29 ottobre 2025_MZ

mercoledì 29 ottobre 2025 14:01

ESERCIZI SUGLI INTEGRALI

1. Trovare F prim in $]-\infty,+\infty[$ di $f(x)=e^{|x+1|+2x}$ e tale che $F(0)=\frac{1}{2e}$

-1

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & x<-1 \\ e^{3x+1} & x\geq -1\end{cases}$$

$-x-1+2x$

$x+1+2x$

una prim. è del tipo

$$F(x)=\begin{cases} e^{x-1}+k_1 & x<-1 \\ \frac{1}{3}e^{3x+1}+k_2 & x\geq -1\end{cases}$$

imponiamo la continuità in $x=-1$

$\lim_{x\to(-1)^-} F(x) = \lim_{x\to(-1)^+}$ $\quad e^{-2}+k_1=\frac{1}{3}e^{-2}+k_2 \Rightarrow k_2=k_1+\frac{2}{3}e^{-2}$

Le prim. sono $F(x)=\begin{cases} e^{x-1}+k & x<-1 \\ \frac{1}{3}e^{3x+1}+k+\frac{2}{3}e^{-2} & x\geq -1\end{cases}$

imponiamo che $F(0)=\frac{1}{2e}$

$\frac{1}{3}e+k+\frac{2}{3}e^{-2}=\frac{1}{2e} \Leftrightarrow k=\frac{1}{2e}-\frac{1}{3}e-\frac{2}{3}e^{-2}$

La funz cercata è $F(x)=\begin{cases} e^{x-1}+\frac{1}{2e}-\frac{1}{3}e-\frac{2}{3}e^{-2} & x<-1 \\ \frac{1}{3}e^{3x+1}+\frac{1}{2e}-\frac{1}{3}e & x\geq -1\end{cases}$

2. $I=\int_0^3 (x+|x-2|)\log(x+3)\,dx =$

$0 \quad 2 \quad 3$

$2-x$

$=\int_0^2 2\log(x+3)\,dx + \int_2^3 (2x-2)\log(x+3)\,dx$

$\int 2\log(x+3)\,dx = 2x\log(x+3)-2\int\frac{x+3-3}{x+3}dx =$

$= 2x\log(x+3)-2x+6\log|x+3|+k$

$\int \underset{\uparrow\,FD}{(2x-2)}\log(x+3)\,dx = (x^2-2x)\log(x+3)-\int\frac{x^2-2x}{x+3}dx = (*)$

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -2x & x+3 \\ -x^2 & -3x & x-5 \\ \hline & -5x & \\ & +5x+15 & \\ \hline & 15 & \end{array}$$

$(*)=(x^2-2x)\log(x+3)-$

$-\int\left(x-5+\frac{15}{x+3}\right)dx =$

$=(x^2-2x)\log(x+3)-\frac{1}{2}x^2+5x-15\log(x+3)+k$

$I=\left[(2x+6)\log(x+3)-2x\right]_0^2+\left[(x^2-2x-15)\log(x+3)-\frac{1}{2}x^2+5x\right]_2^3 = \ldots$

3. $\int \underset{\uparrow\,FD}{x}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}-\cancel{\frac{1}{2}}\int \cancel{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\,\frac{-\cancel{2}}{x^{\cancel{3}}}\,dx =$

$=\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}+\int\frac{x^{\cancel{4}\,3}}{(x^4+1)\cancel{x}}\,dx =$

$=\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\int\frac{4x^3}{x^4+1}\,dx =$

$=\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\log(x^4+1)+k$

4. $I=\int\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+1}}\,dx$

$x\geq 0$
$x>0$
$x>-1$

$(a,b)=]0,+\infty[$

$(c,d)=]1,+\infty[$

4 $I = \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\,dx$ $\quad x \ge 0$, $x > 0$, $x > -1$ $\quad (a,b) =]0,+\infty[$ $\quad (c,d) =]1,+\infty[$

$\sqrt{x+1} = t > 0$ I MODO

$x = t^2 - 1 > 0$ se $t > 1$

$g(t)$ $\quad g'(t) = 2t > 0 \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

$$I = \left[\underbrace{\int \frac{1+\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1}\,\cancel{t}}\,2\cancel{t}\,dt}_{J}\right]_{t=\sqrt{x+1}}$$

$$J = 2\left(\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \int dt\right) = 2\,\text{arccosh}\,t + 2t + k$$

$$I = 2\,\text{arccosh}\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + k$$

$\sqrt{x} = t$ II modo

$t > 0 \quad x = t^2 = g(t) \quad t^2 > 0 \ \forall t > 0 \Rightarrow (c,d) =]0,+\infty[$

$g'(t) = 2t$

$$I = \left[\underbrace{\int \frac{1+t}{\cancel{t}\sqrt{t^2+1}}\,2\cancel{t}\,dt}_{J}\right]_{t=\sqrt{x}}$$

$$J = 2\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt + \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

non lo sappiamo fare $\qquad \left[\int \frac{dz}{\sqrt{z}}\right]_{z=t^2+1}$

EQ. LINEARI DI ORD. n

$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\,y = f(x)$ (1) completa

$= 0$ (2) omogenea

$a_0, \dots, a_n, f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ cont. $\quad a_i$ coefficienti, f term. noto

y, z sol di (1) $\Rightarrow w = y - z$ sol di (2)

y sol di (1), z sol di (2) $\Rightarrow y + z$ sol di (1)

