22 aprile 2025

mercoledì 23 aprile 2025 14:03

Esempi di asintoti

a) funz. raz. fratte

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ diverge per $x \to 3 \Rightarrow x = 3$ eq. asint. vert.

$f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ (ridotta ai minimi termini) se $B(c) = 0 \Rightarrow$ la retta di eq. $x = c$ è as. vert.

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ eq. asint. orizz. ds e sin.

$f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ se A e B hanno lo stesso grado $\Rightarrow$ la retta di eq. $y = \dfrac{a_0}{b_0}$ è asint. orizz. ds. e sin.

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-3}$ $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ eq. as. orizz. ds. e sin.

$f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ se B ha grado maggiore $\Rightarrow$ la retta di eq. $y = 0$ è asint. orizz. ds. e sin.

$f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-3}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x} = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x-3} - 2x \right) = \lim \dfrac{2x^2+1-2x^2+6x}{x-3} = 6$ $\quad y = 2x+6$ eq. as. obl. ds.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x \right) = 6$ $\quad y = 2x+6$ eq. as. obl. sin.

$f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x-3}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim \dfrac{2x^3+1}{x^2-3x} = +\infty$ non c'è as.

$f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ se gr A = gr B + 1 $\Rightarrow$ c'è as. obl. ds. e sin.

se gr A > gr B + 1 $\Rightarrow$ non c'è as. obl.

esemp. $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^4-16}$ eq. as. vert. $x = 2$, $x = -2$

" as. $y = 0$ ds. e sin.

$f(x) = \dfrac{2x^4+1}{x^2-16}$ " vert $x = 4$, $x = -4$

$4 > 2+1 \Rightarrow$ non ci sono as. ds e sin.

$f(x) = \dfrac{2x^4+1}{x^3-27}$ eq. as. vert $x = 3$

$4 = 3+1 \Rightarrow$ ci sarà as. obl. ds e sin.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4+1}{x^4-27x} = 2 \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^4+1}{x^3-27} - 2x\right) = \lim \frac{\cancel{2x^4}+1-\cancel{2x^4}+54x}{x^3-27} = 0$$

eq. as. obl. ds e sin. $y = 2x$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^4+1}{x^3-27}\cdot\frac{1}{x} = \frac{2x^4+1}{x^4-27x}$$

b) funz. irrazionale $f(x) = \sqrt{A(x)}$ A polin. di II grado

possiamo cercare solo asintoti obl. perché A diverge per $x \to \pm\infty$

Esemp. $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$ è def in $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

as. destro $(x \to +\infty)$ $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}} \to 1$ per $x \to +\infty$ $x = \sqrt{x^2}$

$$f(x) - 1\cdot x = \sqrt{x^2-2x} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \frac{\cancel{x^2}-2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x}+x} =$$

moltipl. num. e den. per la somma

divido num. e den. per x

$$= \frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}+\frac{x}{x}} \to -1$$ eq. as. obl. ds. $y = x - 1$

$\sqrt{\frac{\quad}{x^2}} + \frac{\quad}{x}$

as. sin. $(x \to -\infty)$

per avere al denom. $-x > 0$

per $x \to -\infty$ $\sqrt{x^2} = -x$

$$\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = -\frac{\sqrt{x^2-2x}}{-x} = -\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}} \to -1$$

molt. num. e denom. per la differenza

$$f(x) - (-1)\cdot x = f(x) + x = \underset{+\infty}{\sqrt{x^2-2x}} + \underset{-\infty}{x} = \frac{\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)}{\underset{+\infty}{\sqrt{x^2-2x}} \underset{+\infty}{- x}} = \frac{\cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x} - x}$$

divido num. e denom. per $-x > 0$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}} + \frac{-x}{-x}} \to 1 \implies \text{eq. as. obl. sin.} \quad y = -x + 1$$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} \qquad \text{è def in }]-\infty, +\infty[\qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

as. destro $(x \to +\infty)$

$$\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x} = \sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2}} \to 2$$

$$\sqrt{4x^2+x+1} - 2x = \frac{\cancel{4x^2} + x + 1 - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+x+1} + 2x} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2}} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}} \to \frac{1}{4}$$

eq. as. obl. ds. $y = 2x + \frac{1}{4}$

as. sinistro $(x \to -\infty)$

$$\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x} = -\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{-x} = -\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2}} \to -2$$

$$\sqrt{4x^2+x+1} + 2x = \frac{\cancel{4x^2} + x + 1 - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+x+1} - 2x} = \frac{-1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2}} + \frac{-2x}{-x}} \to -\frac{1}{4}$$

eq. as. obl. sin. $y = -2x - \frac{1}{4}$

ESERCIZI

$$f(x) = x\,\frac{2\log x - 3}{\log x - 2}$$

ASINTOTI

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 2 \end{cases}$$

$$f : \left(]0, e^2[\,\cup\,]e^2, +\infty[\right) \to \mathbb{R}$$

f diverge per $x \to e^2 \implies$ eq. as. vert. $x = e^2$

f diverge per $x \to e^2 \Rightarrow$ eq. as. vert. $x = e^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \frac{2-\frac{3}{\log x}}{1-\frac{2}{\log x}} \to 0 \quad \text{non c'è as. vert.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \frac{2\log x - 3}{\log x - 2} = \lim_{x\to+\infty} x \frac{2-\frac{3}{\log x}}{1-\frac{2}{\log x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} \frac{2-\frac{3}{\log x}}{1-\frac{2}{\log x}} = 2$$

$$f(x) - 2x = x\frac{2\log x - 3}{\log x - 2} - 2x = x\frac{\cancel{2\log x} - 3 - \cancel{2\log x} + 4}{\log x - 2} = \frac{x}{\log x - 2} \to +\infty$$

sapremo più avanti il perché

non c'è as. obl.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \le 0 \\ \lim_{n} \dfrac{n^2 + x^2 + 4}{n^2 + 3} & x > 0 \end{cases}$$

fissato x, $\dfrac{n^2 + x^2 + 4}{n^2 + 3} \to 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

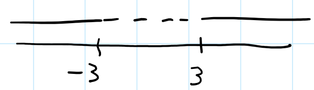
$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ non c'è as. obl. sin. $\qquad$ $y = 1$ eq. as. orizz. dx.

Esercizi sui limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-3x^4}{x^2+5} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2-3x^3}{x^2+5} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^6}{5-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-3x^4}{x^2+5} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2-3x^3}{x^2+5} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^6}{5-x} = -\infty$$

$$f(x) = 2^{\frac{1-3x}{x^2-9}}$$



$\lim f(x) = +\infty$ $\qquad$ $1-3x \to 10 \to +\infty$ $\qquad$ $\frac{10}{0^+}$ $+\infty$

$$\lim_{x\to(-3)^-} f(x) = +\infty \qquad \frac{\underset{\to 10}{1-3x}}{\underset{\to 0^+}{x^2-9}} \to +\infty$$

$$\cancel{\frac{10}{0^+} = +\infty \quad 2 = 2 = +\infty}$$ ERRORE

-3 $\quad$ 3

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x) = 0 \qquad \frac{\underset{\to 10}{1-3x}}{\underset{\to 0^-}{x^2-9}} \to -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1 \qquad \frac{1-3x}{x^2-9} \to 0$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty \qquad \frac{\underset{\to -8}{1-3x}}{\underset{\to 0^-}{x^2-9}} \to +\infty$$

$$\frac{\underset{\to -8}{1-3x}}{\underset{\to 0^+}{x^2-9}} \to -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{2x+1}{(x+3)^3}} - 1}{\sin \frac{x+2}{x^3+4}} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{e^{\frac{2x+1}{(x+3)^3}} - 1}{\frac{2x+1}{(x+3)^3}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{x+2}{x^3+4}}{\sin \frac{x+2}{x^3+4}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^3+4}{x+2} \cdot \frac{2x+1}{(x+3)^3}}_{\to 2} = 2$$

