N.B. I presenti appunti sono destinati esclusivamente agli studenti del corso di Elementi di Analisi Matematica 2 (a.a. 2025-2026) del CdL in Informatica dell'Università di Catania, ed è vietato ogni altro utilizzo.

Capitolo 3

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

3.1 GENERALITÀ SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Siano A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ e $F : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in A. Si dice equazione differenziale di ordine n in forma esplicita o normale, e si indica con

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{3.1}$$

il problema di determinare delle funzioni $y(x)$, che chiameremo soluzioni o integrali dell'equazione differenziale (3.1)

$$y : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

tali che

1) $y(x)$ è derivabile almeno n volte in (a, b)

2) $(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) \in A$ per ogni $x \in (a, b)$

3) per ogni $x \in (a, b)$ si ha

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)).$$

Data l'equazione differenziale di ordine n (3.1) e dato un punto di A di coordinate $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})$, si chiama **problema di Cauchy** relativo all'equazione (3.1), al punto x_0 e ai valori iniziali $y_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

il problema di determinare una soluzione y della (1) tale che
$y(x_0) = y_0$
$y'(x_0) = y_0'$
$\cdots$
$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Ad esempio, nel caso dell'equazione del primo ordine, il problema di Cauchy è quello di determinare una soluzione che in un punto dato assuma un valore determinato. In Letteratura esistono numerosi risultati che, sotto opportune ipotesi, garantiscono l'esistenza, ed eventualmente l'unicità, della soluzione per un problema di Cauchy. Nel successivo paragrafo 4.3 vedremo uno di tali risultati, riguardante una particolare classe di equazioni differenziali.

3.2 Equazioni lineari del primo ordine.

Siano a, f due funzioni reali definite nell'intervallo (α, β). L'equazione del primo ordine

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{3.2}$$

si dice **lineare** ([1]).
Essa è il problema di determinare funzioni reali definite in un intervallo $I \subseteq (\alpha, \beta)$, derivabili e tali che si abbia

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

[1] In questo caso $F(x, y) = -a(x)y + f(x)$

Si può provare che se le funzioni a e f sono continue in (α, β) l'equazione (3.2) ammette soluzioni definite nell'intervallo (α, β). D'ora in avanti assumeremo che a e f siano funzioni continue in (α, β) e, pertanto, le soluzioni di (3.2) saranno definite in (α, β). Chiameremo integrale generale l'insieme di tutte le soluzioni, ogni soluzione y potrà, per assonanza, essere chiamata integrale particolare.

Se f è la funzione identicamente nulla, l'equazione è detta omogenea; accanto alla (3.2) si considera l'equazione differenziale

$$y' = -a(x)y. \tag{3.3}$$

che chiameremo equazione omogenea associata alla (3.2)

Cominciamo col risolvere questa. Osserviamo intanto che la funzione identicamente nulla in (α, β) è una soluzione dell'equazione omogenea. Sia adesso y una soluzione che non assume mai il valore zero. Trattandosi di una funzione continua, essa ha sempre lo stesso segno. Si ha, per ogni $x \in (\alpha, \beta)$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

Il primo membro di quest'eguaglianza è la derivata di $\log|y(x)|$. Indicata ora con A una primitiva della funzione $a(x)$, possiamo osservare che le funzioni $\log|y(x)|$ e $-A(x)$ hanno la stessa derivata quindi differiscono per una costante. Si ottiene dunque

$$\log|y(x)| = -A(x) + c$$

da cui, facilmente

$$y(x) = ke^{-A(x)} \tag{3.4}$$

con $k \in \mathbb{R}$. Per $k = 0$ si ottiene la funzione nulla che avevamo trovato prima, per $k > 0$ si ottengono soluzioni positive e per $k < 0$ soluzioni negative. Osserviamo che non esistono soluzioni che possano assumere sia il valore zero che valori diversi da zero: una tale funzione dovrebbe infatti essere continua ma una funzione del tipo $ke^{-A(x)}$ non tende mai a zero al tendere di x ad un valore finito. La (3.4) fornisce dunque tutte e sole le soluzioni dell'equazione omogenea.

Esaminiamo ora l'equazione completa. Applichiamo **il metodo di Lagrange della variazione della costante**: precisamente, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = k(x)e^{-A(x)}, \quad x \in (\alpha, \beta)$$

cioè una funzione che abbia la stessa forma della (3.4) ma in cui, al posto della costante k, ci sia una funzione derivabile $k(x)$. Imponendo che $\bar{y}(x)$ sia soluzione di (3.2) e ricordando che $A'(x) = a(x)$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$, si ottiene

$$k'(x)e^{-A(x)} - A'(x)k(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)} = f(x), \quad \forall x \in (\alpha.\beta)$$

da cui

$$k'(x) = f(x)e^{A(x)}, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

quindi la funzione k viene determinata in quanto primitiva della funzione $f(x)e^{A(x)}$. In questo modo abbiamo determinato un integrale particolare $\bar{y}$ della (3.2). Stabiliamo ora dei risultati che consentiranno di determinare tutte le soluzioni dell'equazione (3.2).

Teorema 1 *Se y una soluzione dell'equazione (3.2) e z una soluzione dell' equazione (3.3), allora la funzione somma $y + z$ è soluzione dell'equazione (3.2) .*

Dimostrazione Basta osservare che posto $w = y + z$, w è derivabile in (α, β) e si ha

$$\begin{aligned} w'(x) + a(x)w(x) &= (y'(x) + a(x)y(x)) + (z'(x) + a(x)z(x)) \\ &= f(x) + 0 = f(x). \end{aligned}$$

Teorema 2 *Se y e z sono due soluzioni dell'equazione (3.2), allora la funzione differenza $y - z$ è soluzione dell'equazione (3.3) .*

Dimostrazione

Anche in questo caso, posto $w = y - z$, la funzione w è derivabile in (α, β) e si ha

$$w'(x) + a(x)w(x) = (y'(x) + a(x)y(x)) - (z'(x) + a(x)z(x))$$
$$= f(x) - f(x) = 0.$$

Da queste due proposizioni segue che tutte e sole le soluzioni dell'equazione (3.2) si ottengono sommando una soluzione della (3.2) alle soluzioni della (3.3); tenendo conto della (3.4), allora, possiamo concludere che l'integrale generale della (3.2) è dato da

$$y(x) = \bar{y}(x) + ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3.3 Equazioni lineari di ordine n.

Sia $n \in \mathbb{N}$ e siano date $n+1$ funzioni reali continue nel medesimo intervallo (α, β), siano esse $a_1, a_2, \cdots, a_n, f$. L'equazione differenziale lineare di ordine n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{3.5}$$

è il problema della ricerca di funzioni reali y definite in (α, β), derivabili n volte e tali che

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = f(x)$$

per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.

Come nel caso precedente, chiameremo integrale generale dell'equazione differenziale l'insieme delle sue soluzioni, ciascuna soluzione viene anche chiamata integrale particolare.

Le funzioni a_i sono dette coefficienti dell'equazione e la funzione f termine noto. Se f è la funzione identicamente nulla, l'equazione è detta omogenea. Accanto alla (3.5) si suole prendere in considerazione la cosiddetta omogenea associata, avente i suoi stessi coefficienti e il termine noto nullo:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{3.6}$$

Nel paragrafo precedente abbiamo studiato il caso particolare $n = 1$; come vedremo, i risultati ivi ottenuti ci saranno utili per studiare il caso generale. Si hanno intanto alcuni risultati preliminari. Il primo, che non dimostriamo, riguarda il problema di Cauchy associato all'equazione (3.5).

Teorema 3 (Teorema di esistenza e unicità) *Il problema di Cauchy associato all'equazione (3.5) ammette una ed una sola soluzione definita in* (α, β).

