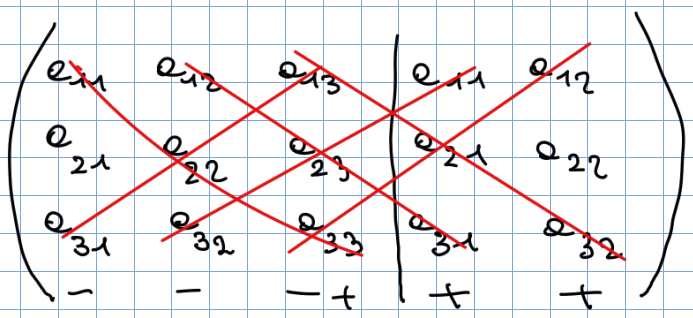
Capitolo 1 Gaussiane - Regole (1.1 e 1.2)

2×2: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \to a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3×3 

Lemma 1:

$A \in M_{m,m}(R)$

A' è la i-esima di A

$A' = \alpha V + \alpha' V', \quad V, V' \in M_{1,m}(R)$

$$\det A = \alpha \det \begin{pmatrix} A^{i} \\ A^{(i-1)} \\ V \\ A^{(i+1)} \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + \alpha \det \begin{pmatrix} A^{1} \\ \vdots \\ V' \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$$

Lemma 2 A' è la matrice ottenuta scambiando 2 righe allora $\det A' = -\det A$

Corollario 3

A' è la matrice ottenuta applicando una permutazione σ alle righe di A allora $\det A' = \operatorname{sgn}(\sigma) \det A$

Esempi lemma 1

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 0 \qquad (1\ 2\ 3) = \underset{\alpha}{1}\,\underset{v'}{(1\ 0\ 0)} + \underset{\alpha'}{2}\,\underset{v'}{(0\ 1\ \tfrac{3}{2})}$$

calcolo questo determinante

$$= 1\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =$$

se ho una riga $= \{0\,0\,0\}$

Proposizione 4

1) Se $\exists i \in \{1-n\}$ tale che $A^i = \{0\,0\,0\}$ allora $\det A = 0$

2) Se ho 2 righe uguali il $\det A = 0$

3) $$\det\begin{pmatrix}A^{(1)}\\ A^{(i)} \to \lambda A^{(j)}\\ A^{(n)}\end{pmatrix} = \det A$$

Ricordiamo poiché $\det A^T = \det A$ tutto quello che vale per le righe vale anche per le colonne

---

Teorema di Binet: Se abbiamo 2 matrici quadrate $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Dimostrazione: $A = (a_{ij})$ $\quad B = (b_{ij})$ $\quad$ righe $= \begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ B_n\end{pmatrix}$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{jn}\\ & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_{11}\cdot B^1 + a_{12} B^2 \; --- \; a_{1N} B^n\\ a_{21}\cdot B^1 + a_{22} B^2 \; --- \; a_{2N} B^n\\ \vdots\\ a_{ni} B^{(1)} + a_{n2} B^2 + --- \; a_{nn} B^n\end{pmatrix}$$

$$\det A\cdot B = a_{11}\det\begin{pmatrix} B^1 \\ a_{21}B^1 + a_{2m}B^{(m)} \\ \vdots \\ a_{m1}B^1 \end{pmatrix} + \dots - a_{1m}\det\begin{pmatrix} B^{(m)} \\ a_{21}B^{(1)}\cdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\det\begin{pmatrix} B_1 \\ a_{21}B^1 \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{1}\cdots\sum_{j=1}^{m} a_{1j}a_{2j}\cdots a_{jm}\det\begin{pmatrix} B^{(j_1)} \\ B^{(j_2)} \\ \vdots \\ B^{(j_m)} \end{pmatrix}$$

$$\det A\cdot B = \sum_{\sigma\in S_m} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{m\sigma(m)}\,\det B\cdot \operatorname{sgn}(\sigma) = \det B\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{i\sigma(1)}\operatorname{sgn}(\sigma)}_{\det A} = \det B\cdot\det A$$

Corollario $A\in M_{m,m}(\mathbb{R})$ invertibile

$$\det(A^{-1}) = 1/\det A$$

Dimostrazione

$$A\cdot A^{-1} = id_m \qquad \det(id_m) = 1 = \det\left(A\cdot A^{-1}\right) = \det A\cdot\det A^{-1}$$

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

Quindi A è invertibile se $\det A \neq 0$

Metodo migliore per calcolare il determinante

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,m}(R)$ $\quad i_{ij} \in \{1 \dots N\}$ $\quad A_{ij} = \mathcal{M}_{m-1,m-1}$

la sottomatrice di A ottenuta rimuovendo le i-esime e le j-esime colonne

Esempio:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

A_{22} = rimuovo 2 righe e secondo colonne $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

Il minore di A corrispondente agli indici (i, j) come

$m_{ij} = |A_{ij}| = \det A_{ij}$

Il determinante di A è uguale al det di A_{ij}

Teorema di Laplace

$A \in \mathcal{M}_{m,m}(R) \qquad V_i = \{i \dots m\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} (A_{ij})$$

Analogamente per $j \in \{1 \dots N\}$

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|A_{21}| + \dots a_{1m}(-1)^{1+m}|A_{1m}|$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Queste le ignoriamo perché tutte 0

$$\det A = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$2 + (-1)|-2-12| = 2+14 = 16$$

$A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ $\forall$

$a^*_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ (A stella) cofattore di A rispetto agli indici di i,j

La matrice aggiunta di A, è (edj)

$$A^* = edj(A) = F(a^*_{ij})^t \in \mathcal{M}'_{m,m}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot A^* = \det A \cdot id_m$$

$$A^{-1} = A^* / \det A$$

Corollario di A: $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$

A invertibile $\Leftrightarrow$ $rk\, A = m$ $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

in tal caso $A^{-1} = A^{*} / \det A$