4 novembre 2025_AL

martedì 4 novembre 2025 08:00

EQ. OMOG. A COEFF. COSTANTI $\quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$

$y(x) = e^{\alpha x} \quad \alpha \in \mathbb{C}$ è sol $\iff \alpha$ è sol di

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

sol $\alpha \in \mathbb{R}$ di molt. $s \qquad e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{s-1} e^{\alpha x}$

" $\beta \pm i\gamma \in \mathbb{C}$ " $\qquad e^{\beta x}\cos\gamma x, x e^{\beta x}\cos\gamma x, \dots, x^{s-1} e^{\beta x}\cos\gamma x$

$e^{\beta x}\sin\gamma x, \dots$

ES. 1. $y'' - 2y' - 3y = 0$

eq caratt $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \qquad \alpha = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} \qquad$ int gen $y(x) = k_1 e^{-x} + k_2 e^{3x}$

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \qquad \alpha = 3 \ (s=2) \qquad$ " $\quad y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 x e^{3x}$

3. $y'' + 2y' = 0$

eq caratt $\alpha^2 + 2\alpha = 0 \qquad \alpha = 0, \alpha = -2 \qquad$ " $\quad y(x) = k_1 + k_2 e^{-2x}$

4. $y'' + 4y = 0$

eq caratt $\alpha^2 + 4 = 0 \qquad \alpha = \pm 2i \quad (\beta = 0, \gamma = 2) \qquad$ " $\quad y(x) = k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x$

Ricerca dell'int. partic. di un'eq. completa con il termine noto di tipo "esponenziale per polinomio"

$f(x) = e^{hx} p(x) \qquad h \in \mathbb{C} \qquad p$ pol di grado m

es. $\quad y'' - 4y' + 3y = e^{2x}(x+1)$

METODO DI SOMIGLIANZA: si cerca una sol. che ha la stessa forma del termine noto

$\bar{y}(x) = e^{hx} x^s q(x) \qquad q$ pol. di grado m

$s =$ molteplicità di h come sol dell'eq. caratt.
($s = 0$ se h non è sol.)

calcolando le derivate di $\bar{y}$ e sostituendo nell'eq. si ottiene

$\cancel{e^{hx}}\underbrace{(\dots\dots)}_{\text{polinomio}} = \cancel{e^{hx}}\underbrace{p(x)}_{\text{polin.}} \qquad$ basterà eguagliare questi due polinomi

es. $f(x) = e^{3x}(x^2 + 2x) \ (m=2) \qquad 3$ non è sol dell'eq. caratt. $\Rightarrow s = 0 \qquad \bar{y}(x) = e^{3x}(ax^2 + bx + c)$

$f(x) = e^{3x}(x^2 + 2x) \ (m=2) \qquad 3$ è sol di molt 1 " $\Rightarrow s = 1 \qquad \bar{y}(x) = e^{3x}(ax^3 + bx^2 + cx)$

$f(x) = 2e^{3x} \quad (m=0) \qquad 3$ sol di molt. 2 " $\Rightarrow s = 2 \qquad \bar{y}(x) = e^{3x} k x^2$

ESEMPI

1. $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$

int gen. omog. $y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 x e^{3x}$ $\quad h = 3 \quad s = 2 \quad m = 0$

cerco $\bar{y}(x) = e^{3x} k x^2$

$\bar{y}'(x) = 3k e^{3x} x^2 + 2k x e^{3x} = k e^{3x}(3x^2 + 2x)$

$\bar{y}''(x) = k e^{3x}(9x^2 + 12x + 2)$

sost. nell'eq. $k \cancel{e^{3x}} (\cancel{9x^2} + \cancel{12x} + 2 - \cancel{18x^2} - \cancel{12x} + \cancel{9x^2}) = 2\cancel{e^{3x}} \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$

int gen. $y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 x e^{3x} + x^2 e^{3x}$

2. $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{x}{e^x}$

eq. omog. $y'' - 4y' + 3y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$ $\quad \alpha = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$ $\quad$ int gen omog $y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 e^x$

