

Limite di  $f$  al tendere di  $x \rightarrow c$ .

$f: x \rightarrow R \quad x \in R \quad c \in D(x)$

$\ell \in R \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in X, x \neq c$

$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

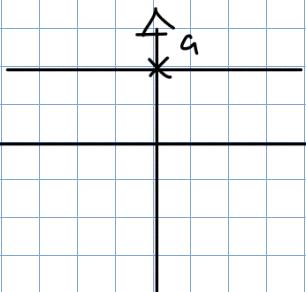
$$c - \delta < x < c + \delta$$

es:  $f(x) = \begin{cases} 4 & \forall x \in R \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4 \end{cases}$

$$|f(x) - 4| = |4 - 4| < \varepsilon$$

per  $\forall x$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$$

$$|f(x) - 4| =$$

$$|4 - 4| < \varepsilon \text{ per } x \neq 0$$

$$\forall x \neq 0$$

nel punto  $x = 0$  le condizioni non sono verificate  
ma il limite esiste formalmente 4.

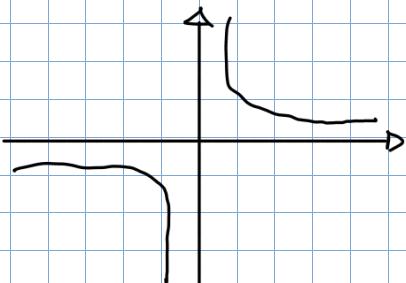
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  si può fare anche  $f$  nel punto  $x = 0$  non  
è definita

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty (-\infty) \Leftrightarrow \forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in X, x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > K \quad (< -K)$

es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{si deve avere } \frac{1}{x^2} > K \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{K}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{K}} < x < \frac{1}{\sqrt{K}}, \quad x \neq 0 \quad \text{quindi } f = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = ?$$



la restrizione a  $[0, +\infty]$  diverge a  $+\infty$

$$\left( \frac{1}{x} > K \Leftrightarrow x < \frac{1}{K} \quad f = \frac{1}{x} \right)$$

la restrizione a  $[-\infty, 0]$  diverge a  $-\infty$

$$\left( \frac{1}{x} < -K \Leftrightarrow -\frac{1}{x} > K \Leftrightarrow -x < \frac{1}{K} \Rightarrow x > -\frac{1}{K} \quad f = \frac{1}{x} \right)$$

$$f: (e, b) \setminus \{c\} \rightarrow c \in [e, b]$$



$\forall c \in [e, b]$  si considera la restrizione di  $f$  a  $[e, c]$ .  
il suo limite per  $x \rightarrow c$  si chiama

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \quad \text{limite destro di } f \text{ per } x \rightarrow c$$

$\forall c \in [e, b]$  analogamente si introduce il  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$   
**limite simistro**

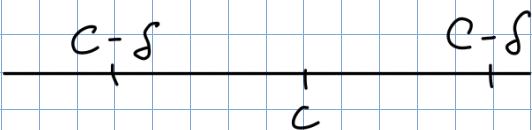
es:

Come abbiamo visto  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

## TEOREMA

Se  $c \in ]e, \infty[$  allora  $\exists \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$

## Dimostrazione



Se  $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = l \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$  in  $]e - \delta, c + \delta[ \setminus \{c\}$

quindi in particolare:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ in } ]c - \delta, c[ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ in } ]c, c + \delta[ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

Viceversa se

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ per } x \in ]c - \delta, c[$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ per } x \in ]c, c + \delta[$$



Allora  $|f(x) - l| < \varepsilon$  per  $x \in ]c - r, c + r[ \setminus \{c\}$

con  $r = \min(\delta, \delta')$

$$\text{es: } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f(x) \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

TEOREMA risalito:

unicità del limite

teorema del confronto

confronto es:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l$  }  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$   
 $f(x) \leq g(x) < l \quad \forall n$

teorema fronte (costruzione restringibile del limite di una funzione)

$$f: X \rightarrow \mathbb{R} \quad c \in D(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l (\pm \infty) \Leftrightarrow \forall \{x_m\} \subseteq X \setminus \{c\}$$

tale che  $x_m \rightarrow c$  si ha  $f(x_m) \rightarrow l (\pm \infty)$

$$x_m: \mathbb{N} \rightarrow X \quad f: X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{compr.}$$

