Premesse

1) $f\ (a, b) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua se

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: se $x, y \in (a, b)$, $|x-y| < \delta$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

teorema di Heine - Cantor

se f è continua $[a, b]$ (di lim) è unif. cont

2) Sia $A, B \subseteq \mathbb{R}$ se $a \leq b$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in B$, A e B si dicono separati e si ha $\sup A \leq \inf A$ e tutti i numeri:

$\sup A \leq x \leq \inf B$ sono detti elementi di separazione

Se $\sup A = \inf B$ (unico elemento di separazione) A e B si dicono contigui, in tal caso si ha

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ a \in A,\ b \in B \quad b - a < \varepsilon$

Integrale di riemann

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

weierstrass

diciamo $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$

$D = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ Decomposizione

$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ capisaldi di D

$[a, b] = [x_1, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n \dots, x_n]$

$m_i = \min\limits_{I} f = f(y_i)$ $\quad y_i, z_i \in I$

$M_i : \max\limits_{I} f = f(z_i)$ $\quad [x_{i-1}, x_i] = I_i \quad i = 1, \dots, n$

$D = \max\limits_{i=1\dots n} (x_i - x_{i+1})$ ampiezza di D

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \dots x_{i+1})$$

somme inferiore secondo Riemann relative alla funzione f e a D

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_1 (x_i - x_{i+1})$$

somme superiore secondo Riemann relative alla funzione f e a D

$$s(f, D) \leq S(f, D)$$

$\underline{S}$ = insieme delle somme inferiori
$\overline{S}$ = insieme delle somme superiore

Si può provare che $\forall D_1, D_2$ si ha $s(f, D) \leq S(f, D)$
quindi $\underline{S}, \overline{S}$ sono due insiemi separati che

teorema $\underline{S}$ ed $\overline{S}$ sono contigui

Dim Facciamo vedere che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists D : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$

f continua in $[a, b] \Rightarrow$ uniformemente cont $\Rightarrow$ in corrispondenza di $\frac{B}{b-a}$ $\exists \delta > 0 : y, z \in [a, b]$

$|y - z| < \delta$ si ha $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$

Scegliamo $D : |D| < \delta$ e cont

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum M_i (x_i - x_{i+1}) - \sum m_i (x_i - x_{i+1}) =$$
$$\sum (M_1 - m_{i+1})(x_1 - x_{i+1}) = \sum (f(x_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1})$$

$$x_i - x_{i-1} < \delta \Rightarrow |z_i - y_i| < \delta \rightarrow f(z_i) - f(y_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$
$$(*) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) < \varepsilon$$

Dunque $\underline{S}$ ed $\overline{S}$ sono contigui, il loro unico elemento di separazione è chiamato integrale di Riemann o integrale indefinito di f in [a, b]

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

f funzione integranda

a, b estremi di integrazione

dx indica il nome della variabile

L'integrale non dipende dal nome della variabile

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \dots$$

$$\forall D \qquad s(f,D) = \int_a^b f(x)\,dx \le S(f,D)$$

$f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ cont $\quad a, b \in (\alpha, \beta)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \text{int di Riem } \int_a^b f(x)\,dx & \text{se } a < b \\ \text{opposto dell'integrale di R } -\int_b^a f(x)\,dx & \text{se } a > b \\ 0 & \text{se } a = b \end{cases}$$

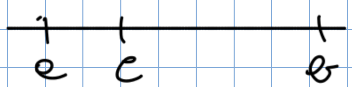
così abbiamo esteso il concetto di int definito il caso in cui $a \ge b$

Proprietà dell'integrale definito

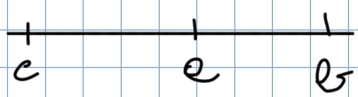
1) distributiva

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1\int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

2) additiva $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall a, b, c \in (\alpha, \beta)$



se è di Riemann



se non è di "

$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ infatti $\int_a^b = \int_c^a + \int_a^b \Rightarrow \int_a^b = \int_a^b - \int_a^a \Rightarrow$ ts

3) proprietà della media per l'int di Riemann

$f : [a,b] \to$ cont

ts. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

Dim: Basta scegliere $D = \{a ; b\}$

Osserviamo che $(*) \Leftrightarrow \quad m = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M \Rightarrow \exists c \in [a,b]:$

$\dfrac{\int}{b-a} = c \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(x)(b-a)$

4) Prima prop di monotonia per l'int di Riemann

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \to \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \quad \text{infatti } m \geq 0$$

5) Seconda prop di monotonia

$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

infatti $0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$

Esempio di int definito

$f(x) = k \quad \forall x \in [a,b] \quad (k \in \mathbb{R})$

dato $D \quad m_i = k \ \forall i \Rightarrow S(f,D) = \Sigma\, m_i (x_i - x_{i-1}) = k(b-a)$

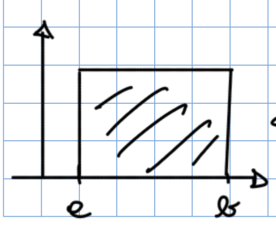
$S(f,D) = k(b-a)$

$\underline{S} = \{k(b-a)\}$

$\overline{S} = \{k(b-a)\}$

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

Se $k \geq 0$

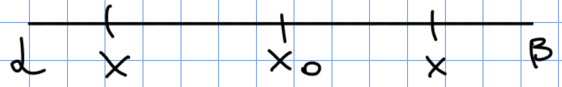


$\leftarrow$ area $= k(b-a)$

Funzione integrale

$f: (\alpha, \beta) \to R$ fissiamo $x_0 \in (a, b)$

continua



$\forall x \in (\alpha, \beta)$ con $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ dipende infatti da x

F funzione integrale di punto iniziale x_0 $f(\alpha,\beta) \to R$

$F(x) = \int_{x}^{2} \sin t\,dt$ non è una funzione int $f(x) = -\int_{2}^{x} \sin t\,dt$
fun int

Consideriamo due funzioni integrali

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ e $G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ $(x_0, x_1 \in (\alpha, \beta))$

$F(x) = \int_{x_0}^{x} \dots = \int_{x_0}^{x_1} \dots + \int_{x_0}^{x_1} \dots = G(x) + \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt \Rightarrow F(x) + K$

due funzioni integrali differiscono per una costante, ciò ci fa pensare che siano primitive di f

Sarà vero?

Teorema di derivazione della funzione integrale

IP $f: (\alpha, \beta) \to R$ con $x_0 = (\alpha, \beta)$

TS posto $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ in $[a, b]$ si ha $F'(x) = f(x)$
$\forall x \in (\alpha, \beta)$

Dim sia $c \in (\alpha, \beta)$ dim che $F'(c) = f(c)$

$$r(x) = \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{c}^{x} f(t)\,dt}{x - c} = \frac{\int_{x_0}^{x} \dots + \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt}{x - c}$$