Svolgimento della simulazione 07

(gli svolgimenti delle simulazioni AE ed FN si trovano nelle rispettive lezioni dell'11 giugno)

T1. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ tale che $f(a) = f(b)$.
Allora, esiste $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = 0$.

DIM. Per il teorema di Weierstrass esistono $x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) = \min_{[a,b]} f$, $f(x_2) = \max_{[a,b]} f$. Se uno (almeno) di tali punti è interno all'intervallo, in esso la derivata vale zero grazie al teorema di Fermat. Se entrambi coincidono con gli estremi ($x_1 = a$ e $x_2 = b$ o viceversa) si avrà $\min_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$; la funzione sarà dunque costante e la sua derivata sarà nulla in tutto l'intervallo.

T2. L'affermazione a) è vera grazie al teorema di Rolle applicato ad f nell'intervallo $[0,3]$.
b) Anche in questo caso si può applicare il teorema di Rolle ed esiste $c \in [-1,1]$ tale che $f'(c) = 0$ ma non è detto che si abbia $c < 0$. Ad esempio se $f(x) = x^2$ si ha $c = 0$. La b) è dunque falsa.

E1. Studiamo intanto il limite della successione.

$$n^2 \log\left(\cos\frac{x}{n}\right) = n^2 \log\Big(\big(\underbrace{\cos\tfrac{x}{n} - 1}_{\to 0}\big) + 1\Big) =$$

$$= \underbrace{\frac{\log\left(\left(\cos\frac{x}{n} - 1\right) + 1\right)}{\cos\frac{x}{n} - 1}}_{\to 1} \; \underbrace{\frac{\cos\frac{x}{n} - 1}{\frac{x^2}{n^2}}}_{\to -\frac{1}{2}} \; \frac{x^2}{n^2}\, n^2 \to -\frac{x^2}{2}$$

Si ha dunque

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{se } x > 0 \\ k & \text{se } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si ha $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ quindi f è continua

per $k = 0$.

f è derivabile in x $\forall x \neq 0$. Studiamo la derivabilità nel punto $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$ infatti è come calcolare il $\lim_{t \to -\infty} t^2 e^t =$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{t^2}{e^{-t}}$$

R.D. $\frac{2t}{-e^{-t}}$ R.D. $\frac{2}{e^{-t}} \to 0$

dunque $f'_-(0) = f'_+(0) = 0 \Rightarrow \exists f'(0) = 0$.

E2 $f(x) = \sqrt{|4x-1| + 4x^2} = \begin{cases} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} & \text{se } x < \frac{1}{4} \\ \sqrt{4x^2 + 4x - 1} & \text{se } x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$

f è continua $\Rightarrow$ non ci sono asintoti verticali.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ quindi ci possono essere asintoti obliqui.

asintoto destro

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+4x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x^2+4x-1}{x^2}} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{4x^2+4x-1}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2+4x-1}{x^2}}+2} = 1$$

l'eq. dell'asintoto destro è $y = 2x+1$

asintoto sinistro

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{4x^2-4x+1}{x^2}} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x)+2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+1}{\sqrt{4x^2-4x+1}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2-4x+1}{x^2}}+2} = 1$$

l'eq dell'asintoto sinistro è $y = -2x+1$