CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA.

FOGLIO DI ESERCIZI 2– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2016/17

Esercizio 2.1. *[1.7]* Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

Esercizio 2.2. *[1.8]* Date le seguenti matrici A, calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.3. *[1.9]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC e CB.

Esercizio 2.4. *[1.10]* Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$)

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.

Esercizio 2.5. *[1.11]* Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.

Esercizio 2.6. *[1.12]* Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.7. *[1.13]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

Esercizio 2.8. *[1.14]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di $A,\ B,\ C$.

Esercizio 2.9. *[1.15]* Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di $A,\ B$. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Esercizio 2.10. *[1.16]* Si considerino le seguenti n-uple di numeri reali, con $n = 2, 3$ o 4:

$$u_1 = (1, 0) \qquad u_2 = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_3 = \left(-3, \frac{1}{4}, -5\right) \qquad u_4 = \left(0, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$u_5 = (-1, 1, 2, -2) \qquad u_6 = \left(0, 0, -\frac{1}{3}, -3\right)$$

Si calcoli quando possibile

$$u_i + u_j, \qquad u_i \cdot u_j^T, \qquad \lambda \cdot u_i, \qquad \text{con } \lambda = 0, 2, -2, \qquad i, j = 1, \dots 6$$

Esercizio 2.11. *[1.18]* Si risolva il sistema $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.12. *[1.20]* Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$