Capitolo 1

Integrali indefiniti e definiti

1.1 Integrale indefinito

Sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Definizione 1 *Sia $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b) e tale che*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Si dice allora che F è una primitiva di f in (a, b).

Si ha il seguente

Teorema 1 (Caratterizzazione delle primitive) *Sia F una primitiva di f in (a, b). Allora, tutte e sole le primitive di f in (a, b) sono le funzioni $F(x) + k$, al variare di k in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se F è una primitiva di f in (a, b) e $k \in \mathbb{R}$, posto $G(x) = F(x) + k$, si ha subito $G'(x) = f(x) + 0 = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Viceversa, se F e G sono due primitive di f in (a, b) la funzione differenza

$$H(x) = G(x) - F(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

è derivabile in (a, b) e si ha

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Per il teorema sulle funzioni con derivata identicamente nulla (conseguenza del Teorema di Lagrange) ([1])H è costante in (a,b) e quindi esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - G(x) = k$, $\forall x \in (a,b)$.

Da questo teorema segue che una funzione, se ha una primitiva, ne ha infinite. Esistono tuttavia delle funzioni che non hanno alcuna primitiva, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1 Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e supponiamo per assurdo che F sia una primitiva di f in $]-\infty, +\infty[$. In particolare, F è una primitiva di f sia in $[0, +\infty[$ sia in $]-\infty, 0[$. Osserviamo che un'altra primitiva di f in $[0, +\infty[$ è la funzione $g(x) = x$, quindi, per il teorema precedente, esiste un numero reale k tale che $F(x) = x + k \quad \forall x \geq 0$. Analogamente si conclude che esiste un numero reale c tale che $F(x) = -x + c \ \forall x < 0$.

Dato che F è una funzione derivabile e quindi continua in $]-\infty, +\infty[$ si ha $\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x)$, cioè $c = k$. In definitiva,

$$F(x) = |x| + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e ciò è assurdo perché implica che la funzione $|x|$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Definizione 2 *Si chiama integrale indefinito di f e si denota con il simbolo*

$$\int f(x)\mathrm{dx},$$

l'insieme formato dalle primitive di f, se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non è dotata di primitive .

[1]Se x_1, x_2 sono due punti distinti di (a,b), supposto che $x_1 < x_2$ possiamo applicare il Teorema di Lagrange alla restrizione di H all'intervallo $[x_1, x_2]$ e otteniamo che esiste $c \in]x_1, x_2[$ tale che $H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1) = 0$ e dunque $H(x_2) = H(x_1)$.

Per quanto visto sopra, se F è una primitiva di f, si suole scrivere

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

.

L'integrale indefinito è dunque **un insieme di funzioni**, vuoto o costituito da infiniti elementi.

Dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari si può facilmente costruire una tabella di integrali indefiniti immediati:

$$\begin{aligned}
&\int e^x\ \mathrm{dx} = \mathrm{e^x + k,}\\
&\int \cos x\ \mathrm{dx} = \mathrm{\sin x + k}\\
&\int \sin x\ \mathrm{dx} = -\cos x + k\\
&\int \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{dx} = \arctan x + k\\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{dx} = \arcsin x + k = -\arccos x + k\\
&\int x^\alpha\ \mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, (\alpha \neq -1)\\
&\int \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} = \log|x| + k.
\end{aligned}$$

Tenendo presente la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha poi, se f è una funzione derivabile tale da potere effettuare di volta in volta la composizione indicata:

$$\int e^{[f(x)]} f'(x)\ \mathrm{dx} = \mathrm{e}^{\mathrm{f(x)}} + \mathrm{k},$$
$$\int \cos[f(x)] f'(x) \mathrm{dx} = \sin[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k}$$
$$\int \sin[f(x)] f'(x)\ \mathrm{dx} = -\cos[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k}$$
$$\int \frac{1}{[f(x)]^2 + 1} f'(x)\ \mathrm{dx} = \arctan[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} f'(x)\ \mathrm{dx} = \arcsin[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k} = -\arccos[\mathrm{f(x)}] + \mathrm{k}$$
$$\int [f(x)]^\alpha f'(x)\ \mathrm{dx} = \frac{[\mathrm{f(x)}]^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + \mathrm{k}, (\alpha \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{f(x)} f'(x)\ \mathrm{dx} = \log|\mathrm{f(x)}| + \mathrm{k}.$$

Teorema 2 (Proprietà di omogeneità.) *Se f è dotata di primitive in (a, b) e k è un numero reale diverso da zero, allora*

i) kf *è dotata di primitive in* (a, b)*;*

ii) $\displaystyle\int kf(x)\ \mathrm{dx} = k \int f(x)\ \mathrm{dx}.$

dove il secondo membro indica l'insieme delle funzioni ottenute moltiplicando per k le primitive di f.

Dimostrazione. Se
$$F \in \int kf(x)\ dx$$
allora $F'(x) = kf(x), \quad \forall x \in (a, b)$. Posto
$$G(x) = \frac{F(x)}{k} \quad \forall x \in (a, b),$$
si ha $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$, cio è G è una primitiva di f in (a, b). Poichè $F(x) = kG(x), \quad \forall x \in (a, b)$ la funzione F appartiene al secondo membro

della *ii)* in quanto è il prodotto di k per una primitiva di f. Viceversa, se $F \in k \displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x$, esiste G primitiva di f tale che

$$F(x) = kG(x) \qquad \forall x \in (a, b),$$

da cui $F'(x) = kf(x), \quad \forall x \in (a, b)$ e quindi

$$F \in \int kf(x)\ \mathrm{d}x.$$

Osservazione 1 Se $k = 0$ la tesi non vale, infatti in questo caso il primo membro è l'integrale della funzione identicamente nulla, cioè l'insieme delle funzioni costanti, mentre il secondo membro è formato dalla sola funzione identicamente nulla.

