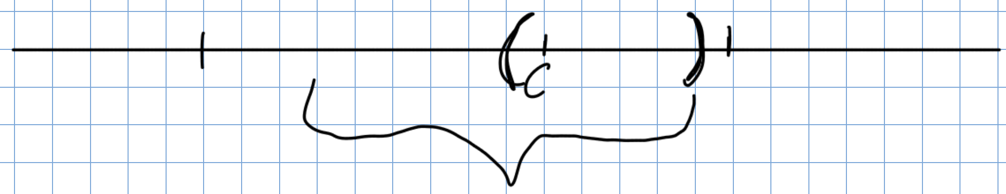


$X = (a,b)$ intervallo limitato

$int(X) =]a,b[$

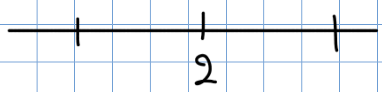
$int(X) \subseteq X$

$= \iff X$ è aperto

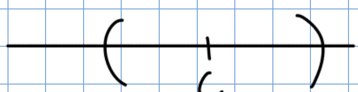
es

$X = \{c\}$

$X = \mathbb{N}$



$X = \mathbb{Q}$



$X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

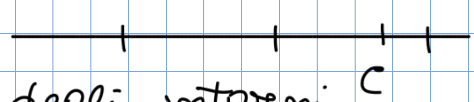
Punto di accumulazione

$c \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per X se $\forall r > 0$ in $]c-r, c+r[$ $\exists x \in X : x \neq c$

$D(X)$ = ins dei punti di acc. DERIVATO DI X

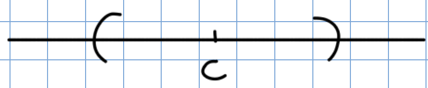
Osserv. se $c \in D(X)$ in ogni suo intorno ci sono infiniti elementi di X $\Rightarrow$ un insieme finito non ha punti di acc.

se $X = \mathbb{N}$ $D(X) \neq \emptyset$



mi serve che c abbia degli intorni con infiniti numeri naturali le stesse cose vale

$X = \mathbb{Q}$ $\qquad$ $D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$



$X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\qquad$ $D(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

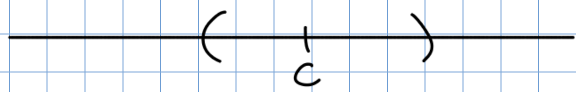
se $c \in X$ ma $c \notin D(X)$ c si chiama punto isolato

es: $X = ([0,1] \cup \{4\})$

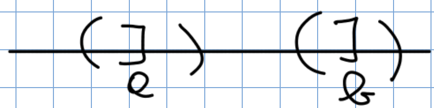
c isolato se $\exists\ r>0 :$ $\quad]c-r, c+r[\cap X = \{c\}$

$X = (a,b)$ $\qquad D(X) = [a,b]$ infatti

$c \in \operatorname{int}(X) \Rightarrow c \in D(X)$



$a, b \in D(X)$



$F(X)$ = frontiera di X

$c \in F(X)$ se $\forall r>0$ in $]c-r, c+r[$ ci sono elementi di X ed elem $\notin X$

Relazione

$c \in \operatorname{int}(X) \Rightarrow c \in D(X)$

$c \in F(X) \Rightarrow c \notin \operatorname{int}(X)$

$c \in \operatorname{int}(X) \Rightarrow c \notin F(X)$

c isolato $\Rightarrow c \notin D(X)$, $c \in F(X)$

$c \in D(X) \Rightarrow c \in F(X)$?

Non sempre $\quad c \in \operatorname{int}(X)$

$c \in F(X) \Rightarrow c \in D(X)$ Non sempre, es: c è isolato

Def: X chiuso se $\mathbb{R} \setminus X$ è aperto

$\mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow \emptyset$ chiuso

$\emptyset$ aperto $\Rightarrow \mathbb{R}$ chiuso

$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono gli unici insiemi aperti e chiusi e sono gli unici ins. ad avere frontiera vuota

Def: $\bar{X} = X \cup D(X) = X \cup F(X)$

$\bar{X}$ è chiuso

X chiuso $\Leftrightarrow X = \bar{X}$

Argomenti importanti fino ad adesso

Punto di acc, punto interno, insieme vuoto/chiuso

$a, b \in \mathbb{N}$ a^b si può fare $\forall a \in \mathbb{N}$
$\forall b \in \mathbb{N}_0$

