RETI IN REGIME SINUSOIDALE

Le reti elettriche in regime sinusoidale sono le più rilevanti e diffuse. I generatori che erogano sulla rete nazionale hanno tensioni che variano nel tempo sinusoidalmente ad una frequenza industriale di 50 Hz.
Ora che c'è la variabilità nel tempo si terrà conto di nuovi bipoli.
Se inoltre **non si superano** valori modesti di **frequenza** ($\gg \mathbf{50\ Hz}$) **è valido ancora il modello a parametri concentrati.**
La **risoluzione** di circuiti in regime sinusoidale è **basata sull'utilizzo dei numeri complessi**, risulta così possibile scrivere delle equazioni circuitali in termini di soluzione a regime senza dover risolvere le equazioni differenziali.
Tale metodo di risoluzione è detto **Metodo Simbolico**.

NUMERI COMPLESSI

$$i = j = \sqrt{-1} \text{ Unità immaginaria}$$

$$z = x + jy \text{ Numero complesso in forma cartesiana}$$

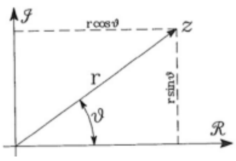
$$x = Re(z) \text{ Parte reale di z}$$

$$y = Im(z) \text{ Parte immaginaria di z}$$

$$\rho = r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ Modulo di z}$$

Notare come ad un'uguaglianza complessa ne corrispondono due reali:

$$\text{Se } z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$



I numeri reali si possono rappresentare sul piano complesso (o di Argand), dove sulle ascisse x ci sarà l'asse reale mentre sulle ordinate y quello immaginario.
Un numero complesso in coordinate polari sarà:

$$z = \underbrace{r\cos\theta}_{x} + j\ \underbrace{r\sin\theta}_{y}$$

Con:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ Modulo di z}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arg(z) = \theta \text{ Argomento di } z$$

Un numero complesso si può esprimere anche in forma Euleriana: sia e il numero di Eulero:

$$\boldsymbol{z = re^{j\theta} = r\cos\theta + r\,j\sin\theta = x + j\,y}$$

Alcune identità fondamentali:

$$\boldsymbol{e^{j0} = 1;} \qquad \boldsymbol{e^{j\frac{\pi}{2}} = j;}$$

$$\boldsymbol{e^{j\pi} = -1;} \qquad \boldsymbol{e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j}$$

Un **coniugato** di un numero complesso è definito come

$$\tilde{z} = x - j\,y$$

$$\tilde{z} = r\,e^{-j\vartheta}$$

Si definisce **l'inverso** di due numeri complessi:

$$z^{-1} = \frac{\tilde{z}}{r^2} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2}$$

Si definisce la **somma** di due numeri complessi:

$$(a + i\,b) + (c + i\,d) = (a + b) + i(c + d)$$

Si definisce il **prodotto** di due numeri complessi:

$$(a + i\,b) \cdot (c + i\,d) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Attraverso la formulazione di Eulero $z = re^{j\theta}$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Una moltiplicazione per un numero complesso può essere vista come una simultanea rotazione e omotetia. Scambio di posto Im e Re. Moltiplicare un numero complesso per l'elemento i produce una rotazione, uno sfasamento di 90°, $\frac{\pi}{2}$, in senso antiorario, del numero complesso di partenza:

$$j \cdot z$$

$$|j \cdot z| = |j| \cdot |z| = |z|; \arg(j \cdot z) = \arg(j) + \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \arg(z)$$

Ovviamente una moltiplicazione per i e poi ancora per i produrrà una rotazione di $180°$, in rispetto del fatto che $i^2 = -1$.

