

Esempi di asintoto

e) funz. raz. fratte

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \quad \text{diverge per } x \rightarrow 3 \Rightarrow x=3 \text{ eq. asint. vert.}$$

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \quad (\text{ridotte ai minimi termini})$$

se $B(x)=0 \Rightarrow$ le rette di eq. $x=C$ e as. vert.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \quad y=2 \text{ eq. asint.}$$

orizz. destro e sinistro

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \quad \text{se } A \text{ e } B \text{ hanno lo stesso grado} \\ \Rightarrow \text{le rette di eq. } y = \frac{a_0}{b_0} \text{ e asintoto orizzontale destro e sinistro}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad y=0 \text{ eq. as.}$$

orizzontale destro e sinistro

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2-3x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x-3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1-2x^2+6x}{x-3} = 6$$

$$y = 2x+6 \quad \text{eq. as. obliq. di}$$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 - 3x} = +\infty$$

non c'è asint

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

se $A = B + 1 \rightarrow$ c'è asint obl dx e sx

se $A > B + 1 \rightarrow$ non c'è asint obl

Esempio $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 16}$

eq es verit: $x = 2$

$x = -2$

|| esiste: $y = 0$ obl e sx

$4 > 2 + 1 \Rightarrow$ non ci sono es obl e sx

$$f(x) = \frac{2x^4 + 1}{x^3 - 27}$$

eq es verit $x = 3$

$4 = 3 + 1 \rightarrow$ ci sono es obl dx e sx

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 1}{x^4 - 27x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^4 + 1}{x^3 - 27} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 + 1 - 2x^4 + 54x}{x^3 - 27} = 0$$

eq es obl dx e sx
 $y < 2x$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^4 + 1}{x^3 - 27} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x^4 + 1}{x^4 - 27x}$$

b) Funz. razionale $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ $A(x)$ polinomio di II grado
possiamo cercare solo asintoti obl perché A diverge per
 $x \rightarrow \pm\infty$

exemple

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} \quad \text{est def sur }]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

on cherche $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^2}} \rightarrow 1$

$$f(x) - 1 \cdot x = \sqrt{x^2 - 2x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x}$$

↑
multiplie num et den par
le somme

$$= \frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^2}} + \frac{x}{x}} \rightarrow -1 \quad \text{eq as. de ds } y = x - 1$$

on simistree

$(x \rightarrow -\infty)$ par signe le denom $-x > 0$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -\sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^2}} \rightarrow -1$$

$$f(x) - (-1) \cdot x = f(x) + x = \sqrt{x^2 - 2x} + x =$$

$$\frac{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)(\sqrt{x^2 - 2x} - x)}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} - x}$$

↑
mult num et den par

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^2}} + \frac{-x}{x}} \rightarrow 1 \quad \text{eq as. de ds sim. } y = -x + 1$$

as destra
($x \rightarrow +\infty$)

$$\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x} = \sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2}} \rightarrow 2$$

$$\sqrt{4x^2+x+1} - 2x = \frac{4x^2+x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2}+\frac{2x}{x}}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$\rightarrow \frac{1}{2}$ eq as abel da

as sinistra
($x \rightarrow -\infty$)

$$\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x} = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{-x} = -2$$

$$\sqrt{4x^2+x+1} + 2x = \frac{4x^2+x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x} = \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2}-\frac{2x}{x}}} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$\rightarrow -\frac{1}{2}$ eq as ab sim
 $y = -2x - \frac{1}{2}$

Esercizi vedere file prof.