PROPOSIZIONE 3.1

$\vdash_{P_0} \alpha \to \alpha$ "$\alpha \to \alpha$ è un teorema di P_0"

DIMOSTRAZIONE

1. $\underbrace{\overset{\alpha}{\alpha} \to ((\overset{\beta}{\alpha \to \alpha}) \to \overset{\gamma}{\alpha})}$ $\overset{(As)}{\to}$ $\underbrace{((\overset{\alpha}{\alpha} \to \overset{\beta}{(\alpha \to \alpha)}) \to (\overset{\alpha}{\alpha} \to \overset{\gamma}{\alpha}))}_{\beta}$

2. $\underbrace{\alpha \to ((\underbrace{\alpha \to \alpha}_{\beta}) \to \alpha)}_{\alpha}$ Ak $\beta \equiv \alpha \to \alpha$

3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ MP (1, 2)

4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$ Ak $\beta \equiv \alpha$

5. $\alpha \to \alpha$ MP (3, 4)

(Ak) $\alpha \to (\overset{\alpha \to \alpha}{\beta} \to \alpha)$ (Ak)

(As) $\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(A¬) $\boxed{(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)}$

TEOREMA DI DEDUZIONE HERBRAND

Dato un insieme di fbf Γ in P_0 si ha:

$$\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta \text{ se e solo se } \Gamma, \alpha \vdash_{P_0} \beta$$

$$\Gamma \vdash_{p_0} \alpha \to \beta \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma, \alpha \vdash_{p_0} \beta$$

$\Rightarrow$ 1. α IPOTESI

⋮

K $\alpha \to \beta$ espansione in ipotesi $\Gamma \vdash_{p_0} \alpha \to \beta$

K+1 β MP(1, K)

QUINDI $\Gamma, \alpha \vdash_{p_0} \beta$

$\Leftarrow$ COSTRUIAMO INDUTTIVAMENTE UNA DERIVAZIONE $\Gamma \vdash_{p_0} \alpha \to \beta$ a partire dell'ipotesi

$\Gamma, \alpha \vdash_{p_0} \beta$

Dunque $\beta = \beta_1, \dots, \beta_n$ β rappresenta derivazione $\Gamma \alpha \vdash_{p_0} \beta$ (IPOTESI)

BASE $n = 1$, la derivazione si riduce al β in Γ:

1. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ (Ax)
2. β IPOTESI
3. $\alpha \to \beta$ MP(1,2)

$\beta \equiv \alpha$ DALLA PROP 3.1

$\vdash_{p_0} \alpha \to \alpha$ $\Rightarrow$ implica la tesi
$\phantom{\vdash_{p_0} \alpha \to{}} \overset{\shortparallel}{\beta}$

INDUZIONE

Supponiamo di scrivere una derivazione della forma $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha' \to \beta'$ a partire dall'ipotesi $\alpha' \vdash_{P_0} \beta'$ di lunghezza minore o uguale a $n-1$

$\alpha \vdash_{P_0} \beta$ di lunghezza n con $n > 1$

- Se β_n è un assioma, una ipotesi su Γ, oppure α la tesi
  $\Longrightarrow$ LAVORIAMO COME NEL CASO BASE

- Se β_n è ottenuto per modus ponens da β_i e β_j $i, j < n$

POSSO DIRE CHE PER IPOTESI INDUTTIVA SO COSTRUIRE LE DERIVAZIONI

$\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta_i$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta_j$

perché β_n è ottenuta per modus ponens tra $\beta_i, \beta_j (, \beta_n)$

OTTERREMO $\beta_i \equiv (\beta_j \to \beta_n)$

Costruisco $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta \equiv \alpha \to \beta_n$

- $\beta_i \equiv \beta_j \to \beta_n$ $\quad \alpha \to \beta_i$

$\alpha \to \beta \equiv \alpha \to \beta_n$ $\quad \alpha \to \beta_j$

1. $\alpha \to \underbrace{\beta_i}_{(\beta_j \to \beta_n)}$

1'. $\alpha \to (\beta_j \to \beta_n) \longrightarrow (\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_n)$ (AS)

0 α IPOTESI

k $\alpha \to (\beta_j \to \beta_n)$ PER ESPANSIONE $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta_i$

k+1 $(\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_n)$ HP(1', k)

$\vdots$

h $\alpha \to \beta_j$ per espansione $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \beta_j$

h+1 $\alpha \to \beta_n$ HP(k+1, h)

$\square$

PROPOSIZIONE 3.2

$\vdash_{P_0} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

$\vdash_{P_0} \alpha \to \beta \iff \alpha \vdash_{P_0} \beta$

PER IL TEOREMA DI DEDUZIONE $\alpha, \neg\alpha \vdash_{P_0} \beta$:

$\alpha \to (\beta \to \alpha)$ AK

1. $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$ AK
2. α IPOTESI
3. $\boxed{3.}$ $\neg\beta \to \alpha$ MP(1,2)
4. $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ AK
5. $\neg\alpha$ IPOTESI
6. $\neg\beta \to \neg\alpha$ MP(4,5)
7. $\neg\beta \to \neg\alpha \to \underbrace{((\neg\beta \to \alpha) \to \beta}{})$ A7
8. $\boxed{8.}$ $(\neg\beta \to \alpha) \to \beta$ MP(6,7)
9. β MP(3,8)

PROP. 3.3 (TRANSITIVITÀ DI $\to$)

$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash_{P_0} \alpha \to \gamma$

PER IL T. DI DEDUZIONE

$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha \vdash_{P_0} \gamma$

1. $\alpha \to \beta$ IPOTESI
2. α IPOTESI
3. β MP(1,2)
4. $\beta \to \gamma$ IPOTESI
5. γ MP(3,4)

$\square$

PROP. 3.4 $\underbrace{\neg\alpha \to \alpha}_{} \vdash_{P_0} \alpha$

A1

1. $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ PROPOSIZIONE 3.1
2. $\neg\alpha \to \neg\alpha$
3. $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ MP(1,2)
4. $\neg\alpha \to \alpha$ IPOTESI
5. α MP(3,4)

PROP. 3.5 $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta \vdash_{P_0} \alpha \to \gamma$

PER IL TEOREMA DI DEDUZIONE $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta, \alpha \vdash_{P_0} \gamma$

1. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ IPOTESI
2. α IPOTESI
3. $\beta \to \gamma$ MP(1,2)
4. β IPOTESI
5. γ MP(3,4)

PROPOSIZIONE 3.6

$\neg\neg\alpha \vdash_{p_0} \alpha$

1. $\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$ — AK — $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $\neg\neg\alpha$ — IPOTESI
3. $\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$ — MP(1,2)
4. $\neg\alpha \to \neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha$ — A7
5. $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha$ — MP(3,4)
6. $\neg\alpha \to \neg\alpha$ — PROP. 3.1
7. α — MP(5,6)

PROP. 3.7 $\neg\alpha \vdash_{p_0} \alpha \to \beta$

PER IL T. DI DEDUZIONE $\alpha, \neg\alpha \vdash_{p_0} \beta$ PROP 3.2 CHE È STA GIÀ DIMOSTRATA

PROP 3.8

$\vdash_{P_0} \delta \to \neg\neg\delta$ TEOREMA DI DEDUZIONE $\delta \vdash_{P_0} \neg\neg\delta$

1. $\delta \to (\neg\neg\neg\delta \to \delta)$ AK

2. $(\neg\neg\neg\delta \to \neg\delta) \to (\neg\neg\neg\delta \to \delta) \to \neg\neg\delta$ A7

PROP. 3.6

$\neg\neg\alpha \to \alpha$

3. $\neg\neg(\neg\delta) \to \neg\delta$

4. $\boxed{4}$ $(\neg\neg\neg\delta \to \delta) \to \neg\neg\delta$ MP(2,3)

5. δ IPOTESI

6. $\boxed{6.}$ $\neg\neg\neg\delta \to \delta$ MP(1,5)

7. $\neg\neg\delta$ MP(4,6)

$\alpha \to (\beta \to \alpha)$

δ $\neg\neg\neg\delta$

$(\neg(\neg\neg\delta) \to \delta) \to \neg\neg\delta$

PROP 3.9

$\vdash_{P_0} \underbrace{(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta}\to \neg\alpha)$

T. DI DEDUZIONE

$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta), \neg\beta \vdash_{P_0} \neg\alpha$

1. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta) \to ((\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\beta)) \to \neg\alpha)$ — A7

PER PROP. 3.8

2. $(\neg\beta) \to \neg\neg(\neg\beta)$

3. $\neg\beta$ — IPOTESI

4. $\neg\neg\neg\beta$ — MP(2,3)

5. $\neg\neg\neg\beta \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta)$ — AK

$\alpha \to (\beta \to \alpha)$

6. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta$ — MP(4,5)

7. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\alpha$ — MP(1,6)

8. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$ — IPOTESI

$\neg\alpha$ — MP(7,8)

PROP. 3.10

$\alpha \to \beta \vdash_{P_0} \neg\beta \to \neg\alpha$ $\qquad$ $\alpha \to \beta, \neg\beta \vdash_{P_0} \neg\alpha$

1. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ $\quad$ PROP. 3.6
2. $\alpha \to \beta$ $\quad$ IPOTESI
3. $\neg\neg\alpha \to \beta$ $\quad$ P. 3.3 TRANS(1,2)
4. $\beta \to \neg\neg\beta$ $\quad$ P. 3.8
5. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$ $\quad$ TRAN (3,4)
6. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ $\quad$ PROP. 3.9
7. $\neg\beta \to \neg\alpha$ $\quad$ MP(5,6)

PROP. 3.11

$\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{P_0} \alpha$

1. $(\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha)$ $\quad$ 3.10
2. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ $\quad$ PROP. 3.7
3. $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha$ $\quad$ MP(1,2)
4. $\neg(\alpha \to \beta)$ $\quad$ IPOTESI
5. $\neg\neg\alpha$ $\quad$ MP(3,4)
6. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ $\quad$ P. 3.6
7. α $\quad$ MP(5,6)

3.12

$\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{P_0} \neg\beta$

1.	$(\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta)$	PROP. 3.10
2.	$\beta \to (\alpha \to \beta)$	A_K
3.	$\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$	MP(1,2)
4.	$\neg(\alpha \to \beta)$	IPOTESI
5.	$\neg\beta$	MP(3,4)

TEOREMA 3.2

Un insieme Γ di fbf di P_0 è CONTRADDITTORIO (cioè, equivalentemente $Con_{P_0}(\Gamma)=W$) se e solo se esiste una fbf α tale che $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha$

DIM

($\Rightarrow$) $\Gamma \vdash_{P_0} \beta \quad \forall \beta \in W$

($\Leftarrow$) Per prop. 3.2 $\alpha, \neg\alpha \vdash_{P_0} \beta \quad \forall \beta$

PER IPOTESI $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha$

DALLA p. 2.3 possiamo concludere $\Gamma \vdash_{P_0} \beta \quad \forall \beta$

$\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\} \vdash \beta$

$M \vdash \beta$

COROLLARIO 3.1

P_0 è inconsistente se e solo se esiste una fbf α di P_0 tale che

$\vdash_{P_0} \alpha$ e $\vdash_{P_0} \neg\alpha$

DIM.

BASTA PORRE $\Gamma = \emptyset$ PER IL TEOREMA 3.2

$\underset{\emptyset}{\underset{\|}{\Gamma}} \vdash_{P_0} \alpha \qquad \underset{\emptyset}{\underset{\|}{\Gamma}} \vdash_{P_0} \neg\alpha$

TEOREMA 3.3

Sia Γ un insieme consistente di fbf di P_0 e sia quindi α tale che $\Gamma \nvdash_{P_0} \alpha$. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è consistente

DIM

PER ASSURDO $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è INCONSISTENTE $\Gamma\ \neg\alpha \vdash_{P_0} \alpha$

$\Downarrow$

T. DI DEDUZIONE " $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha$ $\Rightarrow \Gamma, \neg\alpha \vdash_{P_0} \alpha$ "

T. DI DEDUZIONE

$\Leftarrow$

$\Gamma \vdash_{P_0} \neg\alpha \to \alpha$

PER LA PROP. 3.G $\neg\alpha \to \alpha \vdash_{P_0} \alpha$

PER 3.2 $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha$ ASSURDO

COROLLARIO 3.2

Se $\Gamma \cup \{a\}$ è contraddittorio $\Longrightarrow$ $\Gamma \vdash_{po} \neg a$

DIM

1) Se Γ è inconsistente $\Rightarrow$ è ovvio COROLLARIO 3.1

2) Se Γ è consistente

p.a. $\Gamma \nvdash_{po} \neg a$

PER IL TEOREMA 3.3 $\Gamma \cup \{\neg\neg a\}$ è consistente

PER PROP. 3.8 $\Gamma \cup \{a\} \vdash_{po} \delta$ <u>CONTRADDITORIO</u>

IPOTESI

$= \Gamma \cup \{\neg\neg a\} \vdash_{po} \delta$

ASSURDO

3.3 SEMANTICA DI P_0

DEF. Un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ è una funzione $\mathcal{B}$: VARIABILI PROPOSIZIONALI $\to \{0,1\}$

$p, q, \wedge$

DEF. 3.3

Un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ è esteso per induzione ad una valutazione $\overline{\mathcal{B}}$ del linguaggio di P_0 nel modo seguente:

- $\overline{\mathcal{B}}(p) = \mathcal{B}(p)$ $\forall$ ogni VARIABILE PROPOSIZIONALE
- $\overline{\mathcal{B}}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se e solo se } \overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1 \text{ e } \overline{\mathcal{B}}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$
- $\overline{\mathcal{B}}(\neg\alpha) = 1 - \overline{\mathcal{B}}(\alpha)$

DEF. 3.4

Una fbf α di P_0 è detta essere:

- una TAUTOLOGIA se e solo se per ogni assegnamento proposizionale B si ha $\overline{B}(\alpha) = 1$ "$\forall B \Rightarrow \overline{B}(\alpha) = 1$"

- SODDISFACIBILE se e solo se esiste un assegnamento proposizionale B tale che $\overline{B}(\alpha) = 1$ "$\exists B \Rightarrow \overline{B}(\alpha) = 1$"

- CONTRADDITTORIA se e solo se NON È SODDISFACIBILE

Un insieme di fbf Γ di P_0 è detto SODDISFACIBILE SE E SOLO SE ESISTE UN ASSEGNAMENTO PROPOSIZIONALE B tale che $\overline{B}(\beta) = 1 \quad \forall \beta \in \Gamma$