ESPRESSIONE REGOLARE

DATO Σ DATO insieme di simboli $\{+, ^*, (,), \cdot, \phi\}^+$ tale che valga una:

- $r = \phi$
- $r \in \Sigma$
- $r = (s+t)$ opp $r = (s \cdot t)$ opp $r = s^*$ $\qquad$ s, t espressioni regolari

E.R	LINGUAGGI
ϕ	Λ
a	$\{a\}$
$(s+t)$	$\mathcal{L}(s) \cup L(t)$
$(s \cdot t)$	$L(s) \circ L(t)$
s^*	$(L(s))^*$

$\mathcal{L}(r)$

$\uparrow$

espressione regolare

$$(a+b\cdot(c\cdot d)))$$

$$\shortparallel$$

$$a+bcd$$

$$(r)^+ = r(r)^*$$

$$(r)^3 = rrr$$

ESEMPIO

SE L'ESPRESSIONE REGOLARE $(a+b)^*a$ QUESTA RAPPRESENTA IL LINGUAGGIO

$$\mathcal{L}\left((a+b)^* \cdot a\right) = \mathcal{L}\left((a+b)^*\right) \circ \mathcal{L}(a) = \left(\mathcal{L}(a+b)\right)^* \circ \mathcal{L}(a) =$$

$$= \left(\mathcal{L}(a) \cup \mathcal{L}(b)\right)^* \circ \mathcal{L}(a) = \left(\{a\} \cup \{b\}\right)^* \circ \{a\} = \left(\{a,b\}\right)^* \circ \{a\} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\{a,b\}^*}_{} \circ \{a\}}_{} = \{ x \mid x \in \{a,b\}^+ ,\ x \text{ termine con } a \}$$

ULTIMA

$$\{a,b\}^* \circ \{a\}$$

DETERMINARE L'ESPRESSIONE REGOLARE CHE, sull'alfabeto $\{a,b\}$ definisce l'insieme delle stringhe il cui terzultimo carattere è b.

penultimo

$\{a,b\}^* \circ \{b\} \circ (a+b)$

$\{a,b\}^* \circ \{b\} \circ \{a,b\}$

$(r)^2 =$

$\{a,b\}^* \circ \{b\} \circ \{a\}^2$

ab

abbb...

b 2° CARATTERE

$(a+b) \cdot b \cdot (a+b)^*$

$C = \{0, 1, \dots, 9\}$

espressione regolare

$$\underbrace{(1+2+\dots+9)}_{\text{9 ELEMENTI DA COMBINARE}}((0+1+\dots+9)^*+0).(0+1+\dots+9)^+$$

12371.52

112

9+0

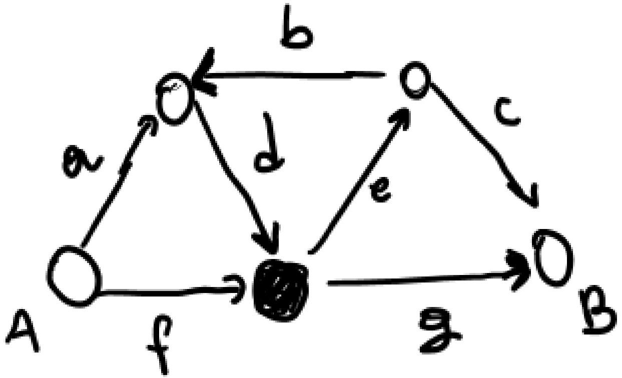
12

SCRIVERE IL LINGUAGGIO DEFINITO DALL'ESPRESSIONE REGOLARE

$$a^*\left((aa)^* b + (bb)^* a\right) b^* = \mathcal{L} \ldots$$

DESCRIVERE UNA MAPPA STRADALE (CON TUTTI I TRATTI A SENSO UNICO E CONTRASSEGNATI DAI CARATTERI DELL'ALFABETO)

FORNIRE UN'ESPRESSIONE REGOLARE CHE VALE OGNI TUTTI I PERCORSI DA A a B



$$\underset{\swarrow\ ad\quad \downarrow\ f}{(ad+f)}\circ\underset{\uparrow\ \text{"loop"}}{\left[(ebd)^*\circ\right]}(ec+g) = \mathcal{L}(ad) \cup \mathcal{L}(f)$$

DEF.