(y sol di (2) $\Rightarrow k\,y$ sol di (2))

y, z sol di (2) $\Rightarrow k\,y + h\,z$ sol di (2)

infatti $k\,(\underbrace{y^{(n)} + \dots + a_n(x)\,y}_{0}) + h\,(\underbrace{z^{(n)} + \dots + a_n(x)\,z}_{0}) = 0 \quad \Rightarrow$

$y = 0$ è sol di (2)

$\Rightarrow$ l'insieme delle sol di (2) è uno spazio vett.

Principio di sovrapposizione

Date

$y^{(n)} + \dots + a_n(x)\,y = f(x)$ $\quad y$ una sua sol

$y^{(n)} + \dots + a_n(x)\,y = g(x)$ $\quad z$ " "

allora la funz. $k\,y + h\,z$ $(h, k \in \mathbb{R})$ è sol dell'eq.

$y^{(n)} + \dots + a_n(x)\,y = k\,f(x) + h\,g(x)$

in partic. se abbiamo $y^{(n)} + \dots + a_n(x)\,y = u(x) + i\,v(x)$

la funz. $y(x) + i\,z(x)$ è una sua sol se e solo se

y è sol di $y^{(n)} + \dots + a_n(x)\,y = u(x)$

z " " " $= v(x)$

S = ins delle sol di (2), vogliamo studiare la sua struttura

Abbiamo visto che è uno spazio vett., cerchiamo la sua dimensione

Premettiamo

TEOREMA Un PC legato ad un'eq. lin. di ordine n (con coefficienti continui) ha una e una sola sol.

Cons. n sol della (2) $y_1, \dots, y_n$, costruiamo un determinante WRONSKIANO

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ - & - & - \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Si trova $W'(x) = -a_1(x)\, W(x)$ $\Rightarrow$ W è sol di un'eq diff lineare del I ordine $\Rightarrow$ W è del tipo $k\, e^{A_1(x)}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ W è sempre $\neq 0$ opp. id. nulla

$n=2$ $\quad y_1, y_2 \quad W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ $\qquad y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0$, $\quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$

$W' = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_2' y_1'} - y_2 y_1'' =$

$= y_1(-a_1 y_2' - a_2 y_2) - y_2(-a_1 y_1' - a_2 y_1) =$

$= -a_1 y_1 y_2' - \cancel{a_2 y_1 y_2} + a_1 y_1' y_2 + \cancel{a_2 y_1 y_2} = a_1(-y_1 y_2' + y_1' y_2) = -a_1 W$

DEF. $y_1, \dots, y_n$ INDIPENDENTI se $W(x) \neq 0$ $\quad \forall x \in (\alpha, \beta)$
DIPENDENTI se $W(x) = 0$ $\quad$ "

TEOR. 1 $\quad \exists$ n sol indip.
DIM. Costruiamo n PC scelto $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$(PC)_i \begin{cases} y^{(n)} + \dots = 0 \\ y_j(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases} \end{cases}$ $\qquad$ es. $\begin{cases} y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} - \; -- \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$

Ciascuno di questi PC ha una sola sol $y_1, \dots, y_n$

$W(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$

in generale $W(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$

quindi sono indip.

TEOR. 2 $\quad$ Date n sol indip, ogni altra sol è loro comb. lin.
DIM. $\quad y_1, \dots, y_n$ indip
z altra sol

dobbiamo provare che $\exists\, k_1, \dots, k_n$! $\quad z(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i\, y_i(x)$

Sia $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e cons. un PC

$\begin{cases} y^{(n)} + \dots = 0 \\ y(x_0) = z(x_0) \\ y'(x_0) = z'(x_0) \\ -- \\ y^{(n-1)}(x_0) = z^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$ $\qquad$ z è la sua unica sol.

Cerchiamo una sol del tipo
$y = \sum k_i y_i$

$$\begin{cases} k_1 y_1(x_0) + \dots + k_n y_n(x_0) = z(x_0) \\ k_1 y_1'(x_0) + \dots + k_n y_n'(x_0) = z'(x_0) \\ -- \\ k_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + k_n y_n^{(n-1)}(x_0) = z^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

$(k_1, \dots, k_n)$ devono essere una sol di questo ~~[illegible]~~ sist. lineare di n eq in n incognite, il det dei coeff è $W(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ ha una e una sola sol $(k_1, \dots, k_n)$ $\Rightarrow$ $y(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i\, y_i(x)$ è una sol del PC ma z era l'unica sol $\Rightarrow$ $z = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i$

Si può dim. che $y_1, \dots, y_n$ sono indip. $\Leftrightarrow$ sono l. i.

Ne segue che S ha dimensione n e una sua base è formata da n sol. indip.