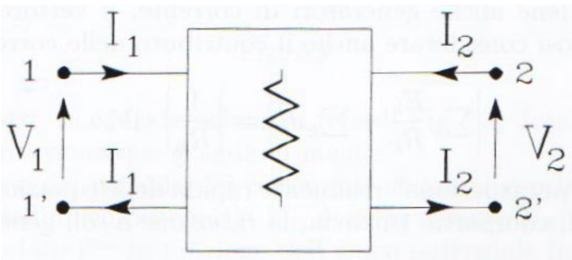
DOPPI BIPOLI

Nell'esperienza reale un doppio bipolo si visualizza come quel corpo centrale dal quale fuoriescono due coppie di fili conduttori e questi non saranno altro che due cavi contenenti ciascuno due fili isolati.
Solitamente uno dei due cavi termina con una spina, mentre l'altro termina con una presa che contiene a sua volta due o tre fori nei quali si possono opportunamente infilare gli spinotti dei vari apparecchi.

Si noti come LKT ed LKC continuino a valere nello stesso modo in cui valgono per le reti di soli bipoli e continuano ad essere applicate nello stesso modo.

DOPPI BIPOLI IN REGIME STAZIONARIO



Si definisce doppio bipolo resistivo una rete di resistori, comunque complessa, che risulti accessibile attraverso due coppie di morsetti, queste indicate come porte, e alimentata in modo tale che sia unica la corrente per i due terminali di ogni porta.

In figura appare il simbolo grafico del doppio bipolo, si notino le porte $11'; 22'$.
Indipendentemente dal numero di resitori che esso contiene e dal modo in cui sono connessi, un doppio bipolo può essere descritto per mezzo di relazioni complessive fra le quattro grandezze alle due porte: le due tensioni V_1, V_2 e le due correnti I_1, I_2. In particolare, si può scelgiere di esprimerne due in funzione delle altre due.

- ➔ **Si supponga il doppio bipolo puramente resistivo.** Ci si aspetta un legame di tipo algebrico lineare.
- ➔ **Si supponga di alimentare il bipolo con due GENERATORI di corrente I_1, I_2,** la linearità della rete consente di esprimere le due tensioni in funzione delle due correnti per mezzo di due semplici relazioni nelle quali il contributo di ciscuna delle correnti impresse è formalmente valutato attraverso un opportuno coefficiente di peso.

RAPPRESENTAZIONE BASE CORRENTE

Il bipolo viene alimentato da una coppia di generatori di corrente.
Caratteristica del doppio bipolo in cui:

- ***I*: Variabili di controllo;**
- ***V*: Variabili controllate;**

$$\begin{cases} V_1 = f_1(I_1, I_2) \\ V_2 = f_2(I_1, I_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2} \\ \boldsymbol{V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2} \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Le R_{ij} hanno le dimensioni di una resistenza e **la matrice $\boldsymbol{R}$** che si viene a formare **è detta matrice delle resistenze**.
Dalle relazioni che esprimono il modello analitico del doppio bipolo si ottiene che:

$$\boldsymbol{R_{11} = \frac{V_1}{I_1}|_{I_2=0}; \quad R_{12} = \frac{V_1}{I_2}|_{I_1=0}; \quad R_{21} = \frac{V_2}{I_1}|_{I_2=0}; \quad R_{22} = \frac{V_2}{I_2}|_{I_1=0}}$$

Gli elementi posti **sulla diagonale** della matrice delle resistenze sono chiamare **RESISTENZE PROPRIE o AUTORESISTENZE.** Gli elementi che **non** stanno **sulla diagonale** della matrice sono chiamate **RESISTENZE MUTUE.**

Per risalire ai valori delle R_{ij} occorre annullare le correnti, ossia eseguire delle prove a vuoto.

Ad esempio, per determinare R_{11}, R_{21} occorre aprire la porta $22'$ ed alimentare la porta $11'$con un generatore di corrente che eroghi la corrente I_1.

