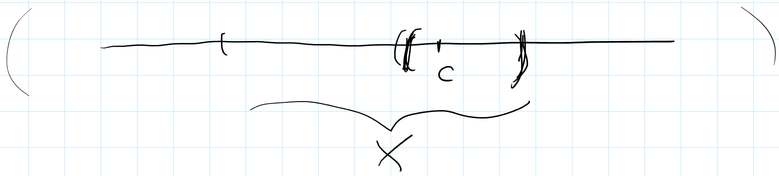
10 marzo 2025

lunedì 10 marzo 2025 13:08



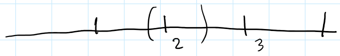
$X = (a,b)$ interv. limitato

$\mathrm{int}(X) = \,]a,b[$

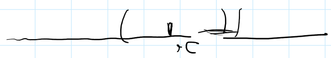
$\mathrm{int}(X) \subseteq X$

$X = \mathrm{int}(X) \iff X$ è aperto

es. di X : $\mathrm{int}(X) = \emptyset$ $\quad X = \{c\}$



$X = \mathbb{N}$

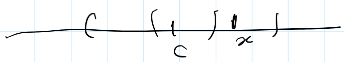


$X = \mathbb{Q}$

$X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$c \in \mathbb{R}$ di accumulazione per X se

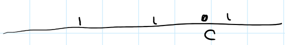
$\forall r > 0$ in $]c-r, c+r[$ $\exists\, x \in X : x \neq c$



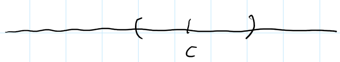
$D(X)$ = ins. dei p. di acc. DERIVATO di X

OSSERV. se $c \in D(X)$ in ogni suo intorno ci sono infiniti elem. di X $\Rightarrow$ un ins. finito NON HA p. di accum.

$X = \mathbb{N}$ $\quad D(X) = \emptyset$



$X = \mathbb{Q}$



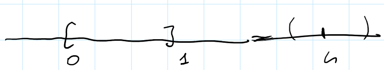
$D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

$X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$D(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

se $c \in X$ ma $c \notin D(X)$ $\quad c$ PUNTO ISOLATO

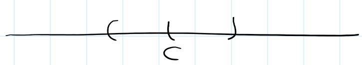
$X = [0,1] \cup \{4\}$



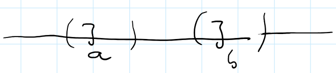
c isolato se $\exists\, r > 0$: $]c-r, c+r[\, \cap X = \{c\}$

$X = (a,b)$ $\quad D(X) = [a,b]$ infatti

$c \in \mathrm{int}(X) \Rightarrow c \in D(X)$



$a, b \in D(X)$



$F(X)$ = frontiera di X

$c \in F(X)$ se $\forall r > 0$ in $]c-r, c+r[$ ci sono elem di X ed elem $\notin X$

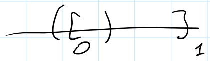
Relazioni

$c \in \text{int}(X) \Rightarrow c \in D(X)$ $\quad \Leftarrow$ NO

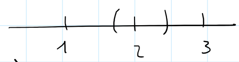
$c \in F(X) \Rightarrow c \notin \text{int}(X)$

$c \in \text{int}(X) \Rightarrow c \notin F(X)$

c isolato $\Rightarrow c \notin D(X)$, $c \in F(X)$



$c \in D(X) \Rightarrow c \in F(X)$?



NON SEMPRE, es. $c \in \text{int}(X)$

$c \in F(X) \Rightarrow c \in D(X)$? NON SEMPRE, es. c isolato

DEF. X chiuso se $\mathbb{R} \setminus X$ è aperto

$\mathbb{R}$ ap. $\Rightarrow \emptyset$ ch.

$\emptyset$ ap. $\Rightarrow \mathbb{R}$ ch.

$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono gli unici ins. aperti e chiusi e sono gli unici ins. ad avere frontiera vuota

DEF. $\bar{X} = X \cup D(X) = X \cup F(X)$

$\bar{X}$ è chiuso

X chiuso $\Leftrightarrow X = \bar{X}$

POTENZE

$a, b \in \mathbb{N}$ $\quad a^b$ si può fare $\forall a, \cancel{b} \in \mathbb{N}$, $\forall b \in \mathbb{N}_0$

DEF. $a^0 = 1$

$a^{n+1} = a^n \cdot a$

PROPRIETÀ

$$\begin{cases} a^b a^c = a^{b+c} \\ (a^b)^c = a^{bc} \\ a^b c^b = (ac)^b \end{cases}$$

$a \in \mathbb{N}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad$ DEF. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ si def. a^n e a^{-n} come nel caso in cui $a \in \mathbb{N}$ (a^{-n} solo se $a \neq 0$)

$a^{\frac{m}{n}}$?

