Avviso: la prossima lezione sarà martedì 6 maggio dalle 8-10

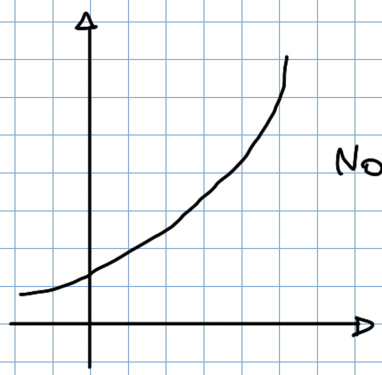
Finiamo il 28 maggio

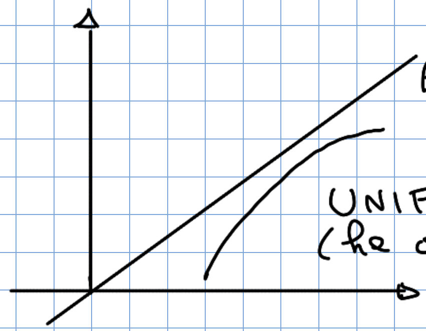
Di seguito argomenti che dovevamo affrontare in presenza:

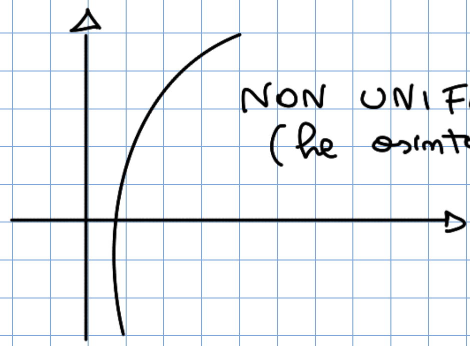
① Funzioni uniformemente continue

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua se:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: se $x_1, x_2 \in (a,b)$, $|x_1 - x_2| < \delta$ si ha $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$







Se nella definizione poniamo $x_2 = c$, $x_1 = x$ generico ciò si legge

$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \Rightarrow f$ è cont in c

UNIFORME. CONT $\Rightarrow$ CONT non il viceversa

Teorema di Heine - Cantor

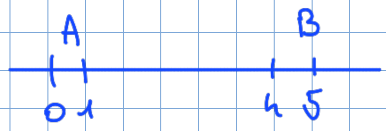
f cont. in $[a,b]$ è uniforme. cont.

② Sia f un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g $\left(\frac{f}{g} \to 0\right)$ Si può scrivere $f = \underbrace{o}_{\to \text{"o" piccolo}}(g)$

Cioè è una quantità trascurabile rispetto a g

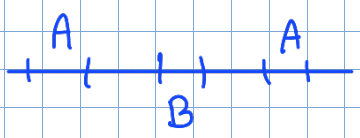
$o \to$ simbolo di LANDAU

③ Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ Si dice che sono SEPARATI se $a \le b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$



sono separati e disgiunti

$A = [0,1]$
$B = [4,5]$



sono disgiunti ma non separati

$A = [0,1] \cup [4,5]$
$B = [2,3]$

sono disgiunti ma non separati

$A = [0,1]$
$B = [1,2]$

A, B separati $\iff \sup A \le \inf B$

$\forall \gamma \in [\sup A, \inf B]$ è detto elemento di separazione

Se $\sup A = \inf B$ A e B sono contigui (hanno un unico elemento di separazione)

$A = [0,1]$ $B = [1,2]$ $\sup A = \inf B = 1 \in A \cap B$

$A = [0,1[$ $B =]1,2]$ // $1 \notin A \cup B$

$A = [0,1]$ $B =]1,2]$ // 1

$A = [0,1[$ $B = [1,2]$ // 1

$\}$ appartiene ad uno solo dei due insiemi

A, B contigui $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A, b \in B : b - a < \varepsilon$

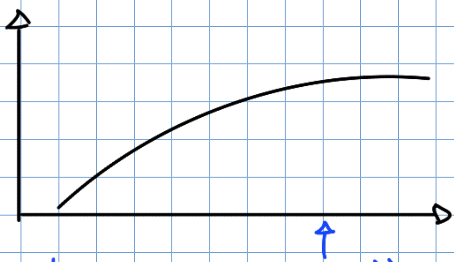
es: $A = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\sup A = \inf B = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n : \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right) < \varepsilon \iff \frac{2}{n} < \varepsilon \iff n > 2\varepsilon$

Capitolo 6: calcolo differenziale

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad \Delta f = f(b) - f(a)$ incremento di f

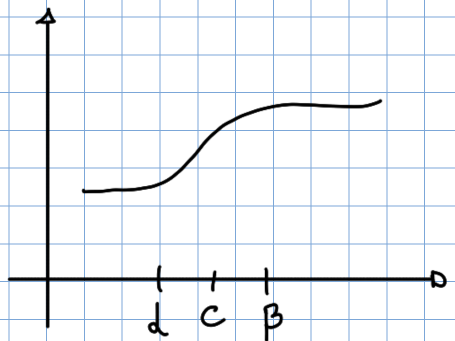
$\Delta x = b - a$ incremento della variabile