$f(x) = x e^{-x}$ $\quad m = 1 \quad h = -1 \quad s = 0$

cerco $\bar{y}(x) = e^{-x}(ax + b)$

$\bar{y}'(x) = e^{-x}(-ax - b + a)$

$\bar{y}''(x) = e^{-x}(ax + b + \cancel{a} - \cancel{a})$

sost nell'eq. $\cancel{e^{-x}}(ax + b + 4ax + 4b + 3ax + 3b) = \cancel{e^{-x}} x \Rightarrow 8ax + 8b = x \Rightarrow \begin{cases} 8a = 1 \\ 8b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = 0 \end{cases}$

INT GEN $y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 e^x + \frac{1}{8} x e^{-x}$

3. $y'' - 4y' + 3y = (x+2) e^x$

$f(x) = (x+2) e^x$ $\quad m = 1 \quad h = 1 \quad s = 1$

cerco $\bar{y}(x) = e^x x (ax + b) = e^x (ax^2 + bx)$

$\bar{y}'(x) = e^x (ax^2 + bx + 2ax + b)$

$\bar{y}''(x) = e^x (ax^2 + bx + 4ax + 2b + 2a)$

sost nell'eq $\cancel{e^x}(\cancel{ax^2} + \cancel{bx} + 4ax + 2b + 2a - \cancel{4ax^2} - \cancel{4bx} - 8ax - 4b + \cancel{3ax^2} + \cancel{3bx}) = (x+2)\cancel{e^x}$

$-4ax + 2a - 2b = x + 2$ $\quad \begin{cases} -4a = 1 \\ 2a - 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases}$

INT GEN $y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 e^x + e^x \left(-\frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x\right)$

Se il termine noto è del tipo $\cos x \cdot p(x)$ oppure $\sin x \cdot p(x)$ con p polinomio, possiamo usare lo stesso metodo ricordando che

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)}$$

Ricordiamo inoltre che se in un'eq. lineare il termine noto è $f(x) = u(x) + i v(x)$

allora la funz. $y(x) = w(x) + i z(x)$ è sol dell'eq. se e solo se
w è sol dell'eq in cui il termine noto è $u(x)$
z " " " $v(x)$

allora se voglio risolvere $y'' - 3y' = \cos x$ (opp. $\sin x$) $\qquad \cos x + i \sin x = e^{ix}$

risolviamo $y'' - 3y' = e^{ix}$ col metodo di somiglianza
e poi prendiamo solo la parte reale (opp. immaginaria)

$y'' - 3y' = \cos x$ $\quad (1)$

eq. omog. $y'' - 3y' = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 - 3\alpha = 0$ $\quad \alpha = 0,\ \alpha = 3$ $\quad$ int. gen. omog. $y(x) = h_1 + h_2 e^{3x}$

cerchiamo un int. partic. di $y'' - 3y' = e^{ix}$ $\quad m = 0 \quad k = i \quad s = 0$

cerco $\bar{y}(x) = h\, e^{ix}$
$\bar{y}'(x) = h\, i\, e^{ix}$
$\bar{y}''(x) = -h\, e^{ix}$

sost. nell'eq. $\cancel{e^{ix}}(-h - 3hi) = \cancel{e^{ix}}$ $\Rightarrow$ $h(-1-3i) = 1 \Rightarrow h = -\frac{1}{1+3i} = -\frac{1-3i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$

dunque $\bar{y}(x) = \left(-\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right)(\cos x + i \sin x)$ $\quad$ la parte reale, che è sol della (1) è $y(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$

$y'' - 3y' = x \sin x \qquad (2)$

cerchiamo un int partic di $y'' - 3y' = x e^{ix}$ $\quad m = 1 \quad k = i \quad s = 0$

cerco $\bar{y}(x) = e^{ix}(ax + b)$
$\bar{y}'(x) = e^{ix}(iax + ib + a)$
$\bar{y}''(x) = e^{ix}(-ax - b + 2ia)$

sost nell'eq. $\cancel{e^{ix}}(-ax - b + 2ia - 3iax - 3ib - 3a) = x\cancel{e^{ix}}$

