Geometria e algebra lineare – 14/7/2016 **A**

(con soluzioni)

1) Sia r la retta di equazioni cartesiane $2x+4y+z+1=0$, $x-y+1=0$ e sia s la retta di equazioni cartesiane $2x+3y+z=0$, $x+y=0$.

1. Si stabilisca se le rette sono parallele, incidenti, sghembe o coincidenti.
2. Si dica se le rette r e s sono complanari. In caso affermativo, si trovi l'equazione del piano che le contiene.
3. Si trovi la distanza tra r e s .

RISPOSTE: 1. rette sghembe
2. no.
3. $d=\sqrt{3/26}$.

2) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1=(1,1,-1,0),\ \mathbf{v}_2=(1,0,-1,-1),\ \mathbf{v}_3=(2,1,1,2)$$

1. Si provi che $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendente.
2. Si trovi il valore di k per il quale il vettore $\mathbf{v}_4=(0,k,-1,0)$ appartiene al sottospazio generato da $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ e, per tale valore, si scriva $\mathbf{v}_4$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$.

RISPOSTE: 1.

$$RREF[v_1\ v_2\ v_3\ v_4]=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&-k\\0&0&3&-1\\0&0&0&1-k\end{bmatrix}$$

2. $k=1$

3) Si enunci il Teorema di Rouché-Capelli, e lo si illustri con alcuni esempi.

4) Sia $V=\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più due. Sia $T:V\to V$ la funzione definita da

$$T(p(x))=xp'(x)+p(0)x,$$

dove $p'(x)$ indica la derivata del polinomio $p(x)$.

1. Mostrare che la funzione T è lineare.
2. Trovare la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}=\{1,x,x^2\}$ di V e stabilire se la funzione T è invertibile.

RISPOSTE: 2.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T non invertibile

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare con matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si trovino autovalori e autovettori di f e si stabilisca se f è diagonalizzabile.

RISPOSTE: Autovalori: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ doppi. La matrice non è diagonalizzabile (l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 1 e base $\{(-1, 2, 0, 1)\}$, mentre $E(1)$ ha base $\{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$).

6) Dare la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale. Dare due esempi di spazi vettoriali reali di dimensione tre. Se W è un sottospazio di V, c'è qualche relazione tra le loro dimensioni?