Cap. 1 NUMERI REALI E COMPLESSI E GENERALITÀ SULLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

L'INSIEME DEI NUMERI REALI

Dai numeri naturali ai numeri reali. Riteniamo noti i seguenti insiemi numerici:
$\mathbf{N}$ insieme dei numeri naturali
$\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$
$\mathbf{Z}$ insieme dei numeri interi relativi
$\mathbf{Q}$ insieme dei numeri razionali
Riterremo noto anche il concetto di funzione fra insiemi.

Ricordiamo brevemente il percorso che conduce da $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Q}$. I numeri naturali sono considerati concetti primitivi perché sono legati ad una capacità elementare della nostra mente: quella di "associare", infatti essi servono per contare. Normalmente lo zero (anch'esso è un concetto primitivo) viene considerato un numero naturale, ma per comodità (il motivo sarà più chiaro quando affronteremo lo studio delle successioni) preferiamo distinguere gli insiemi $\mathbf{N}$ ed $\mathbf{N}_0$, tuttavia ciò che diremo per l'uno dei due varrà generalmente anche per l'altro. Un altro concetto primitivo è il "successivo di un numero": attenzione, non possiamo ancora dire che il successivo di n è $n+1$ perché non conosciamo ancora il concetto di addizione! lo indicheremo, per il momento, con n'. Chiameremo cifre i numeri $0, 1, \cdots, 9$. Nell'insieme dei numeri naturali vale il principio di induzione, che afferma che se una proprietà vale per $n = 1$ (o $n = 0$ a seconda dei casi) e, se si suppone che sia vera per un certo n, si riesce a provare che è vera anche per n', allora essa è vera per tutti i numeri naturali. Questo principio viene considerato un postulato: si suppone, cioè, che esso sia vero, senza dimostrarlo. A partire dal principio di induzione, si definiscono le operazioni: se $a \in \mathbf{N}_0$, per definire $a + n$ e $a \cdot n$ per un qualunque $n \in \mathbf{N}_0$, si pone

1) $a + 0 = a$
2) $a + n' = (a + n)'$
3) $a \cdot 0 = 0$
4) $a \cdot n' = a \cdot n + a$

Si definisce anche la potenza di un numero naturale:

5) $a^0 = 1$
6) $a^{n'} = a^n \cdot a$

Le potenze godono delle seguenti importanti proprietà:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$(a^n)^m = a^{nm}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Nel seguito, ometteremo il simbolo "$\cdot$" per indicare il prodotto.
Dalla 1) in particolare segue
$a + 1 = a + 0' = (a + 0)' = a'$

Infine, definiamo $a < b$ se esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $a + n = b$. Passando alle operazioni inverse (sottrazione e divisione), come è ben noto esse servono a risolvere dei problemi: rispettivamente, quello di trovare n tale che $b+n = a$ e quello di trovare n tale che $a = bn$. Essi, tuttavia, non sono sempre risolubili: il primo lo è solo se $a > b$ e il secondo solo se a è multiplo di b. Questo problema ha portato all'introduzione degli insiemi numerici successivi.

A partire da $n \in \mathbf{N}$, costruiamo due simboli: $+n$ (detto numero positivo) e $-n$ (detto numero negativo). L'insieme dei numeri interi relativi è $\mathbf{Z} = \{0\} \cup \{+n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{-n : n \in \mathbf{N}\}$. Nell'insieme $\mathbf{Z}$ si introducono le operazioni e l'ordine nella maniera ben nota, ed è subito evidente che il problema della sottrazione in $\mathbf{Z}$ è sempre risolto. Ora, associando ad ogni $n \in \mathbf{N}$ il numero $+n \in \mathbf{Z}$, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra $\mathbf{N}$ e l'insieme dei numeri interi positivi, possiamo vedere inoltre che i numeri n e $+n$ si comportano allo stesso modo rispetto alle operazioni e all'ordine (ad esempio, se $n < m$ si ha anche $+n < +m$) quindi è possibile identificare i numeri n e $+n$ e considerare $\mathbf{N}$ come un sottoinsieme di $\mathbf{Z}$.

Indichiamo ora con $\mathbf{Q}$ l'insieme costituito dallo zero e da tutte le coppie (m, n) con $m \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbf{N}$. I numeri razionali si indicheranno normalmente nella forma $\pm\frac{m}{n}$. Nell'insieme $\mathbf{Q}$ si introducono le operazioni e l'ordine nella maniera ben nota, ed è subito evidente che anche il problema della divisione in $\mathbf{Q}$ è sempre risolto. Ora, associando ad ogni $z \in \mathbf{Z}$ il numero $\frac{z}{1} \in \mathbf{Q}$, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra $\mathbf{Z}$ e l'insieme dei numeri razionali con denominatore 1, possiamo vedere inoltre che i numeri z e $\frac{z}{1}$ si comportano allo stesso modo rispetto alle operazioni e all'ordine (ad esempio, se $z < p$ si ha anche $\frac{z}{1} < \frac{p}{1}$) quindi è possibile identificare i numeri z e $\frac{z}{1}$ e considerare $\mathbf{Z}$ come un sottoinsieme di $\mathbf{Q}$.

L'insieme $\mathbf{Q}$ lascia tuttavia irrisolto il problema dell'estrazione della radice. Se, ad esempio, si volesse calcolare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente entrambi i cateti uguali ad 1, si dovrebbe cercare un elemento di $\mathbf{Q}$ il cui quadrato valga 2, ma è possibile dimostrare che un tale numero non esiste. È dunque necessario introdurre un insieme di numeri più ampio. Si utilizza a questo scopo la rappresentazione decimale dei numeri razionali: mediante il classico algoritmo della divisione, ogni numero razionale $r = \pm\frac{m}{n}$ ammette una rappresentazione del tipo $a = \pm a_0, a_1 a_2 \cdots$ costituita da un segno, un intero $a_0 \in \mathbf{N}_0$, una virgola e un allineamento (successione) di cifre decimali, che risulta essere sempre finito o periodico (quindi, in ogni caso, periodico). A questo punto siamo in grado di introdurre l'insieme dei numeri reali

$\mathbf{R} = \{0\} \cup \{\pm a_0, a_1 a_2 \cdots : a_0 \in \mathbf{N}_0; a_i \in \{0, \cdots, 9\} \forall i \in \mathbf{N}\}$

L'insieme $\mathbf{R}$ è dunque costituito, oltre che dallo zero, da tutti gli allineamenti decimali, periodici e non periodici. I suoi elementi sono detti numeri reali e, se l'allineamento è periodico, il numero $a = \pm a_0, a_1 a_2 \cdots$ è detto numero reale razionale, altrimenti è detto irrazionale. Diremo, poi, positivi i numeri con il segno $+$ e negativi quelli con il segno $-$. Se $a = \pm a_0, a_1 \cdots$ chiameremo opposto di a il numero $-a = \mp a_0, a_1 \cdots$. Se $a = \pm a_0, a_1 \cdots$, il numero $a_0 \in \mathbf{N}_0$ è detto parte intera di a.

Per introdurre in $\mathbf{R}$ una nozione d'ordine si procede nel seguente modo:

i) ogni numero negativo è minore di zero e ogni numero positivo è maggiore di zero

ii) dati due numeri positivi $a = +a_0, a_1 \cdots$ e $b = b_0, b_1 \cdots$ diremo maggiore quello in cui la prima cifra diversa è maggiore: ad esempio, $+4,718\mathbf{6}52 \cdots > +4,718\mathbf{3}72 \cdots$

iii) dati $a, b < 0$, diremo che $a < b$ se $-a > -b$.

Per introdurre in $\mathbf{R}$ l'operazione di somma si procede nel seguente modo:

i) $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbf{R}$

ii) se $a, b > 0$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si considera il numero $s_n = a_0, a_1 \cdots a_n + b_0, b_1 \cdots b_n$ (è somma di due numeri razionali), è possibile vedere che i numeri s_n, a partire da un certo valore di n in poi, hanno tutti la stessa parte intera, la stessa prima cifra decimale, ecc.; viene in tal modo introdotto un numero reale (questo procedimento viene chiamato procedimento di stabilizzazione) che è chiamato $a + b$.

iii) se uno dei due numeri è negativo (o lo sono entrambi) si procede come nel caso dei numeri razionali: ad esempio, $-\pi + \sqrt{2} = -(\pi - \sqrt{2})$.

Le altre operazioni si introducono in modo simile.

L'insieme dei numeri reali viene rappresentato su una retta sulla quale sia stato fissato un sistema di ascisse: si costruisce una corrispondenza biunivoca (detta rappresentazione geometrica di $\mathbf{R}$) fra $\mathbf{R}$ e l'insieme dei punti della retta, associando ad ogni $x \in \mathbf{R}$ il punto della retta avente ascissa x.

Densità di Q e di $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ in R. Si ha il seguente

TEOREMA. Siano a, b due numeri reali, con $a < b$. Allora, esistono infiniti numeri razionali r e infiniti numeri irrazionali s tali che $a < r < b$, $a < s < b$.

Dal risultato appena enunciato segue che fra a e b esistono infiniti numeri reali, l'insieme da essi formato è detto *intervallo* di estremi a, b. Gli intervalli che considereremo sono:

i) intervalli limitati:
$]a,b[=\{x\in\mathbf{R}:a<x<b\}$ (intervallo aperto)
$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}:a\le x\le b\}$ (intervallo chiuso)
e, analogamente, $[a,b[$ e $]a,b]$.
ii) intervalli non limitati:
$]a,+\infty[=\{x\in\mathbf{R}:x>a\}$ (semiretta non limitata superiormente)
$]-\infty,b[=\{x\in\mathbf{R}:x<b\}$ (semiretta non limitata inferiormente)
e, analogamente, $[a,+\infty[$ e $]-\infty,b]$.
Infine, porremo $]-\infty,+\infty[=\mathbf{R}$.

Con la scrittura (a,b) denoteremo un intervallo generico (uno qualunque di quelli sopra definiti).

In particolare, un intervallo del tipo $]c-r,c+r[$ (con $c\in\mathbf{R}$ ed $r>0$) è detto *intorno* di c di raggio r e può essere denotato con uno dei simboli $B(c,r)$, $I_r(c)$.

È utile anche la seguente *proprietà di Archimede*:
Dati $a,b>0$, esiste $n\in\mathbf{N}$ tale che $na>b$.

Insiemi finiti, infiniti, numerabili. Siano A e B due insiemi non vuoti. Diremo che hanno la stessa potenza se esiste una corrispondenza biunivoca $f:A\to B$. Sia ora X un insieme non vuoto. Diremo che X è finito ed ha n elementi se esiste una corrispondenza biunivoca fra X e l'insieme $\{1,2,\cdots,n\}$. In caso contrario, X è detto infinito. La caratteristica di un insieme infinito X è che esso ha la stessa potenza di un suo sottoinsieme proprio (pur avendo più elementi!). Ad esempio, consideriamo l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali e l'insieme P dei numeri naturali pari. Associando ad ogni $n\in\mathbf{N}$ il numero $2n\in P$ si ottiene una corrispondenza biunivoca. Un insieme X è detto numerabile (o avente la potenza del numerabile) se ha la stessa potenza di $\mathbf{N}$. Si può far vedere che $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$ sono numerabili. Consideriamo ora l'insieme $\mathbf{R}$. Si può far vedere che:
i) tutti gli intervalli hanno la medesima potenza
ii) la potenza degli intervalli è maggiore della potenza del numerabile
iii) $\mathbf{R}$ ha la stessa potenza degli intervalli

L'insieme dei numeri reali ha dunque una potenza maggiore della potenza del numerabile, essa è detta potenza del continuo.

A titolo di esempio, dimostriamo il punto ii). Supponiamo per assurdo che l'intervallo $[0,1]$ sia numerabile, dunque $[0,1]=X$ essendo $X=\{x_n: n\in\mathbf{N}\}$, con $x_n=+0,a_{1n}a_{2n}\cdots a_{kn}\cdots$. Costruiamo ora un numero $x=+0,x_1x_2\cdots x_k\cdots$ tale che, per ogni $k\in\mathbf{N}$, sia $x_k\neq a_{kk}$. Si ha dunque $x\in[0,1]$ ma $x\notin X$, assurdo.

Valore assoluto. Se $x \in \mathbf{R}$, si chiama valore assoluto di x il numero reale $|x|$ definito ponendo $|x| = x$ se $x \geq 0$, $|x| = -x$ se $x < 0$.

Il valore assoluto gode delle seguenti proprietà, per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$:

$|x| \geq 0$; $|x| = 0 \iff x = 0$

$|-x| = |x|$

$-|x| \leq x \leq |x|$

$|xy| = |x|\ |y|$

$a < x < b$, $a < y < b \Rightarrow |x - y| < b - a$

$-a < x < a \Leftrightarrow |x| < a \quad$ (essendo $a > 0$)

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|a - b| \leq |a| + |b|$

$|x| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = 0$

Possiamo osservare che il valore assoluto rappresenta la distanza del punto immagine di x dall'origine, e che $|a - b|$ rappresenta la lunghezza del segmento che ha per estremi le immagini dei punti a e b (quindi l'ampiezza dell'intervallo (a, b)). Quest'osservazione chiarisce, in particolare, la quinta e la sesta delle proprietà sopra elencate.

Estremo inferiore ed estremo superiore. Sia X un insieme numerico, ossia un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$. Un elemento $m \in X$ tale che $m \leq x$ per ogni $x \in X$ è detto *minimo* di X. Tale elemento, se esiste, è unico: se m ed m' fossero due minimi, per la definizione data si avrebbe $m \leq m'$ ed $m' \leq m$, da cui $m = m'$. Allo stesso modo si definisce *massimo* di X un elemento (se esiste) $M \in X$ tale che $M \geq x$ per ogni $x \in X$.

Diamo le seguenti definizioni:

I) Un numero $h \in \mathbf{R}$ è detto *minorante* di X se $h \leq x$ per ogni $x \in X$. Denoteremo con $\underline{M}_X$ l'insieme dei minoranti di X. Osserviamo che:

- se $h \in \underline{M}_X$ e $h' < h$, allora $h' \in \underline{M}_X$, quindi i minoranti di X, se esistono, sono infiniti
- $h \notin \underline{M}_X$ se esiste $x \in X : x < h$
- $\underline{M}_X = \emptyset$ se, per ogni $h \in \mathbf{R}$, esiste $x \in X : x < h$

II) Un numero $k \in \mathbf{R}$ è detto *maggiorante* di X se $k \geq x$ per ogni $x \in X$. Denoteremo con $\overline{M}_X$ l'insieme dei maggioranti di X. Osserviamo che:

- se $k \in \overline{M}_X$ e $k' > k$, allora $k' \in \overline{M}_X$, quindi i maggioranti di X, se esistono, sono infiniti
- $k \notin \overline{M}_X$ se esiste $x \in X : x > k$

- $\overline{M}_X = \emptyset$ se, per ogni $k \in \mathbf{R}$, esiste $x \in X : x > k$

III) X è detto limitato inferiormente se $\underline{M}_X \neq \emptyset$. X è detto limitato superiormente se $\overline{M}_X \neq \emptyset$. X è detto limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente, ossia se esistono $h, k \in \mathbf{R}$ tali che $h \leq x \leq k$ per ogni $x \in X$. In definitiva, un insieme è limitato se e solo se esiste un intervallo che lo contiene. Osserviamo anche che X è limitato se e solo se esiste $M > 0$ tale che $|x| \leq M$ per ogni $x \in X$.

Si ha il seguente

TEOREMA.

i) Sia X un insieme numerico limitato inferiormente.

Allora, l'insieme $\underline{M}_X$ dei minoranti di X è dotato di massimo.

ii) Sia X un insieme numerico limitato superiormente.

