Esercizio 8.1 (8.40)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x,y) = (2x, x-y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = \{(1,0),\ (1,1)\ \}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\ \}$ due basi di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente. Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.*

Soluzione:

La matrice A cercata ha per colonne le immagini attraverso T degli elementi di $\mathcal{B}$, espressi rispetto a $\mathcal{B}'$. Cominciamo a calcolare la immagini:

$$T(1,0) = (2,1,0), \qquad T(1,1) = (2,0,2)$$

I vettori cosí ottenuti sono però espressi rispetto alla base canonica. Indichiamo con

$$u_1' = (1,1,0),\ u_2' = (0,1,1),\ u_3' = (0,0,2)$$

gli elementi della base $\mathcal{B}'$. Esprimere $(2,1,0)$ e $(2,0,2)$ rispetto a $\mathcal{B}'$ equivale a risolvere le due equazioni vettoriali: $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2,1,0)$ e $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2,0,2)$. Consideriamo quindi la matrice associata a tali sistemi, riducendola con le due colonne dei termini noti contemporaneamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Per risolvere l'equazione $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2,1,0)$ consideriamo la prima colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1,0) = (2,1,0) = 2u_1' - u_2' + \frac{1}{2}u_3' = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}'}$$

Analogamente per risolvere l'equazione $xu_1' + yu_2' + zu_3' = (2,0,2)$ consideriamo la seconda colonna dei termini noti:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T(1,1) = (2,0,2) = 2u_1' - 2u_2' + 2u_3' = (2,-2,2)_{\mathcal{B}'}$$

Infine

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.2 (8.44)**.** *Sia $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata a:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\{(1,1,1),\ (0,2,2),\ (0,0,3)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

a) *Si scriva la matrice associata a S rispetto alla base canonica.*
b) *Determinare basi dell'immagine $Im(S)$ e del nucleo $N(S)$.*

Soluzione:

a) Siano $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,2,2),\ v_3 = (0,0,3)$.
Dalla matrice si ricava che

$$\begin{aligned} S(v_1) &= S(1,1,1) = (0,0,1)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = (0,0,3) \\ S(v_2) &= S(0,2,2) = (0,0,2)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 0v_2 + 2v_3 = (0,0,6) \\ S(v_3) &= S(0,0,3) = (0,1,3)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 1v_2 + 3v_3 = (0,2,11) \end{aligned}$$

Per calcolare le immagini della base canonica, dobbiamo prima determinare le coordinate degli elementi e_i della base canonica rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$, ovvero esprimere gli e_i come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, ovvero risolvere le equazioni

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i \qquad i = 1,2,3$$

In questo caso, data la semplicità dei calcoli non è necessario impostare le tre equazioni, infatti:

$$e_1 = \frac{1}{3}v_3, \qquad e_2 = \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{3}v_3, \qquad e_3 = v_1 - \frac{1}{2}v_2$$

Quindi per la linearità di S:

$$\begin{aligned} S(e_3) &= \frac{1}{3}S(v_3) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right) \\ S(e_2) &= \frac{1}{2}S(v_2) - \frac{1}{3}S(v_3) = \frac{1}{2}(0,0,6) - \frac{1}{3}(0,2,11) = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ S(e_1) &= S(v_1) - \frac{1}{2}S(v2) = (0,0,3) - \frac{1}{2}(0,0,6) = (0,0,0) \end{aligned}$$

Infine la matrice associata a S rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

c) In questo caso non è necessario procedere con la riduzione a gradini. Infatti è evidente che la sottomatrice formata dalle prime due colonne ha rango 2, quindi una base dell'immagine di S è

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{\ (0,2,11),\ (0,2,2)\ \}$$

Dal teorema di nullità più rango sappiamo inoltre che il nucleo ha dimensione uno e avendo trovato che $S(e_1) = 0$, possiamo concludere che una base del nucleo di S è

$$\mathcal{B}(N(S)) = \{\ (1,0,0)\ \}$$

□

Esercizio 8.3 (8.36)**.** *Sia* $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *la funzione lineare*

$$S(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1 - 2x_3 + x_4,\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ x_1 + 2x_3 + 2x_4).$$

a) *Si trovi una base del nucleo di* S *e una base dell'immagine di* S*.*
b) *Sia* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^4$ *e sia* $\mathcal{B}$ *la base di* $\mathbb{R}^3$ *costituita dai vettori*

$$v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (1,0,0),\ v_3 = (1,1,1)$$

Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)$ *associata a* S*.*

Soluzione:
Determiniamo la matrice A associata a S calcolando l'immagine degli elementi della base canonica:

$$\begin{matrix} S(e_1) = (3,4,1) \\ S(e_2) = (0,-2,0) \\ S(e_3) = (-2,2,2) \\ S(e_4) = (1,3,2) \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 4I \\ III - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

Una base dell'Immagine di S è data da

$$\mathcal{B}(Im(S)) = \{S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3)\}$$

Per trovare una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x+2z+2w=0 \\ -2y-6z-5w=0 \\ -8z-5w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6}{5}t \\ y=t \\ z=t \\ w=-\dfrac{8}{5}t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(N(S))=\{(6,5,5,-8)\}$$

b) Si tratta di esprimere $S(e_1),\ S(e_2),\ S(e_3),\ S(e_4)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Scriviamo quindi la matrice associata ai 4 sistemi $xv_1+yv_2+zv_3=S(e_i)$, considerando contemporaneamente i quattro vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III-I \\ II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora i quattro sistemi

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y=-2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow S(e_1)=(-3,2,4)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow S(e_2)=(2,0,-2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -y=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow S(e_3)=(0,-4,2)_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow S(e_4)=(-1,-1,3)_{\mathcal{B}}$$

Infine

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(S)=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.4 (8.35)**.** *Sia $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da*

$$T(x,y,z)=(x+y,\ 2x-y-z,\ 2y+z)$$

e sia $\mathcal{B}=\{(1,2,-4),\ (0,1,1),\ (1,0,-7)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$.

a) *Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.*
b) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$.*
c) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica $\mathcal{E}$.*
d) *Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

a) Dobbiamo in sostanza calcolare il rango di $M_{\mathcal{E}}(T)=M(T)$:

$$M(T)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II-2I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim(Im(T))=\text{rg}(M(T))=3 \ \Rightarrow\ T \text{ è suriettiva}$$
$$\dim(N(T))=3-\text{rg}(M(T))=0 \ \Rightarrow\ T \text{ è iniettiva}$$

b) Si tratta di calcolare le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$, e scrivere la matrice che ha questi come colonne. Ciò equivale a moltiplicare la matrice $M(T)$ con la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow M(T)P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

Infatti $T(1,2,-4) = (3,4,0)$, $T(0,1,1) = (1,-2,3)$, $T(1,0,-7) = (1,9,-7)$, come si può determinare usando la definizione data di T.

c) I vettori $T(e_1) = (1,2,0)$, $T(e_2) = (1,-1,2)$, $T(e_3) = (0,-1,1)$, vanno espressi nella base $\mathcal{B}$. Le coordinate dei vettori così ottenuti saranno le colonne di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$. Equivalentemente si ha che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}M(T) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -14 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & -1 \end{bmatrix} M(T) = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 2 \\ -8 & -21 & -5 \\ -4 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

d) Siano $v_1 = (1,2,-4)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,0,-7)$. Dati i punti precedenti per ottenere la matrice richiesta basta fare $P^{-1}M(T)P$ per ottenere la matrice richiesta.

Se non fossero state richieste le matrici precedenti, il metodo più semplice consiste nel calcolare le tre immagini dei vettori della nuova base e poi trovare le coordinate di questi tre vettori rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$.

$$T(v_1) = (3,4,0), \quad T(v_2) = (1,-2,3), \quad T(v_3) = (1,9,-7)$$

Si tratta ora di esprimere tali immagini come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè di risolvere l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = T(v_i)$ per $i = 1,2,3$. Per risolvere i tre sistemi contemporaneamente riduciamo a gradini la matrice formata dai tre vettori v_i affiancata dalla matrice formata dai tre vettori $T(v_i)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -2 & 9 \\ -4 & 1 & -7 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II-2I \\ III+4I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 12 & 7 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 14 & 11 & -10 \end{array}\right]$$

