

Long, Introduction to the Algebra, Geometrie 1

rettangolare

Una matrice è una tabella di elementi ordinati in righe e colonne

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mN} \end{pmatrix}}_{m \text{ colonne}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} \right\} m \text{ righe} = (a_{ij})_{\substack{i \dots m \\ j \dots n}}$$

↑
elemento di
A

A è una matrice $m \cdot n$

$M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow$ i numeri al suo interno sono reali
 \downarrow
 dimensioni

Es: $M_{1,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \{e^1, e^2, e^3\}$

$M_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} e^1 \\ e^2 \end{matrix} \right\}$

$\left\{ \begin{matrix} 1, 2, 3 \\ 4, 5, 6 \end{matrix} \right\} \rightarrow M_{2,3}(\mathbb{R})$

Una matrice è **quadrata** se ha lo stesso numero di righe e colonne quindi $m = n$

Una matrice quadrata è **triangolare superiore** se

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$$

Una matrice quadrata è **triangolare inferiore** se

$$a_{ij} = 0 \quad \forall j > i$$

Una matrice quadrata è **diagonale** se $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$

Esempi:

$$A = \begin{matrix} & & j \\ & & \overbrace{1 \ 2} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & a \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ triangolare inferiore}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ triangolare inferiore}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ triangolare superiore}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ triangolare diagonale}$$

I punti evidenziati li troviamo analizzando gli zeri per capire se rispettano le condizioni associate ad esempio nella matrice A capiamo che si tratta di una triangolare inferiore perché l'unico zero che c'è rispetta le condizioni infatti lo zero ha coordinate $\begin{matrix} 1 & 2 \\ \uparrow & \uparrow \\ i & j \end{matrix}$ e quindi $j > i$

Matrici Trasposte

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A^T = \text{la trasposta di } A \text{ ha } (a'_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \quad a'_{ij} = a_{ji}$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

↓
elemente
di A^T

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ 4 & \pi & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{trasporre}} B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & \pi & -2 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservando il seguente esempio, notiamo che usando le seguenti formule: $a'_{ij} = a_{ji}$ (ad esempio nel 4) capiamo come trasporre

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Bmatrix}$$

↓
 $a_{ij} \rightarrow 4$ (a_{21})

$$A^T = \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{Bmatrix}$$

↓
 $a'_{ij} \rightarrow$ questo corrisponde a: a_{ji}

↓
 $a_{ji} \rightarrow 4$ (a_{12})

Queste sono le coordinate
del 4 dentro la matrice

Una matrice quadrata M si dice simmetrica se $M^T = M$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2 matrici sono uguali $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow m=n, n=m$

$$i = 1 \sim m$$

$$j = 1 \sim m$$

$$(a_{ij}) = (b_{ij})$$

Somme tra matrici

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad \leftarrow \text{N.B. Le matrici devono avere la stessa dimensione}$$

$$A+B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Moltiplicazione tra un numero e una matrice
 \downarrow
scalare

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot A = (c \cdot a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot A = \begin{pmatrix} 1c & 2c & 3c \\ 4c & 5c & 6c \end{pmatrix}$$

Sottrazione tra matrici

$$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}), A - B = A + (-1)B$$

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Bmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{Bmatrix}$$

Example:

$$A = \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{Bmatrix}$$

$$B = \begin{Bmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 4 \\ \pi & 0 \end{Bmatrix}$$

$$A + 2B = \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 6 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 8 \\ 2\pi & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & \sqrt{2} \\ 4 & 9 \\ 2\pi & 5 \end{Bmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$$

$i = 1 \sim m$
 $k = 1 \sim p$

N.B. Per moltiplicare 2 matrici è necessario che abbiamo:

- numero colonne di A = numero righe di B
 - numero colonne di B = numero righe di A
- } **dimensione**

$$A \cdot B = \text{Risultato}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0-3 & 0+2+0 \\ 16+0-6 & 0+5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Per ottenere questo risultato segui i seguenti passi:

1) Moltiplica la prima riga per la prima colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 1$$

2) Moltiplica la prima riga per la seconda colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2$$

3) Moltiplica la seconda riga per la prima colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow 16 + 0 - 6 = 10$$

4) Multiplie la seconde ligne par la seconde colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 5$$

$$\begin{matrix} B & \cdot & A \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 4 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 4 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & -1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Autre exemple :

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 S \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 14 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$