

$$A \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R}) \quad X \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = \text{id} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

↗

Rigione precedente

## SPAZI VETTORIALI (SU $\mathbb{R}$ )

$\vee$  insieme non vuoto con un' operazione +

Se tutte queste condizioni sono vere siamo chiamate  
spazio vettoriale  $\vee$

$$1) \forall u, v, w \in V \rightarrow (u+v)+w = u+(v+w)$$

$$2) \exists 0 \in V \text{ tale che } 0+v = v+0 \quad \forall v \in V$$

$$3) \forall v \in V \text{ esiste } v' \in V \text{ tale che } v+v' = 0 = v'+v$$

$$4) \forall u, v, w \in V \quad u+v = v+u$$

e un' operazione . con  $R$  tale che: ( $\lambda$  è uno scalare)

$$5) \forall \lambda \in R, \forall v \in V \quad \lambda \cdot v \in V$$

$$6) \forall \lambda, \lambda' \in R, \forall v, v' \in V \quad \lambda(v+v') = \lambda \cdot v + \lambda' \cdot v'$$

$$7) \forall \lambda, \lambda' \in R, \forall v \in V \quad (\lambda+\lambda')v = \lambda v + \lambda' v$$

$$8) \forall \lambda, \lambda' \in R, \forall v \in V \quad \lambda(\lambda'v) = (\lambda\lambda')v$$

$$9) \forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$$

Esempi:

- $\mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$

- $\mathbb{Z}$  non è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$

$$1 \in \mathbb{Z}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

- $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$

$V$  è uno spazio vettoriale,  $v \in V$  scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  reale

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_m) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m)$$

•  $E_0$  soluzione del sistema  $A \cdot X = 0$

$$E_0 \subseteq M_{m,1}(\mathbb{R})$$

$\in$

$$Y, X \Rightarrow A \cdot X = 0 \quad A(X+Y) = Ax + Ay = 0 + 0$$

$$A \cdot Y = 0$$

$$A(c \cdot X) = c \cdot Ax = c(A \cdot X) = c \cdot 0$$

tutti i polinomi di  $\mathbb{R}$  di grado al più  $n$

Esempio:

$$\mathbb{R}[x]_n = \left\{ \sum_{i=0}^n e_i x^i \mid e_i \in \mathbb{R} \right\}$$

contiene tutti i polinomi fino al grado  $n$

$$c \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}[x], c \cdot f(x) = \sum_{i=0}^m c \cdot e_i x^i$$

questo verifica che si tratta di uno spazio vettoriale moltiplicando per uno scalare

$\vee$  Spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$   $v_1, \dots, v_m \in V$

una combinazione lineare  $v_1, \dots, v_m$  è una somma

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \text{ con } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}.$$

Sottospazio vettoriale:  $V$  è un spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ ,  $W \subseteq V$

quindi  $W$  è un sottospazio di  $V$  se  $W$  con le somme e

il prodotto di  $V$  è uno spazio vettoriale.

Esempio:

$\mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$  con tutti i numeri maggiori uguali di 0 non  
 $\geq 0$  è un sottospazio vettoriale perché le proprietà numeri 3 non è valida

$\{0\}$  è uno spazio vettoriale **debole**

Se considerato come sottovettore di  $\mathbb{R}$  è un sottospazio vettoriale

$W \subseteq V$  è un sotto spazio vettoriale di  $V$  se:

1)  $\forall v, w \in W, v + w \in W$

2)  $\forall w \in W, -w \in W$

3)  $0 \in W$

4)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall w \in W \Rightarrow \lambda \cdot w \in W$

Proposizione

$W$  sottospazio di  $V \Rightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 \in W$

Dimostrazione esercizio

$V$  spazio vettoriale,  $S \subseteq V$

sottospazio generato  
di  $S$

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i \mid m \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in S \right\}$$

numero  
di vettori

Esempio

$\{(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$        $\langle(0,1)\rangle = \{\lambda(0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(0,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \lambda_1(0,1) + \lambda_2(0,1) = (0, \lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow (0,1)$

2) qualsiasi sottospazio generato del sottospazio  $\langle(0,1)\rangle$

$W_1, W_2 \subseteq V$  sottospazi

$W_1 \cup W_2 \rightarrow$  è ancora un sottospazio di  $V$ ?