$-a(1+3i)x + a(-3+2i) - b(1+3i) = x$ $\quad \begin{cases} -a(1+3i) = 1 \\ a(-3+2i) - b(1+3i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{1+3i} = -\frac{1-3i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i \\ -- \end{cases}$

$\left(-\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right)(-3+2i) - b(1+3i) = 0 \Rightarrow \frac{3}{10} - \frac{6}{10} + \left(-\frac{2}{10} - \frac{6}{10}\right)i - b(1+3i) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{3}{10} - \frac{4}{5}i - b(1+3i) = 0 \Rightarrow b(1+3i) = -\frac{3}{10} - \frac{4}{5}i \Rightarrow b = -\frac{\frac{3}{10} + \frac{4}{5}i}{1+3i} = -\frac{\left(\frac{3}{10}+\frac{4}{5}i\right)(1-3i)}{10} =$

$= -\frac{1}{10}\left(\frac{27}{10} - \frac{1}{10}i\right)$ $\qquad \bar{y}(x) = \left[\left(-\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right)x - \frac{1}{10}\left(\frac{27}{10} - \frac{1}{10}i\right)\right](\cos x + i \sin x) =$

$= \left[\left(-\frac{1}{10}x - \frac{27}{100}\right) + i\left(\frac{3}{10}x + \frac{1}{100}\right)\right](\cos x + i \sin x)$

l'int. partic. della (2) è la parte immag. ~~y(x)=~~

$y(x) = \left(-\frac{1}{10}x - \frac{27}{100}\right)\sin x + \left(\frac{3}{10}x + \frac{1}{100}\right)\cos x$

Se il termine noto è somma di due termini di questo tipo

es $f(x) = (x+1)e^{2x} - x^2 e^x$

si usa il principio di sovrapposizione: si trova un int. partic. di $\ldots = (x+1)e^{2x}$
e " " $\ldots = -x^2 e^x$
e poi si sommano

ESERCIZI

1. $y'' + y' - 2y = 2x e^x + 4 e^{2x} \qquad (1)$

eq. omog. $y'' + y' - 2y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ $\quad \alpha = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$ $\quad$ int gen. omog. $\boxed{y(x) = h_1 e^{-2x} + h_2 e^x}$

cerchiamo un int. partic. y_1 per l'eq. $y'' + y' - 2y = 2x e^x \qquad (2)$
" " y_2 " $y'' + y' - 2y = 4e^{2x} \qquad (3)$

$\bar{y} = y_1 + y_2$ sarà un int. partic. della (1) (principio di sovrapposizione)

(2) cerco $y_1(x) = e^x x(ax+b) = e^x(ax^2 + bx)$ $\qquad (m = 1 \quad k = 1 \quad s = 1)$
$y_1'(x) = e^x(ax^2 + bx + 2ax + b)$
$y_1''(x) = e^x(ax^2 + bx + 4ax + 2b + 2a)$
sost. nell'eq.

$$y_1''(x) = e^x(ax^2+bx+4ax+2b+2a)$$

sost. nell'eq.

$$\cancel{e^x}(\cancel{ax^2}+\cancel{bx}+4ax+2b+2a+\cancel{ax^2}+\cancel{bx}+2ax+b-\cancel{2ax^2}-\cancel{2bx}) = 2x\cancel{e^x} \Rightarrow 6ax+2a+3b=2x$$

$$\begin{cases} 6a=2 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{2}{9} \end{cases} \qquad \boxed{y_1(x) = e^x\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x\right)}$$

(3) cerco $y_2(x) = ke^{2x}$ $\qquad (m=0 \quad h=2 \quad s=0)$

$$y_2'(x) = 2ke^{2x}$$
$$y_2''(x) = 4ke^{2x}$$

sost. nell'eq. $\cancel{e^{2x}}(4k+\cancel{2k}-\cancel{2k}) = 4\cancel{e^{2x}} \Rightarrow k=1$ $\qquad y_2(x)=e^{2x}$

int. gen. della (1) $\quad y(x) = k_1e^{-2x}+k_2e^x+e^x\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x\right)+e^{2x} =$

$$= k_1e^{-2x}+\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+k_2\right)e^x+e^{2x}$$

