Cap. 1 NUMERI REALI E COMPLESSI E GENERALITÀ SULLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

L'INSIEME DEI NUMERI REALI

Dai numeri naturali ai numeri reali. Riteniamo noti i seguenti insiemi numerici:
$\mathbf{N}$ insieme dei numeri naturali
$\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$
$\mathbf{Z}$ insieme dei numeri interi relativi
$\mathbf{Q}$ insieme dei numeri razionali
Riterremo noto anche il concetto di funzione fra insiemi.

Ricordiamo brevemente il percorso che conduce da $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Q}$. I numeri naturali sono considerati concetti primitivi perché sono legati ad una capacità elementare della nostra mente: quella di "associare", infatti essi servono per contare. Normalmente lo zero (anch'esso è un concetto primitivo) viene considerato un numero naturale, ma per comodità (il motivo sarà più chiaro quando affronteremo lo studio delle successioni) preferiamo distinguere gli insiemi $\mathbf{N}$ ed $\mathbf{N}_0$, tuttavia ciò che diremo per l'uno dei due varrà generalmente anche per l'altro. Un altro concetto primitivo è il "successivo di un numero": attenzione, non possiamo ancora dire che il successivo di n è $n+1$ perché non conosciamo ancora il concetto di addizione! lo indicheremo, per il momento, con n'. Chiameremo cifre i numeri $0, 1, \cdots, 9$. Nell'insieme dei numeri naturali vale il principio di induzione, che afferma che se una proprietà vale per $n = 1$ (o $n = 0$ a seconda dei casi) e, se si suppone che sia vera per un certo n, si riesce a provare che è vera anche per n', allora essa è vera per tutti i numeri naturali. Questo principio viene considerato un postulato: si suppone, cioè, che esso sia vero, senza dimostrarlo. A partire dal principio di induzione, si definiscono le operazioni: se $a \in \mathbf{N}_0$, per definire $a+n$ e $a \cdot n$ per un qualunque $n \in \mathbf{N}_0$, si pone

1) $a + 0 = a$
2) $a + n' = (a + n)'$
3) $a \cdot 0 = 0$
4) $a \cdot n' = a \cdot n + a$

Si definisce anche la potenza di un numero naturale:

5) $a^0 = 1$
6) $a^{n'} = a^n \cdot a$

Le potenze godono delle seguenti importanti proprietà:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$(a^n)^m = a^{nm}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Nel seguito, ometteremo il simbolo "$\cdot$" per indicare il prodotto.
Dalla 1) in particolare segue
$a + 1 = a + 0' = (a + 0)' = a'$

Infine, definiamo $a < b$ se esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $a + n = b$. Passando alle operazioni inverse (sottrazione e divisione), come è ben noto esse servono a risolvere dei problemi: rispettivamente, quello di trovare n tale che $b+n = a$ e quello di trovare n tale che $a = bn$. Essi, tuttavia, non sono sempre risolubili: il primo lo è solo se $a > b$ e il secondo solo se a è multiplo di b. Questo problema ha portato all'introduzione degli insiemi numerici successivi.

A partire da $n \in \mathbf{N}$, costruiamo due simboli: $+n$ (detto numero positivo) e $-n$ (detto numero negativo). L'insieme dei numeri interi relativi è $\mathbf{Z} = \{0\} \cup \{+n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{-n : n \in \mathbf{N}\}$. Nell'insieme $\mathbf{Z}$ si introducono le operazioni e l'ordine nella maniera ben nota, ed è subito evidente che il problema della sottrazione in $\mathbf{Z}$ è sempre risolto. Ora, associando ad ogni $n \in \mathbf{N}$ il numero $+n \in \mathbf{Z}$, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra $\mathbf{N}$ e l'insieme dei numeri interi positivi, possiamo vedere inoltre che i numeri n e $+n$ si comportano allo stesso modo rispetto alle operazioni e all'ordine (ad esempio, se $n < m$ si ha anche $+n < +m$) quindi è possibile identificare i numeri n e $+n$ e considerare $\mathbf{N}$ come un sottoinsieme di $\mathbf{Z}$.

Indichiamo ora con $\mathbf{Q}$ l'insieme costituito dallo zero e da tutte le coppie (m, n) con $m \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbf{N}$. I numeri razionali si indicheranno normalmente nella forma $\pm\frac{m}{n}$. Nell'insieme $\mathbf{Q}$ si introducono le operazioni e l'ordine nella maniera ben nota, ed è subito evidente che anche il problema della divisione in $\mathbf{Q}$ è sempre risolto. Ora, associando ad ogni $z \in \mathbf{Z}$ il numero $\frac{z}{1} \in \mathbf{Q}$, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra $\mathbf{Z}$ e l'insieme dei numeri razionali con denominatore 1, possiamo vedere inoltre che i numeri z e $\frac{z}{1}$ si comportano allo stesso modo rispetto alle operazioni e all'ordine (ad esempio, se $z < p$ si ha anche $\frac{z}{1} < \frac{p}{1}$) quindi è possibile identificare i numeri z e $\frac{z}{1}$ e considerare $\mathbf{Z}$ come un sottoinsieme di $\mathbf{Q}$.