"questa sale più sparata di questa" cit. Naselli

qui è più alto

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ = rapporto incremento



Vicino c $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ è più grande rispetto ad altri punti della funzione

$c \in (a,b)$ con $\Delta f = f(x) - f(c)$ $\quad (x \in (a,b),\ x \neq c)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = r(x) \qquad r: (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$$

rapporto incrementale

Sappiamo che f crescente in $c \Leftrightarrow \exists I_\delta(c): r(x) > 0 \ \forall x \in I_\delta(c) \setminus \{c\}$

Se $\lim_{x \to c} r(x) > 0 \Rightarrow r(x) > 0$ in un intorno di $c \Rightarrow f$ cresce in c

(se ciò accade in ogni punto, f sarà strett cresc $\Rightarrow$ invertibile)

Se $\lim_{x \to c} r(x)$ esiste ed è finito, f è detta derivabile in c e si pone $f'(c) = \lim_{x \to c} r(x)$ (derivata di f in c)

???

In alternativa possiamo chiamare $c+h$ gli ultimi punti di (a,b)

$h = x - c$ $\quad$ Si deve avere $a < c + h < b \Leftrightarrow \underset{-}{a - c} < h < \underset{+}{b - c},\ h \neq 0$

il rapporto incrementale si scriverà $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = R(h)$
definito in $R: (a-c,\ b-c)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

R è composto da r con c+h

$r(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ $\quad R(h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0} (c+h) = c \\ \lim_{x\to c} r(x) = f'(c) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{h\to 0} R(h) = f'(c)$$

r è composto da R con x−c $\quad r(x) = R(x-c)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to c} (x-c) = 0 \\ \lim_{h\to 0} R(h) = f'(c) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to c} r(x) = f'(c)$$

in definitiva

$f'(c) = \lim_{x\to c} r(x) = \lim_{h\to 0} R(h)$

f si dice derivabile in (a,b) se lo è in ogni punto

se c è interno ad $]a,b[$ si pongono $\lim_{x\to c^-} r(x) = f'_-(c)$ deriv sinistra
$\lim_{x\to c^+} r(x) = f'_+(c)$ deriv destra

$\exists f'(c) \Leftrightarrow f'_-(c) = f'_+(c)$

(in a e in b la deriv è solo destra in a e sinistra in b)

Esempio:

$f(x) = k \qquad r(x) = \frac{k-k}{x-c} = 0 \qquad f'(c) = 0 \quad \forall c$

$f(x) = x \qquad r(x) = \frac{x-c}{x-c} = 1 \qquad f'(c) = 1 \quad \forall c$

$f(x) = x^2 \qquad r(x) = \frac{x^2-c^2}{x-c} = x+c \qquad f'(c) = 2c \quad \forall c$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad c = 0 \quad r(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \to 0^+} r(x) = +\infty$

$\Downarrow$

$\nexists f'(0)$

$f(x) = |x| \quad c = 0 \quad r(x) = \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \quad f'_+(0) = 1 \\ -1 & \text{se } x < 0 \quad f'_-(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \nexists f'(0)$

CONTINUITÀ $\not\Rightarrow$ DERIVABILITÀ $\quad$ come si vede dagli ultimi 2 esempi

teorema

f derivabile in $c \Rightarrow f$ continua in c

Dimostrazione

ts. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

$$f(x) = f(x) - f(c) + f(c) = \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{f'(c)} \underbrace{(x - c)}_{0} + f(c)$$

teorema

$\exists f'(c) \Leftrightarrow \exists p(x)$ polinomio di primo grado:

$p(c) = f(c)$

$\lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - p(x)}{x - c} = 0 \qquad (f(x) - p(x) = o(x - c))$

quindi $f(x) = p(x) + o(x - c)$

quantità trascurabile $\rightarrow$ f si può approssimare con p $\rightarrow$???

Dimostrazione

Se $\exists f'(c)$ scriviamo $p(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$

Si ha $p(c) = f(c)$ e $\dfrac{f(x) - p(x)}{x - c} = \dfrac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{x - c} =$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}}_{f'(c)} - f'(c) \frac{x - c}{x - c} \to 0$$

Viceversa se $\exists\, r(x) = f(c) + \ell(x-c)$ dim che $\exists\, f'(c)$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)-\ell(x-c)+\ell(x-c)}{x-c} = \frac{f(x)-r(x)}{x-c}$$

$$+\,\ell\,\frac{\cancel{x-c}}{\cancel{x-c}} \to \ell \Rightarrow \exists\, f'(c) = \ell$$

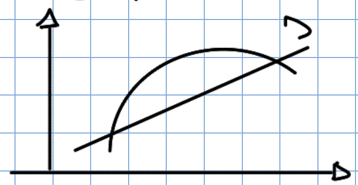
es. vedremo che se $f(x) = \sin x$ si ha $f'(x) = \cos x \quad \forall x$

