

Caso base:

$$A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$$

$$A \text{ invertibile} \Leftrightarrow \text{rank } A = m \Rightarrow \det A \neq 0$$

$$\text{In questo caso } A^{-1} = A^* / \det A$$

Proposizione:

$$A \in M_{m,m}(\mathbb{R}), B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$$

$$1) \text{rank}(A \cdot B) \leq \min \{ \text{rank } A, \text{rank } B \}$$

$$2) \text{ Se } m=p \text{ e } A \text{ è invertibile allora } \text{rank}(A \cdot B) = \text{rank}(B)$$

$$3) \text{ Se } m=p \text{ e } B \text{ è invertibile allora } \text{rank}(A \cdot B) = \text{rank } A$$

Lemma:  $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ ,  $B$  è una sottomatrice di  $A$

$$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A)$$

Teorema

$$A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$$

$\text{rank}(A)$  è uguale alla dimensione delle **più piccole** sottomatrici di  $A$  con determinante non nullo.

Esempio:  $\text{rank} = ??$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sottomatrice  $2 \times 2$   
invertibile

$$\begin{aligned} &\text{rank} \\ &\text{matrice} \\ &2 < \text{rank } A < 3 \\ &\text{rank} \\ &\text{sottomatrice} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Non esiste nessuna sottomatrice  
 $3 \times 3$  invertibile

$$\text{quindi } \text{rank } A = 2$$

teorema degli zeri

$$A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$$

B sottomatrice quadrata di  $A$ ,  $p \times p$  tale che  $\det B \neq 0$

Se tutte le sottomatrici di  $A$  di ordine  $(p+1)(p+1)$  ottenute eliminando  $B$  hanno determinante zero allora  
 $\text{rk } A = p = \text{rk } B$  aggiungendo una riga o una colonna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha almeno rango 1 e massimo 5

Scegliamo una matrice  $2 \times 2$  con  $\det \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det = -4 - 2 \cdot 2 = -8$$

Scegliamo una matrice  $3 \times 3$  con  $\det \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aggiungendo le righe evidenziate otteniamo

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \rightarrow = 0 + (4 \cdot 6) + 0 - 0(-8 \cdot 3) = 24 - 24 = 0$$

non è invertibile

Dobbiamo creare un'altra matrice

Righe possibili = 1,5

Colonne possibili = 1,5

pmo le quote righe e colonne perché sono tutti zero

Controlliamo aggiungendo le righe 5 e le colonne 1

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Non ci sono matrici  $3 \times 3$  invertibili quindi  $\text{rk } A = 2$

## Sistemi lineari

$$\begin{cases} B + F + Z = 150 \text{ pr} \\ B = 100 \text{ pr} \\ F = 2(B + Z) \end{cases} \quad \begin{cases} F + Z = 650 \\ B = 100 \\ F = 200 + 2Z \end{cases} \quad \begin{cases} 200 + 2Z + Z = 650 \\ // \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3Z = 450 \\ // \\ // \end{cases} \quad \begin{cases} Z = 150 \\ B = 100 \\ F = 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B + F + Z + U + L + C = 1000 \\ F = C + B \\ B = L \\ Z + U = F + 150 \\ F + C = 2(L + R) \\ Z = \frac{2}{3} U \end{cases}$$

✓ ~~Risolvere~~ questo sistema  
è complicato

$$\begin{cases} e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 \dots e_{1n}x_n = b_1 \\ e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 \dots e_{2n}x_n = b_2 \\ e_{m1}x_1 + e_{m2}x_2 + e_{m3}x_3 \dots e_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice dei coefficienti

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

matrice delle variabili

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matrice dei termini noti

$$A \cdot X = B$$

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_2 \end{array} \right)$$

matrice completa

$$\begin{cases} B + F + Z + U + L + C = 1000 \\ F = C + B \\ B = L \\ Z + U = F + 150 \\ F + C = Z + U \\ F + C = 2(L + R) \\ Z = \frac{2}{3}U \end{cases}$$

$$\begin{cases} -B + F - C = 0 \\ B - L = 0 \\ Z + U - F = 150 \\ F + C - Z - U = 0 \\ F + C - 2L - 2R \\ Z - \frac{2}{3}U = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} B & F & Z & U & L & C & = & \text{ris} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1000 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & & 150 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & & 0 \end{array}$$

coefficienti di queste lettere in ordine

Dopo Gauss-Jordan

$$\begin{array}{cccccc|c}
 \text{B} & \text{F} & \text{z} & \text{u} & \text{L} & \text{e} & = \text{ms} \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 250 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 150 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 150
 \end{array}$$