
SICILIAE STVDIVM GENERALE
1434
UNIVERSITÀ
degli STUDI
di CATANIA
DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA E INFORMATICA

Grafi

Grafi

- Si dice grafo un insieme di nodi legati "a due a due" da archi direzionati (o no)
- I grafi sono strutture dati di fondamentale importanza in informatica
- Vi sono centinaia di problemi computazionali ad essi legati
- Parleremo solo di alcuni algoritmi elementari sui grafi

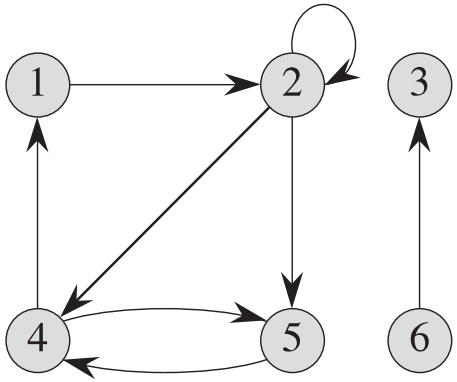
G=(V,E)

• *V* **insieme dei nodi**

• *E* **insieme degli archi** *(u,v)*

• Se *G* è direzionato l'arco *(u,v)* è ***uscente*** da *u* ed ***entrante*** in *v*

• Se *(u,v)* è in *E*, *v* è ***adiacente*** a *u*

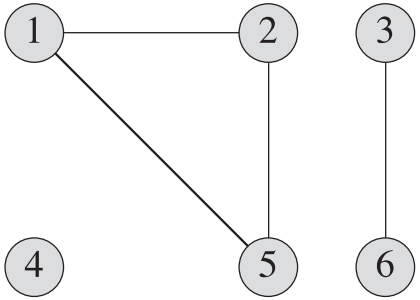


Grafi non direzionati

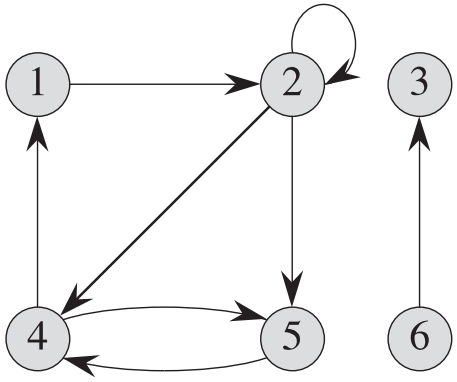
G=(V,E)

- *V* insieme dei nodi
- *E* insieme degli archi

- *E* consiste di coppie non ordinate di nodi
- Self-loops non ammessi
- In *(u,v) u* e *v* sono incidenti (sia entranti che uscenti)
- La relazione di adiacenza è simmetrica



Grafi



Grado di un nodo (caso non direzionato)

- Numero di archi incidenti

Grado di un nodo (caso direzionato)

- Numero di archi entranti + numero di archi uscenti

Cammino (di lunghezza k) da u a v

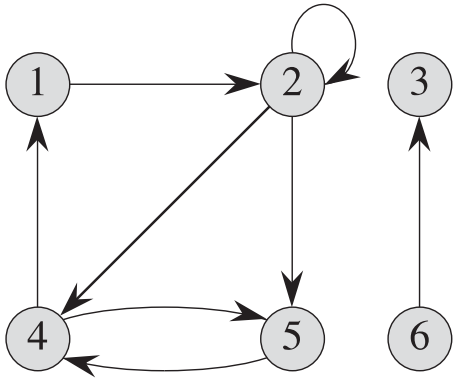
- Sequenza $v_0, \ldots, v_k$ tale che $u=v_0$ e $v=v_k$

Il cammino **contiene** i vertici $v_0, \ldots, v_k$ e gli archi $(v_0, v_1), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$

- Un nodo v è **raggiungibile** da u se esiste un cammino da u a v

- Il cammino è **semplice** se tutti i vertici in esso contenuti sono distinti

Grafi



Cammino (di lunghezza k) da u a v

•Sequenza $v_0, \ldots, v_k$ tale che $u=v_0$ e $v=v_k$

Sottocammino: Sequenza di vertici di un cammino es: $v_i, \ldots, v_j$ per $0 \leq i \leq j \leq k$

Ciclo: Cammino $v_0, \ldots, v_k$ in cui $v_0=v_k$

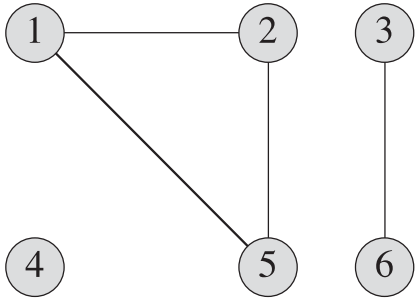
•Il ciclo è semplice se tutti i suoi nodi sono distinti.

