

Esercizio 7.1. [8.1] Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, 2x_3)$. Stabilire se T è lineare.

Esercizio 7.2. [8.2] Verificare che la funzione determinante definita sull'insieme delle matrici $M_{2 \times 2}$ a valori in \mathbb{R} non è lineare.

Esercizio 7.3. [8.3] Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(1, 2) = (3, 0), \quad T(2, 7) = (4, 5), \quad T(1, 5) = (1, 4)$$

Esercizio 7.4. [8.4] Stabilire se esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(1, 2) = (3, 0), \quad T(2, 4) = (5, 0), \quad T(0, 1) = (1, 1)$$

Esercizio 7.5. [8.5] Determinare una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(1, 1) = (1, 2), \quad T(0, 2) = (4, 4)$$

Esercizio 7.6. [v. 8.6] Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$.

- Verificare che T è lineare.
- Determinare Nucleo e Immagine di T .
- Determinare $T(1, 2)$.

Esercizio 7.7. [v. 8.7] Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di \mathbb{R}^2 nel seguente modo: $T(e_1) = (1, 2, 1)$, $T(e_2) = (1, 0, -1)$.

- Esplicitare $T(x, y)$.
- Stabilire se $(3, 4, 1)$ appartiene a $\text{Im}(T)$.

Esercizio 7.8. [8.11] Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_2, x_2 + 3x_3, -x_1 - x_2)$$

- Trovare una base del nucleo $N(T)$ e una base dell'immagine $\text{Im}(T)$.
- Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.
- Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1 - k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T ?

Esercizio 7.9. [8.12] Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2, x_2 + kx_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$$

- Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro reale k .
- Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3, 3, 1, 0)$ appartiene all'immagine di T .

Esercizio 7.10. [8.17]

- Verificare che le relazioni

$$T(1, 1, 1) = (-1, 2), \quad T(0, 1, 1) = (0, 4), \quad T(1, 1, 0) = (2, 1)$$

definiscono un'unica applicazione lineare T da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2 .

- Scrivere la matrice rappresentativa di T rispetto alla basi canoniche.
- Trovare basi di $\text{Im}(T)$ e di $N(T)$.

Esercizio 7.11. [8.30] Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $T(x) = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Stabilire se T invertibile.
- Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T .

Esercizio 7.12. [8.16] Si consideri il seguente endomorfismo di \mathbb{R}^4

$$T(x, y, z, w) = (-x + z, 2y, x - 2z, w)$$

- Si determinino le dimensioni di immagine e nucleo di T e si stabilisca se T è invertibile.

b) Si determini l'inversa T^{-1} .

Esercizio 7.13. [8.34] Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, 3x - z, 2x - y + z)$$

e sia $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(x, y, z) = (x + z, x - y + z, y)$$

Si trovino le dimensioni dei nuclei delle applicazioni lineari $g \circ f$ e $f \circ g$.

Esercizio 7.14. [8.32] Si consideri la funzione lineare $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali T è iniettiva o suriettiva.

b) Si calcoli la dimensione del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $\text{Im}(T)$ al variare di k .

Esercizio 7.15. [8.15] Sia T l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3).$$

a) Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche e determinare il nucleo e l'immagine di T .

b) Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k , tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.

Esercizio 7.16. [8.9] Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare l'immagine attraverso T del piano $\pi : x + 2y = 0$.

Esercizio 7.17. [8.22] Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y) = (kx + 4y, x + ky, y)$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro k .

Esercizio 7.18. [8.23] Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = M(T) = \begin{bmatrix} 5k & 1 & 3k+4 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & k+5 & 1 & k+3 \\ 2k^2 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

a) Discutere l'iniettività e suriettività di T al variare del parametro reale k .

b) Determinare la dimensione di immagine e nucleo di T al variare di k .

Esercizio 7.19. [8.24] Sia $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y, z, w) = (-x - y + z + w, -x + 2y - z, -x + y + 3z - 3w)$$

a) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

b) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^3$.

c) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $N(T) \subseteq \mathbb{R}^4$.

Esercizio 7.20. [8.26] Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x - y, 2x - 3y)$$

a) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.

b) Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T .

Esercizio 7.21. [8.53] Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di \mathbb{R}^3 . Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che:

$$T(e_1) = 3e_1 - e_2 + e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2T(e_1) + T(e_2)$$

a) Si calcoli la matrice associata a T rispetto ad \mathcal{E} .

b) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di T e stabilire se T è invertibile.