Calcolo delle funzioni e Macchine di Turing deterministiche

Analizziamo le MT deterministiche come trasduttori, cioè come dispositivi capaci di realizzare il calcolo di funzioni parziali, definite in un qualunque dominio.

TRASDUTTORI PER IL CALCOLO DI FUNZIONI SU STRINGHE

DEF.
DATO UN TRASDUTTORE $\mathcal{M} = \langle \Gamma, \flat, Q, q_0, F, \delta \rangle$ ed UNA FUNZIONE $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ $(\Sigma \subseteq \Gamma)$, $\mathcal{M}$ CALCOLA LA FUNZIONE $f \iff$

$\forall x \in \Gamma^*$:

1.) Se $x \in \Sigma^*$ e $f(x) = y$ allore $q_0 x \overset{*}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} x \flat q y$ con $q \in F$

2) Se $x \notin \Sigma^*$ oppure se $x \in \Sigma^*$ e $f(x)$ non è definita allora,

assumendo la configurazione iniziale $q_0 x$, o non esistono computazioni massimali (non terminano) opp. esistono computazioni massimali che non terminano in uno stato finale.

ESEMPIO

LA MTD (esempio lezione precedente) calcola la funzione identità

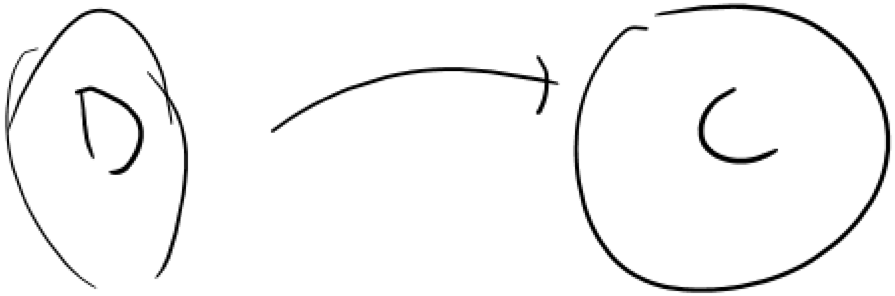
vale la computazione $q_0 x \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} x b q_F x \quad \forall x \in \{0,1\}^*$

In generale possiamo definire funzioni da un arbitrario dominio D ad un arbitrario codominio C, e ci possiamo ricondurre ai trasduttori operanti su stringhe e in questo modo identificare una codifica di tali domini sotto forma di stringhe di caratteri.

Se consideriamo una funzione intera, sull'alfabeto $\{0,1,2,\dots,9\} = \Sigma$ possiamo sempre considerare una funzione intera su un altro alfabeto $|\Sigma|$

Per calcolare il valore $m = f(n)$, partiamo da una configurazione iniziale $q_0 x$, dove x è la codificazione dell'intero n nell'Σ

L'output "m" sul nastro sarà la configurazione finale $x\bar{b}qy$ con $q \in F$ ed y la codificazione di m nell'alfabeto Σ



$$D = D_1 \times D_2$$

f a più argomenti

Nel caso in cui la funzione f è definita in un dominio con più argomenti del tipo $D_1 \times D_2$, allora basta porre $D = D_1 \times D_2$ in modo da considerare i caratteri come concatenazione delle codifiche di diversi argomenti separati da un carattere speciale. #

