4 novembre 2025_MZ

martedì 4 novembre 2025 11:09

Metodo risolutivo per l'eq. omogenea a coefficienti costanti

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \qquad (1) \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

cerchiamo una sol del tip $y(x) = e^{\alpha x} \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$y'(x) = \alpha e^{\alpha x}$

$\dots$

$y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$

Sostit. nell'eq. $e^{\alpha x}(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n) = 0$

$\Rightarrow e^{\alpha x}$ è sol della (1) se e solo se α è sol di

$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad (2)$ EQUAZIONE CARATTERISTICA

è un'eq. algebrica di grado $n \Rightarrow$ ha n sol. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \pm i\gamma \in \mathbb{C}$

$\alpha \in \mathbb{R}$ di molt. s dà luogo a s sol della (1)

$e^{\alpha x}, \ x e^{\alpha x}, \ x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{s-1} e^{\alpha x}$

$\beta \pm i\gamma \in \mathbb{C}$ di molt. s danno luogo a

$e^{\beta x}\cos\gamma x, \ x e^{\beta x}\cos\gamma x, \dots, x^{s-1} e^{\beta x}\cos\gamma x$

$e^{\beta x}\sin\gamma x, \ x e^{\beta x}\sin\gamma x, \dots, x^{s-1} e^{\beta x}\sin\gamma x$

TEOR.

Le n sol così trovate sono indipend $\Rightarrow$ l'eq. è risolta

ES. $y'' - 3y' - 4y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0 \qquad \alpha = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

int gen $y(x) = k_1 e^{4x} + k_2 e^{-x}$

$y'' - 4y' + 4y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \qquad \alpha = 2$ di molt. 2

int gen $y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 x e^{2x}$

$y'' + 9y = 0$

eq caratt $\alpha^2 + 9 = 0 \qquad \alpha = \pm 3i \qquad (\beta = 0, \ \gamma = 3)$

int gen $y(x) = k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x$

DIM. del TEOR. nel caso $n = 2 \qquad y'' + a y' + b y = 0 \quad (1)$

eq. caratt. $\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \quad (2) \qquad \Delta = a^2 - 4b$

I caso $\Delta > 0 \quad$ (2) ha due sol. $\alpha_1 \neq \alpha_2 \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

le sol proposte per la (1) sono $e^{\alpha_1 x} \quad e^{\alpha_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \end{vmatrix} = \underbrace{e^{\alpha_1 x} e^{\alpha_2 x}}_{\neq 0} \underbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)}_{\neq 0} \neq 0 \Rightarrow \text{sono indip.}$$

II caso $\Delta < 0 \quad$ (2) ha due sol. $\beta \pm i\gamma \quad (\gamma \neq 0)$

le sol della (1) $\quad e^{\beta x}\cos\gamma x, \ e^{\beta x}\sin\gamma x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\beta x}\cos\gamma x & e^{\beta x}\sin\gamma x \\ \beta e^{\beta x}\cos\gamma x - \gamma e^{\beta x}\sin\gamma x & \beta e^{\beta x}\sin\gamma x + \gamma e^{\beta x}\cos\gamma x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\beta x}\left(\cancel{\beta\cos\gamma x\sin\gamma x} + \gamma\cos^2\gamma x - \cancel{\beta\cos\gamma x\sin\gamma x} + \gamma\sin^2\gamma x\right) =$$

$= \gamma e^{2\beta x} \neq 0 \quad \Rightarrow$ sono indip.

III caso $\Delta = 0$ sol α di molt. 2 $\Rightarrow$ $e^{\alpha x}$ $\quad x e^{\alpha x}$

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^{\alpha x} & x e^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x} \end{bmatrix} = e^{2\alpha x}\left(1 + \alpha x - \alpha x\right) = e^{2\alpha x} \neq 0$$

$\Rightarrow$ sono indip.

