23/10/2025

Funzione integrale

$f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ Fissiamo $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$\forall x \in (\alpha, \beta)$ $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ → FUNZIONE INTEGRALE DI PUNTO INIZIALE x_0

due funzioni integrali differiscono per una costante

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INTEGRALE

IP. $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continua $x_0 \in (\alpha, \beta)$ $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

TS. $\forall x \in (\alpha, \beta)$ $\exists\, F'(x) = f(x)$

COROLLARIO.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Ogni funzione continua è dotata di primitive.

Dim. Sia $c \in (\alpha, \beta)$ dimostriamo che $F'(c) = f(c)$

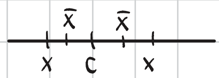
$$R(x) = \frac{F(x) - F(c)}{x-c} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt}{x-c} = \frac{\int_{x_0}^{x} \dots + \int_{c}^{x_0} \dots}{x-c} = \frac{\int_{c}^{x} f(t)\,dt}{x-c}$$

se $x > c$ $\int_c^x$ è di Riemann $\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in]c, x[: r(x) = f(\bar{x})$ (teorema della media)

se $x < c$ $\int_c^x = \int_x^c \Rightarrow r(x) = \frac{-\int_x^c}{-(c-x)} = \frac{\int_x^c f(t)\,dt}{c-x}$ (è di Riemann) $\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in]x, c[: r(x) = f(\bar{x})$

In ogni caso dunque $\exists\, \bar{x}$ compreso tra c e x: $r(x) = f(\bar{x})$

se $x \to c$ anche $\bar{x} \to c$ quindi $\lim_{x \to c} r(x) = \lim_{x \to c} f(\bar{x}) = f(c)$



ESEMPI

1. $F(x) = \int_1^x t^2\,dt$ $F(x) = x^2$

2. $F(x) = \int_x^1 \cos t\,dt = -\int_1^x \cos t\,dt$ $F'(x) = -\cos x$

↳ OPPOSTA DI UNA FUNZIONE INTEGRALE

3. $F(x) = \int_x^{\log x} t^3\,dt$ è composta dalla funzione integrale $\int_1^2 t^3\,dt$ e $\log x$ $F'(x) = (\log^3 x)\frac{1}{x}$

4. $F(x) = \int_{x^2+1}^{e^x} t\,dt = \int_{x^2+1}^{0} t\,dt + \int_0^{e^x} t\,dt = -\int_0^{x^2+1} t\,dt + \int_0^{e^x} t\,dt$ $F'(x) = -(x^2+1)2x + e^x \cdot e^x$

Formula fondamentale del calcolo integrale

IP. $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continua. $a, b \in (\alpha, \beta)$ F primitiva di f

TS. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ *

*es. $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0$

$\int_4^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{x}\right]_4^2 = \frac{4}{2} - \frac{16}{2} = -6$

Dim. F è una primitiva di f. Un'altra primitiva è $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + k$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$

se $x = a$ $F(a) = G(a) + k = \underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{=0} + k \Rightarrow f(a) = k$

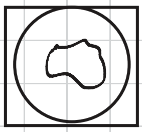
se $x = b$ $F(b) = G(b) + k = \int_a^b f(x)\,dx + F(a) \Rightarrow$ TS.

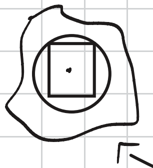
Teoria della $\overbrace{\text{misura}}^{\text{AREA}}$ in $\mathbb{R}^2$ secondo Peano e Jordan

$X \subseteq \mathbb{R}^2$ area $x = ??$

I CASO $x = [a,b] \times [c,d]$ RETTANGOLO
AREA $x = (b-a)(d-c)$

II CASO $x = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$ Rettangolo a due a due privi di punti interni (PLURIRETTANGOLO)
AREA $x = \sum_{i=1}^{m}$ area R_i





III CASO x limitato e dotato di punti interni
$\exists$ un cerchio che lo contiene
↳ $P_0 \in x$ INTERNO se $\exists$ un cerchio di centro P_0 contenuto in x.

