SISTEMI FORMALI

DEF. 2.1

Un sistema formale $\mathcal{D}$ è dato da:

- un insieme numerabile S (alfabeto o riserva di simboli)
- un insieme decidibile $W \subseteq S^*$ (insieme delle "formule ben formate" fbf) → ASSERZIONI
- un insieme $Ax \subseteq W$ (insieme degli assiomi)

Se Ax è decidibile, il sistema formale è detto

RICORSIVAMENTE ASSIOMATIZZATO

- un insieme $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$ con $R_i \subseteq W^{n_i}$ ed I $n_i \geq 2$ finiti

INSIEME FINITO DI REGOLE FINITARIE

LA COPPIA $\langle S, W \rangle$ è detta LINGUAGGIO FORMALE

NOTAZIONE

Se $R \subseteq W^3$ allora scriverò $R(\alpha, \beta, \gamma)$ nella forma $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\gamma}$

DEF. 2.3

DATO UN INSIEME M di fbf nel sistema formale D, una D-derivazione (prova, dimostrazione) a partire da M è una successione finita di fbf $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ di D tale che $\forall i = 1, \dots, n$ si ha:

$$\underbrace{h_1, \dots, h_{n_{J-1}}}, h_{n_J} = i$$

- $\alpha_i \in Ax$ opp (insieme degli assiomi)
- $\alpha_i \in M$ opp (insieme decidibile)
- $(\alpha_{h_1}, \dots, \alpha_{h_J}) \in R_J$ per qualche $J \in I$ $\quad \alpha_i = \alpha_{h_{n_J}}$

$$h_1, \dots, h_{n_{J-1}} < i$$

DEF. 2.4

Una formula α è derivabile nel sistema formale D a partire da un insieme di ipotesi H se e solo se esiste una D-derivazione a partire da H la cui ultima fbf è α.

SCRIVEREMO $H \vdash_D \alpha$ " H deriva (prova) α nel s.f. D "

Se H è vuoto allora scriviamo $\vdash_D \alpha$ " α è un teorema in D "

OSSERVAZIONE

$H \nvdash_D \alpha \iff$ non vale $H \vdash_D \alpha$

DEF. 2.5

Sia $\mathcal{R}$ insieme delle regole di D. una regola $R: \dfrac{\alpha_1, \dots, \alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ dove $R \notin \mathcal{R}$ è detta DERIVABILE IN $D \iff$ per tutte le Fbf $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ che soddisfano R si ha: $\alpha_1, \dots, \alpha_k \vdash_D \alpha_{k+1}$

R è detta ammissibile (o eliminabile) in D $\Leftrightarrow$

da $\vdash_{D\cup\{R\}} \alpha$ segue $\vdash_D \alpha$

dove $D\cup\{R\}$ è il sistema formale ottenuto da D con

l'aggiunta della regola R.

PROPOSIZIONE 2.1 ogni regola derivabile è ammissibile

DIM: conseguenza def. 2.5 + 2.3

LASCIATA AL LETTORE

$\not\Leftarrow$

TEOREMA 38

PROPOSIZIONE 2.2

Se $M \vdash_D \alpha$ allora esiste $N \subseteq M$ N finito per il quale si ha: $N \vdash_D \alpha$

DIM

$M \vdash_D \alpha \Rightarrow \exists \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{} = \alpha$ $\quad N = M \cap \{\alpha_1 \dots, \alpha_n\}$

LASCIO AL LETTORE

DEF 2.6

Un sistema formale $\mathcal{D}$ è detto consistente se e solo se esiste una fbf α di $\mathcal{D}$ tale che $\nvdash_{\mathcal{D}} \alpha$.

Se D non è consistete è detto incosistete.

DEF. 2.7

Insieme delle conseguenze:

Se Γ un insieme finito di fbf di un sistema formale $\mathcal{D}$

$$Con_{\mathcal{D}}(\Gamma) = \{ \alpha \in W \ : \ \Gamma \vdash \alpha \}$$

DEF. 2.8

Sia Γ un insieme finito di fbf di $\mathcal{D}$

- Γ è detto CONSISTENTE rispetto a $\mathcal{D}$ $\iff$ $\exists\, \alpha \in W$ tale che $\Gamma \nvdash_{\mathcal{D}} \alpha$
  ovvero se e solo se $Con_{\mathcal{D}}(\Gamma) = \{ \alpha \in W : \Gamma \vdash \alpha \} \neq W$
- Γ è detto inconsistente o contraddittorio se e solo se Γ non è consistente

Osservando che $\Gamma \subseteq Con_D(\Gamma)$

$\Rightarrow$ DEF 2.9 (TEORIA)

Un insieme di fbf di D è detto teoria di $D \Leftrightarrow$

Γ è chiuso rispetto alla relazione $\vdash_D$ (ovvero $\Leftrightarrow Con_D(\Gamma) = \Gamma$)

ovvero ancora $\Leftrightarrow$ da $\Gamma \vdash_D \alpha$ segue $\alpha \in \Gamma$

DEF. 2.10 (TEORIA PURA)

LA TEORIA PURA DI D è l'insieme $Con_D(\emptyset) = Con_D(Ax)$

TEORIA PURA È UNA TEORIA

$C\mathcal{L}$: Combinatory Logic

DEF. 2.11

Il sistema formale $C\mathcal{L}$ è definito:

- $S = \{K, S, (,), =\}$ alfabeto
- $W = \{ P = Q \mid P, Q \in \tau \}$ dove τ è l'insieme dei termini definito così:

1. $K \in \tau$, $S \in \tau$
2. Se $P, Q \in \tau$ allora $(PQ) \in \tau$
3. nient'altro è un termine

- Ax : $\forall P, Q, R \in \tau$ i seguenti schemi di assiome sono:
  "# eventualmente infinito"
- $((KP)Q) = P$ (Ax K) schema dell'assiome
- $P = P$ ASSIOMA DI RIFLESSIVITÀ

- $(((sP)Q)R) = ((PR)(QR))$ (Axs) [DISTRIBUTIVA]

- nient'altro è un assioma

- $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ dove

$$\frac{P=Q}{Q=P}$$

$R_1 = \{(P=Q,\ Q=P) \mid P, Q \in \mathcal{T}\} \subseteq W^2$ "SIMMETRIA"

$R_2 = \{(P=Q,\ Q=R,\ P=R) \mid P, Q, R \in \mathcal{T}\} \subseteq W^3$ "TRANSITIVA"

(TRANS) $$\frac{P=Q \qquad Q=R}{P=R}$$

$R_3 = \{(R=R',\ (PR)=(QR),\ (PR)=(QR')) \mid P, Q, R, R' \in \mathcal{T}\} \subseteq W^3$ CONGRUENZA 1

(CONGR 1)

$$\frac{R=R' \qquad (PR)=(QR)}{(PR)=(QR')}$$

(CONGR 2)

$R_4 = \{(R=R'),\ (RP)=(RQ),\ (RP)=(R'Q) \mid P, Q, R, R' \in \mathcal{T}\} \subseteq W^3$

CL DIMOSTRIAMO $\vdash_{CL} (((SK)K)K) = K$

1 $\underbrace{(((SK)}_{P}\underbrace{K)}_{Q}\underbrace{K)}_{R} = ((KK)(KK))$ $((PR)(QR))$ Axs

AxK

$((KP)Q) = P$

2 $(\underbrace{(KK)}_{P}\underbrace{(KK)}_{Q}) = \underset{P}{K}$ AxK $P = K$

$Q = (KK)$

Axs

$(((\underset{K}{S}P)\underset{K}{Q})\underset{K}{R}) = ((\underset{KK}{PR})(\underset{KK}{QR}))$

POSSIAMO DIMOSTRARE USANDO SOLO LA PROP. TRANSITIVA

$(((SK)K)K) = ((KK)(KK))$ TRANS(1,2)

$\shortparallel$

K

IN GENERALE $\forall M \in \mathcal{T}$ $\vdash_{CL} (((SK)K)M) = M$

ANCHE $\vdash_{CL} (IM) = M$

ESEMPIO

DIMOSTRIAMO CHE $\vdash_{CL} (((SI)I)M) = (MM) \quad \forall M \in \mathcal{T}$

$\boxed{\vdash_{CL} (IM) = M}$

1. $(((SI)I)M) = ((IM)(IM))$ Axs

$\Rightarrow (((SI)I)M) = ((M)(M))$

2) $(IM) = M$

3) $((IM)(IM)) = ((IM)(IM))$ ASSIOMA RIFLESSIVITÀ

4) $((IM)(IM)) = (M(IM))$ CONGR2 (2,3)

5) $((IM)(IM)) = (MM)$ CONGR2 (2,4)

TRANS (1,5)

CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Chiameremo proposizioni delle espressioni elementari che possiedono un valore di verità.
- Chiamiamo variabili proposizionali delle variabili $p, q, r \ldots$
- Un assegnamento proposizionale è una funzione che associa ad ogni variabile proposizionale un valore di verità $(0, 1)$

$$\forall p \mapsto \{0, 1\}$$

- Chiameremo TAUTOLOGIA una fbf il cui valore di verità è sempre 1 indipendentemente dall'assegnamento proposizionale scelto.

Il calcolo proposizionale è un sistema formale i cui teoremi sono tutte e sole le TAUTOLOGIE

DEFINIZIONE 3.1

Il SISTEMA FORMALE P_0 (calcolo proposizionale) è il seguente s.f.:

- S: è formato dall'unione fra un insieme numerabile di variabili proposizionali $p, q, r, s, \ldots$, l'insieme dei connettivi $\rightarrow$ e $\neg$ e
  IMPLICA NOT
  l'insieme dei simboli ausiliari (e);

- W: l'insieme delle fbf (asserzioni) definito:
  1. ogni variabile proposizionale è una fbf;
  2. se α e β sono fbf allora lo sono anche $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\neg\alpha)$
  3. nient'altro è una fbf

$\alpha \vee \beta \equiv ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)$ $\quad$ $\alpha \wedge \beta \equiv \neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$ $\quad$ $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

ESISTE UNA PRECEDENZA DEI CONNETTIVI $\neg, (\wedge, \vee), \rightarrow$

$\alpha \wedge \beta \rightarrow \neg\alpha \equiv ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\neg\alpha))$

- Ax
  - $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (A→)
  - $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ DISTRIBUTIVA (AS)
  - $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$ (A¬)
- $R = \{MP\}$ dove MP modus ponens è la regole $\dfrac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$

$R(\alpha, \alpha \to \beta, \beta)$

se α è vere, $\alpha \to \beta$ è vere

allore è banale che β è vere

se studente < 18 é bocciato $(\alpha \to \beta)$ $\Rightarrow \beta$ G è bocciato

G PRESO - 17 α

STUDIARE $Con_{P_0}(\emptyset)$ L'INSIEME DEI TEOREMI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE