

**Esercizio 1.1** (2.1). *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta del piano*

- (a) *Passante per i punti  $A(1, 2)$  e  $B(-1, 3)$ .*
- (b) *Passante per il punto  $C(2, 3)$  e parallela al vettore  $\overrightarrow{OP} = (-1, 2)$ .*
- (c) *Di equazione Cartesiana  $y = 2x + 5$ . Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.*

SOLUZIONE:

- (a) Poichè  $\overrightarrow{AB} = (-2, 1)$  otteniamo

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana basta ricavare  $t$ :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2(y - 2) \\ t = y - 2 \end{cases} \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

- (b) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} t = 2 - x \\ y = 3 + 2(2 - x) \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 7 = 0$$

- (c) La cosa più semplice è porre una variabile uguale al parametro  $t$ , ottenendo

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per determinare un punto  $P$  appartenente a  $r$  è sufficiente trovare un punto  $(x, y)$  che soddisfi l'equazione di  $r$  (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro  $t$  nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow P(0, 5).$$

□

**Esercizio 1.2** (2.2). *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio*

- (a) *Passante per i punti  $A(1, 0, 2)$  e  $B(3, -1, 0)$ .*
- (b) *Passante per il punto  $P(1, 3, 1)$  e parallela al vettore  $\overrightarrow{OQ} = (2, 0, 0)$ .*
- (c) *Di equazioni Cartesiane*

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

*Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.*

SOLUZIONE:

- (a) Poichè  $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -2)$  otteniamo

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} x = 1 + 2(-y) \\ t = -y \\ z = 2 - 2(-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione Cartesiana di una retta nello spazio è data mediante l'intersezione di due piani.

(b) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Notiamo che l'equazione si può equivalentemente scrivere

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

E' immediato ricavare l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

(c) La cosa più semplice è porre la variabile  $x$  uguale al parametro  $t$ , ottenendo

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -(1 + 3t) + t \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per determinare un punto  $P$  appartenente a  $r$  è sufficiente trovare un punto  $(x, y, z)$  che soddisfi l'equazione di  $r$  (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro  $t$  nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow P(0, 1, -1).$$

□

### Esercizio 1.3 (2.3).

- a) *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana del piano  $\pi$  passante per i punti  $A(1, 3, 1)$ ,  $B(2, 0, 0)$  e  $C(0, 1, 1)$ . Il punto  $P(0, 2, 0)$  appartiene a tale piano?*  
 b) *Determinare una equazione della retta passante per  $A$  ortogonale a  $\pi$ .*

SOLUZIONE:

- a) Possiamo determinare prima l'equazione parametrica. Poichè

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1, -3, -1) \\ \overrightarrow{AC} &= (-1, -2, 0) \end{aligned}$$

otteniamo

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 3 - 3t - 2s \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana da quella parametrica basta ricavare  $s$  e  $t$  e procedere per sostituzione:

$$\begin{cases} x = 1 + (1 - z) - s \\ y = 3 - 3(1 - z) - 2s \\ t = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -x - z + 2 \\ y = 3z - 2(-x - z + 2) \\ t = 1 - z \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 5z - 4 = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione  $ax + by + cz = d$  e imponendo il passaggio per i tre punti  $A, B$  e  $C$  in modo da ricavare i valori di  $a, b, c$  e  $d$ . Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di  $a, b, c$  e  $d$  non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz = d \Rightarrow \begin{array}{l} A: a + 3b + c = d \\ B: 2a = d \\ C: b + c = d \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} + 3b + (d - b) = d \\ a = \frac{d}{2} \\ c = d - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{d}{4} \\ a = \frac{d}{2} \\ c = \frac{5}{4}d \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di  $d$ . Ponendo  $d = 4$  otteniamo

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 5 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 5z = 4$$

Infine  $P(0, 2, 0)$  appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione (Cartesiana o parametrica). Sostituendo nell'equazione Cartesiana otteniamo

$$-2 - 4 = 0 \quad \text{no}$$

Poichè le coordinate non soddisfano l'equazione  $P$  non appartiene al piano.

Analogamente potevamo sostituire nell'equazione parametrica ottenendo:

$$\begin{cases} 0 = 1 + t - s \\ 2 = 3 - 3t - 2s \\ 0 = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 - s \\ 2 = 3 - 3 - 2s \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ s = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e seconda equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e  $P$  non appartiene al piano.

