

Esercizio 6.1. [6.2] Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} & A_5 &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & A_6 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 6.2. [6.1] Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 6.3. [6.3] Calcolare il rango della seguente matrice A , utilizzando il calcolo del determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 6.4. [6.12] Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- Calcolare il rango di A al variare del parametro k .
- Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k , si calcoli la matrice inversa di A .

Esercizio 6.5. [7.5] Si dica per quali valori di k il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y + z = 1 - k \\ y + (1 - k)z = 1 \end{cases} \quad (k \text{ parametro reale})$$

ammette un'unica soluzione.

Esercizio 6.6. [7.19] Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \quad k \text{ parametro reale.}$$

- Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0, 0, 0, 0)\}$.
- Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.

Esercizio 6.7. [7.24] Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori formano una base di \mathbb{R}^3 .

$$v_1 \equiv (1, 2, -2), \quad v_2 \equiv (1, 1, -3), \quad v_3 \equiv (3, 7, k-6)$$

Esercizio 6.8. [7.30] Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori:

$$v_1 \equiv (0, k-1, k^2-1, 3k-2), \quad v_2 \equiv (1, 3, 0, 3), \quad v_3 \equiv (-1, -2, 1, -1).$$

Determinare la dimensione e una base di V al variare del parametro reale k .

Esercizio 6.9. [7.31] Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:

$$v_1 = (-1, 1, -1, 1), \quad v_2 = (1, k, 3, 4), \quad v_3 = (1, -1, k, 1), \quad v_4 = (0, 0, 1, k)$$

Si calcoli la dimensione di W al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.10. [7.36] Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ con

$$v_1 = (k+3, k+3, 0), \quad v_2 = (0, 3, k+2), \quad v_3 = (0, 3k, k)$$

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ lo spazio V coincide con \mathbb{R}^3 .
- Si determini la dimensione una base di V al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.11. [7.41] Si consideri l'insieme

$$S = \{ (k+1, k+1, 0, 2k), (0, 2k, 0, 0), (1, 3k, 0, 1), (1, 5k, 1, k) \}.$$

- Si stabilisca per quali valori di k l'insieme S è una base di \mathbb{R}^4 .
- Posto $k = -1$ si trovino le coordinate del vettore $v = (1, 1, 0, 1)$ rispetto alla base trovata.

Esercizio 6.12. [7.44] Sia

$$\mathcal{B} = \{ (-2, 0, 0), (1, k, -1), (1, -1, k) \}$$

- Trovare i valori del parametro k per cui \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^3 .
- Per il valore $k = 3$, determinare le coordinate dei vettori $v = (-3, 2, 1)$ e $w = (0, 1, 2)$ rispetto alla base \mathcal{B} .

Esercizio 6.13. [7.53] Si consideri il sottoinsieme S di \mathbb{R}^4 costituito dai vettori v della forma

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4, a_1, 2a_1 - a_2, a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

- S è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 ?
- In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S .