

## DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in **Ingegneria Meccanica**

Prova di **Geometria**

22/06/2023

Durata: 60 minuti. Scrivere in maniera chiara e ordinata e giustificare ogni affermazione. E' vietato l'uso di libri e appunti e del cellulare. E' vietato uscire dall'aula prima di avere consegnato la prova. **Risolvere in maniera completa e corretta il punto (a) dell'Esercizio 1 è condizione necessaria (ma non sufficiente) per superare la prova.**

NOME E COGNOME:

FIRMA:

1. Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'endomorfismo determinato dalle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0, 0) = (0, h, 0, 0) \\ f(0, 0, 1, 0) = (h, 0, h, 0) \\ f(0, 0, 0, 1) = (1, 0, 0, 0) \end{cases}$$

dove  $h$  è un parametro reale.

- (a) (Obbligatorio) Determinare una base per  $Ker(f)$  e  $Im(f)$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .
- (b) Studiare la semplicità di  $f$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .
- (c) Trovare l'unico valore di  $h \in \mathbb{R}$  tale che  $f$  ha un autospazio di dimensione 3. In corrispondenza di tale valore di  $h$ , verificare che  $f$  è semplice e diagonalizzare la matrice  $A$  associata a  $f$  rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).

*E' fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$  nello spazio.*

2. Sia  $r$  la retta d'equazione:

$$r : \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare le equazioni dei piani contenenti  $r$  che hanno distanza 1 dall'origine.
- (b) Determinare l'equazione del piano  $\alpha$  passante per il punto di coordinate  $(1, 2, 3)$  che è parallelo a  $r$  e ortogonale al piano  $\beta$  d'equazione  $x - 2y + z = 0$  (Suggerimento: due piani sono ortogonali se e solo se i rispettivi vettori normali sono ortogonali).