- b) Sappiamo che dato un generico piano  $ax + by + cz = k$  il vettore  $(a, b, c)$  è ortogonale al piano. Quindi dall'equazione cartesiana del piano ricaviamo che la retta cercata ha direzione  $(2, -1, 5)$ . Sappiamo inoltre che tale retta passa per  $A = (1, 3, 1)$ , quindi

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

□

**Esercizio 1.4** (2.4). Sia  $r$  la retta di  $\mathbb{R}^3$  passante per i punti  $A(1, -1, 2)$  e  $B(-2, 0, 1)$ , e sia  $s$  la retta contenente  $C(1, 3, -3)$  e parallela al vettore  $\overrightarrow{OD}(2, -2, 3)$ .

- a) Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).  
b) Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.

SOLUZIONE:

La retta  $r$  passante per  $B$  e parallela al vettore  $\overrightarrow{BA} = (-3, 1, -1)$  ha equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Analogamente

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \end{cases} \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

- a) Osserviamo subito che  $r$  e  $s$  non sono parallele in quanto i vettori direzione  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{OD}$  non hanno le componenti proporzionali uno rispetto all'altro.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione  $r \cap s$  risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite  $t, h$ :

$$\begin{cases} -2 - 3t = 1 + 2h \\ t = 3 - 2h \\ 1 - t = -3 + 3h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(3 - 2h) - 2h = 3 \\ t = 3 - 2h \\ -(3 - 2h) - 3h = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -9 + 6h - 2h = 3 \\ t = 3 - 2h \\ -3 + 2h - 3h = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 3 \\ t = 3 - 2h \\ h = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e terza equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe.

In alternativa potevamo per esempio ricavare l'equazione cartesiana di una delle due rette

$$r : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = -2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

e quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \\ x + 3y = -2 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \\ 1 + 2h + 9 - 6h = -2 \\ 3 - 2h - 3 + 3h = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \\ -4h = -12 \\ h = 1 \end{cases}$$

Poichè le ultime due equazioni si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe.

□

### Esercizio 1.5 (2.7).

- Determinare equazioni parametriche della retta  $r$  passante per i punti  $A = (2, 3, 1)$  e  $B = (0, 0, 1)$  e della retta  $s$  passante per i punti  $C = (0, 0, 0)$  e  $D = (4, 6, 0)$ .
- Stabilire se  $r$  e  $s$  sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente  $r$  e  $s$ .

SOLUZIONE:

- Il vettori direzione  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -3, 0) \quad \overrightarrow{CD} = (4, 6, 0)$$

Quindi:

$$r : \begin{cases} x = -2t \\ y = -3t \\ z = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 4t \\ y = 6t \\ z = 0 \end{cases}$$

- Poichè i due vettori direzione sono paralleli lo sono anche le due rette  $r$  e  $s$  e in particolare le rette sono complanari.

Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione  $\overrightarrow{AC}$  (in quanto  $A$  e  $C$  appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 1)$$

Infine il piano  $\pi$  che contiene  $r$  e  $s$  ha equazione parametrica:

$$\pi : \begin{cases} x = -2t + 2s \\ y = -3t + 3s \\ z = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri  $s$  e  $t$ :

$$\begin{cases} x = -2t + 2z \\ y = -3t + 3z \\ z = s \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione  $ax + by + cz = d$  e imponendo il passaggio per tre dei quattro punti, per esempio  $B, C$  e  $D$  in modo da ricavare i valori di  $a, b, c$  e  $d$ . Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di  $a, b, c$  e  $d$  non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz = d \Rightarrow \begin{matrix} B: & c = d \\ C: & 0 = d \\ D: & 4a + 6b = d \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di  $b$ . Ponendo  $b = 2$  otteniamo

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = d = 0 \end{cases} \Rightarrow -3x + 2y = 0$$

□

**Esercizio 1.6** (2.9). *Si considerino le rette di equazioni cartesiane*

$$r: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per  $P(1, 1, 1)$  e incidente  $r$  e  $s$ .
- Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per  $C(1, 2, -3)$  e perpendicolare a  $r$ .
- Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto  $P = (1, 1, 1)$  e perpendicolare alle due rette  $r$  e  $s$ .

