

N.B. I presenti appunti sono destinati esclusivamente agli studenti del corso di Elementi di Analisi Matematica 2 (a.a. 2025-2026) - CdL in Informatica dell'Università di Catania, ed è vietato ogni altro utilizzo.

Capitolo 1

INTEGRALI INDEFINITI E DEFINITI

1.1 INTEGRALE INDEFINITO

Sia data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 1 Sia $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b) e tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Si dice allora che F è una primitiva di f in (a, b) .

Si ha il seguente

Teorema 1 (Caratterizzazione delle primitive) Sia F una primitiva di f in (a, b) . Allora, tutte e sole le primitive di f in (a, b) sono le funzioni $F(x) + k$, al variare di k in \mathbb{R} .

Dimostrazione. Se F è una primitiva di f in (a, b) e $k \in \mathbb{R}$, posto $G(x) = F(x) + k$, si ha subito $G'(x) = f(x) + 0 = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$. Viceversa, se F e G sono due primitive di f in (a, b) la funzione differenza

$$H(x) = G(x) - F(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

è derivabile in (a, b) e si ha

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Per il teorema sulle funzioni con derivata identicamente nulla (conseguenza del Teorema di Lagrange) ⁽¹⁾ H è costante in (a, b) e quindi esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - G(x) = k, \forall x \in (a, b)$.

Da questo teorema segue che una funzione, se ha una primitiva, ne ha infinite. Esistono tuttavia delle funzioni che non hanno alcuna primitiva, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 1 Si consideri la funzione definita in \mathbb{R} ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e supponiamo per assurdo che F sia una primitiva di f in $] - \infty, +\infty[$. In particolare, F è una primitiva di f sia in $[0, +\infty[$ sia in $] - \infty, 0[$. Osserviamo che un'altra primitiva di f in $[0, +\infty[$ è la funzione $g(x) = x$, quindi, per il teorema precedente, esiste un numero reale k tale che $F(x) = x + k \quad \forall x \geq 0$. Analogamente si conclude che esiste un numero reale c tale che $F(x) = -x + c \quad \forall x < 0$.

Dato che F è una funzione derivabile e quindi continua in $] - \infty, +\infty[$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, cioè $c = k$. In definitiva,

$$F(x) = |x| + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e ciò è assurdo perché implica che la funzione $|x|$ è derivabile in tutto \mathbb{R} .

Definizione 2 Si chiama integrale indefinito di f e si denota con il simbolo

$$\int f(x)dx,$$

l'insieme formato dalle primitive di f , se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non è dotata di primitive.

¹Se x_1, x_2 sono due punti distinti di (a, b) , supposto che $x_1 < x_2$ possiamo applicare il Teorema di Lagrange alla restrizione di H all'intervallo $[x_1, x_2]$ e otteniamo che esiste $c \in]x_1, x_2[$ tale che $H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1) = 0$ e dunque $H(x_2) = H(x_1)$.

Per quanto visto sopra, se F è una primitiva di f , si suole scrivere

$$\int f(x) \, dx = F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

.

L'integrale indefinito è dunque **un insieme di funzioni**, vuoto o costituito da infiniti elementi.

Dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari si può facilmente costruire una tabella di integrali indefiniti immediati:

$$\begin{aligned}\int e^x \, dx &= e^x + k, \\ \int \cos x \, dx &= \sin x + k \\ \int \sin x \, dx &= -\cos x + k \\ \int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx &= \arctan x + k \\ \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx &= \arcsin x + k = -\arccos x + k \\ \int x^\alpha \, dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, (\alpha \neq -1) \\ \int \frac{1}{x} \, dx &= \log |x| + k.\end{aligned}$$

Tenendo presente la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha poi, se f è una funzione derivabile tale da potere effettuare di volta in volta la composizione indicata:

$$\begin{aligned}
\int e^{[f(x)]} f'(x) \, dx &= e^{f(x)} + k, \\
\int \cos[f(x)] f'(x) \, dx &= \sin[f(x)] + k \\
\int \sin[f(x)] f'(x) \, dx &= -\cos[f(x)] + k \\
\int \frac{1}{[f(x)]^2 + 1} f'(x) \, dx &= \arctan[f(x)] + k \\
\int \frac{1}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} f'(x) \, dx &= \arcsin[f(x)] + k = -\arccos[f(x)] + k \\
\int [f(x)]^\alpha f'(x) \, dx &= \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, (\alpha \neq -1) \\
\int \frac{1}{f(x)} f'(x) \, dx &= \log |f(x)| + k.
\end{aligned}$$

Teorema 2 (Proprietà di omogeneità.) *Se f è dotata di primitive in (a, b) e k è un numero reale diverso da zero, allora*

i) kf è dotata di primitive in (a, b) ;

ii) $\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx.$

dove il secondo membro indica l'insieme delle funzioni ottenute moltiplicando per k le primitive di f .

Dimostrazione. Se

$$F \in \int kf(x) \, dx$$

allora $F'(x) = kf(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Posto

$$G(x) = \frac{F(x)}{k} \quad \forall x \in (a, b),$$

si ha $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$, cioè G è una primitiva di f in (a, b) . Poiché $F(x) = kG(x)$, $\forall x \in (a, b)$ la funzione F appartiene al secondo membro

della *ii)* in quanto è il prodotto di k per una primitiva di f . Viceversa, se $F \in k \int f(x) \, dx$, esiste G primitiva di f tale che

$$F(x) = kG(x) \quad \forall x \in (a, b),$$

da cui $F'(x) = kf(x)$, $\forall x \in (a, b)$ e quindi

$$F \in \int kf(x) \, dx.$$

OSSERVAZIONE 1 Se $k = 0$ la tesi non vale, infatti in questo caso il primo membro è l'integrale della funzione identicamente nulla, cioè l'insieme delle funzioni costanti, mentre il secondo membro è formato dalla sola funzione identicamente nulla.

ESEMPIO 2 . Riprendendo quanto osservato prima a proposito dell'integrale di una funzione composta, e applicando la proprietà di omogeneità si ottiene, ad esempio, se $c \neq 0$

$$\int e^{cx} \, dx = \frac{1}{c} \int ce^{cx} \, dx = \frac{e^{cx}}{c} + k.$$

Analogamente

$$\int \cos(cx) \, dx = \frac{\sin(cx)}{c} + k$$

e

$$\int \sin(cx) \, dx = -\frac{\cos(cx)}{c} + k.$$

Teorema 3 (Proprietà distributiva.) *Siano f e g due funzioni dotate di primitive in (a, b) . Allora*

i) $f + g$ è dotata di primitive in (a, b)

$$ii) \int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

dove il secondo membro indica l'insieme delle funzioni ottenute sommando una primitiva di f ed una primitiva di g .

Dai due risultati precedenti segue il

METODO DI INTEGRAZIONE PER DECOMPOSIZIONE IN SOMMA

Se f, g sono due funzioni dotate di primitive in (a, b) e h, k sono due numeri reali, non entrambi nulli, allora la funzione $hf + kg$ è dotata di primitive in (a, b) e si ha

$$1. \int (hf(x) + kg(x)) \, dx = h \int f(x) \, dx + k \int g(x) \, dx$$

$$2. \int (hf(x) + kg(x)) \, dx = hF(x) + k \int g(x) \, dx,$$

essendo F una primitiva di f in (a, b) .

Il seguente risultato fornisce un utile metodo di integrazione quando la funzione integranda è il prodotto di una funzione per la derivata di un'altra funzione.

Teorema 4 (Integrazione indefinita per parti) *Siano f, g due funzioni derivabili in (a, b) . Se fg' è dotata di primitive in (a, b) allora*

i) $f'g$ è dotata di primitive in (a, b) ;

$$ii) \int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx.$$

Dimostrazione. Per la regola di derivazione del prodotto si ha

$$f(x)g'(x) = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) - f'(x)g(x) =$$

$$D[f(x)g(x)] - f'(x)g(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

e la *i*) è vera per la proprietà distributiva dell'integrale indefinito. Inoltre, applicando la formula di integrazione per decomposizione in somma si ottiene la *ii*).

Questa formula si usa dunque quando è possibile individuare, nella funzione integranda, un fattore di cui sia nota una primitiva. I fattori f e g' si chiamano, rispettivamente, *fattore finito* e *fattore differenziale*.

Applichiamo il metodo di integrazione per parti in alcuni casi notevoli.

ESEMPIO 3 Sia $n \in \mathbb{N}$. Determiniamo

$$\int e^x x^n dx.$$

Scegliendo e^x come fattore differenziale e x^n come fattore finito si ha

$$\begin{aligned} \int e^x x^n dx &= e^x x^n - n \int e^x x^{n-1} dx = \\ &= e^x x^n - n \left(e^x x^{n-1} - (n-1) \int e^x x^{n-2} dx \right) = \dots \end{aligned}$$

e dopo n integrazioni per parti, il problema viene ricondotto alla determinazione dell'integrale indefinito di e^x . Osserviamo che in questo caso avremmo potuto scegliere e^x come fattore finito (la sua derivata e^x) e x^n come fattore differenziale, (una sua primitiva è $\frac{x^{n+1}}{n+1}$). Tuttavia, tale scelta giusta non è

vantaggiosa, perchè riconduce alla determinazione dell'integrale $\int e^x x^{n+1} dx$.

Scegliendo, invece, e^x come fattore differenziale e x^n come fattore finito, il grado di x^n diminuisce (si osservi che derivando il grado di x^n diminuisce),

Ad esempio, se $n = 2$, si ha

$$\begin{aligned} \int e^x x^2 dx &= e^x x^2 - 2 \int e^x x dx = \\ e^x x^2 - 2 \left(e^x x - \int e^x \cdot 1 dx \right) &= e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + k. \end{aligned}$$

ESEMPIO 4 Determiniamo

$$\int \log x \, dx.$$

Considerando 1 come fattore differenziale si ha

$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x(\log x - 1) + k$$

ESEMPIO 5 Applicando il metodo di integrazione per parti, si determinano gli integrali indefiniti

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$$

con $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (per $n = 1$ l'integrale è immediato). Occupiamoci del caso $n = 2$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \\ &= \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \cdot x dx = \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + k. \end{aligned}$$

Si osservi che $\frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$ è la derivata di $\frac{1}{x^2 + 1}$.

OSSERVAZIONE 2 In alcuni casi, integrando per parti, si giunge ad una eguaglianza (insiemistica) del tipo

$$\int f(x) dx = g(x) + c \int f(x) dx$$

Se $c \neq 1$, si può dimostrare che

$$\int f(x) dx = \frac{1}{1-c} g(x) + k.$$

ESEMPIO 6 Appliciamo l'osservazione precedente per determinare

$$\int e^x \sin x dx.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \end{aligned}$$

e quindi

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + k.$$

Il seguente risultato fornisce un utile metodo di integrazione quando la funzione integranda è il prodotto di una funzione composta per la derivata della funzione interna.

Teorema 5 (Primo teorema di integrazione indefinita per sostituzione)

Siano: $g : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ una funzione derivabile, $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione dotata di primitive in (α, β) .

