

# RICHIAMI DI ELETTRONAGNETISMO

- POTENZIALE ELETTRICO O LAVORO DELLA FORZA ELETTROSTATICA:**

$$L_{ab} = - \int \vec{F}_{estat} \cdot d\vec{l} = - \int q \vec{E}_{estat} \cdot d\vec{l}$$

Per unità di carica si ha:

$$\begin{aligned} L_{ab}^u &= \frac{- \int q \vec{E}_{estat} \cdot d\vec{l}}{q} = - \int_a^b \vec{E}_{estat} \cdot d\vec{l} = \\ &= - \int_a^{P_0} \vec{E}_{estat} \cdot d\vec{l} - \int_{P_0}^b \vec{E}_{estat} \cdot d\vec{l} + \underbrace{V(P_0) - V(P_0)}_{\substack{\text{aggiungo e tolgo} \\ \text{la stessa quantità}}} = \end{aligned}$$

Introducendo la grandezza "Potenziale, Tensione":  $V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$  e ponendo  $V(P_0) = V(P_\infty) = 0$

$$= - \left[ V(P_0) - \int_{P_0}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \right] + \left[ V(P_0) - \int_{P_0}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \right] = \mathbf{V(b) - V(a)} = \mathbf{V_{ab}} = \mathbf{L_{ab}^u}$$

Perciò la tensione non è null'altro che un lavoro di una forza elettrica per unità di carica.

- EQUAZIONE DI CONTINUITÀ**

Si definisca la densità di corrente  $\vec{j} = N_e q \vec{v}_d$ .

La legge di conservazione della carica dimostra come la variazione della carica contenuta in una qualsiasi regione dello spazio sia dovuta al passaggio di una corrente elettrica attraverso la superficie che lo delimita, in formule:

$$dQ = -Idt \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -I$$

Il segno negativo indica che se la carica elettrica totale aumenta, è entrata più corrente elettrica nella regione di quanta ne è uscita; se la carica totale è calata, viceversa.

Essendo la carica  $Q = \int_\tau \rho d\tau$  e la corrente  $I = \int_s J \cdot \hat{n} dS$ , queste sostituite nell'equazione appena vista portano all'equazione di continuità:

$$\begin{aligned} \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau &= - \int_s J \cdot \hat{n} dS \\ \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau &= - \int_\tau \nabla \cdot J d\tau \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \nabla \cdot J \end{aligned}$$

In caso di densità di corrente  $J$  stazionaria, sono all'opera forze non conservative, va fornita cioè una fonte di energia, altrimenti la corrente non scorrerebbe: siamo nel caso di un circuito chiuso.

- EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO**

$$I. \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$II. \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$III. \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$IV. \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_C \right)$$

- EQUAZIONI DI MAXWELL IN PRESENZA DI MATERIALE**

$$I. \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$II. \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$III. \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$IV. \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_C \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

# MODELLO ELETTROMANETICO

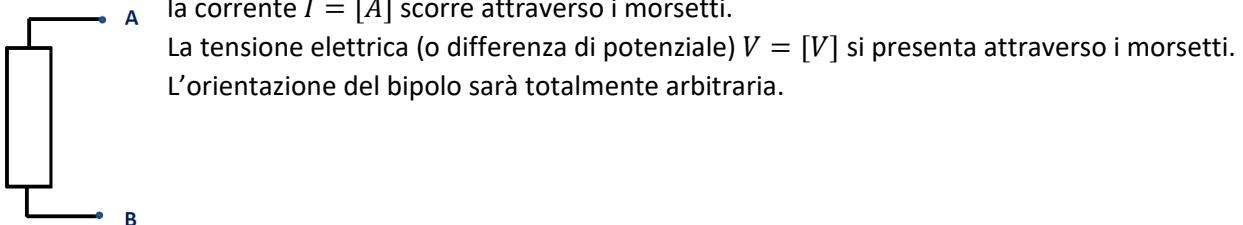
L'analisi di oggetti fisici reali è possibile attraverso modelli che semplificano le ipotesi di lavoro e formulazione. L'elettromagnetismo è governato dalle equazioni differenziali alle derivate parziali di Maxwell, che richiedono sia un'integrazione nello spazio, che nel tempo. L'**approccio a parametri concentrati** si basa sull'**eliminazione delle variabili spaziali** dalla trattazione matematica, in modo da **ottenere equazioni dipendenti solo dal tempo**. NON si tratteranno in questo modo più variabili di campo. Si tratteranno perciò **RETI ELETTRICHE**, ovvero strutture articolate costituite da interconnessioni di un insieme di elementi idealizzati attraverso due parametri fondamentali: **Tensione e Corrente**.

**Un elemento può dirsi concentrato (= dalle dimensioni fisiche trascurabili) se la sua dimensione maggiore risulta molto minore della lunghezza d'onda  $\lambda$  corrispondente alla sua frequenza massima di funzionamento.**  
**Un circuito è concentrato se contiene elementi concentrati.**

**Si definisce un FENOMENO ELETTROMAGNETICO CONFINATO** un fenomeno elettromagnetico in cui  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ , sono racchiusi all'interno di una superficie limite.

Tale fenomeno elettromagnetico può così scambiare potenza con l'esterno solo in un numero limitato di connessioni elettriche dette **MORSETTI**. Attraverso tali morsetti è possibile scambiare corrente  $I$  e interagire con una tensione  $V$ .

→ **BIPOLO**: elemento dotato di due morsetti.

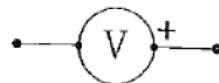


A la corrente  $I = [A]$  scorre attraverso i morsetti.

La tensione elettrica (o differenza di potenziale)  $V = [V]$  si presenta attraverso i morsetti.

L'orientazione del bipolo sarà totalmente arbitraria.

→ Il **VOLTMETRO** messo in parallelo ad un bipolo ne misura la tensione ai suoi capi.



→ Un **AMPEROMETRO** in serie ad un bipolo ne misura la corrente che lo attraversa.



Regime statico: le grandezze NON variano nel tempo.

**Regime stazionario: le grandezze possono variare nel tempo, e lo fanno o allo stesso modo, o in maniera estremamente lenta rispetto al fenomeno considerato.**

Se invece ci sono continue variazioni di ampiezza o di periodo in intervalli di tempo periodici il regime è **DINAMICO**.

Se le variazioni dinamiche avvengono molto lentamente rispetto al periodo di variazioni della grandezza in esame, il regime è quasi stazionario.

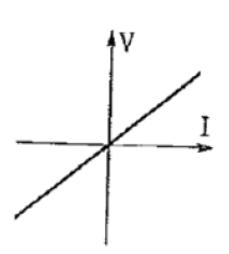
# CARATTERISTICHE DEI BIPOLI

In condizioni statiche un generico bipolo è completamente identificato da una relazione  $V - I$  che esso stabilisce ai capi dei propri morsetti.

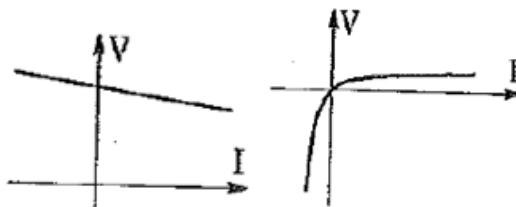
**Caratteristica analitica:**  $V = V(I)$ ;  $I = I(V)$

**Caratteristica grafica:** Grafico nel piano  $I - V$

- **Bipolo inerte:** se la sua caratteristica grafica passa per O. Bipolo Interte, altrimenti.
- **Bipolo passivo:** caratteristica situata in quadranti opposti del piano. Un bipolo passivo è anche inerte.
- **Bipolo strettamente passivo:** si è passivo e la sua caratteristica si muove attraverso O essendo contemporaneamente nulli sia I che V.



- **Bipolo attivo:** se non è passivo, ovvero se il prodotto delle coordinate può assumere valori dei due segni.
- **Bipolo lineare o normale:** la sua caratteristica grafica è rettilinea, altrimenti il bipolo è Non lineare o Anomalo.



Ovviamente la modifica di uno o di entrambi i versi di un riferimento in una rete, comporterà lo spostamento della caratteristica.

- **RESISTORE**

**Trasforma energia di tipo elettrico in calore.**



La tensione ai morsetti A e B è regolata dalla Legge di Ohm:

$$V_{AB} = RI_{AB}$$

Con  $R = [\Omega]$ , resistenza.

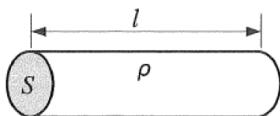
**Un resistore è un bipolo strettamente passivo.**

**Un resistore dissipa corrente elettrica per effetto Joule:**

$$P = VI = RI^2 [W]$$

Il resistore si caratterizza per la più totale assenza di comportamenti dinamici: la risposta del bipolo non dipende dalla velocità di variazione di  $I$  e  $V$ .

Il collegamento che avverrà tra bipoli sarà sempre a resistenza nulla e i morsetti saranno sempre equipotenziali.



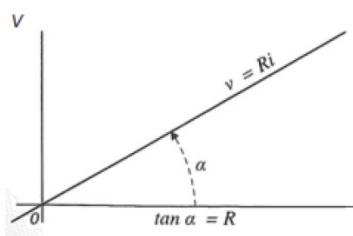
La resistenza si può ricavare dalla proprietà elettriche del materiale, sia la resistività  $\rho = [\Omega \cdot \frac{mm^2}{m}]$  un valore tabulato, allora:

$$R = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{l}{S}$$

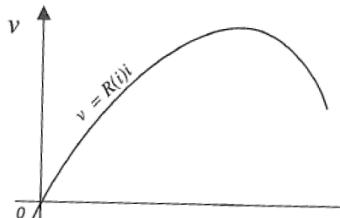
Come anticipato i resistori reali se attraversati da corrente  $I$  sono sede di fenomeni dissipativi che porteranno ad un locale innalzamento di temperatura, questo sarà tanto più marcato quanto più piccole saranno le dimensioni di  $R$ . Se  $T \uparrow \Rightarrow \rho \uparrow R \downarrow$

$$R(T_f) = \overbrace{R(T_i)}^{valore tabulato} \cdot (1 + \underbrace{\alpha_0}_{coefficiente termico [T^{-1}]} \cdot T_f)$$

Se il valore del parametro Resistenza è indipendente sia da  $I$  che da  $t$ , si parla di resistore LTI: Lineare tempo invariante.



Se invece  $R = R(I)$  sarà NON lineare tempo invariante, mantenendo però il vincolo di passività



Se invece  $R = R(t)$  la caratteristica grafica sarà una famiglia di curve in funzione di  $t$ , l'esempio pratico è quello di un potenziometro.

- **CORTOCIRCUITO IDEALE CC**



**La tensione ai suoi capi è sempre nulla qualsiasi sia il valore di corrente che lo attraversa, è come se fosse una resistenza a valore nullo.**

È passivo e non scambia potenza.

La sua caratteristica è una retta orizzontale coincidente con l'asse delle ascisse ( $I$ ).

- **CIRCUITO APERTO IDEALE CA**



**La corrente che lo attraversa è sempre nulla qualsiasi sia il valore di  $V$  ai suoi capi. È come se fosse un resistore a valore infinito.**

È passivo e non scambia potenza.

La sua caratteristica è una retta verticale coincidente con l'asse delle ordinate ( $V$ ).

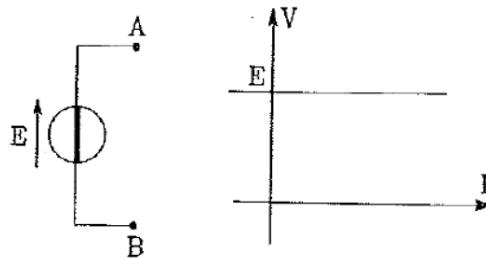
### • GENERATORE IDEALE DI TENSIONE

Bipolo che impone ai morsetti una  $fem = E$  indipendentemente dalla  $I$ .

Se  $E = 0V$  si ha un CC.

Assorbe ed eroga potenza, la sua caratteristica grafica passa anche per il primo quadrante.

È un bipolo attivo e lineare.

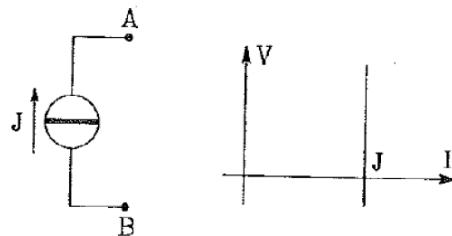


### • GENERATORE IDEALE DI CORRENTE

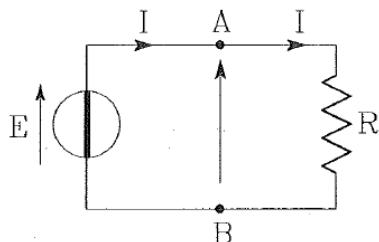
Bipolo che imprime nella rete una corrente  $J$  indipendentemente dalla  $V$  ai suoi morsetti.

Se  $J = 0A$  si ha un CA.

È un bipolo attivo e lineare.



## CONVENZIONI SUI BIPOLI



➔ **Convenzione del generatore:** se  $E = V_E$  allora è equiversa ad  $I$ .

➔ **Convenzione dell'utilizzatore:** se  $V_R = V_{AB}$  allora è controverso ad  $I$ .

➔ **Potenza generata:** positiva se  $I$  e  $V$  sono valutate secondo la convenzione degli utilizzatori.

$$P_g = EI = V_J J$$

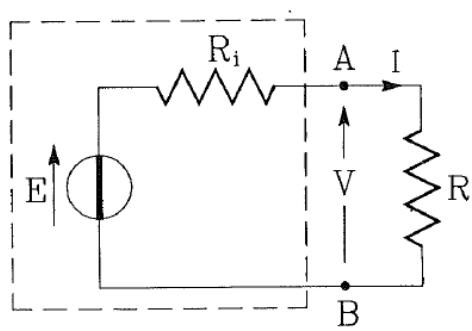
➔ **Potenza utilizzata:** positiva se valutata secondo la convenzione degli utilizzatori.

$$P_u = R_I I^2 = V_i R_i$$

Infine, in un circuito, in ogni caso, per la conservazione dell'energia vale:

$$\sum P_i = 0 \Rightarrow P_u = P_g$$

• GENERATORE REALE DI TENSIONE

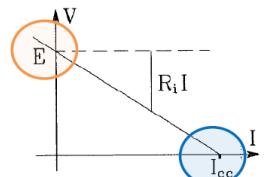


I generatori reali di tensione si differenziano da quelli ideali per la presenza di una resistenza interna  $R_i$  detta resistenza di carico, in serie al generatore

$$I = \frac{E}{R_i + R} \Rightarrow V_{AB} = E - R_i I$$

Tale equazione suggerisce inoltre l'andamento della caratteristica grafica del generatore reale:

- **E:** valore della fem, tensione a vuoto;
- **$I_{CC}$ :** corrente di cortocircuito, corrente che circola nel generatore quando risulta chiuso sulla sua resistenza interna:  $I_{CC} = \frac{E}{R_i}$



Se  $I$  è la corrente erogata nel circuito, si avrà inoltre:

$$\begin{cases} P_g = EI \\ P_u = RI^2 \end{cases}$$

Ma:

$$\begin{cases} P_g = EI = E \frac{E}{R_i + R} = \frac{E^2}{R_i + R} = (R_i + R)I^2 \\ P_u = RI^2 = R \left[ \frac{E}{R_i + R} \right]^2 \end{cases}$$

Si definisce perciò il **rendimento**:

$$\eta = \frac{P_u}{P_g} = \frac{RI^2}{(R_i + R)I^2} = \frac{R}{R_i + R} = \frac{R}{R_i} + 1 = \left( 1 + \frac{R_i}{R} \right)^{-1}$$

Si osserva poi che **rendimenti elevati si ottengono solo se risulta trascurabile  $R_i$** :

$$\frac{R_i}{R} \rightarrow 0 \Rightarrow \eta \rightarrow 1$$

La condizione di massimo rendimento costituisce un'importante obiettivo per le aziende di distribuzione, queste devono sfruttare al meglio la scarsa potenza disponibile, e lavorano per massimizzare la potenza utilizzata, il carico.

$$P_u = RI^2 = R \left[ \frac{E}{R_i + R} \right]^2 = E^2 \left[ \frac{R}{(R_i + R)(R_i + R)} \right] = \frac{E^2}{(R_i + R) \left( 1 + \frac{R_i}{R} \right)}$$

La condizione di massimo per  $P_u$  si ottiene minimizzando il suo denominatore:

$$\frac{d}{dR} \left[ (R_i + R) \left( 1 + \frac{R_i}{R} \right) \right] = 1 + \frac{R_i^2}{R} = 0 \Leftrightarrow R = R_i$$

La potenza trasferita al carico è massima quando  $R = R_i$ , tale condizione è detta **adattamento del carico**.

