CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA. CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 2– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2016/17

Esercizio 2.1. *Data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

Soluzione:
Sia B la matrice cercata. Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2 e calcoliamo il prodotto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ -3x+2z=0 \\ -3y+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ -3(1-z)+2z=0 \\ -3(-w)+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \\ z=\frac{3}{5} \\ w=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Di conseguenza perché B verifichi la condizione $AB = I$ deve essere

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata.

Metodi più efficaci per calcolare l'inversa di una matrice verranno introdotti successsivamente.

□

Esercizio 2.2. *Date le seguenti matrici A, calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ 3x+3z & 3y+3w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ 3x+3z=0 \\ 3y+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3(1-z)+3z=0 \\ 3(-w)+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3=0 \\ 0=1 \end{cases}$$

La terza e la quarta equazione sono impossibili, di conseguenza tutto il sistema non ammette soluzione. Questo indica che la matrice A non ammette inversa.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z & y - w \\ -3x + 2z & -3y + 2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - w = 0 \\ -3x + 2z = 0 \\ -3y + 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = w \\ -3(1+z) + 2z = 0 \\ -3w + 2w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = w \\ z = -3 \\ w = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -3 \\ w = -1 \end{cases}$$

Di conseguenza deve essere

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata. Una tale matrice B inversa di A viene normalmente indicata con A^{-1}.

□

Esercizio 2.3. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC e CB.

Soluzione:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad CB = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $AB \neq BA$, mentre $BC = CB$. Infatti il prodotto tra matrici non è in generale commutativo; nel secondo caso si presenta questa situazione particolare in quanto $C = 3I$.

□

Esercizio 2.4. *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$)*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.

Soluzione:
Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

due generici elementi di I. Dobbiamo verificare che $A + B$ e AB sono ancora elementi di I:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + x & b + y \\ 0 & c + z \end{bmatrix} \in I$$

$$AB = \begin{bmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{bmatrix} \in I$$

Notiamo che l'unica condizione per l'appartenenza a I è che l'elemento di posizione $2, 1$ si annulli.

□

Esercizio 2.5. *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.*

Soluzione:
Possiamo prendere per esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti A e B sono non nulle e $AB = 0$.

□

Esercizio 2.6. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbb{R}$.

Soluzione:
Sia

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & b_{21} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = BA$ segue

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + b_{22} = b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = b_{21} + b_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{22} = b_{11} \\ 0 = 0 \\ b_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = t \\ b_{12} = s \\ b_{21} = 0 \\ b_{22} = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza B deve essere del tipo

$$B = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbb{R}$.

□

Esercizio 2.7. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

Soluzione:
E' sufficiente osservare che se

$$A + B = C \ \Rightarrow\ -A + A + B = -A + C \ \Rightarrow\ B = C - A$$

Quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+2 & 0-3 \\ -1-0 & 5-5 & 2+6 \\ 2-2 & 1+1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\square$

Esercizio 2.8. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C.

Soluzione:
Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By + Cz = D$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By + Cz = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & z \\ 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ -x+y+2z=-1 \\ 3x+y+3z=2 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni i tre incognite. Procedendo per sostituzione otteniamo

$$\begin{cases} x=-2y+z \\ -3y+3z=1 \\ 3y+z=-1 \\ -6y+6z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+z \\ -3y+3z=1 \\ z=-3y-1 \\ -3y+3z=-1 \end{cases}$$

Anche senza procedere ulteriormente vediamo che la seconda e quarta equazione sono in contraddizione, quindi il sistema non ammette soluzione e D non è combinazione lineare di A, B e C.

$\square$

Esercizio 2.9. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Soluzione:
Analogamente all'esercizio precedente si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By = C$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By = \begin{bmatrix} x & kx \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 3y \\ y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ kx+3y=6 \\ y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ kx+3=6 \\ y=1 \\ x+2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ kx=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ k=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Quindi

- Se $k=3$ il sistema ammette la sola soluzione $x=y=1$ e $A+B=C$.
- Se $k \neq 3$ il sistema non ammette soluzione e C non è combinazione di A e B.