Si hanno inoltre i seguenti risultati, simili a quelli visti nel caso delle equazioni del primo ordine:

Proposizione 1 *Se y è una soluzione dell'equazione (3.5) e z è una soluzione dell'equazione (3.6), allora la funzione somma $y + z$ è soluzione dell'equazione (3.5).*

Proposizione 2 *Se y e z sono due soluzioni della (3.5), allora la funzione differenza $y - z$ è soluzione dell'equazione (3.6).*

Proposizione 3 *Se y e z due soluzioni dell'equazione (3.6), allora ogni loro combinazione lineare $hy(x) + kz(x)$ $(h, k \in \mathbb{R})$ è soluzione della (3.6).*

Si ha poi il seguente **Principio di sovrapposizione**

Proposizione 4 *Se y è una soluzione dell'equazione $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots a_n(x)y = f(x)$ e z è una soluzione dell'equazione $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots a_n y = g(x)$, e se c_1, c_2 sono due numeri reali, allora la funzione $c_1 y + c_2 z$ è una soluzione dell'equazione $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots a_n(x)y = c_1 f(x) + c_2 g(x)$*

Si ha infine il seguente risultato, che tratta il caso particolare in cui il termine noto dell'equazione è una funzione a valori complessi:

Proposizione 5 *Supponiano che il termine noto dell'equazione (3.5) sia una funzione a valori complessi $f(x) = u(x) + iv(x)$.*

Allora, la funzione complessa $y(x) = w(x) + iz(x)$ è soluzione dell'equazione (3.5) se e solo se le funzioni w e z sono soluzioni, rispettivamente, delle equazioni

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = u(x)$$

e

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = v(x)$$

OSSERVAZIONE 1 Dalla Proposizione 4, e dal fatto evidente che la funzione identicamente nulla è soluzione della (3.6), si conclude che l'insieme delle soluzioni della (3.6), considerato con le usuali operazioni di somma fra funzioni e di prodotto di una funzione per un numero, è uno spazio vettoriale. Nella successiva Osservazione 2 saremo in grado di stabilire quale sia la sua dimensione.

Ci proponiamo adesso di determinare l'integrale generale della (3.6). A tale scopo, siano $y_1, \cdots, y_n$ n soluzioni della (3.6). Introduciamo il seguente determinante:

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_(' x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

detto wronskiano delle soluzioni. Si ha il seguente risultato:

Proposizione 6 *Si verifica una e una sola delle seguenti affermazioni:*

a) $W(x)$ è identicamente nullo

b) $W(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (\alpha, \beta)$.

Linea dimostrativa

Si prova che $W(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y' + a_1(x)y = 0$ le cui soluzioni sono (cfr. paragrafo 3.2) del tipo $y(x) = ke^{-A(x)}$, con A primitiva di a_1, quindi sono identicamente nulle (per $k = 0$) o sempre diverse da zero. Per brevità lo proviamo solo nel caso $n = 2$. In tal caso si ha infatti

$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ quindi, tenendo conto del fatto che y_1 e y_2 sono soluzioni:

$$W'(x) = y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1'(x)y_2'(x) - y_1''(x)y_2(x) =$$

$$= y_1(x)\big(- a_1(x)y_2'(x) - a_2(x)y_2(x)\big) - y_2(x)\big(- a_1(x)y_1'(x) - a_2(x)y_1(x) =$$

$$= a_1(x)\big(- y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x)\big) = -a_1(x)W(x)$$

Diamo adesso la seguente

Definizione 1 *Le soluzioni* $y_1, \cdots, y_n$ *sono dette indipendenti se si ha*

$$W(x) \neq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Si hanno ora i seguenti risultati:

Teorema 4 *Un'equazione differenziale lineare di ordine* n *omogenea ha sempre* n *soluzioni indipendenti.*

Dimostrazione

Fissiamo ad arbitrio $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e consideriamo n problemi di Cauchy, l'i-mo dei quali è:

$$(P_i) \quad \begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \\ y^{(i)}(x_0) = 1 \\ y^{(j)}(x_0) = 0, \quad j \neq i \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza e unicità, P_i ammette un'unica soluzione y_i. Consideriamo le n soluzioni così ottenute, il loro wronskiano, calcolato in x_0, è

$$W(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = 1$$

dalla Definizione 1 e dalla Proposizione 4 segue che $y_1, \cdots, y_n$ sono indipendenti.

Siamo ora in grado di stabilire la seguente caratterizzazione dell'integrale generale dell'equazione omogenea.