Un grafo senza cicli è detto **aciclico**.

Grafi

- Grafo (non direzionato) **connesso**: ogni coppia di vertici è unita da un cammino.

- **Componenti connesse**: classi di equivalenza determinate dalla relazione “è raggiungibile da”



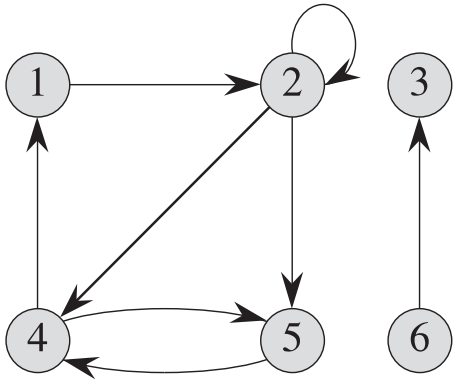
Componenti connesse: {1,2,3}, {3,6}, {4}

Un grafo non direzionato è connesso se ha 1 sola componente connessa

Grafi

- Grafo (direzionato) **fortemente connesso**: per ogni coppia di vertici *(u,v)* esiste un cammino che unisce *u* a *v* e *v* a *u*.

- Componenti **fortemente** connesse: classi di equivalenza determinate dalla relazione "sono mutualmente raggiungibili"

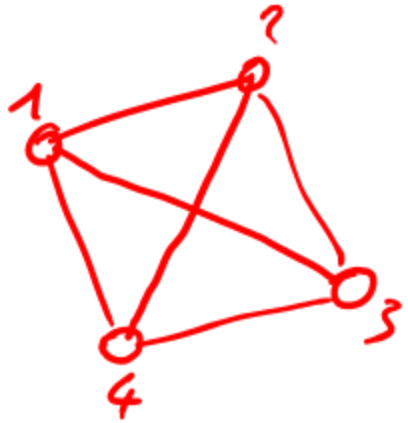


Componenti fortemente connesse:
{1,2,4,5}, {3}, {6}

Grafi

- *G'=(V',E')* **sottografo** di *G=(V,E)* se *V'* sottoinsieme di *V* e *E'* sottoinsieme di *E*

- Un grafo (non direzionato) è **completo** se ogni coppia di vertici è adiacente



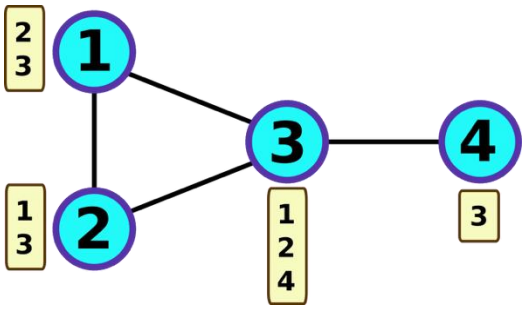
Rappresentare un grafo

- **Sia |V| la cardinalità di V ovvero un numero naturale definito come il numero di elementi che costituiscono l'insieme.**

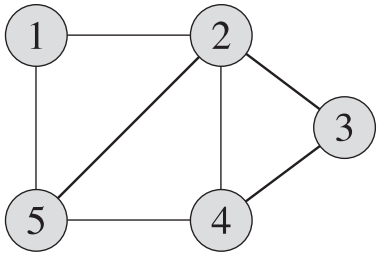
Due modi fondamentali:

- *Liste di adiacenza*
  - Utile soprattutto per rappresentare grafi sparsi (con pochi archi)
  - Richiede $O(max(|V|,|E|))=O(|V|+|E|)$ spazio
- *Matrici di adiacenza*
  - Richiede $O(|V|^2)$ spazio