Si definisce **rapporto** di due numeri complessi:

$$\frac{a + i\,b}{c + i\,d} = \frac{a + i\,b}{c + i\,d}\,\frac{c - i\,d}{c - i\,d} = \frac{(ac + bd) + i(cb - ad)}{c^2 + d^2}$$

Attraverso la formulazione di Eulero $z = re^{j\theta}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Si definisce **potenza** di un numero complesso la quantità, espressa attraverso la formulazione di Eulero $z = re^{j\theta}$:

$$z^n = r^n e^{nj\theta}$$

in formulazione polare $z = r\cos\theta + r\,j\sin\theta$ si perviene inoltre alle formule di De Moivre:

$$z^n = r^n[\cos n\theta + j\sin n\theta]$$

Eseguendo i calcoli con MatLab si incorrono in notevoli semplificazioni.

FUNZIONI PERIODICHE

Una grandezza $u(t)$ è periodica nel tempo t se assume valori uguali ad intervalli di tempo pari al suo periodo T:

$$\boldsymbol{u(t) = u(t + nT)}$$

Con $T = [s]$ periodo e $f = \frac{1}{T} = [Hz]$ frequenza.

Si possono definire, di una funzione periodica, i seguenti valori:

- **Valore medio nel periodo:**

$$U_{mT} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

- **Valore medio nell'intervallo:**

$$U_{m\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt$$

- **Valore efficace o Valore quadratico medio:**

$$U = U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$

Si definisce alternativa una grandezza periodica $w(t)$ a valor medio nullo nel periodo:

$$W_{mT} = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt = 0$$

- **Valore medio nel semiperiodo $\frac{T}{2}$: si definisce per grandezze alternative:**

$$W_{m\frac{T}{2}} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} w(t)dt$$

Una funzione periodica alternata sinusoidale $a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi)$ è caratterizzata da

1) **Pulsazione $\omega = 2\pi f$;**
2) **φ fase iniziale;**
3) **Valore massimo, di picco $A_{\max} = A_M$;**
4) **Valore efficace:**

$$A = A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A_M^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\, dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} = 0.707 A_M$$

5) **Valore medio nel semiperiodo**:

$$A_{m\frac{T}{2}} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A_M \sin(\omega t + \varphi)\, dt = 0.636 A_M$$

6) **Fattore di forma K_f**:

Rapporto tra il valore efficace e il valore medio nel semiperiodo.

Per la sinusoide vale:

$$K_f = \frac{A}{A_{m\frac{T}{2}}} = 1.11$$

METODO SIMBOLICO

In una rete lineare alimentata da un generatore - per ora unico - ad andamento sinusoidale, risulteranno sinusoidali tutte le tensioni e le correnti.

La scrittura delle LKT e delle LKC comporterà dunque una somma algebrica di funzioni sinusoidali.

Se si fa ricorso al metodo simbolico trasformando le funzioni sinusoidali $a(t)$ in fasori $\bar{A}(j\omega t)$, si incorre in una notevole semplificazione.

Si ottiene un isomorfismo, facendo corrispondere l'insieme $\mathcal{S}$ delle funzioni sinusoidali a quello $\mathcal{C}$ delle funzioni complesse, nel tempo.

$$\underset{\in \mathcal{S}}{a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi)} \quad \rightarrow \quad \underset{\in \mathcal{C}}{\bar{A}(j\omega t) = A_M e^{j(\omega t + \varphi)}}$$

➔ ***L'ISOMORFISMO CONSENTE LE OPERAZIONI FONDAMENTALI***

1) In $\mathcal{S}$ la **somma** è:

$$\begin{cases} a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi) \\ b(t) = B_M \sin(\omega t + \theta) \end{cases} \Rightarrow a(t) + b(t) = c(t) = C_M \sin(\omega t + \gamma)$$

Con

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + 2A_M B_M \cos(\varphi - \theta)}\, ; \tan\gamma = \frac{A_M \sin(\varphi) + B_M \sin(\theta)}{A_M \cos(\varphi) + B_M \cos(\theta)}$$

2) In $\mathcal{C}$ la **somma** è:

$$\begin{cases} \bar{A}(j\omega t) = A_M e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \bar{B}(j\omega t) = B_M e^{j(\omega t + \theta)} \end{cases} \Rightarrow \bar{A}(j\omega t) + \bar{B}(j\omega t) = \bar{C}(j\omega t) = C_M e^{j(\omega t + \gamma)}$$

Questa esprimibile in forma cartesiana.

