Cognome **Nome** **A**

Scrivere le risposte agli esercizi 1,2,4,5 negli spazi sottostanti.

1)

2)

4)

5)

1) Sia π_1 il piano contenente i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, -1, 1)$, $C = (0, 0, 0)$ e π_2 il piano di equazione $x + y - z = 1$. Sia π_3 il piano di equazione cartesiana $2x + ky + z = 0$.

1. Stabilire per quali valori di k la retta r intersezione dei piani π_1 e π_2 è perpendicolare al piano π_3.
2. Per il valore di k determinato in 1, trovare il punto di intersezione dei tre piani π_1, π_2, π_3.

2) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (0, 2, k, 1),\ \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, k),\ \mathbf{v}_3 = (0, 2, 1, 1).$$

1. Si trovino i valori del parametro reale k per i quali i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono indipendenti.
2. Fissato $k = 1/2$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

3) Dare la definizione di *rango* di una matrice. Dire quale è il legame tra rango e dimensione dei sottospazi generati dalle righe e dalle colonne della matrice. Illustrare i risultati mediante esempi numerici.

---

4) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo

$$T(x, y, z) = (x + y + 3z, x + 2y + 4z, -x - y - 5z, y - z).$$

1. Si trovi il nucleo di T.
2. Si trovino i valori di k per i quali il vettore $(0, 0, k, 1)$ appartiene all'immagine di T.
3. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$, e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si trovi la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(T)$.

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare con matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2+k & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & -2 & -2-k & 0 \end{bmatrix}$$

Si trovino i valori di k per quali f è diagonalizzabile, e, per $k = 2$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di f.

6) Scelti a piacere due spazi vettoriali V e V', fornire un esempio di una funzione lineare $f : V \to V'$ che sia iniettiva, ma non suriettiva, di una funzione lineare $g : V \to V'$ che sia suriettiva, ma non iniettiva, e di una funzione lineare $h : V \to V'$ che sia iniettiva e suriettiva.

Cognome **Nome** **B**

Scrivere le risposte agli esercizi 1,2,4,5 negli spazi sottostanti.

1)

2)

4)

5)

1) Sia π_1 il piano contenente i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (3, 2, -2)$, $C = (0, 0, 0)$ e π_2 il piano di equazione $x + y - z = 2$. Sia π_3 il piano di equazione cartesiana $2x + ky + z = 1$.

1. Stabilire per quali valori di k la retta r intersezione dei piani π_1 e π_2 è perpendicolare al piano π_3.
2. Per il valore di k determinato in 1, trovare il punto di intersezione dei tre piani π_1, π_2, π_3.

2) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, k, 0),\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, k),\ \mathbf{v}_3 = (1, 2, -1, 1).$$

1. Si trovino i valori del parametro reale k per i quali i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono indipendenti.
2. Fissato $k = 0$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

3) Come si definisce la *dimensione* di uno spazio vettoriale? Dare due esempi di spazi vettoriali di dimensione tre.

---

4) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, x - 2y + 3z, -x + y, -y + 3z).$$

1. Si trovi il nucleo di T.
2. Si trovino i valori di k per i quali il vettore $(0, k, -1, 0)$ appartiene all'immagine di T.
3. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$, e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si trovi la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$.

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare con matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1+k & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 2 & -1-k & 3 \end{bmatrix}$$

Si trovino i valori di k per i quali f è diagonalizzabile, e, per $k = 1$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di f.

6) Sia $f : V \to V$ una funzione lineare, e sia λ un autovalore di f. Come si definiscono la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ? Fornire un esempio nel quale tali molteplicità sono diverse.

Cognome **Nome** **C**

Scrivere le risposte agli esercizi 1,2,4,5 negli spazi sottostanti.

1)

2)

4)

5)

Geometria e algebra lineare – 21/1/2016 **C**

1) Sia π_1 il piano contenente i punti $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, -1, 0)$, $C = (0, 0, 0)$ e π_2 il piano di equazione $x - y - z = -1$. Sia π_3 il piano di equazione cartesiana $x + ky + 2z = 0$.

1. Stabilire per quali valori di k la retta r intersezione dei piani π_1 e π_2 è perpendicolare al piano π_3.
2. Per il valore di k determinato in 1, trovare il punto di intersezione dei tre piani π_1, π_2, π_3.

2) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, k),\ \mathbf{v}_2 = (k, 0, 1, -1),\ \mathbf{v}_3 = (1, 1, 2, -1).$$

1. Si trovino i valori del parametro reale k per i quali i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono indipendenti.
2. Fissato $k = 1$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

3) Cosa si può dire del determinante del *prodotto* di due matrici? E del determinante della *somma* di due matrici? Illustrare le risposte anche con degli esempi numerici.

---

4) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo

$$T(x, y, z) = (x - 2y + z, x + 2z, -x + 2y + 2z, 2y + 4z).$$

1. Si trovi il nucleo di T.
2. Si trovino i valori di k per i quali il vettore $(0, 0, -1, k)$ appartiene all'immagine di T.
3. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$, e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si trovi la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$.

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare con matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2+k & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & -6 & -2-k & -4 \end{bmatrix}$$

Si trovino i valori di k per quali f è diagonalizzabile, e, per $k = 2$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di f.

6) Si definiscano nucleo e immagine di una funzione lineare $f : V \to W$ e si enunci il Teorema della nullità più rango, illustrandolo con un esempio.

Cognome **Nome** **D**

Scrivere le risposte agli esercizi 1,2,4,5 negli spazi sottostanti.

1)

2)

4)

5)

Geometria e algebra lineare – 21/1/2016 **D**

1) Sia π_1 il piano di equazione $x+y-z=-1$ e π_2 il piano contenente i punti $A=(0,0,0)$, $B=(0,1,-1)$, $C=(-1,0,0)$. Sia π_3 il piano di equazione cartesiana $-2x+ky-z=2$.

1. Stabilire per quali valori di k la retta r intersezione dei piani π_1 e π_2 è perpendicolare al piano π_3.
2. Per il valore di k determinato in 1, trovare il punto di intersezione dei tre piani π_1, π_2, π_3.

2) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (-1,1,0,k), \ \mathbf{v}_2 = (k,0,1,2), \ \mathbf{v}_3 = (1,1,0,-1).$$

1. Si trovino i valori del parametro reale k per i quali i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono indipendenti.
2. Fissato $k=-1$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

3) Cosa si può dire dell'*invertibilità* del prodotto di due matrici? Illustrare la risposta anche con degli esempi numerici.

---

4) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo

$$T(x,y,z) = (x+y-z, x+4\,y, -x-y+z, 3\,y+3\,z).$$

1. Si trovi il nucleo di T.
2. Si trovino i valori di k per i quali il vettore $(k,0,-2,0)$ appartiene all'immagine di T.
3. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)$, e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si trovi la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$.

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare con matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2+k & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 6 & 2-k & 4 \end{bmatrix}$$

Si trovino i valori di k per quali f è diagonalizzabile, e, per $k=-2$, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di f.

6) Si enunci il Teorema spettrale e lo si illustri con un esempio.