

Pecorazione 3.1

$\vdash_{P_0} d \rightarrow d$ "d \rightarrow d è un teorema di P_0 "

Dimostrazione

$$d \rightarrow (\beta \rightarrow d) \quad (A_K)$$

$$d \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((d \rightarrow \beta) \rightarrow (d \rightarrow \gamma)) \quad (A_S)$$

$$(\top \beta \rightarrow \top d) \rightarrow ((\top \beta \rightarrow d) \rightarrow \beta) \quad (A_T)$$

$$1. (d \rightarrow ((d \rightarrow d) \rightarrow d) \rightarrow d) \xrightarrow{A_S} (d \rightarrow (d \rightarrow (d \rightarrow d)) \rightarrow (d \rightarrow d))$$

$$2. d \rightarrow ((d \rightarrow d) \rightarrow d) \quad A_K \quad \beta \equiv d \rightarrow d$$

$$3. (d \rightarrow (d \rightarrow d)) \rightarrow (d \rightarrow d) \quad MP(1,2)$$

$$4. d \rightarrow (d \rightarrow d) \quad A_K \quad \beta \equiv d$$

$$5. d \rightarrow d \quad MP(3,4)$$

Forse il
libro è
più chiaro

Teorema di deduzione di Herbrand

dato un insieme di fbf Γ in P_0 si ha:

$$\Gamma \vdash_{P_0} d \rightarrow \beta \text{ se e solo se } \Gamma, d \vdash_{P_0} \beta$$

$$\Rightarrow 1. d \quad \text{ipotesi}$$

:

$$K. \quad d \rightarrow \beta \quad \text{espressione in ipotesi } \Gamma \vdash_{P_0} d \rightarrow \beta$$

$$k+1 \quad \beta \quad MP(1, K)$$

$$\text{Quindi } \Gamma, d \vdash_{P_0} \beta$$

\Leftarrow costruiamo inducitivamente una derivazione $\Gamma \vdash_{P_0} d \rightarrow \beta$
e partire dall'ipotesi $\Gamma, d \vdash_{P_0} \beta$

Dunque $\beta = \beta_1, \dots, \beta_n$ β rappresenta derivazione $\Gamma \vdash_{P_0} \beta$
 (IPOTESI)

BASE $m = 1$, la derivazione si riduce al β in Γ :

1. $\beta \rightarrow (\lambda \rightarrow \beta)$ (A_x)
2. β ipotesi
3. $\lambda \rightarrow \beta \vdash (1, 2)$

$\beta = \lambda$ dalle prop 3.1

$\vdash_{P_0} \lambda \rightarrow \lambda \Rightarrow$ vede la tesi

INDUZIONE

Supponiamo di scrivere una derivazione delle forme
 $\Gamma \vdash_{P_0} \lambda' \rightarrow \beta'$ e partire dall'ipotesi $\lambda \vdash_{P_0} \beta'$ di lunghezza
 minore o eguale a $m-1$

$\lambda \vdash_{P_0} \beta$ di lunghezza m con $m > 1$

- Se β_m è un'ass. si ipotesi su Γ , oppure è la tesi
 \Rightarrow lavoriamo come nel caso base

- Se β_m è ottenuto per modus ponens da β_i e β_j $i, j < m$
 possiamo dire pure ipotesi riduttive e costruire la derivazione

$$\Gamma \vdash_{P_0} \lambda \rightarrow \beta_i \vdash \Gamma \vdash_{P_0} \lambda \rightarrow \beta_j$$

perché β_m è ottenuta per modus ponens tra β_i, β_j (β_m)
 ottieniamo $\beta_i = (\beta_j \rightarrow \beta_m)$

Costruiamo $\Gamma \vdash_{P_0} \lambda \rightarrow \beta \equiv \lambda \rightarrow \beta_m$

