Limite di f al tendere di x a c.

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad c \in D(X)$

$l \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x\to c} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: se $x \in X$, $x \neq c$

$|x-c| < \delta$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

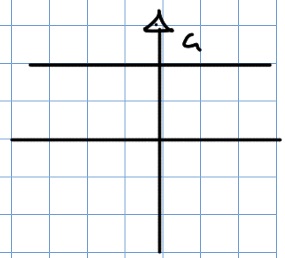
$\Downarrow$

$c - \delta < x < c + \delta$

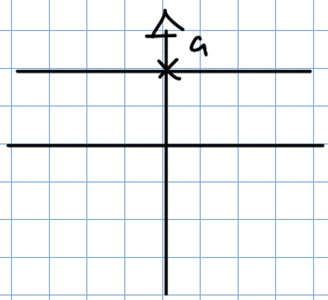
es: $f(x) = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 4$

$|f(x) - l| = |4-4| < \varepsilon$

vero $\forall x$



$$f(x) = \begin{cases} 4 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

$|f(x) - l| =$

$|4-4| < \varepsilon$ vero

$\forall x \neq 0$

nel punto $x = 0$ la condizione non è verificata ma il limite vale ugualmente 4.

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ si può fare anche se f nel punto $x=0$ non è definita

$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \; (-\infty)$ se $\forall K > 0$ $\exists \delta > 0$: se $x \in X$

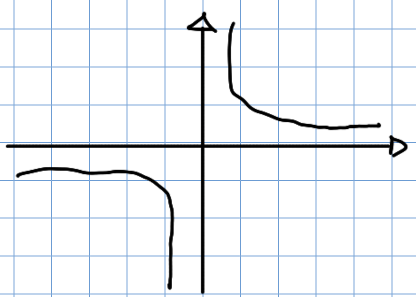
$x \neq c$, $|x-c| < \delta$ si ha $f(x) > K$ $\quad (< -K)$

es:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ si deve avere $\frac{1}{x^2} > K \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{K}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{K}} < x < \frac{1}{\sqrt{K}}$, $x \neq 0$ quindi $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$



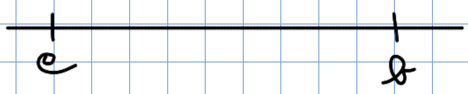
la restrizione a $]0, +\infty[$ diverge a $+\infty$

$\left(\frac{1}{x} > K \Leftrightarrow x < \frac{1}{K} \quad \delta = \frac{1}{K} \right)$

la restrizione a $]-\infty, 0[$ diverge a $-\infty$

$\left(\frac{1}{x} < -K \Leftrightarrow -\frac{1}{x} > K \Leftrightarrow -x < \frac{1}{K} \Rightarrow x > -\frac{1}{K} \quad \delta = \frac{1}{K} \right)$

$f: (a,b) \setminus \{c\} \to \quad c \in [a, b]$



$\forall c \in]a, b]$ si considera la restrizione di f a $]a, c[$
il suo limite per $x \to c$ si chiama
$\lim_{x \to c^-} f(x)$ limite destro di f per $x \to c$

$\forall c \in [a, b[$ analogamente si introduce il $\lim_{x \to c^+} f(x)$
limite sinistro

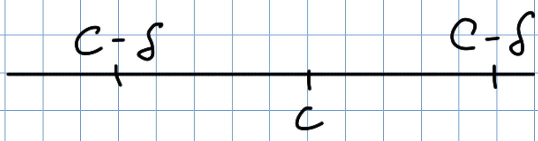
es:

Come abbiamo visto $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

TEOREMA

Se $c\in\,]a,b[$ allora $\exists \lim_{x\to c} f(x) \iff \lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)$

Dimostrazione



Se $\lim_{x\to c} f(x) = l \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$ in $]c-\delta, c+\delta[\setminus\{c\}$

quindi in pratica:

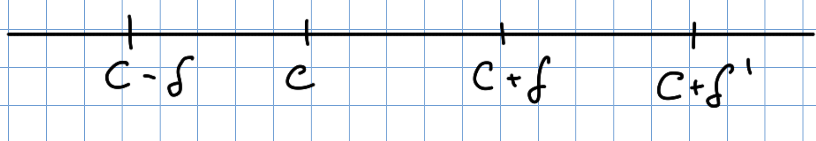
$|f(x)-l|<\varepsilon$ in $]c-\delta, c[\Rightarrow \lim_{x\to c^-} f(x)=l$

$|f(x)-l|<\varepsilon$ in $]c, c+\delta[\Rightarrow \lim_{x\to c^+} f(x)=l$

Viceversa se

$|f(x)-l|<\varepsilon$ per $x\in\,]c-\delta, c[$

$|f(x)-l|<\varepsilon$ per $x\in\,]c, c+\delta[$



allora $|f(x)-l|<\varepsilon$ per $x\in\,]c-r, c+r[\setminus\{c\}$

con $r=\min(\delta,\delta')$

es: $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ x^2 & x\geq 0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$$f(x) \begin{cases} x+1 & x<0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

TEOREMA validi:

unicità del limite

perm. del segno

confronto es: $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = l \\ f(x) \leq g(x) < h(x) \ \forall n \end{array}\right\} \lim_{x \to c} g(x) = l$

teorema ponte (caratterizzazione sequenziale del limite di una funzione)

$f: X \to \mathbb{R} \qquad c \in D(x)$

$\lim_{x \to c} f(x) = l(\pm\infty) \Leftrightarrow \forall \{a_n\} \subseteq X \setminus \{c\}$

tale che $a_n \to c$ si ha $f(a_n) \to l(\pm\infty)$

$a_n : \mathbb{N} \to X \qquad f: X \to \mathbb{R}$ comp.

$n \in \mathbb{N} \to a_n \in X \to f(a_n) \to$ successione generica

da qui seguono le operazioni con i limiti

es: $\lim_{x \to c} f(x) = l \qquad \lim_{x \to c} g(x) = L$

dim che $\lim f(x)g(x) = lL$

Sia $\{a_n\} \subseteq X$, $a_n \neq c$, $a_n \to c$

suff

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to c} f(x) = l \Rightarrow f(a_n) \to l \\ \text{necessariamente} \\ \lim_{x \to c} g(x) = L \Rightarrow g(a_n) \to \end{array}\right\} f(a_n)g(a_n) \to lL \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to c} f(x) g(x) = \ell L$$

$f: [a ; +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} > a:$

se $x > \bar{x}$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$ se $\forall K > 0 \ \exists \bar{x} > 0$: se $x > \bar{x}$ si ha

$f(x) > K$

$\quad < -K$

$f:]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} < a:$

se $x < \bar{x}$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\pm\infty$ omologamente

PROPOSIZIONE

Se $f: X \to \mathbb{R}$ è una funzione elementare e $c \in X$

allora $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Allora si devono fare solo i "limiti utili"

$\lim_{x \to \pm\infty}$ se f è definita in un intervallo non limitato

$\lim_{x \to c}$ se $c \in D(X)$, f non è definita in c oppure

cambia la legge di def a sinistra e a destra di c

Limiti delle funzioni composte

$f: (\alpha, \beta) \setminus \{\gamma\} \to \mathbb{R}$ $\quad g(a, b) \setminus \{c\} \to (\alpha, \beta) \setminus \{\gamma\}$

$\lim_{x \to c} g(x) = \gamma$ $\quad \lim_{y \to \gamma} f(x) = \ell$

posto in $(a, b) \setminus \{c\}$ $F(x) = f(g(x))$ si ha $\lim F(x) = \ell$

$F(x) = f(g(x)) \to \ell$

es:

$$\lim_{x \to 3} \log(\underbrace{x+5}_{8}) = \log 8$$

infatti se $e_n \to c \Rightarrow g(e_n) \to \gamma \Rightarrow \underbrace{f(g(e_n))}_{f(e_n)} \to \ell$

