Proprietà di omogeneità: Dimostrazione

TS: $\int c f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$

Se $F \in \{ c f(x)\, dx \Rightarrow F'(x) = c f(x)$

$F(x) = \frac{c f(x)}{c}$ $\qquad D\left(\frac{f(x)}{c}\right) = \frac{f'(x)}{c} = \frac{c f(x)}{c} = f(x)$

quindi $f \in c \int f(x)\, dx$

Sia ora $F \in c \int f(x)\, dx \Rightarrow \exists G$ prim di f: $f(x) = c\, G(x)$

$\Rightarrow F'(x) = c\, G'(x) = c f(x) \Rightarrow f \in \int c f(x)\, dx$

es: $\int \frac{x}{x^2+3}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+3}\, dx = \frac{1}{2} \log(x^2+3) + K$

Proprietà distributiva (no dimostrazione)

IP f, g dotate di primitive in (a, b)

TS $f+g$ è dotata di prim e $\int (f(x) + g(x))\, dx = \underbrace{\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}$

insieme delle somme di una primitiva di f e una di g

es: $\int (e^x + \cos x)\, dx = e^x + \sin x + K$

Metodo di integrazione per decomposizione in somme

$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)\, dx + c_2 \int g(x)\, dx$

f e g dotate di primitive e $c_1, c_2 \in \mathbb{R} / \{0\}$

es: $\int (3x^4 + 2e^x)\, dx = \frac{3}{5} x^5 + 2e^x + K$

Metodo di integrazione per parti

IP: $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile

$f \; g'$ dotate di primitiva

TS: $f' g$ " " " e $\int f'(x) g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx$

fattore differenziale FD — fattore finito FF

Dim

$$\int f g' = \int (f'g + fg' - fg') = \int \underset{\text{derivata di } f \cdot g}{\underbrace{(f'g + fg')}} - \int f g' = fg - \int f g'$$

Esempio

$$\int e^x \underset{FD}{x^4} \, dx = e^x \frac{x^5}{5} - \int e^x \frac{x^5}{5} dx \quad \text{non conviene}$$

$$\int \underset{FD}{e^x} x^4 dx = e^x x^4 - 4 \int e^x x^3 dx =$$

$= e^x x^4 - 4e^x x^3 + 12 \int e^x x^2 dx =$

$= e^x x^4 - 4 e^x x^3 + 12 e^x x^2 - 24 \int e^x x \, dx$

$= e^x x^4 - 4e^x x^3 + 12 e^x x^2 - 24 e^x x + 24 \int e^x dx =$

$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x - 24x + 24) + K$

Per casa: $\int e^x x^6 dx$

$\int \log x \, dx \quad \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} = x(\log x - 1) + K$

$\int \underset{FD}{x^3} \log x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \log x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^4 \log x - \frac{1}{16} x^4 + K$

$\int \arctan x \, dx = \int 1 \cdot \text{arctg}\, x \, dx = x \, \text{arctg}\, x - \int \frac{x}{x^2+1} dx =$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + K$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$ si risolve per ricorrenza

$$I_1 = \arctan x + K$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{\cancel{1+x^2}}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}\,dx}_{=I_1} + \int \frac{-x^2}{(x^2+1)^2}$$

osserviamo che $D\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \underset{\uparrow\ FD}{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}}\, x\,dx = \arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\,x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}\cdot 1\,dx}_{=I_1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + K$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^3} + \int \frac{-x^2}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$\left[D\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{-2(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x}{(x^2+1)^3}\right]$$

$$= I_2 + \frac{1}{4}\int \underset{\uparrow\ FD}{\frac{-4x}{(x^2+1)^3}}\, x\,dx = I_2 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2+1)^2}\,x - \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot 1\,dx}_{=I_2}$$

Per esercizio I_4

$$\int \underset{\uparrow\ FD}{e^x}\cos x\,dx = e^x\cos x - \int \underset{\uparrow\ FD}{e^x}\sin x\,dx =$$

$$= e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos\,dx$$

questa situazione rientra nel seguente risultato

Se $\int f(x)\,dx = g(x) + c\int f(x)\,dx \quad c \neq 1$

allora $\int f(x)\,dx = \frac{1}{1-c}\,g(x) + K$

quindi $\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\,e^x(\cos x + \sin x) + K$

Esercizio: rifallo scegliendo e^x come FD

$$\int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x - \int \sin x \cos x \, dx \Rightarrow$$

$\uparrow$ FD

$$\Rightarrow \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + k$$

II metodo $\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + c$

$$-\frac{1}{4} \cos 2x = -\frac{1}{4}\left(1 - 2\sin^2 x\right) = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4}$$

differiscono per una costante

Prima formula di integrazione per sostituzione

IP $\quad f : (c, d) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive

$\quad g : (a, b) \to (c, d)$ derivabile

TS $\quad f(g(x))\, g'(x)$ è dotata di primitive e

$$\int f(g(x))\, g'(x) \, dx = \left[\int f(t)\, dt\right]_{t = g(x)}$$

insieme delle primitive di f composto con g

$g'(x)\, dx = dg$ sbagliato

$g(x) = t \qquad dg =$ //

Si deve integrare la funzione esterna e poi comporre le primitive con g

$f(t) = \cos t$

$g(x) = x^2$

es: $\displaystyle \int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{= D(x^2)} \cos x^2 \, dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos t \, dt\right]_{t = x^2} = \frac{1}{2} \sin x^2 + k$$

Dim

Entrambi i membri della tesi sono uguali a $F(g(x))+K$ dove F è una primitiva di f.

