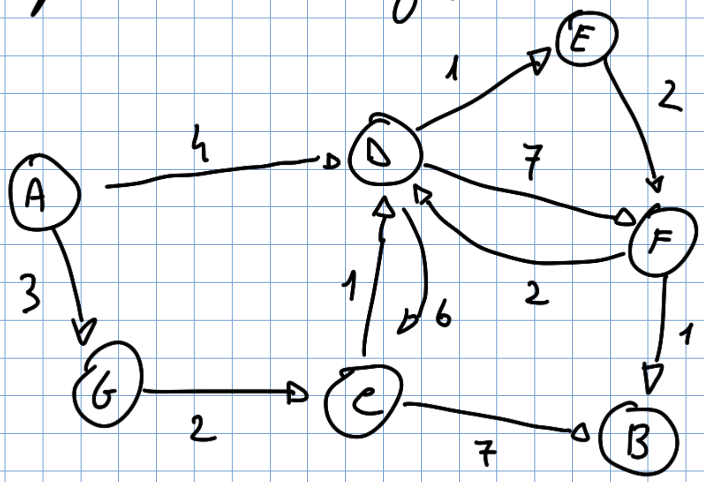
CAMMINI MINIMI → 4 TIPI

Negli esempi useremo i grafi orientati (vale anche per i non orientati)



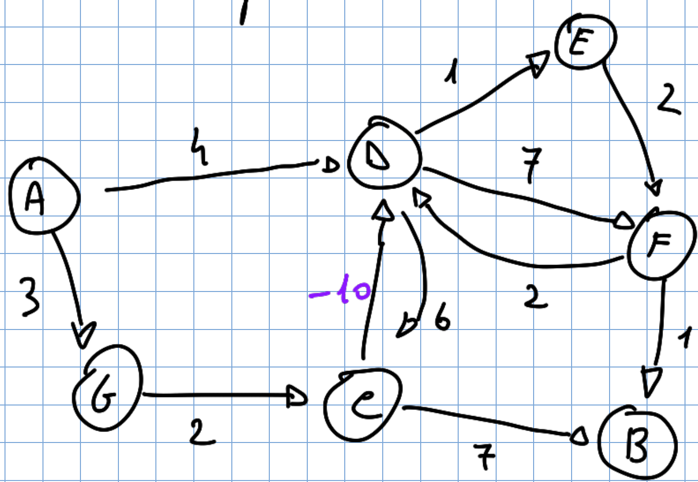
← grafo orientato pesato

<A, G, C, B> = 12

partenza ↑ ↑ arrivo

<A, D, C, B> = 17

<A, D, E, F, B> = 8 ← anche se è più lungo conviene in termini di peso



se aggiungo un peso negativo la situazione cambia

<A, G, C, D, E, F, B> = -1

Se esiste un peso negativo dove c'è un ciclo il problema non ha soluzione perché non esiste un cammino minimo

$w: E \to R^+$ → la soluzione può essere solo positiva

[algoritmo di bellman - ford]

4 TIPI DI CAMMINI MINIMI (guardare il libro perché spiega troppo veloce)

1) SINGLE SOURCE $s \in V = \delta(s, v) \; \forall v \in V$

punto da cui parto

distanza di cammino minimo da u a v

2) SINGLE ~~DESTINATION/TARGET~~ $t \in V = \delta(v, t) \; \forall v \in V$

DESTINAZIONE

3) ALL PAIRS $\delta(u, v) \; \forall u, v \in V$

4) ~~SINGLE PAIR~~ $s, t \in V = \delta(s, t)$

ORDINE DI DIFFICOLTÀ DEI PROBLEMI

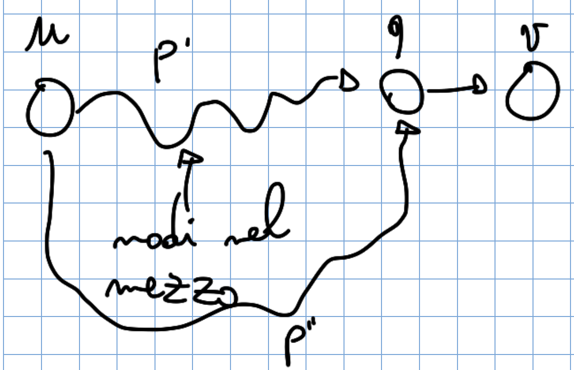
3 - 2/1 - 4

+ DIFFICILE - DIFFICILE

il single pair nel caso peggiore diventa un single source (lo eliminiamo, ma c'è niente in letteratura, anche il single destination

