Capitolo 1

Questo è la rielaborazione del file AppuntiCap1.pdf

Numeri reali e complessi e generalità sulle funzioni reali di una variabile reale

L'insieme dei numeri reali

Simbologia insiemi numerici e operazioni in N

Di seguito i simboli che denotano i vari insiemi numerici:

- $N =$ insieme dei numeri naturali (Es: 1,2,3,4,5...)
- $N_0 = N \cup \{0\}$ (Es: 0,1,2,3,4,5...)
- $Z =$ insieme dei numeri interi relativi (-2,-1,0,+1,+2)
- Q = insieme dei numeri razionali (Es. tutti i numeri che posso essere scritti come frazione)
  Ricordiamo il percorso che porta da N a Q, i numeri naturali sono concetti primitivi perché legati ad una capacità della nostra mente ovvero quella di "associare", un altro concetto primitivo è il concetto di **"successivo di un numero"** che in questa fase indicheremo con n'. Nei numeri naturali vale il **concetto di induzione** (se una proprietà è vera per $n = 1$, si suppone che sia vera per n, e si dimostra vera per $n + 1$ allora è vera per tutti gli n). Partendo dal principio di induzione si possono definire varie operazioni (somma, prodotto e derivati) in N di seguito elencate:
  $a, n \in N_0$

1. $a + 0 = a$
2. $a + n' = (a + n)'$
3. $a \cdot 0 = 0$
4. $a \cdot n' = a \cdot n + a$
5. $a^0 = 1$
6. $a^{n'} = a^n \cdot n$
7. $a + 1 = a + 0' = (a + 0)' = a'$
8. $a < b$ se esiste $n \in N$ tale che $a + n = b$

proprietà delle potenze

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$(a^n)^m = a^{nm}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Inoltre abbiamo delle operazioni inverse (sottrazione e divisione) nate per risolvere dei problemi:

- **Sottrazione:** trovare n tale che $b + n = a$
- **Divisione**: trovare n tale che $a = bn$
  Essi tuttavia non sono sempre risolubili, infatti il primo lo è solo se $a > b$ e il secondo solo se a è multiplo di b, questi problemi hanno portato all'introduzione degli insiemi numerici successivi.

Insiemi numerici successivi ad N

l'insieme dei numeri relativi definito così:

definizione di Z (insieme numeri relativi)

$Z = \{0\} \cup \{+n : n \in N\} \cup \{-n : n \in N\}$

Introducendo le operazioni e l'ordine nella maniera ben nota è subito evidente che il problema della sottrazione in Z è sempre risolto. Associando ad ogni $n \in N$ il numero $+n \in Z$ si ottiene una corrispondenza biunivoca fra N e l'insieme dei numeri interi positivi, quindi possiamo considerare N un sottoinsieme di Z.

l'insieme dei numeri razionali definito così:

> **definizione di Q (insieme dei numeri razionali)**
>
> $Q = \{(m, n) | m \in Z, n \in N\}$
> questi numeri li rappresentiamo sempre nella forma: $\pm\frac{m}{n}$.

Introducendo le operazioni e l'ordine nella maniera ben nota è subito evidente che anche il problema della divisione in Q è sempre risolto. Associando ad ogni $z \in Z$ il numero $\frac{z}{1} \in Q$ si ottiene una corrispondenza biunivoca fra Z e l'insieme dei numeri razionali con denominatore 1, quindi possiamo considerare Z un sottoinsieme di Q. Questo insieme lascia tuttavia irrisolto il problema dell'estrazione della radice ovvero:

> **Esempio**
>
> $\sqrt{2} = ?$ questa operazione non ha nessuno soluzione in Q

è necessario quindi introdurre un insieme di numeri più ampio ovvero la rappresentazione decimale dei numeri razionali, infatti ogni numero razionale $r = \pm\frac{m}{n}$ ammette una rappresentazione del tipo $a = \pm a_0, a_1a_2\ldots$ costituita da un segno, un numero intero a_0 e una successione di cifre decimali che sono o un numero finito o periodici. **A questo punto possiamo introdurre l'insieme dei numeri reali definito così:**
$\mathbb{R} = \{0\} \cup \{\pm a_0, a_1a_2 \cdots : a_0 \in \mathbb{N}_0; a_i \in \{0, \cdots, 9\} \forall i \in \mathbb{N}\}$
i suoi elementi sono detti **numeri reali**:

