Regolarità e limitatezza

Ci chiediamo: 1) $\{a_n\}$ regolare $\Rightarrow$ è limitata?
2) " limit. $\Rightarrow$ è regolare?

1) i) se $a_n \to l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ è limit.
infatti D $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ (avendo scelto $\varepsilon > 0$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ è D limit $\Rightarrow$ è limit.

ii) se $a_n \to +\infty$ non è limit. sup., però, fissato $k > 0$, si ha
D $a_n > k$ $\Rightarrow$ è D lim. inf $\Rightarrow$ è lim. inf.

iii) se $a_n \to -\infty$ analog. è limit. sup.

2) NO, ad es. $\{(-1)^n\}$ è limitata ma oscillante.

Succ. dei valori assoluti

$\{a_n\}$ $\{|a_n|\}$

1) $\{a_n\}$ reg. $\Rightarrow$ $\{|a_n|\}$ reg. infatti:
- se $a_n \to l$ $\Rightarrow$ $|a_n| \to |l|$

[$|a_n - l| < \varepsilon$ D $\Rightarrow$ $||a_n| - |l|| \le |a_n - l| < \varepsilon$] DIM. NO

- se $a_n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $|a_n| \to +\infty$ infatti D $\underset{|a_n|}{\overset{\shortparallel}{a_n}} > k > 0$

- se $a_n \to -\infty$ $\Rightarrow$ $|a_n| \to +\infty$ infatti D $a_n < -k \iff \underset{|a_n|}{\overset{\shortparallel}{-a_n}} > k$

2) $\{|a_n|\}$ reg $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ reg? NO

(a meno che a_n sia sempre > 0 opp sempre < 0)

es. $a_n = (-1)^n$ oscill. ma $|a_n| = 1 \to 1$
$a_n = (-1)^n n$ " ma $|a_n| = n \to +\infty$

se però $|a_n| \to 0$ $\Rightarrow$ $a_n \to 0$ perché

$|a_n| \to 0$ $\Rightarrow$ $||a_n| - 0| < \varepsilon$ D
$|a_n| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $a_n \to 0$

Allora se voglio dim che $a_n \to 0$ basta trovare una $b_n \to 0$: $|a_n| < b_n$

infatti $0 \le |a_n| < b_n$ $\Rightarrow$ $|b_n| \to 0$ $\Rightarrow$ $b_n \to 0$
$\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0

[DEF. $\{a_n\}$ infinitesima se $a_n \to 0$
" infinitamente grande ($a_n \to \infty$) se $|a_n| \to +\infty$]

SUCCESSIONI MONOTONE

$\{a_n\}$ crescente se $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n$ o D

- cresc. strettam. $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$ "
- decrescente $a_n \geq a_{n+1}$ " "
- decr. strettam. $a_n > a_{n+1}$ " "

Teorema di regolarità delle succ. monotone

1) $\{a_n\}$ cresc (o strett cresc) $\Rightarrow a_n \to \sup a_n$
2) " decresc " decr $\Rightarrow a_n \to \inf a_n$

DIM. 1) suff. che $\sup a_n \to +\infty$ e dim. che $a_n \to +\infty$ cioè che $\forall k > 0$ D si ha $a_n > k$

k non è un maggiorante $\Rightarrow \exists\ a_d > k$

$\{a_n\}$ cresc. $\Rightarrow$ se $n > d$ si ha $a_n \geq a_d > k \Rightarrow$ TS.

se $\sup a_n = \ell \in \mathbb{R}$ non facciamo la dim.

2) per eserc.

Operazioni con i limiti delle succ.

$\{a_n\}$ reg. $c \in \mathbb{R}$ cons. $\{c a_n\}$

se $c = 0$ $c a_n = 0 \to 0$, cons. $c \neq 0$

$a_n \to \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow c a_n \to c\ell$ infatti $|c a_n - c\ell| = |c|\,|a_n - \ell| < \varepsilon$ se $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ vera D perché $a_n \to \ell$

$a_n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} c a_n \to +\infty & \text{se } c > 0 \\ c a_n \to -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$

$a_n \to -\infty \Rightarrow \begin{cases} c a_n \to -\infty & \text{se } c > 0 \\ c a_n \to +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$ infatti $c a_n > k \iff a_n < \underbrace{\left(\frac{k^+}{c_-}\right)}_{<0}$ vera D perché $a_n \to -\infty$