L'insieme $\mathbf{Q}$ lascia tuttavia irrisolto il problema dell'estrazione della radice. Se, ad esempio, si volesse calcolare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente entrambi i cateti uguali ad 1, si dovrebbe cercare un elemento di $\mathbf{Q}$ il cui quadrato valga 2, ma è possibile dimostrare che un tale numero non esiste. È dunque necessario introdurre un insieme di numeri più ampio. Si utilizza a questo scopo la rappresentazione decimale dei numeri razionali: mediante il classico algoritmo della divisione, ogni numero razionale $r = \pm\frac{m}{n}$ ammette una rappresentazione del tipo $a = \pm a_0, a_1 a_2 \cdots$ costituita da un segno, un intero $a_0 \in \mathbf{N}_0$, una virgola e un allineamento (successione) di cifre decimali, che risulta essere sempre finito o periodico (quindi, in ogni caso, periodico). A questo punto siamo in grado di introdurre l'insieme dei numeri reali

$\mathbf{R} = \{0\} \cup \{\pm a_0, a_1 a_2 \cdots : a_0 \in \mathbf{N}_0; a_i \in \{0, \cdots, 9\} \forall i \in \mathbf{N}\}$

L'insieme $\mathbf{R}$ è dunque costituito, oltre che dallo zero, da tutti gli allineamenti decimali, periodici e non periodici. I suoi elementi sono detti numeri reali e, se l'allineamento è periodico, il numero $a = \pm a_0, a_1 a_2 \cdots$ è detto numero reale razionale, altrimenti è detto irrazionale. Diremo, poi, positivi i numeri con il segno $+$ e negativi quelli con il segno $-$. Se $a = \pm a_0, a_1 \cdots$ chiameremo opposto di a il numero $-a = \mp a_0, a_1 \cdots$. Se $a = \pm a_0, a_1 \cdots$, il numero $a_0 \in \mathbf{N}_0$ è detto parte intera di a.

Per introdurre in $\mathbf{R}$ una nozione d'ordine si procede nel seguente modo:

i) ogni numero negativo è minore di zero e ogni numero positivo è maggiore di zero

ii) dati due numeri positivi $a = +a_0, a_1 \cdots$ e $b = b_0, b_1 \cdots$ diremo maggiore quello in cui la prima cifra diversa è maggiore: ad esempio, $+4,718\mathbf{6}52 \cdots > +4,718\mathbf{3}72 \cdots$

iii) dati $a, b < 0$, diremo che $a < b$ se $-a > -b$.

Per introdurre in $\mathbf{R}$ l'operazione di somma si procede nel seguente modo:

i) $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbf{R}$

ii) se $a, b > 0$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si considera il numero $s_n = a_0, a_1 \cdots a_n + b_0, b_1 \cdots b_n$ (è somma di due numeri razionali), è possibile vedere che i numeri s_n, a partire da un certo valore di n in poi, hanno tutti la stessa parte intera, la stessa prima cifra decimale, ecc.; viene in tal modo introdotto un numero reale (questo procedimento viene chiamato procedimento di stabilizzazione) che è chiamato $a + b$.

iii) se uno dei due numeri è negativo (o lo sono entrambi) si procede come nel caso dei numeri razionali: ad esempio, $-\pi + \sqrt{2} = -(\pi - \sqrt{2})$.

Le altre operazioni si introducono in modo simile.

L'insieme dei numeri reali viene rappresentato su una retta sulla quale sia stato fissato un sistema di ascisse: si costruisce una corrispondenza biunivoca (detta rappresentazione geometrica di $\mathbf{R}$) fra $\mathbf{R}$ e l'insieme dei punti della retta, associando ad ogni $x \in \mathbf{R}$ il punto della retta avente ascissa x.

Densità di Q e di R \ Q in R. Si ha il seguente

TEOREMA. Siano a, b due numeri reali, con $a < b$. Allora, esistono infiniti numeri razionali r e infiniti numeri irrazionali s tali che $a < r < b$, $a < s < b$.

Dal risultato appena enunciato segue che fra a e b esistono infiniti numeri reali, l'insieme da essi formato è detto *intervallo* di estremi a, b. Gli intervalli che considereremo sono:

i) intervalli limitati:

$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ (intervallo aperto)

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervallo chiuso)

e, analogamente, $[a, b[$ e $]a, b]$.

ii) intervalli non limitati:

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$ (semiretta non limitata superiormente)

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$ (semiretta non limitata inferiormente)

e, analogamente, $[a, +\infty[$ e $]-\infty, b]$.

Infine, porremo $]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$.

Con la scrittura (a, b) denoteremo un intervallo generico (uno qualunque di quelli sopra definiti).

In particolare, un intervallo del tipo $]c - r, c + r[$ (con $c \in \mathbf{R}$ ed $r > 0$) è detto *intorno* di c di raggio r e può essere denotato con uno dei simboli $B(c, r)$, $I_r(c)$.

È utile anche la seguente *proprietà di Archimede*:

Dati $a, b > 0$, esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $na > b$.

Insiemi finiti, infiniti, numerabili. Siano A e B due insiemi non vuoti. Diremo che hanno la stessa potenza se esiste una corrispondenza biunivoca $f : A \to B$. Sia ora X un insieme non vuoto. Diremo che X è finito ed ha n elementi se esiste una corrispondenza biunivoca fra X e l'insieme $\{1, 2, \cdots, n\}$. In caso contrario, X è detto infinito. La caratteristica di un insieme infinito X è che esso ha la stessa potenza di un suo sottoinsieme proprio (pur avendo più elementi!). Ad esempio, consideriamo l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali e l'insieme P dei numeri naturali pari. Associando ad ogni $n \in \mathbf{N}$ il numero $2n \in P$ si ottiene una corrispondenza biunivoca. Un insieme X è detto numerabile (o avente la potenza del numerabile) se ha la stessa potenza di $\mathbf{N}$. Si può far vedere che $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$ sono numerabili. Consideriamo ora l'insieme $\mathbf{R}$. Si può far vedere che:

i) tutti gli intervalli hanno la medesima potenza

ii) la potenza degli intervalli è maggiore della potenza del numerabile

iii) $\mathbf{R}$ ha la stessa potenza degli intervalli

L'insieme dei numeri reali ha dunque una potenza maggiore della potenza del numerabile, essa è detta potenza del continuo.

A titolo di esempio, dimostriamo il punto ii). Supponiamo per assurdo che l'intervallo $[0, 1]$ sia numerabile, dunque $[0, 1] = X$ essendo $X = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, con $x_n = +0, a_{1n}a_{2n} \cdots a_{kn} \cdots$. Costruiamo ora un numero $x = +0, x_1x_2 \cdots x_k \cdots$ tale che, per ogni $k \in \mathbf{N}$, sia $x_k \neq a_{kk}$. Si ha dunque $x \in [0, 1]$ ma $x \notin X$, assurdo.

Valore assoluto. Se $x \in \mathbf{R}$, si chiama valore assoluto di x il numero reale $|x|$ definito ponendo $|x| = x$ se $x \geq 0$, $|x| = -x$ se $x < 0$.

Il valore assoluto gode delle seguenti proprietà, per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$:

$|x| \geq 0$; $|x| = 0 \iff x = 0$

$|-x| = |x|$

$-|x| \leq x \leq |x|$

$|xy| = |x|\ |y|$

$a < x < b$, $a < y < b \Rightarrow |x - y| < b - a$

$-a < x < a \Leftrightarrow |x| < a \quad$ (essendo $a > 0$)

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|a - b| \leq |a| + |b|$

$|x| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = 0$

Possiamo osservare che il valore assoluto rappresenta la distanza del punto immagine di x dall'origine, e che $|a - b|$ rappresenta la lunghezza del segmento che ha per estremi le immagini dei punti a e b (quindi l'ampiezza dell'intervallo (a, b)). Quest'osservazione chiarisce, in particolare, la quinta e la sesta delle proprietà sopra elencate.

Estremo inferiore ed estremo superiore. Sia X un insieme numerico, ossia un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$. Un elemento $m \in X$ tale che $m \leq x$ per ogni $x \in X$ è detto *minimo* di X. Tale elemento, se esiste, è unico: se m ed m' fossero due minimi, per la definizione data si avrebbe $m \leq m'$ ed $m' \leq m$, da cui $m = m'$. Allo stesso modo si definisce *massimo* di X un elemento (se esiste) $M \in X$ tale che $M \geq x$ per ogni $x \in X$.

Diamo le seguenti definizioni:

I) Un numero $h \in \mathbf{R}$ è detto *minorante* di X se $h \leq x$ per ogni $x \in X$. Denoteremo con $\underline{M}_X$ l'insieme dei minoranti di X. Osserviamo che:

- se $h \in \underline{M}_X$ e $h' < h$, allora $h' \in \underline{M}_X$, quindi i minoranti di X, se esistono, sono infiniti
- $h \notin \underline{M}_X$ se esiste $x \in X : x < h$
- $\underline{M}_X = \emptyset$ se, per ogni $h \in \mathbf{R}$, esiste $x \in X : x < h$

II) Un numero $k \in \mathbf{R}$ è detto *maggiorante* di X se $k \geq x$ per ogni $x \in X$. Denoteremo con $\overline{M}_X$ l'insieme dei maggioranti di X. Osserviamo che:

- se $k \in \overline{M}_X$ e $k' > k$, allora $k' \in \overline{M}_X$, quindi i maggioranti di X, se esistono, sono infiniti
- $k \notin \overline{M}_X$ se esiste $x \in X : x > k$

- $\overline{M}_X = \emptyset$ se, per ogni $k \in \mathbf{R}$, esiste $x \in X : x > k$

III) X è detto limitato inferiormente se $\underline{M}_X \neq \emptyset$. X è detto limitato superiormente se $\overline{M}_X \neq \emptyset$. X è detto limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente, ossia se esistono $h, k \in \mathbf{R}$ tali che $h \leq x \leq k$ per ogni $x \in X$. In definitiva, un insieme è limitato se e solo se esiste un intervallo che lo contiene. Osserviamo anche che X è limitato se e solo se esiste $M > 0$ tale che $|x| \leq M$ per ogni $x \in X$.

Si ha il seguente

TEOREMA.

i) Sia X un insieme numerico limitato inferiormente.

Allora, l'insieme $\underline{M}_X$ dei minoranti di X è dotato di massimo.

ii) Sia X un insieme numerico limitato superiormente.

Allora, l'insieme $\overline{M}_X$ dei maggioranti di X è dotato di minimo.

Possiamo ora definire l'estremo inferiore e l'estremo superiore di X.

a) Se X è limitato inferiormente, si pone $\inf X = \max \underline{M}_X$. Se X non è limitato inferiormente, si pone $\inf X = -\infty$.

b) Se X è limitato superiormente, si pone $\sup X = \min \overline{M}_X$. Se X non è limitato superiormente, si pone $\sup X = +\infty$.

Dalla definizione a) e dalle osservazioni che seguono la definizione I), segue che un numero l è l'estremo inferiore di X se e solo se verifica le seguenti proprietà:

1) $l \leq x \ \forall x \in X$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x < l + \varepsilon$

La 1) esprime il fatto che l è un minorante. La 2) esprime il fatto che un arbitrario numero maggiore di l non è un minorante, quindi l è il massimo dei minoranti.