$\bar{A} = \{$area P: P plurirettangolo, $x \subseteq P\}$

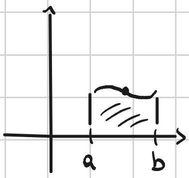
$\underline{A} = \{$area P: P plurirettangolo, $P \subseteq x\}$

$\underline{A}$ e $\bar{A}$ sono separati

Se sono contigui si dice che x è dotato di area e si pone
area $x = \sup \underline{A} = \inf \bar{A}$

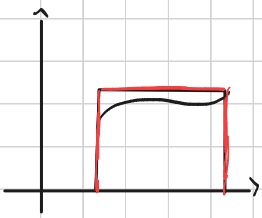
Area del Rettangoloide

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$ continua
(nel caso generale può essere $f(x) \geq 0$ oppure ≥ 0)

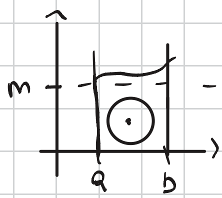


$R_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$
Rettangoloide di f in $[a,b]$

$f(x)$ è dotata di massimo $\Rightarrow R_f$ è limitato



$f(x) > 0$ $\forall x \Rightarrow m > 0 \Rightarrow R_f$ ha punti interni



$[a,b] \times [0,m] \subseteq R_f$

Dobbiamo provare che $\underline{A}$ e $\bar{A}$ sono contigui

Sia D una decomposizione di $[a,b]$

cons. $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i] \subseteq R_f$

$P_2 = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i] \supseteq R_f$

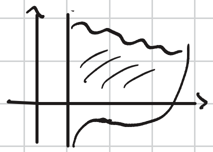
area $P_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i = s(f,D) \in \underline{S}$

area $P_2 = S(f,D) \in \bar{S}$

$\bar{S}$ ed $\underline{S}$ contigui $\Rightarrow \exists D : S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon \Rightarrow$ area P_1 - area $P_2 < \varepsilon$
$\Rightarrow \underline{A}$ ed $\bar{A}$ sono contigui $\Rightarrow R_f$ è dotata di area e Area $R_f = \int_a^b f(x)\,dx$

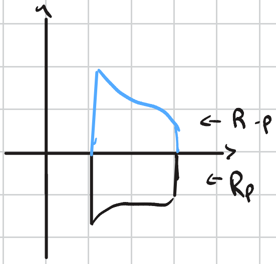
Si può provare che se f, g conti in $[a,b]$ $D = \{(x,y) : x \in [a,b], g(x) \le y \le f(x)\}$

area $D = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ => se $g(x) = 0$ e $f(x) \geq 0$
Area $R_f = \int_a^b f(x)\,dx$



dominio normale Rispetto all'asse $\bar{x}$

Se $f(x) < 0$



area R_f = area $R_{-f} = \int_a^b -f = -\int_a^b f$

es. calcoliamo l'area del rettangolo di $f(x) = x^2+1$ in $[0,3]$
f continua e positiva => area $R_f = \int_0^3 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = 9 + 3 - 0 = 12$

Osservazione sul teorema fondamentale del calcolo integrale

f continua => ha primitive
f non ha primitive => f non continua

esempio di funzione non continua ma dotata di primitiva

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ => f non è continua

cons. $$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ $F'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = f(x)$

per $x = 0$ cons. il rapporto incrementale $\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = x \sin\frac{1}{x} \to 0 = f(x)$

quindi F è primitiva di f in $]-\infty, +\infty[$

$\boxed{\text{FINE 1° CAPITOLO}}$

ESERCIZI

Funzioni integrali

1. Riprendiamo $F(x) = \int_1^x t^2\,dt$ abbiamo visto che $F'(x) = x^2$

II modo: $F(x) = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$ $F'(x) = x^2$

per esercizio riprendere gli altri simili che abbiamo visto prima

2. $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ $F'(x) = e^{-x^2}$ (unico modo, perché non si possono esprimere mediante le funzioni elementari)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} (e^{t^2}-1)\,dt}{x^3} \qquad \lim_{x\to 0} x=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \int_0^{\sin x} \dots = \int_0^0 = 0$$

