$$\frac{1-n^4}{n^3+2n+1} \to -\infty \qquad \frac{3n^2+2}{(4n+1)^2} \to \frac{3}{16} \qquad \frac{n^5-2n^2-3n^4-8}{2-n^{10}} \to 0$$

$$2^{\overbrace{\frac{3n^2-1}{n+8}}^{\to +\infty}} \to \cancel{2^{\infty}} \to +\infty \qquad \log_{\frac{1}{3}} \overbrace{\frac{3n^2+1}{n^4+6}}^{\to 0} \to +\infty$$

$\boxed{1^\infty}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e \quad \text{se } x_n \to \infty \qquad \text{in partic. } \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha$$

$$\left(\frac{n^2+3n}{(n+2)^2}\right)^{4n+3} = \left(\frac{n^2+4n+4-n-4}{n^2+4n+4}\right)^{4n+3} = \left(1+\frac{-n-4}{n^2+4n+4}\right)^{4n+3} =$$

$$= \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+4n+4}{-n-4}}\right)^{\frac{n^2+4n+4}{-n-4}}\right]}_{\to e}^{\overbrace{\frac{(-n-4)(4n+3)}{n^2+4n+4}}^{\to -4}} \to e^{-4}$$

se $x_n \to 0$

$$\frac{\log(1+x_n)}{x_n} \to 1 \qquad \frac{e^{x_n}-1}{x_n} \to 1 \qquad \frac{(1+x_n)^\alpha-1}{x_n} \to \alpha$$

$$(n+1)\log\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)}{\frac{n}{n^2+1}}}_{1} \; \underbrace{\frac{n(n+1)}{n^2+1}}_{1} \to 1$$

se $x_n \to 0$

$$\frac{\sin x_n}{x_n} \to 1 \qquad \frac{\arcsin x_n}{x_n} \to 1$$

$$\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} \to 1 \qquad \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} \to 1$$

$$\frac{1-\cos x_n}{x_n^2} \to \frac{1}{2}$$

$$\frac{\cos\frac{2n}{n^2+1}-1}{\log\frac{3}{n^2+2}} =$$

$$= -\frac{\frac{3}{n^2+2}}{[illegible]} \; \frac{1-\cos\frac{2n}{n^2+1}}{[illegible]} \left(\frac{n^2+2}{3}\,\frac{4n^2}{(n^2+1)^2}\right) \to -\frac{2}{3}$$

$$= \underbrace{\frac{\frac{3}{m^2+2}}{\mathrm{tg}\,\frac{3}{m^2+2}}}_{\to 1} \; \underbrace{\frac{1-\cos\frac{2m}{m^2+1}}{\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}}}_{\to \frac{1}{2}} \left(\underbrace{\frac{m^2+2}{3}\,\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}}_{\to \frac{4}{3}} \right) \to -\frac{2}{3}$$

$$\frac{e^{\frac{2m-1}{m^3+4}}-1}{1-\cos\frac{1}{m+3}} = \underbrace{\frac{e^{\frac{2m-1}{m^3+4}}-1}{\frac{2m-1}{m^3+4}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{(m+3)^2}}{1-\cos\frac{1}{m+3}}}_{\to 2} \left(\underbrace{\frac{2m-1}{m^3+4}\,(m+3)^2}_{\to 2} \right) \to 4$$

Confronto fra infinitesimi e fra infiniti

$a_n \to 0$ "un infinitesimo"

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due infinitesimi. Vogliamo sapere quale dei due tende a zero "più rapidamente"

se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ si dice che $\{a_n\}$ è un infin. di ordine superiore rispetto a b_n

es. se $x_n \to 0$ $\quad \frac{1-\cos x_n}{x_n} \to 0$

se $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to l > 0$ si dice che sono dello stesso ordine

es. se $x_n \to 0$ $\quad \frac{\sin x_n}{x_n} \to 1$

$\frac{1-\cos x_n}{x_n^2} \to \frac{1}{2}$ $\quad 1-\cos x_n$ è di ord. 2 risp. a x_n

x_n

$\frac{1}{n}$ infinitesimo fondamentale

ad es. $1 - \cos\frac{1}{n}$ ha ordine 2 (risp. all' infinitesimo fondam.)

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{n^4 + 6}$$

qual è il suo ordine di infinitesimo? (rispetto a $\frac{1}{n}$)

cercare $x \in \mathbb{R}$: $\frac{a_n}{\frac{1}{n^x}} \to \ell > 0 \iff n^x a_n \to \ell$ $\quad x = 2$

infatti $a_n n^2 = \frac{n^4 + \dots}{n^4 + 6} \to 1$

una succ. $a_n \to \infty$ si dice "un infinito"

dati $\{a_n\}, \{b_n\}$ infiniti

se $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to \ell > 0$ sono dello stesso ordine

ad es. $a_n = n^3 + 2n^2 + 3 \qquad b_n = 2n^3 + n + 1$

se $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ $\{a_n\}$ è di ordine superiore.