Teorema della radice n-ma aritmetica

Sia $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, esiste uno e un solo $b > 0$: $b^n = a$ $\quad b = \sqrt[n]{a}$ $\quad$ RADICE n-ma ARITMETICA discussione dell'eq. binomia $x^n = a$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ quante sol. ha l'eq.?

$a > 0$ una sol. > 0 $x = \sqrt[n]{a}$

$x = 0$ non è sol.

sia $x < 0$ una sol.

cons. $-x > 0$ e calc. $(-x)^n = (-1)^n \underbrace{x^n}_{a} = \begin{cases} a & n \text{ p.} \\ -a & n \text{ d.} \end{cases}$

n pari $\Rightarrow$ $(-x)^n = a$ ma $-x > 0$ $\Rightarrow -x = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x = -\sqrt[n]{a}$

n disp. $\Rightarrow$ $\underbrace{(-x)^n}_{+} = \underbrace{-a}_{-}$ $\Rightarrow$ nessuna sol. negative

$a = 0$ $x = 0$ unica sol.

$a < 0$ $x = 0$ non è sol.

$x > 0$ " "

sia $x < 0$ una sol. e cons. $(-x)^n = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ è p.} \\ -a & \text{se } n \text{ è d.} \end{cases}$

n p. $\underbrace{(-x)^n}_{+} = \underbrace{a}_{-}$ $\Rightarrow$ nessuna sol

n d. $\underbrace{(-x)^n}_{+} = \underbrace{-a}_{+}$ $\Rightarrow$ $-x = \sqrt[n]{-a}$ $\Rightarrow$ $x = -\sqrt[n]{-a}$

es. $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[3]{-27} = -3 = -\sqrt[3]{-(-27)}$

$x^n = a$

	$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$
	$x = 0$	$\pm\sqrt[n]{a}$ n p.	n p.
		$\sqrt[n]{a}$ n d.	$-\sqrt[n]{-a}$ n d.

estendiamo

$\sqrt[n]{0} = 0$

$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$

$a < 0$, n disp.

Torniamo alle potenze

$n \in \mathbb{N}$ DEF. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a \geq 0$

$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ DEF. $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$a \geq 0$ se $\frac{m}{n} > 0$

$a > 0$ se $\frac{m}{n} < 0$

$3^{-\frac{2}{5}} = \left(\sqrt[5]{3}\right)^{-2}$

$6^{\frac{7}{8}} = \left(\sqrt[8]{6}\right)^{7}$

$s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $s = \pm s_0, s_1 s_2 \ldots$

$a > 0$ se $s < 0$ $\pm s_0, s_1$

$a \geq 0$ se $s > 0$ $a^{\pm s_0, s_1 s_2}$

$a^{\ldots}$

$a > 0$ se $s < 0$ $\qquad a^{\pm s_0, s_1}$

$a \geq 0$ se $s > 0$ $\qquad a^{\pm s_0, s_1 s_2}$

$a^{\pm s_0, s_1 s_2 s_3}$

$\ldots$

es. 2^{π} $\qquad 2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}} = \left(\sqrt[10]{2}\right)^{31}$

$2^{3,14}$ $\ldots$

$2^{3,141}$

$\ldots$

si procede per stabilizzazione.

se $a < 0$, $n \in \mathbb{N}$, n dispari $a^n < 0$

in tutti gli altri casi $a^x > 0$ $\quad \forall a > 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$4 > 1$ $\qquad 4^2 > 1$ $\qquad 4^{-2} < 1$

$\frac{1}{4} < 1$ $\qquad \left(\frac{1}{4}\right)^2 < 1$ $\qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} > 1$

se $x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^x > 1$ se $a > 1$

$a^x < 1$ se $a < 1$

se $x < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^x < 1$ se $a > 1$

$a^x > 1$ se $a < 1$

eq. $\quad a^x = b \qquad a > 0 \qquad a \neq 1$

$b > 0$

Teorema dell'esistenza del logaritmo

Dati $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$, esiste uno e un solo $x \in \mathbb{R}$: $a^x = b$ $\qquad x = \log_a b$

DEF. $\quad a^{\log_a b} = b$

$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a b^c = c \log_a b$

$\log_a b = (\log_a c)(\log_c b)$

$1 = \log_a a = (\log_a b)(\log_b a) \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