Analogamente, un numero L è l'estremo superiore di X se e solo se verifica le seguenti proprietà:

1) $L \geq x \ \forall x \in X$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x > L - \varepsilon$

Nozioni di topologia. Sia X un insieme numerico. Un elemento $c \in X$ è detto *punto interno* ad X se esiste $r > 0$ tale che $]c - r, c + r[\subseteq X$. Osserviamo che se X è un intervallo (a, b), i punti interni sono tutti e soli i punti dell'intervallo aperto $]a, b[$. L'insieme dei punti interni ad X è detto *interno* di X e si denota con $int(X)$. L'insieme X è detto *aperto* se è vuoto oppure, quando non è vuoto, tutti i suoi punti sono interni: $X = int(X)$.

Osserviamo anche che $\emptyset$ e $\mathbf{R}$ sono aperti.

Un numero reale c è detto *punto di frontiera* per X se, per ogni $r > 0$, nell'intorno $]c - r, c + r[$ ci sono elementi di X ed elementi di $\mathbf{R} \setminus X$.

Un numero reale c è detto *punto di accumulazione* per X se, per ogni $r > 0$, nell'intorno $]c - r, c + r[$ ci sono elementi di X diversi da c. L'insieme dei punti di accumulazione per X è detto *derivato* di X e si denota con $D(X)$. Possiamo subito osservare che un punto interno è di accumulazione, un punto di frontiera può non esserlo: ad esempio, se $X = [0, 1] \cup \{5\}$, il punto $c = 5$ è di frontiera ma non di accumulazione. Un tale punto, ossia un punto di X che non sia di accumulazione, è detto *punto isolato*.

L'insieme X è detto *chiuso* se il suo complementare $\mathbf{R} \setminus X$ è aperto.

Si definisce *chiusura* di X l'insieme

$$\overline{X} = X \cup D(X)$$

da cui segue che un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione e tutti i suoi punti di frontiera.

Diremo che X è *denso* in $\mathbf{R}$ se $\overline{X} = \mathbf{R}$. Dal teorema di densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ segue che tutti i numeri reali sono punti di accumulazione per $\mathbf{Q}$, quindi $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$. Questo fatto spiega il nome dato al teorema di densità. Lo stesso vale per $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Si ha dunque, se (a, b) è un intervallo limitato, posto $X = (a, b)\cap\mathbf{Q}$ oppure $X = (a, b) \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$, si ha $\overline{X} = [a, b]$.

Potenze, radici, logaritmi. Se $a \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}_0$, si definisce
$a^0 = 1$
$a^{n+1} = a^n \cdot a$
Se $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbf{N}$, si definisce
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Per definire la potenza nel caso in cui l'esponente sia razionale o irrazionale, dobbiamo premettere il seguente

Teorema della radice n-ma aritmetica. Siano a un numero reale positivo ed n un numero naturale maggiore o uguale a 2. Allora, esiste uno ed un solo numero positivo b tale che $b^n = a$.

Il numero b introdotto dal precedente teorema è detto radice n-ma aritmetica di a e si indica con $\sqrt[n]{a}$.

Grazie a questo teorema, se $a > 0$ e $n \in \mathbf{N}$, si definisce
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$
$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (a > 0, \frac{m}{n} \in \mathbf{Q})$
Per definire a^b con $a > 0$ e b irrazionale, si procede per stabilizzazione.

Le potenze a^b che abbiamo definito sono tutte positive. È possibile anche vedere che, se $a > 1$, si ha $a^b > 1$ se e solo se $b > 0$; $0 < a < 1$, si ha $a^b > 1$ se e solo se $b < 0$.

Discussione dell'equazione binomia. Siano $a \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}$, con $n \geq 2$. Vogliamo trovare tutti i numeri reali x tali che $x^n = a$. I risultati che troveremo saranno utili anche ad estendere la definizione di radice, data prima, ad un caso più generale.

L'equazione $x^n = a$ è detta equazione binomia. Vediamo quante soluzioni ha, al variare di a.

i) $a = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto, l'unica soluzione è $x = 0$.

ii) $a > 0$. Per il teorema precedente c' è l'unica soluzione positiva $\sqrt[n]{a}$, $x = 0$ non è soluzione, se ci sono altre soluzioni esse saranno negative. Sia allora b una soluzione negativa, consideriamo il numero positivo $-b$ e calcoliamo

$$(-b)^n = (-1)^n b^n = (-1)^n a$$

Per n pari si ottiene $(-b)^n = a \Rightarrow -b = \sqrt[n]{a} \Rightarrow b = -\sqrt[n]{a}$

Per n dispari si ottiene $(-b)^n = -a$ che non è possibile in quanto il primo membro è positivo e il secondo negativo.

In definitiva, per $a > 0$ ci sono due soluzioni $\pm\sqrt[n]{a}$ per n pari, una sola soluzione $\sqrt[n]{a}$ per n dispari.

iii) $a < 0$. $x = 0$ non è soluzione e non possono esserci soluzioni positive. Sia allora b una soluzione negativa, procedendo come nel caso precedente si trova che per n pari non ci sono soluzioni, per n dispari si ha una sola soluzione $-\sqrt[n]{-a}$.

Grazie a quanto abbiamo appena visto, possiamo estendere la nozione di radice n-ma ponendo $\sqrt[n]{0} = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ per $x < 0$, n dispari.

