Proposizione 3.1

$\vdash_{P_0} \alpha \to \alpha$ "$\alpha \to \alpha$ è un teorema di P_0"

Dimostrazione

$\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (A_K)

$\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ (A_S)

$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$ $(A7)$

1. $(\overset{\alpha}{\alpha} \to ((\overset{\beta}{\alpha \to \alpha}) \to \overset{\gamma}{\alpha})) \overset{A_S}{\to} (\overset{\alpha}{\alpha} \to (\overset{\beta}{\alpha \to \alpha})) \to (\overset{\alpha}{\alpha} \to \overset{\gamma}{\alpha}))$
2. $\alpha \to ((\underset{\beta}{\alpha \to \alpha}) \to \alpha)$ A_K $\beta \equiv \alpha \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ $MP(1,2)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$ A_K $\beta \equiv \alpha$
5. $\alpha \to \alpha$ $MP(3,4)$

Forse il libro è più chiaro

Teorema di deduzione di Herbrand

Dato un insieme di fbf in P_0 si ha:

$\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta$ se e solo se $\Gamma, \alpha \vdash_{P_0} \beta$

$\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta \iff \Gamma, \alpha \vdash_{P_0} \beta$

$(\Rightarrow)$ 1. α Ipotesi

⋮

K. $\alpha \to \beta$ espressione in ipotesi $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta$

k+1 β $MP(1,K)$

Quindi: $\Gamma, \alpha \vdash_{P_0} \beta$

$(\Leftarrow)$ costruiamo induttivamente una derivazione $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta$ a partire dall'ipotesi $\Gamma, \alpha \vdash_{P_0} \beta$

Dunque $\beta = \beta_1, \dots, \beta_n$ β rappresenta derivazione $\Gamma_\alpha \vdash_{P_0} \beta$ (IPOTESI)

BASE $n = 1$, la derivazione si riduce al β in Γ:

1. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ (A_x)
2. β Ipotesi
3. $\alpha \to \beta$ $M(1,2)$

$\beta \equiv \alpha$ dalla prop 3.1

$\vdash_{P_0} \alpha \to \alpha \Rightarrow$ implica la tesi

INDUZIONE

Supponiamo di scrivere una derivazione della forma $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha' \to \beta'$ a partire dall'ipotesi $\alpha' \vdash_{P_0} \beta'$ di lunghezza minore o uguale a $n-1$

$\alpha \vdash_{P_0} \beta$ di lunghezza n con $n > 1$

- Se β_n è un'assioma, una ipotesi su Γ, oppure α la tesi $\Rightarrow$ lavoriamo come nel caso base
- Se β_n è ottenuto per modus ponens da β_i e β_j $i, j < n$

posso dire per ipotesi induttiva so costruire le derivazioni

$\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta_i$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta_j$

perché β_n è ottenuta per modus ponens tra β_i, β_j (β_n)

otteniamo $\beta_i = (\beta_j \to \beta_n)$

Costruisco $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta \equiv \alpha \to \beta_n$

- $\beta_i \equiv \beta_j \to \beta_n$

  $\alpha \to \beta \equiv \alpha \to \beta_n$

1. $\alpha \to \underbrace{\beta_i}_{(\beta_j \to \beta_n)}$

1'. $\alpha \to (\beta_j \to \beta_n) \to (\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_n)$ A_2

α ipotesi

K: $\alpha \to (\beta_j \to \beta_n)$ per espansione $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta_i$

K+1: $(\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_n)$ M(1', k)

$\vdots$

h $\alpha \to \beta_j$ per espansione $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta_j$

h+1 $\alpha \to \beta_n$ MP(K+1, h)

Proposizione 3.2

$\vdash_{P_0} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ $\vdash_{P_0} \alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \alpha \vdash_{P_0} \beta$

Per il teorema di deduzione $\alpha, \neg\alpha \vdash_{P_0} \beta$:

1. $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$ A_K
2. α Ipotesi
3. MP(1,2)
4. $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ A_K
5. $\neg\alpha$ Ipotesi
6. $\neg\beta \to \neg\alpha$ MP(4,5)
7. $\neg\beta \to \neg\alpha \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$ $A_\neg$
8. $(\neg\beta \to \alpha) \to \beta$ MP(6,7)
9. β MP(3,8)

