Esercizi di Ricerca Operativa

Simone Laierno

13 aprile 2014

Indice

Introduzione

Questa è, o almeno si propone di essere, una raccolta degli esercizi proposti a lezione del corso Ricerca Operativa M tenuto dal prof. Silvano Martello all'interno del CdL di Ingegneria Informatica M dell'Università di Bologna.

Non ha pretese di esattezza, tutt'altro, ma spero sia d'aiuto a chi segue o seguirà il corso. **Qualsiasi errore, dubbio, correzione, ecc.** è più che bene accetto e può essere comunicato privatamente al mio contatto Facebook o al mio indirizzo **e-mail**: simonelaierno@gmail.com

Capitolo 1

18/03/2014

1.1 Esercizio 1

Sia dato - in linguaggio naturale - il seguente problema di ottimizzazione:

1. Un'azienda realizza due tipi di prodotti X e Y;
2. Il profitto di 1T di prodotto Y è doppio di quello di 1T di prodotto X;
3. La produzione di 1T di qualsiasi prodotto richiede 2 ore;
4. Non si può comunque produrre per più di 9 ore;
5. Non si possono produrre più di 2T di Y;
6. La produzione di X non può superare di più di una tonnellata la produzione di Y;

Si modelli il problema come un problema di programmazione lineare, lo si porti in forma standard, si realizzi una rappresentazione grafica del problema e si ottimizzi la funzione di profitto attraverso il **metodo del simplesso** affinché **si ottenga il massimo profitto dalla produzione dei prodotti** nel rispetto dei vincoli assegnati. Si utilizzi la *regola di Dantzig* per scegliere le basi su cui fare pivot.

1.1.1 Modellizzazione

Si indichi con:

- x_1 il numero di tonnellate di prodotto X;
- x_2 il numero di tonnellate di prodotto Y.

Lo scopo del nostro problema è di massimizzare i profitti ottenuti dalla produzione. Anche se non siamo a conoscenza degli esatti profitti dati da ogni prodotto, abbiamo comunque a disposizione la relazione data dalla proposizione 2, cioè la variabile x_2 rende il doppio della variabile x_1. Possiamo quindi esprimere così la funzione di profitto:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

Modelliamo ora i vincoli espressi dal problema.

Le relazione 3 e 4 ci impongono di non produrre per più di 9 ore, considerando che ogni tonnellata di prodotto richiede 2 ore per essere prodotta. Perciò il vincolo sarà espresso come:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 9$$

La relazione 5 è molto semplice, indica semplicemente che non potremo produrre più di due tonnellate di prodotto Y:

$$x_2 \leq 2$$

L'ultima relazione (6) ci impone un limite superiore alla produzione del prodotto X, che non deve superare di più di una tonnellata la produzione del prodotto Y. Perciò:

$$x_1 \leq x_2 + 1$$

Infine imponiamo il vincolo, implicito, che la produzione non può essere negativa:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il modello matematico può essere quindi così riassunto:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\ \ 2x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq x_2 + 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.1.2 Problema in forma grafica

In figura 1.1 nella pagina seguente è rappresentato graficamente il problema presentato. In giallo è rappresentato il politopo P e sono stati chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ i suoi cinque vertici, i quali sappiamo corrispondere ognuno ad una BFS. Inoltre in figura è riportato il verso del gradiente della funzione obiettivo. Ricordiamo che è necessario che il politopo P sia limitato nella direzione del gradiente o, più precisamente, che sia limitato nella direzione opposta al gradiente dopo aver trasformato la funzione obiettivo in una funzione di minimo. Ovviamente i due casi sono gli stessi, basti osservare che il problema è espresso equivalentemente dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \min \varphi &= -z = -x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

I gradienti delle due funzioni z e φ sono perciò:

$$\begin{aligned} \nabla(z) &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (1, 2) \\ \nabla(\varphi) &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\nabla(z) = (-1, -2) \end{aligned}$$

I due vettori sono ovviamente uno l'opposto dell'altro e di conseguenza il gradiente di z cresce dove decresce quello di φ. I problemi sono quindi equivalenti.

1.1.3 Forma standard

Ricordiamo che un problema di **programmazione lineare in forma standard** è nella forma (matriciale):

$$\begin{aligned} \min c'x& \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Cioè, la funzione obiettivo deve essere sotto forma di minimo (il che è molto semplice, dato che basta moltiplicarla per -1), i vincoli devono essere tutti espressi sotto forma di *equazioni* e tutte le variabili devono essere positive. A tal scopo introduciamo una **variabile slack** per ogni disequazione con simbolo $\leq$.

$$\begin{array}{lllllll} \min \varphi = & -x_1 & -2x_2 & & & & \\ \text{s.t.} & -2x_1 & +2x_2 & +\boldsymbol{x_3} & & & =1 \\ & & +x_2 & & +\boldsymbol{x_4} & & =2 \\ & +x_1 & -x_2 & & & +\boldsymbol{x_5} & =1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

