Proposizione

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$

$B = \{b_i\}_{i=1 \dots m}$ base di V

I) Un' omomorfismo $f: V \to W$ è determinato dalle immagini $f(b_i)$ dei vettori di B

II) $\{w_1 \dots w_m\} \subseteq W$ allora $\exists!$ omomorfismo f $V \to W$ t.c. $f(b_i) = w_i \quad \forall i = 1 \dots m$

Dimostrazione

I) $v \in V$, calcolo $f(v)$

Poiché $B = \{b_i\}$ è una base, $\exists \lambda_1, \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \dots \lambda_m b_m$

$$\Rightarrow f(v) = \underbrace{f(\lambda_1 b_1 + \dots \lambda_m b_m)} = \underbrace{\lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m)}$$

essendo un' applicazione lineare le possiamo scrivere così

II) $f: V \to W \qquad b_i \to w_i$ il punto 1 ci dice che è determinata

Supponiamo che $g: V \to W$ t.c. $g(b_i) = w_i$

$$g(v) = \lambda_1 g(b_1) + \lambda_m g(b_m) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m)$$
$$= f(v)$$

è unica anche perché se cerchiamo di trovarne un'altra funzione g ci verrà uguale ad f

Corollario uno

V, W S.V. su $\mathbb{R}$, $B = \{b_1 \dots b_m\}$ base di V $f: V \to W$ omomorfismo

SPAZIO VETTORIALE

i) f iniettiva $\Leftrightarrow$ $\{f(b_1), \dots f(b_m)\}$ è lin ind

ii) f suriettiva $\Leftrightarrow$ $\{f(b_1), \dots f(b_m)\}$ genera W

iii) f biettiva $\Leftrightarrow$ $\{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$ base di W

Dimostrazione

1) f è iniettiva $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = \{0\}$

Sia $v \in V$ t.c. $f(v) = 0$. Poiche $B = \{b_i\}$ è una base di V allora $\exists \lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c. $V = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$

$0 = f(v) = f(\lambda_1 b_1 \dots \lambda_m b_m) = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m)$

$\Rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_m = 0 \Rightarrow V = 0 \Rightarrow Ker \{0\} \Rightarrow f$ iniettiva

II) $\{f(b_i) \dots f(b_m)\}$ generano W

Dimostriamo che f è suriettiva cioè $Im(f) = W$ cioe $\forall w \in W$ $\exists v \in V$ t.c. $w = f(v)$

Sia $w \in W$ poiche $W = \langle f(b_1), \dots f(b_m) \rangle$

$\exists \lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c. $w = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m)$

$f(\underbrace{\lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m)}_{v \in V}) \Rightarrow w = f(v) \Rightarrow w \in Im(f) \Rightarrow Im(f) = W$

$\Downarrow$

f suriettiva

III) Immediato usando i punti 1 e 2

Esercizio

$f: V \to W$

I) Se f iniettiva e $\{v_1 \dots v_k\} \subseteq V$ lin ind allora $\{f(v_1), \dots f(v_m)\}$

II) Se $\{f(v_1), \dots f(v_m)\}$ è lin ind allora $\{v_1 \dots v_m\}$ lin ind

Dimostrazione alla fine

Corollario

$f: V \to W$ omomorfismo, $\dim V = m$, $\dim W = n$

1) Se f iniettiva allora $m \leq n$

2) Se f suriettiva allora $m \geq n$

3) Se f biettiva allora $m = n$

Il viceversa non è vero

$V \to V \quad v \mapsto 0$

Dimostrazione

1) Sia B una base di V, poiché $\dim V = m \Rightarrow B = \{b_1, \dots, b_m\}$

$\Rightarrow \{f(b_1) \dots f(b_m)\} \subseteq W$ lin ind

$\underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\dim W} \geq m$ → Ricorda che è imposto il fatto che f è iniettiva

2) Sia B una base di $V \Rightarrow \{f(b_1) \dots f(b_m)\}$ genera W

$\Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\dim W} \leq m$

3) Banale

teorema più importante del corso

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n. Allora

$V \simeq \mathbb{R}^n$ V è isomorfo di $\mathbb{R}^n$

ovvero un'applicazione lineare biettiva

Dimostrazione

Fissiamo $B = \{b_1 \dots b_n\}$ base di V e sia $E = \{e_1 \dots e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$

$V \to \mathbb{R}^n$

$b_i \to e_i$

$B \to \{f(b_1) \dots f(b_n)\}$ $\Rightarrow$ f è un'isomorfismo

$\{f(b_1) \dots f(b_n)\} = E$ base

Esempio $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$B = \{x^2, x, 1\}$ base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} \Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \simeq \mathbb{R}^3$

isomorfismo

$f: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$

$x^2 \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad x \to \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad 1 \to \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Esercizi

$f: V \to W$

1) Se f iniettiva e $\{v_1 \dots v_r\} \subseteq V$ lin ind allora $\{f(v_1), \dots f(v_m)\}$ lin ind

la dimostrazione consiste nel dimostrare che $\lambda_1 \dots \lambda_m = 0$

f iniettiva quindi $\mathrm{Ker}(f) = 0$

$\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_r f(v_r) = 0 \Rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_r = 0$

$\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_r f(v_r) = f(\lambda_1 v_1) + \dots + f(\lambda_r v_r) =$

$= f(\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_r v_r) \to \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in \mathrm{Ker}\, f$

Ker f è 0, essendo che la combinazione lineare è 0, $\lambda_1 \dots \lambda_r$ sono tutti 0 quindi $\{f(v_1), \dots f(v_m)\}$ è lin ind

2) Se $\{f(v_1), \dots f(v_m)\}$ è lin ind allora $\{v_1 \dots v_m\}$ lin ind

Per dimostrare che è vero $\lambda_1 \dots \lambda_r = 0$

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$

$f(0) = 0$

$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) = 0$

$\underbrace{\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_r f(v_r)}_{\Downarrow} = 0$

essendo questa la combinazione lineare di $\{f(v_1) \dots f(v_m)\}$ e sappiamo che è lin ind e quindi che $\lambda_1 \dots \lambda_m = 0$ e quindi è vero che $\{v_1 \dots v_m\}$ è lin ind