Sistemi formali

Definizione 2.1

Un sistema formale $\mathcal{D}$ è dato da:

- un insieme numerabile S (alfabeto o riserva di simboli)
- un insieme decidibile $W \subseteq S^*$ (insieme delle "formule ben formate" fbf)
- un insieme $A_x \subseteq W$ (insieme degli assiomi)

Se A_x è decidibile, il sistema formale è detto ricorsivamente assiomatizzato

- $R = \{R_i\}_{i \in I}$ con $R_i \subseteq W^{n_i}$ ed I $n_i \geq 2$ finiti

insieme finito di regole finitarie

- La coppia $\langle S, W \rangle$ è detta linguaggio formale

non è una frazione

Notazione

Se $R \subseteq W^3$ allora scriverò $R(\alpha, \beta, \gamma)$ nella forma $\boxed{\dfrac{\alpha \quad \beta}{\gamma}}$

Definizione 2.3

Dato un insieme M di fbf nel sistema formale D, una D-derivazione (prova, dimostrazione) a partire da M è una successione finita di fbf $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ di D tale che $\forall i = 1 \dots n$ si ha:

- $\alpha_i \in A_x$ oppure
- $\alpha_i \in M$ oppure
- $(\alpha_{h_1}, \dots, \alpha_{h_J}) \in R_J$ per qualche $J \in I$ $\alpha_i = \alpha_{h_{m_J}}$

$h_1, \dots, h_{m_{J-1}}$

Definizione 2.4

Una formula è derivabile nel sistema formale D a partire da un insieme di ipotesi M se e solo se esiste una D-derivazione a partire da M la cui ultima fbf è α.

Scriveremo che $M \vdash_D \alpha$ "M deriva (prova) α nel s. F D"

Se M è vuoto allora scriviamo $\vdash_D \alpha$ "α è un teorema in D"

Osservazione

$M \not\vdash_D \alpha \iff$ non vale $M \vdash_D \alpha$

Definizione

Sia R l'insieme delle regole di D, una regola $r: \dfrac{\alpha_1 \dots \alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ dove $r \notin R$ è detta derivabile in D $\iff$ per tutte le fbf $\alpha_1, \dots \alpha_k$ che soddisfano r si ha: $\alpha_1 \dots \alpha_{k+1} \vdash_D \alpha_{k+1}$

Definizione

R è detta ammissibile o eliminabile in D se e solo se da $\vdash_{D \cup \{R\}} \alpha$ segue $\vdash_D \alpha$

dove $D \cup \{R\}$ è il sistema formale ottenuto da D con l'aggiunta della regola R

Proposizione: ogni regola derivabile è ammissibile

Dimostrazione: conseguenza def 2.5 + 2.3

Osservazione

il viceversa della proposizione non vale

Proposizione

Se $M \vdash_D \alpha$ allora esiste $N \subseteq M$. N finito per il quale si ha $N \vdash_D \alpha$

Dimostrazione

$M \vdash_D \alpha \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n = \alpha$ $\qquad N = M \cap \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$

lascio al lettore

Definizione 2.6

Un sistema formale D è detto consistente se e solo se esiste una fbf α di D tale che $\nvdash_D \alpha$

Se D non è consistente è detto inconsistente

Definizione 2.7

Insieme delle conseguenze:

Sia Γ un insieme finito di fbf di un sistema formale D

$$con_D(\Gamma) = \{\alpha \in W : \Gamma \to \alpha\}$$

Definizione 2.8

Sia Γ un' insieme finito di fbf di D

- Γ è detto consistente rispetto a D $\Leftrightarrow$ $\alpha \in W$ tale che $\Gamma \nvdash_D \alpha$ ovvero se e solo se $con_D(\Gamma) = \{\alpha \in W : \Gamma \vdash \alpha\} \neq W$
- Γ è detto inconsistente o contraddittorio se e solo se Γ non è consistente

Osservando

che $\Gamma \subseteq Con_D(\Gamma)$ segue la definizione

Definizione di Teoria

Un' insieme fbf di D è detto teoria di D $\Leftrightarrow$ Γ è chiuso rispetto alla relazione $\vdash_D$ (ovvero $Con_D(\Gamma) = \Gamma$) ovvero ancora $\Leftrightarrow$ da $\Gamma \vdash_D \alpha$ segue $\alpha \in \Gamma$

Definizione teoria Pura

La teoria pura di D è l'insieme $Con_D(\emptyset) = Con_D(A_x)$

una teoria pura è una teoria

CL: combinatory logic → sistema formale speciale

Definizione 2.11

il sistema formale CL è definito così:

- $S = \{K, S, (,), =\}$ alfabeto
- $W = \{P = Q \mid P$ e $Q \in \mathcal{T}\}$ dove $\mathcal{T}$ è l'insieme dei termini definito così:

1. $K \in \mathcal{T}$, $S \in \mathcal{T}$
2. Se $P, Q \in \mathcal{T}$ allora $(PQ) \in \mathcal{T}$
3. nient'altro è un termine

