Esercizi di Ricerca Operativa

Simone Laierno

14 aprile 2014

Indice

Introduzione

Questa è, o almeno si propone di essere, una raccolta degli esercizi proposti a lezione del corso Ricerca Operativa M tenuto dal prof. Silvano Martello all'interno del CdL di Ingegneria Informatica M dell'Università di Bologna.

Non ha pretese di esattezza, tutt'altro, ma spero sia d'aiuto a chi segue o seguirà il corso. **Qualsiasi errore, dubbio, correzione, ecc.** è più che bene accetto e può essere comunicato privatamente al mio contatto Facebook o al mio indirizzo **e-mail**: simonelaierno@gmail.com

Capitolo 1

18/03/2014

1.1 Esercizio 1

Sia dato - in linguaggio naturale - il seguente problema di ottimizzazione:

1. Un'azienda realizza due tipi di prodotti X e Y;
2. Il profitto di 1T di prodotto Y è doppio di quello di 1T di prodotto X;
3. La produzione di 1T di qualsiasi prodotto richiede 2 ore;
4. Non si può comunque produrre per più di 9 ore;
5. Non si possono produrre più di 2T di Y;
6. La produzione di X non può superare di più di una tonnellata la produzione di Y;

Si modelli il problema come un problema di programmazione lineare, lo si porti in forma standard, si realizzi una rappresentazione grafica del problema e si ottimizzi la funzione di profitto attraverso il **metodo del simplesso** affinché **si ottenga il massimo profitto dalla produzione dei prodotti** nel rispetto dei vincoli assegnati. Si utilizzi la *regola di Dantzig* per scegliere le basi su cui fare pivot.

1.1.1 Modellizzazione

Si indichi con:

- x_1 il numero di tonnellate di prodotto X;
- x_2 il numero di tonnellate di prodotto Y.

Lo scopo del nostro problema è di massimizzare i profitti ottenuti dalla produzione. Anche se non siamo a conoscenza degli esatti profitti dati da ogni prodotto, abbiamo comunque a disposizione la relazione data dalla proposizione 2, cioè la variabile x_2 rende il doppio della variabile x_1. Possiamo quindi esprimere così la funzione di profitto:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

Modelliamo ora i vincoli espressi dal problema.

Le relazione 3 e 4 ci impongono di non produrre per più di 9 ore, considerando che ogni tonnellata di prodotto richiede 2 ore per essere prodotta. Perciò il vincolo sarà espresso come:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 9$$

La relazione 5 è molto semplice, indica semplicemente che non potremo produrre più di due tonnellate di prodotto Y:

$$x_2 \leq 2$$

L'ultima relazione (6) ci impone un limite superiore alla produzione del prodotto X, che non deve superare di più di una tonnellata la produzione del prodotto Y. Perciò:

$$x_1 \leq x_2 + 1$$

Infine imponiamo il vincolo, implicito, che la produzione non può essere negativa:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il modello matematico può essere quindi così riassunto:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } \ 2x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq x_2 + 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.1.2 Problema in forma grafica

In figura 1.1 nella pagina seguente è rappresentato graficamente il problema presentato. In giallo è rappresentato il politopo P e sono stati chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ i suoi cinque vertici, i quali sappiamo corrispondere ognuno ad una BFS. Inoltre in figura è riportato il verso del gradiente della funzione obiettivo. Ricordiamo che è necessario che il politopo P sia limitato nella direzione del gradiente o, più precisamente, che sia limitato nella direzione opposta al gradiente dopo aver trasformato la funzione obiettivo in una funzione di minimo. Ovviamente i due casi sono gli stessi, basti osservare che il problema è espresso equivalentemente dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \min \varphi = -z &= -x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

I gradienti delle due funzioni z e φ sono perciò:

$$\begin{aligned} \nabla(z) &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (1, 2) \\ \nabla(\varphi) &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -\nabla(z) = (-1, -2) \end{aligned}$$

I due vettori sono ovviamente uno l'opposto dell'altro e di conseguenza il gradiente di z cresce dove decresce quello di φ. I problemi sono quindi equivalenti.

1.1.3 Forma standard

Ricordiamo che un problema di **programmazione lineare in forma standard** è nella forma (matriciale):

$$\begin{aligned} \min c'x& \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Cioè, la funzione obiettivo deve essere sotto forma di minimo (il che è molto semplice, dato che basta moltiplicarla per -1), i vincoli devono essere tutti espressi sotto forma di *equazioni* e tutte le variabili devono essere positive. A tal scopo introduciamo una **variabile slack** per ogni disequazione con simbolo $\leq$.

$$\begin{array}{lcccccl} \min \varphi = & -x_1 & -2x_2 & & & & \\ \text{s.t.} & -2x_1 & +2x_2 & +\boldsymbol{x_3} & & & =1 \\ & & +x_2 & & +\boldsymbol{x_4} & & =2 \\ & +x_1 & -x_2 & & & +\boldsymbol{x_5} & =1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

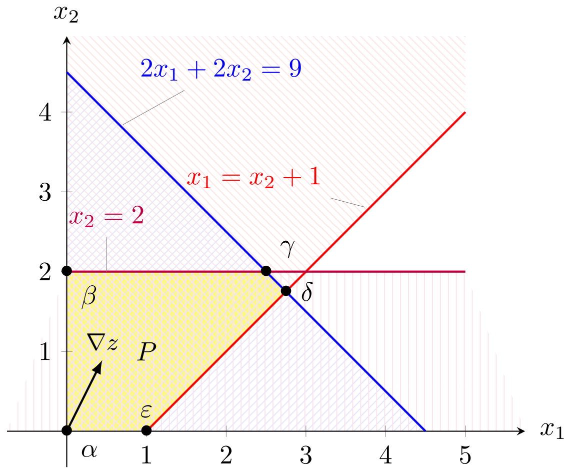

Figura 1.1: Rappresentazione cartesiana del problema di programmazione lineare

1.1.4 Risoluzione tramite tableau

Richiami (molto blandi) di teoria

Una **base** è determinata da una sottomatrice della matrice A dei vincoli, di dimensione $m \times n$, di n colonne linearmente indipendenti (nel **tableau** la matrice A è quella delimitata dalle due righe disegnate). Spesso l'individuazione delle colonne della prima base è semplice perché l'introduzione di variabili slack o di variabili surplus crea nella nostra matrice delle colonne con tutti 0 e solo un 1, il che rende probabile la formazione di una sottomatrice **identità**. Ricordiamo che scelta una base $\mathcal{B}$ tale che:

$$\mathcal{B} = A_{\beta(i)}; \quad i = 1, \ldots, m$$

ad essa è associata una **soluzione base** x tale che:

$$x = x_j; \quad j = 1, \ldots, n x_j = 0 \quad \forall j : A_j \notin \mathcal{B}$$

cioè il valore di una variabile non in base è 0. Questa è inoltre detta una soluzione **ammissibile** (**BFS**) se si trova nelle regione ammissibile determinata dai vincoli.

