SVOLGIMENTO SIMULAZIONE DEL 18.06.24

T1. È il teorema di regolarità delle succ. monotone (pag. 4 degli appunti)

T2. È vera la b) per il teorema di cui sopra, infatti la succ. essendo monotona tende al proprio estremo inferiore o superiore, che è finito dato che essa è limitata.

Controesempio per la a): $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

E1. $z = a + ib$ Ricordiamo che $a = |z|\cos\alpha$, $b = |z|\sin\alpha$ quindi $-2 = -\frac{1}{2}|z| \Rightarrow |z| = 4$ Si ha allora

$z = 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ cioè $|z| = 4$, $\alpha = \frac{4}{3}\pi$

Ne segue $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{4}$, $\arg\frac{1}{z} = -\frac{4}{3}\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)\right) = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$

E2. $a_0 = 2$ $a_1 = \sqrt{2+2} - 1 = 1 < a_0$

$\{a_n\}$ è decrescente?

$\sqrt{2+a_n} - 1 < a_n$? Studiamo la disequazione

$\sqrt{2+x} - 1 < x \Rightarrow \sqrt{2+x} < x+1$ $(x>0)$ È fra quantità positive quindi equivale a $2+x < x^2+2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x - 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Si ha $a_n > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\forall n$? Se $n = 0$ sì, procediamo per induzione. Se $a_n > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ si ha $a_{n+1} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$?

$$\sqrt{2+a_n}-1 > \frac{-1+\sqrt5}{2} \iff 2\sqrt{2+a_n} > \sqrt5+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(2+a_n) > 6+2\sqrt5 \Rightarrow 2+a_n > \frac{3}{2}+\frac{\sqrt5}{2} \Rightarrow a_n > \frac{-1+\sqrt5}{2} \text{ vera.}$$

Se segue che $\{a_n\}$ è decrescente.

Se $a_n \to l$ allora anche $a_{n+1} \to l$ cioè

$\sqrt{2+a_n}-1 \to l$ ma $\sqrt{2+a_n}-1 \to \sqrt{2+l}-1$

Per l'unicità del limite si deve avere

$l = \sqrt{2+l}-1$ da cui si ricava $l = \frac{-1+\sqrt5}{2}$.