Grammatiche di tipo 0 → Grammatiche senza restrizioni

In generale le produzioni di esse si definiscono

$\alpha \to \beta \quad \alpha \in V^* \circ V_N \circ V^* \quad \beta \subset V^*$

Esempio P:

$S \to aSa \mid aAb \mid aAa \mid \varepsilon$

$aAa \to a \mid \varepsilon$

$aaAb \to b \mid \varepsilon$

Produzioni che appartengono a grammatiche di tipo zero

Esempio:

$G = \{a, b\}, \{S, A\}, P, S\}$ $\quad P \Rightarrow$ $S \to aAb$

$aA \to aaAb$

$A \to \varepsilon$

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

$S \to aAb \to aaAbb$

I linguaggi generabili di tipo 0, generano il linguaggio $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Grammatiche di tipo 1 (contestuali o context sensitive)

$\alpha \to \gamma \quad \alpha \in V^* \circ V_N \circ V^* \quad \gamma \in V^+ \quad |\alpha| \leq |\gamma|$

queste grammatiche ammettono qualunque regola di produzione che non riduce la lunghezza delle stringhe

Esempio:

$G = < \{a, b\}, \{S, A\}, P, S >$

- $S \to aSa \mid aAb \mid aAa$
- $aA \to aa$
- $Ab \to aab$

- $S \to aAb \to aab$
- $S \to aSa \to aaAaa \to aaaaa$

i linguaggi generati da grammatiche di tipo 1 si dicono linguaggi di tipo 1

Esempio:

G_1 $\quad V_T = \{a, b, c\} \quad V_N = \{S, B, C, F, G\}$

- $S \to aSBC$
- $CB \to BC$
- $SB \to bF$
- $FC \to cG$
- $GC \to G$
- $G \to \varepsilon$

$$\Rightarrow L(G_1) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

Possiamo generare $L(G_2) = L(G_1)$

G_2 tipo 1 $\Rightarrow$

$S \to aBSc \mid abc$

$Ba \to aB$

$Bb \to bb$

Essendo i linguaggi equivalenti osserviamo che $L(G_1)$ è un linguaggio di tipo 0, mentre il linguaggio $L(G_2)$ è un linguaggio context sensitive = tipo 1

Il termine di linguaggio contestuale definito come la classe dei linguaggi generabili da grammatiche aventi le produzioni contestuali del tipo

$\beta_1 A \beta_2 \to \beta_1 \gamma \beta_2 \qquad A \in V_N \quad \beta_1, \beta_2 \subset V^* \quad \gamma \in V^+$

La produzione $A \to \gamma$ può essere applicata solo se A si trova nel contesto $< \beta_1, \beta_2 >$ $\mathcal{L}(G_2) = \{$

Se prendiamo la grammatica la produzione $Bb \to bb$ il carattere B può essere rimpiazzato dal carattere b solo se alla sua destra è presente il contesto b

Grammatiche di tipo 2 automi e pile

Le grammatiche di tipo 2 sono dette non Contestuali e ammettono le produzioni del tipo:

$A \to B \quad A \subset V_N \quad B \subset V^T$

cioè produzioni in cui ogni non terminale A può essere riscritto in una stringa B indipendentemente dal contesto

Esempio

La Grammatica definita come $G = < \{a, b\}, \{S, A\}, P, S >$

$P: S \to aAb$

$aA \to aaAb$

$A \to \varepsilon$

$L(G_3)$ è tipo zero

$G_4 \Rightarrow P: S \to aSb \mid ab$

$L(G_4)$ è un linguaggio di tipo 2

e $L(G_3) = L(G_4)$

Esempio

Assioma E

$E \to E + T \mid T$

$T \to T \cdot F \mid F$

$F \to i \mid (E)$

partendo da E generiamo tutte le espressioni aritmetiche di somme e prodotto in una variabile

Le grammatiche di tipo 2 generano linguaggi di tipo 2

$G = < \{ (,) \}, \{S\}, P, S >$

$S \to (\ )$

$S \to SS$

$S \to (S)$

linguaggio di parentesi bilanciate

Grammatiche di tipo 3 ovvero per ASF ⇒ grammatiche lineari destre o regolari

Ammettono produzioni

$A \to \delta \quad A \subset V_N \quad \delta \in (V_T \circ V_N) \cup V_T = V \cup V_T$

tali linguaggi sono rappresentabili per mezzo di espressioni regolari e quindi deriva il nome di regolari

