21 ottobre 2025_MZ

martedì 21 ottobre 2025 11:10

Premesse

1) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ $\quad a \leq b \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

A, B SEPARATI

$\Updownarrow$

$\sup A \leq \inf B$

ogni $x \in [\sup A, \inf B]$ elem. di separazione

se $\sup A = \inf B$ (unico elem. di separazione)
A e B si dicono contigui $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \, a \in A, b \in B :$
$b - a < \varepsilon$

2) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice UNIFORMEMENTE CONTINUA se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta > 0 :$ se $x_1, x_2 \in (a,b)$, $|x_1 - x_2| < \delta$ si ha $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

teorema di HEINE-CANTOR: se f è cont. in un intervallo chiuso e limitato, allora è unif. cont.

INTEGRALE DI RIEMANN

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$M = \max\limits_{[a,b]} f \qquad m = \min\limits_{[a,b]} f$

DEF. decomposizione di $[a,b]$ $\quad D = \{x_0; x_1; \dots; x_{n-1}; x_n\}$

$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

$[a,b] = [x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] \qquad I_i = [x_{i-1}, x_i] \quad i = 1 \to n$

$m_i = \min\limits_{I_i} f = f(z_i) \qquad M_i = \max\limits_{I_i} f = f(y_i) \qquad y_i, z_i \in I_i$

$|D| = \max(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1})$ ampiezza di D

$s(f,D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ somma inferiore secondo RIEMANN relativa alla funz. f e alla decomp. D

$S(f,D) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ somma superiore ....

$\underline{S}$ = ins. delle somme inferiori

$\overline{S}$ = " " superiori

$s(f,D) \leq S(f,D)$

si può far vedere che $s(f, D_1) \leq S(f, D_2) \quad \forall D_1, D_2$

cioè $\underline{S}$ ed $\overline{S}$ sono separati $\Rightarrow \sup \underline{S} \leq \inf \overline{S}$

TEOREMA $\sup \underline{S} = \inf \overline{S}$ ($\underline{S}$ ed $\overline{S}$ sono contigui)

Ts. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, s \in \underline{S}, S \in \overline{S} : S - s < \varepsilon$

f uniform. continua (per il teor. di Heine-Cantor) quindi fissato ε per la tesi cons. $\frac{\varepsilon}{b-a}$

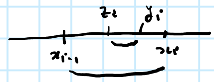
$\exists \, \delta > 0 :$ se $x_1, x_2 \in [a,b]$, $|x_1 - x_2| < \delta$ si ha $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Scelgo $D : |D| < \delta$

$S(f,D) - s(f,D) = \sum M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum m_i (x_i - x_{i-1}) =$

$S(f,D) - s(f,D) = \sum M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum m_i (x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(y_i) - f(z_i) \right) (x_i - x_{i-1})$



$x_i - x_{i-1} < |D| < \delta \Rightarrow |y_i - z_i| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y_i) - f(z_i) < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall i = 1, \dots, n$ quindi

$S(f,D) - s(f,D) < \sum \frac{\varepsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) =$

$= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$

dunque $\sup \underline{S} = \inf \bar{S}$

DEF. $\sup \underline{S} = \inf \bar{S} = \int_a^b f(x)\,dx$ INTEGRALE SECONDO RIEMANN (O DEFINITO) DI f in $[a,b]$

$f(x)$ funzione integranda

a, b estremi di integrazione

dx serve a dire il nome della variabile

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt = \dots$

$\forall D \quad s(f,D) \le \int_a^b f(x)\,dx \le S(f,D)$

$f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ cont. $a, b \in (\alpha, \beta)$ estendiamo il concetto di integrale definito al caso $a \ge b$

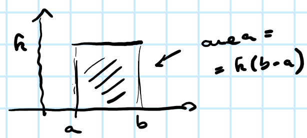
DEF. $\int_a^a f(x) = 0$

DEF. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ se $a > b$

ESEMPIO $f(x) = k \quad \forall x \in [a,b]$

scelta D $s(f,D) = S(f,D) = \sum_{i=1} k(x_i - x_{i-1}) = k(b-a)$

$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$



Proprietà dell' integrale definito

PROPR. DISTRIBUTIVA (senza dim.) $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$

PROPR. ADDITIVA $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ cont. $a, b, c \in (\alpha, \beta)$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

PROPRIETÀ DELLA MEDIA (per l'int. di Riemann)

IP $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont.

