Dimo Festi

Lang, Introduction to the Algebra, Geometria 1

rettangolare

Una matrice è una tabella di elementi ordinati in righe e colonne

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1, & e_2 \ldots & e_N \\ e_{21}, & e_{22} \ldots & e_{2N} \\ e_{m1}, & e_{m2}, & e_{m3} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonne}} \Bigg\} m \text{ righe} = (e_{ij})_{\substack{i \ldots m \\ j \ldots n}}$$

entrate di A

A è una matrice $m \cdot n$

$\underbrace{M_{m,n}}_{\text{dimensioni}}(\mathbb{R}) \to$ i numeri al suo interno sono reali

---

Es: $M_{1,3}(\mathbb{R}) \to \{e^1, e^2, e^3\}$

$M_{2,1}(\mathbb{R}) \to \begin{Bmatrix} e^1 \\ e^2 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} 1, 2, 3 \\ 4, 5, 6 \end{Bmatrix} \to M_{2,3}(\mathbb{R})$

Una matrice è quadrata se ha lo stesso numero di righe e colonne quindi $m = n$

Una matrice quadrata è triangolare superiore se

$$e_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j$$

Una matrice quadrata è triangolare inferiore se

$$e_{ij} = 0 \quad \forall\, j > i$$

Una matrice quadrata è diagonale se $e_{ij} = 0 \quad i \neq j$

Esempi:

$A = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$ triangolare inferiore

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ triangolare inferiore

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ triangolare superiore

$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ triangolare diagonale

I punti evidenziati li troviamo analizzando gli zeri per capire se seguono le condizioni sovracitate ad esempio nella matrice A capiamo che si tratta di una triangolare inferiore perché l'unico zero che c'è rispetta la condizione infatti lo zero ha coordinate $\underset{i}{1};\underset{j}{2}$ e quindi $j > i$

Matrici Trasposte

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

A^T = la trasposta di A ha $(a'_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ $\quad \underbrace{a'_{ij}}_{\text{entrata di } A^T} = a_{ji}$

$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$B \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ 4 & \pi & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{trasposizione}} B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & \pi & -2 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Osservando il seguente esempio notiamo che usando la seguente formula: $a'_{ij} = a_{ji}$ (ad esempio sul 4) capiamo come trasporre

$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Bmatrix}$ $\qquad$ $A^T = \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{Bmatrix}$

$a_{ij} \to 4\,(\underbrace{a_{21}})$ $\qquad$ $a'_{ij} \to$ questo corrisponde : a_{ji}

Queste sono le coordinate del 4 dentro la matrice $\qquad$ $4\,(a_{12})$

Una matrice quadrata M si dice simmetrica se $M^T = M$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2 matrici sono uguali $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k,l}(\mathbb{R}) \to m = k,\ n = l$

$i = 1 \sim m$

$j = 1 \sim n$ $\qquad (a_{ij}) = (b_{ij})$

Somma tra matrici

$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ← N.B. Le matrici devono avere le stesse dimensioni

$A+B\ (a_{ij}+b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Moltiplicazione tra un $\underbrace{\text{numero}}_{\text{scalare}}$ e una matrice

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot A\ (c \cdot a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot A = \begin{pmatrix} 1c, & 2c, & 3c \\ 4c, & 5c, & 6c \end{pmatrix}$

Sottrazione tra matrici

$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ A - B = A + (-1)B$

$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Bmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{Bmatrix}$

Esempio:

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{array} \right\} \qquad B = \left\{ \begin{array}{cc} 3 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 4 \\ \pi & 0 \end{array} \right\}$$

$$A + 2B = \left\{ \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{cc} 6 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 8 \\ 2\pi & 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 5 & \sqrt{2} \\ 4 & 9 \\ 2\pi & 5 \end{array} \right\}$$

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

$$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1\sim m \\ k=1\sim p}} \in M_{m,p}(\mathbb{R})$$

N.B. Per moltiplicare 2 matrici è necessario che abbiamo:
- numero colonne di A = numero righe di B
- numero colonne di B = numero righe di A

almeno una

A • B = Risultato

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0-3 & 0+2+0 \\ 16+0-6 & 0+5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Per arrivare a questo risultato segui i seguenti passi:

1) Moltiplica la prima riga per la prima colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot -1 = 1$$

2) Moltiplica la prima riga per la seconda colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2$$

3) Moltiplica la seconda riga per la prima colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 16+0-6 = 10$$

4) Moltiplico la seconda riga per la seconda colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 5$$

$$\begin{array}{ccc} B & \cdot & A \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 4 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 4 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & -1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Altro esempio:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Ris} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 14 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 & -3+0 & 0+0 \\ -4+0 & 0+14 & 12+0 & 0-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & +14 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$