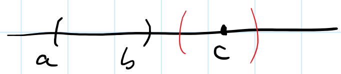
$$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad c \in X \cap D(X)$$

se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ f si dice CONTINUA NEL PUNTO c

[in generale se $c \in X$ f cont. in c se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$ se $x \in X$, $|x-c| < \delta$ si ha $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$]



$X = (a, b) \cup \{c\}$ c isolato

f è sicuramente continua in un punt isolato.

FACOLTATIVO

- Operazioni tra funz. continue sono continue
- una funz. composta mediante funz. continue è continua

$f(x) = f(g(x))$ g cont. in c, f " $g(c)$

$\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$ $\Rightarrow$ f cont. in c

$\lim_{y\to g(c)} f(y) = f(g(c)) = f(c)$

es. $\lim_{x\to 3} \log_2(\underbrace{x+1}_{\downarrow\, 4}) = \log_2 4$

teorema ponte. f cont. in $c \iff \forall \{x_n\} \subseteq X$ con $x_n \to c$ si ha $f(x_n) \to f(c)$

es. $\sin \underbrace{\frac{3n^2+1}{4n^3+3}}_{x_n} \to \sin 0 = 0$ $(c = 0)$

DEF. f cont. in X se lo è in ogni punto.

ESERC. Stabilire se f è continua in $]-\infty, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$

f è cont in c $\forall c \neq 0$
f è cont. in $c = 0$?

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 1$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1$

$\Rightarrow f$ è cont. anche in $c = 0$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

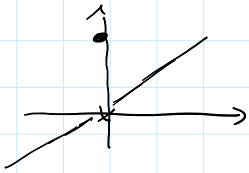
f è cont in c $\forall c \neq 0$
f " in $c = 0$?

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$
$\lim$ ...

$\Rightarrow f$ non è cont. in $c = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$



f è cont. in c $\forall c \neq 0$

" in $c=0$?

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0 \neq f(0) \Rightarrow f$ non è cont. in $c=0$

$$f(x) = \begin{cases} \lim_n \left(1 + \frac{x+1}{2n}\right)^{2n} & x > -1 \\ k & x = -1 \\ e^{\frac{1}{x+1}} & x < -1 \end{cases}$$

trovare $k \in \mathbb{R}$: f è cont.

$$\lim_n \left(1 + \frac{x+1}{2n}\right)^{2n} = e^{x+1}$$

$\left[\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e \quad \text{se } x_n \to \infty \right.$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & x > -1 \\ k & x = -1 \\ e^{\frac{1}{x+1}} + 1 & x < -1 \end{cases}$$

f è cont. in $\forall c \neq -1$

$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} e^{x+1} = 1$

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} e^{\frac{1}{x+1}} + 1 = 1 \qquad \frac{1}{x+1} \to -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = 1$

per $k = 1$ f è cont.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & 0 \leq x \leq e \\ \log x & x > e \end{cases}$$

f è cont. $\forall c \neq 0, e$

f è cont. in 0 ?

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1 \quad \Rightarrow$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0) \Rightarrow f$ cont. in $c = 0$

f è cont. in $c = e$?

$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{e+1}$

$\neq$

$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} \log x = 1$

$\nexists \lim_{x\to e} f(x) \Rightarrow f$ non è cont. in $c = e$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

f è cont. in $\forall c \neq 0$

f non è cont. in 0 perché $0 \notin$ ins. di def.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ non è cont.

Punti di discontinuità

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad c \in D(X)$ $\quad$ punto di discontinuità se è verificata una delle seguenti condizioni

1) $c \notin X$
2) $c \in X$, $\exists \lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$
3) $\nexists \lim_{x\to c} f(x)$

es. $f(x) = \log x$ $\quad c=0$ $\quad$ di disc. per 1)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$ $c=0$ di disc. per 2)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$ " per 3) $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

A) Se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ la discontinuità si dice ELIMINABILE infatti la nuova funz. $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ \ell & x = c \end{cases}$ è cont in c

es. $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$ $\quad \ell = 0$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(c=0)$ $\quad \ell = 1$ $\quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ è cont. in $\mathbb{R}$

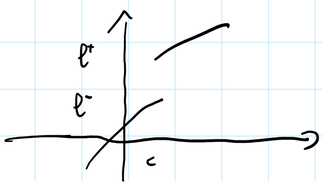
g = PROLUNGAMENTO PER CONTINUITÀ

$f(x) = x^x$ $(c=0)$ $\quad \ell = 1$ $\quad g(x) = \begin{cases} x^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

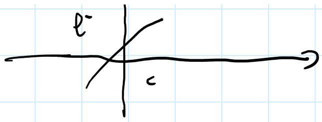
B) se $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$ $\quad c$ P. DI DISC. DI PRIMA SPECIE

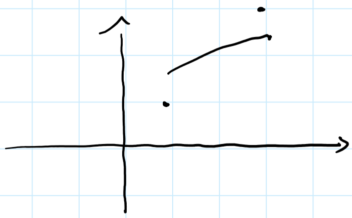
ad es. una funz. monotona in (a,b), in un punto $c \in]a,b[$ ~~[illegible]~~ può avere solo disc. di I specie

una funz. monot. in $[a,b]$, in a e in b può avere solo disc. eliminabili



$|\ell^+ - \ell^-|$ = salto di f in c





disc. elim. in a e in b

c) se f diverge per $x \to c$ (event. solo per $x \to c^-$ o per $x \to c^+$) c si dice punto di infinito

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x = 0$

Proprietà delle funz. continue in un intervallo

TEOREMA DI WEIERSTRASS (NO DIM.)

