28 ottobre 2025_MZ

martedì 28 ottobre 2025 11:05

Cons. una funzione f di $n+1$ variabili ($n \in \mathbb{N}$)

$X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $\quad f : X \to \mathbb{R}$ $\quad f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$

La scrittura $\quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

è detta EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n IN FORMA ESPLICITA

È il problema di trovare una funzione $y(x)$ $\quad y : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte e tale che $\forall x \in (a,b)$

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in X$$
$$f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = y^{(n)}(x)$$

es. $n=1$ se $f(x,y) = f(x)$ $\quad$ l'eq. diventa $\quad y' = f(x)$ (ricerca delle primitive)

Dato $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in X$ $\quad$ si dice PROBLEMA DI CAUCHY

relativo all'eq. diff data e ai valori iniziali $y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$
il problema di trovare una sol. tale che $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

$$(PC) \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

se $n=1$ e se f è continua dato (PC) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$\exists\, r > 0 :$ in $]x_0 - r, x_0 + r[$ $\;(PC)$ ha una e una sola sol.

Una sol di un'eq diff è detta integrale dell'eq.
L'ins. delle sol. è detto INTEGRALE GENERALE
una singola sol. è detta " PARTICOLARE

EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

date $a(x)$ $\; f(x)$ $\qquad a, f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continue

eq diff lin. del I ordine $\qquad y' + a(x)\, y = f(x)$

$$y' = \underbrace{f(x) - a(x)\, y}_{f(x,y)} \qquad X = (\alpha,\beta) \times]-\infty, +\infty[$$

$a(x)$ coefficiente $\qquad$ sol. $\; y : (c,d) \subseteq (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ deriv.
$f(x)$ termine noto $\qquad y'(x) + a(x)\, y(x) = f(x) \quad \forall x \in (c,d)$

possiamo sempre riferirci al caso $(c,d) = (\alpha, \beta)$

Se $f(x) = 0 \;\; \forall x$ $\quad$ eq. omogenea
$\quad\;\; \neq 0$ $\qquad$ " completa

$$y' + a(x)\, y = f(x) \qquad (1)$$

$$y' + a(x)\, y = 0 \qquad (2) \qquad \text{OMOGENEA ASSOCIATA}$$

OSSERVIAMO CHE

1. y sol di (2), $k \in \mathbb{R} \Rightarrow ky$ sol di (2)
infatti posto $z = ky$ $\quad z'(x) + a(x) z(x) = k\big(y'(x) + a(x)\, y(x)\big) = 0$

2. y sol di (1), z sol di (2) $\Rightarrow w = y + z$ sol di (1)
infatti $\quad w'(x) + a(x)\, w(x) = y'(x) + z'(x) + a(x)\big(y(x) + z(x)\big) =$
$= y'(x) + a(x)\, y(x) + z'(x) + a(x)\, z(x) = f(x) + 0 = f(x)$

② y sol di (1), z sol di (2) $\Rightarrow$ $w = y + z$ sol di (1)

infatti $w'(x) + a(x)\,w(x) = y'(x) + z'(x) + a(x)\big(y(x) + z(x)\big) =$

$$= \underbrace{y'(x) + a(x)\,y(x)}_{f} + \underbrace{z'(x) + a(x)\,z(x)}_{0} = f(x) + 0 = f(x)$$

③ y, z sol di (1) $\Rightarrow$ $w = y - z$ sol di (2)

si prova come il precedente (eserc)

$$\underbrace{\text{INT GEN DI (2)}}_{G} + \underbrace{\bar{y}}_{\text{INT PARTIC DI (1)}} = \text{INT GEN DI (1)}$$

inoltre se z è un'altra sol di (1) $\Rightarrow$ $w = z - \bar{y} \in G$

Sol. della (2) $\quad y' + a(x)\,y = 0$

cons. $y(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ è sol $\quad 0 + a(x)\cdot 0 = 0$
(sol. id. nulla)

cerchiamo adesso una sol. y che non assume mai il valore zero, essendo cont. sarà sempre >0 o sempre <0