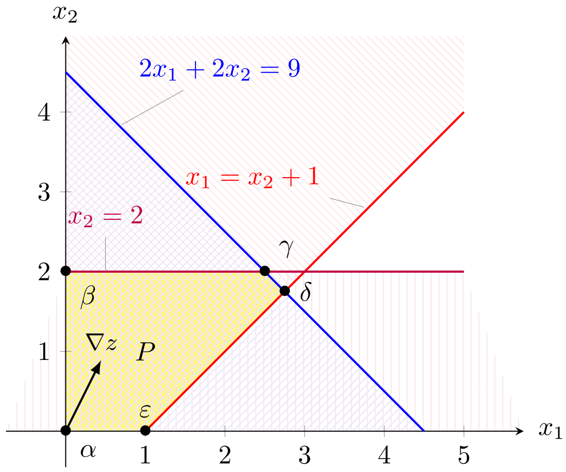

Figura 1.1: Rappresentazione cartesiana del problema di programmazione lineare

1.1.4 Risoluzione tramite tableau

Richiami (molto blandi) di teoria

Una **base** è determinata da una sottomatrice della matrice A dei vincoli, di dimensione $m \times n$, di n colonne linearmente indipendenti (nel **tableau** la matrice A è quella delimitata dalle due righe disegnate). Spesso l'individuazione delle colonne della prima base è semplice perché l'introduzione di variabili slack o di variabili surplus crea nella nostra matrice delle colonne con tutti 0 e solo un 1, il che rende probabile la formazione di una sottomatrice **identità**. Ricordiamo che scelta una base $\mathcal{B}$ tale che:

$$\mathcal{B} = A_{\beta(i)}; \quad i = 1, \dots, m$$

ad essa è associata una **soluzione base** x tale che:

$$x = x_j; \quad j = 1, \dots, n x_j = 0 \forall j : A_j \notin \mathcal{B}$$

cioè il valore di una variabile non in base è 0. Questa è inoltre detta una soluzione **ammissibile** (**BFS**) se si trova nelle regione ammissibile determinata dai vincoli.

Al tableau aggiungeremo in alto una riga che indicherà il **costo relativo** $\overline{c_j}$ della colonna j-esima. Basti sapere che se facciamo in modo che $\forall A_j \in \mathcal{B} : \overline{c_j} = 0$, avremo nella prima colonna il guadagno $-\varphi$ della funzione obiettivo e in tutti gli altri avremo effettivamente i costi relativi. Per una spiegazione del perché di questo fenomeno magico, si rimanda al testo o alle slide del docente.

Si ricorda, infine, che la colonna b dei termini noti verrà inserita a sinistra. Non è indispensabile, ma una semplice convenzione.

Risoluzione

Per realizzare il **tableau** è sufficiente ricordare le regole base. La matrice A e la colonna b si riportano fedelmente sotto la loro consueta forma di matrice. Le variabili x_j sono i coefficienti della rispettiva variabile nella funzione obiettivo. Ovviamente per tutte le variabili slack e surplus, che sono state aggiunte artificialmente da noi, il loro valore è 0.

La prima colonna, una volta scelta una base che ha la forma di una matrice identità (e per ora assumeremo che sia sempre già pronta o facilmente costruibile) rappresenta banalmente la soluzione del sistema $Ix = b$ che altro non è che b stesso.

L'ultimo valore da inserire è quello di $-\varphi$, che varie a seconda delle colonne che assumeremo inizialmente come base. Se, come spesso accadrà, scegliamo tutte colonne associate a variabili slack o surplus, il loro valore non influirà sulla funzione obiettivo ed essendo tutte le altre variabili automaticamente nulle perché non sono in base, sarà nullo anche $-\varphi$. Il nostro caso attuale ricade in quest'ultimo descritto, ma se fosse stato altrimenti, avremmo semplicemente dovuto calcolare il valore di $-\varphi$ in base al valore delle variabili x_1 e x_2.

	$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\overline{c_j}$	0	-1	-2	0	0	0
x_3	9	2	2	1	0	0
x_4	2	0	1	0	1	0
x_5	1	1	-1	0	0	1

Tabella 1.1: Tableau iniziale. Vertice $\alpha(0, 0)$

In tabella 1.1 il tableau definitivo ricavato dal nostro problema. Si noti che le ultime 3 colonne formano già una matrice identità, perciò le assumeremo come base.

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$$
$$x = (0, 0, 9, 2, 1)$$

Per sapere in che punto dello spazio originale a due dimensioni ci troviamo, è sufficiente guardare le variabili x_1 e x_2. É evidente che ci troviamo nell'origine, che appartiene al politopo P trovato in precedenza e che in particolare è il **vertice $\boldsymbol{\alpha}$**. Poiché non tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi, la nostra non è la BFS ottima e dobbiamo muoverci in una BFS migliore. Applicando la **regola di Dantzig**, facciamo entrare in base la colonna con il costo relativo maggiore in valore assoluto (cioè il più negativo). Nel nostro caso, prenderemo in considerazione quindi la colonna $\boldsymbol{A_2}$. Per scegliere su quale elemento fare **pivoting**, dobbiamo ottenere il valore di $y_{\ell 2}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i2} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 2}}$$

Perciò, operando con gli elementi nel tableau:

$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{9}{2}, \frac{2}{1}\right) = \frac{2}{1} = \frac{y_{20}}{\boldsymbol{y_{22}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{22} (cerchiato in tabella 1.2). Il nostro scopo è ora far comparire uno 0 nella colonna dell'elemento pivot in tutte le righe tranne quella in cui si trova l'elemento pivot e far comparire un 1 in quest'ultima.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	0	-1	-2	0	0	0
R_1	x_3	9	2	2	1	0	0
R_2	x_4	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	1	1	-1	0	0	1

Tabella 1.2: Pivoting su y_{22}. A_2 entra in base e A_4 esce.

Possiamo felicemente notare che $y_{22} = 1$, perciò nulla da fare su R_2. Se così non fosse stato sarebbe bastato moltiplicare R_2R per un coefficiente h. Algebricamente, per far comparire uno 0 in tutti gli altri elementi della colonna A_2, possiamo sostituire ad ogni riga la riga stessa sommata ad un'altra qualsiasi riga moltiplicata per un coefficiente k. Ovviamente la riga più comoda da sommare è la riga su cui stiamo facendo pivot R_ℓ, avendo un comodissimo 1 nella colonna interessata. Perciò possiamo riassumere che l'operazione consentita su ogni riga R_i e sulla riga di pivot R_ℓè:

$$R_\ell \leftarrow hR_l$$
$$R_i \leftarrow R_i + kR_\ell$$

Queste sono dette **operazioni elementari di riga**. Applicando le regole al nostra tableau, operiamo:

$$R_0 \leftarrow R_0 + 2R_2;$$
$$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2;$$
$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

Il nostro nuovo tableau diventa quindi quello in tabella 1.3.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	-1	0	0	2	0
R_1	x_3	5	2	0	1	-2	0
R_2	x_2	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	3	1	0	0	1	1

Tabella 1.3: Secondo tableau. Vertice $\beta(0, 2)$

Ora che A_4 è entrato in base e A_2 ne è uscito, abbiamo una nuova base $\mathcal{B}$ e una nuova BFS x:

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_2, A_5\}$$
$$x = (0, 2, 5, 0, 3)$$

Ci troviamo nel **vertice** $\boldsymbol{\beta}$, ma questa non è ancora la BFS ottima. Possiamo osservare, infatti, che la colonna A_1 presenta un $\overline{c_j}$ negativo e sarà necessario fare ulteriormente pivoting su un elemento di questa. Otteniamo quindi il valore di $y_{\ell 1}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i1} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 1}}$$
$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{1}\right) = \frac{5}{2} = \frac{y_{10}}{\boldsymbol{y_{11}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{11} (cerchiato in tabella 1.4).

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	-1	0	0	2	0
R_1	x_3	5	2	0	1	-2	0
R_2	x_2	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	3	1	0	0	1	1

Tabella 1.4: Pivoting su y_{11}. A_1 entra in base e A_3 esce.

Questa volta dobbiamo lavorare anche sulla riga dell'elemento pivot, dividendola per 2:

$$R_1 \rightarrow \frac{1}{2} R_1$$

Partendo dal nuovo tableau in tabella 1.5 nella pagina successiva, facciamo pivoting sulle restanti righe in questo modo:

$$R_0 \rightarrow R_0 + R_1$$
$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

Il nostro nuovo tableau, quindi, è quello in tabella 1.6 nella pagina seguente. Notiamo che tutti

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	-1	0	0	2	0
R_1	x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	0
R_2	x_2	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	3	1	0	0	1	1

Tabella 1.5: Pivoting su y_{11}. R_1 divisa per 2.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	$\frac{13}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0
R_1	x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	0
R_2	x_2	2	0	1	0	1	0
R_3	x_5	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	2	1

Tabella 1.6: Terzo tableau. Vertice $\gamma\left(\frac{5}{2}, 2\right)$

i $\overline{c_j}$ sono non negativi, perciò ci troviamo nella **BFS ottima**. La base $\mathcal{B}$ e la soluzione x sono quindi:

$$\mathcal{B} = A_1, A_2, A_5$$
$$x = \left(\frac{5}{2}, 2, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

La soluzione ottima è quella del vertice $\boldsymbol{\gamma\left(\frac{5}{2}, 2\right)}$. Riassumendo, tutti i valori delle variabili in gioco sono i seguenti:

$$z = -\varphi = \frac{13}{2} = 6.5$$
$$x_1 = \frac{5}{2} = 2.5$$
$$x_2 = 2$$

1.1.5 Conclusione

La soluzione ottima consiste nel produrre 2.5T di prodotto X e 2T di prodotto Y, ottenendo un **profitto** pari a 6.5 volte quello di 1T di prodotto X.

1.2 Esercizio 2

Sia dato - in linguaggio naturale - il seguente problema di ottimizzazione:

1. Un'azienda chimica produce due composti, 1 e 2, composti da due sostanze chimiche A e B;
2. Un lotto di composto 1 richiede 3T di sostanza A e 3T di sostanza B;
3. Un lotto di composto 2 richiede 6T di sostanza A e 3T di sostanza B;
4. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 3 lotti di composto 1;
5. Si hanno a disposizione 12T di composto A e 9T di composto B;
6. Il profitto di un lotto di composto A è di 12 000€;

7. Il profitto di un lotto di composto B è di 15 000€.

Si modelli il problema come un problema di programmazione lineare, lo si porti in forma standard, si realizzi una rappresentazione grafica del problema e si ottimizzi la funzione di profitto attraverso il **metodo del simplesso** affinché **si ottenga il massimo profitto dalla produzione dei prodotti** nel rispetto dei vincoli assegnati. Si utilizzi la *regola di Bland* per scegliere le basi su cui fare pivot.

1.2.1 Modellizzazione

Si indichi con:

- x_1 il numero di lotti di composto 1;
- x_2 il numero di lotti di composto 2.

Lo scopo del nostro problema è di massimizzare i profitti ottenuti dalla produzione. Per comodità di rappresentazione, stabiliamo che la funzione di profitto z esprima il profitto in **migliaia di euro**:

$$\max z = 12x_1 + 15x_2$$

Modelliamo ora i vincoli espressi dal problema.
Dalle relazioni 3, 4 e 5 possiamo dedurre i seguenti vincoli:

- Servono 3T di prodotto A per produrre un lotto di composto 1 e 6T per produrre un lotto di composto 2. In tutto non possiamo utilizzare più di 12T di prodotto A.
- Servono 3T di prodotto B per produrre un lotto di composto 1 e 3T per produrre un lotto di composto 2. In tutto non possiamo utilizzare più di 9T di prodotto B.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

La relazione 4 è così facilmente esprimibile:

$$x_1 \leq 3$$

Infine imponiamo il vincolo, implicito, che la produzione non può essere negativa:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il modello matematico può essere quindi così riassunto (sono state apportate semplificazione algebriche):

$$\begin{aligned} \max z = 12x_1 &+ 15x_2 \\ \text{s.t.}\ \ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.2.2 Problema in forma grafica

In figura 1.2 nella pagina successiva è rappresentato graficamente il problema presentato. In giallo è rappresentato il politopo P e sono stati chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i suoi quattro vertici, i quali sappiamo corrispondere ognuno ad una BFS. Il gradiente della funzione obiettivo vale

$$\nabla(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (12, 15)$$

Il politopo P è, ovviamente, limitato nella direzione del gradiente (si fa notare che finora P è sempre limitato in ogni direzione, quindi qualsiasi direzione avesse il gradiente non ci sarebbero problemi).