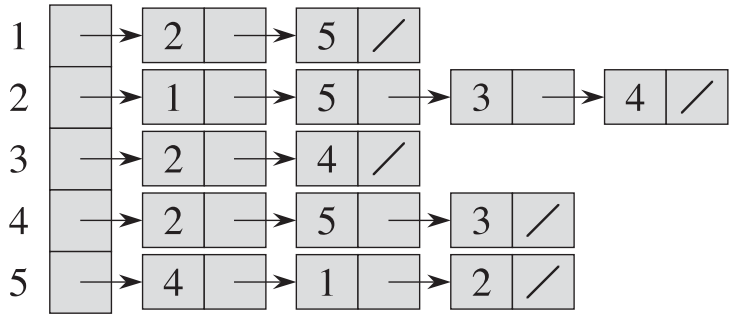
Liste di adiacenza – Grafi non direzionati



- Array di $|V|$ liste (una per ogni vertice)
- *Adj[u]* contiene (puntatori a) tutti i vertici *v* per *i* quali *(u,v)* è in *E*
- La somma delle lunghezze di tutte le liste è $2|E|$



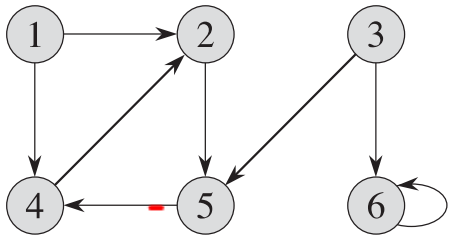
(a)



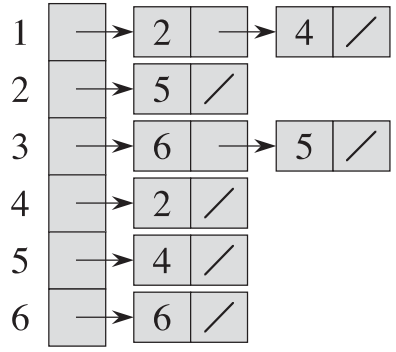
(b)

Liste di adiacenza – Grafi direzionati

- Array di $|V|$ liste (una per ogni vertice)
- *Adj[u]* contiene (puntatori a) tutti i vertici *v* per i quali *(u,v)* è in *E*
- In tal caso, la somma delle lunghezze di tutte le liste è $|E|$



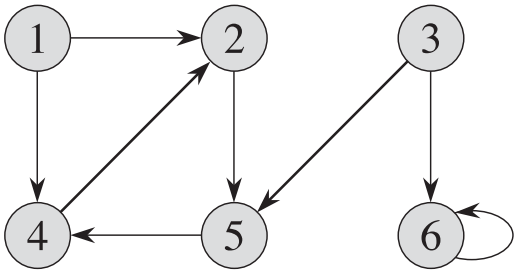
(a)



(b)

Matrici di adiacenza

- $A=[a_{ij}]$
- $a_{ij}=1$ se (i,j) è un arco in E (0 altrimenti)



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Ricerca in ampiezza (Breadth-First-Search)

- Dato un vertice *s*, "esploriamo" il grafo per scoprire ogni vertice *v* raggiungibile da *s*.
  - Calcola la distanza di ogni *v* da *s*.
  - L'algoritmo (implicitamente) produce un breadth-first-tree *(BFT)*
    - Il campo predecessore fa riferimento proprio a tale albero.
  - Il cammino da *s* a *v* in *BFT* rappresenta il cammino più breve.
- Supporremo una rappresentazione tramite liste di adiacenza.

