

OPERAZIONI FRA INSIEMI

$$e \in A \quad A \subseteq B \quad \emptyset$$

$$A \cup B \quad A \cap B \quad A - B \neq B - A$$

P_1, P_2 proposizione degli elementi di A

$$P_1 \rightarrow B \subseteq A$$

$$P_2 \Rightarrow P_1$$

$$P_2 \rightarrow C \subseteq A$$

$$P_1: \text{numero} > 5$$

$$P_2 \Rightarrow P_1 \text{ implica}$$

$$P_2: \quad \quad \quad > 10$$

$$P_2 \text{ \u00e9 cond. suff. per } P_1$$

$$P_1 \text{ cond. necessaria per } P_2$$

\exists *esiste* \rightarrow quantificatore esistenziale

\forall *per ogni* \rightarrow quantificatore universale

dato e voglio definire $e + m$ $\forall m$ numero naturale

$$\begin{cases} e + 0 = e \\ e + \bar{m} = \overline{e + m} \end{cases} \rightarrow \text{definizione di somma}$$

\bar{m} \u00e9 il successivo di m

$$\bar{0} = 1 \quad e + 1 \Rightarrow e + \bar{0} \Rightarrow \overline{e + 0} \Rightarrow \bar{e}$$

$$\begin{cases} e \cdot 0 = 0 \\ e \cdot \bar{m} = e \cdot m + e \end{cases} \rightarrow \text{definizione di prodotto}$$

$$e < b \text{ se } \exists c : e + c = b$$

interi naturale

$$\mathbb{N}_0 = \{0, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

notazione di \mathbb{N} che parte da 0

// // // // parte da 1

interi relativi

$m \in \mathbb{N} \rightarrow +m \rightarrow \text{positivo}$
 $-m \rightarrow \text{negativo}$

$$\mathbb{Z} = \{ 0; +m; -m : m \in \mathbb{N} \}$$

$\pm m \rightarrow \mp m$ opposto di $\pm m$

$$3 + 4 = 7$$

$$(+3) + (+4) = (+7)$$

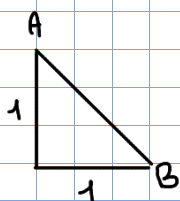
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

interi relativi frazionari

$$\mathbb{Q} = \left\{ a + \frac{b}{c} : \pm a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{4}{5} \rightarrow 2 \cdot 5 < 4 \cdot 3$$

\downarrow
 $10 < 12$



$$AB^2 = 2$$

$$AB = \sqrt{2} \rightarrow \text{quanto vale?}$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{3}{7} = 0,4285714$$

$$\pm \frac{p}{q} = \pm p_0, p_1, p_2, \dots \quad p_0 \in \mathbb{N}_0 \quad p_1, p_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

representazione decimale periodica

numeri reali

$$\mathbb{R} = \{ 0; \pm p_0, p_1, \dots : p_0 \in \mathbb{N}_0, p_1, p_2 \in \{0, \dots, 9\} \}$$

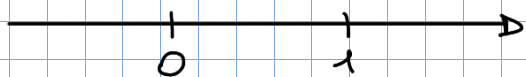
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} (\mathbb{R} - \mathbb{Q}_2)$$

Def

$$-p_0, p_1, \dots < 0 < +p_0, p_1, \dots$$

$$3, \overline{725} < 3, \overline{739} \Rightarrow 3,725 < 3,739$$

La rappresentazione geometrica di \mathbb{R} è una corrispondenza biunivoca fra \mathbb{R} e l'insieme dei punti di una retta su cui è fissato un sistema di ascisse



Teoremi di densità (di \mathbb{Q} e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) in \mathbb{R} :

Dati 2 numeri reali $a < b$, esistono infiniti $x \in \mathbb{Q}$ e infiniti $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $a < x < b$ e $a < y < b$
 \downarrow
 tali
 che