Proposizione 3.3 (transitività di $\rightarrow$)

$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash_{P_0} \alpha \rightarrow \gamma$ per il teorema di deduzione

$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \alpha \vdash_{P_0} \gamma$

1. $\alpha \rightarrow \beta$ ipotesi
2. α ipotesi
3. β MP(1,2)
4. $\beta \rightarrow \gamma$ ipotesi
5. ??? MP(3,4)

Proposizione 3.4

$\neg\alpha \rightarrow \alpha \vdash_{P_0} \alpha$

1. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ $A_\neg$
2. $\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ proposizione 3.1
3. $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ MP(1,2)
4. $\neg\alpha \rightarrow \alpha$ IPotesi
5. α MP(3,4)

Proposizione 3.5

$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta \vdash_{P_0} \alpha \rightarrow \gamma$

Per il teorema di deduzione $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta, \alpha \vdash_{P_0} \gamma$

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ ipotesi
2. α ipotesi
3. $\beta \rightarrow \gamma$ MP(1,2)
4. β ipotesi
5. γ MP(3,4

Proposizione 3.6

$\alpha \to (\beta \to \alpha)$ A_K

$\neg\neg\alpha \to_{P_0} \alpha$

1. $\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$ — A_K
2. $\neg\neg\alpha$ — ipotesi
3. $\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$ — MP(1,2)
4. $\neg\alpha \to \neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha$ — $A\neg$
5. $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha$ — MP(3,4)
6. $\neg\alpha \to \neg\alpha$ — prop 3.1
7. α — MP(5,6)

Prop 3.7 $\neg\alpha \vdash_{P_0} \alpha \to \beta$

Per il teorema di deduzione $\alpha, \neg\alpha \vdash_{P_0} \beta$ prop 3.2

Proposizione 3.8

$\vdash_{P_0} \delta \to \neg\neg\delta$ teorema di deduzione

1. $\delta \to (\neg\neg\neg\delta \to \delta)$ — A_K
2. $(\neg\neg\neg\delta \to \delta) \to (\neg\neg\neg\delta \to \delta) \to \neg\neg\delta$ — $A\neg$
3. $\neg\neg(\neg\delta) \to \neg\delta$ — Prop 3.6
4. $(\neg\neg\neg\delta \to \delta) \to \neg\neg\delta$ — MP(2,3)
5. δ — ipotesi
6. $\neg\neg\neg\delta \to \delta$ — MP(1,5)
7. $\neg\neg\delta$ — MP(4,6)

Proposizione 3.9

$\vdash_{P_0} (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ T. deduzione

$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta), \neg\beta \vdash_{P_0} \neg\alpha$

1. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta) \to ((\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\alpha)$ — $A\neg$
2. $\neg\beta \to \neg\neg\neg\beta$ — prop 3.8

3. $\neg\beta$ ipotesi

4. $\neg\neg\neg\beta$ MP(2, 3)

5. $\neg\neg\neg\beta \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta)$ A_K

6. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta$ MP(4, 5)

7. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\alpha$ MP(1, 6)

8. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$ ipotesi

$\neg\alpha$ MP(7, 8)

Proposizione 3.10

$\alpha \to \beta \vdash_{P_0} \neg\beta \to \neg\alpha$ $\qquad$ $\alpha \to \beta, \neg\beta \vdash_{P_0} \neg\alpha$

1. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ Prop 3.6
2. $\alpha \to \beta$ ipotesi
3. $\neg\neg\alpha \to \beta$ P 3.3 trans (1, 2)
4. $\beta \to \neg\neg\beta$ P 3.8
5. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$ trans (3, 4
6. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ prop 3.9
7. $\neg\beta \to \neg\alpha$ MP(5, 6)

Proposizione 3.11

$\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{P_0} \alpha$

1. $(\underset{\alpha}{\neg\alpha} \to (\alpha \to \underset{\beta}{\beta})) \to (\neg(\alpha \to \underset{\beta}{\beta}) \to \neg\neg\underset{\alpha}{\alpha})$ Prop 3.10
2. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ prop 3.7
3. $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha$ MP(1, 2)
4. $\neg(\alpha \to \beta) \to \alpha$ ipotesi
5. $\neg\neg\alpha$ MP(3, 4)
6. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ prop 3.6
7. α MP(5, 6)