$\log_a b > 0 \Leftrightarrow a, b$ sono entrambi > 1

o " < 1

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \qquad \log_4 \frac{1}{4} = -1$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2 \qquad \log_2 4 = 2$

FUNZIONI

$A, B \neq \emptyset$ — f criterio che associa ad ogni elem di A uno e un solo elem di B

(A, B, f) funzione definita in A a valori in B

$f : A \to B$ — A dominio (ins. di definiz.)
B codominio
f legge di definizione

$x \in A \to f(x) \in B$ valore della funz

$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ immagine di f

se $f(A) = B$ f SURIETTIVA (su tutto B)

se $X \subseteq A$ $f(X) = \{ f(x) : x \in X \}$ immagine di X

$y \in B$ $f^{-1}(y) = \{ x \in A : f(x) = y \}$ immagine inversa di y

se $Y \subseteq B$ $f^{-1}(Y) = \{ x \in A : f(x) \in Y \}$ imm. inv. di Y

se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ f iniettiva o invertibile

allora $\forall y \in f(A)$ $\exists$ unico $x \in A : f(x) = y$

in questo caso si costruisce $f^{-1} : f(A) \to A$
$f^{-1}(y) =$ l'unico $x \in A : f(x) = y$
FUNZIONE INVERSA

$f : A \to f(A)$
$f^{-1} : f(A) \to A$

ALTRE NOZIONI GENERALI:

$f : A \to B$ $gr(f) = \{ (x, f(x)) : x \in A \} \subseteq A \times B$
GRAFICO

FUNZ. COMPOSTA:

$f : A \to B$
$g : C \to A$

$x \in C \to g(c) \in A \to \underbrace{f(g(c))}_{F(c)} \in B$

$F : C \to B$ funz. composta
f funz. esterna
g " interna

Funz. reali di variabile reale

$X \subseteq \mathbb{R}$ $f : X \to \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt{x+1}}$ $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > -1$

$f(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad$ $\{ \sqrt{x+1} \neq 0$

$X =]-1, +\infty[$

$f:]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$

Proprietà analitiche delle funzioni

$X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f: X \to \mathbb{R}$ $\quad f(X) \subseteq \mathbb{R}$

DEF. f limitata se lo è $f(X)$
cioè $\exists\, a, b \in \mathbb{R}: \ a \leq f(x) \leq b \ \forall x \in X$

$\sup_X f = \sup f(X)$

$\inf_X f = \inf f(X)$

se $\exists\, M = \max f(X)$ $\quad M = \max_X f$ massimo assoluto di f in X

allo stesso modo minimo assoluto

se $M = f(x)$ $\quad x =$ punto di massimo
se $m = f(x)$ $\quad x =$ " minimo

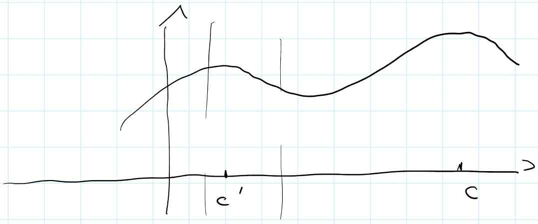
il massimo è uno solo, i punti di massimo possono essere tanti

massimo e minimo assoluti = estremi assoluti

estremi relativi o locali:

$c \in X$ punto di minimo (massimo) relativo se

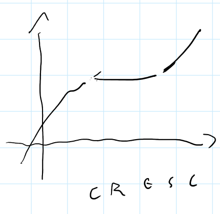
$\exists\, r > 0$: se $x \in X \cap B(c, r)$ si ha $f(x) \geq f(c)$ $(\leq)$

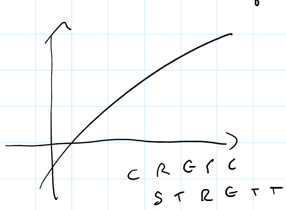


$c =$ p. di max ass
$c' =$ " rel

MONOTONIA

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$ se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $\quad f$ crescente
" $\quad f(x) < f(y)$ $\quad f$ cresc. strettam.
" $\quad f(x) \geq f(y)$ $\quad f$ decresc.
" $\quad f(x) > f(y)$ $\quad f$ decresc. strettam.





se f è strett. monotona allora è invertibile e la sua funz. inversa ha lo stesso tipo

se f è strett. monotona allora è invertibile
e la sua funz. inversa ha lo stesso tipo
di monotonia (DIM. per eserc)