Cognome **Nome** **A**

Scrivere le risposte agli esercizi 1,2,3 negli spazi sottostanti.

1)

2)

3)

Geometria e algebra lineare – 5/11/2015 **A**

1) Sia π il piano passante per i punti $A = (-3, -2, 1)$, $B = (0, 1, -2)$, $C = (-4, 0, 0)$ e sia π' il piano di equazione cartesiana $x - y = -1$.

- Trovare equazioni parametriche della retta r intersezione dei piani π e π'.
- Calcolare la distanza tra l'origine e la retta r.

2) Sia A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1-k & -4+k \\ k & 2 & 3k-2 \end{bmatrix}$$

- Si trovino i valori del parametro reale k per i quali A è invertibile.
- Si trovi l'inversa per $k = 1$.
- Si trovino, se possibile, le soluzioni del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3) Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -k)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 2-k, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, k, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

- Stabilire per quali valori del parametro reale k i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.
- Stabilire se il polinomio $p_1(x) = x^2 + 2x$ è combinazione lineare dei polinomi $p_2(x) = 2x - 1$ e $p_3(x) = x^2 + 1$.

4) Cos'è un *gruppo*? Dare la sua definizione e illustrarla mediante due esempi. Dare anche un esempio di gruppo non commutativo.

5) Si dia la definizione di *sottospazio generato da* k *vettori* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ di $\mathbb{R}^n$. Cosa si può dire della sua dimensione? Illustrare la risposta anche mediante degli esempi.

Cognome **Nome** **B**

Scrivere le risposte agli esercizi 1,2,3 negli spazi sottostanti.

1)

2)

3)

Geometria e algebra lineare – 5/11/2015 **B**

1) Sia π il piano passante per i punti $A = (-2, -1, 0)$, $B = (-1, 0, -1)$, $C = (0, -2, 0)$ e sia π' il piano di equazione cartesiana $2x + y + 3z = -5$.

- Trovare equazioni parametriche della retta r intersezione dei piani π e π'.
- Calcolare la distanza tra l'origine e la retta r.

2) Sia A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2-k & -1+k \\ k & -2k+1 & 2k-2 \end{bmatrix}$$

- Si trovino i valori del parametro reale k per i quali A è invertibile.
- Si trovi l'inversa per $k = -1$.
- Si trovino, se possibile, le soluzioni del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3) Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, k-2, -k)$, $\mathbf{v}_3 = (k, 1, -1)$ di $\mathbb{R}^3$.

- Stabilire per quali valori del parametro reale k i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.
- Stabilire se il polinomio $p_1(x) = x^2 + 1$ è combinazione lineare dei polinomi $p_2(x) = -2x^2 - 2x$ e $p_3(x) = x - 1$.

4) Si definisca il *prodotto scalare* tra vettori geometrici e si enunci alcune sue proprietà. Illustrare le proprietà anche mediante esempi numerici.

5) Si dia la definizione di *sottospazio* di uno spazio vettoriale. Scelto uno spazio vettoriale V si illustri la definizione fornendo esempi di due sottoinsiemi di V, tali che uno sia un sottospazio e l'altro no, motivando le affermazioni fatte.

Cognome **Nome** **C**

Scrivere le risposte agli esercizi 1,2,3 negli spazi sottostanti.

1)

2)

3)

Geometria e algebra lineare – 5/11/2015 **C**

1) Sia π il piano passante per i punti $A = (-2, -1, 2)$, $B = (-3, 0, 0)$, $C = (1, 2, -1)$ e sia π' il piano di equazione cartesiana $y + z = 1$.

- Trovare equazioni parametriche della retta r intersezione dei piani π e π'.
- Calcolare la distanza tra l'origine e la retta r.

2) Sia A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-k & -5+k \\ k & -2k+1 & -k-3 \end{bmatrix}$$

- Si trovino i valori del parametro reale k per i quali A è invertibile.
- Si trovi l'inversa per $k = 2$.
- Si trovino, se possibile, le soluzioni del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3) Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (0, 2, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2-k, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, k, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

- Stabilire per quali valori del parametro reale k i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.
- Stabilire se il polinomio $p_1(x) = 2x - 2$ è combinazione lineare dei polinomi $p_2(x) = x^2 + 2x - 1$ e $p_3(x) = x^2 + 1$.

4) Si definisca il *rango* di una matrice, e si fornisca un esempio di matrice 3×4 di rango massimo e un esempio di matrice 3×3 di rango 1.

5) Si dia la definizione di *base* di uno spazio vettoriale. Fornire due esempi per spazi vettoriali scelti a piacere.

Cognome **Nome** **D**

Scrivere le risposte agli esercizi 1,2,3 negli spazi sottostanti.

1)

2)

3)

Geometria e algebra lineare – 5/11/2015 **D**

1) Sia π il piano passante per i punti $A = (0, -3, 0)$, $B = (-1, 0, 0)$, $C = (3, 0, -3)$ e sia π' il piano di equazione cartesiana $x - y = -1$.

- Trovare equazioni parametriche della retta r intersezione dei piani π e π'.
- Calcolare la distanza tra l'origine e la retta r.

2) Sia A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & k+3 & -4+k \\ k & 2 & 2k-2 \end{bmatrix}$$

- Si trovino i valori del parametro reale k per i quali A è invertibile.
- Si trovi l'inversa per $k = -1$.
- Si trovino, se possibile, le soluzioni del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3) Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, k, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 2, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -k, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

- Stabilire per quali valori del parametro reale k i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.
- Stabilire se il polinomio $p_1(x) = x^2 + 2x - 1$ è combinazione lineare dei polinomi $p_2(x) = 2x - 1$ e $p_3(x) = x^2 - 2x + 1$.

4) Si dia la definizione di *matrice invertibile*. Si fornisca un esempio di una matrice 2×2 invertibile e uno di una matrice 2×2 non invertibile. Qual è la relazione tra invertibilità e rango?

5) Quando k vettori di uno spazio vettoriale V si dicono *linearmente indipendenti*? Fornire un esempio per uno spazio vettoriale scelto a piacere. Dare anche un esempio di insieme di vettori linearmente *dipendenti*.