PROSSIMA LEZIONE: DOMANI 8/4 ORE 8 AULA 24

Limite di f al tendere di x a c

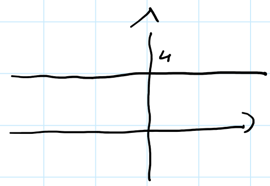
$f : X \to \mathbb{R} \qquad X \subseteq \mathbb{R} \qquad c \in D(X)$

DEF.

$\ell \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to c} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$ se $x \in X, x \neq c, |x - c| < \delta$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

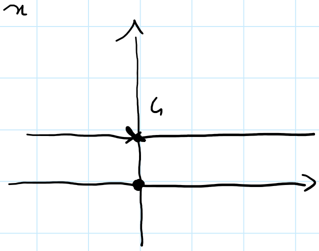
$|x-c|<\delta \Rightarrow c - \delta < x < c + \delta$

es. $f(x) = 4 \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to 0} f(x)$



$|f(x) - \ell| = |4 - 4| < \varepsilon$ vero $\forall x$

$f(x) = \begin{cases} 4 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 4$

$|f(x) - \ell| = |4 - 4| < \varepsilon$ vero $\forall x \neq 0$

nel punto $x = 0$ la condiz. non è verificata ma il limite vale egualmente 4.

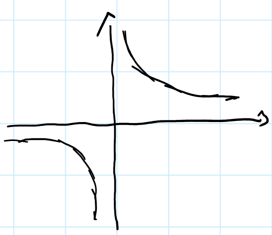
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ si può fare anche se f nel p. $x = 0$ non è definita

DEF.

$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \ (-\infty)$ se $\forall k > 0 \ \exists \delta > 0 :$ se $x \in X, x \neq c, |x - c| < \delta$ si ha $f(x) > k \quad (< -k)$

es. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\qquad$ si deve avere $\frac{1}{x^2} > k \iff x^2 < \frac{1}{k} \iff -\frac{1}{\sqrt{k}} < x < \frac{1}{\sqrt{k}}, x \neq 0$

quindi $\delta = \frac{1}{\sqrt{k}}$



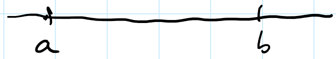
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$

la restrizione a $]0, +\infty[$ diverge a $+\infty$ $\qquad \left(\frac{1}{x} > k \iff x < \frac{1}{k} \quad \delta = \frac{1}{k} \right)$

" $\quad$ a $]-\infty,0[$ $\quad$ " $\quad$ $-\infty$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{x} < -k \iff -\frac{1}{x} > k \iff -x < \frac{1}{k} \Rightarrow \right.$

$\left. \Rightarrow x > -\frac{1}{k} \qquad \delta = -\frac{1}{k}\right)$

$f : (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R} \qquad c \in [a,b]$



$\forall c \in]a,b]$ si cons. la restriz. di f a $]a,c[$, il suo limite per $x \to c$ si chiama

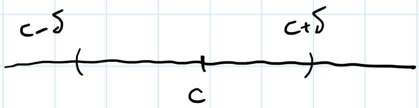
$\lim_{x\to c^-} f(x)$ LIMITE SINISTRO di f per $x \to c$

$\forall c \in [a,b[$ analogam. si introduce il $\lim_{x\to c^+} f(x)$ LIMITE DESTRO

es. come abbiamo visto $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

TEOREMA $\quad$ Se $c \in]a,b[$ allora $\exists \lim_{x\to c} f(x) \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$

DIM.



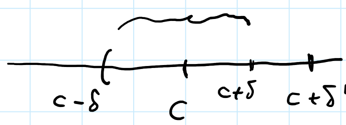
Se $\lim_{x\to c} f(x) = l \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ in $]c-\delta, c+\delta[\setminus \{c\}$ quindi in partic.

$|f(x) - l| < \varepsilon$ in $]c-\delta, c[\Rightarrow \lim_{x\to c^-} f(x) = l$

$|f(x) - l| < \varepsilon$ in $]c, c+\delta[\Rightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = l$

Viceversa se $|f(x) - l| < \varepsilon$ per $x \in]c-\delta, c[$

$|f(x) - l| < \varepsilon$ per $x \in]c, c+\delta'[$



allora $|f(x) - l| < \varepsilon$ per $x \in]c-r, c+r[\setminus \{c\}$ con $r = \min(\delta, \delta')$

es. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ \ldots \end{cases}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \ldots \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

TEOREMI: unicità del limite

perm. del segno

confronto es.
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = \ell \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ \forall x \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = \ell$$

TEOREMA PONTE (caratterizzazione sequenziale del limite di una funzione)