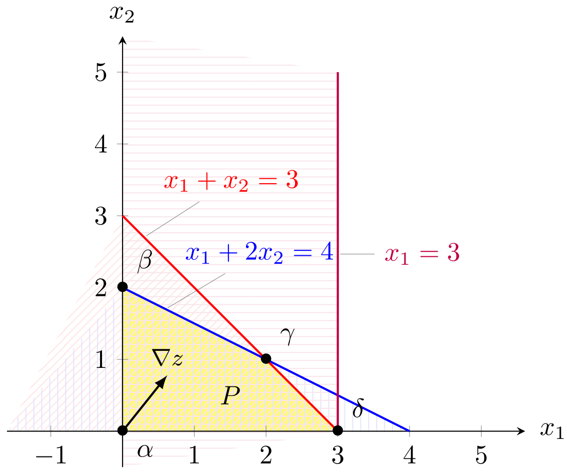

Figura 1.2: Rappresentazione cartesiana del problema di programmazione lineare

1.2.3 Forma standard

Ricordiamo che un problema di **programmazione lineare in forma standard** è nella forma (matriciale):

$$\begin{aligned} \min c'x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Trasformiamo la funzione obiettivo z in φ tale che:

$$\varphi = -\frac{z}{3} = -4x_1 - 5x_2$$

Quindi introduciamo una **variabile slack** per ogni disequazione con simbolo $\leq$. Otterremo infine:

$$\begin{array}{lcccccl} \min \varphi = & -4x_1 & -5x_2 & & & & \\ \text{s.t.} & +x_1 & +2x_2 & +\boldsymbol{x_3} & & & = 4 \\ & +x_1 & +x_2 & & +\boldsymbol{x_4} & & = 3 \\ & +x_1 & & & & +\boldsymbol{x_5} & = 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

1.2.4 Risoluzione tramite tableau

	$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\overline{c_j}$	0	-4	-5	0	0	0
x_3	4	1	2	1	0	0
x_4	3	1	1	0	1	0
x_5	3	1	0	0	0	1

Tabella 1.7: Tableau iniziale. Vertice $\alpha(0, 0)$

In tabella 1.7 il tableau ricavato dal nostro problema. Si noti che le ultime 3 colonne formano già una matrice identità, perciò le assumeremo come base.

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$$
$$x = (0, 0, 4, 3, 3)$$

Ci troviamo nell'origine, che appartiene al politopo P trovato in precedenza e che in particolare è il **vertice $\boldsymbol{\alpha}$**. Poiché non tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi, la nostra non è la BFS ottima e dobbiamo muoverci in una BFS migliore. Applicando la **regola di Bland**, facciamo entrare in base la colonna con l'indice minore. Nel nostro caso, prenderemo in considerazione quindi la colonna $\boldsymbol{A_1}$. Per scegliere su quale elemento fare **pivoting**, dobbiamo ottenere il valore di $y_{\ell 1}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i1} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 1}}$$

Perciò, operando con gli elementi nel tableau:

$$\vartheta_{\max} = \min \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{1} \right) = \frac{3}{1} = \frac{y_{20}}{\boldsymbol{y_{21}}} = \frac{y_{30}}{\boldsymbol{y_{31}}}$$

Abbiamo un **pareggio** tra gli elementi y_{21} e y_{31}.Seguendo la **regola di Bland**, sceglieremo come pivot l'elemento che farà uscire dalla base la variabile con l'**indice minore**[1]. Faremo quindi pivoting sull'elemento y_{21} (cerchiato in tabella 1.8) poiché farà uscire dalla base la variabile x_4. Il nostro scopo è ora far comparire uno 0 nella colonna dell'elemento pivot in tutte le righe tranne quella in cui si trova l'elemento pivot e far comparire un 1 in quest'ultima. Poiché $y_{21} = 1$ non c'è

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	0	-4	-5	0	0	0
R_1	x_3	4	1	2	1	0	0
R_2	x_4	3	1	1	0	1	0
R_3	x_5	3	1	0	0	0	1

Tabella 1.8: Pivoting su y_{21}. A_1 entra in base e A_4 esce.

nulla da fare su R_2. Applichiamo le operazioni elementari di riga al nostro tableau come segue:

$$R_0 \leftarrow R_0 + 4R_2;$$
$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2;$$
$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$$

Il nostro nuovo tableau diventa quindi quello in tabella 1.9.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	12	0	-1	0	4	0
R_1	x_3	1	0	1	1	-1	0
R_2	x_1	3	1	1	0	1	0
R_3	x_5	0	0	-1	0	-1	1

Tabella 1.9: Secondo tableau. Vertice $\delta(3, 0)$

Ora che A_1 è entrato in base e A_4 ne è uscito, abbiamo una nuova base $\mathcal{B}$ e una nuova BFS x:

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_1, A_5\}$$
$$x = (3, 0, 1, 0, 0)$$