DATO UN ALFABETO $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ si definisce ordinamento lessicografico delle stringhe di Σ^* l'ordinamento $<$ ottenuto stabilendo un (qualunque) ordinamento tra i caratteri di Σ e definendo l'ordinamento di due stringhe $x, y \in \Sigma^*$ in modo tale che $x < y \iff$ una delle seguenti condizioni è verificata

1) $|x| < |y|$

2) $|x| = |y|$ ed esiste $z \in \Sigma^*$ tale che $x = z a_i u$ e $y = z a_j v$ con $u, v \in \Sigma^*$ e $i < j$

$x < y$

$z a_i u < z a_j v$

ESEMPIO 1.29

$\Sigma = \{a, b\}$ dove $a < b$ le stringhe di Σ^* sono enumerate:

$\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, \ldots$

$(b < a)$ $b, a, bb, ba \ldots$

DEF. LINGUAGGIO REGOLARE

Un linguaggio si dice regolare se esiste un automa a stati finiti ASF che lo riconosce

PROPRIETÀ DI CHIUSURA DEI LINGUAGGI REGOLARI

TEOREMA: DATI DUE LINGUAGGI regolari L_1 e L_2 LA LORO UNIONE $L_1 \cup L_2$ è un linguaggio regolare.

<u>DIM</u>

SIANO DATI 2 AUTOMI DETERMINISTICI $A_1 = \langle \Sigma_1, Q_1, \delta_{N_1}, q_{0_1}, F_1 \rangle$

$$A_2 = \langle \Sigma_2, Q_2, \delta_{N_2}, q_{0_2}, F_2 \rangle$$

che accettano i linguaggi $L_1 = L(A_1)$ $\quad L_2 = L(A_2)$

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE PARTENDO DA L_1 e L_2 e quindi di A_1 e A_2 costruiamo l'automa $A = \langle \Sigma, Q, \delta_N, q_0, F \rangle$ che riconosca $\cancel{L}(A_1) \cup \cancel{L}(A_2)$

$$L = L(A_1) \cup L(A_2)$$

$A = \langle \Sigma, Q, \delta_N, q_0, F \rangle$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$

$F = F_1 \cup F_2$ opp $F = F_1 \cup F_2 \cup \{q_0\}$

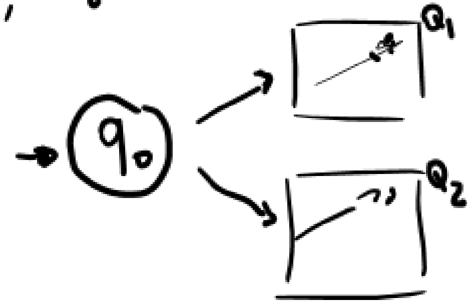
il caso in cui i due automi A_1 e A_2 riconoscono anche la stringa vuota.

$\delta_N(q, a) = \delta_{N_1}(q, a)$ se $q \in Q_1$ e $a \in \Sigma_1$

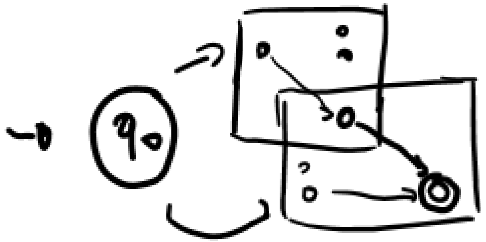
$\delta_N(q, a) = \delta_{N_2}(q, a)$ se $q \in Q_2$ e $a \in \Sigma_2$

$\delta_N(q_0, a) = \delta_{N_1}(q_0, a) \cup \delta_{N_2}(q_0, a)$ $a \in \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

A_1, A_2 DETERMINISTICI $\not\exists$ A SIA DETERMINISTICO



IN QUESTA CONFIGURAZIONE
STATO FINALE NON COMUNE



QUESTA È UNA CONFIGURAZIONE
CON STATO FINALE IN COMUNE

TEOREMA

DATO UN LINGUAGGIO REGOLARE L, il suo complemento $\overline{L}$ è un linguaggio regolare

$$\overline{L} = \Sigma^* \setminus \{L\}$$

tutte le stringhe di Σ^* che non appartengono a L

DIMOSTRAZIONE

$$A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$$

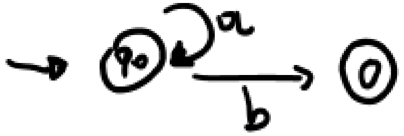
$L \rightarrow$ DEFINIRE UN LINGUAGGIO RICONOSCIUTO $L = L(A)$

e possiamo costruire l'automa $\overline{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, \{Q - F\} \rangle$

che riconosce rispettivamente il linguaggio $\overline{L(A)} = \overline{L}$

OGNI STRINGA CHE PORTA L'AUTOMA A in uno stato FINALE F PORTA L'AUTOMA $\overline{A}$ IN UNO STATO NON FINALE, e VICEVERSA