Al tableau aggiungeremo in alto una riga che indicherà il **costo relativo** $\overline{c_j}$ della colonna j-esima. Basti sapere che se facciamo in modo che $\forall A_j \in \mathcal{B} : \overline{c_j} = 0$, avremo nella prima colonna il guadagno $-\varphi$ della funzione obiettivo e in tutti gli altri avremo effettivamente i costi relativi. Per una spiegazione del perché di questo fenomeno magico, si rimanda al testo o alle slide del docente.

Si ricorda, infine, che la colonna b dei termini noti verrà inserita a sinistra. Non è indispensabile, ma una semplice convenzione.

Risoluzione

Per realizzare il **tableau** è sufficiente ricordare le regole base. La matrice A e la colonna b si riportano fedelmente sotto la loro consueta forma di matrice. Le variabili x_j sono i coefficienti della rispettiva variabile nella funzione obiettivo. Ovviamente per tutte le variabili slack e surplus, che sono state aggiunte artificialmente da noi, il loro valore è 0.

La prima colonna, una volta scelta una base che ha la forma di una matrice identità (e per ora assumeremo che sia sempre già pronta o facilmente costruibile) rappresenta banalmente la soluzione del sistema $Ix = b$ che altro non è che b stesso.

L'ultimo valore da inserire è quello di $-\varphi$, che varie a seconda delle colonne che assumeremo inizialmente come base. Se, come spesso accadrà, scegliamo tutte colonne associate a variabili slack o surplus, il loro valore non influirà sulla funzione obiettivo ed essendo tutte le altre variabili automaticamente nulle perché non sono in base, sarà nullo anche $-\varphi$. Il nostro caso attuale ricade in quest'ultimo descritto, ma se fosse stato altrimenti, avremmo semplicemente dovuto calcolare il valore di $-\varphi$ in base al valore delle variabili x_1 e x_2.

	$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\overline{c_j}$	0	-1	-2	0	0	0
x_3	9	2	2	1	0	0
x_4	2	0	1	0	1	0
x_5	1	1	-1	0	0	1

Tabella 1.1: Tableau iniziale. Vertice $\alpha(0,0)$

In tabella 1.1 il tableau definitivo ricavato dal nostro problema. Si noti che le ultime 3 colonne formano già una matrice identità, perciò le assumeremo come base.

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$$
$$x = (0, 0, 9, 2, 1)$$

Per sapere in che punto dello spazio originale a due dimensioni ci troviamo, è sufficiente guardare le variabili x_1 e x_2. É evidente che ci troviamo nell'origine, che appartiene al politopo P trovato in precedenza e che in particolare è il **vertice $\boldsymbol{\alpha}$**. Poiché non tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi, la nostra non è la BFS ottima e dobbiamo muoverci in una BFS migliore. Applicando la **regola di Dantzig**, facciamo entrare in base la colonna con il costo relativo maggiore in valore assoluto (cioè il più negativo). Nel nostro caso, prenderemo in considerazione quindi la colonna $\boldsymbol{A_2}$. Per scegliere su quale elemento fare **pivoting**, dobbiamo ottenere il valore di $y_{\ell 2}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i2}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 2}}$$

Perciò, operando con gli elementi nel tableau:

$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{9}{2}, \frac{2}{1}\right) = \frac{2}{1} = \frac{y_{20}}{\boldsymbol{y_{22}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{22} (cerchiato in tabella 1.2). Il nostro scopo è ora far comparire uno 0 nella colonna dell'elemento pivot in tutte le righe tranne quella in cui si trova l'elemento pivot e far comparire un 1 in quest'ultima.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	0	-1	-2	0	0	0
R_1	x_3	9	2	2	1	0	0
R_2	x_4	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	1	1	-1	0	0	1

Tabella 1.2: Pivoting su y_{22}. A_2 entra in base e A_4 esce.

Possiamo felicemente notare che $y_{22} = 1$, perciò nulla da fare su R_2. Se così non fosse stato sarebbe bastato moltiplicare R_2R per un coefficiente h. Algebricamente, per far comparire uno 0 in tutti gli altri elementi della colonna A_2, possiamo sostituire ad ogni riga la riga stessa sommata ad un'altra qualsiasi riga moltiplicata per un coefficiente k. Ovviamente la riga più comoda da sommare è la riga su cui stiamo facendo pivot R_ℓ, avendo un comodissimo 1 nella colonna interessata. Perciò possiamo riassumere che l'operazione consentita su ogni riga R_i e sulla riga di pivot R_ℓè:

$$R_\ell \leftarrow hR_l$$
$$R_i \leftarrow R_i + kR_\ell$$

Queste sono dette **operazioni elementari di riga**. Applicando le regole al nostra tableau, operiamo:

$$R_0 \leftarrow R_0 + 2R_2;$$
$$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2;$$
$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

Il nostro nuovo tableau diventa quindi quello in tabella 1.3.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	-1	0	0	2	0
R_1	x_3	5	2	0	1	-2	0
R_2	x_2	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	3	1	0	0	1	1

Tabella 1.3: Secondo tableau. Vertice $\beta(0, 2)$

Ora che A_4 è entrato in base e A_2 ne è uscito, abbiamo una nuova base $\mathcal{B}$ e una nuova BFS x:

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_2, A_5\}$$
$$x = (0, 2, 5, 0, 3)$$

Ci troviamo nel **vertice** $\boldsymbol{\beta}$, ma questa non è ancora la BFS ottima. Possiamo osservare, infatti, che la colonna A_1 presenta un $\overline{c_j}$ negativo e sarà necessario fare ulteriormente pivoting su un elemento di questa. Otteniamo quindi il valore di $y_{\ell 1}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i1} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 1}}$$
$$\vartheta_{\max} = \min \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{1} \right) = \frac{5}{2} = \frac{y_{10}}{\boldsymbol{y_{11}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{11} (cerchiato in tabella 1.4).

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	-1	0	0	2	0
R_1	x_3	5	2	0	1	-2	0
R_2	x_2	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	3	1	0	0	1	1

Tabella 1.4: Pivoting su y_{11}. A_1 entra in base e A_3 esce.