$c = 0$

$\sin x = \sin 0 + \cos 0\,(x-0) + o(x-0) = x + o(x) \Rightarrow \sin x \sim x$

Interpretazione geometrica

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad c \in (a,b)$ $\quad \exists\, f'(c)$ $\quad$ con $c+h \in (a,b)$



retta secante

$$s: \frac{x-c}{c+h-\cancel{c}} = \frac{y-f(c)}{f(c+h)-f(c)}$$

$$s: y = f(c) + \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{= R}(x-c)$$

Osserviamo che se $h \to 0$ si ha $c+h \to c \Rightarrow s \to t$
(cioè "tende" ad avere un solo punto a comune col profilo, quindi "tende" ad essere tangente)

Dato che $\lim\limits_{h\to 0} R(h) = f'(c)$ possiamo considerare la retta di equazione

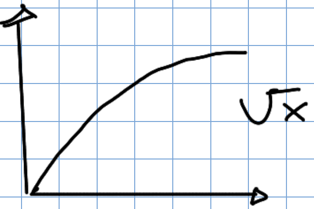
$$t: y = f(c) + f'(c)(x-c)$$

e chiamarla "tangente al profilo"

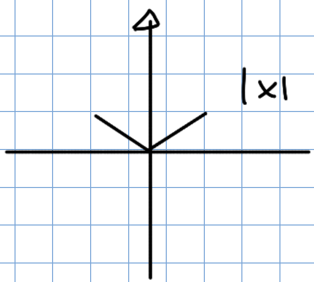
Osserviamo che $f(c) - f'(c)(x-c) = r(x)$

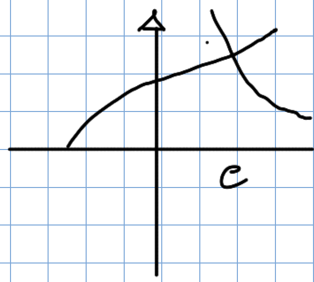
quindi approssimare f con un polinomio equivale ad approssimare il profilo con la tangente

Se $R(x)$ diverge per $x \to c$ si ha la tangente verticale
↓
???

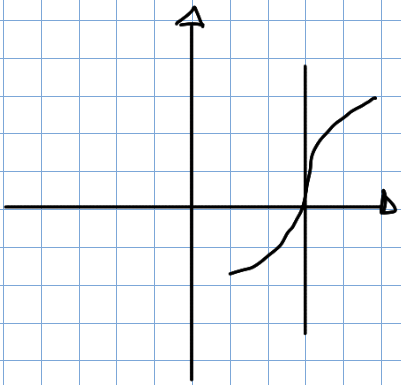


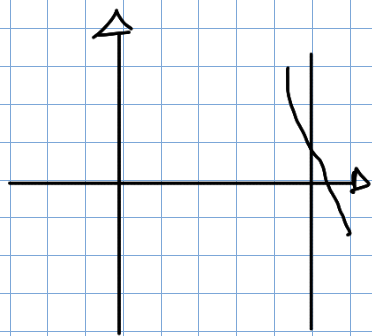
Se $f'_-(c) \neq f'_+(c)$ punto angoloso (ci sono due tangenti)





Casi in cui la tangente è verticale



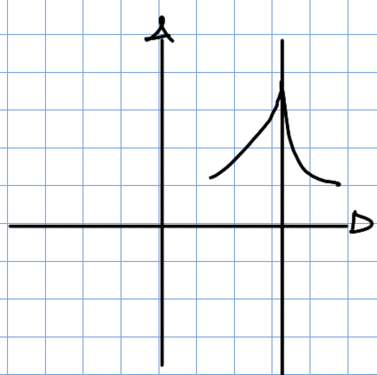


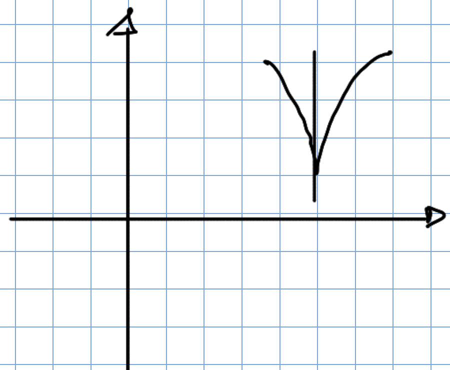
$$\lim_{x \to c} r(x) = +\infty$$

flesso ascendente

$$\lim_{x \to c} r(x) = -\infty$$

flesso discendente.





$$\lim_{x \to c^-} r(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to c^+} r(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to c^-} r(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to c^+} r(x) = +\infty$$

punto cuspidale

Se $\exists\, f'(x)\ \forall x \in (a, b)$ si può cons. la funz. $f'(x)$

Se $\exists$ la sua derivata nel punto c, essa sarà detta derivata seconda di f in c e si denota con $f''(c)$

analogamente $f'''(c), f^{IV}(c), \ldots, f^{(n)}(c)$

Si può fare la derivata di una successione?