Notazione ad intervalli

L'insieme dei numeri compresi fra a e b si chiama intervallo di estremi a, b

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ int. chiuso} \\]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ int. aperto} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} [a, b] \\]a, b[\end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{intervalli} \\ \text{limitati} \end{array}$$

$b - a \rightarrow$ ampiezza dell'intervallo

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} && \text{non limitato superiormente} \\]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} && \text{non limitato inferiormente} \end{aligned}$$

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \rightarrow \text{tutto } \mathbb{R}$$

(a, b) intervallo generico

$\mathbb{Q}, b \mathbb{I}$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{I}0, 1 \mathbb{I}$

\mathbb{R} è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{I}-1, 1 \mathbb{I}$

$\mathbb{I}0, 1 \mathbb{I}$ ha una potenza maggiore del numerabile

$$x_1 = 0, a_{11} a_{12} \dots$$

$$x_2 = 0, a_{21} a_{22} \dots$$

Costruiamo $x = 0, b_1 b_2 \dots \in \mathbb{I}0, 1 \mathbb{I}$ per

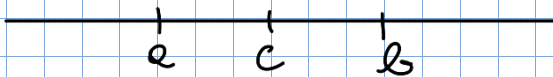
$$b_1 \neq a_{11} \Rightarrow x \neq x_1$$

$$b_2 \neq a_{22} \Rightarrow x \neq x_2$$

$$b_m \neq a_{mm} \Rightarrow x \neq x_m \quad \forall m \Rightarrow x \notin \mathbb{I}0, 1 \mathbb{I}$$

Potenza di \mathbb{R} = potenza del continuo

Intorno di un numero



$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$c - a = b - c = \pi \Rightarrow a = c - \pi$$

$$b = c + \pi$$

$$(a, b) = (c - \pi, c + \pi)$$

$$c \in \mathbb{R} \quad \pi > 0$$

$$\mathbb{I}c - \pi, c + \pi \mathbb{I} = \mathbb{I}_{\pi}(c) = B(c, \pi)$$

BALL \rightarrow sfera
intorno

non vuole dire di queste 3
motazioni per dire

Intorno di c di raggio π

$x \in \mathbb{R}$ $X \neq \emptyset$ insieme numerico

Massimo X : $\max X = M \in X: M \geq x \quad \forall x \in X$

il massimo è unico: se c'è ne possono due M_1, M_2

$$\begin{aligned} M_1, M_2 \in X \quad M_1 \geq M_2 \\ M_2 \geq M_1 \quad \Rightarrow M_1 = M_2 \end{aligned}$$

Non c'è sempre un massimo

$$[0, 1[\quad M < 1$$

$$M \geq x \quad \forall x \in [0, 1[$$

$$\text{dato } \bar{x}: M < \bar{x} < 1$$

$$\text{se ha } x \in [0, 1[\\ \bar{x} > M$$

$$x = [0, 1] \quad 1 = \max X$$

$$m = \min X \text{ se } m \in X \quad m \leq x \quad \forall x \in X$$

se esiste, è unico.

$$h \in \mathbb{R} \text{ maggiorante per } X \text{ se } h \geq x \quad \forall x \in X$$

$$\bar{\pi}_x = \text{ms dei maggioranti} \quad \max x \in \bar{\pi}_x$$

$$\text{se } h \in \bar{\pi}_x \text{ e } h' > h \Rightarrow h' \in \bar{\pi}_x$$

L'insieme dei maggioranti è \emptyset oppure ∞

Proprietà dei maggioranti

$$h \neq \bar{\pi}_x \text{ se } \exists x \in X: x > h$$

$$\bar{\pi}_x = \emptyset \text{ se } \forall h > 0 \exists x \in X: x > h$$

$$\bar{\pi}_x = [1, +\infty[$$

Definizione estremo superiore

Se $\bar{M}_X \neq 0$ si def $\sup X$ = min \bar{M}_X
estremo
superiore

Se $\bar{M}_X = 0$ si def $\sup X = \infty$

Definizione limito superiormente

X si dice limito superiormente se $\bar{M}_X \neq 0$