Risolviamo ora i tre sistemi:

$$T(v_1): \begin{cases} x+z=3 \\ y-2z=-2 \\ -z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=-30 \\ z=14 \end{cases} \Rightarrow T(v_1) = (-17,-30,14)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_2): \begin{cases} x+z=1 \\ y-2z=-4 \\ -z=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=-26 \\ z=-11 \end{cases} \Rightarrow T(v_2) = (12,-26,-11)_{\mathcal{B}}$$

$$T(v_3): \begin{cases} x+z=1 \\ y-2z=7 \\ -z=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9 \\ y=27 \\ z=10 \end{cases} \Rightarrow T(v_3) = (-9,27,10)_{\mathcal{B}}$$

Infine la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -9 \\ -30 & -26 & 27 \\ -14 & -11 & 10 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 8.5 (8.50). *Sia*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (0,-1,0),\ v_3 = (2,0,0)\}$$

una base di $\mathbb{R}^3$ *e sia* T *l'endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$ *così definito:*

$$T(v_1) = (3,1,2), \qquad T(v_2) = (0,1,1), \qquad T(v_3) = (6,4,6)$$

a) *Si determini la matrice* $M(T)$ *associata a* T *rispetto alla base canonica.*
b) *Si determini base e dimensione dell'Immagine e del Nucleo di* T.
c) *Si stabilisca per quali valori di* k *il vettore* $v_k = (k+1,0,k)$ *appartiene all'Immagine di* T.

Soluzione:

a) Per determinare $T(e_i)$, dobbiamo ricavare le coordinate di e_i rispetto alla base $\mathcal{B}$. Non è però necessario risolvere le tre equazioni $xv_1 + yv_2 + zv_3 = e_i$ in quanto seplicemente:

$$e_1 = \frac{1}{2}v_3, \qquad e_2 = -v_2, \qquad e_3 = v_1 - \frac{1}{2}v_3$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} T(e_1) &= \frac{1}{2}T(v_3) = (3,2,3) \\ T(e_2) &= -T(v_2) = (0,-1,-1) \\ T(e_3) &= T(v_1) - \frac{1}{2}T(v_3) = (3,1,2) - (3,2,3) = (0,-1,-1) \end{aligned}$$

e

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Riduciamo $M(T)$ a gradini

$$\begin{matrix} 1/3I \\ II - 2/3I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(M(T)) = 2$$
$$\mathcal{B}(\mathrm{Im}(T)) = \{(3,2,3),\ (0,-1,-1)\}$$

Sappiamo già che $\dim(\mathrm{N}(T)) = 3 - \mathrm{rg}(M(T)) = 1$. Per determinarne una base risolviamo il sistema omogeneo associato a $M(T)$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(0,-1,1)\}$$

c) Il vettore $v_k = (k+1, 0, k)$ appartiene all'Immagine di T se è combinazione lineare dei vettori della base in $\mathrm{Im}(T)$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & k+1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & k \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II - 2I \\ III - I \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & k+1 \\ 0 & -3 & -2k-2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II - 3III \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2k+1 \end{array}\right]$$

Infine, se $k = \frac{1}{2}$ la matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango, quindi il sistema ammette soluzione e v_k appartiene a $\mathrm{Im}(T)$, mentre se $k \neq \frac{1}{2}$, allora $\mathrm{rg}(A|b) = 3 > \mathrm{rg}(A) = 2$, quindi il sistema non ammette soluzione e v_k non appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

□

Esercizio 8.6 (9.1). *Verificare che $v = (1,0,0,1)$ è autovettore dell'applicazione lineare T così definita*

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_3,\ x_1 - 2x_3 + x_4)$$

Determinare inoltre il relativo autovalore.

Soluzione:

Calcoliamo $T(v)$:

$$T(1,0,0,1) = (2,\ -1+1,\ 0,\ 1+1) = (2,\ 0,\ 0,\ 2) = 2 \cdot v$$

Quindi v è autovettore associato all'autovalore 2.

