ESAME DI ALGORITMI
Università degli Studi di Catania
Corso di Laurea Triennale in Informatica
2 dicembre 2024

Si risolvano i seguenti esercizi in un tempo non superiore a 3 ore. Si abbia cura di consegnare la risoluzione dei primi 4 esercizi in un foglio (Foglio A) separato da quello utilizzato per la consegna degli ultimi due esercizi (Foglio B). Gli studenti delle vecchie coorti che devono sostenere solo il modulo di Algoritmi dovranno risolvere gli esercizi 1, 2, 3, 5 e 6 (tempo 2 ore). Gli studenti che devono sostenere solo il modulo di Laboratorio dovranno risolvere l'esercizio 4 (tempo un'ora).

——— Foglio A ———

1. Fornire le funzioni ricorsive utilizzate per calcolare il costo di una soluzione ottimale negli algoritmi di Floyd-Warshall e All-Pairs-Shortest-Path. In entrambi i casi, spiegare l'idea alla base della funzione ricorsiva e chiarire il significato delle variabili e dei parametri utilizzati nel calcolo.

2. Definire formalmente il problema del Rod-Cutting, mostrando, anche attraverso un esempio perché è considerato un problema di ottimizzazione. Fornire una definizione ricorsiva della funzione utilizzata per il calcolo di una soluzione ottima al problema e mostrare lo pseudo-codice dell'algoritmo di programmazione dinamica basato su tale funzione.

3. Descrivere formalmente il problema della *compressione di un testo*. Spiegare, anche tramite un esempio, perché questo è considerato un problema di ottimizzazione. Definire il concetto di codici prefissi e fornire lo pseudocodice dell'algoritmo di Huffman per il calcolo di una soluzione ottima al problema, indicandone la complessità computazionale.

4. Si fornisca lo pseudo-codice (o i codici in linguaggio `C/C++`) dell'algoritmo Bellman-Ford per il calcolo dei cammini minimi da sorgente singola in un grafo pesato. Indicare la complessità computazionale dell'algoritmo fornito.

——— Foglio B ———

5. Si consideri l'equazione di ricorrenza
$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n\sqrt{n}). \tag{1}$$
Si risolva l'equazione (1) al variare del parametro reale $b > 1$, utilizzando il metodo Master e si stabilisca per quali valori di b la soluzione $T(n)$ all'equazione (1) soddisfa le seguenti condizioni
$$\text{(i.) } T(n) = \mathcal{O}\left(n^2\right) \qquad \text{(ii.) } T(n) = \Theta\left(n\sqrt{n}\log n\right) \qquad \text{(iii.) } T(n) = \omega\left(n\right).$$

6. Si consideri il seguente problema di ottimizzazione computazionale.

Longest Common Subsequence Problem (LCS)
INPUT: due sequenze $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n\rangle$.
GOAL: trovare una sottosequenza Z comune a X e Y di lunghezza massima.

Si scriva una funzione ricorsiva per la lunghezza delle soluzioni ottime a un instanza di LCS e si dimostri che LCS ha la proprietà di sottostruttura ottima.