Questa volta dobbiamo lavorare anche sulla riga dell'elemento pivot, dividendola per 2:

$$R_1 \rightarrow \frac{1}{2} R_1$$

Partendo dal nuovo tableau in tabella 1.5 nella pagina successiva, facciamo pivoting sulle restanti righe in questo modo:

$$R_0 \rightarrow R_0 + R_1$$
$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

Il nostro nuovo tableau, quindi, è quello in tabella 1.6 nella pagina seguente. Notiamo che tutti

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	-1	0	0	2	0
R_1	x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	0
R_2	x_2	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	3	1	0	0	1	1

Tabella 1.5: Pivoting su y_{11}. R_1 divisa per 2.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	$\frac{13}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0
R_1	x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	0
R_2	x_2	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	2	1

Tabella 1.6: Terzo tableau. Vertice $\gamma\left(\frac{5}{2}, 2\right)$

i $\overline{c_j}$ sono non negativi, perciò ci troviamo nella **BFS ottima**. La base $\mathcal{B}$ e la soluzione x sono quindi:

$$\mathcal{B} = A_1, A_2, A_5$$
$$x = \left(\frac{5}{2}, 2, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

La soluzione ottima è quella del vertice $\boldsymbol{\gamma\left(\frac{5}{2}, 2\right)}$. Riassumendo, tutti i valori delle variabili in gioco sono i seguenti:

$$z = -\varphi = \frac{13}{2} = 6.5$$
$$x_1 = \frac{5}{2} = 2.5$$
$$x_2 = 2$$

1.1.5 Conclusione

La soluzione ottima consiste nel produrre 2.5T di prodotto X e 2T di prodotto Y, ottenendo un **profitto** pari a 6.5 volte quello di 1T di prodotto X.

1.2 Esercizio 2

Sia dato - in linguaggio naturale - il seguente problema di ottimizzazione:

1. Un'azienda chimica produce due composti, 1 e 2, composti da due sostanze chimiche A e B;
2. Un lotto di composto 1 richiede 3T di sostanza A e 3T di sostanza B;
3. Un lotto di composto 2 richiede 6T di sostanza A e 3T di sostanza B;
4. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 3 lotti di composto 1;
5. Si hanno a disposizione 12T di composto A e 9T di composto B;
6. Il profitto di un lotto di composto A è di 12 000€;

7. Il profitto di un lotto di composto B è di 15 000€.

Si modelli il problema come un problema di programmazione lineare, lo si porti in forma standard, si realizzi una rappresentazione grafica del problema e si ottimizzi la funzione di profitto attraverso il **metodo del simplesso** affinché **si ottenga il massimo profitto dalla produzione dei prodotti** nel rispetto dei vincoli assegnati. Si utilizzi la *regola di Bland* per scegliere le basi su cui fare pivot.

1.2.1 Modellizzazione

Si indichi con:

- x_1 il numero di lotti di composto 1;
- x_2 il numero di lotti di composto 2.

Lo scopo del nostro problema è di massimizzare i profitti ottenuti dalla produzione. Per comodità di rappresentazione, stabiliamo che la funzione di profitto z esprima il profitto in **migliaia di euro**:

$$\max z = 12x_1 + 15x_2$$

Modelliamo ora i vincoli espressi dal problema.
Dalle relazioni 3, 4 e 5 possiamo dedurre i seguenti vincoli:

- Servono 3T di prodotto A per produrre un lotto di composto 1 e 6T per produrre un lotto di composto 2. In tutto non possiamo utilizzare più di 12T di prodotto A.
- Servono 3T di prodotto B per produrre un lotto di composto 1 e 3T per produrre un lotto di composto 2. In tutto non possiamo utilizzare più di 9T di prodotto B.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

La relazione 4 è così facilmente esprimibile:

$$x_1 \leq 3$$

Infine imponiamo il vincolo, implicito, che la produzione non può essere negativa:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il modello matematico può essere quindi così riassunto (sono state apportate semplificazione algebriche):

$$\begin{aligned} \max z = {} & 12x_1 + 15x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.2.2 Problema in forma grafica

In figura 1.2 nella pagina successiva è rappresentato graficamente il problema presentato. In giallo è rappresentato il politopo P e sono stati chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i suoi quattro vertici, i quali sappiamo corrispondere ognuno ad una BFS. Il gradiente della funzione obiettivo vale

$$\nabla(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (12, 15)$$

Il politopo P è, ovviamente, limitato nella direzione del gradiente (si fa notare che finora P è sempre limitato in ogni direzione, quindi qualsiasi direzione avesse il gradiente non ci sarebbero problemi).

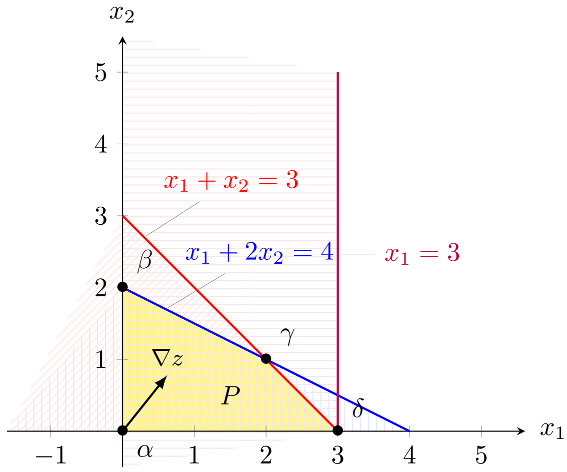

Figura 1.2: Rappresentazione cartesiana del problema di programmazione lineare

1.2.3 Forma standard

Ricordiamo che un problema di **programmazione lineare in forma standard** è nella forma (matriciale):

$$\begin{aligned} \min c'x& \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Trasformiamo la funzione obiettivo z in φ tale che:

$$\varphi = -\frac{z}{3} = -4x_1 - 5x_2$$

Quindi introduciamo una **variabile slack** per ogni disequazione con simbolo $\leq$. Otterremo infine:

$$\begin{array}{lcccccl} \min \varphi = & -4x_1 & -5x_2 & & & & \\ \text{s.t.} & +x_1 & +2x_2 & +\boldsymbol{x_3} & & & = 4 \\ & +x_1 & +x_2 & & +\boldsymbol{x_4} & & = 3 \\ & +x_1 & & & & +\boldsymbol{x_5} & = 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

1.2.4 Risoluzione tramite tableau

$$\begin{array}{c|c|ccccc} & -\varphi & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \overline{c_j} & 0 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Tabella 1.7: Tableau iniziale. Vertice $\alpha(0, 0)$

In tabella 1.7 il tableau ricavato dal nostro problema. Si noti che le ultime 3 colonne formano già una matrice identità, perciò le assumeremo come base.

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$$
$$x = (0, 0, 4, 3, 3)$$

Ci troviamo nell'origine, che appartiene al politopo P trovato in precedenza e che in particolare è il **vertice $\boldsymbol{\alpha}$**. Poiché non tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi, la nostra non è la BFS ottima e dobbiamo muoverci in una BFS migliore. Applicando la **regola di Bland**, facciamo entrare in base la colonna con l'indice minore. Nel nostro caso, prenderemo in considerazione quindi la colonna $\boldsymbol{A_1}$. Per scegliere su quale elemento fare **pivoting**, dobbiamo ottenere il valore di $y_{\ell 1}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i1}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 1}}$$

Perciò, operando con gli elementi nel tableau:

$$\vartheta_{\max} = \min \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{1} \right) = \frac{3}{1} = \frac{y_{20}}{\boldsymbol{y_{21}}} = \frac{y_{30}}{\boldsymbol{y_{31}}}$$

Abbiamo un **pareggio** tra gli elementi y_{21} e y_{31}.Seguendo la **regola di Bland**, sceglieremo come pivot l'elemento che farà uscire dalla base la variabile con l'**indice minore**[1]. Faremo quindi pivoting sull'elemento y_{21} (cerchiato in tabella 1.8) poiché farà uscire dalla base la variabile x_4. Il nostro scopo è ora far comparire uno 0 nella colonna dell'elemento pivot in tutte le righe tranne quella in cui si trova l'elemento pivot e far comparire un 1 in quest'ultima. Poiché $y_{21} = 1$ non c'è

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	0	-4	-5	0	0	0
R_1	x_3	4	1	2	1	0	0
R_2	x_4	3	1	1	0	1	0
R_3	x_5	3	1	0	0	0	1

Tabella 1.8: Pivoting su y_{21}. A_1 entra in base e A_4 esce.

nulla da fare su R_2. Applichiamo le operazioni elementari di riga al nostro tableau come segue:

$$\begin{aligned} R_0 &\leftarrow R_0 + 4R_2; \\ R_1 &\leftarrow R_1 - R_2; \\ R_3 &\leftarrow R_3 - R_2 \end{aligned}$$

Il nostro nuovo tableau diventa quindi quello in tabella 1.9.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	12	0	-1	0	4	0
R_1	x_3	1	0	1	1	-1	0
R_2	x_1	3	1	1	0	1	0
R_3	x_5	0	0	-1	0	-1	1

Tabella 1.9: Secondo tableau. Vertice $\delta(3, 0)$

Ora che A_1 è entrato in base e A_4 ne è uscito, abbiamo una nuova base $\mathcal{B}$ e una nuova BFS x:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{A_3, A_1, A_5\} \\ x &= (3, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

Ci troviamo nel **vertice $\boldsymbol{\delta}$**, ma questa non è ancora la BFS ottima. Inoltre, ci troviamo nel caso di una **base degenere**: la variabile x_5, che è in base, ha valore nullo. Questo non dovrebbe comunque

[1] Si fa notare che l'utilizzo della **regola di Bland** evita i casi di **loop** in presenza di basi degeneri durante l'algoritmo del simplesso. Questa proprietà è dimostrabile ma la dimostrazione esula dai nostri scopi.

crearci problemi in quanto stiamo applicando la regola di Bland. L'unica colonna ad avere un $\overline{c_j}$ negativo è A_2 ed è su questa che cercheremo l'elemento di pivot $y_{\ell 2}$:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i2}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 2}}$$
$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\right) = \frac{1}{1} = \frac{y_{10}}{\boldsymbol{y_{12}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{12} (cerchiato in tabella 1.10). Le operazione di pivoting saranno:

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	12	0	-1	0	4	0
R_1	x_3	1	0	1	1	-1	0
R_2	x_1	3	1	1	0	1	0
R_3	x_5	0	0	-1	0	-1	1

Tabella 1.10: Pivoting su y_{12}. A_2 entra in base e A_3 esce.

$$R_0 \to R_0 + R_1$$
$$R_2 \to R_2 - R_1$$
$$R_3 \to R_3 + R_1$$

Il nostro nuovo tableau, quindi, è quello in tabella 1.11. Notiamo che tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi,

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	13	0	0	1	3	0
R_1	x_2	1	0	1	1	-1	0
R_2	x_1	2	1	0	-1	2	0
R_3	x_5	1	0	0	1	-2	1

Tabella 1.11: Terzo tableau. Vertice $\gamma(2,1)$

perciò ci troviamo nella **BFS ottima**. La base $\mathcal{B}$ e la soluzione x sono quindi:

$$\mathcal{B} = A_2, A_1, A_5$$
$$x = (2, 1, 0, 0, 1)$$

La soluzione ottima è quella del vertice $\boldsymbol{\gamma(2,1)}$. Riassumendo, tutti i valori delle variabili in gioco sono i seguenti:

$$z = -3\varphi = -3(-13) = 39$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1$$

1.2.5 Conclusione

La soluzione ottima consiste nel produrre 2 lotti di composto 1 e 1 lotto di composto 2, ottenendo un **profitto** pari a 39 000€.

1.3 Esercizio 3

Sia dato - in linguaggio naturale - il seguente problema di ottimizzazione:

1. Un'azienda produce due tipi di composto A e B;
2. Il profitto del composto A è il doppio di quello del composto B;
3. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 2T di composto A;
4. Ogni tonnellata di ogni composto contiene 1Q di sostanza base;
5. Ho a disposizione 3Q di sostanza base;
6. 1T di composto A contiene 1Q di sostanza chimica;
7. 1T di composto B contiene 2Q di sostanza chimica;
8. Ho a disposizione 5Q di sostanza chimica.

Si modelli il problema come un problema di programmazione lineare, lo si porti in forma standard, si realizzi una rappresentazione grafica del problema e si ottimizzi la funzione di profitto attraverso il **metodo del simplesso** affinché **si ottenga il massimo profitto dalla produzione dei prodotti** nel rispetto dei vincoli assegnati. Si utilizzi la *regola di Dantzig* per scegliere le basi su cui fare pivot.

1.3.1 Modellizzazione

Si indichi con:

- x_1 il numero di tonnellate di composto 1;
- x_2 il numero di tonnellate di composto 2.

Lo scopo del nostro problema è di massimizzare i profitti ottenuti dalla produzione. Anche se non siamo a conoscenza degli esatti profitti dati da ogni prodotto, abbiamo comunque a disposizione la relazione data dalla proposizione 2, cioè la variabile x_1 rende il doppio della variabile x_2. Possiamo quindi esprimere così la funzione di profitto:

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

Modelliamo ora i vincoli espressi dal problema.
La relazione 3 è così facilmente esprimibile:

$$x_1 \leq 2$$

Dalle relazioni 4 e 5 possiamo dedurre il seguente vincolo:

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

Dalle relazioni 6, 7 e 8 possiamo dedurre il seguente vincolo:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

Infine imponiamo il vincolo, implicito, che la produzione non può essere negativa:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il modello matematico può essere quindi così riassunto (sono state apportate semplificazione algebriche):

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.3.2 Problema in forma grafica

In figura 1.3 è rappresentato graficamente il problema presentato. In giallo è rappresentato il politopo P e sono stati chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ i suoi cinque vertici, i quali sappiamo corrispondere ognuno ad una BFS. Il gradiente della funzione obiettivo vale

$$\nabla(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (2, 1)$$

Il politopo P è, ovviamente, limitato nella direzione del gradiente (si fa notare che finora P è sempre limitato in ogni direzione, quindi qualsiasi direzione avesse il gradiente non ci sarebbero problemi).

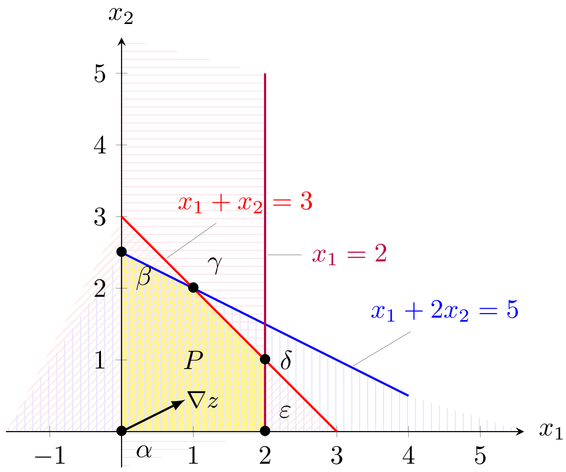

Figura 1.3: Rappresentazione cartesiana del problema di programmazione lineare

1.3.3 Forma standard

Ricordiamo che un problema di **programmazione lineare in forma standard** è nella forma (matriciale):

$$\begin{aligned} \min c'x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Trasformiamo la funzione obiettivo z in φ tale che:

$$\varphi = -z = -2x_1 - x_2$$

Quindi introduciamo una **variabile slack** per ogni disequazione con simbolo $\leq$. Otterremo infine:

$$\begin{array}{llllllll}
\min \varphi = & -2x_1 & -x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & +x_1 & & +\boldsymbol{x_3} & & & = 2 \\
 & +x_1 & +x_2 & & +\boldsymbol{x_4} & & = 3 \\
 & +x_1 & +2x_2 & & & +\boldsymbol{x_5} & = 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}$$

1.3.4 Risoluzione tramite tableau

In tabella 1.12 nella pagina seguente il tableau ricavato dal nostro problema. Si noti che le ultime 3 colonne formano già una matrice identità, perciò le assumeremo come base.

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$$
$$x = (0, 0, 2, 3, 5)$$

	$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\overline{c_j}$	0	-2	-1	0	0	0
x_3	2	1	0	1	0	0
x_4	3	1	1	0	1	0
x_5	5	1	2	0	0	1

Tabella 1.12: Tableau iniziale. Vertice $\alpha(0, 0)$

Ci troviamo nell'origine, che appartiene al politopo P trovato in precedenza e che in particolare è il **vertice $\boldsymbol{\alpha}$**. Poiché non tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi, la nostra non è la BFS ottima e dobbiamo muoverci in una BFS migliore. Applicando la **regola di Dantzig**, facciamo entrare in base la colonna il cui $\overline{c_j}$ è maggiore in valore assoluto. Nel nostro caso, prenderemo in considerazione quindi la colonna $\boldsymbol{A_1}$. Per scegliere su quale elemento fare **pivoting**, dobbiamo ottenere il valore di $y_{\ell 1}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i1}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 1}}$$

Perciò, operando con gli elementi nel tableau:

$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{1}\right) = \frac{2}{1} = \frac{y_{10}}{\boldsymbol{y_{11}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{11} (cerchiato in tabella 1.13). Il nostro scopo è ora far comparire uno 0 nella colonna dell'elemento pivot in tutte le righe tranne quella in cui si trova l'elemento pivot e far comparire un 1 in quest'ultima. Poiché $y_{11} = 1$ non c'è nulla da fare su R_1. Applichiamo

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	0	-2	-1	0	0	0
R_1	x_3	2	1	0	1	0	0
R_2	x_4	3	1	1	0	1	0
R_3	x_5	5	1	2	0	0	1

Tabella 1.13: Pivoting su y_{11}. A_1 entra in base e A_3 esce.

le operazioni elementari di riga al nostro tableau come segue:

$$\begin{aligned} R_0 &\leftarrow R_0 + 2R_2; \\ R_2 &\leftarrow R_2 - R_1; \\ R_3 &\leftarrow R_3 - R_1. \end{aligned}$$

Il nostro nuovo tableau diventa quindi quello in tabella 1.14.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	0	-1	2	0	0
R_1	x_1	2	1	0	1	0	0
R_2	x_4	1	0	1	-1	1	0
R_3	x_5	3	0	2	-1	0	1

Tabella 1.14: Secondo tableau. Vertice $\varepsilon(2, 0)$

Ora che A_1 è entrato in base e A_3 ne è uscito, abbiamo una nuova base $\mathcal{B}$ e una nuova BFS x:

$$\mathcal{B} = \{A_1, A_4, A_5\}$$
$$x = (2, 0, 0, 1, 3)$$

Ci troviamo nel **vertice ε**, ma questa non è ancora la BFS ottima. L'unica colonna ad avere un $\overline{c_j}$ negativo è A_2 ed è su questa che cercheremo l'elemento di pivot $y_{\ell 2}$:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i2}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 2}}$$
$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{1} = \frac{y_{20}}{\boldsymbol{y_{22}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{22} (cerchiato in tabella 1.15). Le operazioni di pivoting saranno:

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	0	-1	2	0	0
R_1	x_1	2	1	0	1	0	0
R_2	x_4	1	0	1	-1	1	0
R_3	x_5	3	0	2	-1	0	1

Tabella 1.15: Pivoting su y_{22}. A_2 entra in base e A_4 esce.

$$R_0 \to R_0 + R_2$$
$$R_3 \to R_3 - 2R_2$$

Il nostro nuovo tableau, quindi, è quello in tabella 1.16. Notiamo che tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi,

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	5	0	0	1	1	0
R_1	x_1	2	1	0	1	0	0
R_2	x_2	1	0	1	-1	1	0
R_3	x_5	1	0	0	1	-2	1

Tabella 1.16: Terzo tableau. Vertice $\delta(2, 1)$

perciò ci troviamo nella **BFS ottima**. La base $\mathcal{B}$ e la soluzione x sono quindi:

$$\mathcal{B} = A_2, A_1, A_5$$
$$x = (2, 1, 0, 0, 1)$$

La soluzione ottima è quella del vertice $\boldsymbol{\delta(2, 1)}$. Riassumendo, tutti i valori delle variabili in gioco sono i seguenti:

$$z = -\varphi = 5$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1$$

1.3.5 Conclusione

La soluzione ottima consiste nel produrre 2T di composto A e 1T di composto B ottenendo un **profitto** pari a 5 volte il profitto di 1T di composto B.

