

ESAME DI ALGORITMI
Università degli Studi di Catania
Corso di Laurea Triennale in Informatica
14 maggio 2025

Si risolvano i seguenti esercizi in un tempo non superiore a 3 ore. Si abbia cura di consegnare la risoluzione dei primi 3 esercizi in un foglio (FOGLIO A) separato da quello utilizzato per la consegna degli ultimi 3 esercizi (FOGLIO B).

—— FOGLIO A ——

1. Si consideri un array $A = [n, n-1, n-2, \dots, 2, 1]$ di n interi distinti ordinati in modo decrescente. L'obiettivo è costruire da A un *heap binario minimo*, applicando l'algoritmo classico **BuildMaxHeap**, che esegue la procedura **MinHeapify** sui nodi interni, partendo dal basso verso l'alto.
 - (a) Calcolare il numero di chiamate alla funzione **MinHeapify** realizzate durante l'esecuzione dell'algoritmo per $n = 12$.
 - (b) Fornire una **stima asintotica** del numero di chiamate alla funzione **MinHeapify** effettuate da **BuildMaxHeap** in funzione della dimensione n dell'array. Motivare la risposta.
2. Scrivere una procedura **UpdateKey**(H, i, k) che aggiorni, in un Heap Binario Massimo, la chiave in posizione i con il nuovo valore k , e ripristini le proprietà dell'heap massimo. L'algoritmo deve gestire correttamente entrambi i casi in cui $k > H[i]$ e $k < H[i]$. Analizzare la complessità nel caso peggiore della procedura implementata, in funzione della dimensione dell'heap n .
3. Fornire un esempio concreto di un albero rosso-nero valido che contiene 10 chiavi distinte in cui un'operazione di cancellazione provoca una rotazione che coinvolge il nodo radice. Successivamente, fornire un'altro esempio concreto di un albero rosso-nero valido che contiene 10 chiavi distinte in cui un'operazione di inserimento provoca una rotazione che coinvolge il nodo radice. Per entrambi gli esempi, disegnare la configurazione dell'albero prima e dopo l'operazione.

—— FOGLIO B ——

4. Si risolva l'equazione di ricorrenza $T(n) = aT\left(\frac{n}{7}\right) + \sqrt{n} \log n$, al variare del parametro reale $a \geq 1$ utilizzando il metodo Master. Si stabilisca inoltre quale delle seguenti condizione sono soddisfatte dalla soluzione $T(n)$:
 - (i) $T(n) = O(n^2)$;
 - (ii) $T(n) = \Theta(n)$;
 - (iii) $T(n) = \omega(n \log n)$.
5. Si mostri che l'altezza di un albero rosso-nero con n nodi interni è $O(\log(n))$.
6. Si simuli l'algoritmo di Bellman-Ford per il calcolo dei cammini minimi sul grafo in figura usando la lista di adiacenza ordinata alfabeticamente $\{(s, t)(s, x), (t, u), (u, z), (x, u), (x, y), (z, y)\}$.

