CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA. CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 3– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2016/17

Esercizio 3.1. *Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s: \; x+y-1 = x-y+z = 0$$

a) *Mostrare che le due rette sono sghembe.*
b) *Determinare un'equazione del piano contenente la retta r e parallelo alla retta s.*
c) *Determinare la distanza tra le due rette.*
d) *Determinare un'equazione del piano parallelo alle due rette ed equidistante da esse.*

SOLUZIONE:

a) Due rette del piano sono sghembe se non sono parallele e non si intersecano. L'equazione parametrica di s è:

$$s: \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = -1+2t \end{cases}$$

Quindi r ha direzione $(1,-1,0)$ mentre s ha direzione $\vec{v} = (-1,1,2)$ e le due rette non sono parallele. Inoltre se calcoliamo $r \cap s$:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \\ x+y-1 = 0 \\ x-y+z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \\ 1+t+1-t-1 = 0 \\ 1+t-1+t+3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \\ 1 = 0 \\ 3+2t = 0 \end{cases}$$

il sistema non ammette soluzione, quindi le due rette non si intersecano.

Di conseguenza r e s sono sghembe.

b) Sia π il piano cercato. Poiché π contiene r, deve essere parallelo a r e passare per un punto di r. Sia $A = (1,1,3)$ il punto di r, imponendo inoltre le condizioni di parallelismo alle due rette, otteniamo:

$$\pi: \begin{cases} x = 1+t-s \\ y = 1-t+s \\ z = 3+2s \end{cases} \quad \Rightarrow \; x+y = 2$$

Un altro modo di procedere per rispondere alla domanda è il seguente.

Il fascio di piano contenente r è $\lambda(x+y+z+2) + \mu(z-3) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Svolgendo i calcoli di ha: $\lambda x + \lambda y + 2\lambda + \mu z - 3\lambda = 0$.

Quindi il piano cercato ha vettore normale $\vec{\nu} = (\lambda, \lambda, \mu)$ e deve essere ortogonale al vettore $\vec{v} = (-1,1,2)$, ovvero $\vec{\nu} \cdot \vec{v} = 0$. Quindi $-\lambda + \lambda + 2\mu = 0$ per $\mu = 0$, da cui si ottiene che il piano cercato ha equazione $\pi : x+y+2 = 0$

c) Utilizzando il punto precedente essendo $d(r,s) = d(P,\pi)$ per ogni $P \in r$ e scelto $P = (1,0,3)$ si ha $d(P,\pi) = \dfrac{|\,1+0+2\,|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

In alternativa, si puó costruire il segmento generico $\overrightarrow{PQ}$ tra le due rette, dove $P \in r$ e $Q \in s$, ed imporre che sia ortogonale sia al vettore direzione $\vec{v} = (-1,1,2)$ sia al vettore direzione $(1,-1,0)$. Si ottiene cosí il seguente sistema:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot (-1,1,2) = (s-t, s+t-1, 2s-4) \cdot (-1,1,2) = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot (1,-1,0) = (s-t, s+t-1, 2s-4) \cdot (1,-1,0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2t+4s-9 = 0 \\ -2t+1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si conclude quindi che Il segmento che realizza la distanza fra r ed s ha lunghezza

$$\left\| \left(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2} - 1, 0\right) \right\| = \left\| \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \right\| = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

d) Si può procedere in più modi. Forse il più semplice è calcolare il piano π' passante per s e parallelo a r in maniera analoga al punto precedente. Sia $B = (1, 0, -1)$ il punto di s:

$$\pi' : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = -t + s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x + y = 1$$

Il piano cercato è parallelo a π e π', quindi ha una equazione del tipo $x + y = d$. Inoltre essendo equidistante da r e da s è anche equidistante da π e π', ovvero il valore di d è dato dalla media degli analoghi valori di π e π':

$$d = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Infine il piano cercato è

$$x + y = \frac{3}{2}$$

□

Esercizio 3.2 (Esercizio 4.1)**.** *Risolvere il seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Soluzione:

Anzichè procedere per sostituzione utilizziamo un metodo alternativo: il metodo di riduzione.

Usiamo il metodo di riduzione. Al sistema lineare associamo la matrice formata dai coefficienti delle incognite e dei termini noti. I termini noti vengono separati da un tratteggio.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo la riduzione:

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 4 & 4 & | & 4 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1/2II \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ -1 & 3 & 4 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III + I \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/3III \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ -z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Il metodo appena introdotto è detto **metodo di Gauss** o di **Riduzione a gradini**. Lo scopo è di ottenere una matrice in cui sotto il primo termine non nullo di ogni riga si trovano tutti 0. Tale termine è detto **pivot**.

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & | & \star \\ 0 & \star & \star & | & \star \\ 0 & 0 & \star & | & \star \end{pmatrix}$$

Una volta che la matrice è stata ridotta ritorniamo al sistema, ormai di immediata soluzione.