Ora risolviamo un PC $\begin{cases} y''+y'-2y = 2xe^x+4e^{2x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=\frac{7}{9} \end{cases}$

$$y'(x) = -2k_1e^{-2x}+e^x\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+k_2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)+2e^{2x}$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=\frac{7}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2+1=0 \\ -2k_1+k_2-\frac{2}{9}+2=\frac{7}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2=-1 \\ -2k_1+k_2=-1 \end{cases} \Rightarrow -1-k_1=-1+2k_1 \Rightarrow k_1=0, \; k_2=-1$$

la sol di PC $\quad y(x) = \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x-1\right)e^x+e^{2x}$

2. PC $\begin{cases} y''+y = x\sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4} \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{16} \end{cases}$ $\qquad y''+y = x\sin x \quad (1)$

eq. omog. $\quad y''+y=0$

eq. caratt. $\quad \alpha^2+1=0 \quad \alpha=\pm i \quad$ int gen omog. $y(x)=k_1\cos x+k_2\sin x$

troviamo un int partic di $\quad y''+y = xe^{ix} \quad (2) \quad$ Se $\bar{y}(x) = u(x)+iv(x)$ è una sua sol, $v(x)$ sarà sol della (1)

cerco $\bar{y}(x) = e^{ix}(ax^2+bx)$ $\qquad (m=1 \quad h=i \quad s=1)$

$$\bar{y}'(x) = e^{ix}(iax^2+ibx+2ax+b)$$
$$\bar{y}''(x) = e^{ix}(-ax^2-bx+4iax+2ib+2a)$$

sost. nell'eq. $\quad \cancel{e^{ix}}(-\cancel{ax^2}-\cancel{bx}+4iax+2ib+2a+\cancel{ax^2}+\cancel{bx}) = x\cancel{e^{ix}}$ $\qquad \begin{cases} 4ia=1 \\ 2a+2ib=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4i}=-\frac{1}{4}i \\ 2ib=\frac{1}{2}i \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-\frac{1}{4}i \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = (\cos x+i\sin x)\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}ix^2\right)$$
$$v(x) = -\frac{1}{4}x^2\cos x-\frac{1}{4}x\sin x$$

INT GEN DELLA (1) $\quad y(x) = k_1\cos x+k_2\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x-\frac{1}{4}x\sin x$

$$y'(x) = -k_1\sin x+k_2\cos x-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x-\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{4}x\cos x$$

$$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4} \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4} \\ -k_1+\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}=\frac{\pi^2}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2=\frac{3}{8}\pi \\ k_1=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

SOL DI (PC) $\quad y(x) = -\frac{1}{4}\cos x+\frac{3}{8}\pi\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x-\frac{1}{4}x\sin x$

3. $\quad y''+y' = \cos x$ $\qquad$ eq. om. $\quad y''+y'=0$

eq. caratt. $\quad \alpha^2+\alpha=0 \quad \alpha=0 \quad \alpha=-1 \quad$ int gen om. $\quad y(x)=k_1+k_2e^{-x}$

3. $\begin{cases} y'' + y' = \cos x \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

eq. om. $\quad y'' + y' = 0$

eq. caratt. $\quad \alpha^2 + \alpha = 0 \quad \alpha = 0, \alpha = -1 \quad$ int gen. om. $y(x) = k_1 + k_2 e^{-x}$

$y'' + y' = \cos x \qquad (1)$

cerchiamo un int. partic. di $\quad y'' + y' = e^{ix} \qquad (2)$

detto $y = u + iv$ tale int., un int. partic. di (1) è u

cerco $\quad y(x) = k e^{ix} \qquad (m = 0 \quad \lambda = i \quad s = 0)$

$y'(x) = k i e^{ix}$

$y''(x) = -k e^{ix} \qquad$ sost. nell'eq. $\quad e^{ix}(-k + ki) = e^{ix} \Rightarrow k(-1+i) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{-1+i} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$y(x) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(\cos x + i \sin x) \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

INT GEN DI (1) $\qquad y(x) = k_1 + k_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

$y'(x) = -k_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 + k_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ -k_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \end{cases} \qquad$ sol di PC $\quad y(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$