

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Triennale in
Statistica per l'Economia e l'Impresa



RELAZIONE FINALE
**Previsione del VaR: modelli per la volatilità o
distribuzioni di probabilità?**

Relatore Prof.ssa Luisa Bisaglia
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Andrea Greggio
Matricola N 1163450

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Volatilità	4
2	Modelli a volatilità condizionata	7
2.1	Modelli GARCH	7
2.1.1	Modelli TGARCH	11
2.1.2	Modelli EGARCH	12
2.1.3	Modelli APARCH	13
2.2	Fatti stilizzati delle distribuzioni dei rendimenti	15
3	Value at Risk	19
3.1	Definizione del VaR	20
3.2	Backtesting	22
3.2.1	Test di Kupiec	25
3.2.2	Test di Christoffersen	26
4	Applicazione	29
4.1	Stima dei parametri	32
4.2	Performance dei modelli VaR	35
5	Conclusioni	43

Capitolo 1

Introduzione

L'obiettivo della mia relazione finale di laurea è stimare il Value at Risk (VaR) usando l'approccio dei modelli GARCH a volatilità condizionata eteroschedastica e analizzare se è più importante, per la modellazione della volatilità, la scelta del modello o di una opportuna distribuzione di probabilità per il termine d'errore. Nel Capitolo 2, verranno presentate le caratteristiche dei modelli della famiglia GARCH che avranno un ruolo di primo piano nella previsione del VaR insieme alle caratteristiche delle distribuzioni di probabilità condizionate che verranno adattate alle serie storiche finanziarie prese in considerazione. Un'altra linea che si seguirà sarà marcare la differenza tra le distribuzioni di probabilità simmetriche e asimmetriche, dove quest'ultime verranno elogiate per le loro caratteristiche utili a descrivere gli andamenti dei rendimenti degli strumenti finanziari analizzati.

Nel Capitolo 3 verrà descritto il Value-at-Risk con la finalità di costruire un modello utile per la sua stima e valutarne la bontà attraverso delle procedure di *backtesting*, come il test di Kupiec e il test di Christoffersen.

Nel Capitolo 4 presenterò l'applicazione empirica dei modelli di previsione scelti per mettere in risalto le considerazioni fatte nei capitoli precedenti. In particolare si analizza il miglioramento del passaggio da una distribuzione all'altra e da un modello all'altro.

Di seguito introduco la volatilità, una variabile che nel corso dei capitoli verrà richiamata molto spesso.

1.1 Volatilità

La volatilità è una variabile latente, non direttamente osservabile. Esistono diverse metodologie e approcci statistici-economici di misurazione della volatilità.

Un periodo di bassa volatilità non implica che il rischio nei mercati finanziari sia anch'esso basso. E' possibile che la variabile analizzata, seppur con una bassa volatilità, abbia un numero maggiore di rendimenti estremi rispetto ad una variabile con una volatilità maggiore.

Una caratteristica molto frequente nelle serie storiche finanziarie è la presenza di lunghi periodi di alta e di altrettanti di bassa volatilità, *volatility clusters*, che tendono a ripetersi nel corso degli anni in concomitanza a periodi di incertezza e, rispettivamente, di non incertezza di mercato.

Questa caratteristica dei mercati finanziari ha stimolato gli statistici a introdurre modelli a varianza eteroschedastica per migliorare le decisioni di *risk management*, di ottimizzazioni di portafoglio e di altre applicazioni finanziarie.

Esistono due concetti di volatilità: condizionata e non condizionata. I modelli GARCH, che sono introdotti nel Capitolo 2, hanno come oggetto di analisi la volatilità condizionata σ_t^2 che viene definita come la volatilità rispetto ad un dato intervallo di tempo e differisce dalla volatilità non condizionata σ^2 che si riferisce a tutto l'intero periodo.

L'ACF (*autocorrelation function*) è lo strumento grafico maggiormente utilizzato per verificare la presenza di autocorrelazione seriale tra i rendimenti a ritardi differenti. La prima verifica di presenza di volatilità condizionata è condotta attraverso il grafico dell'ACF; gli input della funzione di autocorrelazione sono i rendimenti al quadrato, che sono utilizzati come proxy per la volatilità. In caso di presenza di autocorrelazione, quindi, si procede ad adattare un modello a volatilità eteroschedastica alla varianza condizionata σ_t^2 per prevedere $\hat{\sigma}_{t+i}^2$

condizionato, fino all'informazione al tempo t che, da qui in poi, chiameremo \mathfrak{S}_t .

Capitolo 2

Modelli a volatilità condizionata

In questo capitolo descrivo le peculiarità dei modelli GARCH, metto in risalto il loro frequente uso per analizzare serie storiche finanziarie e mostro che per alcuni fenomeni è più opportuno adottare un modello che ponderi maggiormente gli shock negativi, illustro le distribuzioni che ho usato distinguendo tra distribuzioni simmetriche ed asimmetriche, concentrando l'attenzione sulla maggior adattabilità delle distribuzioni asimmetriche ai dati finanziari e analizzo come l'alta frequenza di osservazioni anomale ci conduca alla scelta di distribuzioni leptocurtiche rispetto alle distribuzioni più conosciute.

2.1 Modelli GARCH

Nel 1982, Engle (Premio Nobel per l'Economia nel 2003) introdusse i modelli ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedastic) e li descrisse come *"These are mean zero, serially uncorrelated processes with nonconstant variances conditional on the past, but constant unconditional variances. For such processes, the recent past gives information about the one-period forecast variance."* Il modello ARCH fu il primo che permise di analizzare fenomeni economici carat-

terizzati da varianza eteroschedastica. L'obiettivo principale di questi modelli è trovare una formula ricorsiva per la volatilità condizionata di Y_t , definito come $Y_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t$, con il fine ultimo di fare previsioni su quest'ultima.

Definiamo l'eteroschedasticità della varianza condizionata: essa rende la varianza dipendente dalle osservazioni dei giorni passati, quindi cambia dopo ogni osservazione che viene registrata. Dopo aver depurato la componente che descrive la media condizionata usando un opportuno modello ARMA(p,q) assumiamo $Y_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t$, dove ϵ_t è una sequenza di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite come un White Noise, con $E(\epsilon_t) = 0$ e $V(\epsilon_t) = 1$.

Il modello ARCH(q) è definito come:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i Y_{t-i}^2 \quad (2.1)$$

La varianza condizionata del rendimento di oggi, al tempo t , è il risultato della somma di una costante ω , o *drift*, con la somma dei rendimenti al quadrato dei giorni passati pesati con i parametri α_i .

Il modello ARCH nella maggior parte dei casi non è il miglior modello per catturare la volatilità. Infatti, guardando la Figura 1, che riporta il grafico dell'ACF dei residui al quadrato dell'indice S&P 500, si nota che l'autocorrelazione persiste fino a ritardo 600, quindi un modello ARCH(q) parsimonioso non è sufficientemente adatto per spiegare la varianza del fenomeno. E' necessario usare un grande numero di parametri per spiegare la componente legata alla varianza. Questo problema è presente anche nella stima della media condizionata quando si fa utilizzo solamente del parametro autoregressivo (AR): tale problema si risolve aggiungendo anche i parametri di media mobile (MA).

Una soluzione al problema della numerosità dei parametri è rappresentata dalla generalizzazione del modello ARCH proposto da Bollerslev nel 1986, il GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic). La grande novità di

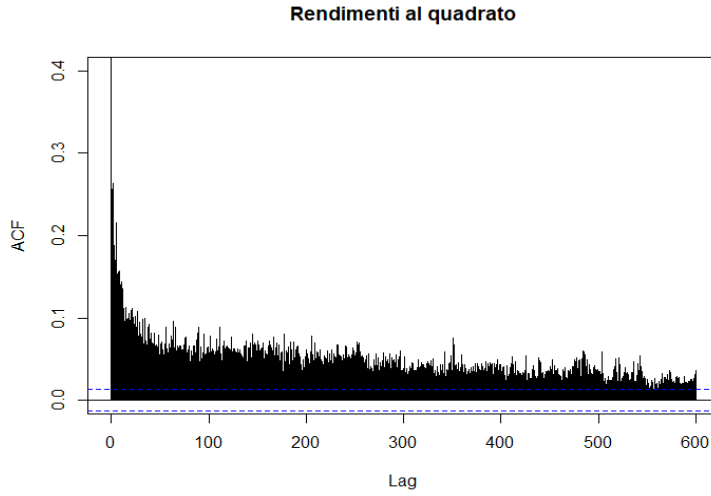


Figura 2.1: ACF dei rendimenti al quadrato dell'indice S&P 500 dal 01/01/1929 al 31/05/2021.

questi modelli, rispetto alla versione di Engle, è la capacità di catturare molte più proprietà delle serie storiche finanziarie; quindi il numero di parametri nel modello ARCH che bisogna utilizzare per spiegare la volatilità viene ridotto introducendo un parametro che pesa l'influenza della varianza passata sulla varianza di oggi. Nella famiglia di modelli GARCH, comprendendo quindi anche il modello ARCH, i parametri pesano maggiormente le osservazioni più recenti rispetto alle osservazione meno recenti. I parametri del modello sono tipicamente stimati attraverso la funzione di verosimiglianza.