Allora, l'insieme $\overline{M}_X$ dei maggioranti di X è dotato di minimo.

Possiamo ora definire l'estremo inferiore e l'estremo superiore di X.

a) Se X è limitato inferiormente, si pone $\inf X = \max \underline{M}_X$. Se X non è limitato inferiormente, si pone $\inf X = -\infty$.

b) Se X è limitato superiormente, si pone $\sup X = \min \overline{M}_X$. Se X non è limitato superiormente, si pone $\sup X = +\infty$.

Dalla definizione a) e dalle osservazioni che seguono la definizione I), segue che un numero l è l'estremo inferiore di X se e solo se verifica le seguenti proprietà:

1) $l \leq x \ \forall x \in X$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x < l + \varepsilon$

La 1) esprime il fatto che l è un minorante. La 2) esprime il fatto che un arbitrario numero maggiore di l non è un minorante, quindi l è il massimo dei minoranti.

Analogamente, un numero L è l'estremo superiore di X se e solo se verifica le seguenti proprietà:

1) $L \geq x \ \forall x \in X$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x > L - \varepsilon$

Nozioni di topologia. Sia X un insieme numerico. Un elemento $c \in X$ è detto *punto interno* ad X se esiste $r > 0$ tale che $]c - r, c + r[\subseteq X$. Osserviamo che se X è un intervallo (a, b), i punti interni sono tutti e soli i punti dell'intervallo aperto $]a, b[$. L'insieme dei punti interni ad X è detto *interno* di X e si denota con $int(X)$. L'insieme X è detto *aperto* se è vuoto oppure, quando non è vuoto, tutti i suoi punti sono interni: $X = int(X)$.

Osserviamo anche che $\emptyset$ e $\mathbf{R}$ sono aperti.

Un numero reale c è detto *punto di frontiera* per X se, per ogni $r > 0$, nell'intorno $]c - r, c + r[$ ci sono elementi di X ed elementi di $\mathbf{R} \setminus X$.

Un numero reale c è detto *punto di accumulazione* per X se, per ogni $r > 0$, nell'intorno $]c - r, c + r[$ ci sono elementi di X diversi da c. L'insieme dei punti di accumulazione per X è detto *derivato* di X e si denota con $D(X)$. Possiamo subito osservare che un punto interno è di accumulazione, un punto di frontiera può non esserlo: ad esempio, se $X = [0, 1] \cup \{5\}$, il punto $c = 5$ è di frontiera ma non di accumulazione. Un tale punto, ossia un punto di X che non sia di accumulazione, è detto *punto isolato*.

L'insieme X è detto *chiuso* se il suo complementare $\mathbf{R} \setminus X$ è aperto.

Si definisce *chiusura* di X l'insieme

$$\overline{X} = X \cup D(X)$$

da cui segue che un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione e tutti i suoi punti di frontiera.

Diremo che X è *denso* in $\mathbf{R}$ se $\overline{X} = \mathbf{R}$. Dal teorema di densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ segue che tutti i numeri reali sono punti di accumulazione per $\mathbf{Q}$, quindi $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$. Questo fatto spiega il nome dato al teorema di densità. Lo stesso vale per $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Si ha dunque, se (a, b) è un intervallo limitato, posto $X = (a, b)\cap\mathbf{Q}$ oppure $X = (a, b) \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$, si ha $\overline{X} = [a, b]$.

Potenze, radici, logaritmi. Se $a \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}_0$, si definisce
$a^0 = 1$
$a^{n+1} = a^n \cdot a$
Se $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbf{N}$, si definisce
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Per definire la potenza nel caso in cui l'esponente sia razionale o irrazionale, dobbiamo premettere il seguente

Teorema della radice n-ma aritmetica. Siano a un numero reale positivo ed n un numero naturale maggiore o uguale a 2. Allora, esiste uno ed un solo numero positivo b tale che $b^n = a$.

Il numero b introdotto dal precedente teorema è detto radice n-ma aritmetica di a e si indica con $\sqrt[n]{a}$.

Grazie a questo teorema, se $a > 0$ e $n \in \mathbf{N}$, si definisce
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$
$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (a > 0, \frac{m}{n} \in \mathbf{Q})$
Per definire a^b con $a > 0$ e b irrazionale, si procede per stabilizzazione.

Le potenze a^b che abbiamo definito sono tutte positive. È possibile anche vedere che, se $a > 1$, si ha $a^b > 1$ se e solo se $b > 0$; $0 < a < 1$, si ha $a^b > 1$ se e solo se $b < 0$.

Discussione dell'equazione binomia. Siano $a \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}$, con $n \geq 2$. Vogliamo trovare tutti i numeri reali x tali che $x^n = a$. I risultati che troveremo saranno utili anche ad estendere la definizione di radice, data prima, ad un caso più generale.

L'equazione $x^n = a$ è detta equazione binomia. Vediamo quante soluzioni ha, al variare di a.

i) $a = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto, l'unica soluzione è $x = 0$.

ii) $a > 0$. Per il teorema precedente c' è l'unica soluzione positiva $\sqrt[n]{a}$, $x = 0$ non è soluzione, se ci sono altre soluzioni esse saranno negative. Sia allora b una soluzione negativa, consideriamo il numero positivo $-b$ e calcoliamo

$$(-b)^n = (-1)^n b^n = (-1)^n a$$

Per n pari si ottiene $(-b)^n = a \Rightarrow -b = \sqrt[n]{a} \Rightarrow b = -\sqrt[n]{a}$

Per n dispari si ottiene $(-b)^n = -a$ che non è possibile in quanto il primo membro è positivo e il secondo negativo.

In definitiva, per $a > 0$ ci sono due soluzioni $\pm\sqrt[n]{a}$ per n pari, una sola soluzione $\sqrt[n]{a}$ per n dispari.

iii) $a < 0$. $x = 0$ non è soluzione e non possono esserci soluzioni positive. Sia allora b una soluzione negativa, procedendo come nel caso precedente si trova che per n pari non ci sono soluzioni, per n dispari si ha una sola soluzione $-\sqrt[n]{-a}$.

Grazie a quanto abbiamo appena visto, possiamo estendere la nozione di radice n-ma ponendo $\sqrt[n]{0} = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ per $x < 0$, n dispari.

Logaritmo. Siano a, b due numeri positivi, con $a \neq 1$. Si può dimostrare che l'equazione $a^x = b$ ha una e una sola soluzione, detta logaritmo di b in base a e indicata con $\log_a\ b$. Il logaritmo di b in base a verifica dunque l'eguaglianza

$$a^{\log_a\ b} = b$$

A partire dalla definizione, utilizzando le proprietà delle potenze, si verifica che il logaritmo gode delle seguenti proprietà:

$\log_a\ a = 1$

$\log_a\ b = 0 \iff b = 1$

$\log_a\ bc = \log_a\ b + \log_a\ c$

$\log_a\ b^x = x \log_a\ b$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a\ b - \log_a\ c$

$\log_a\ b = (\log_a\ c)\ (\log_c\ b)$

Dalla prima e dall'ultima delle precedenti eguaglianze, si ottiene

$1 = \log_a\ a = (\log_a\ b)\ (\log_b\ a) \ \Rightarrow \log_b\ a = \frac{1}{\log_a\ b}$

Osserviamo inoltre che $\log_a b > 0$ se e solo se a e b sono entrambi maggiori di 1 o entrambi minori di 1.

CENNI SUI NUMERI COMPLESSI

Definizioni e prime proprietà. Definiamo numero complesso una coppia ordinata di numeri reali: $z = (a, b)$ con $a, b \in \mathbf{R}$. Indicheremo con $\mathbf{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

Se $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ sono due numeri complessi, diremo che $z = w$ se $a = c, b = d$; se $z \neq w$ non si dà alcuna nozione di ordine.

Dalla definizione, appare chiaro che si possa stabilire una corrispondenza biunivoca fra $\mathbf{C}$ e l'insieme dei punti del piano in cui sia stato introdotto un sistema di riferimento cartesiano, facendo corrispondere al numero $z = (a, b)$ il punto del piano avente coordinate (a, b) (rappresentazione geometrica di $\mathbf{C}$).

Sia $z = (a, b) \in \mathbf{C}$. Se $b = 0$, z è detto numero complesso reale, se $b \neq 0$, z è detto numero complesso immaginario, in particolare, z si dice immaginario puro se $a = 0, b \neq 0$. Diamo inoltre le seguenti definizioni:

$0 = (0, 0)$ zero complesso

$1 = (1, 0)$ unità reale

$i = (0, 1)$ unità immaginaria

$-z = (-a, -b)$ opposto di z

$\bar{z} = (a, -b)$ coniugato di z

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ modulo di z. Osserviamo che $|z|$ rappresenta la distanza del punto immagine di z dall'origine, nella rappresentazione geometrica di $\mathbf{C}$.

$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ somma

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ prodotto

Osserviamo che $z + (-z) = 0$, $z \cdot 1 = z$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

È possibile identificare ogni numero reale a con il numero complesso reale $(a, 0)$, si può dunque considerare $\mathbf{R}$ come un sottoinsieme di $\mathbf{C}$ e, alla luce di quanto visto prima, possiamo osservare che $i^2 = -1$.

Forma algebrica e forma trigonometrica. Sia $z = (a, b) \in \mathbf{C}$, alla luce della definizione vista prima per le operazioni in $\mathbf{C}$ possiamo osservare che

$z = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$

ottenendo l'espressione

$z = a + ib$

detta forma algebrica di z, molto utile in quanto, nelle operazioni, potremo considerare z come un polinomio, tenendo conto del fatto che $i^2 = -1$ e $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Ad esempio:

$\frac{2+i}{3+4i} = \frac{(2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{10-5i}{25} = \frac{10}{25} - \frac{5}{25}i$, ottenendo in tal modo facilmente il quoziente dei due numeri, in forma algebrica.

Grazie alla forma algebrica, dunque, un numero complesso può essere pensato come somma di una "parte reale" (a) e di una "parte immaginaria (ib).

Sia ora $z = a + ib$ un numero complesso non nullo, e sia $P = (a, b)$ il punto del piano che lo rappresenta. Indichiamo con α la misura in radianti del più piccolo angolo di cui deve ruotare il semiasse delle ascisse positive per sovrapporsi in direzione e verso alla semiretta OP orientata da O verso P. I numeri $\alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ vengono chiamati argomenti di z. Se A è la proiezione di P sull'asse delle ascisse, il triangolo OPA è un triangolo rettangolo quindi si ha $a = OA = |z| \cos\alpha$ e $b = AP = |z| \sin\alpha$. Il numero z si può allora riscrivere nella forma

$z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ (forma trigonometrica).

Possiamo notare che due numeri complessi in forma trigonometrica $z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ e $w = |w|(\cos\beta + i \sin\beta)$ sono uguali se e solo se $|z| = |w|$ e $\beta = \alpha + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$. Calcoliamo adesso il prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica, utilizzando la formula di addizione del coseno e del seno si ottiene facilmente che tale prodotto ha per modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti. Da questa osservazione si deduce la seguente formula di Moivre che fornisce la potenza intera di un numero complesso. Essa vale per ogni $n \in \mathbf{Z}$.

$z^n = |z|^n \big(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)\big)$.

Radici. Siano z un numero complesso e n un intero maggiore o uguale a 2. Un numero complesso w tale che $w^n = z$ è detto radice n-ma di z. Nel seguito, ci proponiamo di trovare tutte le radici n-me di z. Il primo caso è quello in cui $z = 0$, in tal caso, per la legge di annullamento del prodotto, l'unica radice è $w = 0$. Il secondo è quello in cui $z \neq 0$, in tal caso le eventuali radici saranno evidentemente non nulle. Sia w una di esse. Scriviamo z e w in forma trigonometrica:

$$z = |z|\big(\cos\alpha + i \sin\alpha\big)$$

$$w = |w|\big(\cos\beta + i \sin\beta\big)$$

Per la formula di Moivre, l'eguaglianza $w^n = z$ si scrive:

$$|w|^n\big(\cos n\beta + i\sin n\beta\big) = |z|\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big)$$

Imponendo la condizione di eguaglianza di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica, concludiamo che sono verificate le seguenti condizioni:
1) $|w|^n = |z|$, da cui $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, e
2) esiste $k \in \mathbf{Z} : n\beta = \alpha + 2k\pi$, da cui $\beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$
Abbiamo in tal modo provato che, se w è radice n-ma di z, è del tipo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)(*)$$

Applicando la formula di Moivre, si vede d'altronde facilmente che tutti i numeri w_k sono radici n-me di z. Si può dimostrare che la formula $(*)$ fornisce esattamente n radici distinte di z che si ottengono al variare di k nell' insieme $\{0; \cdots; n-1\}$. Ad esempio, le radici quarte di i sono: $\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}$ per $k = 0, 1, 2, 3$, quindi si tratta dei numeri che hanno modulo 1 e argomenti $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{8}$. Le radici cubiche di 8 sono: 2, $2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$, $2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Si ritrova dunque, ovviamente, quella reale, mentre le altre due sono immaginarie.

Consideriamo ora, in particolare, il caso delle radici quadrate, la (*) fornisce le due radici distinte $w_0 = \sqrt{|z|}\ (\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2})$, $w_1 = \sqrt{|z|}\ (\cos(\frac{\alpha}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\alpha}{2} + \pi)) = -w_0$, che, dunque, sono opposte. In particolare, se $z \in \mathbf{R}$, possiamo osservare che: se $z > 0$ è $\alpha = 0$ e $|z| = z$ quindi si ottengono le due radici $\pm\sqrt{z}$; se $z < 0$ è $\alpha = \pi$ e $|z| = -z$ quindi si ottengono le due radici $\pm i\sqrt{-z}$. Ad esempio, si ha $\sqrt{-4} = \pm 2i$. Questa osservazione risulta utile anche nella risoluzione delle equazioni di secondo grado a coefficienti reali con il discriminante negativo, in tal caso infatti la formula risolutiva $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ va interpretata intendendo $\pm\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{-\Delta}$. È bene sapere che la stessa formula vale per le equazioni a coefficienti complessi. Ad esempio, le soluzioni dell'equazione (a coefficienti reali, con discriminante negativo) $z^2 - 2z + 2 = 0$ sono $z = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$, le soluzioni dell'equazione (a coefficienti complessi) $iz^2 - 2z - 1 = 0$ sono $z = 1 \pm \sqrt{1+i} = 1 \pm \sqrt[4]{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big) = 1 \pm \sqrt[4]{2}\ \big(\frac{\sqrt{2}}{2}\ (1+i)\big)$.

FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Generalità. Sia f una funzione reale definita in un sottoinsieme X di $\mathbf{R}$, ovvero $f : X \to \mathbf{R}$. Si chiama grafico di f il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$: $gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$

Sia $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbf{R}$. Si dice che f è una funzione pari (risp. dispari) se, per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha $f(-x) = f(x)$ (risp. $f(-x) = -f(x)$). Si ha la seguente caratterizzazione: f è una funzione pari se e solo se il suo grafico è un insieme simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, cioè, se contiene un punto (a, b) contiene anche il punto $(-a, b)$; f è una funzione dispari se e solo se il suo grafico è un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè, se contiene un punto (a, b) contiene anche il punto $(-a, -b)$.

f si dice periodica se esiste un numero positivo T (periodo) tale che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha $f(x + T) = f(x)$. Si ha la seguente caratterizzazione: f è una funzione periodica se e solo se $f(x + hT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $h \in \mathbf{Z}$.