Capitolo 2

31/03/2014

I problemi saranno posti in maniera leggermente diversa, cioè quella fornita sul pdf reperibile sul sito del docente al seguente link: `http://www.or.deis.unibo.it/staff_pages/martello/testi_esercizi_ottimizzazione.pdf`. Inoltre, anche se durante l'esercitazione non è stata trovata la soluzione dei problemi duali, dato che il metodo per individuarli è stato spiegato dal prof. nella lezione subito successiva, ho ritenuto opportuno e interessante cercarle io stesso e inserirle in questo eserciziario. A maggior ragione, le soluzioni dei duali **potrebbero essere errate**, per cui chiedo ad ognuno di provare a rivederle e comunicarmi gli eventuali errori trovati. Inoltre, ho deciso - in maniera del tutto personale e arbitraria - di preporre la rappresentazione grafica alla risoluzione con tableau negli esercizi di ottimizzazione. L'unico motivo è che mi piace avere un'idea un po' più concreta di quello che sta succedendo sul piano geometrico.

2.1 Esercizio 1

Un'azienda chimica produce due tipi di composto, A e B, che danno lo stesso profitto, utilizzando una sostanza base della quale sono disponibili 8 quintali. Ogni tonnellata di composto (indipendentemente dal tipo) contiene un quintale di sostanza base. Il numero di tonnellate di composto A prodotto deve superare di almeno una unità il numero di tonnellate di composto B prodotto. Per problemi di stoccaggio non si possono produrre più di 6 tonnellate di composto A. Si associ la variabile x_1 al composto A e la variabile x_2 al composto B.

1. Definire il modello LP che determina la funzione di massimo profitto.
2. Porre il modello in forma standard e risolverlo con il metodo delle due fasi e la regola di Bland, introducendo il minimo numero di variabili artificiali. Dire esplicitamente qual è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile.
4. Costruire il duale del modello definito al punto 2 e ricavarne le soluzioni ottime.
5. Imporre il vincolo di interezza sulle variabili (supporre che non si possano produrre frazioni di tonnellate) e risolvere il problema con il metodo branch-and-bound. [*Questo punto non sarà analizzato perché in data di stesura del documento (04/04/2014) l'argomento non è ancora stato trattato dal prof*]

2.1.1 Modellizzazione

Si indichi con:

- x_1 il numero di tonnellate di composto A;
- x_2 il numero di tonnellate di composto B.

Lo scopo del nostro problema è di massimizzare i profitti ottenuti dalla produzione. Anche se non siamo a conoscenza degli esatti profitti dati da ogni prodotto, sappiamo che entrambi i composti portano allo stesso profitto. Possiamo quindi esprimere così la funzione di profitto:

$$\max z = x_1 + x_2$$

Modelliamo ora i vincoli espressi dal problema. Il modello matematico può essere quindi così riassunto (sono state apportate semplificazione algebriche):

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq x_2 + 1 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.1.2 Problema in forma grafica

In figura 2.1 è rappresentato graficamente il problema presentato. In giallo è rappresentato il politopo P e sono stati chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i suoi cinque quattro, i quali sappiamo corrispondere ognuno ad una BFS. Il gradiente della funzione obiettivo vale

$$\nabla(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (1, 1)$$

Il politopo P è, ovviamente, limitato nella direzione del gradiente (si fa notare che finora P è sempre limitato in ogni direzione, quindi qualsiasi direzione avesse il gradiente non ci sarebbero problemi).

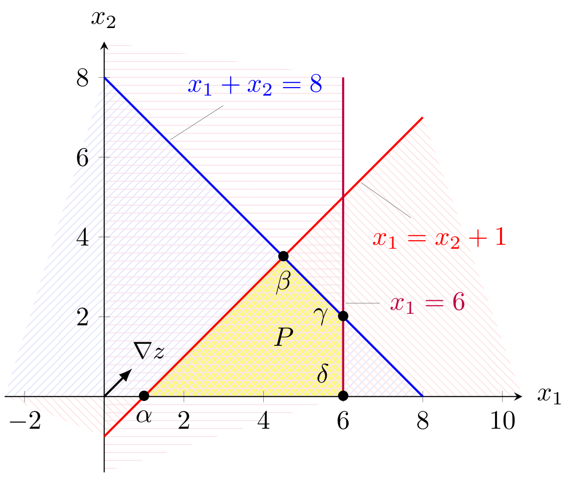

Figura 2.1: Rappresentazione cartesiana del problema di programmazione lineare

Possiamo osservare che anche solo dal grafico è facilmente intuibile dove si troverà la soluzione ottima. Il gradiente ∇z è **perpendicolare** allo spigolo $\overline{\beta\gamma}$, da ciò potremmo dedurre che non esiste una soluzione ottima, ma che ve ne sono infinite e tutte posizionate su questo spigolo. Riprenderemo questa considerazione in seguito, dopo aver risolto il problema con il metodo del simplesso.

2.1.3 Forma standard

Ricordiamo che un problema di **programmazione lineare in forma standard** è nella forma (matriciale):

$$\begin{aligned} \min c'x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Trasformiamo la funzione obiettivo z in φ tale che:

$$\varphi = -z = -x_1 - x_2$$

Quindi introduciamo una **variabile slack** per ogni disequazione con simbolo $\leq$ e una **variabile surplus** per ogni disequazione con simbolo $\geq$. Otterremo infine:

$$\begin{array}{lllllll} \min \varphi = & -x_1 & -x_2 & & & & \\ \text{s.t.} & +x_1 & +x_2 & +\boldsymbol{x_3} & & & = 8 \\ & +x_1 & -x_2 & & -\boldsymbol{x_4} & & = 1 \\ & +x_1 & & & & +\boldsymbol{x_5} & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

2.1.4 Risoluzione tramite tableau

	$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\overline{c_j}$	0	-1	-1	0	0	0
R_1	8	1	1	1	0	0
R_2	1	1	-1	0	-1	0
R_3	6	1	0	0	0	1

Tabella 2.1: Tableau iniziale.

In tabella 2.1 il tableau ricavato dal nostro problema. A differenza dei precedenti esercizi, la fortuna non è dalla nostra parte e non abbiamo nessuna sottomatrice identità a disposizione da utilizzare come base ammissibile. Si potrebbe *erroneamente* pensare che per ottenere una BFS sia sufficiente operare $R_2 \leftarrow -1 \cdot R_2$. Ma si fa subito notare che così facendo otterremo come base:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\} \\ x = (0, 0, 8, 1, 6) \end{aligned}$$

Questa **non è una BFS** in quanto ricade *all'esterno* del politopo P. Per ottenere una BFS di partenza, quindi, ricorriamo alla **fase 1 del metodo del simplesso**.