- $\beta_i \equiv \beta_j \rightarrow \beta_m$
- $\lambda \rightarrow \beta \equiv \lambda \rightarrow \beta_m$

$$1. \lambda \rightarrow \underbrace{\beta_i}_{(\beta_j \rightarrow \beta_m)}$$

$$1'. \lambda \rightarrow (\beta_j \rightarrow \beta_m) \rightarrow (\lambda \rightarrow \beta_j) \rightarrow (\lambda \rightarrow \beta_m)$$

λ ipotesi

A_x

$\kappa : d \rightarrow (\beta_j \rightarrow \beta_m)$ per espansione $\Gamma \vdash_{P_0} d \rightarrow \beta_i$

$\kappa+1 : (\lambda \rightarrow \beta_j) \rightarrow (\lambda \rightarrow \beta_m) \quad M(\neg^i, \kappa)$

⋮

$\kappa \quad d \rightarrow \beta_j \quad$ per espansione $\Gamma \vdash_{P_0} d \rightarrow \beta_j$

$\kappa+1 \quad d \rightarrow \beta_m \quad MP(\kappa+1, \kappa)$

Proposizione 3.2

$\vdash_{P_0} d \rightarrow (\neg d \rightarrow \beta)$

$\vdash_{P_0} d \Rightarrow \beta \Leftrightarrow d \vdash_{P_0} \beta$

Per il teorema di deduzione $d, \neg d \vdash_{P_0} \beta$:

1. $d \rightarrow (\neg \beta \rightarrow d)$ A_K

2. d

Ipotesi

3. $MP(1, 2)$

4. $\neg d \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg d)$ A_K

5. $\neg d$ Ipotasi

6. $\neg \beta \rightarrow \neg d$ $MP(4, 5)$

7. $\neg \beta \rightarrow \neg d \rightarrow (\neg \beta \rightarrow d) \rightarrow \beta$ A_I

8. $(\neg \beta \rightarrow d) \rightarrow \beta$ $MP(6, 7)$

9. β $MP(3, 8)$

Proposizione 3.3 (teorema di \rightarrow)

$$\vdash \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash_{P_0} \vdash \beta \rightarrow \gamma \quad \text{per il teorema di deduzione}$$

$$\vdash \beta, \beta \rightarrow \gamma, \vdash \beta \vdash_{P_0} \gamma$$

1. $\vdash \beta \rightarrow \beta$ ipotesi
2. $\vdash \beta$ ipotesi
3. β MP(1,2)
4. $\beta \rightarrow \gamma$ ipotesi
5. $\vdash \gamma$ MP(3,4)

Proposizione 3.4

$$\vdash \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash$$

1. $(\vdash \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash) \rightarrow (\vdash \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash) \rightarrow \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash$ A₁
2. $\vdash \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash$ proposizione 3.1
3. $(\vdash \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash) \rightarrow \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash$ MP(1,2)
4. $\vdash \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash$ ipotesi
5. $\vdash \vdash \vdash \vdash \vdash \vdash$ MP(3,4)

Proposizione 3.5

$$\vdash \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta \vdash_{P_0} \vdash \beta \rightarrow \gamma$$

Per il teorema di deduzione $\vdash \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta, \vdash \beta \vdash_{P_0} \gamma$

1. $\vdash \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$ ipotesi
2. $\vdash \beta$ ipotesi
3. $\beta \rightarrow \gamma$ MP(1,2)
4. β ipotesi
5. γ MP(3,4)

Proposizione 3.6

$$\vdash \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) A_K$$

$$\neg\neg\delta \xrightarrow{P_0} \delta$$

$$1. \neg\neg\delta \rightarrow (\neg\delta \rightarrow \neg\neg\delta)$$

A_K

$$2. \neg\neg\delta$$

ipotesi

$$3. \neg\delta \rightarrow \neg\neg\delta$$

MP(1,2)

$$4. \neg\delta \rightarrow \neg\neg\delta \rightarrow (\neg\delta \rightarrow \neg\delta) \rightarrow \delta$$