Definizione: $a^0 = 1$
$a^{n+1} = a^n \cdot a$

Proprietà

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
$(a^b)^c = a^{bc}$
$a^b c^b = (ac)^b$

$a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ Def: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ Def: a^n e $\underline{a^{-n}}$ come nel caso in cui $a \in \mathbb{N}$

$\hookrightarrow a^{-n}$ solo se $a \neq 0$

$a^{\frac{m}{n}}$ si può fare sempre?

teorema della radice n-esima aritmetica

Sia $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, esiste uno e uno solo $b > 0$: $b^n = a$ $\qquad b = \sqrt[n]{a}$

Discussione dell'equazione binomia $x^n = a$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ quante sol ha l'eq?

$a > 0$ una sol > 0 $n = \sqrt[n]{a}$

$n = 0$ non è sol.

sia $n < 0$ una sol

Consideriamo

$-x > 0$ e calcoliamo $(-x)^n = \underset{a}{(-1)^n} = \begin{cases} a \\ -a \end{cases}$

n pari $\Rightarrow (-x)^n = a$ ma $-x > 0 \Rightarrow -x = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x = -\sqrt[n]{a}$

n dispari $\Rightarrow (-x)^n = -a \Rightarrow$ nessuna sol neg

$a = 0 \qquad x = 0$ unica sol

$a < 0 \qquad x = 0$ non è sol

$\qquad\qquad x > 0$ // // //

sia $x < 0$ una sol e cons. $(-x)^n \begin{cases} a & \text{se } n \text{ è pari} \\ -a & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

n pari $\quad (-x)^n = a \Rightarrow$ nessuna sol

n dispari $\quad (-x)^n = -a \Rightarrow -x = \sqrt[n]{-a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{-a}$

es: $\sqrt[3]{27} = 3 \quad \sqrt[3]{-27} = -3 = -\sqrt[3]{-(-27)}$

$x^n = a$

$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$
$x = 0$	$\pm\sqrt[n]{a}$	n. p.
	$\sqrt[n]{a}$	$-\sqrt[n]{-(-a)}$

$\sqrt[n]{0} = 0$

$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a}$

$a < 0$, n dispari

Torniamo alle potenze

$n \in \mathbb{N} \qquad$ Def: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a \geq 0$

$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \qquad$ Def: $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$a \geq 0$ se $\frac{m}{n} > 0$

$a > 0$ se $\frac{m}{n} < 0$

$s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\qquad s = \pm s_0, s_1 s_2$

$a > 0$ se $s < 0$

$a \geq 0$ se $s > 0$

es $2^{\pi} \longrightarrow 2^{3,1}$

$2^{3,14}$

$2^{3,141}$

si procede per stabilizzazione

se $a < 0$, $n \in \mathbb{N}$, n dispari $a^n < 0$

in tutti gli altri casi $a^n > 0$ $\forall a > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$4 > 1$ $\qquad 4^2 > 1$ $\qquad$ se $x > 0 \Rightarrow a^x > 1$ se $a > 1$

$4^{-2} < 1$ $\qquad a^x < 1$ se $a < 1$

$\frac{1}{4} < 1$ $\qquad \left(\frac{1}{4}\right)^2 < 1$ $\qquad$ se $x < 0 \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} > 1$ $\qquad a^x < 1$ se $a > 1$

$a^x > 1$ se $a < 1$

eq $a^x = b$ $\qquad a > 0$ $\qquad a \neq 1$

$b > 0$

Teorema dell'esistenza del logaritmo

Dato $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$ esiste uno e uno solo $x \in \mathbb{R}$: $a^x = b$ $\qquad x = \log_a b$

Definizione $a^{\log_a b} = b$

Proprietà dei logaritmi

$\log_a a = 1$ $\qquad\qquad$ $\log_a 1 = 0$

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a b^c = \log_a b$

$\log_a b = (\log_a c)(\log_c b)$

$1 = \log_a a = (\log_a b)(\log_b a) \Rightarrow \log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

$\log_a b > 0 \iff$ a, b sono entrambi >1

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ // $\qquad$ // $\qquad$ <1

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ $\qquad\qquad$ $\log_4 \frac{1}{4} = -1$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ $\qquad\qquad$ $\log_2 4 = 2$

Funzioni

Dati 2 insiemi non vuoti A e B e f criterio che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elem di B

$f: A \to B$ "f definita in A a valori in B"

A dominio (ins. di definizione)