$G = < \{a, b\}, \{S\}, P, S \}$ $\quad P: S \to aS$

$\quad\quad S \to b$

Grammatica di tipo 3 $L = \{ a^n b \mid n \geq 0 \}$

$S \to aS \to aaS \to aaaS \to aaab = a^3 b$

il termine lineare destra deriva dal fatto che al lato destro di ogni produzione compare al più un carattere non terminale

In modo analogo possiamo definire le lineari sinistre, linguaggi regolari caratterizzate dalle seguenti regole

$A \to \delta \quad A \in V_N \quad \delta \in (V_N \circ V_T) \cup V_T = V \cup V_T$

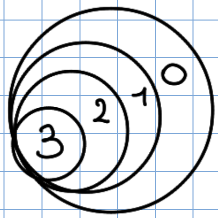
Per ogni grammatica lineare destra ne esiste una lineare sinistra equivalente e viceversa

Esempio:

$A \to Ab \mid b$

$A \to Aa \mid a$

Gerarchia di Chomsky



Si può verificare che per ogni grammatica $0 \leq n \leq 2$ ogni grammatica di tipo $n+1$ è anche di tipo n e pertanto l'insieme dei linguaggi di tipo n contiene tutti i linguaggi di tipo $n+1$

Definizione

Un linguaggio L viene detto strettamente di tipo n se esiste una grammatica G di tipo n che genera L e non esiste alcuna grammatica G' di tipo $m > n$ che possa generarlo

$L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$

G_1 tipo 0

$L(G_1)$ tipo 0

Si può dimostrare che non esiste nessuna grammatica di tipo 3 che lo può generare

$L = \{ a^k b^k \mid k \geq 0 \}$ è strettamente di tipo 2

le grammatiche di tipo 3 sono gerarchicamente le più povere

tabelle riassuntive grammatiche

TIPO	PRODUZIONI	DA DOVE PRENDIAMO LE NOSTRE VARIABILI	DEFINIZIONE
0	$\alpha \to \beta$	$\alpha \in V^* \circ V_N \circ V^*$ $\beta \in V^*$	Posso avere qualsiasi regola
1	$\alpha \to \beta$	$\alpha \in V^* \circ V_N \circ V^*$ $\beta \in V^+$ $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$	Posso avere regole che non riducono la lunghezza delle stringhe
2	$A \to B$	$A \in V_N$ $\beta \in V^+$	ogni carattere non terminale può essere risolto come terminale indipendentemente dal contesto
3	$A \to \delta$	$A \in V_N$ $\delta \in (V_T \cup (V_T \circ V_N))$	il lato destro di ogni produzione comprende un carattere non terminale

Esempio

$L = \{ (x\#)^+ \mid x = \text{permutazioni di } \langle a, b, c \rangle \}$

Permette di generare stringhe costituite dalla concatenazione di un numero qualunque maggiore di 0, di permutazioni dei terminali a, b, c terminate dal carattere #

Definiamo una grammatica di tipo 1

$G = \langle \{a, b, c, \#\}, \{S, A, B, C\}, P, S \rangle$

$S \to ABC\#S \mid ABC\#$

$AB \to BA$

$AC \to CA$

$BC \to CB$

$A \to a$

$B \to b$

$C \to c$

$S \to ABC\#S \to ABC\#ABC\# \to abc\#abc\#$ Grammatica di tipo 1

G' definita allo stesso modo

$S \to E\#S \mid E\#$ Grammatica di tipo 2

$E \to abc \mid acb \mid cba \mid bac \mid bca \mid cab$

$G'' = < \{a, b, c, \#\}, \{S, R, X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''\}, P, S \}$

$S \rightarrow aX \mid bY \mid cZ$

$X \rightarrow bX' \mid cX'''$

$X' \rightarrow cR$

$X'' \rightarrow bR$

$\vdots$

Grammatica di tipo 3

Osservazione

Maggiore è il numero delle grammatiche maggiore è il numero di produzioni per potere costruire lo stesso linguaggio usando grammatiche diverse