Esercizi di Ricerca Operativa

Simone Laierno

12 aprile 2014

Indice

Introduzione

Questa è, o almeno si propone di essere, una raccolta degli esercizi proposti a lezione del corso Ricerca Operativa M tenuto dal prof. Silvano Martello all'interno del CdL di Ingegneria Informatica M dell'Università di Bologna.

Non ha pretese di esattezza, tutt'altro, ma spero sia d'aiuto a chi segue o seguirà il corso. **Qualsiasi errore, dubbio, correzione, ecc.** è più che bene accetto e può essere comunicato privatamente al mio contatto Facebook o al mio indirizzo **e-mail**: simonelaierno@gmail.com

Capitolo 2

31/03/2014

I problemi saranno posti in maniera leggermente diversa, cioè quella fornita sul pdf reperibile sul sito del docente al seguente link: `http://www.or.deis.unibo.it/staff_pages/martello/testi_esercizi_ottimizzazione.pdf`. Inoltre, anche se durante l'esercitazione non è stata trovata la soluzione dei problemi duali, dato che il metodo per individuarli è stato spiegato dal prof. nella lezione subito successiva, ho ritenuto opportuno e interessante cercarle io stesso e inserirle in questo eserciziario. A maggior ragione, le soluzioni dei duali **potrebbero essere errate**, per cui chiedo ad ognuno di provare a rivederle e comunicarmi gli eventuali errori trovati. Inoltre, ho deciso - in maniera del tutto personale e arbitraria - di preporre la rappresentazione grafica alla risoluzione con tableau negli esercizi di ottimizzazione. L'unico motivo è che mi piace avere un'idea un po' più concreta di quello che sta succedendo sul piano geometrico.

2.1 Esercizio 1

Un'azienda chimica produce due tipi di composto, A e B, che danno lo stesso profitto, utilizzando una sostanza base della quale sono disponibili 8 quintali. Ogni tonnellata di composto (indipendentemente dal tipo) contiene un quintale di sostanza base. Il numero di tonnellate di composto A prodotto deve superare di almeno una unità il numero di tonnellate di composto B prodotto. Per problemi di stoccaggio non si possono produrre più di 6 tonnellate di composto A. Si associ la variabile x_1 al composto A e la variabile x_2 al composto B.

1. Definire il modello LP che determina la funzione di massimo profitto.
2. Porre il modello in forma standard e risolverlo con il metodo delle due fasi e la regola di Bland, introducendo il minimo numero di variabili artificiali. Dire esplicitamente qual è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile.
4. Costruire il duale del modello definito al punto 2 e ricavarne le soluzioni ottime.
5. Imporre il vincolo di interezza sulle variabili (supporre che non si possano produrre frazioni di tonnellate) e risolvere il problema con il metodo branch-and-bound. [*Questo punto non sarà analizzato perché in data di stesura del documento (04/04/2014) l'argomento non è ancora stato trattato dal prof*]

2.1.1 Modellizzazione

Si indichi con:

- x_1 il numero di tonnellate di composto A;
- x_2 il numero di tonnellate di composto B.

Lo scopo del nostro problema è di massimizzare i profitti ottenuti dalla produzione. Anche se non siamo a conoscenza degli esatti profitti dati da ogni prodotto, sappiamo che entrambi i composti portano allo stesso profitto. Possiamo quindi esprimere così la funzione di profitto:

$$\max z = x_1 + x_2$$

Modelliamo ora i vincoli espressi dal problema. Il modello matematico può essere quindi così riassunto (sono state apportate semplificazione algebriche):

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq x_2 + 1 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.1.2 Problema in forma grafica

In figura 2.1 è rappresentato graficamente il problema presentato. In giallo è rappresentato il politopo P e sono stati chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i suoi cinque quattro, i quali sappiamo corrispondere ognuno ad una BFS. Il gradiente della funzione obiettivo vale

$$\nabla(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (1, 1)$$

Il politopo P è, ovviamente, limitato nella direzione del gradiente (si fa notare che finora P è sempre limitato in ogni direzione, quindi qualsiasi direzione avesse il gradiente non ci sarebbero problemi).