Ci troviamo nel **vertice $\boldsymbol{\delta}$**, ma questa non è ancora la BFS ottima. Inoltre, ci troviamo nel caso di una **base degenere**: la variabile x_5, che è in base, ha valore nullo. Questo non dovrebbe comunque

[1] Si fa notare che l'utilizzo della **regola di Bland** evita i casi di **loop** in presenza di basi degeneri durante l'algoritmo del simplesso. Questa proprietà è dimostrabile ma la dimostrazione esula dai nostri scopi.

crearci problemi in quanto stiamo applicando la regola di Bland. L'unica colonna ad avere un $\overline{c_j}$ negativo è A_2 ed è su questa che cercheremo l'elemento di pivot $y_{\ell 2}$:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i2}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 2}}$$
$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\right) = \frac{1}{1} = \frac{y_{10}}{\boldsymbol{y_{12}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{12} (cerchiato in tabella 1.10). Le operazione di pivoting saranno:

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	12	0	-1	0	4	0
R_1	x_3	1	0	1	1	-1	0
R_2	x_1	3	1	1	0	1	0
R_3	x_5	0	0	-1	0	-1	1

Tabella 1.10: Pivoting su y_{12}. A_2 entra in base e A_3 esce.

$$R_0 \to R_0 + R_1$$
$$R_2 \to R_2 - R_1$$
$$R_3 \to R_3 + R_1$$

Il nostro nuovo tableau, quindi, è quello in tabella 1.11. Notiamo che tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi,

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	13	0	0	1	3	0
R_1	x_2	1	0	1	1	-1	0
R_2	x_1	2	1	0	-1	2	0
R_3	x_5	1	0	0	1	-2	1

Tabella 1.11: Terzo tableau. Vertice $\gamma(2,1)$

perciò ci troviamo nella **BFS ottima**. La base $\mathcal{B}$ e la soluzione x sono quindi:

$$\mathcal{B} = A_2, A_1, A_5$$
$$x = (2, 1, 0, 0, 1)$$

La soluzione ottima è quella del vertice $\boldsymbol{\gamma(2,1)}$. Riassumendo, tutti i valori delle variabili in gioco sono i seguenti:

$$z = -3\varphi = -3(-13) = 39$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1$$

1.2.5 Conclusione

La soluzione ottima consiste nel produrre 2 lotti di composto 1 e 1 lotto di composto 2, ottenendo un **profitto** pari a 39 000€.

1.3 Esercizio 3

Sia dato - in linguaggio naturale - il seguente problema di ottimizzazione:

1. Un'azienda produce due tipi di composto A e B;
2. Il profitto del composto A è il doppio di quello del composto B;
3. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 2T di composto A;
4. Ogni tonnellata di ogni composto contiene 1Q di sostanza base;
5. Ho a disposizione 3Q di sostanza base;
6. 1T di composto A contiene 1Q di sostanza chimica;
7. 1T di composto B contiene 2Q di sostanza chimica;
8. Ho a disposizione 5Q di sostanza chimica.

Si modelli il problema come un problema di programmazione lineare, lo si porti in forma standard, si realizzi una rappresentazione grafica del problema e si ottimizzi la funzione di profitto attraverso il **metodo del simplesso** affinché **si ottenga il massimo profitto dalla produzione dei prodotti** nel rispetto dei vincoli assegnati. Si utilizzi la *regola di Dantzig* per scegliere le basi su cui fare pivot.

1.3.1 Modellizzazione

Si indichi con:

- x_1 il numero di tonnellate di composto 1;
- x_2 il numero di tonnellate di composto 2.

Lo scopo del nostro problema è di massimizzare i profitti ottenuti dalla produzione. Anche se non siamo a conoscenza degli esatti profitti dati da ogni prodotto, abbiamo comunque a disposizione la relazione data dalla proposizione 2, cioè la variabile x_1 rende il doppio della variabile x_2. Possiamo quindi esprimere così la funzione di profitto:

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

Modelliamo ora i vincoli espressi dal problema.
La relazione 3 è così facilmente esprimibile:

$$x_1 \leq 2$$

Dalle relazioni 4 e 5 possiamo dedurre il seguente vincolo:

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

Dalle relazioni 6, 7 e 8 possiamo dedurre il seguente vincolo:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

Infine imponiamo il vincolo, implicito, che la produzione non può essere negativa:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il modello matematico può essere quindi così riassunto (sono state apportate semplificazione algebriche):

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.3.2 Problema in forma grafica

In figura 1.3 è rappresentato graficamente il problema presentato. In giallo è rappresentato il politopo P e sono stati chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ i suoi cinque vertici, i quali sappiamo corrispondere ognuno ad una BFS. Il gradiente della funzione obiettivo vale

$$\nabla(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (2, 1)$$

Il politopo P è, ovviamente, limitato nella direzione del gradiente (si fa notare che finora P è sempre limitato in ogni direzione, quindi qualsiasi direzione avesse il gradiente non ci sarebbero problemi).

