Capitolo 1 Giuffrida - Ragusa (1.1 e 1.2)

2×2: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \to a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\begin{matrix} - & + \end{matrix}$

3×3 $\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$

$\begin{matrix} - & - & -\,+ & + & + \end{matrix}$

Lemma 1:

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

A^i è la i-esima di A

$A^i = \alpha V + \alpha' V'$, $V, V' \in M_{1,n}(\mathbb{R})$

$$\det A = \alpha \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^{(i-1)} \\ V \\ A^{(i+1)} \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + \alpha' \det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ V' \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$$

Lemma 2 A' è la matrice ottenuta scambiando 2 righe allora $\det A' = -\det A$

Corollario 3

A' è la matrice ottenuta applicando una permutazione σ alle righe di A allora $\det A' = \operatorname{sgn}(\sigma) \det A$

Esempi lemma 1

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}=0 \qquad (1\ 2\ 3)=\underset{\alpha}{1}\underset{V'}{(1\ 0\ 0)}+\underset{\alpha'}{2}\underset{V'}{\left(0\ 1\ \tfrac{3}{2}\right)}$$

calcola questo determinante

$$=1\det\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}+2\det\begin{pmatrix}0&1&\frac{3}{2}\\3&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}=$$

se ho una riga $=\{0\,0\,0\}$

Proposizione 4

1) Se $\exists i\in\{1-n\}$ tale che $A^{i}=\{0\,0\,0\}$ allora $\det A=0$

2) Se ha 2 righe uguali il $\det A=0$

3) $$\det\begin{pmatrix}A^{(1)}\\A^{(i)}\to\alpha A^{(j)}\\A^{(n)}\end{pmatrix}=\det A$$

Ricordiamo poiché $\det A^{T}=\det A$ tutto quello che vale per le righe vale anche per le colonne

---

Teorema di Binet: Se abbiamo 2 matrici quadrate $A,B\in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$$\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$$ Capire meglio questa cosa

Dimostrazione: $A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$ righe $=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_n\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{1j} & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{jn}\\ \\ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot B^{1}+a_{12}B^{2}\ ---\ a_{1N}B^{n}\\ a_{21}\cdot B^{1}+a_{22}B^{2}\ ---\ a_{2N}B^{n}\\ \vdots\\ a_{m1}B^{(1)}+a_{m2}B^{2}+\ ---\ a_{nn}B^{n}\end{pmatrix}$$

$$\det A\cdot B = a_{11} \det \begin{pmatrix} B^1 \\ a_{21} B^1 + a_{2n} B^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n1} B^1 \end{pmatrix} + \dots - a_{1n} \det \begin{pmatrix} B^{(n)} \\ a_{21} B^{(1)} \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \det \begin{pmatrix} B_1 \\ a_{21} B^1 \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{1} \dots \sum_{j=1}^{n} a_{1j} a_{2j} \dots a_{jn} \det \begin{pmatrix} B^{(j_1)} \\ B^{(j_2)} \\ \vdots \\ B^{(j_n)} \end{pmatrix}$$

$$\det A\cdot B = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \det B - \operatorname{sgn}(\sigma) = \det B \cdot \underbrace{\sum \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \operatorname{sgn}(\sigma)}_{\det A} = \det B \cdot \det A$$

Corollario $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibile

$\det(A^{-1}) = 1 / \det A$

Dimostrazione

$A \cdot A^{-1} = id_n \qquad \det(id_n) = 1 = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Quindi A è invertibile se $\det A \neq 0$

Metodo migliore per calcolare il determinante

$A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \qquad i,j \in \{1 \dots N\} \qquad \underbrace{A_{ij} = M_{n-1,n-1}}$

la sottomatrice di A ottenuta rimuovendo la i-esima e la j-esima colonna

Esempio:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

A_{22} = rimuovo la seconda riga e la seconda colonna $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

Il minore di A corrispondente agli indici (i, j) come

$m_{ij} = |A_{ij}| = \det A_{ij}$

il determinante di A è uguale al det di A_{ij}

teorema di laplace

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \qquad V_i = \{i \dots n\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} (A_{ij})$$

Analogamente per $j \in \{1 \dots N\}$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1N} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\det A = e_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + e_{12}(-1)^{1+2}|A_{21}| + \dots e_{1m}(-1)^{1+m}|A_{1m}|$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Queste le ignoriamo perchè verrebbe tutto 0

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (0 + 2) - (-2 - 12) = 2 - (-14) = 2 + 14 = 16$$

Quelle in viola sono i risultati delle moltiplicazioni tra i numeri nelle diagonali (considerando anche il segno della diagonale)

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \qquad \forall i,j \in \{1 \dots N\}$

A stare

$a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A_{ij}|$ cofattore di A rispetto agli indici di i, j

la matrice aggiunta di A è

$A^* = \underbrace{adj}(A) = (a^*_{ij})^T \in M'_{n,n}(\mathbb{R})$

matrice aggiunta in inglese

$A \cdot A^* = \det A \cdot id_n$

$A^{-1} = A^* / \det A$

Corollario di A : $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

A invertibile $\Longleftrightarrow$ $rk A = n$ $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

in tal caso $\qquad A^{-1} = A^* / \det A$