Rip. Teorema di Lagrange

IP $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. der. in $]a,b[$ $\Rightarrow$ TS $\exists\, c \in]a,b[\,: f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strett cresc

f strett cresc $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ cresc

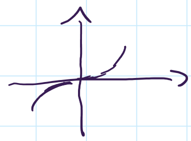
f strett cresc $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\nexists\, (c,d) \subseteq (a,b) : f'(x) = 0 \quad \forall x \in (c,d)$

Studio dei punti stazionari $(c \in (a,b) : f'(c) = 0)$ $\quad f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile

c p. di estr. rel., $c \in]a,b[\Rightarrow c$ è stazionario

Viceversa NO es. $f(x) = x^3 \quad c = 0$



se $\exists\, r > 0$: in $]c-r, c[\ f'(x) < 0$

e in $]c, c+r[\ f'(x) > 0$

c

allora in $]c-r, c]$ f è strett decr per il crit di monot. $\Rightarrow f(x) \geq f(c)$

in $[c, c+r[$ " cresc " " $\Rightarrow f(x) \geq f(c)$ $\Rightarrow x = c$ è p. di min rel

analog. se in $]c-r, c[\ f'(x) > 0$

e in $]c, c+r[\ f'(x) < 0$ $\Rightarrow x = c$ è p. di max rel.

Quindi il p. $x = c \in]a,b[$ stazionario è di estr. rel. se in corrisp. di c f' cambia segno

Altro metodo: ricorrere a f''. Supp che f sia deriv. in (a,b) e che $\exists f''(c) > 0$

Allora il p. $x = c$ è di min rel.

Infatti $f''(c) > 0 \Rightarrow f'$ cresc. in c. Ma $f'(c) = 0 \Rightarrow \exists\, r > 0$: in $]c-r, c[\ f'(x) < 0$

in $]c, c+r[\ f'(x) > 0$

Ne segue che c è p di min rel.

Se $f''(c) < 0$ c è p. di max rel.

Ricerca degli estremi assoluti

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Teor. di Weierstrass $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = m,\ f(x_2) = M$

Dove sono x_1, x_2? cerchiamo ad es. x_1 (lo stesso per x_2)

se $x_1 \in]a,b[\Rightarrow$
- se $\exists\, f'(x_1)$ essa vale zero
- $\nexists\, f'(x_1)$

opp $x_1 \in \{a; b\}$

Cerchiamo allora x_1, x_2 nei seguenti insiemi

$A = \{c \in]a,b[: f'(c) = 0\}$

$B = \{c \in]a,b[: \nexists\, f'(c)\}$

$C = \{a, b\}$

es. $f(x) = x^2 - x + 1$ $\quad [a,b] = [0,2]$

$f'(x) = 2x - 1 = 0$ per $x = \frac{1}{2} \in]0,2[$

$A = \{\frac{1}{2}\}$

$B = \emptyset$

$C = \{0; 2\}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ $\qquad f(0) = 1$ $\qquad f(2) = 3$

$\min_{[0,2]} f = \frac{3}{4} = f(\frac{1}{2})$ $\qquad \max_{[0,2]} f = 3 = f(2)$

Teorema di prolungamento della derivata

IP $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua

$c \in (a,b)$

f deriv. in $(a,b) \setminus \{c\}$

$\exists \lim_{x \to c} f'(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$ opp. $\ell = \pm\infty$)

TS $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \ell$

ESEMPI. $f(x) = \arcsin x$ in $[-1,1]$ è continua

$f'(x) = \frac{1}{\quad}$ in $]-1,1[$

$\sqrt{1-x^2}$

$$\lim_{x\to\pm1} f'(x) = +\infty \Rightarrow \nexists f'(-1),\ \nexists f'(1)$$

$$f(x) = |x^2-4| - 2x + 1 = \begin{cases} 5 - x^2 - 2x & -2<x<2 \\ x^2 - 2x - 3 & x \le -2 \vee x \ge 2 \end{cases}$$

