Note per il corso di *Geometria e algebra lineare* 2016-17
Laurea in Ing.Inform. e Com., Ing.Info.Gest.Imp., Informatica

7 Funzioni lineari

7.1 Funzioni definite da matrici

Il prodotto matriciale permette di associare a ogni matrice A, di tipo (m,n), una funzione T_A con dominio $\mathbb{K}^n$ e codominio $\mathbb{K}^m$ (al solito, riscriviamo le colonne ottenute come m-uple):

$$T_A(x) = Ax, \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Ad esempio,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow T_A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, x_2 + 3x_3) \in \mathbb{R}^2.$$

Le funzioni così ottenute sono *lineari* (cf. 6.3):

$$T_A(a_1v_1 + a_2v_2) = A(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1Av_1 + a_2Av_2 = a_1T_A(v_1) + a_2T_A(v_2)$$

per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$.

Il prodotto di matrici corrisponde alla *composizione* di funzioni:

$$T_A(T_B(x)) = A(Bx) = (AB)x \Rightarrow T_A \circ T_B = T_{AB}$$

per ogni coppia di matrici conformabili. In particolare, se A è invertibile, si ha $T_{A^{-1}} = T_A^{-1}$. Infatti:

$$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_{I_n} = Id = T_{A^{-1}} \circ T_A.$$

L'aggettivo "lineare" associato a T_A deriva dalla seguente proprietà: se ad esempio $n = m = 2$, l'immagine mediante T_A di una retta del piano è ancora una retta (o talvolta, se A non è invertibile, un punto).

Esempio. Sia $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T_A(x,y) = (3x - 2y, 2x + y)$. Si consideri la retta di equazione $y = 2x - 3$. La sua immagine è l'insieme dei vettori

$$T_A(t, 2t-3) = (-t+6, 4t-3) \Rightarrow \begin{cases} x = -t+6 \\ y = 4t-3 \end{cases} \Rightarrow \text{ la retta di equazione } y = -4x + 21.$$

In questo caso A, e quindi T_A, è invertibile ($\det A \neq 0$) per cui non ci sono rette che hanno immagine un punto.

7.2 Funzioni lineari

Siano V e V' due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$.

Definizione 1. Una funzione $T : V \to V'$ è detta *funzione lineare* (o *operatore, trasformazione, applicazione lineare*) se

$$T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K},\ v_1, v_2 \in V.$$

Lo spazio V è il *dominio* di T, V' è il *codominio* di T, mentre l'*immagine* di T è il sottoinsieme di V'

$$Im(T) = \{v' \in V' \mid v' = T(v) \text{ per almeno un } v \in V\}.$$

Esercizio. Sia T la funzione di argomento vettoriale $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_3, 2x_1 - x_2 + x_3, x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostrare che esiste una (unica) matrice A tale che $T = T_A$ e dedurne che T è lineare.

Esempi.

1. La funzione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_3)$ non è lineare: è sufficiente osservare, ad esempio, che $T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) = (0, 0)$ ma $T(1, 1, 0) = (1, 0)$.
2. L'operatore di *derivazione* $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ è lineare.
3. L'operatore *traccia* $tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che ad una matrice quadrata A associa la sua traccia $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ è lineare. È vero anche per l'operatore determinante?
4. La funzione lineare T_A definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ha dominio e codominio $\mathbb{R}^2$ e immagine costituita dai vettori $(2x_1 + x_2, 4x_1 + 2x_2) = x_1(2, 4) + x_2(1, 2) = (2x_1 + x_2)(1, 2)$. Dunque $Im(T_A) = \langle (1, 2) \rangle$ è un sottospazio 1-dimensionale di $\mathbb{R}^2$, lo spazio delle colonne di A.

Osservazione. Quanto visto nell'esempio 4 ha validità generale: l'immagine della funzione lineare $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da una matrice coincide con lo spazio delle colonne di A. Infatti il prodotto Ax coincide con la m-upla $x_1A^1 + \cdots + x_nA^n$, combinazione lineare delle colonne di A. In particolare, si ha $\dim Im(T_A) = rg(A)$.

