30 aprile 2025

mercoledì 30 aprile 2025 14:01

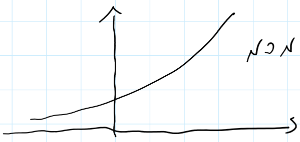
AVVISO: la prossima lezione sarà martedì 6 maggio dalle 8 alle 10 in aula 24

COMPLEMENTI

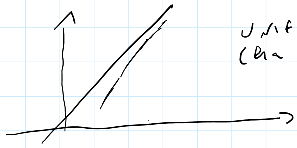
① Funzioni UNIFORMEMENTE CONTINUE

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ si dice unif. cont. in (a,b) se

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$: se $x_1, x_2 \in (a,b)$, $|x_1-x_2|<\delta$ si ha $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$



NON UNIF CONT



UNIF CONT
(ha asint. obl.)

NON UNIF CONT
(ha asint vert)

Se nella def poniamo $x_2=c$, $x_1=x$ generico, essa si legge

$|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon \Rightarrow f$ è cont. in c

UNIF CONT $\Rightarrow$ CONT non il viceversa

TEOR. DI HEINE-CANTOR f cont in $[a,b]$ è unif cont.

② Sia f un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g

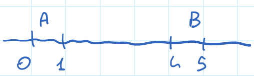
$\left(\frac{f}{g}\to 0\right)$ Si può scrivere $f=o(g)$ "f è un "o piccolo" di g"

cioè è una quantità trascurabile rispetto a g

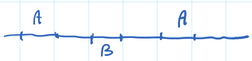
o simbolo di LANDAU

③ Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ Si dice che sono SEPARATI se

$a \le b \quad \forall a\in A,\ \forall b \in B$

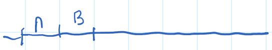


sono separati e disgiunti $A=[0,1]$ $B=[4,5]$



sono disgiunti ma non separati $A=[0,1]\cup[4,5]$ $B=[2,3]$

sono separati ma non disgiunti $A=[0,1]$ $B=[1,2]$



A, B separati $\Leftrightarrow$ $\sup A \le \inf B$

$\forall y \in [\sup A, \inf B]$ è detto elemento di separazione

Se $\sup A = \inf B$ A e B sono detti contigui (hanno un unico elem. di separazione)

$A=[0,1]$ $B=[1,2]$ $\sup A = \inf B = 1 \in A\cap B$

$A=[0,1[$ $B=]1,2]$ " $1 \notin A\cup B$

$A=[0,1]$ $\quad B=[1,2]$ $\qquad \sup A = \inf B = 1 \in A \cap B$

$A=[0,1[$ $\quad B=]1,2]$ $\qquad$ " $\quad 1 \notin A \cup B$

$A=[0,1]$ $\quad B=]1,2]$ $\qquad$ " $\quad 1$ $\Big\}$ appartiene ad uno solo dei due ins.

$A=[0,1[$ $\quad B=[1,2]$ $\qquad$ " $\quad 1$

A, B contigui $\iff \forall \varepsilon>0 \ \exists\, a \in A,\ b \in B : b-a<\varepsilon$

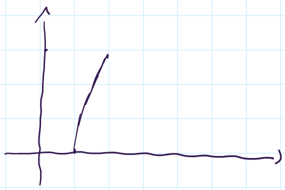
es. $A=\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad B=\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad \sup A = \inf B = 0$

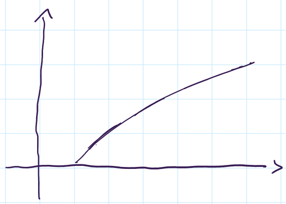
$\forall \varepsilon>0 \ \exists\, n : \frac{1}{n}-(-\frac{1}{n})<\varepsilon \iff \frac{2}{n}<\varepsilon \iff n > 2\varepsilon$

CALCOLO DIFFERENZIALE

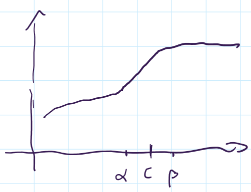
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad \Delta f = f(b)-f(a)$ $\quad$ incremento di f

$\Delta x = b-a$ $\qquad$ " $\quad$ della variabile





$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ rapporto incrementale



$c \in (a,b)$ cons. $\quad \Delta f = f(x)-f(c)$ $\qquad (x \in (a,b),\ x \neq c)$