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow x_m \in X \rightarrow f(x_m) \xrightarrow{\text{susseguente permutazione}}$$

da qui negiamo le operazioni con i limiti

$$\text{es: } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

$$\text{dim che } \lim f(x)g(x) = lL$$

$$\text{Sia } \{x_m\} \subseteq X, x_m \neq c, x_m \rightarrow c$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l &\Rightarrow f(x_m) \rightarrow l \\ \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L &\xrightarrow{\text{rispettivamente}} g(x_m) \rightarrow L \\ &\quad \uparrow \\ &\quad f(x_m)g(x_m) \rightarrow lL \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) g(x) = \infty$$

$$f: [\epsilon; +\infty] \rightarrow \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{x} > \epsilon : \quad$$

$\forall x > \bar{x}$  si ha  $|f(x) - \infty| < \epsilon$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty (-\infty) \quad \forall k > 0 \quad \exists \bar{x} > 0 : \forall x > \bar{x} \text{ si ha}$$

$$\begin{aligned} f(x) &> k \\ &< -k \end{aligned}$$

$$f: ]-\infty, c[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{x} < c :$$

$\forall x < \bar{x}$  si ha  $|f(x) - \infty| < \epsilon$   
 $+\infty$  analogamente

### Proposizione

Se  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione elementare  $c \in X$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Allora si devono perciò solo i "limiti utili"

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f$  è definita in un intervallo non limitato

$\lim_{x \rightarrow c}$  se  $c \in D(f)$ ,  $f$  non è definita in  $c$  oppure

comprile le leggi di def. e simmetre e a destra di  $c$

Limiti delle funzioni composte

$$f: (d, \beta) \setminus \{\gamma\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: (\alpha, \beta) \setminus \{\gamma\} \rightarrow (d, \beta) \setminus \{\gamma\},$$

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \gamma \quad \lim_{y \rightarrow \gamma} f(y) = l$$

punto in  $(\alpha, \beta) \setminus \{\gamma\}$   $f(x) = f(g(x))$  si ha  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$   
 $f(x) = f(g(x)) \rightarrow l$

es:

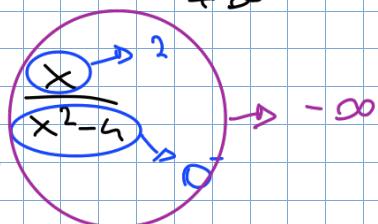
$$\lim_{x \rightarrow 3} \log \underbrace{(x+5)}_8 = \log 8$$

infatti se  $x_m \rightarrow c \Rightarrow f(x_m) \rightarrow l \Rightarrow f(g(x_m)) \rightarrow f(l)$

Il teorema vale anche quando  $c, l$  valgono  $+\infty$

es:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x^2 + 2) = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 3 = 0$$



## Limiti delle funzioni elementari

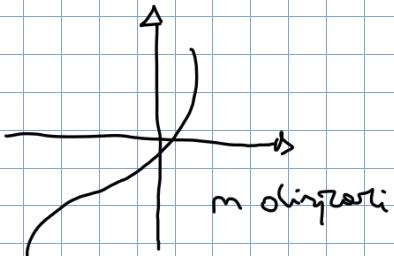
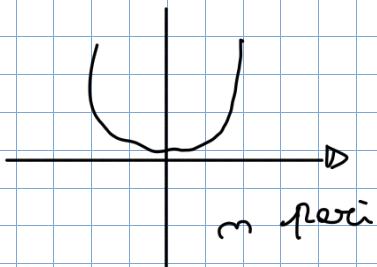
### - Funzione potenza

$$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{è def in } ]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad x^n > k \Leftrightarrow x > k^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \begin{cases} +\infty & n \text{ pari} \\ -\infty & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$x^n = \underbrace{(-1)^n}_{\pm 1} \underbrace{(-x)^n}_{+\infty}$$



$$f(x) = x^{-m} \quad m \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^m} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se } x \text{ è pari}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{se } x \text{ è dispari}$$

$$f(x) = x^d \quad \text{il caso interessante è quando } d \in [0, +\infty[ \quad \text{se } d > 0$$

$]0, +\infty[ \quad \text{se } d < 0$

$$d > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad x^d > K \Leftrightarrow x > K^{\frac{1}{d}}$$

$$\text{se } d < 0 \quad f(x) = \frac{1}{x^d} \quad (-d > 0) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

### Polinomi

$$f(x) = e_0 x^n + e_1 x^{n-1} + \dots + e_{n-1} x + e_n \quad n \in \mathbb{N} \quad e_0, \dots, e_n \in \mathbb{R}$$

per  $n \rightarrow \pm\infty$  si trova quanto  $f$  i.e.  $+\infty - \infty$

$$f(x) = x^n \left( e_0 + \frac{e_1}{x} + \dots + \frac{e_n}{x^n} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se } e_0 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{se } e_0 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ pari, } e_0 > 0 \text{ oppure } n \text{ dispari, } e_0 < 0 \\ -\infty & \text{se } n \text{ pari, } e_0 < 0 \text{ oppure } n \text{ dispari, } e_0 > 0 \end{cases}$$

