

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vogliamo trovare le matrice diagonali che rappresente l'omorfismo in modo che la moltiplicazione sia più semplice

V spazio vettoriale $f: V \rightarrow V$ endo

Finora B base di V , $n = \dim V$

f è rappresentata $\in [\pi(f)]_B^B \in M_{n,n}(R)$

Domande: esiste una base B tale che $[\pi(f)]_B^B$ è diagonale?

Definizione

Se una tale base esiste allora f si dice diagonalizzabile

B' base di V

$$[\pi(f)]_{B'}^{B'} = B^{-1} [\pi(f)]_B^B \cdot B$$

Definizione

Una matrice $M \in M_{n,n}(R)$ è diagonalizzabile se $\exists B \in M_{n,n}(R)$ invertibile tale che $B^{-1} \cdot M \cdot B$ è diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-esimo} = \lambda \cdot e_i$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i\text{-esimo posto} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$M \in \mathbb{R}^{n,n}$ Corrispondono i vettori $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $M \cdot v = \lambda \cdot v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot v$$

$$Mv - \lambda v = 0$$

Continuo

$$Mv - \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot v = (M - \lambda \text{id}_m) \cdot v = 0$$

Questo è una matrice alle quale stiamo togliendo λ dalla diagonale

Se $v \cdot (M - \lambda \text{id}_m) = 0$ vuol dire che v si trova nel $\ker(M - \lambda \text{id}_m)$ e quindi che $V_\lambda \subseteq V$

Per quali valori di λ , $v_\lambda \neq 0$ ci interessano i valori di λ che portano il \ker ad essere $\neq \{0\}$ e quindi quando v non è nel \ker

Un **autovettore** di M è un $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$V_\lambda \neq \{0\}$$

Se λ è un autovettore, $v \in V_\lambda$ è detto un **autovettore** di M relativo a λ

V_λ è detto **autospazio** di M relativo a λ

Quindi dobbiamo studiare per quando mom è lontano
e quindi quando il tempo mom è minimo

$$\ker = \{0\} \Leftrightarrow \text{rk } M \text{ è massimo} \Leftrightarrow \det \neq 0$$

$$\ker \neq \{0\} \Leftrightarrow \text{rk } M \text{ mom è max} \Leftrightarrow \det = 0$$

$$\det(M - \lambda \cdot \text{id}_m) = P(\lambda) = 0$$

questo è un'equazione

Lo polinomio caratteristico di M

Esempio:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{quindi } M - \lambda \cdot \text{id}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 5 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Con Sarrus: } \det(M - \lambda \cdot \text{id}_3) &= (4-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + (2)(3)(5) \\ &\quad + (-2)(1)(2) - (2)(1-\lambda)(5) - (-2)(1)(-1-\lambda) - (4-\lambda)(3)(2) \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 1) - 30 - 4 + 10(1-\lambda) - 2 - 2\lambda - 6(4-\lambda) = \\ &= 4\lambda^2 - 4 - \lambda^3 - \lambda - 34 + 10 - 10\lambda - 2 - 2\lambda - 24 + 6\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda - 20 \end{aligned}$$

→ calcolando le soluzioni di questo polinomio troveremo gli autovettori

autosoluzioni

↓
polinomio caratteristico di M

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow A - \lambda \cdot \text{id}_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (1-\lambda)(a-\lambda) - 6 = a - \lambda - a\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} = \boxed{\frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}}$$

questi autovettori rendono
 $\ker X \neq \{0\}$

$$\lambda = \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{5 + \sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 1 - \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$$

Se calcoli il $\ker X$ viene $\neq \{0\}$

Proposizione

Gli autovettori X sono le soluzioni dell'equazione $P(\lambda) = 0$

Esempio

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow M(f) \quad \text{---}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{N}(f) - \lambda \cdot \text{id}_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \lambda^2 + 1$$

sol: $\exists x \in \mathbb{R}$

quindi f non è diagonalizzabile

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A - \lambda \cdot \text{id}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (-\lambda)(4-\lambda) - (-4) = -4\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 4(1)(4) = 0$$

$$\lambda = \frac{+4 \pm 0}{2} = \underbrace{\lambda}_{2}$$

$$\lambda = 2 \quad \text{con } m(2) = 2$$

\hookrightarrow molteplicità algebrica di 2
ovvero il numero di occorrenze
di 2 nelle soluzioni

Teorema di Ruffini

$$P(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ polinomio } e \in \mathbb{R} \quad P(e) = 0 \Leftrightarrow x - e \mid P(x)$$

$$(x-e)^3 \mid P(x) ?$$

$$m(e) = \max \left\{ m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } (x-e)^m \mid P(x) \right\}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow A - \lambda \cdot \text{id}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -5-\lambda & 8 \\ -4 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (-5-\lambda)(7-\lambda) - (-32) = -35 + 5\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 32 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Delta = 25^2 - 4 \cdot 0 = 4 - 4(-3) = 16$$

$$\lambda = \frac{+2 \pm 4}{2} \quad \begin{matrix} -1 \\ +3 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = +3$$

$$\underbrace{m(-1)=1}_{\downarrow} \quad \underbrace{m(3)=1}_{\downarrow}$$

multiplete

$$\lambda = 3 \Rightarrow \ker \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{G-J}}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ \end{cases}$$

restituiseo 3 a λ

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Downarrow \\ y = x = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 8 \\ -4 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{entonces } 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \text{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \stackrel{G-J}{=} \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ 0 = 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ y = y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ y = 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 + 8 \\ -8 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ossia } -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } \mathbb{R}^2 \quad \text{ipotesi}$$

rispetto alle basi standard

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5x + 8y \\ -4x + 7y \end{pmatrix}$$

rispetto a B?

$$[m(f)]_B^B$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_B^B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_B^B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Voglio scrivere $\begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$ rispetto alle basi B

$\text{Im} \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$ è upnde e $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ fai

ve scatto come combinafi
one lineare dei vettori
delle basi di destinazione

$$\text{quindi } [m(f)]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il perché di questi
risultati è riportato
alle fine

teorema:

Se l'unione delle basi degli autospazi forme una base di B allora f è diagonalizzabile

$$A \text{ è diagonalizzabile se } \exists B \text{ t.c. } B^{-1} A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = c_1 + 2c_2 \\ y = c_1 + c_2 \end{array} \rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 3 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \begin{cases} x - c_2 + 2c_2 = 3 \\ c_1 = 3 - c_2 \end{cases} \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = c_1 + 2c_2 \\ -1 = c_1 + c_2 \end{cases} \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 2 = 0 \\ c_1 + c_2 + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} -c_2 - 1 + 2c_2 + 2 = 0 \\ c_1 = -c_2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