Fase 1 - aggiunta di variabili artificiali

Per ottenere una BFS aggiungiamo un numero $n' \leq m$ di variabili artificiali tali da riuscire ad ottenere una BFS nel nuovo problema con m vincoli e $n + n'$ variabili. Ipoteticamente, potremmo aggiungere sempre $n' = m$ variabili artificiali tali da formare già loro una sottomatrice identità nel tableau, ma tale metodo risulterebbe molto sconveniente nel caso in cui i vincoli e le variabili fossero centinaia o migliaia. Inoltre, ma non meno importante, la traccia dell'esercizio richiede esplicitamente di **introdurre il minore numero di variabili artificiali**.

Per ridurre al minimo le variabili artificiali $x_i^a, \quad i = 1, \cdots, n'$ è sufficiente aggiungerne una per ogni colonna della matrice identità mancante nel tableau originale. Nel nostro caso manca solo la seconda colonna e sarà quella che introdurremo con l'*unica* variabile artificiale x^a, trasformando il secondo vincolo in:

$$x_1 - x_2 - x_4 + x^a = 1$$

Il nostro scopo, dopo l'introduzione di x^a, sarà quello di **eliminarla** dalla base. Per far ciò bisogna fare in modo che questa valga zero e quindi introduciamo, a tale scopo, una nuova funzione obiettivo da minimizzare ψ tale che:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n'} x_i^a = x^a$$

Scriviamo il nuovo tableau in tabella 2.2 e applichiamo il simplesso per ottimizzare la nostra funzione ψ. Abbiamo una sottomatrice identità formata dalla base:

		$-\psi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	0	0	0	0	0	0	1
R_1	x_3	8	1	1	1	0	0	0
R_2	x^a	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	6	1	0	0	0	1	0

Tabella 2.2: Nuovo tableau con la variabile artificiale x^a.

$$\mathcal{B} = A_3, A_6, A_5$$

Per avere a avere a disposizione i valori delle coordinate della BFS del nuovo problema, è necessario che:

$$y_{ij} = 0 \quad \forall i, j : A_j \in \mathcal{B}, i \neq j$$

Condizione vera per ogni valore tranne y_{06} che provvediamo ad annullare tramite l'operazione elementare di riga:

$$R_0 \leftarrow R_0 - R_2$$

Nel nuovo tableau in figura 2.3 faremo pivoting sull'unica colonna con $\overline{c_j} < 0$, cioè su A_1. Per scegliere su quale elemento fare **pivoting**, dobbiamo ottenere il valore di $y_{\ell 1}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i1} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 1}}$$

Perciò, operando con gli elementi nel tableau:

$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{8}{1}, \frac{1}{1}, \frac{6}{1}\right) = \frac{1}{1} = \frac{y_{20}}{\boldsymbol{y_{21}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{21} (cerchiato in tabella). Il nostro scopo è ora far comparire uno 0 nella colonna dell'elemento pivot in tutte le righe tranne quella in cui si trova l'elemento pivot e far comparire un 1 in quest'ultima. Poiché $y_{21} = 1$ non c'è nulla da fare su R_2. Applichiamo le

		$-\psi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	-1	-1	1	0	1	0	0
R_1	x_3	8	1	1	1	0	0	0
R_2	x^a	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	6	1	0	0	0	1	0

Tabella 2.3: Pivoting su $y_2 1$. A_1 entra in base e A_6 esce.

operazioni elementari di riga al nostro tableau come segue:

$$R_0 \leftarrow R_0 + R_2;$$
$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2;$$
$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2.$$

Il nostro nuovo tableau diventa quindi quello in tabella 2.4. Siamo giunti alla soluzione ottima,

		$-\psi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	0	0	0	0	0	0	1
R_1	x_3	7	0	2	1	1	0	-1
R_2	x_1	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	5	0	1	0	1	1	-1

Tabella 2.4: Secondo tableau. Vertice $\alpha(1,0)$

essendo $\overline{c_j} > 0 \quad \forall j$. Inoltre la variabile artificiale x^a non è più in base. La nuova base e la nuova soluzione sono:

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_1, A_5\}$$
$$x = (1,0,7,0,5,0)$$

Siamo nel vertice $\alpha(1,0)$ e quindi in una BFS da cui possiamo partire per la **fase 2** del metodo del simplesso.

Fase 2 - Simplesso

Per questa fase useremo come tableau di partenza quello in tabella 2.4 sostituendo la funzione obiettivo fittizia ψ utilizzata in precedenza con la nostra vera funzione obiettivo φ. Manterremo la variabile artificiale (che si fa notare non cambia in alcun modo il nostro problema in quanto non faremo mai entrare in base) perché, come vedremo poi, il suo costo relativo finale sarà utile ai fini della soluzione del problema duale. Il tableau così ottenuto è quello in tabella 2.5 Per applicare il

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	0	-1	-1	0	0	0	0
R_1	x_3	7	0	2	1	1	0	-1
R_2	x_1	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	5	0	1	0	1	1	-1

Tabella 2.5: Secondo tableau. Vertice $\alpha(1,0)$ e funzione obiettivo φ.

simplesso, dobbiamo fare in modo che:

$$y_{ij} = 0 \quad \forall i,j : j \in \mathcal{B}, i \neq j$$

L'elemento y_{01} è l'unico a non essere nullo. Ovviamo al problema con l'operazione di riga:

$$R_0 \leftarrow R_0 + R_1$$

Otteniamo quindi il tableau in tabella 2.6 nella pagina seguente. Per fare pivoting sceglieremo la colonna A_2 in base alla regola di Bland (avremmo scelto la stessa colonna anche con la regola di

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	1	0	-2	0	-1	0	1
R_1	x_3	7	0	2	1	1	0	-1
R_2	x_1	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	5	0	1	0	1	1	-1

Tabella 2.6: Secondo tableau. Vertice $\alpha(1,0)$

Dantzig). Cerchiamo quindi l'elemento pivot $y_{\ell 2}$.

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i2}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 2}}$$
$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{1}\right) = \frac{7}{2} = \frac{y_{10}}{\boldsymbol{y_{12}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{12} (cerchiato in tabella 2.7). Le operazioni elementari di riga, **in**

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	1	0	-2	0	-1	0	1
R_1	x_3	7	0	2	1	1	0	-1
R_2	x_1	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	5	0	1	0	1	1	-1

Tabella 2.7: Terzo tableau. Vertice $\alpha(1,0)$

ordine, sono:

$$R_0 \leftarrow R_0 + R_1$$
$$R_1 \leftarrow \frac{R_1}{2}$$
$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1$$
$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

Otterremo il tableau in tabella 2.8.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	8	0	0	1	0	0	0
R_1	x_2	$\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{1}{2}$
R_2	x_1	$\frac{9}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
R_3	x_5	-$\frac{3}{2}$	0	0	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-$\frac{1}{2}$

Tabella 2.8: Quarto tableau. Vertice $\beta(\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$. A_2 entra in base al posto di A_3, che esce.