SOLUZIONE:

- Cominciamo con il determinare se le rette  $r$  e  $s$  sono incidenti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Quindi le rette sono incidenti nel punto  $O(0, 0, 0)$ . E' allora sufficiente determinare l'equazione della retta passante per  $P(1, 1, 1)$  e  $O(0, 0, 0)$ . In questo modo tale retta interseca  $r$  e  $s$ . La direzione è data dal vettore  $\overrightarrow{OP}(1, 1, 1)$ , quindi la retta cercata ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

- Il piano passante per  $C(1, 2, -3)$  e perpendicolare a  $r$  ha equazione del tipo

$$ax + by + cz = k$$

dove  $a, b, c$  corrispondono alle componenti del vettore direzione di  $r$  (perpendicolare al piano), mentre il valore di  $k$  si determina imponendo il passaggio per  $C$ .

Determiniamo quindi l'equazione parametrica di  $r$ :

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi  $r$  è parallela al vettore  $(-2, 1, 1)$ , e il piano cercato è del tipo

$$-2x + y + z = k$$

Imponendo poi il passaggio per  $C(1, 2, -3)$  otteniamo:

$$-2 \cdot 1 + 2 + (-3) = k \quad \Rightarrow \quad k = -3$$

Infine il piano cercato ha equazione:

$$-2x + y + z = -3$$

c) Scriviamo l'equazione di  $r$  e  $s$  in forma parametrica:

$$r : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Il piano passante per  $P(1, 1, 1)$  e perpendicolare a  $r$  ha equazione

$$-2x + y + z = 0$$

Analogamente il piano passante per  $P(1, 1, 1)$  e perpendicolare a  $s$  ha equazione

$$-y + z = 0$$

La retta cercata è data dall'intersezione dei due piani appena determinati:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Notiamo che la retta coincide, casualmente, con quella determinata al punto precedente.

Un metodo alternativo consisteva nel calcolare il piano  $\pi$  contenente  $r$  e  $s$ . Tale piano ha direzione parallela ai due vettori direzione di  $r$  e  $s$  e contiene il punto  $O(0, 0, 0)$  di intersezione di  $r$  e  $s$ :

$$r : \begin{cases} x = -2t \\ y = t - s \\ z = t + s \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 0$$

La retta cercata è quindi la retta passante per  $P$  e perpendicolare a tale piano:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Notiamo che si tratta, ovviamente, della stessa retta determinata con l'altro metodo, scritta in maniera differente.

□

**Esercizio 1.7** (2.10). Sia  $r$  la retta nello spazio passante per i punti  $A = (0, 0, 1)$  e  $B = (-2, -1, 0)$ . Sia  $s$  la retta passante per i punti  $C = (1, 1, 1)$  e  $D = (-1, 0, 0)$ .

- Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano  $\pi$  che le contiene.
- Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano  $\pi$  del punto a).

SOLUZIONE:

- Due rette sono complanari se sono parallele o incidenti.

Il vettori direzione  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -1, -1) \quad \overrightarrow{CD} = (-2, -1, -1)$$

Poichè i due vettori sono paralleli lo sono anche le due rette  $r$  e  $s$  e quindi in particolare sono complanari. Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione  $\overrightarrow{AC}$  (in quanto  $A$  e  $C$  appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$$

Infine il piano  $\pi$  che contiene  $r$  e  $s$  ha equazione parametrica:

$$\pi : \begin{cases} x = -2t + s \\ y = -t + s \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri  $s$  e  $t$ :

$$\begin{cases} t = 1 - z \\ x = -2 + 2z + s \\ y = -1 + z + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - z \\ s = x + 2 - 2z \\ y = -1 + z + x + 2 - 2z \end{cases} \Rightarrow x - y - z + 1 = 0$$

- b) Un vettore perpendicolare al piano  $\pi$  ha componenti proporzionali ai coefficienti della  $x, y$  e  $z$  dell'equazione cartesiana di  $\pi$ , ovvero  $(1, -1, -1)$  (o un suo multiplo). Di conseguenza l'equazione della retta cercata è

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

**Esercizio 1.8** (2.13). *Si considerino i piani dello spazio*

$$\pi : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad \pi' : 8x + y - z = 0.$$

- a) *Stabilire la posizione reciproca dei due piani.*  
 b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per  $P = (1, 1, 1)$  e perpendicolare ai piani  $\pi$  e  $\pi'$ .*

SOLUZIONE:

- a) Due piani o sono paralleli o la loro intersezione è una retta. In questo caso il piano  $\pi$  è perpendicolare al vettore  $(1, -1, 1)$ , mentre  $\pi'$  è perpendicolare al vettore  $(8, 1, -1)$ , quindi i piani non sono paralleli tra loro. Determiniamo la loro intersezione mettendo a sistema le loro equazioni:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 8x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi i piani si intersecano nella retta

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- b) La direzione perpendicolare al piano  $\pi$  è data dal vettore  $(1, -1, 1)$ , mentre la direzione perpendicolare a  $\pi'$  è  $(8, 1, -1)$ . Di conseguenza il piano perpendicolare a  $\pi$  e  $\pi'$  passante per il punto  $P(1, 1, 1)$  ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + t + 8s \\ y = 1 - t + s \\ z = 1 + t - s \end{cases}$$

Ricavando i parametri  $s$  e  $t$  e sostituendo si ottiene una equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

In alternativa si può osservare che un piano perpendicolare a  $\pi$  e  $\pi'$  è anche perpendicolare alla retta loro intersezione. Di conseguenza il piano cercato è perpendicolare al vettore  $(0, 1, 1)$  (direzione della retta intersezione), ovvero ha equazione del tipo  $y + z = k$ . Imponendo il passaggio per  $P$  si ottiene direttamente l'equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

□

**Esercizio 1.9** (2.18). *Si considerino i piani  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  di equazioni*

$$\begin{aligned}\pi_1 &: z - 3 = 0 \\ \pi_2 &: x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: 3x + 3y - z + 9 = 0\end{aligned}$$

e la retta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ .

- Si stabilisca se il piano  $\pi_3$  contiene  $r$ .*
- Si trovi un'equazione cartesiana del piano  $\pi_4$  passante per l'origine e contenente  $r$ .*
- Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano  $\pi_1$ .*

SOLUZIONE:

Calcoliamo un'equazione parametrica di  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ :

$$\begin{cases} z - 3 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -t - 2 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$$

- Un modo per verificare se  $\pi_3$  contiene  $r$  è di controllare se  $\pi_3$  contiene due qualsiasi punti di  $r$ . Dall'equazione parametrica di  $r$ , assegnando per esempio i valori  $t = 0$  e  $t = 1$  otteniamo i punti  $A(-2, 0, 3)$  e  $B(-3, 1, 3)$  di  $r$ . Quindi  $\pi_3$  contiene  $A$  e  $B$  se:

$$3 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 - 3 + 9 = 0$$

$$3 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 - 3 + 9 = 0$$

Siccome le due condizioni sono verificate  $A$  e  $B$ , e di conseguenza  $r$ , sono contenuti in  $\pi_3$ .

- Un piano  $\pi_4$  contenente  $r$  contiene i suoi due punti  $A$  e  $B$ . Si tratta quindi di trovare l'equazione del piano per  $A, B$  e l'origine. Poiché chiede l'equazione cartesiana la cosa più semplice è probabilmente considerare la generica equazione cartesiana e imporre il passaggio pre i tre punti:

$$ax + by + cz = d \Rightarrow \begin{cases} -2a + 3c = d \\ -3a + b + 3c = d \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}c \\ b = \frac{3}{2}c \\ d = 0 \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di  $c$ . Ponendo  $c = 2$  otteniamo

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x + 3y + 2z = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione parametrica e da questa ricavare l'equazione cartesiana. Poiché  $\overrightarrow{OA} = (-2, 0, 3)$  e  $\overrightarrow{OB} = (-3, 1, 3)$ , otteniamo le equazioni di  $\pi_4$ :

$$\pi_4 : \begin{cases} x = -2t - 3s \\ y = s \\ z = 3t + 3s \end{cases} \Rightarrow 3x + 3y + 2z = 0$$

- Determiniamo la retta  $s$  per l'origine ortogonale a  $\pi_1$ , cioè di direzione  $(0, 0, 1)$ :

$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano  $\pi_1$  è quindi l'intersezione di  $s$  con  $\pi_1$ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto  $P(0, 0, 3)$ .

□



**Esercizio 1.10** (12.9). Si determini la distanza del punto  $P(3, 1, 2)$  dalla retta  $r$  di equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

SOLUZIONE:

La retta  $r$  è parallela al vettore  $u = (1, 2, -3)$ .

