

$$\frac{1 - m^4}{m^3 + 2m + 1} \rightarrow -\infty$$

$$\log \frac{1}{3} \left( \frac{3m^2 + 1}{m^4 + 6} \right) \rightarrow +\infty$$

$$\frac{3m^2 + 2}{(4m + 1)^2} \rightarrow \frac{3}{16}$$

$$\frac{m^5 - 2m^2 - 3m^4 - 8}{2 - m^{10}} \rightarrow 0$$

$$\frac{3m^2 - 1}{m + 8} \rightarrow \cancel{2} \rightarrow +\infty$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e$$

$$\left(1 + \frac{1}{x_m}\right)^{x_m} \rightarrow e \quad \text{se } x_m \rightarrow +\infty$$

m particolare

$$\left(1 + \frac{d}{n}\right)^n \rightarrow e^d$$

$$\left(\frac{m^2 + 3m}{(m+2)^2}\right)^{4m+3} = \left(\frac{m^2 + 4m + 4 - m - 4}{m^2 + 4m + 4}\right)^{4m+3}$$

$$= \left(1 + \frac{-m-4}{m^2 + 4m + 4}\right)^{4m+3} =$$

$$\left[1 + \frac{1}{\frac{m^2 + 4m + 4}{-m-4}}\right] \left(\frac{(-m-4)(4m+3)}{m^2 + 4m + 4}\right)^{-4} \rightarrow e^{-4}$$

$$(n+1) \log \left( 1 + \frac{3}{n^2+1} \right) =$$

Let  $x_n \rightarrow 0$

$$\frac{\log(1+x_n)}{x_n} \rightarrow 1$$

$$\frac{x_n - 1}{x_n} \rightarrow 1$$

$$\frac{(1+x_n)^d - 1}{x_n} \rightarrow d$$

$$\frac{\log \left( 1 + \frac{3}{n^2+1} \right)}{\frac{3}{n^2+1}}$$

$$\frac{n(n+1)}{n^2+1} \rightarrow 1$$

$$\cos \frac{2n}{n^2+1} - 1$$

$$\frac{3}{n+2}$$

$$= \frac{\frac{3}{n+2}}{\frac{3}{n+2}}$$

$$\frac{1 - \cos \frac{2n}{n^2+1}}{6n^2}$$

$$\frac{(n^2+1)^2}{1/2}$$

$$\left( \frac{n+2}{3} \cdot \frac{6n^2}{(n^2+1)^2} \right)$$

$$\rightarrow -\frac{2}{3}$$

$$\frac{e^{\frac{2m-1}{m^2+4}} - 1}{1 - \cos \frac{1}{m+3}} = \frac{e^{\frac{2m-1}{m^2+4}} - 1}{\frac{2m-1}{m^2+4}} \cdot \frac{\frac{1}{(m+3)^2}}{1 - \cos \frac{1}{m+3}}$$

$$\frac{2m-1}{m^2+4} (m+3)^2$$

## Confronto fra infinitesimi e fra infiniti

$a_n \rightarrow 0$  "un infinitesimo"

$\{a_n\}, \{b_n\}$  due infinitesimi. Vogliamo sapere quale dei due tende a zero "più rapidamente"

se  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$  si dice che  $\{a_n\}$  è un inf di ordine superiore rispetto a  $b_n$

es:

$$\text{se } x_n \rightarrow 0 \quad \frac{1 - \cos x_n}{x_n} \rightarrow 0$$

se  $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \rightarrow l > 0$  si dice che sono dello stesso ordine

$$\text{es: se } x_n \rightarrow 0 \quad \frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow 1$$

$$\frac{1 - \cos x_n}{x_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$1 - \cos x_n$  è di ordine 2 rispetto a  $x_n$

$\frac{1}{n}$  infinitesimo fondamentale

ad es:

$1 - \cos \frac{1}{n}$  ha ordine 2 (rispetto all'infinitesimo fondamentale)

$$\frac{n^2 + 3n + 1}{n^4 + 6}$$

qual è il suo ordine di infinitesimo (rispetto a  $\frac{1}{n}$ .)