$\square$

Esercizio 2.10. *Si considerino le seguenti n-uple di numeri reali, con $n = 2, 3$ o 4:*

$$u_1 = (1, 0) \qquad u_2 = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_3 = \left(-3, \frac{1}{4}, -5\right) \qquad u_4 = \left(0, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_5 = (-1, 1, 2, -2) \qquad u_6 = \left(0, 0, -\frac{1}{3}, -3\right)$$

Si calcoli quando possibile

$$u_i + u_j, \qquad u_i \cdot u_j^T, \qquad \lambda \cdot u_i, \qquad \textit{con } \lambda = 0, 2, -2, \qquad i, j = 1, \dots 6$$

Soluzione:

- Cominciamo a calcolare le somme. Notiamo innazittutto che si possono sommare solo n-uple dello stesso tipo:

$$u_1 + u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}, 0 + (-2)\right) = \left(\frac{3}{2}, -2\right) = u_2 + u_1$$

$$u_3 + u_4 = \left(-3, -\frac{1}{4} - 7\right) = u_4 + u_3$$

$$u_5 + u_6 = \left(-1, 1, \frac{5}{3}, -5\right) = u_6 + u_5$$

Notiamo che la somma di due n-uple è ancora una n-upla, e che la somma gode della proprietà commutativa.

- Calcoliamo ora i prodotti. Notiamo che si può solo moltiplicare una n-upla per la trasposta di una n-upla dello stesso tipo:

$$u_1 \cdot u_2^T = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} = u_2 \cdot u_1^T$$

$$u_3 \cdot u_4^T = \left(-3, \frac{1}{4} - 5\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{79}{8} = u_4 \cdot u_3^T$$

$$u_5 \cdot u_6^T = (-1, 1, 2, -2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{16}{3} = u_6 \cdot u_5^T$$

Notiamo che il prodotto tra una n-upla e la trasposta di una n-upla da come risultato un numero (uno scalare).

- Calcoliamo infine i prodotti per scalare.

$$0u_1 = 0u_2 = (0, 0), \qquad 0u_3 = 0u_4 = (0, 0, 0), \qquad 0u_5 = 0u_6 = (0, 0, 0, 0),$$

$$2u_1 = (2, 0), \qquad 2u_2 = (1, -4), \qquad 2u_3 = \left(-6, \frac{1}{2}, -10\right),$$

$$2u_4 = (0, -1, -4), \qquad 2u_5 = (-2, 2, 4, -4), \qquad 2u_6 = \left(0, 0, -\frac{2}{3}, -6\right)$$

$$-2u_1 = (-2, 0), \qquad -2u_2 = (-1, 4), \qquad -2u_3 = \left(6, -\frac{1}{2}, 10\right),$$

$$-2u_4 = (0, 1, 4), \qquad -2u_5 = (2, -2, -4, 4), \qquad -2u_6 = \left(0, 0, \frac{2}{3}, 6\right)$$

Notiamo che il prodotto tra uno scalare e una n-upla si può sempre calcolare e da come risultato una n-upla.

□

Esercizio 2.11. *Si risolva il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Quindi $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 \\ 4 - 6x_2 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A è detta **matrice dei coefficienti** e la matrice b **matrice o colonna dei termini noti** del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$$

Si dice anche più semplicemente che A e b (oppure $A|b$) sono le **matrici associate al sistema**.

Notiamo che si può passare da A al sistema o viceversa semplicemente *aggiungendo* o *togliendo* le incognite.

□

Esercizio 2.12. *Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi*

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

a) Calcoliamo il prodotto

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_2 + 6x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

Quindi la condizione $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 + 6x_3 = -3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 = -6 \cdot 2 - 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \cdot (-5) - 2 \cdot 2 + 2 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

b) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} 4x_1 + 33x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 6x_3 = 4 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

Notiamo subito che l'ultima equazione è impossibile, quindi il sistema non ammette soluzione.

c) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che il sistema ha tre incognite, ma solamente due equazioni (significative). Abbiamo quindi una variabile libera. Partiamo dall'ultima equazione (significativa) aggiungendo un parametro. Poniamo per esempio $x_3 = t$ (Potevamo equivalentemente porre $x_2 = t$):

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3(-t+4) + t - 3 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Notiamo che in questo caso il sistema ammette infinite soluzione: ogni valore assegnato a t permette di trovare una delle infinite soluzioni.

□