Serie

data $\{a_n\}$ successione con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$

Serie di termine generale a_n

Consideriamo
$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\dots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
$$\dots$$

somma parziale n-ma (di posto n) della serie

$\{s_n\}$ successione delle somme parziali

Definizione: carattere della serie è il comportamento e limite della successione $\{s_n\}$

- Se $s_n \to s \in \mathbb{R}$ si dice che la (1) converge ed ha SOMMA s
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$
- Se $s_n \to \pm\infty$ si dice che la (1) diverge
- Se $\{s_n\}$ oscilla // è indeterminata o non regolare

Esempi:

1. $a_n = K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=1}^{\infty} K \qquad s_n = Kn \to \begin{cases} 0 & \text{se } K = 0 \\ +\infty & \text{se } K > 0 \\ -\infty & \text{se } K < 0 \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} K$ conv $\Leftrightarrow K = 0$ e in tal caso la sua somma è 0

2. $a_n = (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \qquad s_n = -1 + 1 - 1 + 1 \dots = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$

la serie è indeterminata

3. Sia $\{x_n\}$ una succ. converg $x_n \to \ell$ e consideriamo la

la serie $\sum_{x=1}^{\infty} a_n$ dove $a_n = x_n - x_{n+1}$ serie telescopica

$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_2) + \dots$

$$s_n = x_1 - \cancel{x_2} + \cancel{x_2} - \cancel{x_3} + \cancel{\dots} + \cancel{x_n} - x_{n+1} = x_1 - \underset{\substack{\downarrow \\ \ell}}{x_{n+1}} \to x_1 - \ell$$

es: $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ $\quad a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - 0 =$$

4. Sia $x \in \mathbb{R}$ cons $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ $\quad a_n = x^{n-1}$ succ geometrica

Serie geometrica di ragione x $\quad 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \qquad (x \neq 1)$$

Ricordiamo
$x^n \to 0$ se $-1 < x < 1$
$x^n \to +\infty$ se $x > 1$
$\{x^n\}$ oscilla se $n \leq -1$

$-1 < x < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$x > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

$x \leq -1 \Rightarrow$ la serie è indet

$x = 1 \Rightarrow$ la serie diverge

In definitiva la serie geom conv $\Leftrightarrow -1 < x < 1$ e in tal caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

es: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

5. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ serie armonica

Sappiamo che $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e \Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < \log e = 1$

$\Rightarrow k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < 1 \Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$ Scrivendo queste disuguaglianze

per $k = 1, 2, \dots, n$ e sommando membro a membro si ottiene

$\log 2 + \log(1+\frac{1}{2}) + \dots + \log(1+\frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow$

$s_n > \log 2 + \log \frac{3}{2} + \dots + \log \frac{n+1}{n} = \cancel{\log 2} + \cancel{\log 3} - \cancel{\log 2} \cancel{+ \dots} + \log(n+1) - \cancel{\log n}$

cioè $\quad s_n > \log(n+1) \Rightarrow s_n \to +\infty$

$\log(n+1) \to +\infty$

$\Downarrow$

la serie armonica diverge

Proprietà delle serie

1) (Cond necessaria per la convergenza) Se la serie converge allora $a_n \to 0$

Osservazione: la condizione è solo necessaria, controesempio: la serie armonica

Allora se $\{a_n\}$ non tende a zero, la serie non converge

se $a_n \to 0$ potrebbe convergere

Dim: $s_n \to s \qquad a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$

$s_n \to s, \quad s_{n-1} \to s$

2 Sia $\sum a_n$ (1) una serie di cui è noto il carattere e sia $k \in \mathbb{R}$

consideriamo:

$\sum k a_n$ (2) Le somme parziali sono $S_n = k s_n$

$k = 0 \Rightarrow$ (2) conv ha somma $= 0$

$k \neq 0 \Rightarrow$ (2) ha lo stesso carattere della (1) e precisamente

$\sum a_n = s \Rightarrow \sum k a_n = ks$

$\sum a_n$ div positivamente (negativ) $\Rightarrow \sum k a_n$ diverge

con lo stesso segno se $k > 0$

con segno opposto se $k < 0$

es: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad (k = \frac{1}{2})$

3. Serie resto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad s_n \quad (1)$

$p \in \mathbb{N}$ cons. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} \quad S_n \quad (2)$ serie resto di posto p

$a_1 + a_2 + \dots + a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots \quad (1)$

$a_{p+1} + a_{p+2} + \dots \quad (2)$ ottenuta sopprimendo i primi p termini

$S_n = s_{n+p} - s_p$

$\{s_{n+p}\}$ ha lo stesso comportamento al limite e in caso di regolarità lo stesso limite di $\{s_n\}$

$s_n \to s \Rightarrow s_{n+p} \Rightarrow S_n \to s - s_p$

$S_n \to S \Rightarrow S_n + s_p \Rightarrow s_{n+p} \to S + s_p \Rightarrow S + s_p$

(in caso di divergenza vale anche)

dunque: una serie e tutti i suoi resti hanno lo stesso carattere (non la stessa somma)

es: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ (è il primo resto di $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

4. Due serie che differiscono per un numero finito di termini hanno lo stesso carattere

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} K \qquad a_n = b_n \quad \forall n > p \quad (p \in \mathbb{N})$

i resti di posto p coincidono $\Rightarrow$ le due serie hanno lo stesso carattere

5. date $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ cons $\sum a_n \ (1) \quad s_n$ regolare

$\sum b_n \ (2) \quad S_n$ //

$\sum a_n + b_n \ (3) \quad t_n$ serie somma

Se $s_n \to s$, $S_n \to S$ $\Rightarrow t_n = s + S$

Se $s_n \to \pm\infty$
$S_n \to S$ $\Rightarrow t_n \to \pm\infty$

Se entrambe divergono con lo stesso segno $\Rightarrow$ (3) div con lo stesso segno

Se entrambe divergono con segni diversi $\Rightarrow t_n$ è F.I. e va studiata a parte

es: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{n}\right)$ diverge positivamente

Serie a termini di segno costante

Basterà limitarsi al caso $a_n \geq 0 \ \forall n$ (se $a_n \leq 0$ basterà cons la serie degli opposti)

es: $\sum\left(-\frac{1}{n}\right)$ div negativamente

Prop: Una serie a termini non negativi è regolare:

Dim: $s_{n+1} = s_n + \underset{\geq 0}{a_{n+1}} \geq s_n \Rightarrow$ è crescente $\Rightarrow$ tende a sup a_n

$\Rightarrow \sum a_n$ conv se e solo se $\{s_n\}$ è limitata superiormente, in caso contrario diverge

osservazione: Se $a_n \geq 0 \ \forall n$ e a_n non tende a zero $\Rightarrow$ la serie diverge
se $a_n \to 0$ = la serie potrebbe convergere

es: $\sum \frac{n^2+1}{n+3}$ div

$\sum \frac{2n+1}{n+3}$ div

$\sum \frac{2n+1}{n^2+3}$ potrebbe convergere