- **Numeri reali razionali**: se hanno una successione periodica di cifre decimali
- **Numeri reali irrazionali**: se non hanno una successione periodica di cifre decimali

Introduciamo ordine e operazioni in R

- **Introduciamo un ordine in R**:
  Per farlo si procede così:
  1. Ogni numero negativo è minore di 0, e ogni numero positivo e maggiore di zero
  2. dati due numeri positivi $a = \pm a_0, a_1\ldots$ e $a = \pm b_0, b_1\ldots$ diremo maggiore quello in cui la prima cifra diversa è maggiore
  3. dati $a, b < 0$ diremo che $a < b$ se $-a > -b$
- **Introduciamo la somma in R**
  Per farlo si procede così:
  1. $a + 0 = a$ per ogni $a \in R$
  2. se $a, b > 0$ per ogni $n \in N$ si considera il numero $s_n = \pm a_0, a_1 \cdots a_n$ + $\pm b_0, b_1 \cdots b_n$ è possibile vedere che da un certo valore di n in poi i 2 numeri hanno la stessa parte intera, la stessa prima cifra. (n è il numero di cifre

dopo la virgola)

Supponiamo di voler sommare due numeri reali positivi:
$a = \sqrt{2} \approx 1.4142135...$
$b = 1.23 = 1.2300000...$ (questo è un numero razionale, ma funziona lo stesso)

Seguiamo i passaggi del punto (ii):

1. **Approssimazioni per troncamento ($a^{(n)}$ e $b^{(n)}$):**
   - $n = 0$: $a^{(0)} = 1$, $b^{(0)} = 1$
   - $n = 1$: $a^{(1)} = 1.4$, $b^{(1)} = 1.2$
   - $n = 2$: $a^{(2)} = 1.41$, $b^{(2)} = 1.23$
   - $n = 3$: $a^{(3)} = 1.414$, $b^{(3)} = 1.230$
   - $n = 4$: $a^{(4)} = 1.4142$, $b^{(4)} = 1.2300$
   - $n = 5$: $a^{(5)} = 1.41421$, $b^{(5)} = 1.23000$
2. **Somma delle approssimazioni ($s_n = a^{(n)} + b^{(n)}$):**
   - $s_0 = 1 + 1 = 2$
   - $s_1 = 1.4 + 1.2 = 2.6$
   - $s_2 = 1.41 + 1.23 = 2.64$
   - $s_3 = 1.414 + 1.230 = 2.644$
   - $s_4 = 1.4142 + 1.2300 = 2.6442$
   - $s_5 = 1.41421 + 1.23000 = 2.64421$

la parte intera si stabilizza per $n = 0$, la prima cifra decimale per $n = 1$, la seconda cifra decimale per $n = 2$, ecc...

3. se uno dei due numeri è negativo si procede come nel caso dei numeri razionali. Esempio: $-\pi + \sqrt{2} = -(\pi - \sqrt{2})$.

- **Rappresentazione dei numeri reali**
  L'insieme dei numeri reali viene rappresentato su una retta dove si costruisce una corrispondenza biunivoca fra R e l'insieme di punti di una retta, associando ad ogni $x \in R$ il punto della retta avente ascissa x.

Densità di Q e di R\Q in R

Teorema: Siano a, b due numeri reali con $a < b$. Allora, esistono infiniti numeri razionali r e infiniti numeri irrazionali s tali che $a < r < b$, $a < s < b$.
Da questo teorema segue che tra a e b esistono infiniti numeri reali.
Spiegazione: Se prendi due numeri reali a e b con a<b, tra di loro non c'è mai un "vuoto": ci sono sempre infiniti numeri che stanno tra a e b.
Non solo: tra a e b ci sono infiniti razionali (numeri come $\frac{3}{4}$, -5, 7.1 , ecc.) e infiniti irrazionali (numeri come $\sqrt{2}$)Conseguenza

Nomenclature sugli intervalli

Intervalli limitati:

- $]a, b[= \{x \in R : a < x < b\}$ (Intervallo aperto)
- $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ (Intervallo chiuso)
  Intervalli non limitati:
- $]a, +\infty[= \{x \in R : x > a\}$ (Intervallo non limitato superiormente)
- $]-\infty, b[= \{x \in R : x < b\}$ (Intervallo non limitato inferiormente)
  Intervalli notevoli:
- $]-\infty, +\infty[= R$
- (a, b) intervallo generico

