

Gioco delle diagonalizzazione

V spazio vettoriale $f: V \rightarrow V$, B base di V

Obiettivo: trovare una base B di V tale che $[M(f)]_B^B$ è diagonale

Strategia: E base di V , consideriamo $A = [M(f)]_E^E$

$P_A(\lambda) = 0$ polinomio caratteristico di A

$\det(A - \lambda \cdot \text{id})$, troviamo le soluzioni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in \mathbb{R} di

$P_A(\lambda) = 0$

$\forall i = 1 \dots n$ calcoliamo $V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i \cdot \text{id})$ [autospazi]

$\forall i = 1 \dots n$ troviamo una base B_{λ_i} di V_{λ_i}

Se $\bigcup_{i=1}^n B_{\lambda_i} = B$ base di V allora $[M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Proposizione

A matrice quadrata $P_A(\lambda)$ è invariante rispetto alle similitudini, cioè Se $A' = B^{-1} \cdot A \cdot B$ allora $P_{A'}(\lambda) = P_A(\lambda)$

Cerchiamo: V spazio vettoriale, $f: V \rightarrow V$, B, B' basi di V , $A = [M(f)]_B^B$, $A' = [M(f)]_{B'}^{B'}$

B, B' basi di V , $A = [M(f)]_B^B$, $A' = [M(f)]_{B'}^{B'}$

$$P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$$

Ricordiamo: Se $A \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ allora $\deg P_A(\lambda) = m$

Definizione: Se $A = [M(f)]_B^B$ allora $P_f(\lambda) = P_A(\lambda)$

Gli autovalori di f sono i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\exists v \neq 0$ t.c $f(v) = \lambda v$

Proposizione: gli autovalori di F sono le soluzioni di $P_F(\lambda) = 0$

Se $A \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ allora

$P_F(\lambda) = m \Rightarrow$ Ci sono al più m valori autovalori contati con le molteplicità algebraiche $\overbrace{\text{multiplicità algebraica}}^{\text{multiplicità}}$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \quad m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_m) \Rightarrow m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_m) \leq m$$

$$\dim V_{\lambda_i} = g(\lambda_i)$$

\uparrow $\text{multiplicità geometrica}$

Proposizione $f: V \rightarrow V$ endomorfismo, $\dim V = m$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori, B_{λ_i} base di V_{λ_i} . f è diagonalizzabile \Leftrightarrow

$$B = \bigcup_{i=1}^n B_{\lambda_i} \text{ è una base di } V$$

Dimostrazione

" \Leftarrow "

Cardinalità

$$B = \bigcup_{i=1}^n B_{\lambda_i} \text{ base di } V \Rightarrow \# B = m = \sum_{i=1}^n \# B_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n g(\lambda_i)$$

$$\left\{ b_1^{(1)}, \dots, b_{g(\lambda_1)}^{(1)}, b_1^{(2)}, \dots, b_{g(\lambda_2)}^{(2)}, b_1^{(m)}, \dots, b_{g(\lambda_m)}^{(m)} \right\} = B$$

$$f(b_1^{(1)}) = \lambda_1 b_1^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b_2^{(1)}) = \lambda_1 b_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\pi(f) \right]_B^B = \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \dots & \bigcirc \end{matrix} \right\}$$

" \Rightarrow "

f diagonalizzabile $\Rightarrow \exists B$ t.c

$$[M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

riordiniamo le basi in modo da mettere
i λ_i eguali uno dopo l'altro

$$\Rightarrow [M(f)]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Assenti $f(\lambda_i)$ entrate ripetute
e λ_i con $i = 1 \dots r$

$$B_{\lambda_1} = \{b_{11} \dots b_{rp(\lambda_1)}\} \quad B_{\lambda_2} = \{b_{p(\lambda_1)+1} \dots b_{p(\lambda_1)+r}\}$$

basi degli autovalori

Se vogliamo capire se una matrice è diagonalizzabile
come facciamo? e quindi come risparmio tempo?

