rielaborazioni-merged

1 - Integrali

Integrali indefiniti e definiti

Integrali indefiniti

Sia data una funzione $f : (a, b) \to R$

Definizione 1:

Sia $F : (a, b) \to R$ una funzione derivabile in (a, b) e tale che

$$F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$$

Si dice allora che F è una primitiva di f in (a, b)

Esempio: Se $f(x) = 2x$, qual è la funzione $F(x)$ che, se derivata, dà $2x$? Sappiamo che la derivata di x^2 è $2x$. Quindi, $F(x) = x^2$ è una primitiva di $f(x) = 2x$.

Teorema 1 (caratterizzazione delle primitive):

Sia F una primitiva di f in (a, b). Allora tutte e sole le primitive di f in (a, b) sono le funzioni $F(x) + k$ al variare di k in R

Dimostrazione 1:

Se F è una primitiva di f in (a, b) e $k \in R$, posto

$$G(x) = F(x) + k$$

si ha subito

$$G'(x) = f(x) + 0 = f(x) \forall x \in (a, b)$$

Viceversa se F e G sono due primitive di f in (a, b) la funzione differenza:

$$H(x) = G(x) - F(x) \forall x \in (a, b)$$

è derivabile in (a, b) e si ha:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$$

Per il teorema sulle funzione con derivata nulla H è costante in (a, b) e quindi esiste $k \in R$ tale che

$$F(x) - G(x) = k \; \forall x \in (a, b)$$

Da questo segue che se una funzione ha primitiva allora ne ha infinite, esistono casi in cui delle funzioni che non hanno alcuna primitiva

Esempio 1: Si consideri la funzione definita in R ponendo

$$f(x) = \{^{1 \text{ se } x \geq 0}_{-1 \text{ se } x \leq 0}$$

Supponiamo per assurdo che F sia una primitiva di f in $]-\infty, +\infty[$ in particolare possiamo dire che:
F è una primitiva di f

- sia in $[0, +\infty[$
- sia in $]-\infty, 0[$
  Osserviamo che un altra primitiva di f in $[0, +\infty[$ è la funzione $g(x) = x$ quindi per il teorema precedente esiste un numero reale k tale che

  $$F(x) = x + k \; \forall x \geq 0$$

  Analogamente si conclude che esiste un numero reale c tale che

  $$F(x) = -x + c \; \forall x < 0$$

  Dato che F è una funzione derivabile e quindi continua in $]-\infty, +\infty[$ si ha

  $$lim_{x \to 0^-} F(x) = lim_{x \to 0^+} F(x) \text{ cioè } c = k$$

e quindi in definitiva che

$$F(x) = |x| + k \forall\ x \in R$$

è ciò è assurdo perché implica che la funzione $|x|$ è derivabile in tutto R.

Definizione 2

Si chiama integrale indefinito di f e si denota con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

L'insieme formato dalle primitive di f che è dunque un **insieme di funzioni** vuoto o costituito da infiniti elementi. Formalmente se F è una primitiva di f di solito si scrive:

$$\int f(x)dx = F(x) + k, k \in R$$

Integrali indefiniti notevoli

$$\int e^x dx = e^x + k$$

$$\int \cos x dx = \sin x + k$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + k$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + k = -\arccos x + k$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + k$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + k$$

$$\int \cos[f(x)] f'(x)dx = \sin[f(x)] + k$$

$$\int \sin[f(x)] f'(x)dx = -\cos[f(x)] + k$$

$$\int \frac{1}{[f(x)]^2+1} f'(x)dx = \arctan[f(x)] + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} f'(x)dx = \arcsin[f(x)] + k = -\arccos[f(x)] + k$$

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{f(x)} f'(x)dx = \log|f(x)| + k$$

Teorema 2 (Proprietà di omogeneità)

Se f è dotata di primitive in (a, b) e k è un numero reale diverso da zero allora:

1. **i)** kf è dotata di primitive in (a, b)
2. **ii)** $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ dove il secondo membro indica l'insieme delle funzioni ottenute moltiplicando per k le primitive di f
   Dimostrazione

- *1)* Se

  $$F \in \int k\, f(x)dx$$

  allora $F'(x) = kf(x) \forall x \in (a, b)$. Posto

  $$G(x) = \frac{F(x)}{k} \forall x \in (a, b)$$

si ha che

$$G'(x) = f(x) \forall x \in (a,b) \text{ ovvero } G \text{ è una primitiva di } f \text{ in } (a,b)$$

Poiché

$$F(x) = kG(x) \text{ , } \forall x \in (a,b)$$

La funzione F appartiene al secondo membro della **ii)** in quanto è il prodotto di k per una primitiva di f

- *2)* Viceversa se

$$F \in k \int f(x)dx$$

esiste G primitiva di f tale che:

$$F(x) = kG(x) \; \forall x \in (a,b)$$

da cui

$$F'(x) = kf(x) \; \forall x \in (a,b)$$

e quindi che

$$F \in \int kf(x)dx$$

Osservazione: se $k = 0$ la tesi non vale, infatti in questo caso il primo membro è l'integrale della funzione identicamente nulla, cioè l'insieme delle funzioni costanti, mentre il secondo membro è formato dalla sola funzione identicamente nulla

ESEMPIO 2 . Riprendendo quanto osservato prima a proposito dell'integrale di una funzione composta, e applicando la proprietà di omogeneità si ottiene, ad esempio, se $c \neq 0$

$$\int e^{cx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int ce^{cx}\mathrm{d}x = \frac{e^{cx}}{c} + k.$$

Analogamente

$$\int \cos(cx)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(cx)}{c} + k$$

e

$$\int \sin(cx)\ \mathrm{d}x = -\frac{\cos(cx)}{c} + k.$$

Teorema 3 (Proprietà distributiva)

Siano f e g due funzioni dotate di primitive in (a, b) allora

- **i)** $f + g$ è dotata di primitive in (a, b)
- **ii)** $\int(f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

dove il secondo membro indica l'insieme delle funzioni ottenute sommando una primitiva di f ed una primitiva di g

Metodo di integrazione per decomposizione in somma

Se f, g sono due funzioni dotate di primitive in (a, b) e h, k sono due numeri reali non entrambi nulli allora la funzione $hf + kg$ è dotata di primitive in (a, b) e si ha che:

1. $$\int(hf(x) + kg(x))dx = h\int f(x)dx + k\int g(x)dx$$
2. $$\int(hf(x) + kg(x))dx = hF(x) + k\int g(x)dx$$

   essendo F una primitiva di f in (a, b), Il seguente risultato fornisce un utile metodo di integrazione quando la funzione integranda è il prodotto di una funzione per la derivata di un'altra funzione

Teorema 4 (Integrazione indefinita per parti)

Siano f, g due funzioni derivabili in (a, b). Se fg' è dotata di primitive in (a, b) allora:

- **i)** $f'g$ è dotata di primitive in (a, b)
- **ii)** $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Dimostrazione: per la regola di derivazione del prodotto si ha:

$$f(x)g'(x) = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) - f'(x)g(x) = D[f(x)g(x)] - f'(x)g(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

la **i)** è vera per la proprietà distributiva dell'integrale indefinito, applicando la formula di integrazione per decomposizione in somma si ottiene la **ii)**.

Questa formula si usa dunque quando è possibile individuare, nella funzione integranda un fattore di cui sia nota una primitiva. I fattori f e g' si chiamano rispettivamente *fattore finito* e *fattore differenziale*

Esempio 3
Sia $n \in N$ determiniamo

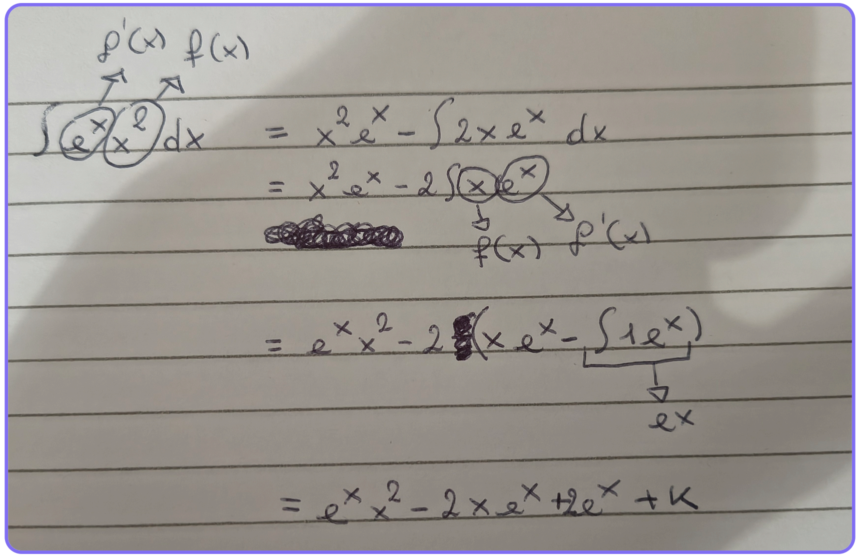
$$\int e^x x^n dx$$

scegliendo e^x come fattore differenziale e x^n come fattore finito si ha:
e dopo n integrazioni per parti il problema viene ricondotto alla determinazione dell'integrale indefinito di e^x

$$\int e^x x^n \, dx = e^x x^n - n \int e^x x^{n-1} \, dx == e^x x^n - n \left(e^x x^{n-1} - (n-1) \int e^x x^{n-2} \, dx \right) = \cdots.$$