Il modello GARCH(p,q) è definito come:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.2)$$

Affinché la varianza sia positiva è necessario fare delle restrizioni sui parametri:

$$\omega > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

In dettaglio, il modello GARCH(1,1) che, nel seguito, verrà adattato ai dati, è

definito come:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha Y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2.3)$$

che ha volatilità incondizionata pari al valore atteso di σ_t^2 :

$$E(\sigma_t^2) = E(\omega + \alpha Y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2) = \omega + \alpha \sigma^2 + \beta \sigma^2$$

Quindi esplicitando l'equazione si ottiene la volatilità non condizionata in funzione dei parametri:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

Come detto in precedenza, i modelli della famiglia GARCH sono usati frequentemente per due motivi: per analizzare serie storiche finanziarie grazie alla loro capacità di catturare i periodi di volatility clusters e per adattarsi bene ai dati sulle code della distribuzione condizionata. Dalla formula (3) è facile osservare che a un grande valore di σ_{t-1}^2 corrisponde a sua volta un grande valore di σ_t^2 ; questo comportamento ricorrente in finanza. E' interessante ora analizzare quanto tempo una singola osservazione passata ci metta a mitigarsi nel calcolo della varianza. Sono state introdotte due misure di calcolo: la persistenza, che controlla la velocità con cui la previsione $\hat{\sigma}_{t+i|t}^2$ tende alla varianza incondizionata σ^2 ; e l'*half life* $= 1 + \frac{\log(0.5)}{\log(\alpha+\beta)}$, che misura il numero di periodi necessari per raggiungere la metà della distanza tra $\hat{\sigma}_{t+i|t}^2$ e σ^2 , ovvero $\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{t+i|t}^2 - \sigma^2)$. Quando l'oggetto di studio riguarda agli asset con osservazioni giornaliere, è comune osservare che $\alpha + \beta \rightarrow 1$ e quindi il processo ha la caratteristica di essere molto persistente. Il modello GARCH si accosta alle serie finanziarie poiché il processo ha code più pesanti di una distribuzione Normale, anche nel caso in cui la distribuzione degli errori non sia Gaussiana. Esso si adatta meglio a fenomeni finanziari con osservazioni che si discostano frequentemente dalla mediana.

Numerose sono le caratteristiche che mi hanno portato ad usare il modello GARCH e, come vedremo in seguito, anche le sue estensioni più particolari.

2.1.1 Modelli TGARCH

Mentre con i modelli GARCH l'informazione relativa a shock positivi e negativi è uguale, con il modello TGARCH si ottiene maggior informazione da *shocks* negativi rispetto ad uno positivo.

Il TGARCH (Threshold GARCH o GJR-GARCH) è un modello asimmetrico della famiglia GARCH introdotto da Glosten, Jagannathan e Runkle (1993): è usato per tenere in considerazione l'effetto leverage, il quale si riconduce alla dipendenza tra rendimento e volatilità. L'effetto leverage, o leva finanziaria, è conseguenza dell'aumento della volatilità quando i rendimenti di una azienda crollano ma, in contrapposizione, la volatilità non aumenta se i rendimenti aumentano; infatti, un'altra causa della leva finanziaria è l'asimmetria della correlazione tra rendimento e varianza. Per considerare questo fenomeno, che si verifica soprattutto nei periodi di incertezza finanziaria, si può utilizzare il modello TGARCH che differisce dal modello simmetrico GARCH per la presenza del parametro γ che misura l'impatto dell'effetto leverage.

Il modello TGARCH(1,1) è definito come:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \gamma\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(\epsilon_{t-1})\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (2.4)$$

dove $\epsilon_t \sim IID(0, \sigma_t^2)$. L'impatto di uno shock positivo è misurato da α , mentre l'impatto di uno shock negativo è misurato da $\alpha + \gamma$. L'effetto leverage si verifica se $\gamma > 0$, se $\gamma = 0$ non c'è evidenza di presenza di effetto leverage. Anche per il modello TGARCH la miglior previsione per la varianza condizionata all'informazione disponibile all'epoca t , ovvero \mathfrak{F}_t , è data da:

$$\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = E(\sigma_{t+1}^2 | \mathfrak{F}_t) = \omega + \alpha\epsilon_t^2 + \gamma\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(\epsilon_t)\epsilon_t^2 + \beta\sigma_t^2 \quad (2.5)$$

Quindi, ϵ_{t-1}^2 incide sulla volatilità di oggi σ_t^2 in maniera diversa, a seconda che ϵ_{t-1} sia maggiore o minore di 0. Questa implicazione è dovuta all'effetto di leva finanziaria che pondera maggiormente shocks negativi rispetto ai positivi. Sarà

quindi necessario verificare la significatività dei parametri ω , α , γ e β presenti nel modello.

2.1.2 Modelli EGARCH

Il modello EGARCH (Exponential GARCH) fu introdotto da Nelson nel 1990 per verificare la coesione tra l'effetto asimmetrico positivo e negativo dei rendimenti. Esso ha la caratteristica di dare maggior risalto alle osservazioni più recenti rispetto al TGARCH.

Il modello EGARCH(1,1) considera il logaritmo della varianza quindi in questo modo non è necessario imporre vincoli ai parametri per avere una varianza positiva ed è definito come:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \beta \log(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \alpha \left[\frac{|\epsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \sqrt{2/\pi} \right] \quad (2.6)$$

L'effetto asimmetrico combinato viene spiegato dalla formula delle innovazioni pesate:

$$g(\epsilon_t) = \theta \epsilon_t + \gamma [|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)] \quad (2.7)$$

il cui valore atteso è nullo poiché i suoi termini ϵ_t e $|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)$ hanno media nulla e perché sono una sequenza di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite. Il termine $\gamma [|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)]$ rappresenta la grandezza del processo. L'innovazione in $\log(\sigma_{t+1}^2)$ è positiva quando la grandezza di ϵ_t è maggiore del suo valore atteso. La scomposizione dell'asimmetria positiva e negativa attraverso la seguente equazione viene analizzata dalla seguente equazione condizionata dal segno di ϵ_t :

$$g(\epsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\epsilon_t - \gamma E(|\epsilon_t|) & \text{se } \epsilon_t > 0 \\ (\theta - \gamma)\epsilon_t - \gamma E(|\epsilon_t|) & \text{se } \epsilon_t \leq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

In questa equazione, γ misura l'effetto simmetrico dello shock sulla volatilità e solitamente è positivo, mentre θ misura l'effetto con segno asimmetrico della volatilità. La varianza condizionata del modello dipende dal segno del rendimento, che definiamo come $y_{t-1} = \sigma_t \epsilon_t$. La varianza condizionata evolve seguendo la formula ricorsiva:

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha} \exp \left[(1 - \alpha_{t-1})\alpha_0 - \gamma\sqrt{2/\pi} \right] \begin{cases} \exp \left[(\gamma + \theta) \frac{y_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right] & \text{se } y_{t-1} > 0 \\ \exp \left[(\gamma - \theta) \frac{|y_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} \right] & \text{se } y_{t-1} \leq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Si è fatto uso del risultato $E(|\epsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$. I coefficienti $(\gamma + \theta)$ e $(\gamma - \theta)$ mostrano l'asimmetria sulla varianza condizionata rispetto a *shocks* positivi e negativi di y_{t-1} . Ci si aspetta che θ abbia un valore negativo poiché gli *shocks* negativi hanno un impatto maggiore sulla varianza.

Come per altri modelli della famiglia GARCH, uno degli ultimi obiettivi dell'analisi è prevedere l'andamento della varianza condizionata sulla base dell'informazione posseduta fino ad oggi. Per fare previsioni un passo in avanti sulla varianza condizionata è necessario calcolare:

$$\sigma_{t+1}^2 = \sigma_t^{2\alpha} \exp \left[(1 - \alpha_{t-1})\alpha_0 \right] \exp[g(\epsilon_t)] \quad (2.10)$$

2.1.3 Modelli APARCH

Un modello che offre ulteriore flessibilità ed include l'effetto leverage è il modello APARCH (Asymmetric Power ARCH) che invece di σ_t^2 modella σ_t^δ , dove $\delta > 0$ è un altro parametro da stimare. Il modello APARCH(1,1) per la volatilità condizionata è definito come:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha(|\epsilon_{t-1}| - \gamma\epsilon_{t-1})^\delta + \beta\sigma_{t-1}^\delta \quad (2.11)$$

similmente al TGARCH, $-1 < \gamma < 1$ misura l'effetto leverage. L'impatto di ϵ_{t-i} su σ_t viene calcolato dalla funzione $g_\gamma(x) = |x| - \gamma x$. Se $0 < \gamma < 1$

allora $g_\gamma(-x) > g_\gamma(x)$ per qualsiasi x , quindi indica che gli shocks negativi passati hanno un impatto maggiore sulla volatilità condizionata rispetto agli shocks positivi passati. Se $-1 < \gamma < 0$ allora è presente l'effetto leverage al contrario. Se $\delta = 2$ e $\gamma = 0$ il modello diventa un GARCH(1,1). Un caso particolare dell'APARCH(p,q) si verifica quando $\delta = 2$ e $\gamma = 0$, ovvero il modello corrisponde ad un GARCH(p,q).

Il modello ha la capacità di possedere maggior flessibilità nell'analizzare le componenti di asimmetria e volatilità grazie al grande numero di parametri. Uno strumento grafico che spiega l'asimmetria dell'impatto asimmetrico sulla volatilità condizionata è dato dalla NIC (*News Impact Curve*). Questa curva valuta la relazione presente tra lo shock in $t-1$, ϵ_{t-1} , e la volatilità corrente, σ_t^2 , considerando l'informazione fino all'epoca $t-2$ con σ_{t-2}^2 fissato. E' uno strumento grafico molto potente dato che è possibile osservare come lo shock positivo o negativo impatta sulla previsione della volatilità futura. E' inoltre opportuno aggiungere che è possibile discriminare i modelli asimmetrici, come TGARCH, EGARCH e APARCH, dai modelli simmetrici, GARCH, grazie alla forma della NIC. Ecco alcuni esempi di relazione tra ϵ_{t-1} e σ_t^2 nei modelli precedentemente spiegati:

- Considerando il processo simmetrico GARCH(1,1) la NIC diventa una parabola con forma $\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2$. L'impatto dello shock al tempo $t-1$ sulla volatilità condizionata corrente σ_t^2 è simmetrico.
- Considerando il processo asimmetrico TGARCH(1,1), la NIC, proposta da Hentschel (1995), è determinata dalla relazione:

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} \omega + \beta\sigma^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 & \text{se } \epsilon_{t-1} > 0 \\ \omega + \beta\sigma^2 + (\alpha + \gamma)\epsilon_{t-1}^2 & \text{se } \epsilon_{t-1} \leq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

La NIC ha il punto di minimo in corrispondenza di $\epsilon_{t-1} = -\gamma$.