Logaritmo. Siano a, b due numeri positivi, con $a \neq 1$. Si può dimostrare che l'equazione $a^x = b$ ha una e una sola soluzione, detta logaritmo di b in base a e indicata con $\log_a\ b$. Il logaritmo di b in base a verifica dunque l'eguaglianza

$$a^{\log_a\ b} = b$$

A partire dalla definizione, utilizzando le proprietà delle potenze, si verifica che il logaritmo gode delle seguenti proprietà:

$\log_a\ a = 1$

$\log_a\ b = 0 \iff b = 1$

$\log_a\ bc = \log_a\ b + \log_a\ c$

$\log_a\ b^x = x \log_a\ b$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a\ b - \log_a\ c$

$\log_a\ b = (\log_a\ c)\ (\log_c\ b)$

Dalla prima e dall'ultima delle precedenti eguaglianze, si ottiene

$1 = \log_a\ a = (\log_a\ b)\ (\log_b\ a)\ \Rightarrow \log_b\ a = \frac{1}{\log_a\ b}$

Osserviamo inoltre che $\log_a b > 0$ se e solo se a e b sono entrambi maggiori di 1 o entrambi minori di 1.

CENNI SUI NUMERI COMPLESSI

Definizioni e prime proprietà. Definiamo numero complesso una coppia ordinata di numeri reali: $z = (a, b)$ con $a, b \in \mathbf{R}$. Indicheremo con $\mathbf{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

Se $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ sono due numeri complessi, diremo che $z = w$ se $a = c, b = d$; se $z \neq w$ non si dà alcuna nozione di ordine.

Dalla definizione, appare chiaro che si possa stabilire una corrispondenza biunivoca fra $\mathbf{C}$ e l'insieme dei punti del piano in cui sia stato introdotto un sistema di riferimento cartesiano, facendo corrispondere al numero $z = (a, b)$ il punto del piano avente coordinate (a, b) (rappresentazione geometrica di $\mathbf{C}$).

Sia $z = (a, b) \in \mathbf{C}$. Se $b = 0$, z è detto numero complesso reale, se $b \neq 0$, z è detto numero complesso immaginario, in particolare, z si dice immaginario puro se $a = 0, b \neq 0$. Diamo inoltre le seguenti definizioni:

$0 = (0, 0)$ zero complesso

$1 = (1, 0)$ unità reale

$i = (0, 1)$ unità immaginaria

$-z = (-a, -b)$ opposto di z

$\bar{z} = (a, -b)$ coniugato di z

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ modulo di z. Osserviamo che $|z|$ rappresenta la distanza del punto immagine di z dall'origine, nella rappresentazione geometrica di $\mathbf{C}$.

$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ somma

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ prodotto

Osserviamo che $z + (-z) = 0$, $z \cdot 1 = z$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

È possibile identificare ogni numero reale a con il numero complesso reale $(a, 0)$, si può dunque considerare $\mathbf{R}$ come un sottoinsieme di $\mathbf{C}$ e, alla luce di quanto visto prima, possiamo osservare che $i^2 = -1$.

Forma algebrica e forma trigonometrica. Sia $z = (a, b) \in \mathbf{C}$, alla luce della definizione vista prima per le operazioni in $\mathbf{C}$ possiamo osservare che

$z = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$

ottenendo l'espressione

$z = a + ib$

detta forma algebrica di z, molto utile in quanto, nelle operazioni, potremo considerare z come un polinomio, tenendo conto del fatto che $i^2 = -1$ e $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Ad esempio:

$\frac{2+i}{3+4i} = \frac{(2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{10-5i}{25} = \frac{10}{25} - \frac{5}{25}i$, ottenendo in tal modo facilmente il quoziente dei due numeri, in forma algebrica.

Grazie alla forma algebrica, dunque, un numero complesso può essere pensato come somma di una "parte reale" (a) e di una "parte immaginaria (ib).

Sia ora $z = a + ib$ un numero complesso non nullo, e sia $P = (a, b)$ il punto del piano che lo rappresenta. Indichiamo con α la misura in radianti del più piccolo angolo di cui deve ruotare il semiasse delle ascisse positive per sovrapporsi in direzione e verso alla semiretta OP orientata da O verso P. I numeri $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) vengono chiamati argomenti di z. Se A è la proiezione di P sull'asse delle ascisse, il triangolo OPA è un triangolo rettangolo quindi si ha $a = OA = |z| \cos\alpha$ e $b = AP = |z| \sin\alpha$. Il numero z si può allora riscrivere nella forma

$z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ (forma trigonometrica).

Possiamo notare che due numeri complessi in forma trigonometrica $z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ e $w = |w|(\cos\beta + i \sin\beta)$ sono uguali se e solo se $|z| = |w|$ e $\beta = \alpha + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$. Calcoliamo adesso il prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica, utilizzando la formula di addizione del coseno e del seno si ottiene facilmente che tale prodotto ha per modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti. Da questa osservazione si deduce la seguente formula di Moivre che fornisce la potenza intera di un numero complesso. Essa vale per ogni $n \in \mathbf{Z}$.

$z^n = |z|^n \big(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)\big)$.