$$q_0\,\overset{D_1}{10}\#\overset{D_2}{111} \longmapsto 10\#111\bar{b}q1001$$

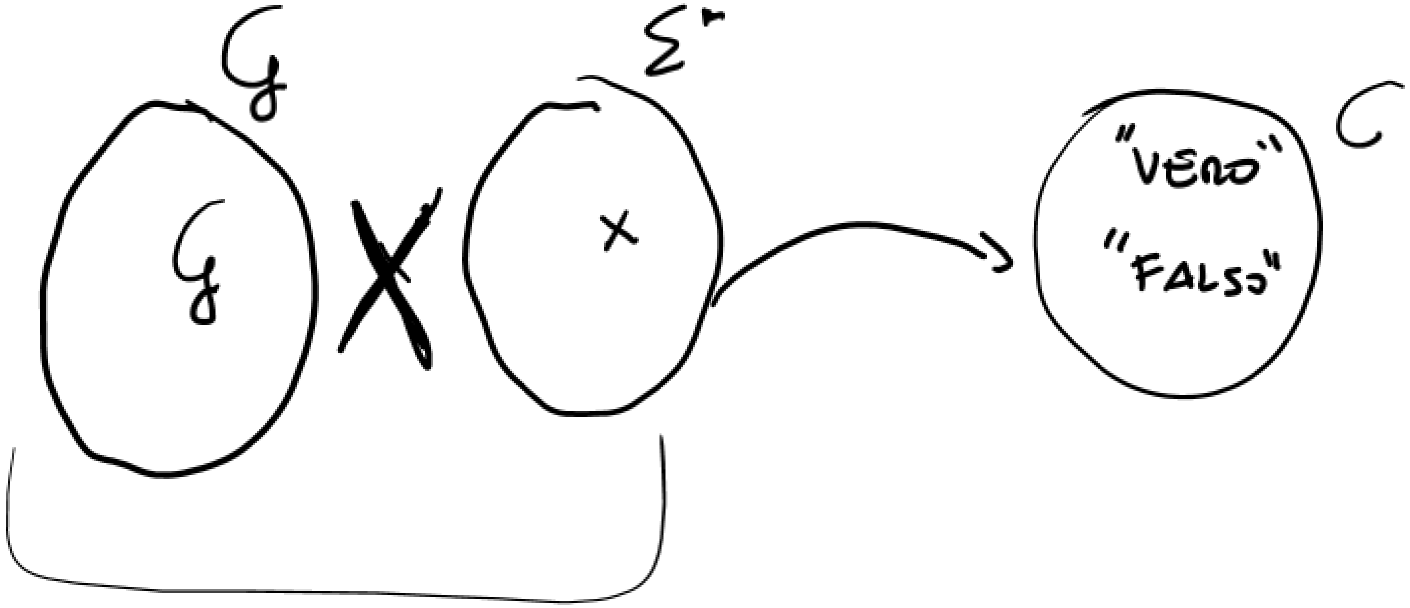
DEFINIZIONE

Un linguaggio è detto decidibile secondo Turing (T-decidibile) se esiste una macchina di Turing che lo riconosce.

L'ESEMPIO 5.4 DEFINISCE ANCHE I LINGUAGGI COSTITUITI DA STRINGHE PALINDROME $\boxed{\text{T-decidibili}}$

GLI ASF SONO EVIDENTI MT e il LINGUAGGIO di TIPO 3 è un linguaggio T-decidibile.

Possiamo estendere il concetto di T-decidibilità per la valutazione di predicati, ossia di funzioni con codominio {FALSO, VERO} come per esempio data una qualunque grammatica $\mathcal{G}$ di tipo 3 e una qualunque stringa x definita sull'alfabeto Σ di $\mathcal{G}$ il predicato Appartiene$(\mathcal{G}, x)$ che risulta "VERO" se $x \in L(\mathcal{G})$ FALSO ALTRIMENTI



APPARTIENE

FUNZIONE A PIÙ ARGOMENTI

$$(\mathcal{G}, x) \longmapsto \begin{cases} \text{"VERO"} & x \in \mathcal{L}(\mathcal{G}) \\ \text{"FALSO"} & x \notin \mathcal{L}(\mathcal{G}) \end{cases}$$

DEF.

Un linguaggio è detto semidecidibile secondo Turing (T-semidec...)
se esiste una macchina di Turing che lo accetta

OGNI LINGUAGGIO T-DECIDIBILE $\Rightarrow$ T-SEMIDECIDIBILE

$\not\Leftarrow$

$\hookrightarrow$ questa implicazione vale perché ogni linguaggio riconosciuto da una MT RISULTA ANCHE ACCETTATO.

ESEMPIO

Prendiamo due stringhe x e y definiamo la funzione Lunghezza>(x,y)
"VERO" se $|x|>|y|$ e "FALSO" ALTRIMENTI

$f: (\Sigma^*)^2 \to \Sigma^*$

T-DECIDIBILE

$D = \Sigma^* \times \Sigma^*$

$C = \Sigma^* = \{VERO, FALSO\}$

DEFINIZIONE

UNA FUNZIONE È DETTA CALCOLABILE SECONDO TURING (T-CALCOLABILE) SE ESISTE UNA MACCHINA DI TURING CHE LA CALCOLA.

