

Ricerca dell'integrale particolare di un'eq completa con il termine moto di tipo "esponentiale per polinomio"

$$f(x) = e^{hx} q(x) \quad h \in \mathbb{C} \quad q \text{ pol di grado } m$$

$$\text{es: } y'' - 4y' + 3y = e^{2x}(x+1)$$

Metodo di somiglianze

si cerca una sol che ha le stesse forme del termine moto

$$\bar{y}(x) = e^{hx} x^r q(x) \quad q \text{ pol di grado } m$$

r = moltiplicatore di h come sol

dell'eq cero \dagger ($r=0$ se h non è sol)

calcoliamo le derivate di \bar{y} e sostituendo nell'eq si ottiene

$$e^{hx} (\dots) = e^{hx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio}}}{q(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio}}}{\cdot}$$

Basterà equagliare queste 2 polinomi

$$\text{es: } f(x) = e^{3x}(x^2 + 2x) \quad 3 \text{ non è sol dell'eq.} \Rightarrow r=0 \quad \bar{y} = e^{3x}(ax^2 + bx + c)$$

$$f(x) = e^{3x}(x^2 + 2x) \quad 3 \text{ è sol di mult 1} \Rightarrow r=1 \quad \bar{y}(x) = e^{3x}(ax^3 + bx^2 + cx)$$

$$f(x) = 2e^{3x} \quad 3 \text{ sol di mult 2} \Rightarrow r=2 \quad \bar{y}(x) = e^{3x} Kx^2$$

$$1. \quad y'' - 4y' + 3y = \frac{x}{e}$$

$$\text{eq omogenea } y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$\text{eq cero } d^2 - 4d + 3 = 0 \quad d = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \quad \text{mt per ora:}$$

$$y(x) = h_1 e^{3x} + h_2 e^x$$

$$f(x) = x e^{-x} \quad m=1 \quad h=-1 \quad r=0$$

$$\text{cerco } \bar{y}(x) = e^{-x}(ex + b)$$

$$\bar{y}'(x) = e^{-x}(-ex - b + e)$$

$$\bar{y}''(x) = e^{-x}(ex + b + e - e)$$

$$\text{mt nel eq } e^{-x}(ex + b + hox + 4b + 3e^{-x} + 3b) = e^{-x}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8a + 8b = 1 \Rightarrow \begin{cases} 8a = 1 \\ 8b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{mt fun } y(x) = h_1 e^{3x} + h_2 e^{-x}$$

Se il termine moto è del tipo $\cos x = -P(x)$ oppure $\sin x = -P(x)$

con P polinomio possiamo usare lo stesso metodo ricorrendo

che

$$e^{x+i\theta} = e^x (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Ricordiamo inoltre che se in un'eq lineare il termine moto è

$$f(x) = u(x) + i v(x)$$

allora la funzione $y(x) = w(x) + i z(x)$ è sol dell'eq se e solo se

w è sol dell'eq in cui il termine moto è $u(x)$

$$z \quad // \quad // \quad = \quad // \quad v(x)$$

Allora se vogliamo risolvere $y'' - 3y' = \cos(x) + i \sin(x)$

risolviamo $y'' - 3y' = e^{-x}$ ed mettendo di somiglianze e poi

proseguiamo solo con le parte reale

$$y'' - 3y' = \cos x$$

$$\text{eq om } y'' - 3y' = 0$$

$$\text{eq cost } d^2 - 3d = 0 \quad d=0, d=3 \quad \text{mt fun omg } y(x) = h_1 + h_2 e^{3x}$$

Cerchiamo un mt particolare di $y'' - 3y = e^{-x}$ $m=0$ $h=-i$ $s=0$

$$\text{cerco } \bar{y}(x) = h e^{2x}$$

$$\bar{y}'(x) = h i e^{2x}$$

$$\bar{y}''(x) = -h e^{2x}$$

$$\text{sost nell'eq } e^{2x}(-h - 3h i) = -e^{2x} = h (-1 - 3i) = 1 \Rightarrow h = -\frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}$$

$$= -\frac{1}{10} + \frac{3}{10} i$$

dunque $\bar{y}(x) = \left(-\frac{1}{10} + \frac{3}{10} i\right) (\cos x)$ se parte reale che è nel

$$\text{delle 1 e } y(x) = \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$$

$$y'' - 3y' = x \sin x$$

Cerchiamo un mt particolare di $y'' - 3y' = x e^{ix}$ con $m=1$ $b=-i$ $D=0$

Cerco $\bar{y}(x) = e^{2x}(ax + b)$

$$\bar{y}'(x) = e^{2x} (2ax + a + b)$$

$$\bar{y}''(x) = e^{2x} (-2ax - a + 2a)$$

$$\text{rest nell'eq } e^{2x} (-2ax - a + 2a - 3ax - 3b - 3e) = x e^{ix}$$

• • •

Se il termine noto è somma di due termini di questo tipo:

$$f(x) = (x+1)e^{2x} - e^2 e^x$$

si usa il principio di sovrapposizione: si trova un mt particolare

oltre $\dots = (x+1)e^{2x}$

$$e = \dots = -x^2 e^x$$

e poi si sommano

Fine capitolo due