- Considerando il processo asimmetrico EGARCH(1,1), la NIC è determi-

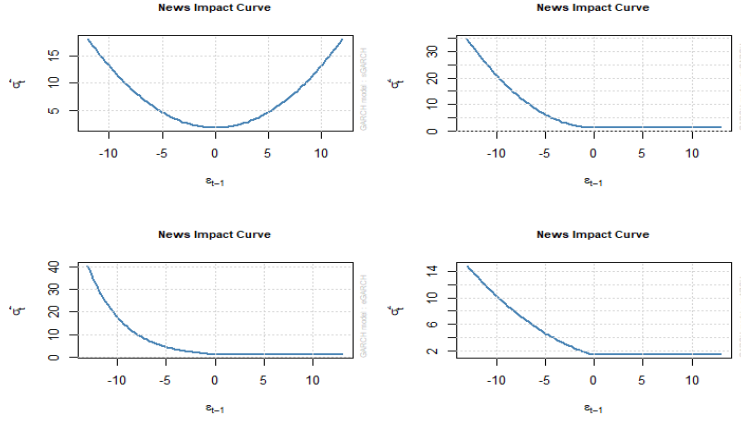


Figura 2.2: Grafico della NIC per i modelli GARCH, TGARCH, EGARCH e APARCH.

nata dalla relazione:

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} \sigma^{2\beta} \exp(\omega - \alpha\sqrt{2/\pi}) \exp(\frac{\gamma+\alpha}{\sigma}\epsilon_{t-1}) & \text{se } \epsilon_{t-1} > 0 \\ \sigma^{2\beta} \exp(\omega - \alpha\sqrt{2/\pi}) \exp(\frac{\gamma-\alpha}{\sigma}\epsilon_{t-1}) & \text{se } \epsilon_{t-1} \leq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2 Fatti stilizzati delle distribuzioni dei rendimenti

In ambito finanziario i tre oggetti di interesse sono prezzi, rendimenti e volatilità, di cui abbiamo già parlato in precedenza. I prezzi rappresentano la quotazione in un determinato istante di tempo di uno specifico asset. L'attenzione maggiore, però, ricade nell'analisi dei rendimenti che si definiscono come la differenza logaritmica tra il prezzo al tempo t e il prezzo al tempo $t - 1$. Questa maggior attenzione è dovuta alla capacità dei rendimenti rispetto ai prezzi di rappresentare un sommario più completo per l'investitore e anche dal punto di vista statistico sono più facili da trattare. Dato P_t il prezzo dell'asset al tempo t e l'assunzione che non si paghino dividendi, il rendimento semplice uniperiodale

viene definito come:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2.14)$$

E' di maggiore interesse trattare il rendimento logaritmico che è definito come:

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \log P_t - \log P_{t-1} \quad (2.15)$$

Nella distribuzione condizionata dei log-rendimenti, definita come

$f(r_t|r_1, r_2, \dots, r_{t-1}, \theta)$, riponiamo maggior interesse piuttosto che alla distribuzione marginale per lo studio dei rendimenti. Le caratteristiche che si rivedono nelle distribuzioni condizionate dei log-rendimenti richiedono molto attenzione. Le peculiarità sono: la presenza di curtosi e spesso di asimmetria, la media del processo uguale a 0 e volatilità variabile nel tempo (eteroschedasticità).

Per analizzare i rendimenti di un asset è necessario fare delle assunzioni sulla loro distribuzione condizionata a \mathfrak{F}_{t-1} . Per semplicità, è molto ricorrente l'uso della distribuzione Gaussiana o della Student-t ma, come si vedrà nel capitolo 3, non sono le distribuzione che si adattano meglio a descrivere l'andamento dei rendimenti. In ambito finanziario le osservazioni che si definiscono anomale sono più frequenti rispetto ad altri ambiti: per questo è necessario trattare distribuzioni leptocurtiche.

Le distribuzioni asimmetriche, avendo un parametro di asimmetria, rendono possibile l'adattamento anche a serie con una forte incidenza di rendimenti positivi (o negativi) che distribuzioni simmetriche non riescono a mostrare.

Con il termine skewness si indica il grado di asimmetria di una distribuzione. Se non c'è presenza di skewness la distribuzione è simmetrica; se la skewness è positiva la coda destra è più lunga rispetto a alla coda sinistra; se è negativa viceversa. La skewness di una variabile casuale Y è calcolata come: $SK = E\left[\frac{Y-E(Y)}{\sigma}\right]^3$

Come specificato in precedenza, i rendimenti di un asset registrano relativamente spesso valori che si discostano dalla mediana. Per questo motivo le distribuzioni che si adattano meglio ai dati finanziari sono le distribuzioni leptocurtiche, che hanno la caratteristica di avere code spesse per incorporare, per esempio, i perio-

di di crisi in cui si segnalano rendimenti minori del -10%. L'indice che controlla la pesantezza delle code è l'indice di curtosi definito come: $KU = E[\frac{Y-E(Y)}{\sigma}]^4$

Le distribuzioni condizionate utilizzate nel capitolo 4 sono la Normale, Student-t, la skew Student-t, la skew GED e la Johnson.

Capitolo 3

Value at Risk

Le più importanti banche statunitensi verso la metà degli anni '80 iniziarono a sviluppare modelli, denominati "*Value at Risk Models*". Una delle prime istituzioni che introdussero la nuova tipologia di misurazione del rischio fu la J.P. Morgan nel 1996. Il VaR a livello $\alpha \in (0, 1)$ definisce il livello di perdita potenziale che si può superare in un determinato orizzonte temporale e con probabilità $(1 - \alpha)$ la perdita che non supera la soglia del VaR. Il VaR necessita di due parametri, i quali servono a identificare il livello di confidenza α ed l'orizzonte temporale di riferimento. Quindi se la stima del VaR di un giorno a livello del 99% di un'azienda è 2 milioni, vuol dire che con una probabilità pari a 0.99 entro domani l'azienda non subirà una perdita maggiore di 2 milioni. D'altra parte è possibile che con probabilità 0.01 l'azienda subirà una perdita maggiore di 2 milioni.

Gli enti regolatori del mercato impongono alle banche di avere una copertura di capitale cospicua per coprire le perdite potenziali di portafoglio. La stima del capitale di copertura è definita dalle stime del VaR calcolato dalla banca. Dal Comitato di Basilea l'attuale quadro normativo impone che sia calcolato il VaR a 10 giorni a livello del 99%. L'utilizzo del VaR è inoltre di grande rilevanza per valutare la redditività di un investimento del capitale investito, stimare una misura di rischio che in questo caso richiama le perdite potenziali e la possibilità

di confrontare diverse alternative di investimento del capitale di rischio. I metodi del calcolo del VaR sono diversi: lisciamiento esponenziale, approccio con simulazione Montecarlo, approccio parametrico, approccio GARCH e approccio Bootstrap. Nel Capitolo 4 verrà utilizzato l'approccio GARCH.

3.1 Definizione del VaR

Supponiamo che al tempo t siamo interessati al rischio di mercato di un rendimento per i prossimi h periodi. $\Delta V(h)$ è la differenza di valore del rendimento dal tempo t al tempo $t + h$ e $L(h)$ la sua funzione di perdita.

Definiamo il VaR di un rendimento nell'orizzonte temporale h a livello $\alpha \in (0, 1)$ come:

$$\alpha = P[L(h) \geq VaR_\alpha] = 1 - P[L(h) < VaR_\alpha] \quad (3.1)$$

La probabilità che l'investitore possa incontrare una perdita maggiore o uguale al VaR nell'orizzonte temporale h è α . Per ogni funzione di distribuzione cumulata $F_h(x)$ di $L(h)$ e probabilità $q \in (0, 1)$ la quantità

$$x_q = \inf\{x | F_h(x) \geq q\} \quad (3.2)$$

è chiamata il q -esimo quantile di $F_h(x)$, dove \inf denota il minore numero reale x che soddisfa $F_h(x) \geq q$. Se si specifica una distribuzione di probabilità per i rendimenti allora il VaR è semplicemente il quantile $(1 - \alpha)$ della distribuzione cumulata della funzione di perdita $L(h)$, quindi $VaR = q_{1-\alpha}$.

Il VaR è quindi una previsione della possibile perdita di una posizione finanziaria in un dato orizzonte temporale. La metodologia più adatta per determinare questa previsione richiede di stimare la distribuzione dei rendimenti futuri della posizione finanziaria in oggetto. Per esempio, il VaR ad un giorno di un portafoglio con rendimenti giornalieri r_t dovrebbe essere calcolato usando la distribuzione stimata del rendimento futuro r_{t+1} data l'informazione disponibile al tempo t . Da un punto di vista statistico, le distribuzioni stimate accorpa-

no maggior incertezza al calcolo del VaR, poichè è necessario stimare i loro parametri, Tsay(2010).