Gli polinomi divergono sempre per  $x \rightarrow \pm\infty$  si deve guardare solo il termine di grado massimo

$$\text{es: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x^2 - 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^8 - x^3 - 2x^6 - x^5 - 3x^4 - 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - x^3 + x^2 - 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - x^3 + x^2 - 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 - x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^6 - x^5 - x^3 - 2x^2 - 1) = +\infty$$

### Funzioni razionali finite

$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$   $A, B$  polinomi ( $B$  di prodotto positivo)  
 $A, B$  non hanno fattori comuni

$\Rightarrow B(c) = 0$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) se  $A(c) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$

es:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{x^2-4} = -\infty$  ???

Per  $x \rightarrow \pm\infty$   $f$  si presenta nelle forme indet.  $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + \dots + a_m}{b_0 x^r + \dots + b_r} = \frac{x^n}{x^r} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_m}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_r}{x^r}}$$

$\downarrow$

$$\frac{a_0}{b_0}$$

$$\Rightarrow n = r \Rightarrow x^{n-r} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$$

$$\Rightarrow n < r \Rightarrow x^{n-r} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow n > r \Rightarrow x^{n-r} \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$$

$$\text{es: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x + 1}{x^3 + 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 3x + 1}{x^3 + 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 3x^6 + 1}{x^3 + 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x^5 + 1}{x^3 + 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x^6 + 1}{x^4 + 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x^7 + 1}{1 - x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x^5 + 1}{3 - x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^4 + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3x^6}{3 - x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^6 + 3x - 1}{x^8 + 3} = 0$$

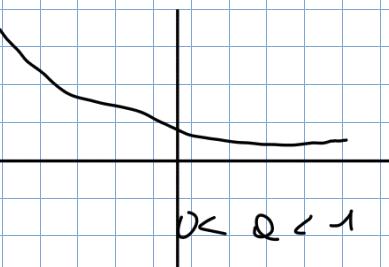
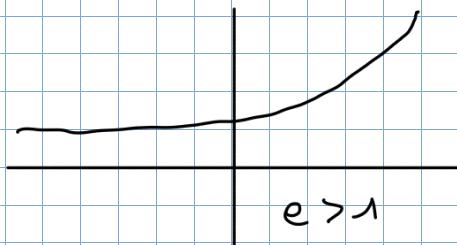
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 3}{(3x - 1)^2} = \frac{2}{9}$$

## Funzioni esponenziali

$$a > 0, a \neq 1 \quad f(x) = a^x \quad ]-\infty, +\infty[$$

$$a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \end{cases}$$



## Funzione Logaritmica

$$a > 0, a \neq 1 \quad f(x) = \log_a x \quad ]0, +\infty[$$

$$a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$0 < a < 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$(f(x))^{\frac{f(x)}{x}} = e^{\frac{f(x) \cdot \log f(x)}{x}}$$

$$1^\infty (+\infty)^0 0^0$$

## Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{infatti se } a_m \rightarrow 0 \quad \frac{\sin a_m}{a_m} \rightarrow 1$$

col teorema punto di dimostrazione è Rolle

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{e}^{ax} - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{e}^{ax} - 1}{ax} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{e}^{ax} - 1}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ricordiamoci che  $(1 + \frac{1}{x})^x \rightarrow e$ . Si può provare che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \text{ è del per } x < -1, x > 0 \Rightarrow \text{ha senso}$$

calcolare questi 2 limiti

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$  è definita per  $x > -1, x \neq 0 \Rightarrow$  ha senso calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} e \text{ si preferisce nelle forme } 1^\infty$$

$$\text{Si dimostra che } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\text{segue che } \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1$$

$$\frac{1}{x} \log(1+x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\text{quindi } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \text{ e si dimostra che}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^d - 1}{x} = d$$

funzione infinitamente grande = un infinito

f: g infiniti simultanei (entrambi per  $x \rightarrow c$  o entrambi per  $x \rightarrow +\infty$ )

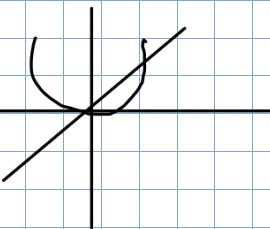
$\exists l \mid \frac{f(x)}{g(x)} \mid \rightarrow l > 0$  infinito dello stesso ordine

$\exists \infty \mid \frac{f(x)}{g(x)} \mid \rightarrow +\infty$  infinito di ordine superiore