Allora, si ha:

i) $f(g(x))g'(x)$ è dotata di primitive in (a, b) ;

$$ii) \int f(g(x))g'(x) dx = \left[\int f(t)dt \right]_{t=g(x)}$$

dove il secondo membro è l'insieme delle funzioni ottenute componendo con g le primitive di f in (α, β) .

Dimostrazione Sia F una primitiva di f , consideriamo la funzione $G(x) = F(g(x))$, si ha $G'(x) = f(g(x))g'(x)$ quindi G è una primitiva di $f(g(x))g'(x)$. Dunque, il primo membro della tesi è uguale a $G(x) + k$, il secondo membro è uguale a $[F(t) + k]_{t=g(x)} = F(g(x)) + k = G(x) + k$. La tesi è dunque provata.

ESEMPIO 7 Prima di tutto osserviamo che, senza averlo specificato, abbiamo applicato proprio questa proprietà nell'Esempio 2. Infatti, si ha

$$1. \int e^{cx} dx = \frac{1}{c} \int ce^{cx} dx = \frac{1}{c} \left[\int e^t dt \right]_{t=cx} = \frac{e^{cx}}{c} + k$$

dato che la derivata di cx è c .

$$2. \text{ Si ha } \int x \cos(x^2+5) dx = \frac{1}{2} \int (2x) \cos(x^2+5) dx = \frac{1}{2} \left[\int \cos t dt \right]_{t=x^2+5} = \frac{1}{2} \sin(x^2+5) + k$$

dato che la derivata di x^2+5 è $2x$.

$$3. \text{ Si ha } \int \frac{e^x}{e^x+5} dx = \left[\int \frac{1}{t+5} dt \right]_{t=e^x} = \log(e^x+5) + k$$

dato che la derivata di e^x è e^x .

INTEGRAZIONE DEI POLINOMI TRIGONOMETRICI.

Ci limiteremo ad integrali del tipo

$$I_n = \int \cos^n x dx, \quad J_n = \int \sin^n x dx$$

$$H = \int \cos^m x \sin^n x dx$$

essendo $n, m \in \mathbb{N}$.

Si ha:

$$I_1 = \sin x + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$I_2 = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$I_3 = \int \cos x \cdot \cos^2 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \left[\int (1 - t^2) dt \right]_{t=\sin x}$$

e analogamente si procede per $n > 3$. In pratica, per n pari si utilizzano le formule di bisezione e per n dispari si ricorre all'integrazione per sostituzione.

Analogamente

$$J_1 = -\cos x + k$$

$$J_2 = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx$$

e si procede come per I_2

$$J_3 = \int \sin x \cdot \sin^2 x dx = - \int (-\sin x)(1 - \cos^2 x) dx$$

e si procede come per I_3 .

Per determinare H si distinguono due casi:

- i) se almeno uno fra m, n è dispari, ad esempio $m = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}_0$ si procede per sostituzione:

$$\begin{aligned} H &= \int \cos x \cdot (\cos^2 x)^p \cdot \sin^n x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)^p \sin^n x dx = \\ &= \left[\int (1 - t^2)^p t^n dt \right]_{t=\sin x} \end{aligned}$$

quindi ci si riconduce all'integrale di un polinomio

- ii) se m, n sono entrambi pari, ovvero $m = 2p, n = 2q$, con $p, q \in \mathbb{N}$ si procede nel seguente modo

$$H = \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^p \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^q dx$$

e ci si riconduce a integrali del tipo I_n .

ESEMPIO 8 Determiniamo alcuni integrali indefiniti di polinomi trigonometrici.

1. $\int \sin x \cos^3 x dx = - \int (-\sin x) \cos^3 x dx = - \left[\int t^3 dt \right]_{t=\cos x} = -\frac{\cos^4 x}{4} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$
2. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int (\cos x) \cos^2 x \sin^2 x dx = \int (\cos x)(1-\sin^2 x) \sin^2 x dx = \left[\int (t^2 - t^4) dt \right]_{t=\sin x} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + k, \quad k \in \mathbb{R}$
3. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1-\cos^2(2x)}{4} dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\right) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

Alla fine del paragrafo presenteremo un altro metodo, più raffinato, di integrazione per sostituzione.

1.2 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Sia f una funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \tag{1.1}$$

con a, b polinomi primi fra loro.

Se il grado di a è maggiore o uguale del grado di b , effettuando la divisione fra a e b si ottengono due polinomi q e r , quest'ultimo avente grado minore di quello di b , tali che

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}.$$

Quindi per integrare una qualsiasi funzione razionale fratta basta integrare un polinomio e una funzione razionale fratta propria, ossia una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.

Supponiamo dunque che la funzione (1.1) sia una funzione razionale fratta propria. e sia m il grado del polinomio b . È noto che l'equazione $b(x) = 0$ ha esattamente m soluzioni reali o complesse, ciascuna con una sua molteplicità. In particolare se α è una soluzione reale con molteplicità n allora $b(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^n$, mentre se il numero complesso $k + ic$ è una soluzione con molteplicità n , anche il suo coniugato $k - ic$ è una soluzione con la stessa molteplicità e il polinomio $b(x)$ è divisibile per $[x - (k + ic)]^n [x - (k - ic)]^n = [(x - k)^2 + c^2]^n$.

Dunque, il polinomio b si decompone nel prodotto di fattori del tipo $(x - \alpha)^n$ e fattori del tipo $[(x - k)^2 + c^2]^n$, cioè nel prodotto di potenze di polinomi di primo grado e di polinomi di secondo grado con discriminante negativo.

A questo punto, si dimostra che è possibile decomporre la funzione razionale f nella somma di funzioni razionali (dette fratti semplici) del tipo

$$\frac{A}{(x - \alpha)^n} \quad (1.2)$$

$$\frac{Ax + B}{[(x - k)^2 + c^2]^n}, \quad c > 0. \quad (1.3)$$

con $A, B, \in \mathbb{R}$.