$-2<x<2 \qquad f'(x) = -2x - 2$

$x<-2,\ x>2 \qquad f'(x) = 2x - 2$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f'(x) = -6 = f'_-(-2) \qquad\qquad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -6 = f'_-(2)$$

$$\Rightarrow \nexists f'(-2) \qquad\qquad \Rightarrow \nexists f'(2)$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f'(x) = 2 = f'_+(-2) \qquad\qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 2 = f'_+(2)$$

Trovare gli estr. ass. di $f(x) = x^2 - 4x + 3|x| + 2$ in $[-1, 3]$

$A = \{c \in]-1,3[\ : f'(c) = 0\}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 2 & -1 \le x < 0 \\ x^2 - x + 2 & 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

$B = \{c \in]-1,3[\ : \nexists f'(c)\}$

$C = \{-1; 3\}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 7 & -1<x<0 \\ 2x - 1 & 0<x<3 \end{cases}$$

$2x - 7 = 0$ per $x = \frac{7}{2} \notin]-1,0[$ $\qquad$ $2x - 1 = 0$ per $x = \frac{1}{2} \in]0,3[$ $\qquad$ $A = \{\frac{1}{2}\}$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -7 = f'_-(0)$$

$$\Rightarrow \nexists f'(0) \qquad\qquad B = \{0\}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 = f'_+(0) \qquad\qquad C = \{-1, 3\}$$

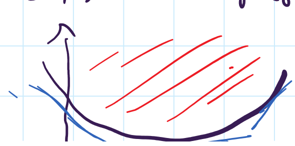
$f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{4} \qquad f(0) = 2 \qquad f(-1) = 10 \qquad f(3) = 8$

$$\min_{[-1,3]} f = \frac{7}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right) \qquad\qquad \max_{[-1,3]} f = 10 = f(-1)$$

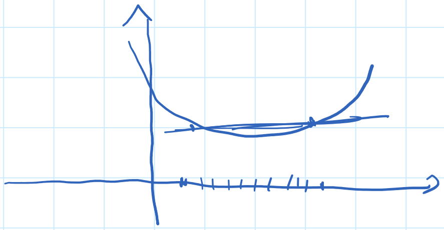
Ricordiamo che $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ è convessa in (a,b) se $\mathrm{epi}(f)$ è convesso

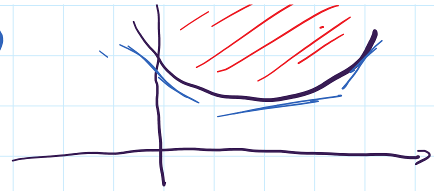
$f(tx + (1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y) \qquad \forall x,y \in (a,b)$

$\forall t \in [0,1]$



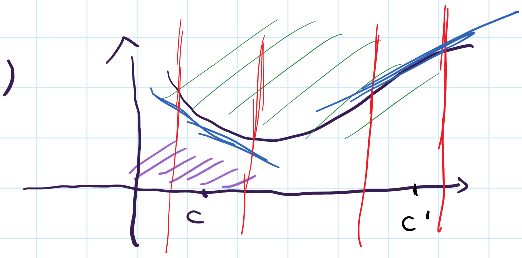
$f(tx+(1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y) \quad \forall x,y \in (a,b) \quad \forall t \in [0,1]$





Convessità locale $\qquad f: (a,b) \to \mathbb{R} \qquad c \in (a,b) \qquad \exists f'(c)$

eq. della tangente $\qquad y = f(c) + f'(c)(x-c)$



f convessa in c

concava in c'

DEF.

semipiano superiore $\quad \bar{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \ge f(c) + f'(c)(x-c)\}$

" $\quad$ inferiore $\quad \underline{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \le f(c) + f'(c)(x-c)\}$

f convessa in c se $\exists r > 0$: se $x \in]c-r, c+r[\quad (x, f(x)) \in \bar{S}$

f concava in c $\quad$ " $\quad$ " $\quad (x, f(x)) \in \underline{S}$

f convessa (concava) in $(a,b) \iff$ lo è in ogni punto

TEOREMA $\quad$ Sia f deriv. in (a,b), ~~sia~~ $c \in (a,b)$ e supp che $\exists f''(c) > 0$

Allora f è conv. in c

TS. $\quad$ si deve provare che $\exists r > 0$: in $]c-r, c+r[$ si ha $f(x) \ge f(c) + f'(c)(x-c)$

Cons. in (a,b) $\quad F(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)$, si deve provare che $F(x) \ge 0$ in un intorno di c.

$$F(c) = 0 \qquad F'(x) = f'(x) - f'(c) \Rightarrow F'(c) = 0$$
$$\exists \; F''(c) = f''(c) > 0$$

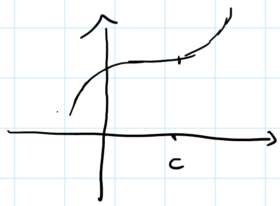
$\Rightarrow$ in $x = c$ F ha un min rel

$\Downarrow$

$\exists r > 0 : F(x) \ge F(c) = 0 \quad \forall x \in]c-r, c+r[\Rightarrow$ TS.

DEF. $\quad x = c$ è p. di flesso se in c f non è né convessa né concava

" $\quad$ p. di flesso proprio se f è conv. a sinistra di c e conc. a destra o viceversa



Se $\exists f''(c)$ in un p. di flesso, allora $f''(c)=0$

ESEMPI ED ESERCIZI

(1) $f(x) = \begin{cases} e^x & x<0 \\ x^2+x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$ $\qquad f$ è cont.

$\exists f'(0)$? $\qquad f'(x) = \begin{cases} e^x & x<0 \\ 2x+1 & x>0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 = f'_-(0)$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = f'_+(0)$ $\Rightarrow f'(0)=1$

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ $\qquad f$ è cont.

$\exists f'(0)$? $\qquad$ per $x\neq 0$ $\quad f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$= \underbrace{2x \sin\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{- \cos\frac{1}{x}}_{\text{oscill.}} \qquad \nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$

però $\quad r(x) = \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = x \sin\frac{1}{x} \to 0 \quad \Rightarrow \exists f'(0) = 0$

(3) $f(x) = (2x+1)^{x^2+3}$ $\qquad f'(x) = ?$

$f(x) = e^{\log f(x)} = e^{(x^2+3)\log(2x+1)}$

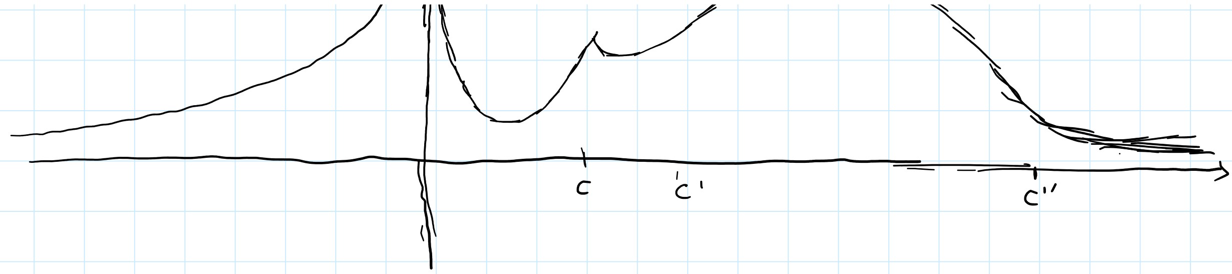
$f'(x) = e^{(x^2+3)\log(2x+1)} \left(2x \log(2x+1) + (x^2+3)\frac{2}{2x+1} \right)$

$f(x) = \log_{x^2+2}(2x-5) = \left(\log_{x^2+2} e\right) \log_e (2x-5) = \dfrac{\log(2x-5)}{\log(x^2+2)}$ $\qquad \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{2}{2x-5}\log(x^2+2) - \log(2x-5)\frac{2x}{x^2+2}}{\log^2(x^2+2)}$

(4)

(4)



è def. in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

è limit. infer. ma non super.

$x=c$ p. angoloso

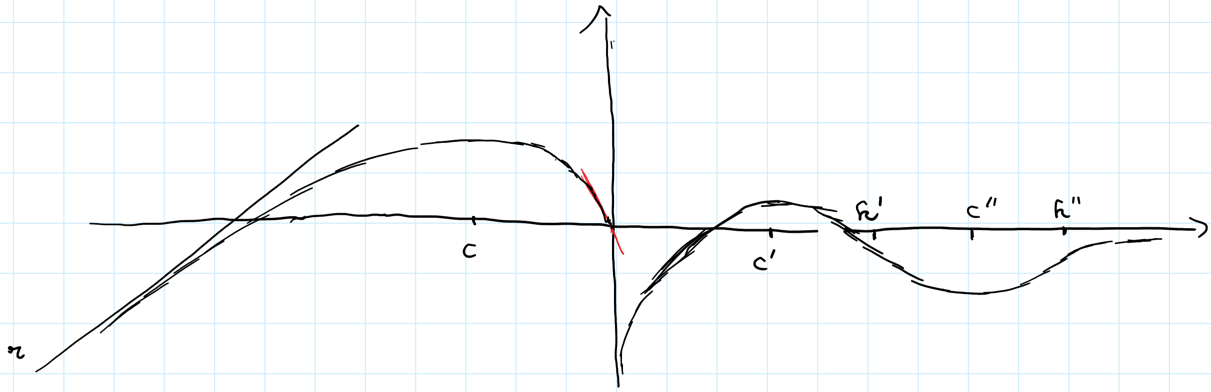
asint. vert di eq. $x=0$

" or. ds. e sin. di eq. $y=0$

è cont. nel suo ins. di def.

ha un p. di infinito in $x=0$

c', c'' p. di flesso



è def in $]\infty,+\infty[$

non è cont. in $x=0$ (p. di infinito)

è limitata solo sup.

$x=c$ p. di max assol.

$x=c'$ p. di max rel

$x=c''$ p. di min rel

asint. : r as. obl. sin.

$x=0$ as. vert.

$y=0$ " orizz.

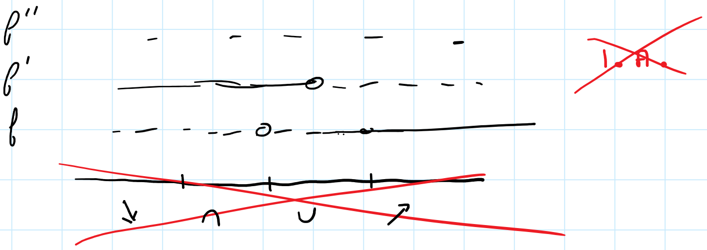
fl', fl'' p. di flesso

f deriv. in tutto il suo ins. di def.

Studio di funzione, metodo

$f(x) = \dots$

1) ins. di def., legge di def dettagliata (se c'è un valore assoluto)
2) limiti "interessanti", continuità, studio delle discontinuità, limitatezza, asintoti
3) derivabilità e studio di f' => monotonia ed estremi relativi
4) esistenza di f'' e suo studio => convessità, concavità e flessi
5) andamento del grafico



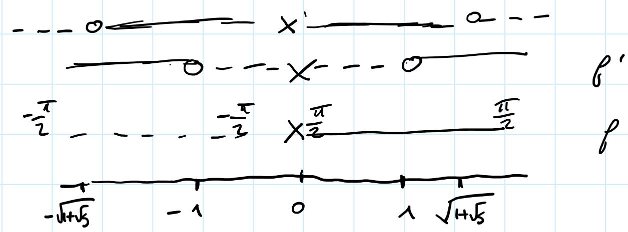
$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{x}$ $\qquad f:]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ cont. e limitata

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad y = -\frac{\pi}{2}$ eq. asint. orizz. sin.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad y = \frac{\pi}{2}$ " " ds.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad x = 0$ p. di disc. di I specie (salto $= \pi$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$



f è deriv. nel suo ins. di def.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{(x^2+1)^2}{x^2}} \cdot \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+(x^2+1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^4+3x^2+1}$$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$

$f'(x) = 0$ per $x = \pm 1$

in $]-\infty, -1[$ e in $]1, +\infty[$ f è cresc.

in $]-1, 0[$ " $]0, 1[$ " decr.

$x = -1$ p. di max rel.

$x = 1$ " min rel.