Intorno di un numero

Un'intervallo del tipo $]c - r, c + r[$ (con $c \in R$ ed $r > 0$) viene detto **Intorno di c di raggio r** e si denota con $B(c, r), I_r(c)$

Proprietà di Archimede

Dati $a, b > 0$ esiste un $n \in N$ tale che $na > b$

Insiemi finiti, infiniti, numerabili

Definizione: Siano A e B due insiemi non vuoti, diremo che hanno la stessa potenza se esiste una corrispondenza biunivoca $f : A \to B$
Definizione: Sia X un insieme non vuoto. Diremo che X è **finito** ed ha n elementi se esiste una corrispondenza biunivoca fra X e l'insieme $\{1, 2, \cdots, n\}$. In caso contrario X è detto **infinito**. La caratteristica di un insieme infinito X e che esso ha la stessa potenza di un suo sottoinsieme proprio (pur avendo più elementi!). Ad esempio, consideriamo l'insieme N dei numeri naturali e l'insieme P dei numeri naturali pari. Associando ad ogni $n \in N$ il numero $2n \in P$ si ottiene una corrispondenza biunivoca.
Definizione Un insieme X si dice **numerabile** se ha la stessa potenza di N. Z e Q sono entrambi numerabili. Per invece R possiamo dire le seguenti cose:

- Tutti gli intervalli hanno la medesima potenza
    - Questo significa che, ad esempio, l'intervallo $(0, 1)$, $(2, 5)$ o anche $(-\infty, \infty)$ hanno tutti la stessa cardinalità. Anche se sembrano "lunghi" in modo diverso, da un punto di vista insiemistico, contengono lo stesso numero di elementi.
- La potenza degli intervalli è maggiore della potenza del numerabile
    - un intervallo reale come $(0, 1)$ non è numerabile: non esiste un modo per elencare tutti i numeri reali in quell'intervallo.
- R ha la stessa potenza degli intervalli
    - L'insieme dei numeri reali R, anche tutto intero (non solo un intervallo), ha la stessa cardinalità di qualsiasi intervallo reale.

Valore assoluto

Se $x \in R$ si chiama valore assoluto di x il numero reale $|x|$ definito ponendo:

- $|x| = x$ se $x \geq 0$
- $|x| = -x$ se $x < 0$
  Di seguito le proprietà del valore assoluto:

1. $|x| \geq 0; \quad |x| = 0 \iff x = 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $-|x| \leq x \leq |x|$
4. $|xy| = |x|\,|y|$
5. $a < x < b,\ a < y < b \Rightarrow |x - y| < b - a$
6. $-a < x < a \Leftrightarrow |x| < a \quad (\text{essendo } a > 0)$
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$
8. $|a - b| \leq |a| + |b|$
9. $|x| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = 0$

Estremo inferiore ed estremo superiore

Sia X un insieme numerico, ossia un sottoinsieme non vuoto di R.

- **Minimo**: è un elemento $m \in X$ tale che $m \leq x$ per ogni $x \in X$ (è unico)
- **Massimo**: è un elemento $m \in X$ tale che $m \geq x$ per ogni $x \in X$ (è unico)
- **Minorante**: un numero $h \in R$ è detto *minorante* di X se $h \leq x$ per ogni $x \in X$, denoteremo con $\underline{M}_x$ l'insieme dei minoranti di X. Osserviamo che:
    - se $h \in \underline{M}_x$ e $h' < h$ allora $h' \in \underline{M}_x$, quindi i minoranti di X se esistono sono infiniti
    - $h \notin \underline{M}_x$ se esiste un $x \in X : x < h$
    - $\underline{M}_x = \emptyset$ se per ogni $h \in R$ esiste $x \in X : x < h$
- **Maggioranti**: un numero $k \in R$ è detto *maggiorante* di X se $k \geq x$ per ogni $x \in X$. Denoteremo con $\overline{M_x}$ l'insieme dei maggioranti di X. Osserviamo che:
    - se $k \in \overline{M_x} e k' > k, allora k' \in \overline{M_x}$, quindi i maggioranti di X, se esistono sono infiniti
    - $k \notin \overline{M_x}$ se esiste $x \in X : x > k$
    - $\overline{M_x} = \emptyset$ se, per ogni $k \in R$ esiste un $x \in X : x > k$

☰ Example

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$:

- l'insieme dei maggioranti di A è $M = \{x \in R | x \geq 3\}$
- l'insieme dei minoranti di A è $M = \{x \in R | x \leq 1\}$

- **Limitato inferiormente**: X è limitato inferiormente se $\underline{M_x} \neq \emptyset$
- **Limitato superiormente**: X è limitato superiormente se $\overline{M_x} \neq \emptyset$
- **Limitato**: è detto limitato se è sia limitato superiormente che inferiormente

In definitiva, un insieme è limitato se e solo se esiste un intervallo che lo contiene, detto ciò possiamo definire il seguente teorema:
Teorema:

1. Sia X un insieme limitato inferiormente, allora possiamo dire che $\underline{M_x}$ è dotato di massimo
2. Sia X un insieme limitato superiormente, allora possiamo dire che $\overline{M_x}$ è dotato di minimo
   Quindi possiamo dire che:

- **Estremo inferiore**: che denotiamo con $infX$ è uguale al $max\underline{M_x}$, se X non è limitato inferiormente si pone $infX = -\infty$. Dato un numero l questo è l'estremo inferiore di X se e solo se verifica queste proprietà:
  - $L \leq x \, \forall x \in X$
  - $\forall \epsilon > 0 \exists x \in X : x < l - \epsilon$
- **Estremo superiore**: che denotiamo con $supX$ è uguale al $min\underline{M_x}$, se X non è limitato superiormente si pone $supX = +\infty$. Dato un numero l questo è l'estremo superiore di X se e solo se verifica queste proprietà:
  - $L \geq x \, \forall x \in X$
  - $\forall \epsilon > 0 \exists x \in X : x > l - \epsilon$

Nozioni di topologia

Sia X un insieme numerico, di seguito varie nozioni di topologia:

- **Punto interno**: $c \in X$ è detto punto interno se esiste un $r > 0$ tale che $]c - r, c + +r[\subseteq X$, indichiamo con $int(X)$ l'insieme dei punti interni.
  - Osserviamo che se X è un intervallo (a, b), i punti interni sono i tutti e soli punti dell'intervallo aperto $]a, b[$
- **Punto di frontiera**: un numero reale c è detto *punto di frontiera* per X se per ogni $r > 0$ nell'intorno $]c - r, c + +r[$ ci sono elementi di X che elementi di $R \backslash X$
- **Punto di accumulazione**: un numero reale c è detto punti di accumulazione per X se, per ogni $r > 0$ nell'intorno $]c - r, c + +r[$ ci sono elementi diversi da c. L'insieme dei punti di accumulazione di accumulazione si denota con $D(X)$
- **Insieme aperto**: X si dice *aperto* se è vuoto oppure quando $X = int(X)$
- **Insieme chiuso**: L'insieme X è detto *chiuso* se il suo complementare $R \backslash X$ è aperto. Si definisce chiusura di X l'insieme $\overline{X} = X \cup D(X)$ ovvero un insieme si dice chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di frontiera
  Osservazioni:
- se un punto è interno allora è di accumulazione
- se un punto è di frontiera potrebbe non essere di accumulazione
  - se $X = [0, 1] \cup \{5\}$, il punto$c = 5$ è di frontiera ma non di accumulazione.
- X si dice denso in R se $\overline{X} = R$. Dal teorema di densità di Q in R segue che tutti i numeri reali sono punti di accumulazione per Q quindi $\overline{Q} = R$, lo stesso vale per $R \backslash Q$. Si ha dunque, se (a, b) è un intervallo limitato, posto $X = (a, b) \cap Q$ oppure $X = (a, b) \cap (R\ Q)$, si ha $X = [a, b]$.

Potenze e radici

Se $a \in R$ e $n \in N_0$ si definiscono i seguenti assiomi:

- a^0 = 1
- a^{n+1} = $a^n \times a$

- Se $a \in R \backslash \{0\}$ e $n \in N$ si definisce $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
  Per definire la potenza nel caso in cui l'esponente sia razionale o irrazionale dobbiamo premettere il seguente teorema

Teorema della radice n-ma aritmetica: Siano a un numero reale positivo ed n un numero naturale maggiore o uguale a 2. Allora esiste uno ed uno solo numero positivo b tale che $b^n = a$, il numero b è detto radice n-ma aritmetica di a e si indica con $\sqrt[n]{a}$

grazie a questo teorema se $a > 0$ e $n \in N$ si definisce:

- $a^{\frac{1}{n}}$ = $\sqrt[n]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$
  Tutte le potenze definite fino ad adesso sono tutte **positive** infatti. Inoltre ricordiamo che:
- se $a > 1$ sia ha $a^b > 1$ se e solo se $b > 0$
- se $0 < a < 1$ si ha $a^b > 1$ se e solo se $b < 0$
  Per poter estendere la definizione di radice (data sopra) dobbiamo discutere l'equazione binomia, come fatto di seguito:
  Discussione equazione binomia
  Siano $a \in R$ e $n \in N$ con $n \geq 2$ vogliamo trovare tutti i numeri reali x tali che $x^n = a$, l'equazione $x^n = a$ è detta equazione binomia. Di seguito tutte le soluzioni al variare di a

1. $a = 0$ l'unica soluzione è $x = 0$
2. $a > 0$ ci sono 2 soluzioni:
   - $\pm\sqrt[n]{a}$ per n pari
   - $\sqrt[n]{a}$ per n dispari
3. $a < 0$:
   - Non ci sono soluzioni per n pari
   - $-\sqrt[n]{-a}$ per n dispari
   Grazie a quanto appena visto possiamo dire che per ogni $n \in N$ e $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ per $x < 0$ ed n dispari

Logaritmi

Siano a, b due numeri positivi con $a \neq 1$. Si può dimostrare che l'equazione $a^x = b$ ha una e una sola soluzione detta logaritmo di b in base a e indicata con $\log_a b$, da questo capiamo che il logaritmo verifica la seguente uguaglianza:

$$a^{\log_a b} = b$$

Di seguito un po' di proprietà dei logaritmi:
$\log_a a = 1$
$\log_a b = 0 \iff b = 1$
$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
$\log_a b^x = x \log_a b$
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
$\log_a b = (\log_a c)(\log_c b)$
Dalla prima e dall'ultima delle precedenti eguaglianze, si ottiene
$1 = \log_a a = (\log_a b)(\log_b a) \implies \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
Osserviamo inoltre che $\log_a b > 0$ se e solo se a e b sono entrambi maggiori di 1 o minori di 1.

Cenni sui numeri complessi

Definizione: Definiamo numero complesso una coppia ordinata di numeri reali: $z = (a, b)$ con $a, b \in R$. Indichiamo con C l'insieme dei numeri complessi.
Equivalenza: se $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ sono due numeri complessi, diremo che $z = w$ se $a = c$ e $b = d$ se $z \neq w$

Dalla definizione appare chiaro che si possa stabile una corrispondenza biunivoca fra C e il piano cartesiano, facendo corrispondere ad $z = (a, b)$ il punto del piano avente coordinate (a, b).

Notazione:

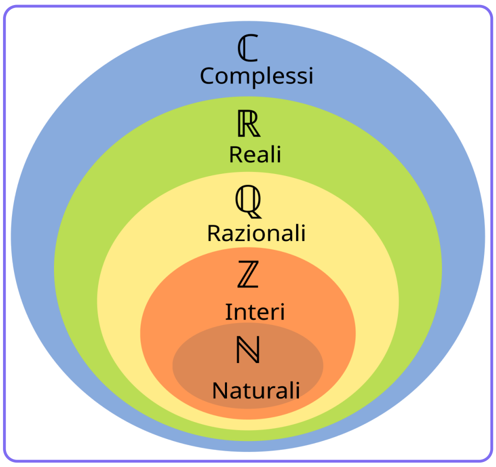
Dato $z = (a, b) \in C$:

- se $b = 0$: z è detto **numero complesso reale**
- se $b \neq 0$ è detto **numero complesso immaginario**
- se $a = 0$ e $b \neq 0$ **numero immaginario puro**
  Convenzioni:
- $0 = (0, 0)$ zero complesso
- $1 = (1, 0)$ unità reale
- $i = (0, 1)$ unità immaginaria
- $-z = (-a, -b)$ opposto di z
- $\overline{z} = (a, -b)$ coniugato di z
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ modulo di z

> **Tip**
>
> Presa un'unita reale $x = (x, 0)$ il suo modulo è: $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = x$