Possiamo inoltre affermare che il sistema lineare $Ax = b$ ha soluzione esattamente quando $b \in Im(T_A)$.

Definizione 2. Sia $T : V \to V'$ lineare. Il *nucleo* di T, indicato con $N(T)$ o $Ker(T)$, è l'insieme *controimmagine* del vettore nullo:

$$N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

Esempio. Il nucleo della funzione lineare T_A è lo spazio nullo di A, costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$, di dimensione $n - rg(A)$. Dunque $\dim N(T_A) + \dim Im(T_A) = (n - rg(A)) + rg(A) = n$.

Proposizione 1. *Una funzione lineare T è iniettiva se e solo se $N(T) = \{0\}$.*

Dimostrazione. Si ha $T(0) = 0T(0) = 0$ e quindi $0 \in N(T)$. Se T è iniettiva, l'unica controimmagine di 0 è il vettore nullo. Viceversa, sia $N(T) = \{0\}$. Se $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow T(v_1 - v_2) = T(v_1) + (-1)T(v_2) = 0$, quindi $v_1 - v_2 \in N(T)$, da cui $v_1 - v_2 = 0$ e $v_1 = v_2$. □

Proposizione 2. *Se $T : V \to V'$ è lineare, allora $N(T)$ è un sottospazio di V e $Im(T)$ è un sottospazio di V'.*

Dimostrazione. Siano $v_1, v_2 \in N(T)$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$; si ha $T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) = 0 \Rightarrow a_1v_1 + a_2v_2 \in N(T)$.

Siano poi $v_1', v_2' \in Im(T)$; esistono allora $v_1, v_2 \in V$, tali che $T(v_1) = v_1', T(v_2) = v_2'$, da cui si ricava $T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1v_1' + a_2v_2'$, quindi $a_1v_1' + a_2v_2' \in Im(T)$, che è dunque un sottoinsieme di V' chiuso rispetto alle operazioni di spazio vettoriale. □

Esempio. L'operatore di derivazione $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ ha nucleo $N(D) = \langle 1 \rangle$ costituito dai polinomi costanti e immagine il sottospazio $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ di $\mathbb{R}_n[x]$. Dunque non è né iniettivo né suriettivo.

Si osservi che la composizione di funzioni lineari è sempre una funzione lineare:

$$(S \circ T)(a_1 v_1 + a_2 v_2) = S(a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)) = a_1 S(T(v_1)) + a_2 S(T(v_2)) = a_1 (S \circ T)(v_1) + a_2 (S \circ T)(v_2).$$

Inoltre, se T è una funzione lineare invertibile, anche l'inversa T^{-1} è lineare.

7.3 Matrici associate a funzioni lineari

Sia $T : V \to V'$ lineare; siano $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_m\}$ basi, fissate, di V e V'. Siano $T_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$, $T_{\mathcal{C}} : V' \to \mathbb{K}^m$ gli isomorfismi ottenuti associando ad ogni vettore le sue coordinate rispetto alla base fissata. Essi determinano univocamente una matrice $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, mediante le relazioni

$$T(u_j) = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \cdots + a_{mj} v_m \quad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

(Le n colonne di A sono i vettori $T_{\mathcal{C}}(T(u_j))$ formati dalle coordinate delle immagini $T(u_1), \dots,$ $T(u_n)$, rispetto alla base $\mathcal{C}$).

Definizione 3. La matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, costruita nel modo sopra descritto, è detta *matrice associata* a T rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, e indicata col simbolo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$. Se $V = V'$ e $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, scriveremo $M_{\mathcal{B}}(T)$.

Se $V = \mathbb{K}^n$, $V' = \mathbb{K}^m$ e si scelgono le basi canoniche nei due spazi, si scriverà semplicemente $M(T)$. Si noti che vale sempre: $M(T_A) = A$.