$\Delta x = x-c$

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = r(x)$ $\qquad r:(a,b)\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$ rapporto incrementale

Sappiamo che f crescente in $c \iff \exists\, I_\delta(c) : r(x)>0 \ \forall x \in I_\delta(c)\setminus\{c\}$

Se $\lim_{x\to c} r(x) > 0 \Rightarrow r(x)>0$ in un intorno di $c \Rightarrow f$ cresc. in c

(se ciò accade in ogni punto, f sarà strett. cresc $\Rightarrow$ invertibile)

Se $\lim_{x \to c} r(x)$ esiste ed è finito, f è detta DERIVABILE in c e

si pone $f'(c) = \lim_{x\to c} r(x)$ $\quad$ (derivata di f in c)

In alternativa possiamo chiamare $c+h$ gli altri punti di (a,b)

$h = x-c$ $\qquad$ Si deve avere $\quad a<c+h<b \iff a-c<h<b-c,\ h\neq 0$

il rapp. increm. si scriverà $\quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = R(h)$ $\quad R:(a-c,b-c)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

R è composto da r con $c+h$ $\qquad R(h) = r(c+h)$

$$r(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \qquad R(h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0} (c+h) = c \\ \lim_{x\to c} r(x) = f'(c) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{h\to 0} R(h) = f'(c)$$

r è composto da R con $x-c$ $\qquad r(x) = R(x-c)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to c} (x-c) = 0 \\ \lim_{h\to 0} R(h) = f'(c) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to c} r(x) = f'(c)$$

in definitiva $\quad f'(c) = \lim_{x\to c} r(x) = \lim_{h\to 0} R(h)$

f si dice derivabile in (a,b) se lo è in ogni punto.

se $c \in]a,b[$ si possono cons. $\lim_{x\to c^-} r(x) = f'_-(c)$ deriv. sinistra

$\lim_{x\to c^+} r(x) = f'_+(c)$ " destra

$$\exists f'(c) \Leftrightarrow f'_-(c) = f'_+(c)$$

(in a e in b la deriv. è solo destra in a e solo sinistra in b)

esempi

$f(x) = k \qquad r(x) = \frac{k-k}{x-c} = 0 \qquad f'(c) = 0 \quad \forall c$

$f(x) = x \qquad r(x) = \frac{x-c}{x-c} = 1 \qquad f'(c) = 1 \quad \forall c$

$f(x) = x^2 \qquad r(x) = \frac{x^2-c^2}{x-c} = x+c \qquad f'(c) = 2c \quad \forall c$

$f(x) = \sqrt{x} \quad c=0 \qquad r(x) = \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to 0^+} r(x) = +\infty \Rightarrow \nexists f'(0)$

$f(x) = |x| \quad c=0 \qquad r(x) = \frac{|x|-0}{x-0} = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f'_+(0) = 1 \\ f'_-(0) = -1 \end{array} \Rightarrow \nexists f'(0)$

CONTINUITÀ $\not\Rightarrow$ DERIVABILITÀ come si vede dagli ultimi due esempi

TEOR. f deriv in $c \Rightarrow f$ cont. in c

DIM. TS. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

$$f(x) = f(x) - f(c) + f(c) = \underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{\downarrow\, f'(c)} \underbrace{(x-c)}_{\downarrow\, 0} + f(c) \to f(c)$$

TEOR. $\exists f'(c) \Leftrightarrow \exists\, p(x)$ polinomio di primo grado :

$p(c) = f(c)$

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-p(x)}{x-c} = 0 \qquad \left(f(x)-p(x) = o(x-c)\right)$

quindi $f(x) = p(x) + \underbrace{o(x-c)}_{\text{quantità trascurabile}}$ $\Rightarrow$ f si può approssimare con p

DIM. Se $\exists f'(c)$ scriviamo $p(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$

Si ha $p(c) = f(c)$ e

$$\frac{f(x)-p(x)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{x-c} = \underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{f'(c)} - f'(c)\frac{\cancel{x-c}}{\cancel{x-c}} \to 0$$