F.I. $\frac{0}{0}$

RAPPORTO DELLE DERIVATE $$\frac{(e^{\sin^2 x}-1)\cos x}{3x^2} = \underbrace{\frac{e^{\sin^2 x}-1}{\sin x}}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{\cos x}{3}}_{\to \frac{1}{3}} \to \frac{1}{3}$$

$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

---

3. eq. tangente in $c=0$ di $f(x) = \int_1^{1+x^2} \sqrt{3+t^2}\,dt$

$y = f(c) + f'(c)(x-c)$ $\qquad f(0) = \int_1^1 \dots = 0$ $\qquad f'(x) = \sqrt{3+(t+x^2)^2}\ 2x$

$f(0) = 4 \cdot 0 = 0$

eq. $y = 0 + 0(x-0)$

$y = 0$

---

4. TROVARE F PRIMITIVA DI $f(x) = x^2$ in $]-\infty, +\infty[$ tale che $F(2)=3$

I MODO: $F(x) = \frac{x^3}{3} + k$ $\qquad F(2) = 3 \Leftrightarrow \frac{8}{3} + k = 3 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

$F(x) = \frac{x^3+1}{3}$

II MODO: $F(x) = \int_2^x t^2\,dt + 3$

---

5. TROVARE F PRIMITIVA DI $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ in $]-\infty, +\infty[$ tale che $f(\pi) = 1$

$c=2$

I MODO: $F(x) = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + k$ $\qquad F(2) = 1$ $\qquad \frac{\pi}{8} + k = 1 \Rightarrow k = 1 - \frac{\pi}{8}$

$F(x) = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + 1 - \frac{\pi}{8}$

II MODO: $F(x) = \int_2^x \frac{1}{t^2+4}\,dt + 1$

UGUALI

---

6. TROVARE F PRIMITIVA in $]-\infty, +\infty[$ di e^{-x^2} tale che $F(1)=6$

l'unico modo è il secondo $F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt + 6$

INTEGRALI DEFINITI

1. $$\int_1^4 \frac{|\log x - 1|}{x\log^2 x + x}\,dx = \int_1^e \frac{\log x - 1}{x\log^2 x + x} + \int_e^4 \frac{\log x - 1}{x\log^2 x + x}$$

1 e 4

TROVO LE PRIMITIVE

$$\int \frac{\log x - 1}{x(\log^2 x + 1)}\,dx = \left[\int \frac{t-1}{t^2+1}\,dt \right]_{t=\log x} = \frac{1}{2} \log(\log^2 x + 1) - \arctg(\log x) + k$$

$$I = -\left[\frac{1}{2}\log(\log^2 x+1) - \operatorname{arctg}(\log x)\right]_1^e + \left[\frac{1}{2}\log(\log^2 x+1) - \operatorname{arctg}(\log x)\right]_e^4 = \left[\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}\right] +$$

$$+\left[(\log^2 4+1) - \operatorname{arctg}(\log 4) - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= -\log 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\log(\log^2 4+1) - \operatorname{arctg}(\log 4)$$