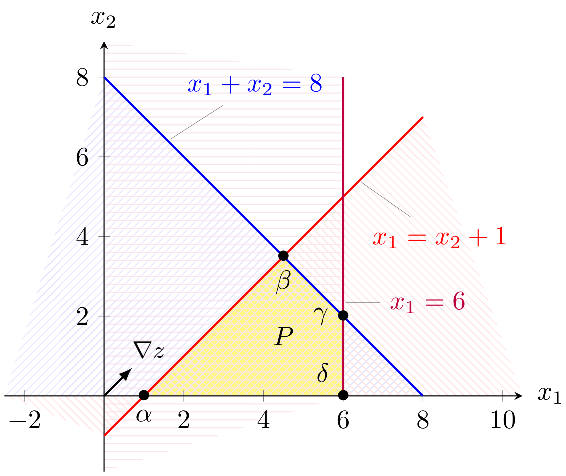

Figura 2.1: Rappresentazione cartesiana del problema di programmazione lineare

Possiamo osservare che anche solo dal grafico è facilmente intuibile dove si troverà la soluzione ottima. Il gradiente ∇z è **perpendicolare** allo spigolo $\overline{\beta\gamma}$, da ciò potremmo dedurre che non esiste una soluzione ottima, ma che ve ne sono infinite e tutte posizionate su questo spigolo. Riprenderemo questa considerazione in seguito, dopo aver risolto il problema con il metodo del simplesso.

2.1.3 Forma standard

Ricordiamo che un problema di **programmazione lineare in forma standard** è nella forma (matriciale):

$$\begin{aligned} &\min c'x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Trasformiamo la funzione obiettivo z in φ tale che:

$$\varphi = -z = -x_1 - x_2$$

Quindi introduciamo una **variabile slack** per ogni disequazione con simbolo $\leq$ e una **variabile surplus** per ogni disequazione con simbolo $\geq$. Otterremo infine:

$$\begin{array}{llllllll} \min \varphi = & -x_1 & -x_2 & & & & \\ \text{s.t.} & +x_1 & +x_2 & +\boldsymbol{x_3} & & & =8 \\ & +x_1 & -x_2 & & -\boldsymbol{x_4} & & =1 \\ & +x_1 & & & & +\boldsymbol{x_5} & =6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

2.1.4 Risoluzione tramite tableau

	$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\overline{c_j}$	0	-1	-1	0	0	0
R_1	8	1	1	1	0	0
R_2	1	1	-1	0	-1	0
R_3	6	1	0	0	0	1

Tabella 2.1: Tableau iniziale.

In tabella 2.1 il tableau ricavato dal nostro problema. A differenza dei precedenti esercizi, la fortuna non è dalla nostra parte e non abbiamo nessuna sottomatrice identità a disposizione da utilizzare come base ammissibile. Si potrebbe *erroneamente* pensare che per ottenere una BFS sia sufficiente operare $R_2 \leftarrow -1 \cdot R_2$. Ma si fa subito notare che così facendo otterremo come base:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{A_3, A_4, A_5\} \\ x &= (0, 0, 8, 1, 6) \end{aligned}$$

Questa **non è una BFS** in quanto ricade *all'esterno* del politopo P. Per ottenere una BFS di partenza, quindi, ricorriamo alla **fase 1 del metodo del simplesso**.

Fase 1 - aggiunta di variabili artificiali

Per ottenere una BFS aggiungiamo un numero $n' \leq m$ di variabili artificiali tali da riuscire ad ottenere una BFS nel nuovo problema con m vincoli e $n + n'$ variabili. Ipoteticamente, potremmo aggiungere sempre $n' = m$ variabili artificiali tali da formare già loro una sottomatrice identità nel tableau, ma tale metodo risulterebbe molto sconveniente nel caso in cui i vincoli e le variabili fossero centinaia o migliaia. Inoltre, ma non meno importante, la traccia dell'esercizio richiede esplicitamente di **introdurre il minore numero di variabili artificiali**.

