Cognome **Nome** **A**

Scrivere le risposte agli esercizi 1,2,4,5 negli spazi sottostanti.

---

1)

---

2)

---

4)

---

5)

Geometria e algebra lineare – 14/7/2016 **A**

1) Sia r la retta di equazioni cartesiane $2x+4y+z+1=0$, $x-y+1=0$ e sia s la retta di equazioni cartesiane $2x+3y+z=0$, $x+y=0$.

1. Si stabilisca se le rette sono parallele, incidenti, sghembe o coincidenti.
2. Si dica se le rette r e s sono complanari. In caso affermativo, si trovi l'equazione del piano che le contiene.
3. Si trovi la distanza tra r e s.

2) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,-1,0),\ \mathbf{v}_2 = (1,0,-1,-1),\ \mathbf{v}_3 = (2,1,1,2)$$

1. Si provi che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendente.
2. Si trovi il valore di k per il quale il vettore $\mathbf{v}_4 = (0,k,-1,0)$ appartiene al sottospazio generato da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ e, per tale valore, si scriva $\mathbf{v}_4$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

3) Si enunci il Teorema di Rouché-Capelli, e lo si illustri con alcuni esempi.

4) Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più due. Sia $T : V \to V$ la funzione definita da

$$T(p(x)) = xp'(x) + p(0)x,$$

dove $p'(x)$ indica la derivata del polinomio $p(x)$.

1. Mostrare che la funzione T è lineare.
2. Trovare la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ di V e stabilire se la funzione T è invertibile.

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare con matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si trovino autovalori e autovettori di f e si stabilisca se f è diagonalizzabile.

6) Dare la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale. Dare due esempi di spazi vettoriali reali di dimensione tre. Se W è un sottospazio di V, c'è qualche relazione tra le loro dimensioni?