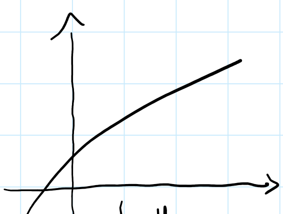
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2}{(x-3)^2}\right)^{2x+1} = \lim \left(\frac{x^2-6x+9+6x-7}{x^2-6x+9}\right)^{2x+1} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{\underbrace{\frac{x^2-6x+9}{6x-7}}_{\to+\infty}}\right)^{\frac{x^2-6x+9}{6x-7}}\right]_{\to e}^{\overbrace{\frac{(6x-7)(2x+1)}{x^2-6x+9}}^{\to 12}} = e^{12}$$

Teorema sui limiti delle funzioni monotone

Ricordiamo che $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è crescente (strettam.) se $x<y \Rightarrow f(x) \le (<) f(y)$

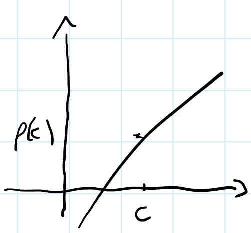
decrescente (") " $f(x) \ge (>) f(y)$

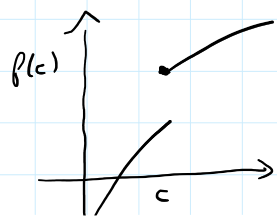


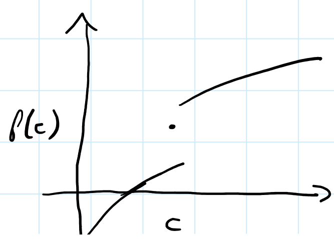
strett cresc

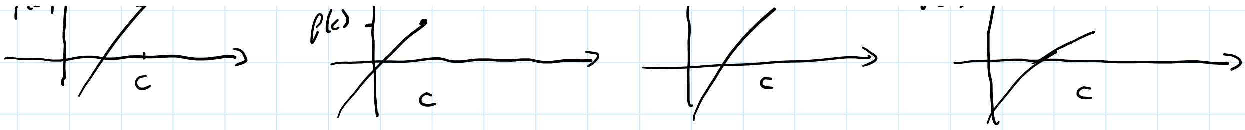
cresc

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ strett crescente, sia $c\in\,]a,b[$. Può accadere che







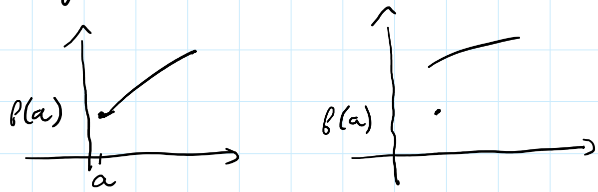


Si ha il seguente risultato:

$\exists \lim_{x\to c^-} f(x) = \ell^- = \sup_{(a,c[} f$ $\qquad$ $\exists \lim_{x\to c^+} f(x) = \ell^+ = \inf_{]c,b)} f$

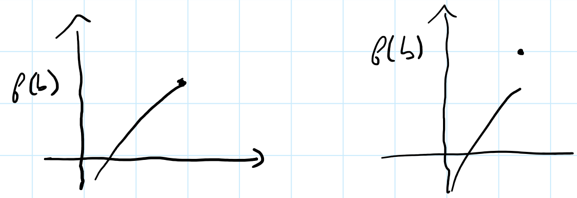
e si ha $\ell^- \le f(c) \le \ell^+$

$\lim_{x\to a} f(x) = \inf_{]a,b)} f \ge f(a)$



$f(a), f(b)$ ovviamente esistono solo se l'interv. è chiuso

$\lim_{x\to b} f(x) = \sup_{(a,b[} f \le f(b)$



Se f è decrescente si ha, ad es., se $c \in\,]a,b[$

$\lim_{x\to c^-} f(x) = \inf_{(a,c[} f \ge f(c) \ge \lim_{x\to c^+} f(x) = \sup_{]c,b)} f$

Nel caso di $c \in\,]a,b[$, se $\ell^- \ne \ell^+$, la quantità $|\ell^- - \ell^+|$ si chiama salto di f in corrispondenza di c