$$\frac{1-n^4}{n^3+2n+1} \to -\infty$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \underbrace{\frac{3n^2+1}{n^4+6}}_{\to 0} \;\Big\downarrow\; +\infty$$

$$\frac{3n^2+2}{(4n+1)^2} \to \frac{3}{16}$$

$$\frac{n^5-2n^2-3n^4-8}{2-n^{10}} \to 0$$

$$2^{\overbrace{\frac{3n^2-1}{n+8}}^{\to +\infty}} \to \cancel{2^{\infty}} \to +\infty$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \left(1+\frac{1}{x_n}\right) \to e \quad \text{se } x_n \to +\infty$$

in particolare

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^{\alpha}$$

$$\left(\frac{n^2+3n}{(n+2)^2}\right)^{4n+3} = \left(\frac{n^2+4n+4-n-4}{n^2+4n+4}\right)^{4n+3}$$

$$= \left(1+\frac{-n-4}{n^2+4n+4}\right)^{4n+3} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+4n+4}{-n-4}}\right)^{\frac{n^2+4n+4}{-n-4}}\right]^{\overbrace{\frac{(-n-4)(4n+3)}{n^2+4n+4}}^{\to -4}} \to e^{-4}$$

$$(n+1)\log\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right) =$$

se $x_n \to 0$

$$\frac{\log(1+x_n)}{x_n} \to 1$$

$$\frac{e^{x_n}-1}{x_n} \to 1$$

$$\frac{(1+x_n)^{\alpha}-1}{x_n} \to \alpha$$

$$\frac{\log\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)}{\frac{n}{n^2+1}} \qquad \frac{n(n+1)}{n^2+1} \to 1$$

$$\frac{\cos\frac{2n}{n^2+1}-1}{\operatorname{tg}\frac{3}{n+2}} = \underbrace{\frac{\frac{3}{n+2}}{\operatorname{tg}\frac{3}{n+2}}}_{\downarrow\, 1} \quad \underbrace{\frac{1-\cos\frac{2n}{n^2+1}}{\frac{4n^2}{(n^2+1)^2}}}_{\downarrow\, \frac{1}{2}}$$

$$\Bigg(\frac{n+2}{3} \quad \underbrace{\frac{4n^2}{(n^2+1)^2}}_{\downarrow\, \frac{4}{3}}\Bigg) \to -\frac{2}{3}$$

$$\frac{e^{\frac{2n-1}{n^2+4}}-1}{1-\cos\frac{1}{n+3}} = \frac{e^{\frac{2n-1}{n^2+4}}-1}{\frac{2n-1}{n^2+4}} \quad \frac{\frac{1}{(n+3)^2}}{1-\cos\frac{1}{n+3}}$$

$$\frac{2n-1}{n^2+4}(n+3)^2$$

Confronto fra infinitesimi e fra infiniti

$a_n \to 0$ "un infinitesimo"

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due infinitesimi. Vogliamo sapere quale dei due tende a zero "più rapidamente"

se $\frac{a_n}{b_n} \to$ si dice che $\{a_n\}$ è un inf di ordine superiore rispetto a b_n

es:

se $x_n \to 0$ $\quad \frac{1-\cos x_n}{x_n} \to 0$

se $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to \ell > 0$ si dice che sono dello stesso ordine

es: se $x_n \to 0$ $\quad \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} \to 1$

$\frac{1-\cos x_n}{x_n^2} \to \frac{1}{2}$ $\quad$ $1-\cos x_n$ è di ordine 2 rispetto a x_n

$\frac{1}{n}$ infinitesimo fondamentale

ad es:

$1 - \cos\frac{1}{n}$ ha ordine 2 (rispetto all' infinitesimo fondamentale)

$\frac{n^2+3n+1}{n^4+6}$ qual è il suo ordine di infinitesimo (rispetto a $\frac{1}{n}$)

Cercare $x \in \mathbb{R}$: $\frac{a_n}{\frac{1}{n^x}} \to \ell > 0 \Leftrightarrow n^x a_n \to \ell$

