Teorema di DE L'HOPITAL

IP $f, g : (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ derivabili

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ opp $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \setminus \{c\}$

$\exists \lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \qquad (l \in \mathbb{R}$ opp $l = \pm\infty)$

R.D (Rapporto delle derivate)

TS.

1) $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \setminus \{c\}$

2) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

(il teorema si enuncia allo stesso modo nel caso

$x \to c^+, x \to c^-, x \to -\infty, x \to +\infty$)

OSS.

1) esempio in cui $\exists \lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ma $\nexists \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \qquad g(x) = x \qquad c = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

R.D

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underbrace{2x \sin\frac{1}{x}}_{\text{oscillante}} - \overbrace{\cos\frac{1}{x}}^{\text{oscill}}$$

2) esempio in cui non è opportuno applicare il teorema

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ R.D $\underbrace{\frac{\cos x}{1} = \cos x \to 1}$

possiamo calcolare il limite così senza farlo risolvere perché è semplice

3) esempio in cui non è utile applicare il teorema

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = +\infty$

RD $\frac{3^x \log 2}{2^x \log 2}$ INUTILE

4) esempio in cui non è corretto applicare il teorema: successioni

$\frac{e^{2n^3+1}}{n^2+4}$

~~R.D $\frac{e^{2n^3+1}\, 3n^2}{2n+4}$~~   ERRORE

allora si considera $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2+4}$ R.D. $\frac{e^{2x^3+1}\, \cancel{6}^{3} x^2}{\cancel{2x}} =$

$3x e^{2x^3+1} \to +\infty$

Per il teorema ponte anche $a_n \to \infty$

4) Esempio in cui è bene utilizzare il teorema

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e si vuole cercare l'asintoto obliquo

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ R.D. $f'(x)$

se $\lim_{x \to \infty} f'(x) = m \Rightarrow m$ è coeff. ang dell'eventuale asintoto

5) $\lim_{x \to 0} x^n \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{x^{-n}}$

RD: $\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = x^{-1+n+1}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{x^n}{n} \to 0$

$\lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} e^{\log x^x} = \lim_{x \to 0} e^{x \log x} = 1$ ($x \log x \to 0$)

la funz $\begin{cases} x^x & \text{per } x > 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ è cont in $[0, +\infty[$

Esercizio: stabili se f è derivabile in $x = 0$

Vedremo perché nel caso in cui $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f(x) = 0$ si ottiene la tesi $f(x) \neq 0 \; \forall x$

Cosa fa la funz: $f(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ 0 & x = c \end{cases}$ è cont

⋮

FINE