Sia  $\pi$  il piano perpendicolare a  $r$  passante per  $P$ . La prima condizione implica che  $\pi$  sia del tipo

$$x + 2y - 3z = k$$

Imponendo il passaggio per  $P$  otteniamo  $3 + 2 - 6 = k$ , ovvero  $k = -1$ . Infine

$$\pi : x + 2y - 3z = -1$$

Determiniamo ora il punto di intersezione  $A$  di  $r$  con  $\pi$ :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + t + 4 + 4t + 3 + 9t = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 5 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Quindi  $A = (5, 0, 2)$ .

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(r, P) = d(A, P) = \|AP\| = \|(2, -1, 0)\| = \sqrt{5}$$

□

**Esercizio 1.11** (12.10). Si determini la distanza del punto  $P(-1, 0, 2)$  dal piano  $\pi$  di equazione  $\pi : x - 2y + 3z = -9$ .

SOLUZIONE:

Si può applicare la formula:  $d(\Pi, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{14}$ .

L'esercizio può essere svolto, in caso di oblio della formula, come è illustrato di seguito. Il piano  $\pi$  è perpendicolare al vettore  $u = (1, -2, 3)$ .

Sia  $r$  la retta perpendicolare a  $\pi$  passante per  $P$ :

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Determiniamo ora il punto di intersezione  $A$  di  $r$  con  $\pi$ :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + t + 4t + 6 + 9t = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Quindi  $A = (-2, 2, -1)$ .

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(\pi, P) = d(A, P) = \|AP\| = \|(1, -2, 3)\| = \sqrt{14}$$

Notiamo che l'esercizio poteva anche essere risolto utilizzando la formula della distanza punto-piano.

□

**Esercizio 1.12** (2.5).

a) Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette  $r$  e  $r'$  di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases}$$

b) Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.

SOLUZIONE:

a) Osserviamo subito che  $r$  e  $r'$  non sono parallele in quanto  $r$  è parallela al vettore  $(2, 1, 1)$  mentre  $r'$  è parallela al vettore  $(1, 0, 1)$ .

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione  $r \cap r'$  risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite  $t, s$ :

$$\begin{cases} 2t = s \\ t + 1 = 2 \\ t + 3 = s + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \\ 1 + 3 = 2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di  $r$  (o analogamente di  $r'$ ) il valore di  $t$  (o di  $s$ ) determinato, troviamo che  $r$  e  $r'$  sono incidenti nel punto  $P(2, 2, 4)$ .

b) L'angolo  $\vartheta$  formato dalle rette  $r$  e  $r'$  corrisponde all'angolo formato dai rispettivi vettori direzione  $u = (2, 1, 1)$  e  $v = (1, 0, 1)$ . Possiamo quindi sfruttare la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

dove

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \\ |v| &= \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\cos(\vartheta) = \frac{2 + 1}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \vartheta = 30^\circ.$$

□

**Esercizio 1.13** (2.21). Nel piano, si considerino le rette  $r_1, r_2, r_3$  di equazioni

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \quad r_2 : x - 2y + 1 = 0, \quad r_3 : 2x + y - 2 = 0.$$

- Si trovi un'equazione cartesiana della retta  $r$  parallela a  $r_1$  e passante per il punto  $A = r_2 \cap r_3$ .
- Si trovi un'equazione cartesiana della retta  $s$  perpendicolare a  $r_1$  e passante per  $A$ .
- Si calcoli l'angolo tra le rette  $r_1$  e  $r_2$  e tra le rette  $r_2$  e  $r_3$ .

SOLUZIONE:

a) Determiniamo  $A = r_2 \cap r_3$  risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow A \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

La retta  $r$  è quindi la retta per  $A$  di direzione parallela al vettore  $(-2, 2)$ :

$$r : \begin{cases} x = \frac{3}{5} - 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \Rightarrow x + y - \frac{7}{5} = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione cartesiana di  $r_1$ :

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -x + 1$$

Di conseguenza l'equazione cartesiana di  $r$  è:

$$y - \frac{4}{5} = - \left( x - \frac{3}{5} \right) \Rightarrow x + y - \frac{7}{5} = 0$$

b) Utilizzando l'equazione parametrica di  $s$ , una direzione perpendicolare a quella di  $r_1$  è data dal vettore  $(2, 2)$ , quindi:

$$s : \begin{cases} x = \frac{3}{5} + 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \Rightarrow x - y + \frac{1}{5} = 0$$