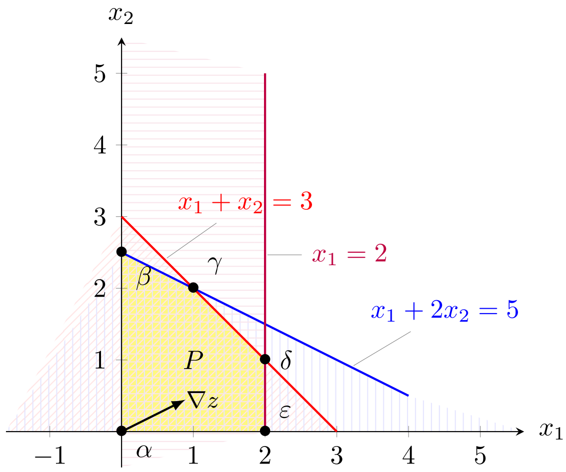

Figura 1.3: Rappresentazione cartesiana del problema di programmazione lineare

1.3.3 Forma standard

Ricordiamo che un problema di **programmazione lineare in forma standard** è nella forma (matriciale):

$$\begin{aligned} \min c'x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Trasformiamo la funzione obiettivo z in φ tale che:

$$\varphi = -z = -2x_1 - x_2$$

Quindi introduciamo una **variabile slack** per ogni disequazione con simbolo $\leq$. Otterremo infine:

$$\begin{array}{llllllll} \min \varphi = & -2x_1 & -x_2 & & & & \\ \text{s.t.} & +x_1 & & +\boldsymbol{x_3} & & & =2 \\ & +x_1 & +x_2 & & +\boldsymbol{x_4} & & =3 \\ & +x_1 & +2x_2 & & & +\boldsymbol{x_5} & =5 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

1.3.4 Risoluzione tramite tableau

In tabella 1.12 nella pagina seguente il tableau ricavato dal nostro problema. Si noti che le ultime 3 colonne formano già una matrice identità, perciò le assumeremo come base.

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$$
$$x = (0, 0, 2, 3, 5)$$

	$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\overline{c_j}$	0	-2	-1	0	0	0
x_3	2	1	0	1	0	0
x_4	3	1	1	0	1	0
x_5	5	1	2	0	0	1

Tabella 1.12: Tableau iniziale. Vertice $\alpha(0,0)$

Ci troviamo nell'origine, che appartiene al politopo P trovato in precedenza e che in particolare è il **vertice $\boldsymbol{\alpha}$**. Poiché non tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi, la nostra non è la BFS ottima e dobbiamo muoverci in una BFS migliore. Applicando la **regola di Dantzig**, facciamo entrare in base la colonna il cui $\overline{c_j}$ è maggiore in valore assoluto. Nel nostro caso, prenderemo in considerazione quindi la colonna $\boldsymbol{A_1}$. Per scegliere su quale elemento fare **pivoting**, dobbiamo ottenere il valore di $y_{\ell 1}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i1}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 1}}$$

Perciò, operando con gli elementi nel tableau:

$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{1}\right) = \frac{2}{1} = \frac{y_{10}}{\boldsymbol{y_{11}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{11} (cerchiato in tabella 1.13). Il nostro scopo è ora far comparire uno 0 nella colonna dell'elemento pivot in tutte le righe tranne quella in cui si trova l'elemento pivot e far comparire un 1 in quest'ultima. Poiché $y_{11} = 1$ non c'è nulla da fare su R_1. Applichiamo

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	0	-2	-1	0	0	0
R_1	x_3	2	1	0	1	0	0
R_2	x_4	3	1	1	0	1	0
R_3	x_5	5	1	2	0	0	1

Tabella 1.13: Pivoting su y_{11}. A_1 entra in base e A_3 esce.

le operazioni elementari di riga al nostro tableau come segue:

$$\begin{aligned} R_0 &\leftarrow R_0 + 2R_2; \\ R_2 &\leftarrow R_2 - R_1; \\ R_3 &\leftarrow R_3 - R_1 \end{aligned}$$

Il nostro nuovo tableau diventa quindi quello in tabella 1.14.

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	0	-1	2	0	0
R_1	x_1	2	1	0	1	0	0
R_2	x_4	1	0	1	-1	1	0
R_3	x_5	3	0	2	-1	0	1

Tabella 1.14: Secondo tableau. Vertice $\varepsilon(2,0)$

Ora che A_1 è entrato in base e A_3 ne è uscito, abbiamo una nuova base $\mathcal{B}$ e una nuova BFS x:

$$\mathcal{B} = \{A_1, A_4, A_5\}$$
$$x = (2, 0, 0, 1, 3)$$

Ci troviamo nel **vertice ε**, ma questa non è ancora la BFS ottima. L'unica colonna ad avere un $\overline{c_j}$ negativo è A_2 ed è su questa che cercheremo l'elemento di pivot $y_{\ell 2}$:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i2}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 2}}$$
$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{1} = \frac{y_{20}}{\boldsymbol{y_{22}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{22} (cerchiato in tabella 1.15). Le operazioni di pivoting saranno:

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	4	0	-1	2	0	0
R_1	x_1	2	1	0	1	0	0
R_2	x_4	1	0	1	-1	1	0
R_3	x_5	3	0	2	-1	0	1

Tabella 1.15: Pivoting su y_{22}. A_2 entra in base e A_4 esce.

$$R_0 \to R_0 + R_2$$
$$R_3 \to R_3 - 2R_2$$

Il nostro nuovo tableau, quindi, è quello in tabella 1.16. Notiamo che tutti i $\overline{c_j}$ sono non negativi,

		$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
R_0	$\overline{c_j}$	5	0	0	1	1	0
R_1	x_1	2	1	0	1	0	0
R_2	x_2	1	0	1	-1	1	0
R_3	x_5	1	0	0	1	-2	1

Tabella 1.16: Terzo tableau. Vertice $\delta(2, 1)$

perciò ci troviamo nella **BFS ottima**. La base $\mathcal{B}$ e la soluzione x sono quindi:

$$\mathcal{B} = A_2, A_1, A_5$$
$$x = (2, 1, 0, 0, 1)$$

La soluzione ottima è quella del vertice $\boldsymbol{\delta(2, 1)}$. Riassumendo, tutti i valori delle variabili in gioco sono i seguenti:

$$z = -\varphi = 5$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1$$

1.3.5 Conclusione

La soluzione ottima consiste nel produrre 2T di composto A e 1T di composto B ottenendo un **profitto** pari a 5 volte il profitto di 1T di composto B.