Esempi

$$\int \frac{\log^3 x + 2\log^2 x + 3\log x}{x}\,dx = \left[\int (t^3+2t^2+3t)\,dt\right]_{t=\log x} =$$

$$\frac{\log^4 x}{4} + 2\cdot\frac{\log^3 x}{3} + 3\,\frac{\log^2 x}{2}$$

$$\int \frac{\text{tg}^2 x + 1}{\text{tg}\,x + 3}\,dx \qquad f(t) = \frac{1}{t+3}$$

$$g(x) = \text{tg}\,x \quad g'(x) = \text{tg}^2 x + 1$$

$$= \left[\int \frac{dt}{t+3}\right]_{t=\log x} = \log|\text{tg}\,x + 3| + K$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} \qquad = D(e^x) \qquad f(t) = \frac{1}{t^2+1} \qquad g(x) = e^x$$

$$= \left[\int \frac{dt}{t^2+1}\right]_{t=e^x} = \arctan e^x + K$$

Polinomi trigonometrici

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$I_n = \int \cos^n x\,dx$$

$$I_1 = \sin x + K$$

$$I_2 = \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + K$$

$$I_3 = \int \cos^3 x\,dx = \int \cos x\,(1-\text{sen}^2 x)\,dx = \left.\int (1-t^2)\,dt\right]_{t=\sin x}$$

$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^2 x + K$

$I_4 = \int \cos^4 x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$\frac{1}{4} \int (1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x) \, dx =$

$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + \sin 2x\right) + K$

$\int \cos^5 x = \int \cos x \, (1 - \sin^2 x)^2 = \left[\int (1-t^2)^2 \, dt\right]_{t = \sin x}$

Per esercizio I_6, I_7

$I_n = \int \sin^n x \, dx$

$I_1 = -\cos x + K$

$I_2 = \int \frac{1-\cos 2x}{dx} dx = \dots$

$I_3 = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = -\int (-\sin x)(1 - \cos^2 x) \, dx =$

$- [\int \dots$

Per esercizio fare I_4, I_5

$I = \int \cos^n x \, \sin^m x \, dx$

se n è dispari $n = 2k+1$

$I = \int \cos x \, (\cos^2 x)^k \sin^m x \, dx = \int \underset{\substack{\parallel \\ D(\sin x)}}{\cos x} \, (1 - \sin^2 x)^k \sin^m x$

per sostituzione

se m è dispari si vuole un fattore $\sin x$

se m ed n dispari " " " $\sin x$ o $\cos x$

se n, m pari $n = 2k$ $m = 2r$

$\int (\cos^2 x)^k (\sin^2 x)^r dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^r dx$

ci si riconduce a I_m

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \sin x \cos^2 x \,(1-\cos^2 x)\, dx =$$

$$-\int (-\sin x)(\cos^2 x - \cos^4 x)\, dx = -\left[\int (t^2 - t^4)\, dt\right]_{t=\cos x}$$

$$\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx = \int \underset{\underset{D(\sin x)}{\uparrow}}{\cos x}\,(1-\sin^2 x)^2 \sin^2 x \, dx =$$

$$= \left[\int (1-t^2)^2 t^2 \, dt\right]_{t=\sin x} = \dots$$

$$\int \cos^5 x \sin^3 x \, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)\cos^5 x \, dx = -\int (-\sin x)$$
$$(\cos^5 x - \cos^7 x)\, dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + K$$

$$\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1}{8}\int \cos x (1-\sin^2 x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{6x}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin x + \frac{1}{24}\sin^3 x + K$$

Primitive di funzioni con duplice espressione analitica

$$f(x) \begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases}$$ trovare le primitive in $]-\infty ; +\infty[$

F prim di f in $]-\infty ; +\infty[$ lo è in $]-\infty ; 0[$ e in $[0, +\infty[$ quindi è del tipo

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + & x<0 \\ e^x + K \end{cases}$$

f è primitiva in R $\Rightarrow$ è derivabile in R $\Rightarrow$ è continua in R

Imponiamo la continuità in $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad e = 1+K$$

quindi le prim. sono $f(x) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3+x+K+1 & x<0 \\ e^x+K & x\geq 0 \end{cases}$

trovare le prim in $]-\infty;+\infty[$ di $f(x)=x^2-3x+|x-1|+4$

$$f(x) \begin{cases} x^2-4x+5 & x<1 \\ x^2-2x+3 & x\geq 1 \end{cases}$$

f sono del tipo $f(x) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3-2x^2+5x+K_1 & (x<1) \\ \frac{1}{3}x^3-x^2+3x+K_2 & (x\geq 1) \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x) \qquad \frac{1}{3}-2+5+K_1 = \frac{1}{3}-1+3+K_2$$

$$K_2 = K_1+1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3-2x^2+5x+K & x<1 \\ \frac{1}{3}x^3-x^2+3x+K+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

trovare f prim in $]-\infty;+\infty[$ di $f(x)=2|x|-3x+x^2+1$
tale che $F(-2)=1$

$$f(x) \begin{cases} x^2+5x+1 & x<0 \\ x^2-x+1 & x\geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x+K_1 \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+K_2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^+} F(x) \qquad K_1=K_2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x+K \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+K \end{cases}$$

$F(-2)=1$

$-\frac{2}{3}-10-2+K=1$

$K=\frac{41}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} \ldots\ldots + \frac{41}{3} & m<0 \\ \ldots\ldots + \frac{47}{3} & m\geq 0 \end{cases}$$