OPERAZIONI FRA INSIEMI

$a \in A$ $\quad A \subseteq B \quad \emptyset$

$A \cup B \quad A \cap B \quad A - B \neq B - A$

P_1, P_2 proposizione degli elementi di A

$P_1 \to B \subseteq A \qquad P_2 \Rightarrow P_1$

$P_2 \to C \subseteq A$

P_1: numero > 5

P_2: " > 10

$P_2 \Rightarrow P_1$ implica

P_2 è cond. suff. per P_1

P_1 cond. necessaria per P_2

$\exists$ esiste $\to$ quantificatore esistenziale

$\forall$ per ogni $\to$ quantificatore universale

dato a voglio definire $a+n$ $\forall n$ numero naturale

$$\begin{cases} a+0=a \\ a+\bar{n} = \overline{a+n} \end{cases} \to \text{definizione di somma}$$

$\bar{n}$ è il successivo di n

$\bar{0} = 1 \qquad a+1 \to a+\bar{0} \to \overline{a+0} \to \bar{a}$

$$\begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot \bar{n} = a \cdot n + a \end{cases} \to \text{definizione di prodotto}$$

$a < b$ se $\exists c : a + c = b$

interi naturali

$\mathbb{N}_0 = \{0, \dots\}$ notazione di N che parte da 0

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ // // // // parte da 1 interi relativi

$n \in \to$ $+n \to$ positivo, $-n \to$ negativo

$\mathbb{Z} = \{0; +n; -n : n \in \mathbb{N}\}$

$\pm n \to \mp n$ opposto di $\pm n$

$3 + 4 = 7$

$(+3) + (+4) = (+7)$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

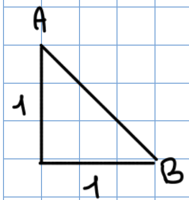
interi relativi frazionari

$\mathbb{Q} = \{0, \pm \frac{a}{b} : \pm a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$

$\frac{2}{3} < \frac{4}{5} \to 2 \cdot 5 < 4 \cdot 3$

$\downarrow$

$10 < 12$



$AB^2 = 2$

$AB = \sqrt{2} \to$ quanto vale?

$\frac{3}{4} = 0,75 \qquad \frac{3}{7} = 0,4\overline{285714}$

$\pm \frac{a}{b} = \pm a_0, a_1, a_2 \dots \qquad a_0 \in \mathbb{N}_0 \qquad a_1, a_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$

rappresentazione decimale periodica

numeri reali

$\mathbb{R} = \{0; \pm a_0, a_1 \dots : a_0 \in \mathbb{N}_0, a_1, a_2 \in \{0; \dots; 9\}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \, (\mathbb{R} - \mathbb{Q}_2)$

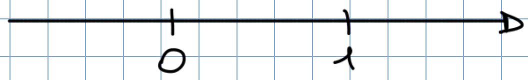
Def

$-b_0, b_1 \dots < 0 < +a_0, a_1, \dots$

3,725   3,739

$2 < 3 \Rightarrow 3{,}725 < 3{,}739$

La rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$ è una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}$ e l'insieme dei punti di una retta su cui è fissato un sistema di ascisse



Teorema di densità (di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) in $\mathbb{R}$:

Dati 2 numeri reali $a < b$, esistono infiniti $r \in \mathbb{Q}$ e infiniti $s \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $a < r < b$ e $a < s < b$

$: \rightarrow$ tali che

Notazione ad intervalli

L'insieme dei numeri compresi fra a e b si chiama intervallo di estremi a, b

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ int. chiuso

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ int. aperto

} intervalli limitati

$b - a \rightarrow$ ampiezza dell'intervallo

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$ non limitato superiormente

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$ // // inferiormente

$]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$ → tutto $\mathbb{R}$

(a,b) intervallo generico

$]a, b[$ è in corrispondenza biunivoca con $]0, 1[$

$\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con $]-1, 1[$

$[0,1]$ ha una potenza maggiore del numerabile

$x_1 = 0, a_{11}\, a_{12} \dots$

$x_2 = 0, a_{21}\, a_{22} \dots$

Costruisco $x = +0, b_1 b_2 \dots \in [0,1]$ però

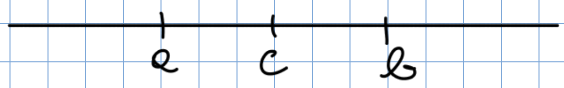
$b_1 \neq a_{11} \Rightarrow x \neq x_1$

$b_2 \neq a_{22} \Rightarrow x \neq x_2$

$b_n \neq a_{nn} \Rightarrow x \neq x_n \quad \forall n \Rightarrow x \notin [0,1]$

Potenza di $\mathbb{R}$ = potenza del continuo

Intorno di un numero



$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$c - a = b - c = r \Rightarrow \begin{array}{l} a = c - r \\ b = c + r \end{array}$$

$$(a, b) = (c - r, c + r)$$

BALL → sfera ↘ intorno

$c \in \mathbb{R} \quad r > 0 \qquad \underbrace{]c-r, c+r[\; = I_r(c) = B(c, r)}$

posso usare una di queste 3 notazioni per dire

Intorno di c di raggio r

$X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad X \neq \emptyset$ $\quad$ insieme numerico

Massimo X: $\quad \max X = M \in X : M \geq x \quad \forall x \in X$

il massimo è unico: se c'è ne fossero due M_1, M_2

$M_1, M_2 \in X \quad \begin{matrix} M_1 \geq M_2 \\ M_2 \geq M_1 \end{matrix} \Rightarrow M_1 = M_2$

Non c'è sempre un massimo

$[0,1[\qquad M < 1$

$M \geq x \quad \forall x \in [0,1[$

dato $\bar{x} : M < \bar{x} < 1$

si ha $\quad x \in [0,1[$

$\bar{x} > M$

$X = [0,1] \qquad 1 = \max X$

$m = \min X$ se $\quad m \in X \quad m \leq x \quad \forall x \in X$

se esiste, è unico.

$h \in \mathbb{R}$ maggiorante per X se $h \geq x \quad \forall x \in X$

$\bar{M}_X$ = ins dei maggioranti $\qquad \max X \in \bar{M}_X$

se $h \in \bar{M}_X$ e $h' > h \Rightarrow h' \in \bar{M}_X$

L'insieme dei maggioranti è $\emptyset$ oppure è ∞

Proprietà dei maggioranti

$h \notin \bar{M}_X \quad$ se $\exists x \in X : \; x > h$

$\bar{M}_X = \emptyset \quad$ se $\forall h > 0 \quad \exists x \in X : \; x > h$

$\bar{M}_X = [1, +\infty[$

Definizione estremo superiore

Se $\overline{M}_X \neq \emptyset$ si def $\underbrace{\sup X}_{\text{estremo superiore}} = \min \overline{M}_X$

Se $\overline{M}_X = \emptyset$ si def $\sup X = \infty$

Definizione limitato superiormente

X si di limitato superiormente se $\overline{M}_X \neq \emptyset$