> **Errore**
> Se avessimo scelto e^x si arrivava alla determinazione dell'integrale $\int e^x x^{n+1} dx$ e quindi con il grado di x che aumenta cosa che inevitabilmente ci porta a calcoli enormi

Con $n = 2$



Esempio 4

Dato

$$\int \log x \, dx$$

Considerando 1 come fattore differenziale si ha:

$$\int \log x \, dx = \int 1 \times \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x(\log x - 1) + k$$

Esempio 5

ESEMPIO 5 Applicando il metodo di integrazione per parti, si determinano gli integrali indefiniti

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} \mathrm{d}x$$

con $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (per $n = 1$ l'integrale è immediato). Occupiamoci del caso $n = 2$.

$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \cdot x \mathrm{d}x =$$

$$\arctan x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \cdot 1 \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1} \right) + k.$$

Si osservi che $\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ è la derivata di $\dfrac{1}{x^2+1}$.

Osservazione 2:
In alcuni casi integrando per parti si giunge ad un eguaglianza del tipo:

$$\int f(x)\ dx = g(x) + c \int f(x)\ dx$$

Se $c \neq 1$ si può dimostrare che:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{1-c} g(x) + k$$

Esempio 6:
Applicando l'osservazione precedente per determinare

$$\int e^x \sin x\ dx$$

Che si risolve in:

$$\int e^x \sin x\ dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\ dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\ dx$$

e quindi:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + k$$

Il seguente risultato fornisce un utile metodo di integrazione quando la funzione integranda è il prodotto di una funzione composta per la derivata della funzione interna

Teorema 5 (Primo teorema di integrazione indefinita per sostituzione)

Siano: $g : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ una funzione derivabile, $f : (\alpha, \beta) \to R$ una funzione dotata di primitive in (α, β) allora si ha:

- **i)** $f(g(x))g'(x)$ è dotata di primitive in (a, b)
- **ii)**

  $$\int f(g(x))g'(x)dx = [\int f(t)dt]_{t=g(x)}$$

  dove il secondo membro è l'insieme delle funzioni ottenute componendo con g le primitive di f in (α, β)

Dimostrazione: Sia F una primitiva di f consideriamo la funzione $G(x) = F(g(x))$ si ha $G'(x) = f(g(x))g'(x)$ quindi G è una primitiva di $f(g(x))g'(x)$. Dunque il primo membro della tesi è uguale a $G(x) + k$ il secondo membro è uguale a $[F(t) + k]_{t=g(x)} = F(g(x)) + k = G(x) + k$

Esempio 7:
La proprietà appena dimostrata lo abbiamo applicato nell'esempio 2, infatti si ha:

$$\int e^{cx}dx = \frac{1}{c}\int ce^{cx}dx = \frac{1}{c}\left[\int e^t dt\right]_{t=cx} = \frac{e^{cx}}{c} + k$$

Di seguito altri esempi:

1. $$\text{Si ha} \int x\cos(x^2+5)dx = \frac{1}{2}\int(2x)\cos(x^2+5)dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos t dt\right]_{t=x^2+5} == \frac{1}{2}\sin(x^2+5) + k$$

   dato che la derivata di $x^2 + 5$ è $2x$.

2. $$\text{Si ha} \int \frac{e^x}{e^x+5}dx = \left[\int \frac{1}{t+5}dt\right]_{t=e^x} = \log(e^x+5)+k$$

Dato che la derivata di e^x è e^x

Integrazione polinomi trigonometrici

Risolveremo solo integrali del tipo:

- $I_n = \int \cos^n x \, dx$
- $J_n = \int \sin^n x \, dx$
- $H = \int \cos^m x \sin^n x \, dx$
  essendo $n, m \in N$ si ha:

$$I_1 = \sin x + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$I_2 = \int cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$I_3 = \int \cos x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \cos x(1-\sin^2 x) \, dx = \left[\int (1-t^2) \, dt\right]_{t=\sin x}$$

analogamente per $n > 3$, in pratica possiamo dire che:

- **Per n pari**: si utilizzano le formule di bisezione
- **Per n dispari**: si ricorre all'integrazione per sostituzione
  Analogamente:

$$J_1 = -\cos x + k$$

$$J_2 = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \, dx$$

$$J_3 = \int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx = -\int (-\sin x)(1-\cos^2 x) \, dx$$

e si procede allo stesso modo di I_3. Invece per determinare H si distinguono due casi:

- **i)** se almeno uno fra m, n è dispari, ad esempio $m = 2p + 1, p \in N_0$

$$H = \int \cos x \cdot (\cos^2 x)^p \cdot \sin^n x \, dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)^p \sin^n x \, dx = \left[\int (1 - t^2)^p t^n \, dt \right]_{t = \sin x}$$

  praticamente arriviamo all'integrale di un polinomio
- **ii)** se m, n sono entrambi pari ovvero $m = 2p, n = 2q$ con $p, q \in N$ si procede nel seguente modo

Esempio 8: di seguito alcuni integrali indefiniti di polinomi trigonometrici

1. $$\int \sin x \cos^3 x \, dx = -\int (-\sin x) \cos^3 x \, dx = -\left[\int t^3 \, dt \right]_{t = \cos x} = -\frac{\cos^4 x}{4} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. $$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx = \int (\cos x) \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \int (\cos x)(1 - \sin^2 x) \sin^2 x \, dx = \left[\int (t^2 - t^4) \, dt \right]_{t = \sin x} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. $$\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2(2x)}{4} \, dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x) \right) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin(4$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Sia f una funzione razionale fratta:

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \text{ funzione 1.1}$$

con a, b polinomi primi fra loro, effettuando la divisione fra a e b si ottengono due polinomi q e r quest'ultimo avente grado minore di quello di b tali che:

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$$

Quindi per integrare una qualsiasi funzione razionale fratta basta integrare un polinomio e una funzione razionale *fratta propria*, ossia una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.

Supponiamo che la funzione 1.1 sia una funzione razionale fratta propria, e sia m il grado del polinomio b, possiamo affermare che: se $b(x) = 0$ ha m soluzioni reali o complesse

- Data α una *soluzione reale* con una sua molteplicità n allora $b(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^n$
- Dato $k+ic$ una *soluzione complessa* con molteplicità n (anche il suo coniugato $k-ic$ lo sarà) allora $b(x)$ è divisibile per $[(x-k)^2+c^2]^n$

Dunque il polinomio b si decompone nel prodotto di fattori del tipo $(x-\alpha)^n$ e fattori del tipo $[(x-k)^2+c^2]^n$cioè nel prodotto di potenze di polinomi di primo grado e di potenze di polinomi di secondo grado con discriminante negativo.

A questo punto si dimostra che è possibile decomporre la funzione razionale f nella somma di funzioni razionali (le **fratte semplici**) che sono del tipo:

- Ogni b del tipo $(x-\alpha)^n$ dà luogo ad n fratti semplici del tipo:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} \text{ funzione 1.2}$$

$$\frac{A_1}{x-\alpha}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

- Ogni fattore del tipo $[(x-k)^2+c^2]^n$ dà luogo ad n fratti semplici del tipo:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x-k)^2+c^2} \text{ funzione 1.3}$$

$$\frac{A_1x+B_1}{(x-k)^2+c^2}, \frac{A_2x+B_2}{[(x-k)^2+c^2]^2}, \dots, \frac{A_nx+B_n}{[(x-k)^2+c^2]^n}.$$

Esempio 9
Presa una funzione razionale fratta con denominatore nella forma:

$$x^3(x-2)(x^2+5)(x^2+1)^2$$

i suoi fratti semplici saranno:

$$\frac{A_1}{x}, \frac{A_2}{x^2}, \frac{A_3}{x^3}, \frac{A_4}{x-2}$$

e

$$\frac{C_1x+B_1}{x^2+5}, \frac{C_2x+B_2}{x^2+1}, \frac{C_3x+B_3}{(x^2+1)^2}$$

Praticamente l'integrazione di una funzione razionale fratta propria viene ricondotta all'integrazione dei suoi fratti semplici

Come integrare un fratto semplice

Integrazione dei fratti semplici del primo tipo (1.2):