A_I

$$5. (\neg\delta \rightarrow \neg\delta) \rightarrow \delta$$

MP(3,4)

$$6. \neg\delta \rightarrow \neg\delta$$

prop 3.1

$$7. \delta$$

MP(5,6)

Prop 3.7 $\neg\delta \vdash_{P_0} \delta \rightarrow \beta$

Per il teorema di deduzione $\delta, \neg\delta \vdash_{P_0} \beta$ prop 3.2

Proposizione 3.8

$$\vdash_{P_0} \delta \rightarrow \Gamma\Gamma\delta \quad \text{teorema di deduzione}$$

$$1. \delta \rightarrow (\neg\neg\delta \rightarrow \delta)$$

A_K

$$2. (\Gamma\Gamma\delta \rightarrow \delta) \rightarrow (\neg\neg\delta \rightarrow \delta) \rightarrow \neg\neg\delta \quad A_I$$

prop 3.6

$$3. \neg\neg(\neg\delta) \rightarrow \neg\delta$$

$$4. (\neg\neg\delta \rightarrow \delta) \rightarrow \neg\neg\delta$$

MP(2,3)

$$5. \delta$$

ipotesi

$$6. \neg\neg\delta \rightarrow \delta$$

MP(1,5)

$$7. \neg\neg\delta$$

MP(4,6)

Proposizione 3.9

$$\vdash_{P_0} (\neg\neg\delta \rightarrow \neg\neg\beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\delta) \quad T. \text{ deduzione}$$

$$(\neg\neg\delta \rightarrow \neg\neg\beta), \neg\beta \vdash_{P_0} \neg\delta$$

$$1. (\neg\neg\delta \rightarrow \neg\neg\beta) \rightarrow ((\neg\neg\delta \rightarrow \neg\neg\beta) \rightarrow \neg\delta) \quad A_I$$

$$2. \neg\beta \rightarrow \neg\neg\beta \quad \text{prop 3.8}$$

3. $\neg \beta$

ipotesi

4. $\neg \neg \beta$

MP(2,3)

5. $\neg \neg \beta \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \neg \neg \beta)$

A_K

6. $\neg \alpha \rightarrow \neg \neg \beta$

MP(4,5)

7. $(\neg \alpha \rightarrow \neg \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$

MP(1,6)

8. $\neg \alpha \rightarrow \neg \beta$

ipotesi

$\neg \alpha$

MP(4,8)

Proposizione 3.10

$\alpha \rightarrow \beta \vdash_{P_0} \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$

$\alpha \rightarrow \beta, \neg \beta \vdash_{P_0} \neg \alpha$

1. $\neg \alpha \rightarrow \alpha$

Prop 3.6

2. $\alpha \rightarrow \beta$

ipotesi

3. $\neg \alpha \rightarrow \beta$

P 3.3 tcomes (1,2)

4. $\beta \rightarrow \neg \beta$

P 3.8

5. $\neg \alpha \rightarrow \neg \beta$

tcomes (3,4)

6. $(\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$ prop 3.9

7. $\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$ MP(5,6)

Proposizione 3.11

$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{P_0} \alpha$

1. $(\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg \neg \alpha)$

Prop 3.10

2. $\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ prop 3.4

3. $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg \neg \alpha$ MP (1,2)

4. $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$ ipotesi

5. $\neg \neg \alpha$ MP(3,4)

6. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$ prop 3.6

7. α MP(5,6)

Proposizioni 3.12

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{P_0} \neg\beta$$

$$1. (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta) \quad \text{prop 3.10}$$

$$2. \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

AK

$$3. \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta$$

MP (1,2)

$$4. \neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

ipotesi

$$5. \neg\beta$$

MP(3,4)

Teorema 3.2

Un insieme Γ di flf di P_0 è **contraddittorio** (cioè, equivalentemente $\text{comp}_{P_0}(\Gamma) = \omega$) se e solo se esiste una flf Δ tale che $\Gamma \vdash_{P_0} \Delta$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\Delta$