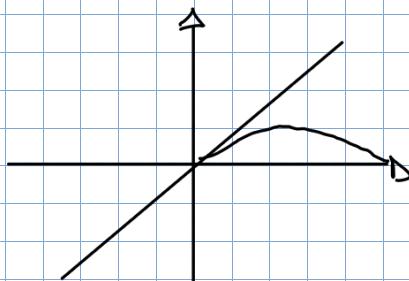
fig infinitesimi rimanente

se  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$  f infinito di ordine superiore

es:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \infty$



se  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow l > 0$  sono dello stesso ordine



se  $\left| \frac{f(x)}{(g(x))^m} \right| \rightarrow l > 0$  f infinitesimo di ordine m rispetto

ad x

es:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

ma  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$  m=2

infinitesimi fondamentali: per  $x \rightarrow \pm \infty$   $\frac{1}{x}$

per  $x \rightarrow c$   $x - c$

infinito fondamentale: per  $x \rightarrow \pm \infty$   $x$

per  $x \rightarrow c$   $\frac{1}{x-c}$

Esercizio:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3^-}} \frac{3x-4}{2x^2-9} = 0$$

ERRORE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{3x}{x^3+4}}{e^{\frac{1}{x^4}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{3x}{x^2+4}}{\frac{9x^2}{(x^2+4)^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^4}} - 1}$$

$$= \frac{\frac{9}{2}}{1} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \left( \frac{1}{e} \right) \frac{x-8}{x^2-16} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \log_2 \frac{x^2-9}{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \frac{x^4+1}{2x^3+3} = +\infty$$

Ricordiammo infine che:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  sono sono regolari per  $x \rightarrow +\infty$

$\tan x$  diseguale per  $x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-$  e per  $x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

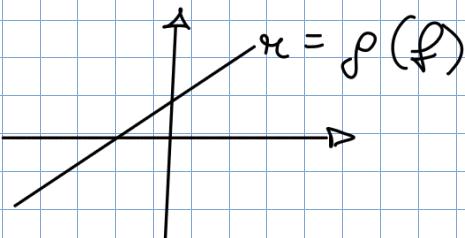
## Asintoti

$f: (\epsilon, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(f) = \{(x, f(x)) : x \in (\epsilon, \delta)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\pi: ax + by + c = 0 \quad \text{se} \lim_{x \rightarrow \infty} d(P, \pi) = 0 \quad \text{con } P \in g(f)$

si dice che  $\pi$  è un asintoto per  $f$



## Asintoto orizzontale

Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  (esiste solo se  $d(x)$  è > 0)

le rette di equazione  $x = c$  si dicono asintoti orizzontali per  $f$

$P(x_0, y_0)$

$$\pi: ax + by + c = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$P(x, f(x))$

$$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot f(x) - c|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x - c| \rightarrow 0$$

$$\pi: x - c = 0$$

per  $x \rightarrow c$

## Asintoto destro

$f: [\epsilon, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{si dice che le rette di eq } y = l$

si dicono destri per  $f$

$P(x, f(x))$

$$d(P, \pi) = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot f(x) - l|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |f(x) - l| \rightarrow 0$$

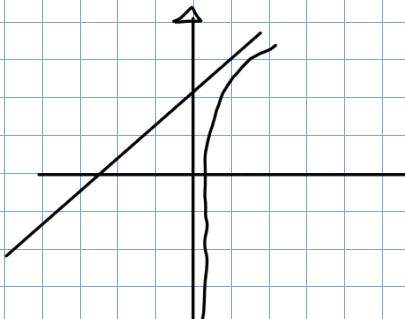
$$\pi: y - l = 0$$

per  $x \rightarrow +\infty$

(analogamente si introduce l'asintoto sinistro)

se  $\lim_{x \rightarrow D+\infty} f(x) = \pm \infty$  si cerca un es. obliqua di

$$\text{eq } y = mx + p$$



f è un infinito

con  $f(x) = mx + p$  è un  
infinito

affinché ci sia asintoto per f, f e g devono avere  
infiniti dello stesso ordine quindi f deve avere mf  
dello stesso ordine di x quindi  $\frac{f(x)}{x}$  deve avere un  
limite finito altrimenti si consideri:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{Se esso è } u \neq 0 \text{ si com}$$

$\lim (f(x) - mx)$  se esso è  $p \in \mathbb{R}$  la retta re:

$y = mx + p$  è asintoto infatti

$$R: mx - y + p = 0$$

$$P(x, f(x))$$

$$d(P, R) = \frac{|mx - f(x) + p|}{\sqrt{m^2 + 1}} \rightarrow 0$$

Analogamente si trova l'asintoto obliqua simile