□

Esercizio 8.7 (9.3). *Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire se esistono autovettori di T ed eventualmente determinarli.*

b) *Stabilire se T è diagonalizzabile.*
c) *Determinare la base rispetto alla quale T ha matrice associata D diagonale e determinare la matrice diagonale D e la matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$).*

Soluzione:

Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

a) Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:

$$T(v) = \lambda v \;\Rightarrow\; A \cdot v = \lambda v \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} x+y \\ 3y \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \lambda x \\ 3y = \lambda y \\ 2z = \lambda z \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ (3-\lambda)y = 0 \\ (2-\lambda)z = \end{cases} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Quindi $T(v) = \lambda v$ ammette soluzione $v \neq 0$ se e solo se il sistema omogeneo trovato ha soluzione non nulla. Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi T ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1, 3, 2$$

Consideriamo i tre casi

– Se $\lambda = 1$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \;\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 0, 0),\ t \in \mathbb{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 1:

$$T(t, 0, 0) = A \cdot (t, 0, 0) = (t, 0, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 1:

$$E(1) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

– Se $\lambda = 3$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \;\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(t, 2t, 0),\ t \in \mathbb{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 3:

$$T(t, 2t, 0) = A \cdot (t, 2t, 0) = (3t, 6t, 0) = 3 \cdot (t, 2t, 0).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 3:

$$E(3) = \langle (1, 2, 0) \rangle$$

– Se $\lambda = 2$ otteniamo il sistema omogeneo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Quindi tutti i vettori del tipo $(0, 0, t),\ t \in \mathbb{R}$ sono autovettori di T relativi all'autovalore 2:

$$T(0, 0, t) = A \cdot (0, 0, t) = (0, 0, 2t) = 2 \cdot (0, 0, t).$$

L'insieme di tali autovettori è detto autospazio relativo all'autovalore 2:

$$E(2) = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

b) T è diagonalizzabile se rispetto a una opportuna base ha associata una matrice diagonale, ovvero se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T. Prendiamo un autovettore relativo a ciascun autovalore:

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (1,2,0), \quad v_3 = (0,0,1)$$

e stabiliamo se sono linearmente indipendenti calcolando il determinante della matrice associata ai tre vettori:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0$$

Quindi i vettori sono linearmente indipendenti e $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T, dunque T è diagonalizzabile. In realtà autovettori relativi ad autovalori differenti sono sempre linearmente indipendenti.

c) Abbiamo già determinato la base al punto precedente. Inoltre

$$\begin{matrix} T(v_1) = v_1 \;\Rightarrow\; T(v_1) = (1,0,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_2) = 3v_2 \;\Rightarrow\; T(v_2) = (0,3,0)_{\mathcal{B}} \\ T(v_3) = 2v_3 \;\Rightarrow\; T(v_3) = (0,0,2)_{\mathcal{B}} \end{matrix} \;\Rightarrow\; M_{\mathcal{B}}(T) = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori relativi ai tre autovettori che formano la base.

La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre vettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti $M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot M(T) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

□

Esercizio 8.8. [Esercizio 9) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato]

Riconoscere che le due seguenti matrici M sono diagonalizzabili, e calcolare per ciascuna di esse una matrice P diagonalizzante (tale cioè che valga $P^{-1}MP = D$, con D matrice diagonale; ricordiamo che P è una matrice le cui colonne sono autovettori di M).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Risolviamo questo esercizio utilizzando la sola definizione di autovalore e autovettore.

Consideriamo la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Impostiamo l'equazione:

$$T(v) = \lambda v \;\Rightarrow\; A \cdot v = \lambda v \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 3y + z \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = \lambda x \\ 3y + z = \lambda y \\ 4z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + 3z = 0 \\ (3-\lambda)y + z = 0 \\ (4-\lambda)z = \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

Notiamo che la matrice ottenuta è quella associata al sistema omogeneo $(M - \lambda I)v = 0$. Quindi $T(v) = \lambda v$ con $v \neq 0$ se e solo se v è soluzione non nulla del sistema omogeneo associato $M - \lambda I$ Sappiamo che un sistema omogeneo in tre incognite ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla se la matrice dei coefficienti ha rango minore di 3. Quindi T ha degli autovettori se la matrice dei coefficienti determinata ha rango minore di tre, ovvero determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

Quindi

$$\det(M-\lambda I) = 0 \ \Rightarrow \ \text{autovalori di } M\text{:} \ \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

A questo punto possiamo già affermare che la matrice M è diagonalizzabile, in quanto ha 3 autovalori distinti, e di conseguenza 3 autovettori linearmente indipendenti. Per determinare la matrice P diagonalizzante dobbiamo trovare gli autospazi $E(\lambda_i)$ relativi ad ogni autovalore λ_i.

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - I$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y+3z=0 \\ 2y+z=0 \\ -2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (1,0,0)t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi $T(1,0,0) = \lambda \cdot (1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0)$ e $E(1) = \langle (1,0,0) \rangle$.

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 3I$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2y+3z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (1,1,0)t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi $T(1,1,0) = \lambda \cdot (1,1,0) = 3 \cdot (1,1,0)$ e $E(3) = \langle (1,1,0) \rangle$.

Determiniamo infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 4$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 4I$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x+2y+3z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3}t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = \left(\frac{5}{3},1,1\right)t,$$

Quindi $T(5,3,3) = \lambda \cdot (5,3,3) = 4 \cdot (5,3,3)$ e $E(4) = \langle (5,3,3) \rangle$.

L'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (5,3,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T. La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre autovettori di $\mathcal{B}$ (espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad D = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice diagonale D è la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ formata dagli autovettori. Poiché

$$T(v_1) = T(1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0) = v_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_2) = T(1,1,0) = 3 \cdot (1,1,0) = 3v_2 = (0,3,0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3) = T(5,3,3) = 4 \cdot (5,3,3) = 4v_3 = (0,0,4)_{\mathcal{B}}$$

la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice diagonale formata dai tre autovalori.

Consideriamo ora la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Un autovalore di T è un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste un vettore $v = (x, y, z, w)$ **non nullo** tale che $T(v) = \lambda v$. I vettori v tale che $T(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di T relativi a λ. Si tratta quindi di verificare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $T(v) = \lambda\, v$ ammette soluzione non nulla. Come nel caso precedente otteniamo che le soluzioni dell'equazione $T(v) = \lambda v$ sono le stesse soluzioni del sistema omogeneo associato a $M - \lambda I$; quindi $T(v) = \lambda v$ per qualche $v \neq 0$ se la matrice $M - \lambda I$ ha rango minore di 4 ovvero determinante nullo:

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)$$

Quindi

$$\det(M - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow\; \text{autovalori di } M\text{: } \begin{cases} \lambda_1 = 2 & \text{(doppio)} \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$$

A questo punto non possiamo concludere nulla circa la diagonalizzabilità di M in quanto abbiamo trovato un autovalore doppio. In particolare se $E(2)$ ha dimensione 2 allora M è diagonalizzabile. Viceversa se $E(2)$ ha dimensione 1 allora M non è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 2I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = s \end{cases}$$
$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0)t + (0, 0, 0, 1)s \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

Quindi $T(1, 0, 0, 0) = \lambda \cdot (1, 0, 0, 0) = 2 \cdot (1, 0, 0, 0)$, $\quad T(0, 0, 0, 1) = \lambda \cdot (0, 0, 0, 1) = 2 \cdot (0, 0, 0, 1)$ e $E(2) = \langle (1, 0, 0, 0),\ (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Abbiamo così trovato che l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica 2, uguale alla sua molteplicità algebrica. Di conseguenza M è diagonalizzabile in quanto ha sicuramente 4 autovettori linearmente indipendenti.

Determiniamo ora l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 3I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 4z = 0 \\ 2x = 0 \\ -w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1, 1, 0, 0)t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi $T(1, 1, 0, 0) = \lambda \cdot (1, 1, 0, 0) = 3 \cdot (1, 1, 0, 0)$ e $E(3) = \langle (1, 1, 0, 0) \rangle$.

Determiniamo infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 5$ calcolando la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $M - \lambda I = M - 5I$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ -3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ w = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\; (x, y, z, w) = (1, 2, 1, 0)\, t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi $T(1, 2, 1, 0) = \lambda \cdot (1, 2, 1, 0) = 5 \cdot (1, 2, 1, 0)$ e $E(5) = \langle (1, 2, 1, 0) \rangle$.

L'insieme $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0, 0),\ v_2 = (0, 0, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, 0, 0),\ v_4 = (1, 2, 1, 0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di T. La matrice P diagonalizzante (cioé tale che $P^{-1}AP = D$) è la matrice di transizione dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ cioè la matrice che ha per colonne i tre autovettori di $\mathcal{B}$

(espressi rispetto a $\mathcal{C}$):

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad D = M_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice diagonale D è la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ formata dagli autovettori. Poiché

$$T(v_1) = 2v_1 = (2,0,0,0)_{\mathcal{B}}, \qquad T(v_2) = 2v_2 = (0,2,0,0)_{\mathcal{B}}$$
$$T(v_3) = 3v_3 = (0,0,3,0)_{\mathcal{B}}, \qquad T(v_4) = 5v_4 = (0,0,0,5)_{\mathcal{B}}$$

la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice diagonale formata dagli autovalori.

