01_Rielaborazione

Questo file è la rielaborazione delle slide 01_Parte1.pdf

La **logica** è un linguaggio formale usato per rappresentare informazioni. Ogni linguaggio è formato da:

- **Sintassi**: che definisce le frasi del linguaggio
- **Semantica**: che definisce il significato delle frasi
  La logica più semplice di tutti è la logica proporzionale oggi basata sulla matematica booleana, quest'ultima viene detta proporzionale perché si occupa di proposizioni, più precisamente di variabili proposizionali, quest'ultime possono assumere solo 2 valori:
- 1 = VERO
- 0 = FALSO
  Ogni variabile proposizionale è già da se una "formula" proposizionale, ovviamente questa è una formula molto basilare. Per creare delle formule più complesse usiamo dei connettivi logici che sono i seguenti:
- ¬ (negazione): si legge "non", e inverte il valore di verità di una proposizione. Se una proposizione è vera, la sua negazione è falsa, e viceversa. Questo connettivo logico rappresenta la porta logica NOT
- ∨ (disgiunzione logica): si legge "o", ed è vera se **almeno una** delle due proposizioni è vera. Questo connettivo logico rappresenta la porta logica OR
- ∧ (congiunzione logica): si legge "e", ed è vera se **entrambe** le proposizioni sono vere. Questo connettivo logico rappresenta la porta logica AND
- ⇒ (implicazione): si legge "se... allora…" o semplicemente "implica". È falsa solo se il primo termine è vero e il secondo è falso.
- ⇔ (doppia implicazione o coimplicazione): si legge "se … e solo se …". È vera quando entrambi i termini sono veri o entrambi falsi.

Esempi di formule (usando le variabili P e Q che sono scelte casualmente):

- ¬P = "Non P"
- Q
- P ∨ Q = "P o Q"
- P ∧ Q = "P e Q"
- P ⇒ Q = "se P allora Q"
- P ⇔ Q = P se e solo se Q
  Come per le operazioni normali (somma, moltiplicazione, ecc...) anche queste

hanno delle precedenze, la negazione (¬) ha la precedenza su tutto mentre congiunzione (∨) e disgiunzione (∧) hanno la stessa priorità infatti:

- ¬p ∨ q è la formula dove la negazione si applica solo a p
- ¬(p ∨ q) è la formula dove la negazione si applica alla disgiunzione p ∨ q

Date 2 formule P_1 e P_2 che ovviamente posso assumere solo una valore (questa cosa la impone una funzione chiamata **interpretazione** che appunto assegna a P_1 e P_2 i valori 1 o 0) Di seguito si calcola il valore di verità delle seguenti formule:

- I($\neg P_1$) è vera solo se P_1 è vera
- I($P_1 \lor P_2$) è vera se almeno una tra P_1 o P_2 è vera
- I($P_1 \land P_2$) è vera se entrambe sono vere
- I($P_1 \Rightarrow P_2$) è falsa solo quando P_1 è vera e P_2 è falsa, nei restanti casi è vera
- I($P_1 \Leftrightarrow P_2$) è vera se e solo se P_1 == P_2
  Questa è la tabella della verità di tutte queste formule:

P_1	P_2	$\neg P_1$	$P_1 \lor P_2$	$P_1 \land P_2$	$P_1 \Rightarrow P_2$	$P_1 \Leftrightarrow P_2$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Nomenclature varie:

- Data una formula diremo che è **==soddisfacibile**== se esiste almeno un caso in cui sia vera, qualunque siano i valori delle variabili.
- Data una formula diremo che è **insoddisfacibile** se non esiste almeno una caso in cui sia vera, qualunque siano i valori delle variabili.
- Data una formula si dice **tautologia** se è sempre vera qualunque siano i valori delle variabili.
  Di seguito degli esempi (usando le variabili della tabella di verità):
- $P_1 \land P_2$ è soddisfacibile
- $P_2 \lor \neg P_2$ è tautologia (Questo viene chiamato **Principio del terzo escluso**)
- $P_2 \land \neg P_2$ è insoddisfacibile (Questo viene chiamato **Principio di non contraddizione**)

Due formule P_1 e P_2 si dicono equivalenti se hanno lo stesso valore è si scrivono in questo modo: $P_1 \equiv P_2$

Per la disgiunzione e la congiunzione vale la proprietà commutativa e associativa

- p ∨ q ≡ q ∨ p (commutativa della disgiunzione)
- p ∨ (q ∨ r) ≡ (p ∨ q) ∨ r (associatività della disgiunzione)

Giustificazione o conseguenza logica:

Sia P un insieme di proporzioni e p una proporzione generica, ci chiediamo quando P giustifica p questa domanda la denotiamo con: P |= p
Di seguito un esempio:
P = { p, p => q }
P |= q
Questa è la tavola di verità dell'esempio

Esempio Giustificazione Logica

p	q	$p \to q$	q	
F	F	T	F	p falsa
F	T	T	T	p falsa
T	F	F	F	$p \Rightarrow q$ falsa
T	T	T	T	✓

N.B: Per essere vero che P giustifica q tutte le formule di P devono essere vere e anche q deve essere vera. Questa cosa si capisce ancora meglio in questo esempio

P = { p ∨ r, q ∨ ¬r }
P |= p ∨ q

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee \neg r$	$p \vee q$
F	F	F	F	T	F
F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T ✓
T	F	F	T	T	T ✓
T	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T ✓
T	T	T	T	T	T ✓

Come possiamo facilmente notare P giustifica quella disgiunzione (ovvero p ∨ q) solo quando tutte le formule di P e la disgiunzione tra p e q sono vere (attenzione ai vari casi nella tabella)

Molte volte formule complesse vengono standardizzate in 2 forme chiamate "normali":

- CNF (Forma Normale Congiuntiva) che si basa sul fare un AND di vari OR:
  - (p ∨ q) ∧ (¬p ∨ ¬r ∨ s)
- DNF (Forma Normale Disgiuntiva) che si basa sul fare un OR di vari AND:
  - (p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬r ∧ s)