23 ottobre 2025_AL (ma anche MZ)

giovedì 23 ottobre 2025 14:06

Funzione integrale

$f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ cont fissiamo $x_0 \in (\alpha,\beta)$

$\forall x \in (\alpha,\beta)$ $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ funz integrale di punto iniziale x_0

due funz. integrali differiscono per una costante

Teorema di derivazione della funzione integrale

IP $f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ cont. $x_0 \in (\alpha,\beta)$ $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

TS $\forall x \in (\alpha,\beta)$ $\exists\, F'(x) = f(x)$

⌈ Corollario.
Teorema fondamentale del calcolo integrale
Ogni funz. cont. è dotata di primitive ⌋

DIM. Sia $c \in (\alpha,\beta)$, dim. che $F'(c) = f(c)$

$$r(x) = \frac{F(x) - F(c)}{x-c} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt}{x-c} = \frac{\int_{x_0}^{x} + \int_{c}^{x_0}}{x-c} =$$

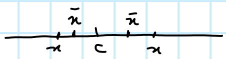
$$= \frac{\int_{c}^{x} f(t)\,dt}{x-c}$$

se $x > c$ $\int_c^x$ è di Riemann $\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in]c,x[\,\cdot\, r(x) = f(\bar{x})$
(teor. della media)

se $x < c$ $\int_c^x = -\int_x^c \Rightarrow r(x) = \frac{-\int_x^c}{-(c-x)} = \frac{\int_x^c f(t)\,dt}{c-x}$ (è di Riemann)

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in]x,c[: r(x) = f(\bar{x})$

in ogni caso dunque $\exists\, \bar{x}$ compreso tra c e x : $r(x) = f(\bar{x})$



se $x \to c$ anche $\bar{x} \to c$ quindi $\lim_{x\to c} r(x) = \lim_{\bar{x}\to c} f(\bar{x}) = f(c)$

Esempi

1. $F(x) = \int_1^x t^2\,dt$ $F'(x) = x^2$

2. $F(x) = \int_x^1 \cos t\,dt = -\int_1^x \cos t\,dt$ $F'(x) = -\cos x$
è l'opposta di una funz int.

3. $F(x) = \int_1^{\log x} t^3\,dt$ è composta dalla funz int. $\int_1^z t^3\,dt$ e $\log x$
$F'(x) = (\log^3 x)\,\frac{1}{x}$

4. $F(x) = \int_{x^2+1}^{e^x} t\,dt = \int_{x^2+1}^{0} t\,dt + \int_0^{e^x} t\,dt = -\int_0^{x^2+1} t\,dt + \int_0^{e^x} t\,dt$
$F'(x) = -(x^2+1)\,2x + e^x \cdot e^x$

Formula fondamentale del calcolo integrale

IP $f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ continua $a, b \in (\alpha,\beta)$ F prim. di f

TS $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

TS $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$

es. $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0$

$\int_4^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_4^2 = \frac{4}{2} - \frac{16}{2} = -6$

DIM. F è una prim. di f. Un'altra prim. è $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}: \quad F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

se $x = a$ $\quad F(a) = G(a) + k = \underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{=0} + k \Rightarrow F(a) = k$

se $x = b$ $\quad F(b) = G(b) + k = \int_a^b f(x)\,dx + F(a) \Rightarrow$ TS.

Teoria della misura in $\mathbb{R}^2$ secondo Peano e Jordan

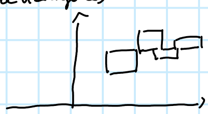
$X \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad$ area X = ??

I caso $X = [a,b] \times [c,d]$ rettangolo

area $X = (b-a)(d-c)$

II caso $X = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ $\quad R_i$ rettangoli a due a due privi di punti interni a comune (plurirettangolo)

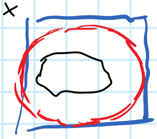
area $X = \sum_{i=1}^{n}$ area R_i



III caso X limitato e dotato di punti interni

↑ $\exists$ un cerchio che lo contiene

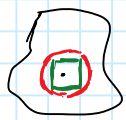
↑ $P_0 \in X$ interno se $\exists$ un cerchio di centro P_0 contenuto in X