Successione somma

$\{a_n\}$ $\{b_n\}$ cons. $\{a_n + b_n\}$

1) $a_n \to \ell$, $b_n \to L \Rightarrow a_n + b_n \to \ell + L$ infatti TS. $|(a_n + b_n) - (\ell + L)| < \varepsilon$ D

ma $|(a_n + b_n) - (\ell + L)| = |(a_n - \ell) + (b_n - L)| \leq \underbrace{|a_n - \ell|}_{<\frac{\varepsilon}{2}\text{ D}} + \underbrace{|b_n - L|}_{<\frac{\varepsilon}{2}\text{ D}} < \varepsilon$ D

perché $a_n \to \ell$ perché $b_n \to L$

2) $a_n \to +\infty$ $b_n \geq h$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$

es. $\underbrace{n}_{+\infty} + \underbrace{(-1)^n}_{\geq -1} \to +\infty$

TABELLA DELLA SOMMA

a_n	b_n	$a_n + b_n$
ℓ	L	$\ell + L$
$+\infty$	L	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

l	L	$l+L$
$+\infty$	L	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	f.i.

$-a_n \to +\infty, -b_n \to -L \Rightarrow -(a_n+b_n) \to +\infty \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$

f.i. forma indeterminata
$+\infty - \infty$

a_n	b_n	a_n+b_n
$2n$	$-n$	$n \to +\infty$
n	$-2n$	$-n \to -\infty$
$n+l$	$-n$	$l \to l$
$n+(-1)^n$	$-n$	$(-1)^n$ osc.

COMBINAZIONE LINEARE ; $c_1 a_n + c_2 b_n$

SUCC PRODOTTO $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ cons. $\{a_n b_n\}$

1) $a_n \to l, \; b_n \to L \Rightarrow a_n b_n \to lL$

2) $a_n \to 0$, $\{b_n\}$ limitata $\Rightarrow a_n b_n \to 0$ es. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n} \to 0$

3) $a_n \to +\infty, \; \exists\, h>0 : b_n \geq h \;\; \forall n \Rightarrow a_n b_n \to +\infty$ infatti $\overset{TS}{a_n b_n > k}$ D
$a_n b_n \geq a_n h > k$ se $a_n > \frac{k}{h}$
vera D perché $a_n \to +\infty$

TABELLA DEL PRODOTTO

a_n	b_n	$a_n b_n$
l	L	lL
$+\infty$	$L>0$	$+\infty$
$+\infty$	$L<0$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$L>0$	$-\infty$
$-\infty$	$L<0$	$+\infty$
$\pm\infty$	0	f.i.

$-b_n \to -L > 0 \Rightarrow -a_n b_n \to +\infty \Rightarrow a_n b_n \to -\infty$

$-a_n \to +\infty \Rightarrow -a_n b_n \to +\infty \Rightarrow a_n b_n \to -\infty$

forma indet. $0 \cdot \infty$

a_n	b_n	$a_n b_n$
n	$\frac{1}{n}$	$1 \to 1$
n^2	$\frac{1}{n}$	$n \to +\infty$
$-n^2$	$\frac{1}{n}$	$-n \to -\infty$
n	$\frac{(-1)^n}{n}$	$(-1)^n$ osc.

SUCC. RECIPROCA
$b_n \neq 0 \;\; \forall n$ o D cons. $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$
regolare

1) se $b_n \to l \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{l}$

2) se $b_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \infty$ es. $b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{b_n} = n \to +\infty$
$b_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{b_n} = -n \to -\infty$

$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \frac{1}{b_n} = \frac{n}{(-1)^n} \to \infty$

3) se $b_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to 0$

SUCC. QUOZIENTE

$b_n \neq 0 \quad \forall n \in D$ $\qquad$ cons $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$

$\{a_n\}$

$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$ $\qquad$ es. se $a_n \to \ell$, $b_n \to L \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell}{L}$

si avrà una f.i. $\quad$ se $a_n \to 0$ e $\frac{1}{b_n} \to \infty \iff b_n \to 0$ $\qquad$ f.i. $\frac{0}{0}$

opp $a_n \to \infty$ e $\frac{1}{b_n} \to 0 \iff b_n \to \infty$ $\qquad$ f.i. $\frac{\infty}{\infty}$

Limiti di successioni ottenute mediante funzioni elementari

PROP. $\quad f(x)$ funz. elementare $\quad f: X \to \mathbb{R} \quad X \subseteq \mathbb{R}$

$\{a_n\} \subseteq X$ $\qquad$ possiamo cons. $\quad f(a_n)$ è la succ. ottenuta componendo f e a_n

es. $\quad \log(n+4)$

se $a_n \to \ell \in X$ allora $f(a_n) \to f(\ell)$