Osserviamo che grazie alla proprietà di omogeneità possiamo supporre $A=1$, il nostro fratto diventa:

$$I_n = \int \frac{1}{(x-c)^n} dx$$

Se $n=1$ si ha

$$I_1 = \int \underbrace{\frac{1}{x-c}}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{f'(x)} dx = \text{ e quindi per la regola di integrazione } = \log|x-c|+k$$

Se $n>1$ si ha

$$I_n = \int (x-c)^{-n} dx = \frac{(x-c)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{-n+1} \frac{1}{(x-c)^{n-1}} + k$$

Integrazione dei fratti semplici del secondo tipo (1.3):

Tratteremo solo i casi con $n=1$ e $n=2$, poniamo quindi:

$$I_n = \int \frac{A_1x+B_1}{(x-k)^2+c^2}$$

Primo caso: $n=1$
Grazie al primo teorema di integrazione per sostituzione possiamo supporre $k=0$ quindi abbiamo che

$$I_1 = \int \frac{A_1 x + B_1}{x^2+c^2} dx \text{ decomponendo in somma: } A \int \frac{x}{x^2+c^2} dx + B \int \frac{1}{x^2+c^2} dx.$$

Supponendo $A = B = 1$, consideriamo i due integrali in modo separato per semplicità:

1. $$\int \frac{x}{x^2+c^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+c^2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+c^2) + k;$$

2. $$\int \frac{1}{x^2+c^2} dx = \text{ raccogliamo } c^2 = \int \frac{1}{c^2\left[\left(\frac{x}{c}\right)^2+1\right]} dx = \frac{1}{c} \int \frac{1}{c} \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{c}\right)^2+1\right]} dx = \frac{1}{c}\left[\int \frac{1}{t^2+1} dt\right]_{t=\frac{x}{c}} = \frac{1}{c} \arctan \frac{x}{c} + k\$\$datocheladerivatadi\$\frac{x}{c}\$è\$$$

Secondo caso: $n = 2$

Anche questa volta possiamo supporre che $A = B = 1$ e $k = 0$ quindi si ha che:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+c^2)^2} dx = I_1 + I_2$$

dove I_1 e I_2 sono:

$$I_1 = \int \frac{x}{(x^2+c^2)^2} dx, \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+c^2)^2} dx.$$

1. $$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+c^2)^2} dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{t^2} dt\right]_{t=x^2+c^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+c^2} + k$$

2. Per determinare I_2 procediamo come abbiamo visto nell'esempio 5 relativo all'integrazione per parti:

$$I_2 = \frac{1}{c^2} \int \frac{c^2}{(x^2+c^2)^2} dx = \frac{1}{c^2} \int \frac{x^2+c^2-x^2}{(x^2+c^2)^2} dx = \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{x^2+c^2} dx + \frac{1}{c^2} \int \frac{-x^2}{(x^2+c^2)^2} dx.$$

il primo è stato già studiato nel caso $n = 1$, per il secondo invece osserviamo che $\frac{1}{x^2+c^2}$ è $\frac{-2x}{(x^2+c^2)^2}$ quindi è possibile procedere per parti:

$$\int \frac{-x^2}{(x^2+c^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int x \cdot \frac{-2x}{(x^2+c^2)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+c^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+c^2}dx.$$

e anche in questo caso ci riconduciamo al caso di $n = 1$

Generalizziamo

Con le considerazioni fatte finora, siamo in grado di integrare una funzione del tipo:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$

Posto $\Delta = p^2 - 4q$ e da qui distinguiamo tre casi:

1. $\Delta > 0$: in questo caso il trinomio al denominatore ha due zeri reali e distinti x_1, x_2 e si ha $x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2)$ e quindi cerchiamo A e B tali che:

   $$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

   Si deve risolvere il sistema

   $$\begin{cases} A+B=a \\ -x_2A-x_1B=b \end{cases}$$

   che ammette una sola soluzione in quanto il determinante dei coefficienti vale $x_2 - x_1 \neq 0$ quindi ci si riconduce al caso 1.2
2. $\Delta = 0$: in questo caso il trinomio al denominatore ha un solo zero x_0 di molteplicità 2 e si ha: $x^2+px+q = (x-x_0)^2$, procedendo come nel caso precedente si determinano due numeri A e B tali che:

   $$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}.$$

   in questo modo ci si riconduce nuovamente al caso 1.2
3. $\Delta < 0$: in questo caso si utilizza il metodo del complemento dei quadrati:

   $$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2$$

quindi il trinomio al denominatore si scrive nella forma $(x-k)^2+c^2$ e si ha:

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= a\int \frac{x}{x^2+px+q}dx + b\int \frac{1}{(x-k)^2+c^2}dx = \\
&= \frac{a}{2}\int \frac{2x}{x^2+px+q}dx + b\int \frac{1}{(x-k)^2+c^2}dx = \\
&= \frac{a}{2}\int \frac{2x+p-p}{x^2+px+q}dx + b\int \frac{1}{(x-k)^2+c^2}dx = \\
&= \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x-k)^2+c^2}dx = \\
&= \frac{a}{2}\log(x^2+px+q) + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\left[\int \frac{1}{t^2+c^2}dt\right]_{t=x-k}
\end{aligned}$$

Ci si riconduce quindi al caso 1.3

Valanga di esempi:

Esempio 10: Determiniamo

$$I = \int \frac{x+4}{x^2-x-6}dx$$

si ha:

$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$$

quindi i fratti semplici saranno del tipo:

$$\frac{A}{x-3}, \frac{B}{x+2}$$

cerchiamo di determinare A, B:

$$\frac{x+4}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A-3B}{x^2-x-6}$$

quindi deve essere $A + B = 1$, $2A - 3B = 4$ e quindi troviamo che

$$A = \frac{7}{5},\ B = -\frac{2}{5}$$

sostituendo nei fratti semplici e integrando otteniamo che:

$$I = \frac{7}{5}\log|x-3| - \frac{2}{5}\log|x+2| + k$$

Esempio 11: Determiniamo

$$\int \frac{x+4}{x^2-2x+1}dx$$

in questo caso i fratti semplici sono del tipo:

$$\frac{A}{x-1},\ \frac{B}{(x-1)^2}$$

si trova $A = 1$ e $B = 5$ quindi l'integrale richiesto risulta essere:

$$|x-1| - \frac{5}{x-1} + k$$

Esempio 12: Determiniamo

$$I = \int \frac{x+4}{x^2+x+4}dx$$

il denominatore ha discriminante negativo, quindi si procede nel seguente modo:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{7}{x^2+x+4}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+4) + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+4) + \frac{7}{\sqrt{15}}\arctan\frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + k$$

Esempio 13: Determiniamo

$$I = \int \frac{x+3}{(x^2+4)^2} dx$$

e quindi risulta che:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dt}{t^2}\right]_{t=x^2+4} + 3\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{3}{4}\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{3}{8}\int x \cdot \frac{2x}{(x^2+4)^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\left[x \cdot \left(-\frac{1}{x^2+4}\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{x^2+4}\right)dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\left[-\frac{x}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4}\right]$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2} + \frac{3x}{8(x^2+4)} - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2} + \frac{3x}{8(x^2+4)} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right) + k$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{16}\right)\arctan\frac{x}{2} + \frac{3x}{8(x^2+4)} + k$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{16}\arctan\frac{x}{2} + \frac{3x}{8(x^2+4)} + k.$$

Esempi 14: questi sono esempi in cui la funzione razionale fratta non è propria, in questi casi la funzione deve essere decomposta nella somma di un polinomio e di una funzione razionale fratta propria:

- *Casi con trasformazioni semplici*:
    1. $$\int \frac{x+1}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3-1}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{2x+3}\right)dx.$$
    2. $$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^4-1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int \left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx.$$
    3. $$\int \frac{x^2+2}{x-5}\,dx = \int \frac{x^2-25+25+2}{x-5}\,dx = \int \left(x+5+\frac{27}{x-5}\right)dx$$
- *Casi dove la trasformazione viene fatta effettuando la divisione fra il numeratore e il denominatore*
    1. $$\int \frac{x^3}{x^2+2}\,dx = \int \left(x+\frac{-2x}{x^2+2}\right)dx$$
    2. $$\int \frac{x^4+1}{x^3-2}\,dx = \int \left(x+\frac{3x+1}{x^3-2}\right)dx$$

Integrazione per razionalizzazione

Grazie al primo teorema di integrazione per sostituzione è possibile ricondurre alcuni integrali a quelli di funzioni razionali fratte. Di seguito degli esempi:

1. $$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \left[\int \frac{1}{t+1}dt\right]_{t=e^x} = \log(e^x+1)+k$$
2. $$\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+1}dx = \int e^x\frac{e^x+4}{e^{2x}+1}dx = \left[\int \frac{t+4}{t^2+1}dt\right]_{t=e^x}$$

    qui abbiamo osservato che è presente il fattore $D(e^x)=e^x$. Se esso non è presente basta moltiplicare il numeratore e il denominatore per e^x come nell'esempio successivo

