

$U, W \subseteq V$  tale che  $U \cap W = \{0\}$  allora  $U + W = U \oplus W$

$v \in U \oplus W \quad \exists! u \in U, w \in W$  tali che  $u + w = v$

## BASI DI SPAZI VETTORIALI

$V$  spazio vettoriale,  $S \subseteq V$  sottoinsieme

considero un insieme di vettori tali che preso un qualunque vettore  $v \in S$  si può scrivere come combinazione lineare degli altri

$S$  è un insieme di generatori di  $V$  se  $\langle S \rangle = V$

Esempio:

$$S = \{(0,1), (1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\langle S \rangle = \mathbb{R}^2 \Rightarrow (u, \lambda) = u(1,0) + \lambda(0,1)$$

questo ha un unico modo per essere rappresentato

$$R = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$$

$$\langle R \rangle = \mathbb{R}^2 \Rightarrow (3,4) = 3(1,0) + 4(0,1) = 3(1,1) + 4(0,1)$$
$$(u, \lambda) = u(1,0) + \lambda(0,1) = \lambda(1,0) + (u-\lambda)(1,0)$$

questo più di uno

$S \subseteq V$  sottoinsieme, se  $\forall v_1, \dots, v_m \in S$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Se queste proprietà è vera  $S$  si dice linearmente indipendente se è falsa  $S$  si dice linearmente dipendente

$$S = \{(0,1), (1,0)\}$$

$$\lambda_1 (0,1) + \lambda_2 (1,0) = (0,0) \iff \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

$\uparrow$   
 $(\lambda_2, \lambda_1)$

è linearmente indipendente  
se e' unico modo che ho  
per far venire le c.l. = 0  
è usare  $\lambda = 0$

$$R = \langle (0,1), (1,0), (1,1) \rangle$$

$$1(0,1) + 1(1,0) - 1(1,1) = (0,0)$$

$$(0,1) + (1,0) + (-1,-1) = (0,0)$$

Sono entrambi

linearmente dipendenti  
perche per un generico  
 $\lambda \neq 0$  le c.l. = 0

$$V = \{(0,0)\} \quad 1(0,0) = (0,0)$$

Proposizione:  $m > 1$ ,  $S = \{v_1, \dots, v_m\}$  lin. dip.

$$\Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, m\} \text{ tale che } v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \mu_i v_i$$

Dimostrazione

$S$  lin. dip.  $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$  non tutti zero tale che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \quad \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, m\} \text{ tale che } \lambda_j \neq 0$$

$$\Rightarrow v_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i, \quad \mu_i = - \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \Rightarrow v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \mu_i v_i$$

Un insieme  $B \subseteq V$  è una base se:

i)  $\langle B \rangle = V$

ii)  $B$  è linearmente indipendente

Esempio:

$$B = \{(0,1), (1,0)\} \text{ è una base di } \mathbb{R}^2$$

$$\lambda(0,1) + \mu(1,0) \Rightarrow (\mu, \lambda) \text{ e quindi } \uparrow$$

Remark

un base viene considerata ordinata

$$B = \{v_1, v_2\} \neq \{v_2, v_1\}$$

### Corollario

$B$  base di  $V$   $B = \{v_1 \dots v_m\}$

Allora  $\forall v \in V \exists! \lambda_1 \dots \lambda_m$  tale che  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

$V$  spazio vettoriale,  $B = \{b_1 \dots b_m\}$

$\forall v \in V \quad v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$  per uniche  $\lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$

$V \sim (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  coordinate di  $v$  rispetto alla base  $B$

### Proposizione

$V$  è uno spazio vettoriale,  $S = \{v_1 \dots v_m\}$  generare  $V$ . Allora esiste un sottoinsieme di  $S$  che forma una base di  $V$

$S = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$  generatore ma non base

$= \{(1,0), (0,1)\}$  base di  $\mathbb{R}^2$

↪ è anche un sottoinsieme di  $S$

### Lemma di Steinitz

$V$  spazio vettoriale,  $S = \{v_1 \dots v_m\}$  generatore di  $V$

Se  $\underbrace{\{w_1 \dots w_r\}}_{\text{insieme}}$  è lin ind allora  $r \leq m$

### Corollario

$V$  spazio vettoriale con base  $B = \{b_1 \dots b_m\}$ ,  $S = \{w_1 \dots w_r\} \subseteq V$   
sottoinsieme

i)  $S$  generare  $V \Rightarrow r \geq m$

ii)  $S$  lin ind  $\Rightarrow r \leq m$

### Corollario

$B = \{v_1 \dots v_m\}$  e  $B' = \{w_1 \dots w_r\}$  basi di  $V$ , allora  $m = r$

Dimensione di uno spazio vettoriale  $V$  è il numero di elementi che compongono una sua base

$$\mathbb{R}^m \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{e_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{e_2}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{e_m} \right\} \text{ base di } \mathbb{R}^m$$

$$\dim \mathbb{R}^m = m \quad \text{base standard}$$

Corollario:  $V$  spazio vettoriale,  $\dim V = m$   $S = \{v_1, \dots, v_m\}$

per vedere se è una base:

i)  $S$  lin ind

ii)  $S$  genera  $V \Rightarrow S$  è una base

Esempio:

•  $V = \{0\}$  = non ha una base quindi  $\dim V = 0$

•  $V = \mathbb{R} \quad B = \{1\} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \lambda \cdot 1, \lambda \in \mathbb{R} = 0 = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \lambda = 0$   
 $\dim \mathbb{R} = 1$

•  $M_{2,2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Downarrow \\ \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{matrix} \right\}$$

$$\dim M_{2,2} \mathbb{R} = 4$$

•  $M_{m,m}(\mathbb{R}) \quad \dim = m \cdot m$

Corollario

$V$  spazio vettoriale,  $\dim V = m$

$W \subseteq V$  sottospazio

$$\dim W \leq \dim V$$

Se più  $\dim W = \dim V$  se e solo se  $W = V$

## Proposizione

$V$  spazio vettoriale,  $\dim V = m \rightarrow V = \{v_1 \dots v_m\}$

$S = \{v_1 \dots v_r\}$  lin ind (quindi  $r \leq m$ )  $S \subseteq V$

allora  $\exists v_{r+1}, \dots, v_m$  tali che  $\{v_1 \dots v_r, v_{r+1} \dots v_m\}$  è un base di  $V$

teorema (formula di Grassmann)  $V$  spazio vettoriale

$U, W \subseteq V$  sottospazi.

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$