Precisamente, ogni fattore di b del tipo $(x - \alpha)^n$ dà luogo ad n fratti semplici

$$\frac{A_1}{x - \alpha}, \frac{A_2}{(x - \alpha)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x - \alpha)^n}$$

Ogni fattore del tipo $[(x - k)^2 + c^2]^n$ dà luogo ad n fratti semplici

$$\frac{A_1x + B_1}{(x - k)^2 + c^2}, \frac{A_2x + B_2}{[(x - k)^2 + c^2]^2}, \dots, \frac{A_nx + B_n}{[(x - k)^2 + c^2]^n}.$$

ESEMPIO 9 Ad esempio, se una funzione razionale fratta (propria) ha denominatore nella forma

$$x^3(x-2)(x^2+5)(x^2+1)^2$$

i suoi fratti semplici saranno:

$$\frac{A_1}{x}, \frac{A_2}{x^2}, \frac{A_3}{x^3}, \frac{A_4}{x-2}$$

e

$$\frac{C_1x+B_1}{x^2+5}, \frac{C_2x+B_2}{(x^2+1)}, \frac{C_3x+B_3}{(x^2+1)^2}.$$

L' integrazione di una funzione razionale fratta propria viene ricondotta all'integrazione dei suoi fratti semplici.

INTEGRAZIONE DEI FRATTI SEMPLICI

I fratti semplici (1.2) si integrano nel seguente modo. Intanto osserviamo che, grazie alla proprietà di omogeneità, possiamo supporre $A = 1$. Poniamo

$$I_n = \int \frac{1}{(x-c)^n} dx$$

Se $n = 1$ si ha

$$I_1 = \log |x - c| + k.$$

Se $n > 1$ si ha

$$I_n = \int (x-c)^{-n} dx = \frac{1}{-n+1} \frac{1}{(x-c)^{n-1}} + k$$

Integriamo i fratti semplici (1.3). Tratteremo solo i casi $n = 1$ e $n = 2$.

Primo caso: $n = 1$.

Prima di tutto osserviamo che, grazie al primo teorema di integrazione per sostituzione, possiamo supporre $k = 0$. Si ha, decomponendo in somma:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+c^2} dx = A \int \frac{x}{x^2+c^2} dx + B \int \frac{1}{x^2+c^2} dx.$$

Senza ledere la generalità, possiamo supporre che $A = B = 1$.

Consideriamo separatamente i due integrali ottenuti.

$$\int \frac{x}{x^2+c^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+c^2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+c^2) + k;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+c^2} dx &= \int \frac{1}{c^2 \left[\left(\frac{x}{c} \right)^2 + 1 \right]} dx = \frac{1}{c} \int \frac{1}{c} \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{c} \right)^2 + 1 \right]} dx = \\ &= \frac{1}{c} \left[\int \frac{1}{t^2+1} dt \right]_{t=\frac{x}{c}} = \frac{1}{c} \arctan \frac{x}{c} + k \end{aligned}$$

dato che la derivata di $\frac{x}{c}$ è $\frac{1}{c}$.

Secondo caso: $n = 2$.

Anche questa volta, senza ledere la generalità possiamo supporre che $A = B = 1$ e che $k = 0$. Si ha, decomponendo in somma:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+c^2)^2} dx = I_1 + I_2$$

essendo

$$I_1 = \int \frac{x}{(x^2+c^2)^2} dx, \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+c^2)^2} dx.$$

Si ha

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+c^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{t^2} dt \right]_{t=x^2+c^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+c^2} + k$$

Per determinare I_2 procediamo come abbiamo visto nell'Esempio 5 relativo all'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{c^2} \int \frac{c^2}{(x^2+c^2)^2} dx = \frac{1}{c^2} \int \frac{x^2+c^2-x^2}{(x^2+c^2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{x^2+c^2} dx + \frac{1}{c^2} \int \frac{-x^2}{(x^2+c^2)^2} dx. \end{aligned}$$

Il primo dei due integrali è stato già studiato nel caso $n = 1$. Per determinare il secondo osserviamo che la derivata di $\frac{1}{x^2+c^2}$ è $\frac{-2x}{(x^2+c^2)^2}$ quindi è possibile procedere per parti:

$$\int \frac{-x^2}{(x^2+c^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{-2x}{(x^2+c^2)^2} dx = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+c^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+c^2} dx.$$

e anche stavolta ci si riconduce a quanto studiato nel caso $n = 1$.

Con le considerazioni fatte finora, siamo in grado di integrare una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + px + q}.$$

Posto $\Delta = p^2 - 4q$, distinguiamo tre casi:

1. $\Delta > 0$.

In questo caso il trinomio al denominatore ha due zeri reali e distinti x_1, x_2 e si ha $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Si cercano A e B tali che

$$\frac{ax + b}{x^2 + px + q} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} A + B = a \\ -x_2A - x_1B = b \end{cases}$$

che ammette una sola soluzione in quanto il determinante dei coefficienti vale $x_2 - x_1 \neq 0$. Ci si riconduce quindi al caso (1.2).

2. $\Delta = 0$.

In questo caso il trinomio al denominatore ha un solo zero x_0 di molteplicità 2 e si ha

$$x^2 + px + q = (x - x_0)^2.$$

Procedendo come nel caso precedente, si determinano due numeri A e B tali che

$$\frac{ax + b}{x^2 + px + q} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2}.$$

In questo modo, ci si riconduce nuovamente al caso (1.2).

3. $\Delta < 0$.

