Regolarità e limitatezza

Ci chiediamo: 1) $\{a_n\}$ regolare $\Rightarrow$ è limitata
2) $\{a_n\}$ limitata $\Rightarrow$ è regolare

1) i) se $a_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow$ è finita
infatti $\exists$ $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ (avendo scelto $\varepsilon > 0$)
$\Rightarrow$ è $\exists$ limit $\Rightarrow$ è limit

ii) non è limitata superiormente, però fissando $k > 0$, si ha $\exists$ $a_n > k \Rightarrow$ è $\not\exists$ lim inf $\Rightarrow$ è lim inf

iii) se $a_n \to -\infty$ analog. è limitata sup

2) No ad es: $\{(-1)^n\}$ è limitata non oscillante

Succ. dei valori assoluti

$\{a_n\}$ $\{|a_n|\}$

1) $\{a_n\}$ reg $\to$ $\{|a_n|\}$ reg infatti:

- se $a_n \to l \Rightarrow |a_n| \to |l|$
- se $a_n \to +\infty \Rightarrow |a_n| \to +\infty$ infatti $\exists$ $\underset{|a_n|}{\overset{\shortparallel}{a_n}} > h > 0$
- se $a_n \to -\infty \Rightarrow |a_n| \to +\infty$ infatti $\exists$ $a_n < -h \Leftrightarrow -a_n > h$

2) $\{|a_n|\}$ reg $\Rightarrow \{a_n\}$ reg ? No

(a meno che a_n sta sempre >0 opp sempre <0)

es: $a_n: (-1)^n$ oscillante ma $|a_n| = 1 \to 1$

$a_n = (-1)^n n$ " " $|a_n| = n \to +\infty$

se però $|a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$ perché

$|a_n| \to 0 \Rightarrow ||a_n| - 0| < \varepsilon$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$\qquad\qquad\qquad |a_n| < \varepsilon \Rightarrow a_n \to 0$

Allora se voglio dim che $a_n \to 0$ basta trovare $b_n \to 0 : |a_n| < b_n$

infatti $0 \leq |a_n| < b_n \Rightarrow |b_n| \to 0 \Rightarrow b_n \to 0$

Definizione $\{a_n\}$ infinitesima se $a_n \to 0$

" " grande ($a_n \to \infty$) se $|a_n| \to +\infty$

Successioni monotone

$\{a_n\}$ crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$

" " strettamente $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$

" decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

" " strettamente $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$

Teorema di regolarità delle successioni monotone

1) $\{a_n\}$ cresc (o strett cresc) $\Rightarrow a_n \to \sup a_n$

2) $\quad$ // $\quad$ decresc ($\quad$ '' $\quad$ decres) $\Rightarrow a_n \to \inf a_n$

Dimostrazione

1) Supponiamo che $\sup a_n \to +\infty$ e dim che $a_n \to +\infty$

cioè che $\forall K > 0 \; D$ si ha $a_n > K$

K non è un maggiorante $\Rightarrow \exists \, a_\nu > K$

$\{a_n\}$ cresc $\to$ se $n > \nu$ si ha $a_n \geq a_\nu > K \Rightarrow$ TS.

se $\sup a_n = l \in \mathbb{R}$ non facciamo la dim

2) Per esercizio

Operazioni con i limiti delle succ.

$\{a_n\}$ regolare $c \in \mathbb{R}$ cons $\{ca_n\}$ → nuova successione

se $c=0$ $\quad ca_n = 0 \to 0$, cons $c \neq 0$

$a_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow ca_n \to cl$

infatti $|ca_n - cl| = |c||a_n - l| < \varepsilon$ se $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{|c|}$

vera D perché $a_n \to l$

$$a_n \to +\infty \; \begin{cases} ca_n \to +\infty & \text{se } c>0 \\ ca_n \to -\infty & \text{se } c<0 \end{cases}$$

$$a_n \to -\infty \Rightarrow \begin{cases} ca_n \to -\infty & \text{se } c>0 \\ ca_n \to +\infty & \text{se } c<0 \end{cases}$$

infatti $ca_n > K \Leftrightarrow a_n < \frac{K}{c}$ vero D perché $a_n \to -\infty$