Utilizzando in alternativa l'equazione cartesiana di  $r_1$ , la retta  $s$  ha coefficiente angolare opposto del reciproco del coefficiente angolare di  $r_1$ , quindi 1:

$$s : y - \frac{4}{5} = \left(x - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow x - y + \frac{1}{5} = 0$$

- c) Ricaviamo le equazioni parametriche delle tre rette per avere dei vettori direzione. Sappiamo già che  $r_1$  è parallela a  $v_1 = (-2, 2)$ , inoltre

$$r_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases} \quad r_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

Quindi  $r_2$  è parallela a  $v_2(2, 1)$  e  $r_3$  è parallela a  $v_3(1, -2)$ . Infine

$$\cos(v_1 v_2) = \frac{-4 + 2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-2}{2\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Notiamo che i vettori  $v_2$  e  $v_3$  sono ortogonali, quindi l'angolo tra  $r_2$  e  $r_3$  è  $\frac{\pi}{2}$ .

□

**Esercizio 1.14** (2.27). Siano assegnati il punto  $A = (1, 2, 1)$  il piano  $\pi$  e la retta  $s$  di equazioni

$$\pi : x + z = 4, \quad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Si determini il punto  $B$ , proiezione ortogonale di  $A$  su  $\pi$  e la retta  $r$  passante per  $A$  e per  $B$ .
- Indicato con  $C$  il punto di intersezione tra  $s$  e  $r$  e con  $D$  il punto di intersezione tra  $s$  e  $\pi$ , si determini un'equazione della retta  $CD$ .
- Si determini l'angolo tra  $r$  e la retta  $CD$ .

SOLUZIONE:

- a) Per trovare  $B$  determiniamo l'equazione della retta  $r$  passante per  $A$  e ortogonale a  $\pi$ , cioè di direzione  $(1, 0, 1)$ :

$$r : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Il punto  $B$  è dato dall'intersezione tra  $r$  e  $\pi$ :

$$B : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ 1 + s + 1 + s = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow B = (2, 2, 2)$$

Notiamo che la retta passante per  $A$  e  $B$  richiesta è la retta  $r$  precedentemente trovata.

- b) Calcoliamo le intersezioni:

$$C = r \cap s : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ 1 + s = 1 + t \\ 2 = 2 \\ 1 + s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = -1 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0, 2, 0)$$

$$D = s \cap \pi : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ 1 + t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D = (4, 2, 0)$$

Il vettore  $CD$  è  $(4, 0, 0)$ , quindi un'equazione della retta  $CD$  è:

$$r_{CD} : \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- c) La retta  $r$  è parallela al vettore  $u = (1, 0, 1)$  e la retta  $CD$  è parallela al vettore  $v = (4, 0, 0)$ . Indicando con  $\vartheta$  l'angolo tra le due rette si ottiene:

$$\cos(\vartheta) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

□

**Esercizio 1.15** (12.16). *Determinare per quali valori di  $k$  il triangolo di vertici  $A_1(0, 0)$ ,  $A_2(4, 2)$  e  $A_3(1, k)$  ha area 5.*

SOLUZIONE:

L'area del triangolo di vertici  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  è metà dell'area del parallelogramma di lati

$$\overrightarrow{A_3A_1} = (1, k), \quad \overrightarrow{A_2A_1} = (4, 2)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma in  $\mathbb{R}^2$  otteniamo quindi

$$Area(\text{triangolo } A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & k \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}(2 - 4k) \right| = |1 - 2k|$$

Imponendo la condizione che l'area del triangolo sia 5 otteniamo  $1 - 2k = \pm 5$ , quindi  $k = -2$  o  $k = 3$ .

Abbiamo quindi ottenuto due possibili soluzioni:

- $k = -2$  ovvero  $A_3 = (1, -2)$ .
- $k = 3$  ovvero  $A_3 = (1, 3)$ .