Siamo giunti alla soluzione ottima, essendo $\overline{c_j} > 0 \quad \forall j$. La nuova base e la nuova soluzione sono:

$$\mathcal{B} = \{A_2, A_1, A_5\}$$
$$x = (1, 0, 7, 0, 5, 0)$$

Siamo nel vertice $\beta(\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$ ed appartiene, come previsto durante l'analisi geometrica, allo spigolo $\overline{\beta\gamma}$. Il valore della soluzione ottima è $\varphi = -8$, proviamo ora a calcolare il valore della soluzione con il vertice $\gamma(6, 2)$:

$$\varphi(6, 2) = -6 - 2 = -8$$

Anche il vertice γ è una soluzione ottima del nostro problema. Da ciò possiamo desumere che l'intero spigolo $\overline{\beta\gamma}$ è composto da infinite soluzioni ottime. D'altronde, spostandoci lungo $\overline{\beta\gamma}$ avanzeremo in direzione perpendicolare al gradiente della funzione obiettivo e il valore della soluzione non può cambiare. Si fa notare infine che la nostra funzione obiettivo iniziale è:

$$z = -\varphi = 8$$

2.1.5 Soluzione del problema primale

La soluzione ottima consiste nel produrre 4.5T di composto A e 3.5T di composto B ottenendo un profitto pari a 8 volte quello di 1T di composto A (o di composto B, equivalentemente).

2.1.6 Costruzione del problema duale

Riportiamo, per comodità, il problema primale espresso in forma standard.

$$\begin{array}{llllllll}
\min \varphi = & -x_1 & -x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & +x_1 & +x_2 & +\boldsymbol{x_3} & & & = 8 \\
 & +x_1 & -x_2 & & -\boldsymbol{x_4} & & = 1 \\
 & +x_1 & & & & +\boldsymbol{x_5} & = 6 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}$$

Ricordiamo che le regole base per la creazione del problema duale (considereremo solo quelle in grassetto nel caso di problemi primali in forma standard):

- **Ad ogni vincolo corrisponde una variabile duale**;
- **Ad ogni vincolo di uguaglianza, la rispettiva variabile duale è una variabile libera**;
- Ad ogni vincolo di non minoranza corrisponde una variabile duale non negativa;
- **Ad ogni variabile non negativa nel primale corrisponde un vincolo con relazione di non maggioranza nel duale**;
- Ad ogni variabile libera nel primale corrisponde un vincolo di uguaglianza nel duale.

In dettaglio, ridefiniamo in questo modo il generico problema primale in forma standard:

$$\begin{aligned} \min c'x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Sia π il vettore delle variabili duali, il problema duale è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \pi' b \\ \pi' A \leq c' \\ \pi' \gtreqless 0 \end{aligned}$$

Ove, i vettori x, π, b, c e la matrice A sono:

$$x' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}$$
$$\pi' = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix}$$
$$b' = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$c' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da ciò, il corrispondente problema duale con la sua funzione obiettivo ξ:

$$\begin{array}{llllll}
\max \xi = & +8\pi_1 & +\pi_2 & +6\pi_3 & & \\
\text{s.t.} & +\pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & \leq -1 \\
 & +\pi_1 & -\pi_2 & & \leq -1 \\
 & +\pi_1 & & & \leq 0 \\
 & & -\pi_2 & & \leq 0 \\
 & & & +\pi_3 & \leq 0 \\
 & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \gtreqless 0
\end{array}$$

Per trovare la soluzione del problema duale non è necessario trasformarlo in forma standard e applicare il metodo del simplesso. Il tableau del problema primale sul quale abbiamo applicato il metodo del simplesso contiene tutte le informazioni per avere la soluzione del problema duale.

Richiami (sempre molto blandi) di teoria

Per ottenere dal tableau del problema primale la soluzione del problema duale, è sufficiente ricordare che il problema duale è ottenuto a partire dal **criterio di ottimalità**. Per questo motivo, il costo relativo nel tableau finale - corrispondente alla soluzione ottima - è così esprimibile:

$$\overline{c_j} = c_j - z_j = c_j - \pi' A_j \quad \forall j$$

Se consideriamo le colonne A_j corrispondenti alla base iniziale $\mathcal{B}_0$ di partenza del primo tableau - ricordando che è una matrice identità - possiamo ottenere:

$$\overline{c_j} = c_j - \pi_j \quad \forall j : A_j \in \mathcal{B}_0$$

Applicando un semplice passaggio algebrico:

$$\pi_j = c_j - \overline{c_j}$$

Ove c_j è il costo iniziale nel primo tableau e $\overline{c_j}$ il costo relativo nel tableau finale. Nel caso in cui abbiamo fatto uso di variabili artificiali e della fase 1 del metodo del simplesso, allora per tale variabile - il cui costo è $c_j = 0$ - vale:

$$\pi_j = -\overline{c_j}$$

È importante ricordare che bisogna utilizzare il primo tableau con le variabili artificiali ma con il vettore dei costi originario in cui le variabili artificiali hanno costo nullo.

2.1.7 Soluzione del problema duale

Riportiamo nuovamente i tableau iniziale e finale rispettivamente nelle tabella 2.9 nella pagina successiva e 2.10 nella pagina seguente. La base iniziale è $\mathcal{B}_1 = A_3, A_6, A_5$. Applicando delle

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	0	-1	-1	0	0	0	0
R_1	x_3	8	1	1	1	0	0	0
R_2	x^a	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	6	1	0	0	0	1	0

Tabella 2.9: Tableau iniziale.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	8	0	0	1	0	0	0
R_1	x_2	$\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{1}{2}$
R_2	x_1	$\frac{9}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
R_3	x_5	-$\frac{3}{2}$	0	0	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-$\frac{1}{2}$

Tabella 2.10: Tableau finale.

semplici sottrazioni, ricaviamo la soluzione del problema duale:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= c_3 - \overline{c_3} = -1\\ \pi_2 &= c_6 - \overline{c_6} = 0\\ \pi_3 &= c_5 - \overline{c_5} = 0\end{aligned}$$

Perciò, la soluzione del problema duale è il vettore;

$$\pi' = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Per verificare la correttezza dei calcoli, applichiamo la soluzione alla funzione obiettivo del problema duale:

$$\xi(-1, 0, 0) = 8(-1) + 0 + 6(0) = -8$$

Il risultato è, come atteso, lo stesso del problema primale.