Un equazione differenziale è il problema di determinare una funzione incognita $f(x)$ conoscendo delle relazioni fra $y(x)$ e le sue derivate

Per dare un'espressione più generale di un'eq diff si ha una funzione di $n+1$ variabili $(n \in \mathbb{N})$

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \qquad f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$$

DEF equazione diff di ordine n in forma esplicita

$$y^{(x)} = f(x, y, y' \dots y^{(x-1)}) \quad *$$

$(*)$ è il problema di determinare delle funzioni $y(x)$
$y : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile almeno una volta e tale che
$\forall x \in (a, b)$

$$(x, y(x), y'(x) \dots y^{(n-1)}(x)) \in X$$
$$y^{(x)}(x) = f(x, y(x), \dots y^{(n-1)}(x))$$

Data l'eq diff $(*)$ e dato un punto di X $(x_1, y_1, y'_0 \dots, y_0^{(n-1)}) \in X$ si chiama problema di Cauchy relativo all'eq $(*)$ e ai valori iniziali $y_0, y'_0, - y, y^{n-1}$ il problema

$$(PC) \begin{cases} y^{(x)} = f(x, y, \dots y^{n-1}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

di determinare una sol delle $(*)$ tale che:

$$y(x_0) = y \dots y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0$$

es:

$n = 1$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Cercare una primitiva di f che in x_0 valga y_0

in (*) $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Se f è continua si può dimostrare (teorema di Peano) che $\exists\, r>0$ in $]x_0-r\,;\,x_0+r[$

il problema * ha una e una sola sol.

Metodo risolutivo per eq diff. lineari del primo ordine

$a, f\ (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continue $\qquad y' + a(x)y = f(x) \quad (1)$

(1) eq diff del primo ordine

$a(x)$ coefficiente

$f(x)$ termine noto $\qquad f(x,y) = f(x) - a(x)y$

(c'è una dipendenza lineare da y e da y')

Se $f(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \qquad y' + a(x)y = 0 \quad (2)$

(2) è omogenea

la (2) è detta omogenea associata alla (1)

Una sol della (1) è una funz $y: (c, d) \subseteq (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad \forall x \in (c, d)$

Possiamo sempre riferirci a sol definite nell'intero (α, β)

In generale una soluzione di un equazione diff è detta integrale dell'eq, l'insieme delle soluzioni è detto integrale generale e una singola sol è detta integrale particolare

Risultati (1) e (2)

(1) Se y e z sono sol di (1) $\Rightarrow$ $y-z$ è sol di (2)

(2) Se y è sol di (1) e z è sol di (2)

$$\Downarrow$$

$y+z$ è sol di (1)

(3) Se y è sol di (2) e $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ ky è sol di (2)

Quindi per trovare l'integrale generale di (1) basta sommare all'integrale generale di (2) un integrale particolare di (1)

(1) Dim: Sia $w = y - z$, devo dim che $w' + a(t)w = 0$

$w' + a(x)w = y' - z' + a(x)(y-z) = y' + a(x)y - (z' + a(x)z) = 0$

(2) omologo

(3) Sia $w = ky$ $\quad w' + a(x)w = ky' + a(x)ky = k(y' + a(x)y) = 0$

Metodo per risolvere l'omogenea

$y' + a(x)y = 0 \qquad (2)$

Consideriamo $y(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow y'(x) + a(x)y(x) = 0 + a(x)\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ è sol

Cerchiamo una sol che non contengono mai il valore. Sia $y(x)$ una di tal soluzione essendo continua sarà sempre >0 o sempre <0 (teorema esistenza degli zeri)

Sia A una prim. di a in (α, β) $\Rightarrow$ $-a(x) = -A'(x)$

allora il primo membro dell'ultima uguaglianza è la derivata di $\log|y(x)|$ e il secondo membro è la derivata di $-A(x) \Rightarrow \log|y(x)|$ e $-A(x)$ hanno le stesse derivate

$\Rightarrow$ differiscono per una costante

$$\log|y(x)| = -A(x)+K \Rightarrow |y(x)| = e^{-A(x)+K} = e^{-A(x)} e^{K} = c\, e^{-A(x)}$$

Se scrivo $y(x) = K e^{-A(x)}$ $K \in \mathbb{R}$ trovo:

se $K = 0$ ha sol nulla

se $K > 0$ ha sol > 0

se $K < 0$ ha sol $= 0$

Non ci può essere una sol che abbia sia il valore zero che valori $\neq 0$ in $]c, \beta)$ è del tipo $Ke^{-A(x)}$ che non può tendere a zero per $x = c$ cont. di y derivabile $\Rightarrow$ continua in (α, β)

(3)

Integrale generale della (2) $y(x) = Ke^{-A(x)}$ $K \in \mathbb{R}$ A prim di a

Esempio: modello per la crescita di una popolazione

numero di individui all'istante t $N(t)$ $J: [0; +\infty[$

$N_0 = N(0)$

λ = tasso di natalità

μ = tasso di mortalità

$t \rightarrow t + h$

$$N(t+h) - N(t) = N(t)(\lambda - \mu) h$$

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N(t)(\lambda - \mu) \Rightarrow N'(t) = N(t)(\lambda - \mu \Rightarrow N \text{ è sol}$$

$N' + (\mu - \lambda) N = 0$ eq diff primo ordine diff

$a(t) = \mu - \lambda \Rightarrow A(t) = (\mu - \lambda)t$

$K e^{(\gamma-\mu)} = N_0 \Rightarrow K = N_0 \rightarrow N(t) = N_0 e^{(\gamma-\mu)t}$

$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \begin{cases} N_0 \\ 0 \\ +\infty \end{cases}$

$A = \mu$ (crescita zero)
$A < \mu$ (la pop tende ad estinguersi)
$A > \mu$ (crescita esponenziale)

Metodo per risolvere l'eq completa $y' + a(x)y = f(x)$

sappiamo che dobbiamo trovare un int part (+) e sommarlo all'int gen della (2)

Cerchiamo una sol che abbia la stessa forma della (3) ma con $K(x)$ funz derivabile al posto di h

dobbiamo quindi conoscere una funzione deriv. $K: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ in modo che $\bar{y}(x) = k(x) e^{-A(x)}$

$\bar{y}'(x) + k'(x) e^{-A(x)} - a(x) K(x) e^{-A(x)}$ Sostituito nell'eq