

Ricerca dell'integrale particolare di un eq. completa con il termine noto di tipo "esponenziale per polinomio"

$$f(x) = e^{hx} \quad p(x) \quad h \in \mathbb{C} \quad p \text{ pol. di grado } n$$

es: $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}(x+1)$

Metodo di somiglianza

si cerca una sol. che ha la stessa forma del termine noto

$$\bar{y}(x) = e^{hx} x^s q(x) \quad q \text{ pol. di grado } n$$

s = molteplicità di h come sol.

dell'eq. caract. ($s=0$ se h non è sol.)

calcoliamo le derivate di \bar{y} e sostituendo nell'eq. si ottiene

$$e^{hx} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio}}}{\dots} \right) = e^{hx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio}}}{p(x)}$$

Basterebbe eguagliare queste 2 polinomi

es: $f(x) = e^{3x}(x^2 + 2x)$ 3 non è sol. dell'eq. $\Rightarrow s=0 \quad \bar{y} = e^{3x}(ax^2 + bx + c)$

$f(x) = e^{3x}(x^2 + 2x)$ 3 è sol. di mult. 1 $\Rightarrow s=1 \quad \bar{y}(x) = e^{3x}(ax^3 + bx^2 + cx)$

$f(x) = 2e^{3x}$ 3 sol. di mult. 2 $\Rightarrow s=2 \quad \bar{y}(x) = e^{3x} K x^2$

1. $y'' - 4y' + 3y = \frac{x}{e^x}$

eq. omog. $y'' - 4y' + 3y = 0$

eq. caract. $d^2 - 4d + 3 = 0 \quad d = 2 \pm 1 = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$ int. per omog.: $y(x) = h_1 e^{2x} + h_2 e^x$

$f(x) = x e^{-x} \quad m=1 \quad h=-1 \quad s=0$

cerco $\bar{y}(x) = e^{-x}(ex + b)$

$\bar{y}'(x) = e^{-x}(-ex - b + e)$

$\bar{y}''(x) = e^{-x}(ex + b + e - e)$

int. nel eq. $e^{-x}(ex + b + hex + 4b + 3ex + 3b) = \cancel{e^{-x}} x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 8e^x + 8b = x \Rightarrow \begin{cases} 8e = 1 \\ 8b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \frac{1}{8} \\ b = 0 \end{cases}$$

int fin $y(x) = \frac{1}{8} e^{3x} + h_1 e^x + \frac{1}{8} e^{-x}$

Se il termine noto è del tipo $\cos x = r(x)$ oppure $\sin x = r(x)$ con r polinomio possiamo usare lo stesso metodo ricordando che

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Risolviamo inoltre che se in un'eq lineare il termine noto è $f(x) = u(x) + i v(x)$

allora la funzione $y(x) = w(x) + i z(x)$ è sol dell'eq se e solo se w è sol dell'eq in cui il termine noto è $u(x)$

$$z \quad // \quad // \quad = \quad // \quad v(x)$$

allora ne possiamo risolvere $y'' - 3y' = \cos(x) + i \sin(x)$

risolviamo $y'' - 3y' = e^{-x}$ ed metodo di somiglianza e poi procediamo solo con la parte reale

$$y'' - 3y' = \cos x$$

eq om $y'' - 3y' = 0$

eq caract $\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \lambda = 0, \lambda = 3 \quad \text{int fin omg } y(x) = h_1 + h_2 e^{3x}$

Cerchiamo un int particolare di $y'' - 3y' = e^{-x}$ $m=0 \quad h=i \quad s=0$

cerco $\bar{y}(x) = h e^{2x}$

$$\bar{y}'(x) = h i e^{2x}$$

$$\bar{y}''(x) = -h e^{2x}$$

rest nell eq $e^{2x}(-h - 3hi) = e^{2x} = h(-1 - 7i) = 1 \Rightarrow h = -\frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}$

$$= -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$$

dunque $\bar{y}(x) = \left(-\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) (\cos x)$ la parte reale che è sol della 1 e $y(x) = \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$

$$y'' - 3y' = x \rightarrow \text{im} x$$

Cerchiamo un mt particolare di $y'' - 3y' = x e^{1x}$ $m=1$ $h=1$ $r=0$

$$\text{cerco } \bar{y}(x) = e^{2x}(ex + b)$$

$$\bar{y}'(x) = e^{2x}(e^x + 2ex + b)$$

$$\bar{y}''(x) = e^{2x}(-ex - b + 2e)$$

$$\text{test nell'eq } e^{2x}(-ex - b + 2e - 3e^x - 3b - 3e) = x e^{1x}$$

. . .

Se il termine noto è somma di due termini di questo tipo:

$$f(x) = (x+1)e^{2x} - e^2 e^x$$

si usa il principio di sovrapposizione: si trova un mt particolare

$$\text{di } \dots = (x+1)e^{2x}$$

$$\text{e } \dots = -x^2 e^x$$

e poi si sommano

Fine capitolo due