24 marzo 2025

lunedì 24 marzo 2025 13:03

$(a,b) \to a+ib$ $\qquad$ $i=(0,1)$ $\qquad$ $i^2=(-1,0)=-1$

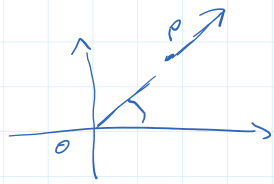
$z=(a,b)$ $\quad$ $\bar{z}=(a,-b)$ $\quad$ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$z\bar{z} = |z|^2$

$$\frac{2-3i}{2+i} = \frac{(2-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$= \frac{4-3+(-6-2)i}{2^2+1^2} = \frac{1}{5}-\frac{8}{5}i$$

$z=a+ib=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $\qquad$ $\alpha=\arg z$



$a=|z|\cos\alpha$

$b=|z|\sin\alpha$

es. $z=2+7i$ $\qquad$ $|z|=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$ $\qquad$ $\cos\alpha=\frac{a}{|z|}=\frac{2}{\sqrt{53}}$

$\sin\alpha=\frac{7}{\sqrt{53}}$

$\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{53}}$

$z=1-i$ $\qquad$ $|z|=\sqrt{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

$\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha) \Rightarrow z^n=|z|^n(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha))$ $\quad \forall n\in\mathbb{Z}$

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $\qquad$ $k=0;1;\dots;n-1$

$\sqrt{z}=\pm\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ $\qquad$ $\sqrt{-16}=\pm4i$

$ax^2+bx+c=0$ $\qquad$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ se $\Delta<0$ $\quad$ $\pm\sqrt{\Delta}=\pm i\sqrt{-\Delta}$

es. $z^2+z+4=0$ $\qquad$ $\Delta=-15$ $\qquad$ $z=\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{2}=\begin{cases}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2}\\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2}\end{cases}$ coniug.

Esercizi sui numeri complessi

1. $iz^2+2z-2i=0$ $\qquad$ $z=\frac{-1\pm\sqrt{1-2}}{i}=\frac{-1\pm i}{i}=-\frac{1}{i}\pm\frac{i}{i}=i\pm1$

non sono coniug.

(2) $z^2 - 2iz + 4 = 0$ $\qquad z = -i \pm \sqrt{-1-4} = -i \pm i\sqrt{5} = \begin{cases} i(-1+\sqrt{5}) \\ i(-1-\sqrt{5}) \end{cases}$

non sono coniug.

(3) $\bar{z}^2 - 2z + 3 = 0$ $\qquad z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

$(x-iy)^2 - 2(x+iy) + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 2ixy - 2x - 2iy + 3 = 0$

$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0 \\ -2xy - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0 \\ -2y(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} (1) \qquad \begin{cases} 1 - y^2 + 2 + 3 = 0 \\ x = -1 \end{cases} (2)$

(1) ness. sol. ($\Delta < 0$ e si vuole che $x \in \mathbb{R}$)

(2) $\begin{cases} y = \pm\sqrt{6} \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = -1 + \sqrt{6}\, i \\ z = -1 - \sqrt{6}\, i \end{matrix}$

(4) $z^2 - 2|z|^2 + 3z = 0$

I modo $\quad z = x+iy$, $\quad |z|^2 = x^2 + y^2$ $\qquad (x+iy)^2 - 2(x^2+y^2) + 3(x+iy) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy - 2x^2 - 2y^2 + 3x + 3iy = 0$

$\begin{cases} -x^2 - 3y^2 + 3x = 0 \\ 2xy + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 3x = 0 \\ y(2x+3) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} z = 0 \\ z = 3 \end{matrix}$ sol.

$\begin{cases} \frac{9}{4} + 3y^2 + \frac{9}{2} = 0 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -\frac{27}{12} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$ NESS. SOL.

II modo $\quad z^2 - 2z\bar{z} + 3z = 0 \Rightarrow z(z - 2\bar{z} + 3) = 0 = \begin{cases} z = 0 & \text{SOL} \\ z - 2\bar{z} + 3 = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$x + iy - 2(x - iy) + 3 = 0$

$\Downarrow$

$x + iy - 2x + 2iy + 3 = 0$

$\begin{cases} -x + 3 = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 3$

(5) $|z|^2 - 2\bar{z}^2 + 3\bar{z} = 0$ $\qquad$ I modo $z = x - iy$ (per eserc)

II modo $\quad z\bar{z} - 2\bar{z}^2 + 3\bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{z}(z - 2\bar{z} + 3) = 0 \Rightarrow \bar{z} = 0 \Rightarrow z = 0$

$z - 2\bar{z} + 3 = 0 \Rightarrow z = 3$

(6) $i\bar{z} - 2 = \frac{2}{z}$ $\qquad z \neq 0$

$iz\bar{z} - 2z - 2 = 0$ $\qquad z = x + iy \Rightarrow (z\bar{z} = |z|^2)$

$i(x^2+y^2) - 2(x+iy) - 2 = 0$

$iz\bar{z} - 2z - 2 = 0$ $\qquad z = x + iy \Rightarrow \left(z\bar{z} = |z|^2 \right)$

$i(x^2+y^2) - 2(x+iy) - 2 = 0$

$ix^2 + iy^2 - 2x - 2iy - 2 = 0$

$$\begin{cases} -2x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 1 \end{matrix}$$

$z = 1 + i$

7) $z^2 + 1 = \frac{\bar{z}}{i} \Rightarrow iz^2 - \bar{z} + i = 0 \qquad z = x + iy$

$i(x^2 - y^2 + 2ixy) - (x - iy) + i = 0$

$ix^2 - iy^2 - 2xy - x + iy + i = 0$

$$\begin{cases} -2xy - x = 0 \\ x^2 - y^2 + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(2y+1) = 0 \\ x^2 - y^2 + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0 \end{cases}$$

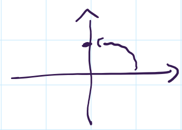
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 = -\frac{1}{4} \end{cases} /$$

$z = \frac{1+\sqrt{5}}{2} i, \quad z = \frac{1-\sqrt{5}}{2} i$

$\sqrt[4]{i}$

$z = i \qquad |z| = 1 \qquad \arg z = \frac{\pi}{2}$



$\sqrt[4]{i} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{4} = w_k \qquad i = 0, 1, 2, 3$

$w_0 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ — — —

$\sqrt[3]{27}$

$z = 27 \qquad |z| = 27 \qquad \arg z = 0$

$w_k = 3\left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right) \qquad k = 0, 1, 2$

$w_0 = 3 \qquad w_1 = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \qquad w_2 = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \qquad w_2 = \bar{w}_1$

$\sqrt[3]{8i}$

$|z| = 8 \qquad \arg z = \frac{\pi}{2}$

$w_k = 2\left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \text{———} \right) \qquad k = 0, 1, 2$

$w_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \qquad w_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \qquad w_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \bar{w}_1$

Polinomi: decomposizione

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \qquad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}_0$

$n = 0 \qquad p(x)$ cost.

$p(x) = a_0 x^n + \dots + a_n \qquad p(x) = q(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \iff n = m$
$q(x) = b_0 x^m + \dots + b_m \qquad\qquad a_0 = b_0$
$\dots$
$a_n = b_n$

def $A(x), B(x)$ polinomi $\exists \; Q(x)$ e $R(x)$ con grado $R <$ grado B !
$A(x) = Q(x)\, B(x) + R(x)$

se $R(x) = 0$ A divisibile per B

teor. di RUFFINI $\quad A$ è divis. per $x - c \iff A(c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ se $A(c_1) = 0 \qquad A(x) = (x - c_1)\, A_1(x) \qquad$ gr $A_1 =$ gr $A - 1$

se $A_1(c_2) = 0 \qquad A(x) = (x - c_1)(x - c_2)\, A_2(x) \qquad$ gr $A_2 =$ gr $A - 2$

procedendo allo stesso modo si trova
$A(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)\, k \qquad$ eguagliando i due membri si ha $k = a_0$

Ogni equazione algebrica di grado positivo n ammette n sol. reali o complesse, distinte o coincidenti
se $c_1 = c_2 = \dots = c_s$ si dice che c_1 ha molteplicità s
(TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)

Se l'eq. è a coefficienti reali, se c'è una sol. immag. $z = a + ib$,

allora anche $\bar{z} = a - ib$ è sol. con la stessa molteplicità

dunque se $A(x)$ è un pl. a coeff reali

$A(x) = a_0 (x - c_1)^{s_1} (x - c_2)^{s_2} \cdots (x - c_k)^{s_k} \qquad s_1 + s_2 + \dots + s_k = n$

se $c_1, \dots, c_k$ sono reali abbiamo finito

se $c_1 = a + ib$ allora ci sarà anche $c_2 = a - ib$

$(x - c_1)(x - c_2) = [x - (a + ib)][x - (a - ib)] = [(x - a) - ib][(x - a) + ib] =$
$= (x - a)^2 + b^2$ che è a coeff. reali

$\Rightarrow$ un pl. a coeff. reali si può sempre decomporre nel prodotto di fattori di I e II grado a coeff. reali.