- T-CALCOLABILE ESEMPIO 5.4
- MT con FUNZIONE $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ tale che $f(x) = x$ è T-CALCOLABILE

POSTULATO NOTO COME TESI DI CHURCH-TURING

- INDIMOSTRABILE, È UNANIMEMENTE RITENUTO VALIDO.

ESSO AFFERMA CHE OGNI PROCEDIMENTO ALGORITMICO ESPRESSO NELL'AMBITO DI UN QUALUNQUE MODELLO DI CALCOLO È REALIZZABILE MEDIANTE UNA MACCHINA DI TURING.

IN BASE A QUESTA TESI, POSSIAMO PARLARE IN GENERALE DI INSIEME DECIDIBILE E DI FUNZIONE CALCOLABILE SENZA FARE ESPLITO RIFERIMENTO ALLA MACCHINA DI TURING.

LA TESI CHURCH - TURING È INDIMOSTRABILE PERCHÉ UNA DIMOSTRAZIONE DI TALE POSTULATO RICHIEDEREBBE CHE VENISSE DIMOSTRATA L'EQUIVALENZA RISPETTO ALLE MACCHINE DI TURING DI TUTTI I POSSIBILI METODI DI CALCOLO.

MACCHINE DI TURING MULTINASTRO.

Nasce dall'esigenza di migliorare il fatto che la MT in alcuni contesti è poco agevole per risolvere problemi più strutturati. E se la confrontiamo con un automa a pila ci rendiamo conto che AP ha una separazione tra nastro e input e memoria di lavoro

INDICHIAMO CON MTM, le macchine di Turing multinastro o a più nastri nastri che contemporaneamente sono accessibili in lettura e scrittura con l'aggiunta di più testine (una per nastro)

Ad esempio, nel caso del riconoscimento delle stringhe palindrome risulta utile disporre due testine, sui due nastri, una sull'ingresso sinistro della stringa e una su quello destro, in modo da leggere in maniera efficiente la parola da dx a sx e viceversa.

LA MACCHINA DI TURING UNIVERSALE

MT : ASTRATTO, MECCANISMO ELEMENTARE, CONCETTI DI RICONOSCIMENTO E ACCETTAZIONE DEI LINGUAGGI

CALCOLO DI UNA FUNZIONE ASSOCIATA ALLA MT

DOPO VARI PASSAGGI, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE I LINGUAGGI DI TIPO 0 COINCIDONO CON I LINGUAGGI ACCETTATI DALLE MACCHINE DI TURING.

TRASDUTTORE $\mathcal{M} = \langle \Gamma, b, Q, q_0, F, \delta \rangle$ $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ $(\Sigma \subseteq \Gamma)$

$\mathcal{M}$ calcola $f \iff \forall x \in \Gamma^*$
- se $x \in \Sigma^*$ $f(x) = y \Rightarrow q_0 x \overset{*}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} x b q y$, $q \in F$
- se $x \notin \Sigma^*$ . . .

ESTENDIAMO LA DEFINIZIONE 5.8 CON QUESTA:

Prendiamo una funzione multi argomenti $m : (\Sigma^*)^n \longrightarrow \Sigma^*$

Diciamo che la macchina $\mathcal{M}$ calcola la funzione m se essa realizza la computazione $q_0 x_1 b \dots b x_n \overset{*}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} x_1 b \dots b x_n b q y$ con $q \in F \iff m(x_1, \dots, x_n) = y$

DEF.

UNA MACCHINA DI TURING $\mathcal{M} = \langle \Gamma, b, Q', \delta', q_0', F' \rangle$ dove b blank, Q' insieme degli stati, δ è la funzione di transizione, q_0' è lo stato iniziale di $\mathcal{M}$, F' è l'insieme degli stati finali, si dice macchina di Turing universale se esse calcola una funzione $u : (\Gamma^*)^{n+1} \longmapsto \Gamma^*$ con la seguente proprietà: data una qualunque macchina di Turing $\mathcal{M} = \langle \Gamma, b, Q, \delta, q_0, F \rangle$ che calcola la funzione $m : (\Gamma^*)^n \longmapsto \Gamma^*$ esiste una stringa $C_\mathcal{M} \in \Gamma^*$, che chiamiamo codifica di $\mathcal{M}$ tale che

$$u(C_\mathcal{M}, x_1, \dots, x_n) = m(x_1, \dots, x_n)$$