Capitolo 2

31/03/2014

I problemi saranno posti in maniera leggermente diversa, cioè quella fornita sul pdf reperibile sul sito del docente al seguente link: `http://www.or.deis.unibo.it/staff_pages/martello/testi_esercizi_ottimizzazione.pdf`. Inoltre, anche se durante l'esercitazione non è stata trovata la soluzione dei problemi duali, dato che il metodo per individuarli è stato spiegato dal prof. nella lezione subito successiva, ho ritenuto opportuno e interessante cercarle io stesso e inserirle in questo eserciziario. A maggior ragione, le soluzioni dei duali **potrebbero essere errate**, per cui chiedo ad ognuno di provare a rivederle e comunicarmi gli eventuali errori trovati. Inoltre, ho deciso - in maniera del tutto personale e arbitraria - di preporre la rappresentazione grafica alla risoluzione con tableau negli esercizi di ottimizzazione. L'unico motivo è che mi piace avere un'idea un po' più concreta di quello che sta succedendo sul piano geometrico.

2.1 Esercizio 1

Un'azienda chimica produce due tipi di composto, A e B, che danno lo stesso profitto, utilizzando una sostanza base della quale sono disponibili 8 quintali. Ogni tonnellata di composto (indipendentemente dal tipo) contiene un quintale di sostanza base. Il numero di tonnellate di composto A prodotto deve superare di almeno una unità il numero di tonnellate di composto B prodotto. Per problemi di stoccaggio non si possono produrre più di 6 tonnellate di composto A. Si associ la variabile x_1 al composto A e la variabile x_2 al composto B.

1. Definire il modello LP che determina la funzione di massimo profitto.
2. Porre il modello in forma standard e risolverlo con il metodo delle due fasi e la regola di Bland, introducendo il minimo numero di variabili artificiali. Dire esplicitamente qual è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile.
4. Costruire il duale del modello definito al punto 2 e ricavarne le soluzioni ottime.
5. Imporre il vincolo di interezza sulle variabili (supporre che non si possano produrre frazioni di tonnellate) e risolvere il problema con il metodo branch-and-bound. [*Questo punto non sarà analizzato perché in data di stesura del documento (04/04/2014) l'argomento non è ancora stato trattato dal prof*]

2.1.1 Modellizzazione

Si indichi con:

- x_1 il numero di tonnellate di composto A;
- x_2 il numero di tonnellate di composto B.

Lo scopo del nostro problema è di massimizzare i profitti ottenuti dalla produzione. Anche se non siamo a conoscenza degli esatti profitti dati da ogni prodotto, sappiamo che entrambi i composti portano allo stesso profitto. Possiamo quindi esprimere così la funzione di profitto:

$$\max z = x_1 + x_2$$

Modelliamo ora i vincoli espressi dal problema. Il modello matematico può essere quindi così riassunto (sono state apportate semplificazione algebriche):

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq x_2 + 1 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.1.2 Problema in forma grafica

In figura 2.1 è rappresentato graficamente il problema presentato. In giallo è rappresentato il politopo P e sono stati chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i suoi cinque quattro, i quali sappiamo corrispondere ognuno ad una BFS. Il gradiente della funzione obiettivo vale

$$\nabla(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (1, 1)$$

Il politopo P è, ovviamente, limitato nella direzione del gradiente (si fa notare che finora P è sempre limitato in ogni direzione, quindi qualsiasi direzione avesse il gradiente non ci sarebbero problemi).

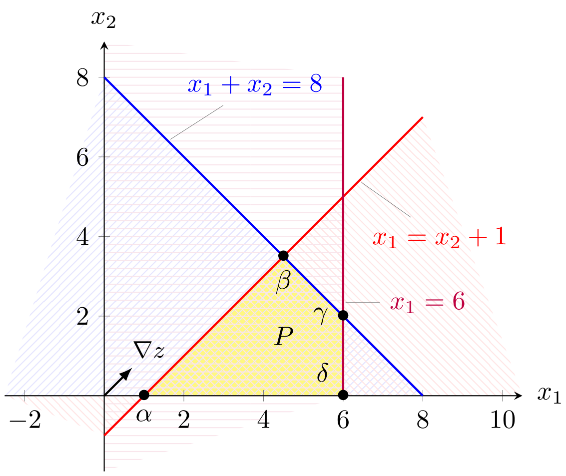

Figura 2.1: Rappresentazione cartesiana del problema di programmazione lineare

Possiamo osservare che anche solo dal grafico è facilmente intuibile dove si troverà la soluzione ottima. Il gradiente ∇z è **perpendicolare** allo spigolo $\overline{\beta\gamma}$, da ciò potremmo dedurre che non esiste una soluzione ottima, ma che ve ne sono infinite e tutte posizionate su questo spigolo. Riprenderemo questa considerazione in seguito, dopo aver risolto il problema con il metodo del simplesso.

2.1.3 Forma standard

Ricordiamo che un problema di **programmazione lineare in forma standard** è nella forma (matriciale):

$$
\begin{aligned}
\min c'x \\
Ax = b \\
x \geq 0
\end{aligned}
$$

Trasformiamo la funzione obiettivo z in φ tale che:

$$\varphi = -z = -x_1 - x_2$$

Quindi introduciamo una **variabile slack** per ogni disequazione con simbolo $\leq$ e una **variabile surplus** per ogni disequazione con simbolo $\geq$. Otterremo infine:

$$
\begin{array}{llllllll}
\min \varphi = & -x_1 & -x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & +x_1 & +x_2 & +\boldsymbol{x_3} & & & = 8 \\
 & +x_1 & -x_2 & & -\boldsymbol{x_4} & & = 1 \\
 & +x_1 & & & & +\boldsymbol{x_5} & = 6 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

2.1.4 Risoluzione tramite tableau

	$-\varphi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\overline{c_j}$	0	-1	-1	0	0	0
R_1	8	1	1	1	0	0
R_2	1	1	-1	0	-1	0
R_3	6	1	0	0	0	1

Tabella 2.1: Tableau iniziale.