In questo caso, si utilizza il metodo del completamento dei quadrati:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2$$

quindi il trinomio al denominatore si scrive nella forma $(x - k)^2 + c^2$ e si ha

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= a \int \frac{x}{x^2 + px + q} dx + b \int \frac{1}{(x - k)^2 + c^2} dx = \\ &= \frac{a}{2} \int \frac{2x}{x^2 + px + q} dx + b \int \frac{1}{(x - k)^2 + c^2} dx = \\ &= \frac{a}{2} \int \frac{2x + p - p}{x^2 + px + q} dx + b \int \frac{1}{(x - k)^2 + c^2} dx = \\ &= \frac{a}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{1}{(x - k)^2 + c^2} dx = \\ &= \frac{a}{2} \log(x^2 + px + q) + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \left[\int \frac{1}{t^2 + c^2} dt \right]_{t=x-k}. \end{aligned}$$

Ci si riconduce quindi al caso (1.3).

ESEMPIO 10 Determiniamo

$$I = \int \frac{x + 4}{x^2 - x - 6} dx.$$

Si ha

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

quindi i fratti semplici saranno del tipo

$$\frac{A}{x - 3}, \quad \frac{B}{x + 2}.$$

Determiniamo le costanti A, B in modo che

$$\frac{x+4}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A-3B}{x^2-x-6}$$

quindi deve essere $A+B=1$, $2A-3B=4$. Si trova

$$A = \frac{7}{5}, \quad B = -\frac{2}{5}$$

e, integrando i due fratti semplici, l'integrale richiesto risulta

$$I = \frac{7}{5} \log|x-3| - \frac{2}{5} \log|x+2| + k.$$

ESEMPIO 11 Determiniamo

$$\int \frac{x+4}{x^2-2x+1} dx.$$

In questo caso i fratti semplici sono del tipo

$$\frac{A}{x-1}, \quad \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Si trova $A=1$, $B=5$ quindi l'integrale richiesto risulta $\log|x-1| - \frac{5}{x-1} + k$.

ESEMPIO 12 Determiniamo

$$I = \int \frac{x+4}{x^2+x+4} dx.$$

Il denominatore ha discriminante negativo, quindi si procede nel seguente modo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+x+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx + \frac{1}{2} \int \frac{7}{x^2+x+4} dx = \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+x+4) + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+x+4) + \frac{7}{\sqrt{15}} \arctan \frac{2}{\sqrt{15}} \left(x+\frac{1}{2}\right) + k \end{aligned}$$

ESEMPIO 13 Determiniamo il seguente integrale

$$I = \int \frac{x+3}{(x^2+4)^2} dx$$

Risulta

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\int \frac{dt}{t^2} \right]_{t=x^2+4} + 3 \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \\ &= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4} \int \frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{3}{8} \int -\frac{2x}{(x^2+4)^2} \cdot x dx = \\ &= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{8} \arctan \frac{x}{2} - \frac{3}{8} \frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x^2+4} = \\ &= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{9}{16} \arctan \frac{x}{2} - \frac{3}{8} \frac{x}{x^2+4} + k. \end{aligned}$$

Vediamo ora alcuni esempi in cui la funzione razionale fratta non è propria. Come detto prima, la funzione deve essere decomposta nella somma di un polinomio e di una funzione razionale fratta propria. In alcuni casi basta effettuare alcune semplici trasformazioni (primi tre esempi a seguire), altre volte è conveniente effettuare la divisione fra il numeratore e il denominatore (ultimi due esempi). (Gli integrali proposti possono essere facilmente completati per esercizio).

ESEMPIO 14 Determinare i seguenti integrali indefiniti

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{x+1}{2x+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+3-1}{2x+3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{2x+3} \right) dx. \end{aligned}$$

2.
$$\int \frac{x^4}{x^2+1} dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{x^4-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$
$$\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx.$$
3.
$$\int \frac{x^2+2}{x-5} dx = \int \frac{x^2-25+25+2}{x-5} dx = \int \left(x+5 + \frac{27}{x-5} \right) dx$$
4.
$$\int \frac{x^3}{x^2+2} dx = \int \left(x + \frac{-2x}{x^2+2} \right) dx$$
5.
$$\int \frac{x^4+1}{x^3-2} dx = \int \left(x + \frac{3x+1}{x^3-2} \right) dx$$

INTEGRAZIONE PER RAZIONALIZZAZIONE.

Grazie al primo teorema di integrazione per sostituzione, è possibile ricondurre alcuni integrali a quelli di funzioni razionali fratte. Lo vediamo attraverso alcuni esempi.

1.
$$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \left[\int \frac{1}{t+1} dt \right]_{t=e^x} = \log(e^x+1) + k$$
2.
$$\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+1} dx = \int e^x \frac{e^x+4}{e^{2x}+1} dx = \left[\int \frac{t+4}{t^2+1} dt \right]_{t=e^x}$$

qui abbiamo osservato che è presente il fattore $D(e^x) = e^x$. Se esso non è presente, basta, per ottenerlo, moltiplicare il numeratore e il denominatore per e^x , come nel seguente esempio:

3.
$$\int \frac{dx}{e^x+3} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x} dx = \left[\int \frac{dt}{t^2+3t} \right]_{t=e^x}$$

e, analogamente

$$4. \int \frac{\tan x}{\tan x + 1} dx = \int \frac{\tan x (\tan^2 x + 1)}{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1)} dx = \left[\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} dt \right]_{t=\tan x}$$

qui abbiamo moltiplicato numeratore e denominatore per $\tan^2 x + 1$ che è la derivata di $\tan x$.