Il procedimento consiste nel trasformare il sistema in un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) mediante le seguenti operazioni lecite:

- Scambio di due righe della matrice.
$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} III \\ II \\ I \end{pmatrix}$$
- Sostituzione di una riga con un suo multiplo non nullo.
$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \\ aII \\ III \end{pmatrix}, \qquad a \neq 0$$
- Sostituzione di una riga con la sua somma con un'altra riga.
$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \\ II+I \\ III \end{pmatrix}$$
- Le ultime due operazioni vengono generalmente utilizzate contemporaneamente, sostituendo una riga con una sua combinazione linare con un'altra riga, prestando attenzione ad alcune situazioni che vedremo esplicitamente negli esercizi.
$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \\ aII+bI \\ III \end{pmatrix}, \qquad a \neq 0$$

Notiamo che per non correre il rischio di effettuare due volte la stessa operazione abbiamo utilizzato per modificare una riga solo le combinazioni lineari con le righe che la precedono.

Seguiremo in generale questo principio, quindi, a parte gli scambi di righe,

- La prima riga può essere sostituita solo con un suo multiplo,
- La seconda riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima,
- La terza riga può essere sostituita con una sua combinazione lineare con la prima o con la seconda.

$\square$

Esercizio 3.3 (Esercizio 4.2)**.** *Risolvere il seguente sistema omogeneo:*
$$\begin{cases} x+2y+w=0 \\ 2x+5y+4z+4w=0 \\ 3x+5y-6z+4w=0. \end{cases}$$

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & -6 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-3I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Torniamo ora al sistema:
$$\begin{cases} x+2y+w=0 \\ y+4z+2w=0 \\ -2z+3w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15t \\ y=-8t \\ z=\frac{3}{2}t \\ w=t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Notiamo che abbiamo ottenuto infinite soluzioni. Infatti il numero di incognite è maggiore del numero delle equazioni.

Esercizio 3.4 (Esercizio 4.3)**.** *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*
$$\begin{cases} kx+ky+k^2z &= 4 \\ x+y+kz &= k \\ x+2y+3z &= 2k \end{cases}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema è compatibile.*

b) *Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & k \\ 1 & 2 & 3 & | & 2k \end{pmatrix}$$

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo la matrice a gradini.

Per ridurre la matrice a gradini scambiamo la prima e la terza riga. Lo scopo di questa operazione è *spostare i parametri verso il basso.*

Se così non facessimo nella riduzione a gradini dovremmo necessariamente procedere nel seguente modo:

$$\begin{array}{c} \\ kII - I \\ III - II \end{array} \begin{pmatrix} k & k & k^2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & k^2 - 4 \\ 0 & 1 & 3 - k & | & k \end{pmatrix}$$

Il sistema così ottenuto non è però equivalente a quello iniziale nel caso $k = 0$. Infatti per $k = 0$ abbiamo sostituito la seconda riga con la prima riga cambiata di segno, operazione non lecita. Nelle regole date inizialmente sulla sostituzione di una riga con una sua combinazione lineare con un'altra riga:

$$\begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I \\ aII + bI \\ III \end{pmatrix}$$

era infatti richiesta la condizione $a \neq 0$ (notiamo invece che non c'è nessuna richiesta sul valore di b). Procedendo in questo modo dovremmo poi considerare il caso $k = 0$ separatamente, riprendendo la matrice precedente all'operazione non lecita.

Effettuiamo invece con lo scambio delle righe:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 1 & 1 & k & | & k \\ k & k & k^2 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - kII \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2k \\ 0 & -1 & k - 3 & | & -k \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 - k^2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che in questo caso l'operazione è lecita anche per $k = 0$ (quando in pratica lasciamo la terza riga invariata).

a) L'ultima equazione del sistema è $0 = 4 - k^2$ che non risulta impossibile solo se $4 - k^2 = 0$, ovvero $k = \pm 2$. In tali casi il sistema ammette soluzione.
   Quindi il sistema è compatibile se $k = \pm 2$.

b) Consideriamo separatamente i casi $k = \pm 2$.
   - Per $k = 2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -t + 2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

   - Per $k = -2$ otteniamo un sistema compatibile di due equazioni in tre incognite che ammette quindi infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ -y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = -5t - 2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

$\square$

Esercizio 3.5 (Esercizio 4.4)**.** *Risolvere il seguente sistema, al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ x + y + 3z + 2w = 1 \\ 2x + y + (k+2)z + 4w = 2 \\ x + y + 3z + (k^2 - k + 2)w = k \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & k+2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k^2-k+2 & | & k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & | & k-1 \end{pmatrix}$$

In conclusione abbiamo ottenuto il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ (k-1)z = 0 \\ k(k-1)w = k-1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora discutere il parametro.

- Se $k(k-1) \neq 0$, cioè se $k \neq 0,\ k \neq 1$ allora dall'ultima equazione possiamo ricavare il valore della w. Analogamente se $k \neq 1$ dalla terza equazione possiamo ricavare il valore della z. Quindi per $k \neq 0,\ k \neq 1$ otteniamo le seguenti soluzioni

$$\begin{cases} x = \frac{k-2}{k} \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = \frac{1}{k} \end{cases}$$

  Di conseguenza se $k \neq 0,\ k \neq 1$ il sistema ammette una unica soluzione:

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{k-2}{k}, 0, 0, \frac{1}{k} \right).$$

- Se invece $k = 0$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ -z = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

  Poiché l'ultima equazione è impossibile, per $k = 0$ il sistema non ha soluzioni.
- Infine se $k = 1$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

In questo caso abbiamo due sole equazioni (significative) e 4 incognite. Dobbiamo quindi introdurre 2 parametri:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3s \\ z = s \\ w = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza se $k = 1$ le soluzioni del sistema sono date dall'insieme

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z, w) = (-2t + 1, -3s, s, t) \ \mid s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2, 0, 0, 1) \cdot t + (0, -3, 1, 0) \cdot s + (1, 0, 0, 0) \ \mid s, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

In questo caso otteniamo perciò infinite soluzioni (e neanche in questo caso S è uno spazio vettoriale! Infatti non sono soluzioni di un sistema omogeneo)

□

Esercizio 3.6 (Esercizio 4.6)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

Sia $x = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ e calcoliamo Ax:

$$Ax = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ (2t+1)x_3 \end{pmatrix}$$

L'equazione $Ax = b$ si traduce quindi nel sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema è quindi formata dalla matrice A come matrice dei coefficienti e dalla matrice b come matrice dei termini noti:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow II + I \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2t+1 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_2 - x_3 = 3 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases}$$

Si tratta quindi di distinguere due casi.

- Se $t \neq -\frac{1}{2}$ allora dall'ultima equazione possiamo ricavare x_3 ottenendo quindi una unica soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2t + 14}{5(2t+1)} \\ x_2 = \dfrac{6t + 8}{5(2t+1)} \\ x_3 = \dfrac{5}{2t+1} \end{cases}$$

- Se $t = -\frac{1}{2}$, invece l'ultima equazione diventa

$$0 = 5$$

  Quindi l'equazione è impossibile e il sistema non è compatibile.

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 3.7 (Esercizio 4.7). *Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1-k)z = 1 \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

ammette un'unica soluzione. In tale caso trovare la soluzione.

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ k & 1 & 1 & | & 1-k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 1-k & 1 & | & 1-2k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III + (k-1)II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+2k & | & -k \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - (k-1)z = 1 \\ -k(k-2)z = -k \end{cases}$$

Dobbiamo ora discutere i valori del parametro distinguendo tre casi:

- Se $k \neq 0, 2$ otteniamo
$$\begin{cases} x = -\frac{k-1}{k-2} \\ y = \frac{2k-3}{k-2} \\ z = \frac{1}{k-2} \end{cases}$$
quindi il sistema ammette un'unica soluzione.
- Se $k = 0$ otteniamo:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
Il sistema ammette soluzione, ma in questo caso ne ammette infinite in quanto abbiamo ottenuto un sistema in tre equazioni e due sole incognite. Anche se non era richiesto possiamo comunque ricavare le soluzioni
$$\begin{cases} x = -t \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
quindi il sistema ammette infinite soluzioni.
- Se $k = 2$ otteniamo:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$
quindi il sistema non ammette soluzioni.

Notiamo che le cose potevano essere affrontate in maniera leggermente differente utilizzando il concetto di rango e il teorema di Rouchè-Capelli.

□

Esercizio 3.8. *Si consideri il sistema di equazioni lineari:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = k \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + kx_3 = k \end{cases} \qquad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Si dica per quali valori di k il sistema è compatibile e quando ha infinite soluzioni.*
b) *Per i valori di k che rendono il sistema compatibile, trovare le sue soluzioni.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice associata a tale sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -k & k & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II - I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & -1 & -2 & | & -k \\ 0 & -k+1 & k+1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ -II \\ III + (-k+1)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & k \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 0 & 3k-1 & | & k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = k \\ y + 2z = k \\ (3k-1)z = k^2 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k = \frac{1}{3}$ allora l'ultima riga diventa $0 = \frac{1}{9}$, quindi è impossibile e il sistema non ammette soluzione.
- Se $k \neq \frac{1}{3}$ allora otteniamo un sistema di tre equazioni in tre incognite che ammette una unica soluzione:

$$\begin{cases} 2x_- x_2 = k \\ x_2 + 2x_3 = k \\ (3k-1)x_3 = k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2k^2-k}{3k-1} \\ x_2 = \frac{k^2-k}{3k-1} \\ x_3 = \frac{k^2}{3k-1} \end{cases}$$

□