Sebbene a carico adattato si ha la potenza massima trasferita, al rendimento tocca sorte avversa perché, in queste condizioni ci si scontra col fatto che:

$$\eta = \left( 1 + \frac{R_i}{R} \right)^{-1} = (1 + 1)^{-1} = \frac{1}{2}$$

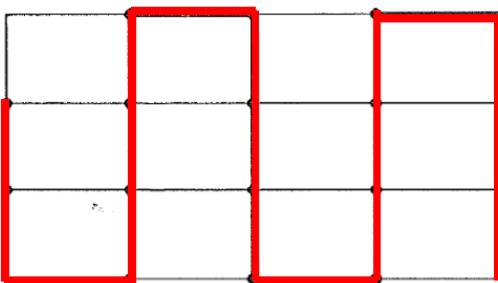
E il rendimento diventa la metà.

# TOPOLOGIA

La topologia o studio dei luoghi studia come cambiano le proprietà di forme e figure quando queste sono sottoposte a deformazioni come allungamenti, tensioni o stirature, senza subire strappi o sovrapposizioni.

**Una rete elettrica è costituita da un insieme di rami/bipoli variamente connessi per tramite dei loro morsetti.**

- Si dicono **Lati o Rami** gli elementi costituenti della struttura così ottenuta;
- I **Nodi**, superfici equipotenziali, sono invece punti di intersezione di tre o più lati;
- **Maglia**: un certo numero di lati della rete connessi a formare un percorso chiuso;
- Il **grafo** della rete si ottiene disegnando la sola struttura geometrica prescindendo dalla natura dei singoli bipoli, rappresenta la topologia del circuito.
- **Albero**: qualunque percorso chiuso costituito da  $n - 1$  degli **l lati della rete**, che collega tutti gli **n nodi** una sola volta senza formare maglie.



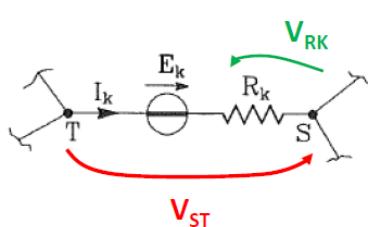
- **Coalbero**: gli  **$l - n - 1$  lati rimanenti**.

È evidente che se si aggiunge all'albero un qualunque lato di coalbero si ottiene una maglia che possiede in esclusiva il ramo di coalbero che ne consente la chiusura.

**Si definisce sistema completo di maglie indipendenti della rete quello costituito dal massimo numero di maglie ottenute in modo tale che ogni nuova maglia presenti un lato in esclusiva.**

L'insieme delle  $l - n - 1$  maglie ottenute da un albero con l'aggiunta di rami di coalbero costituisce certamente uno sistema completo di maglie indipendenti, che, nel caso di rete mappabile (o piana) può coincidere con le regioni del piano delimitate da rami della rete e prive di aree comuni.

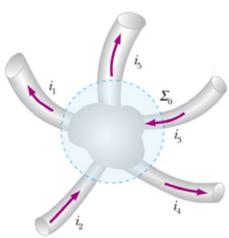
- **LEGGE DI OHM GENERALIZZATA O LEGGE DEL RAMO**



Si consideri il generico ramo  $k$ -esimo di una rete. La legge di ohm generalizzata, applicata a questo ramo fornisce:

$$V_{ST} = V_S - V_T = E_K - R_K I_K$$

- **PRIMO PRINCIPIO DI KIRCHHOFF, LEGGE DEI NODI, LEGGE DI KIRCHHOFF ALLE CORRENTI (LKC)**



Sia un generico filo conduttore cilindrico formato da tre superfici, con normali coerentemente orientate: 1) base inferiore; 2) base superiore; 3) mantello; in modo da formare la superficie chiusa:

$$\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$$

In caso stazionario, per la conservazione della carica si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \stackrel{\text{Divergenza}}{\cong} \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\tau = 0$$

Tanto la corrente entrante, quanto quella uscente sono nulle.

Si analizzi ora il flusso di densità di corrente attraverso le superfici ovvero la corrente  $I$ , poiché  $\Sigma$  è chiusa, anche questo dev'essere necessariamente nullo:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

$$\varphi_{\Sigma}(\vec{J}) = 0 \Rightarrow \varphi_{S_1} + \varphi_{S_2} + \underbrace{\varphi_{S_3}}_0 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow |I_1| = |I_2|$$

**La corrente che attraversa una qualsiasi superficie è sempre la stessa**

$$\sum_K \pm I_K = 0$$

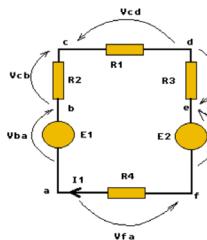
Stesso reiterabile ragionamento si può usare per più sezioni di circuito che si incontrano in un unico punto detto nodo.

termini della sommatoria, estesa a tutti i lati incidenti in un nodo, hanno segno opposto a seconda che si tratti di correnti le cui orientazioni risultino entranti o uscenti dal nodo in questione.

+ corrente entrante nel nodo, – corrente uscente dal nodo.

Per una rete dotata di  $n$  nodi la legge delle correnti ai nodi consente di scrivere  $(n - 1)$  equazioni indipendenti: la somma delle correnti al nodo  $n$ -esimo si riduce infatti ad una identità.

- **SECONDO PRINCIPIO DI KIRCHHOFF, LEGGE DELLE MAGLIE, LEGGE DI KIRCHHOFF ALLE TENSIONI (LKT)**



La proprietà di irrotationalità del campo elettrico comporta la definizione di un campo conservativo, essendo questo definito dal gradiente di uno scalare, si può infine definire del potenziale elettrico o tensione, il potenziale del campo elettrico.

Perciò per una maglia si ha la condizione che devono soddisfare le tensioni ai capi di ciascun lato della maglia:

$$(V_b - V_a) + (V_c - V_b) - (V_c - V_d) + (V_e + V_d) - (V_e - V_f) + (V_f - V_a) = 0$$

$$\sum_K \pm V_K = 0$$

Questa relazione, esplicitata per ogni maglia in funzione delle fem  $E_i$  e delle cadute di tensione  $R_i I_i$  sui vari resistori, si trasforma nel bilancio complessivo:

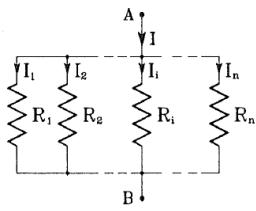
$$\sum_K [\pm E_K \pm R_K I_K] = 0$$

Si scelga un verso di percorrenza della maglia (orario o antiorario). Il segno della somma algebrica tiene conto dei versi di misura dei lati rispetto al verso di percorrenza scelto: ad es. il segno sarà positivo se sono concordi, negativo altrimenti.

**NB:** le LKC portano ad equazioni LD, per cui, detto  $n$  il numero dei nodi di un circuito, le rispettive equazioni di LKC LI saranno  $n - 1$ .

Similmente varrà per le LKT, per cui detto  $l$  il numero dei rami di un circuito, basteranno  $l - (n - 1)$  equazioni LI. In generale, ci saranno tante equazioni alle maglie da risolvere quanti saranno i rami di coalbero o gli anelli.

# RISOLUZIONE



Ora l'applicazione delle LKT alle maglie della rete permette di scrivere  $l - (n - 1)$  equazioni alle maglie  $l - (n - 1)$  che insieme alle  $n - 1$  equazioni ai nodi derivanti dalle LKC danno luogo ad un sistema di  $l$  equazioni in  $l$  correnti incognite, corrispondenti alle correnti di lato della rete.

**Una rete resistiva alimentata e stazionaria ammette un regime di funzionamento unico e determinato, la soluzione relativa al sistema di LKC e LKT è una e una soltanto.**

La natura di tale sistema risolutivo dipenderà dai bipoli presenti e dal regime di funzionamento:

- Regime stazionario o sinusoidale → Sistema algebrico;
- Regime dinamico → Sistema differenziale.

In forma matriciale si avrà quindi, con  $A$  matrice dei coefficienti,  $X$  vettore colonna delle incognite e  $B$  vettore colonna dei termini noti:

$$A \cdot X = B$$

Il procedimento di risoluzione si affida a MatLab, nel quale, per trovare il vettore delle incognite  $X$ , basterà digitare i comandi:

$$X = \text{inv}(A) * B \text{ oppure } X = A \setminus B$$

Un problema di questo metodo di risoluzione è che, affidandoci a calcolatori di memoria finita, si può incorrere in problemi di condizionamento della matrice  $A$ , tali problemi, nella fattispecie, si verificano a causa di perturbazioni che possono caratterizzare sia  $A$  che  $B$ , tali perturbazioni possono essere dovute sia alla rappresentazione in virgola mobile che usa il calcolatore, sia alle incertezze sperimentali di misura.

**Il numero di condizionamento** è legato agli autovalori della matrice  $A$ , in particolare al raggio spettrale e alla norma 2 ed è indice del fatto che a piccole variazioni dei dati di Input, corrispondono grandi variazioni dei dati di output.

Se  $K = \text{cond}(A) \sim 1 \Rightarrow$  il problema è ben condizionato.

Se  $K = \text{cond}(A) \gg 1 \Rightarrow$  il problema è mal condizionato (es. matrice di Hilbert).

- **Osservazioni sul mal condizionamento**

Il problema del mal condizionamento della matrice può essere dovuto alla formulazione matematica del problema in esame, ma in alcuni casi può anche essere inherente al problema stesso.

Qualora il problema non possa essere riformulato in maniera differente si dovranno ridurre al minimo gli errori inerenti ai dati iniziali e si dovranno utilizzare algoritmi di soluzione che assicurino la massima precisione.

Si usano in questo caso diverse tecniche come i metodi diretti e i metodi iterativi.

- **Tecniche di pivoting**

Il procedimento non ha giustificazioni di tipo teorico, si basa sull'assunto che l'elemento di maggior valore assoluto è quello che probabilmente è affetto da un minor errore assoluto. Sono state sviluppate delle tecniche per effettuare le operazioni di pivoting.

Un'altra possibilità è di usare un trattamento di pre-condizionamento del sistema lineare.

L'idea del pre-condizionamento consiste nel cercare di ridurre il numero di condizionamento della matrice del sistema pre-moltiplicandola per una matrice  $P$ :

$$P(AX) = P(B)$$

Ovviamente il pre-condizionamento è efficiente se  $\text{cond}(PA) \ll \text{cond}(A)$ .

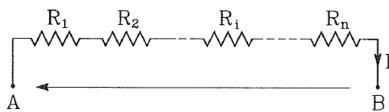
Al MatLab si possono utilizzare comandi pcg o gmres (scrivere help pcg o help gmres).

# EQUIVALENZE & TRASFORMAZIONI

Date due reti resistive, accessibili ciascuna attraverso una coppia di morsetti, si dice che risultano equivalenti se ai morsetti dati si stabilisce una uguale relazione  $I - V$ .

In questo modo si potrà trarre profitto dall'equivalenza per sostituire ad una coppia di morsetti una parte di rete complessa con una struttura semplificata senza che venga alterato il regime di funzionamento della restante rete.

- **SERIE**



**n resistori in serie sono attraversati dalla stessa corrente  $I$ .**

$$V_{AB} = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots + R_n I = I \sum R_i = I R_{eq}$$

La resistenza equivalente di una serie di resistori è la somma delle singole resistenze

$$R_{eq} = \sum R_i$$

- **PARALLELO**

A **n resistori in parallelo è applicata la stessa tensione  $V = V_{AB}$ .**

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB}}{R_3} + \dots + \frac{V_{AB}}{R_n} = \frac{V_{AB}}{\sum R_i} = \frac{V_{AB}}{R_{eq}}$$

La resistenza equivalente di un parallelo di resistori è l'inverso della somma algebrica degli inversi delle singole resistenze:

$$R_{eq} = \left( \sum R_i^{-1} \right)^{-1}$$

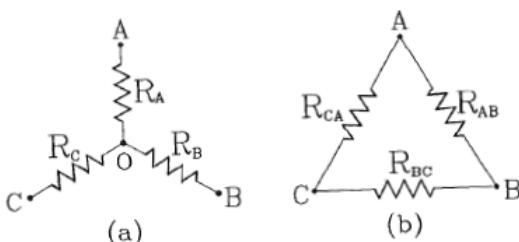
Oppure, introducendo la conduttanza  $G = \frac{1}{R}$  la conduttanza equivalente sarà la semplice somma delle conduttanze:

$$G_{eq} = \sum G_i$$

Nel caso semplice di due resistenze in parallelo si ha:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 \text{ oppure } R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- **STELLE (a) E TRIANGOLI (b)**



La stella (a) è una poligonale aperta, mentre il triangolo (b) è una poligonale chiusa.

La trasformazione **stella-triangolo riduce i NODI**.

La trasformazione **triangolo - stella riduce le MAGLIE**.

→ **Stella in triangolo**

$$\begin{cases} R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C} = R_A R_B G_0 \\ R_{BC} = R_B R_C G_0 \\ R_{CA} = R_C R_A G_0 \end{cases}$$

Con

$$G_0 = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}$$

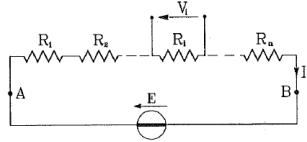
→ **Triangolo in stella**

$$\begin{cases} R_A = \frac{R_{CA} R_{AB}}{R_0} \\ R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_0} \\ R_C = \frac{R_{BC} R_{CA}}{R_0} \end{cases}$$

Con

$$R_0 = R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}$$

### • PARTITORE DI TENSIONE

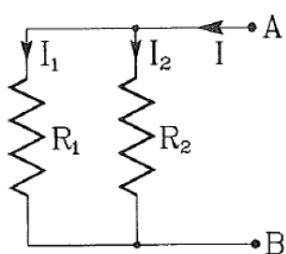


$$V_i = R_i I = R_i \frac{E}{\sum R_i} = E \frac{R_i}{\sum R_i} = E k_r$$

$$V_i = E \frac{R_i}{\sum R_i}$$

La tensione su uno dei resistori della serie è una aliquota della tensione di alimentazione, questa pari al rapporto  $k_r$  tra la sua resistenza e la resistenza totale (rapporto di ripartizione).

### • PARTITORE DI CORRENTE



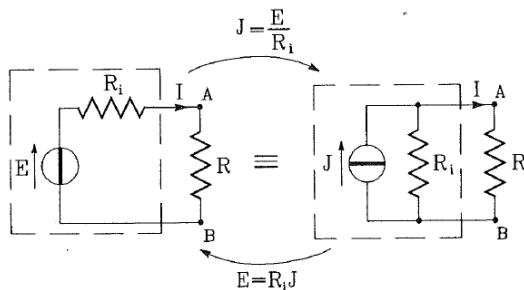
$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ V_1 = V_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{R_2 I_2}{R_1} \\ I = I_1 + I_2 = \frac{R_2 I_2}{R_1} + I_2 = I_2 \frac{R_1 + R_2}{R_1} \Rightarrow I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

Analogamente si ha

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

La corrente totale  $I$  si ripartisce tra i due resistori in misura inversamente proporzionale alle rispettive resistenze.

### • CONCETTO DI EQUIVALENZA



Ricordando il generatore reale di tensione, moltiplicando per  $\frac{R_i}{R_i}$ :

$$I = \frac{E}{R_i + R} \frac{R_i}{R_i} = \frac{E}{R_i} \frac{R_i}{R_i + R}$$

Ma  $\frac{E}{R_i} = \left[ \frac{V}{\Omega} \right] = [A] = J$ , è una corrente!

$$I = J \frac{R_i}{R_i + R}$$

l'espressione della corrente  $I$  nella resistenza di carico può, dunque essere considerata come il risultato della ripartizione di una corrente totale  $J = \frac{E}{R_i}$  tra le due resistenze in parallelo  $R$  e  $R_i$ .

Il che suggerisce la seguente interpretazione circuitale: un generatore reale di tensione  $E$  con resistenza interna  $R_i$  può essere trasformato in un equivalente generatore "reale" di corrente che eroghi la corrente  $J = \frac{E}{R_i}$  e che abbia in parallelo proprio la resistenza interna  $R_i$ . È possibile, in maniera perfettamente "duale", la trasformazione inversa.

### • SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

In una rete LINEARE contenente, oltre ai resistori, generatori sia di tensione  $E$  che di corrente  $J$ , le tensioni e le correnti di lato possono essere determinate sommando i contributi dovuti ai singoli generatori considerati agenti uno per volta.

La semplificazione si ha in quanto, di volta in volta, la rete viene alimentata da un solo tipo di generatore.

**$E$  verrà sostituito da un CC, mentre  $J$  da un CA.**

Ma vale questo principio per la potenza?

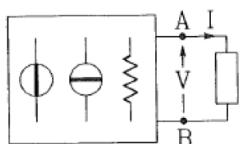
Varrebbe  $P = R(I_I^2 + I_{II}^2)$  ma la potenza NON è lineare! Si applica banalmente il quadrato del binomio:

$$P = RI^2 = R(I_I + I_{II})^2$$

### • TEOREMI DEL GENERATORE EQUIVALENTE

Se indipendentemente da quanto accade alla rete si limita l'attenzione ad una sola coppia di morsetti AB, i teoremi del generatore equivalente semplificano di molto i calcoli per la determinazione della tensione o della corrente relative al bipolo.

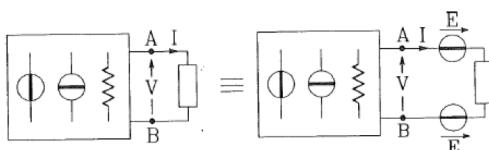
#### → TEOREMA DEL GENERATORE DI TENSIONE - TEOREMA DI THÈVENIN



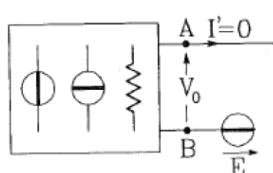
Una rete comunque complessa vista da una coppia di morsetti AB può essere considerata equivalente ad un circuito semplice costituito da un generatore ideale  $E_0$  di valore pari alla tensione a vuoto  $V_0$  in serie con la resistenza equivalente della rete passivata ai morsetti AB aperti.

### DIMOSTRAZIONE

1. Se introduco due  $E$  contrapposte, la rete non si accorge del cambiamento.



2. Data la linearità della rete, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e il regime delle correnti si può vedere come contributo separato dei vari generatori presenti, agenti da soli o in gruppi.

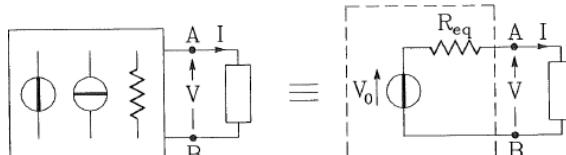
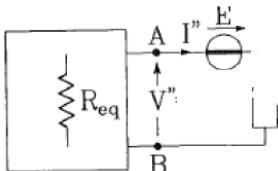


3. Si inizi a prendere i morsetti AB considerando la rete attiva, la corrente  $I_I$  che scorre sul circuito sarà necessariamente nulla, se questa rete attiva è semplificata da una sola resistenza si avrà:

$$I_I = \frac{V_0 - E}{R} = 0 \Rightarrow E = V_0$$

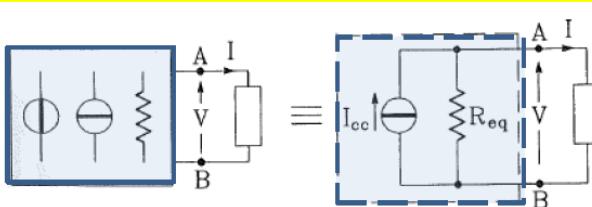
4. Si consideri la stessa rete ora resa passiva, adesso sappiamo che la corrente circolante sul circuito è dovuta solo a questo secondo contributo, dunque  $I = I_I + I_{II} = I_{II}$  e avendo trovato che  $E = V_0$  si arriva a:

$$I = \frac{V}{R_{eq}}$$



#### → TEOREMA DEL GENERATORE DI CORRENTE - TEOREMA DI NORTON

Una rete lineare comunque complessa, vista da una coppia di morsetti AB può essere considerata equivalente ad un circuito semplice costituito da un generatore ideale di corrente di valore  $I_{CC}$  pari alla corrente di CC tra A e B, in parallelo con una resistenza equivalente trovata passivizzando la rete, vista dai morsetti di interesse.



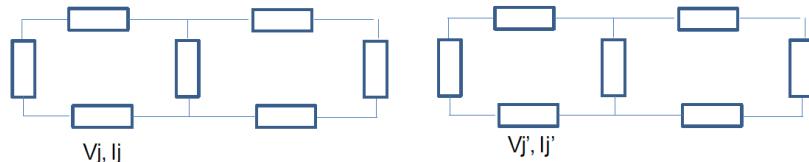
## NB: RETE NON LINEARE

- a) Ho un solo componente lineare? Lo isolo o con Norton o con Thèvenin, la rete rimanente la posso considerare lineare.
- b) Ho più componenti non lineari? NON ho la benché minima possibilità di applicare i due teoremi del generatore equivalete.

## MODUS OPERANDI:

- 1) Stacco i morsetti e passivo la rete:  $J = CA; E = CC \rightarrow$  trovo  $R_{eq}$  vista ai capi dei morsetti d'interesse.
- 2) Riattivo la rete
  - 2.1) Thèvenin: trovo la tensione a vuoto  $V_0 = E_0$
  - 2.2) Norton: sostituisco i morsetti con un  $CC$  e trovo la corrente di corto circuito  $I_{CC} = J_0$

### • TEOREMA DI TELLEGREN (TOPOLOGIA CIRCUITALE)



Data una rete generica, per il lato j-esimo, siano dati  $V_j$  e  $I_j$  facenti capo ai nodi  $i$  e  $k$ .

Con  $V'_j$  e  $I'_j$  si indicheranno le stesse grandezze ma relative ad un'altra qualunque rete che avrà in comune con la precedente solo la geometria.

Si definisce Potenza Virtuale:  $P_V = V_j I'_j = V'_j I_j$

Avendo a mente le convenzioni da utilizzare per ogni lato, il Principio di Tellegen afferma che nella rete le potenze virtuali si conservano:

$$\sum_{j=1}^l V_j I'_j = \sum_{j=1}^l V'_j I_j = 0$$

Ricordando che  $V_j$  fa capo ai nodi  $i$  e  $k$  sia ha  $V_j = V_{ik} = V_i - V_k$ , se poi su  $i$  incide  $I'_i$  e su  $k$  incide  $I'_k$  si ha, applicando LKC:

$$\sum_{j=1}^l V_j I'_j = \sum_{j=1}^l \left( \sum_i V_i I'_i - \sum_k V_k I'_k \right) = \sum_{j=1}^l \left( V_i \sum_i I'_i - V_k \sum_k I'_k \right) = 0$$

In generale, se:

$V_j$ : generica tensione che soddisfa le LKT;

$I_j$ : generica corrente che soddisfa le LKC;

L'insieme di queste due può essere considerato come correnti e tensioni dei lati omologhi in due reti che hanno in comune la sola geometria.

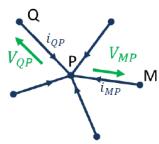
Nel caso particolare di tensioni e correnti coesistenti nella stessa rete, Tellegen si particolarizza nel principio di conservazione delle potenze.

# PRINCIPI DI NON AMPLIFICAZIONE

## I. NON AMPLIFICAZIONE DELLE TENSIONI

In una rete strettamente passiva contenente un unico generatore, i morsetti del generatore si trovano rispettivamente al potenziale più alto e più basso: ovvero la tensione ai suoi capi risulta quella massima dell'intera rete.

### DIMOSTRAZIONE



- Si consideri un nodo interno al circuito a cui siano collegati solo resistori: è più che noto come nel nodo P

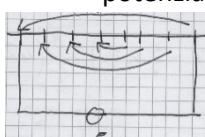
$$\sum I = 0$$

- per ipotesi siano  $I_{MP} > 0; I_{QP} < 0; I_{KP} = 0$ , allora, vale

$$\begin{cases} P_{MP} = V_{MP}I_{MP} > 0 \\ P_{QP} = V_{QP}I_{QP} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_{MP} > 0 \\ V_{QP} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_M - V_P > 0 \\ V_Q - V_p < 0 \end{cases} \Rightarrow V_Q < V_P < V_M$$

Questo per la proprietà per cui  $V_i \in R$ , scalari, e quindi ordinabili.

- Si è dimostrato in questo modo che  $V_P$  non è né minimo né massimo. Reiterando il processo si ottiene che i potenziali minimo e massimo sono quelli dei nodi a cui è connesso il generatore.



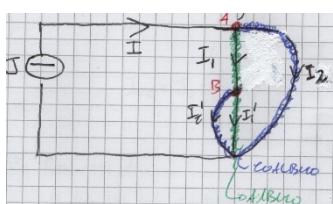
- Equivalentemente in maniera grafica ci si può aiutare nel modo seguente: avendo nota la proprietà di riordinabilità dei potenziali, se si disegnano, ci si accorge che la maggior caduta di potenziale si ha agli estremi del generatore.

## II. NON AMPLIFICAZIONE DELLE CORRENTI

Nello stesso tipo di rete la corrente di un qualunque lato strettamente passivo non potrà risultare maggiore di quella dell'unico ramo attivo.

### DIMOSTRAZIONE

- Verificato e dimostrato 1), si ha se si riordinano i nodi dal potenziale maggiore (in alto) a quello minore (in basso) e se si applicano su A e B le LKC:



- Su A:  $I = I_1 + I_2 \Rightarrow I > I_1, I_2$

- Su B:  $I_1 = I'_1 + I'_2 \Rightarrow I_1 > I'_1, I'_2$

- Poiché si ha  $I > I_1 \Rightarrow I > I'_1, I'_2$

- E dunque la corrente massima sarà quella erogata dal solo generatore.

**NB: questi principi sono legati al regime stazionario.**

# METODI ABBREVIATI PER L'ANALISI DELLE RETI

È possibile ridurre la complessità del sistema algebrico da risolvere ricorrendo a metodi abbreviati che introdurranno delle opportune variabili ausiliarie.

## METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

Si assuma un sistema completo di maglie indipendenti ottenuto considerando le regioni delimitate da percorsi chiusi costituiti da rami di coalbero: in questo modo ognuna delle maglie così scelte includerà almeno una corrente in esclusiva, cioè non appartenente ad un'altra maglia.

Si scrivano poi le equazioni LKC ai nodi dalle quali si troveranno le correnti in esclusiva.

Si scrivano le LKT sostituendo le  $I$  trovate dalle LKC.

Le correnti in esclusiva si immaginano circolare entro la loro propria maglia senza ripartirsi nei nodi che incontrano: si sono definite le variabili ausiliarie Correnti di maglia  $J_i$ .

Praticamente, le LKT conterranno ora delle cadute di tensione proprie delle maglie PIU' quelle mutue relative alle correnti di maglia adiacenti.

Quella che si otterrà sarà una matrice simmetrica definita positiva dove sulla diagonale ci saranno le resistenze proprie della maglia, e sugli altri posti, le mutue.

Ci si riconduce così alla risoluzione di sole  $l - (n - 1)$  equazioni e le correnti incognite di lato si esprimeranno in funzione di quelle di maglia così ottenute.

**Utile per reti con MOLTI NODI e POCHE MAGLIE.**

**Operativamente:**

- 1) Si identifica l'albero.
- 2) Si dà il verso alle correnti di lato.
- 3) Si attribuisce ad ogni maglia la propria  $J_i$ .
- 4) Si risolve attraverso LKT considerando le cadute di tensione sulle resistenze proprie e quelle indotte sulle resistenze mutue.
- 5) Si esprimono le rimanenti correnti in funzione delle correnti di maglia.

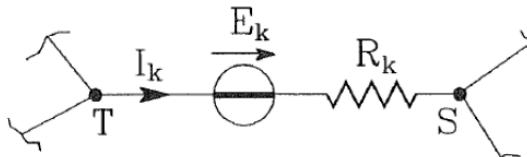
Nel caso siano presenti anche generatori di corrente  $J$ , questo contributo non determinerà l'aggiunta di ulteriore incognite: sono correnti imposte, note!

Se un  $J$  dovesse appartenere ad un coalbero, di questo si terrà conto assegnando un verso di percorrenza della corrente sull'albero al quale si appoggia, dal nodo di entrata a quello di uscita, si può anche considerare un'altra maglia composta da albero + coalbero dove la corrente di maglia è proprio quella nota, a questo punto il sistema risultante non sarà più simmetrico ma si aggiungerà un'equazione che porta in sé l'incognita della caduta di tensione del generatore  $V_J$ .

Se un  $J$  dovesse appartenere invece all'albero si aggiunge al sistema una nuova relazione costituita, una LKC fittizia su un nodo di albero che contiene  $J$ , per la quale ad esempio  $J = J_i + J_j$ .

## METODO DEI POTENZIALI NODALI

Si consideri un generico ramo di una rete, per la legge di Ohm generalizzata vale:



$$V_{ST} = V_S - V_T = E_k - R_k I_k$$

$$I_k = \frac{E_k}{R_k} + \frac{V_T}{R_k} - \frac{V_S}{R_k}$$

Se si compie la stessa operazione per ogni ramo della rete e poi si applica LKC ad ogni nodo, si ottiene un sistema di  $n - 1$  equazioni nelle incognite  $n$  dei potenziali nodali.

Si ricordi come la valutazione di  $V_{ST}$  risulti indipendente dal potenziale di riferimento e dunque si può porre, per uno dei nodi della rete, la messa a terra, e dunque il valore nullo.

L'aver espresso le  $I$  in funzione dei  $V$  rende inoltre superflua la scrittura delle LKT, identicamente soddisfatte.

