

ch0m7gw

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \pi_2 = \pi_2 - 4\pi_1 \\ \pi_3 = \pi_3 - 7\pi_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \pi_2 = \pi_2 / -3 \\ \pi_3 = \pi_3 / -6 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi_3 = \pi_3 - \pi_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{2,1} = 2, 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \pi_1 - 2\pi_2$$

Determinante di una matrice quadrata

Permutazione: S è un insieme finito, $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ $n \in \mathbb{N}$

una mappe biettive $\sigma: S \rightarrow S$ *sigme*
 $e_i \rightarrow e_{i\sigma} = \sigma(i)$

Consiste nello scambiare l'ordine degli elementi di un insieme

$$\sigma \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_m \\ e_{j_1} & e_{j_2} & \dots & e_{j_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ j_1 & j_2 & \dots & j_N \end{pmatrix} = (j_1 j_2 \dots j_N)$$

Esempio:

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow[\text{casualmente}]{\text{Permutazione fatta}} \sigma(2 \ 3 \ 1 \ 4)$$

$$\sigma(1) = 2 \quad \sigma(2) = 3 \quad \sigma(3) = 1 \quad \sigma(4) = 4$$

$$\mathcal{S}_m = \{ \text{insieme delle permutazioni di } \{1 \dots n\} \}$$

Lemma: le dimenssione di \mathcal{S}_m sara uguale a $m!$

Dimostrazione: Per $\sigma(1)$ abbiamo m scelte $\{1, 2 \dots n\}$

Per $\sigma(2)$ abbiamo $m-1$ scelte

Per $\sigma(3)$ abbiamo $m-2$ scelte

⋮
ecc...

Esempio: $S = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{array}{ll} (1, 2, 3) & (1, 3, 2) \\ (2, 1, 3) & (2, 3, 1) \\ (3, 1, 2) & (3, 2, 1) \end{array} \right\} \rightarrow \text{tutte le permutazioni di } \mathcal{S}_3 \text{ sono 6 quindi: } 3! = 6$$

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{\sigma} (2 \ 3 \ 1 \ 4) \xrightarrow{\tau} (1 \ 4 \ 2 \ 3)$$

Permutando una permutazione otteniamo un'altra permutazione

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_m \exists \sigma^{-1} \in \text{t.c. } \sigma \circ \sigma^{-1} = \text{id} = \sigma^{-1} \circ \sigma$$

Numero di inversioni all'interno degli insiemi

$\sigma \in \mathcal{S}_m$ e' e' un'inversione ogni qual volta abbiamo $i < j$ ma $\sigma(i) > \sigma(j)$ chiamiamo $i(\sigma)$ il numero di inversione di σ per ogni singolo numero controlliamo se quello a destra e' maggiore, se non e' cosi' aggiungiamo 1 ad $i(\sigma)$

Esempio $\sigma(2, 3, 1, 4) \quad i(\sigma) = 2 \rightarrow$ Quanti numeri sono nelle posizioni sbagliate
 $\sigma(1, 2, 3, 4) \quad i(\sigma) = 0$
 $\tau(3, 4, 1, 2) \quad i(\tau) = 4$

Definizione: $\sigma \in \mathcal{S}$

σ è pari: $i(\sigma)$ è pari

σ è dispari: $i(\sigma)$ è dispari

Il segno di σ è $\text{sgn} = (-1)^{i(\sigma)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ dispari} \end{cases}$

Lemme $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$

1) $\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = \text{sgn}(\tau) \cdot \text{sgn}(\sigma)$

2) $\text{sgn}(\sigma)^{-1} = \text{sgn}(\sigma)$

Determinante di una matrice quadrata

$A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

il determinante di A è produttore

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right)$$

Esempio: 2×2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$ tutte le permutazioni di queste matrice $\rightarrow \mathcal{S}_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ +1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \right\}$

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

prende l'indice e poi il numero

numero di inversioni

0 è pari quindi segno +
1 è dispari quindi segno -

3×3 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$\mathcal{S} = \left\{ \begin{matrix} (1, 2, 3) & (1, 3, 2) \\ (2, 1, 3) & (2, 3, 1) \\ (3, 1, 2) & (3, 2, 1) \end{matrix} \right\}$

Regole di Sarrus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1) Ricopi le prime 2 colonne

2) traccia le diagonali

3) le diagonali principali sono + e le diagonali secondarie sono -

4) esempio diagonale 1: $+a_{11}a_{22}a_{33}$

Note bene: $\det A^T = \det A$

Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è diagonale o triangolare inferiore/superiore allora il determinante lo calcoliamo così:

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\hookrightarrow = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Lemmma 1: $A^{(i)} \xrightarrow{\text{risorse righe}} A^{(i)} = dV + d'V'$

allora

$$\det A = d \cdot \det \begin{pmatrix} A^{(i)} \\ A^{(i-1)} \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + d' \cdot \det \begin{pmatrix} A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

$$A^{(1)} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

modif. delle prime righe

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & a \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$$

Per le regole di Sarrus le prime i + le seconde i -

Lemmma 2

Se A' la matrice ottenuta scambiando 2 righe di A

$$\det A' = -\det A$$

Se A' è la matrice ottenuta applicando una commutazione σ alle righe di A allora $\det A' = \text{sgn}(\sigma) \det A$