$\square$

Esercizio 8.9 (9.6)**.** *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:

Consideriamo la matrice A.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-1-\lambda)(-1-\lambda) = (-1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di A sono dati dagli zeri del suo polinomio caratteristico, quindi A ha un solo autovalore (doppio):

$$\lambda = -1$$

Inoltre il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = -1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (t,0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$E(-1) = \langle (1,0) \rangle$$

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto è una matrice 2×2 con un solo autovalore linearmente indipendente.

Consideriamo la matrice B.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-1-\lambda)(1-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 5 \end{aligned}$$

b) Poichè il polinomio caratteristico di B non ha zeri reali B non ha autovalori.
c) La matrice B non è diagonalizzabile in quanto è una matrice 2×2 priva di autovalori.

Consideriamo la matrice C.

a) Calcoliamo il polinomio caratterristico di C:
$$p_C(\lambda) = \det(C-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$=(-3-\lambda)(-\lambda)-4 = \lambda^2+3\lambda-4$$

b) Gli autovalori di C sono dati dagli zeri del suo polinomio caratteristico:
$$\lambda^2+3\lambda-4=0 \;\to\; \lambda_1=-4,\; \lambda_2=1$$
Quindi C ha due autovalori:
$$\lambda_1=-4, \quad \lambda_2=1$$
Consideriamo prima $\lambda_1=-4$. Il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $C-\lambda I$, con $\lambda=-4$:
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x+4y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4t \\ y=t \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(-4t,t) \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$$
Quindi
$$E(-4)=\langle(-4,1)\rangle$$
Consideriamo ora $\lambda_2=1$. Il relativo autospazio è la soluzione del sistema omogeneo associato alla matrice $C-\lambda I$, con $\lambda=1$:
$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 4II+I \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x-y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(t,t) \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$$
Quindi
$$E(1)=\langle(1,1)\rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto è una matrice 2×2 con due autovalori distinti (di molteplicità algebrica 1), quindi C ha due autovettori linearmente indipendenti.

□

Esercizio 8.10 (9.7)**.** *Date le matrici*
$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Si determini il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.*
b) *Si determinino gli autovalori, e i relativi autospazi, di ciascuna matrice.*
c) *Si stabilisca se le matrici sono diagonalizzabili.*

Soluzione:
Consideriamo la matrice A.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:
$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$
$$=(2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2]=(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)$$

b) Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:
$$(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0 \;\Rightarrow\; (2-\lambda)=0 \text{ oppure } (\lambda^2-5\lambda+6)=0$$
$$\Rightarrow\; \lambda_1=2,\; \lambda_2=2,\; \lambda_3=3$$

Di conseguenza gli autovalori di A sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 2 \quad \text{doppio} \\ &\lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, 0, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$E(2) = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 3$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (t, t, -2t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$E(3) = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(2)$ ha dimensione uno). Di conseguenza esistono solamente due autovettori linearmente indipendenti e non esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Consideriamo ora la matrice B.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-2-\lambda)+6] - 1[-7(-\lambda-2)-6] - [-42+6(5-\lambda)] \\ &= (-3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 7\lambda - 8 + 12 + 6\lambda \\ &= (-3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) - \lambda + 4 = (\lambda-4)[(-3-\lambda)(\lambda+1) - 1] \\ &= (\lambda-4)[-\lambda^2 - 4\lambda - 4] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di B sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda-4)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda-4) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -2 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di B sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 4 \\ &\lambda_2 = -2 \quad \text{doppio} \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ -6 & 6 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - I \\ 1/6III \end{array} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 6 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (0, t, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -7 & 7 & -1 & | & 0 \\ -6 & 6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 7I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (x, y, z) = (t, t, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0) \rangle$$

c) La matrice B non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico), ma ha molteplicità geometrica uno (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione uno). Infatti abbiamo determinato due soli autovettori linearmente indipendenti.

Consideriamo ora la matrice C.

