$(a,b) \rightarrow a+ib$ $\qquad$ $i=(0,1)$ $\quad$ $i^2=(-1,0)=-1$

$z=(a,b)$ $\quad$ $\overline{z}=(a,-b)$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$z\overline{z} = |z|^2$

$$\frac{2-3i}{2+i} = \frac{(2-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4-3+(-6-2)i}{2^2+1^2} = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$$

$z = a+ib = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $\quad$ $\alpha = \arg z$

$a = |z|\cos\alpha$

$b = |z| \operatorname{sen}\alpha$

es: $z = 2+7i$ $\qquad$ $|z| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{53}}$ $\qquad$ $\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{53}}$

$z = 1-i$ $\qquad$ $|z| = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$

$k = 0, 1; \dots; n-1$

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sqrt{-16} = \pm 4i$$

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

se $\Delta < 0 \quad +\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{-\Delta}$

es: $z^2 + z + 4 = 0$

$\Delta = -15 \qquad z = -1 \pm i\sqrt{15} \; \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{15}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$

1

$iz^2 + 2z - 2i = 0$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{i} = \frac{-1 \pm i}{i} = -\frac{1}{i} \pm \frac{i}{i} = i \pm 1$$

2

$z^2 - 2i + z + 4 = 0$

$z = -i \pm \sqrt{-1-4} = i \pm i\sqrt{5} \; \begin{cases} i(-1 \pm \sqrt{5}) \\ i(-1 - \sqrt{5}) \end{cases}$

(3)

$$\bar{z}^2 - 2z + 3 = 0$$

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$(x-iy)^2 - 2(x+iy) + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 2ixy - 2x - 2iy + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0 \\ -2xy - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0 \\ -2y(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} & (A) \\ \begin{cases} 1 - y^2 + 2 + 3 = 0 \\ x = -1 \end{cases} & (B) \end{cases}$$

(A)

non. sol ($\Delta < 0$ e si vuole che $x \in R$)

(B)

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{6} \\ x &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} z &= -1 + \sqrt{6}\,i \\ z &= 1 - \sqrt{6}\,i \end{aligned}$$

(4)

$$z^2 - 2|z|^2 + 3z = 0$$

I° modo $\quad z = x + iy$

$\quad |z|^2 = x^2 + y^2$

$$(x+iy)^2 - 2(x^2+y^2) + 3(x+iy) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy - 2x^2 - 2y^2 + 3x + 3iy = 0$$

$$\begin{cases} -x^2 - 3y + 3x = 0 \\ 2xy + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 3x = 0 \\ y(2x+3) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee\ x = 3 \\ \begin{cases} \frac{9}{4} + 3y^2 + \frac{9}{2} = 0 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -\frac{27}{12} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ non. sol} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} z = 0 \\ z = 3 \end{matrix}}$$

II° modo

$$z^2 - 2z\bar{z} + 3z = 0 \Rightarrow z(z - 2\bar{z} + 3) = 0 \begin{cases} z = 0 \\ z - 2\bar{z} + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x + iy - (x - iy) + 3 = 0$$

$$x + iy - 2x + 2iy + 3 = 0$$

$$\begin{cases} -x + 3 = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} , z = 3$$

(5)

$$|z|^2 - 2\bar{z}^2 + 3\bar{z} = 0$$

II modo $\quad z\bar{z} - 2\bar{z}^2 + 3\bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{z}(z - 2\bar{z} + 3) = 0$

$$\Rightarrow \bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow z - 2\bar{z} + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 3$$

(6)

$$i\bar{z} - 2 = \frac{2}{z} \qquad z \neq 0 \qquad z = x + iy \Rightarrow (z\bar{z} = |z|^2$$

$$iz\bar{z} = -2z - 2 = 0$$

$$i(x^2 + y^2) - 2(x + iy) - 2 = 0$$

$$ix^2 + iy^2 - 2x - 2iy - 2 = 0$$

$$\begin{cases} -2x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + i \end{matrix}$$

9)

$z^2+1=\frac{\bar{z}}{i} \Rightarrow iz^2-\bar{z}+i=0 \qquad z=x+iy$

$i(x^2-y^2+2ixy)-(x-iy)+i=0$

$ix^2-iy^2-2xy-x+iy+i=0$

$\begin{cases}-2xy-x=0\\ x^2-y^2+y+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x(2y+1)=0\\ x^2-y^2+y+1=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=0\\ y^2-y-1=0\end{cases} \vee \begin{cases}y=-\frac{1}{2}\\ x^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=0\end{cases}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\begin{cases}x=0\\ y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}y=-\frac{1}{2}\\ x^2=-\frac{1}{}\end{cases}$

$z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}i \;,\; z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}i$

$\sqrt[4]{i} \qquad z=i \quad |z|=1 \quad \arg z=\frac{\pi}{2}$

$\sqrt[4]{i}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{4}=w_k$

$w_0=\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}$

$\sqrt[3]{27} \qquad z=27 \quad |z|=27 \quad \arg z=0$

$w_k=3\cdot\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3} \qquad k=0,1,2$

$w_0=3$

$w_1=3\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$w_2 = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad w_2 = \overline{w_1}$$

$$\sqrt[3]{8i} \qquad |z| = 8 \qquad \arg z = \frac{\pi}{2}$$

$$w_K = 2\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2K\pi}{3} + i \sin \_\_\_\_\_\_\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

$$w_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \qquad w_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$w_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \overline{w_1}$$

Polinomi

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$a_0, \dots a_n \in \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N}_0$

$n = 0 \qquad p(x)$

$p(x) \quad a_0 x^n + \dots + a_n$

$q(x) \quad a_0 x^m + \dots a_m$

$p(x) = q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff n = m$

$a_0 = b_0$

$\vdots$

$a_n = b_n$

$A(x), B(x)$ polinomio $\exists\ Q(x)$ e $R(x)$ con grado

$R <$ grado $B \qquad A(x) = Q(x)\,B(x) + R(x)$

se $R(x) = 0 \qquad A$ divisibile per B

Teorema di Ruffini

A è div per $x - c \Leftrightarrow A(c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ se $A(c) = 0 \qquad A(x) = (x - c)\, A_1(x)$

grado A_1 = grado $A - 1$

se $A_1(c_2) = 0 \qquad A(x) = (x - c_1)(x - c_2)\, A_2(x)$

grado A_2 = grado $A - 1$

Procedendo allo stesso modo si trova

$A(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) K$

eguagliando i 2 membri si ha $K = a_0$

Ogni equazione algebrica di grado positivo n ammette n soluzioni reali o complesse, distinte o coincidenti

Se $c_1 = c_2 = \dots = c_s$ si dice che c_1 ha molteplicità s

(teorema fondamentale dell' algebra)

Se l'equazione è a coefficienti reali, se c'è una sol num $z = a + ib$

allora anche $\bar{z} = a - ib$ è sol con la stessa molteplicità

dunque se $A(x)$ è un polinomio a coeff reali

$$A(x) = a_0 (x - c_1)^{s_1} (x - c_2)^{s_2} \dots (x - c_k)^{sk}$$

$$s_1 + s_2 + \dots s_k = n$$

se $c_1, \dots c_k$ sono reali abbiamo finito

se $c_1 = a + ib$ allora ci sono anche $c_2 = a - ib$

$$(x - c_1)(x - c_2) = [x - (a + ib)][x - (a - ib)]$$

$$= [(x - a) - ib][(x - a) + ib] = (x - a)^2 + b$$

che è a coeff reali

$\Rightarrow$ un pol a coeff reali si può sempre decomporre nel prodotto di fattori di I e II grado a coeff. reali.

funzione esponenziale nel campo complesso

$z = x + iy$ Def $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

(se $z = x$ si ritrova e^x)

$z = iy$ $(x = 0)$ $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ossv se $y = \pi$

$$e^{i\pi} = 1 + i = 0$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Formule di Eulero