□

**Esercizio 1.16** (v. 12.23). *Siano  $A = (0, -1, 0)$ ,  $B = (-2, 0, -3)$ ,  $C = (-1, 0, -1)$  punti dello spazio.*

- a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici  $A, B, C$ .*
- b) *Stabilire se il punto  $D = (2, 2, 2)$  appartiene al piano contenente  $A, B, C$ .*

SOLUZIONE:

- a) L'area del parallelogramma di lati  $AB$  e  $AC$  è data dalla lunghezza del vettore  $AB \times AC$ . Poiché  $AB = (-2, 1, -3)$  e  $AC = (-1, 1, -1)$ , otteniamo

$$AB \times AC = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2i + j - k = (2, 1, -1) \Rightarrow |AB \times AC| = \sqrt{6}.$$

Infine l'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma:

$$Area(ABC) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

- b) Un modo consiste nel determinare il piano passante per i tre punti  $A, B, C$  il quale ha equazione

$$\pi : \begin{cases} x = -2t - s \\ y = -1 + t + s \\ z = -3t - s \end{cases} \Rightarrow 2x + y - z = -1$$

Il punto  $D$  non soddisfa l'equazione di  $\pi$ :  $4 + 2 - 2 \neq -1$ , quindi  $D$  non appartiene al piano contenente  $A, B, C$ .

□

**Esercizio 1.17** (12.19). *Calcolare il volume del parallelepipedo di lati  $u(1, 0, 0)$ ,  $v(-3, 1, 1)$  e  $w(-2, 2, 5)$ .*

SOLUZIONE:

Il volume del parallelepipedo è dato dal prodotto misto dei vettori che formano i lati del parallelepipedo. Cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale di  $v$  e  $w$ :

$$v \times w = (3, 13, -4)$$

Quindi

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |u \cdot (v \times w)| = |u \cdot v \times w| = |((1, 0, 0), (3, 13, -4))| = |3| = 3$$

Analogamente

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right| = |1 \cdot (5 - 2)| = 3$$

□

**Esercizio 1.18** (12.20). Siano  $P_1 = (1, -1, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0, -1)$ ,  $P_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ , e  $P_4 = (1, 2, 1)$  quattro punti nello spazio.

- Calcolare l'angolo tra i vettori  $\overrightarrow{P_1P_2}$  e  $\overrightarrow{P_2P_3}$ .
- Calcolare il volume del prisma con base il triangolo  $P_1P_2P_3$  e lato il segmento  $P_1P_4$ .

SOLUZIONE:

- Sia  $\vartheta$  l'angolo cercato, usiamo la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3})}{|\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\overrightarrow{P_2P_3}|}$$

Poichè

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, -1),$$

si ha

$$(\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_2P_3}) = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Quindi  $\cos(\vartheta) = 0$  e  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

- Il volume del prisma è metà del volume del parallelepipedo di lati  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\overrightarrow{P_1P_3}$  e  $\overrightarrow{P_1P_4}$ . Poichè

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \overrightarrow{P_1P_4} = (0, 3, 1)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} V &= \left| (\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}) \right| = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}) \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \left( (0, 1, -1), \left( 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}} \right) \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{8}{\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} V &= \left| (\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{8}{\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

□

**Esercizio 1.19** (12.22). Si considerino i piani  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  di equazioni:

$$\pi_1: 2x - y = 1, \quad \pi_2: x + y + z = 0, \quad \pi_3: x - 2z = 1.$$

- Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.
- Si trovi il piano  $\pi_4$  passante per l'origine e perpendicolare alla retta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ .
- Si determini l'area del triangolo di vertici  $A, B, C$ , con  $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ ,  $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$ ,  $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$ .

SOLUZIONE:

a) Mettiamo a sistema i tre piani:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ x + 2x - 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \\ z = -\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = A = \left( \frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7} \right).$$

b) Calcoliamo la retta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

La retta ha direzione  $(1, 2, -3)$ , quindi un piano ortogonale a  $r$  ha equazione del tipo  $x + 2y - 3z = d$ . Imponendo il passaggio per l'origine otteniamo  $d = 0$ . Infine il piano cercato è

$$\pi_4 : x + 2y - 3z = 0$$

c) Abbiamo già trovato  $A$  nel punto a). Analogamente mettendo a sistema gli altri piani otteniamo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \\ z = -\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = B = \left( \frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7} \right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = C = \left( \frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7} \right).$$

Di conseguenza

$$\overrightarrow{AC} = \left( \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7} \right), \quad \overrightarrow{BC} = \left( \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7} \right). \Rightarrow \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \left( -\frac{1}{7}, 0, -\frac{2}{7} \right)$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} \left| \left( -\frac{1}{7}, 0, -\frac{2}{7} \right) \right| = \frac{1}{14} \sqrt{5}$$

□