3. $$\int \frac{dx}{e^x+3} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x}dx = \left[\int \frac{dt}{t^2+3t}\right]_{t=e^x}$$

4. $$\int \frac{\tan x}{\tan x + 1}dx = \int \frac{\tan x(\tan^2 x+1)}{(\tan x+1)(\tan^2 x+1)}dx = \left[\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}dt\right]_{t=\tan x}$$

   qui abbiamo moltiplicato numeratore e denominatore per tan^2x+1 che è la derivata di $\tan x$

Teorema 6 (secondo teorema di integrazione per sostituzione)

Siano $f:(a,b)\to R$ una *funzione dotata di primitive*, $g:(c,d)\to R$ una funzione derivabile e tale che $Im(g)=(a,b)$. Se g è *invertibile* si ha:

$$\int f(x)dx = \left[\int f(g(t))g'(t)dt\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Dimostrazione: Dal primo teorema di integrazione per sostituzione segue che:

$$\int f(g(t))g'(t)dt = [\int f(x)\ dx]$$

componendo ambo i membri con $t=g^{-1}(x)$

Esempio 15: di seguito degli esempi di applicazione del teorema appena dimostrato

1. Determinare

$$\int \sqrt{x+3}\ dx$$

   si ha che $(a,b)=[-3,+\infty[$ è ci poniamo come obbiettivo quello di porre $\sqrt{x+3}=t$. Si deve scegliere dunque

$$(c,d)=[0,+\infty[\text{ e che } g(t)=t^2-3$$

   Si prova subito che tutte le ipotesi del teorema sono soddisfatte e in particolare si ha:

$$g'(t)=2t, g^{-1}(x)=\sqrt{x+3}$$

quindi

$$\int \sqrt{x+3}\,dx = \left[\int t \times 2t\,dt\right]_{t=\sqrt{x+3}} = \frac{2}{3}(\sqrt{x+3})^3 + k$$

2. Sia

$$f(x) = \sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}$$

con $ps - qr \neq 0$ una funzione definita in un intervallo (a, b) in cui il radicando è non negativo. La sostituzione da fare in questo caso è

$$t = \sqrt{\frac{px+q}{rxs+s}}$$

con $t \geq 0$ si ha allora

$$g(t) = \frac{st^2 - q}{p - rt^2},\ g'(t) = \frac{2(ps-qr)t}{(p-rt^2)^2}$$

Poiché g' ha sempre segno costante, la funzione g è invertibile. Applicando il secondo teorema di integrazione per sostituzione si ottiene:

$$\int f(x)\,dx \left[\int \frac{2(ps-qr)t^2}{(p-rt^2)^2}\,dt\right]_{t=\sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}}$$

che è l'integrale di una funzione razionale.

3. Di seguito un caso particolare:

Sia
$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}},$$
vogliamo determinare le primitive in $(a, b) =]3, +\infty[$. Poniamo
$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}},$$
con $t > 0$. Ricavando x, si ottiene
$$g(t) = \frac{3t^2+1}{t^2-2}.$$
Si vede facilmente che sono verificate le ipotesi del secondo teorema di integrazione per sostituzione, in particolare si ha
$$g'(t) = -\frac{14t}{(t^2-2)^2} < 0,$$
quindi g è invertibile. Applicando il teorema si ottiene
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -14\left[\int \frac{t^2}{(t^2-2)^2}dt\right]_{t=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}}$$
che si risolve con il metodo di integrazione delle funzioni razionali.

Integrale definito secondo Riemann

Ricordiamo che dati due insiemi numerici A e B se:

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

si dice che A e B sono **separati** e in quel caso si può provare che $\sup A \leq \inf B$ e tutti gli elementi $c \in [\sup A, \inf B]$ sono detti *elementi di separazione*. Se $\sup A = \inf B$ l'elemento di separazione è unico e gli insiemi A e B sono detti **contigui**.

Si può provare che A e B sono contigui se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a < \epsilon$

Definizione 3

Chiameremo **decomposizione** di $[a, b]$ ogni insieme di punti:

$$D = \{x_0; x_1; \dots, x_{n-1}; x_n\}$$

tali che:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

- i punti $x_0, x_1, \dots, x_n$ sono detti *capisaldi della decomposizione*
- Il numero

  $$|D| = max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1})\}$$

  si chiama *ampiezza di D*

Esempio
Se consideriamo l'intervallo $[0, 10]$, una possibile decomposizione D potrebbe essere:

$$D = \{0; 2; 5; 10\}$$

Qui i capisaldi sono $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 10$ con $|D| = 5$.

Sia $D = \{x_0; x_1; \dots, x_{n-1}; x_n\}$ una delle decomposizioni di $[a, b]$. Poiché f è continua in ognuno degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ (con $i = 1, \dots, n$) è ivi dotata di massimo e minimo assoluto. Formalmente scriveremo che: per ogni $i = 1, \dots, n$ siano $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tali che:

$$f(y_i) = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f, \ f(z_i) = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

Definizione 4

le quantità :

- *Somma inferiore* della funzione f relativa a D

  $$s(f, D) = \Sigma_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1})$$

- *Somma superiore* della funzione f relativa a D

$$S(f,D) = \Sigma_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

  Al variare della decomposizione D, queste somme descrivono due insiemi numeri $\underline{S}$ (*insieme di tutte le possibili somme inferiori*) e $\overline{S}$ (*insieme di tutte le possibili somme superiori*) su questi due insiemi possiamo dire che:
- Date due composizioni D_1, D_2 si ha che

$$s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$$

  cioè gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono separati
- Sapendo che sono separati sappiamo sicuramente che $\sup \underline{S} \leq \inf \overline{S}$

Teorema 7

Gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono contigui
Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists D \text{ decomposizione di } [a,b] \text{ tale che } S(D) - s(D) < \epsilon$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ essendo f una funzione continua in $[a,b]$ per il teorema di Cantor essa è uniformemente continua in $[a,b]$, scriviamo di seguito la definizione di *uniformemente continua* in $\frac{\epsilon}{b-a}$ e troviamo che:

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } x,y \in [a,b], [x-y] < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a} \ (1.4)$$

Costruiamo una decomposizione D di $[a,b]$ tale che $|D| < \delta$.

- $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ i capisaldi di questa decomposizione
- $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i punti di minimo e massimo assoluto di f in $[x_{i-1}, x_i]$
  Dato che $|D| < \delta$ si ha $|z_i - y_i| < \delta$ quindi usando la (1.4) per tale coppia di punti vale la disuguaglianza

$$f(z_i) - f(y_i) = |f(z_i) - f(y_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

si ha allora che:

$$S(D) - s(D) = \Sigma_{i=1}^{n}(f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$\frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

In virtù del teorema precedente gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono contigui e $\sup \underline{S} = \inf \overline{S}$ è il loro unico elemento di separazione

Definizione 5

Il numero

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup \underline{S} = \inf \overline{S}$$

e si chiama *integrale definito (secondo Riemann)* di f in $[a, b]$

Esempio 16: consideriamo la funzione costante:

$$f(x) = k \; \forall \in [a, b]$$

qualunque sia la decomposizione D scelta, si ha subito

$$s(f, D) = S(f, D) = k(b-a)$$

quindi

$$\int_a^b k\, dx = k(b-a)$$

Osserviamo che se $k > 0$ il valore dell'integrale risulta uguale all'area del rettangolo

$$\{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Osservazione 3: Il valore dell'integrale dipende da f, da a e da b ovviamente non cambia cambiando il nome della variabile di integrazione

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \dots$$

Sia f una funzione continua in un intervallo (α, β) e siano $a, b \in (\alpha, \beta)$ Se $a < b$ abbiamo già definito l'integrale definito

$$\int_a^b f(x)dx$$

che si generalizza nel caso in cui $a \geq b$ nel seguente modo:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a=b \\ -\int_b^a f(x)\ dx & \text{se } a>b \end{cases}$$

Proprietà dell'integrale definito

Di seguito le principali proprietà dell'integrale definito:

- *Proprietà additiva*: se f è una funzione continua in (α, β) allora

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

  qualunque siano i punti $a, b, c \in (\alpha, \beta)$
- *Proprietà distributiva*: se f, g sono continue in $(\alpha, \beta), a, b \in (\alpha, \beta)$ e $c_1, c_2 \in R$ si ha:

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

- *Proprietà della media*: Sia f continua in $[a, b]$. Posto $m = \min_{[a,b]} f$ e $M = \max_{[a,b]} f$ si ha