B codominio

f legge di definizione

$x \in A \to f(x) \in B$ valore della funzione

$\{f(x) : x \in A\} = f(A)$ immagine di F

se $f(A) = B$ f suriettiva (su tutto B)

$y \in B \quad f^{-1}(y) \{ x \in A : f(x) = y \}$ imm inversa di y

se $Y \subseteq B \quad f^{-1}(Y) = \{ x \in A : f(x) \in Y \}$ //

se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ iniettiva / invertibile

allora $\forall y \in f(A) \; \exists$ un unico $x \in A : f(x) = y$

in questo caso si costruisce $f^{-1} : f(A) \to A$

$f^{-1}(y) =$ l'unico $x \in A : f(x) = y$

funzione inversa

$f : A \to f(A)$

$f^{-1} : f(A) \to A$

Altre nozioni generali:

$f : A \to B \qquad g(f) = \{ (x, f(x)) : x \in A \} \subseteq A \times B$

GRAFICO

Funz composte

$f : A \to B$

$g : C \to A$

$f : C \to B$

$x \in C \to g(c) \subseteq A \to f(g(c)) \subseteq B$

$f(c)$

f: funzione esterna

g: // interna

funzioni reali di variabile reale

$X \subseteq \mathbb{R} \qquad f : X \to \mathbb{R}$

condizione esistenza ?

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x+1}}$$

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} \neq 0 \end{cases} \quad x > -1$$

$X =]-1, +\infty[$

$f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$

Proprietà analitiche delle funzioni

$X \subseteq \mathbb{R}$ $f: X \to \mathbb{R}$ $f(X) \subseteq \mathbb{R}$

Definizione: f limitata se lo è $f(X)$ cioè

$\exists\, a, b \in \mathbb{R} : a \leq f(x) < b \quad \forall x \in X$

$\sup f = \sup f(X)$

$\inf f = \inf f(X)$

se $\exists\, M = \max f(X)$ $M = \max f$

massimo assoluto di f in X

allo stesso modo minimo assoluto

se $M = f(x)$ x = punto di massimo

se $m = f(x)$ x = " di minimo

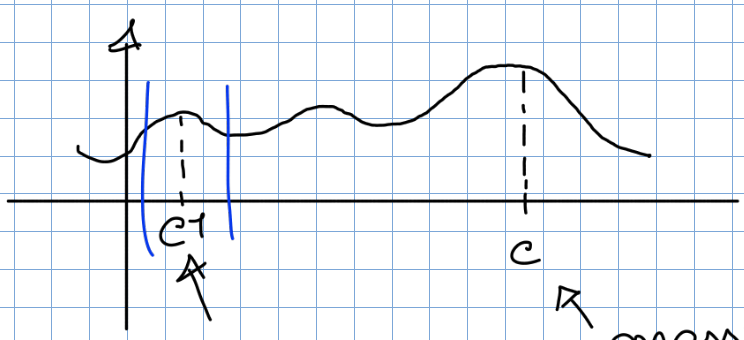
il massimo è uno solo, i punti di massimo possono essere tanti

massimo e minimo assoluti = estremi assoluti

estremi relativi o locali:

$c \in X$ punto di minimo (massimo) relativo se

$\exists\, r > 0$: se $x \in X \cap B(c, r)$ se $h <$ $f(x) \geq f(c)$
$(\leq)$



massimo relativo rispetto all'intorno C^1

massimo assoluto

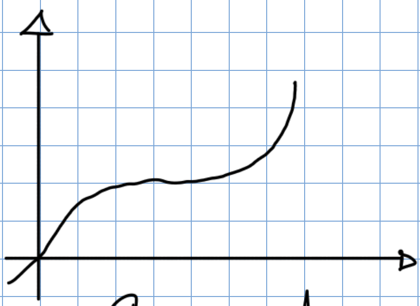
Monotonia

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ se $x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ f crescente

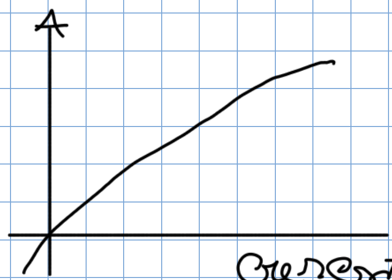
" $f(x) < f(y)$ " " strettamente

" $f(x) \geq f(y)$ f decrescente

" $f(x) > f(y)$ f decrescente strettamente



Crescente



Crescente strettamente

Se f è strett. monotone allora è invertibile e la sua funzione inversa ha lo stesso tipo di monotonia (dimostrare per esercizio)