Teorema 5 *Siano $y_1, \cdots, y_n$ n soluzioni indipendenti dell'equazione (3.6).*

Allora, tutte e sole le soluzioni dell'equazione (3.6) sono le funzioni del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x), \ \ k_i \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione

Che una combinazione lineare di soluzioni sia una soluzione è già stato affermato dalla Proposizione 4. Proviamo il viceversa. Sia $\bar{y}$ una soluzione della (3.6), scelto ad arbitrio $x_0 \in (\alpha, \beta)$ consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \\ y(x_0) = \bar{y}(x_0) \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}(x_0) \end{cases} \tag{3.7}$$

del quale la funzione $\bar{y}$ è evidentemente una soluzione. Dato, inoltre, che le soluzioni sono indipendenti, il sistema lineare di n equazioni nelle n incognite $k_1, \cdots, k_n$

$$\begin{cases} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) + \cdots + k_n y_n(x_0) = \bar{y}(x_0) \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) + \cdots + k_n y_n'(x_0) = \bar{y}'(x_0) \\ \cdots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + k_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + k_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $(k_1, \cdots, k_n)$ e la funzione

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x)$$

è soluzione del problema di Cauchy (3.7). Per l'unicità della soluzione, si ha $\bar{y} = w$. Abbiamo in tal modo provato che, data una n-pla di soluzioni indipendenti, ogni altra soluzione della (3.6) è una loro combinazione lineare, come si voleva.

Osservazione 2 Ricordiamo ora che n elementi $v_1, \cdots, v_n$ di uno spazio vettoriale si dicono linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ nulla è quella in cui $k_i = 0 \ \forall i = 1, \cdots, n$. Si può provare che le soluzioni $y_1, \cdots, y_n$ della (3.6) sono indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti. Dal Teorema 5 segue che lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione n.

Siamo in grado adesso di caratterizzare l'integrale generale dell'equazione completa (3.5).

Teorema 6 *Siano $y_1, \cdots, y_n$ n integrali indipendenti dell'equazione omogenea (3.6) e sia $\bar{y}$ un integrale particolare dell'equazione completa (3.5). Allora, l'integrale generale dell'equazione completa è dato da*

$$y(x) = \bar{y} + \sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x) : k_i \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione La tesi segue subito dal Teorema 5 e dalla Proposizione 1.

3.4 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Presentiamo adesso il metodo risolutivo per le equazioni lineari di ordine n, limitandoci a trattare solo il caso delle equazioni lineari a coefficienti costanti. Anche stavolta consideriamo in un primo momento l'equazione omogenea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0. \tag{3.8}$$

Si cerca una soluzione del tipo $y(x) = e^{\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbf{C}$. Calcolando le derivate successive di y e sostituendo nella (3.8) si ottiene

$$e^{\alpha x}(\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots a_n) = 0$$

quindi la funzione y è soluzione della (3.8)se e solo se il numero α è soluzione dell'equazione algebrica

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots a_n = 0 \tag{3.9}$$

detta equazione caratteristica della (3.8). Risolvendo tale equazione, si troveranno soluzioni reali e coppie di soluzioni immaginarie coniugate. Si può dimostrare che dalla risoluzione dell'equazione caratteristica si ottengono n soluzioni per l'equazione differenziale, precisamente:

- se α è una soluzione reale di molteplicità r della (3.9), essa dà luogo alle seguenti r soluzioni della (3.8)

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \cdots, x^{r-1}e^{\alpha x}$$

- se $\beta \pm i\gamma$ è una coppia di soluzioni immaginarie coniugate di molteplicità s della (3.9), essa dà luogo alle seguenti $2s$ soluzioni della (3.8):

$$e^{\beta x}\cos(\gamma x), xe^{\beta x}\cos(\gamma x), \cdots, x^{s-1}e^{\beta x}\cos(\gamma x),$$

$$e^{\beta x}\sin(\gamma x), xe^{\beta x}\sin(\gamma x), \cdots, x^{s-1}e^{\beta x}\sin(\gamma x).$$

Si può provare che le n soluzioni così ottenute sono linearmente indipendenti, quindi esse danno luogo all'integrale generale dell'equazione differenziale.

Studiamo nei dettagli il caso $n = 2$.