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

inoltre esiste $c \in [a,b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

la prima proprietà della media segue dalla definizione di integrale usando la decomposizione $D = \{a; b\}$. Per ottenere la seconda basta osservare che:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

e applicare la proprietà dei valori intermedi alla funzione f

- *Prima proprietà di monotonia*: Sia f continua in $[a,b]$ e tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora si ha:

  $$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

  l'eguaglianza si ha se e solo se f è identicamente nulla. Questa proprietà si può provare usando quella della media e osservando che $m \geq 0$, da questo risultato applicando la proprietà distributiva segue subito la seconda proprietà
- *Seconda proprietà di monotonia*: Siano f, g continue in $[a,b]$ e tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora si ha

  $$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

- *Proprietà con il valore assoluto*: Siano f continua in $[a,b]$ allora:

  $$|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Funzione integrale

Sia $f : (\alpha, \beta) \to R$ una funzione continua e sia $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Per ogni $x \in (\alpha, \beta)$ l'integrale definito

$$\int_x^{x_0} f(t)\,dt$$

è un numero che dipende da x possiamo quindi considerare la funzione $F:(\alpha,\beta)\to R$ definita mediante la legge:

$$F(x)=\int_x^{x_0} f(t)\,dt,\ \forall x\in(\alpha,\beta)$$

La funzione F si chiama *funzione integrale di f di punto iniziale* x_0, ovviamente $F(x_0)=0$

Teorema 8

Siano $f(\alpha,\beta)\to R$ una funzione continua e $x_0,x_1\in(\alpha,\beta)$. Se F e G sono due funzioni integrali di punti iniziale x_0 e x_1 rispettivamente, allora esiste $c\in R$ tale che:

$$F(x)=G(x)+c\ \forall x\in(\alpha,\beta)$$

Dimostrazione: Per definizione di funzione integrale si ha:

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt,\quad G(x)=\int_{x_1}^{x} f(t)dt,\quad \forall x\in(\alpha,\beta)$$

Usando la proprietà additiva, dell'integrale definito otteniamo che:

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt+\int_{x_1}^{x} f(t)dt=G(x)+\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt$$

Teorema 9 (teorema di derivazione della funzione integrale)

Siano $f:(\alpha,\beta)\to R$ una funzione continua e F una funzione integrale di f. Allora F è derivabile e si ha $F'(x)=f(x)$ per ogni $x\in(\alpha,\beta)$
Dimostrazione: consideriamo la funzione integrale F di punto iniziale x_0. Proviamo la tesi in un punto $c\in(\alpha,\beta)$. Consideriamo il rapporto incrementale della funzione F nel punto c. Usando la definizione di F e la proprietà additiva dell'integrale definito, se $x\in(\alpha,\beta), x\neq c$ si ha

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt-\int_{x_0}^{c} f(t)dt}{x-c}=\frac{\int_c^x f(t)dt}{x-c}.$$

Supponendo per semplicità che $x>c$ dal teorema della media applicato alla restrizione di f in $[c,x]$ segue che esiste $\overline{x}\in[c,x]$ tale che

$$\frac{\int_c^x f(t)dt}{x-c} = f(\overline{x})$$

Osserviamo che $\overline{x}$ dipenda da x e al tendere di x a c anche $\overline{x}$ tende a c quindi, per la continuità di f nel punto c si ha

$$\lim_{x \to c} f(\overline{x}) = f(x) = f(c) \text{ da cui segue la tesi}$$

Dal risultato appena dimostrato segue che ogni funzione integrale di una funzione continua f è una primitiva di f

Teorema 10 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Una funzione continua in un intervallo è ivi dotata di primitive.

Di seguito degli esempi di applicazioni di questo teorema:
Esempio 17: trovare la funzione F primitiva in $]0; +\infty[$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \forall x > 0$$

e tale che $F(2) = 5$.
Dato che ogni funzione integrale è una primitiva di f basta porre:

$$F(x) = \int_2^x \frac{\sin t}{t}\, dt + 5$$

Esempio 18: Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ della legge:

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt \; \forall x > 0$$

si tratta della funzione integrale di una funzione continua quindi:

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x} \; \forall x > 0$$

Esempio 19: Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ della legge

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\, dt\ \forall x > 0$$

Non è una funzione integrale in quanto l'estremo variabile di integrazione è quello inferiore. Tuttavia, si osserva che:

$$F(x) = -\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

e quindi

$$F'(x) = -\frac{\sin x}{x}, \forall x > 0$$

Esempio 20: Derivare la funzione definita in $]0; +\infty[$ della legge:

$$F(x) = \int_1^{x^3} \frac{\sin t}{t}\, dt\ \forall x > 0$$

F è composta mediante la funzione integrale $\int_1^y \frac{\sin t}{t}\, dt$ e la funzione x^3 quindi

$$F'(x) = 3x^2 \frac{\sin x^3}{x^3} \forall x > 0$$

Esempio 21: derivare la funzione definita in $]0; +\infty[$ della legge:

$$F(x) = \int_{x^4}^{\log x} \frac{\sin t}{t}\, dt\ \forall x > 0$$

Non è una funzione integrale in quanto gli estremi di integrazione sono entrambi variabili, allora si procede nel seguente modo:

$$F(x) = \int_{x^4}^{2} \frac{\sin t}{t} dt + \int_2^{\log x} \frac{\sin t}{t} dt$$

e quindi

$$F'(x) = -4x^3 \frac{\sin x^4}{x^4} + \frac{1}{x} \frac{\sin(\log x)}{\log x}, \quad \forall x > 0.$$

Teorema 11 (formula fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : (\alpha, \beta) \to R$ una funzione continua, e sia F una sua primitiva. Se $a, b \in (\alpha, \beta)$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Dimostrazioni: la funzione $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f, quindi esiste una costante k tale che, per ogni $x \in (\alpha, \beta)$ si ha $F(x) = G(x) + k$. In particolare per $x = a$ ne segue $F(a) = k$ quindi $F(x) = G(x) + F(a)$. Calcolando i due membri di quest'eguaglianza per $x = b$ ne segue

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx + F(a) \quad \text{che è la tesi.}$$

Esempio 22

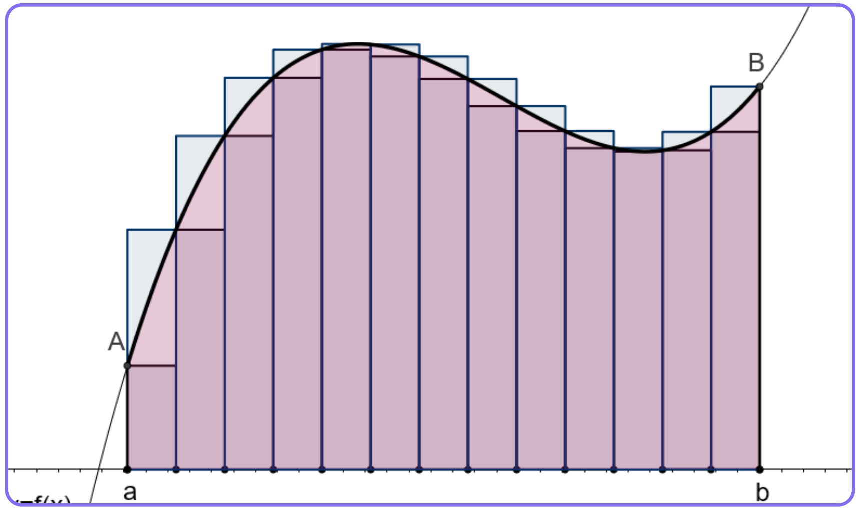
1. $\int_1^e \log x\,dx = [x \log x - x]_1^e = 1$
   - Per risolvere $[x \log x - x]_1^e$ abbiamo fatto;
     - $x \log x - x \to \text{ sostituendo x con e } \to e \log e - e = e - e = 0$
     - $x \log x - x \to \text{ sostituendo x con 1 } \to 1 \log 1 - 1 = 0 - 1 = -1$
   - sottraendo i due risultati otteniamo $0 - (-1) = 1$
2. $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \cos x\,dx = [\sin x]_{\pi/2}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

Interpretazione geometrica dell'integrale di Riemann

Si vuole attribuire un'area a sottoinsiemi del piano che non siano necessariamente dei poligoni, se $X = (a, b) \times (c, d)$ è un rettangolo limitato e chiameremo area di X il numero:

$$area(X) = (b - a)(d - c)$$

Chiameremo *plurirettangolo* ogni insieme che sia unione finita di rettangoli a due a due privi di punti interni in comune.



Se X è un plurirettangolo chiamiamo $area(X)$ la somma delle aree dei rettangolo che lo compongono.

