ch0m7gw

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 = r_3 - 7r_2]{r_2 = r_2 - 4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & \boxed{-6} & \boxed{-3} \\ 0 & \boxed{-6} & \boxed{-12} & \boxed{-6} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} r_2 = r_2 / -3 \\ r_3 = r_3 / -6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 = r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_{l,k} = 2,2$

$r_1 = r_1 - 2r_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante di una matrice quadrata

Permutazione: S è un'insieme finito, $S = \{e_1 - e_n\}$ $n \in \mathbb{N}$

una mappa biettiva σ $S \to S$ sigma

Consiste nello scambiare l'ordine degli elementi di un'insieme

$e_i \to e_{i_j} = \sigma(e_i)$

$$\sigma \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ e_{j_1} & e_{j_2} & \dots & e_{j_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ J_1 & J_2 & \dots & J_N \end{pmatrix} = (J_1 \ J_2 \dots J_N)$$

Esempio:

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{\text{Permutazione fatta casualmente}} \sigma(2 \ 3 \ 1 \ 4)$$

$\sigma(1) = 2$ $\quad \sigma(2) = 3$ $\quad \sigma(3) = 1$ $\quad \sigma(4) = 4$

$S_n = \{$ insieme delle permutazioni di $\{1 \dots n\}\}$

Lemma: la lunghezza di S_n sarà uguale a $n!$

Dimostrazione: Per $\sigma(1)$ abbiamo n scelte $\{1, 2 - n\}$
Per $\sigma(2)$ abbiamo $n-1$ scelte
Per $\sigma(3)$ abbiamo $n-2$ scelte
⋮
ecc...

Esempio: $S = \{1, 2, 3\}$

$S_3 = \{ (1,2,3) \quad (1,3,2)$
$(2,1,3) \quad (2,3,1)$
$(3,1,2) \quad (3,2,1) \}$

→ tutte le permutazioni di S_3 sono 6 quindi: $3! = 6$

$S = \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{\sigma} (2\ 3\ 1\ 4) \xrightarrow{\tau} (1\ 4\ 2\ 3)$

Permutando una permutazione otteniamo un'altra permutazione

$\forall \sigma \in S_n \ \exists\ \sigma^{-1} \in$ t.c. $\sigma \circ \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \circ \sigma$

Numero di inversioni all'interno degli insiemi

$\sigma \in S_n$ c'è un'inversione ogni qual volta abbiamo $i < j$ ma $\sigma(i) > \sigma(j)$. Chiamiamo $i(\sigma)$ il numero di inversione di σ per ogni singolo numero controlliamo se quello a destra è maggiore, se non è così aggiungiamo 1 ad $i(\sigma)$

Esempio $\sigma(2, 3, 1, 4) \quad i(\sigma) = 2$ → Quanti numeri sono nella posizione sbagliata
$\sigma(1, 2, 3, 4) \quad i(\sigma) = 0$
$\tau(3, 4, 1, 2) \quad i(\tau) = 4$

Definizione: $\sigma \in S$

σ è pari $i(\sigma)$ è pari

σ è dispari $i(\sigma)$ è dispari

segno

Il segno di σ è $\text{sgn} = (-1)^{i(\sigma)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ dispari} \end{cases}$

Lemma $\sigma, \tau \in S_n$

1) $\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = \text{sgn}(\tau) \cdot \text{sgn}(\sigma)$

2) $\text{sgn}(\sigma)^{-1} = \text{sgn}(\sigma)$

Determinante di una matrice quadrata

$A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

il determinante di A è

produttoria

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right)$$

Esempio: 2×2

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$ tutte le permutazioni di questa matrice $\rightarrow S_2 \{ \underset{+1}{\overset{0}{(1\ 2)}} \ \underset{-1}{\overset{1}{(2\ 1)}} \}$

numero di inversioni

$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

prima l'indice e poi il numero

0 è pari quindi segno + | 1 è dispari quindi segno −

3×3 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$S = \{ \overset{1}{(1,2,3)} \quad \overset{-1}{(1,3,2)}$$
$$\overset{-1}{(2,1,3)} \quad \overset{1}{(2,3,1)}$$
$$\overset{1}{(3,1,2)} \quad \overset{-1}{(3,2,1)} \}$$

Regola di Sarrus

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$$

1) Ricopi le prime 2 colonne
2) tracci le diagonali
3) le diagonali principali sono $+$ e le diagonali secondarie sono $-$

4) esempio diagonale 1: $+a_{11}a_{22}a_{33}$

Nota Bene: $\det A^T = \det A$

Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è diagonale o triangolare inferiore/superiore allora il determinante lo calcoliamo così:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Lemma 1: $A^{(i)}$ → i-esima riga → $A^{(i)} = \alpha V + \alpha' V'$ allora

$$\det A = \alpha \cdot \det\begin{pmatrix} A^{(i)} \\ A^{(i-1)} \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + \alpha \cdot \det\begin{pmatrix} A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$$

Esempio: $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^{(i)} = \underline{1\,(1 \;\; 0) + 2\,(0 \;\; 1)}$$

→ modifica della prima riga

$$\det A = \underbrace{1 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{4} + \underbrace{2 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{-3} = 4 - 6 = -2$$

Per la regola di Sarrus la prima è + la seconda è −

Lemma 2

Sia A' la matrice ottenuta scambiando 2 righe di A

$\det A' = -\det A$

Se A' è la matrice ottenuta applicando una commutazione σ alle righe di A' allora $\det A' = \mathrm{sgn}(\sigma) \det A$