$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

soluzioni = $\{0, 0, 2\}$

soluzioni finite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} r_2 = r_2 - 2r_1 \\ r_3 = r_3 - 3r_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & +1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$r_3 = r_3 - r_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad r_3 = r_3/3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nessuna soluzione perché questi sono tutti 0

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dopo Gauss - Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Soluzioni} = \left\{ (1 - x_4, 0, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

il sistema ha infinite soluzioni

Teorema di Rouché-Capelli

il sistema $A \cdot x = B$ con n variabili
e m equazioni

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

ha soluzione $\rightarrow rkA = rk(A|B) = r$

se $r = n$ allora esiste un'unica soluzione

se $r < n$ allora esistono infinite soluzioni che dipendono da $n - r$ parametri

Esempio:

$$\begin{cases} x - y + \alpha z = -1 \\ \alpha x + 2z = -2 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ evitare che α sia un pivot

questa cosa è un problema infatti α non può essere il pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = r_2 - \alpha r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & 2-\alpha & -2+\alpha \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 = r_2]{r_2 = r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 2-\alpha & -2+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 = r_3 + \alpha r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underbrace{2-\alpha-\alpha^2} & -2+2\alpha \end{array}\right)$$

essendo nel pivot dobbiamo discutere quando è $= 0$

$$2 - \alpha - \alpha^2 = (\alpha - 1)(\alpha + 2) \Rightarrow \alpha = 1, -2$$

Se $\alpha \neq 1, -2$ allora $rkA = 3$

che è uguale ad n — numero di righe/colonne

quindi esiste una soluzione

Se $\alpha = 1$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 = r_1 - 1 r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

verificare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left(-2 - 2x_3, -1 - x_3, x_3\right) \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Se $\alpha = -2$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

non esistono soluzioni

Se $\alpha \neq 1, -2$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{\alpha + 2} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{finire}}$$

Sistemi particolari → sistemi omogenei

$A \cdot X = 0$, ovvero $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Soluzione banale $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Assumiamo che Y e Y' siano soluzioni di $AX = 0$ ovvero

$AY = 0 = AY' \Rightarrow A(Y - Y') \Rightarrow AY - AY' = 0 - 0 = 0$

$Y + Y'$ = soluzione

cY = soluzione

Come applichiamo queste regole ad un sistema normale

$AX = B \rightsquigarrow A \cdot X = 0$

Σ l'insieme delle soluzioni di $AX = B$

Σ_0 l'insieme delle soluzioni di $AX = 0$

$\Sigma = \{ Y + Y_0 \mid Y_0 \in \Sigma_0 \}$ $\quad Y$ soluzione di $AX = B$

Dimostrazione $\quad Y$ soluzione di $AX = B$

$Y' \in \Sigma \Leftrightarrow AY' = B$, consideriamo $Y' - Y$

$A(Y' - Y) = AY' - AY = B - B = 0$

$\Rightarrow Y' - Y$ è soluzione di $AX = 0$

$\Rightarrow Y' - Y = Y_0 \in \Sigma_0 \Rightarrow Y = Y + Y_0 \quad Y_0 \in \Sigma_0$

$Y_0 \in \mathcal{E}_0 \Leftrightarrow A \cdot X_0 = 0$ e consideriamo $Y + Y_0$

$A(Y+Y_0) = AY + AY_0 = B + 0 = B \Rightarrow (Y+Y_0) \in \Sigma$

Esempio:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2z = -2 \\ y + x = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \Sigma_0 = \{(-2x_3, -x_3, x_3) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 2x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Sigma \{(-2-2x_3, -1-x_3, x_3)\}$$

$$\Sigma = \left\{ (-2,-1,0) + \underbrace{(-2x_3,-x_3,x_3)}_{\Sigma_0} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{ (-2,-1,0) + x_3(-2,-1,1) \}$$

teorema di Cramer

$AX = B$ sistema lineare, $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

Se A è invertibile allora $Ax = B$ ha un'unica soluzione

data $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ $\quad A_i$ è la matrice ottenuta da A sostituendo l'i-esima colonna con B

Dimostrazione $\quad Ax = B \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot B \qquad A^{-1} = A^* / \det A$

$\Rightarrow x = A^* B / \det A$

$$x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| (-1)^{i+j} b_j = \det A_i$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = \alpha^2 + \alpha - 2$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A_1 = 2 - 2\alpha - 2 + 2 = 2 - 2\alpha$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A_2 = 2 - \alpha^2 + \alpha + 2 = -\alpha^2 + \alpha = -\alpha(\alpha - 1)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A_3 = -\alpha - \alpha + 2 = -2\alpha + \alpha$$

$$x_1 = \frac{-2}{\alpha + 2} \qquad x_2 = \frac{-\alpha}{\alpha + 2} \qquad x_3 = \frac{-2}{\alpha + 2}$$