Radici. Siano z un numero complesso e n un intero maggiore o uguale a 2. Un numero complesso w tale che $w^n = z$ è detto radice n-ma di z. Nel seguito, ci proponiamo di trovare tutte le radici n-me di z. Il primo caso è quello in cui $z = 0$, in tal caso, per la legge di annullamento del prodotto, l'unica radice è $w = 0$. Il secondo è quello in cui $z \neq 0$, in tal caso le eventuali radici saranno evidentemente non nulle. Sia w una di esse. Scriviamo z e w in forma trigonometrica:

$$z = |z|\big(\cos\alpha + i \sin\alpha\big)$$

$$w = |w|\big(\cos\beta + i \sin\beta\big)$$

Per la formula di Moivre, l'eguaglianza $w^n = z$ si scrive:

$$|w|^n\big(\cos n\beta + i\sin n\beta\big) = |z|\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big)$$

Imponendo la condizione di eguaglianza di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica, concludiamo che sono verificate le seguenti condizioni:
1) $|w|^n = |z|$, da cui $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, e
2) esiste $k \in \mathbf{Z} : n\beta = \alpha + 2k\pi$, da cui $\beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$
Abbiamo in tal modo provato che, se w è radice n-ma di z, è del tipo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)(*)$$

Applicando la formula di Moivre, si vede d'altronde facilmente che tutti i numeri w_k sono radici n-me di z. Si può dimostrare che la formula $(*)$ fornisce esattamente n radici distinte di z che si ottengono al variare di k nell' insieme $\{0;\cdots;n-1\}$. Ad esempio, le radici quarte di i sono: $\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}$ per $k = 0,1,2,3$, quindi si tratta dei numeri che hanno modulo 1 e argomenti $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{8}$. Le radici cubiche di 8 sono: 2, $2(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$, $2(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Si ritrova dunque, ovviamente, quella reale, mentre le altre due sono immaginarie.

Consideriamo ora, in particolare, il caso delle radici quadrate, la (*) fornisce le due radici distinte $w_0 = \sqrt{|z|}\ (\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2})$, $w_1 = \sqrt{|z|}\ (\cos(\frac{\alpha}{2}+\pi) + i\sin(\frac{\alpha}{2}+\pi)) = -w_0$, che, dunque, sono opposte. In particolare, se $z \in \mathbf{R}$, possiamo osservare che: se $z > 0$ è $\alpha = 0$ e $|z| = z$ quindi si ottengono le due radici $\pm\sqrt{z}$; se $z < 0$ è $\alpha = \pi$ e $|z| = -z$ quindi si ottengono le due radici $\pm i\sqrt{-z}$. Ad esempio, si ha $\sqrt{-4} = \pm 2i$. Questa osservazione risulta utile anche nella risoluzione delle equazioni di secondo grado a coefficienti reali con il discriminante negativo, in tal caso infatti la formula risolutiva $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ va interpretata intendendo $\pm\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{-\Delta}$. È bene sapere che la stessa formula vale per le equazioni a coefficienti complessi. Ad esempio, le soluzioni dell'equazione (a coefficienti reali, con discriminante negativo) $z^2 - 2z + 2 = 0$ sono $z = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$, le soluzioni dell'equazione (a coefficienti complessi) $iz^2 - 2z - 1 = 0$ sono $z = 1 \pm \sqrt{1+i} = 1 \pm \sqrt[4]{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big) = 1 \pm \sqrt[4]{2}\ \big(\frac{\sqrt{2}}{2}\ (1+i)\big)$.

FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Generalità. Sia f una funzione reale definita in un sottoinsieme X di $\mathbf{R}$, ovvero $f : X \to \mathbf{R}$. Si chiama grafico di f il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$: $gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$

Sia $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbf{R}$. Si dice che f è una funzione pari (risp. dispari) se, per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha $f(-x) = f(x)$ (risp. $f(-x) = -f(x)$). Si ha la seguente caratterizzazione: f è una funzione pari se e solo se il suo grafico è un insieme simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, cioè, se contiene un punto (a, b) contiene anche il punto $(-a, b)$; f è una funzione dispari se e solo se il suo grafico è un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè, se contiene un punto (a, b) contiene anche il punto $(-a, -b)$.

f si dice periodica se esiste un numero positivo T (periodo) tale che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha $f(x + T) = f(x)$. Si ha la seguente caratterizzazione: f è una funzione periodica se e solo se $f(x + hT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $h \in \mathbf{Z}$.

Indicata con $f(X)$ l'immagine di f, cioè l'insieme dei suoi valori, alcuni concetti insiemistici legati ad $f(X)$ vengono per definizione attribuiti ad f. Ad esempio, diremo che la funzione f è limitata (oppure limitata inferiormente o superiormente) se lo è l'insieme numerico $f(X)$. Gli estremi inferiore e superiore, e gli eventuali minimo e massimo di $f(X)$, verranno chiamati estremi inferiore e superiore, minimo e massimo di f (in X). L'estremo inferiore si indica con $\inf_{x \in X} f(x)$ o con $\inf_X f$, per gli altri concetti si usano notazioni analoghe. Se f ha il minimo, esso viene chiamato minimo assoluto di f in X, sia esso $m = \min_X f$. Dato che m è uno dei valori della funzione, esiste $c \in X$ tale che $f(c) = m$, il punto c viene chiamato punto di minimo assoluto. In modo analogo si introducono il massimo assoluto ($\max_X f$) e il punto di massimo assoluto. Il minimo e il massimo assoluto si chiamano anche estremi assoluti.

Chiameremo oscillazione di f in X la quantità $\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X\}$. Si può dimostrare che, se f è limitata in X, l'oscillazione è uguale a $\sup_X f - \inf_X f$.

Nel seguito, supporremo normalmente che l'insieme di definizione X di f sia un intervallo (a, b).