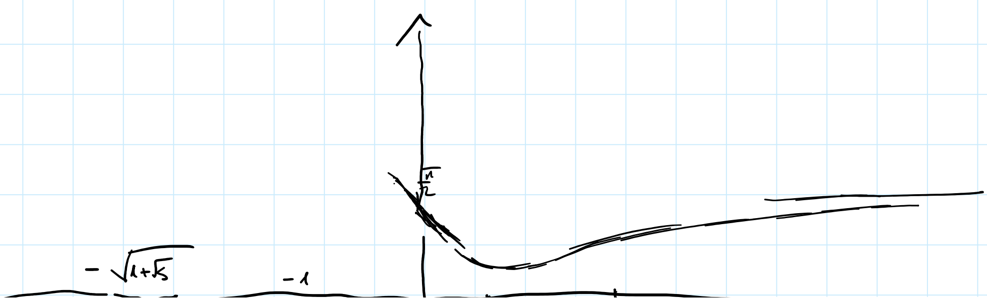
$$\exists f''(x) = \frac{2x(x^4+3x^2+1) - (x^2-1)(4x^3+6x)}{(x^4+3x^2+1)^2} = \frac{2x^5 + \cancel{6x^3} + 2x - 4x^5 - \cancel{6x^3} + 4x^3 + 6x}{(\quad)^2} =$$

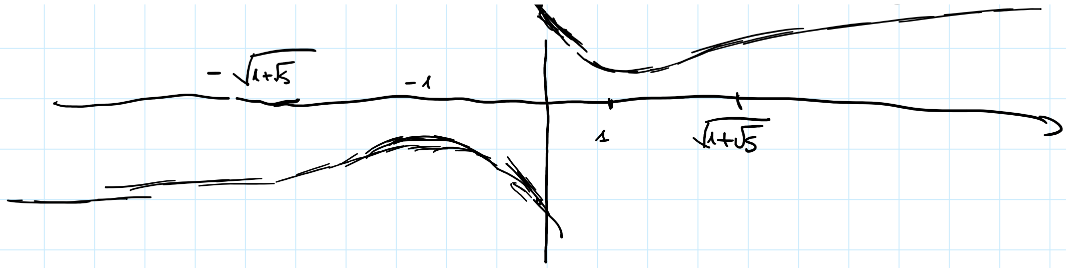
$$= \frac{-2x^5 + 4x^3 + 8x}{(\quad)^2} = \underbrace{\frac{-2}{(\quad)^2}}_{<0} (x^4 - 2x^2 - 4)$$

$t^2 - 2t - 4 \qquad 1 \pm \sqrt5 \qquad t^2 - 2t - 4 > 0$ per $t < 1-\sqrt5$, $t > 1+\sqrt5$

$x^2 < 1 - \sqrt5$

$x^2 > 1 + \sqrt5 \qquad x > \sqrt{1+\sqrt5}$, $x < -\sqrt{1+\sqrt5}$





Altri esercizi

Studio della derivata seconda

Calc. $f''(c)$ e dire se f in c è conc. o conv., cresc. o decr., o ha un estremo relativo

$f(x) = 4x^2 - x + 1$ $\quad c = \frac{1}{8}$

$f'(x) = 8x - 1$ $\quad f''\left(\frac{1}{8}\right) = 8 > 0 \Rightarrow$ min rel ? sì perché

$f'\left(\frac{1}{8}\right) = 0$

f è convessa in c

$f(x) = 6x^2 - 2x - 4$ $\quad c_1 = 1 \quad c_2 = \frac{1}{6}$

$f'(x) = 12x - 2$ $\quad f''(x) = 12 > 0 \Rightarrow$ min rel ?

$f'(1) = 10 \Rightarrow$ non c'è min rel, f è cresc e conv

$f'\left(\frac{1}{6}\right) = 0 \Rightarrow$ min rel

$f(x) = \log \frac{x}{2x+1}$ $\quad c = -1$

$f'(x) = \frac{2x+1}{x} \frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}}{(2x+1)^2} = \frac{1}{x(2x+1)} = \frac{1}{2x^2+x}$

$f''(x) = -\frac{4x+1}{(2x^2+x)^2}$ $\quad f''(-1) = 5 > 0 \Rightarrow$ min rel ?

$f'(-1) = 1 > 0 \Rightarrow$ non min rel, f è cresc e conv

$f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2+2}}$ $\quad c_1 = -1+\sqrt{3} \quad c_2 = 0$ (proposto)