$x = 2$

infatti

$a_n n^2 = \frac{n^4 + \dots}{n^4+6} \to 1$

una succ. $a_n \to +\infty$ si dice "un infinito"

da $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ infinite

se $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \ell > 0$ sono dello stesso ordine

ad es: $a_n = n^3 + 2n^2 + 3$

$b_n = 2n^3 + n + 1$

se $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ $\{a_n\}$ è di ordine superiore

Successione estratta

$\{a_n\}$ succ data (funz esterna)

$\{n_k\}_k$ succ strett cresc $n_k \in \mathbb{N}$ $\forall n$ (funz interna)

facendo la composizione si ottiene $\{a_{n_k}\}_k$

succ estratta mediante la legge di estrazione n_k

es: $n_k = 2k$ $\{a_{2k}\} = a_2 ; a_4 ;$ estratti di posti pari

$n_k = 2k-1$ $\{a_{2k-1}\} = a_1, a_3 \dots$ estratti dispari

$p \in \mathbb{N}$ $n_k = p+k$ $\to$ $\{a_{p+k}\} = a_{p+1} ; a_{p+2}$ estratte ottenute sopprimendo i primi termini

1) $\{a_n\}$ regolare se tutte le estratte sono regolari ed hanno lo stesso limite $\Rightarrow$ se due estratte hanno limiti diversi, $\{a_n\}$ non è regolare

es $a_n = (-1)^n$ $a_{2k} = 1$, $a_{2k-1} = -1$

2) se $\{a_{n+p}\}$ è regolare $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ è regolare ed ha lo stesso limite

3) se $\{a_{2k}\}$ e $\{a_{2k-1}\}$ hanno lo stesso limite $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ ha tale limite

Osservazione: Sia $\{a_n\}$ regolare, con $(-1)^n a_n$

se $a_n \to 0$ $\Rightarrow$ $b_n \to 0$ e viceversa

se $a_n \to l \neq 0$ opp $\pm\infty \to$ b_n oscilla es: $a_n = \dfrac{n+1}{n^3+4} \to 0 \qquad (-1)^n \dfrac{n+1}{n^3+4}$

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+4} \to \frac{2}{3} \qquad (-1)^n a_n = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{3n+4} \to \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2n+1}{3n+4} \to -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$a_n = n^2+3 \to +\infty$

$$(-1)^n a_n = \begin{cases} n^2+3 \to +\infty \\ -n^2-3 \to -\infty \end{cases} \qquad \text{oscill.}$$

Successioni definite per ricorrenza

f funz elementare $\qquad \begin{cases} a_1 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$

- si studia la monotonia
- se $\{a_n\}$ è crescente tendere al proprio sup. se $\sup a_n = l$

$a_n \to l \to a_{n+1} \to l$ ma $a_{n+1} = f(a_n) \to f(l)$

unicità del limite $\Rightarrow f(l) = l$

- si risolve l'eq $x = f(x)$. Se si trova una sol che possa essere il $\sup_{a_n}$ allora $a_n = l$, altrimenti $a_n \to +\infty$

es: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$ $a_2 = \sqrt{3}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$a_1 < a_2$ Per caso $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$?

$a_n < \sqrt{2+a_n} \Rightarrow a_n^2 < a_n + 2$

risolvo le disequazione $x^2 - x - 2 < 0$ $\quad \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$-1 < a_n < 2$ $\forall n$?

Devo controllare se $a_n < 2$ $\forall n$ per induzione

$a_n < 2$ vero

se $a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$? $\quad \sqrt{2+a_n} < 2 \Leftrightarrow 2 + a_n < 4$

$\Leftrightarrow a_n < 2$

allora $a_n \to \sup a_n$ Supp che $\sup a_n = l$

$a_n \to l \Rightarrow a_{n+1} \to l$

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \to \sqrt{2+l} \Rightarrow l = \sqrt{2+l} \Rightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow l = -1 \lor l = 2$

sappiamo più che $a_n < 2$ $\forall n \Rightarrow$ $2 = \sup a_n = \lim a_n$

CAPITOLO 3: limiti di funzione