Ci concentriamo solo su 1) e 3)

immaginiamo un cammino minimo

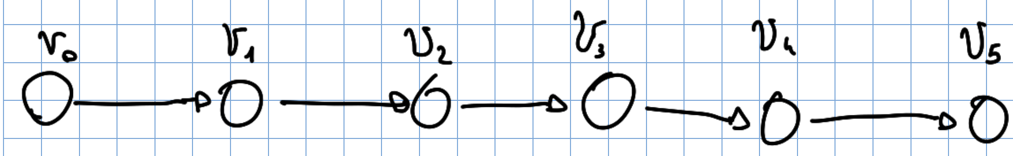


$p'(u \rightsquigarrow q) + w(q, v) = \delta(u, v)$

$p''(u \rightsquigarrow q) < p'(u \rightsquigarrow q)$

$p''(u \rightsquigarrow q) + w(q, v) < p'(u \rightsquigarrow q) + w(u, v) = \delta(u, v)$

è una contraddizione



questo è un cammino minimo ottimale e ogni sotto cammino sarà anche esso ottimale es. $v_0 - v_3$, $v_0 - v_4$, $v_0 - v_5$, $v_1 - v_4$ ....

$\forall\ v \in V$

$d[v]$ = stima di cammino minimo da $\underline{s}$ a $\underline{v}$

label

è una stima temporanea che si aggiorna con ogni cammino minimo che trovo, alla fine questa stima sarà = al vero cammino minimo

lo inizializzo a $+\infty \rightarrow d[v] = +\infty$

$\}$ AGGIORNAMENTI $\}$

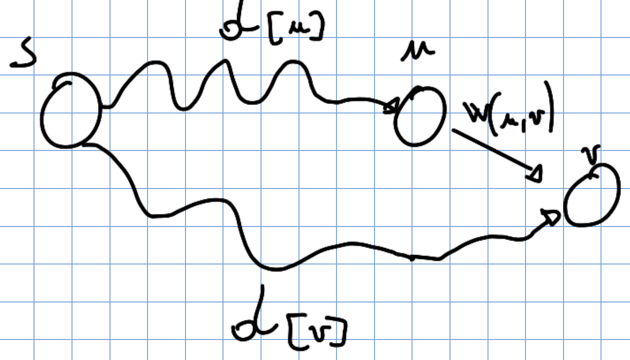
$d[v] = \delta(s, v)$

gli aggiornamenti sono dei RELAX(u, v)

↓

relax degli archi

COSA È RELAX di un arco ?

