0, 1, 0) = (-1, 0).$$

a) Che dimensione ha l'immagine di T?
b) Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$) del nucleo di T.

Esercizio 9.10. *[11.1]* [Esercizio 15) cap. 9 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato.] Calcolare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 9.11. *[11.2]* Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche A si determini una matrice ortogonale P per la quale P^TAP sia diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 9.12. *[11.3]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

a) Stabilire se l'endomorfismo T é diagonalizzabile.
b) Trovare basi ortonormali degli autospazi di T (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$).
c) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

Esercizio 9.13. *[11.5]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Esercizio 9.14. *[11.9]* Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (ax,\ bx + y + z,\ y + z)$$

con a e b parametri reali.

a) Si discuta la diagonalizzabilità di T al variare di a e b in $\mathbb{R}$.
b) Posto $a = b = 0$ si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

Esercizio 9.15. *[11.13]* Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 2x_2 + \sqrt{3}x_3,\ \sqrt{3}x_2)$$

a) Stabilire se T è invertibile.
b) Mostrare che T è un endomorfismo simmetrico.
c) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza T.