Viceversa se $\exists p(x) = f(c) + a(x-c)$ dim che $\exists f'(c)$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)-a(x-c)+a(x-c)}{x-c} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x)-p(x)}{x-c}}_{0} + a\frac{\cancel{x-c}}{\cancel{x-c}} \to a \Rightarrow \exists f'(c) = a$$

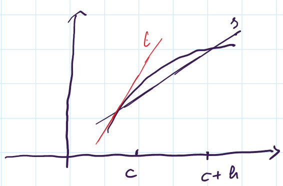
es. vedremo che se $f(x) = \sin x$ si ha $f'(x) = \cos x \quad \forall x$

$c = 0$ $\quad \sin x = \sin 0 + \cos 0\,(x-0) + o(x-0) = x + o(x)$

$\Rightarrow \sin x \sim x$

Interpretazione geometrica

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad c\in(a,b)$ $\quad \exists f'(c)$ $\quad$ con $c+h \in (a,b)$



retta secante

$$s: \frac{x-c}{\cancel{c}+h-\cancel{c}} = \frac{y-f(c)}{f(c+h)-f(c)}$$

$$s: y = f(c) + \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{R(h)}(x-c)$$

Osserviamo che se $h\to 0$ si ha $c+h\to c \Rightarrow s \to t$ (cioè "tende" ad avere un solo punto a comune col grafico, quindi "tende" ad essere tangente)

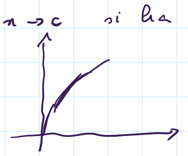
Dato che $\lim_{h\to 0} R(h) = f'(c)$ possiamo con la retta di eq.

$$t: y = f(c) + f'(c)(x-c)$$

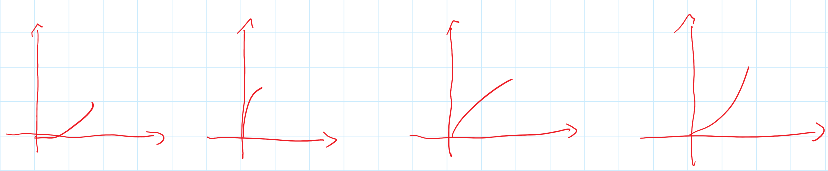
e chiamarla "tangente al grafico"

Osserviamo che $f(c) + f'(c)(x-c) = p(x)$ quindi approssimare f con un polinomio equivale ad approssimare il grafico con la tangente

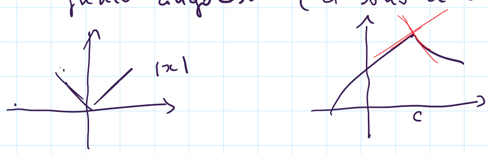
Se $r(x)$ diverge per $x\to c$ si ha la tangente verticale



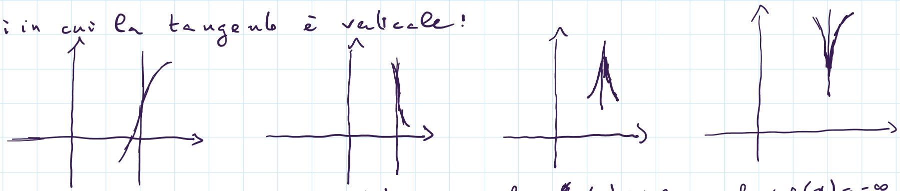
$\sqrt{x}$



Se $f'_-(c) \neq f'_+(c)$ punto angoloso (ci sono due tangenti)



Casi in cui la tangente è verticale!



$\lim_{x \to c} r(x) = +\infty$ — flesso ascendente

$\lim_{x \to c} r(x) = -\infty$ — flesso discend.

$\lim_{x \to c^-} r(x) = +\infty$, $\lim_{x \to c^+} r(x) = -\infty$

$\lim_{x \to c^-} r(x) = -\infty$, $\lim_{x \to c^+} r(x) = +\infty$

punto cuspidale

Se $\exists\, f'(x)\ \forall x \in (a,b)$ si può cons. la funz. $f'(x)$

Se $\exists$ la sua derivata in c, essa sarà detta derivata seconda di f in c $\quad f''(c)$

analog. $f'''(c)$, $f^{IV}(c)$, ..., $f^{(n)}(c)$

Problema: si può fare la derivata di una successione?