Indicata con $f(X)$ l'immagine di f, cioè l'insieme dei suoi valori, alcuni concetti insiemistici legati ad $f(X)$ vengono per definizione attribuiti ad f. Ad esempio, diremo che la funzione f è limitata (oppure limitata inferiormente o superiormente) se lo è l'insieme numerico $f(X)$. Gli estremi inferiore e superiore, e gli eventuali minimo e massimo di $f(X)$, verranno chiamati estremi inferiore e superiore, minimo e massimo di f (in X). L'estremo inferiore si indica con $\inf_{x \in X} \; f(x)$ o con $\inf_X \; f$, per gli altri concetti si usano notazioni analoghe. Se f ha il minimo, esso viene chiamato minimo assoluto di f in X, sia esso $m = \min_X \; f$. Dato che m è uno dei valori della funzione, esiste $c \in X$ tale che $f(c) = m$, il punto c viene chiamato punto di minimo assoluto. In modo analogo si introducono il massimo assoluto ($\max_X \; f$) e il punto di massimo assoluto. Il minimo e il massimo assoluto si chiamano anche estremi assoluti.

Chiameremo oscillazione di f in X la quantità $\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X\}$. Si può dimostrare che, se f è limitata in X, l'oscillazione è uguale a $\sup_X \; f - \inf_X \; f$.

Nel seguito, supporremo normalmente che l'insieme di definizione X di f sia un intervallo (a, b).

Ricordiamo qui il concetto di funzione composta. Siano date due funzioni $f : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ e $g : (a, b) \to (\alpha, \beta)$, allora per ogni $x \in (a, b)$ è possibile porre $F(x) = f(g(x))$. La funzione $F : (a, b) \to \mathbf{R}$ così introdotta è detta funzione composta da f (funzione esterna) e g (funzione interna).

Definiamo ora gli estremi relativi. Un punto $c \in (a, b)$ è detto punto di minimo (risp. massimo) relativo o locale per f se esiste un suo intorno $I =]c - r, c + r[$ tale che $f(x) \geq f(c)$ (risp. $f(x) \leq f(c)$) per ogni $x \in I$. Un punto di estremo assoluto è anche di estremo relativo, ma non vale il viceversa.

Un'altra nozione importante è quella di monotonia. Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$.

Si dice che la funzione f nell'intervallo (a, b) è monotona se verifica una delle seguenti condizioni:
- crescente se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- strettamente crescente se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- decrescente se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- strettamente decrescente se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Notiamo subito che una funzione strettamente monotona è iniettiva, quindi invertibile. Si vede facilmente che anche la sua funzione inversa gode dello stesso tipo di monotonia.

È anche possibile introdurre un concetto di monotonia locale. Precisamente, se $c \in (a, b)$, si dice che la funzione f è crescente nel punto c se esiste $s > 0$ tale che:

se $x \in]c - s, c[$ si ha $f(x) < f(c)$

se $x \in]c, c + s[$ si ha $f(x) > f(c)$.

In modo simmetrico si introduce il concetto di funzione decrescente nel punto c.

Si può provare che f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente) nell'intervallo (a, b) se e solo se è crescente (risp. decrescente) in ogni punto di (a, b). È dunque importante potere assicurare la monotonia puntuale di f, a tale scopo è utile prendere in considerazione una nuova funzione che ora introduciamo.

Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ e sia $c \in (a, b)$. Per ogni $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ poniamo

$$r(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

r viene chiamato rapporto incrementale di f relativo al punto c. Il rapporto incrementale può essere introdotto anche in una seconda forma: sia $h \in]a - c, b - c[\setminus\{0\}$, allora $c + h \in (a, b) \setminus \{c\}$ ed è possibile comporre r con la funzione $c + h$ (ossia, porre $h = x - c$) ottenendo

$$R(h) = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

osserviamo che anche r può essere ottenuto per composizione da R ponendo $x = c + h$.

Il rapporto incrementale è utile, come annunciato prima, per verificare la monotonia locale di f, grazie al seguente risultato.

TEOREMA. La funzione f è crescente (risp. decrescente) nel punto c se e solo se esiste un intorno $I_s(c)$ tale che, per ogni $x \in I_s(c) \setminus \{c\}$, si abbia $r(x) > 0$ (risp. $r(x) < 0$).

Dimostrazione. Supponiamo che $r(x) > 0$ in $I_s(c) \setminus \{c\}$. In $]c - s, c[$ il denominatore di r è negativo, quindi lo è anche il numeratore: dunque,

$f(x) < f(c)$. In $]c, c+s[$ il denominatore di r è positivo, quindi lo è anche il numeratore: dunque, $f(x) > f(c)$. Ne segue che f è crescente nel punto c. Il viceversa si prova allo stesso modo.

Diamo infine la nozione di funzione convessa. La funzione $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ è detta convessa se, per ogni $x, y \in (a,b)$ e per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

questa definizione significa che la porzione di grafico compresa fra le ascisse x e y è al di sotto del segmento che congiunge i punti del grafico di coordinate $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

La nozione di convessità può essere espressa in modo equivalente: a tale scopo, indichiamo con $epi(f) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in (a,b), y \geq f(x)\}$ (epigrafico di f) la porzione di piano che sta al di sopra del grafico. Si prova che la funzione f è convessa se e solo se $epi(f)$ è un sottoinsieme convesso di $\mathbf{R}^2$, cioè, se contiene due punti, contiene anche il segmento che li congiunge.

Funzioni elementari. In questo paragrafo esamineremo alcune funzioni che nascono dalle operazioni che abbiamo definito in $\mathbf{R}$. Si diranno funzioni elementari tutte queste, e tutte le funzioni ottenute da esse mediante operazioni elementari, composizione e passaggio all'inversa.

a) Funzione costante. Se $k \in \mathbf{R}$, la funzione $f(x) = k$ è definita in $]-\infty, +\infty[$.

b) Identità. La funzione $f(x) = x$ è definita in $]-\infty, +\infty[$.

c) Potenza con esponente intero positivo. Se $n \in \mathbf{N}$, la funzione $f(x) = x^n$ è definita in $]-\infty, +\infty[$.

d) Potenza con esponente intero negativo. Se $n \in \mathbf{N}$, la funzione $f(x) = x^{-n}$ è definita in $]-\infty, +\infty[\setminus\{0\}$.

e) Potenza con esponente razionale. Se $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$, la funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$ è definita in $[0, +\infty[$ se $\frac{m}{n} > 0$, in $]0, +\infty[$ se $\frac{m}{n} < 0$.

f) Potenza con esponente irrazionale. Se $s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, la funzione $f(x) = x^s$ è definita in $[0, +\infty[$ se $s \geq 0$, in $]0, +\infty[$ se $s < 0$.

g) Radice n-ma. Se $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, la funzione $f(x) = \sqrt[n]{x}$ è definita in $]-\infty, +\infty[$ se n è dispari, in $[0, +\infty[$ se n è pari.

h) Funzione esponenziale. Se $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione $f(x) = a^x$ è definita in $]-\infty, +\infty[$.

i) Logaritmo. Se $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione $f(x) = \log_a x$ è definita in $]0, +\infty[$.

j) Coseno e seno. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si consideri il punto P della circonferenza trigonometrica che sia il secondo estremo di un arco, avente primo estremo nel punto unità dell'asse delle ascisse e misura in radianti x. L'ascissa e l'ordinata di P sono dette rispettivamente $\cos x$ e $\sin x$. Le funzioni $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$ sono dunque definite in $]-\infty, +\infty[$.

k) Tangente. La funzione $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ è definita in $]-\infty, +\infty[\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

l) Arcocoseno e arcoseno. Per ogni $y \in [-1, 1]$, sia x l'unico punto dell'intervallo $[0, \pi]$ tale che $\cos x = y$. Si definisce in tal modo la funzione $\arccos y$, inversa della restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$. In modo analogo si costruisce, per ogni $y \in [-1, 1]$, la funzione $\arcsin y$, inversa della restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

m) Arcotangente. Come visto al punto l), si costruisce, per ogni $y \in]-\infty, +\infty[$, la funzione $\arctan y$, inversa della restrizione di $\tan x$ all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

N.B. Per una trattazione esauriente delle funzioni trigonometriche si può consultare il libro Marcellini - Sbordone, Esercitazioni di Matematica, vol. 1, parte prima, cap.2.

n) Polinomi. Se $n \in \mathbf{N}_0$ e $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$, la funzione $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ (polinomio di grado n) è definita in $]-\infty, +\infty[$.

o) Funzioni razionali fratte. La funzione $f(x) = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$ $(a_i, b_j \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}_0, m \in \mathbf{N}, b_0 \neq 0)$ è definita in $]-\infty, +\infty[\setminus\{c \in \mathbf{R} : b_0c^m + \cdots + c_m = 0\}$

Osservazioni sulle funzioni elementari.

c) Se n è pari, la funzione $f(x) = x^n$ è pari, è strettamente crescente in $[0, +\infty[$ (l'inversa è $\sqrt[n]{x}$) e strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$. Se n è dispari, la funzione $f(x) = x^n$ è dispari, è strettamente crescente in $]-\infty, +\infty[$. L'inversa è la funzione $\sqrt[n]{x}$.

h) Se $a > 1$, la funzione $f(x) = a^x$ è strettamente crescente in $]-\infty, +\infty[$; se $a < 1$, la funzione $f(x) = a^x$ è strettamente decrescente in $]-\infty, +\infty[$. L'inversa è la funzione $\log_a x$.

n) Se $n = 0$, il polinomio si dice costante; si ha cioè $p(x) = a_0$ per ogni valore di x. Se $a_0 = 0$, si ha il polinomio identicamente nullo. Due polinomi $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ e $P(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$ si dicono identici se $p(x) = q(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, si può dimostrare che p e P sono identici se e solo se $m = n$ e $b_i = a_i$ per ogni $i = 0, \cdots, n$. Ricordiamo che, dati due polinomi p e P, esistono un polinomio q (quoziente) ed un polinomio r (resto), quest'ultimo avente grado minore di quello di P, tali che $p(x) = P(x)q(x) + r(x)$. Se r è il polinomio nullo, si dice che p è divisibile per P.

Nell'ambito dello studio dei polinomi, un importante problema è quello di risolvere l'equazione $p(x) = 0$ (equazione algebrica). Si prova che una tale equazione ha esattamente n soluzioni (dette anche zeri del polinomio) distinte o in vario modo coincidenti. Se k di tali soluzioni coincidono, detto α il loro comune valore, si dice che α è una soluzione di molteplicità k. Alcuni zeri di un polinomio possono essere numeri immaginari. Si prova che se $\beta+i\gamma$ è uno zero di molteplicità k, lo è anche il suo coniugato $\beta - i\gamma$. Ricordiamo infine che, grazie al ben noto teorema di Ruffini, il numero α è uno zero del polinomio p se e solo se p è divisibile per il binomio $x - \alpha$. Siano allora α_i di molteplicità s_i $(i = 1, \cdots, h)$ e $\beta_j \pm i\gamma_j$, ciascuno di molteplicità t_j $(j = 1, \cdots, k)$ tutti gli zeri di p, si ha $s_1 + \cdots s_h + 2t_1 + \cdots + 2t_k = n$. Da quanto detto prima segue che p può essere decomposto in fattori del tipo $(x-\alpha_i)^{s_i}$ e in fattori del tipo $[(x-(\beta_j+i\gamma_j)]\,[(x-(\beta_j-i\gamma_j)] = (x-\beta_j)^2+\gamma_j^2$. Ne deriva la seguente decomposizione in fattori di primo e secondo grado, tutti a coefficienti reali:

$$p(x) = a_0(x-\alpha_1)^{s_1} \cdots (x-\alpha_h)^{s_h}\ [(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2]^{t_1} \cdots [(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2]^{t_k}$$

o) Supponiamo che il numeratore e il denominatore di f siano polinomi primi fra loro, ossia privi di divisori comuni. Si può dimostrare che f può essere espressa come somma di frazioni del tipo $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(A, a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$ e di frazioni del tipo $\frac{Ax+B}{(x^2+k^2)^n}$ $(A, B, k \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$ dette fratti semplici. Per trovare i fratti semplici è necessario trovare gli zeri del polinomio al denominatore.

SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

Prime definizioni. Una successione di numeri reali è una funzione reale definita in $\mathbf{N}, f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Se $n \in \mathbf{N}$, si usa la notazione $a_n = f(n)$, in tal modo la successione viene identificata con l'insieme dei suoi elementi : $\{a_n\}$. L'elemento generico a_n viene detto elemento di posto (o di indice) n. Si dice che la successione verifica *definitivamente* (nel seguito, **D**) una condizione P se esiste $\alpha \in \mathbf{N}$ tale che, per ogni $n > \alpha$, l'elemento a_n verifica P. Ad esempio, la successione $\{n - 4\}$ è definitivamente positiva. Osserviamo che, se due condizioni sono verificate definitivamente, ad esempio una per $n > \alpha$ e una per $n > \beta$, per $n > \max(\alpha, \beta)$ valgono entrambe. Ad esempio, si ha $n^2 - 4 > 0$ per $n > 2$ e $n^2 - 4 > 5$ per $n > 3$: dunque, per $n > 3$ le due condizioni valgono simultaneamente. La successione è detta limitata se lo è l'insieme dei suoi termini, ovvero se esistono $h, k \in \mathbf{R}$ tali che $h \leq a_n \leq k$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha quindi $\{a_n\} \subseteq [h, k]$. I concetti di minimo, massimo, estremo superiore ed inferiore di una successione coincidono con quelli relativi all'insieme dei suoi termini. Ad esempio, il minimo della successione $\{n - 1\}$ è $a_1 = 2$.

PROPOSIZIONE. Una successione **D** limitata è limitata.

Dimostrazione. Se si ha $h \leq a_n \leq k$ per ogni $n > \alpha$, posto $h' = \min\{h, a_1, \cdots, a_\alpha\}$, $k' = \max\{k, a_1, \cdots, a_\alpha\}$, si ha $h' \leq a_n \leq k'$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Successioni regolari. Introduciamo ora il concetto fondamentale di limite di una successione.

1) Sia l un numero reale. Si dice che la successione $\{a_n\}$ *converge* o *tende* ad l o che l è il *limite* della successione, e si scrive $a_n \to l$ o $\lim\ a_n = l$ se è verificata la seguente condizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \alpha \in N : n > \alpha \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

ovvero, se, dato un qualunque intorno di l, **D** i termini della successione appartengono a tale intorno: se $n > \alpha$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \iff l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$.

Se $l = 0$, la successione è detta *infinitesima* o, semplicemente, *un infinitesimo.*

Ad esempio, si verifica facilmente che una successione costante $a_n = k$ tende a k; $\frac{1}{n} \to 0$.

Si ha un risultato fondamentale, che è basato sulla seguente proprietà dell'insieme $\mathbf{R}$: dati due numeri reali distinti a e b, esistono un intorno di a e un intorno di b disgiunti.

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE. Se una successione converge, il suo limite è unico.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $a_n \to l$ e $a_n \to L$, con, ad esempio, $l < L$. Scelto ε tale che $0 < \varepsilon < \frac{L-l}{2}$, $\mathbf{D}$ si ha $a_n < l+\varepsilon < L-\varepsilon < a_n$, assurdo.

Altri notevoli risultati sono i seguenti:

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. Se $a_n \to l > 0$ (risp. $l < 0$), allora $\mathbf{D}$ si ha $a_n > 0$ (risp. $a_n < 0$).

Dimostrazione. Supponiamo $l > 0$. Scelto ε tale che $0 < \varepsilon < l$, $\mathbf{D}$ si ha $a_n > l - \varepsilon > 0$. Il caso $l < 0$ si prova in modo simile.

Generalizzando questo risultato, possiamo affermare che se $a_n \to l$ e $h < l$ (risp. $k > l$), $\mathbf{D}$ si ha $a_n > h$ (risp. $a_n < k$).

TEOREMA DI CONFRONTO PER SUCCESSIONI CONVERGENTI. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to l$, $c_n \to l$, allora $b_n \to l$.