**Utile per reti con POCHE NODI e MOLTE MAGLIE**

**Operativamente:**

- 1) Si sceglie il nodo più conveniente da mettere a terra, a cui assegnare il valore 0.
- 2) Se scrive la Legge di Ohm generalizzata per ogni nodo:

$$V_{AB} = V_A - V_B = E - RI$$

Considerando che A è il verso in cui punta la caduta di tensione positiva.

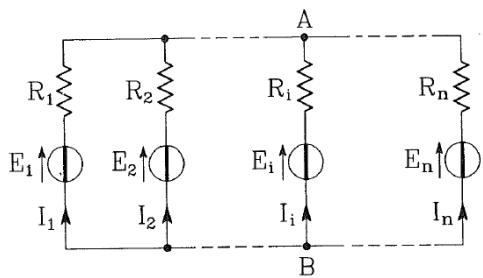
In questa fase ci si ricorda del potenziale mezzo a terra e si ricavano le correnti.

- 3) Si scrivono le LKC ai nodi di interesse
- 4) Si sostituiscono le correnti trovate in 2) nelle LKC appena trovate.

Si trova così una matrice simmetrica definita positiva nelle incognite dei potenziali nodali ignoti.

- 5) I potenziali nodali così trovati si sostituiranno nelle correnti estrapolate al punto 2) che forniranno le effettive correnti di lato del circuito.

## FORMULA DI MILMANN



Nel caso limite di una rete con solo due nodi e molte maglie si può sinteticamente trovare il potenziale incognito.

Per il metodo dei potenziali nodali si avrà, se  $V_B = 0$ ,

$$I_i = \frac{E_i}{R_i} - \frac{V_A}{R_i}$$

Applicando LKC al nodo A:

$$\sum I_i = \sum \frac{E_i}{R_i} - \sum \frac{V_A}{R_i}$$

E dunque

$$V_A = \frac{\sum \frac{E_i}{R_i}}{\sum \frac{1}{R_i}} = \frac{\sum E_i G_i}{\sum G_i}$$

# RETI IN REGIME SINUSOIDALE

Le reti elettriche in regime sinusoidale sono le più rilevanti e diffuse. I generatori che erogano sulla rete nazionale hanno tensioni che variano nel tempo sinusoidalmente ad una frequenza industriale di 50 Hz.

Ora che c'è la variabilità nel tempo si terrà conto di nuovi bipoli.

Se inoltre **non si superano** valori modesti di **frequenza** ( $\gg 50 \text{ Hz}$ ) è **valido ancora il modello a parametri concentrati**.

La **risoluzione** di circuiti in regime sinusoidale è **basata sull'utilizzo dei numeri complessi**, risulta così possibile scrivere delle equazioni circuitali in termini di soluzione a regime senza dover risolvere le equazioni differenziali. Tale metodo di risoluzione è detto **Metodo Simbolico**.

## NUMERI COMPLESSI

$$i = j = \sqrt{-1} \text{ Unità immaginaria}$$

$z = x + jy$  Numero complesso in forma cartesiana

$x = Re(z)$  Parte reale di z

$y = Im(z)$  Parte immaginaria di z

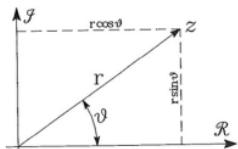
$$\rho = r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ Modulo di z}$$

Notare come ad un'uguaglianza complessa ne corrispondono due reali:

$$\text{Se } z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

I numeri reali si possono rappresentare sul piano complesso (o di Argand), dove sulle ascisse  $x$  ci sarà l'asse reale mentre sulle ordinate  $y$  quello immaginario.

Un numero complesso in coordinate polari sarà:



$$z = \underbrace{r \cos \theta}_x + j \underbrace{r \sin \theta}_y$$

Con:

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ Modulo di z} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arg(z) = \theta \text{ Argomento di z} \end{aligned}$$

Un numero complesso si può esprimere anche in forma Euleriana: sia  $e$  il numero di Eulero:

$$z = re^{j\theta} = r \cos \theta + j \sin \theta = x + jy$$

**Alcune identità fondamentali:**

$$\begin{aligned} e^{j0} &= 1; \\ e^{j\pi} &= -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{j\frac{\pi}{2}} &= j; \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} &= -j \end{aligned}$$

Un **coniugato** di un numero complesso è definito come

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= x - jy \\ \tilde{z} &= r e^{-j\theta} \end{aligned}$$

Si definisce **l'inverso** di due numeri complessi:

$$z^{-1} = \frac{\tilde{z}}{r^2} = \frac{a - i b}{a^2 + b^2}$$

Si definisce la **somma** di due numeri complessi:

$$(a + i b) + (c + i d) = (a + c) + i(c + d)$$

Si definisce il **prodotto** di due numeri complessi:

$$(a + i b) \cdot (c + i d) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Attraverso la formulazione di Eulero  $z = re^{j\theta}$ :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Una moltiplicazione per un numero complesso può essere vista come una simultanea rotazione e omotetia. Scambio di posto  $Im$  e  $Re$ . Moltiplicare un numero complesso per l'elemento  $i$  produce una rotazione, uno sfasamento di  $90^\circ$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , in senso antiorario, del numero complesso di partenza:

$$|j \cdot z| = |j| \cdot |z| = |z|; \arg(j \cdot z) = \arg(j) + \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \arg(z)$$

Ovviamente una moltiplicazione per  $i$  e poi ancora per  $i$  produrrà una rotazione di  $180^\circ$ , in rispetto del fatto che  $i^2 = -1$ .

Si definisce **rappporto** di due numeri complessi:

$$\frac{a + i b}{c + i d} = \frac{a + i b}{c + i d} \frac{c - i d}{c - i d} = \frac{(ac + bd) + i(cb - ad)}{c^2 + d^2}$$

Attraverso la formulazione di Eulero  $z = re^{j\theta}$ :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Si definisce **potenza** di un numero complesso la quantità, espressa attraverso la formulazione di Eulero  $z = re^{j\theta}$ :

$$z^n = r^n e^{nj\theta}$$

in formulazione polare  $z = r\cos \theta + r j \sin \theta$  si perviene inoltre alle formule di De Moivre:

$$z^n = r^n [\cos n\theta + j \sin n\theta]$$

Eseguendo i calcoli con MatLab si incorrono in notevoli semplificazioni.

## FUNZIONI PERIODICHE

**Una grandezza  $u(t)$  è periodica nel tempo  $t$  se assume valori uguali ad intervalli di tempo pari al suo periodo  $T$ :**

$$u(t) = u(t + nT)$$

Con  $T = [s]$  periodo e  $f = \frac{1}{T} = [Hz]$  frequenza.

Si possono definire, di una funzione periodica, i seguenti valori:

- **Valore medio nel periodo:**

$$U_{mT} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

- **Valore medio nell'intervallo:**

$$U_{m\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u(t) dt$$

- **Valore efficace o Valore quadratico medio:**

$$U = U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Si definisce alternativa una grandezza periodica  $w(t)$  a valor medio nullo nel periodo:

$$W_{mT} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt = 0$$

- **Valore medio nel semiperiodo  $\frac{T}{2}$ :** si definisce per grandezze alternative:

$$W_{\frac{mT}{2}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} w(t) dt$$

Una funzione periodica alternata sinusoidale  $a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi)$  è caratterizzata da

- 1) Pulsazione  $\omega = 2\pi f$ ;
- 2)  $\varphi$  fase iniziale;
- 3) Valore massimo, di picco  $A_{\max} = A_M$ ;
- 4) Valore efficace:

$$A = A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A_M^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} = 0.707 A_M$$

- 5) Valore medio nel semiperiodo:

$$A_{\frac{mT}{2}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A_M \sin(\omega t + \varphi) dt = 0.636 A_M$$

- 6) Fattore di forma  $K_f$ :

Rapporto tra il valore efficace e il valore medio nel semiperiodo.

Per la sinusoide vale:

$$K_f = \frac{A}{A_{\frac{mT}{2}}} = 1.11$$

## METODO SIMBOLICO

In una rete lineare alimentata da un generatore - per ora unico - ad andamento sinusoidale, risulteranno sinusoidali tutte le tensioni e le correnti.

La scrittura delle LKT e delle LKC comporterà dunque una somma algebrica di funzioni sinusoidali.

Se si fa ricorso al metodo simbolico trasformando le funzioni sinusoidali  $a(t)$  in fasori  $\bar{A}(j\omega t)$ , si incorre in una notevole semplificazione.

Si ottiene un isomorfismo, facendo corrispondere l'insieme  $\mathcal{S}$  delle funzioni sinusoidali a quello  $\mathcal{C}$  delle funzioni complesse, nel tempo.

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \bar{A}(j\omega t) = A_M e^{j(\omega t + \varphi)} \in \mathcal{S} \in \mathcal{C}$$

→ **L'ISOMORFISMO CONSENTE LE OPERAZIONI FONDAMENTALI**

- 1) In  $\mathcal{S}$  la somma è:

$$\begin{cases} a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi) \\ b(t) = B_M \sin(\omega t + \theta) \end{cases} \Rightarrow a(t) + b(t) = c(t) = C_M \sin(\omega t + \gamma)$$

Con

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + 2A_M B_M \cos(\varphi - \theta)} ; \tan \gamma = \frac{A_M \sin(\varphi) + B_M \sin(\theta)}{A_M \cos(\varphi) + B_M \cos(\theta)}$$

- 2) In  $\mathcal{C}$  la somma è:

$$\begin{cases} \bar{A}(j\omega t) = A_M e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \bar{B}(j\omega t) = B_M e^{j(\omega t + \theta)} \end{cases} \Rightarrow \bar{A}(j\omega t) + \bar{B}(j\omega t) = \bar{C}(j\omega t) = C_M e^{j(\omega t + \gamma)}$$

Questa esprimibile in forma cartesiana.

Il corrispondente in  $\mathcal{C}$  della somma in  $\mathcal{S}$  è dato dalla somma dei corrispondenti di  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{C}$ .

3) In  $\mathcal{S}$  la derivata è:

$$b(t) = \frac{d}{dt} [A_M \sin(\omega t + \varphi)] \underset{\substack{\equiv \\ \cos(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}}{=} \omega A_M \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

4) In  $\mathcal{C}$  la derivata è

$$\bar{B}(j\omega t) = \frac{d}{dt} [A_M e^{j(\omega t + \varphi)}] = j\omega A_M e^{j(\omega t + \varphi)} \underset{\substack{\equiv \\ e^{j\frac{\pi}{2}} = j}}{=} \omega A_M e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

**La derivazione rispetto al tempo comporta, sia in  $\mathcal{S}$  che in  $\mathcal{C}$ , la moltiplicazione per uno stesso fattore  $\omega$ .**

La fase in  $\mathcal{S}$  e l'argomento di  $\mathcal{C}$  subiscono un aumento di  $\frac{\pi}{2}$ .

Anche nella derivazione viene conservata la corrispondenza.

→ L'ulteriore semplificazione della somma in  $\mathcal{C}$  si ottiene operando su sinusoidi isofrequenziali, se si considera  $\bar{A}(j\omega t) = A_M e^{j(\omega t + \varphi)}$ , che **si può eliminare il termine  $e^{j\omega t}$** , e quindi le:

$$\bar{A}_1(j\omega t) + \bar{A}_2(j\omega t) + \dots + \bar{A}_n(j\omega t)$$

Diventano:

$$A_{M_1} e^{j\varphi_1} + A_{M_2} e^{j\varphi_2} + \dots + A_{M_n} e^{j\varphi_n}$$

Che fa corrispondere alla generica funzione sinusoidale un semplice numero complesso

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \bar{A} = A_M e^{j\varphi} = A_M (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

→ Se si associano ora sinusoidi isofrequenziali a segmenti orientati rappresentativi dei numeri complessi nel piano complesso si ottengono infine i **Fasori**, ovvero dei **vettori simbolici**.

**Il fasore rappresenta la fase e l'ampiezza della sinusoide e non tiene conto del tempo.**

Se si immagina di far ruotare il fasore nel piano di Gauss a velocità angolare corrispondente a  $\omega$ , l'andamento della parte reale rispetto al tempo fornirà l'andamento della sinusoide associata.

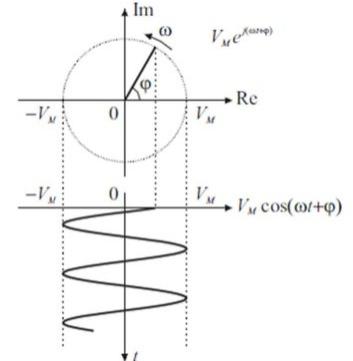
→ **Modulo e argomento dei fasori corrispondono così ad ampiezza e fase delle sinusoidi.**

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50\text{Hz}$$

$$\bar{A} = A_M e^{j\varphi} = A_M (\cos \varphi + j \sin \varphi) = x + j y$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)$$



Perciò, **ricapitolando**, in notazione si avrà:

**$a(t)$ : valore istantaneo nel tempo**

**$A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$ : valore efficace, misurato dagli strumenti**

**$\bar{A}$ : fasore di  $a(t)$**

# BIPOLI E CIRCUITI SEMPLICI IN REGIME SINUSOIDALE

I bipoli presi in considerazione sono supposti in regime sinusoidale permanente. Si ipotizzi un circuito attraversato da corrente  $i(t) = I_M \sin(\omega t) \Leftrightarrow I_M e^{j0} = \bar{I}$  con i seguenti elementi:

## RESISTORE

Per un resistore di resistenza  $R = [\Omega]$  percorso da una corrente  $i(t)$  la **Legge di Ohm varrà:**

$$v(t) = R i(t) = R I_M \sin(\omega t)$$

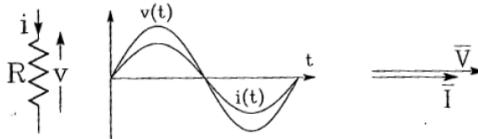
Perciò in termini fasoriali si avrà:

$$\bar{V} = R \cdot \bar{I}$$

Si introducono la **Reattanza  $X$  e l'Impedenza  $\bar{Z}$  Resistiva**, che sono entrambe rispettivamente identiche al valore di  $R$ :

$$X_R \equiv \bar{Z}_R = R = [\Omega]$$

**La tensione e la corrente sono sempre in fase, legate in maniera lineare da  $R$ .**



## INDUTTORE

1. In assenza di altre sorgenti, è noto come **una spira o un circuito chiuso** percorso da correnti generi un campo magnetico  $\vec{B}$ . Di tale campo si può considerare il flusso autoindotto:

$$\varphi^a(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

2. Per definizione:

$$\vec{B} = \oint_l \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \Delta \vec{r}}{\Delta r^3}$$

3. Sostituendo:

$$\varphi^a(\vec{B}) = \int_S \left\{ \oint_l \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \Delta \vec{r}}{\Delta r^3} \right\} \cdot \hat{n} dS = \underbrace{\left\{ \int_S \left[ \oint_l \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \Delta \vec{r}}{\Delta r^3} \right] \cdot \hat{n} dS \right\}}_{L=\text{induttanza}=[H]} I = LI$$

4. Dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz si ha che la **forza elettromotrice autoindotta** è:

$$V = fem^a = -\frac{\partial \varphi^a(\vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial (LI)}{\partial t}$$

5. Nasce ovvero un'altra pila che si oppone alla corrente: la  $fem^a$  ai capi del componente si oppone alla variazione di corrente che lo attraversa.  $V$  è il potenziale indotto ai morsetti del circuito in questione.