Introduciamo le operazioni

- $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ somma
- $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ prodotto
  Osservazioni
- $z + (-z) = 0$
- $z * 1 = z$
- $z * \overline{z} = |z|^2$
- $i^2 = (0, 1) * (0, -1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$ (un numero alla seconda che da risultato negativo)
  È possibile indentificare ogni numero reale a come il numero complesso reale $(a, 0)$ si può dunque considerare R come un sottoinsieme di C (per questo possiamo affermare che $i^2 = -1$ anche se siamo nel campo complesso)



Forma algebrica e forma trigonometrica

Forma algebrica: Sia $z = (a, b) \in C$ alla luce delle definizione viste prima possiamo osservare che:

$$z = (a, 0) + (0, 1) + (b, 0) \to z = a + ib$$

dopo la freccia troviamo la forma algebrica di z, molto utile perché possiamo considerare z come un polinomio in specifico come somma di una "parte reale" (a) e di una "parte immaginaria" (ib)

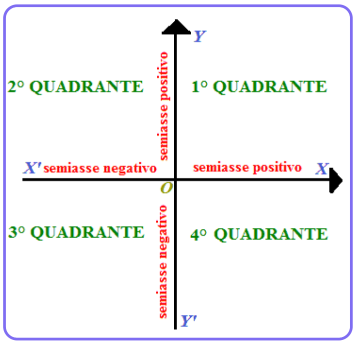
> **Esempio**

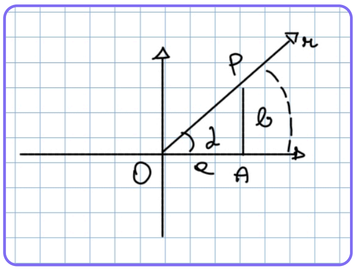
$$i^2=-1$$

$$\frac{2+i}{3+4i}=\frac{\overset{a}{(2}+\overset{b}{i)}\,\overset{c}{(3}-\overset{d}{4i)}}{\underset{a}{(3}+\underset{b}{4i)}\,\underset{c}{(3}-\underset{d}{4i)}}=\frac{\overset{(ac-bd)\,(ad+bc)}{(6+4)\,(-8i+3i)}}{\underset{(ac-bd)\,(ad+bc)}{(9+16)\,(-12i+12i)}}=\frac{10-5i}{25}=\frac{10}{25}-\frac{5i}{25}$$

ottenendo un quoziente dei due numeri, in forma algebrica.

Forma trigonometrica
Ricordiamo la costruzione del piano cartesiano:





Sia ora $z=a+ib$ un numero complesso non nullo, e sia $P=(a,b)$ il punto del piano che lo rappresenta. Indichiamo con α la misura in radianti del più piccolo angolo di cui deve ruotare il semiasse delle ascisse(x) positive per sovrapporsi in direzione e verso alla semiretta OP orientata da O verso P. Se A è la proiezione di P sull'asse delle ascisse, il triangolo OPA è un triangolo rettangolo quindi si ha:

- $a=OA=|z|\cos\alpha$
- $b=AP=|z|\sin\alpha$
  Detto ciò possiamo scrivere il numero z nella seguente forma:
  $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

Da forma algebrica a trigonometrica

1. $i=0+1i$ forma algebrica
2. $\alpha=90^\circ=\frac{\pi}{2}$ perché i nel piano cartesiano si trova nell'asse y coord = (0,1)
3. $|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$ calcolo modulo di i
4. $i=|i|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$
5. $i=1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ forma trigonometrica

Prodotto in forma trigonometrica: il prodotto di due numeri in forma trigonometrica dopo varie deduzioni utilizzando la formula di addizione del coseno e seno si deduce facilmente la seguente formula detta **formula di Moivre** che fornisce la la potenza intera di un numero complesso:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$

☰ Example

$i^2 = 1[cos(2\pi) + isin(2\pi)]^2 = 1^2(\cos(2 * \frac{\pi}{2}) + i\sin(2 * \frac{\pi}{2})) = cos(\pi) + isin(\pi) = -1$

Radici

Siano z un numero complesso e n un intero maggiore o uguale a 2. Un numero complesso w tale che $w^n = z$ è detto radice *ennesima* di z. Di seguito ci proponiamo di trovare tutte le radici ennesime di z:

- $z = 0$: per la legge dell'annullamento del prodotto l'unica radice è $w = 0$.
- $z \neq 0$: in tal caso le eventuali radici saranno evidentemente non nulle. Sia w una di esse
  Scriviamo z e w in forma trigonometrica
- $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
- $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
  Usando la formula di Moivre scriviamo l'uguaglianza $w^n = z$ in questo modo:

$$|w|^n(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

  Da questo concludiamo le seguenti cose:
- $|w|^n = |z| \rightarrow |w| = \sqrt{n}|z|$
- esiste un $k \in Z : n\beta = \alpha + 2k\pi \rightarrow \beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$
  Quindi la radice w sarà del tipo:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right)(*)$$

  Al variare di k nell'insieme $\{0, \ldots, n-1\}$ otteniamo tutte le n radici distinte di z

☰ Example

Le radici quarte di i sono: $\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}$ per $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ovvero le seguenti scritte in forma esponenziale:

- $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
- $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$
- $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)$
- $\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)$

Non scriviamo $\sqrt[n]{|z|}$ perché lavorando con i il modulo è sempre 1

Se consideriamo il caso specifico delle radice quadrate avremo le due radici distinte scritte di seguito:

- $w_o = \sqrt{|z|}(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}))$
- $w_1 = \sqrt{|z|}(\cos(\frac{\alpha}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\alpha}{2} + \pi)))$
  allora possiamo dire che $w_1 = -w_0$ (grazie alle formule 3 e 4). In particolare possiamo osservare che se $z \in R$:
- se $z > 0$, $\alpha = 0$ e $|z| = z$ allora si ottengono le due radici $\pm\sqrt{z}$
- se $z < 0$, $\alpha = \pi$ e $|z| = -z$ si ottengono le due radici $\pm i\sqrt{-z}$

☰ Example

- $z = 9 \Rightarrow \alpha = 0, |z| = 9$
- Forma polare: $z = 9(\cos 0 + i \sin 0)$
- Radici quadrate:

$$w_0 = \sqrt{9}\left(\cos\frac{0}{2} + i\sin\frac{0}{2}\right) = 3(\cos 0 + i\sin 0) = 3$$

$$w_1 = \sqrt{9}\left(\cos\left(\frac{0}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{0}{2}+\pi\right)\right) = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1+0i) = -3$$

Risultato:

$$\sqrt{9} = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad w_0 = 3, \quad w_1 = -3$$

- $z = -16 \Rightarrow \alpha = \pi, |z| = 16$
- Forma polare: $z = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$
- Radici quadrate:

$$w_0 = \sqrt{16}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 4(0+i) = 4i$$

$$w_1 = \sqrt{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)\right) = 4(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 4(0-i) = -4i$$

Risultato:

$$\sqrt{-16} = \pm 4i \quad \Rightarrow \quad w_0 = 4i, \quad w_1 = -4i$$

by ChatGpt

Questa cosa ha delle implicazioni, ad esempio nella formula del Δ per la risoluzione delle equazioni di secondo grado, infatti in caso di Δ negativo la formula risolutiva diventa:

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Example

Ad esempio, le soluzioni dell'equazione (a coefficienti reali, con discriminante negativo) $z^2 - 2z + 2 = 0$ sono $z = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$

Funzioni reali di una variabile reale

Generalità

Sia f una funzione reale definita in un sottoinsieme X di R, ovvero $f : X \rightarrow R$. Si chiama grafico di f il seguente sottoinsieme di R^2:

$$gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

Definizioni:

- **Funzione pari**: f si dice pari se e solo se il suo grafico è un insieme simmetrico rispetto all'asse delle ordinate(y) cioè se contiene il punto (a, b) allora contiene anche il punto $(-a, b)$
- **Funzione dispari**: f è una funzione dispari se e solo se il suo grafico è un insieme simmetrico rispetto all'origine cioè se contiene il punto (a, b) allora contiene il punto $(-a, -b)$

- **Funzione periodica**: f si dice periodica se esiste un numero positivo T (detto periodo) tale che $\forall x \in R$ si ha $f(x+T) = f(x)$ inoltre f è periodica se e solo se $f(x+hT) = f(x) \forall x \in R, h \in Z$
-

Cose da ricordare

Formule della trigonometria

Id	Formula	Nome / Spiegazione
1	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	Seno è una funzione dispari
2	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	Coseno è una funzione pari
3	$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$	Traslazione di mezzo giro
4	$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$	Come sopra
5	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	Formula della somma per il seno
6	$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	Formula della somma per il coseno
7	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	Formula della differenza per il seno
8	$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	Formula della differenza per il coseno