Esempio 2 . Riprendendo quanto osservato prima a proposito dell'integrale di una funzione composta, e applicando la proprietà di omogeneità si ottiene, ad esempio, se $c \neq 0$

$$\int e^{cx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int ce^{cx}\mathrm{d}x = \frac{e^{cx}}{c} + k.$$

Analogamente

$$\int \cos(cx)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(cx)}{c} + k$$

e

$$\int \sin(cx)\ \mathrm{d}x = -\frac{\cos(cx)}{c} + k.$$

Teorema 3 (Proprietà distributiva.) *Siano f e g due funzioni dotate di primitive in (a, b). Allora*

i) $f + g$ è dotata di primitive in (a, b)

ii) $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x$

dove il secondo membro indica l'insieme delle funzioni ottenute sommando una primitiva di f ed una primitiva di g.

Dai due risultati precedenti segue il

Metodo di integrazione per decomposizione in somma

Se f, g sono due funzioni dotate di primitive in (a,b) e h, k sono due numeri reali, non entrambi nulli, allora la funzione $hf+kg$ è dotata di primitive in (a,b) e si ha

1. $\displaystyle\int (hf(x)+kg(x))\ \mathrm{d}x = h\int f(x)\ \mathrm{d}x + k\int g(x)\ \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int (hf(x)+kg(x))\ \mathrm{d}x = hF(x) + k\int g(x)\ \mathrm{d}x,$

   essendo F una primitiva di f in (a,b).

Il seguente risultato fornisce un utile metodo di integrazione quando la funzione integranda è il prodotto di una funzione per la derivata di un'altra funzione.

Teorema 4 (Integrazione indefinita per parti) *Siano f, g due funzioni derivabili in (a,b). Se fg' è dotata di primitive in (a,b) allora*

i) *$f'g$ è dotata di primitive in (a,b);*

ii) $\displaystyle\int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$

Dimostrazione. Per la regola di derivazione del prodotto si ha

$$f(x)g'(x) = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) - f'(x)g(x) =$$

$$D[f(x)g(x)] - f'(x)g(x), \quad \forall x \in (a,b)$$

e la *i)* è vera per la proprietà distributiva dell'integrale indefinito. Inoltre, applicando la formula di integrazione per decomposizione in somma si ottiene la *ii)*.

Questa formula si usa dunque quando è possibile individuare, nella funzione integranda, un fattore di cui sia nota una primitiva. I fattori f e g' si chiamano, rispettivamente, *fattore finito* e *fattore differenziale*.

Applichiamo il metodo di integrazione per parti in alcuni casi notevoli.

Esempio 3 Sia $n \in \mathbb{N}$. Determiniamo

$$\int e^x x^n \mathrm{d}x.$$

Scegliendo e^x come fattore differenziale e x^n come fattore finito si ha

$$\int e^x x^n \mathrm{d}x = e^x x^n - n \int e^x x^{n-1} \mathrm{d}x =$$

$$= e^x x^n - n\left(e^x x^{n-1} - (n-1) \int e^x x^{n-2} \mathrm{d}x \right) = \cdots .$$

e dopo n integrazioni per parti, il problema viene ricondotto alla determinazione dell'integrale indefinito di e^x. Osserviamo che in questo caso avremmo potuto scegliere e^x come fattore finito (la sua derivata e^x) e x^n come fattore differenziale, (una sua primitiva è $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$). Tuttavia, tale scelta giusta non è vantaggiosa, perchè riconduce alla determinazione dell'integrale $\int e^x x^{n+1} \mathrm{d}x$. Scegliendo, invece, e^x come fattore differenziale e x^n come fattore finito, il grado di x^n diminuisce (si osservi che derivando il grado di x^n diminuisce), Ad esempio, se $n = 2$, si ha

$$\int e^x x^2 \mathrm{d}x = e^x x^2 - 2 \int e^x x \mathrm{d}x =$$

$$e^x x^2 - 2\left(e^x x - \int e^x \cdot 1 \ \mathrm{d}x \right) = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + k.$$

Esempio 4 Determiniamo
$$\int \log x \, \mathrm{d}x.$$
Considerando 1 come fattore differenziale si ha
$$\int \log x \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \log x \mathrm{d}x = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x(\log x - 1) + k$$

Esempio 5 Applicando il metodo di integrazione per parti, si determinano gli integrali indefiniti
$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} \mathrm{d}x$$
con $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (per $n = 1$ l'integrale è immediato). Occupiamoci del caso $n = 2$.
$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x =$$
$$\int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \cdot x \mathrm{d}x =$$
$$\arctan x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \cdot 1 \right) =$$
$$\frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1} \right) + k.$$
Si osservi che $\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ è la derivata di $\dfrac{1}{x^2+1}$.

Osservazione 2 In alcuni casi, integrando per parti, si giunge ad una eguaglianza (insiemistica) del tipo
$$\int f(x) \mathrm{d}x = g(x) + c \int f(x) \mathrm{d}x$$
Se $c \neq 1$, si può dimostrare che
$$\int f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{1-c} g(x) + k.$$

Esempio 6 Applichiamo l'osservazione precedente per determinare

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x.$$

Risulta

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x =$$

$$e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \mathrm{d}x$$

e quindi

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + k.$$

Il seguente risultato fornisce un utile metodo di integrazione quando la funzione integranda è il prodotto di una funzione composta per la derivata della funzione interna.