Capitolo 2

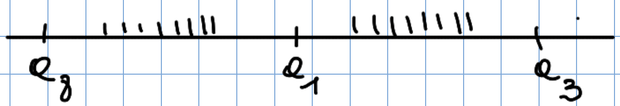
Successioni

Def

Successione è una funzione definita in $\mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N} \to f(n) = a_n \in \mathbb{R}$

si fa coincidere la successione con la sua immagine $\{a_n\}$
$(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$



es: $a_n = K \quad (K \in \mathbb{R})$ costante

$a_n = n$

$$a_n = \frac{n^2 - \sqrt{n}}{n+2}$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

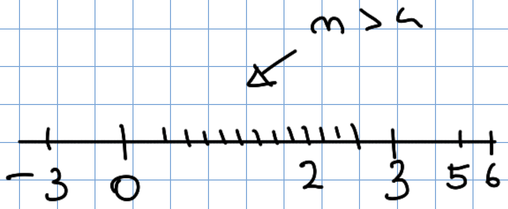
$$a_n = (-1)^n \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Una proprietà P è verificata definitivamente se $\exists \alpha \in \mathbb{N}$: se $n > \alpha$ l'elemento a_n verifica P

es: $a_n = n - 6$ D $a_n \geq 0$ $(\alpha = 6)$

Definizione

$\{a_n\}$ limitata se $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ $a \leq a_n \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$



$a_1 = -3$ $\quad$ $0 \leq a_n \leq 3$

$a_2 = 3$ $\quad$ $\forall n > 4$

$a_3 = 5$ $\quad$ Possiamo dire che:

$a_4 = 6$ $\quad$ $-3 \leq a_n \leq 6$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ è D limitata e abbiamo capito che è limitata

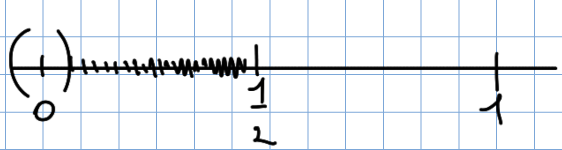
PROP: $\{a_n\}$ D limitata $\Rightarrow$ limitata

$a \leq a_n \leq b$ $\forall n > \alpha$ Consid. $h = \min(a, a_1, a_2, \dots, a_\alpha)$

$K = \max(b, a_1, a_2 \dots a_\alpha)$

Si ha $h \leq a_n \leq K$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n = \frac{1}{n}$



$\frac{1}{n} < r$ se $\frac{1}{r}$

Definizione

Limiti di una successione

$\{a_n\}$ $l \in \mathbb{R}$ Def: l è il limite di $\{a_n\}$ o che $\{a_n\}$ tende o converge ad l e si scrive $a_n \to l$

oppure $\lim a_n = l$

se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha \in \mathbb{N}$: se $n > \alpha$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$

Esempio:

$a_n = k$ $\forall n \Rightarrow a_n \to k$ $\qquad k - \varepsilon < a_n < k + \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$ $\qquad -\varepsilon < a_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$a_n = \frac{2n}{n+1} \to 2$$

Dim $2 - \varepsilon < \frac{2n}{n+1} < 2 + \varepsilon$ D.

$$\begin{cases} \frac{2n}{n+1} > 2 - \varepsilon \\ \frac{2n}{n+1} < 2 + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2n}{n+1} - 2 + \varepsilon > 0 \\ \frac{2n}{n+1} - 2 - \varepsilon < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2n - 2n - 2 + \varepsilon n + \varepsilon}{n+1} > 0 \\ \frac{2 - 2n - 2 - \varepsilon n - \varepsilon}{n} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon n > 2 - \varepsilon \Rightarrow n > \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} & \text{vera D} \\ \varepsilon n > -2 - \varepsilon & \text{vera } \forall n \end{cases}$$

Definizione

$a_n \to +\infty(-\infty)$ $\{a_n\}$ tende o diverge a $+\infty(-\infty)$ se
$\forall K>0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N}$: se $n>\nu$ si ha $a_n>K$ $(a_n<-K)$

es: $1-n^2 \to -\infty$ infatti $1-n^2<-K \Rightarrow n^2>K+1$
$n>\sqrt{K+1}$
vero $\forall$

