9 ottobre 2025_AL

giovedì 9 ottobre 2025 13:54

Proprietà di omogeneità: dim.

TS $\int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$

Se $F \in \int c f(x)\,dx \Rightarrow F'(x) = c f(x)$

$F(x) = c\,\frac{F(x)}{c}$ $\quad D\left(\frac{F(x)}{c}\right) = \frac{F'(x)}{c} = \frac{c f(x)}{c} = f(x)$

quindi $F \in c \int f(x)\,dx$

Sia ora $F \in c \int f(x)\,dx \Rightarrow \exists\, G$ prim. di f : $F(x) = c\,G(x)$

$\Rightarrow F'(x) = c\,G'(x) = c f(x) \Rightarrow F \in \int c f(x)\,dx$

es. $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+3) + k$

Proprietà distributiva (senza dim.)

IP f, g dot. di prim. in (a,b)

TS $f+g$ è dotata di prim. e $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

una delle somme di una prim. di f e una di g

es. $\int (e^x + \cos x)\,dx = e^x + \sin x + k$

Metodo di integrazione per decomposizione in somma

f, g dot. di prim., $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int f(x)\,dx + c_2 \int g(x)\,dx$

es. $\int (3x^4 + 2e^x)\,dx = \frac{3}{5}x^5 + 2e^x + k$

Metodo di integrazione per parti

IP $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili

$f g'$ dotata di prim.

TS $f' g$ " " e $\int \underset{\substack{\uparrow\\ FD}}{f'(x)}\, \underset{\substack{\uparrow\\ FF}}{g(x)}\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$

fattore differenziale fattore finito

DIM $\int f'g = \int (f'g + fg' - fg') = \int \underbrace{(f'g + fg')}_{D(fg)} - \int fg' = fg - \int fg'$

esempio

$\int e^x \underset{\substack{\uparrow\\ FD}}{x^4}\,dx = e^x \frac{x^5}{5} - \int e^x \frac{x^5}{5}\,dx$ NON CONVIENE

$\int \underset{\substack{\uparrow\\ FD}}{e^x} x^4\,dx = e^x x^4 - 4\int e^x x^3\,dx =$

$= e^x x^4 - 4e^x x^3 + 12\int e^x x^2\,dx =$

$= e^x x^4 - 4e^x x^3 + 12 e^x x^2 - 24\int e^x x\,dx =$

$= e^x x^4 - 4e^x x^3 + 12e^x x^2 - 24e^x x + 24\int e^x\,dx =$

$= e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + k$

per esec. $\int e^x x^6\,dx$

$\int \log x\,dx \int \underset{\substack{\uparrow\\ FD}}{1}\cdot \log x\,dx = x\log x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx =$

$= x(\log x - 1) + k$

$\int \underset{\substack{\uparrow\\ FD}}{x^3} \log x\,dx = \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{16}x^4 + k$

$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int \underset{\substack{\uparrow\\ FD}}{1}\cdot \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + k$

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ per ricorrenza

$I_1 = \operatorname{arctg} x + k$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{\cancel{1+x^2}}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}\,dx}_{= I_1} + \int \frac{-x^2}{(x^2+1)^2} =$$

osserviamo che $D\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}}_{FD}\, x\,dx = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}\cdot 1\,dx}_{= I_1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + k$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \underbrace{\int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^3}\,dx}_{= I_2} + \int \frac{-x^2}{(x^2+1)^3}\,dx =$$

$$\left[D\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{-2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x}{(x^2+1)^3} \right]$$

$$= I_2 + \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{-4x}{(x^2+1)^3}}_{FD}\, x\,dx = I_2 + \frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+1)^2}x - \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot 1\,dx}_{= I_2}$$

per esercizio I_4

$$\int \underbrace{e^x}_{FD} \cos x\,dx = e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{FD} \sin x\,dx =$$

$$= e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

questa situazione rientra nel seguente risultato

Se $\int f(x)\,dx = g(x) + c\int f(x)\,dx \quad c \neq 1$

allora $\int f(x)\,dx = \frac{1}{1-c}\,g(x) + k$

quindi $\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + k$

esec. rifarlo scegliendo e^x come FD

$$\int \sin x \underbrace{\cos x}_{FD}\,dx = \sin^2 x - \int \sin x \cos x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + k$$

II metodo $\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c$

$$-\frac{1}{4}\cos 2x = -\frac{1}{4}(1-2\sin^2 x) = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4}$$

differiscono per una costante!

