Macchine di turing

Configurazione e transizione della macchina di turing

Configurazione istantanea, configurazione della macchina di turing è l'insieme delle informazioni costituito dal contenuto del nastro, della posizione della testina e dello stato corrente

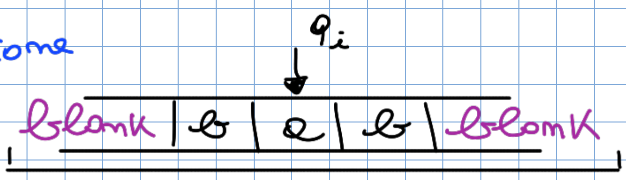
Osservazione

$\bar{b}$ blank

Possiamo rappresentare nella configurazione la più piccola porzione (finita) di nastro contenente tutti i simboli non blank e gli altri blank

↓

includere in questi la posizione della testina



↓

configurazione istantanea

Definizione formale di configurazione istantanea

Definiamo configurazione istantanea o configurazione di una macchina di Turing con alfabeto di nastro Γ ed un insieme di stati Q, una stringa $c = xqy$ dove con:

1. $x \in \Gamma\bar{\Gamma}^* \cup \{\varepsilon\}$
2. $q \in Q$
3. $y \in \bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\bar{b}\}$

$c = xqy$

xy: rappresenta il contenuto della sezione non vuota del nastro q: stato attuale della testina

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & & q_i \downarrow & & \\ \text{blank} & b & a & b & \text{blank} \end{array} \longrightarrow b\, q_i\, a\, b$$

e la testina si trova sul primo carattere di y (ricordiamo che y è una stringa)

$$\Gamma\Gamma^* \cup \{\varepsilon\} = \mathcal{L}_\Gamma$$

$\mathcal{L}_\Gamma$ è il linguaggio delle stringhe che possono comparire a sinistra del simbolo di stato (dove si trova la testina)

Indichiamo con $\mathcal{R}_\Gamma$ il linguaggio $\Gamma\Gamma^* \cup \{\bar{b}\}$ delle stringhe che possono comparire alla sua destra

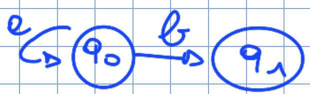
In particolare esiste una configurazione iniziale e indichiamo con tale termine una configurazione che data una qualunque stringa $x \in \Gamma^*$ rappresenti stato e posizione della testina all'inizio di una computazione di input x. Lo stato della configurazione iniziale è rappresentato da q_0 e la lunghezza di una configurazione la indichiamo con $|x|$

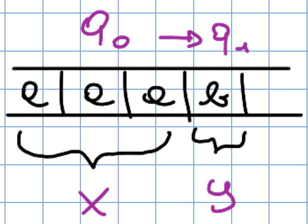
Esercizio

Dati $\Gamma = \{e, b\}$ $\quad Q\{q_0, q_1, q_2\}$

costruire un'automa a stati finiti che riconosce tutte le stringhe che rappresentano una configurazione di una MT, con alfabeto Γ e stati Q

La stringa è del tipo xqy





Definizione

Una configurazione $c = xqy$ si dice iniziale se $x = \varepsilon$, $q = q_0$, $y \in \Gamma^+ \cup \{\bar{b}\}$

Definizione

Una configurazione $c = xqy$ con la $x \in L_\Gamma$ $y \in R_\Gamma$ si dice finale se $q \in F$

Anche in questo caso abbiamo una funzione di transizione che può essere rappresentata mediante una matrice di transizione o profili di transizione. le colonne matrice corrispondono ai caratteri osservabili sotto la testina (elementi di Γ) e le righe ai possibili stati interni della macchina (elementi di Q). All'interno della tabella troviamo una tripla formata da un nuovo stato del carattere che viene scritto e lo spostamento della testine.

Nota bene: lo stato finale per una macchina di turing significa che non possiamo effettuare altri passi della computazione

Esempio:

$\Gamma = \{0, 1, *, \$\}$ $\quad Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_F\}$

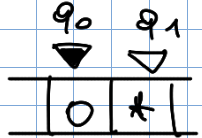
dove q_F è lo stato finale

δ_{MT}	0	1	*	$	$\bar{b}$
q_0	$(q_1, *, d)$	$(q_2, \$, d)$	—	—	$(q_F, \bar{b}, i)$
q_1	$(q_1, 0, d)$	$(q_1, 1, d)$	—	—	$(q_3, \bar{b}, d)$
q_2	$(q_2, 0, d)$	$(q_2, 1, d)$	—	—	$(q_4, \bar{b}, s)$
q_3	$(q_3, 0, d)$	$(q_3, 1, d)$	—	—	$(q_5, 0, s)$
q_4	$(q_4, 0, d)$	$(q_4, 1, d)$	—	—	$(q_6, 1, s)$
q_5	$(q_5, 0, s)$	$(q_5, 1, s)$	$(q_0, 0, d)$	—	$(q_5, \bar{b}, s)$
q_6	$(q_6, 0)$	$(q_6, 1, s)$	—	$(q_0, 1, d)$	$(q_6, \bar{b}, s)$
q_F	—	—	—	—	—

$\exists$ un arco dal nodo q_i al nodo q_j e tale arco è etichettato come tupla $a, b \in \Gamma$, $m \in \{s, d, i\}$
$\Leftrightarrow \delta(q_i, a) = (q_j, b, m)$

Esempio tipo di relazione

$\delta(q_0, 0) = \delta(q_1, *, d) \rightarrow$



Data una configurazione c, una applicazione della funzione di transizione δ della $\mathcal{M}$ deterministica su c, ci permette di ottenere una configurazione successiva chiamata c' nelle seguenti modalità:

destra

1) Se $c = xqay$ $x \in \mathcal{L}_\Gamma$ $y \in \Gamma^*\Gamma$ $a \in \Gamma$ e se $\delta(q, a) = (q', a', d)$ allora $c' = xa'q'y$

si sposta a destra

2) Se $c = xqa$ $\quad x \in \mathcal{L}_\Gamma$ e se $f(q,a) = (q', a', d)$ allora $c' = xa'q'\bar{b}$

si sposta a sinistra

3) Se $c = xaqby$ $\quad xa \in \Gamma\bar{\Gamma}^*$ $\quad y \in \bar{\Gamma}\Gamma \cup \{\varepsilon\}$ $\quad b \in \bar{\Gamma}$ e se $\delta(q,b) = (q', b', s)$ allora $c' = xq'ab'y$

4) Se $c = qby$ con $y \in \bar{\Gamma}^*\Gamma$ $\quad a \in \bar{\Gamma}$ e se $\delta(q,b) = (q', b', s)$ allora $c' = q'\bar{b}by$

non si sposta

5) Se $c = xqay$ $\quad x \in \mathcal{L}_\Gamma$ $\quad a \in \bar{\Gamma}$ e $y \in \bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\varepsilon\}$ e se $\delta(q,a) = (q', a', i)$

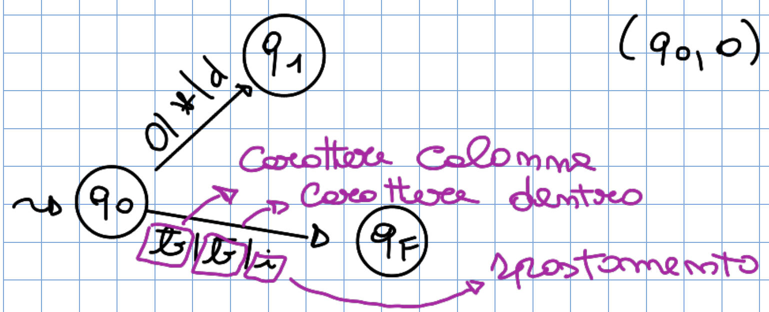
c e c' sono in relazione se $c \vdash_{\mathcal{M}} c'$ (relazione di transizione)

$\mathcal{M}$ → particolare MT → Regole di riscrittura

$$\delta(q_1, a) = (q_2, b, s)$$

q_1 si sposta a sinistra ottenendo lo stato q_2 e la rispettiva nuova configurazione

Grafo di transizione della tabellone scritta prima



$$(q_0, 0) = (q_1, *, d)$$

Completo a pagina 175 $\quad$ Esercizio 5.2

Computazioni di macchine di Turing

Le MT può essere definite come un dispositivo riconoscitore.
Dato un alfabeto di input $\Sigma \subseteq \Gamma$ una MT può essere viste come un dispositivo che classifica le stringhe in Σ^* in funzione del tipo di computazione indotto.

Definizione

Data una macchina di Turing deterministica M con alfabeto Γ e stato iniziale q_0 e dato un alfabeto di input $\Sigma \subseteq \Gamma$ una stringa $x \in \Sigma^*$ è accettata (rifiutata) da M se esiste una computazione di accettazione (di rifiuto) di M con $c_0 = q_0 x$

Definizione 5.6

Sia $M = \langle \Gamma, \bar{b}, Q, q_0, F, \delta \rangle$ una MT
Diciamo che M riconosce un linguaggio $L \in \Sigma^*$ dove $\Sigma \subseteq \Gamma$ se e solo se per ogni $x \in \Sigma^*$ esiste una computazione massimale $q_0 x \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} wqz$ con
$w \in \Gamma\bar{\Gamma} \cup \{\varepsilon\}$ $z \in \bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\bar{b}\}$ dove $q \in F$ se e solo se $x \in L$

Definizione 5.7

Sia $M = \langle \Gamma, \bar{b}, Q, q_0, F, \delta \rangle$ una MT deterministica. Diciamo che M accetta un linguaggio $L \in \Sigma^*$ (dove $\Sigma \subseteq \Gamma$) se e solo se: $L = \{x \in \Sigma^* \mid q_0 x \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} wqz\}$ dove $w \in \Gamma\bar{\Gamma}^* \cup \{\varepsilon\}$

$z \in \bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\bar{b}\}$

$q \in F$

5.6 alternative

Una MTD riconosce un $L \in \Sigma^*$ se e solo se

1) $\forall x \in \Sigma^*$ la computazione che parte dalla configurazione iniziale termina

2) $\forall x \in L$ la computazione termina in una conf. finale

3) $\forall x \notin L$ la computazione termina in una conf non finale

5.7 alternative

Una MTD accetta $L \in \Sigma^*$ se e solo se:

1) $\forall x \in L$ la computazione che parte dalla configurazione iniziale $(q_0 x)$ termina in una configurazione finale

2) $\forall x \notin L$ la computazione o non termina oppure termina in una configurazione non finale