Un approccio classico al calcolo del VaR si basa sull'uso dei modelli a volatilità condizionata specificati nel Capitolo 2. Data una serie storica dei log-rendimenti, dopo aver usato un appropriato modello ARMA per modellare la media condizionata, usando i modelli della famiglia GARCH si può modellare la parte non spiegata del fenomeno analizzato, ovvero la varianza condizionata.

Consideriamo i log-rendimenti r_t di un asset finanziario e definiamo $a_t = \sigma_t \epsilon_t$. Un modello ARMA-GARCH viene definito come:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} \quad (3.3)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^u \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.4)$$

Le equazioni 18 e 19 sono le equazioni della media e varianza condizionata del log-rendimento r_t . Assumendo di conoscere i parametri, queste due equazioni sono usate per calcolare le previsioni un passo in avanti della media e varianza condizionata di r_t . Ovvero, abbiamo:

$$\hat{r}_t(1) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t+1-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t+1-j} \quad (3.5)$$

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^u \alpha_i a_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_j \sigma_{t+1-j}^2 \quad (3.6)$$

Assumendo che il termine d'errore ϵ_t sia Gaussiano, allora la distribuzione di r_{t+1} condizionata all'informazione disponibile al tempo t si distribuisce come $N(\hat{r}_t(1), \hat{\sigma}_t^2(1))$.

I quantili di questa distribuzione condizionata sono facilmente reperibili per il calcolo del Value at Risk. Ad esempio, il quantile a livello 0.99 corrisponde a $\hat{r}_t(1) + 2.58 \hat{\sigma}_t(1)$.

3.2 Backtesting

“VaR is only as good as its backtest. When someone shows me a VaR number, I don’t ask how it is computed, I ask to see the backtest.” (Brown, 2008).

Prima è stato discusso il calcolo del VaR mediante i modelli della famiglia GARCH che, però, risulta utile solamente se la sua previsione è stimata accuratamente. Per valutare la bontà della stima, è sempre necessario verificare i risultati attraverso il *backtesting*.

Il *backtesting* è una procedura statistica che confronta sistematicamente le osservazioni dei rendimenti con le loro stime ottenuto, nel nostro caso, attraverso l’approccio GARCH. Per esempio, se il livello di confidenza per calcolare il VaR giornalmente è dello 0.99, ci aspettiamo che in media le violazioni siano una ogni 100 giorni. In questo processo di *backtesting* possiamo esaminare statisticamente se la frequenza delle violazioni in un determinato orizzonte temporale è in linea con il livello di confidenza determinato a priori. Queste tipologie di test sono classificati come test di copertura incondizionata. Il *backtesting* è solitamente utilizzato nel mondo finanziario e bancario per il calcolo del capitale minimo disponibile come liquidità, cioè un requisito che gli enti regolatori del mercato impongono di rispettare alle imprese; diventa una pratica ricorrente anche nell’ambito del trading per testare se gli algoritmi creati sono in grado di individuare tutti i segnali di mercato. Il *backtesting* gioca quindi un ruolo importante nella decisione del capitale di riserva permettendo alle banche di usare i loro modelli interni di stima del VaR per il suo calcolo. Il processo di *backtesting* compara gli ultimi 250 valori giornalieri del VaR al 99% con le osservazioni realizzate dei rendimenti. L’accuratezza del modello è valutata contando il numero di violazioni durante questo periodo. Il valore del capitale di riserva aumenta all’aumentare del rischio di portafoglio. In più, il valore del capitale di rischio dipende dai risultati che dà il modello di *backtesting* rispetto al valore del fattore di ridimensionamento del capitale di rischio, chiamato S_t . Il Comitato di Basilea ha classificato la bontà delle stime del *backtesting*

in 3 categorie: verde, giallo e rosso. Queste categorie proposte nella Tabella 1 sono state scelte per bilanciare l'errore di primo tipo con l'errore di secondo tipo:

Zona	Numero di violazioni	Incremento del fattore S_t	Probabilità cumulata
Verde	0	0.00	8.11%
	1	0.00	28.58%
	2	0.00	54.32%
	3	0.00	75.81%
	4	0.00	89.22%
Gialla	5	0.40	95.22%
	6	0.50	98.63%
	7	0.65	99.60%
	8	0.75	99.89%
	9	0.85	99.97%
Rossa	10+	1.00	99.99%

Tabella 3.1: Vengono indicate le zone che il Comitato di Basilea ha introdotto per la classificazione della bontà delle stime.

Assumendo che il modello sia corretto, il valore atteso delle violazioni è 2.5. Il modello risulta accurato e affidabile quando si ricade nella zona verde. La zona rossa indica un importante problema del modello nella stima del VaR. Come si nota dalla Tabella, la probabilità di ricadere nella zona rossa è circa dello 0.01% ma se questo si dovesse verificare, allora è necessario rifiutare il modello di stima del VaR.

Un buon modello per il calcolo del VaR, deve essere in grado di prevedere un corretto numero di violazioni, e deve riuscire a renderle indipendenti tra di loro. Un *cluster* di violazioni indica che il modello non è abbastanza accurato da reperire i cambiamenti della volatilità del mercato e delle correlazioni.

Nel corso degli anni 90 sono stati introdotti diversi test per verificare la bontà del calcolo del VaR. I test che vengono descritti nei prossimi paragrafi si dividono in due macro categorie: *unconditional coverage* e *conditional coverage*. Entrambi i test necessitano di definire l'evento che si riferisce a quando la perdita supera il suo VaR_α . Sia $x_{t,t+1}$ il rendimento, che può essere positivo o negativo,

e la funzione *hit* è definita come:

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{t,t+1} \leq -VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{se } x_{t,t+1} > -VaR_t(\alpha) \end{cases} \quad (3.7)$$

Quindi la funzione *hit* è un vettore che sintetizza la storia passata e indica se la perdita supera il VaR calcolato dal nostro modello. Christoffersen (1998) dimostrò che l'accuratezza del calcolo del VaR è verificata se la funzione *hit* soddisfa due proprietà. Queste proprietà sono:

- Proprietà di *unconditional coverage*. La probabilità di realizzare una perdita maggiore del valore di $VaR_t(\alpha)$ deve essere $\alpha \cdot 100\%$, nonché la probabilità $P[I_{t+1}(\alpha) = 1] = \alpha$. Se la funzione *hit* risulta dare rispettivamente un rapporto maggiore o minore di $\alpha \cdot 100\%$, allora il VaR calcolato potrebbe sottostimare o sovrastimare il vero livello di rischio.
- Proprietà di indipendenza. Questa proprietà controlla il modo in cui si verificano le violazioni. Gli elementi del vettore I_{t+1} devono essere indipendenti a due a due, ovvero $Cov[I_{t+j}(\alpha), I_{t+k}(\alpha)] = 0$. In particolare, la storia passata delle violazioni del VaR $\{\dots, I_{t-1}(\alpha), I_t(\alpha)\}$ non deve dare nessun tipo di informazione per la violazione $I_{t+1}(\alpha)$. Se dovesse verificarsi che le violazioni precedenti hanno incidenza sulle violazioni al tempo t allora la stima del VaR è distorta. Ad esempio, supponiamo che $\alpha = 0.01$ e le violazioni del VaR si verifichino in coppia ovvero dopo una violazione sia seguita immediatamente da un'altra violazione. Allora la probabilità di osservare una perdita maggiore di quella prevista dal $VaR(0.01)$ dopo che una è già stata osservata sarà uguale ad 1 e non 0.01 come dovrebbe realmente essere. In questo caso il VaR non rispecchia accuratamente la realtà delle perdite che ci si aspetta, ovvero che superino la soglia del VaR un giorno ogni 100. In generale, un *clustering* delle violazioni rappresenta una violazione della proprietà di indipendenza che segnala una mancanza

di reattività nel VaR non appena cambia il rischio di mercato.

Per ottenere un buon modello di previsione del VaR è necessario che entrambe le proprietà di *unconditional coverage* e di indipendenza siano rispettate. Le due proprietà della funzione *hit* possono essere combinate in una singola equazione:

$$I_t(\alpha) \stackrel{\text{iid}}{\sim} B(\alpha) \quad (3.8)$$

che la definisce come una sequenza di variabili aleatorie di Bernoulli con probabilità di successo pari ad α . Nei prossimi paragrafi si introducono i principali test per la verifica della bontà dei risultati del VaR. I test comprendono il test della proporzione di violazioni introdotto da Kupiec (1995) e il test dell'intervallo introdotto da Christoffersen (1998).

3.2.1 Test di Kupiec

Uno dei primi test introdotti in letteratura è il test di Kupiec (1995) che si focalizza nell'analisi della proprietà di *unconditional coverage*. Il test consiste nel testare se il VaR è violato più (o meno) del $\alpha \cdot 100\%$ delle volte. Kupiec propose la proporzione di fallimento (POF test) che testa il numero di violazioni di un asset in un orizzonte temporale. Se la proporzione delle violazioni si discosta considerabilmente rispetto al valore atteso $\alpha \cdot 100\%$ allora l'accuratezza del rischio del modello non è calcolata con accuratezza. Dato un campione di T osservazioni, la statistica test di Kupiec è definita come:

$$POF = -2 \log \left[\left(\frac{1 - \hat{\alpha}}{1 - \alpha} \right)^{T - I(\alpha)} \left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} \right)^{I(\alpha)} \right] \quad (3.9)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} I(\alpha) \quad (3.10)$$

$$I(\alpha) = \sum_{t=1}^T I_t(\alpha) \quad (3.11)$$

Sotto l'ipotesi nulla che ipotizza la correttezza del modello, la statistica test POF si distribuisce asintoticamente come una χ_1^2 . Se la proporzione di violazioni del VaR $\hat{\alpha} \cdot 100\%$ è proporzionale a $\alpha \cdot 100\%$ allora la statistica test POF è uguale a 0, cioè non indica un'inadeguatezza nella stima del VaR. In caso contrario, se la statistica test POF è diversa da 0 allora la misura del VaR proposta dal nostro modello sovrastima o sottostima la soglia di rischio imposta a priori. In accordo con Dowd (2006), il valore soglia per ogni test dovrebbe essere scelto al fine di bilanciare l'errore di primo tipo con l'errore di secondo tipo. Il test di Kupiec è quindi una funzione del numero di violazioni del VaR nell'orizzonte temporale considerato.

