$f: X \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ $\qquad F(x, y, y', \dots y^{n-1})$

Eq diff: $\quad y^{(n)} = F(\dots)$

$y: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivata n volte

$\forall x \in (a, b) \quad (x, y(x), y'(x), \dots y^{n-1}(x)) \in X$

$y^{(x)}(x) = F(\dots)$

es $\quad n = 1 \qquad f(x, y) = f(x) \qquad y' = f(x)$ (ricerca delle primitive)

$(x_0, y_0, \dots y_0^{(x-1)}) \in X$

$$PC \begin{cases} y^x = f(\dots) \\ y(x_0) = y_0 \\ y^{(x-1)}(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Equazioni lineari del I ordine

$y' + a(x)\, y = f(x)$ $\qquad a, f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continue

a coeff $\qquad f$ termine noto

$f(x, y) = f(x) - a(x)\, y$ $\qquad f: (\alpha, \beta) \times]-\infty; +\infty[\to \mathbb{R}$

$y' + a(x)\, y = f(x) \qquad (1) \qquad$ completa

$y' + a(x)\, y = 0 \qquad (1) \qquad$ omogenea associata

Sol di (2) $\quad y(x) = 0 \quad \forall x$ è sol

Sia y sol sempre $\neq 0$ $\qquad \dfrac{y'(x)}{y(x)} = a(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

$\log |y(x)| = -A(x) + k$

$|y(x)| = e^{A(x)+k} = c\, e^{A(x)} \qquad e^k = c > 0$

$y(x) = k e^{A(x)}$ $k \in R$ int gen di (2)

$\bar{y}(x) = K(x) e^{A(x)}$ k derivabile in (α, β)

$K \in \int f(x) e^{A(x)} dx$

FINE RIPASSO

Equazione lineare di ord n

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x)$$

$a_1, \dots a_n$ $f: (\alpha, \beta) \to R$ cont $a_1 \dots a_n$ coeff

f termine noto

Se $f = 0$ l'equazione omogenea altrimenti completa

$$f(x, y, \dots) = f(x) - a_1(x) y^{(x-1)} - \dots - a_n(x) y$$

$$F: (\alpha, \beta) \times (]-\infty; +\infty[)^n \to R$$

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x) \qquad (1)$$

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0 \qquad (2) \text{ omogenea associata}$$

i) y, z sol di (1) $\Rightarrow w = y - z$ sol di 2

ii) y sol di (1) e z sol di (2) $\Rightarrow w = y + z$ sol di (1)

es dimostro i)

$$w^n - a_1(x) w^{n-1} + \dots + a_n(x) w =$$

$$y^n - z^n + a_1(x) y^{n-1} - a_1(x) z^{n-1}(x) + \dots =$$

$$\underbrace{(y^n(x) + \dots + a_n(x) y(x))}_{f(x)} - \underbrace{(z^n(x) + \dots + a_n(x) z(x))}_{f(x)} = 0$$

iii) Principio di sovrapposizione:

se y è sol di $y^{n} + \dots + a_n(x)y = f(x)$

e z " $y^{(n)} + \dots a_n(x)y = g(x)$

e $k, h \in \mathbb{R}$ allora $w = hy + hz$ è sol di

$y^{(n)} + \dots + a_n(x) = k f(x) + h g(x)$

iv) se $f(x) = u(x) - iv(x)$ allora $y = z + iw$ è sol di

$y^{(x)} + \dots + a_n y = f(x) \Leftrightarrow z$ è sol di $y^{(x)} + \dots + a_n y = u(x)$ e

w è sol di $y^{(x)} + \dots + a_x y = v(x)$

da i) e iii) segue che l'int gen della (1) si ottiene sommando

all'int gen della 2 un int della (1)

Struttura dell'insieme S delle sol di (2)

i) $y(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

ii) se $y, z \in$ e $k, h \in \mathbb{R} \Rightarrow w = hy + hz \in S$

infatti $w^{n}(x) + \dots + a_n(x) w(x) =$

$$h\underbrace{\left(y^{(n)}x + \dots + a_n(x) y(x)\right)}_{0} + h\underbrace{\left(z^{n}(x) + \dots + a_n(x) + (x)\right)}_{0} = 0$$

quindi S è uno spazio vettoriale

Premettiamo il

teorema: Un Pc legato ad un'eq lineare ha una e una

sola sol

Siano $y_1, \dots, y_n$ n sol di (2) costruiamo il determinante WRONSKIANO

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y^{n-1}(x) & \dots & y^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