6. Per cui, secondo la convenzione dell'utilizzatore:

$$V = \frac{\partial (LI)}{\partial t}$$

7. Perciò in regime sinusoidale si avrà:

$$v(t) = L \frac{\partial i(t)}{\partial t}$$

$$v(t) = L \omega I_M \cos(\omega t) = L \omega I_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

8. Da qui si evince come  $i(t)$  debba essere una funzione continua e  $v(t)$  possa essere discontinua.

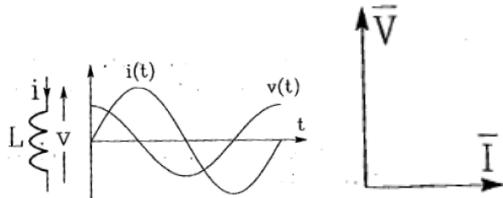
Perciò in termini fasoriali si avrà:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= L \cdot \frac{d\bar{I}}{dt} = L \omega \underbrace{\overbrace{I_M e^{j0}}_{\bar{I}}} \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j} = j \omega L \cdot \bar{I} \\ \bar{V} &= j \omega L \cdot \bar{I} \end{aligned}$$

Si introducono rispettivamente la **Reattanza  $X$  e l'Impedenza  $\bar{Z}$  Induttiva** come:

$$X_L = \omega L = [\Omega]; \bar{Z}_L = j \cdot X_L = [\Omega]$$

La tensione e la corrente sono sfasate di  $\frac{\pi}{2}$ , in particolare  $\bar{I}$  è in quadratura in ritardo rispetto a  $\bar{V}$ , o equivalentemente,  $\bar{V}$  è in anticipo rispetto ad  $\bar{I}$ .



### CAPACITORE

- La corrente è definita dalla variazione di carica dell'istante di tempo:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

- La relazione costitutiva del condensatore è:

$$q(t) = Cv(t)$$

Con  $C = [F]$  capacità del condensatore.

- Perciò:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = C\omega V_M \cos(\omega t) = C\omega V_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Da qui si evince come  $v(t)$  debba essere una funzione continua e  $i(t)$  possa essere discontinua.

- Perciò in termini fasoriali si avrà:

$$\bar{I} = C \cdot \frac{d\bar{V}}{dt} = C\omega \underbrace{\bar{V}_M e^{j0}}_{\bar{V}} \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j} = j\omega C \cdot \bar{V}$$

E dunque, rispetto alla tensione si ha

$$\bar{V} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}$$

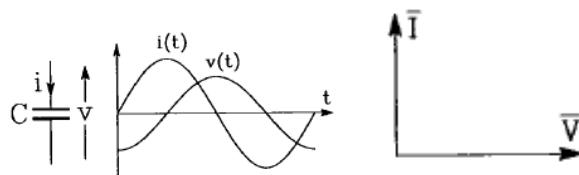
- Poiché  $\frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j^2} = -j \Rightarrow \frac{i}{j} = -j$  e infine

$$\bar{V} = -\frac{j}{\omega C} \bar{I}$$

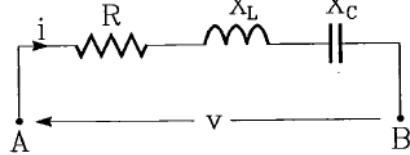
Si introducono rispettivamente la **Reattanza  $X$**  e l'**Impedenza  $\bar{Z}$  Conduttiva** come:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = [\Omega]; \quad \bar{Z}_C = -j \cdot X_C = [\Omega]$$

La tensione e la corrente sono sfasate di  $\frac{\pi}{2}$ , in particolare  $\bar{I}$  è in quadratura in anticipo rispetto a  $\bar{V}$ , o equivalentemente,  $\bar{V}$  è in ritardo rispetto ad  $\bar{I}$ .



## SERIE RLC



## CIRCUITO RISONANTE

La legge di Ohm generalizzata a questo circuito vale:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{AB} &= \bar{V}_A - \bar{V}_B = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = \\ &= \bar{Z}_R \bar{I} + \bar{Z}_L \bar{I} + \bar{Z}_C \bar{I} = \\ &= \bar{I} [X_R + jX_L - jX_C] = \\ &= \bar{I} \left[ R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right] = \\ \bar{I} \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] &= I \cdot \bar{Z}\end{aligned}$$

L'Impedenza  $\bar{Z}$  prende dunque la forma di un operatore matematico:

$$\bar{Z} = X_R + j(X_L - X_C) = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = [\Omega]$$

Per cui

$$|\bar{Z}| = \sqrt{X_R^2 + (X_L - X_C)^2}; \varphi = \arctan \left( \frac{X_L - X_C}{X_R} \right)$$

Poiché la Reattanza resistiva  $X_R$  coincide con la resistenza ed è un numero reale: d'ora in poi si definiranno reattanze solo quelle induttive  $X_L$  e capacitive  $X_C$ , e cioè la parte immaginaria dell'operatore impedenza:

$$X_{RLC\text{serie}} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

La risonanza si instaura allorché, considerando un circuito chiuso e senza perdite, il campo magnetico presente nell'induttanza genera, per via del suo naturale decadimento, una corrente elettrica autoindotta nel proprio avvolgimento che, scorrendo attraverso il circuito chiuso, carica il condensatore.

A sua volta il condensatore, scaricandosi, fornisce la corrente elettrica che, attraverso l'avvolgimento dell'induttore, rigenera il campo magnetico iniziale nello stesso: ripetendosi indefinitamente tale processo, si assiste all'instaurarsi del fenomeno della risonanza.

**Si costringe l'energia ad oscillare tra il campo magnetico di un induttore ed il campo elettrico di un condensatore.**

**Si definisce pulsazione di risonanza quel valore  $\omega$  che annulla la reattanza, e cioè la parte immaginaria dell'impedenza:**

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

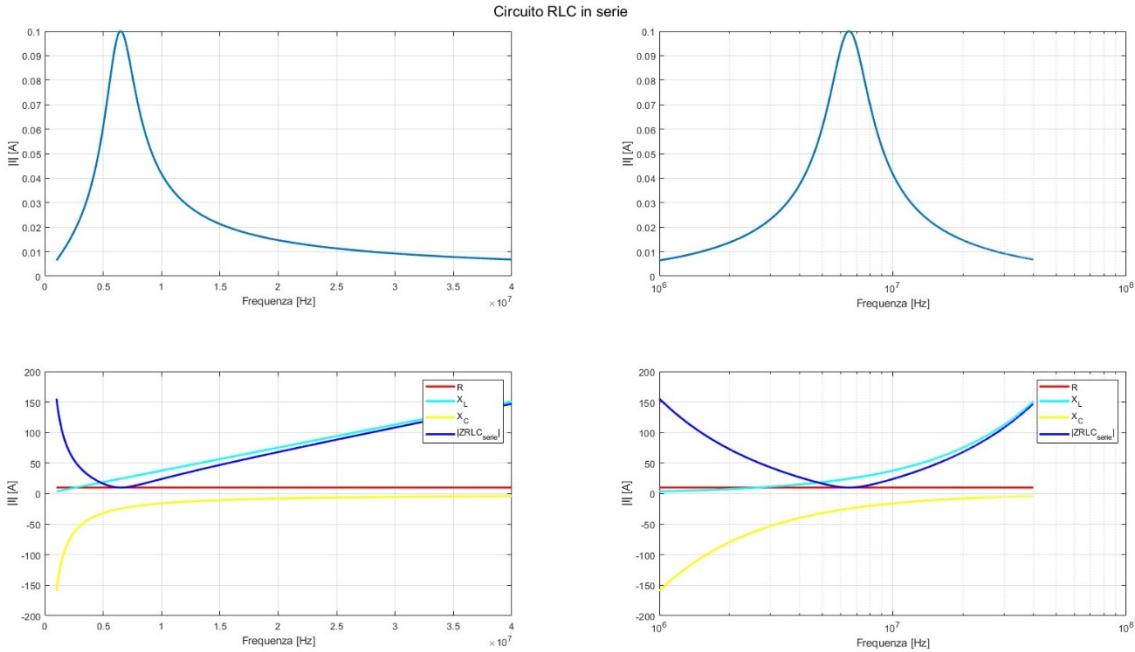
A cui è associata una frequenza di risonanza:

$$f_R = \frac{\omega_R}{2\pi}$$

## STUDIO MATLAB RLC SERIE

```
% Circuito Serie RLC
% Fornisco dei dati di input
R=10; L=6e-7; C=1e-9;
% Sia dato il fasore del generatore
VG=j;
% Definisco un insieme di frequenze e calcolo
% pulsazione omega
f=linspace(1e6,4e7,3000);
omega=2*pi*f;
|
% Calcolo le reattanza X e i relativi operatori/fasori
% impedenza Z
XR=R; XL=j*omega*L; XC=1./((omega*C));
ZL=j*Xl; ZC=-j*XC;
```

```
% Poichè XL e XC sono vettori, dovrà rendere vettore
% anche R, affinchè le operazioni tra le tre impedenze
% abbiano senso, perciò:
Rvett=10*ones(1,length(f)); XRvett=Rvett; ZRvett=XRvett; omega_r =
% L'impedenza della SERIE RLC sarà:
ZRLC_serie=ZRvett+ZL+ZC;
Z=R+j*omega*L+1./j*omega*C;
% La corrente che scorre sul circuito serie sarà:
I = VG./ZRLC_serie;
% Calcolo della pulsazione di risonanza omega_r
% Calcolo della frequenza di risonanza f_r
omega_r=sqrt(L*C)
f_r=omega_r/(2*pi)
Frequenza_di_risonanza =
6.5008e+06
```



Poiché al crescere della frequenza  $f$  cresce la pulsazione  $\omega$ , anche la reattanza induttiva varierà linearmente in base alla relazione:

$$\omega = 2\pi f$$

Per quanto riguarda la reattanza capacitiva  $X_C$ , essa è invece elevatissima alle basse frequenze e tende al corto circuito con frequenze altissime.

Alla frequenza di risonanza  $f_r$ , l'unico ostacolo è costituito dalla resistenza  $R$  e, tanto più piccolo sarà il suo valore, tanto maggiore sarà la corrente assorbita dal circuito:

$$I_R = \frac{V}{R}$$

In tale condizione potranno quindi avversi elevati valori delle cadute di tensione sull'induttore  $L$  e sul condensatore  $C$  tali da superare il valore della tensione  $V$  di alimentazione che viene imposta ai capi del circuito. Ciò accadrà per:

$$X_L = X_C > R$$

Il valore di sovratensione può risultare pericoloso per l'isolamento dei componenti circuituali, specie se è imprevisto il fenomeno di risonanza nel circuito di lavoro.

In risonanza la tensione richiesta dal condensatore è esattamente identica alla *fem* di autoinduzione della bobina. La tensione ai capi della resistenza coincide invece con quella totale.

Infine, dunque, data una frequenza  $f$  ed una pulsazione  $\omega$ :

- Se  $X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) > 0$  il circuito sarà di natura ohmico induttiva;
- Se  $X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0$  il circuito sarà puramente resistivo;
- Se  $X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) < 0$  il circuito sarà di natura ohmico capacitiva;

La corrente in questo caso raggiunge il suo valore massimo, essendoci la sola resistenza a ostacolarne la circolazione. A valori sia inferiori che superiori della frequenza di risonanza, la corrente assume invece valori più bassi.

**Si definiscono infine la Suscettanza  $B$  e l'Ammettenza  $\bar{Y}$ , queste si misureranno in Siemens:**

$$B = \frac{1}{X} = [S]; \quad \bar{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{X}{R^2 + X^2} = [S]$$

## STUDIO MATLAB RLC PARALLELO CIRCUITO ANTIRISONANTE

```
% Circuito Serie RLC
% Fornisco dei dati di input
R=10; L=6e-7; C=1e-9;
% Sia dato il fasore del generatore
VG=1;
% Definisco un insieme di frequenze e calcolo
% pulsazione omega
f=linspace(1e6,4e7,3000);
omega=2*pi*f;

% Calcolo l'operatore ammettenza Y = 1/Z dalle impedenze Z e dalle reattanze X
% l'operatore ammettenza è così definito: Y = 1/(R+jX)
XR=R; XL=j*L; XC=-j*C;
ZR=XR; ZL=j*XL; ZC=-j*XC;
BR=1/XR; BL=1./XL; BC=1./XC;
YR=1/ZR;YL=1./ZL;YC=1./ZC;
```

```
% Poichè XL e XC sono vettori, dovrà rendere vettore
% anche R, affinchè le operazioni tra le tre impedenze
% abbiano senso, perciò:
Rvett=R*ones(1, length(f)); BRvett=1./Rvett; YRvett=BRvett;

% L'ammettenza del PARALLELO RLC sarà:
YRLC_parallello = YRvett + YC + YL;

% L'impedenza del PARALLELO RLC sarà:
ZRLC_parallello = 1./YRLC_parallello;

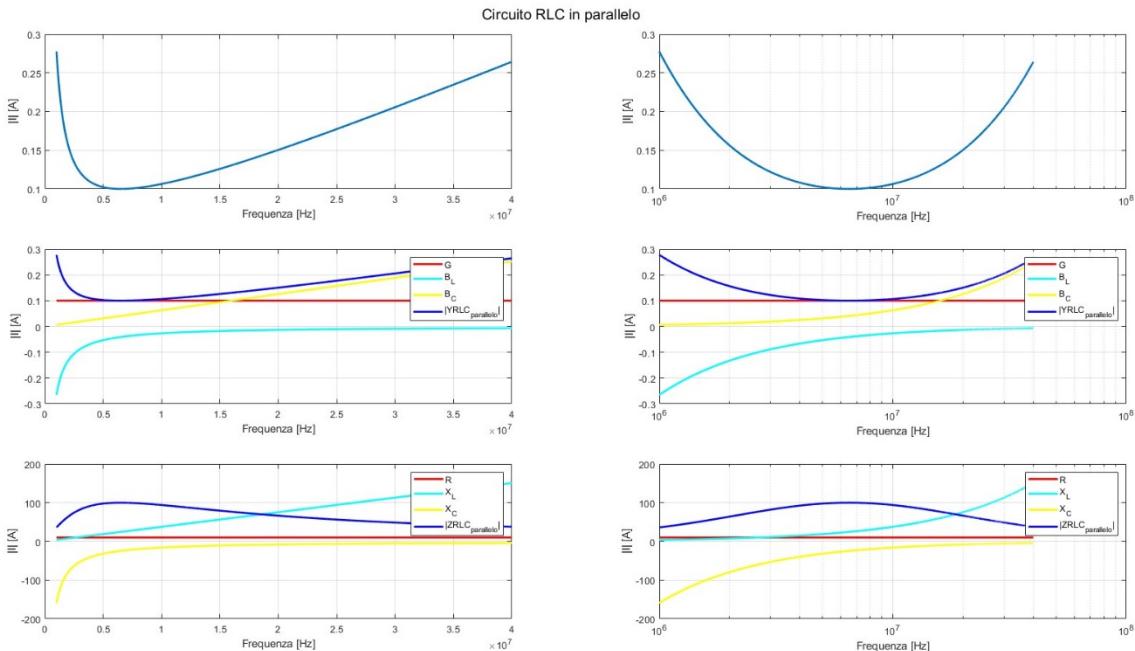
% La corrente che scorre sul circuito parallelo sarà:
I = VG.*YRLC_parallello;

% Calcolo della pulsazione di risonanza omega_r
% Calcolo della frequenza di risonanza f_r
omega_r = 1/sqrt(L*C);
f_r = omega_r/(2*pi)
```

```
omega_r =
4.0825e+07

f_r =
6.4975e+06

Frequenza_di_risonanza =
6.5008e+06
```



Il circuito è antirisonante quando ad un particolare valore di frequenza (detta di antirisonanza) esso presenta la minima ammettenza, e quindi la massima impedenza equivalente.

