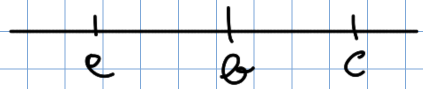
$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad c \in X \cap D(X)$

se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ $\quad$ f si dice continua nel punto c

in generale se $c \in X$ f cont in c se:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: se $x \in X, |x - c| < \delta$ si ha
$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$



$X = (a, b) \cup \{c\}$
c isolato

f è strettamente continua in un punto isolato

Operazioni tra funzioni continue sono continue
- una funz composta mediante fun continue è continua

$f(x) = f(g(x))$ $\qquad$ g continua
$\qquad\qquad\qquad\qquad$ f " $g(c)$

$\lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c)$

$\lim\limits_{y \to g(c)} f(y) = f(g(c)) = f(c)$ $\quad \Rightarrow$ f continua in c

teorema ponte
f cont $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subseteq X$ con $x_n \to c$ si ha
$f(x_n) \to f(c)$

es: $\dfrac{3n^2 + 1}{4n^3 + 3} \to \sin 0 = 0 \quad (c = 0)$

Definizione

f cont in X se lo è in ogni punto

Esercizio Stabilire se f è continua in $]-\infty; +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$

f è cont in c $\forall c \neq 0$

f è cont in $c = 0$?

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim (x+1) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$

$\Rightarrow f$ è cont anche in $c = 0$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

f è cont in c $\forall c \neq 0$

f " in $c = 0$?

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ 1

$\Rightarrow f$ non cont in $c = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x & x = 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

f è cont in c $\forall c \neq 0$

" in $c = 0$?

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} = 0$

$\neq f(0) = f$ non è cont

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n} \left(1 + \dfrac{x+1}{2n}\right)^{2n} & x > -1 \\ h & x = -1 \\ e^{\frac{1}{x+1}} & x < -1 \end{cases}$$

trovare $h \in \mathbb{R}$: f è cont

$$\lim_{n} \left(1 + \frac{x+1}{2n}\right) = e^{x+1} \qquad \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e \quad \forall\varepsilon$$

$$x_n \to \infty$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & x > 1 \\ h & x = 1 \\ e^{\frac{1}{x+1}} & x < -1 \end{cases}$$

f è cont in $\forall e \neq -1$

$$\lim_{n \to (-1)^+} f(x) = \lim_{n \to (-1)^+} e^{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} e^{\overbrace{\frac{1}{x+1}}^{\to -\infty}}$$

$= 1$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Per $h = 1$ f è cont

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & 0 \le x \le e \\ \log x & x > e \end{cases}$$

f è cont $\forall e \neq 0, e$

f è cont in 0?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{e+1}$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} \log x = 1$$

$\nexists \lim\limits_{x\to e} f(x) \Rightarrow f$ non è cont in $c = e$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ f è cont in $\forall c \neq 0$
f non è cont in 0 perché $0 \notin$ ins di def

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

non è cont

Punti di discontinuità

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $c \in D(f)$ punto di discontinuità se è verificata una delle seguenti regole

1) $c \notin X$
2) $c \in X$, $\exists \lim f(x) \neq f(c)$
3) $\nexists \lim\limits_{x\to c} f(x)$

es: $f(x) = \log x$ $c = 0$ di disco. per 1)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \neq 0 \\ x & x = 0 \end{cases} \qquad c = 0 \text{ di disco. per } 2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$ disc per 3) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

e) Se $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ la discontinuità si dice eliminabile infatti la nuova funz

$$g(x) \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ l & x = c \end{cases}$$ è cont in c

es: $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$ $\quad l = 0$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad l = 1$ $\quad g(x) \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ è cont in $\mathbb{R}$

g = prolungamento per continuità

$f(x) = x^x$ $\quad (c = 0)$ $\quad l = 1$

$$g(x) = \begin{cases} x^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

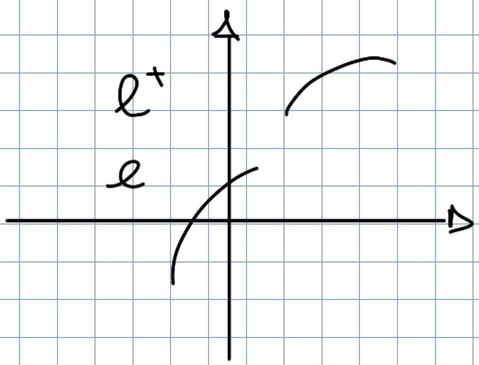
b) se $\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

c punto di disc di prima specie

ad esempio una funzione monotona in (a, b) in un punto $c \in]a, b[$ può essere solo disc di I specie

una funzione numerata in $[a, b]$ in a e in b

pure essere solo disc eliminabile



$|l^+ - l^-| =$

c) Se f diverge per $x \to c$ (essendo solo per $x \to c^-$ o per $x \to c^+$) c si dice punto di infinito

es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x = 0$

Proprietà delle funzioni continue in un intervallo

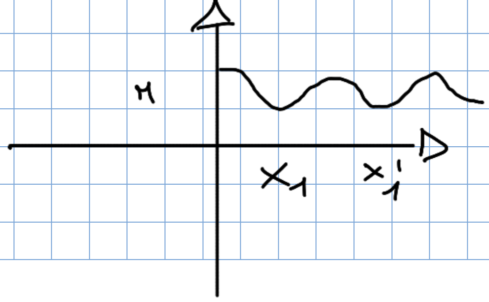
teorema di Weierstrass (no dimostrazione)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont, allora f ammette il minimo e massimo assoluti

quindi f è limitata e $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = m = \inf_{[a,b]} f$, $f(x_2) = M = \sup_{[a,b]} f$

$m =$ minimo

$x_1 =$ punto di minimo (possono essere diversi)



$f(x_1) = f(x_1') = m$

Proprietà dei valori intermedi (PVI)

f verifica la prop dei valori intermedi se dati $\alpha, \beta \in f(a,b)$ con $\alpha < \beta$ e $\gamma \in]\alpha, \beta[$ $\exists\, x \in (a,b) : f(x) = \gamma$

(se f assume 2 valori $\alpha < \beta$ assume anche tutti quelli compresi)

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases} \qquad \alpha = 0,\ \beta = 1,\ \nexists\, x : f(x) = \frac{1}{3}$$

f non ha la PVI

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

ha la PVI
non è cont
non è monotona

Legami fra PVI, continuità, e monotonia per $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

1) f cont in $[a,b] \Rightarrow f$ ha la PVI

2) f ha la PVI ed è monotona $\Rightarrow f$ continua

teorema di Darboux

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to\mathbb{R} \quad \text{cont} \\ f(a)<f(b) \\ f(a)<\gamma<f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in[a,b]: \; f(c)=\gamma$$

se (a,b) non è chiuso e limitato da $\alpha, \beta \in f((a,b))$ se prendiamo a_1, b_1:

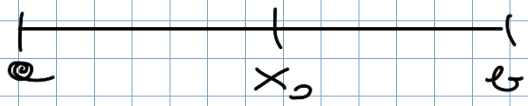
$f(a_1)=\alpha$, $f(b_1)=\beta$ e si utilizza il teorema in $[a_1,b_1]$

I° caso $f(a)<0$, $f(b)>0$ $\gamma=0$
(teorema di esistenza degli zeri)
enun: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont., $f(a)<0$, $f(b)>0$

$\Rightarrow \exists\, c\in[a,b]: f(c)=0$

II caso generale
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont
$f(a)<0$, $f(b)>0$ (o viceversa)
TS $\exists\, c\in[a,b]: f(c)=0$

DIM sia $x_0 = \frac{a+b}{2}$

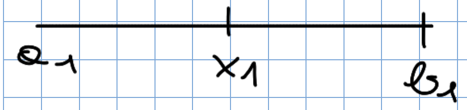


se $f(x) \Rightarrow$ TS
se $f(x)>0$ prendiamo $[a_1,b_1]=[a,x_0]$
se $f(x)<0$ " " $=[x_0,b]$

$f(a_1) < 0 \ , \ f(b_1) > 0$

$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

$a \leq a_1 < b_1 \leq b$



$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

se $f(x_1) = 0 \Rightarrow$ TS

se $f(x_1) > 0$ prendiamo $[a_2, b_1] = [a_1, x_1]$

se $f(x_2) < 0$ " " $= [x_1\ b_1]$

$f(a_2) < 0 \ , \ f(b_2) > 0$

$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$

$a \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b$

Proseguiamo se $\exists\, n : f(x_n) = 0 \Rightarrow$ TS, altrimenti si costruisce una successione di intervalli $[a_n, b_n]$

$f(a_n) < 0 \ , \ f(b_n) > 0$

$b_n - a_n = \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$

$a \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b$

$\{a_n\}$ è crescente ed è limit sup (da b)

quindi converge $a_n \to c$ $\quad f(a_n) < 0 \ \forall n$

$a_n \to c \Rightarrow f(a_n) \to f(c)$ (per il teorema ponte)

$\Downarrow$

$f(c) \leq 0$

$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow c \qquad f(b_n) > 0 \ \forall n$

$a_n \to c$, $\frac{b-a}{2^n} \to 0$

$\Rightarrow f(c) \geq 0$

$\Downarrow$

$f(c) = 0$

Caso generale

$f(a) < \gamma < f(b)$ si cerca $c : f(c) = \gamma$

cioè $f(c) - \gamma = 0$

Allora cosi la funzione $g(x) = f(x) - \gamma$ in $[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ è cont} \\ g(a) = f(a) - \gamma < 0 \\ g(b) = f(b) - \gamma > 0 \end{array}\right\} \exists c \in [a,b] : g(c) = 0$$