In tabella 2.1 il tableau ricavato dal nostro problema. A differenza dei precedenti esercizi, la fortuna non è dalla nostra parte e non abbiamo nessuna sottomatrice identità a disposizione da utilizzare come base ammissibile. Si potrebbe *erroneamente* pensare che per ottenere una BFS sia sufficiente operare $R_2 \leftarrow -1 \cdot R_2$. Ma si fa subito notare che così facendo otterremo come base:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\} \\
x = (0, 0, 8, 1, 6)
\end{aligned}
$$

Questa **non è una BFS** in quanto ricade *all'esterno* del politopo P. Per ottenere una BFS di partenza, quindi, ricorriamo alla **fase 1 del metodo del simplesso**.

Fase 1 - aggiunta di variabili artificiali

Per ottenere una BFS aggiungiamo un numero $n' \leq m$ di variabili artificiali tali da riuscire ad ottenere una BFS nel nuovo problema con m vincoli e $n + n'$ variabili. Ipoteticamente, potremmo aggiungere sempre $n' = m$ variabili artificiali tali da formare già loro una sottomatrice identità nel tableau, ma tale metodo risulterebbe molto sconveniente nel caso in cui i vincoli e le variabili fossero centinaia o migliaia. Inoltre, ma non meno importante, la traccia dell'esercizio richiede esplicitamente di **introdurre il minore numero di variabili artificiali**.

Per ridurre al minimo le variabili artificiali $x_i^a, \quad i = 1, \cdots, n'$ è sufficiente aggiungerne una per ogni colonna della matrice identità mancante nel tableau originale. Nel nostro caso manca solo la seconda colonna e sarà quella che introdurremo con l'*unica* variabile artificiale x^a, trasformando il secondo vincolo in:

$$x_1 - x_2 - x_4 + x^a = 1$$

Il nostro scopo, dopo l'introduzione di x^a, sarà quello di **eliminarla** dalla base. Per far ciò bisogna fare in modo che questa valga zero e quindi introduciamo, a tale scopo, una nuova funzione obiettivo da minimizzare ψ tale che:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n'} x_i^a = x^a$$

Scriviamo il nuovo tableau in tabella 2.2 e applichiamo il simplesso per ottimizzare la nostra funzione ψ. Abbiamo una sottomatrice identità formata dalla base:

		$-\psi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	0	0	0	0	0	0	1
R_1	x_3	8	1	1	1	0	0	0
R_2	x^a	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	6	1	0	0	0	1	0

Tabella 2.2: Nuovo tableau con la variabile artificiale x^a.

$$\mathcal{B} = A_3, A_6, A_5$$

Per avere a avere a disposizione i valori delle coordinate della BFS del nuovo problema, è necessario che:

$$y_{ij} = 0 \quad \forall i, j : A_j \in \mathcal{B}, i \neq j$$

Condizione vera per ogni valore tranne y_{06} che provvediamo ad annullare tramite l'operazione elementare di riga:

$$R_0 \leftarrow R_0 - R_2$$

Nel nuovo tableau in figura 2.3 faremo pivoting sull'unica colonna con $\overline{c_j} < 0$, cioè su A_1. Per scegliere su quale elemento fare **pivoting**, dobbiamo ottenere il valore di $y_{\ell 1}$ tale che:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i1} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \frac{y_{i0}}{y_{\ell 1}}$$

Perciò, operando con gli elementi nel tableau:

$$\vartheta_{\max} = \min\left(\frac{8}{1}, \frac{1}{1}, \frac{6}{1}\right) = \frac{1}{1} = \frac{y_{20}}{\boldsymbol{y_{21}}}$$

Faremo pivoting sull'elemento y_{21} (cerchiato in tabella). Il nostro scopo è ora far comparire uno 0 nella colonna dell'elemento pivot in tutte le righe tranne quella in cui si trova l'elemento pivot e far comparire un 1 in quest'ultima. Poiché $y_{21} = 1$ non c'è nulla da fare su R_2. Applichiamo le

		$-\psi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	-1	-1	1	0	1	0	0
R_1	x_3	8	1	1	1	0	0	0
R_2	x^a	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	6	1	0	0	0	1	0

Tabella 2.3: Pivoting su $y_2 1$. A_1 entra in base e A_6 esce.

operazioni elementari di riga al nostro tableau come segue:

$$R_0 \leftarrow R_0 + R_2;$$
$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2;$$
$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2.$$

Il nostro nuovo tableau diventa quindi quello in tabella 2.4. Siamo giunti alla soluzione ottima,

		$-\psi$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^a
R_0	$\overline{c_j}$	0	0	0	0	0	0	1
R_1	x_3	7	0	2	1	1	0	-1
R_2	x_1	1	1	-1	0	-1	0	1
R_3	x_5	5	0	1	0	1	1	-1

Tabella 2.4: Secondo tableau. Vertice $\alpha(1, 0)$

essendo $\overline{c_j} > 0 \quad \forall j$. Inoltre la variabile artificiale x^a non è più in base. La nuova base e la nuova soluzione sono:

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_1, A_5\}$$
$$x = (1, 0, 7, 0, 5, 0)$$

Siamo nel vertice $\alpha(1, 0)$ e quindi in una BFS da cui possiamo partire per la **fase 2** del metodo del simplesso.