= mediante le successioni

$f: X \to \mathbb{R} \quad c \in D(X)$

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \ (\pm\infty) \iff \forall \{a_n\} \subseteq X \setminus \{c\}$ tale che $a_n \to c$ si ha $f(a_n) \to \ell \ (\pm\infty)$

$a_n : \mathbb{N} \to X \qquad f: X \to \mathbb{R} \qquad$ COMPOS. $n \in \mathbb{N} \to a_n \in X \to f(a_n)$

da qui seguono le operazioni con i limiti

es. $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \ , \ \lim_{x \to c} g(x) = L$ dim. che $\lim_{x \to c} f(x) g(x) = \ell L$

Sia $\{a_n\} \subseteq X$, $a_n \neq c$, $a_n \to c$ generica

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to c} f(x) = \ell \Rightarrow f(a_n) \to \ell \\ \quad\uparrow \text{ necessariam.} \downarrow \\ \lim_{x \to c} g(x) = L \Rightarrow g(a_n) \to \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(a_n) g(a_n) \to \ell L \underset{\text{suffic.}}{\Rightarrow} \lim_{x \to c} f(x) g(x) = \ell L$$

$f: (a, +\infty[\ \to \mathbb{R} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} > a$: se $x > \bar{x}$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ (-\infty)$ se $\forall k > 0 \ \exists \bar{x} > a$: se $x > \bar{x}$ si ha $f(x) > k$ $(< -k)$

$f:]-\infty, a) \to \mathbb{R} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} < a$: se $x < \bar{x}$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\pm\infty$ analog.

PROPOSIZIONE Se $f: X \to \mathbb{R}$ è una funzione elementare e $c \in X$ allora $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Allora si devono fare solo i "limiti utili"!

$\lim_{x \to \pm\infty}$ se f è definita in un interv. non limit.

$\lim_{x \to c}$ se $c \in \mathcal{D}(X)$, f non è definita in c oppure cambia la legge di def. a sinistra e a destra di c

Limiti delle funzioni composte

$f: (\alpha, \beta) \setminus \{\gamma\} \to \mathbb{R}$. $\quad g: (a,b) \setminus \{c\} \to (\alpha,\beta)\setminus\{\gamma\}$

$\lim_{x \to c} g(x) = \gamma \qquad \lim_{y \to \gamma} f(y) = \ell$

$\Rightarrow$ posto in $(a,b)\setminus\{c\}$ $F(x) = f(g(x))$ si ha $\lim_{x \to c} F(x) = \ell$

$$F(x) = f(\underbrace{g(x)}_{\downarrow\,\gamma}) \to \ell$$

es. $\lim_{x \to 3} \log(\underbrace{x+5}_{\to 8}) = \log 8$

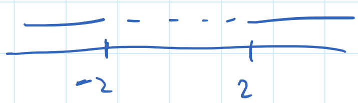
infatti se $a_n \to c \Rightarrow g(a_n) \to \gamma \Rightarrow \underbrace{f(g(a_n))}_{F(a_n)} \to \ell$

il teorema vale anche quando c, γ, ℓ valgono $\pm\infty$

es. $\lim_{x \to +\infty} \log(\underbrace{x^2+2}_{\to +\infty}) = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} 3^{\frac{x}{x^2-4}} = 0$

$x \to 2$, $x^2 - 4 \to 0^-$, $\frac{x}{x^2-4} \to -\infty$



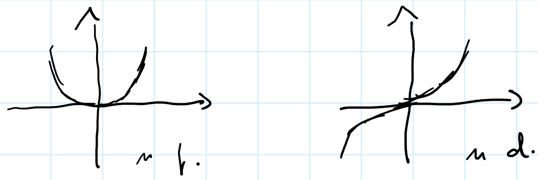
Limiti delle funzioni elementari

FUNZ. POTENZA

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$ è def in $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad x^n > k \iff x > k^{\frac{1}{n}}$

$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pari} \\ -\infty & n \text{ disp} \end{cases} \qquad x^n = \underbrace{(-1)^n}_{\pm 1} \underbrace{(-x)^n}_{\to +\infty}$



$f(x) = x^{-n} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ se n è pari

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ se n è disp.

