

## Introduzione alle moltiplicazioni e fatti

Con le matrici si possono fare le seguenti cose:

- Somme tra matrici
- Prodotto tra due matrici è uno scalare
- Prodotto tra matrici (solo quando il numero di righe delle prime è uguale al numero di colonne delle seconde)

$$O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$A + O = A$$

$$O + A = A$$

$$A + (-A) = O$$

nelle somme lo  $O$  è una matrice nulla anche detta "identità"

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,m}(R)$$

$$\text{id}_m$$

questa è una matrice chiamata "identità" che rende vere queste cose

$$\text{id}_m \cdot A = A$$

$$A \cdot \text{id}_m = A$$

E' vero  $\forall A \in \mathbb{M}_{m,m}(R) \exists B \in \mathbb{M}_{m,m}(R)$  tale che  $A \cdot B = \text{id}_m = BA$ ?

- Se  $A$  ammette un tale elemento  $B$ ,  $B$  si chiama l'inverso di  $A$ , e si scrive  $A^{-1}$

**Forma di echelon:** una matrice  $A \in \mathbb{M}_{m,m}(R)$  si dice in forma di echelon

- se tutte le righe nulle sono in fondo

- se in ogni riga il primo elemento non zero da sinistra (pivot) è alle destra di tutti i pivot delle righe superiori (ha tutti zero sotto)

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

è in forma di echelon

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ non è in forma di echelon}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è in forma di echelon}$$

**Forme di echelon ridotte:** se

- in forme di echelon
- tutti i pivot sono uguali ad 1
- ogni Pivot è l'unico elemento non-zero delle sue colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ queste è in forma di echelon ridotta}$$

### Metodo di Gauß-Jordan

Serve per trasformare una matrice in una matrice di echelon e poi in una matrice di echelon ridotta

$$A = \left\{ \begin{matrix} e_1 & \dots & e_m \\ e_{m+1} & \dots & e_{mn} \end{matrix} \right\} \in M_{m,n}(R)$$

Per direttore una matrice di echelon dobbiamo rispettare le seguenti regole (lavoriamo solo sulle righe)

- Scambio tra righe
- Moltiplicare ogni riga per uno scalare non nullo
- Sommare a una riga una combinazione lineare tra le altre righe

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_3 = x_3 - x_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 \leftrightarrow x_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_2 \rightarrow \frac{x_2}{3} \\ x_3 \rightarrow \frac{x_3}{3} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

forme di echelon

$$x_1 \rightarrow x_1 - 4x_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 & 0 & 0 & 5 - \left(4 \cdot \frac{2}{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Queste regole sono applicabili e qualsiasi matrice

### Sottomatrice

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Una sottomatrice di  $A$  è la matrice che si ottiene prendendo le intersezioni di  $m'$  righe ed  $n$  colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne scelte casualmente

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

numeri delle intersezioni tra matrici

## Metodo di Gauß-Jordan

- 1) Trovare il primo elemento non nullo nelle prime colonne se non esiste poniamo alle seconde e così via  
traverso nel passaggio precedente
- 2) Scomponiamo  $x_i$  con  $x_1$ . In questo modo abbiamo il pivot in posizione  $(1,1)$
- 3) Sostituiamo  $x_i$  con  $x_i - e_{11}x_1$ . Quindi  $e_{11} = 1$
- 4) Per ogni  $i > 1$ . Sostituiamo  $x_i$  con  $x_i - e_{i1}x_1$
- 5) In questo modo la matrice diventa
 
$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$
- 6) Ripeti i passaggi 1-5 per la sottomatrice
- 7) Ripeti fino a che non scoppia l'ultima riga o l'ultima colonna
- 8) Ottieniamo una matrice C in forme di Echelon con tutti i pivot uguali a 1
- 9) Se  $c_{l,k}$  è l'ultimo pivot. Per ogni  $i < l$  sostituisci  $x_i$  con  $x_i - e_{ik}x_l$
- 10) Ripeti 9 per tutti i pivot dal basso verso l'alto
- 11) Ottieniamo una matrice D in forme di echelon ridotta

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad r_1 \rightarrow r_1 - r_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$r_2 \rightarrow r_2 - 3r_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad r_2 \rightarrow r_2 / 3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_3 \rightarrow r_3 + r_2 \quad \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} r_1 \rightarrow r_1 + 2r_3 \\ r_2 \rightarrow r_2 - r_3 \end{array}$$

Forme di eccezione

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad C_{l,k} = C_{3,4}$$

$$R_1 = R_1 - C_{1,4} R_3 \rightarrow R_1 = R_1 + 2R_3$$

$$R_2 = R_2 - C_{2,4} R_3 \rightarrow R_2 = R_2 - R_3$$

## Rango di una matrice

$A \in \mathbb{H}_{m,m}(\mathbb{R})$  il rango di  $A$  è il numero di pivot delle due forme di echelon.  $\text{rk } A$  (rank  $A$ )

$$0 \leq \text{rk } A \leq \min(m, n)$$

Si dice che  $A$  ha rango massimo se  $\text{rk } A = \min(m, n)$

Calcoliamo l'insieme delle matrici  $A \in \mathbb{H}_{m,m}(\mathbb{R})$  (solo per le matrici quadrate)

$$(A \mid \text{id}_n) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c} e_m & \dots e_{1m} \\ \hline 1 & \\ 0_{m,1} & \dots e_{mm} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline \dots & 0 \\ 0 & \dots \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

Dopo Gauss-Jordan

$$\left( \begin{array}{c|c} D & D \end{array} \right) \quad \text{Se } D = \text{id}_m \quad \text{allora } D = A^{-1}$$

$\downarrow$

$$\left( \begin{array}{c|c} \text{id}_m & A^{-1} \end{array} \right)$$

Se  $D \neq \text{id}_m$  allora  $A$  non invertibile

Ottieniamo l'identità se  $\text{rk } A = m$

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c} 1 & * \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

un solo pivot  $\neq$  de  $m$

non invertibile  
per  $\text{rk } A = 1 \neq m = 2$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - r_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$A^{-1} = A$

$$A \cdot A = \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

Esempio delle Rangagne

$$B = \left( \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - \frac{1}{2}r_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$r_2 = r_2 - r_1 \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \rightarrow r_2 = r_2 / \frac{5}{2} \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$r_1 = r_1 - \frac{1}{2}r_2 \quad \rightarrow \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

euguale alle matricee  
identit  aggiunte all'inizio

Cio  vuol dire che la  
matrice e invertibile

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