Il corrispondente in C della somma in S è dato dalla somma dei corrispondenti di S in C.

3) In $\boldsymbol{S}$ la **derivata** è:

$$b(t) = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}[\boldsymbol{A_M}\sin(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi})] \underbrace{=}_{\cos(\omega t+\varphi)=\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} \boldsymbol{\omega A_M}\sin\left(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$$

4) In $\boldsymbol{C}$ la **derivata** è

$$\bar{B}(j\omega t) = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left[\boldsymbol{A_M e^{j(\omega t+\varphi)}}\right] = j\omega A_M e^{j(\omega t+\varphi)} \underbrace{=}_{e^{j\frac{\pi}{2}}=j} \boldsymbol{\omega A_M e^{j\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}}$$

La derivazione rispetto al tempo comporta, sia in S che in C, la moltiplicazione per uno stesso fattore $\boldsymbol{\omega}$.
La fase in $\boldsymbol{S}$ e l'argomento di $\boldsymbol{C}$ subiscono un aumento di $\frac{\pi}{2}$.
Anche nella derivazione viene conservata la corrispondenza.

➔ L'**ulteriore semplificazione della somma in $\boldsymbol{C}$ si ottiene operando su sinusoidi isofrequenziali**, se si considera $\bar{A}(j\omega t) = A_M e^{j(\omega t+\varphi)}$, che **si può eliminare il termine $\boldsymbol{e^{j\omega t}}$**, e quindi le:

$$\bar{A}_1(j\omega t) + \bar{A}_2(j\omega t) + \cdots + \bar{A}_n(j\omega t)$$

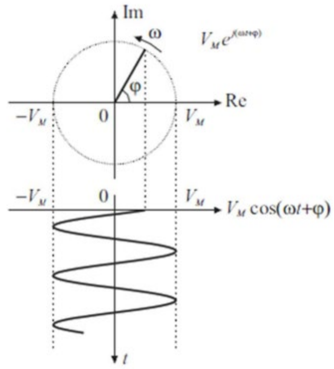
Diventano:

$$\boldsymbol{A_{M_1}e^{j\varphi_1} + A_{M_2}e^{j\varphi_2} + \cdots + A_{M_n}e^{j\varphi_n}}$$

Che fa corrispondere alla generica funzione sinusoidale un semplice numero complesso

$$\boldsymbol{a(t) = A_M\sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \bar{A} = A_M e^{j\varphi} = A_M(\cos\varphi + j\sin\varphi)}$$

➔ Se si associano ora sinusoidi isofrequenziali a segmenti orientati rappresentativi dei numeri complessi nel piano complesso si ottengono infine i **Fasori**, ovvero dei **vettori simbolici**.
Il fasore rappresenta la fase e l'ampiezza della sinusoide e non tiene conto del tempo.
Se si immagina di far ruotare il fasore nel piano di Gauss a velocità angolare corrispondente a ω, l'andamento della parte reale rispetto al tempo fornirà l'andamento della sinusoide associata.



➔ **Modulo e argomento dei fasori corrispondono così ad ampiezza e fase delle sinusoidi.**

$$a(t) = A_M\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50Hz$$
$$\bar{A} = A_M e^{j\varphi} = A_M(\cos\varphi + j\sin\varphi) = x + j\,y$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)$$

Perciò, **ricapitolando**, in notazione si avrà:

$\boldsymbol{a(t)}$: valore istantaneo nel tempo

$\boldsymbol{A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}}$: valore efficace, misurato dagli strumenti

$\boldsymbol{\bar{A}}$: fasore di $\boldsymbol{a(t)}$