TEOREMA DI ~~DE~~ L'HOPITAL

IP $f, g: (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ derivabili

$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ opp. $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \setminus \{c\}$

$\exists \lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \qquad (\ell \in \mathbb{R} \text{ opp } \ell = \pm\infty)$

R.D. (rapporto delle derivate)

TS. 1) $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \setminus \{c\}$

2) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

(Il teorema si enuncia allo stesso modo nel caso $x \to c^+$, $x \to c^-$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$)

OSSERVAZIONI

1) esempio in cui $\exists \lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ma $\nexists \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \qquad g(x) = x \qquad c = 0$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$

R.D. $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = f'(x) = 2x \sin\dfrac{1}{x} + x^2 \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \underbrace{2x \sin\dfrac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\cos\dfrac{1}{x}}_{\downarrow\, \text{oscill}} \nexists \lim$

2) esempio in cui non è <u>opportuno</u> applicare il teorema

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \qquad$ R.D. $\dfrac{\cos x}{1} = \cos x \to 1$

3) esempio in cui non è <u>utile</u> applicare il teorema

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = +\infty \qquad$ R.D. $\dfrac{3^x \log 3}{2^x \log 2}$ INUTILE

3) esempio in cui non è <u>corretto</u> applicare il teorema: SUCCESSIONI

2^{2n^3+1} $\qquad 2^{2n^3+1} \quad 3^{n^2}$

3) esempio in cui non è corretto applicare il teorema: SUCCESSIONI

$$a_n = \frac{e^{2n^3+1}}{n^2+4}$$ R. D. $\cancel{\dfrac{e^{2n^3+1}\, 6n^2}{2n}}$ ERRORE

allora si cons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x^3+1}}{x^2+4}$ R. D. $\dfrac{e^{2x^3+1}\,\cancel{6}^{3}\,x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{x}} = 3x\,e^{2x^3+1} \to +\infty$

Per il teor. pure anche $a_n \to +\infty$

4) esempio in cui è bene utilizzare il teorema

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ e si voglia cercare l'asintoto obliquo

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ R. D. $f'(x)$

se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = m \Rightarrow m$ è il coeff. ang. dell'eventuale asintoto

5) $\lim\limits_{x\to0} x^n \log x = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\log x}{x^{-n}}$ R. D. $\dfrac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}} = x^{-1+n+1}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{x^n}{n} \to 0$

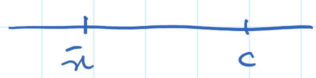
$$\lim_{x\to0} x^x = \lim_{x\to0} e^{\log x^x} = \lim_{x\to0} e^{\overbrace{x\log x}^{\to 0}} = 1$$

la funz. $g(x) = \begin{cases} x^x & \text{per } x>0 \\ 1 & \text{per } x=0 \end{cases}$ è cont. in $[0,+\infty[$

eserc. stabilire se g è deriv. in $x=0$

Vediamo perché nel caso in cui $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ si ottiene la tesi $g(x)\neq 0\ \forall x$. Cons. la funz $G(x) = \begin{cases} g(x) & x\neq c \\ 0 & x=c \end{cases}$ è cont.

p. a. $\exists\ \bar{x} \in (a,b)\setminus\{c\}: \ g(\bar{x}) = 0$



G in $[\bar{x}, c]$ è cont. in $[\bar{x}, c]$ e deriv. in $]\bar{x}, c[$ $G(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0$

G in $[\bar{x}, c]$ è cont. in $[\bar{x}, c]$ e deriv. in $]\bar{x}, c[$ $\qquad G(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0$

$G(c) = 0$

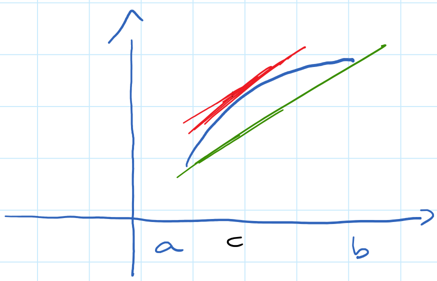
per il teor di Rolle $\exists\, x' \in]\bar{x}, c[\; : \; \underbrace{G'(x')}_{g'(x')} = 0$ assurdo.

