Benvenuti!

Canale Teams EAM2 2526 codice ir5xx88 (AVVISI)

Studium Elementi di Analisi Matematica 2 (A-E) (MATERIALE DIDATTICO)

Ricevimento dal 16 ottobre LU 9-10 (su prenotaz. via mail entro il giorno precedente)
GI 9-11 (senza prenotaz.)

UFFICIO 345

mail ornella.naselli@unict.it

CAP. 1 INTEGRALI

INTEGRAZIONE INDEFINITA

DEF $f, F : (a,b) \to \mathbb{R}$ F derivabile e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$

F è detta PRIMITIVA di f in (a,b)

es. x^2 è prim. di $2x$

e^x " e^x

$\sin x$ " $\cos x$

- - —

QUESTIONI: 1) tutte le funz. hanno primitive?
2) se f ha prim., quante ne ha?
3) e si trovano?

2) TEOREMA SULLE PRIMITIVE. Sia F una prim. di f in (a,b).
Allora, tutte e sole le prim. di f sono le funt. $F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

DIM. Se F è una prim. allora dato $k \in \mathbb{R}$ anche $G(x) = F(x) + k$ è una prim.

infatti $\exists\, G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$

Inoltre, se G è un'altra prim. devo provare che $\exists\, k \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + k$

Cons. $H(x) = G(x) - F(x)$ Si ha $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$

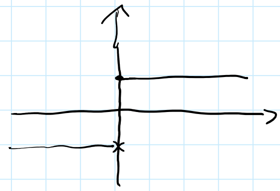
Per un teorema di EAM1, H è costante $\Rightarrow$ TS.

Per un teorema di EAM1, H è costante $\Rightarrow$ TS.

OSSERVAZ. Se una funz. ha primitive, ne ha infinite

1) esempio di funzione che non ha primitive

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Supp. p.a. che $\exists\, F$ prim. di f in $]-\infty, +\infty[$ $\Rightarrow$ $\exists\, F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

in parte. in $[0, +\infty[$ $\quad F'(x) = 1 \Rightarrow F(x) = x + k \quad \forall x \in [0, +\infty[$

" $\quad$ in $]-\infty, 0[$ $\quad F'(x) = -1 \Rightarrow F(x) = -x + c \quad \forall x \in]-\infty, 0[$

ma F è prim. di f in $]-\infty, +\infty[$ $\Rightarrow$ è deriv $\Rightarrow$ è continua

imponiamo la continuità in $x = 0$ $\quad \underbrace{\lim_{x \to 0^-} F(x)}_{(-x+c)} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} F(x)}_{(x+k)} \Rightarrow c = k$

allora $F(x) = \begin{cases} x + k & x \geq 0 \\ -x + k & x < 0 \end{cases} = |x| + k$ assurdo perché $|x|$ non è derivabile in $x=0$

3) DEF. INTEGRALE INDEFINITO DI f $\quad \int f(x)\,dx$ = insieme delle primitive di f (può anche essere vuoto) Se F è una prim. di f allora $\int f(x)\,dx = F(x) + k$

$$= \{ F(x) + k : k \in \mathbb{R} \}$$

$f(x)$ = funzione integranda

dx serve SOLO a indicare il nome della variabile

INTEGRALI IMMEDIATI

$D(x^4) = 4x^3$

$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + k$

$\int e^x\,dx = e^x + k$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \quad (n \in \mathbb{N})$

$\int \cos x\,dx = \sin x + k$

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$

$\int \frac{dx}{x} = \log x + k \quad (x > 0)$

$\int (1 + tg^2 x)\,dx = tg\, x + k$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + k = -\arccos x + k$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + k$

$D(e^{2x}) = 2e^{2x}$ $\qquad \int e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + k$

$\int \cos(\alpha x)\, dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + k$ $\qquad \int \sin(\alpha x) = -\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} + k$

$D\left(\log|x|\right) = \frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \log|x| + k$ $\quad (x \in]-\infty, 0[$ opp $x \in]0, +\infty[)$

f deriv $\Rightarrow D\, |f(x)| = \frac{|f(x)|}{f(x)} f'(x)$

f deriv e non nulla $\Rightarrow$ $D\left(\log|f(x)|\right) = \frac{1}{|f(x)|}\frac{|f(x)|}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + k$ $\qquad$ es. $\int \frac{2x}{x^2+4} dx = \log(x^2+4) + k$

$\int \frac{2x}{x^2-3} dx = \log|x^2-3| + k$ $\quad$ in $]-\infty, -\sqrt{3}[$, in $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, in $]\sqrt{3}, -\infty[$

Proprietà di omogeneità. Sia f dotata di primitive.

Allora, se $c \neq 0$, anche cf è dot. di prim. e $\int c f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$

ins. delle prim. di f moltiplicate per c

es $\int 3 \cos x\, dx = 3 \int \cos x\, dx = 3 \sin x + k$

Se $c = 0$ $\quad$ I membro $= \int 0\, dx =$ ins. di tutte le funz. costanti

II membro $= \{0\}$