Il teorema vale anche quando c, γ, ℓ valgono $+\infty$

es: $\lim_{x \to +\infty} \log(\underbrace{x^2+2}_{+\infty}) = \infty$

$$\lim_{x \to 2^-} 3^{\frac{x}{x^2-4}} = 0$$

$x \to 2$, $x^2-4 \to 0^-$, $\frac{x}{x^2-4} \to -\infty$

Limiti delle funzioni elementari

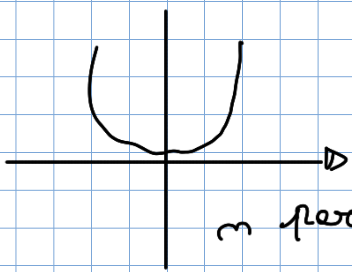
- Funzione potenza

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N} \quad$ è def in $]-\infty; +\infty[$

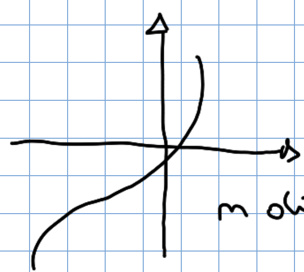
$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad x^n > k \Leftrightarrow x > k^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \begin{cases} +\infty & n \text{ pari} \\ -\infty & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$x^n = \underbrace{(-1)^n}_{\pm 1} \underbrace{(-x)^n}_{+\infty}$



n pari



n dispari

$f(x) = x^{-n} \quad n \in N \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ se x è pari

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ se x è dispari

$f(x) = x^{\alpha}$ α non intero è def in $[0, +\infty[$ se $\alpha > 0$

$]0, +\infty[$ se $\alpha < 0$

$\alpha > 0 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad x^{\alpha} > K \Leftrightarrow x > K^{\frac{1}{\alpha}}$

se $\alpha < 0$ $f(x) = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ $(-\alpha > 0)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Polinomi

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \qquad n \in N \quad a_0, \dots, a_n \in R$

per $n \to \pm\infty$ si trova spesso f. i. $+\infty - \infty$

$f(x) = x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right.$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_0 < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ pari}, a_0 > 0 \text{ opp } n \text{ d. } a_0 < 0 \\ -\infty & \text{se } n \text{ pari}, a_0 < 0 \text{ opp } n \text{ dispari } a_0 > 0 \end{cases}$

Il polinomi divergono sempre per $x \to \pm\infty$ si deve guardare solo il termine di grado massimo

es: $\lim_{x \to +\infty} (2x - x^3 + x^2 - 2) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x^8 - x^3 - 2x^6 - x^5 - 3x^4 - 2) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x - x^3 + x^2 - 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x - x^4 + x^2 - 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^2 - x + 4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^6 - x^4 - x^3 - 2x^2 - 1) = +\infty$$

Funzioni razionali fratte

$f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ A, B polinomi (B di grado positivo)

A, B non hanno fattori comuni

se $B(c) = 0$ $(c \in \mathbb{R})$ si ha $A(c) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \infty$

es: $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1-x}{x^2-4} = -\infty$???

$1-x \to -1$, $x^2-4 \to 0^+$

Per $x \to \pm\infty$ f si presenta nella forma indet. $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + \dots + a_n}{b_0 x^p + \dots + b_p} = \frac{x^n}{x^p} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_p}{x^p}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a_0}{b_0}$$

se $n = p \Rightarrow x^{n-p} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$

se $n < p \Rightarrow x^{n-p} \to 0 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

se $n > p \Rightarrow x^{n-p} \to \infty \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

es: $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^3 + 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^3 + 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 3x^6 + 1}{x^3 + 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 3x^5 + 1}{x^3 + 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 3x^6 + 1}{x^4 + 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 3x^7 + 1}{1 - x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 3x^5 + 1}{3 - x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^1 - x^3 + 1}{x^2 + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 3x^6}{3 - x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^4 + 3x - 1}{x^8 + 3} = 0$$

