$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

soluzioni $= \{0, 0, 2\}$

soluzioni finite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} r_2 = r_2 - 2r_1 \\ r_3 = r_3 - 3r_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & +1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$r_3 = r_3 - r_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad r_3 = r_3/3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

nessuna soluzione perché questi sono tutti zero e quindi sarebbe

$$x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 1$$

$$\underbrace{0 = 1}_{\to \text{ impossibile}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dopo Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\text{Soluzioni} = \{ (1-t, 0, 1, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

il sistema ha infinite soluzioni perché dipendono da t

Teorema di Rouché - Capelli

il sistema $A \cdot X = B$ con n variabili e m equazioni

ha soluzione $\rightarrow rk A = \overbrace{rk(A|B)}^{\text{matrice completa}} = r$

se $r = n$ allora esiste un'unica soluzione

se $r < n$ allora esistono infinite soluzioni che dipendono da $n - r$ parametri

Esempio:

$$\begin{cases} x - y + \alpha z = -1 \\ \alpha x + 2z = -2 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ evitare che α sia un pivot

questa cosa è un problema infatti α non può essere il pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = r_2 - \alpha r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & 2-\alpha & -2+\alpha \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 = r_2]{r_2 = r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 2-\alpha & -2+\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 = r_3 + \alpha r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{2-\alpha-\alpha^2} & -2+2\alpha \end{array}\right)$$

essendo nel pivot dobbiamo discutere quando è $= 0$

$$2 - \alpha - \alpha^2 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha + 2) = 0 \Rightarrow \alpha = 1, -2$$

Se $d \neq 1, -2$ il $rkA = \underbrace{3}$

che è uguale ad n → numero di variabili

quindi esiste una sola soluzione

Se $d = 1$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 = r_1 - 1r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left(-2-2x_3, -1-x_3, \underbrace{x_3}_{\text{è un parametro}}\right) \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

potevamo scrivere anche così $x_3 = t$

$$\left\{ \left(-2-2t, -1-t, t\right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Se $d = -2$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

non esistono soluzioni

Se $d \neq 1, -2$ la matrice si trasforma infatti

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & d & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underbrace{2-d-d^2} & -2+2d \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 = \frac{r_3}{2-d-d^2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{d+2} \end{array}\right)$$

Risolvi con Gauss-Jordan e poi prendi le soluzioni

Sistemi particolari → sistemi omogenei

$A \cdot x = 0$, ovvero $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Soluzione banale $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Assumiamo che y e y' siano soluzioni di $Ax = 0$ ovvero

$Ay = 0 = Ay' \Rightarrow A(y - y') \Rightarrow Ay - Ay' = 0 - 0 = 0$

$y + y' =$ soluzione

$cy =$ soluzione

Come applichiamo queste regole ad un sistema normale?

$\underbrace{Ax = B}_{\text{sistema normale}} \rightsquigarrow \underbrace{A \cdot x = 0}_{\text{sistema omogeneo}}$ non indica la sommatoria (si chiama sigma) ma solo un'insieme

Σ l'insieme delle soluzioni di $Ax = B$

Σ_0 l'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$

$\Sigma = \{ \underbrace{y}_{\text{soluzione di } \Sigma} + \overbrace{y_0}^{\text{soluzione di } \Sigma_0} \mid y_0 \in \Sigma_0 \}$

Dimostrazione y soluzione di $Ax = B$

Caso sistema normale

$y' \in \Sigma \Leftrightarrow Ay' = B$ consideriamo $y' - y$

$A(y' - y) = Ay' - Ay = B - B = 0$

$\Rightarrow y' - y$ è soluzione di $Ax = 0$

$\Rightarrow y' - y = y_0 \in \Sigma_0 \Rightarrow y' = y + y_0$, $y_0 \in \Sigma_0$

Caso sistema omogeneo

$Y_0 \in \Sigma_0 \Leftrightarrow A \cdot Y_0 = 0$ e consideriamo $Y + Y_0$

$$A(Y+Y_0) = AY + AY_0 = B + 0 = B \Rightarrow (Y+Y_0) \in \Sigma$$

Esempio:

sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2z = -2 \\ y + x = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

sistema omogeneo con $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

matrice omogenea

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \Sigma_0 = \{(-2x_3, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

matrice normale

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2-2x_3 \\ x_2 = -1-x_3 \end{cases}$$

$$\Sigma = \{(-2-2x_3, -1-x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\Sigma = \left\{ (-2,-1,0) + \underbrace{(-2x_3, -x_3, x_3)}_{\Sigma_0} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (-2,-1,0) + x_3(-2,-1,1) \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

teorema di Cramer

$Ax = B$ sistema lineare, $A \in \overbrace{M_{n,n}}^{\text{matrice quadrata}}(\mathbb{R})$

Se A è invertibile allora $Ax = B$ ha un'unica soluzione

data $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo l'i-esima colonna con B

Dimostrazione $Ax = B \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot B$ $A^{-1} = A^* / \det A$

$\Rightarrow x = A^* B / \det A$

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| (-1)^{i+j} \cdot b_j}_{\det A_i}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = \alpha^2 + \alpha - 2$ Sostituisco B con ogni colonna di A

$$\underbrace{A_1}_{\text{colonna alla quale sostituisco } B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A_1 = \underbrace{2 - 2\alpha - 2 + 2 = 2 - 2\alpha}_{\text{calcolato con Sarrus sia qui che nella prossima colonna}}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A_2 = 2 - \alpha^2 + \alpha + 2 = -\alpha^2 + \alpha = -\alpha(\alpha - 1)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A_3 = -\alpha - \alpha + 2 = -2\alpha + \alpha$$

Prendo ogni risultato e lo divido per il det A
($\det A = \alpha^2 + \alpha - 1$ in questo caso)

$$x_1 = \frac{2 - 2\alpha}{\alpha^2 + \alpha - 2} \Downarrow \frac{-2\cancel{(\alpha - 1)}}{(\alpha + 2)\cancel{(\alpha - 1)}} \Downarrow \frac{-2}{\alpha + 2}$$

$$\underbrace{x_2 = \frac{-\alpha}{\alpha + 2} \quad x_3 = \frac{-2}{\alpha + 2}}_{\text{Queste sono già state semplificate}}$$