Proposizione 3. *Sia T come sopra e sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$. Si consideri $v \in V$ e sia x il vettore colonna delle coordinate $x_1, \dots, x_n$ di v rispetto alla base $\mathcal{B}$. Allora l'immagine $T(v)$ ha vettore delle coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$ date dal prodotto matriciale Ax.*

Dimostrazione. Si ha $v = \sum_j x_j u_j \Rightarrow T(v) = \sum_j x_j T(u_j) = x_1(a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m) + \cdots + x_n(a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m) = (a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n) v_1 + \cdots + (a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n) v_m$; quindi la i-esima coordinata di $T(v)$ rispetto a $\mathcal{C}$ è data dal prodotto $[a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}] x$. □

Esempi. (1) L'operatore di derivazione $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ha matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Sia

$$T(x) = (2x_1 - x_2 + x_4, x_2 - 2x_3 + x_4, x_1 + x_2 - 2x_3)$$

e si considerino le basi di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1), (0,1,1,1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}.$$

Si ha

$$M(T) = A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ bisogna calcolare le 4 immagini

$$T(1,0,0,0) = (2,0,1),\ T(0,1,-1,0) = (-1,3,3),$$

$$T(0,0,0,1) = (1,1,0),\ T(0,1,1,1) = (0,0,-1)$$

e trovarne le coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$ (bisogna risolvere 4 sistemi lineari con la stessa matrice dei coefficienti 3×3): $T_{\mathcal{C}}(2,0,1) = (1,-1,2)$, $T_{\mathcal{C}}(-1,3,3) = (3,0,-4)$, $T_{\mathcal{C}}(1,1,0) = (0,1,0)$, $T_{\mathcal{C}}(0,0,-1) = (-1,1,0)$. Mettendo i vettori in colonna si ottiene infine

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C^{-1}AB,$$

con B e C matrici con colonne gli elementi delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Dunque tutte le funzioni lineari tra spazi di dimensione finita sono rappresentate da matrici: nel caso di una funzione lineare, è sufficiente una quantità *finita* di informazioni (i coefficienti di una sua matrice associata) per conoscere completamente la funzione, cioè per saper calcolare il suo valore per ognuno dei suoi *infiniti* possibili argomenti.

Proposizione 4. *Sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$. Valgono le seguenti proprietà:*

$$T_{\mathcal{C}}(Im(T)) = Im(T_A), \quad T_{\mathcal{B}}(N(T)) = N(T_A).$$

Infatti, per la proposizione precedente $v' = T(v) \Leftrightarrow T_{\mathcal{C}}(v') = Ax$, con $x = T_{\mathcal{B}}(v)$.

Ne segue, essendo $T_{\mathcal{B}}$ e $T_{\mathcal{C}}$ isomorfismi (cioè funzioni lineari invertibili), che il rango di $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ è la dimensione di $Im(T)$ e che il nucleo di T ha dimensione uguale a $n - rg(A)$ ($n = \dim V$). In particolare, T è un isomorfismo se e solo se $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ è invertibile, cioè ha determinante non nullo.

Corollario. *(Teorema "nullità più rango")*
Per ogni funzione lineare $T : V \to V'$ tra spazi di dimensione finita, vale la formula

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V.$$

In particolare, se $\dim V = \dim V'$, T è iniettiva $\Leftrightarrow$ è suriettiva.

Esempio. (*interpolazione polinomiale*) Dati $n+1$ punti $P_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1, \dots, n+1$) del piano, si cerca un polinomio di grado al più n il cui grafico passi per i punti.

Sia $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$ definita dalla valutazione nei punti P_i:

$$T(p) = (p(x_1), \dots, p(x_{n+1})).$$

Se le ascisse $x_1, \dots, x_{n+1}$ sono tutte distinte, il nucleo di T è lo spazio nullo $\{0\}$ (ricordare il Teorema fondamentale dell'algebra...). Quindi T è iniettiva ed essendo $\dim \mathbb{R}_n[x] = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, è anche suriettiva: per ogni scelta dei punti (con x_i tutti distinti) esiste un unico polinomio interpolante.

Osservazione. Rispetto alle basi canoniche, la matrice associata alla composizione di funzioni lineari è il prodotto delle matrici associate:

$$M(S \circ T) = M(S)M(T).$$

Inoltre, $M_{\mathcal{B}}(a_1 S + a_2 T) = a_1 M_{\mathcal{B}}(S) + a_2 M_{\mathcal{B}}(T)$.

7.4 Esempi (alcune trasformazioni geometriche)

(1) La *rotazione* Rot_θ di un angolo θ attorno all'origine di $\mathbb{R}^2$ è lineare. Rispetto alla base canonica ha matrice associata

$$M_{\mathcal{E}}(Rot_\theta) = R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(2) Sia H_θ la *riflessione* del piano rispetto a una retta l_θ per l'origine, che forma un angolo θ con l'asse x positivo. Anche H_θ è lineare. Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base costituita da v_1 parallelo a l_θ e v_2 ortogonale a l_θ, la matrice associata è

$$M_{\mathcal{B}}(H_\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vedremo nella prossima sezione come si può calcolare la matrice associata a H_θ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

7.5 Cambiamento di base

Che cosa succede alla matrice associata a una funzione lineare cambiando le basi? Nel seguito presentiamo alcuni risultati relativi agli *endomorfismi* di V, cioè le funzioni lineari $T : V \to V$.

Definizione 4. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ due basi di V. Si dice *matrice di transizione* da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ la matrice invertibile $P = [p_{ij}]$, di ordine n, avente come colonne le coordinate dei vettori v_j della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$:

$$v_j = \sum_i p_{ij} v'_i \quad (j = 1, \ldots, n).$$

La matrice P è la matrice associata all'identità rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$: $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)$. In particolare, P è invertibile. Dalla Proposizione 3 segue immediatamente:

Proposizione 5. *Se il vettore $v \in V$ ha coordinate $x_1, \ldots, x_n$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, e coordinate $x'_1, \ldots, x'_n$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, si ha $x' = Px$, dove P è la matrice di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.*

Si ottiene quindi che vale anche $x = P^{-1}x' \Rightarrow P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id_V)$.

Esempi. (1) La matrice di transizione dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$ alla base $\{(1,2),(3,1)\}$ è la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}.$$

(2) La matrice di transizione dalla base $\mathcal{B} = \{(1,1,2),(1,2,-1),(1,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}' = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,0,0)\}$ si può trovare risolvendo i 3 sistemi lineari per il calcolo delle coordinate degli elementi di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

I sistemi possono essere risolti *simultaneamente* mediante la riduzione a scala di una matrice $n \times 2n$: se B e B' sono le matrici aventi per colonne i vettori delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente,

$$rref[B'\ B] = [I_n\ B'^{-1}B] = [I_n\ P].$$

Si ottiene:

$$P = B'^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 1. *Sia* $T : V \to V$ *lineare. Siano* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *e* $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ *due basi di* V *e sia* P *la matrice di transizione da* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$. *Allora si ha:* $M_{\mathcal{B}'}(T) = PM_{\mathcal{B}}(T)P^{-1} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)M_{\mathcal{B}}(T)M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id_V)$.

Dimostrazione. Poniamo $A' = M_{\mathcal{B}'}(T)$, $A = M_{\mathcal{B}}(T)$. Se il vettore $v \in V$ ha coordinate $x_1, \dots, x_n$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, e coordinate $x_1', \dots, x_n'$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, $T(v)$ ha coordinate Ax rispetto a $\mathcal{B}$ e coordinate $A'x'$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Dunque $PAx = A'x' \Rightarrow PAP^{-1}x' = A'x'$ per ogni x' e quindi $A' = PAP^{-1}$. □

Definizione 5. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. A si dice *simile* a B se esiste $P \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile per cui vale la relazione $A = PBP^{-1}$.

Se A e $B \in M_n(\mathbb{K})$ rappresentano lo stesso endomorfismo di V, allora sono simili. In particolare, per il teorema di Binet, hanno lo stesso determinante:

$$\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P)^{-1} = \det A.$$

Esercizio

Mostrare che se A è simile a B, allora B è simile ad A. Inoltre se A è simile a B e B è simile a C, allora A è simile a C.

Esempio. Un esempio di matrice di transizione per $\mathbb{R}^2$ è la matrice di rotazione R_θ. Se $\mathcal{E}$ è la base canonica e $\mathcal{B} = \{(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\}$ la base ruotata, si ha

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) = R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene

$$M_{\mathcal{E}}(H_\theta) = R_\theta M_{\mathcal{B}}(H_\theta) R_\theta^{-1} = R_\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$