CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA. CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 4– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2016/17

Esercizio 4.1 (Esercizio 7.1). *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.2 (Esercizio 7.3). *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.3 (Esercizio 7.4). *Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca il rango di A al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

Esercizio 4.4. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) Trovare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali null(A) = null(B) = 0.
b) Sia $C = AB$. Stabilire se il sistema lineare $Cx = 0$ ha soluzione unica quando $k = 0$.

Esercizio 4.5. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.
b) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme Sol$(Ax = b)$.

Esercizio 4.6. *[v. 7.62]* Sia A la matrice reale seguente:

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.
b) Calcolare null(A) e le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.

Esercizio 4.7. *[6.4]* Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Esercizio 4.8. *[6.7]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.
b) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.

Esercizio 4.9. *[6.9]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.
b) Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?

Esercizio 4.10. *[v. 6.6]* Dato $k \in \mathbb{R}$, si considerino le seguenti matrici reali

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è invertibile.
b) Trovare la matrice inversa di A_1, per $k = 1$.
c) Risolvere l'equazione matriciale $A_1X + B = 0$,con X matrice reale 3×3.

Esercizio 4.11. *[6.11]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.
b) Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.

Esercizio 4.12. Sia A una matrice reale invertibile che soddisfa l'equazione $2A^2 - A - I = 0$. Esprimere l'inversa A^{-1} di A in funzione di A. È possibile determinare A e la sua inversa?