3 marzo 2025
lunedì 3 marzo 2025 13:01

OPERAZIONI FRA INSIEMI

$a \in A \qquad A \subseteq B \qquad \emptyset$

$A \cup B \qquad A \cap B \qquad A \setminus B \neq B \setminus A$

P_1, P_2 prop. degli elem. di A

$P_1 \to B \subseteq A$

$P_2 \to C \subseteq A$

$P_2 \Rightarrow P_1$ implica

P_2 è cond. suffic. per P_1

P_1 " necessaria per P_2

P_1 : numero > 5

P_2 : " > 10

$C \subseteq B$

$\exists \qquad \forall$

a DEF. $a + n$ $\forall n$ naturale

$$\begin{cases} a + 0 = a \\ a + \bar{n} = \overline{a + n} \end{cases}$$

$\bar{n}$ = successivo di n

$\bar{0} = 1 \qquad a + 1 = a + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$

$$\begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot \bar{n} = a \cdot n + a \end{cases}$$

$a < b$ se $\exists\, c : a + c = b$

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; \dots\} \qquad \mathbb{N} = \{1; \dots\}$

$n \in \mathbb{N} \to$ $+n$ positivo, $-n$ negativo

$\mathbb{Z} = \{0; +n; -n : n \in \mathbb{N}\}$

negativo

$\pm n \to \mp n$ opposto di $\pm n$

$3 + 4 = 7$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$(+3) + (+4) = +7$

$n \to +n$

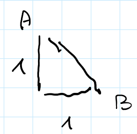
$\in \mathbb{N} \qquad \in \mathbb{Z}$

$7 = +7$ IDENTIFICAZIONE

$\mathbb{Q} = \left\{ 0 ; \pm \frac{a}{b} : \pm a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$

$\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$?

$2 \cdot 5 < 4 \cdot 3$



$AB^2 = 2$

$\frac{3}{4} = 0,75$

$30 \,|\, 4$; $0,75\bar{0}$; $\cancel{2}20$

$\frac{3}{7}$

$30 \,|\, 7$; $0,4\overline{285714}$

2
6
4
5
1
3
2

$\pm \frac{a}{b} = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots \qquad a_0 \in \mathbb{N}_0 \qquad a_1, a_2, \ldots \in \{0; \ldots; 9\}$

rappr. decimale periodica

$+2,14114111444 \ldots\ldots$

$\mathbb{R} = \{ 0 ; \pm a_0, a_1 \ldots\ldots : a_0 \in \mathbb{N}_0, \; a_1, \ldots \in \{0; \ldots; 9\} \}$

NUMERI REALI $\qquad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

DEF $\quad -b_0, b_1 \ldots\ldots < 0 < +a_0, a_1 \ldots$

$+3,82465 \ldots < +3,82741 \ldots$

$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$

$x = \pm a_0, \ldots \;\to\; -x = \mp a_0, \ldots$ OPPOSTO

$x = \pm a_0, \dots \quad \to \quad -x = \mp a_0, \dots$ OPPOSTO

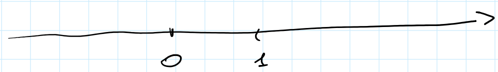
$-b_0, b_1 \dots < -a_0, a_1 \dots$ se $+b_0, \dots > +a_0, \dots$

$x = +7,24856\dots \qquad y = +4,37668\dots$

$$\begin{array}{r} +7,2+ \\ 4,3 \\ \hline 11,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7,24 \\ 4,37 \\ \hline 11,61 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7,248 \\ 4,376 \\ \hline 11,624 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7,2485 \\ 4,3766 \\ \hline 11,6251 \end{array}$$

DEF $x + y = +11,62\dots$

RAPPR GEOM DI $\mathbb{R}$ è una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}$ e l'ins dei punti di una retta su cui è fissato un sistema di ascisse



TEOREMA DI DENSITÀ (di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) in $\mathbb{R}$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, esistono infiniti $r \in \mathbb{Q}$ e infiniti $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $a < r < b$, $a < s < b$

tali che

L'insieme dei numeri compresi fra a e b si chiama INTERVALLO di ESTREMI a, b

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ INT. CHIUSO

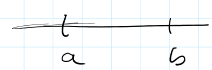
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ " APERTO

$[a, b[$

$]a, b]$

SEMICHIUSI O SEMIAPERTI

INTERV. LIMITATI



$b - a$ = ampiezza dell'intervallo

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$ NON LIMIT. SUPERIORM.

$[a, +\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ NON LIMIT. SUPERIORM.

$]a, +\infty[$ NON LIMIT INFER.

$x_1 = +0, a_{11} \, a_{12} \dots$

$x_2 = +0, a_{21} \, a_{22} \dots$

$[0,1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

costruisco $x = +0, b_1 \, b_2 \dots \in [0,1]$ però

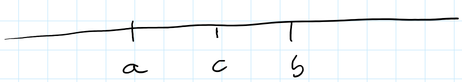
$b_1 \neq a_{11} \Rightarrow x \neq x_1$

$b_2 \neq a_{22} \Rightarrow x \neq x_2$

$\dots$

$b_n \neq a_{nn} \Rightarrow x \neq x_n \quad \forall n \Rightarrow x \notin [0,1]$

POTENZA DI $\mathbb{R}$ = POTENZA DEL CONTINUO



$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$c - a = b - c = r \Rightarrow a = c - r, \quad b = c + r$$

$$(a, b) = (c - r, c + r)$$

$c \in \mathbb{R} \quad r > 0 \qquad]c - r, c + r[\; = I_r(c) = B(c, r)$

INTORNO DI C DI RAGGIO r

$X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad X \neq \emptyset$ INSIEME NUMERICO

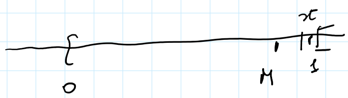
MASSIMO DI X $\quad \max X = M \in X \; : \; M \geq x \quad \forall x \in X$

il massimo è unico: se ce ne fossero due, M_1 e M_2

$M_1, M_2 \in X$ $\qquad M_1 \geq M_2$

$M_2 \geq M_1 \Rightarrow M_1 = M_2$

$X = [0, 1[$



$M < 1$

$M \geq x \quad \forall x \in [0,1[$

dato $\bar{x}$: $M < \bar{x} < 1$

si ha $\bar{x} \in [0,1[$

$\bar{x} > M$

$X = [0, 1]$ $\qquad 1 = \max X$

$m = \min X$ $\quad$ se $\; m \in X$

$m \leq x \quad \forall x \in X$

se esiste, è unico.

$k \in \mathbb{R}$ MAGGIORANTE PER X se $k \geq x \quad \forall x \in X$

$\bar{M}_X$ = ins. dei maggioranti

$\max X \in \bar{M}_X$

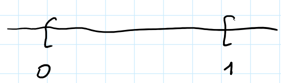
se $k \in \bar{M}_X$ e $k' > k \Rightarrow k' \in \bar{M}_X$

$k \notin \bar{M}_X$ se $\exists x \in X : x > k$

$X = \mathbb{N}$ $\qquad \bar{M}_X = \emptyset$

$\bar{M}_X = \emptyset$ se $\forall k > 0 \; \exists x \in X : x > k$

$X = [0,1[$



$\bar{M}_X = [1, +\infty[$ $\qquad 1 = \min \bar{M}_X$

DEF. se $\bar{M}_X \neq \emptyset$ si def. $\sup X = \min \bar{M}_X$

estremo superiore

si può dimostr. che esiste

se $\bar{M}_X = \emptyset$ si def $\sup X = +\infty$

DEF. X LIMITATO SUPERIORMENTE se $\bar{M}_X \neq \emptyset$