Criterio  $x \in \mathbb{R}$ :  $\frac{a_n}{\frac{1}{n^x}} \rightarrow l > 0 \iff n^x a_n \rightarrow l$

$$x = 2$$

infatti:

$$a_n n^2 = \frac{n^4 + \dots}{n^4 + 6} \rightarrow 1$$

una succ.  $a_n \rightarrow +\infty$  si dice "un infinito"

da  $\{a_n\}, \{b_n\}$  infinite

se  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \rightarrow l > 0$  sono dello stesso ordine

ad es:  $a_n = n^3 + 2n^2 + 3$

$$b_n = 2n^3 + n + 1$$

se  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \infty$   $\{a_n\}$  è di ordine superiore

## Succesione estratte

$\{e_n\}$  succ. data (funa. esterne)

$\{n_k\}_k$  succ. strett. cresc.  $n_k \in \mathbb{N} \forall k$  (funa. interne)

facendo la composizione si ottiene  $\{e_{n_k}\}_k$

succ. estratte mediante la legge di estrazione  $n_k$

es:  $n_k = 2k \quad \{e_{2k}\} = e_{21}, e_{22}, \dots$  estratti di posti pari

$n_k = 2k-1 \quad \{e_{2k-1}\} = e_{11}, e_{12}, \dots$  estratti di posti dispari

$n \in \mathbb{N} \quad n_k = n+k \rightarrow \{e_{n+k}\} = e_{n+1}, e_{n+2}, \dots$  estratte ottenute sopprimendo i primi termini

1)  $\{e_n\}$  converge se tutte le estratte sono convergenti ed hanno lo stesso limite  $\Rightarrow$  se due estratte hanno limiti diversi,  $\{e_n\}$  non è convergente

es  $e_n = (-1)^n \quad e_{2k} = 1, e_{2k-1} = -1$

2) se  $\{e_{n+k}\}$  è convergente  $\Rightarrow \{e_n\}$  è convergente ed ha lo stesso limite

3) se  $\{e_{2k}\}$  e  $\{e_{2k-1}\}$  hanno lo stesso limite  $\Rightarrow \{e_n\}$  ha lo stesso limite

Conoscenza: Sia  $\{e_n\}$  convergente, con  $(-1)^n e_n$

se  $e_n \rightarrow 0 \Rightarrow b_n \rightarrow 0$  e viceversa

se  $e_n \rightarrow l \neq 0$  opp.  $\pm \infty \Rightarrow b_n$  oscilla

$$\text{es: } a_n = \frac{n+1}{n^3+4} \rightarrow 0$$

$$(-1)^n \frac{n+1}{n^3+4}$$

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+4} \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$(-1)^n a_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{3n+4} \rightarrow \frac{2}{3} \\ -\frac{2n+1}{3n+4} \rightarrow -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$a_n = n^2+3 \rightarrow +\infty$$

$$(-1)^n a_n = \begin{cases} n^2+3 \rightarrow +\infty \\ -n^2-3 \rightarrow -\infty \end{cases}$$

oscill.

Supernomi definite per ricorrenze

$f$  funz elementare

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

- si studia la monotonie

- se  $\{a_n\}$  e crescente tendere al proprio

supr. se  $\sup a_n = l$

$$a_n \rightarrow l \rightarrow a_{n+1} \rightarrow l \text{ me } a_{n+1} = f(a_n) \rightarrow f(l)$$

unicat del limite  $\Rightarrow f(l) = l$

- si risolve l'eq  $x = f(x)$ . Se si trova una sol che pare essere il  $\sup a_n$  allora  $l = x$ , altrimenti  $a_n \rightarrow +\infty$

$$\text{es: } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases} \quad a_2 = \sqrt{3}, a_3 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$a_1 < a_2 \quad \text{Per caso } a_n < a_{n+1} \quad \forall n?$$

$$a_n < \sqrt{2+a_n} \Rightarrow a_n^2 < a_{n+1}$$

$$\text{risolvo la disuguaglianza } x^2 - x - 2 < 0 \quad \frac{1 \pm 3}{2} < -1$$

$$-1 < a_n < 2 \quad \forall n?$$

Devo controllare se  $a_n < 2 \quad \forall n$  per induzione

$$a_n < 2 \quad \text{vero}$$

$$\text{se } a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2? \quad \sqrt{2+a_n} < 2 \Leftrightarrow 2+a_n < 4$$

$$\Leftrightarrow a_n < 2$$

$$\text{allora } a_n \rightarrow \sup a_n \quad \text{Supp che } \sup a_n = 2$$

$$a_n \rightarrow l \Rightarrow a_{n+1} \rightarrow l$$

$$\parallel$$

$$\sqrt{2+a_n} \rightarrow \sqrt{2+l} \Rightarrow l = \sqrt{2+l} \Rightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Rightarrow l = -1 \vee l = 2$$

$$\text{sufficiente per che } a_n < 2 \quad \forall n \Rightarrow 2 = \sup a_n = \lim a_n$$

### CAPITOLO 3: Limiti di funzione