1) Siano r e s le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

1. Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano che contiene r e s.
2. Trovare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e ortogonale a r e a s.

2) Si considerino i tre elementi A, B, C dello spazio di matrici $M_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -2k \\ 1-2k & k \end{bmatrix}.$$

1. Stabilire per quali valori del parametro reale k le tre matrici sono linearmente indipendenti.
2. Fissato il valore $k = 0$, trovare una quarta matrice D tale che l'insieme $\{A, B, C, D\}$ formi una base dello spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

3) Si dia la definizione del *determinante* di una matrice quadrata, e si espongano alcune sue proprietà, illustrandole anche con esempi numerici.

4) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

1. Determinare al variare di k una base e la dimensione di $\mathrm{Ker}(T)$
2. Determinare al variare di k una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(T)$
3. Stabilire al variare di k se il vettore $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$ appartiene all'immagine di T. In caso positivo esprimere $\mathbf{v}$ come combinazione lineare degli elementi della base di $\mathrm{Im}(T)$ trovata.

5) Si consideri la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si calcolino gli autovalori di M e si studi la sua diagonalizzabilità.
2. Si trovi una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice M.

6) Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di uno spazio vettoriale V e sia $T : V \to V$ una funzione lineare. Cos'è la *matrice associata* a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$? Ricordare la definizione e dare un esempio per lo spazio $\mathbb{R}^3$.