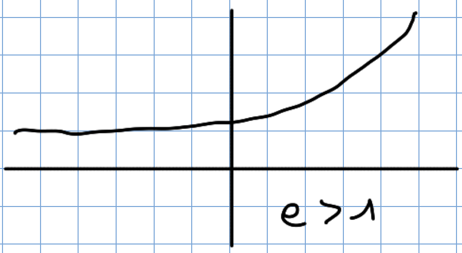
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 3}{(3x - 1)^2} = \frac{2}{9}$$

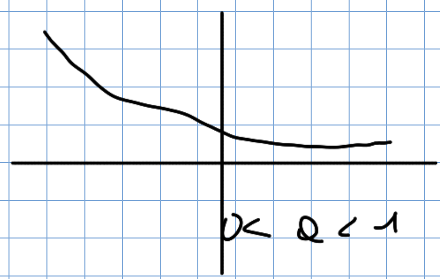
Funzioni esponenziali

$a>0 \;,\; a \neq 1 \quad f(x)=a^x \qquad]-\infty, +\infty[$

$$a>1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 \end{cases}$$

$$0<a<1 \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \end{cases}$$





Funzione logaritmica

$a>0 \;,\; a\neq 1 \quad f(x) = \log_a x \qquad]0, +\infty[$

$a>1 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad\qquad 0<a<1 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty \qquad\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)} \qquad 1^{\infty} \quad (+\infty)^0 \quad 0^0$$

Limiti notevoli

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ infatti se $a_n \to 0$ $\dfrac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} \to 1$

col teorema ponte la dimostrazione è fatta

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \;,\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ricordiamo che $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ Si può provare che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ è def per $x<-1, x>0 \Rightarrow$ ha senso calcolare questi 2 limiti

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ è definita per $x>-1$, $x \neq 0 \Rightarrow$ ha senso calcolare $\lim_{x \to 0}$ e si presenta nella forma 1^∞

Si dimostra che $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

segue che $\lim_{x \to 0} \log (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1$

$$\frac{1}{x} \log(1+x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

quindi $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e si dim anche che

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

funzione infinitamente grande = un infinito

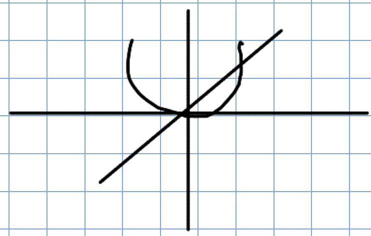
$f; g$ infiniti simultanei (entrambi per $x \to c$ o entrambi per $x \to +\infty$)

se $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to l > 0$ infinito dello stesso ordine

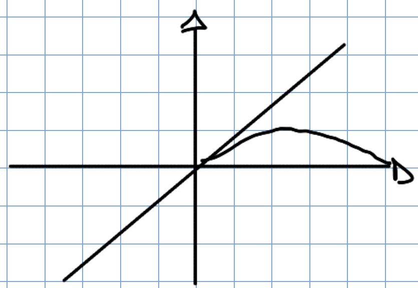
se $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to +\infty$ infinito di ordine superiore f, g infinitesimi simultanei

se $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ f infinito di ordine superiore

es: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$



se $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to l > 0$ sono dello stesso ordine



se $\left|\frac{f(x)}{(g(x))^n}\right| \to l > 0$ f infinitesimo di ordine n rispetto od x

es: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ ma $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $n=2$