FINE

T. LAGRANGE $\quad f$ cont in $[a,b]$, deriv in $]a,b[$ $\Rightarrow \exists\, c \in]a,b[: f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

$$\Updownarrow$$

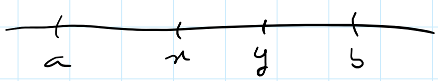
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$F(x) = (f(b) - f(a))\,x + (a - b)\,f(x)$ $\qquad F(a) = F(b) \Rightarrow \exists\, c \in]a,b[: F'(c) = 0$

$F'(x) = f(b) - f(a) + (a-b)\,f'(x)$

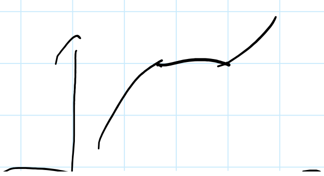
$f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \Rightarrow f$ cresc. in (a,b) $\qquad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$



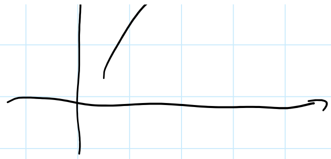
in $[x,y]$ è der.

$f(y) - f(x) = \underbrace{(y - x)}_{>0}\, \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \geq 0$

es $\quad f(x) = x^5 \qquad f'(x) = 5x^4 \geq 0 \Rightarrow f$ sarebbe crescente per il teor.
ma sappiamo che è strett cresc.



CNS perché f sia strett cresc
$f'(x) \geq 0$



CNS perché f sia strett cresc

$f'(x) \geq 0$

$\nexists (c,d) \subseteq (a,b) \ : f'(x)=0 \ \forall x \in (c,d)$

funz. con der. nulla $\quad f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ cost.

I dim. $\quad$ siano $x, y \in (a,b)$ $\quad f(y)-f(x) = (y-x)\underbrace{f'(c)}_{0}=0 \quad \forall x, y$

II dim. $\quad f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ cresc $\quad$ Se $f'(x)=0$ valgono entrambe $\Rightarrow$

$f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ decresc $\quad \Rightarrow f$ è cresc e decr $\Rightarrow$ è costante

$$\left.\begin{array}{l} \exists\ f'(x) \quad \forall x \in (a,b) \setminus \{c\} \\ f \text{ è cont in } c \\ \exists \lim_{x\to c} f'(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to c} r(x) = \ell$$

esec. trovare gli estr. assoluti di $f(x) = x^2-2x+|x-3|+1$ in $[1,4]$

$A = \{c \in]1,4[\ : \ f'(c)=0\}$

$B = \{c \in]1,4[\ : \ \nexists f'(c)\}$

$C = \{1;4\}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & 1 \leq x < 3 \\ x^2-x-2 & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

SI DERIVA IN INTERVALLI APERTI !!

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & 1<x<3 \\ 2x-1 & 3<x<4 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = 3 = f'_-(3)$

$\lim_{x\to 3^+} f'(x) = 5 = f'_+(3)$ $\quad \Rightarrow \nexists f'(3)$

$2x-3=0$ per $x=\frac{3}{2} \in]1,3[$

$2x-1=0$ per $x=\frac{1}{2} \notin]3,4[$

$A = \{\frac{3}{2}\} \quad B = \{3\} \quad C = \{1;4\}$

$f(1)=2 \quad f(\frac{3}{2}) = \frac{25}{4} \quad f(3)=4 \quad f(4)=10$

$\min_{[1,4]} f = 2 = f(1) \qquad \max_{[1,4]} f = 10 = f(4)$

Scrivere le eq. delle eventu. tangenti al grafico di f nei punti 0, 3, 5

$y = f(c) + f'(c)(x-c) \qquad c=0 \quad f(0) = \quad f'(0) = -3$

$\underline{c_1 = 0} \qquad f(0) = 4 \qquad f'(0) = -3$

$t_1 : \ y = 4 - 3x$

$\underline{c_3 = 5}$

$c_2 = 3 \qquad f(3) = 4 \qquad f'_-(3) = 3 \qquad f'_+(3) = 5$

$t_2' : \ y = 4 + 3(x-3)$ da sin. $\Rightarrow$ p. angoloso

$t_2'' : \ y = 4 + 5(x-3)$ da ds.