Siano rispettivamente $\underline{P}$ e $\overline{P}$ rispettivamente le famiglie non vuote dei plurirettangolo contenuti in X e dei plurirettangoli contenenti X

Introduciamo $\underline{A}$ e $\overline{A}$ costituiti dalle aree degli elementi di $\underline{P}$ e $\overline{P}$ si tratta evidentemente di due insiemi numerici separati

Se essi sono contigui X è detto *misurabile* e il loro elemento di separazione è chiamato area di X se non sono contigui X è detto *non misurabile*

Sia ora f una funzione reale continua e non negativa in $[a, b]$. Introduciamo l'insieme che chiameremo *rettangoloide di f*:

$$R(f) = \{(x, y) \in R^2 : \ a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Siano D una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ di capisaldi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i punti di minimo e massimo assoluto di f nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$

Osserviamo che la quantità $f(y_i)(x_i - x_{i-1})$ rappresenta l'area di un rettangolo contenuto nella porzione di rettangoloide relativa all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. L'unione di tutti i rettangolo ottenuti in tal modo costituisce un plurirettangolo contenuto nel rettangoloide e la sua area è $s(f, D)$, analogamente $S(f, D)$ fornisce l'area di un plurirettangolo contenente il rettangoloide.

Dire che la funzione è integrabile, cioè che gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono contigui, equivale dunque a dire che sono contigui gli insiemi $\underline{A}$ e $\overline{A}$ quindi garantisce che il rettangoloide è misurabile e la sua area è l'elemento di separazione fra tali insiemi, quindi l'integrale.

Se f è a valori non positivi, si può in modo simile introdurre il rettangoloide e la sua area risulta uguale a $-\int_a^b f(x)\,dx$ dato che in questo caso $R(f)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse a $R(-f)$ quindi ha la sua stessa area

Se infine f e g sono due funzioni continue in $[a, b]$ tali che $g(x) \leq f(x) \forall x \text{ in } [a, b]$ si può dimostrare che l'insieme

$$\{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

che chiameremo *dominio normale rispetto all'asse delle ascisse* è misurabile e la sua area è uguale

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

2 - Equazioni differenziali

Equazioni differenziali lineari

Generalità sulle equazioni differenziali

Siano:

- A un sottoinsieme di R^{n+1}
- $F : A \to R$ una funzione reale definita in A.
  Si dice equazione differenziale di ordine n la funzione

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad (3.1)$$

il problema di determinare le funzioni $y(x)$ che chiameremo soluzioni o integrali dell'equazione differenziale

$$y : (a, b) \to R, (a, b) \subseteq R$$

tali che:

1. $y(x)$ è derivabile almeno n volte in (a, b)
2. $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x) \in A)$ per ogni $x \in (a, b)$

3. per ogni $x \in (a, b)$ si ha

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Data l'equazione differenziale di ordine n e dato un punto di A di coordinate $(x_0, y_0, y'_0, \dots y_0^{(n-1)})$ si chiama **Problema di Cauchy** relativo all'equazione 3.1 al punto x_0 e ai valori iniziali $y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \quad \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

il problema di determinare una soluzione y della (3.1) tale che:

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Ad esempio nel caso dell'equazione del primo ordine, il problema di Cauchy è quello di determinare una soluzione che in un punto dato assuma un valore determinato. Nel paragrafo successivo vedremo che sotto opportune ipotesi possiamo garantire l'esistenza, ed eventualmente l'unicità della soluzione per un problema di Cauchy

Equazioni lineari del primo ordine

Siano a, f due funzioni reali definite nell'intervallo (α, β). L'equazione del primo ordine:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad (3.2)$$

si dice *lineare*. Essa è il problema di determinare funzioni reali definite in un intervallo $I \subseteq (\alpha, \beta)$ derivabili e tali che si abbia:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Si può provare che se le funzioni a e f sono continue in (α, β) l'equazione 3.2 ammette soluzioni definite in (α, β).

Da ricordare

D'ora in avanti assumeremo che a e f siano funzioni continue con tutto quello che ne consegue.

Chiameremo **integrale generale** l'insieme di tutte le soluzioni, ogni soluzione y potrà essere chiamata *integrale particolare*.

Se la funzione f è identicamente nulla (ovvero $f(x) = 0 \quad \forall x \in R$), l'equazione è detta *omogenea*.

L'equazione omogenea associata alla 3.2 è

$$y' = -a(x)y$$

Risoluzione equazione omogena associata alla 3.2

✓ **Check**
la funzione identicamente nulla in (α, β) è soluzione.!

$y' = -a(x)y$ con $y(x) = 0$

$y(x) = 0$
$y'(x) = 0$ → sostituendo nell'eq iniziale : $0 = 0$ vero

quindi $f(x) = 0$ è soluzione

Sia y una soluzione che non assume mai il valore 0.
Essendo una funzione continua essa ha sempre lo stesso segno. Si ha, per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.

$$y' + a(x)y = 0 \quad \text{che possiamo scrivere anche come} \quad y' = -a(x)y \quad (3.3)$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

notiamo subito che il primo membro di quest'eguaglianza è la derivata di $log|y(x)|$.
Indichiamo ora con A una primitiva della funzione $a(x)$ (A è una qualsiasi funzione che derivata ci da $a(x)$) possiamo osservare che

le funzioni $log|y(x)|$ e $-A(x)$ hanno la stessa derivata quindi differiscono per una costante. Si ottiene:

$$\log|y(x)| = -A(x) + c$$

da cui facilmente

$$y(x) = ke^{-A(x)} \quad (3.4) \quad \text{con } k \in R$$

- Per $k = 0$ si ottiene la funzione nulla che avevamo trovato prima
- Per $k > 0$ si ottengono soluzioni positive
- Per $k < 0$ soluzioni negative.
  La 3.4 fornisce dunque tutte e sole le soluzioni dell'equazione omogenea.

$$y' = -a(x)\,y$$

imponiamo che $A(x)$ sia una primitiva $a(x)$

$$\underbrace{\frac{y'(x)}{y(x)}}_{\text{la derivata di } \log|y(x)|} = -\frac{a(x)\cancel{y(x)}}{\cancel{y(x)}}$$

una qualsiasi funzione che derivata ci dà $A(x)$

$$\log|y(x)| = -A(x)$$

dal passaggio precedente sappiamo che queste sono primitive di funzioni che si eguagliano quindi differiscono per una costante

$$\log|y(x)| = -A(x) + c$$

$$e^{\log|y(x)|} = e^{-A(x)+c}$$

$$e^{\log|y(x)|} = |y|$$

$$|y(x)| = e^{-A(x)+c}$$

$$|y(x)| = \underbrace{e^{c}}_{\text{Poniamo } = K} e^{-A(x)}$$

$$y(x) = K e^{-A(x)}$$

Esaminiamo ora l'equazione completa. Applichiamo **il metodo di Lagrange della variazione della costante**, praticamente cerchiamo una soluzione del tipo:

$$\overline{y}(x) = k(x)e^{-A(x)}, x \in (\alpha, \beta)$$

cioè una funzione che abbia la stessa forma della 3.4 ma in cui al posto della costante k ci sia una funzione derivabile $k(x)$. Imponendo che:

- $\overline{y}$ sia soluzione della 3.2
- $A'(x) = a(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$
  si ottiene:

$$\underbrace{k'(x)e^{-A(x)} - A'(x)k(x)e^{-A(x)}}_{\text{Derivata di } \overline{y}(x)} + \underbrace{a(x)}_{\text{Termine noto}} \underbrace{k(x)e^{-A(x)}}_{\overline{y}(x)} = f(x)\$\$dacui\$\$k'(x) = f(x)e^{(A(x))} \quad \forall x \in (\alpha, \beta)\$\$quindilafunzione\$k\$vienedeterminatainq$$

Teorema 1

Dati:

- y una soluzione dell'equazione 3.2
- z una soluzione dell'equazione 3.3
  allora la funzione somma $y + z$ è soluzione dell'equazione 3.2
  Dimostrazione: Basta osservare che posto $w = y + z$, w è derivabile in (α, β) e si ha:

$$w'(x) + a(x)w(x) = (y'(x) + a(x)y(x)) + (z'(x) + a(x)z(x)) = f(x) + 0 = 0$$

Teorema 2

Se y e z sono due soluzioni dell'equazione 3.2 allora la funzione differenza $y - z$ è soluzione dell'equazione 3.3
Dimostrazione: anche in questo caso posto $w = y - z$, la funzione w è derivabile in (α, β) e si ha:

$$w'(x) + a(x)w(x) = (y'(x) + a(x)y(x)) - (z'(x) + a(x)z(x)) = f(x) - f(x) = 0$$

Conseguenze

Da queste due proposizione segue che tutte e sole le soluzioni dell'equazione 3.2 si ottengono sommando una soluzione della 3.2 alle soluzioni della 3.3; tenendo conto della 3.4 possiamo concludere che l'integrale generale della 3.2 è dato da

$$y(x) = \overline{y}(x) + ke^{-A(x)}, k \in R$$

Equazioni lineari di ordine n

Sia $n \in N$ e siano date $n+1$ funzioni reali continue nel medesimo intervallo (α, β) siano esse $a_1, a_2, \dots, a_n f$. L'equazione differenziale lineare di ordine n che ha la forma:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (3.5)$$

