14	maggio	tutorato	16 - 19
19	maggio	no lezione	
21	maggio	lezione prof 2	
26	maggio	lezione	
28	maggio	lezione	
4	giugno	lezione	

Se un termine non contiene β-redex è detto forma normale

Esempio:

$\lambda x y. y$

Un termine è detto essere una forma normale

Definizione

Un termine M si dice normalizzabile oppure ha una forma normale debolmente normalizzata

Se esiste un termine Q in forma normale tale che

$M \twoheadrightarrow Q$

Un termine M è fortemente normalizzabile se non esiste una riduzione infinita che parte da M. Ossia che ogni possibile sequenza di β-riduzioni portano eventualmente ad una forma normale

Esempio

$(\lambda x. y)((\lambda z. z)t)$ non è in forma normale, è normalizzabile e fortemente normalizzabile

Le due possibili riduzioni

1. $(\lambda x. y)((\lambda z. z)t) \to y$
2. $(\lambda x. y)((\lambda z. z)t) \to ((\lambda x. y)t)$

Normalizzare un termine significa applicare una riduzione fino alla forma normale

Esempio

$(\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ non forma normale $\to \Omega\ \Omega$

$\hookrightarrow \Omega$

Se M ha una forma normale e ammette una sequenza infinita di riduzioni, esso contiene un sottotermine L che non ha forma normale ed L può essere cancellato da alcune riduzioni

La riduzione $(\lambda y. a)\Omega \to a$

Questa corrisponde alla strategia di riduzione chiamata call - by - name

- Argomento non ridotto

$(\lambda y. a)\Omega \to (\lambda y. a)\Omega \dots \to$

- valutare l'argomento prima di sostituirlo nel corpo della funzione $\to$ applichiamo una strategia chiamata call - by - value

Strategia di riduzione   policy

Una strategia di riduzione è "una scelta" di scegliere una β - redex

Call by value: Sono tutte le strategie che non riducono un redex quando l'argomento non è un valore

Consideriamo come valore un termine in forma normale
In scheme anche una funzione è considerata un valore
l'espressione $\lambda x. M$ in scheme è un valore

Se noi consideriamo questa espressione

$$(\lambda x. x)(\lambda z. (\lambda x. x)\, x)$$

- Prima riduco il grande redex (il termine completo)
- Poi il processo si ferma :

$$(\lambda z. ((\lambda x. x)\, x)$$ perchè è un valore

e quindi non può essere più valutato

call by name : Queste sono strategie che riducono un redex senza fare check se il suo argomento è un valore o no

Un esempio sono le lazy strategies

Generalmente nei linguaggi di prog una strategia lazy se è "call by name" e riduce un redex questo lo fa solo se necessario per ottenere il valore finale

(call-by-need strategies)

Teorema di standardizzazione

Se un termine ha forma normale esso è sempre ottenuto applicando la strategia della riduzione di ordine normale

Teorema di confluenza

Se abbiamo i termini M, M_1, M_2 tale che:

$M \twoheadrightarrow M_1$ e $M \twoheadrightarrow M_2$

Allora $\exists$ sempre un termine L tale che:

$M_1 \twoheadrightarrow L$ e $M_2 \twoheadrightarrow L$

In diagramma scriveremo

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\ M_1 \arrow[dr, two heads] & & M_2 \arrow[dl, two heads] \\ & L & \end{tikzcd}$$

Corollario unicità forma normale

Se un termine ha una forma normale essa è unica

Dimostrazione

Supponiamo di un termine generico M e supponiamo che esso ha due forme normali N e N'

Quindi $M \twoheadrightarrow N$

$M \twoheadrightarrow N'$

Applichiamo il teorema di confluenza

Allora esiste un termine Q tale che $N \twoheadrightarrow Q$

$N' \twoheadrightarrow Q$

Ma N e N' sono in forma normale

$\Rightarrow$ esse non sono redex

Quindi è necessario che $N \twoheadrightarrow Q$ in 0 step $N \equiv Q$

Osservazione

$N' \twoheadrightarrow Q$ in 0 step $N' \equiv Q$

$\Downarrow$

$N' \equiv N$

Questo Corollario ci permette di dire che se implementiamo lo stesso algoritmo in scheme o Haskell, la funzione che otteniamo ci da lo stesso risultato anche se i due linguaggi usano diverse strategie di valutazione.

β - conversione

sui λ - termini è definita con $M =_\beta N$ e diciamo che 2 termini sono β - convertibili quando rappresentano la stessa informazione

Definizione

Un punto fisso di una funzione $f: D \to D$ è un elemento $d \in D$ tale che $f(d) = d$

la nozione di punto fisso può essere rappresentata tramite il termine $\underbrace{\lambda f.(\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))}$

$\Downarrow$

Y

come esempio per il concetto di punto fisso

$\forall$ termine M abbiamo

$$M(YM) =_\beta YM$$

con M una funzione alla quale posso applicare termine YM è un termine di punto fisso di M

La deduzione naturale

il sistema formale visto precedentemente è un sistema assiomatico detto sistema alla Hilbert

Diciamo sistema assiomatico perché contiene un certo numero di assiomi ed un certo numero ristretto di regole di inferenza (modus ponens)

Possiamo rappresentare tramite albero il nostro sistema

1. $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$ A_K
2. α ipotesi
3. $\neg\beta \to \alpha$ MP(1,2)
4. $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ A_K
5. $\neg\alpha$ ipotesi
6. $\neg\beta \to \neg\alpha$ MP(4,5)

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to (\neg\beta \to \alpha)}{\neg\beta \to \alpha}$$

$$\frac{\neg\alpha \qquad \neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)}{\neg\beta \to \neg\alpha}$$

Esistono dei sistemi formali utilizzati per la logica proposizionale equivalenti a quello di Hilbert

Uno di questi è il sistema della logica proposizionale in deduzione naturale ([AA],[A∪])

In questo sistema formale l'insieme degli assiomi è vuoto e ci sono solo regole di inferenza

Utilizziamo la struttura ad albero

Nel sistema formale della logica proposizionale in deduzione naturale che "$\Gamma \vdash P$" cioè la formula P è derivabile dall'insieme delle ipotesi Γ"
quando è possibile costruire un'albero di derivazione di P da Γ

Il sistema di deduzione naturale per la logica proposizionale possiede regole di inferenza per i connettivi logici quali la congiunzione e disgiunzione

Regole di deduzione naturale proposizionale

Introduzione ed eliminazione della congiunzione

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \wedge I \qquad \frac{P \wedge Q}{P} \wedge E \qquad \frac{P \wedge Q}{Q} \wedge E$$

Introduzione della disgiunzione

$$\frac{P}{P \vee Q} \vee I \qquad \frac{Q}{P \vee Q} \vee I$$