$\forall x \in (\alpha,\beta) \quad y'(x) = -a(x)\,y(x) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$

I membro $= D(\log|y(x)|)$ $\qquad$ Sia A una prim. di a
II $\quad$ " $\quad = D(-A(x))$

allora $\log|y(x)|$ e $-A(x)$ hanno la stessa derivata $\Rightarrow$

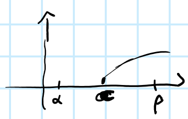
$\Rightarrow \log|y(x)| = -A(x) + k$

$|y(x)| = e^{-A(x)+k} = e^{-A(x)}\,e^{k} = c\,e^{-A(x)} \qquad c > 0$

$y(x) = k\,e^{-A(x)} \qquad k \in \mathbb{R} \qquad$ INT GENERALE $\qquad$ (3)

$k > 0 \Rightarrow$ sol positive
$k < 0 \Rightarrow$ " negative
$k = 0 \Rightarrow$ " id. nulla

Se ci fosse una sol y : $y(c) = 0$ e $y(x) \neq 0$ per $x \neq c$



$\lim_{x\to c} y(x) = 0 \quad$ ma in $]c, \beta[\quad y(x) = k\,e^{-A(x)}$
che non può tendere a zero

quindi l'integrale generale è effettivamente dato da (3)

es $\quad y' + x^4 y = 0 \qquad a(x) = x^4 \qquad A(x) = \frac{1}{5}x^5$

int gen $\quad y(x) = k\,e^{-\frac{1}{5}x^5}$

es $\quad$ modello di MALTHUS per l'andamento di una popolazione

$N(t)$ = numero degli individui all'istante $t \qquad N : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ derivabili

$N(0) = N_0 \qquad \lambda$ = tasso di natalità (numero di nuovi individui per ogni istante)

μ = " mortalità (numero di morti per ogni istante)

$\varepsilon = \lambda - \mu$ potenziale biologico

incremento del numero di individui da t a $t + h$

$N(t+h) - N(t) = N(t)(\lambda - \mu)\,h$

$\dfrac{N(t+h) - N(t)}{h} = N(t)(\lambda - \mu) \quad \Rightarrow \quad N'(t) = N(t)(\lambda - \mu) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad N'(t) + (\mu - \lambda)\,N(t) = 0$

è del tipo appena studiato con $a(t) = \mu - \lambda \quad \Rightarrow \quad A(t) = (\mu - \lambda)\,t$

$(\lambda-\mu)t \qquad \varepsilon t$

$\Rightarrow N'(t) + (\mu - \lambda) N(t) = 0$

è del tipo affine studiato con $a(t) = \mu - \lambda \Rightarrow A(t) = (\mu - \lambda) t$

int. gen. $N(t) = k e^{(\lambda-\mu)t} = k e^{\varepsilon t}$

imponiamo che $N(0) = N_0$

$N(0) = k e^0 \Rightarrow N_0 = k$ quindi $N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}$

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \varepsilon > 0 \quad \text{crescita illimitata} \\ 0 & \text{se } \varepsilon < 0 \quad \text{esaurimento} \\ N_0 & \text{se } \varepsilon = 0 \quad \text{crescita zero} \end{cases}$$

(2) $y' + a(x) y = 0$ INT GEN $y(x) = k e^{-A(x)}$ $k \in \mathbb{R}$, A prim. di a

(1) $y' + a(x) y(x) = f(x)$ dobbiamo trovare un int. partic.

cerchiamo $\bar{y}(x) = k(x) e^{-A(x)}$ k funz. deriv. in (α, β)

(metodo di Lagrange della variazione della costante)
Sostituendo $\bar{y}$ nella (1)