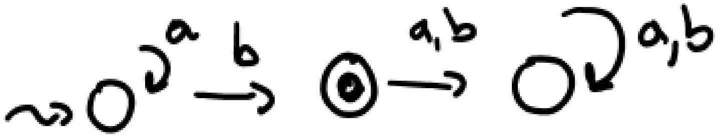
$$L(\overline{A}) = \Sigma^* \setminus L(A) = \overline{L(A)}$$

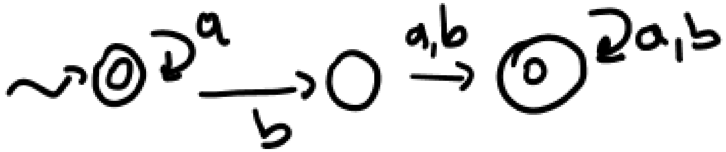
A : 

$aab \in L_1$ $\quad$ $ba \notin L_1$

$\bar{A}$: 

$aab \notin L_2$ $\quad$ $ba \notin L_2$

A_1 : 

A_2 : 

TEOREMA

DATI DUE LINGUAGGI REGOLARI L_1 e L_2 la loro intersezione $L = L_1 \cap L_2$ è un linguaggio regolare

DIMOSTRAZIONE

$$L = L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

L_1 è reg. $\Rightarrow$ $\overline{L_1}$ è reg.

L_2 è reg. $\Rightarrow$ $\overline{L_2}$ è regg. $\Rightarrow$ $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ è regolare ($\Rightarrow$ $\overline{L_1 \cup L_2}$ è regolare)

$\hookrightarrow$ $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ è regolare

TEOREMA

DATI DUE LINGUAGGI REGOLARI L_1 e L_2 la loro CONCATENAZIONE $L = L_1 \circ L_2$ è un linguaggio regolare.

DIMOSTRAZIONE

ASFD $A_1 = \langle \Sigma_1, Q_1, \delta_1, q_{01}, F_1 \rangle$
$A_2 = \langle \Sigma_2, Q_2, \delta_2, q_{02}, F_2 \rangle$
riconoscono rispettivamente i linguaggi $L_1 = \mathcal{L}(A_1)$ e $L_2 = \mathcal{L}(A_2)$

Sia $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ NON DETERMINISTICO:

- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- $F = \begin{cases} F_2 & \text{se } \varepsilon \notin \mathcal{L}(A_2) \\ F_1 \cup F_2 & \text{altrimenti} \end{cases}$

- $q_0 = q_{01}$
- $\delta_N(q, a) = \delta_1(q, a) \quad \forall q \in Q_1 - F_1 \quad a \in \Sigma_1$
- $\delta_N(q, a) = \delta_2(q, a) \quad \forall q \in Q_2 \quad a \in \Sigma_2$
- $\delta_N(q, a) = \delta_1(q, a) \cup \delta_2(q_{02}, a) \quad \forall q \in Q_1$
  $a \in \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

TEOREMA

DATO UN LINGUAGGIO REGOLARE L, anche L^* è un linguaggio regolare

DIMOSTRAZIONE

ASFD $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ che riconosce $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$

A PARTIRE DA QUESTO COSTRUIAMO $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q \cup \{q_0'\}, \delta', q_0', F \cup \{q_0'\} \rangle$

CHE RICONOSCE $L^* = (L(\mathcal{A}))^*$ PONENDO

$$\delta'(q,a) = \delta(q,a) \quad \forall q \in Q - F \qquad a \in \Sigma$$

$$\delta'(q,a) = \delta(q,a) \cup \delta(q_0,a) \quad \forall q \in F \qquad a \in \Sigma$$

$$\delta'(q,a) = \delta(q_0,a) \qquad a \in \Sigma$$

IL SECONDO AUTOMA $\mathcal{A}'$ RICONOSCE STRINGHE IN PIÙ RISPETTO AL PRIMO.