Capitolo 1: integrali

Integrazione indefinita

Data $f, F : (a,b) \to \mathbb{R}$ F derivabile e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$

Definizione: F è primitiva di f in (a,b)

es: x^2 è primitiva di $2x$
e^x è primitiva di e^x
$\sin x$ " " di $\cos x$

Questioni:

1) tutte le funzioni hanno primitive?
2) se f ha prim, quante ne ha?
3) come si trovano?

2) teorema sulle primitive

Sia F primitiva di f in (a,b).
Allora tutte e sole le primitive di f sono $f(x)+K$
con $K \in \mathbb{R}$
→ una costante

Dimostrazione:

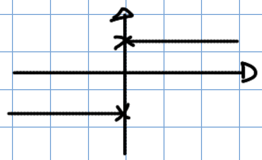
Se F è una primitiva, allora dato $K \in \mathbb{R}$ anche $G(x) = F(x) + K$ è una primitiva infatti $\exists\, G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x)$. Inoltre se G è un'altra primitiva devo provare che $\exists\, K \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + K$ consideriamo:
$H(x) = G(x) - F(x)$ Si ha $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$

Per un teorema di EAM1, H è costante $\Rightarrow$ tesi

Osservazione: Se una funzione ha primitive ne ha infinite

1) Esempio di funzione che non ha primitive

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Supponiamo per assurdo:

che $\exists$ F primitiva di f in $]-\infty;+\infty[\Rightarrow \exists f'(x) = f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

In pratica:

- in $[0,+\infty[$ $f'(x)=1 \Rightarrow F(x) = x + k \quad \forall x \in [0,+\infty[$
- in $]-\infty;0[$ $f'(x) = -1 \Rightarrow F(x) = -x + c \quad \forall x \in]-\infty,0[$

ma F è prim di f in $]-\infty;+\infty[$ $\Rightarrow$ è deriv $\Rightarrow$ è continua

imponiamo la continuità in $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x) \Rightarrow c = k$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(-x+c) \qquad (x+k)$$

allora
$$F(x) = \begin{cases} x + k & x \geq 0 \\ -x + k & x < 0 \end{cases} = |x| + k$$

assurdo perché $|x|$ non è derivabile in $x=0$

3) integrale indefinito di f

$\int f(x)\,dx$ = insieme delle primitive di f

(può anche essere vuoto)

Se F è una primitiva di f allora $\int f(x)\,dx = F(x) + K$

$\{ F(x) + k : k \in \mathbb{R} \}$

$f(x)$ = funzione integranda

dx = serve solo per indicare il nome della variabile

Integrali immediati

$$\int e^x\,dx = e^x + K$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + K$$

$$\int (1 + tg^2 x)\,dx = tg\,x + K$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + K = -\arcsin x + K$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} + K$$

$n \in \mathbb{N}$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + K$$

$$\int e^{\alpha n} = \frac{e^{\alpha n}}{\alpha} + K$$

$$\int \cos(\alpha x) = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + K \qquad \int \sin(\alpha x) = -\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} + K$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + K \quad (x \in]-\infty, 0[\text{ opp } x \in]0, +\infty[)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + k$$

es. $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \log(x^2+4)+k$

$$\int \frac{2x}{x^2-3}\,dx = \log|x^2-3|+k$$

in $]-\infty; -\sqrt{3}[$
in $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$
in $]\sqrt{3}; -\infty[$

Proprietà di omogeneità (sia f dotata di primitive)

Se $c \neq 0$ $\quad \int c f(x)\,dx = \underbrace{c \int f(x)\,dx}$ allora anche cf è dotata di primitive

→ insieme delle primitive di f moltiplicate per c

es: $\int 3\cos x\,dx = 3\int \cos\,dx = 3\sin x + k$

Se $c = 0$

I membro $= \int 0\,dx =$ insieme di tutte le funzioni costanti

II membro $= \{0\}$