

Questo file è la rielaborazione delle slide [01\\_Parte1.pdf](#)

La **logica** è un linguaggio formale usato per rappresentare informazioni. Ogni linguaggio è formato da:

- **Sintassi**: che definisce le frasi del linguaggio

- **Semantica**: che definisce il significato delle frasi

La logica più semplice di tutti è la logica proposizionale oggi basata sulla matematica booleana, quest'ultima viene detta proposizionale perché si occupa di proposizioni, più precisamente di variabili proposizionali, quest'ultime possono assumere solo 2 valori:

- 1 = VERO
- 0 = FALSO

Ogni variabile proposizionale è già da se una "formula" proposizionale, ovviamente questa è una formula molto basilare. Per creare delle formule più complesse usiamo dei connettivi logici che sono i seguenti:

- $\neg$  (negazione): si legge "non", e inverte il valore di verità di una proposizione. Se una proposizione è vera, la sua negazione è falsa, e viceversa. Questo connettivo logico rappresenta la porta logica NOT
- $\vee$  (disgiunzione logica): si legge "o", ed è vera se **almeno una** delle due proposizioni è vera. Questo connettivo logico rappresenta la porta logica OR
- $\wedge$  (congiunzione logica): si legge "e", ed è vera se **entrambe** le proposizioni sono vere. Questo connettivo logico rappresenta la porta logica AND
- $\Rightarrow$  (implicazione): si legge "se... allora..." o semplicemente "implica". È falsa solo se il primo termine è vero e il secondo è falso.
- $\Leftrightarrow$  (doppia implicazione o coimplicazione): si legge "se ... e solo se ...". È vera quando entrambi i termini sono veri o entrambi falsi.

**Esempi di formule** (usando le variabili P e Q che sono scelte casualmente):

- $\neg P$  = "Non P"
- Q
- $P \vee Q$  = "P o Q"
- $P \wedge Q$  = "P e Q"
- $P \Rightarrow Q$  = "se P allora Q"
- $P \Leftrightarrow Q$  = P se e solo se Q

Come per le operazioni normali (somma, moltiplicazione, ecc...) anche queste hanno delle precedenze, la negazione ( $\neg$ ) ha la precedenza su tutto mentre congiunzione ( $\wedge$ ) e disgiunzione ( $\vee$ ) hanno la stessa priorità infatti:

- $\neg p \vee q$  è la formula dove la negazione si applica solo a p
- $\neg(p \vee q)$  è la formula dove la negazione si applica alla disgiunzione  $p \vee q$

Date 2 formule  $P_1$  e  $P_2$  che ovviamente posso assumere solo una valore (questa cosa la impone una funzione chiamata **interpretazione** che appunto assegna a  $P_1$  e  $P_2$  i valori 1 o 0)

0) Di seguito si calcola il valore di verità delle seguenti formule:

- $I(\neg P_1)$  è vera solo se  $P_1$  è falsa
- $I(P_1 \vee P_2)$  è vera se almeno una tra  $P_1$  o  $P_2$  è vera
- $I(P_1 \wedge P_2)$  è vera se entrambe sono vere
- $I(P_1 \Rightarrow P_2)$  è falsa solo quando  $P_1$  è vera e  $P_2$  è falsa, nei restanti casi è vera
- $I(P_1 \Leftrightarrow P_2)$  è vera se e solo se  $P_1 == P_2$

Questa è la tabella della verità di tutte queste formule:

$P_1$	$P_2$	$\neg P_1$	$P_1 \vee P_2$	$P_1 \wedge P_2$	$P_1 \Rightarrow P_2$	$P_1 \Leftrightarrow P_2$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

## Nomenclature varie:

- Data una formula diremo che è **==soddisfacibile==** se esiste almeno un caso in cui sia vera, qualunque siano i valori delle variabili.
- Data una formula diremo che è **insoddisfacibile** se non esiste almeno una caso in cui sia vera, qualunque siano i valori delle variabili.
- Data una formula si dice **tautologia** se è sempre vera qualunque siano i valori delle variabili.

Di seguito degli esempi (usando le variabili della tabella di verità):

- $P_1 \wedge P_2$  è soddisfacibile
- $P_2 \vee \neg P_2$  è tautologia (Questo viene chiamato **Principio del terzo escluso**)
- $P_2 \wedge \neg P_2$  è insoddisfacibile (Questo viene chiamato **Principio di non contraddizione**)

Due formule  $P_1$  e  $P_2$  si dicono equivalenti se hanno lo stesso valore e si scrivono in questo modo:  $P_1 \equiv P_2$

Per la disgiunzione e la congiunzione vale la proprietà commutativa e associativa

- $p \vee q \equiv q \vee p$  (commutativa della disgiunzione)
- $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$  (associatività della disgiunzione)

## Giustificazione o conseguenza logica:

Sia  $P$  un insieme di proposizioni e  $p$  una proposizione generica, ci chiediamo quando  $P$  giustifica  $p$  questa domanda la denotiamo con:  $P \models p$

Di seguito un esempio:

$$P = \{ p, p \Rightarrow q \}$$

$$P \models q$$

Questa è la tavola di verità dell'esempio

#### Esempio Giustificazione Logica

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$q$	
$F$	$F$	$T$	$F$	$p$ falsa
$F$	$T$	$T$	$T$	$p$ falsa
$T$	$F$	$F$	$F$	$p \Rightarrow q$ falsa
$T$	$T$	$T$	$T$	✓

**N.B:** Per essere vero che  $P$  giustifica  $q$  tutte le formule di  $P$  devono essere vere e anche  $q$  deve essere vera. Questa cosa si capisce ancora meglio in questo esempio

$$P = \{ p \vee r, q \vee \neg r \}$$

$$P \models p \vee q$$

$p$	$q$	$r$	$p \vee r$	$q \vee \neg r$	$p \vee q$
$F$	$F$	$F$	$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$T$	$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$F$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$ ✓
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$	$T$ ✓
$T$	$F$	$T$	$T$	$F$	$T$
$T$	$T$	$F$	$T$	$T$	$T$ ✓
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$ ✓

Come possiamo facilmente notare  $P$  giustifica quella disgiunzione (ovvero  $p \vee q$ ) solo quando tutte le formule di  $P$  e la disgiunzione tra  $p$  e  $q$  sono vere (attenzione ai vari casi nella tabella)

Molte volte formule complesse vengono standardizzate in 2 forme chiamate "normali":

- CNF (Forma Normale Congiuntiva) che si basa sul fare un AND di vari OR:

- $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s)$
- DNF (Forma Normale Disgiuntiva) che si basa sul fare un OR di vari AND:
  - $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge s)$