Premesse

1) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ UNIFORMEMENTE CONTINUA se
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: se $x,y\in(a,b)$, $|x-y|<\delta$ si ha $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Teorema di Heine-Cantor: se f è cont. in $[a,b]$ (ch. lim.) è unif. cont.

2) Siano $A,B\subseteq\mathbb{R}$. se $a\le b$ $\forall a\in A$, $\forall b\in B$, A e B si dicono separati e si ha $\sup A\le\inf B$ e tutti i numeri x: $\sup A\le x\le\inf B$ sono detti elementi di separazione. Se $\sup A=\inf B$ (unico elem. di separazione) A e B si dicono contigui, in tal caso si ha

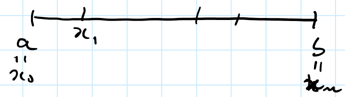
$$\forall\varepsilon>0\ \exists a\in A,\ b\in B:\ b-a<\varepsilon$$

INTEGRALE DI RIEMANN

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA

diciamo $m=\min\limits_{[a,b]} f$, $M=\max\limits_{[a,b]} f$

$D=\{x_0;x_1;\dots;x_n\}$ DECOMPOSIZIONE



$x_0=a<x_1<\dots<x_n=b$ capisaldi di D

$[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\dots\cup[x_{n-1},x_n]$ $\qquad [x_{i-1},x_i]=I_i\quad i=1,\dots,n$

$m_i:=\min\limits_{I_i} f=f(y_i)\qquad y_i,z_i\in I_i$

$M_i=\max\limits_{I_i} f=f(z_i)$

$|D|=\max\limits_{i=1,\dots,n}(x_i-x_{i-1})$ ampiezza di D

$s(f,D)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$ somma inferiore secondo Riemann relativa a f e a D

$S(f,D)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$ " superiore " " " "

$s(f,D)\le S(f,D)$

$\underline{S}$ = ins. delle somme inferiori

$\bar{S}$ = " " superiori

Si può provare che $\forall D_1,D_2$ si ha $s(f,D_1)\le S(f,D_2)$ quindi $\underline{S}$, $\bar{S}$ sono due insiemi separati. ~~Dim.~~ che

TEOREMA $\underline{S}$ ed $\bar{S}$ sono contigui

DIM. Facciamo vedere che $\forall\varepsilon>0\ \exists D$: $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$

f cont. in $[a,b]\Rightarrow$ uniform. cont. $\Rightarrow$ in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{b-a}$ $\exists\delta>0$: se $y,z\in[a,b]$,

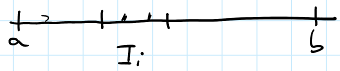
$|y-z|<\delta$ si ha $|f(y)-f(z)|<\varepsilon$

Scegliamo $D : |D| < \delta$ e cons.

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum \big(f(z_i) - f(y_i)\big)(x_i - x_{i-1}) \qquad (*)$$

$$x_i - x_{i-1} < \delta \Rightarrow |z_i - y_i| < \delta \Rightarrow f(z_i) - f(y_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$



$x_i - x_{i-1} < \delta$

$$(*) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Dunque $\underline{S}$ ed $\bar{S}$ sono contigui, il loro unico elemento di separazione è chiamato integrale di Riemann o integrale definito di f in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

f funzione integranda

a, b estremi di integrazione

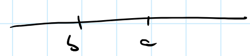
dx indica il nome della variabile

l'integrale non dipende dal nome della variabile $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \dots$

$$\forall D \qquad s(f,D) \le \int_a^b f(x)\,dx \le S(f,D)$$

$f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ cont. $\quad a, b \in (\alpha, \beta)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \text{int. di Riemann } \int_a^b f(x)\,dx & \text{se } a<b \\ \text{opposto dell'int. di R. } -\int_b^a f(x)\,dx & \text{se } a>b \\ 0 & \text{se } a=b \end{cases}$$

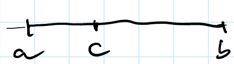


così abbiamo esteso il concetto di int. definito al caso in cui $a \ge b$

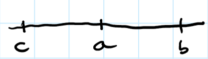
Proprietà dell'integrale definito

1) distributiva $\quad \int_a^b \big(c_1 f(x) + c_2 g(x)\big)\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$

2) additiva $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \forall a,b,c \in (\alpha,\beta)$



se è di Riemann (non lo dim.)



non è di Riemann

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \quad \text{infatti} \quad \int_c^b = \int_c^a + \int_a^b \Rightarrow \int_a^b = \int_c^b - \int_c^a \Rightarrow \text{TS.}$$

3) proprietà della media per l'int. di Riemann $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$ cont.

$$\text{TS} \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \qquad (*)$$

Dim. Basta scegliere $D = \{a; b\}$

Osserviamo che $\quad (*) \iff m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M \implies \exists\, c \in [a,b] : \dfrac{\int}{b-a} = c \implies$

$$\implies \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

4) prima prop. di monotonia per l'int. di Riemann

$$f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \qquad \text{infatti } m \ge 0$$

$$= 0 \iff f(x) = 0 \;\; \forall x \in [a,b] \qquad (\text{non è dim.})$$

5) seconda prop. di monotonia

$$f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

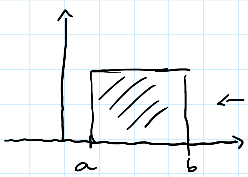
infatti $\quad 0 \le \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$

esempio di int. definito $\quad f(x) = h \quad \forall x \in [a,b] \quad (h \in \mathbb{R})$

dato D $\quad m_i = h \;\; \forall i \quad M_i = h \;\; \forall i \implies s(f, D) = \sum m_i (x_i - x_{i-1}) = h(b-a) \quad S(f,D) = h(b-a)$ $\qquad \underline{S} = \{h(b-a)\} \quad \overline{S} = \{h(b-a)\}$

$$\int_a^b h\,dx = h(b-a)$$

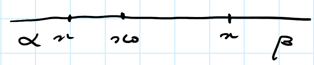
Se $h > 0$



$\leftarrow$ area $= h(b-a)$

FUNZIONE INTEGRALE

$f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continua $\qquad$ fissiamo $x_0 \in (\alpha, \beta)$



$\forall x \in (\alpha, \beta)$ cons. $\quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt \quad$ dipende infatti da x

F funzione integrale di punto iniziale $x_0 \qquad F : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$

$F(x) = \int_x^2 \sin t\,dt \quad$ non è una funz. int. $\qquad F(x) = -\int_2^x \sin t\,d$

$\uparrow$ funz. int.

$\int_2^{x^2+1} \sin t\,dt \qquad$ " $\quad$ " $\qquad$ è composta dalla funz. int. $\int_2^y \sin t\,dt$ e x^2+1

Cons. due funz. integrali $\quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt \quad$ e $\quad G(x) = \int_{x_1}^x f(t)\,dt \quad (x_0, x_1 \in (\alpha, \beta))$

$$F(x) = \int_{x_0}^x \cdots = \int_{x_0}^{x_1} \cdots + \int_{x_1}^x \cdots = G(x) + \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt}_{} \implies F(x) = G(x) + h$$

$\int_{x_0} \qquad \int_{x_0} \qquad \int_{x_1} \qquad \int_{x_0}$

↑
numero

due funz. integrali differiscono per una costante, ciò ci fa pensare che siano primitive di f.
Sarà vero ??

Teorema di derivazione della funz. integrale

IP $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ cont. $\qquad x_0 \in (\alpha, \beta)$

TS posto $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ in $[a, b]$, si ha $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

es. $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \Rightarrow F'(x) = \frac{\sin x}{x}$

DIM. sia $c \in (\alpha, \beta)$, dim. che $F'(c) = f(c)$

$$r(x) = \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{c}^{x} f(t)dt}{x - c} = \frac{\int_{x_0}^{x} \cdots + \int_{x}^{c} \cdots}{x - c} = \frac{\int_{x_0}^{c} f(t)\,dt}{x - c}$$