Prima formula di integrazione per sostituzione

IP $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive

$g : (a,b) \to (c,d)$ derivabile

TS $f(g(x))\,g'(x)$ è dotata di primitive e

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=g(x)}$$

ins delle prim di f composte con g

$g'(x)\,dx = dg$ SBAGLIATISSIMO

$g(x) = t \quad dg = \quad ''$

Si deve integrare la funzione esterna e poi comporre le primitive con g

es. $\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x)}_{D(x^2)}\cos x^2\,dx = \qquad f(t) = \cos t \quad g(x) = x^2$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos t\,dt\right]_{t=x^2} = \frac{1}{2}\sin x^2 + k$$

pongo $x^2 = t \quad dx^2 = 2x\,dt$ SBAGLIATO

DIM. Entrambi i membri della tesi sono uguali a $F(g(x)) + k$ dove F è una primitiva di f.

Esempi

$\int x^2 e^{2x^3+1}\,dx = \qquad f(t) = e^t \quad g(x) = 2x^3+1 \quad g'(x) = 6x^2$

$$= \frac{1}{6}\int 6x^2 e^{2x^3+1}\,dx = \frac{1}{6}\left[\int e^t\,dt\right]_{t=2x^3+1} = \frac{1}{6}e^{2x^3+1} + k$$

$$= \frac{1}{6}\int 6x^2 e^{2x^3+1}\,dx = \frac{1}{6}\left[\int e^t\,dt\right]_{t=2x^3+1} = \frac{1}{6}e^{2x^3+1} + k$$

$$\int \frac{\log^3 x + 2\log^2 x + 3\log x}{x}\,dx = \left[\int (t^3+2t^2+3t)\,dt\right]_{t=\log x} =$$

$$= \frac{\log^4 x}{4} + 2\frac{\log^3 x}{3} + 3\frac{\log^2 x}{2} + k$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x + 3}\,dx = \qquad f(t) = \frac{1}{t+3}$$

$$g(x) = \operatorname{tg} x \quad g'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

$$= \left[\int \frac{dt}{t+3}\right]_{t=\operatorname{tg} x} = \log|\operatorname{tg} x + 3| + k$$

$$\int \frac{\overbrace{e^x}^{=D(e^x)}}{e^{2x}+1} = \qquad f(t) = \frac{1}{t^2+1} \quad g(x) = e^x$$

$$= \left[\int \frac{dt}{t^2+1}\right]_{t=e^x} = \operatorname{arctg} e^x + k$$

Polinomi trigonometrici

$$I_n = \int \cos^n x\,dx$$

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$I_1 = \sin x + k$$

$$I_2 = \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + k$$

$$\cos^3 = \cos \cdot \cos^2 = \\ = \cos(1-\sin^2)$$

$$I_3 = \int \cos^3 x\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{D(\sin x)}(1-\sin^2 x)\,dx = \left[\int (1-t^2)\,dt\right]_{t=\sin x} =$$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + k$$

$$I_4 = \int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + \frac{1+\cos 4x}{2} + 2\cos 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + \sin 2x\right) + k$$

$$\int \cos^5 x = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)^2 = \left[\int (1-t^2)^2\,dt\right]_{t=\sin x}$$

per eserc. I_6, I_7

$$J_n = \int \sin^n x\,dx$$

$$J_1 = -\cos x + k$$

$$J_2 = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \dots$$

$$J_3 = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\,dx = -\int (-\sin x)(1-\cos^2 x)\,dx =$$

$$= -\left[\int (1-t^2)\,dt\right]_{t=\cos x} = \dots$$

per eserc. J_4, J_5

$$I = \int \cos^n x \sin^m x\,dx$$

se n è dispari $n = 2h+1$

$$I = \int \cos x\,(\cos^2 x)^h \sin^m x\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{D(\sin x)}(1-\sin^2 x)^h \sin^m x\,dx$$

per sostit.