Dimostrazione

$$\Rightarrow \Gamma \vdash_{P_0} \beta \quad \forall \beta \in \omega$$

$$\Leftarrow \text{Per prop 3.2 } \Delta, \neg\Delta \vdash_{P_0} \beta \quad \forall \beta$$

Per ipotesi $\Gamma \vdash_{P_0} \Delta$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\Delta$

Dalle prop 2.3 premiamo concludere $\Gamma \vdash_{P_0} \beta \wedge \neg\beta$

Corollario 3.1

P_0 è inconseguente se e solo se esiste una flf Δ di P_0 tale che $\vdash_{P_0} \Delta$ e $\vdash_{P_0} \neg\Delta$

Dimostrazione

Basta porre $\Gamma = \emptyset$ per il teorema 3.2 $\Gamma \vdash_{P_0} \Delta$ e $\Gamma \vdash_{P_0} \neg\Delta$

teorema 3.3

Se Γ è un insieme consistente di frasi di P_0 e niente dimostra che $\Gamma \vdash_{P_0} d$. $\Gamma \cup \{ \neg d \}$ è consistente.

Dimostrazione

Per dimostrarlo $\Gamma \cup \{ \neg d \}$ è inconsistente $\Gamma \vdash_{P_0} \neg d$

$$\begin{aligned} & \Gamma \vdash_{P_0} \neg d \wedge \Gamma \vdash_{P_0} \neg d \Rightarrow \\ & \Rightarrow \Gamma, \neg d \vdash_{P_0} \neg d \end{aligned}$$

+ di deduzione

$$\Gamma \vdash_{P_0} \neg d \rightarrow d$$

Per le prop 3.4 $\neg d \rightarrow d \vdash_{P_0} d$

Per le 3.2

$$\Gamma \vdash_{P_0} d$$

Ansvedo

Corollario 3.2

Se $\Gamma \cup \{ d \}$ è contraddittorio $\Rightarrow \Gamma \vdash_{P_0} \neg d$

Dimostrazione

1) Se Γ è inconsistente \Rightarrow si dimostra Corollario 3.1

2) Se Γ è consistente

per dimostrarlo diciamo che $\Gamma \vdash_{P_0} \neg d$

Per il teorema 3.3 $\Gamma \cup \{ \neg d \}$ è inconsistente

Per le proposizioni 3.8 $\Gamma \vdash_{P_0} \neg d \vdash_{P_0} d$ Contraddittorio

$\Gamma \vdash_{P_0} d$ Ansvedo

Semantica di P_0

Definizione Un' assegnamento proposizionale β è una funzione

$$\beta = \begin{cases} \text{associabile} \\ \text{proposizionale} \end{cases} \rightarrow \{0, 1\}$$

$1, 0, \perp$

Definizione 3.3.

Un' assegnamento proposizionale β è esteso per induzione ad una soluzione $\bar{\beta}$ del linfugge di β nel modo seguente

- $\bar{\beta}(p) = \beta(p)$ & ogni associabile proposizionale
- $\bar{\beta}(d \rightarrow B) = \begin{cases} 0 & \text{se } d \text{ vale } \bar{\beta}(d) = 1 \text{ e } \beta(B) = 0 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- $\bar{\beta}(\top) = 1 - \bar{\beta}(\perp)$

Definizione 3.4

Una fbf d di P_0 è detta avere:

- una tautologia se per ogni assegnamento proposizionale β si ha $\bar{\beta}(d) = 1$ " $\forall \beta \Rightarrow \bar{\beta}(d) = 1$ "
 - soddisfacibile se e solo se esiste un' assegnamento proposizionale β tale che $\bar{\beta}(d) = 1$ " $\exists \beta \Rightarrow \beta(d) = 1$ "
 - controaddittoria se e solo se non è soddisfacibile
- Un insieme di fbf di P_0 è detto soddisfacibile se e solo se esiste un' assegnamento proposizionale β tale che $\bar{\beta}(\beta) = 1 \quad \forall \beta \in \Gamma$