Teorema 5 (Primo teorema di integrazione indefinita per sostituzione) *Siano:* $g : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ *una funzione derivabile,* $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *una funzione dotata di primitive in* (α, β) *.*

Allora, si ha:

i) $f(g(x))g'(x)$ *è dotata di primitive in* (a, b)*;*

ii) $\displaystyle\int f(g(x))g'(x) \mathrm{d}x = \left[\int f(t)\mathrm{d}t \right]_{t=g(x)}$

dove il secondo membro è l'insieme delle funzioni ottenute componendo con g *le primitive di* f *in* (α, β)*.*

Dimostrazione Sia F una primitiva di f, consideriamo la funzione $G(x) = F(g(x))$, si ha $G'(x) = f(g(x))g'(x)$ quindi G è una primitiva di $f(g(x))g'(x)$. Dunque, il primo membro della tesi è uguale a $G(x) + k$, il secondo membro è uguale a $\left[F(t) + k\right]_{t=g(x)} = F(g(x)) + k = G(x) + k$. La tesi è dunque provata.

Esempio 7 Prima di tutto osserviamo che, senza averlo specificato, abbiamo applicato proprio questa proprietà nell'Esempio 2. Infatti, si ha

1. $\int e^{cx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int ce^{cx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\left[\int e^t\,dt\right]_{t=cx} = \frac{e^{cx}}{c} + k$
   dato che la derivata di cx è c.
2. Si ha $\int x\cos(x^2+5)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x)\cos(x^2+5)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \quad cos\, tdt\right]_{t=x^2+5} = \frac{1}{2}\sin(x^2+5)+k$
   dato che la derivata di x^2+5 è $2x$.
3. Si ha $\int \frac{e^x}{e^x+5}\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{t+5}dt\right]_{t=e^x} = \log(e^x+5)+k$
   dato che la derivata di e^x è e^x.

Integrazione dei polinomi trigonometrici.
Ci limiteremo ad integrali del tipo

$$I_n = \int \cos^n x\ \mathrm{d}x, \quad J_n = \int \sin^n x\mathrm{d}x$$

$$H = \int \cos^m x\ \sin^n x\ \mathrm{d}x$$

essendo $n, m \in \mathbb{N}$.

Si ha:

$$I_1 = \sin x + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$I_2 = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$$I_3 = \int \cos x \cdot \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \int \cos x(1-\sin^2 x)\ \mathrm{d}x = \left[\int (1-t^2)\ \mathrm{d}t\right]_{t=\sin x}$$

e analogamente si procede per $n > 3$. In pratica, per n pari si utilizzano le formule di bisezione e per n dispari si ricorre all'integrazione per sostituzione.

Analogamente

$$J_1 = -\cos x + k$$

$$J_2 = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x$$

e si procede come per I_2

$$J_3 = \int \sin x \cdot \sin^2 x\ \mathrm{d}x = -\int (-\sin x)(1-\cos^2 x)\ \mathrm{d}x$$

e si procede come per I_3.

Per determinare H si distinguono due casi:

i) se almeno uno fra m, n è dispari, ad esempio $m = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}_0$si procede per sostituzione:

$$H = \int \cos x \cdot (\cos^2 x)^p \cdot \sin^n x\ \mathrm{d}x = \int \cos x (1-\sin^2 x)^p \sin^n x\ \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\int (1-t^2)^p t^n\ \mathrm{d}t \right]_{t=\sin x}$$

quindi ci si riconduce all' integrale di un polinomio

ii) se m, n sono entrambi pari, ovvero $m = 2p, n = 2q$, con $p, q \in \mathbb{N}$ si procede nel seguente modo

$$H = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^p \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^q \mathrm{d}x$$

e ci si riconduce a integrali del tipo I_n.

Esempio 8 Determiniamo alcuni integrali indefiniti di polinomi trigonometrici.

1. $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x \mathrm{d}x = -\int (-\sin x)\cos^3 x \mathrm{d}x = -\left[\int t^3 \mathrm{d}t\right]_{t=\cos x} =$
$\displaystyle -\frac{\cos^4 x}{4} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \int (\cos x)\cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \int (\cos x)(1-\sin^2 x)\sin^2 x \mathrm{d}x =$
$\displaystyle\left[\int (t^2 - t^4)\mathrm{d}t\right]_{t=\sin x} =$
$\displaystyle\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + k, \quad k \in \mathbb{R}$

3. $\displaystyle\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\frac{1-\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2(2x)}{4}\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\frac{1}{4}\int \Big(1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\Big)\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

Alla fine del paragrafo presenteremo un altro metodo, più raffinato, di integrazione per sostituzione.

1.2 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Sia f una funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \tag{1.1}$$

con a, b polinomi primi fra loro.

Se il grado di a è maggiore o uguale del grado di b, effettuando la divisione fra a e b si ottengono due polinomi q e r, quest'ultimo avente grado minore di quello di b, tali che

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}.$$

Quindi per integrare una qualsiasi funzione razionale fratta basta integrare un polinomio e una funzione razionale fratta propria, ossia una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.

Supponiamo dunque che la funzione (1.1) sia una funzione razionale fratta propria. e sia m il grado del polinomio b. È noto che l'equazione $b(x) = 0$ ha esattamente m soluzioni reali o complesse, ciascuna con una sua molteplicità. In particolare se α è una soluzione reale con molteplicità n allora $b(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^n$, mentre se il numero complesso $k+ic$ è una soluzione con molteplicità n, anche il suo coniugato $k-ic$ è una soluzione con la stessa molteplicità e il polinomio $b(x)$ è divisibile per $[x-(k+ic)]^n\,[x-(k-ic)]^n = [(x-k)^2+c^2]^n$.

Dunque, il polinomio b si decompone nel prodotto di fattori del tipo $(x-\alpha)^n$ e fattori del tipo $[(x-k)^2+c^2]^n$, cioè nel prodotto di potenze di polinomi di primo grado e di polinomi di secondo grado con discriminante negativo.

A questo punto, si dimostra che è possibile decomporre la funzione razionale f nella somma di funzioni razionali (dette fratti semplici) del tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} \tag{1.2}$$

$$\frac{Ax+B}{[(x-k)^2+c^2]^n}, \quad c > 0. \tag{1.3}$$

con $A, B, \in \mathbb{R}$.

Precisamente, ogni fattore di b del tipo $(x-\alpha)^n$ dà luogo ad n fratti semplici

$$\frac{A_1}{x-\alpha}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

Ogni fattore del tipo $[(x-k)^2+c^2]^n$ dà luogo ad n fratti semplici

$$\frac{A_1x+B_1}{(x-k)^2+c^2}, \frac{A_2x+B_2}{[(x-k)^2+c^2]^2}, \dots, \frac{A_nx+B_n}{[(x-k)^2+c^2]^n}.$$

Esempio 9 Ad esempio, se una funzione razionale fratta (propria) ha denominatore nella forma

$$x^3(x-2)(x^2+5)(x^2+1)^2$$

i suoi fratti semplici saranno:

$$\frac{A_1}{x},\ \frac{A_2}{x^2},\ \frac{A_3}{x^3},\ \frac{A_4}{x-2}$$

e

$$\frac{C_1x+B_1}{x^2+5},\ \frac{C_2x+B_2}{(x^2+1)},\ \frac{C_3x+B_3}{(x^2+1)^2}.$$

L' integrazione di una funzione razionale fratta propria viene ricondotta all'integrazione dei suoi fratti semplici.

Integrazione dei fratti semplici

I fratti semplici (1.2) si integrano nel seguente modo. Intanto osserviamo che, grazie alla proprietà di omogeneità, possiamo supporre $A = 1$. Poniamo

$$I_n = \int \frac{1}{(x-c)^n}\,\mathrm{d}x$$

Se $n = 1$ si ha

$$I_1 = \log|x-c| + k.$$

Se $n > 1$ si ha

$$I_n = \int (x-c)^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x-c)^{n-1}} + k$$

Integriamo i fratti semplici (1.3). Tratteremo solo i casi $n = 1$ e $n = 2$.

Primo caso: $n = 1$.

Prima di tutto osserviamo che, grazie al primo teorema di integrazione per sostituzione, possiamo supporre $k = 0$. Si ha, decomponendo in somma:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{x}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x + B\int \frac{1}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x.$$

Senza ledere la generalità, possiamo supporre che $A = B = 1$.

Consideriamo separatamente i due integrali ottenuti.

$$\int \frac{x}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(x^2+c^2) + k;$$

$$\int \frac{1}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{c^2\left[\left(\frac{x}{c}\right)^2+1\right]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int \frac{1}{c}\,\frac{1}{\left[\left(\frac{x}{c}\right)^2+1\right]}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{c}\left[\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\right]_{t=\frac{x}{c}} = \frac{1}{c}\,\arctan\frac{x}{c} + k$$

dato che la derivata di $\frac{x}{c}$ è $\frac{1}{c}$.

Secondo caso: $n = 2$.

Anche questa volta, senza ledere la generalità possiamo supporre che $A = B = 1$ e che $k = 0$. Si ha, decomponendo in somma:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$$

essendo

$$I_1 = \int \frac{x}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Si ha

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{t^2}\,dt\right]_{t=x^2+c^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+c^2} + k$$

Per determinare I_2 procediamo come abbiamo visto nell'Esempio 5 relativo all'integrazione per parti:

$$I_2 = \frac{1}{c^2}\int \frac{c^2}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c^2}\int \frac{x^2+c^2-x^2}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{c^2}\int \frac{1}{x^2+c^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{c^2}\int \frac{-x^2}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Il primo dei due integrali è stato già studiato nel caso $n = 1$,. Per determinare il secondo osserviamo che la derivata di $\frac{1}{x^2+c^2}$ è $\frac{-2x}{(x^2+c^2)^2}$ quindi è possibile procedere per parti:

$$\int \frac{-x^2}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\cdot\frac{-2x}{(x^2+c^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+c^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+c^2}\,\mathrm{d}x.$$

e anche stavolta ci si riconduce a quanto studiato nel caso $n = 1$.

Con le considerazioni fatte finora, siamo in grado di integrare una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}.$$

Posto $\Delta = p^2 - 4q$, distinguiamo tre casi:

1. $\Delta > 0$.
   In questo caso il trinomio al denominatore ha due zeri reali e distinti x_1, x_2 e si ha $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Si cercano A e B tali che

   $$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

   Si deve risolvere il sistema

   $$\begin{cases} A + B = a \\ -x_2 A - x_1 B = b \end{cases}$$

   che ammette una sola soluzione in quanto il determinante dei coefficienti vale $x_2 - x_1 \neq 0$. Ci si riconduce quindi al caso (1.2).

2. $\Delta = 0$.
   In questo caso il trinomio al denominatore ha un solo zero x_0 di molteplicità 2 e si ha

   $$x^2 + px + q = (x - x_0)^2.$$

   Procedendo come nel caso precedente, si determinano due numeri A e B tali che

   $$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}.$$

   In questo modo, ci si riconduce nuovamente al caso (1.2).

3. $\Delta < 0$.

   In questo caso, si utilizza il metodo del completamento dei quadrati:

$$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2+\Big(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\Big)^2$$

quindi il trinomio al denominatore si scrive nella forma $(x-k)^2+c^2$ e si ha

$$\int f(x)\mathrm{d}x = a\int \frac{x}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + b\int\frac{1}{(x-k)^2+c^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{a}{2}\int \frac{2x}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + b\int\frac{1}{(x-k)^2+c^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{a}{2}\int \frac{2x+p-p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + b\int\frac{1}{(x-k)^2+c^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \Big(b-\frac{ap}{2}\Big)\int\frac{1}{(x-k)^2+c^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{a}{2}\log(x^2+px+q)+\Big(b-\frac{ap}{2}\Big)\Big[\int\frac{1}{t^2+c^2}\,\mathrm{d}t\Big]_{t=x-k}.$$

Ci si riconduce quindi al caso (1.3).

Esempio 10 Determiniamo

$$I=\int\frac{x+4}{x^2-x-6}\mathrm{d}x.$$

Si ha

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

quindi i fratti semplici saranno del tipo

$$\frac{A}{x-3},\quad \frac{B}{x+2}.$$

Determiniamo le costanti A, B in modo che

$$\frac{x+4}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A-3B}{x^2-x-6}$$

quindi deve essere $A+B=1, 2A-3B=4$. Si trova

$$A = \frac{7}{5}, \quad B = -\frac{2}{5}$$

e, integrando i due fratti semplici, l'integrale richiesto risulta

$$I = \frac{7}{5}\log|x-3| - \frac{2}{5}\log|x+2| + k.$$

Esempio 11 Determiniamo

$$\int \frac{x+4}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x.$$

In questo caso i fratti semplici sono del tipo

$$\frac{A}{x-1}, \quad \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Si trova $A=1, B=5$ quindi l'integrale richiesto risulta $\log|x-1| - \frac{5}{x-1} + k$.

Esempio 12 Determiniamo

$$I = \int \frac{x+4}{x^2+x+4}\mathrm{d}x.$$

Il denominatore ha discriminante negativo, quindi si procede nel seguente modo

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+x+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{7}{x^2+x+4}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2+x+4) + \frac{7}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} =$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2+x+4) + \frac{7}{\sqrt{15}}\arctan\frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + k$$

Esempio 13 Determiniamo il seguente integrale

$$I = \int \frac{x+3}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$$

Risulta

$$I == \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dt}{t^2}\right]_{t=x^2+4} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} =$$

$$-\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} - \frac{3}{8}\int -\frac{2x}{(x^2+4)^2}\cdot x\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} =$$

$$-\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{9}{16}\arctan\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+4} + k.$$

Vediamo ora alcuni esempi in cui la funzione razionale fratta non è propria. Come detto prima, la funzione deve essere decomposta nella somma di un polinomio e di una funzione razionale fratta propria.In alcuni casi basta effettuare alcune semplici trasformazioni (primi tre esempi a seguire), altre volte è conveniente effettuare la divisione fra il numeratore e il denominatore (ultimi due esempi). (Gli integrali proposti possono essere facilmente completati per esercizio).

Esempio 14 Determinare i seguenti integrali indefiniti

1. $$\int \frac{x+1}{2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3-1}{2x+3}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{2x+3}\right)\mathrm{d}x.$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int (\frac{x^4-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1})\mathrm{d}x =$
$$\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x.$$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x-5}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-25+25+2}{x-5}\mathrm{d}x = \int \left(x+5+\frac{27}{x-5}\right)\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+2}\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{-2x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-2}\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{3x+1}{x^3-2}\right)\mathrm{d}x$

Integrazione per razionalizzazione.

Grazie al primo teorema di integrazione per sostituzione, è possibile ricondurre alcuni integrali a quelli di funzioni razionali fratte. Lo vediamo attraverso alcuni esempi.

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t\right]_{t=e^x} = \log(e^x+1)+k$

2. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int e^x\,\frac{e^x+4}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{t+4}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right]_{t=e^x}$

   qui abbiamo osservato che è presente il fattore $D(e^x) = e^x$. Se esso non è presente, basta, per ottenerlo, moltiplicare il numeratore e il denominatore per e^x, come nel seguente esempio:

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+3} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t}\,\right]_{t=e^x}$

   e, analogamente

4. $$\int \frac{\tan x}{\tan x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x(\tan^2 x + 1)}{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1)}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\tan x}$$

   qui abbiamo moltiplicato numeratore e denominatore per $\tan^2 x + 1$ che è la derivata di $\tan x$.

Concludiamo il paragrafo presentando il seguente

Teorema 6 (Secondo teorema di integrazione per sostituzione) *Siano: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione dotata di primitive, $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che Im $g = (a,b)$. Se g è invertibile si ha*

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \left[\int f(g(t))g'(t)\ \mathrm{d}t\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Dimostrazione. Dal primo teorema di integrazione per sostituzione segue che

$$\int f(g(t))g'(t)\ \mathrm{d}t = \left[\int f(x)\ \mathrm{d}x\right]_{x=g(t)}.$$

Componendo ambo i membri con $t = g^{-1}(x)$ si ottiene la tesi.

Esempio 15 Facciamo vedere alcune applicazioni del Teorema precedente

1. Determinare
   $$\int \sqrt{x+3}\ \mathrm{d}x.$$
   Procediamo nel seguente modo. Si ha $(a,b) = [-3, +\infty[$ e l'obiettivo è quello di porre
   $$\sqrt{x+3} = t.$$

Si deve scegliere dunque $(c,d) = [0,+\infty[$ e $g(t) = t^2 - 3$ (si trova ricavando x da $\sqrt{x+3} = t$). Si prova subito che tutte le ipotesi del teorema sono soddisfatte, in particolare si ha

$$g'(t) = 2t, \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x+3};$$

quindi

$$\int \sqrt{x+3}\ \mathrm{d}x = \left[\int t \cdot 2t\ \mathrm{d}t\right]_{t=\sqrt{x+3}} = \frac{2}{3}(\sqrt{x+3})^3 + k.$$

2. Sia

$$f(x) = \sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}$$

con $ps - qr \neq 0$ (in caso contrario f sarebbe costante) una funzione definita in un intervallo (a,b) in cui il radicando è non negativo. La sostituzione da fare in questo caso è

$$t = \sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}$$

con $t \geq 0$. Si ha allora

$$g(t) = \frac{st^2 - q}{p - rt^2}, \quad g'(t) = \frac{2(ps-qr)t}{(p-rt^2)^2}.$$

Poichè g' ha sempre segno costante , la funzione g è invertibile. Applicando il secondo teorema di integrazione per sostituzione si ottiene

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \left[\int \frac{2(ps-qr)t^2}{(p-rt^2)^2}\mathrm{d}t\right]_{t=\sqrt{\frac{px+q}{rx+s}}}$$

che è l'integrale di una funzione razionale. Vediamo a titolo di esempio un caso particolare.

3. Sia
$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}},$$
vogliamo determinare le primitive in $(a,b) =]3, +\infty[$. Poniamo
$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}},$$
con $t > 0$. Ricavando x, si ottiene
$$g(t) = \frac{3t^2+1}{t^2-2}.$$
Si vede facilmente che sono verificate le ipotesi del secondo teorema di integrazione per sostituzione, in particolare si ha
$$g'(t) = -\frac{14t}{(t^2-2)^2} < 0,$$
quindi g è invertibile. Applicando il teorema si ottiene
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -14\left[\int \frac{t^2}{(t^2-2)^2} dt\right]_{t=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}}$$
che si risolve con il metodo di integrazione delle funzioni razionali.

1.3 Integrale definito secondo Riemann.

Ricordiamo che dati due insiemi numerici A e B, se
$$a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B,$$
si dice che A e B sono separati. In tal caso, si prova che
$$\sup A \leq \inf B$$

e tutti i numeri $c \in [\sup A, \inf B]$ vengono detti elementi di separazione fra A e B. Se

$$\sup A = \inf B$$

l'elemento di separazione è unico e gli insiemi A e B sono detti contigui. Si può provare che A e B sono contigui se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Definizione 3 *Chiameremo decomposizione di $[a, b]$ ogni insieme di punti*

$$D = \{x_0; x_1; \cdots, x_{n-1}; x_n\}$$

tali che

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

I punti $x_0, x_1, \cdots, x_n$ si chiamano capisaldi della decomposizione.

Il numero

$$|D| = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \cdots, (x_n - x_{n-1})\}$$

si chiama ampiezza di D.

Sia $D = \{x_0; x_1; \cdots, x_{n-1}; x_n\}$ una decomposizione di $[a, b]$. Poichè f è continua in ognuno degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, è ivi dotata di massimo e minimo assoluto.

Per ogni $i = 1, \cdots, n$ siano $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tali che

$$f(y_i) = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad f(z_i) = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f.$$

Definizione 4 *Le quantità*

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1})$$

e

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

si chiamano, rispettivamente, somma inferiore e somma superiore (secondo Riemann) della funzione f relative a D.

Al variare della decomposizione D, queste somme descrivono due insiemi numerici $\underline{S}$ (insieme delle somme inferiori) e $\overline{S}$ (insieme delle somme superiori).

Si può provare che qualunque siano le decomposizioni D_1 e D_2, si ha

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

cioè gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono separati. Ne segue che

$$\sup \underline{S} \leq \inf \overline{S}.$$

Proviamo che

Teorema 7 *Gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono contigui.*

Dimostrazione. Dimostreremo che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists D \,\text{decomposizione di}\, [a, b] \text{ tale che } S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo f una funzione continua in $[a, b]$, per il Teorema di Cantor essa è uniformemente continua in $[a, b]$.

Scriviamo la definizione di uniforme continuità in corrispondenza ad $\frac{\varepsilon}{b-a}$ e troviamo che

$$\exists \delta > 0 \,\text{tale che} \quad x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \qquad (1.4)$$

Costruiamo una decomposizione D di $[a, b]$ tale che $|D| < \delta$. Siano $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ i capisaldi di questa decomposizione e $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i punti di minimo e massimo assoluto di f in $[x_{i-1}, x_i]$. Dato che $|D| < \delta$, si ha $|z_i - y_i| < \delta$, quindi, usando la (1.4), per tale coppia di punti vale la disuguaglianza

$$f(z_i) - f(y_i) = |f(z_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Si ha allora

$$S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^{n} (f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) <$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\,(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon.$$

In virtù del teorema precedente gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono contigui e $\sup \underline{S} = \inf \overline{S}$ è il loro unico elemento di separazione. Ha senso, quindi dare la seguente

Definizione 5 *Il numero*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup \underline{S} = \inf \overline{S}$$

si chiama integrale definito (secondo Riemann) di f in $[a, b]$

ESEMPIO 16 Consideriamo la funzione costante,

$$f(x) = k \quad \forall x \in [a, b].$$

Qualunque sia la decomposizione D scelta, si ha subito

$$s(f, D) = S(f, D) = k(b - a),$$

quindi

$$\int_a^b k \ \mathrm{d}x = k(b - a).$$

Osserviamo che, se $k > 0$, il valore dell'integrale risulta uguale all'area del rettangolo

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)\Big\}.$$

Quest'osservazione sarà utile nell'ultimo paragrafo.