Successioni estratte

$\{a_n\}_n$ succ. data (funz. esterna)

$\{n_k\}_k$ succ. strett. cresc., $n_k \in \mathbb{N} \; \forall n$ (" interna)

facendo la composizione si ottiene $\{a_{n_k}\}_k$ succ. estratta mediante la legge di estrazione n_k

es. $n_k = 2k \qquad \{a_{2k}\} = a_2 ; a_4 ; \dots$ estratta di posto pari

$n_k = 2k-1 \qquad \{a_{2k-1}\} = a_1 ; a_3 ; \dots$ " dispari se $a_n = (-1)^n$ $\quad a_{2k} = 1 \ \forall k, \quad a_{2k-1} = -1 \ \forall k$

$p \in \mathbb{N}$ $\quad n_k = p+k \quad \{a_{p+k}\} = a_{p+1}; a_{p+2}; \dots$ estratta ottenuta sopprimendo i primi p termini

Risultati:

1) $\{a_n\}$ regolare $\Rightarrow$ tutte le estratte sono regolari ed hanno lo stesso limite

$\Rightarrow$ se due estratte hanno limiti diversi, $\{a_n\}$ non è regolare

es. $a_n = (-1)^n \qquad a_{2k} = 1, \quad a_{2k-1} = -1$

2) se $\{a_{n+p}\}$ è regolare $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ è reg. ed ha lo stesso limite

3) se $\{a_{2k}\}$ e $\{a_{2k-1}\}$ hanno lo stesso limite $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ ha tale limite.

Osservazione. Sia $\{a_n\}$ regolare, cons. $b_n = (-1)^n a_n$

se $a_n \to 0 \Rightarrow b_n \to 0$ e viceversa

se $a_n \to l \neq 0$ opp. $\pm\infty$ $\Rightarrow$ b_n oscilla

es. $a_n = \dfrac{n+1}{n^3+4} \to 0 \qquad (-1)^n \dfrac{n+1}{n^3+4} \to 0$

$a_n = \dfrac{2n+1}{3n+4} \to \dfrac{2}{3} \qquad (-1)^n a_n = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{3n+4} \to \dfrac{2}{3} & n \text{ p.} \\ -\dfrac{2n+1}{3n+4} \to -\dfrac{2}{3} & n \text{ d.} \end{cases}$ oscill.

$a_n = n^2+3 \to +\infty \qquad (-1)^n a_n = \begin{cases} n^2+3 \to +\infty & n \text{ p.} \\ -n^2-3 \to -\infty & n \text{ d.} \end{cases}$ oscill.

Succ. definite per ricorrenza

f funz. elementare $\qquad \begin{cases} a_1 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$

- si studia la monotonia (per induzione, ad es.)

$\Rightarrow$ se $\{a_n\}$ è cresc. tenderà al limite sup.

- si studia la monotonia (per induzione, ad es.)

$\Rightarrow$ e $\{a_n\}$ è cresc. tenderà al proprio sup.

se $\sup a_n = \ell$

$a_n \to \ell \Rightarrow a_{n+1} \to \ell$ ma $a_{n+1} = f(a_n) \to f(\ell)$

unicità del limite $\Rightarrow f(\ell) = \ell$

- si risolve l'eq. $x = f(x)$. Se si trova una sol. che possa essere il $\sup a_n$ allora $\lim = \ell$, altrimenti $a_n \to +\infty$

es. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$ $a_2 = \sqrt{3}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, ...

$a_1 < a_2$. Per caso $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$?

$a_n < \sqrt{2+a_n} \Rightarrow a_n^2 < a_n + 2$

risolv. la diseq. $x^2 - x - 2 < 0$ $\quad \frac{1 \pm 3}{2}$ $\begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{array}$ $\quad -1 < a_n < 2$ $\forall n$?

devo controllare se $a_n < 2$ $\forall n$ per induz.

$a_1 < 2$ vero

se $a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$? $\quad \sqrt{2+a_n} < 2 \iff 2 + a_n < 4 \iff a_n < 2$ vero

allora $a_n \to \sup a_n$. Supp. che $\sup a_n = \ell$ $\in \mathbb{R}$

$a_n \to \ell \Rightarrow \underset{\sqrt{2+a_n}}{\overset{\shortparallel}{a_{n+1}}} \to \ell$, $\sqrt{2+a_n} \to \sqrt{2+\ell}$ $\Rightarrow \ell = \sqrt{2+\ell} \Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\ell = -1} \vee \ell = 2$

sappiamo già che $a_n < 2$ $\forall n \Rightarrow 2 = \sup a_n = \lim a_n$

Limiti di funzioni