

Prendiamo i coefficienti che hanno lo stesso grado e li mettiamo
e sisteme

$$\left\{ \begin{array}{l} 3e - 1 = 0 \\ 2b + 6e = 0 \\ c + 2b = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e = \frac{1}{3} \\ -2c - 2b = 0 \\ 2b = -c \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e = \frac{1}{3} \\ c = 2 \\ b = -1 \end{array} \right.$$

ESEMPIO 2 Risolviamo alcune equazioni lineari complete a coefficienti costanti.

1. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - y' = x^2 e^x.$$

Risolviamo intanto l'omogenea associata. L'equazione caratteristica

$$\alpha^2 - \alpha = 0 \rightarrow \lambda(\lambda-1) = 0 \rightarrow \lambda = 0 \text{ e } \lambda = 1$$

ammette le soluzioni $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$ quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 2$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$y(x) = x(ax^2 + bx + c)e^x.$$

Derivando due volte la $y(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(3ax^2 + 2bx + c + 6ax + 2b)e^x = x^2 e^x$$

da cui $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$, $c = 2$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$$

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - y' = e^{2x}. \rightarrow \text{eq. caratteristica: } \lambda^2 - \lambda = 0$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $\lambda = 1 \text{ e } \lambda = 0$



$$y(x) = k_1 e^x + k_2.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = 2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 0$, quindi si cerca una funzione del tipo $y(x) = ce^{2x}$. Derivando due volte la $y(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(4c - 2c)e^{2x} = e^{2x} \rightarrow 2c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

da cui $c = \frac{1}{2}$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 + \frac{1}{2}e^{2x}.$$

3. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - y' = 2x + 1.$$

Anche in questo caso, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = 0$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 1$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$y(x) = x^1 (e^{kx} + b) \rightarrow y(x) = x(ax + b).$$

Derivando due volte la $y(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$2a - 2ax - b = 2x + 1$$

da cui $a = -1$, $b = -3$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = x(-x - 3) \rightarrow -x^2 - 3x$$

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 - x - 3.$$

Nei due successivi esempi ci saranno utili la definizione della funzione esponenziale in campo complesso e la Proposizione 5. Ricordiamo che se $\beta + i\gamma \in \mathbb{C}$ allora si definisce

$$e^{\beta+i\gamma} = e^\beta (\cos \gamma + i \sin \gamma)$$

e quindi

$$e^\beta \cos \gamma = \text{parte reale di } e^{\beta+i\gamma}, \quad e^\beta \sin \gamma = \text{parte immaginaria di } e^{\beta+i\gamma}.$$

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + y = 2x \cos x. \quad (3.11)$$

Per ricondurci alla situazione prevista in (3.10), si tiene conto del fatto che $\cos x$ è la parte reale di e^{ix} e si procede nel seguente modo: si considera l'equazione

$$y'' + y = 2xe^{ix} \quad (3.12)$$

in cui il termine noto è del tipo (3.10), se ne trova un integrale particolare \bar{y} . La soluzione cercata per la (3.11) è, grazie alla Proposizione 5, la parte reale di \bar{y} . (Se invece di $2x \cos x$ il termine noto fosse stato $2x \sin x$, la soluzione della (3.11) sarebbe stata la parte immaginaria di \bar{y} .)

Procediamo, dunque, nella risoluzione della (3.12). L'equazione caratteristica $\alpha^2 + 1 = 0$ ammette le soluzioni $\alpha = \pm i$ quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = i$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 1$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$\bar{y}(x) = x(ax + b)e^{ix}.$$

Derivando due volte $\bar{y}(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(4aix + 2a + 2ib)e^{ix} = 2xe^{ix}$$

da cui $a = -\frac{1}{2}i$, $b = \frac{1}{2}$.

Si ha dunque

$$\bar{y}(x) = \left(-\frac{1}{2}ix^2 + \frac{1}{2}x \right) (\cos x + i \sin x)$$

la cui parte reale è

$$\frac{1}{2}x^2 \sin x + \frac{1}{2}x \cos x.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x + \frac{1}{2}x^2 \sin x + \frac{1}{2}x \cos x.$$

5. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + y = (x + 4) \sin 2x.$$

Procedendo come nel caso precedente, determiniamo prima di tutto un integrale particolare dell'equazione differenziale

$$y'' + y = (x + 4)e^{2ix}$$

osservando che $h = 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 1$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$\bar{y}(x) = (ax + b)e^{2ix}.$$

Derivando due volte la $\bar{y}(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(-3ax + 4ai - 3b)e^{2ix} = (x + 4)e^{2ix}$$

da cui $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{3} - \frac{4}{9}i$. Si ha dunque

$$\bar{y}(x) = \left(\left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \right) - \frac{4}{9}i \right) (\cos 2x + i \sin 2x)$$

la cui parte immaginaria è

$$-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \sin 2x - \frac{4}{9}x \cos 2x.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \sin 2x - \frac{4}{9}x \cos 2x$$

6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione, come si trova facilmente, è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{-3x},$$

occorre quindi determinare le costanti k_1 e k_2 in modo da soddisfare i valori iniziali richiesti. Si ha $y'(x) = k_1 e^x - 3k_2 e^{-3x}$, imponendo i valori iniziali si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} k_1e + k_2e^{-3} = 0 \\ k_1e - 3k_2e^{-3} = 1 \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione $k_1 = \frac{1}{4e}$, $k_2 = -\frac{e^4}{3}$, dunque il problema di Cauchy ammette l'unica soluzione

$$y(x) = \frac{e^x}{4e} - \frac{3e^{-3x}}{e^4}.$$