ESERCIZI

1. $y'' + 8y' + 12y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 + 8\alpha + 12 = 0 \qquad \alpha = -4 \pm 2 \begin{cases} -6 \\ -2 \end{cases}$

int gen $y(x) = k_1 e^{-6x} + k_2 e^{-2x}$

2. $y'' - 4y = 0$

eq caratt $\alpha^2 - 4 = 0 \qquad \alpha = 2, \ \alpha = -2$

int gen $y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-2x}$

3. $y'' + 4y = 0$

eq caratt $\alpha^2 + 4 = 0 \qquad \alpha = \pm 2i$

int gen $y(x) = k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x$

4. $y'' + 4y' = 0$

eq caratt $\alpha^2 + 4\alpha = 0 \qquad \alpha = 0, \ \alpha = -4$

int gen $y(x) = k_1 + k_2 e^{-4x}$

5. $y'' + 4y' + 4y = 0$

eq caratt $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0 \qquad \alpha = -2 \qquad s = 2 \qquad (\alpha+2)^2 = 0$

int gen $y(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 x e^{-2x}$

6. $y''' + 9y' = 0$

eq caratt $\alpha^3 + 9\alpha = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha^2 + 9) = 0 \qquad \alpha = 0 \qquad \alpha = \pm 3i$

int gen $y(x) = k_1 + k_2 \cos 3x + k_3 \sin 3x$

7. $y^{IV} - y = 0$

eq caratt $\alpha^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\alpha^2+1)(\alpha-1)(\alpha+1) = 0$

$\alpha = \pm i \qquad \alpha = 1 \qquad \alpha = -1$

int gen $y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x + k_3 e^{x} + k_4 e^{-x}$

8. PC $\begin{cases} y''' - 2y'' + y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$

$y''' - 2y'' + y' = 0$

eq caratt $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha = 0$

$\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0$

$\alpha(\alpha - 1)^2 = 0$

$\alpha = 0 \qquad \alpha = 1 \ (s = 2)$

int gen $y(x) = k_1 + k_2 e^{x} + k_3 x e^{x}$

$y'(x) = k_2 e^{x} + k_3 e^{x} + k_3 x e^{x} = e^{x}(k_2 + k_3 + k_3 x)$

$y''(x) = k_2 e^{x} + k_3 e^{x} + k_3 e^{x} + k_3 x e^{x} = e^{x}(k_2 + 2k_3 + k_3 x)$

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 2 \\ k_2 + 2k_3 = -1 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$

$k_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 5$

$k_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -3$

$k_1 = -k_2 = -5$

sol del PC

$y(x) = -5 + 5e^{x} - 3x e^{x}$

9. $\begin{cases} y'' + 2y' - 8y = 0 \end{cases}$ $\qquad y'' + 2y' - 8y = 0$

9. $\begin{cases} y''+2y'-8y=0 \\ y(1)=0 \\ y'(1)=3 \end{cases}$

$y''+2y'-8y=0$

eq. caratt. $\alpha^2+2\alpha-8=0$

$\alpha=-1\pm 3 \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$

int gen $y(x)=k_1 e^{-4x}+k_2 e^{2x}$

$y'(x)=-4k_1 e^{-4x}+2k_2 e^{2x}$

$\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(1)=3 \end{cases}$ $\begin{cases} k_1 e^{-4}+k_2 e^2=0 \\ -4k_1 e^{-4}+2k_2 e^2=3 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} e^{-4} & e^2 \\ -4e^{-4} & 2e^2 \end{vmatrix}=6e^{-2}$

