Geometria e algebra lineare – 5/11/2015 **A**

1) Sia π il piano passante per i punti $A=(-3,-2,1)$, $B=(0,1,-2)$, $C=(-4,0,0)$ e sia π' il piano di equazione cartesiana $x-y=-1$.

a) Trovare equazioni parametriche della retta r intersezione dei piani π e π'.

b) Calcolare la distanza tra l'origine e la retta r.

Per trovare equazioni parametriche del piano consideriamo il punto A e i vettori

$$\overline{AB}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}\qquad \overline{AC}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

ottenendo

$$\begin{cases}x &= -3+3t-s\\ y &= -2+3t+2s\\ z &= 1-3t-s\end{cases}$$

Ricaviamo s dalla prima equazione ($s=-3+3t-x$) e sostituiamolo nelle altre due, ottenendo

$$\begin{cases}y &= -2+3t-6+6t-2x = 9t-8-2x\\ z &= 1-3t+3-3t+x=-6t+4+x\end{cases},$$

Ricaviamo ora t dalla prima equazione ($t=\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}y+\frac{8}{9}$) e sostituiamolo nella seconda, ottenendo

$$z=-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{16}{3}+4+x=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}$$

cioè

$$x+2y+3z=-4$$

Le equazioni cartesiane di r saranno quindi

$$\begin{cases}x+2y+3z &= -4\\ x-y &= -1\end{cases},$$

Riducendo per righe tale sistema otteniamo

$$\begin{cases}x+2y+3z &= -4\\ -3y-3z &= 3\end{cases},$$

e vediamo quindi che z (variabile libera) può essere presa come parametro per r, ottenendo

$$\begin{cases}x &= -2y-3z-4=2+2t-3t-4=-t-2\\ y &= -1-t\\ z &= t\end{cases}$$

Per calcolare la distanza dall'origine, scriviamo il generico piano ortogonale ad r

$$-x-y+z=d$$

Imponendo il passaggio per l'origine troviamo

$$-x-y+z=0$$

Intersechiamo ora tale piano con r, ottenendo

$$2+t+1+t+t=0,$$

cioè $t=-1$. Sostituendo tale valore nelle equazioni di r troviamo il punto $H=(-1,0,-1)$. La distanza di r dall'origine è la distanza dell'origine da tale punto, ed è quindi

$$d(r,O)=d(H,O)=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Le risposte sono dunque

$$a) \quad r: \begin{cases} x &= -2-t \\ y &= -1-t \\ z &= t \end{cases} \qquad\qquad b) \quad d=\sqrt{2}.$$

2) Sia A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1-k & -4+k \\ k & 2 & 3k-2 \end{bmatrix}$$

a) Si trovino i valori del parametro reale k per i quali A è invertibile.

b) Si trovi l'inversa per $k=1$.

c) Si trovino, se possibile, le soluzioni del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Riduciamo a scalini la matrice A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1-k & -4+k \\ k & 2 & 3k-2 \end{bmatrix} \underset{E_{31}(-k)}{\overrightarrow{E_{21}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2-k & -1+k \\ 0 & 2-k & -2 \end{bmatrix} \overrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2-k & -1+k \\ 0 & 0 & -k-1 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango massimo, ed è quindi invertibile per $k \neq -1, 2$.

Calcoliamo l'inversa per $k=1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{E_{31}(-1)}{\overrightarrow{E_{21}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overrightarrow{E_{32}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{D_3(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\overrightarrow{E_{13}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \overrightarrow{E_{12}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

La matrice inversa è quindi

$$\begin{bmatrix} -3 & -5/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è la matrice A per $k = 1$, quindi l'unica soluzione del sistema può essere trovata moltiplicando la sua inversa per la matrice colonna dei coefficienti:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le risposte sono dunque

a) $k \neq -1, 2$ b) $\begin{bmatrix} -3 & -5/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -k)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 2-k, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, k, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

b) Stabilire se il polinomio $p_1(x) = x^2 + 2x$ è combinazione lineare dei polinomi $p_2(x) = 2x - 1$ e $p_3(x) = x^2 + 1$.

Consideriamo la matrice A che ha sulle colonne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ e riduciamola in forma a scalini:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2-k & k \\ -k & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{E_{21}(-2) \\ E_{31}(k)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-k & k-2 \\ 0 & -1 & 1+k \end{bmatrix}$$

$$\underset{S_{23}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1+k \\ 0 & 2-k & k-2 \end{bmatrix} \underset{E_{32}(2-k)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1+k \\ 0 & 0 & -k(k-2) \end{bmatrix}$$

I vettori sono indipendenti quando il rango della matrice è uguale al numero di colonne, e questo accade quando $k \neq 0, 2$.

Utilizzando la base $\{x^2 . x, 1\}$ dello spazio $\mathbb{R}_2[x]$ la domanda può essere riformulata così: il vettore $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_2 = (0, 2, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$? Per stabilirlo, dobbiamo stabilire se il sistema lineare che ha come matrice dei coefficienti quella ottenuta accostando $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ e come colonna dei termini noti il vettore $\mathbf{v}_1$ ha (almeno) una soluzione.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{S_{13}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{E_{21}(2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{E_{32}(1/2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Essendo il rango di A uguale a quello di $(A|b)$ e uguale a due, il sistema è compatibile, con infinite soluzioni, quindi $\mathbf{v}_1$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

Le risposte sono dunque:

a) Per $k \neq 0, 2$.

b) Il polinomio $p_1(x)$ è combinazione lineare di $p_2(x)$ e $p_3(x)$.

Geometria e algebra lineare – 5/11/2015 **B**

Risposte Esercizio 1:

$$a) \quad r : \begin{cases} x & = -2 - t \\ y & = -1 - t \\ z & = t \end{cases} \qquad\qquad b) \quad d = \sqrt{2}.$$

Risposte Esercizio 2:

a) $k \neq -3, 1$ b) $\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Risposte Esercizio 3:

a) Per $k \neq 0, 2$.

b) Il polinomio $p_1(x)$ è combinazione lineare di $p_2(x)$ e $p_3(x)$.

Geometria e algebra lineare – 5/11/2015 **C**

Risposte Esercizio 1:

a) $r: \begin{cases} x & = -t \\ y & = 1 - t \\ z & = t \end{cases}$ b) $d = \sqrt{2/3}$.

Risposte Esercizio 2:

a) $k \neq 1, 3$ b) $\begin{bmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 11 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Risposte Esercizio 3:

a) Per $k \neq 0$.

b) Il polinomio $p_1(x)$ è combinazione lineare di $p_2(x)$ e $p_3(x)$.

Geometria e algebra lineare – 5/11/2015 **D**

Risposte Esercizio 1:

$$a) \quad r: \begin{cases} x &= -1-t \\ y &= -t \\ z &= t \end{cases} \qquad\qquad b) \quad d = \sqrt{2/3}.$$

Risposte Esercizio 2:

a) $k \neq -2, 0$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Risposte Esercizio 3:

a) Per $k \neq 2$.

b) Il polinomio $p_1(x)$ è combinazione lineare di $p_2(x)$ e $p_3(x)$.