

$$(a, b) \rightarrow a + bi$$

$$i = (0, 1) \quad i^2 = (-1, 0) = -1$$

$$z = (a, b) \quad \bar{z} = (a, -b)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$\frac{2-3i}{2+i} = \frac{(2-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4-3+(-6-2)i}{2^2 + 1^2} = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$$

$$z = a + bi = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \alpha = \operatorname{arg} z$$

$$a = |z| \cos \alpha$$

$$b = |z| \sin \alpha$$

$$\text{es: } z = 2 + 4i \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{53}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{53}} \quad \sin \alpha = \frac{b}{|z|} = \frac{4}{\sqrt{53}}$$

$$z = 1 - i \quad |z| = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha) \Rightarrow z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\sqrt[2]{z} = \pm \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\sqrt{-16} = \pm 4i$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{if } \Delta < 0 \quad + \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{-\Delta}$$

$$\text{es: } z^2 + 2z + 9 = 0$$

$$\Delta = -15 \quad z = -1 \pm i\sqrt{15}$$

$\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$
 \swarrow
 $\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}$

①

$$iz^2 + 2z - 2i = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{i} = \frac{-1 \pm i}{i} = -\frac{1}{i} \pm \frac{i}{i} = -1 \pm 1$$

②

$$z^2 - 2z + 2 + 9 = 0$$

$$z = -i \pm \sqrt{-1-4} = -i \pm i\sqrt{5} \quad \begin{matrix} \overset{i(-1 \pm \sqrt{5})}{\swarrow} \\ \underset{i(-1 - \sqrt{5})}{\searrow} \end{matrix}$$

(3)

$$z^2 - 2z + 3 = 0$$

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$(x - iy)^2 - 2(x + iy) + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2iy + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0 \\ -2xy - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0 \\ -2y(x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 0 \\ 1 - y^2 + 2 + 3 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

(A)

numer. sol ($\Delta < 0$ e si vuole che $x \in \mathbb{R}$)

(B)

$$\begin{aligned} y &= \pm \sqrt{6} \\ x &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} z &= -1 + \sqrt{6}i \\ z &= -1 - \sqrt{6}i \end{aligned}$$

(5)

$$z^2 - 2|z|^2 + 3z = 0$$

$$\text{I}^{\circ} \text{ modo } z = x + iy$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 - 2(x^2 + y^2) + 3(x + iy) &= 0 \Rightarrow \\ x^2 - y^2 + 2xy - 2x^2 - 2y^2 + 3x + 3iy &= 0 \\ \begin{cases} -x^2 - 3y + 3x = 0 \\ 2xy + 3y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 3x = 0 \\ y(2x + 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{4} + 3y^2 + \frac{9}{2} = 0 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -\frac{27}{12} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

men. sel

$z = 0$
$z = 3$

II° modo

$$z^2 - 2z\bar{z} + 3z = 0 \Rightarrow z(z - 2\bar{z} + 3) = 0 \quad z - 2\bar{z} + 3 = 0$$

$$x + iy - (x - iy) + 3 = 0$$

$$x + iy - 2x + 2iy + 3 = 0$$

$$\begin{cases} -x + 3 = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

(5)

$$|z|^2 - 2z\bar{z} + 3z = 0$$

$$\text{II modo } z\bar{z} - 2\bar{z}^2 + 3z = 0 \Rightarrow z(z - 2\bar{z} + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow z - 2\bar{z} + 3 = 0 \Rightarrow z = 3$$

(6)

$$iz\bar{z} - z = \frac{2}{2} \quad z \neq 0$$

$$z = x+iy \Rightarrow (z\bar{z}) = |z|^2$$

$$iz\bar{z} = -2z - 2 = 0$$

$$i(x^2 + y^2) - 2(x + iy) - 2 = 0$$

$$ix^2 + iy^2 - 2x - 2iy - 2 = 0$$

$$\begin{cases} -2x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1+i \end{array}$$

97

$$z^2 + 1 = \frac{2}{i} \Rightarrow i z^2 - \frac{2}{i} + i = 0 \quad z = x + iy$$

$$i(x^2 - y^2 + 2xy) - (x - iy) + i = 0$$

$$ix^2 - iy^2 - 2xy - x + iy + i = 0$$

$$\begin{cases} -2xy - x = 0 \\ x^2 - y^2 + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(2y + 1) = 0 \\ x^2 - y^2 + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$$

||

$$\swarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0 \end{cases}$$

||

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}i, \quad z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}i$$