Tornando alla matrice delle resistenze:

$$R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}$$

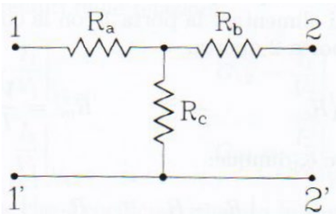
È possibile dimostrare che le resistenze mutue hanno lo stesso valore: $R_{12} = R_{21} = R_m$, e la competa caratterizzazione del bipolo è affidata ai soli 3 parametri:

$$R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_m \\ R_m & R_{22} \end{vmatrix}$$

Che verrà infine detta matrice descrittiva del doppio bipolo.

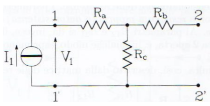
Così come si dicono equivalenti due bipoli che presentano ai loro morsetti la stessa caratteristica, **due doppi bipoli saranno equivalenti se presentano le identiche matrici descrittive**.

DETERMINAZIONE DOPPIO BIPOLO A T



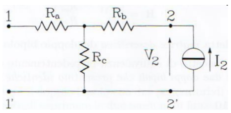
Si determini la matrice delle resistenze del doppio bipolo in figura.

1. **Cominciando dalla R_{11}** si apra la porta $22'$ e si applichi il generatore di corrente I_1 alla porta $11'$ e si determini la tensione V_1:



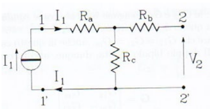
$$V_1 = I_1(R_a + R_c) \rightarrow \boldsymbol{V_{11}} = \frac{\boldsymbol{V_1}}{\boldsymbol{I_1}} = \boldsymbol{R_a + R_c}$$

2. Analogamente, **per la resistenza della porta $22'$:**



$$V_2 = I_2(R_b + R_c) \rightarrow \boldsymbol{V_{22}} = \frac{\boldsymbol{V_2}}{\boldsymbol{I_2}} = \boldsymbol{R_b + R_c}$$

3. Per la **resistenza mutua** invece si può procedere applicando una delle due definizioni date, supponendo perciò di alimentare la porta $11'$ con la corrente I_1, occorrerà valutare la tensione alla porta $22'$ aperta:



$$V_2 = I_1 R_c \rightarrow \boldsymbol{R_m} = \frac{\boldsymbol{V_2}}{\boldsymbol{I_1}} = \boldsymbol{R_c}$$

E la matrice delle resistenze per la configurazione del doppio bipolo a T diviene

$$\boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{R_a + R_c} & \boldsymbol{R_c} \\ \boldsymbol{R_c} & \boldsymbol{R_b + R_c} \end{vmatrix}$$

Si può in questo modo osservare che un qualsiasi doppio bipolo può essere ricondotto alla semplice configurazione a T nota la sua matrice descrittiva R, la trasformazione è determinata dalle relazioni:

$$\boldsymbol{R_c = R_m}; \quad \boldsymbol{R_a = R_{11} - R_m}; \quad \boldsymbol{R_b = R_{22} - R_m}$$

RAPPRESENTAZIONE BASE TENSIONE

Il bipolo viene alimentato da una coppia di generatori di tensione.

Caratteristica del doppio bipolo in cui:

- **V: Variabili di controllo;**
- **I: Variabili controllate;**

Scegliendo come variabili indipendenti le tensioni alle due porte e applicando ancora il principio di sovrapposizione degli effetti, si può esprimere, anche in questo caso, la dipendenza di ciascuna delle correnti attraverso altri coefficienti, pervenendo alla **rappresentazione in base tensione del doppio bipolo:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2} \\ \boldsymbol{I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2} \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Dove i coefficienti vengono definiti dalle relazioni:

$$\boldsymbol{G_{11} = \frac{I_1}{V_1}|_{V_2=0};\quad G_{12} = \frac{I_1}{V_2}|_{V_1=0};\quad G_{21} = \frac{I_2}{V_1}|_{V_2=0};\quad G_{22} = \frac{I_2}{V_2}|_{V_1=0}}$$

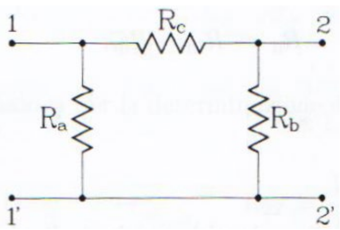
I coefficienti così trovati hanno le dimensioni di conduttanze [Siemens].

A $\boldsymbol{G_{11}}$ **e** $\boldsymbol{G_{22}}$ si dà il nome di **conduttanze proprie, o autoconduttanze** delle porte $11'$ e $22'$ rispettivamente, le $\boldsymbol{G_{12}, G_{21}}$vengono indicate come **conduttanze mutue** per cui $\boldsymbol{G_{12} = G_{21} = G_m}$.

Perciò, in analogia a quanto accaduto alla matrice delle resistenze, si definisce la matrice delle conduttanze G:

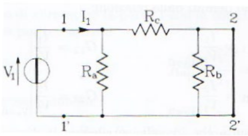
$$G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_m \\ G_m & G_{22} \end{vmatrix}$$

DETERMINAZIONE DEL DOPPIO BIPOLO A Π



Si procede in maniera simile a quanto fatto per la sintesi a T.

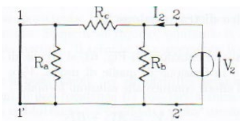
1. Per la sintesi a Π l'autoconduttanza della porta $11'$ viene determinata applicando un generatore di tensione V_1 alla porta $11'$ mentre alla porta $22'$ viene applicato un corco circuito.:



$$I_1 = \frac{V_1}{R_a \parallel R_c} = V_1(G_a + G_c)$$

$$\boldsymbol{G_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{R_a \parallel R_c} = (G_a + G_c)}$$

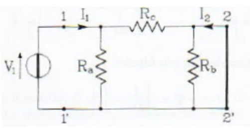
2. Per l'autoconduttanza G_{22} si applica alla porta $22'$ un generatore di tensione V_2 mentre la porta $11'$ viene cortocircuitata:



$$I_2 = \frac{V_2}{R_b \parallel R_c} = V_2(G_b + G_c)$$

$$\boldsymbol{G_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{R_b \parallel R_c} = (G_b + G_c)}$$

3. La conduttaza mutua può venire determinata secondo una delle due modalità previste dalla definizioni. Si proceda, ad esempio, valutando la corrente nel ramo di cortocircuito che collega i morsetti della porta $22'$ mentre la porta $11'$ è alimentata dal generatore di tenzione V_1.



Notando che su R_b non scorre corrente; su R_c scorre I_2, $V_c = -V_1$ e che $I_2R_c = -V_1$ si giunge a:

$$I_2 = -\frac{V_1}{R_c} = -V_1G_c \Rightarrow \boldsymbol{G_m = \frac{I_2}{V_1} = -\frac{1}{R_c} = -G_c}$$

E la matrice delle conduttanze sarà:

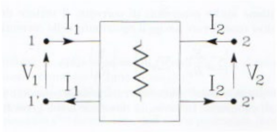
$$\boldsymbol{G = \begin{bmatrix} G_a + G_c & -G_c \\ -G_c & G_b + G_c \end{bmatrix}}$$

Si può in questo modo osservare che un qualsiasi doppio bipolo può essere ricondotto alla semplice configurazione a Π nota la sua matrice descrittiva G, la trasformazione è determinata dalle relazioni:

$$\boldsymbol{|G_c| = |G_m|;\quad G_a = G_{11} - |G_m|;\quad G_b = G_{22} - |G_m|}$$

POTENZA ASSORBITA DAL DOPPIO BIPOLO RESISTIVO

Per il generico doppio bipolo di resistori si faccia riferimento alla rappresentazione in base corrente:



$$\begin{cases} V_1 = R_{11}I_1 + R_m I_2 \\ V_2 = R_m I_1 + R_{22}I_2 \end{cases}$$

1. Con la convenzione dell'utilizzatore a entrambe le porte, la potenza complessivamente assorbita da doppio bipolo è data dalla somma delle potenze assorbite dalla due porte:

$$\boldsymbol{P = P_1 + P_2 = V_1I_1 + V_2I_2 = R_{11}I_1^2 + 2R_mI_1I_2 + R_{22}I_2^2}$$