$\bar{A} = \{ \text{area } P : P \text{ plurirettangolo}, X \subseteq P \}$

$\underline{A} = \{ \text{area } P : P \text{ plurirettangolo}, P \subseteq X \}$

$\underline{A}$ e $\bar{A}$ sono separati



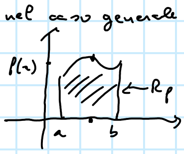
Se sono contigui si dice che X è dotato di area e si pone

area $X = \sup \underline{A} = \inf \bar{A}$

Area del rettangoloide

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$ continua

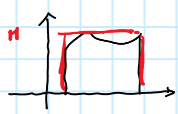
(nel caso generale può essere $f(x) \geq 0$ opp. ≤ 0)



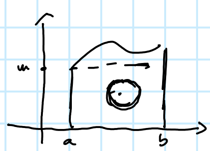
$R_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x) \}$

rettangoloide di f in $[a,b]$

$f(x)$ è dotata di massimo $\Rightarrow R_f$ è limitato



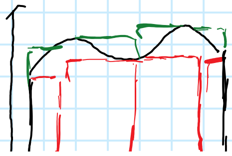
$f(x) > 0 \ \forall x \Rightarrow m > 0 \Rightarrow R_f$ ha punti int.



$[a,b] \times [0,m] \subseteq R_f$

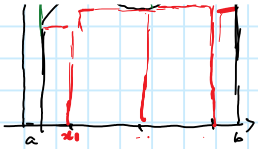
dobbiamo provare che $\underline{A}$ e $\bar{A}$ sono contigui.

Sia D una decomp. di $[a,b]$



cons. $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i] \subseteq R_f$

cons. $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i] \subseteq R_f$



$P_2 = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i] \supseteq R_f$

area $P_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i = s(f, D)$ e $\underline{S}$ $\quad (\Rightarrow \underline{A} \le \underline{S})$

area $P_2 = S(f, D)$ e $\bar{S}$ $\quad (\Rightarrow \bar{A} \le \bar{S})$

$\underline{S}$ ed $\bar{S}$ contigui $\Rightarrow \exists D: S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon \Rightarrow$ area P_2 - area $P_1 < \varepsilon$

$\Rightarrow \underline{A}$ ed $\bar{A}$ sono cont. $\Rightarrow R_f$ è dotato di area e area $R_f = \int_a^b f(x)\,dx$

Si può provare che se f, g cont. in $[a,b]$ $\quad D = \{(x,y) : x \in [a,b], g(x) \le y \le f(x)\}$
$g(x) \le f(x) \ \forall x$

area $D = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$

dominio normale rispetto all'asse $\vec{x}$

$\Rightarrow$ se $g(x) = 0$ e $f(x) \ge 0$
area $R_f = \int_a^b f(x)\,dx$

Se $f(x) \le 0$

area R_f = area $R_{-f} = \int_a^b -f =$
$= -\int_a^b f$

es. calc. l'area del rett. di $f(x) = x^2 + 1$ in $[0, 3]$

f cont e positiva $\Rightarrow$ area $R_f = \int_0^3 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = 9 + 3 - 0 = 12$

Osservazione sul teorema fond del calc int.

f cont $\Rightarrow$ ha prim

f non ha prim $\Rightarrow f$ non cont

esempio di funzione non continua ma dotata di prim.

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x) \Rightarrow f$ non è cont.

cons $\quad F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$x \ne 0 \quad F'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = f(x)$

per $x = 0$ cons il rapporto incr. $\quad \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = x \sin\frac{1}{x} \to 0 = f(0)$

quindi F è prim. di f su $]-\infty, +\infty[$

ESERCIZI

Funzioni integrali

1. Riprendiamo $F(x) = \int_1^x t^2\,dt$ abbiamo visto che $F'(x) = x^2$

II modo: $\quad F(x) = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \qquad F'(x) = x^2$

per eserc. riprendere gli altri esempi che abbiamo visto prima

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad F'(x) = e^{-x^2}$ (unico modo, perché non si possono esprimere le primitive mediante funzioni elementari)

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{\sin x} (e^{t^2} - 1)\,dt}{x^3}$ $\qquad \lim_{x \to 0} \sin x = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \int_0^{\sin x} \cdots = \int_0^0 = 0$

mediante funzioni elementari)

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)\,dt}{x^3}$ $\qquad \lim_{x\to 0}\sin x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\int_0^{\sin x} \dots = \int_0^0 = 0$

f.i. $\frac{0}{0}$ $\qquad$ rapp. delle deriv. $\dfrac{(e^{\sin^2 x}-1)\cos x}{3x^2} =$

$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

$$= \underset{\downarrow 1}{\frac{e^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}} \cdot \underset{\downarrow 1}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \cdot \underset{\searrow \frac{1}{3}}{\frac{\cos x}{3}} \to \frac{1}{3}$$

3. eq. tang. in $c=0$ di $f(x)=\int_1^{1+x^2}\sqrt{3+t^2}\,dt$

$y=f(c)+f'(c)(x-c)$ $\qquad f(0)=\int_1^1 \dots = 0$ $\qquad f'(x)=\sqrt{3+(1+x^2)^2}\;2x$

$f(0) = 4\cdot 0 = 0$

eq. $y = 0+0(x-0)$

$y=0$

4. Trovare F prim. di $f(x)=x^2$ in $]-\infty,+\infty[$ tale che $F(2)=3$

I modo $F(x)=\frac{x^3}{3}+k$ $\qquad F(2)=3 \iff \frac{8}{3}+k=3 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$

$F(x)=\frac{x^3+1}{3}$

II modo $\qquad F(x)=\int_2^x t^2\,dt+3$

5. Trovare F prim. di $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$ $_{c=2}$ in $]-\infty,+\infty[$ tale che $F(2)=1$

I modo $\qquad F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+k$ $\qquad F(2)=1$ $\qquad \frac{\pi}{8}+k=1 \Rightarrow k=1-\frac{\pi}{8}$

$F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+1-\frac{\pi}{8}$

II modo $\qquad F(x)=\int_2^x \frac{1}{t^2+4}\,dt+1$ $\qquad$ se la calcolate vedete che sono uguali

6. Trovare F prim. in $]-\infty,+\infty[$ di e^{-x^2} tale che $F(1)=6$

l'unico modo è il secondo $\qquad F(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,dt+6$

Integrali definiti

1. $I=\int_1^4 \dfrac{|\log x-1|}{x\log^2 x+x}\,dx = -\int_1^e \dfrac{\log x-1}{x\log^2 x+x}\,dx+\int_e^4 \dfrac{\log x-1}{x\log^2 x+x}\,dx$ $\qquad 1 \quad e \quad 4$

Trovo le primitive

$$\int \frac{\log x-1}{x(\log^2 x+1)}\,dx = \left[\int \frac{t-1}{t^2+1}\,dt\right]_{t=\log x} = \frac{1}{2}\log(\log^2 x+1)-\operatorname{arctg}(\log x)+k$$

$$I=-\left[\frac{1}{2}\log(\log^2 x+1)-\operatorname{arctg}(\log x)\right]_1^e+\left[\frac{1}{2}\log(\log^2 x+1)-\operatorname{arctg}(\log x)\right]_e^4=$$

$$=-\left[\frac{1}{2}\log 2-\frac{\pi}{4}\right]+\left[\frac{1}{2}\log(\log^2 4+1)-\operatorname{arctg}(\log 4)-\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$=-\log 2+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\log(\log^2 4+1)-\operatorname{arctg}(\log 4)$$

2. $I\ \int_{-1}^{-3}\dfrac{x^2}{e^{x^3}-1}\,dx$

Primitive: $J=\frac{1}{3}\int\dfrac{3x^2}{e^{x^3}-1}\,dx = \frac{1}{3}\Big[\underbrace{\int\frac{dt}{e^t-1}}_{K}\Big]_{t=x^3}$

$$K=\int\frac{1}{e^t-1}\,dt=\int\frac{e^t}{e^t(e^t-1)}\,dt=\left[\int\frac{dy}{y(y-1)}\right]_{y=e^t}$$

$$\frac{1}{y(y-1)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}=\frac{(A+B)y-A}{y(y-1)} \qquad \begin{cases}A+B=0\\ -A=1\end{cases} \qquad \begin{matrix}B=1\\ A=-1\end{matrix}$$

$$K=-\log e^t+\log|e^t-1|+k = -t+\log|e^t-1|+k$$

$$K = -\log e^t + \log|e^t - 1| + c = -t + \log|e^t - 1| + c$$

$$J = \frac{1}{3}\left(-x^3 + \log|e^{x^3} - 1|\right) + c$$

$$I = \frac{1}{3}\left[-x^3 + \log|e^{x^3} - 1|\right]_{-1}^{-3} = \frac{1}{3}\left(27 + \log|e^{-27} - 1| - 1 - \log|e^{-1} - 1|\right)$$