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di C:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18] + 3[3(4-\lambda) - 18] + 3[-18 - 6(-5-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 18 - 9\lambda + 36 + 18\lambda \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) + 9\lambda + 18 = (\lambda + 2)[(1-\lambda)(\lambda - 1) + 9] \\ &= (\lambda + 2)[-\lambda^2 + 2\lambda + 8] \end{aligned}$$

b) Gli autovalori di C sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ (\lambda + 2) = 0 \text{ oppure } (-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \\ &\Rightarrow \ \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 4 \end{aligned}$$

Di conseguenza gli autovalori di C sono

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -2 \quad \text{doppio} \\ &\lambda_2 = 4 \end{aligned}$$

Consideriamo prima l'autovalore $\lambda = -2$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II - I \\ III - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (t - s, t, s) = (t, t, 0) + (-s, 0, s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, 1, 0), \ (-1, 0, 1) \rangle$$

A questo punto possiamo già affermare che C è diagonalizzabile in quanto $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica 1 e $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2.

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda = 4$. Il relativo autospazio è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $C - \lambda I$, con $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -9 & 3 & | & 0 \\ 6 & -6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II + I \\ III + 2II \end{array} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -12 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (t, t, 2t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

c) La matrice C è diagonalizzabile in quanto l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica e geometrica uno, e l'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicità algebrica due (è zero doppio del polinomio caratteristico) e ha molteplicità geometrica due (il relativo autospazio $E(-2)$ ha dimensione due).

$\square$

Esercizio 8.11 (9.8)**.** *Sia T l'endomorfismo definito dalla matrice associata rispetto alla base canonica:*

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare Nucleo e Immagine di T.*
b) *Determinare autovalori e autovettori di T.*
c) *Stabilire se T è diagonalizzabile.*
d) *Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A, e in caso positivo determinarla.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ I \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\text{rg}(A) = 2$, di conseguenza:

$$\dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(A) = 2, \qquad \dim(\text{N}(T)) = 3 - \text{rg}(A) = 1$$

Inoltre una base dell'immagine di T è

$$\mathcal{B}(\text{Im}(T)) = \{T(e_1), \ T(e_2)\} = \{(0, 1, 1), \ (6, 0, 0)\}$$

Per determinare il nucleo dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}(\mathrm{N}(T)) = \{(-1,0,1)\}$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di T:

$$p_A(\lambda) = -\lambda[-\lambda(1-\lambda)] - 6[1-\lambda-1] = \lambda^2(1-\lambda) + 6\lambda = \lambda(-\lambda^2+\lambda+6)$$

Quindi gli autovalori di T sono:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{singolo}$$
$$\lambda_2 = -2 \quad \text{singolo}$$
$$\lambda_3 = 3 \quad \text{singolo}$$

c) Possiamo già rispondere alla seconda domanda in quanto gli autovalori sono tutti singoli, quindi la matrice è sicuramente diagonalizzabile.

b) Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza $E(0) = \langle(1,0,-1)\rangle$.

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = -2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A+2I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ -y+z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-3t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow E(-2) = \langle(-3,1,1)\rangle$$

Infine calcoliamo l'autospazio $E(3)$ relativo all'autovalore $\lambda_3 = 3$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-3I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II + 1/3I \\ III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ -y+z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow E(3) = \langle(2,1,1)\rangle$$

d) Poichè T è diagonalizzabile esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \{(1,0,-1),\ (-3,1,1),\ (2,1,1)\ \}$$

□

Esercizio 8.12 (9.9)**.** *Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo a cui è associata la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) *Si determinino gli autovalori di T e si stabilisca se T è diagonalizzabile.*

b) *Si determini una base di R^3 formata da autovettori di T.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A sviluppando rispetto alla prima riga:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -6 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$
$$= (2-\lambda)[(-2-\lambda)(5-\lambda)+12] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

Gli autovalori di A sono gli zeri del suo polinomio caratteristico:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{doppio}$$
$$\lambda_2 = 1 \quad \text{singolo}$$

T è diagonalizzabile se l'autospazio $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & -6 & | & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/2II \\ 2III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2y+3z=0 \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(s, -\frac{3}{2}t, t\right) \quad \forall s,t \in \mathbb{R} \Rightarrow E(2) = \langle (1,0,0),\ (0,-3,2) \rangle$$

Poiché $E(1)$ ha sicuramente dimensione 1, la somma delle dimensioni degli autospazi è $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ e T è diagonalizzabile.