Dimostrazione. Dato che $\mathbf{D}$ si ha sia $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$ che $l-\varepsilon < c_n < l+\varepsilon$, $\mathbf{D}$ si avrà $l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$.

2) Si dice che la successione $\{a_n\}$ *diverge* o *tende* a $+\infty$ (risp. $-\infty$), e si scrive $a_n \to +\infty$ o $\lim\ a_n = +\infty$ (risp. $-\infty$) se è verificata la seguente condizione:

$$\forall k > 0 \ \ \exists \alpha \in N : n > \alpha \Rightarrow a_n > k \ \ (a_n < -k)$$

ovvero, i termini della successione sono $\mathbf{D}$ maggiori (risp. minori) di qualsivoglia numero assegnato: se $n > \alpha$ si ha $a_n > k$ (risp. $a_n < -k$).

Ad esempio, $n \to +\infty$; $-n \to -\infty$.

Anche per la divergenza vale l'unicità del limite. Il teorema della permanenza del segno si può esprimere dicendo che i termini di una successione divergente a $+\infty$ $(-\infty)$ sono $\mathbf{D}$ positivi (negativi). Possiamo concludere che una successione di numeri positivi può tendere ad un limite positivo, a zero o a $+\infty$, una successione di numeri negativi può tendere ad un limite negativo, a zero o a $-\infty$. Se, infatti, ad esempio, una successione di numeri positivi tendesse ad un numero negativo, i suoi termini dovrebbero essere $\mathbf{D}$ negativi, cosa impossibile.

TEOREMA DI CONFRONTO PER SUCCESSIONI DIVERGENTI. Se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to +\infty$, allora $b_n \to +\infty$; se $b_n \to -\infty$, allora $a_n \to -\infty$.

Dimostrazione. Se $a_n \to +\infty$, allora **D** si ha $a_n > k$, ne segue che $b_n \geq a_n > k$; l'altro caso si prova allo stesso modo.

Possiamo dare a questo punto la seguente

Definizione. Una successione è detta *regolare* se converge o diverge.

Per una successione regolare, il limite è unico.

Una successione non regolare è anche detta *oscillante*: lo sono, ad esempio, le successioni $(-1)^n$ e $(-1)^n\, n$. Se, ad esempio, si avesse $(-1)^n \to 1$, **D** si dovrebbe avere (applicando la definizione con $\varepsilon = 1$, $0 < (-1)^n < 2$, diseguaglianza che per n dispari non è verificata. Analogamente si prova che la successione non può tendere a nessun altro limite. Per la successione $(-1)^n n$ si procede allo stesso modo.

Successioni e valore assoluto. Accanto alla successione $\{a_n\}$, consideriamo la successione $\{|a_n|\}$. Si prova che:

1) Se $a_n \to l$, allora $|a_n| \to |l|$.

Il viceversa non vale: ad esempio, posto $a_n = (-1)^n$, la successione dei valori assoluti è costante quindi convergente (ad 1) ma $\{a_n\}$ oscilla.

2) Se $a_n \to +\infty$ oppure $a_n \to -\infty$, si ha $|a_n| \to +\infty$. Il viceversa non vale: ad esempio, posto $a_n = (-1)^n\, n$, la successione dei valori assoluti vale n quindi diverge ma $\{a_n\}$ oscilla.

Se $|a_n| \to +\infty$, la successione $\{a_n\}$ è detta *infinitamente grande* e si usa la notazione $a_n \to \infty$. Chiaramente, una successione infinitamente grande a termini tutti o definitivamente positivi (negativi) diverge a $+\infty$ $(-\infty)$.

Regolarità e limitatezza. Si hanno le seguenti affermazioni:

i) Una successione convergente è limitata: infatti, essa è **D** compresa, ad esempio, fra $l - 1$ e $l + 1$, quindi è **D** limitata. Non vale il viceversa: la successione $\{(-1)^n\}$ è limitata ma oscillante.

ii) Una successione che diverge a $+\infty$ è limitata inferiormente (dato che i suoi termini sono, ad esempio, **D** maggiori di 1) e non è limitata superiormente.

iii) Una successione che diverge a $-\infty$ è limitata superiormente (dato che i suoi termini sono, ad esempio, **D** minori di -1) e non è limitata inferiormente.

Successioni monotone. Si dice che la successione $\{a_n\}$ è *monotona* se, per ogni $n \in \mathbf{N}$ o definitivamente, verifica una delle seguenti condizioni:

1) $a_n > a_{n+1}$ (successione *strettamente decrescente*)

2) $a_n \geq a_{n+1}$ (successione *decrescente*)

3) $a_n < a_{n+1}$ (successione *strettamente crescente*)

4) $a_n \leq a_{n+1}$ (successione *crescente*)

Le successioni monotone costituiscono una categoria di successioni sicuramente regolari, ciò è stabilito dal seguente risultato, che fornisce anche il valore del limite

TEOREMA DI REGOLARITÀ (O SUL LIMITE) DELLE SUCCESSIONI MONOTONE.

i) Una successione che verifica una delle condizioni 1) e 2) tende al proprio estremo inferiore.

ii) Una successione che verifica una delle condizioni 3) e 4) tende al proprio estremo superiore.

Dimostrazione. Proviamo, per semplicità, solo il caso della divergenza.

i) Se $\inf\ a_n = -\infty$, fissato $k > 0$ il numero $-k$ non è un minorante per la successione, dunque esiste $\alpha \in \mathbf{N}$ tale che $a_\alpha < -k$. Per $n > \alpha$ si ha $a_n \leq a_\alpha < -k$, che è la tesi.

ii) Se $\sup\ a_n = +\infty$, fissato $k > 0$ il numero k non è un maggiorante per la successione, dunque esiste $\alpha \in \mathbf{N}$ tale che $a_\alpha > k$. Per $n > \alpha$ si ha $a_n \geq a_\alpha > k$, che è la tesi.

Osserviamo che per una successione crescente il termine a_1 è il minimo, per una successione decrescente è il massimo.

Operazioni con i limiti delle successioni. I seguenti risultati saranno molto utili per calcolare i limiti di successioni la cui legge di definizione è espressa mediante operazioni elementari fra altre successioni delle quali sia noto il comportamento al limite.

1) Sia $\{a_n\}$ una successione regolare e sia c un numero reale. Prendiamo in considerazione la successione $\{ca_n\}$. Si ha:

i) se $a_n \to l$, allora $ca_n \to cl$

ii) se $a_n \to +\infty$ e $c > 0$, allora $ca_n \to +\infty$

iii) se $a_n \to +\infty$ e $c < 0$, allora $ca_n \to -\infty$

iv) se $a_n \to -\infty$ e $c > 0$, allora $ca_n \to -\infty$

v) se $a_n \to -\infty$ e $c < 0$, allora $ca_n \to +\infty$

Dimostrazione. i) Se $c = 0$, la tesi è ovvia. Se $c \neq 0$, per ottenere $|ca_n - cl| < \varepsilon$ basta osservare che **D** si ha $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{|c|}$.

ii) Per ottenere $ca_n > k$ basta osservare che **D** si ha $a_n > \frac{k}{c}$.

iii) Per ottenere $ca_n < -k$ basta osservare che **D** si ha $a_n > \frac{-k}{c}$ (ricordiamo che $\frac{-k}{c} > 0$).

La iv) e la v) si provano in modo simile.

2) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ prendiamo in considerazione la successione somma $\{a_n + b_n\}$. Si ha:

I) Se $a_n \to l$ e $b_n \to L$, allora $a_n + b_n \to l + L$.

II) Se $a_n \to +\infty$ ed esiste un numero $h \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora $a_n + b_n \to +\infty$.

Dimostrazione. I) Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ tali che per $n > \alpha$ si ha $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ e per $n > \beta$ si ha $|b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Per $n > \max(\alpha, \beta)$ si ha $|(a_n + b_n) - (l + L)| \leq |a_n - l| + |b_n - L| < \varepsilon$.

II) Si ha $a_n + b_n \geq a_n + h$ quindi, dato che $\mathbf{D}$ si ha $a_n > k - h$, ne segue $a_n + b_n > k$.

Osserviamo che la successione $\{b_n\}$ nel caso II) può non essere regolare: ad esempio, se $a_n = n$ e $b_n = (-1)^n$, si ha $a_n + b_n \to +\infty$. Da II) si deduce la seguente tabella sul comportamento della successione somma:

i) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L$, allora $a_n + b_n \to +\infty$.

ii) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n + b_n \to +\infty$.

iii) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L$, allora $a_n + b_n \to -\infty$.

iv) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to -\infty$, allora $a_n + b_n \to -\infty$.

Nei casi i) e ii), la successione $\{b_n\}$ verifica la condizione richiesta in II). Nel caso iii) osserviamo che $-a_n \to +\infty$ e $-b_n \to -L$ quindi $-(a_n + b_n) \to +\infty$ e la tesi segue da iii) di 1). Il caso iv) si tratta allo stesso modo.

Infine, se una delle due successioni diverge a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$, si ha una *forma indeterminata*, questo significa che si possono avere molte situazioni diverse quindi sarà necessario trattare ogni caso in modo diverso. Esempi:

$(n+l)+(-n) \to l$; $2n+(-n) \to +\infty$; $n+(-2n) \to -\infty$; $\{(n+(-1)^n) + (-n)\}$ oscilla.

I risultati contenuti nei casi 1) e 2) sono utili per studiare successioni del tipo $\{ca_n + c'b_n\}$ (combinazione lineare).

3) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ prendiamo in considerazione la successione prodotto $\{a_n\, b_n\}$. Si ha:

I) Se $a_n \to l$ e $b_n \to L$, allora $a_n\, b_n \to l\, L$.

II) Se $a_n \to 0$ e $\{b_n\}$ è limitata, allora $a_n\, b_n \to 0$.

III) Se $a_n \to +\infty$ ed esiste un numero positivo $h \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora $a_n\, b_n \to +\infty$.

Osserviamo che la successione $\{b_n\}$ nel caso II) può non essere regolare: ad esempio, se $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n$, si ha $a_n\, b_n \to 0$.

Dai risultati precedenti si deduce la seguente tabella sul comportamento della successione prodotto:

i) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n\, b_n \to +\infty$.

ii) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n\, b_n \to +\infty$.

iii) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n\, b_n \to -\infty$.

iv) Se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$, allora $a_n\, b_n \to -\infty$.

v) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n\, b_n \to -\infty$.

vi) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to -\infty$, allora $a_n\, b_n \to +\infty$.

vii) Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n\ b_n \to +\infty$.

A titolo di esempio, proviamo i) e v). i) segue dal teorema III) dato che $\{b_n\}$ ha limite positivo quindi h esiste grazie al Teorema della permanenza del segno. Per provare v), osserviamo che si ha $-a_n \to +\infty$ quindi $-a_n b_n \to +\infty$ per i) e la tesi segue da iii) di 1).

Infine, se una delle due successioni diverge e l'altra tende a 0 si ha una *forma indeterminata*. Esempi:

$(l\ n)\frac{1}{n} \to l$; $n^2\ \frac{1}{n} \to +\infty$; $\{n\ \frac{(-1)^n}{n}\}$ oscilla.

4) Sia $\{a_n\}$ una successione regolare e **D** non nulla, prendiamo in considerazione la successione reciproca $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$. Si possono dimostrare i seguenti risultati:

I) Se $a_n \to l \neq 0$, allora $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{l}$.

II) Se $a_n \to 0$, allora $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

III) Se $a_n \to \infty$, allora $\frac{1}{a_n} \to 0$.

5) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, con $b_n \neq 0$ **D**, prendiamo in considerazione la successione quoziente $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$. Essa viene studiata utilizzando i risultati visti ai punti 3) e 4), scrivendola nella forma $a_n\ \frac{1}{b_n}$. Si ha una forma indeterminata se tale prodotto si presenta nella forma $0 \cdot \infty$, quindi se entrambe le successioni sono infinitesime o infinitamente grandi.

Riassumendo, le forme indeterminate che abbiamo finora trovato sono: $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Limiti notevoli. Alcune successioni sono espresse mediante funzioni elementari, qui vediamo le più comuni.

1) Successione potenza. $\{n^x\}$, $x \in \mathbf{R}$. Se $x = 0$, la successione è costante. Se $x > 0$, si ha $n^x \to +\infty$, infatti $n^x > k$ equivale a $n > k^{\frac{1}{x}}$, che **D** è vera. Se $x < 0$, si ha $n^x = \frac{1}{n^{-x}} \to 0$.

2) Successione in forma di polinomio. $x_n = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p$. Per quanto visto in 1), la successione si presenta normalmente nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Si procede nel seguente modo:

$x_n = n^p(a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p})$. Si ha $n^p \to +\infty$ mentre la quantità fra parentesi tende ad a_0 quindi $x_n \to +\infty$ se $a_0 > 0$, $x_n \to -\infty$ se $a_0 < 0$.

3) Successione in forma di funzione razionale. $x_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q}$. Per quanto visto in 2), la successione si presenta normalmente nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Procedendo come in 2) si ottiene:

$x_n = n^{p-q}\ \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}$ quindi: se $p = q$ si ha $x_n \to \frac{a_0}{b_0}$; se $p < q$ si ha $x_n \to 0$; se $p > q$ si ha $x_n \to +\infty$ se a_0, b_0 hanno lo stesso segno; $x_n \to -\infty$ se a_0, b_0 hanno segno opposto.

ESEMPI:
$\frac{2n^2+5n+3}{n^2+8} \to 2$
$\frac{2n^2+5n+3}{n^5+8} \to 0$
$\frac{2n^2+5n+3}{3-n^7} \to 0$
$\frac{2n^2+5n+3}{n+8} \to +\infty$
$\frac{2n^2+5n+3}{8-3n} \to -\infty$
$\frac{2n^2-5n^3+3}{n^2+8} \to -\infty$
$\frac{2n^2-5n^3+3}{8-n^2} \to +\infty$

4) Successione geometrica. $\{a^n\}$, con $a \in \mathbf{R}$. Si prova facilmente per esercizio che tale successione ha il seguente comportamento al limite:

$a > 1 \Rightarrow a^n \to +\infty$
$a = 1 \Rightarrow a^n \to 1$ (è costante)
$0 < a < 1 \Rightarrow a^n \to 0$
$a = -1 \Rightarrow a^n$ è oscillante
$a < -1 \Rightarrow a^n \to \infty$ ed è oscillante

5) Successioni composte mediante funzioni elementari. Proveremo in seguito la seguente

PROPOSIZIONE 1. Se $f : X \to \mathbf{R}$ è una funzione elementare, se $\{a_n\} \subseteq X$, $a_n \to l$ e $l \in X$, allora si ha $f(a_n) \to f(l)$.

Ad esempio, se $a_n \to \pi$, si ha $\cos a_n \to \cos \pi$.

Vediamo ora alcuni particolari casi di successioni composte mediante funzioni elementari.

α) Sia $\{x_n\}$ una successione regolare e sia a un numero positivo e diverso da 1. Studiamo la successione $\{a^{x_n}\}$. Per la Proposizione 1, se $x_n \to l$, si ha $a^{x_n} \to a^l$. Se $\{x_n\}$ diverge si deve distinguere se $a > 1$ oppure $0 < a < 1$. Si ha:

i) $a > 1, x_n \to +\infty \Rightarrow a^{x_n} \to +\infty$
ii) $a > 1, x_n \to -\infty \Rightarrow a^{x_n} \to 0$
iii) $a < 1, x_n \to +\infty \Rightarrow a^{x_n} \to 0$
iv) $a < 1, x_n \to -\infty \Rightarrow a^{x_n} \to +\infty$

Dimostrazione. i) $a^{x_n} > k$ equivale a $x_n > \log_a k$, che è **D** vera dato che $x_n \to +\infty$.

ii) Basta osservare che $a^{x_n} = \frac{1}{a^{-x_n}}$

iii), iv) Basta osservare che $a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$ e $\frac{1}{a} > 1$.

β) Sia $\{x_n\}$ una successione regolare di numeri positivi e sia a un numero positivo e diverso da 1. Studiamo la successione $\{\log_a\ x_n\}$. Per la Proposizione 1, se $x_n \to l > 0$, si ha $\log_a\ x_n \to \log_a\ l$. Se $\{x_n\}$ diverge a $+\infty$ oppure tende a 0 si deve distinguere se $a > 1$ oppure $0 < a < 1$. Si ha:

i) $a > 1, x_n \to +\infty \Rightarrow \log_a\ x_n \to +\infty$

ii) $a > 1, x_n \to 0 \Rightarrow \log_a \ x_n \to -\infty$

iii) $a < 1, x_n \to +\infty \Rightarrow \log_a \ x_n \to -\infty$

iv) $a < 1, x_n \to 0 \Rightarrow \log_a \ x_n \to +\infty$

Dimostrazione. i) $\log_a \ x_n > k$ equivale a $x_n > a^k$, che è **D** vera dato che $x_n \to +\infty$

ii) Basta osservare che $\log_a x_n = \log_a \ \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = -\log_a \ \frac{1}{x_n}$

iii), iv) Basta osservare che $\log_a x_n = \left(\log_a \ \frac{1}{a}\right) \left(\log_{\frac{1}{a}} \ x_n\right) = -\log_{\frac{1}{a}} \ x_n$

γ) Successione del tipo $(a_n)^{b_n}$ essendo $a_n > 0$ per ogni n. Questa successione si scrive nella forma $(a_n)^{b_n} = e^{\log \ (a_n)^{b_n}} = e^{b_n \ \log \ a_n}$ e in questa forma ci si può ricondurre ai casi α, β. Si avranno forme indeterminate se il prodotto $b_n \ \log \ a_n$ si presenta nella forma $0 \cdot \infty$ e questo accade se $b_n \to 0$ e $\log \ a_n \to \infty$ o viceversa. Ricordiamo che:

$\log \ a_n \to \infty$ significa che $a_n \to +\infty$ oppure che $a_n \to 0$

$\log \ a_n \to 0$ significa che $a_n \to 1$.

In definitiva, si avranno tre forme indeterminate di tipo esponenziale: $(+\infty)^0$; 0^0; 1^∞.

Il numero e**.** Consideriamo la successione $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, essa si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Si può provare che essa è strettamente crescente e limitata superiormente (precisamente, 3 è un maggiorante). Essa dunque converge, si definisce il numero e ponendolo uguale al suo limite. Si tratta di un numero irrazionale e questo fatto è interessante se si osserva che i numeri x_n sono tutti razionali.

Si hanno i seguenti "limiti dedotti dal numero e".

i) Siano a un numero positivo diverso da 1 e $x_n \to \infty$. Allora si ha:

$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$

da cui segue, in particolare, se $x_n = \frac{n}{x}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$:

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x \to e^x$, dato che la quantità fra parentesi quadre tende ad e

ii) Siano a un numero positivo diverso da 1 e $x_n \to 0$. Allora si ha:

$\frac{\log_a(1+x_n)}{x_n} \to \log_a e$; in particolare, per $a = e$, $\frac{\log(1+x_n)}{x_n} \to 1$

$\frac{a^{x_n}-1}{x_n} \to \log a$; in particolare, per $a = e$, $\frac{e^{x_n}-1}{x_n} \to 1$

iii) sia $\alpha \in \mathbf{R}$, si ha $\frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} \to \alpha$

Si hanno, infine, i seguenti limiti in cui sono presenti le funzioni trigonometriche. Premettiamo che, per ogni $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si ha $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$. Sia $a_n \to 0$, allora la successione $\{\frac{\sin a_n}{a_n}\}$ si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Dato che $a_n \to 0$, **D** si ha $|a_n| < \frac{\pi}{2}$, quindi

$|\sin a_n| \leq |a_n| \leq |\tan a_n|$ da cui, dividendo per $|\sin a_n|$ e passando ai reciproci, $|\cos a_n| \leq |\frac{\sin a_n}{a_n}| \leq 1$. Osservando che, se $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tutti gli argomenti dei valori assoluti presenti in tale catena di diseguaglianze sono positivi, essa equivale a $\cos a_n \leq \frac{\sin a_n}{a_n} \leq 1$, e, applicando il teorema di confronto, da qui segue che $\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$. Da questo risultato si deduce immediatamente che

$\frac{\tan a_n}{a_n} \to 1$ e si può provare che anche $\frac{\arcsin a_n}{a_n} \to 1$ e $\frac{\arctan a_n}{a_n} \to 1$.

Consideriamo infine i seguenti due limiti:

$\frac{1-\cos a_n}{a_n} = \frac{1-\cos^2 a_n}{a_n(1+\cos a_n)} = \frac{\sin a_n}{a_n} \frac{\sin a_n}{1+\cos a_n} \to 0$

e, procedendo analogamente

$\frac{1-\cos a_n}{(a_n)^2} \to \frac{1}{2}$

Successioni estratte. Data una successione $\{a_n\}$, sia data un'altra successione $\{n_k\}$ strettamente crescente, con $n_k \in \mathbf{N}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. La funzione composta $\{a_{n_k}\}$ è detta *successione estratta* da $\{a_n\}$ mediante la legge $\{n_k\}$. In pratica, essa è costituita dai soli elementi della prima successione aventi indici del tipo n_k.

Esempi:

- se $n_k = 2k$, si ottiene la successione dei termini di posto pari
- se $n_k = 2k - 1$, si ottiene la successione dei termini di posto dispari
- se $n_k = r + k$, avendo fissato $r \in \mathbf{N}$, si ottiene la successione ottenuta sopprimendo i primi r termini.

TEOREMA DI REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI ESTRATTE. Se $\{a_n\}$ è regolare, ogni sua estratta ha il suo stesso limite.

Il viceversa non vale: ad esempio, posto $a_n = (-1)^n$, la successione dei termini di posto pari è costante quindi convergente ma $\{a_n\}$ oscilla.

Possiamo dunque concludere che se una successione ha due estratte aventi limiti diversi, essa oscilla.

Si hanno tuttavia i seguenti risultati:

1) se $\{a_{r+k}\}$ è regolare, anche $\{a_n\}$ ha il suo stesso limite.

2) se $\{a_{2k}\}$ e $\{a_{2k-1}\}$ hanno lo stesso limite, anche $\{a_n\}$ ha il loro stesso limite.

OSSERVAZIONE. Dal paragrafo precedente si deduce che, data una successione $\{a_n\}$, è possibile prendere in considerazione due nuove successioni, quella formata dai soli termini di posto pari di $\{a_n\}$ e quella formata dai soli termini di posto dispari. Se esse hanno lo stesso limite, allora $\{a_n\}$ ha tale limite; se esse hanno limiti diversi, $\{a_n\}$ non è regolare. Ad esempio, sia $\{x_n\}$ una successione regolare di numeri tutti positivi, e poniamo $a_n = (-1)^n x_n$. Se $x_n \to 0$, si ha che anche $a_n \to 0$. Se $x_n \to l > 0$, per n pari si ha $a_n = x_n \to l$, per n dispari si ha $a_n = -x_n \to -l$ quindi $\{a_n\}$ non è regolare.

Lo stesso ragionamento si ripete se $x_n \to +\infty$. Ad esempio, le successioni $(-1)^n \frac{2n+1}{n+4}$ e $(-1)^n \frac{n^4+1}{n+3}$ non sono regolari, invece $(-1)^n \frac{2n}{n^4+5}$ tende a zero.

Confronto fra infiniti e fra infinitesimi .

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni infinitamente grandi, dette anche due infiniti. Si dice che sono dello stesso ordine se il loro rapporto tende ad un limite diverso da zero, si dice che $\{a_n\}$ è di ordine superiore rispetto a $\{b_n\}$ se il loro rapporto diverge. Ad esempio, si può far vedere che n^n è di ordine superiore rispetto ad $n!$, $n!$ è di ordine superiore rispetto ad a^n $(a > 1)$, a^n $(a > 1)$ è di ordine superiore rispetto a n^x $(x > 0)$.

Siano ora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due infinitesimi. Si dice che sono dello stesso ordine se il loro rapporto tende ad un limite diverso da zero, si dice che $\{a_n\}$ è di ordine superiore rispetto a $\{b_n\}$ se il loro rapporto tende a zero. Ad esempio, per quanto visto nel paragrafo sui limiti notevoli, se $a_n \to 0$, si ha che $\sin a_n$ e a_n sono dello stesso ordine, $1 - \cos a_n$ è di ordine superiore rispetto ad a_n ma $1 - \cos a_n$ e $(a_n)^2$ sono dello stesso ordine. Ciò si esprime anche dicendo che $1 - cosa_n$ è di ordine 2 rispetto ad a_n: in generale, se a_n e $(b_n)^p$ sono dello stesso ordine, si dice che a_n è di ordine p rispetto a b_n.

Successioni definite per ricorrenza. Una successione si dice definita per ricorrenza se viene dato il suo primo termine e viene fornita una legge che calcola ciascun termine in funzione del precedente. Data, cioè, una funzione reale di variabile reale f, che supporremo sia una funzione elementare, la successione si presenta nella forma $a_{n+1} = f(a_n)$. Ad esempio:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} \end{cases}$$

Per una tale successione, solitamente, si procede nel seguente modo:

- si studia la monotonia

- si individua quel numero l che potrebbe essere l'estremo inferiore (o superiore)

- da quanto sopra segue che $l = \lim a_n$, ma allora si ha anche $l = \lim a_{n+1}$ (grazie a quanto detto sulle successioni estratte)

- si osserva che $a_{n+1} = f(a_n) \to f(l)$

- per l'unicità del limite si deve avere $f(l) = l$. Si risolve l'equazione $f(x) = x$ e, fra le sue eventuali soluzioni, si cerca un eventuale numero l che possa essere l'estremo inferiore (o superiore) della successione. Se non c'è un tale l, la successione diverge.

LIMITI E CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Per una funzione reale si possono dare nove definizioni di limite: convergenza, divergenza a $+\infty$ e a $-\infty$, al tendere della variabile x a un valore c, a $+\infty$ o a $-\infty$. Come vedremo, interverrà il termine *definitivamente* che cambierà significato nei vari casi. Precisamente, studiare il limite di una funzione significa vedere qual è il comportamento della funzione stessa quando la variabile si avvicina ("tende") ad un certo punto, ovvero quando x appartiene ad un intorno di tale punto. Le nove definizioni si differenziano l'una dall'altra solo per il diverso significato che assume di volta in volta il termine "definitivamente".

Limite al tendere di x a c. Data una funzione reale definita in un insieme $X \subseteq \mathbf{R}$, se $c \in DX$ si definisce il limite di f al tendere di x a c nel seguente modo.

i) si dice che f converge al numero l al tendere di x a c e si scrive $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbf{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in X, x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, ovvero $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

ii) si dice che f diverge a $+\infty$ al tendere di x a c e si scrive $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ se $\forall k > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in X, x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > k$

iii) si dice che f diverge a $-\infty$ al tendere di x a c e si scrive $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ se $\forall k > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in X, x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$

Come si vede da queste definizioni, la condizione di limite è, ad esempio nel caso della convergenza, $|f(x) - l| < \varepsilon$: essa deve essere verificata *in un opportuno intorno di c*, questo si può anche esprimere dicendo che la condizione di limite è verificata *definitivamente*. Dunque, per potere prendere in considerazione il calcolo del limite, la f deve esistere in un intorno di c, quindi il fatto che $c \in DX$ è fondamentale.

Se è verificata una delle tre condizioni descritte sopra, la funzione è detta regolare al tendere di x a c, una funzione non regolare è anche detta oscillante.

È interessante notare che, nelle precedenti definizioni, non è richiesto che la condizione di limite sia verificata anche nel punto c. Ad esempio, posto $f(x) = 1$ se $x \neq 0$, $f(0) = 4$, si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ anche se la condizione di limite non viene verificata nel punto $x = 0$.

Si hanno i seguenti risultati, simili a quelli visti per le successioni.

1) TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE. Se una funzione è regolare al tendere di x a c, il suo limite è unico.

2) TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. Se $\lim_{x \to c} f(x) = l > 0$, esiste un intorno di c in cui si ha $f(x) > 0$.

Analogamente, se $l < 0$, i valori di f saranno negativi in un intorno opportuno di c. Si giunge alla stessa conclusione se f diverge. Generalizzando questo risultato, possiamo concludere che, se $k > l$ ($k < l$), i valori della funzione saranno definitivamente minori (risp. maggiori) di k.

3) TEOREMA DI CONFRONTO PER FUNZIONI CONVERGENTI (*"teorema dei carabinieri"*). Siano f, g, h tre funzioni definite nello stesso insieme X e sia $c \in DX$. Supponiamo che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in X$ e che, al tendere di x a c, le due funzioni f ed h abbiano lo stesso limite l. Allora, anche g tende ad l.

4) TEOREMA DI CONFRONTO PER FUNZIONI DIVERGENTI. Siano f, g due funzioni definite nello stesso insieme X e sia $c \in DX$. Supponiamo che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$. Allora:

i) se $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$

ii) se $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$

Si ha poi il seguente teorema

5) TEOREMA SUL LIMITE DI UNA FUNZIONE COMPOSTA. Siano date due funzioni $f : Y \to \mathbf{R}$, $g : X \to Y$. Sia $c \in DX$ e si supponga che $\lim_{x \to c}\ g(x) = \gamma$ e che $\gamma \in DY$. Allora, se $\lim_{y \to \gamma}\ f(y) = l$, si ha, posto $F(x) = f(g(x))$, $\lim_{x \to c}\ F(x) = l$.

Osservazione. Dal Teorema 5 segue che, per una funzione composta, occorre prima esaminare il limite della funzione interna (quello che abbiamo chiamato γ) e il limite di F sarà quello a cui tende la funzione esterna quando la "sua" variabile tende a γ.

Il seguente risultato mette in relazione i limiti delle funzioni e quelli delle successioni.

6) TEOREMA PONTE. Sia data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $c \in DX$. Si ha $\lim_{x \to c}\ f(x) = l$ (risp. $+\infty, -\infty$) se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ di elementi di X convergente a c si ha $f(x_n) \to l$.

Limiti sinistro e destro. Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. Per ogni $c \in]a, b]$ il limite della restrizione di f ad $(a, c[$ al tendere di x a c si chiama *limite sinistro di f al tendere di x a c*, o *limite per x che tende a c da sinistra*, e si indica con $\lim_{x \to c^-}\ f(x)$. Per ogni $c \in [a, b[$ il limite della restrizione di f a $]c, b)$ al tendere di x a c si chiama *limite destro di f al tendere di x a c*, o *limite per x che tende a c da destra*, e si indica con $\lim_{x \to c^+}\ f(x)$. È immediato constatare che, se $c \in]a, b[$ ed esiste il $\lim_{x \to c}\ f(x)$, allora i limiti sinistro e destro coincidono con tale limite. Vale anche il viceversa: se $\lim_{x \to c^-}\ f(x) = \lim_{x \to c^+}\ f(x) = l$ (oppure $\pm\infty$), allora $\lim_{x \to c}\ f(x) = l$.

Limite al tendere di x all'infinito. Data una funzione $f : (a, +\infty[\to \mathbf{R}$, si definisce il limite di f al tendere di x a $+\infty$ nel seguente modo:

$\lim_{x\to+\infty}\ f(x)=l\in\mathbf{R}$ se $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\bar{x}>a: x>\bar{x}\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$
$\lim_{x\to+\infty}\ f(x)=+\infty$ se $\forall k>0\ \ \exists\bar{x}>a: x>\bar{x}\Rightarrow f(x)>k$
$\lim_{x\to+\infty}\ f(x)=-\infty$ se $\forall k>0\ \ \exists\bar{x}>a: x>\bar{x}\Rightarrow f(x)<-k$
In modo simile si definisce, per una funzione $f:]-\infty,a)\to\mathbf{R}$, il limite di f al tendere di x a $-\infty$. In tal caso, la condizione di convergenza, ad esempio, è la seguente:
$\lim_{x\to-\infty}\ f(x)=l\in\mathbf{R}$ se $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\bar{x}<a: x<\bar{x}\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$

Anche in questo caso valgono i teoremi dell'unicità del limite, di confronto, della permanenza del segno e il Teorema ponte. Il teorema sul limite delle funzioni composte assume ovviamente una forma più generale, come si può vedere attraverso alcuni esempi:
$\lim_{x\to4^-}\ e^{\frac{2}{x-4}}\ =0$; $\ \lim_{x\to0^+}\log\frac{1}{x}\ =+\infty$.

Utilizzando il Teorema ponte, si costruisce la tabella sulle operazioni con i limiti delle funzioni, uguale a quella per le successioni. In particolare, si hanno ancora le forme indeterminate $+\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Limiti di funzioni elementari.
Premettiamo che (la proveremo in seguito) vale la seguente

PROPOSIZIONE 1. Se $f:X\to\mathbf{R}$ è una funzione elementare, per ogni $c\in X$ si ha $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$.

Nel seguito, tratteremo alcuni casi che non rientrano in tale condizione.

α) *Funzione esponenziale.* Sia a un numero positivo e diverso da 1. Consideriamo la funzione a^x. Per studiare il suo limite al tendere di x a $\pm\infty$ si deve distinguere se $a>1$ oppure $0<a<1$. Si ha, utilizzando i risultati analoghi visti per le successioni e il Teorema ponte:
i) $a>1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty;\lim_{x\to-\infty}a^x=0$
ii) $0<a<1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}a^x=0;\lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

β) *Funzione logaritmo.* Sia a un numero positivo e diverso da 1. Consideriamo la funzione $\log_a\ x$. Per studiare il suo limite al tendere di x a 0 o a $+\infty$ si deve distinguere se $a>1$ oppure $0<a<1$. Si ha, utilizzando i risultati analoghi visti per le successioni e il Teorema ponte:
i) $a>1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\log_a\ x=+\infty;\lim_{x\to0}\log_a\ x=-\infty$
ii) $0<a<1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\log_a\ x=-\infty;\lim_{x\to0}\log_a\ x=+\infty$

Infine, considerata la funzione $F(x)=(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\log(f(x))}$ e procedendo come visto per le successioni, si trovano le seguenti tre forme indeterminate di tipo esponenziale: $(+\infty)^0$; 0^0; 1^∞.

δ) *Funzione potenza.* Esaminiamo intanto il caso della potenza con esponente intero. La funzione potenza con esponente intero positivo è definita per ogni x, quella con esponente intero negativo è definita per $x \neq 0$.

Sia allora $n \in \mathbf{R}$, si ha facilmente:
$\lim_{x\to+\infty}\ x^n = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty}\ x^n = +\infty$ se n è pari
$\lim_{x\to-\infty}\ x^n = -\infty$ se n è dispari.
Si ha poi, tenendo presente che $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$:
se n è pari, $\lim_{x\to\pm\infty}\ x^{-n} = 0$, $\lim_{x\to 0}\ x^{-n} = +\infty$
se n è dispari, $\lim_{x\to\pm\infty}\ x^{-n} = 0$, $\lim_{x\to 0^-} x^{-n} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} x^{-n} = +\infty$.

Se l'esponente è un numero α non intero, la potenza è definita solo se $x \geq 0$ se $\alpha > 0$, solo se $x > 0$ se $\alpha < 0$ e si ha:
se $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty}\ x^\alpha = +\infty$
se $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty}\ x^\alpha = 0$ e $\lim_{x\to 0}\ x^\alpha = +\infty$.

η) *Polinomi.* Consideriamo il polinomio $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. Per $x \to \pm\infty$, a seconda dei segni dei coefficienti, la funzione potrebbe trovarsi nella forma indeterminata $+\infty - \infty$ e si procede nel seguente modo.

$f(x) = x^n(a_0 + \frac{a_1}{x}\ +\ \cdots\ + \frac{a_n}{x^n})$. La quantità fra parentesi tende ad a_0, ne segue:
$\lim_{x\to+\infty}\ f(x) = +\infty$ se $a_0 > 0$;
$\lim_{x\to+\infty}\ f(x) = -\infty$ se $a_0 < 0$;
$\lim_{x\to-\infty}\ f(x) = +\infty$ se $a_0 > 0$, n pari;
$\lim_{x\to-\infty}\ f(x) = -\infty$ se $a_0 < 0$, n pari;
$\lim_{x\to-\infty}\ f(x) = -\infty$ se $a_0 > 0$, n dispari;
$\lim_{x\to-\infty}\ f(x) = +\infty$ se $a_0 < 0$, n dispari.

In sostanza, possiamo concludere che, al tendere di x a $\pm\infty$, i polinomi divergono sempre, per capire il segno della divergenza occorre esaminare il grado di x^n e il segno del suo coefficiente.

Ad esempio:
$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 2x^3 + 1) = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty}(x^5 - 2x^4 + 1) = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 2x^6 + 1) = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 2x^3 + 1) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 2x^3 + 1) = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty}(x^5 - 2x^4 + 1) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 2x^6 + 1) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 2x^7 + 1) = +\infty$

ζ) *Funzioni razionali fratte.* Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$. Supporremo che il numeratore e il denominatore non abbiano divisori a comune. f è definita in $\mathbf{R}$ privato degli eventuali zeri reali del denominatore. Se c è uno di tali punti, f diverge per $x \to c$. Per $x \to \pm\infty$ la funzione si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e si procede nel seguente modo.

- se $n > m$:

la funzione, al tendere di x a $\pm\infty$, diverge; per capire il segno della divergenza occorre esaminare il segno del numeratore e del denominatore.

Ad esempio:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x-1} = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^3}{x-1} = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{1-x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x-1} = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^2}{x-1} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+2}{x-1} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+2}{1-x} = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{x^2-1} = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^5}{1-x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+2}{x^2-1} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^6}{1-x^2} = +\infty$

- se $n = m$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$.

Ad esempio:
$\lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-2)^3}{4-x^3} = -8$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{x^2+5} = -1$

- se $n < m$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Ad esempio:
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{x^3+5} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^4-1} = 0$

Alcuni limiti notevoli. Esaminiamo adesso alcuni limiti che si presentano in forma indeterminata.

Limiti notevoli con funzioni trigonometriche.

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; essa è definita per $x \neq 0$ e, per $x \to 0$, si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Utilizzando il limite notevole studiato per le successioni, si ottiene che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

e analogamente si hanno i seguenti altri limiti notevoli:

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Limiti notevoli di tipo esponenziale.

Utilizzando i limiti visti per le successioni, si ottengono i seguenti limiti notevoli (osserviamo che si presentano tutti in forma indeterminata):

$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a \qquad (a \in \mathbf{R})$

Confronto fra infinitesimi e fra infiniti. Una funzione che tende a zero è detta infinitesima (o "un infinitesimo"), una funzione che diverge è detta infinitamente grande (o "un infinito"). Per il confronto fra infinitesimi e fra infiniti si procede come nel caso delle successioni.

Asintoti. Un asintoto per f è una retta r tale che la distanza del generico punto del grafico di f da r tenda a zero.

- Asintoto verticale. Se la funzione f diverge (eventualmente solo da sinistra o da destra) al tendere di x a c, allora la retta r di equazione $x = c$ è detta asintoto verticale per f. Infatti, detto $P(x, f(x))$ il generico punto del grafico di f, si ha $d(P, r) = |x - c|$ che tende a zero al tendere di x a c.

-Asintoto orizzontale. Sia data una funzione $f : (a, +\infty[\to \mathbf{R}$ e si supponga che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}$, allora la retta r di equazione $y = l$ è detta asintoto orizzontale destro per f (in modo simmetrico si introduce l'asintoto orizzontale sinistro). Infatti, detto $P(x, f(x))$ il generico punto del grafico di f, si ha $d(P, r) = |f(x) - l|$ che tende a zero al tendere di x a $+\infty$.

- Asintoto obliquo. Sia data una funzione $f : (a, +\infty[\to \mathbf{R}$ e si supponga che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; se f ha un asintoto, i due infiniti f e x devono essere dello stesso ordine (in quanto i punti di $gr(f)$ e quelli di r devono essere, per cosí dire, vicini) quindi il rapporto $\frac{f(x)}{x}$ deve convergere al tendere di x a $+\infty$. Se, dunque, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, e se $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = p \in \mathbf{R}$, allora la retta r di equazione $y = mx + p$ è asintoto obliquo destro per f (in modo simmetrico si introduce l'asintoto obliquo sinistro). Infatti, detto $P(x, f(x))$ il generico punto del grafico di f, si ha $d(P, r) = \frac{|mx - f(x) + p|}{\sqrt{1+m^2}}$ che tende a zero al tendere di x a $+\infty$.

Esempio: funzioni razionali fratte. $f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$. Se c è un punto che annulla il denominatore, la retta di equazione $x = c$ è un asintoto verticale. Se $n = m$, la retta di equazione $y = \frac{a_0}{b_0}$ è un asintoto orizzontale destro e sinistro. Se $n < m$, la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale destro e sinistro. Se, infine, $n > m$, f diverge e, affinché $\frac{f(x)}{x}$ converga, deve essere $n = m + 1$: in tal caso, e solo in tal caso, si avrà un asintoto obliquo.

Limiti delle funzioni monotone. Ricordiamo (cfr. cap.1) che una funzione f è detta monotona in un intervallo (a, b) se in tale intervallo è crescente o decrescente (eventualmente strettamente crescente o decrescente). Enunciamo il seguente teorema per le funzioni strettamente crescenti in un intervallo (è possibile enunciare il teorema in modo analogo per le funzioni strettamente decrescenti).

TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTONE. Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente crescente in (a, b). Allora:

- per ogni $c \in]a, b[$ esistono i limiti destro e sinistro di f al tendere di x a c e si ha:

$l^- = \lim_{x \to c^-} \ f(x) = \sup_{(a,c[} \ f(x) \leq f(c) \leq l^+ = \lim_{x \to c^+} \ f(x) = \inf_{]c,b)} \ f(x)$

- esistono i limiti di f al tendere di x ad a e a b e si ha:

$l^+ = \lim_{x \to a} \ f(x) = \inf_{]a,b)} \ f(x)$

$l^- = \lim_{x \to b} \ f(x) = \sup_{(a,b[} \ f(x)$

OSSERVAZIONI

1) Se a, b appartengono all'insieme di definizione, si ha $l^+ \geq f(a)$; $l^- \leq f(b)$.

2) Se f è decrescente, si ha $l^- = \lim_{x \to c^-} \ f(x) = \inf_{(a,c[} \ f(x) \geq f(c) \geq l^+ = \lim_{x \to c^+} \ f(x) = \sup_{]c,b)} \ f(x)$

Funzioni continue. Sia data una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ e sia c un punto non isolato di X. Si dice che la funzione f è continua in c se $\lim_{x \to c} \ f(x) = f(c)$. Si dice che f è continua in X se è continua in ogni punto di X.

Dai risultati visti nel capitolo precedente si vede subito che somma, prodotto, quoziente di funzioni continue sono continue, e che una funzione composta mediante funzioni continue è continua.

Nel seguito, esporremo due importanti proprietà delle funzioni continue in un intervallo. La prima è espressa dal seguente risultato, del quale diamo solo l'enunciato.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. Sia f una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora, f ammette minimo e massimo assoluti.

La seconda è la seguente *proprietà dei valori intermedi*. Si dice che una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ gode della proprietà dei valori intermedi (brevemente, PVI), se, dati $\alpha, \beta \in f(X)$, con $\alpha < \beta$, per ogni $\gamma \in]\alpha, \beta[$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = \gamma$. In altre parole, se la funzione assume due valori assume anche tutti i valori fra essi compresi. La PVI è legata alla continuità mediante alcuni risultati che ora illustreremo.

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI. Sia f una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e si supponga che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (o viceversa). Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Posto $x_0 = \frac{a+b}{2}$, se $f(x_0) = 0$ la tesi è dimostrata, se $f(x_0) < 0$ poniamo $[a_1, b_1] = [x_0, b]$, se $f(x_0) > 0$ poniamo $[a_1, b_1] = [a, x_0]$, si ha dunque $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$, $a \le a_1 < b_1 \le b$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Procedendo analogamente a partire dall'intervallo $[a_1, b_1]$ e poi reiterando lo stesso ragionamento, se per un certo n si trova $f(x_n) = 0$ la tesi è dimostrata, in caso contrario si determinano due sucessioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$, $a \le a_1 \le \cdots \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le \cdots \le b$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. La successione $\{a_n\}$ è crescente e limitata superiormente (da b), quindi converge al proprio estremo superiore $c \le b$. Si ha poi $b_n = b_n - a_n + a_n = \frac{b-a}{2^n} + a_n \to c$. Si ha allora, per la continuità di f, $f(a_n) \to f(c)$ e $f(b_n) \to f(c)$ ma da $f(a_n) < 0$ segue $f(c) \le 0$ e da $f(b_n) > 0$ segue $f(c) \ge 0$ quindi necessariamente $f(c) = 0$.

TEOREMA DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI (o Teorema di Darboux). Sia f una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e si supponga che $f(a) \ne f(b)$, ad esempio $f(a) < f(b)$. Allora, per ogni $\gamma \in]f(a), f(b)[$ esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \gamma$.

Dimostrazione. Consideriamo in $[a, b]$ la funzione $g(x) = f(x) - \gamma$, che è continua e agli estremi dell'intervallo assume valori di segno diverso, quindi, per il Teorema di esistenza degli zeri, si annulla in un punto c: si ha dunque $f(c) - \gamma = 0$.

OSSERVAZIONI SUL TEOREMA DI DARBOUX.

1) Se l'intervallo non è chiuso e limitato la tesi vale egualmente: basta applicare il teorema ad una restrizione.

2) Se f non è definita in un intervallo il teorema non vale: basti pensare ad esempio ad una funzione definita nell'unione di due intervalli disgiunti, costante in ciascuno di essi, con valori diversi delle costanti.

3) Il viceversa del teorema non vale: la funzione definita in $[0,1]$ ponendo $f(x)=x$ in $]0,1[$, $f(0)=1, f(1)=0$, verifica la PVI ma non è continua.

4) Il Teorema di esistenza degli zeri è un caso particolare del Teorema di Darboux. lo abbiamo enunciato separatamente perché lo abbiamo utilizzato nella dimostrazione.

L'ultimo teorema sulla PVI fa riferimento all'Osservazione 3) relativa al teorema di Darboux. Esso infatti afferma che la PVI garantisce la continuità se la funzione è monotona.

TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE. Sia $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ una funzione strettamente monotona. Sia verificata la PVI. Allora, f è continua.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente e proviamo la continuità, ad esempio, in un punto c interno ad (a,b). Dal teorema sui limiti delle funzioni monotone segue che $l^- \leq f(c) \leq l^+$. Per provare la continuità basta provare che $l^- = f(c) = l^+$. Supponiamo per assurdo che non sia vero, ad esempio si abbia $l^- < f(c)$. Sia $\gamma \in]l^-, f(c)[$; per la PVI esiste $\bar{x} \in (a,b)$ tale che $f(\bar{x})=\gamma$. L'assurdo segue dal fatto che $\bar{x}$ non può esistere, infatti:
- se fosse $\bar{x}=c$ si avrebbe $\gamma = f(\bar{x}) = f(c)$
- se fosse $\bar{x}<c$ si avrebbe $\gamma = f(\bar{x}) \leq l^-$
- se fosse $\bar{x}>c$ si avrebbe $\gamma = f(\bar{x}) > f(c)$
L'assurdo è dunque trovato.