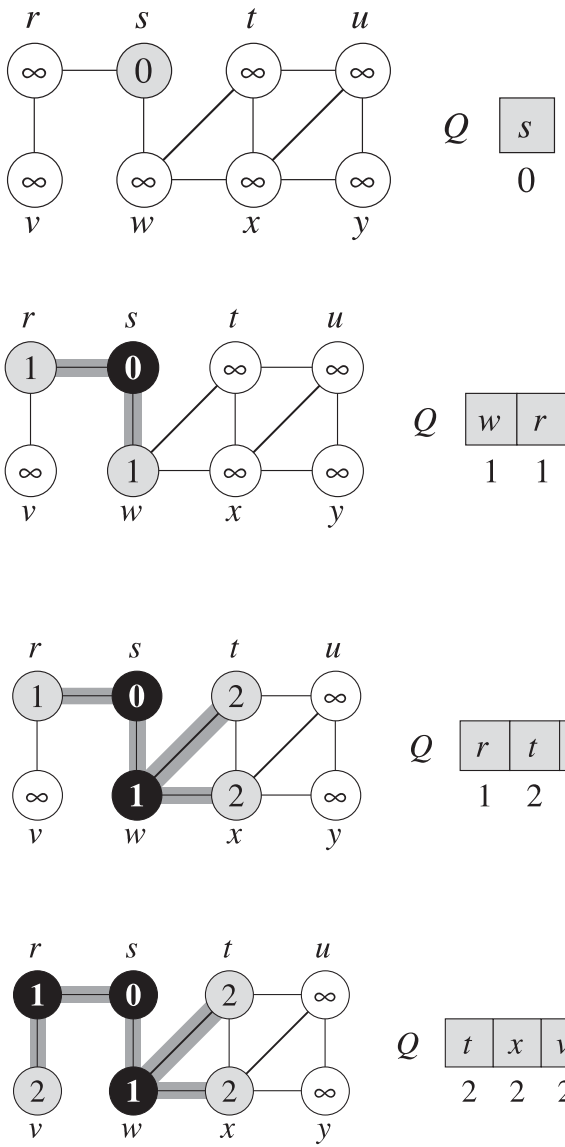
Ricerca in ampiezza -- Idee

- Inizialmente ogni nodo è colorato bianco
  - Poi i nodi diventeranno grigi o neri.
- Un nodo è **scoperto** quando è visitato la prima volta.
  - Diventa non-bianco
  - Nodi grigi: possono essere adiacenti (anche) a nodi bianchi.
    - Rappresentano la frontiera tra ciò che è già stato scoperto e ciò che non lo è ancora.
  - Nodi neri: possono essere adiacenti solo a nodi non bianchi.

Ricerca in ampiezza

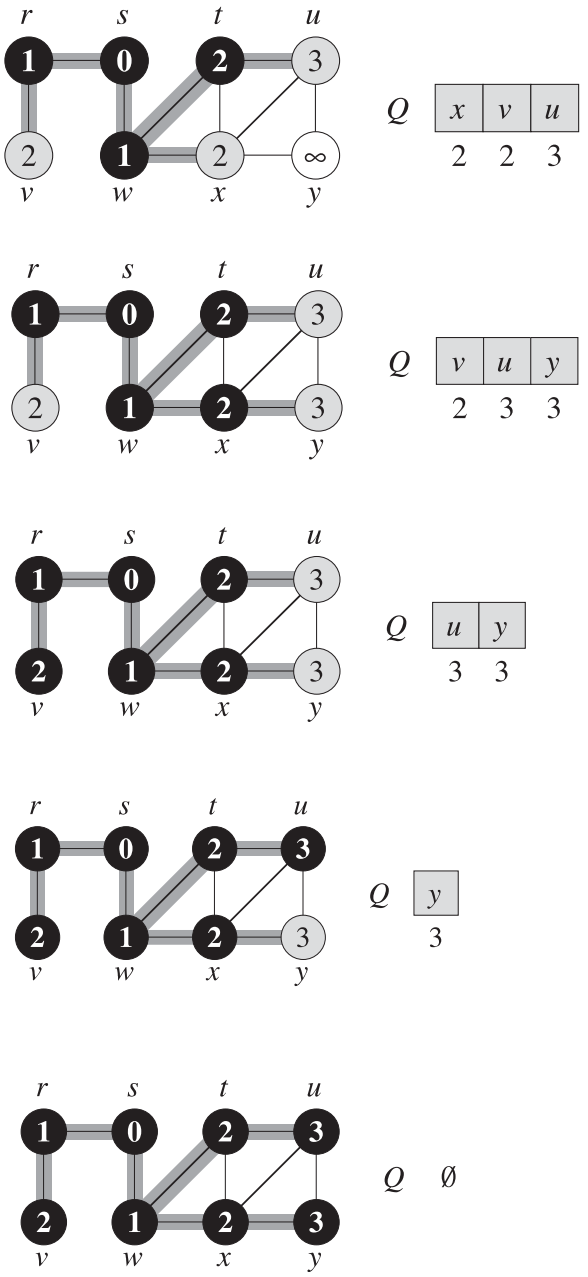
```
BFS(G,s)
1. for each vertex u in V[G] - {s}
2.   color[u]=white;
3.   d[u]=MAX;
4.   pred [u]=NULL;
5. color[s]=gray;
6. d[s]=0; pred[s]=NULL;
7. Q.Enqueue(s);
8. while (Q.NotEmpty())
9.   u=Q.Dequeue();
10.  for each v in Adj[u]
11.     if (color[v]==white)
12.        color[v]=gray;
13.        d[v]=d[u] + 1;
14.        pred[v]=u;
15.        Q.Enqueue(v);
16.  color[u]= black;
```

