

**ESAME DI ALGORITMI**  
Università degli Studi di Catania  
Corso di Laurea Triennale in Informatica  
**1 settembre 2025**

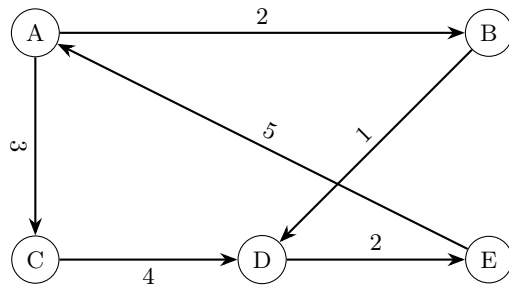
Si risolvano i seguenti esercizi in un tempo non superiore a 3 ore. Si abbia cura di consegnare la risoluzione dei primi 3 esercizi in un foglio (FOGLIO A) separato da quello utilizzato per la consegna degli ultimi 3 esercizi (FOGLIO B). Gli studenti delle vecchie coorti che devono sostenere solo il modulo di Algoritmi dovranno risolvere gli esercizi 1, 2, 3, 5 e 6 (tempo 2 ore). Gli studenti che devono sostenere solo il modulo di Laboratorio dovranno risolvere l'esercizio 3 (tempo un'ora).

—— FOGLIO A ——

1. In un albero rosso-nero, l'altezza nera di un nodo  $x$ , denotata  $bh(x)$ , è definita come il numero di nodi neri presenti lungo un qualunque cammino da  $x$  a una foglia NIL, escludendo il nodo stesso, ma includendo il nodo NIL finale (che si assume sempre nero). Per definizione degli alberi rosso-neri, tutti i cammini da un nodo verso le foglie devono avere la stessa altezza nera. Scrivere lo pseudo-codice di una procedura ricorsiva `bhVerify`( $x$ ) che, fornita in input la radice  $x$  di un albero rosso-nero, verifichi se tale proprietà è rispettata (restituisce `True`) o meno (restituisce `False`).
2. Si fornisca un funzione ricorsiva, `IsHeap`( $A, i$ ), che preso in input un Max-Heap  $A$  (rappresentato come un array) e un indice  $i > 0$ , verifica se il sotto albero radicato in nel nodo  $i$  di  $A$  sia effettivamente un Heap, ovvero rispetti la proprietà dell'ordinamento parziale. La procedura restituisce `True/False`.
3. Scrivere lo pseudo-codice di una funzione che, preso un insieme  $P = \{(x_i, y_i) \mid 0 \leq i < n\}$  di  $n$  punti, un punto  $A = (a, b)$  ed un parametro  $k < n$ , restituisca i  $k$  punti di  $P$  più vicini al punto  $A$ . NOTA: La soluzione diretta prevede l'ordinamento degli elementi in  $P$  rispetto alla distanza da  $A$  e la selezione dei primi  $k$  elementi. Tale soluzione ha una complessità pari a  $O(n \log(n) + k)$ . La procedura fornita dovrà invece avere una complessità pari a  $O(n \log(k))$ .

—— FOGLIO B ——

4. Si risolva l'equazione di ricorrenza  $T(n) = aT\left(\frac{n}{13}\right) + 1$ , al variare del parametro reale  $a \geq 1$  utilizzando il metodo Master. Si stabilisca inoltre quale delle seguenti condizione sono soddisfatte dalla soluzione  $T(n)$ :
  - (iii)  $T(n) = O(\log n)$ ;
  - (ii)  $T(n) = \Theta(n)$ ;
  - (i)  $T(n) = \omega(n^2)$ .
5. Si scriva la formula ricorsiva utilizzata dall'algoritmo FLOYD-WARSHALL e si simuli tale algoritmo per trovare la tabella (matrice) dei cammini minimi tra tutte le coppie di vertici del grafo in figura di cui si richiede la matrice di adiacenza.



6. Si definisca la proprietà di scelta greedy di un problema e si mostri con un esempio che il problema  $\{0, 1\}$ -KNAPSACK non gode di tale proprietà.