Funz. esponenziale nel campo complesso

$z = x + iy$ DEF. $e^{z} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$

(se $z = x$ si ritrova e^{x})

$z = iy$ $(x=0)$ $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ OSSERV. se $y = \pi$ $e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0 \Rightarrow \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$

$\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ $\sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$ FORMULE DI EULERO

SUCCESSIONI REALI

DEF. successione è una funzione definita in $\mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N} \to f(n) = a_n \in \mathbb{R}$

si fa coincidere la successione con la sua immagine $\{a_n\}$

$(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$

es. $a_n = k$ $(k \in \mathbb{R})$ costante

$a_n = n$

$a_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+2}$

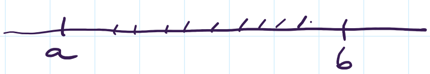
$a_n = \dfrac{1}{n}$

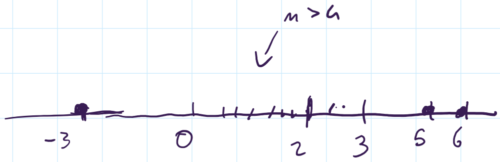
$a_n = (-1)^n \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ disp.} \end{cases}$

Una proprietà P è verificata DEFINITIVAMENTE (D) se $\exists\, \alpha \in \mathbb{N}$: se $n > \alpha$ l'elemento a_n verifica P

es. $a_n = n - 6$ D $a_n \geq 0$ $(\alpha = 6)$

DEF. $\{a_n\}$ LIMITATA se $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq a_n \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$





$a_1 = -3$

$a_2 = 2$

$a_3 = 5$

$a_4 = 6$

$0 \leq a_n \leq 3$ $\forall n > 4$

Possiamo dire che

$-3 \leq a_n \leq 6$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_2 = 2$
$a_3 = 5$
$a_4 = 6$

Possiamo dire che $-3 \le a_n \le 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

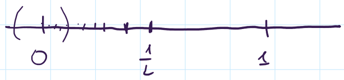
$\{a_n\}$ è D limitata e abbiamo capito che è limitata

PROP. $\{a_n\}$ D limitata $\Rightarrow$ limitata

$a \le a_n \le b \quad \forall n > \alpha$ cons. $h = \min(a, a_1, a_2, \dots, a_\alpha)$
$k = \max(b, a_1, a_2, \dots, a_\alpha)$

Si ha $h \le a_n \le k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$a_n = \frac{1}{n}$



$\frac{1}{n} < r$ se $n > \frac{1}{r}$

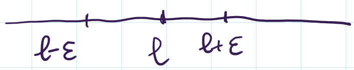
Limite di una successione

$\{a_n\}$ $\quad l \in \mathbb{R}$ DEF. l è il limite di $\{a_n\}$ o che $\{a_n\}$ tende o converge ad l e si scrive $a_n \to l$
opp. $\lim a_n = l$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in \mathbb{N}$: se $n > \alpha$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \iff l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$



es. $a_n = k \quad \forall n \Rightarrow a_n \to k \qquad k - \varepsilon < \underset{\overset{\shortparallel}{k}}{a_n} < k + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0 \qquad -\varepsilon < a_n < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ vera D

$a_n = \frac{2n}{n+1} \to 2$ DIM. $2 - \varepsilon < \frac{2n}{n+1} < 2 + \varepsilon$ D

$$\begin{cases} \frac{2n}{n+1} > 2-\varepsilon \\ \frac{2n}{n+1} < 2+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2n}{n+1} - 2 + \varepsilon > 0 \\ \frac{2n}{n+1} - 2 - \varepsilon < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\cancel{2n} - \cancel{2n} - 2 + \varepsilon n + \varepsilon}{n+1} > 0 \\ \frac{\cancel{2n} - \cancel{2n} - 2 - \varepsilon n - \varepsilon}{n+1} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon n > 2 - \varepsilon \Rightarrow n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \text{ vera D} \\ \varepsilon n > -2 - \varepsilon \text{ vera } \forall n \end{cases}$$

DEF. $a_n \to +\infty \ (-\infty)$ $\quad \{a_n\}$ tende o diverge a $+\infty$ $(-\infty)$ se

$\forall k > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{N}$: se $n > \alpha$ si ha $a_n > k \quad (a_n < -k)$

es. $1-n^2 \to -\infty$ infatti $1-n^2<-k \Rightarrow n^2>k+1 \Rightarrow n>\sqrt{k+1}$
vera D

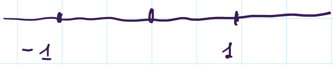
$\frac{n^2}{n+1} \to +\infty$ infatti $\frac{n^2}{n+1}>k \Rightarrow n^2-kn-1>0$

cons. $x^2-kx-1>0$ $\quad \frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$ $\quad x>\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \vee x<\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$

se $n>\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ la tesi è verificata

DEF. $\{a_n\}$ REGOLARE se è convergente o divergente

$\{a_n\}$ OSCILLANTE se è non regolare es. $a_n=(-1)^n$

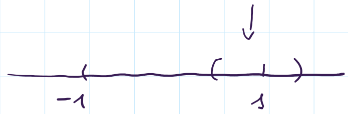


$a_n>k$ D ? NO

$a_n<-k$ D ? NO

$l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$ D ? potrebbe essere $l=1$
opp. $l=-1$

Se $l=1$



$\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}<a_n<\frac{3}{2}$ D impossibile
perché per n disp. $a_n=-1$

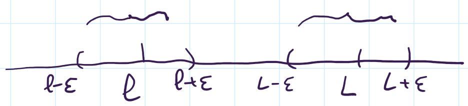
Se $l=-1$ analog.

altri esempi $a_n=\sin n$, $a_n=\cos n$, $a_n=\lg n$

Teorema dell'unicità del limite

Se $\{a_n\}$ è regolare, il suo limite è unico

DIM. p.a. $a_n\to l$, $a_n\to L$ con $l<L$



Scegliamo $\varepsilon>0$: $l+\varepsilon<L-\varepsilon$
$0<\varepsilon<\frac{L-l}{2}$

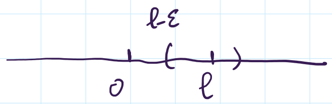
D $\quad l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon \quad (n>\alpha)$

D $\quad L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon \quad (n>\beta)$

Se $n>\max(\alpha,\beta)$ $\quad l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon<L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$ assurdo

Teorema della permanenza del segno

Se $a_n\to l>0$ opp. $a_n\to+\infty \Rightarrow a_n>0$ D se $a_n \to \ell < 0$ opp. $a_n \to -\infty$ $\Rightarrow$ $a_n < 0$ D



scelgo $\varepsilon > 0$: $\ell - \varepsilon > 0$, D $0 < \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

Ne segue che se $a_n > 0 \ \forall n$ $\Rightarrow$ non può tendere a $\ell < 0$ né a $-\infty$
può tendere a zero, a $\ell > 0$, a $+\infty$

Teorema della perm. del segno generalizzato: se $a_n \to \ell$,
- se $\ell < k$ $\Rightarrow$ D $a_n < k$
- se $\ell > h$ $\Rightarrow$ D $a_n > h$

Teoremi di confronto

1 - per succ. divergenti:
2 - " convergenti:

1. se $a_n \le b_n$ $\forall n$ D allora: i) se $a_n \to +\infty$ $\Rightarrow$ anche $b_n \to +\infty$
ii) se $b_n \to -\infty$ $\Rightarrow$ " $a_n \to -\infty$

infatti: i) D $a_n > k$ $\Rightarrow$ $b_n \ge a_n > k$
ii) D $b_n < -k$ $\Rightarrow$ $a_n \le b_n < -k$

2. se $a_n \le b_n \le c_n$ $\forall n$ D, $a_n \to \ell$, $c_n \to \ell$. Allora anche $b_n \to \ell$
(teorema dei carabinieri)

infatti: D $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ $(n > \alpha)$
D $\ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$ $(n > \beta)$

se $n > \max(\alpha, \beta)$ $\ell - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < \ell + \varepsilon$