2. Utilizzando la prima delle relazioni descrittive offerte dalla rappresentaione in base corrente si ottiene:

$$\boldsymbol{I_1 = \frac{V_1}{R_{11}} - \frac{R_m}{R_{11}}I_2}$$

3. Sostituedo all'interno della potenza si ottiene:

$$P = R_{11}\left(\frac{V_1}{R_{11}} - \frac{R_m}{R_{11}}I_2\right)^2 + 2R_m\left(\frac{V_1}{R_{11}} - \frac{R_m}{R_{11}}I_2\right)I_2 + R_{22}I_2^2$$

$$P = R_{11}\left(\frac{V_1^2}{R_{11}^2} + \frac{R_m^2}{R_{11}^2}I_2^2 - 2\frac{V_1R_m}{R_{11}^2}I_2\right) + \left(\frac{2R_mV_1}{R_{11}} - \frac{2R_m^2}{R_{11}}I_2\right)I_2 + R_{22}I_2^2$$

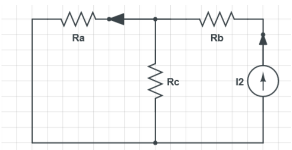
$$P = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{R_m^2I_2^2}{R_{11}} \cancel{- \frac{2V_1R_mI_2}{R_{11}}} \cancel{+ \frac{2R_mV_1I_2}{R_{11}}} - \frac{2R_m^2I_2^2}{R_{11}} + R_{22}I_2^2$$

$$P = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{R_m^2I_2^2}{R_{11}} - \frac{2R_m^2I_2^2}{R_{11}} + R_{22}I_2^2$$

$$P = \frac{V_1^2}{R_{11}} - \frac{R_m^2I_2^2}{R_{11}} + R_{22}I_2^2$$

$$\boldsymbol{P = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \left(R_{22} - \frac{R_m^2}{R_{11}}\right)I_2}$$

È immediato verificare come il termine tra parentesi sia la resistenza vista dalla porta $22'$ quando la $11'$ è cortocircuitata.



Dalla definizione:

$$G_{22} = \frac{I_2}{V_2}|_{V_1=0} \Rightarrow \frac{V_2}{I_2}|_{V_1=0} = \frac{1}{G_{22}}$$

Chiamo:

$$R_p = \frac{R_aR_c}{R_a + R_c}$$

E allora:

$$V_2 = I_2(R_b + R_p)$$

E quindi:

$$\frac{V_2}{I_2} = \frac{I_2}{I_2}(R_b + R_p) = R_b + R_p$$

Ma:

$$R_p = \frac{R_aR_c}{R_a + R_c} = \frac{(R_{11} - R_M)R_M}{R_{11} - R_M + R_M} = \frac{R_{11}R_M - R_M^2}{R_{11}} = R_M - \frac{R_M^2}{R_{11}}$$

E perciò:

$$R_b + R_p = R_b + R_M - \frac{R_M^2}{R_{11}} = R_{22} - R_M + R_M - \frac{R_M^2}{R_{11}} = R_{22} - \frac{R_M^2}{R_{11}}$$

E dunque, in coclusione:

$$\frac{V_2}{I_2}|_{V1} = R_{22} - \frac{R_M^2}{R_{11}} = \frac{1}{G_{22}}$$

$$R_{22} - \frac{R_m^2}{R_{11}} = \frac{1}{G_{22}}$$

E la **potenza assorbita diverrà:**

$$\boldsymbol{P = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{I_2}{G_{22}} = P_0 + P_{cc}}$$

E può essere vista come somma di due termini:

1. Un **primo termine coincidente con la potenza assorbita dalla porta $11'$ quando la $22'$ viene lasciata** aperta $I_2 = 0$.
2. Un **secondo termine pari alla potenza dissipata dalla I_2 sulla conduttanza G_{22} quando la porta $11'$ è corticurcuitata.**

Per la determinazione della potenza assorbita da doppio bipolo basta dunque conoscere solo due dei 3 parametri della matrice descrittiva la resistenza propria della prima porta e la conduttanza propria della seconda imponendo una volta la tensione V_1 e un'altra la corrente I_2.

Il risultato trovato si estende proficuamente al caso in cui la potenza debba essere misurata.

La misurazione può essere effettuata per via indiretta misurando prima la R_{11} cosiddetta prova a vuoto alla porta $11'$ e quindi la G_{22} cosiddetta prova di cortocircuito alla porta $22'$.