Per ridurre al minimo le variabili artificiali $x_i^a, \quad i = 1, \cdots, n'$ è sufficiente aggiungerne una per ogni colonna della matrice identità mancante nel tableau originale. Nel nostro caso manca solo la seconda colonna e sarà quella che introdurremo con l'*unica* variabile artificiale x^a, trasformando il secondo vincolo in:

$$x_1 - x_2 - x_4 + x^a = 1$$

Il nostro scopo, dopo l'introduzione di x^a, sarà quello di **eliminarla** dalla base. Per far ciò bisogna fare in modo che questa valga zero e quindi introduciamo, a tale scopo, una nuova funzione obiettivo da minimizzare ψ tale che:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n'} x_i^a = x^a$$

Scriviamo il nuovo tableau in tabella 2.2 e applichiamo il simplesso per ottimizzare la nostra funzione ψ. Abbiamo una sottomatrice identità formata dalla base:

		$-\psi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	0	0	0	0	0	0	1
R_1	x_3	8	1	1	1	0	0	0
R_2	x^a	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	6	1	0	0	0	1	0

Tabella 2.2: Nuovo tableau con la variabile artificiale x^a.

$$\mathcal{B} = A_3, A_6, A_5$$

Per avere a avere a disposizione i valori delle coordinate della BFS del nuovo problema, è necessario che:

$$y_{ij} = 0 \quad \forall i, j : A_j \in \mathcal{B}, i \neq j$$

Condizione vera per ogni valore tranne y_{06} che provvediamo ad annullare tramite l'operazione elementare di riga:

$$R_0 \leftarrow R_0 - R_2$$

Nel nuovo tableau in figura 2.3 faremo pivoting sull'unica colonna con $\overline{c_j} < 0$, cioè su A_1. Per scegliere su quale elemento fare **pivoting**, dobbiamo ottenere il valore di $y_{\ell 1}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i1} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 1}}$$

Perciò, operando con gli elementi nel tableau:

$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{8}{1}, \frac{1}{1}, \frac{6}{1}\right) = \frac{1}{1} = \frac{y_{20}}{\boldsymbol{y_{21}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{21} (cerchiato in tabella). Il nostro scopo è ora far comparire uno 0 nella colonna dell'elemento pivot in tutte le righe tranne quella in cui si trova l'elemento pivot e far comparire un 1 in quest'ultima. Poiché $y_{21} = 1$ non c'è nulla da fare su R_2. Applichiamo le

		$-\psi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	-1	-1	1	0	1	0	0
R_1	x_3	8	1	1	1	0	0	0
R_2	x^a	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	6	1	0	0	0	1	0

Tabella 2.3: Pivoting su $y_2 1$. A_1 entra in base e A_6 esce.

operazioni elementari di riga al nostro tableau come segue:

$$R_0 \leftarrow R_0 + R_2;$$
$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2;$$
$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2.$$

Il nostro nuovo tableau diventa quindi quello in tabella 2.4. Siamo giunti alla soluzione ottima,

		$-\psi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	0	0	0	0	0	0	1
R_1	x_3	7	0	2	1	1	0	-1
R_2	x_1	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	5	0	1	0	1	1	-1

Tabella 2.4: Secondo tableau. Vertice $\alpha(1,0)$

essendo $\overline{c_j} > 0 \quad \forall j$. Inoltre la variabile artificiale x^a non è più in base. La nuova base e la nuova soluzione sono:

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_1, A_5\}$$
$$x = (1, 0, 7, 0, 5, 0)$$

Siamo nel vertice $\alpha(1,0)$ e quindi in una BFS da cui possiamo partire per la **fase 2** del metodo del simplesso.