SPOILER: NO

Esempio:  $\langle(0,1)\rangle, \langle(1,0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{c} \| \\ W_1 \\ \| \\ W_2 \end{array}$$

$$\{(0,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,u) \mid u \in \mathbb{R}\}$$

$$(0,\lambda) + (0,u) = (0,\lambda+u)$$

↑  
non rispetta le  
prime proprietà  
per essere un  
sottospazio

$$\langle W_1 \cup W_2 \rangle = W_1 + W_2$$

Lemme  $W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \}$

$$W_1 = \{ (0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$W_2 = \{ (u, 0) \mid u \in \mathbb{R} \}$$

$$W_1 + W_2 = \{ (u, \lambda) \mid u, \lambda \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$$

Dimostrazione "  $\subseteq$ "  $w \in W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle \Rightarrow w = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$

$$n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, w_i \in W_1 \cup W_2$$

$\forall i = 1 \dots n \quad w_i \in W_1 \text{ o } w_i \in W_2 \Rightarrow$  ricordiamo gli indici e scriviamo

che  $w_1 \dots w_k \in W_1, w_{k+1} \dots w_m \in W_2$

$$w = \underbrace{\sum_{i=1}^h \lambda_i w_i}_{W_1} + \underbrace{\sum_{i=h+1}^m \lambda_i w_i}_{W_2} \in W_1 + W_2$$

"  $\supseteq$ "

$$w \in \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \} \Rightarrow w = w_1 + w_2 \Rightarrow w = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$$

Com  $w_i \in W_i \subseteq W_1 \cup W_2 \Rightarrow w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$

Ricominciamo estendendo le definizioni e famiglie di sottospazi:

$$\{ w_i \}_{i \in I_i} \Rightarrow \text{famiglie di sottospazi}$$

insieme di indici

$$+ w_i = \langle \bigcup_{i \in I_i} w_i \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m w_i \mid \begin{array}{l} m \in \mathbb{N} \\ w_i \in W_i \end{array} \right\}$$

sommatoria

le sommatorie si ripete all'unione  
di tutti gli elementi  $w_i$  con  $i \in I_i$

$$W_1, W_2 \subseteq V$$

$W_1 \cap W_2$  è un sottospazio?

SPOILER: Sì

$$W_1 = \{(0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(\mu, 0) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$$

→ è un sottospazio  
insieme a  $W_1 \cap W_2$   
con unici elementi comuni

### Proposizione

$W_1 \cap W_2$  è un sottospazio di  $V$

Dimostrazione  $w, v \in W_1 \cap W_2$

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 u + \lambda_2 v \\ &\in W_1 \cap W_2 \end{aligned}$$

oppure col entrambi perché è  
un'intersezione

$\left\{ w_i \right\} : i \in I \quad \bigcap_{i \in I} W_i$  è un sottospazio

### Dimostrazione

$$W_1, W_2 \subseteq V \text{ t.c. } W_1 \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$$

esiste un'unico  
elemento

Somme  
dirette

Proposizione  $w \in W_1 \oplus W_2 \exists! w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$  tali che  $w = w_1 + w_2$

$$\begin{aligned} \text{Esempio } W_1 &= \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3 \\ W_2 &= \langle (1, 1, 0) \rangle \end{aligned}$$

$$W_1 \cap W_2 = \langle (1, 1, 0) \rangle = W_2$$

$W_1 + W_2$  non è una somma diretta perché l'intersezione  $W_1 \cap W_2$  non è nulla e  $\{0\}$

$$(1, 1, 0) = (0, 0, 0) + (1, 1, 0) = \underbrace{(1, 0, 0)}_{W_1} + \underbrace{(0, 1, 0)}_{W_2} + (0, 0, 0)$$