13 Giugno ore 10 prove d'esame aula 1

Dimostrazione teorema di Fermat

$c \in]a,b[\Rightarrow f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$

supp c punto di massimo relativo $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ in $]c-\delta, c+\delta[$

$f(x) \leq f(c) \Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0$

Cons $f'(c) = \lim_{x \to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ $\quad x-c < 0$

≥ 0

$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ $\quad f(x)-f(c) \leq 0 \quad x-c > 0$

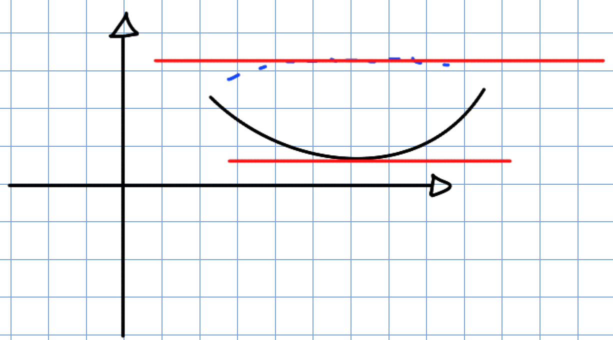
$\Rightarrow f'(c) = 0$

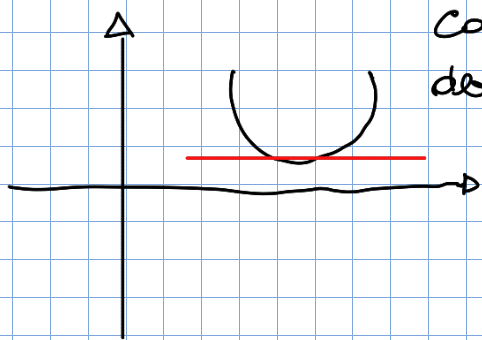
teorema di rolle

Ipotesi: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

derivabile in $]a,b[$

$f(a) = f(b)$





Cont in $[a,b]$

deriv in $]a,b[$

tesi:

$\exists\, c \in [a,b] : f'(c) = 0$

Dimostrazione

f cont in $[a,b]$ $\Rightarrow$ per il teor. di Weistrass f è dotata di minimo e massimo assoluti. Siano $x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$

Se $x_1 = a$, $x_2 = b$ o viceversa ne segue $m = M \Rightarrow f$ costante $\Rightarrow f'(x) \Rightarrow \forall x \in [a,b]$

Se almeno uno fra x_1, x_2 ad esempio:
$x_1 \in]a,b[\Rightarrow f'(x_1) = 0$ per il teorema di Fermat

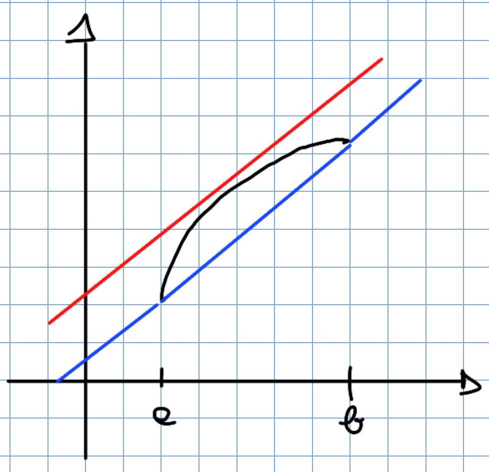
Teorema di Lagrange

IP. f è definita in $[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$
derivabile in $]a,b[$

TS. $\exists\, c \in]a,b[: f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



Dimostrazione

Consideriamo in $[a,b]$ la funz $g(x) = \big(f(b)-f(a)\big)x + (a-b)f(x)$

g è cont in $[a,b]$ e deriv. in $]a,b[$

$g(a) = f(b) \cdot a \cancel{- f(a)a + a f(a)} - b f(a)$

$g(b) = \cancel{f(b)b} - f(a)b + a f(b) - \cancel{b f(b)}$

Per il teorema di Rolle $\exists c \in]a,b[: g'(c) = 0$

$g'(x) = f(b) - f(a) + (a-b) f'(x)$

$g'(c) = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

Applicazione del teorema di Lagrange

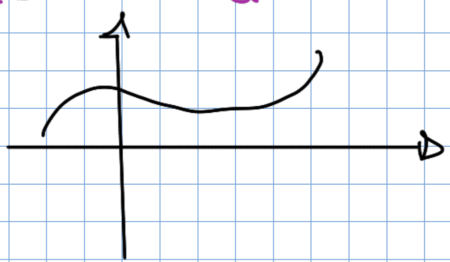
Criterio di monotonia: $f(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile
$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ $\Rightarrow f$ cresc in (a,b)

Dimostrazione Siano $x, y \in (a,b)$ con $x < y$, dim che
$f(x) \leq f(y)$

$a \quad x \quad y \quad b$

f è derivabile $[x,y] \Rightarrow$ per il teorema di Lagrange
$\exists c \in]x,y[:$
$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(y-x)}_{+} = 0$

Criterio di stretta monotonia



Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ deriv
e ns affinché f sia strettamente crescente in (a,b)
è che:
$f'(x) \geq 0 \quad \forall x$
$\nexists (c,d) \subseteq (a,b) \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in (c,d)$ NO DIM

Esercizi sulle derivate

$$f(x) = \log(x^2 - \sqrt{2x+1})$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-\sqrt{2x+1}} \cdot \left(2x \quad \cdot \qquad \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)$$

$$f(x) = \frac{x^2 \sin x}{(x+1)e^x}.$$

$$f(x) = \frac{(2x\sin x + x\cos x)(x+1)e^x - (e^x + e^x(x+1))}{[(x+1)e^x]^2}$$

$$f(x) = e^{x^2\cos x} \qquad f'(x) = e^{x^2\cos x} \cdot (\overset{f'(x)}{2x} \cdot \overset{f(x)}{\cos x} \overset{f'(x)}{- \operatorname{sen}} \overset{f(x)}{x^2})$$

$$f(x) = \log(\log(\log x))$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\log x} \quad \frac{1}{x}}{\log(\log x)} = \frac{1}{x(\log x)(\log(\log x))}$$

$$f(x) = \arctan \frac{x^2+1}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+1}{e^{2x}}\right)^2} \cdot \frac{2x(e^{2x}) - (x^2+1)2e^{2x}}{(e^{2x})^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2+3}$$

$$f'(x) = \frac{2x(2x^2+3) - (x^2-1)4x}{(2x^2+3)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x^2 e^x \cdot 2x - \sin x^2 e^x}{e^{2x}}$$

$$f(x) = \sin^3 x$$

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$$

$D(\log|f(x)|$