7 ottobre 2025 MZ

martedì 7 ottobre 2025 11:01

Benvenuti!

TEAMS EAM2 2526 cod. ir5xx88 (avvisi)

STUDIUM (materiale didattico)
Elementi di Analisi Matematica 2 (A-E)

ricev. dal 16 ottobre LU 9-10 (prenot.)
GI 9-11 (senza prenot.)

mail ornella.naselli@unict.it studio 345

INTEGRAZIONE INDEFINITA

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

DEF. $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ se $\exists F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

F PRIMITIVA DI f in (a,b)

es. $f(x) = \cos x \qquad F(x) = \sin x$

$f(x) = e^x \qquad F(x) = e^x$

TEOREMA SULLE PRIMITIVE

Sia F una prim. di f in (a,b).
Allora, tutte e sole le prim. di f in (a,b) sono le funzioni $F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

OSSERV. Se c'è una prim., ce ne sono infinite

DIM. 1) dim. che se F è una prim., allora $G(x) = F(x) + k$ è una prim.

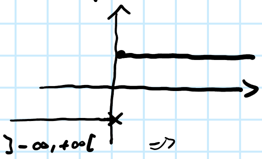
$\exists G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$

2) dim. che se F e G sono due prim., allora
$\exists k \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + k \iff G(x) - F(x) = k$

Sia $H(x) = G(x) - F(x)$, si ha $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$
$\forall x \in (a,b) \Rightarrow H$ è costante

Esempio di funzione che non ha primitive

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



p.a. sia F una prim. di f in $]-\infty, +\infty[\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists F'(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

in $[0, +\infty[\quad F'(x) = 1 \Rightarrow F(x) = x + c$ in $[0, +\infty[$

in $]-\infty, 0[\quad F'(x) = -1 \Rightarrow F(x) = -x + k$ in $]-\infty, 0[$

ma F deriv $\Rightarrow$ cont. in $]-\infty, +\infty[\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} (-x + k) = \lim_{x \to 0^+} (x + c)$

cioè $k = c$ quindi $F(x) = \Big/ \, x + c$ in $[0, +\infty[\Rightarrow$

ma f deriv $\Rightarrow$ cont. in $]-\infty,+\infty[$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} (-x+k) = \lim_{x\to 0^+} (x+c)$

cioè $k = c$ quindi $f(x) = \begin{cases} x+c & \text{in } [0,+\infty[\\ -x+c & \text{in }]-\infty,0[\end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = |x| + c \Rightarrow |x| = f(x) - c$ sarebbe

deriv. in $]-\infty,+\infty[$ assurdo.

DEF. integrale indefinito di f = insieme delle primit. di f

$$\int f(x)\,dx$$

$f(x)$ funz. integranda

dx serve SOLO a dire qual è la variabile

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha primit.} \\ \{F(x)+k : k\in\mathbb{R}\} & \text{se } F \text{ è una primit.} \end{cases}$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$ NON E' LA DEF.

INTEGRALI IMMEDIATI

$\int e^x\,dx = e^x + k$ $\qquad \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + k$

$\int \cos x\,dx = \sin x + k$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + k = -\arccos x + k$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$

$\int (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = \operatorname{tg} x + k$

$D(x^3) = 3x^2 \Rightarrow \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + k$

$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq -1$

es. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k$

$\int \frac{dx}{x} = \log x + k \qquad (x>0)$

$D(\log|x|) = \frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \log|x| + k$ in $]-\infty,0[$ e in $]0,+\infty[$

se f deriv. e $\neq 0$ $\quad D\left(\log|f(x)|\right) = \frac{1}{\cancel{|f(x)|}}\frac{\cancel{|f(x)|}}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + k$

es. $\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \log|x^2-4| + k$ in $]-\infty,-2[$, in $]-2,2[$, in $]2,+\infty[$

$D(\sin 4x) = 4\cos 4x \Rightarrow \int \cos 4x\,dx = \frac{\sin 4x}{4} + k$

$\int \cos\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha x}{\alpha} + k$ $\qquad \int e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + k$

$\int \sin\alpha x\,dx = -\frac{\cos\alpha x}{\alpha} + k$

Proprietà di omogeneità

Sia f dotata di primitive e sia $c \neq 0$.
Allora, cf è dotata di prim. e si ha
$$\int c f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$
$\parallel$ ins delle prim di f moltiplicate per c

es. $\int 4e^x\, dx = 4e^x + k$

OSSERV. se $c=0$ I membro $\int 0 \cdot f(x) dx = \int 0\, dx =$ tutte le funz cost.

II membro $0 \cdot (F(x)+k) = \{0\}$

DIM. Sia $F \in \int c f(x)\, dx \quad = \quad F'(x) = c f(x)$

osserviamo che $F(x) = c \frac{F(x)}{c}$ e $D\left(\frac{F(x)}{c}\right) = \frac{c f(x)}{c} = f(x)$
$\Rightarrow F \in$ II membro

Viceversa se $F \in c\int f(x) dx \Rightarrow F(x) = c\, G(x)$ con $G'(x) = f(x)$
quindi $F'(x) = c f(x) \Rightarrow F \in$ I membro

Proprietà distributiva (senza dim.)

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive

Allora, $f+g$ è dotata di primitive e $\int (f(x)+g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

es. $\int (e^x + \cos x)\, dx = e^x + \sin x + k$

$$\int \left(e^x + \frac{x^3+1}{x^4+12}\right) dx = e^x + \int \frac{x^3+1}{x^4+12}\, dx = \dots$$

Metodo di integrazione indefinita per decomposizione in somma

f, g dot. di prim. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)\, dx + c_2 \int g(x)\, dx$$

es. $\int \frac{3x+4}{x^2+1}\, dx = \int \frac{3x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{4}{x^2+1}\, dx =$

$= 3 \int \frac{x}{x^2+1}\, dx + 4 \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + 4 \arctg x =$

$= \frac{3}{2} \log(x^2+1) + 4 \arctg x + k$