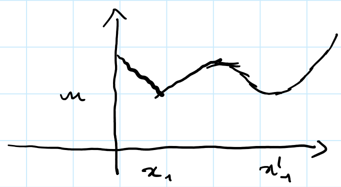
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont., allora f ammette minimo e massimo assolut.

⌈ quindi f è limitata e $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = m = \inf_{[a,b]} f,\ f(x_2) = M = \sup_{[a,b]} f$ ⌋

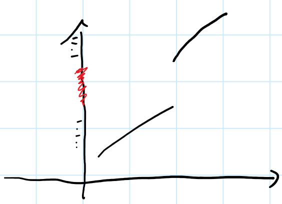
m = minimo

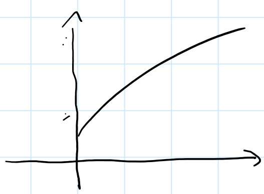
x_1 = punto di minimo (possono essercene diversi)

$f(x_1) = f(x_1') = m$



PROPRIETÀ DEI VALORI INTERMEDI (PVI)



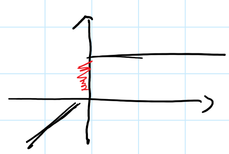


DEF. f verifica la PVI se dati $\alpha, \beta \in f((a,b))$ con $\alpha < \beta$ e $\gamma \in]\alpha, \beta[$

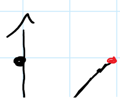
$\exists\, x \in (a,b) : f(x) = \gamma$

(se f assume due valori $\alpha < \beta$ assume anche tutti quelli compresi)

esempio $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ x & x \le 0 \end{cases}$ $\qquad \alpha = 0,\ \beta = 1 \quad \nexists\, x : f(x) = \frac{1}{3}$ $\quad f$ non ha la PVI

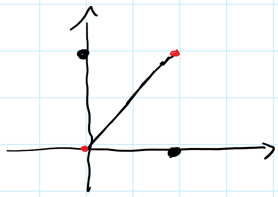


$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \ldots & \ldots \end{cases}$



ha la PVI

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$



ha la PVI

non è cont.

non è monot.

Legami fra PVI, continuità e monotonia per $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

1) f cont in $[a,b] \Rightarrow f$ ha la PVI (non vale il viceversa)
2) f ha la PVI ed è monotona $\Rightarrow f$ continua

1) TEOREMA DI DARBOUX

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ cont.} \\ f(a)<f(b) \\ f(a)<\gamma<f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in[a,b]: f(c)=\gamma$$

se (a,b) non è chiuso e lim. dati $\alpha, \beta \in f((a,b))$ si prendono a_1, b_1: $f(a_1)=\alpha$, $f(b_1)=\beta$ e si utilizza il teorema in $[a_1, b_1]$

I caso $f(a)<0$, $f(b)>0$ $\gamma=0$ (teorema di esistenza degli zeri)

[enunc. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont., $f(a)<0$, $f(b)>0 \Rightarrow \exists\, c\in[a,b]: f(c)=0$]

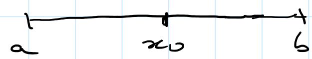
II caso caso generale

I caso DIM. IP $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont.

$f(a)<0$, $f(b)>0$ (o viceversa)

TS $\exists\, c\in[a,b]: f(c)=0$

DIM. sia $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$



se $f(x_0)=0 \Rightarrow$ TS

se $f(x_0)>0$ poniamo $[a_1,b_1]=[a,x_0]$

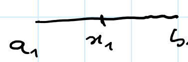
se $f(x_0)<0$ " " $[x_0,b]$

$f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$

$b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$

$a\le a_1<b_1\le b$

$x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$



se $f(x_1)=0 \Rightarrow$ TS

se $f(x_1)>0$ poniamo $[a_2,b_2]=[a_1,x_1]$

se $f(x_1)<0$ " " $[x_1,b_1]$

$f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$

$b_2-a_2=\dfrac{b_1-a_1}{2}=\dfrac{b-a}{2^2}$

$a\le a_1\le a_2<b_2\le b_1\le b$

Proseguiamo. Se $\exists\, n : f(x_n) = 0 \Rightarrow$ TS, altrimenti si costruisce una successione di intervalli $[a_n, b_n]$:

$f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$

$b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dfrac{b-a}{2^n}$

$a \le a_1 \le \dots \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le \dots \le b$

$\{a_n\}$ è crescente ed è limit. sup. (da b) quindi converge $a_n \to c$

$f(a_n) < 0 \quad \forall n$

$a_n \to c \Rightarrow f(a_n) \to f(c)$ (per il teor. ponte)

$\Downarrow$

$f(c) \le 0$

$\Rightarrow f(c) = 0$

$b_n = \underset{\downarrow\, c}{a_n} + \underset{\downarrow\, 0}{\dfrac{b-a}{2^n}} \to c \qquad f(b_n) > 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow f(c) \ge 0$

Caso generale $\quad f(a) < \gamma < f(b)$, si cerca c: $f(c) = \gamma$ cioè $f(c) - \gamma = 0$

Allora cons. la funz. $g(x) = f(x) - \gamma$ in $[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ è cont.} \\ g(a) = f(a) - \gamma < 0 \\ g(b) = f(b) - \gamma > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) : g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = \gamma$$

Conclusione: l'immagine di un intervallo mediante una funz. continua è un intervallo.

Se f non è def. in un intervallo, il teorema non vale

es. $\quad f : ([0,1] \cup [3,4]) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{in } [0,1] \\ 6 & \text{in } [3,4] \end{cases}$

è cont. ma non vale la PVI

2) Teorema di continuità delle funz. monotone

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \left.\begin{array}{l} \text{strett cresc} \\ \text{valga la PVI} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è cont.}$$

DIM. Sia $c \in]a,b[$, dim che f è cont. in c (se $c = a$ opp. $c = b$ si procede allo stesso modo)

Sappiamo che $\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup_{[a,c[} f(x) = l^-$

$\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf_{]c,b]} f(x) = l^+$

e $l^- \leq f(c) \leq l^+$

dobbiamo provare che $l^- = f(c) = l^+$

Supp. p.a. che $l^- < f(c)$ (per l^+ si fa allo stesso modo)

$f(a) < l^- < f(c)$

Sia γ: $l^- < \gamma < f(c)$
PVI $\Rightarrow$ $\exists\ \bar{x} \in [a,b]$: $f(\bar{x}) = \gamma$
Dov'è $\bar{x}$?

Se $\bar{x} = c$ $\Rightarrow$ $f(\bar{x}) = \gamma = f(c)$ falso
se $\bar{x} > c$ f è cresc. $\Rightarrow$ $\gamma = f(\bar{x}) > f(c)$ falso
se $\bar{x} < c$ $\Rightarrow$ $\gamma = f(\bar{x}) \leq l^-$ falso

Allora $\bar{x}$ non esiste $\Rightarrow$ γ non esiste $\Rightarrow$ $l^- = f(c)$

Immagine di una funz. cont. in un interv.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ cont.

teor. di Weierstrass $\Rightarrow$ $\exists\ m, M$
" Darboux $\Rightarrow$ $\forall \gamma \in]m, M[$ viene assunto da f

Se $\gamma < m$ o $\gamma > M$ non viene assunto da f

Allora $f([a,b]) = [m, M]$

Se f è cresc. $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$
" decr. " $[f(b), f(a)]$

In generale se f è cont. in un interv. (a,b) generico

$$f((a,b)) = \left(\inf_{(a,b)} f,\ \sup_{(a,b)} f\right)$$

se f è cresc. $\inf f = \lim_{x\to a} f(x)$, $\sup f = \lim_{x\to b} f(x)$

" decresc. $\inf f = \lim_{x\to b} f(x)$, $\sup f = \lim_{x\to a} f(x)$

Teorema di continuità delle funzioni inverse

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ strett. cresc. e continua

Allora $f^{-1}: [\inf f, \sup f] \to [a,b]$ è strett. cresc e cont.

lo sappiamo già

basta dim che se $c \in]a,b[$ allora $\exists\ y \in]\inf f, \sup f[: c = f^{-1}(y)$
(cioè che f^{-1} verifica la PVI)

basta prendere $c = f^{-1}(y)$ infatti $f(f^{-1}(y)) = y$

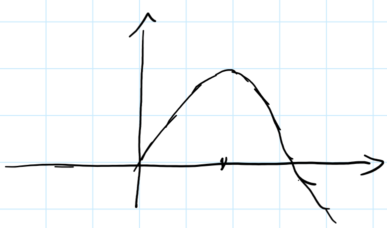
Tutte le funzioni elem. sono continue perché sono (almeno a tratti) monotone e verificano la PVI

es. $f(x) = x^2$

Sia $c > 0$, cons. $[a,b] \subseteq]0,+\infty[$: $c \in]a,b[$, f è cresc. e in $[a,b]$ vale la PVI grazie al teorema della radice n-ma aritm.
Quindi f è cont in $[a,b] \Rightarrow$ in c
Se $c < 0$ analog.

$c = 0$? non c'è un interv. contenente c all'interno in cui f è monotona.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \inf_{]-\infty,0[} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \inf_{]0,+\infty[} f(x) = 0$$
$\Rightarrow$ è cont



$f(x) = \sin x \quad c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ procede allo stesso modo