$\frac{n^2}{n+1} \to +\infty$ infatti $\frac{n^2}{n+1}>K \to n^2-Kn-1>0$

Cons $x^2-Kx-1>0$ $\frac{K\pm\sqrt{K^2+4}}{2}$

$n>\frac{K+\sqrt{K^2+4}}{2} \vee n<\frac{K-\sqrt{K^2+4}}{2}$

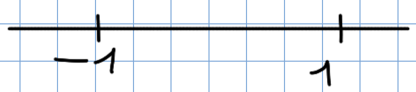
se $n>\frac{K+\sqrt{K^2+4}}{2}$ la tesi è verificata

Definizione

$\{a_n\}$ regolare se è convergente o divergente
$\{a_n\}$ oscillanti se è non regolare es: $a_n=(-1)^n$

$a_n>K$ $\forall$? NO
$a_n<-K$ $\forall$? NO
$l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$ $\forall$?
potrebbe essere $l=1$ oppure $l=-1$

se $l=1$



$\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}<a_n<\frac{3}{2}$ $\forall$

impossibile perché per n dispari $a_n=-1$

se $l=-1$ analogamente

altri esempi

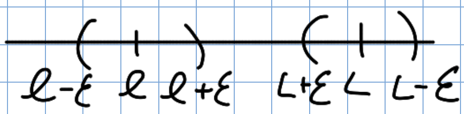
$a_n = \sin n$, $a_n = \cos n$, $a_n = \log n$.

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE

Se a_n è regolare il suo limite è unico

Dim:

sia $a_n \to l$, $a_n \to L$ con $l < L$



Scegliamo $\varepsilon > 0$: $l + \varepsilon < l - \varepsilon$

$$0 < \varepsilon < \frac{L - l}{2}$$

D. $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ $(n > \alpha)$

D: $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ $(n > \beta)$

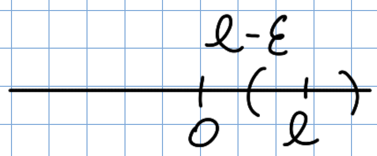
Se $n > \max(\alpha, \beta)$

$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon < L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ Assurdo

teorema della permanenza del segno

Se $a_n \to l > 0$ oppure $a_n \to +\infty \Rightarrow a_n > 0$ D

Se $a_n \to l < 0$ oppure $a_n \to -\infty \Rightarrow a_n < 0$ D



scelto ε tale che $l - \varepsilon > 0$

D $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

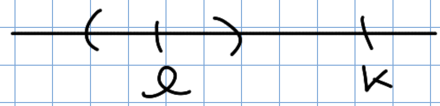
Ne segue che se $a_n > 0$ $\forall n \Rightarrow$ non può tendere a $l < 0$ né a $-\infty$ può tendere a zero, a $l > 0$, a $+\infty$

teorema della permanenza del segno generalizzato

se $a_n \to \ell$

e $\ell < K \Rightarrow D\ a_n < K$

e $\ell > h \Rightarrow D\ a_n > h$



teoremi di confronto

- per succ. divergenti
- per succ. convergenti

1): Se $a_n \le b_n$: allora se $a_n \to +\infty \Rightarrow$ anche $b_n \to +\infty$

se $b_n \to -\infty \Rightarrow$ anche $a_n \to -\infty$

infatti: i) D $a_n > K \Rightarrow b_n \ge a_n > K$

ii) D $b_n < -K \Rightarrow a_n \le b_n < -K$

2) Se $a_n \le b_n \le c_n$, $a_n \to \ell$, $c_n \to \ell$ allora anche $b_n \to \ell$

$\forall n$ o D

(teorema dei carabinieri)

infatti D $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad (n > \alpha)$

D $\ell - \varepsilon < c_n < \ell_n + \varepsilon \quad (n > \beta)$

se $n > \max(\alpha, \beta)$ $\quad \ell - \varepsilon < a_n < b_n \le c_n < \ell + \varepsilon$