b) Per determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori dobbiamo determinare anche l'autospazio $E(1)$. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$, con $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/3II \\ 3III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (0,-2t,t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow E(1) = \langle (0,-2,1) \rangle$$

Infine la base di $\mathbb{R}^3$ cercata è

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),\ (0,-3,2),\ (0,-2,1)\}$$

□

Esercizio 8.13. [Esercizio 21) cap. 7 del testo *Geometria e algebra lineare* di Manara, Perotti, Scapellato] *Discutere la diagonalizzabilità delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice A e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(k-\lambda)(2-\lambda)$$

Gli autovalori di A sono quindi

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2, \qquad \lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 2$, allora A ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ la matrice A diventa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed ha come autovalori

$$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 2$$

Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e A non è diagonalizzabile.

- Se $k = 2$ la matrice A diventa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed ha come autovalori

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2 \quad \text{doppio}$$

Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 2$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(2) = \langle\ (1,1,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 1), e A è diagonalizzabile.

Consideriamo ora la matrice B e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(k-\lambda)$$

Gli autovalori di B sono quindi

$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$

Poichè B ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $B - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1,0,0)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica almeno 2, ma molteplicità geometrica 1, e B non è diagonalizzabile.

Consideriamo la matrice C e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_C(\lambda) = (3-\lambda)(k-\lambda)(1-\lambda)$$

Gli autovalori di C sono

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3, \qquad \lambda = k$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

- Se $k \neq 1, 3$, allora C ha tre autovalori distinti quindi è sicuramente diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ la matrice C diventa

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed ha come autovalori

$$\lambda = 1 \quad \text{doppio}, \qquad \lambda = 3$$

Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 1$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(1)$ ha dimensione 2. Risolviamo quindi il sistema omogeneo associato a $C - I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1, -2, 0)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.

- Se $k = 3$ la matrice C diventa

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed ha come autovalori

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 3 \quad \text{doppio}$$

Si tratta quindi di controllare se $\lambda = 3$ ha anche molteplicità geometrica 2, ovvero se $E(2)$ ha dimensione 2. Risolviamo il sistema omogeneo associato a $C - 3I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E(3) = \langle\ (1, 0, 0)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1, e C non è diagonalizzabile.

Consideriamo infine la matrice D e calcoliamone il polinomio caratteristico.

$$p_D(\lambda) = (1 - \lambda)^2(k - \lambda)$$

Gli autovalori di D sono quindi

$$\lambda = 1 \quad \text{almeno doppio}, \qquad \lambda = k$$

Poichè D ha l'autovalore $\lambda = 1$ almeno doppio (triplo se $k = 1$) determiniamo subito l'autospazio relativo $E(1)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $D - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle\ (1, 0, 0),\ (0, 0, 1)\ \rangle$$

Quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità geometrica 2.

Dobbiamo distinguere due casi:

- Se $k \neq 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2 (e l'autovalore $\lambda = k \neq 1$ ha molteplicità 1) quindi D è diagonalizzabile.
- Se $k = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 3, ma molteplicità geometrica 2 quindi D non è diagonalizzabile.

□

Esercizio 8.14 (9.15)**.** *Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ cos definito:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_1 - \frac{1}{2}x_3, x_2\right).$$

a) *Calcolare gli autovalori e gli autovettori di T.*
b) *T diagonalizzabile?*
c) *Se al campo dei numeri reali si sostituisce quello dei numeri complessi, l'endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ che si ottiene è diagonalizzabile?*

Soluzione:

Calcoliamo la matrice A associata a T, che ha per colonne $T(e_1), T(e_2)$ e $T(e_3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right)$$

Quindi A ha un solo autovalore reale $\lambda = 1$.

Calcoliamo l'autospazio $E(1)$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - \dfrac{1}{2}z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza $E(1) = \langle \left(\frac{3}{2}, 1, 1\right) \rangle = \langle (3, 2, 2) \rangle$.

b) T non è daigonalizzabile in quanto ha un solo autovalore (singolo), quindi la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è $1 < 3$.

c) Se consideriamo il campo dei numeri complessi, T ha tre autovalori distinti:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, i, \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, i.$$

Essendo 3 autovalori singoli la somma degli autospazi è sicuramente 3 e l'endomorfismo T in questo caso risulta diagonalizzabile.

□