Proposizioni 3.12

$\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{P_0} \neg\beta$

1. $(\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta)$ prop 3.10
2. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ Ak
3. $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$ MP (1,2)
4. $\neg(\alpha \to \beta)$ ipotesi
5. $\neg\beta$ MP(3,4)

Teorema 3.2

Un'insieme Γ di fbf di P_0 è contraddittorio (cioè, equivalentemente $con_{P_0}(\Gamma) = W$ se e solo se esiste una fbf α tale che $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha$

Dimostrazione

$\Rightarrow$ $\Gamma \vdash_{P_0} \beta \quad \forall \beta \in W$

$\Leftarrow$ Per prop 3.2 $\alpha, \neg\alpha \vdash_{P_0} \beta \ \forall \beta$

Per ipotesi $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha$

Dalla prop 2.3 possiamo concludere $\Gamma \vdash_{P_0} \beta \ \forall \beta$

Corollario 3.1

P_0 è inconsistente se e solo se esiste una fbf α di P_0 tale che $\vdash_{P_0} \alpha$ e $\vdash_{P_0} \neg\alpha$

Dimostrazione

Basta porre $\Gamma = \emptyset$ per il teorema 3.2 $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha$ $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha$

teorema 3.3

Sia Γ un insieme consistente di fbf di P_0 e sia quindi α tale che $\Gamma \nvdash_{P_0} \alpha$. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è consistente

Dimostrazione

Per assurdo $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è inconsistente $\Gamma\ \neg\alpha \vdash_{P_0} \alpha$

$\Downarrow$

$\Gamma \vdash_{P_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma, \neg\alpha \vdash_{P_0} \alpha$

t. di deduzione

$\Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha \to \alpha$

Per la prop 3.4 $\neg\alpha \to \alpha \vdash_{P_0} \alpha$

Per la 3.2 $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha$ Assurdo

Corollario 3.2

Se $\Gamma \cup \{\alpha\}$ è contraddittorio $\Rightarrow \Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha$

Dimostrazione

1) Se Γ è inconsistente $\Rightarrow$ è ovvio corollario 3.1

2) Se Γ è consistente

per assurdo diciamo che $\Gamma \nvdash_{P_0} \neg\alpha$

Per il teorema 3.3 $\Gamma \cup \{\neg\neg\alpha\}$ è consistente

Per la proposizione 3.8 $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{P_0} \delta$ contraddittorio

$\Gamma \cup \{\neg\neg\alpha\} \vdash_{P_0} \delta$ Assurdo

Semantica di P_0

Definizione Un' assegnamento proposizionale β è una funzione

$$\beta = \text{variabili proposizionali} \longrightarrow \{0,1\}$$
p, q, r

Definizione 3.3.

Un' assegnamento proposizionale β è esteso per induzione ad una valutazione $\overline{\beta}$ del linguaggio di β nel modo seguente

- $\overline{\beta}(p) = \beta(p)$ $\forall$ ogni variabile proposizionale
- $\overline{\beta}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se e solo se } \overline{\beta}(\alpha) = 1 \text{ e } \beta(\beta) = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $\overline{\beta}(\neg \alpha) = 1 - \overline{\beta}(\alpha)$

Definizione 3.4

Una fbf α di P_0 è detta essere

- una tautologia se per ogni assegnamento proposizionale β si ha $\overline{\beta}(\alpha) = 1$ "$\forall \beta \Rightarrow \overline{\beta}(\alpha) = 1$"
- soddisfacibile se e solo se esiste un' assegnamento proposizionale β tale che $\overline{\beta}(\alpha) = 1$ "$\exists \beta \Rightarrow \beta(\alpha) = 1$"
- Contraddittoria se e solo se non è soddisfacibile

Un' insieme di fbf di P_0 è detto soddisfacibile se e solo se esiste un' assegnamento proposizionale β tale che $\overline{\beta}(\beta) = 1$ $\forall \beta \in T$