Concludiamo il paragrafo presentando il seguente

Teorema 6 (Secondo teorema di integrazione per sostituzione) *Siano: $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione dotata di primitive, $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $\text{Im } g = (a, b)$. Se g è invertibile si ha*

$$\int f(x) dx = \left[\int f(g(t))g'(t) dt \right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Dimostrazione. Dal primo teorema di integrazione per sostituzione segue che

$$\int f(g(t))g'(t) dt = \left[\int f(x) dx \right]_{x=g(t)}.$$

Componendo ambo i membri con $t = g^{-1}(x)$ si ottiene la tesi.

ESEMPIO 15 Facciamo vedere alcune applicazioni del Teorema precedente

1. Determinare

$$\int \sqrt{x+3} dx.$$

Procediamo nel seguente modo. Si ha $(a, b) = [-3, +\infty[$ e l'obiettivo è quello di porre

$$\sqrt{x+3} = t.$$

Si deve scegliere dunque $(c, d) = [0, +\infty[$ e $g(t) = t^2 - 3$ (si trova ricavando x da $\sqrt{x+3} = t$). Si prova subito che tutte le ipotesi del teorema sono soddisfatte, in particolare si ha

$$g'(t) = 2t, \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x+3};$$

quindi

$$\int \sqrt{x+3} \, dx = \left[\int t \cdot 2t \, dt \right]_{t=\sqrt{x+3}} = \frac{2}{3}(\sqrt{x+3})^3 + k.$$

2. Sia

$$f(x) = \sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}$$

con $ps - qr \neq 0$ (in caso contrario f sarebbe costante) una funzione definita in un intervallo (a, b) in cui il radicando è non negativo. La sostituzione da fare in questo caso è

$$t = \sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}$$

con $t \geq 0$. Si ha allora

$$g(t) = \frac{st^2 - q}{p - rt^2}, \quad g'(t) = \frac{2(ps - qr)t}{(p - rt^2)^2}.$$

Poichè g' ha sempre segno costante, la funzione g è invertibile. Applicando il secondo teorema di integrazione per sostituzione si ottiene

$$\int f(x) \, dx = \left[\int \frac{2(ps - qr)t^2}{(p - rt^2)^2} dt \right]_{t=\sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}}$$

che è l'integrale di una funzione razionale. Vediamo a titolo di esempio un caso particolare.

3. Sia

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}},$$

vogliamo determinare le primitive in $(a, b) =]3, +\infty[$. Poniamo

$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}},$$

con $t > 0$. Ricavando x , si ottiene

$$g(t) = \frac{3t^2 + 1}{t^2 - 2}.$$

Si vede facilmente che sono verificate le ipotesi del secondo teorema di integrazione per sostituzione, in particolare si ha

$$g'(t) = -\frac{14t}{(t^2 - 2)^2} < 0,$$

quindi g è invertibile. Applicando il teorema si ottiene

$$\int f(x) \, dx = -14 \left[\int \frac{t^2}{(t^2 - 2)^2} dt \right]_{t=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}}$$

che si risolve con il metodo di integrazione delle funzioni razionali.

1.3 Integrale definito secondo Riemann.

Ricordiamo che dati due insiemi numerici A e B , se

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B,$$

si dice che A e B sono separati. In tal caso, si prova che

$$\sup A \leq \inf B$$

e tutti i numeri $c \in [\sup A, \inf B]$ vengono detti elementi di separazione fra A e B . Se

$$\sup A = \inf B$$

l'elemento di separazione è unico e gli insiemi A e B sono detti contigui. Si può provare che A e B sono contigui se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua

Definizione 3 Chiameremo decomposizione di $[a, b]$ ogni insieme di punti

$$D = \{x_0; x_1; \dots, x_{n-1}; x_n\}$$

tali che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

I punti x_0, x_1, \dots, x_n si chiamano capisaldi della decomposizione.

Il numero

$$|D| = \max \{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1})\}$$

si chiama ampiezza di D .

Sia $D = \{x_0; x_1; \dots, x_{n-1}; x_n\}$ una decomposizione di $[a, b]$. Poichè f è continua in ognuno degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, è ivi dotata di massimo e minimo assoluto.

Per ogni $i = 1, \dots, n$ siano $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tali che

$$f(y_i) = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad f(z_i) = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

Definizione 4 Le quantità

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n f(y_i)(x_i - x_{i-1})$$

e

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

si chiamano, rispettivamente, somma inferiore e somma superiore (secondo Riemann) della funzione f relative a D .

Al variare della decomposizione D , queste somme descrivono due insiemi numerici \underline{S} (insieme delle somme inferiori) e \overline{S} (insieme delle somme superiori).

Si può provare che qualunque siano le decomposizioni D_1 e D_2 , si ha

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

cioè gli insiemi \underline{S} e \overline{S} sono separati. Ne segue che

$$\sup \underline{S} \leq \inf \overline{S}.$$

Proviamo che

Teorema 7 *Gli insiemi \underline{S} e \overline{S} sono contigui.*

Dimostrazione. Dimostreremo che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists D \text{ decomposizione di } [a, b] \text{ tale che } S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo f una funzione continua in $[a, b]$, per il Teorema di Cantor essa è uniformemente continua in $[a, b]$.

