

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{soluzioni} = \left\{ \begin{array}{l} 0, 0, 2 \end{array} \right\}$$

soluzioni finite

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} r_2 &= r_2 - 2r_1 \\ r_3 &= r_3 - 3r_1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & +1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 & 2 \end{array} \right)$$

$$r_3 = r_3 - r_2 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \quad r_3 = r_3 / 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

nessuna soluzione perché questi sono tutti zero e quindi non esiste

$x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 1$

$\boxed{0 = 1}$

↳ impossibile

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dopo Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\text{Soluzioni} = \{(1-t, 0, 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

il sistema ha infinite soluzioni perché dipendono da t

Teorema di Rouché - Capelli

Il sistema $A \cdot x = B$ con n variabili e m equazioni

matrice
completa

ha soluzione $\rightarrow \text{rk } A = \text{rk } (A/B) = n$

se $n = m$ allora esiste un'unica soluzione

se $n < m$ allora esistono infinite soluzioni che dipendono da $m-n$ parametri

Esempio:

$$\begin{cases} x - y + dz = -1 \\ dx + 2z = -2 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$d \in \mathbb{R}$ esistere che d sia un punto

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & d & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\pi_2 = \pi_2 - d\pi_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & d & -1 \\ 0 & 0 & -d & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \pi_2 = \pi_3 - d\pi_2 \\ \pi_3 = \pi_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & d & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-d & -2+2d \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & d & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -d & 2-d & -2+d \end{array} \right) \xrightarrow{\pi_3 = \pi_3 + d\pi_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & d & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-d & -2+2d \end{array} \right)$$

$$2-d - d^2 = 0$$

$$(d-1)(d+2) = 0 \Rightarrow d = 1, -2$$

mentre nel punto dobbiamo disentendersi quando $d = 0$

Se $d \neq 1, -2$

il rKA = 3

che è uguale ad m → numeri di variabili

quindi esiste una reale soluzione

Se $d = -1$ le matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-2 - 2x_3, -1 - x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \begin{matrix} \text{è un} \\ \text{parametro} \end{matrix}$$

Se $d = -2$ le matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right) \begin{matrix} \text{non esistono} \\ \text{soluzioni} \end{matrix}$$

potremo scrivere anche
così $x_3 = t$

$$\left\{ (-2 - 2t, -1 - t, t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Se $d \neq 1, -2$ le matrice si trasforma infatti

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & d & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cancel{2-d-d^2} & -2+2d \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 = \frac{R_3}{2-d-d^2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-2}{d+2} \end{array} \right)$$

Risolviti con Gauss-Jordan e poi prendi le soluzioni

Sistemi portici pari \rightarrow sistemi omogenei

$$A \cdot X = 0, \text{ ovvero } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione generale $X = \begin{pmatrix} ? \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Assumiamo che y e y' siano soluzioni di $Ax = 0$ ovvero

$$Ay = 0 = Ay' \Rightarrow A(y - y') \Rightarrow Ay - Ay' = 0 - 0 = 0$$

$y + y'$ = soluzione

e y = soluzione

Come applichiamo queste regole ad un sistema normale?

sistema normale

sistema omogeneo

$$AX = B \rightsquigarrow A \cdot X = 0$$

non indica le sommatorie (si chiama
una sola sommatoria) Sfinge

Σ l'insieme delle soluzioni di $Ax = B$

Σ_0 l'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$

y soluzione di Σ_0

$$\Sigma = \left\{ y + y_0 \mid y_0 \in \Sigma_0 \right\}$$

y soluzione di Σ

Dimostrazione y soluzione di $Ax = B$

caso sistema normale

$$y' \in \Sigma \Leftrightarrow Ay' = B \text{ consideriamo } y' - y$$

$$A(y' - y) = Ay' - Ay = B - B = 0$$

$\Rightarrow y' - y$ è soluzione di $Ax = 0$

$$\Rightarrow y' - y = y_0 \in \Sigma_0 \Rightarrow y' = y + y_0, y_0 \in \Sigma_0$$

Caso sistema omogeneo

$$y_0 \in \Sigma_0 \Leftrightarrow A \cdot y_0 = 0 \text{ e consideriamo } y + y_0$$

$$A(y + y_0) = Ay + A y_0 = B + 0 = B \rightarrow (y + y_0) \in \Sigma$$

Esempio:

sistema
lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2z = -2 \\ y + x = -1 \end{cases}$$

sistema
omogeneo
con $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

matrice omogenea

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \Sigma_0 = \left\{ (-2x_3, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

matrice non nulla

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 2x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 \end{cases}$$

↓

$$\Sigma = \left\{ (-2 - 2x_3, -1 - x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{aligned}\Sigma &= \left\{ (-2, -1, 0) + \underbrace{(-2x_3, -x_3, x_3)}_{x_3 \in \mathbb{R}} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (-2, -1, 0) + x_3 (-2, -1, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} \Sigma_0\end{aligned}$$

Teorema di Cramer

$Ax = B$ sistema lineare, $A \in \mathbb{K}_{m,m}(\mathbb{A})$

matrice quadrata

Se A è invertibile allora $Ax = B$ ha un'unica soluzione

date $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ A_i è la matrice ottenuta da A

sostituendo l'ultima colonna con B

Dimostrazione $Ax = B \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot B$ $A^{-1} = A^*/\det A$

$$\Rightarrow x = A^* B / \det A$$

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{j=1}^m |A_{ij}| (-1)^{i+j} \cdot b_j \quad \det A_i$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & b_m & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & d & -1 \\ d & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\det A = d^2 + d - 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & d \\ d & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sostituisci B con ogni colonna di A

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & d \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = 2 - 2d - 2 + 2 = 2 - 2d$$

Calcolato con Sarrus sic qui che nelle precedenti colonne

colonne alle quale sostituire B

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A_2 = 1 - \lambda^2 + \lambda + 2 = -\lambda^2 + \lambda + 2 = -\lambda(\lambda - 1)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A_3 = -\lambda - \lambda + 2 = -2\lambda + 2$$

Prendo ogni risultato e lo divido per il $\det A$
 ($\det A = \lambda^2 + \lambda - 1$ in questo caso)

$$x_1 = \frac{2 - 2\lambda}{\lambda^2 + \lambda - 2}$$



$$\frac{-2(\lambda - 1)}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{-2}{\lambda + 2}$$

$$x_2 = \frac{-\lambda}{\lambda + 2}$$

$$x_3 = \frac{-2}{\lambda + 2}$$

Queste sono
già state
semplificate