EQUAZIONE DI RICORRENZA

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + F(n)$$

problema più piccolo $(b>1)$

$F(n)$ → funzione che descrive tempo aggiuntivo

a → sottoproblemi diversi più piccoli dei problemi originali

ricerca binaria:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \qquad a=1 \quad b=2$$

merge sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

ultima volta abbiamo visto albero di ricorrenza (1° metodo)

2° metodo

→ TECNICA DI SOSTITUZIONE

$T(n) = O(n)$ $\qquad$ $T(n) \leq c \cdot n$

→ al di sotto o uguale alla funzione

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + F(n) \leq ac \cdot \frac{n}{b} + f(n) \qquad T\left(\frac{n}{b}\right) \leq c\frac{n}{b}$$

→ suppongo vera la tesi per valori più piccoli, faccio sostituzione e dimostro

es. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ (k-esimo elemento)

$T(n) \leq c \cdot n$ (lineare)

$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \cdot \frac{n}{2}$ diamo questo x vero, $T(n) \leq c \cdot \frac{n}{2} + n = n\left(\frac{c}{2}+1\right) \leq cn$ è vero?

(principio di induzione)

se è vero allora → $\frac{c}{2} + 1 \leq c \rightarrow c+2 \leq 2c \rightarrow c \geq 2$

se prendo un $c \geq 2$ vale sempre

esiste una costante c per cui è vero, allora lineare

~

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ (diff rispetto al merge-sort è n^2), $O(n^2)$

$T(n) \leq cn^2$

$T(n) \leq c\left(\frac{n}{2}\right)^2$ supponiamolo vero

Sostituzione:

$T(n) = 2c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2 \rightarrow c\frac{n^2}{2} + n \overset{?}{\leq} cn^2$

→ si è vero

$\frac{c}{2} + 1 \leq c \Rightarrow c \geq 2$, anche qui lineare

~

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ $\qquad$ $O(n^2)$

$T(n) \leq cn^2$

$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\left(\frac{n}{2}\right)^2$

$\leq 4c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n = 4c\frac{n^2}{4} + n = cn^2 + n \Rightarrow cn^2 + n \leq cn^2$ $\quad n \leq 0$ impossibile perchè lavoriamo con lim che tende all'infinito. In casi come questo bisogna usare ipotesi più forti.

es.

$T(n) \leq cn^2 - dn \in O(n^2)$ ($-dn$ → componente negativa lineare)

c, d costanti

$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\left(\frac{n}{2}\right)^2 - d\frac{n}{2}$

$T(n) \leq 4\left(c \cdot \frac{n^2}{4} - d\frac{n}{2}\right) + n \rightarrow cn^2 - 2dn + n \rightarrow cn^2 + n(1-2d) \overset{?}{\leq} cn^2 - dn \Rightarrow 1 - 2d \leq -d$ (divido x n) $\Rightarrow d \geq 1$

nella forma originaria non poteva essere dimostrata, nella forma rafforzata sì

~

$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + n$ $\qquad$ $O(n)$

$T(n) \leq c \cdot n$

ip non raff.

$T\left(\frac{n}{3}\right) \leq c\frac{n}{3}$

$T(n) \leq c\frac{n}{3} + n = n\left(\frac{c}{3}+1\right) \overset{?}{\leq} cn \Rightarrow \frac{c}{3} + 1 \leq c \Rightarrow c+3 \leq 3c \Rightarrow 2c \geq 3 = c \geq \frac{3}{2}$ (x3)

ipotesi rafforzata non serve perchè abbiamo già risultato

$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$ $\quad O(\log^2 n)$

$T(n) \le c \log^2(n)$ (esiste c x questo)

$T(n) \le c \log^2\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n) \Rightarrow c\cdot(\log n - \underbrace{\log 2}_{1})^2 + \log n \to c\cdot(\log n - 1)^2 + \log n \to c\cancel{\log^2 n} + c - 2c\log n + \log n \le c\cancel{\log^2 n} \Rightarrow$

$c - 2c\log n + \log n \le 0 \Rightarrow c(1 - 2\log n) + \log n \le 0 \Rightarrow c \le \frac{-\log n}{1 - 2\log n}$

ipotesi rafforzata: $T(n) \le c\log^2 n - d\log n$

$T\left(\frac{n}{2}\right) \le c\log^2\left(\frac{n}{2}\right) - d\log\left(\frac{n}{2}\right)$

$T(n) \le c\log^2\left(\frac{n}{2}\right) - d\log\left(\frac{n}{2}\right) + \log n = c(\log n - 1)^2 - d(\log n - 1) + \log(n) = c\log^2 n + c - 2c\log n - d\log n + d + \log n \Rightarrow$

$c\cancel{\log^2 n} + \log n(1 - 2c - \cancel{d}) + c + d \overset{?}{\le} c\cancel{\log^2 n} - \cancel{d\log n} \Rightarrow \log n(1 - 2c) + \underset{c=1}{c} + \underset{d=1}{d} \le 0 = -\log n + 1 + 1 \le 0 \Rightarrow \log n \ge 2$

$\to (n \ge 4)$

~

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n}$ $\quad O(n)$

$T\left(\frac{n}{2}\right) \le c\frac{n}{2}$ $\quad T(n) \le cn$

$T(n) \le \cancel{2}\cancel{c}\frac{n}{\cancel{2}} + \sqrt{n} \overset{?}{\le} \cancel{cn} \Rightarrow \sqrt{n} \le 0$ impossibile

ipotesi rafforzata:

$T(n) \le cn - d\sqrt{n}$

$T\left(\frac{n}{2}\right) \le c\frac{n}{2} - d\sqrt{\frac{n}{2}}$

$T(n) \le 2\left(c\frac{n}{2} - d\sqrt{\frac{n}{2}}\right) + \sqrt{n} \Rightarrow \cancel{cn} - \overbrace{2d\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}}^{d\sqrt{2}\sqrt{n}} + \sqrt{n} \overset{?}{\le} \cancel{cn} - d\sqrt{n} \Rightarrow \cancel{\sqrt{n}}(1 - \sqrt{2}d) \le -d\cancel{\sqrt{n}} \Rightarrow d \le d\sqrt{2} - 1 \Rightarrow d(1 - \sqrt{2}) \le -1$

(Se non riusciamo con ip rafforzata, bisogna cambiare lim superiore)

$d(\sqrt{2} - 1) \ge 1 \Rightarrow d \ge \frac{1}{\sqrt{2} - 1}\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = d \ge \sqrt{2} + 1$

~

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ $\quad O(n^{\log_2 3})$ → intuirlo con albero, e poi dimostrare così

ip. raff. $T(n) \le cn^{\log_2 3} - dn$ $\quad T\left(\frac{n}{2}\right) \le c\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - d\left(\frac{n}{2}\right)$

$T(n) \le 3\left(c\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - d\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n \Rightarrow cn^{\log_2 3} - \frac{3}{2}dn + n \le cn^{\log_2 3} - dn \Rightarrow -\frac{3}{2}d + 1 \le -d \Rightarrow \frac{3}{2}d - d \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{2}d \ge 1 \Rightarrow d \ge 2$

$\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} = \frac{n^{\log_2 3}}{2^{\log_2 3}} = \frac{n^{\log_2 3}}{3}\right)$

~

Teorema Master

$a \geq 1$ $b > 1$ $F(n)$ funz. qualsiasi

↳ Solo equazioni del tipo $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + F(n)$

$\sum_{i=0}^{h} L(i) = L(0) + L(1) + L(2) + \dots L(h) \in O(?)$ hanno tutti lo stesso peso o alcuni sono asintoticamente più piccoli?

↳ lavoro fatto al livello i

$n^k + n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n^0 \in O(n^k)$

↳ questi possono essere eliminati.

Posso individuare un termine che domina su tutti gli altri?

se va a crescere, la complessità è l'ultimo livello
se va a decrescere, complessità n_0
se è omogeneo, somma dei vari livelli

es. $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + n \Rightarrow O(n)$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \Rightarrow O(n \log n)$ qui non c'è qualcosa che domina, lavoro di ogni foglie è n, quindi somma di tutte le foglie

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \Rightarrow O(n^2)$ qui lavoro è n^2

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ le foglie sono $n^{\log_b a} = n^{\log_2 3}$

Confronto $n^{\log_b a} \lesseqgtr F(n)$

1° caso $F(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ più piccolo
↳ $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ a dominare componente relativa alle foglie

2° caso $F(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ cresce alla stessa maniera
↳ $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
$F(n)$ · livelli dell'albero

3° caso $F(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ cresce in maniera più grande $aF\left(\frac{n}{b}\right) \leq cn$
↳ $T(n) = \Theta(F(n))$ il lavoro fatto nella radice domina

~

$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ $O(n)$

$a = 1$ $b = 2$ $F(n) = n$ $n^{\log_2 1} = n^0 = 1$ $n \in \Omega(1)$ 3° caso

$\frac{n}{2} \leq cn \overset{:n}{\Rightarrow} c \geq \frac{1}{2}$ $T(n) \in \Theta(n)$

~

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ $O(n^2)$

$a = 2$ $F(n) = n^2$ confronto con $n^{\log_2 2} = n$ $n^2 \in \Omega(n)$ 3° caso
$b = 2$

$aF\left(\frac{n}{b}\right) = 2\frac{n^4}{4_2} \leq cn \overset{:n}{\Rightarrow} \frac{n}{2} \leq c$ no

~

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$a = 4$ $b = 2$ $F(n) = n$ $n^{\log_2 4} = n^2$ $n \in O(n^2)$ 1° caso $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

~

$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$
$a = 1$ $b = 2$ $F(n) = \log(n)$

$n^{\log_1 2} = n^0 = 1$ $\log(n) \in \Omega(1)$ 3° caso $a \log\left(\frac{n}{b}\right) \leq cn$ log cresce più lentamente quindi sic. vero

$\Theta(\log n)$

~

Metodo di Strassen

complessita' cubica moltiplicazione tra righe e colonne di matrici

$\to T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

metodo master

$a = 7$ $\quad n^{\log_2 7}$

$b = 2$

$F(n) = n^2$ $\quad n^2 \in O\left(n^{\log_2 7}\right)$ $\quad$ 1° caso $\quad T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2 7}\right)$

$\to$ che e' minore di n^3

metodo di sostituz. $\quad$ ipotesi rafforzativa

$T(n) \leq cn^{\log_2 7} - dn^2$

$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 7} - d\left(\frac{n}{2}\right)^2$

$T(n) \leq 7\left(c\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 7} - d\left(\frac{n}{2}\right)^2\right) + n^2 = \cancel{cn^{\log_2 7}} - \frac{7}{4}d\cancel{n^2} + \cancel{n^2} \leq \cancel{cn^{\log_2 7}} - d\cancel{n^2} = -\frac{7}{4}d + 1 \leq -d$

$\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 7} = \frac{n^{\log_2 7}}{2^{\log_2 7}} = \frac{n^{\log_2 7}}{7}\right)$

$\Rightarrow \frac{3}{4}d \geq 1$

$\Rightarrow d \geq \frac{4}{3}$

---

mergesort caso 2 del teorema master