Mentre il test di Kupiec ha una solida accuratezza nei risultati, le sue alternative hanno due carenze importanti. La prima carenza si riflette nella difficoltà di identificare i valori del VaR che sono sistematicamente sotto il rischio riportato. Dal punto di vista statistico i test alternativi non mostrano una buona consistenza con l'attuale quadro normativo che richiede il calcolo del VaR nei 250 giorni precedenti. Kupiec (1995) dimostra che quando la soglia di 8 violazioni in un anno è usata nel test, la probabilità di rilevare il VaR con soglia 97% rispetto al richiesto VaR al 99% è solamente il 65%. La seconda carenza dei test alternativi riguarda l'attenzione che hanno per la proprietà di *unconditional coverage* ma non della proprietà di indipendenza. Questa carenza porta al *clustering* delle violazioni del VaR.

3.2.2 Test di Christoffersen

Con il fine di analizzare la proprietà di indipendenza di $I_t(\alpha)$, vettore delle violazioni, che il test di Kupiec non è in grado di fare, furono introdotto diversi test tra cui il test di Christoffersen (1998). Questo test esamina se è verosimile che la singola violazione del VaR dipenda dalla violazione del giorno precedente. Se la misurazione del VaR è condotta in maniera accurata, la violazione del VaR di oggi deve essere indipendente da ieri, sia se ieri ci sia stata una violazione sia se non ci sia stata.

Se, per esempio, la verosimiglianza della violazione del VaR al 99% aumenta nei giorni seguenti che precedono un'altra violazione, allora questo indica che il valore del VaR al 99% che segue la violazione dovrebbe essere incrementato. Se vogliamo calcolare in maniera accurata la misura del VaR in modo che possa riflettere il rischio dell'asset finanziario allora la proporzione di violazioni che si misurano subito dopo un'altra violazione, $I_{t-1} = 1$, dovrà avere lo stesso rapporto che si avrebbe dopo una non violazione, $I_{t-1} = 0$.

Definiamo n_{ij} come il numero di giorni in cui l'evento di violazioni o non violazione j è condizionato dall'evento i riferito al giorno precedente. Illustriamo attraverso la tabella i valori ottenibili:

	$I_{t-1} = 0$	$I_{t-1} = 1$	
$I_t = 0$	n_{00}	n_{10}	$n_{00} + n_{10}$
$I_t = 1$	n_{01}	n_{11}	$n_{01} + n_{11}$
	$n_{00} + n_{01}$	$n_{10} + n_{11}$	N

Tabella 3.2: Tabella che mostra il procedimento per il calcolo dei giorni condizionati all'evento del giorno precedente.

Indichiamo con π_i la probabilità di osservare una violazione condizionata allo stato i del giorno precedente:

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}, \pi = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}} \quad (3.12)$$

Se il modello è accurato, la violazione di oggi non dovrebbe dipendere dall'evento del giorno precedente. Dal punto di vista statistico, sotto l'ipotesi nulla H_0 le probabilità π_0 e π_1 devono essere uguali. La statistica test di Christoffersen è calcolata come rapporto delle verosimiglianze:

$$LR_{ind} = -2 \log \left[\frac{(1 - \pi)^{n_{00} + n_{10}} \pi^{n_{01} + n_{11}}}{(1 - \pi_0)^{n_{00}} \pi_0^{n_{01}} (1 - \pi_1)^{n_{10}} \pi_1^{n_{11}}} \right] \quad (3.13)$$

E' da sottolineare che il test di Christoffersen non riesce a verificare, per esempio, se la violazione di oggi possa dipendere dalla violazione di 5 giorni precedenti. In questo caso la mancanza della verifica completa dell'indipendenza delle violazioni non può essere verificata usando solamente il test di Christoffersen. Dal punto di vista statistico, qualsiasi test di indipendenza deve specificare l'ipotesi alternativa H_1 che il test contrappone all'ipotesi nulla H_0 . Uno specifico test per la verifica dell'indipendenza deve descrivere il tipo di anomalia che vuole verificare, poiché il test non riuscirà ad analizzare le violazioni della proprietà d'indipendenza che non sono correlate con quei tipi di anomalia.

Combinando i test di Kupiec e Christoffersen possiamo ottenere un test congiunto chiamata test di *conditional coverage* che esamina entrambe le proprietà che testano se il modello del calcolo del VaR sia effettivamente un buon modello. La statistica test corrispondente è la somma dei due rapporti di verosimiglianza:

$$LR_{cc} = LR_{POF} + LR_{ind} \quad (3.14)$$

che si distribuisce come un chi-quadrato con due gradi di libertà, χ^2_2 . Dato $\alpha \in (0, 1)$, se il valore di LR_{cc} è minore del valore soglia di una $\chi^2_{2, 1-\alpha}$ allora il modello ha superato il test congiunto mentre in caso contrario verrà rifiutata l'ipotesi nulla. Campbell (2005) dimostra che è possibile che il modello non passi i due test singoli pur passando il test congiunto; è quindi necessario calcolare sempre i due test singoli sebbene il test congiunto dia un risultato positivo.

Capitolo 4

Applicazione

In questo capitolo si evidenzia come l'assunzione della distribuzione di probabilità dei rendimenti sia più influente nella performance del Value at Risk rispetto alla specificazione della volatilità condizionata. Inoltre, dimostriamo che le distribuzioni asimmetriche combinate con i modelli APARCH si adattano meglio ai dati per la valutazione della previsione VaR; il motivo viene spiegato dalla flessibilità del parametro di potenza nella volatilità condizionata dell'APARCH. Infatti, le stime suggeriscono che le dinamiche della volatilità dovrebbero essere specificate in termini della deviazione standard condizionata. Infine, svilupperemo l'applicazione nella valutazione delle performance del VaR grazie ad una serie di *backtesting*, introdotti precedentemente.

Sono state prese in considerazione 4 serie storiche finanziarie dal 01/01/2004 al 31/05/2021, un lasso di tempo che comprende due periodi di grande incertezza finanziaria: il primo nel corso del 2008 causato dalla crisi americana di tipo finanziario, il secondo lo stiamo vivendo oggi a causa della pandemia. Le serie storiche sono state scaricate attraverso R usando le funzioni del pacchetto *rugarch*.

Dal grafico in Figura 4.1 si nota come le quattro serie si comportino in maniera diversa. L'indice NASDAQ e Amazon hanno un trend crescente, negli ultimi anni i loro trend diventano di carattere esponenziale e in corrispondenza

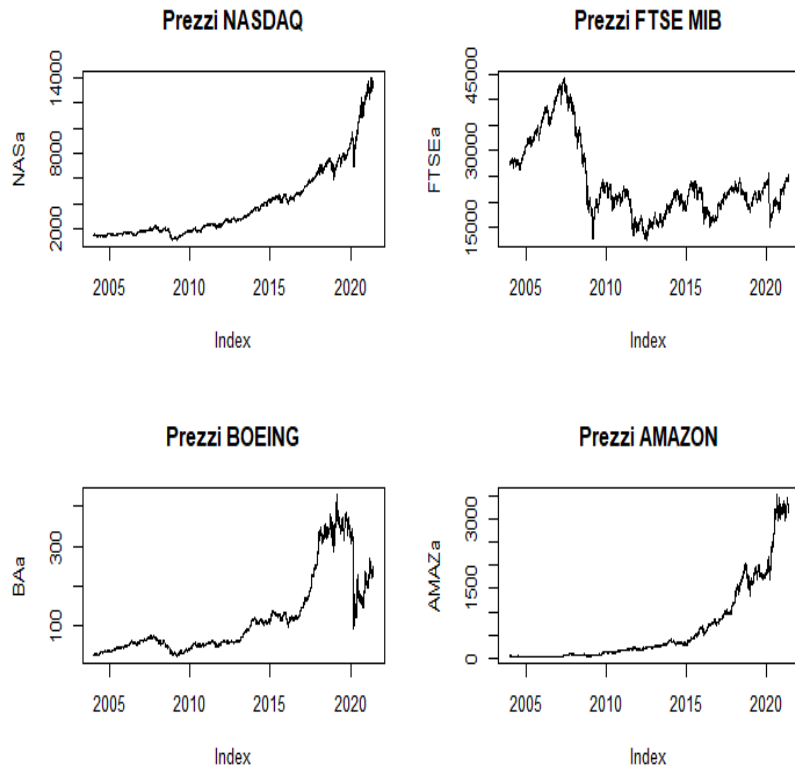


Figura 4.1: Andamento dei prezzi dal 01/01/2004 al 31/05/2021.

degli anni 2008 e 2020 osservano una diminuzione dei prezzi causata dalle due diverse crisi per l'indice NASDAQ. Per Amazon pure essendoci stata la crisi legata al COVID-19, il suo andamento ha continuato invece ad aumentare.

L'indice FTSE MIB è caratterizzato dalla presenza di grossi aumenti e diminuzioni dei prezzi; si nota come in corrispondenza del 2007 ci sia stata una progressiva diminuzione dei prezzi fino alla fine del 2009 per poi avere un carattere molto ciclico fino ad oggi, periodo in cui è presente una risalita dopo l'inizio della pandemia in Febbraio 2020. L'andamento dei prezzi della compagnia Boeing ha avuto un aumento dei prezzi dopo il 2016; successivamente, con l'avvento della crisi il titolo è diminuito.