infinitesimi fondamentali: per $x \to \pm\infty$ $\frac{1}{x}$

per $x \to c$ $x-c$

infinito fondamentale: per $x \to \pm\infty$ x

per $x \to c$ $\frac{1}{x-c}$

Esercizi

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\overset{\to 5}{3x-4}}{\underset{\to 0}{2^{x^2-9}}} \to -\infty \quad = 0 \qquad \cancel{2^{-\infty}} \quad \text{ERRORE}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{3x}{x^3+4}}{e^{\frac{1}{x^4}}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{3x}{x^2+4}}{\frac{9x^2}{(x^2+4)^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^4}}-1}$$

$$\downarrow \tfrac{1}{2} \qquad \downarrow 1$$

$$\underbrace{x^4 \, \frac{9x^2}{(x^3+4)^2}}_{\to 9} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to(-4)} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{\overset{\to -12}{x-8}}{\underset{\to 0}{x^2-16}}} \to -\infty \quad = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3} \log_{\frac{1}{2}} \frac{\overset{\to 0}{x^2-9}}{\underset{\to 5}{x+2}} \to 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2 \frac{x^4+1}{2x^3+3} = +\infty$$

Ricordiamo infine che: $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$ non sono regolari per $x \to +\infty$

$tg\, x$ diverge per $x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ e per $x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

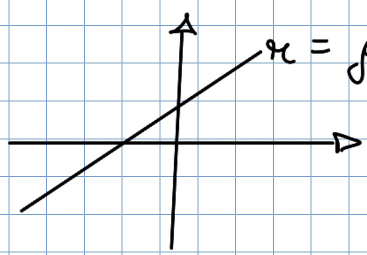
Asintoto

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$

$g(f)=\{(x,f(x)):x\in(a,b)\}\subseteq\mathbb{R}^2$

$r: ax+by+c=0$ se $\lim d(P,r)=0$ con $P\in g(f)$

si dice che r è un asintoto per f



$r=g(f)$

Asintoto verticale

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ (esiste solo da dx o da sx)

la retta di equazione $x=a$ è detta asintoto verticale per f

$P(x_0,y_0)$

$r: ax+by+c=0$

$$d(P,r)\ \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$P(x,f(x))$

$r: x-c=0$

$$d(P,r)=\frac{|1\cdot x+0\cdot f(x)-c|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|x-c|\to 0$$

per $x\to c$

Asintoto destro

$f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$

se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ si dice che la retta di eq $y=\ell$

è as oriz destro per f

$P(x,f(x))$

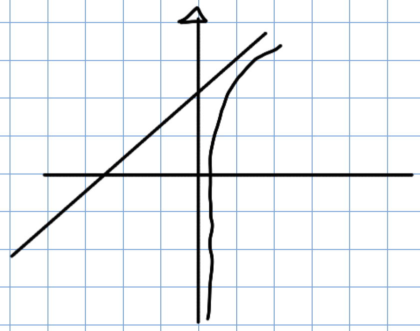
$r: y-\ell=0$

$$d(P,r)=\frac{|0\cdot x+1\cdot f(x)-\ell|}{\sqrt{0^2+1^2}}=|f(x)-\ell|\to 0$$

per $x\to+\infty$

(analogamente si introduce l'asintoto oriz sinistro) se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm \infty$ si cerca un as. obliquo di

eq $y = mx + q$



f è un infinito
con $g(x) = mx + q$ è un
infinito

affinché r sia asintoto per f, f e g devono essere infiniti dello stesso ordine quindi f deve essere inf dello stesso ordine di x quindi $\frac{f(x)}{x}$ deve avere un limite finito allora si considera:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ Se esso è $m \neq 0$ si con

$\lim (f(x) - mx)$ se esso è $q \in \mathbb{R}$ la retta r :
$y = mx + q$ è asintoto infatti

r: $mx - y + q = 0$

$P(x, f(x))$

$$d(P, r) = \frac{|mx - f(x) + q|}{\sqrt{m^2+1}} \to 0$$

Analogamente si trova l'asintoto obliquo sinistro