$V \subseteq \mathbb{R}^n \qquad V = \langle v_1, \dots v_m \rangle$

$$= \begin{cases} a_{11} + \dots + a_{1n} + x_n = 0 \\ \\ \end{cases}$$

Questi 2 spazi vettoriali sono uguali?

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$V \subseteq W \Rightarrow$ una base di V é contenuta in W

$$\left.\begin{array}{l} V = W \Rightarrow V \cap W = V = W \\ \qquad\qquad\quad \parallel \\ \qquad\qquad V + W = V = W \end{array}\right\} \text{quindi } \dim(V \cap W) = \dim(V + W)$$

Grassmann: $\dim(W + V) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$

$V \cap W \subseteq V, W \subseteq V + W \Rightarrow V \cap W = V + W$

essendo che $V \cap W$ é un sottospazio di $V + W$
sapendo che hanno le stesse dimensione
possiamo dire

$V = W$ se $V \cap W = V + W$

Facendo Gauss-Jordan su tutti i vettori se una linea viene 0 vuol dire che almeno una é combinazione lineare delle altre é quindi che non sono uguali

Applicazioni lineari (omomorfismi di spazi vettoriali)

V, W spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Un'applicazione lineare tra V e W è una funzione

$f: \underbrace{V}_{\text{dominio}} \to \overbrace{W}^{\text{Codominio}}$ tale che

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

11) $f(\lambda \cdot v_1) = \lambda \cdot f(v_1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Esempio:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix}$$

Verifica:

vettori generici

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+x') \\ (x+x') = (y+y') \\ 2(y+y') \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x' \\ x'+y' \\ 2y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2x' \\ x'+y' \\ 2y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

rispetta la prima proprietà

$$f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ \lambda x + \lambda y \\ 2\lambda y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

rispetta anche la prima regola

Esempio:

$f: V \to W$ con $v \to 0$ una funzione che fa corrispondere a tutti gli elementi di V lo 0

$f(v_1 + v_2) = 0 = 0 + 0 = f(v_1) + f(v_2)$ è un'applicazione lineare

---

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^2 + y \\ z \end{pmatrix}$$

applicazione con dei numeri della prima proprietà

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non è un'applicazione lineare perché non rispetta la prima proprietà

Proposizione

$f: V \to W$ applicazione lineare allora $f(\overset{\in V}{0}) = 0^{\in W}$

Dimostrazione

$$\underset{\in V}{f(0)} = f(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{scalare} \\ \downarrow \\ \in \mathbb{R}}}{0} \cdot \underset{\in V}{0}) = \overset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot \underset{V}{\underset{\cap}{f(0)}} = \underset{W}{\underset{\cap}{0}}$$

$f: V \to W$ applicazione lineare

$\mathrm{Im}(f) = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ t.c. } f(v) = w \} \subseteq W$

$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \subseteq V$

$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0)$

Proposizione $f: V \to W$ omomorfismi

$\operatorname{Im}(f) \subseteq W \quad \ker(f) \subseteq V$

Dimostrazione

$0 \in \operatorname{Im}(f)$

$w_1, w_2 \in \operatorname{Im} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Domanda

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \operatorname{Im}(f)$?

$\exists\, v_1, v_2 \in V$ t.c. $w_1 = f(v_1),\ w_2 = f(v_2)$

applicazione regola 1

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \underbrace{\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2)}_{\text{applicazione regola 2}} = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

RISPOSTA: $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \operatorname{Im}(f)$

Proposizione

$f: V \to W$ omomorfismo

Se $V = \langle v_1 \dots v_n \rangle$ allora $\operatorname{Im}(f) = \langle f(v_1) \dots f(v_n) \rangle$

Dimostrazione esercizio

l'immagine di una base non è sempre una base

Esempio:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare perché sono tutte di grado 1

$$E = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \Rightarrow \operatorname{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$f: V \to W$ applicazione lineare

$Ker(f) \subseteq V$ $\dim(Ker(f)) = null(f)$

$I_m(f) \subseteq W$ $\dim(I_m(f)) = rk\, f$

teorema dell'omomorfismo

$null(f) + rk(f) = \dim V$

V, W, U spazi vettoriali

$f: V \to W$, $g: W \to U$ applicazioni lineari

Posso fare una composizione solo se il codominio di f è il dominio di g

$g \circ f: V \to U \to v \to g(f(v))$

composizione

Lemma: $g \circ f$ è un'applicazioni lineare

Dimostrazione esercizio

$h: V \to V$ applicazione lineare = endomorfismo

$V, W \to$ spazi vettoriali

Si può scrivere anche come $Hom(v, w)$ oppure $Hom(v, w)$

$L(V, W) = \{V \to W \text{ applicazioni lin}\}$

$f + g: V \to W$

$v \to f(v) + g(v)$

$\lambda \cdot f: V \to W$

$v \to f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v)$

Lemma $(L(v,w),+,\cdot\lambda)$ è uno spazio vettoriale

Dimostrazione esercizio

$L(V,V) = End(V)$

Definizioni

$f\ V \to W$ omo

elementi diversi di V vanno su elementi diversi di W

- f è iniettiva $\iff \{\forall v,v' \in V$ t.c. $v \neq v', f(v) \neq f(v')\}$

- f è suriettiva $\iff \{$Se $\forall w \in W\ \exists v \in V$ t.c. $f(v) = w$

- f è biettiva $\iff$ è iniettiva, è suriettiva

una funzione è invertibile se e solo se $\exists g: W \to V$ tale che
$g \circ f = id_V$
$f \circ g = id_W$

Questa g la chiamiamo f^{-1} ovvero l'inversa di f

Proposizione: $f: V \to W$
f invertibile $\iff$ f biettiva
Se f è un omo biettivo, allora f^{-1} è un omo
Un omomorfismo biettivo è detto un isomorfismo

Due spazi vettoriali V, W sono isomorfi se $\exists\ V \leftrightarrows W$
isomorfismo

Proposizione:

$f: V \to W$ appl. lin.

f iniettiva $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$

Dimostrazione

"$\Rightarrow$" banale

"$\Leftarrow$" $\ker f = \{0\}$ Supponiamo che abbiamo $v_1, v_2 \in V$ tale che $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0$

$$\left.\begin{array}{c} f(v_1) - f(v_2) = 0 \\ \shortparallel \\ f(v_1 + v_2) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} v_1 - v_2 \\ \cap \\ \ker f \\ \shortparallel \\ \{0\} \end{array}$$

Proposizione

V, W spazi vettoriali, $B = \{b_1 \dots b_n\}$ base di V

1) Un' applicazione lineare $f: V \to W$ è completamente determinata da $f(b_1), \dots, f(b_n) \in W$

Dimostrazione

$v \in V \Rightarrow \exists \ \lambda_1 \dots \lambda_n$ t.c. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$

$\Rightarrow f(v) = f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_n f(b_n)$

11) $\{w_1 \dots w_n\} \subseteq W$

$\exists! f: V \to W$ t.c. $f(b_i) = w_i \quad \forall_i = \{1 \dots n\}$

Dimostrazione