$f(x) = x^\alpha$ α non intero è def in $[0, +\infty[$ se $\alpha > 0$
$]0, +\infty[$ se $\alpha < 0$

$\alpha > 0 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad x^\alpha > k \iff x > k^{\frac{1}{\alpha}}$

se $\alpha < 0 \quad f(x) = \frac{1}{x^{-\alpha}} \quad (-\alpha > 0) \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Polinomi $\quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \qquad n \in \mathbb{N}, \; a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

per $x \to \pm\infty$ si trova spesso f.i. $+\infty - \infty$

$f(x) = x^n \underbrace{\left(a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{x}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{\frac{a_n}{x^n}}_{\to 0} \right)}_{\to a_0}$

$+\infty$ se $a_0 > 0$

a_0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_0 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ p.}, a_0 > 0 \text{ opp. } n \text{ d.}, a_0 < 0 \\ -\infty & \text{se } n \text{ p.}, a_0 < 0 \text{ opp. } n \text{ d.}, a_0 > 0 \end{cases}$$

I polinomi divergono sempre per $x \to \pm\infty$, si deve guardare SOLO il termine di grado massimo

es. $\lim_{x\to+\infty} (2x - x^3 + x^2 - 2) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (x^8 - x^7 - 2x^6 - x^5 - 3x^4 - 2) = +\infty$

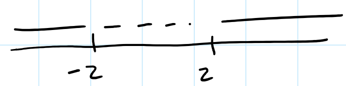
$\lim_{x\to-\infty} (2x - x^3 + x^2 - 2) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} (2x - x^4 + x^2 - 2) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - x^2 - x + 4) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} (3x^6 - x^4 - x^3 - 2x^2 - 1) = +\infty$

Funz. raz. fratte $\quad f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ $\quad$ A, B polinomi (B di grado positivo)
A, B non hanno fattori comuni

se $B(c) = 0$ $(c \in \mathbb{R})$ si ha $A(c) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = \infty$

es. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{\overbrace{1-x}^{\to -1}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^+}} = -\infty$



Per $x \to \pm\infty$ $\quad$ f si presenta nella f.i. $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + \dots + a_n}{b_0 x^p + \dots + b_p} = \underbrace{\frac{x^n}{x^p}}_{= x^{n-p}} \; \underbrace{\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_p}{x^p}}}_{\to \frac{a_0}{b_0}}$$

se $n = p \Rightarrow x^{n-p} = 1 \quad \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$

se $n < p \Rightarrow x^{n-p} \to 0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

se $n > p \Rightarrow x^{n-p} \to \infty \quad \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-3x+1}{x^3+3} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-3x+1}{x^3+3} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-3x^6+1}{x^3+3} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-3x^5+1}{x^3+3} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-3x^6+1}{x^4+3} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-3x^7+1}{1-x^3} = +\infty$

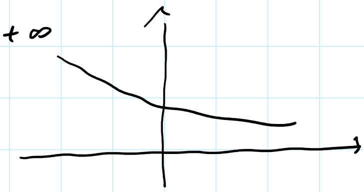
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+3x^5+1}{3-x^2} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^7-x^9+1}{x^4+2} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2-3x^6}{3-x^3} = +\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4+3x-1}{x^8+3} = 0$ $\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3-2}{1-x^6} = 0$ $\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{(3x-1)^2} = \frac{2}{9}$

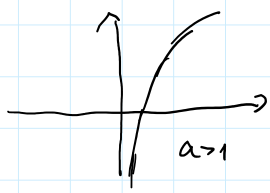
Funz esponenziale $\quad a>0,\ a\neq 1 \quad f(x)=a^x \quad]-\infty,+\infty[$

$a>1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \end{cases}$ $\qquad 0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \end{cases}$

$a>1$



Funz. logaritmo $\quad a>0,\ a\neq 1 \quad f(x)=\log_a x \quad]0,+\infty[$



$a>1$

$0<a<1$

$a>1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad 0<a<1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to0} f(x) = +\infty$

$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ $\qquad 1^\infty \quad (+\infty)^0 \quad 0^0$

Limiti notevoli

$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ infatti se $a_n \to 0$ $\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$ $\Rightarrow$ col teor. ponte la dim. è completa

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ infatti se $a_n \to 0$ $\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1 \Rightarrow$ col teor. ponte la dim. è completa

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Ricordiamo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$. Si può provare che $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ è def per $x<-1$, $x>0 \Rightarrow$ ha senso calcolare questi due limiti

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ è def. per $x>-1$, $x \neq 0 \Rightarrow$ ha senso calc. $\lim\limits_{x\to 0}$ e si presenta nella forma 1^∞

Si dim. che $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Ne segue che $\lim\limits_{x\to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1$

$$\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

quindi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e si dim. anche che $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Funz. infinitamente grande = un infinito

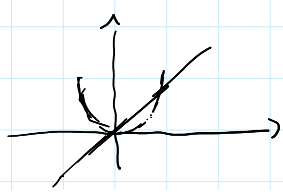
f, g infiniti simultanei (entrambi per $x\to c$ o entrambi per $x \to +\infty$ ...)