TS $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

DIM basta prendere $D = \{a, b\}$

Si ha inoltre $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

infatti $m \le \frac{\int}{b-a} \le M \Rightarrow \exists c \in [a,b] : \frac{\int}{b-a} = f(c)$

viceversa $m \le f(c) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \underbrace{f(c)(b-a)}_{= \int} \le M(b-a)$

$b-a$ $\qquad\qquad$ $b-a$

viceversa $\quad m \le f(c) \le M \Rightarrow m(b-a) \le f(c)(b-a) \le M(b-a)$

$$\int$$

Prima prop. di monotonia $\quad f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int f(x)\,dx \ge 0 \leftarrow$ dato che $m \ge 0$

$= 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$

$\uparrow$ non dim.

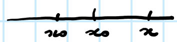
Seconda prop. di monotonia $\quad f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

infatti $\quad \int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) \ge 0$

prop. distrib. $\qquad$ $\uparrow$ prima prop. di monot.

FUNZIONE INTEGRALE

$f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ cont. $\quad x_0 \in (\alpha,\beta)$



$\forall x \in (\alpha,\beta)$ $\quad$ cons $\quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ $\quad$ funzione integrale di punto iniziale x_0

$\int_2^x \dots$ $\qquad$ è una funz. int.

$\int_x^2 \dots$ $\qquad$ non " " $\qquad \int_x^2 = -\int_2^x \dots$ è l'opposta di una funz. int.

$\int_2^{\log x} \dots$ $\qquad$ non " " $\qquad$ è composta della funz. int. $\int_2^y \dots$ e $\log x$

Cons. due funz. integrali $\quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad G(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$

$(x_0, x_1 \in (\alpha,\beta))$

$F(x) = \int_{x_0}^{x} \dots = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} \dots}_{k} + \int_{x_1}^{x} = G(x) + k$ $\quad$ differiscono per una costante

ciò ci fa pensare che F potrebbe essere una primitiva di f

Teorema di derivazione della funzione integrale

IP $\quad f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ cont. $\quad x_0 \in (\alpha,\beta)$

poniamo $\quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

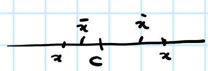
TS $\quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$

es. $\quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad F'(x) = e^{-x^2}$

DIM. $\quad$ Sia $c \in (\alpha,\beta)$ dim che $\quad F'(c) = f(c)$

$$r(x) = \frac{F(x) - F(c)}{x-c} = \frac{\int_{x_0}^{x} \dots - \int_{x_0}^{c} \dots}{x-c} = \frac{\int_{x_0}^{x} \dots + \int_{c}^{x_0} \dots}{x-c} =$$

$$= \frac{\int_c^x f(t)\,dt}{x-c}$$



se $x > c$ $\quad$ per la prop. della media $\exists \bar{x} \in [c,x] : \quad r(x) = f(\bar{x})$

se $x < c$ $\quad \dfrac{\int_c^x \dots}{x-c} = \dfrac{-\int_x^c \dots}{-(c-x)} = \dfrac{\int_x^c \dots}{c-x} \Rightarrow$ per la prop. della media $\exists \bar{x} \in [x,c] : \quad r(x) = f(\bar{x})$

dunque in ogni caso $\quad r(x) = f(\bar{x}) \Rightarrow \lim_{x \to c} r(x) = \lim_{\bar{x} \to c} f(\bar{x}) = f(c) \Rightarrow$ TS.

f è allora una primitiva di φ. Ne segue il

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Ogni funz. continua ammette primitive

Osserv. esistono funz. non continue che hanno la prim.

$$\varphi(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

$\nexists \lim_{x\to 0}\varphi(x) \Rightarrow$ non è cont.

cons. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

$x\neq 0 \quad f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\varphi(x)$

$x=0 \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x\sin\frac{1}{x}\to 0=\varphi(0)$

$f'(x)=\varphi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ma φ non è cont.

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $\varphi:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ continua e sia f una sua prim.

Siano $a,b\in(\alpha,\beta)$

Allora si ha $\int_a^b \varphi(x)\,dx=f(b)-f(a)=[f(x)]_a^b$

es. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$

DIM. f è una prim. Un'altra prim. è $G(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt$

$f(x)=G(x)+k \quad \forall x\in(\alpha,\beta)$

$x=a \quad f(a)=G(a)+k=k$

$x=b \quad f(b)=G(b)+k=\int_a^b\varphi(t)\,dt+f(a) \Rightarrow$ TS