- A_x: $\forall P, Q, R \in \mathcal{T}$ i seguenti schemi di assioma sono:

$((KP)Q) = P$ $(A_x K)$ schema dell'assioma "numero eventualmente infinito"

- $P = P$ assioma di riflessività
- $(((SP)Q)P)R) = ((PR)(QR))$ $(A_x S)$ [distributiva]
- nient'altro è un assioma

- $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ dove

$R_1 = \{(P = Q, Q = P)$ allora $P, Q \in \mathcal{T}\} \subseteq W^2$ [simmetria]

$R_2 = \{(P = Q, Q = R, P = R) \mid P, Q, R \in \mathcal{T}\} \subseteq W^3$ [transitiva]

$$(\mathrm{TRANS})\ \frac{P = Q \qquad Q = R}{P = R}$$

$R_3 = \{(R = R^1, (PR) = (QR), (PR = (QR') \mid P, Q, R, R' \in \mathcal{T}\} \subseteq W^3$ [Congruenza 1]

$$\frac{R = R^1 \qquad (PR) = (QR)}{(PR) = (QR)}$$

$R_4 = \{ (R = R'),\ (RP) = (RQ),\ (RP) = (R'Q) \mid P, Q, R, R' \in \mathcal{T} \} \subseteq W^3$

[Congruenza 2]

Esempio 1:

CL dimostriamo $\vdash_{CL} (((SK)K)K) = K$

$Ax_K : ((KP)Q)\ P$

$Ax_S : (((SP)Q)R) = ((PR)(QR))$

$$(((S\overset{P}{K})\overset{Q}{K})\overset{R}{K}) \overset{Ax_S}{=} ((K\underbrace{K}_{P})\underbrace{(KK)}_{Q})$$

$= K$

Possiamo dimostrare usando solo le prop transitive

$$(((SK)K)K) = ((KK)(KK)) \qquad \text{trans}(1,2)$$

$$\parallel$$
$$K$$

In generale $\forall M \in \mathcal{T}$ $\vdash_{CL} (((SK)K)M) = M$ anche

$\vdash_{CL} (IM) = M$

Esempio 2:

Dimostriamo che $\vdash_{CL} (((SI)I)M) = (MM) \quad \forall M \in \mathcal{T}$

1. $(((SI)I)M) \overset{Ax_S}{=} ((IM)(IM))$
2. $(IM) = M$

$\Rightarrow (((SI)I)M) = ((M)(M))$

3. $((IM)(IM)) = ((IM)(IM))$ assioma riflessività
4. $((IM)(IM)) = (M(IM))$ congruenza (2,3)
5. $((IM)(IM)) = (MM)$ congruenza (2,4)

Calcolo proposizionale

- Chiamiamo proposizioni delle espressioni elementari che possiedono un valore di verità.
- chiamiamo variabili proposizionali delle variabili $p, q, r \dots$
- Un'assegnamento proposizionale è una funzione che associa ad ogni variabile proposizionale un valore di verità (0,1)
- Chiameremo tautologie una fbf il cui valore di verità è sempre 1 indipendentemente dall'assegnamento proposizionale scelto

Il calcolo proposizionale è un sistema formale i cui teoremi sono tutte e sole le tautologie

Definizione 3.1

Il sistema formale P_0 (calcolo proposizionale) è definito così:

- S: è formato dall'unione fra un insieme numerabile di variabili $p, q, r, s \dots$, l'insieme dei connettivi $\to$ e $\neg$ (implica, not) e l'insieme dei simboli ausiliari (e);
- W: l'insieme delle fbf (asserzioni) definito:

1. ogni variabile proposizionale è una fbf
2. se α e β sono fbf allora lo sono anche $(\alpha \to \beta)$ e $(\neg \alpha)$
3. nient'altro è un fbf

$\alpha \vee \beta \equiv ((\neg \alpha) \to \beta)$ $\qquad$ $\alpha \wedge \beta \equiv \neg((\neg \alpha) \vee (\neg \beta))$

$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

Esiste una precedenza dei connettivi $\overset{1}{\neg}, (\overset{2}{\wedge, \vee}), \overset{3}{\to}$

$\alpha \wedge \beta \to \neg \alpha \equiv ((\alpha \wedge \beta) \to (\neg \alpha))$

• Ax :

- $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ A_K
- $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ A_S
- $(\neg \beta \to \neg \alpha) \to ((\neg \beta \to \alpha) \to \beta)$ $A_\neg$

• $R = \{MP\}$ dove MP modus ponens è la regola $\dfrac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$

$R(\alpha, \alpha \to \beta, \beta)$

Se α è vera, $\alpha \to \beta$ è vera allora è banale che β è vera

se studente < 18 è bocciato $(\alpha \to \beta)$
G ha preso -17 $\Rightarrow$ G è bocciato

Studiare $Com_{P_0}(\emptyset)$ l'insieme dei teoremi del calcolo proposizionale (prossima lezione)