se m è dispari si isola un fattore $\sin x$

se m ed n dispari " " " o $\cos x$

se n, m pari $n = 2h$ $m = 2p$

$$\int (\cos^2 x)^h (\sin^2 x)^p\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^h \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p dx$$

ci si riconduce a I_n

$$\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx = \int \sin x \cos^2 x\,(1-\cos^2 x)\,dx =$$

$$= -\int (-\sin x)(\cos^2 x - \cos^4 x)\,dx = -\left[\int (t^2 - t^4)\,dt\right]_{t=\cos x}$$

$$\int \cos^5 x \sin^2 x\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{D(\sin x)}(1-\sin^2 x)^2 \sin^2 x\,dx =$$

$$= \left[\int (1-t^2)^2 t^2\,dt\right]_{t=\sin x} = \dots$$

$$\int \cos^5 x \sin^3 x\,dx = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\cos^5 x\,dx =$$

$= -\int (-\sin x)(\cos^5 x - \cos^7 x)\,dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + k$

$\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\,dx =$

$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1}{8}\int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx =$

$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin x + \frac{1}{24}\sin^3 x + k$

eserc. $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx \qquad \int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$

$\int \cos^4 x \sin^2 x\,dx \qquad \int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$

Primitive di funzioni ~~che contengono~~ con duplice espressione analitica

$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ e^x & x \ge 0 \end{cases}$ trovare le prim. in $]-\infty, +\infty[$

F prim. di f in $]-\infty,+\infty[$ in partic. lo è in $]-\infty,0[$ e in $]0,+\infty[$ quindi è del tipo

$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + c & x<0 \\ e^x + k & x \ge 0 \end{cases}$

F è prim. in $\mathbb{R}$ ⇒ è der. in $\mathbb{R}$ ⇒ è cont. in $\mathbb{R}$

Imponiamo la continuità in $x=0$

$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x) \qquad c = 1+k$

quindi le prim. sono $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + k + 1 & x<0 \\ e^x + k & x \ge 0 \end{cases}$

Trovare le prim. in $]-\infty,+\infty[$ di $f(x) = x^2 - 3x + |x-1| + 4$

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & x<1 \\ x^2 - 2x + 3 & x \ge 1 \end{cases}$

F sarà del tipo $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + k_1 & (x<1) \\ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + k_2 & (x \ge 1) \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x) \qquad \frac{1}{3} - 2 + 5 + k_1 = \frac{1}{3} - 1 + 3 + k_2$

$k_2 = k_1 + 1$

$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + k & x<1 \\ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + k + 1 & x \ge 1 \end{cases}$

Trovare F prim. in $]-\infty,+\infty[$ di $f(x) = 2|x| - 3x + x^2 + 1$ tale che $F(-2) = 1$

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1 & x<0 \\ x^2 - x + 1 & x \ge 0 \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + k_1 & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + k_2 & x \ge 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x) \qquad k_1 = k_2$

$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + k & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + k & x \ge 0 \end{cases} \leftarrow$ $F(-2) = 1$

$-\frac{8}{3} - 10 - 2 + k = 1$

$k = \frac{47}{3}$

$F(x) = \begin{cases} - - - + \frac{47}{3} & x<0 \\ - - - + \frac{47}{3} & x \ge 0 \end{cases}$

eserc.

Trovare F prim. in $]-\infty,+\infty[$ di $f(x) = 2x + |x-3| + 4$ tale che $F(6) = 1$

Trovare F prim in $[0,\pi]$ di $|\cos x|$ tale che $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

Trovare F prim in $]-\infty,+\infty[$ di $f(x) = |x^2-1| + 2x^2 - x + 3$ tale che $F(0) = -1$

$\begin{cases} 3x^2 - x + 2 & x \le -1 \end{cases}$

$-1 \qquad 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4 & -1 < x < 1 \\ 3x^2 - x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + k_1 & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + k_2 & -1 < x < 1 \\ x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + k_3 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} f(x) \qquad -1 \cancel{-\frac{1}{2}} - 2 + k_1 = -\frac{1}{3} \cancel{-\frac{1}{2}} - 4 + k_2 \Rightarrow k_2 = k_1 + \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \qquad \frac{1}{3} \cancel{-\frac{1}{2}} + 4 + k_2 = 1 \cancel{-\frac{1}{2}} + 2 + k_3 \Rightarrow k_3 = k_2 + \frac{4}{3} = k_1 + \frac{8}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + k & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + k + \frac{4}{3} & -1 < x < 1 \quad \leftarrow \\ x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + k + \frac{8}{3} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(0) = -1 \qquad k + \frac{4}{3} = -1 \qquad \Rightarrow k = -\frac{7}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{3} & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1 & -1 < x < 1 \\ x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3} & x \geq 1 \end{cases}$$