Invariante di ciclo: la coda Q è formata dall'insieme dei vertici grigi.



Ricerca in ampiezza

```
BFS(G,s)
1. for each vertex u in V[G] - {s}
2.   color[u]=white;
3.   d[u]=MAX;
4.   pred [u]=NULL;
5. color[s]=gray;
6. d[s]=0; pred[s]=NULL;
7. Q.Enqueue(s);
8. while (Q.NotEmpty())
9.   u=Q.Dequeue();
10.  for each v in Adj[u]
11.     if (color[v]==white)
12.        color[v]=gray;
13.        d[v]=d[u] + 1;
14.        pred[v]=u;
15.        Q.Enqueue(v);
16.  color[u]= black;
```



Ricerca in ampiezza

```
BFS(G,s)
1.for each vertex u in V[G] – {s}
2.   color[u]=white;
3.   d[u]=MAX;
4.   pred [u]=NULL;
5.color[s]=gray;
6.d[s]=0; pred[s]=NULL;
7.Q.Enqueue(s);
8.while (Q.NotEmpty())
9.   u=Q.Dequeue();
10.  for each v in Adj[u]
11.     if (color[v]==white)
12.        color[v]=gray;
13.        d[v]=d[u] + 1;
14.        pred[v]=u;
15.        Q.Enqueue(v);
16.  color[u]= black;
```

Complessità: O(n+m)
n: numero di nodi
m: numero di archi

Breadth-first Trees

- La procedura *BFS(G,s)* costruisce un albero (grafo dei predecessori G_p)
  - Ad ogni nodo è associato un predecessore
- V_p=*{v in V : p[v]≠NULL}* U *{s}* (*V* insieme dei nodi)
- E_p=*{(p[v],v) in E : v in* V_p*, v≠s}* (*E* insieme degli archi)
- G_p è un albero in cui
  - C'è un unico cammino da *s* a *v* (in V_p) che è anche il cammino più breve
  - Gli archi in E_p sono chiamati **tree-edges**.

Breadth-first Trees

$V_p = \{v \text{ in } V : p[v] \neq NULL\}$ $E_p = \{(p[v], v) \text{ in } E : v \text{ in } V_p, v \neq s\}$

Print-Path

Supponiamo di aver già eseguito BFS(G,s), la seguente procedura stampa i vertici di un cammino minimo da *s* a *v*.

```
Print-Path(G,s,v)
1.if (v==s) print s
2.else if pred[v]==NULL
3.      print "No path from s to v"
4.else Print-Path(G,s,pred[v])
5.      print v
```

Qual è la complessità di questa procedura?

$T(n) = T(n-1) + 1 = T(n-2) + 1 + 1 \ldots = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n}$

Print-Path

Supponiamo di aver già eseguito *BFS(G,s)*, la seguente procedura stampa i vertici di un cammino minimo da *s* a *v*.

```
Print-Path(G,s,v)
1.if (v==s) print s
2.else if pred[v]==NULL
3.      print "No path from s to v"
4.else Print-Path(G,s,pred[v])
5.      print v
```

Qual è la complessità di questa procedura?

O(|V|) → ogni chiamata ricorsiva riguarda un cammino che ha un vertice in meno.

Ricerca in Profondità: DFS

- Il grafo viene visitato in profondità piuttosto che in ampiezza
- Gli archi sono esplorati a partire dal nodo *v* che
  - Sia stato scoperto più di recente
  - Abbia ancora archi (uscenti) non esplorati
- Quando gli archi uscenti di *v* terminano, si fa backtracking
  - Si esplorano eventuali altri archi uscenti dal nodo precedente a *v*.
- Il processo è ripetuto fin quando vi sono nodi da esplorare.