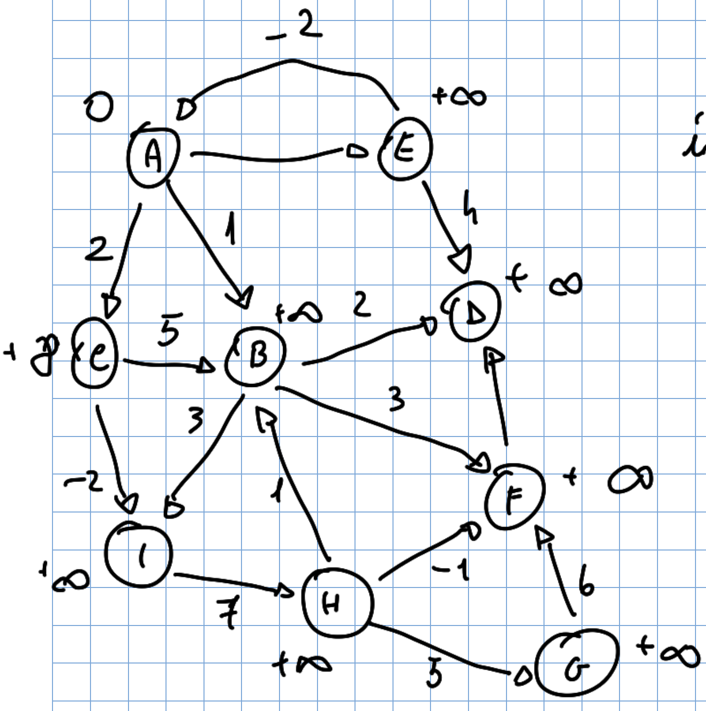


ho: $d[u]$ e $d[v]$

mi faccio questa domanda

IF $(d[u] + w(u,v) < d[v])$ THEN
$$d[v] = d[u] + w(u,v)$$

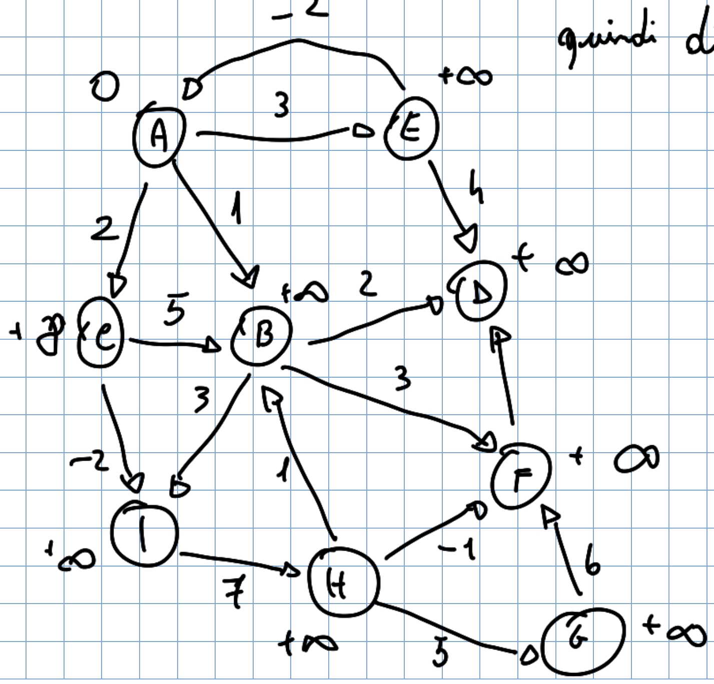
questo è il relax di un arco



iniziamo con $d[v] = +\infty$

poi trovo che da A a E il percorso è più piccolo di ∞ (3)

quindi $d[v]=3$



(più di così non so continuare perché è troppo veloce B.D.)

single, source, single, pairs (credo)

GENERIC-SSSP (G, s) ← trova un cammino minimo

FOR EACH $v \in V$ DO

$d[v] = +\infty$

$d[s] = 0$

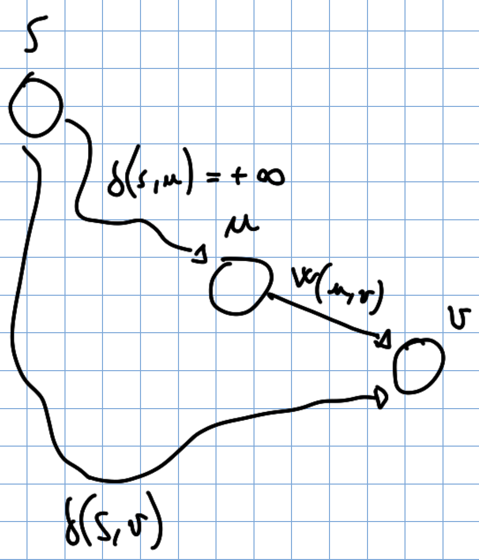
WHILE $\exists\, (u,v) \in E : d[u] + w(u,v) < d[v]$ DO

RELAX (u, v)

RETURN d

PROPRIETÀ

1) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE cerca nel libro



$$\delta(s,u) + w(u,v) \geq \delta(s,v)$$

$$\delta(s,v) = +\infty$$

2) LIMITE SUPERIORE

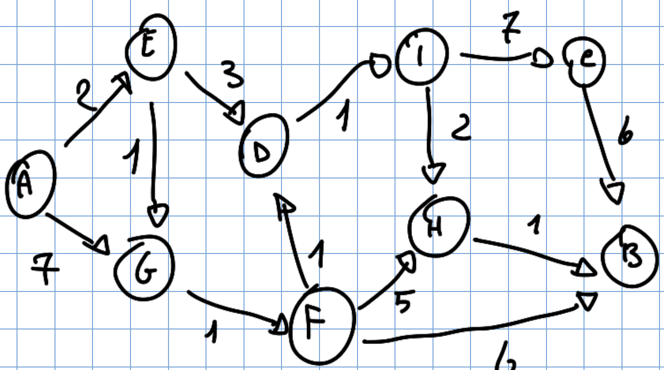
3) CONVERGENZA

$$s \rightsquigarrow u \to v$$

se ad un certo punto $d[u] = \delta(s,u)$ sono sicuro che rilassando: RELAX(u,v)

$d[v] = \delta(s,v)$

D.A.G. directed acyclic graph



$A \to E \to G \to F \to D \to I \to C$

$A \to E \to G \to F \to D \to I$

$A \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} G \xrightarrow{1} F \xrightarrow{1} D \to I \to H \to B$

$A \xrightarrow{2} E$

$A \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} G \xrightarrow{1} F$

$A \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} G$

ORDINAMENTO TOPOLOGICO

$A \to E \to G \to F \to D \to I \to H \quad C \quad B$

Il trucco è rilassare tutti gli archi seguendo l'ordine dell' ordinamento topologico

DAG - SSSP (G, s)

O(V) FOR EACH $v \in V$ DO $d[v] = +\infty$

$F[v]$ = TEMPO DI FINE VISITA

O(V+E) | ESEGUI UNA DFS PER CALCOLARE $F[v], \forall v \in V$

O(V+E) | FOR EACH $v \in V$ (IN ORDINE TOPOLOGICO)
    FOR EACH $u \in Adj(v)$ DO
        RELAX (u, v)

BELLMAN FORD LO FACCIAMO AL RIENTRO DALLE VACANZE