Scriviamo la definizione di uniforme continuità in corrispondenza ad $\frac{\varepsilon}{b-a}$ e troviamo che

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (1.4)$$

Costruiamo una decomposizione D di $[a, b]$ tale che $|D| < \delta$. Siano $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ i capisaldi di questa decomposizione e $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i punti di minimo e massimo assoluto di f in $[x_{i-1}, x_i]$. Dato che $|D| < \delta$, si ha $|z_i - y_i| < \delta$, quindi, usando la (1.4), per tale coppia di punti vale la disuguaglianza

$$f(z_i) - f(y_i) = |f(z_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Si ha allora

$$S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^n (f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) <$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

In virtù del teorema precedente gli insiemi \underline{S} e \overline{S} sono contigui e $\sup \underline{S} = \inf \overline{S}$ è il loro unico elemento di separazione. Ha senso, quindi dare la seguente

Definizione 5 *Il numero*

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \underline{S} = \inf \overline{S}$$

si chiama integrale definito (secondo Riemann) di f in $[a, b]$

ESEMPIO 16 Consideriamo la funzione costante,

$$f(x) = k \quad \forall x \in [a, b].$$

Qualunque sia la decomposizione D scelta, si ha subito

$$s(f, D) = S(f, D) = k(b-a),$$

quindi

$$\int_a^b k \, dx = k(b-a).$$

Osserviamo che, se $k > 0$, il valore dell'integrale risulta uguale all'area del rettangolo

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Quest'osservazione sarà utile nell'ultimo paragrafo.

OSSERVAZIONE 3 Il valore dell'integrale dipende da f , da a e da b , non cambia cambiando il nome della variabile di integrazione: $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \dots$.

Sia f una funzione continua in un intervallo (α, β) e siano $a, b \in (\alpha, \beta)$. Se $a < b$ abbiamo già definito l'integrale definito $\int_a^b f(x) \, dx$. Tale definizione si generalizza al caso in cui $a \geq b$, nel seguente modo.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ -\int_b^a f(x) \, dx & \text{se } a > b. \end{cases}$$

1.4 Proprietà dell'integrale definito

Enunciamo le principali proprietà dell'integrale definito.

- **Proprietà additiva**

Se f è una funzione continua in (α, β) allora

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

qualunque siano i punti $a, b, c \in (\alpha, \beta)$.

- **Proprietà distributiva**

Se f, g sono continue in (α, β) , $a, b \in (\alpha, \beta)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) \, dx = c_1 \int_a^b f(x) \, dx + c_2 \int_a^b g(x) \, dx.$$

- **Proprietà della media**

Sia f continua in $[a, b]$. Posto $m = \min_{[a,b]} f$ e $M = \max_{[a,b]} f$ si ha

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

Inoltre, esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b-a).$$

La prima proprietà della media segue dalla definizione di integrale usando la decomposizione $D = \{a; b\}$. Per ottenere la seconda, basta osservare che

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$

e applicare la proprietà dei valori intermedi alla funzione f .

- **Prima proprietà di monotonia**

Sia f continua in $[a, b]$ e tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Allora si ha

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

L'eguaglianza si ha se e solo se f è identicamente nulla.

La proprietà di monotonia si può provare usando quella della media e osservando che $m \geq 0$.

Da questo risultato, applicando la proprietà distributiva, segue subito

- **Seconda proprietà di monotonia**

Siano f, g continue in $[a, b]$ e tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Allora si ha

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Si ha infine la seguente proprietà:

- Sia f continua in $[a, b]$. Allora

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

1.5 Funzione integrale

Sia $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Per ogni $x \in (\alpha, \beta)$ l'integrale definito $\int_{x_0}^x f(t) dt$ è un numero (che dipende da x). Possiamo quindi considerare la funzione $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

La funzione F si chiama *funzione integrale di f di punto iniziale x_0* . Ovviamente,

$$F(x_0) = 0.$$

Inoltre, vale la seguente proprietà

Teorema 8 *Siano $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $x_0, x_1 \in (\alpha, \beta)$.*

Se F e G sono due funzioni integrali di punto iniziale x_0 e x_1 rispettivamente, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Dimostrazione. Per definizione di funzione integrale si ha:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_{x_1}^x f(t) dt, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Usando la proprietà additiva, dell'integrale definito

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^x f(t) dt = G(x) + \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt$$

e l'ultimo addendo è costante.

Si ha il seguente importante

Teorema 9 (Teorema di derivazione della funzione integrale.) *Siano $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e F una funzione integrale di f . Allora, F è derivabile e si ha $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.*

Dimostrazione Consideriamo la funzione integrale F di punto iniziale x_0 . Proviamo la tesi in un punto $c \in (\alpha, \beta)$. Consideriamo il rapporto incrementale della funzione F nel punto c . Usando la definizione di F e la proprietà additiva dell'integrale definito, se $x \in (\alpha, \beta), x \neq c$ si ha

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{\int_{x_0}^x f(t) \, dt - \int_{x_0}^c f(t) \, dt}{x - c} = \frac{\int_c^x f(t) \, dt}{x - c}.$$

Supponendo, per semplicità, che $x > c$, dal teorema della media applicato alla restrizione di f in $[c, x]$ segue che esiste $\bar{x} \in [c, x]$ tale che

$$\frac{\int_c^x f(t) \, dt}{x - c} = f(\bar{x}).$$

Osserviamo che \bar{x} dipende da x e al tendere di x a c anche \bar{x} tende a c quindi, per la continuità di f nel punto c si ha

$$\lim_{x \rightarrow c} f(\bar{x}) = f(c)$$

da cui segue la tesi.

Dal risultato appena dimostrato segue che ogni funzione integrale di una funzione continua f è una primitiva di f . Il fatto, provato prima, che due funzioni integrali differiscono per una costante, ne è un'ulteriore conferma. In conclusione, possiamo dunque enunciare il seguente

Teorema 10 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Una funzione continua in un intervallo è ivi dotata di primitive.*

Illustriamo alcune applicazioni del Teorema fondamentale del calcolo integrale

ESEMPIO 17 Trovare la funzione F , primitiva in $]0, +\infty[$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0$$

e tale che $F(2) = 5$.