 $\sqrt[3]{i}$

$$z = i \quad |z| = 1 \quad \arg z = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[3]{i} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{3} = w_k$$

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\sqrt[3]{2^7} \quad z = 2^{\frac{7}{3}} \quad |z| = 2^{\frac{7}{3}} \quad \arg z = 0$$

$$w_k = 3 \cdot \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$$

$$w_0 = 3$$

$$w_1 = 3 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \quad w_2 = \overline{w_1}$$

$$\sqrt[3]{8i} \quad |z| = 8 \quad \arg z = \frac{\pi}{2}$$

$$w_k = 2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$w_0 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \quad w_1 = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$w_2 = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \overline{w_1}$$

Polinomi:

$$P(x) = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_{n-1} x + q_n$$

$$q_0, \dots, q_n \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$n=0 \quad r(x)$$

$$r(x) q x^n + \dots + q_n$$

$$q(x) q_0 x^m + \dots + q_m$$

$$r(x) = q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = m$$

$$q_0 = b_0$$

$$\vdots$$

$$q_m = b_m$$

$A(x), B(x)$ polinomi $\exists Q(x) \in R(x)$ con resto

$$R \subset \text{gerendo } B \quad A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

$$x \cdot R(x) = 0 \quad A \text{ divisibile per } B$$

Theorema di Ruffini

A è div per $x - c \Leftrightarrow A(c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \forall c \quad A(c) = 0 \quad A(x) = (x - c) A_1(x)$$

grado $A_1 = \text{grado } A - 1$

$$\exists c_1 \quad A_1(c_1) = 0 \quad A(x) = (x - c_1)(x - c_2) A_2(x)$$

grado $A_2 = \text{grado } A - 2$

Procedendo allo stesso modo si trova

$$A(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)^k$$

equagliando i 2 membri si ha $k = e_0$

Ogni equazione algebrica di grado positivo m ammette m soluzioni reali o complesse distinte o coincidenti

Se $c_1 = c_2 = \dots = c_s$ si dice che c_i ha molteplicità

\rightarrow

(teorema fondamentale dell'algebra)

Se l'equazione ha i coefficienti reali, se c'è una soluzione $z = a + ib$

Allora anche $\bar{z} = a - ib$ è soluzione stessa moltiplicata

dunque se $A(x)$ è un polinomio a coeff reali

$$A(x) = a_0 (x - c_1)^{\gamma_1} (x - c_2)^{\gamma_2} \dots (x - c_k)^{\gamma_k}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k = n$$

se c_1, \dots, c_k sono reale allora sono finiti

se $c_1 = a + ib$ allora ci sono anche $c_2 = a - ib$

$$\begin{aligned} (x - c_1)(x - c_2) &= [x - (a + ib)][x - (a - ib)] \\ &= [(x - a) - ib][(x - a) + ib] = (x - a)^2 + b^2 \end{aligned}$$

Che è a coeff reali

\Rightarrow un pol e coeff reali si può sempre decomporre nel prodotto di fattori di I e II grado e coeff. reali.

funzione esponenziale nel campo complesso

$$z = x + iy \quad \text{Def } e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

(se $z = x$ si ritrova e^x)

$$\begin{aligned} z = iy &\quad e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \text{ossv } \operatorname{re} y = \pi \\ (x=0) &\quad e^{i\pi} = 1 + i = 0 \end{aligned}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Formule di Eulero

Capitolo 2

Succezioni

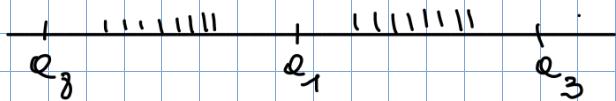
Def

Succezione è una funzione definita in \mathbb{N}

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad m \in \mathbb{N} \rightarrow f(m) = a_m \in \mathbb{R}$$

si fa considerare la successione con le sue immagini $\{a_m\}$

$$(\{a_m : m \in \mathbb{N}\})$$



$$\text{es: } a_m = k \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ costante}$$

$$a_m = m$$

$$a_m = \frac{m^2 - \sqrt{m}}{m+2}$$

$$a_m = \frac{1}{m}$$

$$a_m = (-1)^m$$

1 m pari
-1 m dispari

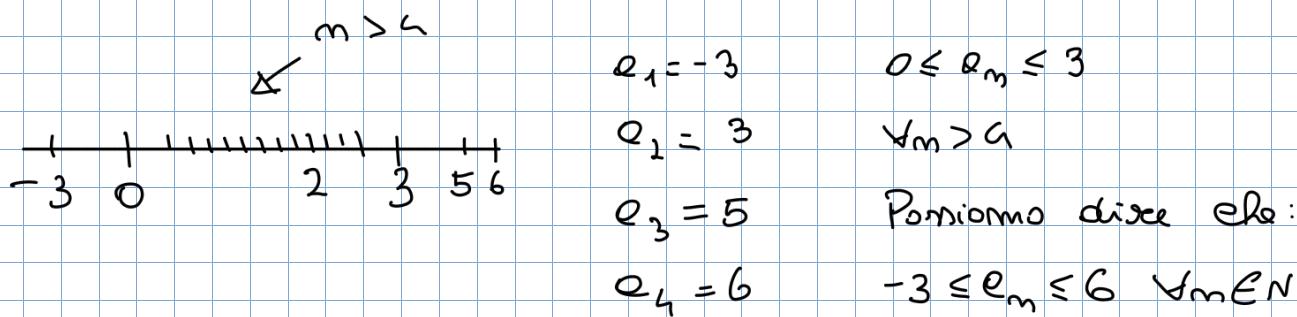
Una proprietà P è verificata definitivamente se $\exists d \in \mathbb{N}$:

se $m > d$ l'elemento em verifica P

es: $a_m = m - 6 \quad \forall a_m \geq 0 \quad (d=6)$

Definizione

$\{a_m\}$ limitata se $\exists q, b \in \mathbb{R} \quad q \leq a_m \leq b \quad \forall m \in \mathbb{N}$



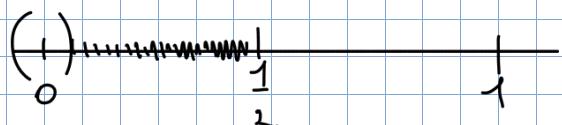
$\{a_m\}$ è D limitata se abbiamo capito che è limitata

Prop: $\{a_m\} \rightarrow$ limitata \Rightarrow limitata

$$q \leq a_m \leq b \quad \forall m > d \quad \text{cond.} \quad h = \min(q, q_1, q_2, \dots, q_d)$$
$$k = \max(b, q_1, q_2, \dots, q_d)$$

Si ha $h \leq a_m \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$a_m = \frac{1}{m}$$



$$\frac{1}{n} < x \quad \text{e} \quad \frac{1}{x}$$

Definizione

Limiti di une successioni

$\{x_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Def: $l \in \mathbb{R}$ è il limite di $\{x_n\}$ o che $\{x_n\}$ tende a convergere ad l se si scrive $x_n \rightarrow l$ oppure $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \text{ si ha } |x_n - l| < \epsilon$

Esempio:

$$x_n = h \quad \forall n \Rightarrow x_n \rightarrow h \quad h - \epsilon < x_n < h + \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad -\epsilon < x_n < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

$$x_n = \frac{2n}{n+1} \rightarrow 2$$

$$\text{Dim: } 2 - \epsilon < \frac{2n}{n+1} < 2 + \epsilon \quad D.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2n}{n+1} > 2 - \epsilon \\ \frac{2n}{n+1} < 2 + \epsilon \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2n}{n+1} - 2 + \epsilon > 0 \\ \frac{2n}{n+1} - 2 - \epsilon < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2n - 2n - 2 + \epsilon}{n+1} > 0 \\ 2 - 2n - 2 - \epsilon < 0 \end{array} \right. \frac{-\epsilon}{n} < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n > 2 - \epsilon \Rightarrow n > \frac{2 - \epsilon}{\epsilon} \text{ vero } D \\ x_n > -2 - \epsilon \text{ vero } \forall n \end{array} \right.$$

Definizione

$\{a_n\}$ tende a divergere a $+\infty (-\infty)$ se
 $\forall K > 0 \quad \exists L \in \mathbb{N}: \text{se } n > L \text{ si ha } a_n > K \quad (a_n < -K)$

es: $1 - n^2 \rightarrow -\infty$ infatti $1 - n^2 < -K \Rightarrow n^2 > K + 1$
 $n > \sqrt{K + 1}$

verso \triangleright

$\frac{n^2}{n+1} \rightarrow +\infty$ infatti $\frac{n^2}{n+1} > K \rightarrow n^2 - Kn - 1 > 0$

com $x^2 - Kx - 1 > 0 \quad \frac{K \pm \sqrt{K^2 + 4}}{2}$

$n > \frac{K + \sqrt{K^2 + 4}}{2} \quad \vee \quad n < \frac{K - \sqrt{K^2 + 4}}{2}$

$\forall n > \frac{K + \sqrt{K^2 + 4}}{2}$ le tesi si verificano

Definizione

$\{a_n\}$ converge se è convergente o divergente

$\{a_n\}$ oscillanti se non rispetta es: $a_n = (-1)^n$



$a_n > K \triangleright ? \quad \text{No}$

$a_n < -K \triangleright ? \quad \text{No}$

$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \triangleright ?$

potrebbe esser $l = 1$ oppure $l = -1$

se $l = 1$



$\epsilon = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} < a_n < \frac{3}{2} \triangleright$

impossibile perché per n div sp $a_n = -1$

se $l = -1$ analogamente

Altri esempi

$$e_m = \sin m, e_m = \cos m, e_m = \log m.$$

TEOREMA DELL' UNICITÀ DEL LIMITE

Se e_m ha un limite il suo limite è unico

Dim:

Supponiamo $e_m \rightarrow l, e_n \rightarrow L$ con $l < L$

$$\frac{(-\varepsilon)}{l-\varepsilon} \quad \frac{(+\varepsilon)}{l+\varepsilon} \quad l-\varepsilon < l < l+\varepsilon$$

Scegliiamo $\varepsilon > 0$: $l + \varepsilon < L - \varepsilon$

$$0 < \varepsilon < \frac{L-l}{2}$$

Δ : $l - \varepsilon < e_m < l + \varepsilon$ ($m > d$)

Δ : $L - \varepsilon < e_m < L + \varepsilon$ ($m > \beta$)

Se $m > \max(d, \beta)$

$$l - \varepsilon < e_m < l + \varepsilon < L - \varepsilon < e_m < L + \varepsilon$$

Assurdo

Teorema delle perennanze del segno

Se $e_m \rightarrow l > 0$

oppure $e_m \rightarrow +\infty \Rightarrow e_m > 0 \forall$

Se $e_m \rightarrow l < 0$

oppure $e_m \rightarrow -\infty \Rightarrow e_m < 0 \forall$

$$\frac{l-\varepsilon}{0} \quad \frac{(+\varepsilon)}{l}$$

scelto ε tale che $l - \varepsilon > 0$

$$\Delta \quad l - \varepsilon < e_m < l + \varepsilon$$

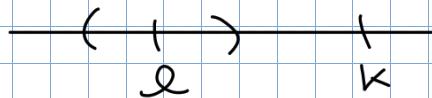
Ne segue che se $e_m > 0 \quad \forall m \Rightarrow$ non può tendere a $l < 0$ né a $+\infty$ può tendere a zero, e $l > 0, e_1 + \infty$

Teoreme delle permonenze del segno generalizzato

se $a_m \rightarrow l$

e $l < K \Rightarrow b_m < K$

e $l > h \Rightarrow b_m > h$



Teoremi di confronto

- per succ. divergenti

- per succ. convergenti

1): Se $a_m \leq b_m$: allora $a_m \rightarrow +\infty \Rightarrow$ anche $b_m \rightarrow +\infty$
 $\Rightarrow b_m \rightarrow -\infty \Rightarrow$ anche $a_m \rightarrow -\infty$

infatti: i) $\Rightarrow a_m > K \Rightarrow b_m \geq a_m > K$
ii) $\Rightarrow b_m < -K \Rightarrow a_m \leq b_m < -K$

2) Se $a_m \leq b_m \leq c_m$, $a_m \rightarrow l$, $c_m \rightarrow l$ allora
anche $b_m \rightarrow l$

▼ mod

(teoreme dei confronti)

infatti $\Rightarrow l - \varepsilon < a_m < l + \varepsilon \quad (m > \alpha)$

$\Rightarrow l - \varepsilon < b_m < l + \varepsilon \quad (m > \beta)$

se $m > \max(\alpha, \beta)$ $l - \varepsilon < a_m < b_m \leq c_m < l + \varepsilon$