OSSERVAZIONE 3 Il valore dell'integrale dipende da f, da a e da b, non cambia cambiando il nome della variabile di integrazione: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \cdots$.

Sia f una funzione continua in un intervallo (α, β) e siano $a, b \in (\alpha, \beta)$. Se $a < b$ abbiamo già definito l'integrale definito $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$. Tale definizione si generalizza al caso in cui $a \geq b$, nel seguente modo.

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a = b \\ -\displaystyle\int_b^a f(x)\, \mathrm{d}x & \text{se} \quad a > b. \end{cases}$$

1.4 Proprietà dell'integrale definito

Enunciamo le principali proprietà dell'integrale definito.

- **Proprietà additiva**
  Se f è una funzione continua in (α, β) allora
  $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
  qualunque siano i punti $a, b, c \in (\alpha, \beta)$.

- **Proprietà distributiva**
  Se f, g sono continue in (α, β), $a, b \in (\alpha, \beta)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ si ha
  $$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, \mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + c_2 \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

- **Proprietà della media**
  Sia f continua in $[a, b]$. Posto $m = \min_{[a,b]} f$ e $M = \max_{[a,b]} f$ si ha
  $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq M(b-a).$$
  Inoltre, esiste $c \in [a, b]$ tale che
  $$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

La prima proprietà della media segue dalla definizione di integrale usando la decomposizione $D = \{a; b\}$. Per ottenere la seconda, basta osservare che

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \leq M$$

e applicare la proprietà dei valori intermedi alla funzione f.

- **Prima poprietà di monotonia**
  Sia f continua in $[a, b]$ e tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

  Allora si ha

  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

  L'eguaglianza si ha se e solo se f è identicamente nulla.

  La proprietà di monotonia si può provare usando quella della media e osservando che $m \geq 0$.

  Da questo risultato, applicando la proprietà distributiva, segue subito

- **Seconda proprietà di monotonia**
  Siano f, g continue in $[a, b]$ e tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

  Allora si ha

  $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

  Si ha infine la seguente proprietà:

- Sia f continua in $[a, b]$. Allora

  $$\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x.$$

1.5 Funzione integrale

Sia $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Per ogni $x \in (\alpha, \beta)$ l'integrale definito $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ è un numero (che dipende da x). Possiamo quindi considerare la funzione $F : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ definita mediante la legge

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t, \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

La funzione F si chiama *funzione integrale di f di punto iniziale x_0.* Ovviamente,

$$F(x_0) = 0.$$

Inoltre, vale la seguente proprietà

Teorema 8 *Siano $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $x_0, x_1 \in (\alpha, \beta)$.*

Se F e G sono due funzioni integrali di punto iniziale x_0 e x_1 rispettivamente, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Dimostrazione. Per definizione di funzione integrale si ha:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt, \quad G(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\ dt, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Usando la proprietà additiva, dell'integrale definito

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\ dt + \int_{x_1}^{x} f(t)\ dt = G(x) + \int_{x_0}^{x_1} f(t)\ dt$$

e l'ultimo addendo è costante.

Si ha il seguente importante

Teorema 9 (Teorema di derivazione della funzione integrale.) *Siano $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e F una funzione integrale di f. Allora, F è derivabile e si ha $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.*

Dimostrazione Consideriamo la funzione integrale F di punto iniziale x_0. Proviamo la tesi in un punto $c \in (\alpha, \beta)$. Consideriamo il rapporto incrementale della funzione F nel punto c. Usando la definizione di F e la proprietà additiva dell'integrale definito, se $x \in (\alpha, \beta), x \neq c$ si ha

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{x_0}^{c} f(t)\ \mathrm{d}t}{x - c} = \frac{\displaystyle\int_{c}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t}{x - c}.$$

Supponendo, per semplicità, che $x > c$, dal teorema della media applicato alla restrizione di f in $[c, x]$ segue che esiste $\bar{x} \in [c, x]$ tale che

$$\frac{\displaystyle\int_{c}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t}{x - c} = f(\bar{x}).$$

Osserviamo che $\bar{x}$ dipende da x e al tendere di x a c anche $\bar{x}$ tende a c quindi, per la continuità di f nel punto c si ha

$$\lim_{x \to c} f(\bar{x}) = f(c)$$

da cui segue la tesi.

Dal risultato appena dimostrato segue che ogni funzione integrale di una funzione continua f è una primitiva di f. Il fatto, provato prima, che due funzioni integrali differiscono per una costante, ne è un'ulteriore conferma. In conclusione, possiamo dunque enunciare il seguente

Teorema 10 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Una funzione continua in un intervallo è ivi dotata di primitive.*

llustriamo alcune applicazioni del Teorema fondamentale del calcolo integrale

ESEMPIO 17 Trovare la funzione F, primitiva in $]0, +\infty[$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0$$

e tale che $F(2) = 5$.