è il problema della ricerca di funzioni reali y definite in (α, β) derivabili n volte e tali che

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = f(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Come nel caso precedente:

- Chiameremo *integrale generale dell'equazione differenziale* l'insieme delle sue soluzioni
- Un soluzione viene anche chiamata *integrale particolare*
- le funzioni a_i sono dette *coefficienti dell'equazione*
- funzione f *termine noto*
- Se f è identicamente nulla, l'equazione è detta *omogenea*
  Di seguito l'omogenea associata alla 3.5 avente i suoi stessi coefficienti e il termine noto nullo:

  $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (3.6)$$

  Nel paragrafo precedente abbiamo studiato il caso particolare $n = 1$, i risultati ottenuti ci saranno utili per studiare il caso generale, si hanno intanto alcuni risultati preliminari:

Teorema 3 (teorema di esistenza e unicità)

Il problema di Cauchy associato all'equazione 3.5 ammette una ed una sola soluzione definita in (α, β)

Proposizioni

Proposizione 1

Se y è una soluzione dell'equazione 3.5 e z soluzione della 3.6 allora la funzione somma $y + z$ è soluzione dell'equazione 3.5

Proposizione 2

Se y e z sono due soluzioni della 3.5 allora la funzione differenza $y-z$ è soluzione dell'equazione 3.6

Proposizione 3

Se y e z due soluzioni dell'equazione 3.6 allora ogni loro combinazione lineare $hy(x)+kz(x)(h,k \in R)$ è soluzione della 3.6

Proposizione 4 (principio di sovrapposizione)

dati:

- y soluzione dell'equazione $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots a_n(x)y=f(x)$
- z soluzione dell'equazione $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots a_n(x)y=g(x)$
- c_1,c_2 sono due numeri reali
  allora la funzione c_1y+c_2z è una soluzione dell'equazione

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots a_n(x)y=c_1f(x)+c_2g(x)$$

  Se il termine noto dell'equazione è una funzione a valori complessi nasce la proposizione di seguito

Proposizione 5

Supponiamo che il termine noto dell'equazione 3.5 sia una funzione a valori complessi $f(x)=u(x)+iv(x)$. Allora la funzione complessa $y(x)=w(x)+iz(x)$ è soluzione dell'equazione 3.5 se e solo se:

- w soluzione di $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=u(x)$
- z soluzione di $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=v(x)$

> ⚠ **Osservazione 1**
> Dalla proposizione 4, e dal fatto evidente che la funzione identicamente nulla è soluzione della 3.6 considerato con le usuali operazioni di somma fra funzioni e di prodotti di funzioni per un numero, è uno spazio vettoriale.

Proposizione 6

ci proponiamo adesso di determinare l'integrale generale della 3.6. A tale scopo siano $y_1, \dots y_n$ $n$soluzioni della 3.6. Introduciamo il seguente determinante:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

detto *wronskiano delle soluzioni*. Si verifica una e una sola delle seguenti affermazioni:

- a) $W(x)$ è identicamente nulla (il determinante è zero per ogni valore di x)
- b) $W(x) \neq 0$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$

Linea dimostrativa: Si prova che $W(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y' + a_1(x)y = 0$ le cui soluzioni sono del tipo $y(x) = ke^{-A(x)}$ con A primitiva di a_1, quindi sono identicamente nulle ($k = 0$) o sempre diverse di da zero.

Per brevità lo proviamo solo nel caso n = 2.
In tal caso si ha:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x)$$

quindi tenendo conto del fatto che y_1 e y_2 sono soluzioni della 3.6:

$$W'(x) = y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1'(x)y_2'(x) - y_1''(x)y_2(x) =$$

$$= y_1(x)\left(-a_1(x)y_2'(x) - a_2(x)y_2(x)\right) - y_2(x)\left(-a_1(x)y_1'(x) - a_2(x)y_1(x)\right) =$$

$$= a_1(x)\left(-y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x)\right) =$$

$$= -a_1(x)W(x)$$

Quindi possiamo scrivere che:

$$W'(x) = -a_1 W(x) \to W'(x) + a_1 W(x) = 0$$

visto che siamo riusciti a dimostrare che $W'(x) + a_1(x)W(x) = 0$ allora $W(x)$ è soluzione di $y' + a_1(x)y = 0$

Definizione 1

le soluzioni $y_1, \ldots y_n$ sono dette indipendenti se si ha $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Teorema 4

Un'equazione differenziale lineare di ordine n omogenea ha sempre n soluzioni indipendenti
Dimostrazione: Fissiamo ad arbitrio $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e consideriamo n problemi di Cauchy, l'i-mo dei quali è

$$(P_i) \quad \begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \\ y^{(i)}(x_0) = 1 \\ y^{(j)}(x_0) = 0, \quad j \neq i \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza e unicità, P_i ammette un'unica soluzione y_i. Consideriamo le n soluzioni così ottenute, il loro wronskiano, calcolato in x_0 è:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

dalla definizione 1 e dalla proposizione 4 segue che $y_1, \ldots y_n$ sono indipendenti

Teorema 5

Siano $y_1, \ldots, y_n$ n soluzioni indipendenti dell'equazione 3.6, allora tutte e sole le soluzioni dell'equazione 3.6 sono le funzioni del tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x), \quad k_i \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione: Che una combinazione lineare di soluzione sia una soluzione è già stato affermato dalla Proposizione 4. Proviamo il viceversa. Sia y una soluzione della 3.6 scelto ad arbitrio $x_0 \in (\alpha, \beta)$ consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \\ y(x_0) = \overline{y(x_0)} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \overline{y(x_0)} \end{cases} \tag{3.7}$$

del quale la funzione $\overline{y}$ è evidentemente una soluzione. Dato inoltre che le soluzioni sono indipendenti, il sistema lineare di n equazione nelle n incognite $k_1, \dots, k_n$

$$\begin{cases} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) + \cdots + k_n y_n(x_0) = \overline{y}(x_0) \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) + \cdots + k_n y_n'(x_0) = \overline{y}'(x_0) \\ \dots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + k_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + k_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \overline{y}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $(k_1, \dots, k_n)$ e la funzione

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x)$$

è soluzione del problema di Cauchy 3.7. Per l'unicità della soluzione si ha $\overline{y} = w$. Abbiamo in tal modo provato che, data una n-pla di soluzioni indipendenti, ogni altra soluzione della 3.6 è una loro combinazione lineare, come si voleva.

⚠ Osservazione 2
Ricordiamo ora che n elementi $v_1, \dots, v_n$ di uno spazio vettoriale si dicono linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare $\Sigma_{i=1}^{n} k_i v_i$ nulla è quella in cui $k_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$. Si può provare che le soluzioni $y_1, \dots, y_n$ della 3.6 sono indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti. Dal teorema 5 segue che lo spazio vettoriale delle soluzione ha dimensione n

Teorema 6

Siano $y_1, \dots, y_n$ n integrali indipendenti dell'equazione omogenea 3.6 e sia $\overline{y}$ un integrale particolare dell'equazione completa 3.5. Allora l'integrale generale dell'equazione completa è dato da:

$$y(x) = \bar{y} + \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x) : k_i \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione: La tesi segue dal teorema 5 e dalla proposizione 1.

Equazioni lineari a coefficienti costanti

Studio generale

Presentiamo adesso il metodo risolutivo per le equazioni lineare di ordine n. Anche stavolta consideriamo in un primo momento l'equazione omogenea:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (3.8)$$

Si cerca una soluzione del tipo

$$y(x) = e^{\alpha x} \text{ con } \alpha \in C$$

Calcolando le derivate successive di y e sostituendo nella 3.8 si ottiene

$$e^{\alpha x}(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots a_n) = 0$$

quindi la funzione y soluzione della 3.8 se e solo se il numero α è soluzione dell'equazione algebrica:

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots a_n = 0(3.9)$$

detta equazione caratteristica della 3.8. Risolvendo tale equazione si troveranno soluzioni reali e coppie di soluzione immaginarie coniugate. Si può dimostrare che dalla risoluzione dell'equazione caratteristica si ottengono n soluzioni per l'equazione differenziale, precisamente:

- se α è una soluzione reale di molteplicità r della 3.9 essa dà luogo alle seguenti r soluzioni della 3.8:

$$e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x}$$

- se $\beta \pm i\gamma$ è una coppia di soluzioni immaginarie coniugate di molteplicità s della 3.9 essa dà luogo alle seguenti $2s$ soluzioni della 3.8

Si può provare che le n soluzioni così ottenute sono linearmente indipendenti, quindi esse danno luogo all'integrale generare dell'equazione differenziale

Caso n = 2

L'equazione omogena si presenta nella forma:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad a, b \in R$$

con l'equazione caratteristica corrispondente che è:

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

per risolvere quest'ultima si deve studiare il segno del discriminante $\Delta = a^2 - 4b$, quindi abbiamo tre casi:

1. $\Delta > 0$: l'equazione caratteristica ha le due soluzioni reali e distinte α_1, α_2. Le soluzioni dell'equazione differenziale sono allora $e^{\alpha_1}x, e^{\alpha_2}x$ e quindi si ha che:

$$W(x) = e^{(\alpha_1+\alpha_2)x}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

quindi le soluzioni sono linearmente indipendenti.
2. $\Delta > 0$: l'equazione caratteristica ha una soluzione reale α di molteplicità 2. Le soluzioni dell'equazione differenziale sono allora $e^{\alpha}x, xe^{\alpha}x$ e si ha:

$$W(x) = e^{2\alpha x} \neq 0$$

3. $\Delta < 0$: l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse $\beta + i\gamma$ $(\gamma \neq 0)$. Le soluzioni dell'equazione differenziale sono $e^{\beta x}\cos(\gamma x)$ e $e^{\beta x}\sin(\gamma x)$ e si ha

$$W(x) = \gamma e^{2\beta x} \neq 0$$

quindi le soluzioni sono linearmente indipendenti.