Proposizione $f: V \rightarrow V$ endo e $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalori di f

Allora $1 \leq p(\lambda) \leq m(\lambda)$

teorema $f: V \rightarrow V$ f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \lambda_1 \dots \lambda_r$
autovalori con $\sum_{i=1}^r m(\lambda_i) = n$ e $\forall i=1 \dots r \quad p(\lambda_i) = m(\lambda_i)$

Osservazione

$f: V \rightarrow V$ λ_1, λ_2 autovalori distinti di f

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$$

$$f(v) = \lambda_1 v \Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$$

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v$ \Downarrow
 $v = 0$

f diagonalizzabile $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$

Corollario riassuntivo:

V spazio vettoriale $f: V \rightarrow V$ endo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori (olistimi)

Le seguenti sono equivalenti:

i) f è diagonalizzabile

ii) $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$

iii) $\dim V = \sum_{i=1}^n p(\lambda_i)$

iv) $P(\lambda) = 0$ ha tutte le radici in \mathbb{R} e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$m(\lambda_i) = p(\lambda_i)$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda \cdot \text{id}_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -\lambda(4-\lambda) + 4 = (\lambda - 2)^2 \quad \lambda = 2 \quad m(\lambda) = 2$$

$$\boxed{\lambda = 2}$$

$$V_2 = \ker(A - 2 \cdot \text{id}) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(2) = 1$$

↑
dim
ker

A non è diagonalizzabile perché $m(\lambda) \neq f(2)$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(A - \lambda \cdot \text{id}_2) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 8 \\ -4 & 7-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$(-5-\lambda)(7-\lambda) + 32 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda = 3, -1 \quad m(3) = 1 \quad m(-1) = 1$$

se tutte le radici sono semplici è diagonalizzabile

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 \quad \ker \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ x = y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = V_3$$

$$\boxed{\lambda = -1} \quad \ker \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ x = 2y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = V_{-1}$$

le base che diagonalizza è $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A \cdot B$$

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endo definito da

$$f(v_1) = h \cdot v_1, f(v_2) = (h-2)v_1 + 2v_2$$

$$f(v_3) = (2h+4)v_1 + 4v_2 - 2v_3 \text{ con } h \in \mathbb{R}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di h la funzione f è diagonalizzabile?

v_1, v_2 e v_3 sono una base?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{G-J}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk} = 3 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\} \text{ l.i.}$$

e quindi una base

$$\left[\begin{matrix} A \\ \parallel \\ M(f) \end{matrix} \right]_B = \begin{pmatrix} h & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \text{id}_3) = \det \begin{pmatrix} h-\lambda & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 2-h & 4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (h-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$\lambda = h, 2, -2 \Rightarrow h \neq \pm 2 \Rightarrow f$ è diagonalizzabile

$$h=2 \Rightarrow m(2)=2, m(-2)=1$$

$$\boxed{\lambda=2} \quad \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{rk} = 1 \quad \dim \ker = 3-1 = \rho(2)$$

$\boxed{2-2}$

\boxed{h}

f è diagonalizzabile

$$h=-2 \Rightarrow m(2)=1, m(-2)=2$$

$$\boxed{\lambda=-2} \quad \ker \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk} = 2 \quad \dim \ker = 3-2 = 1$$

$\boxed{-2}$

\boxed{m}

$= \rho(-1) \neq m(-2)$

non è diagonalizzabile

$$f \text{ diag } \forall h \in R = \{-2\}$$

Pere i valori per cui f e diag. trovare le matrice diag.

$$h \neq \pm 2 \quad \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Trovare una base per i valori per cui f e diagonalizzabile.

$$\boxed{x=2} \quad \text{Ker} \begin{pmatrix} h-2 & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Per } h \neq \pm 2 \quad \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad nk=2$$

$$\sim \begin{cases} x+4=0 \\ 2=0 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = V_2$$

$$\lambda \neq -2 \quad \text{Ker} \begin{pmatrix} h+2 & h-2 & 2h+4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad nk=2$$

$$h \neq \pm 2 \quad \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & \frac{h-2}{h+2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{h-2}{h+2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{h-2}{h+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -2 + \frac{h-2}{h+2} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow V_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 + \frac{h-2}{h+2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} -h-6 \\ h+2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \langle V_1 \rangle \quad V_2 = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad V_{-2} = \langle \begin{pmatrix} \frac{-k-6}{k+2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$