<0

Successione somme

$\{a_n\}\{b_n\}$ cons $\{a_n + b_n\}$

1) $a_n \to l$, $b_n \to L \Rightarrow a_n + b_n \to l+L$ infatti t.s

$|(a_n + b_n) - (l+L)| < \varepsilon$ D

ma $|(a_n + b_n) - (l+L)| = |(a_n - l) + (b_n - L)| \leq |a_n - l| + |b_n - L| < \varepsilon$ D

2) $a_n \to +\infty$ $\quad b_n \geq h \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$

es: $\underset{\downarrow \atop +\infty}{n} + \underset{\geq -1}{(-1)^n} \to +\infty$

TABELLA DELLA SOMMA

a_n	b_n	a_n+b_n
l	L	$l+L$
$+\infty$	L	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	f.i

$-a_n \to +\infty,\ -b_n \to -L$

$\Rightarrow -(a_n+b_n) \to +\infty$

$\Rightarrow a_n+b_n \Rightarrow -\infty$

F.i $\to$ forme indeterminate

a_n	b_n	a_n+b_n
$2n$	$-n$	$n \to +\infty$
n	$-2n$	$-n \to -\infty$
$n+l$	$-n$	$l \to l$
$n+(-1)^n$	$-n$	$(-1)^n$ osc.

COMBINAZIONE LINEARE $\quad c_1 a_n + c_2 b_n$

succ prodotto $\{a_n\}\ \{b_n\}$ con $\{a_n b_n\}$

1) $a_n \to l,\ b_n \to L,\ a_n b_n \to lL$

2) $a_n \to 0,\ \{b_n\}$ limitata $\Rightarrow a_n b_n \to 0$

es. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = (-1)^n \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n} \to 0$

3) $a_n \to +\infty,\ \exists h>0: b_n \geq k\ \forall n \Rightarrow a_n b_n \to +\infty$ infatti

$a_n b_n > K \Leftarrow \quad a_n b_n \geq a_n h > K$ se $a_n > \frac{K}{h}$

vero $\Leftarrow$ perché

$a_n \to +\infty$

TABELLA DEL PRODOTTO

a_n	b_n	$a_n b_n$
l	L	lL
$+\infty$	$L>0$	$+\infty$
$+\infty$	$L<0$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$L>0$	$-\infty$
$-\infty$	$L<0$	$+\infty$
$\pm\infty$	0	f.i

f.i. forme indeterminate $0 \cdot \infty$

a_n	b_n	$a_n b_n$
n	$\frac{1}{n}$	$1 \to 1$
n^2	$\frac{1}{n}$	$n \to +\infty$
$-n^2$	$\frac{1}{n}$	$-n \to -\infty$
n	$\frac{(-1)^n}{n}$	$(-1)^n$ osc

Succ reciproche

$b_n \neq 0 \ \forall n$ o D con $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$

regolare

1) se $b_n \to l \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{l}$

2) se $b_n \to 0$ allora $\frac{1}{b_n} \to \infty$ es: $b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{b_n} = n \to +\infty$

3) se $b_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to 0$

SUCCESSIONE QUOZIENTE

$b_n \neq 0 \quad \forall n$ o D $\qquad$ cons $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$

$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$ $\qquad$ es: $a_n \to l$, $b_n \to L \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{l}{L}$

si avrà una f.i nel prodotto

se $a_n \to$ e $\frac{1}{b_n} \to \infty \Leftrightarrow b_n \to 0$ $\quad$ f.i $\frac{0}{0}$

oppure $a_n \to \infty$ e $\frac{1}{b_n} \to 0 \Leftrightarrow b_n \to \infty$ $\quad$ f.i $\frac{\infty}{\infty}$

Limiti di successioni ottenute mediante funzioni elementari

$f(x)$ funzione elementare $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}$

$\{a_n\} \subseteq X$ possiamo considerare $f(a_n)$ è la succ ottenuta componendo f e a_n

es. $\log(n+1)$

se $a_n \to l \in X$ allora $f(a_n) \to f(l)$