Dato che ogni funzione integrale è una primitiva di f, basta porre

$$F(x) = \int_2^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t + 5.$$

ESEMPIO 18 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \quad \forall x > 0.$$

Si tratta della funzione integrale di una funzione continua, quindi

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0.$$

ESEMPIO 19 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \quad \forall x > 0.$$

Non è una funzione integrale in quanto l'estremo variabile di integrazione è quello inferiore. Tuttavia, si osserva che

$$F(x) = -\int_1^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

e quindi

$$F'(x) = -\frac{\sin x}{x}, \quad \forall x > 0.$$

ESEMPIO 20 Derivare la funzione definita in $]0, +\infty[$ dalla legge

$$F(x) = \int_1^{x^3} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t, \quad \forall x > 0.$$

F è composta mediante la funzione integrale $\int_1^y \frac{\sin t}{t} dt$ e la funzione x^3, quindi

$$F'(x) = 3x^2 \frac{\sin x^3}{x^3}, \quad \forall x > 0.$$

ESEMPIO 21 Derivare la funzione definita in $]0,+\infty[$ dalla legge

$$F(x)=\int_{x^4}^{\log x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\quad \forall x>0.$$

Non è una funzione integrale in quanto gli estremi di integrazione sono entrambi variabili, allora si procede nel seguente modo:

$$F(x)=\int_{x^4}^{2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\int_{2}^{\log x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

e quindi

$$F'(x)=-4x^3\frac{\sin x^4}{x^4}+\frac{1}{x}\frac{\sin(\log x)}{\log x},\quad \forall x>0.$$

Dal teorema su esposto segue un altro risultato che stabilisce un importante legame fra l'integrale indefinito e l'integrale definito.

Teorema 11 (Formula fondamentale del calcolo integrale) *Sia $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ una funzione continua, e sia F una sua primitiva. Se $a,b\in(\alpha,\beta)$, si ha*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$$

Dimostrazione. La funzione $G(x)=\int_a^x f(t)\ dt$ è una primitiva di f, quindi esiste una costante k tale che, per ogni $x\in(\alpha,\beta)$, si ha $F(x)=G(x)+k$. In particolare, per $x=a$ ne segue $F(a)=k$ quindi $F(x)=G(x)+F(a)$. Calcolando i due membri di quest'eguaglianza per $x=b$ ne segue

$F(b)=\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x+F(a)$ che è la tesi.

ESEMPIO 22 Calcoliamo i seguenti integrali definiti

1. $\int_1^e \log x\mathrm{d}x=\big[x\log x-x\big]_1^e=1$

2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\mathrm{d}x=\big[\sin x\big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$

1.6 Interpretazione geometrica dell'integrale di Riemann

.

È necessaria una premessa: si vuole attribuire un'area a sottoinsiemi del piano che non siano necessariamente dei poligoni. A tale scopo ci riferiremo alla *Teoria della misura secondo Peano e Jordan*, che in questa sede accenneremo solo relativamente ad insiemi che siano limitati e dotati di punti interni. Intanto, se $X = [a, b] \times [c, d]$ è un rettangolo limitato chiameremo area di X il numero

$$area(X) = (b - a)(d - c).$$

Chiameremo *plurirettangolo* ogni insieme che sia unione finita di rettangoli a due a due privi di punti interni a comune. Se X è un plurirettangolo chiamiamo $area(X)$ la somma delle aree dei rettangoli che lo compongono.

Supponiamo che X sia limitato e dotato di punti interni. Siano rispettivamente $\underline{P}$ e $\overline{P}$ rispettivamente le famiglie dei plurirettangoli contenuti in X e dei plurirettangoli contenenti X. Esse sono non vuote (basti pensare ad un quadrato inscritto in un intorno di un punto interno ad X e ad un quadrato circoscritto ad un cerchio contenente X). Introduciamo gli insiemi numerici $\underline{A}$ e $\overline{A}$ costituiti, rispettivamente, dalle aree degli elementi di $\underline{P}$ e $\overline{P}$, si tratta evidentemente di due insiemi numerici separati. Se essi sono anche contigui, X è detto misurabile e il loro elemento di separazione è chiamato area di X; se non sono contigui, X è detto non misurabile. Un esempio di insieme non misurabile è $X = \big(([0, 1] \times [0, 1]) \cap \mathbf{Q}^2\big) \cup ([0, 1] \times [1, 2])$. Si ha infatti in questo caso $\sup \underline{A} = 1$ e $\inf \overline{A} = 2$.

Sia ora f una funzione reale continua e non negativa in $[a, b]$. Introduciamo l'insieme, che chiameremo **rettangoloide di** f

$$R(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Siano D una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ di capisaldi $x_0, x_1, \cdots, x_n$ e $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i punti di minimo e massimo assoluto di f nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$.

Osserviamo che la quantità $f(y_i)(x_i - x_{i-1})$ rappresenta l'area di un rettangolo contenuto nella porzione di rettangoloide relativa all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$.

L'unione di tutti i rettangoli ottenuti in tal modo costituisce un plurirettangolo contenuto nel rettangoloide, e la sua area è $s(f,D)$. Analogamente $S(f,D)$ fornisce l'area di un plurirettangolo contenente il rettangoloide. Dire che la funzione è integrabile, cioè che gli insiemi $\underline{S}$ e $\overline{S}$ sono contigui equivale, dunque, a dire che sono contigui gli insiemi $\underline{A}$ e $\overline{A}$, quindi garantisce che il rettangoloide è misurabile e la sua area è l'elemento di separazione fra tali insiemi, quindi l'integrale.

Questa conclusione generalizza quanto detto nel paragrafo precedente a proposito dell'integrale di una funzione costante.

Se f è a valori non positivi, si può in modo simile introdurre il rettangoloide e la sua area risulta uguale a $-\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, dato che in questo caso $R(f)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse a $R(-f)$ quindi ha la sua stessa area.

Se, infine, f e g sono due funzioni continue in $[a,b]$ tali che $g(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b]$, si può dimostrare che l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

che chiameremo **dominio normale rispetto all'asse delle ascisse**, è misurabile e la sua area è uguale a $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.