Il circuito antirisonante e quello risonante visto sopra sono perfettamente duali.

Alla frequenza suddetta l'ammettenza assume il valore minimo, coincidente con la conduttanza  $G$  e anche la corrente totale è minima e in fase con la tensione. Addirittura, nel caso teorico di conduttanza nulla, la corrente totale assorbita dal circuito sarebbe nulla, con correnti nei rami  $L$  e  $C$  tendenti a infinito.

**Al di sotto della  $f_r$ , prevale la suscettanza induttiva**, con sfasamento negativo dell'ammettenza (ma con sfasamento positivo per l'impedenza, ovvero corrente in ritardo sulla tensione). Al diminuire della frequenza lo sfasamento tende a  $-90^\circ$ . Al contrario succede **per frequenze superiori alla  $f_r$ : prevale l'effetto capacitivo** e la corrente è in anticipo rispetto alla tensione. Al crescere della frequenza lo sfasamento tende a  $90^\circ$ .

### OSSERVAZIONI OPERAZIONALI

- 1) Due **bipoli** si dicono **equivalenti** se ai rispettivi morsetti stabiliscono la stessa relazione tra il fasore della tensione e quello della corrente, se presentano cioè la stessa impedenza equivalente ai morsetti dati.
- 2) Ai fini della risoluzione, tensione e corrente si potranno ugualmente determinare dalle **LKT e LKC**, ammesso che la **rete sia isofrequenziale**, sono così si può applicare il metodo simbolico.
- 3) Ad una **rete** comunque complessa, purché **lineare**, si potrà **applicare** sia **Thévenin** che **Norton**, purché alla resistenza interna si sostituisca l'impedenza interna del generatore equivalente.

# POTENZA

Siano:

$$v(t) = V_M \sin(\omega t); i(t) = I_M \sin(\omega t - \varphi)$$

Poiché i valori efficaci sono definiti come:

$$V = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_M = V\sqrt{2}$$

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_M = I\sqrt{2}$$

Allora:

$$v(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t); i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$$

→ La **POTENZA ISTANTANEA** è:  $p(t) = v(t)i(t) = [VA]$  Volt Ampère:

$$p(t) = v(t)i(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t) I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) = 2VI \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) =$$

Se  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ :

$$= 2VI \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \omega t - \varphi)] =$$

$$= VI[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)] (*)$$

**La potenza istantanea  $p(t)$  è dunque somma di un termine costante e di un termine fluttuante.**

**Mediando sul periodo si ottiene il valore del termine costante **POTENZA MEDIA, ATTIVA o REALE P**:**

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(\tau) d\tau = \left\{ \frac{VI \cos \varphi}{2} \right\} = [W]$$

**cos  $\varphi$**  è il **FATTORE DI POTENZA, Power Factor PF**.

La potenza attiva è quella che fornisce il lavoro meccanico:

$$(*) = VI[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t) \cos(\varphi) - \sin(2\omega t) \sin(\varphi)] =$$

$$= VI \cos(\varphi) [1 - \cos(2\omega t)] - VI \sin(\varphi) [\sin(2\omega t)] =$$

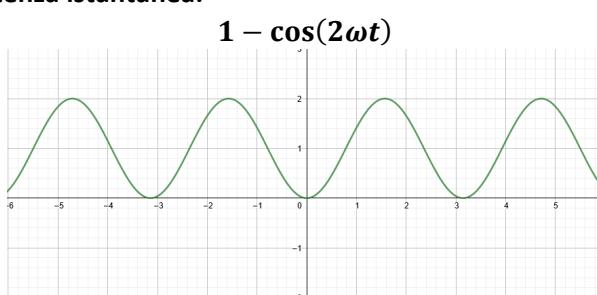
$$= \underbrace{P [1 - \cos(2\omega t)]}_{\substack{\text{Positivo} \\ \text{Termine} \\ \text{Unidirezionale}}} - \underbrace{Q [\sin(2\omega t)]}_{\substack{\text{Oscillante} \\ \text{Termine} \\ \text{Fluttuante}}}$$

**Si definisce in questo modo la **POTENZA REATTIVA Q**, come valore di picco del termine fluttuante, misurata in Volt Ampère Reattivi:**

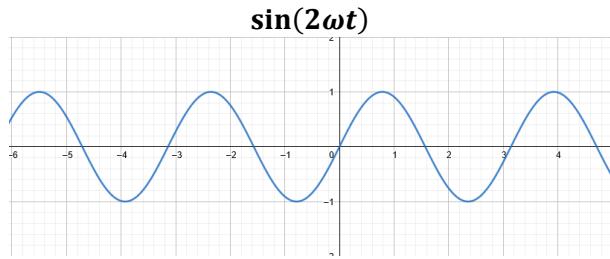
$$Q = \left\{ \frac{VI \sin \varphi}{2} \right\} = [VAR]$$

La potenza reattiva è il contributo "sprecato" della potenza istantanea.

**Termine unidirezionale della potenza istantanea:**



## Terme fluttuante della potenza istantanea:



Ci si chiede se sia possibile trasformare l'espressione della potenza istantanea nel dominio simbolico. Essendo la potenza il prodotto di due grandezze, tensione e corrente, che trasformiamo in fasori, non è una grandezza trasformabile nel dominio simbolico: non ha una espressione che la esprime secondo un valore massimo o un valore efficace.

Pertanto, data l'importanza dell'aspetto energetico dei circuiti, sarà necessario definire una potenza direttamente nel dominio simbolico.

### Definisco a questo punto la POTENZA COMPLESSA

Dati:

$$\bar{V} = V_M e^{j(\varphi_V)} ; \bar{I} = I_M e^{j(\varphi_I)}$$

Scalando sia sui valori massimi che su quelli efficaci:

$$V = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_M = V\sqrt{2}$$

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_M = I\sqrt{2}$$

$$\bar{P} = \begin{cases} \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I} = \frac{1}{2} [V_M e^{j(\varphi_V)} I_M e^{-j(\varphi_I)}] = \frac{1}{2} [V_M I_M e^{j(\varphi_V - \varphi_I)}] = \frac{1}{2} [V_M I_M e^{j\varphi}] = VI e^{j\varphi} \\ \bar{V} \bar{I} = \left[ \frac{V_M}{\sqrt{2}} e^{j(\varphi_V)} \frac{I_M}{\sqrt{2}} e^{-j(\varphi_I)} \right] = \left[ \frac{V_M}{\sqrt{2}} \frac{I_M}{\sqrt{2}} e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} \right] = \frac{1}{2} [V_M I_M e^{j\varphi}] = VI e^{j\varphi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{P} = \left( \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I} \right)_M = (\bar{V} \bar{I})_{eff} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{VI \cos \varphi}{P}}_{P} + j \underbrace{\frac{VI \sin \varphi}{Q}}_Q$$

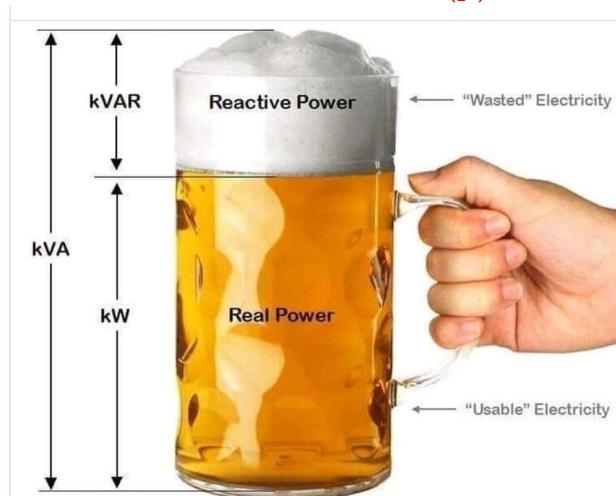
$$\bar{P} = P + jQ$$

Si vede inoltre come **il modulo della potenza complessa sia pari a**

$$A = |\bar{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI = [VA]$$

E lo **sfasamento tensione-corrente  $\varphi$  è pari a**

$$\varphi = \varphi_V - \varphi_I = \arctan \left( \frac{Q}{P} \right)$$



## TEOREMA DI BOUCHEROT

Il teorema di Boucherot particolarizza la conservazione delle potenze complesse.

Ammesso di aver usato la stessa convenzione per tutti i bipoli del circuito si deve avere:

$$\sum_i \bar{P}_i = \sum_i P_i + j \sum_i Q_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_i P_i = 0 \\ \sum_i Q_i = 0 \end{cases}$$

Altrimenti, se si è utilizzata la convenzione dei generatori sui generatori e la somma delle potenze generate è pari a  $\bar{P}_g$  e quella degli utilizzatori sugli utilizzatori e la somma delle potenze utilizzate è  $\bar{P}_u$  si ha, equivalentemente:

$$\bar{P}_g = \bar{P}_u$$

### POTENZA DEL RESISTORE



$$\bar{V} = R \cdot \bar{I}$$

$$\begin{cases} P = VI \cos \varphi = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \\ Q = VI \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

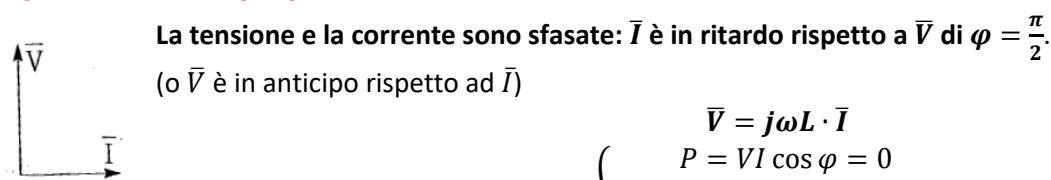
$$\bar{P} = P + j0 = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$A = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

È una potenza reale.

Essendo  $P \neq 0$  il resistore è sede di fenomeni energetici dissipativi.

### POTENZA DELL'INDUTTORE



$$\bar{V} = j\omega L \cdot \bar{I}$$

$$\begin{cases} P = VI \cos \varphi = 0 \\ Q = VI \sin \varphi = \omega LI^2 = \frac{V^2}{\omega L} \end{cases}$$

$$\bar{P} = 0 + jQ = j\omega LI^2 = j \frac{V^2}{\omega L}$$

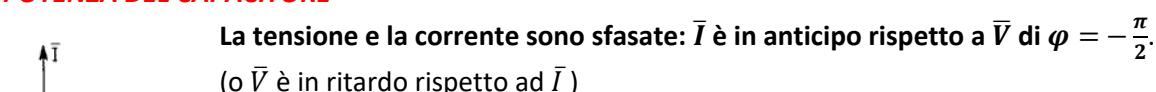
$$A = VI = Q = \omega LI^2 = \frac{V^2}{\omega L}$$

È una potenza immaginaria.

Essendo  $P = 0$  l'induttore NON è sede di fenomeni energetici dissipativi.

In più  $Q_{ass} > 0$ .

### POTENZA DEL CAPACITORE



$$\bar{V} = -\frac{j}{\omega C} \bar{I}$$

$$\begin{cases} P = VI \cos \varphi = 0 \\ Q = VI \sin \varphi = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -\omega CV^2 \end{cases}$$

$$\bar{P} = 0 + jQ = -j \frac{1}{\omega C} I^2 = -j\omega CV^2$$

$$A = VI = Q = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -\omega CV^2$$

È una potenza immaginaria.

Essendo  $P = 0$  l'induttore NON è sede di fenomeni energetici dissipativi.

In più  $Q_{ass} < 0$ .

## DESCRIZIONE DEI PROBLEMI

a)  $\begin{cases} Q \\ \cos \varphi \end{cases}$ ;

b)  $\begin{cases} P \\ Q \end{cases}$ ;

c)  $\begin{cases} P \\ \sin \varphi \end{cases}$ ;

d)  $\begin{cases} P \\ \cos \varphi \text{ (rit.)} \end{cases}$ ;

e)  $\begin{cases} P \\ \cos \varphi \text{ (ant.)} \end{cases}$

In questo modo:

- In a) e b) il segno di  $\varphi$  si trova dal segno di  $Q$ ;
- In c) il segno di  $\varphi$  si trova dal segno di  $\sin \varphi$ ;
- In d) ed e) rit. e ant. Preciseranno se la corrente sarà in anticipo  $(-\frac{\pi}{2})$ , carico ohmico capacitivo; o in ritardo  $(+\frac{\pi}{2})$ , carico ohmico induttivo.

## MISURE IN REGIME SINUSOIDALE

**Il Voltmetro  $V$  e l'Amperometro  $I$  indicano il Valore Efficace delle grandezze misurate** (rispettivamente tensione  $V$  e corrente  $I$ ) **e i loro morsetti non necessitano di alcuna orientazione, dato che il valore efficace è positivo per definizione.**

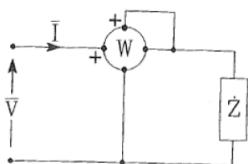
**Il Wattmetro  $W$  misura la potenza Attiva  $P$ .**

È uno strumento dotato di due coppie di morsetti orientati, amperometrici e voltmetrici.

**La misura che fornisce è il prodotto della tensione che attraversa i morsetti voltmetrici per la corrente che scorre tra quelli amperometrici per il coseno dell'angolo di sfasamento tra le due:**

$$W = VI \cos(\bar{V}\bar{I}) = VI \cos \varphi = VI \cos(\varphi_V - \varphi_I)$$

L'orientazione dei morsetti amperometrici corrisponde a quella della usuale freccia che entri nel morsetto contrassegnato dal +.



L'orientazione dei morsetti voltmetrici indica invece la tensione presa col verso della usuale freccia nella direzione del +.

La dipendenza della misurazione dall'angolo di sfasamento rende ragione alla necessità di orientare i morsetti: scambiare l'ordine di una coppia significa l'inversione del segno.

Inoltre, mediante l'impiego simultaneo di un voltmetro e di un amperometro e di un wattmetro è possibile valutare il fattore di potenza.

$$\cos \varphi = \frac{W}{VI}$$

L'indicazione fornita dal wattmetro inoltre ha senso fisico se la tensione e la corrente relative alle due coppie di morsetti sono riferibili ad uno stesso bipolo, del quale lo strumento misura la potenza attiva.

# RIFASAMENTO

Si introduce in questo modo un problema di natura economico-tariffaria.

Si è visto come l'operatore impedenza  $\bar{Z} = R + jX$  sia caratterizzato da un argomento che coincide con l'angolo di sfasamento tra la tensione e la corrente.

L'ente produttore e fornitore di energia provvederà a fatturare l'energia assorbita in un determinato periodo di tempo, l'utente è perciò chiamato a pagare una somma legata all'integrale della potenza attiva nel tempo impiegata dal suo carico:

$$\int P dt = \int VI \cos \varphi dt$$

**Il fornitore dovrà perciò erogare** - a parità di  $P$  e  $V$  - **una corrente pari a**

$$I = \frac{P}{V \cos \varphi}$$

Perciò se:

$$\begin{cases} \varphi \downarrow \Rightarrow \cos \varphi \uparrow \Rightarrow I \downarrow \\ \varphi \uparrow \Rightarrow \cos \varphi \downarrow \Rightarrow I \uparrow \end{cases}$$

E nel secondo caso è facile intuire che la corrente da erogare possa diventare inaccettabilmente grande, da parte del fornitore che sarà costretto a sopperire le perdite per effetto Joule e le cadute di tensione con conduttori di maggiore sezione, più costosi.

**Un carico a basso PF (e dunque molto sfasato) costituisce una condizione che può essere estremamente penalizzante per il fornitore.**

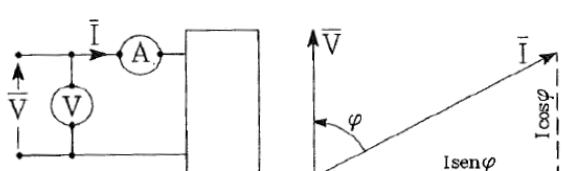
**Dunque, per  $PF = \cos \varphi \leq 0.9$  si ricorre al RIFASAMENTO**

Questo accorgimento, a parità di potenza attiva erogata porterà un aumento del PF del carico visto dal generatore, questo all'unico scopo di ridurre la corrente da fornire.

**Si rifasa il carico per soli carichi ohmico-induttivi che presentano un  $PF = \cos \varphi < 0.95$ , quindi se si è in presenza di motori elettrici asincroni, lampade a scarica, saldatrici a trasformatore, forni ad induzione, che vengono visti dai morsetti del generatore come componenti induttive di impedenza.**

**Il rifasamento mira, dunque, a compensare le componenti induttive con la creazione locale di potenza reattiva di tipo capacitivo.**

## → PERCHÉ DI TIPO CAPACITIVO?



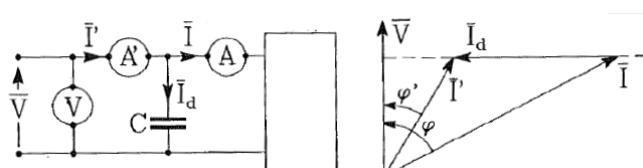
Sia un **generico carico** come questo qui a fianco, è **sottoposto ad una  $\bar{V}$  ed assorbe una  $\bar{I}$  notevolmente sfasata in ritardo**.

Poiché  $\varphi \uparrow \Rightarrow \cos \varphi \downarrow \Rightarrow I \uparrow \Rightarrow$  **occorre rifasare**, occorre diminuire l'angolo di ritardo, occorre avvicinare il fasore  $\bar{I}$  al fasore  $\bar{V}$ .

Per ridurre l'angolo di sfasamento e dunque la corrente assorbita, è necessario aggiungerne una che, alla stessa tensione (=collegata in parallelo), risulti in **anticipo**, questa prende dunque le sembianze di una **corrente derivata da un condensatore  $C$**  e dovrà soddisfare la seguente relazione:

$$\bar{I}' = \bar{I} + \bar{I}_d$$

In modo da modificare algebricamente la corrente.



In questo modo oltre a ottenere una diminuzione di angolo, ottengo anche una potenza reattiva di tipo capacitivo, per definizione **negativa**, che andrà a diminuire la potenza reattiva originaria.

## → COME SI DIMENSIONA IL CONDENSATORE DA APPLICARE AL CARICO?

Si passa attraverso  $P$  e  $Q$ .

**Prima del rifasamento** si ha, noto che:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{Q}{P}$$

E dunque:

$$\frac{Q}{P} = \frac{VI \sin \varphi}{VI \cos \varphi} = \tan \varphi \Rightarrow Q = P \tan \varphi$$

E poiché:

$$\begin{cases} Q_L = \omega L I^2 \\ Q_C = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -\omega C V^2 \end{cases}$$

C'è la conferma del fatto che un rifasamento, e quindi un'aggiunta di un banco di condensatori in derivazione ad un carico, ridurrà la potenza reattiva. Se infatti questa è positiva, come sarà sempre la potenza reattiva dei carichi reali ai quali si applicherà il rifasamento, questa viene necessariamente ridotta da quella del condensatore di rifasamento.

**Per dimensionare il condensatore si parte dall'angolo di rifasamento desiderato, noto:  $\varphi' = \arccos(0.95)$ :**

$$\begin{aligned} \varphi' &= \arctan\left(\frac{Q'}{P}\right) = \arctan\left(\frac{Q - |Q_C|}{P}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tan \varphi' = \frac{Q - |Q_C|}{P} \Rightarrow \\ &\quad \text{Dalla definizione} \\ &\quad \text{di } Q_C \\ |Q_C| &= Q - P \tan \varphi' = Q - Q' \quad \hat{=} \quad \omega C V^2 \\ |Q_C| &= \omega C V^2 \\ \mathbf{C} &= \frac{|Q_C|}{V^2 \omega} \end{aligned}$$

Si nota da subito come  $C \sim \frac{1}{V^2}$  perciò se  $V \uparrow$ ,  $C \downarrow$  e i costi del rifasamento si contengono.

**Il controllo che deve avvenire dopo il rifasamento**, per verificare la buona riuscita di questo, deve soddisfare:

$$\begin{aligned} \bar{I}' &< I \\ Q' &< Q \\ \varphi' &< \varphi \\ \cos \varphi' &> \cos \varphi \end{aligned}$$

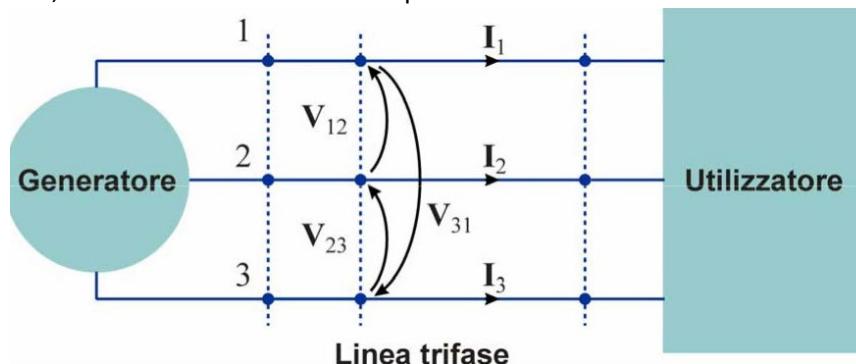
# SISTEMI TRIFASE: TRASPORTO E DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA

Il trasporto e la distribuzione dell'energia elettrica dai luoghi di produzione ai luoghi di utilizzazione avvengono per mezzo di linee elettriche in regime sinusoidale a tre fili.

Lo schema di rete trifase è composto dai tre fili conduttori di fase, capaci di scambiare potenze maggiori, e il quarto messo a terra, di neutro.

Il filo di neutro ha il compito di far circolare la corrente in maglie chiuse, e quello di fornire un riferimento per i potenziali.

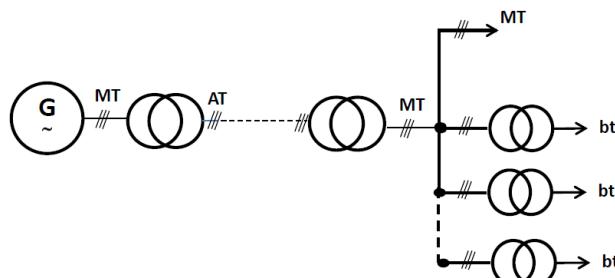
Un sistema trifase è alimentato mediante generatori a tre terminali rappresentabili mediante terne di generatori sinusoidali isofrequenziali, sono il fatto di essere isofrequenziali è il solo e unico vincolo dei sistemi trifase.



Si distinguono:

- Le **Tensioni Stellate** (o **di fase**), quelle proprie dei generatori:  $E_1, E_2, E_3$ ;
- Le **Tensioni Concatenate**, come differenza tra quelle stellate:  $V_{12}, V_{23}, V_{31}$ ;
- Le **Correnti di Linea** che scorrono sulle tre linee differenti:  $I_1, I_2, I_3$ ;
- I **VALORI NOMINALI** come i **VALORI EFFICACI** delle tensioni concatenate.

Lo schema unifilare qui di seguito rappresentato rappresenta con il simbolo  $\text{///}$  tre fili distinti, lo fa coincidere così con una linea trifase.



## DEFINIZIONI E PROPRIETÀ

Si definisce **linea polifase simmetrica** un sistema di grandezze sinusoidali del tipo:

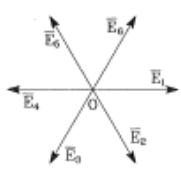
$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = E_M \sin(\omega t) \\ e_2 = E_M \sin\left(\omega t \pm \frac{2\pi}{n}\right) \\ \vdots \\ e_n = E_M \sin\left(\omega t \pm 2\pi \frac{n-1}{n}\right) \end{array} \right.$$

Ove  $n$  è il numero delle fasi.

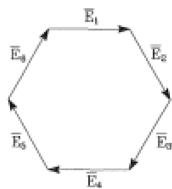
Si nota con facilità come i **componenti di un sistema polifase simmetrico hanno in comune sia il valore massimo  $E_M$  sia lo sfasamento reciproco  $\pm \frac{2\pi}{n}$** .

Un sistema polifase simmetrico si definisce **diretto** o **inverso** a seconda che, con riferimento a uno qualunque dei componenti, il successivo risulti in **ritardo (-)** oppure **in anticipo (+)**.

Attraverso il metodo simbolico un sistema polifase può essere rappresentato mediante il diagramma fasoriale dei suoi componenti.



Per un sistema esafase simmetrico diretto a partire ad esempio da  $E_1$ , scelto come riferimento e posto sull'asse reale, avente fase nulla, gli altri cinque fasori risultano sfasati di uno stesso angolo pari a  $\varphi = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} = -60^\circ$ , per ottenere la stella di centro  $O$ , detto Centro stella dei fasori.



**Un'importante proprietà dei sistemi polifase simmetrici** è che la somma delle tensioni stellate è identicamente nulla.

Perciò se  $E_i$  sono le tensioni di fase, per sistemi simmetrici diretti o inversi:

$$\sum E_i = 0$$

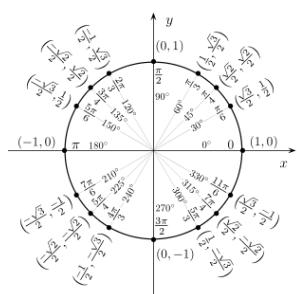
Per le tensioni concatenate  $V_{ij}$ , la cui somma è sempre nulla per definizione, dato che, si vede graficamente che chiudono sempre il poligono formato dalle estremità delle tensioni stellate.

**CI SI OCCUPERÀ DEI SOLI SISTEMI TRIFASE SIMMETRICI DIRETTI  $\varphi = -\frac{2\pi}{3} = -120^\circ$ :**

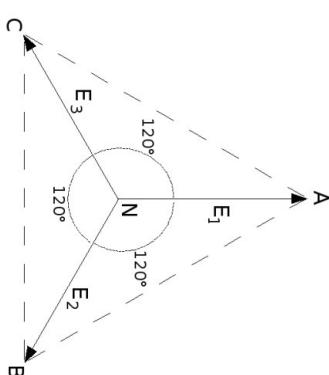
$$\begin{cases} e_1 = E_M \sin(\omega t) \\ e_2 = E_M \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3 = E_M \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{3-1}{3}\right) \end{cases} = \begin{cases} e_1 = E_M \sin(\omega t) \\ e_2 = E_M \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ e_3 = E_M \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{cases}$$

Grazie alla proprietà di isofrequenzialità si può applicare il metodo simbolico:

$$\begin{cases} e_1 = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \sin(\omega t) \\ e_2 = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ e_3 = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{cases} = \begin{cases} \bar{E}_1 = E e^{j0} \\ \bar{E}_2 = E e^{-j\frac{2}{3}\pi} = E e^{j\frac{4}{3}\pi} \\ \bar{E}_3 = E e^{-j\frac{4}{3}\pi} = E e^{j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{E}_1 = E e^{j0} \\ \bar{E}_2 = E e^{-j\frac{2}{3}\pi} = E e^{j\frac{4}{3}\pi} \\ \bar{E}_3 = E e^{-j\frac{4}{3}\pi} = E e^{j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$



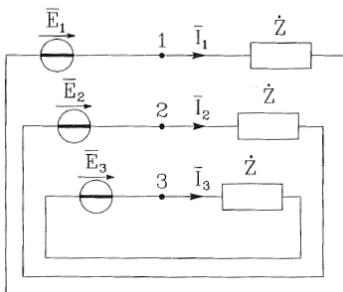
Usando poi il valore efficace  $E = \frac{E_M}{\sqrt{2}}$  al posto del valore massimo non si perde neanche la proprietà di simmetria, questa data dal fatto che i valori massimi sono gli stessi per tutta la terna.

La terna risulterà così allo stesso modo simmetrica e diretta, con i componenti sfasati tra di loro di  $\varphi = -\frac{2\pi}{3} = -120^\circ$ : **il fasore  $\bar{E}_2$  è in ritardo rispetto al fasore  $\bar{E}_1$ , ed  $\bar{E}_3$  è in ritardo rispetto ad  $\bar{E}_2$ .**

Si arriva inoltre, in questo modo, ad un'altra definizione più pragmatica **di SEQUENZA DIRETTA (con sfasamento in ritardo)**:

**Se si considera un qualsiasi fasore della terna tale fasore per sovrapporsi a quello che lo precede deve ruotare di 120° in senso positivo (cioè antiorario).**

## SISTEMI TRIFASE A STELLA



Si considerino **tre circuiti indipendenti**: i tre generatori che erogano le **tensioni stellate  $\bar{E}_i$** , costituiscono una **terna simmetrica diretta** e sono **collegati** ciascuno ad **una impedenza di uguale valore  $\dot{Z}$** .

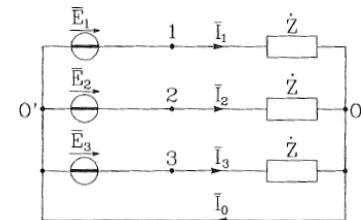
Le **correnti di linea** circolanti risultano anch'esse di **uguale valore efficace  $I$**  e **sfasate di uno stesso angolo  $\varphi$**  nei confronti della **rispettiva tensione** di alimentazione:

$$\bar{E}_1 \bar{I}_1 = \bar{E}_2 \bar{I}_2 = \bar{E}_3 \bar{I}_3 = \varphi$$

In queste condizioni, dunque, si è al cospetto di un sistema trifase **simmetrico nelle tensioni** (=generatori di tensione simmetrici) ed **equilibrato nelle correnti** (=le **impedenze di carico sono uguali**).

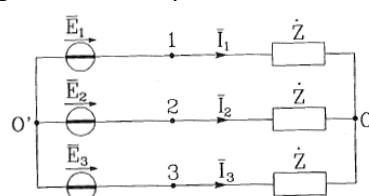
Si nota però come il regime di funzionamento di ciascun circuito non venga in minima parte alterato se si mette in comune di uno dei fili che collegano l'impedenza al generatore.

D'altro canto, la **simmetria del sistema anche nelle correnti porta a concludere che è identicamente nulla la corrente  $\bar{I}_0 = (\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3)$**  circolante nel filo in comune, filo di neutro:

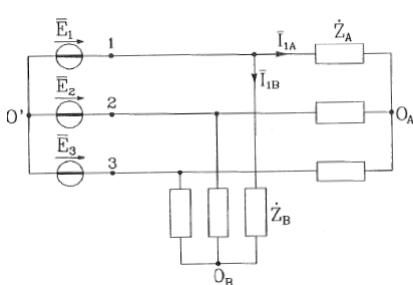


$$\begin{cases} \bar{I}_1 = I e^{j0} = I \\ \bar{I}_2 = I e^{-j\frac{2}{3}\pi} = I[\cos(-\frac{2}{3}\pi) + j \sin(-\frac{2}{3}\pi)] \\ \bar{I}_3 = I e^{j\frac{2}{3}\pi} = I[\cos(+\frac{2}{3}\pi) + j \sin(+\frac{2}{3}\pi)] \\ \bar{I}_0 = I[1 + \cos(-\frac{2}{3}\pi) + \cos(+\frac{2}{3}\pi)] + jI[0 + \sin(-\frac{2}{3}\pi) + \sin(+\frac{2}{3}\pi)] \\ \bar{I}_0 = I[1 + \cos(-\frac{2}{3}\pi) + \cos(+\frac{2}{3}\pi)] + jI[0 + \sin(-\frac{2}{3}\pi) + \sin(+\frac{2}{3}\pi)] \\ \bar{I}_0 = I\left[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] + jI\left[0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 0 \end{cases}$$

In questo modo il filo di neutro può essere del tutto eliminato - con evidente guadagno economico - per dar luogo alla rete trifase a tre solo fili, nella quale permane la condizione di equipotenzialità sia di  $O$  che di  $O'$ : rispettivamente il centro stella dei generatori e quello dei carichi.