Per semplicità, si lavora con i rendimenti percentuali calcolati come differen-

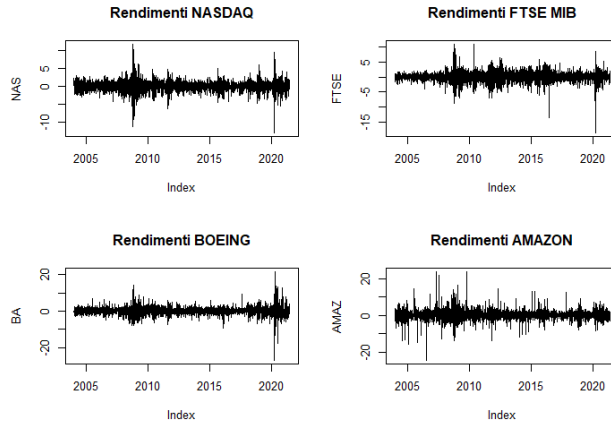


Figura 4.2: Andamento dei rendimenti dal 01/01/2004 al 31/05/2021.

za prima dei log-rendimenti per 100:

$$100 \cdot r_t = 100 \cdot [\log(P_{t+1}) - \log(P_t)] \quad (4.1)$$

Nella Figura 4 si osserva che in tutte e quattro le serie è presente una grande volatilità dei rendimenti nel 2008, in corrispondenza della crisi finanziaria americana, come si nota dagli scostamenti dalla media, che è 0, delle osservazioni. Dopo il 2008, le serie hanno alternato periodi di volatilità maggiore a causa di periodi di incertezza di mercato, con periodi meno incerti fino alla pandemia legata al COVID-19 che, eccetto Amazon, ha causato una grossa volatilità dei rendimenti.

Di seguito vengono riportate le statistiche descrittive dei rendimenti giornalieri:

Tutti gli asset hanno media e mediana vicina allo 0. La curtosi è molto elevata, indica un grande massa di probabilità sulle code, molto superiore alla Normale, e trattandosi di serie storiche finanziarie questo fenomeno è ricorren-

Asset	Media	Mediana	Min	Max	SD	Asimmetria	Curtosi
NASDAQ	0.05	0.11	-13.00	11.85	1.37	-0.36	9.05
FTSE MIB	0.00	0.07	-18.55	10.87	1.53	-0.71	10.82
BOEING	0.05	0.08	-27.24	21.77	2.15	-0.38	21.20
AMAZON	0.09	0.07	-24.62	23.86	2.41	0.34	13.54

Tabella 4.1: Statistiche descrittive per le serie storiche dal 01/01/2004 al 31/05/2021.

te. Solamente Amazon ha un'asimmetria positiva, mentre NASDAQ, FTSE MIB e Boeing hanno asimmetria negativa. Per quanto riguarda la deviazione standard non condizionata, i valori dei due indici finanziari sono simili; lo stesso vale per le due aziende Amazon e Boeing. Avendo numerose osservazioni (4381) si può adattare alle singole serie il test di Jarque-Bera che testa l'ipotesi nulla H_0 di Normalità della distribuzione. Valori elevati della curtosi e la presenza di asimmetria ci indirizzano verso un rifiuto di H_0 ; infatti le statistiche test ottenuto sono: 15105.84 per il NASDAQ, 22019.08 per FTSE MIB, 82165.13 per Boeing e 33591.01 per Amazon. Tutti e quattro i p-value danno probabilità 0 e quindi si rifiuta l'ipotesi di Normalità, come previsto.

4.1 Stima dei parametri

Si procede con la stima dei parametri della serie NASDAQ utilizzando il software R con il pacchetto *rugarch*. Un modello AR(1) è stato adattato ai dati per la stima della media condizionata dei rendimenti di tutti e quattro gli asset finanziari. Le distribuzioni condizionate utilizzate per la stima dei parametri sono: Normale, t di Student, t di Student asimmetrica, Generalized Error (GED) asimmetrica, distribuzione di Johnson. I valori riportati sono ottenuto adattando la distribuzione di Johnson ai dati:

I modelli dimostrano di essersi adattati bene ai dati e di aver catturato l'au-

Parametri	GARCH	TGARCH	APARCH	EGARCH
μ	0.084(0.0136)	0.052(0.014)	0.044(0.013)	0.047(0.016)
ϕ	-0.064(0.015)	-0.050(0.015)	-0.045(0.014)	-0.048(0.014)
ω	0.027(0.006)	0.07(0.006)	0.040(0.004)	0.006(0.004)
α	0.112(0.011)	0.000(0.011)	0.091(0.002)	-0.0159(0.013)
β	0.875(0.012)	0.877(0.012)	0.894(0.011)	0.969(0.003)
γ	-	0.200(0.022)	0.999(0.000)	0.150(0.032)
δ	-	-	1.088(0.087)	-
skew	-0.455(0.077)	-0.579(0.086)	-0.643(0.093)	-0.616(0.091)
shape	1.841(0.110)	1.905(0.115)	1.958(0.121)	1.913(0.116)

Tabella 4.2: Valori delle stime per le serie adattando ai dati la distribuzione di Johnson. Nelle parantesi è presente la deviazione standard della stima del parametro.

tocorrelazione e l'eteroschedasticità. I valori della statistica-test di Ljung-Box a ritardo cinque sui residui standardizzati sono: per il GARCH 2.494 (p-value: 0.568), per il TGARCH 1.390 (p-value: 0.873), per l'APARCH 0.710 (p-value: 0.981) e per l'EGARCH 1.066 (p-value: 0.937). Questi valori ci portano a non rifiutare H_0 e quindi non si evidenzia la presenza di autocorrelazioni. Per quanto riguarda il quadrato dei residui standardizzati valgono le stesse considerazioni fatte per i residui standardizzati poiché le statistiche test di Ljung-Box hanno ancora p-value elevati. I valori di β sono elevati, il che evidenzia un forte effetto di persistenza della volatilità. Il parametro γ che è positivo e significativo per i modelli, tranne per il modello GARCH, evidenzia l'esistenza dell'effetto *leverage* per i rendimenti negativi rispetto alla varianza condizionata. In particolare, nell'APARCH la stima di γ è quasi 1; questo risultato ci mostra come solamente gli *shocks* negativi contribuiscono alla volatilità. Il parametro di potenza δ , presente solamente nell'APARCH, che ha valore 1.088 è diverso dal valore 2 di confronto. Questo risultato è conforme a quanto riscontrato nei lavori di Schwert (1990) e Ding (1993) i quali hanno dimostrato che c'è una maggiore correlazione tra i rendimenti in valore assoluto rispetto ai rendimenti al quadrato, una conseguenza della memoria a lungo termine delle serie storiche finanziarie. Infine, il parametro di asimmetria della distribuzione di Johnson risulta negativo, evidenziando che l'inserimento dell'asimmetria negativa aiuta il modello ad avere una performance migliore.

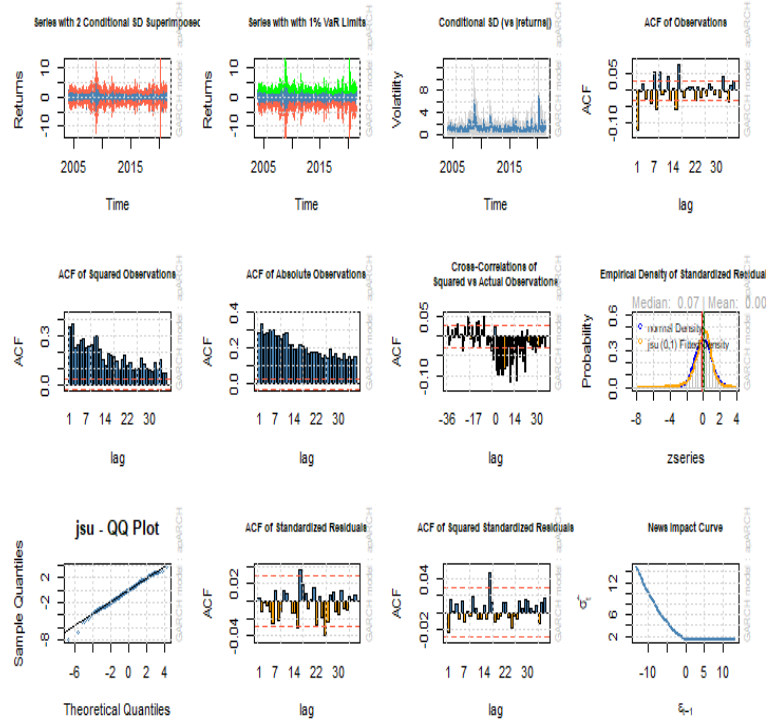


Figura 4.3: Adattamento del modello APARCH ai dati dell'indice NASDAQ.

Attraverso i criteri di informazione di Akaike, AIC e Hannan-Quinn, si sceglie il modello APARCH di cui si mostrano alcuni grafici riassuntivi in Figura 4.3. Dal grafico dell'autocorrelazione dei residui standardizzati e dei residui standardizzati al quadrato si nota che, tranne per il ritardo 16, le autocorrelazioni sono dentro le bande. La distribuzione di probabilità condizionata di Johnson si adatta bene ai dati poiché il Q-Q plot mostra che la retta teorica si sovrappone alle osservazioni. Infine, il grafico che spiega la News Impact Curve mostra come gli shock negativi dei rendimenti al tempo $t - 1$ spieghino la volatilità al tempo t , σ_t , mentre gli shock positivi non impattano nella spiegazione della volatilità condizionata.