Si fa vedere $W'(x) = -a_1(x) W(x) \quad \forall x$

lo proviamo per $n = 2 \quad y_1, y_2$

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

$$W' = y'_1 y'_2 + y_1 y''_2 - y'_2 y'_1 - y_2 y''_1 =$$

$$y_1(-a y'_2 - b y_2) - y_2(-a y'_1 - b y_1) =$$

$$= -a y_1 y'_2 \cancel{- b y_1 y_2} + a y'_1 y_2 \cancel{+ b y_1 y_2}$$

$$= a(y'_1 y_2 - y_1 y'_2)$$

Dunque $W' = -a_1 W \Rightarrow W' + a_1 W = 0 \Rightarrow W$ è sol di un eq lineare del I ordinamento $\Rightarrow W(x) = K e^{-A(x)} \Rightarrow$ si ha $W(x) \neq 0 \ \forall x$ opp $W(x) = 0 \ \forall x$

Def: $y_1, \dots, y_n$ si dicono indipendenti se $W(x) \neq 0$

dipendenti se $W(x) = 0$

teorema 1 $\exists$ n sol indip.

Dim. Scegliamo $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e scriviamo su PC

$$PC \begin{cases} y^{(n)} + \dots + n = 0 \\ y^{i}(x_0) = 1 \\ y^{j}(x_0) = 0 \quad \text{se } j \neq i \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + \dots = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + \dots = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

ad es se $n = 2$

Ciascuno di essi ha una e una sola sol, siano esse $y_1, y_2, \dots y_n$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{sono indip}$$

Teorema 2:

Se $y_1 \dots y_n$ sono n sol indip ogni altra sol è del

$$\sum_{i=1}^{n} h_i y_i \qquad (h_i \in \mathbb{R})$$

Dim Com lineare di sol sono sol, lo sappiamo già.

Viceversa: Sia z un'altra sol, scegliamo $x_0 = (\alpha, \beta)$

e con PC $\begin{cases} y^{n} \dots = 0 \\ y(x_0) = z(x_0) \\ y^{n-1}(x_0) = z^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$ l'unica sol è z

Cerco una sol di PC del tipo $y = \sum h_i y$

$y(x_0) = \sum h_i y_i (x_0) = z(x_0)$ $\begin{cases} h_1 y_1(x_0) + \dots + h y_n(x_0) = z(x_0) \\ h_1 y_1'(x_0) + \dots + h y_n'(x_0) = z'(x_0) \\ \dots \\ h_1 y_1^{n-1)}(x_0) + \dots = z^{n-1}(x_0) \end{cases}$

è un sistema lineare di n eq algebriche in n incognite $k_1, \dots, k_n$

il det dei coeff è $w(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ è di Cramer $\Rightarrow$ ha una e una sola sol $(h_1, \dots h_n)$ la funzione $y(x) = \sum h_i y(x)$ è sol di PC ma l'unica sol $\Rightarrow y = z$

Si fa vedere che $y_1 \dots y_n$ indipendenti $\Leftrightarrow$ lin ind

Dai teoremi 1 e 2 segue che S ha dimensione n e n sol indipendenti sono una base.

Metodo risolutivo per un eq lineare omogenea a coefficenti costanti

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n y = 0 \qquad (1)$$

Cerchiamo una sol del tipo $y(x) = e^{\alpha x}$ $\alpha \in \mathbb{C}$ da determinare

$y(x) = e^{\alpha x}$
$y'(x) = \alpha e^{\alpha x}$
$y^{(k)} = \alpha^n e^{\alpha n}$

sostituendo nella (1)

$e^{\alpha x}(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n) = 0 \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x}$
è sol di (1) se α è sol dell'eq algebrica
$\alpha^n + a_1 \alpha^{m-1} + \dots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

Per ogni soluzione $\alpha \in \mathbb{R}$ di molt p della 2 nascono p sol della (1)
$e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{p-1} e^{\alpha x}$

Per ogni coppia di sol $\pm i\gamma \in D$ di molt p della (2) nascono $2p$ soluzioni della (1)

$e^{\beta x} \cos \gamma x$ $\qquad$ $e^{\beta x} \operatorname{sen} \gamma x$
$x e^{\beta x} \cos \gamma x$ $\qquad$ $x e^{\beta x} \operatorname{sen} \gamma x$
$x^{p-1} e^{\beta - x} \cos \gamma x$ $\qquad$ $x^{p-1} e^{\beta x} \sin \gamma x$