Ricordiamo qui il concetto di funzione composta. Siano date due funzioni $f : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ e $g : (a, b) \to (\alpha, \beta)$, allora per ogni $x \in (a, b)$ è possibile porre $F(x) = f(g(x))$. La funzione $F : (a, b) \to \mathbf{R}$ così introdotta è detta funzione composta da f (funzione esterna) e g (funzione interna).

Definiamo ora gli estremi relativi. Un punto $c \in (a, b)$ è detto punto di minimo (risp. massimo) relativo o locale per f se esiste un suo intorno $I =]c - r, c + r[$ tale che $f(x) \geq f(c)$ (risp. $f(x) \leq f(c)$) per ogni $x \in I$. Un punto di estremo assoluto è anche di estremo relativo, ma non vale il viceversa.

Un'altra nozione importante è quella di monotonia. Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$.

Si dice che la funzione f nell'intervallo (a,b) è monotona se verifica una delle seguenti condizioni:
- crescente se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- strettamente crescente se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- decrescente se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- strettamente decrescente se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Notiamo subito che una funzione strettamente monotona è iniettiva, quindi invertibile. Si vede facilmente che anche la sua funzione inversa gode dello stesso tipo di monotonia.

È anche possibile introdurre un concetto di monotonia locale. Precisamente, se $c \in (a,b)$, si dice che la funzione f è crescente nel punto c se esiste $s > 0$ tale che:
se $x \in]c-s, c[$ si ha $f(x) < f(c)$
se $x \in]c, c+s[$ si ha $f(x) > f(c)$.

In modo simmetrico si introduce il concetto di funzione decrescente nel punto c.

Si può provare che f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente) nell'intervallo (a,b) se e solo se è crescente (risp. decrescente) in ogni punto di (a,b). È dunque importante potere assicurare la monotonia puntuale di f, a tale scopo è utile prendere in considerazione una nuova funzione che ora introduciamo.

Sia $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ e sia $c \in (a,b)$. Per ogni $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ poniamo

$$r(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

r viene chiamato rapporto incrementale di f relativo al punto c. Il rapporto incrementale può essere introdotto anche in una seconda forma: sia $h \in]a-c, b-c[\setminus\{0\}$, allora $c + h \in (a,b) \setminus \{c\}$ ed è possibile comporre r con la funzione $c + h$ (ossia, porre $h = x - c$) ottenendo

$$R(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

osserviamo che anche r può essere ottenuto per composizione da R ponendo $x = c + h$.

Il rapporto incrementale è utile, come annunciato prima, per verificare la monotonia locale di f, grazie al seguente risultato.

TEOREMA. La funzione f è crescente (risp. decrescente) nel punto c se e solo se esiste un intorno $I_s(c)$ tale che, per ogni $x \in I_s(c) \setminus \{c\}$, si abbia $r(x) > 0$ (risp. $r(x) < 0$).

Dimostrazione. Supponiamo che $r(x) > 0$ in $I_s(c) \setminus \{c\}$. In $]c-s, c[$ il denominatore di r è negativo, quindi lo è anche il numeratore: dunque,

$f(x) < f(c)$. In $]c, c+s[$ il denominatore di r è positivo, quindi lo è anche il numeratore: dunque, $f(x) > f(c)$. Ne segue che f è crescente nel punto c. Il viceversa si prova allo stesso modo.

Diamo infine la nozione di funzione convessa. La funzione $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ è detta convessa se, per ogni $x, y \in (a,b)$ e per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

questa definizione significa che la porzione di grafico compresa fra le ascisse x e y è al di sotto del segmento che congiunge i punti del grafico di coordinate $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

La nozione di convessità può essere espressa in modo equivalente: a tale scopo, indichiamo con $epi(f) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in (a,b), y \geq f(x)\}$ (epigrafico di f) la porzione di piano che sta al di sopra del grafico. Si prova che la funzione f è convessa se e solo se $epi(f)$ è un sottoinsieme convesso di $\mathbf{R}^2$, cioè, se contiene due punti, contiene anche il segmento che li congiunge.

Funzioni elementari. In questo paragrafo esamineremo alcune funzioni che nascono dalle operazioni che abbiamo definito in $\mathbf{R}$. Si diranno funzioni elementari tutte queste, e tutte le funzioni ottenute da esse mediante operazioni elementari, composizione e passaggio all'inversa.

a) Funzione costante. Se $k \in \mathbf{R}$, la funzione $f(x) = k$ è definita in $]-\infty, +\infty[$.

b) Identità. La funzione $f(x) = x$ è definita in $]-\infty, +\infty[$.

c) Potenza con esponente intero positivo. Se $n \in \mathbf{N}$, la funzione $f(x) = x^n$ è definita in $]-\infty, +\infty[$.

d) Potenza con esponente intero negativo. Se $n \in \mathbf{N}$, la funzione $f(x) = x^{-n}$ è definita in $]-\infty, +\infty[\setminus\{0\}$.

e) Potenza con esponente razionale. Se $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$, la funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$ è definita in $[0, +\infty[$ se $\frac{m}{n} > 0$, in $]0, +\infty[$ se $\frac{m}{n} < 0$.

f) Potenza con esponente irrazionale. Se $s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, la funzione $f(x) = x^s$ è definita in $[0, +\infty[$ se $s \geq 0$, in $]0, +\infty[$ se $s < 0$.

g) Radice n-ma. Se $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, la funzione $f(x) = \sqrt[n]{x}$ è definita in $]-\infty, +\infty[$ se n è dispari, in $[0, +\infty[$ se n è pari.