$k_1=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & e^2 \\ 3 & 2e^2 \end{vmatrix}}{6e^{-2}}=-\frac{1}{2}e^4$ $k_2=\dfrac{\begin{vmatrix} e^{-4} & 0 \\ -4e^{-4} & 3 \end{vmatrix}}{6e^{-2}}=\frac{1}{2}e^{-2}$

sol $y(x)=-\frac{1}{2}e^4 e^{-4x}+\frac{1}{2}e^{-2}e^{2x}$

10. $y^{IV}+2y''+y=0$

eq caratt $\alpha^4+2\alpha^2+1=0 \Rightarrow (\alpha^2+1)^2=0$

$\alpha=\pm i$ $s=2$

int gen $y(x)=k_1\cos x+k_2\sin x+k_3 x\cos x+k_4 x\sin x$

ESERC
$y''-2y'-3y=0$
$y''+6y'+9y=0$
$y''+16y=0$
$y''+5=0$
$y''-5=0$
$y''-5y'=0$

Metodo risolutivo per un'eq. completa a coefficienti costanti con il termine noto del tipo "esponenziale per polinomio"

$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\dots+a_n y=f(x)$

$f(x)=e^{hx}p(x)$ $h\in\mathbb{C}$ p polin. di grado m

Metodo di somiglianza: si cerca una sol. del tipo

$y(x)=e^{hx}x^s q(x)$ q polin. di grado m
$s=$ molteplicità di h come sol dell'eq. caratt.
($s=0$ se non è sol.)

calcolando le derivate di y e sostituendo nell'eq. si troverà

$\cancel{e^{hx}}\underbrace{(\;\dots\;)}_{\text{polinomio}}=\cancel{e^{hx}}p(x)$

es. $y''-3y'+2y=(x+2)e^{2x}$

eq. omog. $y''-3y'+2y=0$
eq. caratt. $\alpha^2-3\alpha+2=0$ $\alpha=\frac{3\pm 1}{2}\begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

int. gen. omog. $y(x)=k_1 e^{2x}+k_2 e^x$

$f(x)=(x+2)e^{2x}$ $h=2$ $s=1$ $m=1$

cerco $y(x)=e^{2x}x(ax+b)=e^{2x}(ax^2+bx)$
$y'(x)=e^{2x}(2ax^2+2bx+2ax+b)$
$y''(x)=e^{2x}(4ax^2+4bx+8ax+4b+2a)$

sost nell eq. $\cancel{e^{2x}}(\cancel{4ax^2}+\cancel{4bx}+8ax+4b+2a-\cancel{6ax^2}-\cancel{6bx}-6ax-3b+\cancel{2ax^2}+\cancel{2bx})=\cancel{e^{2x}}(x+2)$

$2ax+2a+b=x+2 \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$ $y(x)=e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$

$y''-3y'+2y=x^2e^{3x}$ $h=3$ $s=0$ $m=2$

cerco $y(x)=e^{3x}(ax^2+bx+c)$
$y'(x)=e^{3x}(3ax^2+3bx+3c+2ax+b)$

$$y''(x) = e^{3x}(9ax^2 + 9bx + 9c + 12ax + 6b + 2a)$$

sost nell'eq

$$\cancel{e^{3x}}(\cancel{9ax^2} + \cancel{9bx} + \cancel{9c} + 12ax + 6b + 2a - \cancel{9ax^2} - \cancel{9bx} - \cancel{9c} - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c) = x^2 \cancel{e^{3x}}$$

$$2ax^2 + (6a - 2b)x + 2a + 3b + 2c = x^2 \qquad \begin{cases} 2a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{2}$

$b = \frac{3}{2}$ $\qquad y(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}\right)$

$c = -\frac{9}{4}$

Caso particolare: se $f(x) = \cos x \, p(x)$ (3)

$\qquad \sin x \, p(x)$ (4)

si risolve l'eq. con $f(x) = e^{ix} p(x)$ e data una sua sol $y(x) = u(x) + i\,v(x)$

u sarà sol della (3)

v " " (4)

Infine se $f(x) = e^{\lambda x} p(x) + e^{\mu x} r(x)$

si risolvono separatamente $---- = e^{\lambda x} p(x)$

$---- = e^{\mu x} r(x)$

e poi si sommano le sol. ottenute (per il principio di sovrapposizione)