Abbiamo trovato n sol, si può dimostrare che sono molip $\Rightarrow$
l'eq è risolta

Lo proviamo per $n=2$ Eq $y''+ay'+by'=0$

Eq caratteristica : $\lambda^2+a\lambda+b=0$ $\Delta=a^2-4ab$

se $\Delta>0$ due sol λ_1, λ_2 reali e distinte

$\Rightarrow y(x)=e^{\lambda_1 x}, \quad y(x)=e^{\lambda_2 x}$

$$W(x)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix} \quad e^{\lambda_1 x+\lambda_2 x}(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$$

perché $\lambda_1\neq\lambda_2$

se $\Delta>0$ una sol doppia $\lambda \Rightarrow y_1(x)=e^{\lambda x}, \quad y_2(x)=x e^{\lambda x}$

$$J(x)=\begin{bmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}+\lambda x e^{\lambda x} \end{bmatrix} = e^{2\lambda x}(1+\lambda x-\lambda x)=e^{2\lambda x}\neq 0$$

se $\Delta<0$ due sol con $\beta\pm i\gamma$

$y_1(x)=e^{\beta x}\cos\gamma x \qquad y_2(x)=e^{\beta x}\sin\gamma x$

$$W(x)=\begin{bmatrix} e^{\beta x}\cos\gamma x & e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x \\ \beta e^{\beta x}\cos\gamma x-\gamma e^{\beta x}\sin\gamma x & \beta e^{\beta x}\sin\gamma x+\gamma e^{\beta x}\cos\gamma x \end{bmatrix}=$$

$$e^{2\beta x}\left(\beta\cos\gamma x\sin\gamma x+\gamma\cos^2\gamma x-\beta\sin\gamma x\cos\gamma x+\gamma\sin^2 x\right)=$$

$=e^{2\beta x}\gamma\neq 0$ $\qquad(\gamma\neq 0$ perché $\Delta<0)$

Esempi

1. $y''-y'-2y=0$

eq caratt: $\lambda^2-\lambda-2=0$ $\qquad \lambda=\dfrac{1\pm 3}{2}$ $<$ -1, 2

integrale generale

$y(x)=K_1 e^{-x}+k_2 e^{2x}$

2. $y''+3y'=0$

eq caratteristica: $\lambda^2+3\lambda=0$ $\qquad \lambda=0, \lambda=-3$

integrale generale: $y(x)=K_1+K_2 e^{-3x}$

3. $y'' + y' - 12y = 0$

eq caratt : $\alpha^2 + \alpha - 12 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-12) = 49$ $\qquad \alpha_1 = -4 \quad \alpha_2 = +3$

integrale generale : $y(x) = k_1 e^{-4x} + k_2 e^{3x}$

4. $y''' - y' = 0$

eq caratt : $\alpha^3 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 0 \quad \alpha = -1 \quad \alpha = 1$

$y = k_1 + k_2 e^{-x} + k_3 e^{x}$

5. $y''' + 2y'' = 0$

$\alpha^3 + 2\alpha^2 = 0$

$\alpha^2(\alpha + 2)$ $\qquad \alpha = 0$ molt $r = 2$ $\qquad \alpha = -2$

perchè ci sono 2 $\alpha = 0$

int gen $y(x) = k_1 + \boxed{k_2 x} + k_3 e^{-2x}$

6. $y'' - 6y' + 5y = 0$

eq $\alpha - 6\alpha + 9 = 0 \quad \alpha = 3 \qquad r = 2$

$y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 x e^{3x}$

7. $y'' + y' + y = 0$

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

int gen $y(x) = k_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + k_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{3} x$

8. $y'' + 3y' + 4y = 0$

eq caratt: $\alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ $\qquad \alpha = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2} = -\dfrac{3}{2} \pm i \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

int gen : $y(x) = k_1 e^{-\frac{3}{2}x} \cos \dfrac{\sqrt{7}}{2} x_0 + k_2 e^{-\frac{3}{2}} \sin \dfrac{\sqrt{7}}{2} x$

9. $y''' + y' = 0$

eq caract: $\lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2+1) = 0 \qquad \lambda = 0 \quad \lambda = \pm i$

int gen $y(x) = K_1 + K_2 \cos x + K_3 \sin x$

10. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

eq Caract: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^3 = 0$

$\lambda = 2 \quad r = 3$

int gen: $y(x) = K_1 e^{2x} + K_2 x e^{2x} + K_3 x^2 e^{2x}$