Fra le conseguenze di questi teoremi, vediamo le seguenti:

Immagine di un intervallo mediante una funzione continua. Sia $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ una funzione continua. Dal teorema di Darboux segue che la sua immagine è un intervallo, e dal teorema di Weierstrass segue che f possiede minimo m e massimo M, quindi la sua immagine è l'intervallo chiuso e limitato $[m,M]$. Se, in particolare, f è crescente, la sua immagine è l'intervallo $[f(a),f(b)]$; se f è decrescente, la sua immagine è l'intervallo $[f(b),f(a)]$.

In generale, se f è una funzione continua in un intervallo generico (a,b), la sua immagine è l'intervallo $(\inf_{(a,b)}\ f(x), \sup_{(a,b)}\ f(x))$. In particolare, ricordando il teorema sui limiti delle funzioni monotone, se f è crescente in (a,b) la sua immagine è l'intervallo $(\lim_{x\to a}\ f(x), \lim_{x\to b}\ f(x))$; se f è decrescente in (a,b) la sua immagine è l'intervallo $(\lim_{x\to b}\ f(x), \lim_{x\to a}\ f(x))$.

Continuità della funzione inversa. Sia $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ una funzione strettamente crescente (oppure $f:[a,b]\to[f(b),f(a)]$ una funzione strettamente decrescente) e continua. Allora, la sua funzione inversa è continua.

Continuità delle funzioni elementari. Tutte le funzioni elementari che abbiamo introdotto sono continue nei rispettivi insiemi di definizione. Sia infatti c un punto dell'insieme di definizione di f. Se c è contenuto in un intervallo in cui f è monotona, la continuità in c segue dal teorema di continuità delle funzioni monotone. In caso contrario, si verifica che i limiti sinistro e destro coincidono. Ad esempio, $\lim_{x\to 0^-} x^2 = \inf_{]-\infty,0[} x^2 = 0 = \lim_{x\to 0^+} x^2 = \inf_{]0,+\infty[} x^2$.

Punti di discontinuità. Data una funzione $f : X \to \mathbf{R}$, un punto $c \in DX$ è detto punto di discontinuità per f in uno dei seguenti casi:

- se f non è definita in c: ad esempio, $f(x) = \log x$, $c = 0$

- se f non è dotata di limite al tendere di x a c: ad esempio, $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $c = 0$

- se $\lim x \to c\ f(x) \neq f(c)$: ad esempio, $f(x) = x$ per $x \neq 0$, $f(0) = 5$, $c = 0$

Sia c un punto di discontinuità.

- Diremo che c è *eliminabile* se il limite di f al tendere di x a c esiste finito (sia l): in tal caso infatti la funzione definita da $g(x) = f(x)$ se $x \neq c$, $g(c) = l$ è continua in c (prolungamento per continuità di f). Ad esempio, è possibile provare che $\lim_{x\to 0} x^x = 1$, ponendo allora $g(x) = x^x$ se $x > 0$, $g(0) = 1$ si ottiene una funzione continua.

- Diremo che c è *di prima specie* se i limiti $l^- = \lim_{x\to c^-} f(x)$ e $l^+ = \lim_{x\to c^+} f(x)$ esistono entrambi finiti ma distinti, in tal caso il numero $|l^- - l^+|$ è detto *salto* di f in corrispondenza di c. Ad esempio, $f(x) = x$ se $x \in [0, 1[$, $f(x) = x + 3$ se $x \in [1, 4]$, $c = 1$: il salto è 3.

- Diremo che c è un *punto di infinito* se f diverge al tendere di x a c (anche se solo da destra o solo da sinistra). Per quanto visto prima, se c è un punto di infinito per f, la retta di equazione $x = c$ è un asintoto verticale per f.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Dati una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ e un punto $c \in (a, b)$, nel cap. 1 abbiamo definito il rapporto incrementale di f relativo al punto c, nelle due forme

$r(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ definito in $(a, b) \setminus \{c\}$

$R(h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ definito in $(a - c, b - c) \setminus \{0\}$

e abbiamo visto che che la funzione f è crescente (risp. decrescente) nel punto c se e solo se $r(x) > 0$ (risp. $r(x) < 0$) in un intorno di c. Ricordiamo inoltre che r e R si ottengono per composizione l'uno dall'altro. Per il teorema sui limiti delle funzioni composte è, quindi, del tutto equivalente calcolare il limite di r al tendere di x a c o il limite di R al tendere di h a 0. Se tale limite è positivo (risp. negativo), per il teorema della permanenza del segno la funzione risulterà crescente (risp. decrescente) nel punto c. Risulta dunque di fondamentale importanza la seguente

DEFINIZIONE. Si dice che f è derivabile nel punto c se il limite del rapporto incrementale ($\lim_{x\to c} r(x)$ oppure $\lim_{h\to 0} R(h)$) esiste ed è finito; in questo caso, tale limite è detto derivata (o derivata prima) di f in c e si denota con $f'(c)$.

Si dice che f è derivabile in (a, b) se lo è in ogni punto. In tal caso, si definisce una funzione $f' : (a, b) \to \mathbf{R}$ che ad ogni punto $x \in (a, b)$ associa la derivata di f in x. Se la funzione f è a sua volta derivabile in c, la sua derivata è detta derivata seconda di f in c e si denota con $f''(c)$, se ciò accade in ogni punto di (a, b) viene definita la funzione derivata seconda $f'' : (a, b) \to \mathbf{R}$ e, procedendo analogamente, si possono definire le derivate di ordine superiore $f''', f^{IV}, \cdots, f^{(n)}, \cdots$

Se il punto c è interno all'intervallo (a, b), è possibile calcolare, ove occorra, i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale: se esistono finiti, essi vengono chiamati rispettivamente derivata sinistra ($f'_-(c)$) e derivata destra ($f'_+(c)$); evidentemente, f è derivabile in c se e solo se $f'_-(c) = f'_+(c)$. Se l'intervallo è chiuso, è possibile prendere in considerazione la derivata anche nei punti a e b: evidentemente, la derivata nel punto a è una derivata destra, la derivata nel punto b è una derivata sinistra.

Il primo risultato che presentiamo mette in relazione la derivabilità e la continuità.

TEOREMA. Se f è derivabile in c, allora è continua in c.

Dimostrazione. Si ha $f(x) = f(x) - f(c) + f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x - c) + f(c)$ e questa quantità, al tendere di x a c, converge a $f'(c) \cdot 0 + f(c) = f(c)$.

Il viceversa non vale, consideriamo i due seguenti esempi.

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 0$. Il rapporto incrementale $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ diverge al tendere di x a 0.

2) $f(x) = |x|$, $c = 0$. Il rapporto incrementale $r(x) = \frac{|x|}{x}$ vale 1 per $x > 0$ e -1 per $x < 0$ quindi tende ad 1 al tendere di x a 0 da destra e a -1 al tendere di x a 0 da sinistra.

Le funzioni presentate nei precedenti esempi sono continue nel punto $c = 0$ ma non sono derivabili in tale punto.

Il seguente risultato prova che una funzione è derivabile nel punto c se e solo se è possibile approssimarla, in un intorno di c, con un polinomio di primo grado.

TEOREMA. f è derivabile in c se e solo se esiste un polinomio di primo grado p tale che $p(c) = f(c)$ e che $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-p(x)}{x-c} = 0$.

OSSERVAZIONE. La condizione $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-p(x)}{x-c} = 0$ significa che la differenza $f(x) - p(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x - c$, quindi, al tendere di x a c, è trascurabile: dunque, f si può approssimare con il polinomio p.

Dimostrazione. Se f è derivabile in c, basta porre $p(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$. Si ha infatti $\frac{f(x)-p(x)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \to 0$. Viceversa, se esiste il polinomio $p = f(c) + a(x - c)$, si ha $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-p(x)+p(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(x)-p(x)}{x-c} + a \to 0 + a = a$ quindi esiste $f'(c) = a$.

La derivata ha un'interessante interpretazione geometrica. Consideriamo la retta che congiunge i punti del grafico $(c, f(c))$ e $(c + h, f(c + h))$, essa è detta secante per il grafico ed ha equazione $s : y = f(c) + \frac{f(c+h)-f(c)}{h}(x - c)$, il suo coefficiente angolare è dunque il rapporto incrementale $R(h)$. Se f è derivabile nel punto c, si ha $\lim_{h \to 0} R(h) = f'(c)$, d'altra parte si ha $\lim_{h \to 0}(c + h) = c$ quindi la retta secante al tendere di h a 0 "tende" ad avere un solo punto a comune con il grafico. Osserviamo anche che il secondo membro dell'equazione di s tende a $f(c) + f'(c)(x - c)$. Per questo motivo, la retta di equazione $t : y = f(c) + f'(c)(x - c)$ è considerata una posizione limite della secante al tendere di x a c, ed è detta tangente al grafico nel punto di ascissa c. In definitiva, se f è derivabile in c, il suo grafico è dotato di retta tangente nel punto di ascissa c. Tenendo conto di questo possiamo allora osservare che approssimare f mediante un polinomio di primo grado equivale, idealmente, a sostituire una porzione del grafico con un segmento di tangente. Si può inoltre far vedere che, se il rapporto incrementale diverge, nel punto di ascissa c il grafico ha tangente verticale: basti pensare, ad esempio, al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ (cfr. cap. 1) in prossimità del punto $x = 0$.

Regole di derivazione. In questo paragrafo vengono presentate le regole per derivare funzioni ottenute mediante operazioni fra funzioni derivabili.

1) Combinazione lineare. Siano f, g derivabili in un punto c e $h, k \in \mathbf{R}$. Indicata con F la combinazione lineare $F(x) = hf(x) + kg(x)$, la funzione F è derivabile nel punto c e si ha $F'(c) = hf'(c) + kg'(c)$.

Infatti, come si vede facilmente, il rapporto incrementale di F è la combinazione lineare dei rapporti incrementali di f e di g mediante le stesse costanti h e k.

2) Prodotto. Siano f, g derivabili in un punto c. Indicata con p la funzione prodotto $p(x) = f(x)g(x)$, la funzione p è derivabile nel punto c e si ha $p'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c)$.

Non dimostriamo questo risultato.

3) Reciproco. Sia f derivabile in un punto c e tale che $f(c) \neq 0$. Indicata con F la funzione reciproca $F(x) = \frac{1}{f(x)}$, la funzione F è derivabile nel punto c e si ha $F'(c) = \frac{-f'(c)}{(f(c))^2}$.

Non dimostriamo questo risultato, osserviamo tuttavia che f, essendo derivabile in c, è continua in c, quindi per il teorema della permanenza del segno è diversa da zero in un intorno di c, dunque in tale intorno ha senso prendere in considerazione la funzione F.

4) Quoziente. Siano f, g derivabili in un punto c, e si abbia $g(c) \neq 0$. Indicata con q la funzione quoziente $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, la funzione q è derivabile nel punto c e si ha $q'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$.

Usando la stessa osservazione fatta al punto 3), possiamo concludere che in un intorno di c ha senso prendere in considerazione la funzione q. Per calcolare la derivata scriviamo q nella forma $q(x) = f(x)\frac{1}{g(x)}$ e applichiamo i risultati visti nei punti 2) e 3).

5) Funzione composta. Siano date due funzioni $f : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ e $g : (a, b) \to (\alpha, \beta)$. Sia $c \in (a, b)$ e supponiamo che g sia derivabile nel punto c e che f sia derivabile nel punto $g(c) \in (\alpha, \beta)$. Indicata con F la funzione composta $F(x) = f(g(x))$, la funzione F è derivabile nel punto c e si ha $F'(c) = f'(g(c))\ g'(c)$.

Non dimostriamo questo risultato.

6) Funzione inversa. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente crescente e continua, sappiamo allora che essa è invertibile e la sua inversa è $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ ed è anch'essa strettamente crescente e continua (valgono considerazioni analoghe nel caso in cui f sia strettamente decrescente). Sia $\gamma \in [f(a), f(b)]$, vogliamo sapere se f^{-1} sia derivabile in γ. Sia

$c \in [a, b]$ tale che $\gamma = f(c)$, si supponga che $f'(c) \neq 0$, allora si può dimostrare che f^{-1} è derivabile in γ e $(f^{-1})'(\gamma) = \frac{1}{f'(c)}$.

Non dimostriamo questo risultato.

Derivate delle funzioni elementari. In questo paragrafo presentiamo le formule che permettono di derivare le funzioni elementari presentate nel cap. 1.

a) Funzione costante. Se $f(x) = k \ \forall x \in \mathbf{R}$, il suo rapporto incrementale è nullo quindi $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$.

b) Funzione potenza con esponente intero. Sia $f(x) = x^n$. Si ha $f'(x) = nx^{n-1} \ \forall x \in \mathbf{R}$. Lo proviamo solo nel caso $n = 2$. Il rapporto incrementale è $r(x) = \frac{x^2-c^2}{x-c} = \frac{(x-c)(x+c)}{x-c} = x + c$ il cui limite al tendere di x a c è $2c$, quindi $f'(x) = 2x \ \forall x \in \mathbf{R}$. Se $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (definita per $x \neq 0$), applicando la regola vista in 3) si trova, per ogni $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$, quindi vale la stessa formula vista nel caso in cui l'esponente sia un intero positivo.

Osserviamo inoltre che, se $f(x) = x^n$, si ha $f'(x) = nx^{n-1}, f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \cdots, f^{(n)}(x) = n!, f^{(k)}(x) = 0$ se $k > n$.

c) Funzione valore assoluto. Come osservato prima, la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile nel punto $x = 0$, mentre, se $x > 0$ si ha $f'(x) = 1$ e se $x < 0$ si ha $f'(x) = -1$. In sostanza, la derivata di f è la cosiddetta funzione segno, definita ponendola uguale ad 1 se $x > 0$ e a -1 se $x < 0$, essa può essere scritta mediante l'espressione $\frac{|x|}{x}$.

Osserviamo che, per la regola 5) precedente, se f è una funzione derivabile e diversa da zero in un punto c, la funzione $F(x) = |f(x)|$ risulta derivabile in c e si ha $F'(c) = \frac{|f(c)|}{f(c)} f'(c)$.

d) Funzione esponenziale. Se $f(x) = a^x$ il rapporto incrementale è $r(x) = \frac{a^x-a^c}{x-c} = a^c \frac{a^{x-c}-1}{x-c}$ e si può provare che, al tendere di x a c, dato che $x-c$ tende a 0, ha limite $a^c \log a$, quindi si ha $f'(x) = a^x \log a \ \forall x \in \mathbf{R}$. In particolare, se $a = e$, si ha $f'(x) = f(x)$. La funzione esponenziale di base e, dunque, ha la caratteristica di coincidere con la propria derivata.

e) Logaritmo. Possiamo calcolare la derivata usando il rapporto incrementale, ma è interessante utilizzare la regola per la derivata della funzione inversa. Per semplicità, procediamo nel caso $a = e$. Consideriamo la funzione $f :]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ data da $f(x) = e^x$, la cui funzione inversa è $\log x$. Se $\gamma > 0$, sia $c \in \mathbf{R}$ tale che $e^c = \gamma$, ossia $c = \log\ \gamma$. Si ha $f'(c) = e^c \neq 0$, quindi $(f^{-1})'(\gamma) = \frac{1}{e^c} = \frac{1}{\gamma}$. Ne segue che la derivata della funzione $\log x$ è, per ogni $x > 0$, $\frac{1}{x}$. Si prova in modo simile che nel caso generale la derivata della funzione $\log_a x$ è, per ogni $x > 0$, $\frac{1}{x} \log_a\ e$.