Modello	NASDAQ	FTSE MIB	Boeing	Amazon
GARCH	-6593.828	-7162.728	-8303.899	-9217.813
TGARCH	-6520.688	-7100.505	-8283.472	-9200.779
APARCH	-6499.242	-7070.158	-8277.562	-9148.422
EGARCH	-6508.984	-7075.714	-8283.353	-9165.623

Tabella 4.3: Log-verosimiglianza per le serie condizionate alla distribuzione di Johnson.

La Tabella mostra la log-verosimiglianza per ogni modello e asset sotto la distribuzione di Johnson. Si nota subito che il modello APARCH ha la verosimiglianza maggiore e quindi un adattamento ai dati migliori rispetto agli altri 3 modelli. Il modello GARCH, l'unico simmetrico, ha la log-verosimiglianza minore; era prevedibile poiché in precedenza l'asimmetria indirizzava verso la scelta di un modello asimmetrico, come l'APARCH.

4.2 Performance dei modelli VaR

In questo paragrafo si analizzano i risultati del VaR ottenuti dai modelli sviluppati in precedenza con livello soglia dell'1%. L'1% è stato scelto poiché è una soglia ragionevole per catturare eventi anomali ed eccezioni di carattere "naturale".

Si stima il VaR un passo avanti, come $VaR_{\alpha,t} = \mu_t + \sigma_t(\theta)F^{-1}(\alpha|\theta)$, dove μ_t rappresenta la media condizionata, $\sigma_t(\theta)$ la deviazione standard e $F^{-1}(\alpha|\theta)$ denota il quantile ad un livello dato α corrispondente alla distribuzione delle innovazioni standardizzate. Ogni giorno si stima il VaR all'1% dal Gennaio 2017 fino a Maggio 2021 (1100 osservazioni), quindi la *rolling window* è di 1100 osservazioni. I parametri dei modelli e i parametri della distribuzione condizionata sono stati stimati ogni 50 giorni; è stata una scelta basata sulla pesantezza computazionale che questa analisi richiede poiché si stima congiuntamente la media condizionata dei rendimenti, la varianza condizionata e i parametri della distribuzione condizionata dei rendimenti. Si lavora con un campione di osservazione di 13 anni (2004-2016) e un *out-of-sample* di quasi 5 anni (2017-2021).

Modello	Violazioni		Kupiec		Christoffersen	
	1	50	1	50	1	50
J-GARCH	19	18	0.028	0.052	0.064	0.112
J-TGARCH	21	21	0.007	0.019	0.007	0.019
J-EGARCH	22	22	0.003	0.01	0.003	0.01
J-APARCH	19	19	0.028	0.064	0.028	0.064
N-GARCH	35	34	0	0	0	0
N-TGARCH	33	33	0	0	0	0
N-EGARCH	36	36	0	0	0	0
N-APARCH	37	37	0	0	0	0
S-GARCH	28	27	0	0	0	0
S-TGARCH	25	25	0	0.001	0	0.001
S-EGARCH	30	31	0	0	0	0
S-APARCH	29	31	0	0	0	0
SKS-GARCH	19	21	0.028	0.007	0.064	0.018
SKS-TGARCH	22	21	0.003	0.01	0.007	0.019
SKS-EGARCH	24	24	0.001	0.003	0.001	0.00
SKS-APARCH	21	21	0.007	0.018	0.007	0.018
SGED-GARCH	20	20	0.014	0.014	0.035	0.035
SGED-TGARCH	21	21	0.007	0.019	0.007	0.019
SGED-EGARCH	24	25	0.001	0.003	0	0.001
SGED-APARCH	22	22	0.003	0.009	0.003	0.009

Tabella 4.4: Per la serie dell'indice NASDAQ vengono mostrate le violazioni ristimando i parametri del modello APARCH ogni giorno e ogni 50 giorni, il relativo p-value nei test di Kupiec e Christoffersen.

Di seguito vengono analizzati i risultati delle stime del VaR del NASDAQ. Attraverso i test dell'*unconditional coverage* di Kupiec e dell'indipendenza di Christoffersen, spiegati in precedenza, e si esaminano le performance del modello. Le combinazioni tra distribuzioni di probabilità e modelli applicati alle 4 serie comportano un grande numero di test sul VaR, difficili da riassumere per arrivare ad una conclusione netta e decisa. Si procede tenendo in considerazione le seguenti linee: la frequenza delle violazioni di un dato modello quando lo si applica ad una data serie storica; quanto spesso il p-value di un dato test diminuisce se si cambia il modello e/o la distribuzione condizionata.

Nella Tabella 4.3 vengono mostrate il numero di violazioni e il p-value della statistica per i due test.

La proporzione di violazioni osservate deve essere proporzionale al numero atteso di violazioni che viene calcolato come prodotto di $\alpha = 0.01$ e della *rolling window* che è di 1100 osservazioni, quindi il valore atteso di violazioni è 11. Tutte le combinazioni tra modello e distribuzione condizionata hanno un numero maggiore di violazioni rispetto al suo valore atteso con i rispettivi p-value che ci portano a rifiutare ogni modello di previsione del VaR. In particolare, la distribuzione Normale e la t di Student hanno un pessimo adattamento con qualsiasi modello. Questa considerazione deriva dal fatto che in finanza le distribuzioni condizionate dei rendimenti necessitano di parametri per l'asimmetria e la curtosi, che non sono presenti in queste due distribuzioni. Si nota, infatti, che le violazioni nei modelli che usano la t di Student asimmetrica hanno un numero minore di violazioni del VaR. La distribuzione condizionata che si è adattata meglio ai dati NASDAQ è la Johnson la quale nel peggiore dei casi ha violato la soglia del VaR 22 volte. I risultati ottenuti sono stati influenzati dalla pandemia del COVID-19 che ha creato molta volatilità nei mercati finanziari; infatti in tutti i casi si ricade nella zona rossa definita dal Comitato di Basilea. Nel nostro caso, la zona verde ha un massimo di 18 violazioni, la zona gialla da 19 a 44 violazioni e la zona rossa con più di 45; infatti il valore atteso ricade nella zona verde.

Dalla Tabella 4.4 si nota che rispetto ai risultati ottenuti con il backtesting sulla serie NASDAQ, i modelli per il calcolo del VaR per le altre tre serie rispondono in maniera migliore, poiché il loro numero di violazioni è inferiore nella maggior parte dei casi alla serie dell'indice NASDAQ.

Analizzando i risultati delle distribuzioni si osserva che nelle 16 combinazioni in cui è presente la Normale solamente in 3 casi (18%) si ottengono meno di 19 violazioni, per la t di Student in 4 casi (25%), per la t di Student asimmetrica 6 casi (38%), per la GED asimmetrica 6 casi (38%) e per la Johnson 9 casi (56%). Nel resto dei casi si ricade nella zona gialla. La Normale è la distribuzione

Modello	Violaz. FTSE	Violaz. Boeing	Violaz. Amazon
J-GARCH	14	20	11
J-TGARCH	16	20	10
J-EGARCH	22	19	11
J-APARCH	18	20	8
N-GARCH	26	27	18
N-TGARCH	23	29	19
N-EGARCH	23	29	11
N-APARCH	26	29	10
S-GARCH	21	21	11
S-TGARCH	24	21	8
S-EGARCH	29	20	7
S-APARCH	24	21	7
SKS-GARCH	17	20	12
SKS-TGARCH	16	20	11
SKS-EGARCH	33	20	12
SKS-APARCH	19	20	9
SGED-GARCH	18	21	14
SGED-TGARCH	18	21	9
SGED-EGARCH	19	20	10
SGED-APARCH	21	22	8

Tabella 4.5: Vengono mostrate le violazioni del VaR sotto il modello APARCH, ristimando i parametri del modello ogni 50 giorni.

condizionata che fa ricadere il modello nella zona gialla la maggior parte delle volte mentre la distribuzione di Johnson è la distribuzione che si comporta meglio. La t di Student asimmetrica fa ricadere meno volte nella zona gialla rispetto alla t di Student simmetrica poiché, come introdotto nel Capitolo 2, le distribuzioni asimmetriche hanno una maggior adattabilità nelle serie storiche finanziarie.

Le violazioni del VaR per la serie Amazon, per ogni combinazione di modello-distribuzione, la fanno ricadere per il 95% nella zona verde rispetto al 35% dell'indice FTSE e allo 0% di Boeing. Questi risultati sono conseguenza del fatto che era difficile prevedere questi risultati a causa dell'incertezza causata dalla pandemia iniziata nel 2020. Infatti, Amazon dal grafico dei prezzi mostra come questa crisi non l'abbia condizionata negativamente, ma abbia aumentato i prezzi; quindi anche i suoi rendimenti sono stati meno volatili dopo il 2020 e quindi il modello per il calcolo del VaR costruito in precedenza ha dato delle

ottime stime. In generale, per le quattro serie, delle 20 combinazioni (5 distribuzioni condizionate e 4 specificazioni della volatilità condizionata, quindi 100 output) solamente in 27 casi si ricade nella zona verde, di cui il 70% solo dalla serie Amazon. Il problema di questa analisi si riflette sulla scelta del periodo di stima del VaR (2017-2021) il quale ha diversi periodi di grossi scostamenti da parte dei rendimenti e quindi la stima del VaR non è una buona previsione del VaR effettivamente osservato.

Si cambia orizzonte temporale per confrontare i risultati senza tenere in considerazione gli anni 2020 e 2021 in cui abbiamo visto che i risultati ottenuti sono stati influenzati da valori dei rendimenti anomali. Il campione viene modificato e quindi i dati iniziano dal 2004 fino alla fine del 2019. L'intervallo di stima del VaR inizia dal 2015 e si conclude nel dicembre 2019. Tenendo $\alpha = 0.01$, dato che il numero di giorni della *rolling window* è 1300 allora il numero atteso delle violazioni del VaR è 13. Per mantenere lo stesso rapporto del Comitato di Basilea il numero di violazioni per essere nella zona verde è di 21, per la zona gialla da 22 a 52, per la zona rossa più di 53 violazioni.

