Capitolo 1   Giuffrède - Rouse (1.1 e 1.2)

2×2:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
$- \quad +$

3×3
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right)$$
$- \quad - \quad - + \quad + \quad +$

Lemma 1:

$A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$

A^i e la i-esima di A

$A^i = \alpha V + \alpha' V'$, $V, V' \in M_{1,m}(\mathbb{R})$

$$\det A = \alpha \det \begin{pmatrix} A^1 \\ A^{(i-1)} \\ V \\ A^{(i+1)} \\ A'^N \end{pmatrix} + \alpha' \det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ V' \\ A^{(N)} \end{pmatrix}$$

Lemma 2 A' è la matrice ottenuta scambiando 2 righe

allora $\det A' = - \det A$

Corollario 3

A' e la matrice ottenute applicando una permutazione

σ alle righe di A allora $\det A' = \text{sgn}(\sigma) \det A$

Esempi lemma 1

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \ 2 \ 3) = \underset{\alpha}{1} \underset{V'}{(1 \ 0 \ 0)} + \underset{\alpha'}{2} \underset{V'}{(0 \ 1 \ \tfrac{3}{2})}$$

$$= 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \tfrac{3}{2} \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

calcola questo determinante

se ho una riga = {000}

Proposizione 4

1) Se $\exists i \in \{1-m\}$ tale che $A^i = \{0\ 0\ 0\}$ allora $\det A = 0$

2) Se ha 2 righe uguali il $\det A = 0$

3) $$\det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \rightarrow dA^{(3)} \\ A^{(m)} \end{pmatrix} = d \det A$$

Ricordiamo poiché $\det A^\top = \det A$ tutto quello che vale per le righe vale anche per le colonne

Teorema di Binet: Se abbiamo 2 matrici quadrate $A, B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$] Capire meglio questa cosa

Dimostrazione: $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ righe $= \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_m \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{J=1}^{m} a_{1J} b_{J1} & \sum_{J=1}^{m} a_{1J} b_{J2} & \cdots & \sum_{J=1}^{m} a_{1J} b_{Jm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot B^1 + a_{12} B^2 & \cdots & a_{1N} B^m \\ a_{21} \cdot B^1 + a_{22} B^2 & \cdots & a_{2N} B^m \\ \vdots & & \\ a_{m1} B^{(1)} + a_{m2} B^2 + \cdots & a_{mm} B^m \end{pmatrix}$$

$$\det A \cdot B = a_{11} \det \begin{pmatrix} B' \\ a_{21}B' + a_{2m}B^{(m)} \\ \vdots \\ a_{m1}B' \end{pmatrix} + \ldots - a_{1m} \det \begin{pmatrix} B^{(m)} \\ a_{21}B^{(1)} \ldots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{J=1}^{m} a_{1J} \det \begin{pmatrix} B_1 \\ a_{21}B' \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \sum_{J=1}^{1} \ldots \sum_{J=1}^{m} a_{1J} a_{2J} \ldots a_{Jm} \det \begin{pmatrix} B^{(J_1)} \\ B^{(J_2)} \\ \vdots \\ B^{(J_m)} \end{pmatrix}$$

$$\det A \cdot B = \sum_{\sigma \in S_m} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{m\sigma(m)} \qquad \det B - sgn(\sigma) = \det B \cdot$$

$$\underbrace{\sum \prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)} sgn(\sigma)}_{\det A} = \det B \cdot \det A$$

Corollario $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ invertibile

$$\det(A^{-1}) = 1 / \det A$$

Dimostrazione

$$A \cdot A^{-1} = id_m \qquad \det(id_m) = 1 = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Quindi A è invertibile se $\det A \neq 0$

$A = (a_{ij}) \in M_{m,m}(R)$ $i,j \in \{1 \ldots N\}$ $A_{ij} = M_{m-1, m-1}$

$\underbrace{\phantom{A_{ij} = M_{m-1, m-1}}}$

le sottomatrice di A
ottenute rimuovendo
le i-esime e le j-esime
colonne

Esempio:

$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ $A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

A_{22} = rimuovo le seconde righe e le seconde colonne $= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

Il minore di A corrispondente agli indici (i, j) come

$m_{ij} = |A_{ij}| = \det A_{ij}$

il determinante di A è uguale al det di A_{ij}

teorema di laplace

$A \in M_{m,m}(R)$ $\forall_i = \{i \ldots m\}$

$\det A = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} (A_{ij})$

Analogamente per $j \in \{1 \ldots N\}$

$\det A = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1N} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\det A = e_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + e_{12}(-1)^{1+2}|A_{21}| + \cdots e_{1m}(-1)^{1+m}|A_{1m}|$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Queste le ignorianmo perche verrebbe tutte 0

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (0+2) - (-2-12) = 2 - (-14) = 2 + 14 = 16$$

Quelle in viola sono i risultati delle moltiplicazioni tra i numeri nelle diagonali (considerando anche il segno delle diagonale)

$A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ $\forall_{i,j} \in \{1 \dots N\}$

↗ A star

$e^{*}_{i,j} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ cofattore di A rispetto gpli indici i, j

la matrice aggiunta di A è

$A^{*} = adj(A) = (e^{*}_{i,j})^{t} \in M'_{m,m}(\mathbb{R})$

matrice aggiunta in inglese

$A \cdot A^{*} = \det A \cdot id_m$

$A^{-1} = A^{*}/\det A$

Corollario di A: $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$

A invertibile $\iff$ rk $A = m \iff \det A \neq 0$

in tal caso $A^{-1} = A^{*}/\det A$