6 maggio 2025

martedì 6 maggio 2025 08:10

Esempi di asintoti

1) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$ $x=2$, $x=-2$ punti di infinito $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ le rette di eq. $x=2$, $x=-2$ sono as. vert.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ la retta di eq. $y=2$ è as. orizz. ds. e sin.

2) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^3-8}$ as. vert di eq. $x=2$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ la retta di eq. $y=0$ è as. orizz. ds. e sin.

3) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+3}$ as. vert di eq. $x=-3$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2+1}{x^2+3x} \to 2 \text{ per } x \to \pm\infty$$

$$f(x) - 2x = \frac{2x^2+1}{x+3} - 2x = \frac{2x^2+1-2x^2-6x}{x+3} \to -6 \text{ per } x \to \pm\infty$$

la retta di eq. $y = 2x-6$ è as. obl. ds. e sin.

4) $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x-3}$ as. vert di eq. $x=3$
non ci sono altri as.

$$\frac{\frac{2x^3+1}{x-3}}{x} = \frac{2x^3+1}{x^2-3x} \text{ diverge per } x \to \pm\infty$$

5) $f(x) = \sqrt{x^2-3}$

AS. DESTRO ($x \to +\infty \Rightarrow x = \sqrt{x^2}$)

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} = \sqrt{\frac{x^2-3}{x^2}} \to 1 \text{ per } x \to +\infty$$

$$\sqrt{x^2-3} - x = \frac{\cancel{x^2}-3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-3}+x} \to 0$$ $y = x$ eq. as. obl. ds.

AS. SIN. ($x \to -\infty \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$)

$$\frac{\sqrt{x^2-3}}{x} = -\frac{\sqrt{x^2-3}}{-x} = -\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2}} \to -1$$

$$\sqrt{x^2-3} + x = \frac{x^2-3-x^2}{\sqrt{x^2-3}-x} \to 0$$ $y=-x$ " sin

6) $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$

AS. DS. $\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}} \to 1$

$$\sqrt{x^2-2x} - x = \frac{\cancel{x^2}-2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{}+x} = \frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}+\frac{x}{x}} \to -1$$

eq. as. obl. ds. $y = x-1$

AS. SIN. $-\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{-x} = -\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}} \to -1$

eq. as. obl. dx $y = x - 1$

a sinistra $-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{-x} = -\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}} \to -1$

dev. $f(x) - x$

$\sqrt{x^2-2x} + x = \frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x} - x} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}} + \frac{-x}{-x}} \to 1$

eq. as. obl. sin. $y = -x + 1$

c) $f(x) = x \frac{\log x + 4}{\log x - 1}$ $\quad]0, e[\cup]e, +\infty[$

$x = e$ p. di inf. $\Rightarrow$ la retta di eq. $x = e$ è as. vert.

per $x \to 0$? $\quad \underset{\downarrow\, 0}{f(x) = x} \, \underbrace{\frac{1 + \frac{4}{\log x}}{1 - \frac{1}{\log x}}}_{\downarrow\, 1} \to 0$ (disc. eliminabile)

$\Downarrow$

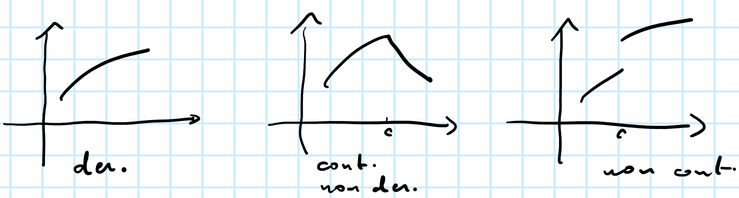
non c'è as. vert.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x + 4}{\log x - 1} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x \left(\frac{\log x + 4}{\log x - 1} - 1 \right) = \lim x \frac{\log x + 4 - \log x + 1}{\log x - 1} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{\log x - 1} = +\infty$ (lo proveremo più avanti)

non c'è as. obl.



der $\Rightarrow$ cont

$c \in (a,b)$ $\quad x \in (a,b)$, $x \neq c$ $\quad \Delta f = f(x) - f(c)$

$\Delta x = x - c$

$r(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

f cresc. in $c \iff r(x) > 0$ in un intorno di c

$r : (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to c} r(x) = f'(c)$

$R(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \; : \; (a-c, b-c) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$\exists f'(c) \iff \exists p$ pol. di I grado : $\quad p(c) = f(c)$

$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - p(x)}{x - c} = 0$

$p(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$ $\quad f(x) \simeq p(x)$ in prossimità di c

La retta di eq. $y = f(c) + f'(c)(x-c)$ è tang. al grafico