In Tabella 4.6 si mostrano le stime relative alle violazioni del VaR su questo campione per gli stessi quattro asset:

Negli 80 output ottenuti in Tabella 4.6 si ricade nella zona verde in 62 casi (78%), 18 volte nella zona gialla e mai in zona rossa. Su 20 casi, 18 volte (90%) i dati adattati al modello TGARCH hanno fatto ricadere nella zona verde sinonimo di un buon modello che riesce a catturare pienamente le caratteristiche delle serie analizzate. Anche l'APARCH con 17 casi (85%) è un ottimo modello per la stima del VaR. Il modello GARCH, invece, solamente in 12 casi (60%) ha dato meno di 23 violazioni. Per quanto riguarda le distribuzioni condizionate, la Normale su 16 casi solamente in 9 (56%) ha stime che ricadono nella zona verde, le distribuzioni di Johnson e la GED asimmetrica cadono rispet-

Modello	Viol. NASDAQ	Viol. FTSE	Viol. Boeing	Viol. Amazon
J-GARCH	18	12	22	15
J-TGARCH	21	13	18	12
J-EGARCH	17	23	18	12
J-APARCH	16	14	18	13
N-GARCH	31	23	24	17
N-TGARCH	21	13	18	12
N-EGARCH	26	18	25	13
N-APARCH	27	21	25	12
S-GARCH	25	17	22	12
S-TGARCH	23	19	19	10
S-EGARCH	24	19	16	12
S-APARCH	25	17	19	12
SKS-GARCH	19	14	22	15
SKS-TGARCH	22	13	19	12
SKS-EGARCH	18	29	20	15
SKS-APARCH	19	14	18	13
SGED-GARCH	19	14	22	15
SGED-TGARCH	21	13	19	11
SGED-EGARCH	19	14	18	20
SGED-APARCH	19	14	20	11

Tabella 4.6: Violazioni del VaR ristimando i parametri del modello ogni 50 giorni.

tivamente 14 volte (88%) e 15 volte (94%) nella zona verde e sono le due con la percentuale maggiore. Vogliamo ora analizzare il numero di violazioni medie verificatesi condizionatamente alle differenti distribuzioni, oppure condizionatamente ai diversi modelli utilizzati. Precisamente, partendo dalla distribuzione Normale vediamo che la media delle violazioni si attesta sulle 20, che è il valore maggiore tra tutte le combinazioni. Usando la distribuzione t di Student il numero di violazioni diminuisce a 18, ma condizionando al modello la t di Student asimmetrica che ha 17 violazioni in media si intuisce che la bontà delle stime migliora. Le due distribuzioni che danno il minor numero di violazioni (16) sono la Johnson e la GED asimmetrica. Per quanto riguarda i modelli, si riscontra il numero minimo medio di violazioni usando il TGARCH il quale ha in media 16 violazioni. Questo fatto conferma la miglior adattabilità del modello con un parametro che racchiude l'asimmetria rispetto al modello simmetrico GARCH, il quale non riesce a catturare l'informazione dal segno degli *shocks*. I due mo-

delli che hanno avuto in media il maggior numero di violazioni del VaR sono il GARCH e l'EGARCH con 19 violazioni.

Modello	Miglioramento	Peggioramento
N \rightarrow ST	11	4
ST \rightarrow SKST	8	6
SKST \rightarrow JSU	9	0
SKST \rightarrow SGED	5	3
N \rightarrow JSU	10	2
ST \rightarrow JSU	9	5
GARCH \rightarrow TGARCH	15	5
TGARCH \rightarrow APARCH	5	11
TGARCH \rightarrow EGARCH	5	12
APARCH \rightarrow EGARCH	11	7

Tabella 4.7: Viene mostrato, in termini di violazioni del VaR, il miglioramento o peggioramento passando da un modello (o distribuzione) ad un altro modello (o distribuzione).

Dai risultati ottenuti in Tabella 4.7 si osserva che in 11 casi c'è stato un miglioramento passando dalla distribuzione Normale alla t di Student, tale miglioramento si considera significativo, poiché il test sulle proporzioni dà un p -value di 0.005, dove l'ipotesi nulla è il non miglioramento in termini di violazioni. Cambiando da t di Student a t di Student asimmetrica si ha un miglioramento in 8 casi su 16 che però non dà segnali di significatività poiché il p -value è di 0.50. Invece, come detto in precedenza, la distribuzione di Johnson si adatta molto bene ai dati delle serie per la previsione del VaR, poiché migliora ulteriormente in 9 casi su 16 rispetto alla t di Student asimmetrica e con 10 casi di miglioramento rispetto alla Normale. Inoltre, un dato da evidenziare è la non presenza di peggioramenti dalla t di Student asimmetrica alla distribuzione di Johnson.

Per quanto riguarda i modelli, adattando un TGARCH rispetto ad un GARCH simmetrico in ben 15 volte su 20 c'è stata una diminuzione delle violazioni che fa intuire che per le 4 serie finanziari è il modello che dà le migliori previsioni. Un altro fatto che rafforza questa affermazione è il peggioramento delle performance

del VaR quando si cambia da un modello TGARCH ad un modello EGARCH o APARCH in cui più del 50% delle volte si peggiorano le stime.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo lavoro, ho analizzato le performance della previsione del Value-at-Risk usando diversi modelli a volatilità condizionata come il GARCH, TGARCH, EGARCH e APARCH associati a diverse distribuzioni condizionate dei rendimenti, in particolare: Normale, t di Student simmetrica e asimmetrica, Johnson e la GED asimmetrica.

Le conclusioni sono state prese considerando due aspetti fondamentali: i modelli TGARCH e APARCH, che permettono una grande flessibilità nella modellizzazione della volatilità condizionata, dimostrano un comportamento più performante per la previsione del VaR rispetto al GARCH; le distribuzioni asimmetriche come la t di Student asimmetrica, la Johnson e la GED asimmetrica permettono di calcolare stime migliori del VaR rispetto alle distribuzioni simmetriche.

La conclusione più interessante ottenuta tra i confronti di distribuzioni e di specificazioni della volatilità è la seguente: le distribuzioni condizionate per le innovazioni hanno più rilievo rispetto all'inclusione del parametro del *leverage* per la previsione del VaR. La frequenza delle violazioni nei modelli che differiscono per la specificazione della volatilità è simile; mentre per gli stessi modelli con distribuzioni di probabilità diverse la differenza è maggiore.

In aggiunta sottolineo, sebbene il modello di previsione del VaR abbia dato

output attendibili nel 78% dei casi che ricadono nella zona verde quando le osservazioni terminano nel 2019, quando il campione ingloba gli anni della crisi legata al COVID-19 le violazioni del VaR aumentano e solamente nel 34% dei casi si ricade nella zona verde. I modelli pur essendo correttamente specificati non riescono a cogliere la complessità e l'incertezza della realtà di questo periodo storico.

Bibliografia

Brown, A. (2008). *Private Profits and Socialized Risk*, Global Association of Risk Professionals.

Campbell, S. (2005). *A Review of Backtesting and Backtesting Procedures*, Finance and Economics Discussion Series Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs Federal Reserve Board, Washington, D.C.

Christoffersen, P.(1998). *Evaluating Interval Forecasts*, International Economic Review, vol. 39, No. 4, pp. 841–862.

Ding Z., Granger C. e Engle R. (1993). *A long memory property of stock market returns and a new model*, Journal of Empirical Finance, Volume 1, Issue 1, Pages 83-106.

Dowd, K. (1998). *Strategic Risk Taking: A Framework for Risk Management*, Pearson Education, New Jersey.

Engle, R. (1982). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica, Vol. 50, pp. 987-1007

Engle R. e Viktor K. (1993). *Misuring and Testing the Impact of News of*

Volatility., The Journal of Finance, Vol. 48, No. 5, pp. 1749-1778.

Glosten L., Jagannathan R. e Runkle D. (1993). *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks.*, The Journal of Finance , Vol. 48, pp. 1779-1801.

Hentschel, L. (1995). *All in the family Nesting symmetric and asymmetric GARCH models*, Journal of Financial Economics 39, 71-104.

Jorion, P. (2001). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk.*, McGraw-Hill.

Nelson, D. (1991). *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, Econometrica, Vol. 59, No. 2, pp. 347-370

Schwert, W. (1990). *Stock Returns and Real Activity: A Century of Evidence*, The Journal of Finance, Vol. 45., No. 4, pp. 1237-1257.

Tsay, R. (2010). *Analysis of Financial Times Series*, Wiley.

Ringraziamenti

Grazie a tutte le persone che mi hanno accompagnato ed aiutato in questi 4 anni.

In primis, voglio ringraziare i miei genitori, Alessandra e Massimo, per avermi sempre sostenuto e avermi dato la possibilità di studiare.

Grazie alla mia relatrice, Prof.ssa Luisa Bisaglia, per avermi ben indirizzato e supportato nel portare a termine questo mio primo lavoro di tesi.

Ringrazio Daniele per essere l'amico che da 9 anni mi consiglia, mi fa divertire e mi fa emozionare.

Grazie a Davide per essere l'amico e compagno dall'infanzia che sempre mi dà la motivazione per migliorare e se sono qui è anche merito tuo.

Alessia, Matteo e Pietro per le giornate passate in aula studio, il mio psicanalista Alessandro e il mio amico di dibattito Marco.