$k'(x) e^{-A(x)} + \cancel{k(x) e^{-A(x)}(-a(x))} + \cancel{a(x) k(x) e^{-A(x)}} = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow k'(x) = e^{A(x)} f(x) \Rightarrow k \in \int e^{A(x)} f(x)\, dx$

INT GEN DI (1) $y(x) = k e^{-A(x)} + k(x) e^{-A(x)}$ $k \in \mathbb{R}$, $k(x) \in \int e^{A(x)} f(x)\, dx$

es. $y' + x y = x^3$ $a(x) = x$ $A(x) = \frac{1}{2} x^2$
$f(x) = x^3$

INT GEN $y(x) = k e^{-\frac{x^2}{2}} + k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ $k(x) \in \int e^{+\frac{x^2}{2}} x^3\, dx$
$\mathcal{I}$

$\mathcal{I} = +2 \int (+x) e^{+\frac{x^2}{2}} \left(+\frac{x^2}{2}\right) = 2\left[\int t\, e^t\, dt\right]_{t = +\frac{x^2}{2}} = 2 e^{+\frac{x^2}{2}} \left(+\frac{x^2}{2} - 1\right) + k$

$\underset{D(+\frac{x^2}{2})}{\uparrow}$ $\underset{fg}{\uparrow}$

$\int t e^t = t e^t - \int e^t dt = e^t(t-1) + k$

INT GEN. $y(x) = k e^{-\frac{x^2}{2}} + 2 e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2}} = k e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$

(PC) $\begin{cases} y' + xy = x^3 \\ y(2) = 1 \end{cases}$ $y(2) = k e^{-2} + 4 - 2 = 1 \Rightarrow \frac{k}{e^2} = -1 \Rightarrow k = -e^2$

SOL $y(x) = -e^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$

$\begin{cases} y' + (\cos x) y = \cos x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$ ESERC

EQ DIFF LINEARI DI ORDINE n

$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_n(x) y = f(x)$

$a_1, \dots, a_n, f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continue

$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x) - a_1(x) y^{(n-1)} - \dots - a_n(x) y$

$X = (\alpha, \beta) \times (]-\infty, +\infty[)^n$ (aperto)

TEOREMA Un PC legato ad un' eq. diff. lineare con $a_1, \dots, a_n, f$ funzioni continue ha sempre una e una sola sol definita in (α, β)

$a_1, \dots, a_n$ coefficienti

f termine noto   se $f=0$ eq. omogenea
se $f\neq 0$ " completa

(1) $y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\, y = f(x)$

(2) $y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\, y = 0$ OMOGENEA ASSOCIATA

OSSERVIAMO CHE

i) y, z sol di (1) $\Rightarrow$ $w = y - z$ sol di (2)
ii) y sol di (1), z sol di (2) $\Rightarrow$ $w = y + z$ sol di (1)

quindi (come nel caso $n=1$) l'int gen di (1) si ottiene sommando un int parti. di (1) all'int gen di (2)

DIM. i) $w^{(n)}(x) + a_1(x)\, w^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)\, w(x) =$
$= \Big(\underbrace{y^{(n)}(x) + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)\, y(x)}_{f(x)}\Big) - \Big(\underbrace{z^{(n)}(x) + \dots + a_n(x)\, z(x)}_{0}\Big) =$
$= f(x)$

ii) analogo

Struttura dell'int. gen. di (2)
y_1, y_2 sol di (2), $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $z(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$
è sol di (2)

$z^{(n)}(x) + \dots + a_n(x)\, z(x) = k_1 \big(\underbrace{y_1^{(n)}(x) + \dots + a_n(x)\, y_1(x)}_{=0}\big) + k_2 \big(\underbrace{y_2^{(n)}(x) + \dots + a_n(x)\, y_2(x)}_{=0}\big) = 0$

quindi le comb. lineari di sol. sono sol.
$y(x) = 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$ è evidentemente una sol.

Quindi l'int. gen. di (2) è uno spazio vettoriale S.