Osserviamo poi che, grazie alla regola 5), se f è una funzione derivabile e non nulla, posto $F(x) = \log|f(x)|$, si ha

$$F'(x) = \frac{1}{|f(x)|}\,\frac{|f(x)|}{f(x)}\,f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

f) Potenza con esponente qualunque. Se $x > 0$, consideriamo $f(x) = x^a = e^{\log x^a} = e^{a\log x}$ da cui $f'(x) = e^{a\log x}a\frac{1}{x} = a\frac{x^a}{x} = ax^{a-1}$. Si ottiene quindi la stessa formula trovata nel caso dell'esponente intero. Abbiamo già visto che la funzione $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ non è derivabile nel punto $x = 0$, e lo stesso si può dire per la funzione x^a con $0 < a < 1$.

g) Funzioni trigonometriche. Consideriamo la funzione $\sin x$ e utilizziamo il rapporto incrementale nella sua seconda forma, come funzione dell'incremento h. Si ha:
$R(h) = \frac{\sin(c+h)-\sin c}{h} = \frac{\sin c\cos h+\cos c\sin h-\sin c}{h} =$
$= \sin c\,\frac{\cos h-1}{h} + \cos c\frac{\sin h}{h}$
il cui limite è $\cos c$, come si vede tenendo conto dei limiti notevoli $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0$ e $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$. Dunque, se $f(x) = \sin x$, si ha $f'(x) = \cos x\ \forall x \in \mathbf{R}$. In modo simile si prova che se $f(x) = \cos x$, si ha $f'(x) = -\sin x\ \forall x \in \mathbf{R}$. Infine, se $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, applicando la regola 4) si ottiene $f'(x) = \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

h) Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche.

Utilizzando la regola di derivazione delle funzioni inverse si può provare che, se $f(x) = \arcsin x$, si ha $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ per ogni $x \in]-1,1[$; se $f(x) = \arccos x$, si ha $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ per ogni $x \in]-1,1[$ (questo si poteva ottenere anche ricordando che $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$). Proveremo che queste due funzioni non sono derivabili nei punti -1 e 1.

Infine, se $f(x) = \arctan x$, si ha $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in]-\infty,+\infty[$. Infatti, se $\gamma \in]-\infty,+\infty[$, si ha $\gamma = \tan c$ per qualche $c \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. La derivata di $\tan x$ in c è $1 + \tan^2 c \neq 0$ quindi $f'(\gamma) = \frac{1}{1+\tan^2 c} = \frac{1}{1+\gamma^2}$.

Teoremi sul calcolo differenziale e loro applicazioni allo studio delle funzioni. Studiare una funzione significa individuare, a partire dalla legge di definizione, le sue principali proprietà analitiche: limitatezza, continuità, derivabilità, monotonia, convessità, ecc. Per individuare alcune di queste proprietà sarà molto utile lo studio delle derivate. Il primo risultato che presentiamo è legato al Teorema di pag. 13 del cap. 1, secondo il quale la funzione è crescente (decrescente) in c se e solo se $r(x) > 0$ ($r(x) < 0$) in un intorno di c. Se $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), allora, per il teorema della permanenza del segno si avrà $r(x) > 0$ ($r(x) < 0$) in un intorno di c. Ne segue:

TEOREMA 1(di monotonia locale). Se $f'(c) > 0$ (risp. $f'(c) < 0$) allora f è crescente (risp. è decrescente) nel punto c.

Il viceversa non è vero, ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ è crescente nel punto $c = 0$ ma $f'(0) = 0$. Possiamo solo affermare che, se f è crescente (decrescente) in c, allora $f'(c) \geq 0$ ($f'(c) \leq 0$).

Per avere dei risultati più raffinati, occorre presentare alcuni importanti teoremi.

TEOREMA DI FERMAT. Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, sia $c \in]a, b[$ un punto di minimo o di massimo relativo per f. Si supponga che f sia derivabile nel punto c. Allora, si ha $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Dato che il punto c è interno, la derivata è il limite del rapporto incrementale sia da sinistra che da destra. Ora, il numeratore del rapporto incrementale in un intorno di c ha sempre lo stesso segno (ad esempio, se c è un punto di minimo relativo, si ha $f(x)-f(c) \geq 0$ in un intorno di c) mentre il denominatore è negativo a sinistra di c e positivo a destra. Ne segue che $f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} r(x) \leq 0$ e, contemporaneamente, $f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} r(x) \geq 0$ quindi necessariamente $f'(c) = 0$.

Il viceversa di questo teorema non vale: consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, si ha $f'(0) = 0$ ma il punto $c = 0$ non è di estremo relativo, infatti f è crescente in ogni punto di $\mathbf{R}$. Dunque, il fatto che $f'(c) = 0$ è una condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'esistenza di un estremo relativo. I punti c tali che $f'(c) = 0$ sono detti punti stazionari o critici per f.

TEOREMA DI ROLLE. Sia f una funzione reale continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, tale che $f(a) = f(b)$. Allora, esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass f è dotata di minimo e massimo assoluti, siano x_1 il punto di minimo assoluto e x_2 il punto di massimo assoluto. Se $x_1 = a$ e $x_2 = b$, o viceversa, allora il minimo e il massimo assoluti della funzione sono uguali quindi f è costante e la sua derivata è ovunque nulla. In caso contrario, uno dei due punti x_1, x_2 è interno, in esso allora la derivata è nulla per il teorema di Fermat.

TEOREMA DI LAGRANGE. Sia f una funzione reale continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora, esiste $c \in]a, b[$ tale che $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Dimostrazione. Consideriamo in $[a, b]$ la funzione $g(x) = (f(b)-f(a))x + (a - b)f(x)$. Si vede facilmente che essa verifica le ipotesi del teorema di Rolle, quindi esiste $c \in]a, b[$ tale che $g'(c) = 0$. Dal fatto che $g'(x) = f(b) - f(a) + (a - b)f'(x)$ segue subito la tesi.

COROLLARI DEL TEOREMA DI LAGRANGE.

A) *Teorema di prolungamento della derivata.* Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ e sia $c \in (a, b)$. Supponiamo che f sia derivabile in $(a, b) \setminus \{c\}$ e che sia continua in c. Supponiamo inoltre che esista il $\lim_{x\to c} f'(x)$, sia esso l (può essere un numero oppure $\pm\infty$). Allora, si ha $\lim_{x\to c} r(x) = l$.

OSSERVAZIONE. Dal teorema appena enunciato segue che le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$ non sono derivabili in -1 e 1, infatti sono continue ma le loro derivate divergono al tendere di x a tali punti.

B) *Criterio di monotonia.* Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile. Condizione sufficiente affinché f sia crescente in (a, b) è che $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in (a, b)$, con $x < y$. Applicando il Teorema di Lagrange ad f nell'intervallo $[x, y]$, si ottiene che esiste $c \in]x, y[$ tale che $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \geq 0$, da cui la tesi.

Dal teorema B) segue subito che, se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente crescente in (a, b). Questa condizione è comunque troppo restrittiva, basti pensare che la funzione $f(x) = x^3$ non la verifica pur essendo strettamente crescente. Si ha tuttavia il seguente risultato più generale, del quale non diamo la dimostrazione.

C) *Criterio di stretta monotonia.* Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia strettamente crescente in (a, b) è che $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ e che non esista nessun intervallo $(c, d) \subseteq (a, b)$ tale che $f'(x) = 0$ $\forall x \in (c, d)$.

D) *Teorema sulle funzioni con derivata nulla.* Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ derivabile, tale che $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$. Allora, f è costante in (a, b).

Dimostrazione. Siano x, y due punti generici di (a, b), con $x < y$. Applicando il Teorema di Lagrange ad f nell'intervallo $[x, y]$ (le ipotesi sono verificate in quanto f è derivabile in (a, b)) si ottiene l'esistenza di $c \in]x, y[$ tale che $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$, quindi $f(x) = f(y)$ e, dato che x e y sono arbitrari, ne segue la tesi.

Nel Teorema D) l'ipotesi che f sia definita in un intervallo è fondamentale. Ad esempio, la funzione definita in $[0, 1] \cup [4, 5]$ ponendo $f(x) = 2$ in $[0, 1]$ e $f(x) = 6$ in $[4, 5]$ ha derivata nulla in tutto il suo insieme di definizione ma non è costante.

Metodo per lo studio dei punti stazionari. Sia f una funzione derivabile in (a, b) e sia $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$. Dai risultati precedenti segue che c può essere un punto di estremo relativo. Tenendo presenti i criteri di monotonia visti prima, segue che:

i) se $f'(x) < 0$ in un intorno sinistro di c e $f'(x) > 0$ in un intorno destro di c, allora c è un punto di minimo relativo per f.

ii) se $f'(x) > 0$ in un intorno sinistro di c e $f'(x) < 0$ in un intorno destro di c, allora c è un punto di massimo relativo per f.

In pratica, un punto stazionario c è un punto di estremo relativo per f se in corrispondenza di c la derivata cambia segno. Se esiste la derivata seconda in c, possiamo raffinare lo studio anche utilizzando il segno della derivata seconda, precisamente si ha:

iii) se $f''(c) > 0$, allora c è un punto di minimo relativo per f.

iv) se $f''(c) < 0$, allora c è un punto di massimo relativo per f.

Infatti, dato che $f''(c)$ è la derivata della funzione f' nel punto c, se $f''(c) > 0$ la funzione f' è crescente nel punto c, in cui vale zero, quindi si avrà $f'(x) < 0$ in un intorno sinistro di c e $f'(x) > 0$ in un intorno destro di c, e dal risultato i) ne segue che c è un punto di minimo relativo per f. Allo stesso modo si prova iv).

In definitiva: se $f'(c) \neq 0$, la funzione f è crescente o decrescente nel punto c; se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$, c è un punto di estremo relativo per f.

Metodo per la ricerca degli estremi assoluti. Sia f una funzione reale continua in $[a, b]$, il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza degli estremi assoluti. Per individuarli, occorre determinare i seguenti insiemi:

$A = \{c \in]a, b[\, : f'(c) = 0\}$

$B = \{c \in]a, b[\, : \nexists f'(c)\}$

$C = \{a; b\}$

in quanto, se un punto di estremo assoluto appartiene all'interno di $[a, b]$, in tale punto la derivata, se esiste, è nulla per il teorema di Fermat: pertanto, i punti di estremo assoluto andranno cercati o all'interno dell'intervallo, e in tal caso la derivata o non esiste oppure esiste e vale zero, oppure agli estremi dell'intervallo. Un volta determinati i tre insiemi A, B, C, basta calcolare i valori della funzione in tutti i punti di tali insiemi per trovare il minimo e il massimo.

Funzioni localmente convesse. Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile e sia $c \in (a, b)$, ricordiamo che l'equazione della tangente al grafico di f nel punto di ascissa c è $y = f(c) + f'(c)(x - c)$. La tangente divide il piano in due semipiani, chiamiamo semipiano superiore l'insieme $\overline{S} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq f(c) + f'(c)(x - c)\}$, analogamente si definisce il semipiano inferiore che indicheremo con $\underline{S}$. Si dice che la funzione f è convessa nel punto c se esiste $r > 0$ tale che, se $x \in]c - r, c + r[$ si ha $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$, ossia se per tutti i punti di un opportuno intorno di c il corrispondente punto del grafico appartiene a $\overline{S}$. In modo simile si definisce f concava nel punto c se per tutti i punti di un opportuno intorno di c il corrispondente punto del grafico appartiene a $\underline{S}$. Se f in c non è né convessa né concava, si dice che c è un punto di flesso per f; hanno particolare interesse i punti di flesso per i quali se $x \in]c-r, c[$ il corrispondente punto del grafico appartiene a $\overline{S}$ e se $x \in]c, c+r[$ il corrispondente punto del grafico appartiene a $\underline{S}$, o viceversa (punti di flesso proprio).

Si può dimostrare che f è convessa (risp. concava) in (a, b) se e solo se lo è in ogni punto, quindi lo studio della convessità puntuale è utile per riconoscere se f è convessa in (a, b) (proprietà, questa, molto significativa soprattutto nei problemi di ricerca del minimo e del massimo). Presentiamo a tale proposito il seguente risultato, ne sussiste uno simmetrico per la concavità.

TEOREMA. Sia f una funzione derivabile in (a, b) e sia $c \in (a, b)$ tale che esista $f''(c) > 0$. Allora, f è convessa in c.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che in un opportuno intorno di c si ha $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$. Consideriamo allora in (a, b) la funzione $F(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)$, basterà provare che $F(x) \geq 0$ in un intorno di c. Si ha $F(c) = 0$, osserviamo inoltre che esiste $F'(x) = f'(x) - f'(c)$, quindi $F'(c) = 0$, e che esiste $F''(c) = f''(c)$. F ha, dunque, in c un minimo relativo, dunque esiste un intorno di c in tutti i punti del quale si ha $F(x) \geq F(c) = 0$, come si voleva.

Allo stesso modo si prova che, se esiste $f''(c) < 0$, f è concava in c. Ne segue che, se esiste la derivata seconda in tutto l'intervallo (a, b), gli eventuali punti di flesso vanno cercati fra i punti c tali che $f''(c) = 0$ e in tal caso si ha un flesso proprio se $f''(x) < 0$ in un intorno sinistro di c e $f''(x) > 0$ in un intorno destro di c, o viceversa.

Il seguente risultato, del quale non vedremo la dimostrazione, fornisce un'applicazione del calcolo differenziale al calcolo di alcuni limiti. Lo enunciamo, per fissare le idee, solo nel caso in cui $x \to c$ ma si può enunciare in modo simile nel caso in cui $x \to \pm\infty$.

TEOREMA DI DE L'HOPITAL. Siano f, g due funzioni reali derivabili in $(a, b) \setminus \{c\}$ tali che:

i) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$

ii) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b) \setminus \{c\}$

iii) esiste il $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (l \in \mathbb{R}$ oppure $l = \pm\infty)$

Allora, si ha:

j) $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b) \setminus \{c\}$

jj) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Esempi. a) Si voglia calcolare il $\lim_{x\to 0}\ x \log x$, che si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Si ha

$$x \log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

in questo modo abbiamo espresso la funzione nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Il rapporto delle derivate è

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0$$

quindi possiamo concludere che il limite richiesto vale zero. Ne segue che $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x \log x} = e^0 = 1$, per cui la discontinuità nel punto $x = 0$ della funzione x^x è eliminabile.

b) Il teorema di de l'Hopital può essere utile anche nella ricerca degli asintoti obliqui. Supponiamo infatti che $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$ e che $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = m \in R$, allora si avrà $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{1} = m$ e in questo modo si determina subito il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo.

Osserviamo che in alcuni casi l'utilizzo del Teorema di de l'Hopital è inutile o inopportuno. Consideriamo a tale proposito i seguenti esempi:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Il rapporto delle derivate tende ad 1 ma non è opportuno applicare il teorema in quanto, per calcolare la derivata di $\sin x$, era già necessario conoscere tale limite.

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{3^x}$. Il limite vale zero, come si vede subito riscrivendo la funzione nella forma $\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Il rapporto delle derivate invece non è di nessun aiuto in quanto vale $\frac{2^x}{3^x} \frac{\log 2}{\log 3}$.

Precisiamo infine che in alcuni casi il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$ esiste anche se non esiste il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$: il teorema fornisce dunque una condizione sufficiente ma non necessaria. Consideriamo ad esempio, per $x \to 0$, la coppia di funzioni $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$. Il loro rapporto è $x \sin \frac{1}{x}$ che tende a zero. Il rapporto delle derivate è $2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, che al tendere di x a 0 non è regolare.