Depth first forests

- Se *v* è scoperto scorrendo la lista di adiacenza di *u*, *p[v]=u*
- Come per BFS si definisce un grafo dei predecessori G_p
- $V_p=V$
- $E_p=\{(p[v],v) \text{ in } E : v \text{ in } V, p[v]\neq NULL\}$
- G_p **non è** un albero (ma una foresta)
  - Depth first forest

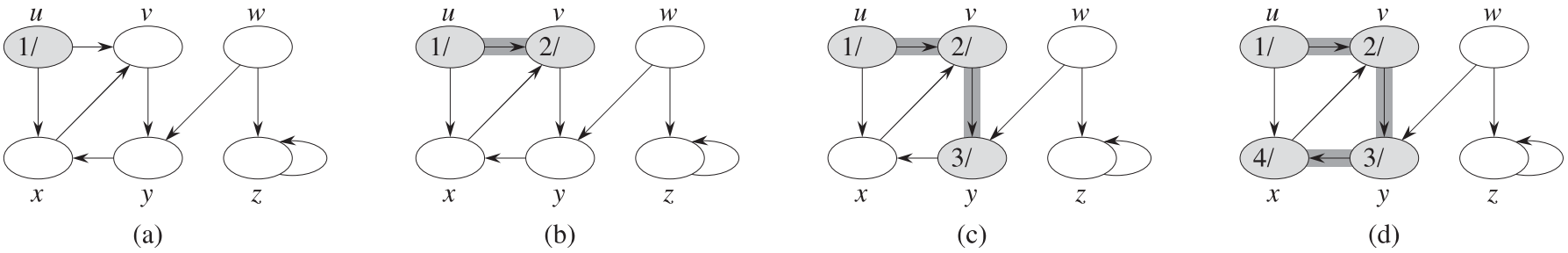
Timestamps

- DFS marca temporalmente ogni vertice visitato
  - Ogni *v* ha due etichette
  - La prima -- *d[v]* -- registra quando il nodo è stato scoperto (bianco-> grigio)
  - La seconda – *f[v]* – registra quando la ricerca finisce di esaminare la lista di adiacenza di v (grigio-> nero)
  - Per ogni *v*, $d[v]<f[v]$

DFS

```
DFS(G)
1.  for each u in V[G]
2.        color[u]=white:
3.        pred[u]=NULL;
4.  time = 1
5.  for each u in V[G]
6.     if (color[u]==white)
7.           DFS-Visit(u)
```

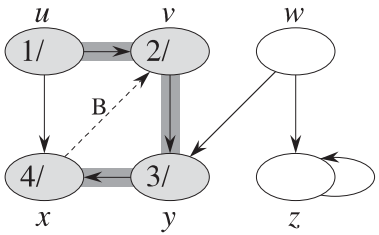
```
DFS-Visit(u)
1.color[u]=grey;
2.d[u]=time++;
3.for each v in Adj[u]
4.  if (color[v]==white)
5.        pred[v]=u;
6.        DFS-Visit(v);
7.color[u]=black
8.f[u]=time++;
```



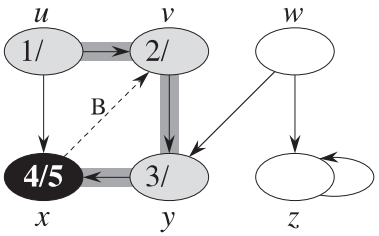
DFS

```
DFS(G)
1.  for each u in V[G]
2.        color[u]=white:
3.        pred[u]=NULL;
4.  time = 1
5.  for each u in V[G]
6.     if (color[u]==white)
7.           DFS-Visit(u)
```

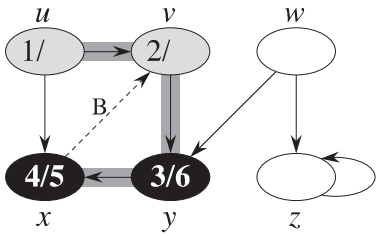
```
DFS-Visit(u)
1.color[u]=grey;
2.d[u]=time++;
3.for each v in Adj[u]
4.  if (color[v]==white)
5.        pred[v]=u;
6.        DFS-Visit(v);
7.color[u]=black
8.f[u]=time++;
```