---

2. $$\int_{-1}^{-3} \frac{x^2}{e^{x^3}-1}\,dx$$

Primitive: $$J = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{e^{x^3}-1}\,dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{dt}{e^t-1}\right]_{t=x^3}$$

$$K = \int \frac{1}{e^b-1}\,db = \int \frac{e^t}{e^t(e^t-1)}\,dt = \left[\int \overbrace{\frac{dy}{y(y-1)}}^{K}\right]_{y=e^t}$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{(A+B)y-A}{y(y-1)} \qquad \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=1 \\ A=-1 \end{cases}$$

$$K = -\log e^t + \log|e^t-1| + k = -t + \log|e^t-1| + k$$

$$J = \frac{1}{3}\left(-x^3 + \log|e^{x^3}-1|\right) + k$$

$$I = \frac{1}{3}\left[-x^3 + \log|e^{x^3}-1|\right]_{-1}^{-3} = \frac{1}{3}\left(27 + \log|e^{-27}-1| - 1 - \log|e^{-1}-1|\right)$$

---

3. $$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |x\log x|\,dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\log x\,dx + \int_1^e x\log x\,dx$$

$\frac{1}{e} \quad 1 \quad e$

Primitive $$\int \underset{FD}{\overset{\uparrow}{x}} \log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + k$$

$$I = -\left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{1}{4} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4e^2}$$

---

4. $$\int_0^{\pi} \frac{|\sin 2x|\sin x}{\sin^2 x+4}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sin^2 x+4}\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{———}$$

$0 \quad \pi$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Primitive: $$2\int \cos x\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+4}\,dx = 2\left[\int \underbrace{\frac{t^2}{t^2+4}}_{K}\,dt\right]_{t=\sin x}$$

$$K = \int \frac{t^2+4-4}{t^2+4}\,dt = \int\left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)dt = t - 2\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + k$$

$$J = 2\sin x - 4\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{2} + k$$

$$I = \left[2\sin x - 4\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[2\sin x - 4\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2 - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 4 - 8\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x^2+3x+2)}{(2x+3)^2}\,dx$

$$D\left(\frac{1}{2x+3}\right) = \frac{-2}{(2x+3)^2}$$

Primitive $\displaystyle J = \int \frac{1}{(2x+3)^2} \log(x^2+3x+2)\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{-2}{(2x+3)^2}}_{FD} \log(x^2+3x+2)\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2x+3}\log(x^2+3x+2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cancel{2x+3}}\,\frac{\cancel{2x+3}}{x^2+3x+2}\,dx$$

x^2+3x+2

$$x = \frac{-3\pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 1 \end{matrix} \qquad \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A + 2B}{(x+2)(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$J = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2x+3}\log(x^2+3x+2) - \frac{1}{2}\log|x+2| + \frac{1}{2}\log|x+1| + k$$

$$I = -\frac{1}{10}\log 6 - \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 2 - \left(-\frac{1}{6}\log 2 - \frac{1}{2}\log 2\right) = -\frac{1}{10}\log 2 - \frac{1}{10}\log 3 - \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{6}\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 = \dots$$

---

6. Area del rettangoloide relativo a $f(x) = |x|\,x^2 e^{3x^2}$ in $[-1, 2]$

f continua $\Rightarrow$ area $\displaystyle R_f = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -x^3 e^{3x^2}\,dx + \int_0^2 x^3 e^{3x^2}\,dx = \int_{-1}^{2} x^3 e^{3x^2}\,dx$

Primitive: $\displaystyle J = \int x^3 e^{3x^2}\,dx = \frac{1}{6}\int 6x\,x^2 e^{3x^2}\,dx = \frac{1}{18}\int 6x\cdot 3x^2\cdot 3x^2\,dx = \frac{1}{18}\left[\int t\,e^t\,dt\right]_{t=3x^2}$

$$\int t\,\underbrace{e^t}_{FD}\,dt = t\,e^t - \int e^t\,dt = e^t(t-1) + k$$

$\displaystyle J = \frac{1}{18}e^{3x^2}(3x^2-1) + k$ area $\displaystyle R_f = \frac{1}{18}\left[e^{3x^2}(3x^2-1)\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{18}\left[e^{12}(12-1) - e^3(3-1)\right] = \frac{1}{18}\left(11e^{12} - 2e^3\right)$