$\Downarrow$

$f(c) = \gamma$

Conclusione

l'immagine di un'intervallo di una funzione continua è un'intervallo

Se f non è definita in un intervallo il teorema non vale

es: $f: ([0,1] \cup [3,4]) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{in } [0,1] \\ 6 & \text{in } [3,4] \end{cases}$

è cont ma non vale la PVI

2) teorema di continuità delle funzioni monotone

$$\left.\begin{array}{l} f: (a,b) \to \mathbb{R} \text{ strett cresc} \\ \text{vale la PVI} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è cont.}$$

Dim Sia $c \in \,]a,b[$, vo dire f è cont in c (se $c = a$ oppure $c = b$ si procede allo stesso modo)

Sappiamo che $\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup_{[a,c[} f(x) = l^-$

$\lim_{x \to c^+} f(x) = \inf f(x) = l$

e $l^- \leq f(c) \leq l^+$

dobbiamo provare che $l^- = f(c) = l^+$

Supp per assurdo che $l^- < f(c)$ (l^+ si fa allo stesso modo

$f(a) < l^- < f(c)$ Sia $\gamma : l^- < \gamma < f(c)$

PVI $\Rightarrow \exists \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) = \gamma$

Dov'è è x?

Se $\bar{x} = c \Rightarrow f(\bar{x}) = \gamma = f(c)$ falso

Se $\bar{x} > c$ f è cresc $\Rightarrow \gamma = f(\bar{x}) > f(c)$ falso

Se $\bar{x} < c \Rightarrow \gamma = f(\bar{x}) \leq l$ falso

Allora $\bar{x}$ non esiste $\Rightarrow \gamma$ non esiste $\Rightarrow$
$l^- = f(c)$

Immagine di una funzione continua in un interv

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cont

teor di Weistrass $\Rightarrow \exists m, M$

" " darboux $\Rightarrow \forall \gamma \in]m, M[$ viene assunto da f

Se $\gamma < m$ o $\gamma > M$ non viene assunto da f

Allora $f([a, b]) = [m, M]$

Se f è cresc $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$
Se f decres " $= [f(b), f(a)]$

In generale se f è continua in un intervallo (a,b) generico

$$f(a,b) = \left(\inf_{(a,b)} f, \sup_{(a,b)} f\right)$$

se f è cresc $\inf f = \lim_{x \to a} f(x)$, $\sup f = \lim_{x \to b} f(x)$

se f è decresc $\inf f = \lim_{x \to b} f(x)$, $\sup f = \lim_{x \to a} f(x)$

teorema di continuità delle funzioni inverse

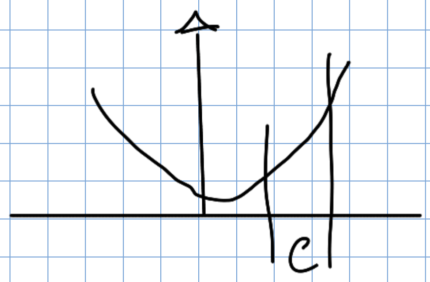
$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ strett cresc e continua

Allora $f^{-1}: (\inf f, \sup f) \to [a,b]$ è strett cresc e continua

Basta dimostrare che se $c \in]a,b[$ allora $\exists\, y \in]\inf f, \sup f[: c = f^{-1}(y)$
cioè che f^{-1} verifica la PVI

Basta prendere $c = f^{-1}(y)$ infatti $f(f^{-1}(y)) = y$

tutte le funzioni elementari sono continue perché sono monotone e verificano la PVI es. $f(x) = x^2$

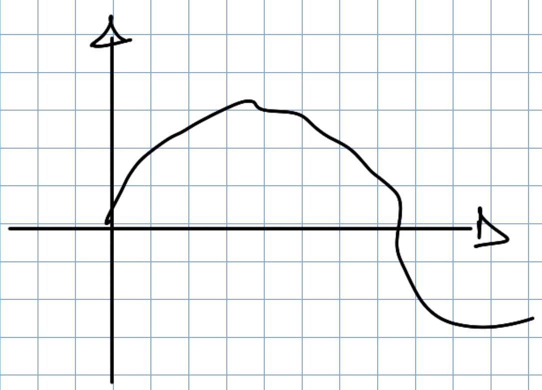


Sia $c > 0$ come $[a, b] \subseteq]0, +\infty[$: $c \in]a, b[$
in $[a, b]$ f è cresc e vale le proprietà del teorema della radice n-ma aritmetica. Quindi f è cont $[a, b] \Rightarrow$ in c se $c < 0$ analogamente

$c = 0$

non c'è un intorno contenente c all'interno in cui f è monotona

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \inf_{]-\infty; 0[} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \inf_{]0, +\infty[} f(x) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{è cont}$$



$f(x) = \sin x \quad c = \frac{\pi}{2}$ si procede allo stesso modo