Note per il corso di Geometria e algebra lineare 2016-17
Laurea in Ing.Inform. e Com., Ing.Info.Gest.Imp., Informatica

5 Determinante

5.1 Definizione

Il determinante di una matrice quadrata ha un'importanza soprattutto di carattere teorico, dovuta al suo legame con il concetto di indipendenza lineare delle n-uple. Consideriamo per esempio il caso bidimensionale.

Esempio. La matrice
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
è invertibile esattamente quando lo scalare $D = ad - bc$ è non nullo. Infatti, se $D \neq 0$, la matrice inversa di A esiste, ed è uguale a
$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$
Viceversa, se $D = 0$, si ha $ad = bc$ da cui se $c \neq 0, d \neq 0$, $a/c = b/d = t$ e dunque $(a, b) = t(c, d)$ e le due righe sono dipendenti (lo stesso si ottiene se $c = 0$ o $d = 0$). Dunque $D \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = 2$.

Il determinante ha anche un significato geometrico, legato all'*area* e al *volume*. Nel caso bidimensionale, il determinante della matrice con righe i vettori $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$ è uguale, in valore assoluto, all'area del parallelogramma di lati v e w. Il segno dipende dall'*orientazione* dei due vettori nel piano: se w segue v in senso antiorario, il determinante è positivo, altrimenti è negativo.

Nel caso tridimensionale, il determinante della matrice con righe i vettori u, v e w è uguale, in valore assoluto, al volume del parallelepipedo di lati u, v, w. Il segno dipende ancora dall'orientazione dei vettori nello spazio.

Definizione 1. Il *determinante* di una matrice quadrata $n \times n$ A è lo scalare $\det A$ definito ricorsivamente nel modo seguente: se $n = 1$ poniamo $\det A = a_{11}$; se $n > 1$, poniamo
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1}$$
dove A_{ij} è la matrice di ordine $n-1$ ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Lo scalare $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ è detto *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij}.

Esempi. (1) Nel caso $n = 2$ si ritrova la formula dell'esempio precedente: $\det A = D = ad - bc$.
(2) Calcoliamo un determinante di ordine 3:
$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7.$$
(3) Se A è triangolare alta, $a_{i1} = 0$ per $i \neq 1$ e la matrice A_{11} è ancora triangolare alta. Quindi
$$\det A = a_{11}a'_{11} = a_{11}a_{22}a'_{22} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$
In particolare, $\det I_n = 1$ e $\det S = 0$ se S è a scalini con rango minore di n.

5.2 Proprietà del determinante

(1) *Se* B *è ottenuta da* A *scambiando due righe di* A, *allora* $\det B = -\det A$.

(2) *Se* B *è ottenuta da* A *moltiplicando una riga di* A *per uno scalare* c, *allora* $\det B = c\det A$.

(3) *Se* B *è ottenuta da* A *sommando un multiplo di una riga di* A *ad un'altra riga di* A, *allora* $\det B = \det A$.

Esempio.

$$\det\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 2\cdot 2\cdot\det\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -4\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -4\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -4\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} = -4\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 4\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 4\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -7 \end{bmatrix} = 4\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} = 4\cdot 5 = 20.$$

Dalle proprietà precedenti, che si possono dimostrare per induzione a partire dalla definizione del determinante, si ottengono altre utili proprietà:

(4) *Se una matrice* A *ha due righe uguali, allora* $\det A = 0$.
(Dalla (1) si ha, scambiando le due righe uguali, $\det A = -\det A$)

(5) *Se* A *ha una riga di zeri,* $\det A = 0$.
(Dalla (2), moltiplicando la riga per 0, si ha $\det A = 0\cdot\det A = 0$)

(6) *Se* A *ha ordine* n, $\det(kA) = k^n\det A$. *In particolare* $\det(-A) = (-1)^n\det A$.

Le proprietà (1),(2),(3) possono essere interpretate in termini di matrici elementari:
(i) $\det(S_{ij}A) = -\det A$
(ii) $\det(D_i(c)A) = c\det A$
(iii) $\det(E_{ij}(c)A) = \det A$.
Scegliendo $A = I_n$, da (i), (ii) e (iii) si ottengono i valori dei determinanti delle matrici elementari:
(i) $\det S_{ij} = -1$
(ii) $\det D_i(c) = c$
(iii) $\det E_{ij}(c) = 1$.
Si deduce anche l'uguaglianza $\det(EA) = \det E\det A$ per ogni matrice elementare E, che applicata k volte si estende nel modo seguente.

Proposizione 1. *Sia* $A' = (E_k\cdots E_2E_1)A$, *con* $E_1,\dots,$ E_k *matrici elementari. Si ha* $\det(A') = \det E_k\cdots\det E_2\det E_1\det A$.

Dalla proposizione precedente, quando $A' = S$ è a scalini, si ottiene che $\det A \neq 0$ equivale a $\det S \neq 0$ e quindi a $rg(A) = n$. Quindi vale la seguente fondamentale proprietà del determinante:

(7) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow A$ *è invertibile.*

Esempio. La matrice $A_t = \begin{bmatrix} 1 & t & 2 \\ 1 & 2t & 2 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha determinante $t(1-2t)$ e dunque è invertibile per $t \neq 0, 1/2$.

Teorema 1. (Teorema di Binet) *Siano* A, B *matrici di ordine* n. *Vale l'uguaglianza:* $\det(AB) = \det A \det B$.

Corollario. *Se* A *è invertibile,* $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

Attenzione: in generale, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

Conseguenza del teorema di Binet è anche l'importante teorema che permette di affermare che tutte le proprietà del determinante che sussistono per le righe valgono anche per le colonne.

Teorema 2. *Per ogni matrice quadrata* A, *si ha* $\det A = \det(A^T)$.

Applicando le proprietà viste sopra, si può mostrare che il determinante di A si ottiene sviluppando secondo una linea (riga o colonna) qualunque.

Teorema 3. (Teorema di Laplace) *Sia* A *una matrice di ordine* n. *Vale la proprietà: per ogni coppia di indici* i, j,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a'_{ij} = \det A.$$

Dunque il determinante di A si può calcolare "sviluppando" secondo una riga o una colonna qualunque.

5.3 Aree e volumi

Dati due vettori geometrici dello spazio $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, il prodotto vettoriale $v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$ può essere calcolato sviluppando rispetto alla prima riga il determinante

$$\det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Si è visto in §1.5 che il valore assoluto del *prodotto misto* $u \cdot (v \times w)$ di tre vettori dello spazio è uguale al volume V del parallelepipedo di lati u, v, w. Dunque

$$V = |u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|.$$

Siano $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ due vettori del piano. Si è visto in §1.5 che il parallelogramma di lati v e w ha area A il cui quadrato è uguale a

$$A^2 = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \;\Rightarrow\; A = \left| \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \right|.$$

5.4 Determinante e sistemi lineari

Un sistema lineare di n equazioni in n incognite $Ax = b$ ammette un'unica soluzione se e solo se A è invertibile, cioè se e solo se $\det A \neq 0$.

Regola di Cramer

Sia $Ax = b$ un sistema lineare di n equazioni in n incognite, con l'unica soluzione $x = A^{-1}b$ e sia $A_j(b)$ la matrice che si ottiene da A sostituendo alla j-esima colonna il vettore b. Per il Teorema di Binet, si ha

$$\frac{\det A_j(b)}{\det A} = \det(A^{-1}A_j(b)) = \det(A^{-1}(A^1 \cdots b \cdots A^n)) = \det(e_1 \cdots x \cdots e_n) = x_j.$$

Si ottiene così la *regola di Cramer*, che esprime le componenti della ennupla $x_1, \ldots, x_n$, soluzione del sistema, mediante rapporti di determinanti: per ogni componente x_j, si ha

$$x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A}.$$

Corollario. *Sia* $A \in M_n(\mathbb{K})$*, con* $\det A \neq 0$*. Allora,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[a'_{ij}]^T.$$

Infatti, la i-esima colonna di A^{-1} è soluzione del sistema $Ax = e_i$. Per la regola di Cramer,

$$(A^{-1})_{ji} = \frac{\det A_j(e_i)}{\det A} = \frac{a'_{ij}}{\det A}.$$

Esempio.

$$\text{Sia } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -2 \det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -2 \cdot 17 = -34.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{34} \begin{bmatrix} -6 & -5 & 4 \\ -8 & -1 & -6 \\ 0 & -17 & 0 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 17 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Osservazione. Il numero delle operazioni da eseguire per calcolare un determinante attraverso la definizione cresce, all'aumentare dell'ordine n della matrice, come $n \cdot n!$, dove $n!$ è il fattoriale di n. Quindi il calcolo del determinante attraverso la definizione è praticamente impossibile per matrici di grandi dimensioni, e per motivi analoghi non si usa la regola di Cramer. L'eliminazione gaussiana richiede un numero di operazioni che crescono come $\frac{2}{3}n^3$, e fornisce quindi un metodo più efficiente anche per il calcolo del determinante e della matrice inversa.

Esempio. Si consideri il seguente problema di *interpolazione*: dati tre punti (x_k, y_k) ($k = 1, 2, 3$) nel piano, si vuole trovare un polinomio di secondo grado il cui grafico passi per i tre punti. Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$. Il grafico passa per (x_k, y_k) se

$$y_k = a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2.$$

Si ottiene così un sistema di tre equazioni lineari in a_0, a_1, a_2, con matrice dei coefficienti

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(matrice di } \textit{Vandermonde}\text{)}$$

Si ha

$$\det V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 0 & 1 & x_2 + x_1\\ 0 & 0 & x_3 - x_2\end{bmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Dedurne che esiste un unico grafico con le proprietà richieste se, e solo se, le tre ascisse x_1, x_2, x_3 sono tutte distinte.

Per esempio, se i tre punti sono $(2, 1), (4, 2), (5, 0)$, la matrice di Vandermonde è

$$V = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 16\\ 1 & 5 & 25\end{bmatrix}$$

con determinante $\det V = (4 - 2)(5 - 2)(5 - 4) = 6$. Dalla formula di Cramer

$$a_0 = \frac{1}{6}\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 16\\ 0 & 5 & 25\end{bmatrix} = -\frac{40}{6} = -\frac{20}{3},$$

$$a_1 = \frac{1}{6}\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 16\\ 1 & 0 & 25\end{bmatrix} = \frac{33}{6} = \frac{11}{2},$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & 5 & 0\end{bmatrix} = -\frac{5}{6}.$$

Il polinomio cercato è $-\frac{20}{3} + \frac{11}{2}x - \frac{5}{6}x^2$.