Esempi

1. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

L'equazione caratteristica $\alpha^2+2\alpha-3=0$ ammette le due soluzioni reali $\alpha = 1, \alpha = -3$ quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è $k_1e^x + k_2e^{-3x}$.

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

L'equazione caratteristica $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ ammette la soluzione reale doppia $\alpha = 2$ quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è $k_1e^{2x} + k_2xe^{2x}$.

3. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 3y = 0.$$

L'equazione caratteristica $\alpha^2+2\alpha+3=0$ ammette le due soluzioni immaginarie coniugate $-1\pm\sqrt{2}i$ quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è $k_1e^{-x}\cos(\sqrt{2}x) + k_2e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)$.

Metodo della somiglianza

Presentiamo ora il metodo per risolvere l'equazione completa. A tale scopo bisogna determinare una sua soluzione particolare. Tale ricerca è particolarmente semplice se ci troviamo nel caso:

$$f(x) = e^{hx}p(x)$$

essendo h un numero complesso e p un polinomio di grado m a coefficienti complessi. Utilizzeremo il cosiddetto **metodo di somiglianza** nel quale si cerca una soluzione particolare dell'equazione completa che abbia una forma simile a quella del termine noto. Precisamente si cerca una soluzione del tipo

$$y(x) = e^{hx}x^sq(x)$$

Con:

- q un polinomio di grado m
- s la molteplicità di h
  - $s = 0$ se h non è soluzione dell'equazione caratteristica
    Il polinomio q si determina imponendo che la funzione $y(x)$ sia soluzione dell'equazione completa

Definizione di funzione esponenziale in campo complesso

Ricordiamo che se $\beta + i\gamma \in C$ allora si definisce:

$$e^{\beta+i\gamma} = e^{\beta}(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

e quindi che

- $e^{\beta}\cos\gamma = \text{ parte reale di } e^{\beta+i\gamma}$.
- $e^{\beta}\sin\gamma = \text{ parte immaginaria di } e^{\beta+i\gamma}$

Esempi di risoluzione degli esercizi

Prendiamo i coefficienti che hanno lo stesso grado e li mettiamo a sistema

$$\begin{cases} 3a - 1 = 0 \\ 2b + 6a = 0 \\ c + 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ -\frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}} = 0 \\ \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} b = -\frac{c}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ c = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Esempio 2 Risolviamo alcune equazioni lineari complete a coefficienti costanti.

1. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - y' = x^2 e^x.$$

Risolviamo intanto l'omogenea associata. L'equazione caratteristica

$$\alpha^2 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha(\alpha - 1) = 0 \rightarrow \alpha = 0 \text{ e } \alpha = 1$$

ammette le soluzioni $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$ quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 2$, quindi si cerca una funzione del tipo

grado x eq iniziale

$$y(x) = x(ax^2 + bx + c)e^x.$$

Derivando due volte la $y(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(3ax^2 + 2bx + c + 6ax + 2b)e^x = x^2 e^x$$

da cui $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$, $c = 2$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$$

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - y' = e^{2x}. \quad \longrightarrow \text{eq caratt: } \lambda^2 - \lambda = 0$$

$\lambda = 1$ e $\lambda = 0$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2.$$

+

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = 2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 0$, quindi si cerca una funzione del tipo $y(x) = ce^{2x}$. Derivando due volte la $y(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

grado delle x in eq iniziale

$$\frac{(4c - 2c)\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} = \frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} \longrightarrow 2c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{2} \longrightarrow y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

da cui $c = \frac{1}{2}$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 + \frac{1}{2}e^{2x}.$$

3. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - y' = \underline{2x + 1}.$$

nessun e^x quindi $h=0$

grado

Anche in questo caso, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = 0$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 1$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$y(x) = \cancel{e^{0x}}_{\to 1}\, x^1 (ax+b) \longrightarrow y(x) = x(ax + b).$$

Derivando due volte la $y(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$2a - 2ax - b = 2x + 1$$

da cui $a = -1$, $b = -3$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$y(x) = x(-x-3) \rightarrow -x^2 - 3x$

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 - x - 3.$$

Nei due successivi esempi ci saranno utili la definizione della funzione esponenziale in campo complesso e la Proposizione 5. Ricordiamo che se $\beta + i\gamma \in \mathbb{C}$ allora si definisce

$$e^{\beta+i\gamma} = e^{\beta}(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

e quindi

$e^{\beta}\cos\gamma =$ parte reale di $e^{\beta+i\gamma}$, $\qquad e^{\beta}\sin\gamma =$ parte immaginaria di $e^{\beta+i\gamma}$.

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + y = 2x\cos x. \tag{3.11}$$

Per ricondurci alla situazione prevista in (3.10), si tiene conto del fatto che $\cos x$ è la parte reale di e^{ix} e si procede nel seguente modo: si considera l'equazione

$$y'' + y = 2xe^{ix} \tag{3.12}$$

in cui il termine noto è del tipo (3.10), se ne trova un integrale particolare $\bar{y}$. La soluzione cercata per la (3.11) è, grazie alla Proposizione 5, la parte reale di $\bar{y}$. (Se invece di $2x\cos x$ il termine noto fosse stato $2x\sin x$, la soluzione della (3.11) sarebbe stata la parte immaginaria di $\bar{y}$.)

Procediamo, dunque, nella risoluzione della (3.12). L'equazione caratteristica $\alpha^2 + 1 = 0$ ammette le soluzioni $\alpha = \pm i$ quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = i$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 1$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$\bar{y}(x) = x(ax + b)e^{ix}.$$

Derivando due volte $\bar{y}(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(4aix + 2a + 2ib)e^{ix} = 2xe^{ix}$$

da cui $a = -\frac{1}{2}i$, $b = \frac{1}{2}$.
Si ha dunque

$$\bar{y}(x) = \big(-\frac{1}{2}ix^2 + \frac{1}{2}x\big)(\cos x + i \sin x)$$

la cui parte reale è

$$\frac{1}{2}x^2 \sin x + \frac{1}{2}x \cos x.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x + \frac{1}{2}x^2 \sin x + \frac{1}{2}x \cos x.$$

5. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + y = (x + 4) \sin 2x.$$

Procedendo come nel caso precedente, determiniamo prima di tutto un integrale particolare dell'equazione differenziale

$$y'' + y = (x + 4)e^{2ix}$$

osservando che $h = 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 1$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$\bar{y}(x) = (ax + b)e^{2ix}.$$

Derivando due volte la $\bar{y}(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(-3ax + 4ai - 3b)e^{2ix} = (x + 4)e^{2ix}$$

da cui $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{3} - \frac{4}{9}i$. Si ha dunque

$$\bar{y}(x) = \Big(\Big(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\Big) - \frac{4}{9}i\Big)(\cos 2x + i \sin 2x)$$

la cui parte immaginaria è

$$-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\sin 2x - \frac{4}{9}x\cos 2x.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\sin 2x - \frac{4}{9}x\cos 2x$$

6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione, come si trova facilmente, è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{-3x},$$

occorre quindi determinare le costanti k_1 e k_2 in modo da soddisfare i valori iniziali richiesti. Si ha $y'(x) = k_1 e^x - 3k_2 e^{-3x}$, imponendo i valori iniziali si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} k_1 e + k_2 e^{-3} = 0 \\ k_1 e - 3k_2 e^{-3} = 1 \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione $k_1 = \frac{1}{4e}$, $k_2 = -\frac{e^4}{3}$, dunque il problema di Cauchy ammette l'unica soluzione

$$y(x) = \frac{e^x}{4e} - \frac{3e^{-3x}}{e^4}.$$