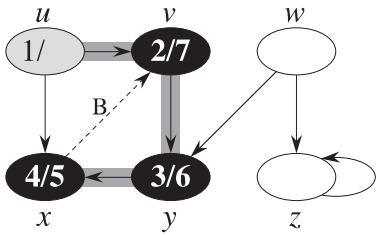
(e)



(f)



(g)

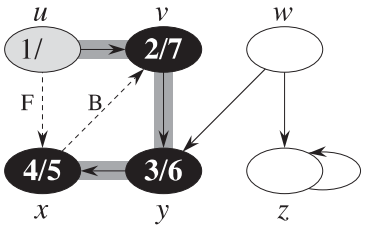


(h)

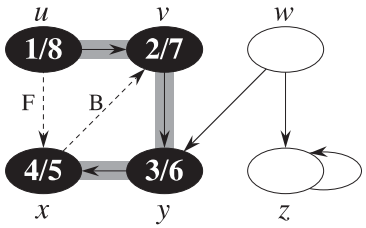
DFS

```
DFS(G)
1.  for each u in V[G]
2.        color[u]=white:
3.        pred[u]=NULL;
4.  time = 1
5.  for each u in V[G]
6.     if (color[u]==white)
7.           DFS-Visit(u)
```

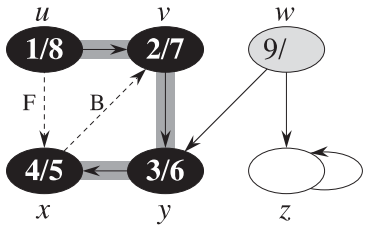
```
DFS-Visit(u)
1.color[u]=grey;
2.d[u]=time++;
3.for each v in Adj[u]
4.  if (color[v]==white)
5.        pred[v]=u;
6.        DFS-Visit(v);
7.color[u]=black
8.f[u]=time++;
```



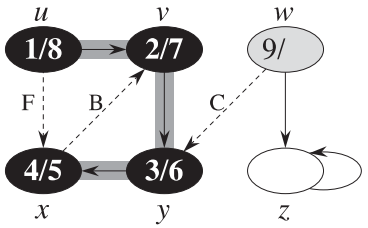
(i)



(j)



(k)



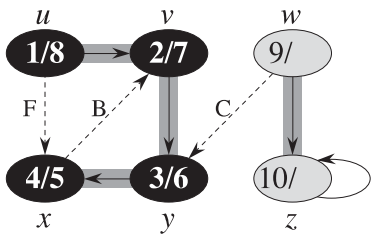
(l)

DFS

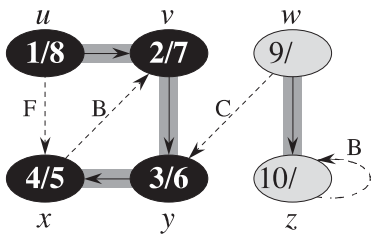
Tempo di esecuzione: $\theta\,(V+E)$

```
DFS(G)
1.  for each u in V[G]
2.        color[u]=white:
3.        pred[u]=NULL;
4.  time = 1
5.  for each u in V[G]
6.     if (color[u]==white)
7.           DFS-Visit(u)
```

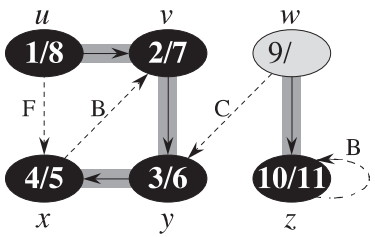
```
DFS-Visit(u)
1.color[u]=grey;
2.d[u]=time++;
3.for each v in Adj[u]
4.  if (color[v]==white)
5.        pred[v]=u;
6.        DFS-Visit(v);
7.color[u]=black
8.f[u]=time++;
```



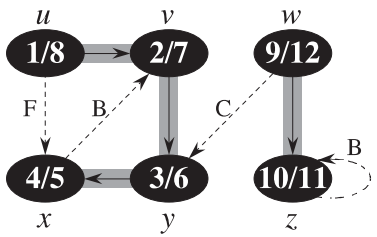
(m)



(n)



(o)



(p)