

Proposizione

V, W spazi vettoriali su \mathbb{R}

$B = \{b_i\}_{i=1 \dots m}$ base di V

- i) Un omomorfismo $f: V \rightarrow W$ è determinato dalle immagini $f(b_i)$ dei vettori di B
- ii) $\{w_1 \dots w_m\} \subseteq W$ allora $\exists!$ omomorfismo $f: V \rightarrow W$ t.c.
 $f(b_i) = w_i \quad \forall i = 1 \dots m$

Dimostrazione

i) $v \in V$, calcolo $f(v)$

Poiché $B = \{b_i\}$ è una base, $\exists \lambda_1, \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \dots \lambda_m b_m$

$$\Rightarrow f(v) = f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m)$$

↓
avendo un'applicazione
lineare le possiamo
scrivere così

ii) $f: V \rightarrow W \quad b_i \mapsto w_i$ il punto i) dice che è determinato

Supponiamo che $g: V \rightarrow W$ t.c. $g(b_i) = w_i$

$$g(v) = \lambda_1 g(b_1) + \dots + \lambda_m g(b_m) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m) = f(v)$$

è unico anche perché se cerchiamo di trovare un'altra funzione g ci verrà uguale ad f

Corollario uno SPAZIO VETORIALE

V, W S.V. su \mathbb{R} , $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ base di V $f: V \rightarrow W$ omomorfismo

- i) f iniettiva $\Leftrightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$ è lin ind
- ii) f suriettiva $\Leftrightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$ genera W
- iii) f biettiva $\Leftrightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$ base di W

Dimostrazione

i) f è iniettiva $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$

Sia $v \in V$ t.c. $f(v) = 0$. Poiché $B = \{b_i\}$ è una base di

V allora $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$

$$0 = f(v) = f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \ker \{0\} \Rightarrow f \text{ iniettiva}$$

ii) $\{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$ generano W

Dimostriamo che f è suriettiva cioè $\text{Im}(f) = W$ cioè $\forall w \in W$

$$\exists v \in V \text{ t.c. } w = f(v)$$

Sia $w \in W$ poiché $W = \langle f(b_1), \dots, f(b_m) \rangle$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \text{ t.c. } w = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m)$$

$$f(\underbrace{\lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_m f(b_m)}_{v \in V}) \Rightarrow w = f(v) \Rightarrow w \in \text{Im}(f) \Rightarrow \text{Im}(f) = W$$

\Downarrow
 f suriettiva

iii) Immediate usando i punti 1 e 2

Esercizio

$$f: V \rightarrow W$$

- 1) Se f iniettiva e $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ lin ind allora $\{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$
- 2) Se $\{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$ è lin ind allora $\{v_1, \dots, v_m\}$ lin ind

Dimostrazione delle prime

Corollario

$$f: V \rightarrow W \text{ omomorfismo, } \dim V = m, \dim W = n$$

- 1) Se f iniettiva allora $m \leq n$
- 2) Se f suriettiva allora $m \geq n$
- 3) Se f biettiva allora $m = n$

Il viceversa non è vero

$$V \rightarrow V \quad v \mapsto 0$$

Dimostrazione

- 1) Sia B una base di V , poiché $\dim V = m \Rightarrow B = \{b_1, \dots, b_m\}$
 $\Rightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_m)\} \subseteq W$ lin ind

$\dim W \geq m$ \rightarrow Ricorda che è imposto il fatto che f è iniettiva

- 2) Sia B una base di $V \Rightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$ genera W

$$\Rightarrow \dim W \leq m$$

- 3) Banale

Teorema più importante del corso

V spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione n . Allora

$$V \cong \mathbb{R}^n \quad V \text{ è isomorfo di } \mathbb{R}^n$$

↪ esiste un'applicazione lineare
biettiva

Dimostrazione

Fissiamo $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base di V e sia $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ di \mathbb{R}^n

$$V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$b_i \rightarrow e_i$$

$$B \rightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_n)\} \quad \Rightarrow f \text{ è un isomorfismo}$$

"
 E base

$$\text{Esempio } \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{x^2, x, 1\} \text{ base di } \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \cong \mathbb{R}^3$$

↪ isomorfismo

$$f: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizi

$f: V \rightarrow W$

1) Se f moltiplice e $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ lin ind allora $\{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$ lin ind

La dimostrazione consiste nel dimostrare che $\lambda_1, \dots, \lambda_m = 0$

f moltiplice quindi $\text{Ker}(f) = 0$

$$\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$$

$$\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1) + \dots + f(\lambda_n v_n) =$$

$$= f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{Ker } f$$

$\text{Ker } f$ è 0, essendo \checkmark che la combinazione lineare è 0, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti 0 quindi $\{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$ è lin ind

2) Se $\{f(v_1), \dots, f(v_m)\}$ è lin ind allora $\{v_1, \dots, v_m\}$ lin ind

Per dimostrare che è vero $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0$$

$$\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$$



essendo queste la combinazione lineare \sum di $f(v_1), \dots, f(v_m)$ e sappiamo che è lin ind e quindi che $\lambda_1, \dots, \lambda_m = 0$ e quindi è vero che $\{v_1, \dots, v_m\}$ è lin ind