h) Funzione esponenziale. Se $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione $f(x) = a^x$ è definita in $]-\infty, +\infty[$.

i) Logaritmo. Se $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione $f(x) = \log_a x$ è definita in $]0, +\infty[$.

j) Coseno e seno. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si consideri il punto P della circonferenza trigonometrica che sia il secondo estremo di un arco, avente primo estremo nel punto unità dell'asse delle ascisse e misura in radianti x. L'ascissa e l'ordinata di P sono dette rispettivamente $\cos x$ e $\sin x$. Le funzioni $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$ sono dunque definite in $]-\infty, +\infty[$.

k) Tangente. La funzione $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ è definita in $]-\infty, +\infty[\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

l) Arcocoseno e arcoseno. Per ogni $y \in [-1, 1]$, sia x l'unico punto dell'intervallo $[0, \pi]$ tale che $\cos x = y$. Si definisce in tal modo la funzione $\arccos y$, inversa della restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$. In modo analogo si costruisce, per ogni $y \in [-1, 1]$, la funzione $\arcsin y$, inversa della restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

m) Arcotangente. Come visto al punto l), si costruisce, per ogni $y \in]-\infty, +\infty[$, la funzione $\arctan y$, inversa della restrizione di $\tan x$ all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

N.B. Per una trattazione esauriente delle funzioni trigonometriche si può consultare il libro Marcellini - Sbordone, Esercitazioni di Matematica, vol. 1, parte prima, cap.2.

n) Polinomi. Se $n \in \mathbf{N}_0$ e $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$, la funzione $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ (polinomio di grado n) è definita in $]-\infty, +\infty[$.

o) Funzioni razionali fratte. La funzione $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$ ($a_i, b_j \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{N}, b_0 \neq 0$) è definita in $]-\infty, +\infty[\setminus\{c \in \mathbf{R} : b_0c^m + \cdots + c_m = 0\}$

Osservazioni sulle funzioni elementari.

c) Se n è pari, la funzione $f(x) = x^n$ è pari, è strettamente crescente in $[0, +\infty[$ (l'inversa è $\sqrt[n]{x}$) e strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$. Se n è dispari, la funzione $f(x) = x^n$ è dispari, è strettamente crescente in $]-\infty, +\infty[$. L'inversa è la funzione $\sqrt[n]{x}$.

h) Se $a > 1$, la funzione $f(x) = a^x$ è strettamente crescente in $]-\infty, +\infty[$; se $a < 1$, la funzione $f(x) = a^x$ è strettamente decrescente in $]-\infty, +\infty[$. L'inversa è la funzione $\log_a x$.

n) Se $n = 0$, il polinomio si dice costante; si ha cioè $p(x) = a_0$ per ogni valore di x. Se $a_0 = 0$, si ha il polinomio identicamente nullo. Due polinomi $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ e $P(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ si dicono identici se $p(x) = q(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, si può dimostrare che p e P sono identici se e solo se $m = n$ e $b_i = a_i$ per ogni $i = 0, \cdots, n$. Ricordiamo che, dati due polinomi p e P, esistono un polinomio q (quoziente) ed un polinomio r (resto), quest'ultimo avente grado minore di quello di P, tali che $p(x) = P(x)q(x) + r(x)$. Se r è il polinomio nullo, si dice che p è divisibile per P.

Nell'ambito dello studio dei polinomi, un importante problema è quello di risolvere l'equazione $p(x) = 0$ (equazione algebrica). Si prova che una tale equazione ha esattamente n soluzioni (dette anche zeri del polinomio) distinte o in vario modo coincidenti. Se k di tali soluzioni coincidono, detto α il loro comune valore, si dice che α è una soluzione di molteplicità k. Alcuni zeri di un polinomio possono essere numeri immaginari. Si prova che se $\beta+i\gamma$ è uno zero di molteplicità k, lo è anche il suo coniugato $\beta - i\gamma$. Ricordiamo infine che, grazie al ben noto teorema di Ruffini, il numero α è uno zero del polinomio p se e solo se p è divisibile per il binomio $x - \alpha$. Siano allora α_i di molteplicità s_i $(i = 1, \cdots, h)$ e $\beta_j \pm i\gamma_j$, ciascuno di molteplicità t_j $(j = 1, \cdots, k)$ tutti gli zeri di p, si ha $s_1 + \cdots s_h + 2t_1 + \cdots + 2t_k = n$. Da quanto detto prima segue che p può essere decomposto in fattori del tipo $(x-\alpha_i)^{s_i}$ e in fattori del tipo $[(x-(\beta_j+i\gamma_j)]\,[(x-(\beta_j-i\gamma_j)] = (x-\beta_j)^2+\gamma_j^2$. Ne deriva la seguente decomposizione in fattori di primo e secondo grado, tutti a coefficienti reali:

$$p(x) = a_0(x-\alpha_1)^{s_1} \cdots (x-\alpha_h)^{s_h}\ [(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2]^{t_1} \cdots [(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2]^{t_k}$$

o) Supponiamo che il numeratore e il denominatore di f siano polinomi primi fra loro, ossia privi di divisori comuni. Si può dimostrare che f può essere espressa come somma di frazioni del tipo $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(A, a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$ e di frazioni del tipo $\frac{Ax+B}{(x^2+k^2)^n}$ $(A, B, k \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$ dette fratti semplici. Per trovare i fratti semplici è necessario trovare gli zeri del polinomio al denominatore.