se $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to l > 0$ infiniti dello stesso ordine

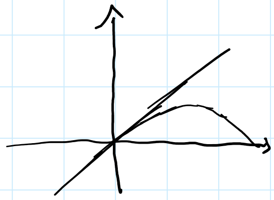
se $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to +\infty$ f infinito di ordine superiore

f, g infinitesimi simultanei

se $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ f infinitesimo di ordine superiore es. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x} = 0$



se $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to l>0$ sono dello stesso ordine se $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to l>0$ sono dello stesso ordine



se $\left|\frac{f(x)}{(g(x))^n}\right| \to l>0$ f infinitesimo di ordine n rispetto ad x

es. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ ma $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ $n=2$

infinitesimi fondamentali: per $x\to\pm\infty$ $\frac{1}{x}$

per $x\to c$ $x-c$

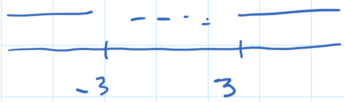
infinito fondamentale: per $x\to\pm\infty$ x

per $x\to c$ $\frac{1}{x-c}$

Esercizi

$$\lim_{x\to 3^-} 2^{\overbrace{\frac{\overbrace{3x-4}^{\to 5}}{\underbrace{x^2-9}_{\to 0^-}}}^{\to -\infty}} = 0 \qquad \cancel{= 2^{-\infty}}$$

ERRORE



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{3x}{x^3+4}}{e^{\frac{1}{x^4}}-1} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1-\cos\frac{3x}{x^2+4}}{\frac{9x^2}{(x^2+4)^2}}}_{\to\frac{1}{2}}\ \underbrace{\frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^4}}-1}}_{\to 1}\ \underbrace{x^4\frac{9x^2}{(x^3+4)^2}}_{\to 9} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to(-4)^-}\underbrace{\left(\frac{1}{e}\right)}_{<1}^{\overbrace{\frac{\overbrace{x-8}^{\to -12}}{\underbrace{x^2-16}_{\to 0^+}}}^{\to -\infty}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\log_{\underbrace{\frac{1}{2}}_{<1}}\overbrace{\frac{\overbrace{x^2-9}^{\to 0^+}}{\underbrace{x+2}_{\to 5}}}^{\to 0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_2\frac{x^4+1}{2x^3+3} = +\infty$$

Ricordiamo infine che: $\quad \sin x, \ \cos x, \ \operatorname{tg} x$ non sono regolari per $x \to \pm\infty$

$\operatorname{tg} x$ diverge per $x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-$ e per $x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

ASINTOTI

$f : (a,b) \to \mathbb{R} \qquad gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in (a,b)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$r: \ ax + by + c = 0 \qquad$ Se $\lim d(P, r) = 0$ con $P \in gr(f)$ si dice che r è un asintoto per f

ASINTOTO VERTICALE $\qquad$ Se $\lim_{x\to c} f(x)$ (event. solo da dx. o da sin.)

la retta di eq. $x = c$ è detta asintoto verticale per f

$P(x_0, y_0)$
$r: ax + by + c = 0$
$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$P(x, f(x))$
$r: \ x - c = 0$
$$d(P, r) = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot f(x) - c|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x - c| \to 0 \quad \text{per } x \to c$$

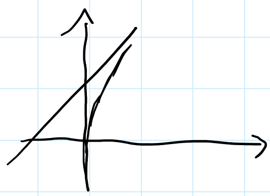
ASINTOTO DESTRO $\qquad f : (a, +\infty[\ \to \mathbb{R}$

- se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ si dice che la retta di eq. $y = \ell$ è as. orizz. destro per f

$P(x, f(x))$
$r: \ y - \ell = 0$
$$d(P, r) = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot f(x) - \ell|}{\sqrt{0^2+1^2}} = |f(x) - \ell| \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty$$

(analog. si introduce l'asintoto orizz. sinistro)

- se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ si cerca un as. obliquo di eq. $y = mx + p$



f è un infinito

cons. $g(x) = mx + p$ è un infinito

affinché r sia asintoto per f, f e g devono essere infiniti dello stesso ordine

quindi f deve essere inf. dello stesso ordine di x quindi $\frac{f(x)}{x}$ deve avere un limite finito. Allora si cons. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ se esso è $m \neq 0$ si cons.

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$ se esso è $p \in \mathbb{R}$ la retta $r: y = mx + p$ è asintoto.

infatti $r: \; mx - y + p = 0$

$P \; (x, f(x))$

$$d(P,r) = \frac{|mx - f(x) + p|}{\sqrt{m^2+1}} \to 0$$

Analog. si trova l'as. obl. sinistro