3. $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |x \log x| \, dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \log x \, dx + \int_{1}^{e} x \log x \, dx$

Primitive $\int \underset{FD}{x} \log x \, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c$

$$I = -\left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_{1}^{e} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4e^2}$$

4. $I = \int_0^{\pi} \frac{|\sin 2x| \sin x}{\sin^2 x + 4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \sin x}{\sin^2 x + 4} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{———}$

Primitive $I_2 \int \cos x \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + 4} dx = 2\left[\underbrace{\int \frac{t^2}{t^2+4} dt}_{K}\right]_{t = \sin x}$ $\quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$K = \int \frac{t^2 + 4 - 4}{t^2 + 4} dt = \int\left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right) dt = t - 2 \arctg \frac{t}{2} + c$$

$$J = 2 \sin x - 4 \arctg \frac{\sin x}{2} + c$$

$$I = \left[2 \sin x - 4 \arctg \frac{\sin x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[2 \sin x - 4 \arctg \frac{\sin x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= 2 - 4 \arctg \frac{1}{2} + 2 - 4 \arctg \frac{1}{2} = 4 - 8 \arctg \frac{1}{2}$$

5. $I = \int_0^1 \frac{\log(x^2 + 3x + 2)}{(2x+3)^2} dx$ $\quad D\left(\frac{1}{2x+3}\right) = \frac{-2}{(2x+3)^2}$

Primitive $J = \int \frac{1}{(2x+3)^2} \log(x^2+3x+2) \, dx =$

$$= -\frac{1}{2}\int \underset{FD}{\frac{-2}{(2x+3)^2}} \log(x^2+3x+2) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{2x+3}\log(x^2+3x+2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cancel{2x+3}} \frac{\cancel{2x+3}}{x^2+3x+2} dx$$

$x^2 + 3x + 2 = 0$
$x = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A + 2B}{(x+2)(x+1)}$$

$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + 2B = 1 \end{cases}$ $\quad A = -1$, $B = 1$

$$J = -\frac{1}{2}\frac{1}{2x+3}\log(x^2+3x+2) - \frac{1}{2}\log|x+2| + \frac{1}{2}\log|x+1| + c$$

$$I = -\frac{1}{10}\log 6 - \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 2 - \left(-\frac{1}{6}\log 2 - \frac{1}{2}\log 2\right) =$$

$$= -\frac{1}{10}\log 2 - \frac{1}{10}\log 3 - \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{6}\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 = \dots$$

6 Area del rettangoloide relativo a $f(x) = |x| x^2 e^{3x^2}$ in $[-1, 2]$

f continua $\Rightarrow$ area $R_f = \int_{-1}^{2} f(x) \, dx = -\int_{-1}^{0} -x^3 e^{3x^2} dx + \int_0^2 x^3 e^{3x^2} dx =$

$$= \int_{-1}^{2} x^3 e^{3x^2} dx$$

Primitive $J = \int x^3 e^{3x^2} dx = \frac{1}{6}\int 6x \, x^2 e^{3x^2} dx = \frac{1}{18}\int 6x \cdot 3x^2 \cdot e^{3x^2} dx =$

$$= \frac{1}{18}\left[\int t\, e^{t}\, dt\right]_{t=3x^2}$$

$$\int t \underset{\uparrow \text{FD}}{e^{t}}\, dt = t e^{t} - \int e^{t}\, dt = e^{t}(t-1) + k$$

$$J = \frac{1}{18}\, e^{3x^2}(3x^2-1) + k \qquad \text{area } R_f = \frac{1}{18}\left[e^{3x^2}(3x^2-1)\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{18}\left[e^{12}(12-1) - e^{3}(3-1)\right] = \frac{1}{18}\left(11 e^{12} - 2 e^{3}\right)$$