Dato che ogni funzione integrale è una primitiva di f , basta porre

$$F(x) = \int_2^x \frac{\sin t}{t} dt + 5.$$

ESEMPIO 18 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad \forall x > 0.$$

Si tratta della funzione integrale di una funzione continua, quindi

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0.$$

ESEMPIO 19 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt, \quad \forall x > 0.$$

Non è una funzione integrale in quanto l'estremo variabile di integrazione è quello inferiore. Tuttavia, si osserva che

$$F(x) = - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

e quindi

$$F'(x) = -\frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0.$$

ESEMPIO 20 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_1^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt, \quad \forall x > 0.$$

F è composta mediante la funzione integrale $\int_1^y \frac{\sin t}{t} dt$ e la funzione x^3 , quindi

$$F'(x) = 3x^2 \frac{\sin x^3}{x^3}, \quad \forall x > 0.$$

ESEMPIO 21 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_{x^4}^{\log x} \frac{\sin t}{t} dt, \quad \forall x > 0.$$

Non è una funzione integrale in quanto gli estremi di integrazione sono entrambi variabili, allora si procede nel seguente modo:

$$F(x) = \int_{x^4}^2 \frac{\sin t}{t} dt + \int_2^{\log x} \frac{\sin t}{t} dt$$

e quindi

$$F'(x) = -4x^3 \frac{\sin x^4}{x^4} + \frac{1}{x} \frac{\sin(\log x)}{\log x}, \quad \forall x > 0.$$

Dal teorema su esposto segue un altro risultato che stabilisce un importante legame fra l'integrale indefinito e l'integrale definito.

Teorema 11 (Formula fondamentale del calcolo integrale) Sia $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia F una sua primitiva. Se $a, b \in (\alpha, \beta)$, si ha

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Dimostrazione. La funzione $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di f , quindi esiste una costante k tale che, per ogni $x \in (\alpha, \beta)$, si ha $F(x) = G(x) + k$. In particolare, per $x = a$ ne segue $F(a) = k$ quindi $F(x) = G(x) + F(a)$. Calcolando i due membri di quest'eguaglianza per $x = b$ ne segue

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx + F(a) \text{ che è la tesi.}$$

ESEMPIO 22 Calcoliamo i seguenti integrali definiti

1. $\int_1^e \log x dx = [x \log x - x]_1^e = 1$
2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

1.6 Interpretazione geometrica dell'integrale di Riemann

È necessaria una premessa: si vuole attribuire un'area a sottoinsiemi del piano che non siano necessariamente dei poligoni. A tale scopo ci riferiremo alla *Teoria della misura secondo Peano e Jordan*, che in questa sede accenneremo solo relativamente ad insiemi che siano limitati e dotati di punti interni. Intanto, se $X = (a, b) \times (c, d)$ è un rettangolo limitato chiameremo area di X il numero

$$\text{area}(X) = (b - a)(d - c).$$

Chiameremo *plurirettangolo* ogni insieme che sia unione finita di rettangoli a due a due privi di punti interni a comune. Se X è un plurirettangolo chiamiamo $\text{area}(X)$ la somma delle aree dei rettangoli che lo compongono.

Supponiamo che X sia limitato e dotato di punti interni. Siano rispettivamente \underline{P} e \overline{P} rispettivamente le famiglie dei plurirettangoli contenuti in X e dei plurirettangoli contenenti X . Esse sono non vuote (basti pensare ad un quadrato inscritto in un intorno di un punto interno ad X e ad un quadrato circoscritto ad un cerchio contenente X). Introduciamo gli insiemi numerici \underline{A} e \overline{A} costituiti, rispettivamente, dalle aree degli elementi di \underline{P} e \overline{P} , si tratta evidentemente di due insiemi numerici separati. Se essi sono anche contigui, X è detto misurabile e il loro elemento di separazione è chiamato area di X ; se non sono contigui, X è detto non misurabile. Un esempio di insieme non misurabile è $X = ([0, 1] \times [0, 1]) \cap \mathbf{Q}^2 \cup ([0, 1] \times [1, 2])$. Si ha infatti in questo caso $\sup \underline{A} = 1$ e $\inf \overline{A} = 2$.

Sia ora f una funzione reale continua e non negativa in $[a, b]$. Introduciamo l'insieme, che chiameremo **rettangoloide di f**

$$R(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Siano D una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ di capisaldi x_0, x_1, \dots, x_n e $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i punti di minimo e massimo assoluto di f nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$.

Osserviamo che la quantità $f(y_i)(x_i - x_{i-1})$ rappresenta l'area di un rettangolo contenuto nella porzione di rettangoloide relativa all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. L'unione di tutti i rettangoli ottenuti in tal modo costituisce un plurirettangolo contenuto nel rettangoloide, e la sua area è $s(f, D)$. Analogamente $S(f, D)$ fornisce l'area di un plurirettangolo contenente il rettangoloide. Dire che la funzione è integrabile, cioè che gli insiemi \underline{S} e \overline{S} sono contigui equivale, dunque, a dire che sono contigui gli insiemi \underline{A} e \overline{A} , quindi garantisce che il rettangoloide è misurabile e la sua area è l'elemento di separazione fra tali insiemi, quindi l'integrale.

Questa conclusione generalizza quanto detto nel paragrafo precedente a proposito dell'integrale di una funzione costante.

Se f è a valori non positivi, si può in modo simile introdurre il rettangoloide e la sua area risulta uguale a $-\int_a^b f(x)dx$, dato che in questo caso $R(f)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse a $R(-f)$ quindi ha la sua stessa area.

Se, infine, f e g sono due funzioni continue in $[a, b]$ tali che $g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$, si può dimostrare che l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

che chiameremo **dominio normale rispetto all'asse delle ascisse**, è misurabile e la sua area è uguale a $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.