Studio di linguaggi pg 25

alfabeto, stringa, linguaggio

Definizione: un insieme finito non vuoto Σ di simboli (o caratteri) prende il nome di alfabeto

ALFABETO BINARIO $\Sigma = \{0, 1\}$

Definizione: Dato un alfabeto Σ, denotiamo con $< \Sigma^*, \circ, \varepsilon >$ il monoide libero definito su Σ. Questo monoide libero viene chiamato anche monoide sintattico

Definizione:

- Σ^* è l'insieme delle stringhe formabili usando le lettere di Σ
- ε è una stringa vuota $\in \Sigma$ e Σ^*

Se la stringa x è formata da caratteri $\in \Sigma$ allora $x \in \Sigma^*$

x stringa su $\Sigma \Rightarrow x \in \Sigma^*$

Dato $a \in \Sigma$ e $x \in \Sigma^*$ allora $xa \in \Sigma^*$

Monoide sintattico

$< \Sigma^*, \circ, \varepsilon >$

$x \in \Sigma^*$ x è una stringa

$\circ : \Sigma^* \cdot \Sigma^* \Rightarrow \Sigma^*$ operazione di concatenazione

ε è la parola vuota = elemento neutro

$\forall x \in \Sigma^* \Rightarrow x \circ \varepsilon = \varepsilon \circ x = x$

Definiamo e indichiamo $| \ |$ la lunghezza di una parola

$|\varepsilon| = 0 \rightarrow$ lunghezza di ε

se $x \in \Sigma^* \Rightarrow |x|$ la lunghezza di x

x^h = è una concatenazione di x, h volte $\rightarrow x \cdot \ldots \cdot x$

x^0 = altro modo per indicare la parola vuota

L'operazione di concatenazione non gode della proprietà commutativa infatti

$\forall x, y \in \Sigma^* \Rightarrow x \circ y \neq y \circ x$

Notazione

Per convenzione i caratteri di Σ si rappresentano con le prime lettere minuscole, le stringhe di Σ^* si rappresentano con le ultime lettere dell'alfabeto

Definizione: Dato un alfabeto Σ, si definisce linguaggio un qualsivoglia sottoinsieme di Σ^* e lo indichiamo con $L \subseteq \Sigma^*$

In generale poiché $\Sigma \subseteq \Sigma^*$, possiamo dire che un alfabeto è a sua volta un linguaggio

Λ è un linguaggio vuoto ovvero $\Lambda = \emptyset$ con $\Lambda \subseteq \Sigma^*$

Osservazione

$\Lambda \neq \{\varepsilon\}$ ← parola vuota/elemento neutro

Esempio:

se $\Sigma = \{a, b\} \Rightarrow aab \overset{?}{\in} \Sigma^*$ → dato questo alfabeto posso costruire la stringa "aab"?

$\varepsilon \in \Sigma^*$ per definizione
$a \in \Sigma$ per definizione
} quindi $\underbrace{a \circ \varepsilon \in \Sigma^*}_{\text{Per definizione di } \Sigma^*} \Rightarrow a \in \Sigma^*$

Analogamente
$a \cdot a \in \Sigma^*$ perché $\Rightarrow$ $a \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ $\Rightarrow a \cdot a \in \Sigma^*$

Infine
se $b \in \Sigma$
Per definizione

$a \cdot a \in \Sigma^* \rightarrow a \cdot a \cdot b \in \Sigma^*$

Operazioni sui linguaggi Pg 27

Dati 2 linguaggi L_1 e L_2 posso definire delle operazioni "insiemistiche"

Operazione binarie

- intersezione
- unione
- concatenazioni

Operazioni unarie

- Complemento
- Iterazione

Definizione: l'intersezione tra due linguaggi L_1 e L_2 è un linguaggio $L_1 \cap L_2$ costituito da parole di L_1 e di L_2 cioè:

$L_1 \cap L_2 = \{ x \in \Sigma^* \mid x \in L_1 \wedge x \in L_2 \}$

Definizione: l'unione di due linguaggi L_1 e L_2 è un linguaggio $L_1 \cup L_2$ costituito da parole che stanno in L_1 e in L_2 cioè: $L_1 \cup L_2 = \{ x \in \Sigma^* \mid x \in L_1 \vee x \in L_2 \}$

Definizione: il complemento di un linguaggio è un linguaggio $\overline{L_1} = \Sigma^* / L_1$ è costituito dalle parole appartenenti a Σ^* ma non a L_1 cioè: $\overline{L_1} = \{ x \in \Sigma^* \mid x \notin L_1 \}$

Definizione: la concatenazione di due linguaggi L_1 e L_2 è il linguaggio $L_1 \circ L_2$ delle parole costituite dalla concatenazione di una stringa di L_1 e di una stringa di L_2

$L_1 \circ L_2 = \{ x \in \Sigma^* \mid \exists y_1 \in L_1, \exists y_2 \in L_2 \ (x = y_1 \circ y_2) \}$

Definizione generica

L_1 e L_2 sottoinsiemi di Σ^* e denotiamo concatenazione

$L_1 \cdot L_2 \rightarrow L_1 \cdot L_2 = \{ x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 \}$

non gode della prop commutativa

$L_1 \cap \Lambda = \Lambda$ $\qquad$ $L \circ \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \circ L = L$

$L_1 \cup \Lambda = L_1$ $\qquad$ $L \circ \Lambda = \Lambda \circ L = \Lambda$

Esempio

$L_1 = \{ \text{Astro}, \text{Fisio} \}$ $\qquad$ $L_2 = \{ \text{logie}, \text{nomie} \}$

$L_1 L_2 = \{ \text{Astrologie}, \text{Astronomie}, \text{Fisiologie}, \text{Fisionomie} \}$