L'equazione ha la forma

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

e l'equazione caratteristica è

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0,$$

per risolvere quest'ultima si deve studiare il segno del discriminante $\Delta = a^2 - 4b$, si hanno tre casi:

i) $\Delta > 0$. L'equazione caratteristica ha le due soluzioni reali e distinte α_1, α_2. Le soluzioni dell'equazione differenziale sono allora $e^{\alpha_1}x, e^{\alpha_2}x$ e si ha

$$W(x) = e^{(\alpha_1+\alpha_2)x}(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0$$

quindi le soluzioni sono linearmente indipendenti.

ii) $\Delta = 0$. L'equazione caratteristica ha una soluzione reale α di molteplicità 2. Le soluzioni dell'equazione differenziale sono allora $e^{\alpha}x, xe^{\alpha}x$ e si ha

$$W(x) = e^{2\alpha x} \neq 0$$

quindi le soluzioni sono linearmente indipendenti.

iii) $\Delta < 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse $\beta \pm i\gamma$ $(\gamma \neq 0)$. Le soluzioni dell'equazione differenziale sono $e^{\beta x}\cos(\gamma x)$ e $e^{\beta x}\sin(\gamma x)$ e si ha

$$W(x) = \gamma e^{2\beta x} \neq 0$$

quindi le soluzioni sono linearmente indipendenti.

Esempio 1 Risolviamo alcune equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.

1. Consideriamo l'equazione differenziale
$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$
L'equazione caratteristica $\alpha^2+2\alpha-3 = 0$ ammette le due soluzioni reali $\alpha = 1, \alpha = -3$ quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è $k_1 e^x + k_2 e^{-3x}$.

2. Consideriamo l'equazione differenziale
$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$
L'equazione caratteristica $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ ammette la soluzione reale doppia $\alpha = 2$ quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è $k_1 e^{2x} + k_2 x e^{2x}$.

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$y'' + 2y' + 3y = 0.$$
L'equazione caratteristica $\alpha^2+2\alpha+3 = 0$ ammette le due soluzioni immaginarie coniugate $-1 \pm \sqrt{2}i$ quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è $k_1 e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + k_2 e^{-x} \sin(\sqrt{2}x)$.

Presentiamo ora il metodo per risolvere l'equazione completa. A tale scopo bisogna determinare una sua soluzione particolare. Tale ricerca è particolarmente semplice nel caso in cui il termine noto sia il prodotto di una funzione esponenziale per un polinomio, ossia se
$$f(x) = e^{hx}\ p(x) \tag{3.10}$$
essendo h un numero complesso e p un polinomio di grado m a coefficienti complessi. Utilizzeremo il cosiddetto **metodo di somiglianza**, nel quale si cerca una soluzione particolare dell'equazione completa che abbia una forma

simile a quella del termine noto. Precisamente, si cerca una soluzione del tipo

$$y(x) = e^{hx} x^s q(x)$$

essendo q un polinomio di grado m e s la molteplicità di h come soluzione dell'equazione caratteristica ($s = 0$ se h non è soluzione dell'equazione caratteristica). Il polinomio q si determina imponendo che la funzione $y(x)$ sia soluzione dell'equazione completa.

Esempio 2 Risolviamo alcune equazioni lineari complete a coefficienti costanti.

1. Consideriamo l'equazione differenziale

   $$y'' - y' = x^2 e^x.$$

   Risolviamo intanto l'omogenea associata. L'equazione caratteristica

   $$\alpha^2 - \alpha = 0$$

   ammette le soluzioni $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$ quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

   $$y(x) = k_1 e^x + k_2.$$

   Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 2$, quindi si cerca una funzione del tipo

   $$y(x) = x(ax^2 + bx + c)e^x.$$

   Derivando due volte la $y(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

   $$(3ax^2 + 2bx + c + 6ax + 2b)e^x = x^2 e^x$$

   da cui $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$, $c = 2$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

   $$y(x) = k_1 e^x + k_2 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x.$$

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - y' = e^{2x}.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = 2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 0$, quindi si cerca una funzione del tipo $y(x) = ce^x$. Derivando due volte la $y(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(4c - 2c)e^{2x} = e^{2x}$$

da cui $c = \frac{1}{2}$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 + \frac{1}{2}e^{2x}.$$

3. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - y' = 2x + 1.$$

Anche in questo caso, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = 0$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 1$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$y(x) = x(ax + b).$$

Derivando due volte la $y(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$2a - 2ax - b = 2x + 1$$

da cui $a = -1$, $b = -3$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 - x - 3.$$

Nei due successivi esempi ci saranno utili la definizione della funzione esponenziale in campo complesso e la Proposizione 5. Ricordiamo che se $\beta + i\gamma \in \mathbb{C}$ allora si definisce

$$e^{\beta+i\gamma} = e^{\beta}(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

e quindi

$$e^{\beta}\cos\gamma = \text{parte reale di } e^{\beta+i\gamma}, \qquad e^{\beta}\sin\gamma = \text{parte immaginaria di } e^{\beta+i\gamma}.$$

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + y = 2x\cos x. \tag{3.11}$$

Per ricondurci alla situazione prevista in (3.10), si tiene conto del fatto che $\cos x$ è la parte reale di e^{ix} e si procede nel seguente modo: si considera l'equazione

$$y'' + y = 2xe^{ix} \tag{3.12}$$

in cui il termine noto è del tipo (3.10), se ne trova un integrale particolare $\bar{y}$. La soluzione cercata per la (3.11) è, grazie alla Proposizione 5, la parte reale di $\bar{y}$. (Se invece di $2x\cos x$ il termine noto fosse stato $2x\sin x$, la soluzione della (3.11) sarebbe stata la parte immaginaria di $\bar{y}$.)

Procediamo, dunque, nella risoluzione della (3.12). L'equazione caratteristica $\alpha^2 + 1 = 0$ ammette le soluzioni $\alpha = \pm i$ quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, osserviamo che $h = i$ è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 1$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$\bar{y}(x) = x(ax + b)e^{ix}.$$

Derivando due volte $\bar{y}(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(4aix + 2a + 2ib)e^{ix} = 2xe^{ix}$$

da cui $a = -\frac{1}{2}i$, $b = \frac{1}{2}$.
Si ha dunque

$$\bar{y}(x) = \big(-\frac{1}{2}ix^2 + \frac{1}{2}x\big)(\cos x + i \sin x)$$

la cui parte reale è

$$\frac{1}{2}x^2 \sin x + \frac{1}{2}x \cos x.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x + \frac{1}{2}x^2 \sin x + \frac{1}{2}x \cos x.$$

5. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + y = (x + 4) \sin 2x.$$

Procedendo come nel caso precedente, determiniamo prima di tutto un integrale particolare dell'equazione differenziale

$$y'' + y = (x + 4)e^{2ix}$$

osservando che $h = 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica e $m = 1$, quindi si cerca una funzione del tipo

$$\bar{y}(x) = (ax + b)e^{2ix}.$$

Derivando due volte la $\bar{y}(x)$ e sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(-3ax + 4ai - 3b)e^{2ix} = (x + 4)e^{2ix}$$

da cui $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{3} - \frac{4}{9}i$. Si ha dunque

$$\bar{y}(x) = \Big(\Big(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\Big) - \frac{4}{9}i\Big)(\cos 2x + i \sin 2x)$$

la cui parte immaginaria è

$$-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\sin 2x - \frac{4}{9}x \cos 2x.$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\sin 2x - \frac{4}{9}x \cos 2x$$

6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione, come si trova facilmente, è

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{-3x},$$

occorre quindi determinare le costanti k_1 e k_2 in modo da soddisfare i valori iniziali richiesti. Si ha $y'(x) = k_1 e^x - 3k_2 e^{-3x}$, imponendo i valori iniziali si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} k_1 e + k_2 e^{-3} = 0 \\ k_1 e - 3k_2 e^{-3} = 1 \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione $k_1 = \frac{1}{4e}$, $k_2 = -\frac{e^4}{3}$, dunque il problema di Cauchy ammette l'unica soluzione

$$y(x) = \frac{e^x}{4e} - \frac{3e^{-3x}}{e^4}.$$