Tutte le considerazioni finora fatte possono essere ripetute anche nel caso in cui più banchi di impedenze siano collegate - COME IN FIGURA - ai morsetti dei tre generatori disposti a stella:  $\bar{Z}_A$ ;  $\bar{Z}_B$ .



Dal momento che **ciascun banco costituisce un sistema equilibrato**, i rispettivi centri stella  $O_A$  e  $O_B$  sono **equipotenziali** con quello  $O'$  dei generatori e, dunque, **equipotenziali fra loro**.

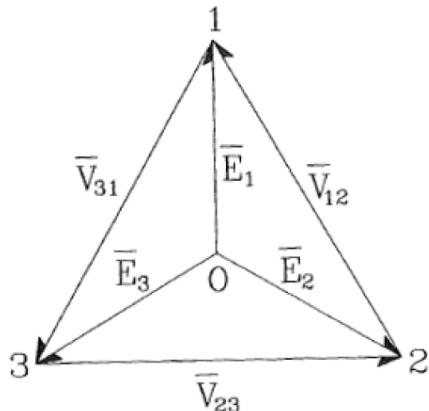
Questo risultato può essere generalizzato **nell'unicità del centro stella per i sistemi trifase simmetrici ed equilibrati**:

**Carichi trifase equilibrati in un insieme comunque numeroso, collegati come le terne di impedenze in figura, risultano collegate in parallelo rispetto ai morsetti dei generatori.**

In un sistema trifase a stella oltre a distinguere le tensioni Stellate (o di fase)  $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ , si distinguono anche le tensioni Concatenate, quelle tra linea e linea:

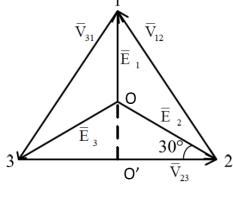
$$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2, \bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3, \bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1$$

Poiché combinazione lineare di una terna simmetrica diretta, anche la terna delle tensioni concatenate risulta simmetrica diretta e le tensioni stellate con quelle concatenate si possono raffigurare insieme attraverso il triangolo delle tensioni



Da questo diagramma si vede come, assegnata una qualunque delle sei tensioni, sia possibile ricavare immediatamente le rimanenti, ricordando semplicemente, che si tratta di un triangolo equilatero.

Perciò le proprietà geometriche dei triangoli equilateri si ha come le tensioni concatenate siano  $\sqrt{3}$  volte più grandi di quelle stellate.

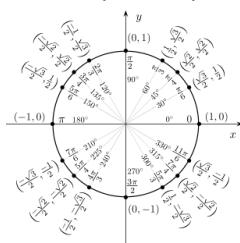


In un triangolo rettangolo  $O'0'2'$ , la misura del cateto  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  è uguale al prodotto dell'ipotenusa  $\bar{E}_2$  per il coseno dell'angolo adiacente:

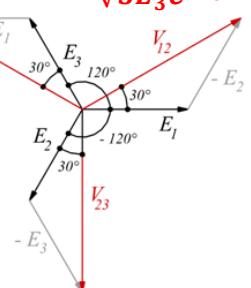
$$\frac{\bar{V}_{23}}{2} = \bar{E}_2 \cos(30^\circ) = \frac{\bar{E}_2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\bar{V}_{23} = 2 \frac{\bar{E}_2 \sqrt{3}}{2} = \bar{E}_2 \sqrt{3}$$

In questo modo appare immediatamente come le tensioni concatenate siano sfasate in anticipo rispetto a quelle stellate di  $30^\circ$ , e in più, così come quelle stellate sono sfasate tra di loro di  $120^\circ$  e siano perciò una terna simmetrica diretta; perciò, per le tensioni stellate si può scrivere:



$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = \sqrt{3}\bar{E}_1 e^{j(0+\frac{\pi}{6})} = \sqrt{3}\bar{E}_1 e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{V}_{23} = \sqrt{3}\bar{E}_2 e^{j(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{3}\bar{E}_2 e^{-j\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}\bar{E}_2 e^{j\frac{3\pi}{2}} \\ \bar{V}_{31} = \sqrt{3}\bar{E}_3 e^{j(\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3})} = \sqrt{3}\bar{E}_3 e^{-j\frac{7}{6}\pi} = \sqrt{3}\bar{E}_3 e^{j\frac{5}{6}\pi} \end{cases}$$



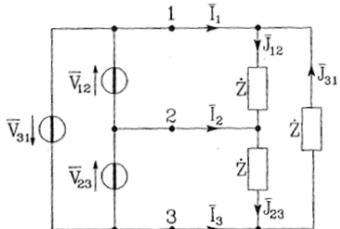
### RETI TRIFASE A TRIANGOLO

Il regime delle correnti di linea non cambia se si sostituisce la terna di generatori a stella con un'altra terna simmetrica di generatori che, inseriti fra i fili di linea, forniscono proprio le tensioni concatenate preesistenti. Le tre impedanze di carico possono essere sostituite da una equivalente configurazione a triangolo.

Sia  $Z_*$  a stella, e  $Z_{A,B,C}$  a triangolo, noto che il carico debba essere equilibrato e quindi le tre impedanze a triangolo devono essere tra loro uguali così come devono esserlo quelle a stella, si sa che:

$$\bar{Z}_* = \frac{\bar{Z}_A \bar{Z}_B}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_B + \bar{Z}_C} = \frac{\bar{Z}_A^2}{3\bar{Z}_A} = \frac{\bar{Z}_A}{3}$$

$$\bar{Z}_* = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3}$$

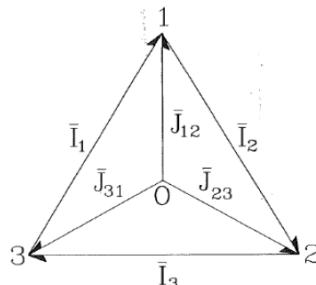


Si arriva così alla **configurazione del sistema trifase a triangolo**:

**Le Correnti di Lato  $\bar{J}_{ik}$  circolanti nei lati del triangolo, sono legate alle correnti di linea  $\bar{I}_i$  attraverso le semplici relazioni derivanti dalla LKC e formano, perciò, anche esse una terna simmetrica:**

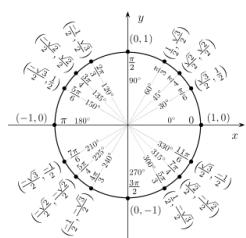
$$\bar{I}_1 = \bar{J}_{21} - \bar{J}_{31}; \quad \bar{I}_2 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{21}; \quad \bar{I}_3 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{23}$$

L'insieme delle sei correnti può anch'esso essere complessivamente rappresentato dal seguente diagramma fasoriale:



In questo modo si ha ancora che per le proprietà dei triangoli equilateri, **le correnti di linea risultano  $\sqrt{3}$  volte più grandi di quelle di lato e sfasate in ritardo rispetto a quelle di lato di  $30^\circ$ .**

Inoltre, assegnata una corrente, è possibile ricavare subito le rimanenti proprio come si è fatto attraverso il triangolo delle tensioni per il trifase collegato a stella.



$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_3 = \bar{J}_{23} \cos(30^\circ) = \frac{\bar{J}_{23}\sqrt{3}}{2} \\ \bar{I}_3 = 2 \frac{\bar{J}_{23}\sqrt{3}}{2} = \bar{J}_{23}\sqrt{3} \\ \bar{I}_1 = \sqrt{3}\bar{J}_{31}e^{j(0-\frac{\pi}{6})} = \sqrt{3}\bar{J}_{31}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\bar{J}_{31}e^{j\frac{11\pi}{6}} \\ \bar{I}_2 = \sqrt{3}\bar{J}_{12}e^{j(-\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{3}\bar{J}_{12}e^{-j\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}\bar{J}_{12}e^{j\frac{7\pi}{6}} \\ \bar{J}_{31} = \bar{J}_{23}\sqrt{3}e^{j(-\frac{\pi}{6}-\frac{4}{3}\pi)} = \sqrt{3}\bar{J}_{12}e^{-j\frac{9\pi}{6}} = \sqrt{3}\bar{J}_{12}e^{-j\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3}\bar{J}_{12}e^{j\frac{\pi}{2}} \end{array} \right.$$

La configurazione a triangolo delle impedenze di carico non rende più accessibile il centro stella, che può essere, tuttavia, definito in maniera formale come il baricentro del triangolo equilatero delle tensioni concatenate.

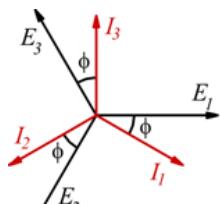
A partire dall'individuazione del centro stella si possono tracciare sia i fasori delle tensioni stellate che di quelle concatenate.

La non accessibilità del centro stella si verifica anche nelle situazioni in cui sia i generatori che i carichi risultano distanti dall'operatore: in mancanza del filo di neutro, rimarrà lo stesso la possibilità operativa di misurare le tensioni concatenate delle tre linee.

## POTENZA NEI SISTEMI TRIFASE

**La potenza istantanea in un sistema trifase è definita dalla somma delle 3 potenze istantanee delle 3 fasi:**

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)$$



In un **sistema trifase simmetrico ed equilibrato** le **correnti di linea hanno un uguale valore efficace** e ciascuna di esse è **sfasata di uno stesso angolo  $\varphi$  (in ritardo)** nei confronti della tensione stella di uguale indice, questo perché, se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Z} = Ze^{j\varphi} \\ \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}} = \frac{Ee^{j0}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{E}{Z}e^{j(0-\varphi)} = Ie^{j\varphi} \\ \bar{I}_2 = Ie^{j(-\frac{2}{3}\pi-\varphi)} \\ \bar{I}_3 = Ie^{j(-\frac{4}{3}\pi-\varphi)} \end{array} \right.$$

Per cui, ritornando alla variazione nel tempo si ha:

$$\begin{cases} i_1(t) = I_M \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) = I_M \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) \\ i_3(t) = I_M \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \end{cases}$$

$$p(t) = \underbrace{\sqrt{2}E \sin(\omega t) \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)}_1 + \underbrace{\sqrt{2}E \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right)}_2 + \underbrace{\sqrt{2}E \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right)}_3$$

- 1)  $= \sqrt{2}E \sin(\omega t) \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi) = 2EI \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \omega t - \varphi)] =$   
 $= EI[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)]$
- 2)  $= \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) =$   
 $= EI \left[ \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \right]$
- 3)  $= \sqrt{2}E \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) = EI \left[ \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right) \right]$   
 $p(t) = EI[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)] + EI \left[ \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \right] + EI \left[ \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right) \right] =$   
 $= 3EI \cos(\varphi) - EI \cos(2\omega t - \varphi) - EI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) - EI \cos\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right) =$   
 $= 3EI \cos(\varphi) = cost = P$

Si definisce così la potenza media, o attiva o reale  $P$ , come l'unico e il solo termine costante della potenza istantanea:

$$P = 3EI \cos(\varphi)$$

Tenendo poi conto della relazione tra valore efficace delle tensioni stellate  $E$  di quelle concatenate  $V$ :  
 $V = \sqrt{3}E$ :

$$P = 3EI \cos(\varphi) = 3 \frac{V}{\sqrt{3}} I \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} 3 \frac{V}{\sqrt{3}} I \cos(\varphi) = 3\sqrt{3} \frac{V}{3} I \cos(\varphi) = \sqrt{3}VI \cos(\varphi)$$

L'insieme delle potenze fluttuanti delle 3 fasi, variabili nel tempo con legge sinusoidale a pulsazione  $2\omega$ , costituisce una terna simmetrica a somma istantanea nulla. Se ne conclude che:

- 1) In un sistema trifase simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea è costante e coincide con la potenza attiva.
- 2) La potenza reattiva assorbita da un carico trifase simmetrico ed equilibrato è perciò definita in maniera del tutto analoga a quanto fatto nel caso monofase:

$$Q = 3EI \sin \varphi = \sqrt{3}VI \sin \varphi$$

- 3) La potenza apparente è invece

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3EI = \sqrt{3}VI$$

- 4) Il fattore di potenza di un carico trifase simmetrico ed equilibrato coincide con il coseno dell'angolo di sfasamento tra ciascuna delle correnti di linea e le tensioni stellate di uguale indice:

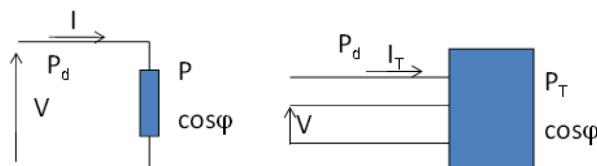
$$\cos \varphi = \cos(\bar{E}_1 \bar{I}_1) = \cos(\bar{E}_2 \bar{I}_2) = \cos(\bar{E}_3 \bar{I}_3)$$

## VANTAGGI DEL TRIFASE

Anche a prescindere dal vantaggio ora evidenziato, che si aggiunge a quello relativo all'annullarsi della potenza fluttuante nei sistemi simmetrici ed equilibrati, occorre, considerare che i grandi e grandissimi motori elettrici (i cosiddetti 'motori asincroni'), per potenze fino a diverse decine di MW, sono funzionalmente legati ad una alimentazione trifase.

**L'utilizzo dei sistemi trifase per la trasmissione dell'energia elettrica è legato ad alcune considerazioni che li rendono preferibili ai sistemi sinusoidali di tipo monofase.**

Si considerino due carichi a confronto, uno monofase e uno trifase, tali che risulti per entrambi identica sia la potenza attiva assorbita  $P$  che quella dissipata per effetto Joule  $P_d$  nei conduttori di alimentazione, supposti di pari resistività  $\rho$  e lunghezza  $L$ .



Indicando con il pedice 'T' le grandezze specifiche del caso trifase, per le due condizioni si potrà scrivere, a parità di potenza erogata e dissipata:

$$\begin{cases} P = VI \cos \varphi \\ P_T = \sqrt{3}V I_T \cos(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \textcolor{red}{P = P_T} \Rightarrow VI \cos \varphi = \sqrt{3}V I_T \cos(\varphi) \Rightarrow \textcolor{red}{I_T = \frac{I}{\sqrt{3}}}$$

$$\begin{cases} P_{diss} = 2RI^2 \\ P_{Tdiss} = 3R_T I_T^2 \end{cases} \Rightarrow \textcolor{red}{P_{diss} = P_{Tdiss}} \Rightarrow \frac{2\rho L}{S} I^2 = \frac{3\rho L}{S_T} \left( \frac{I}{\sqrt{3}} \right)^2 \Rightarrow \textcolor{red}{S_T = \frac{1}{2}S}$$

**Nel caso trifase la corrente necessaria sarà  $\sqrt{3}$  più piccola di quella trifase.**

**La sezione dei conduttori trifase risulta pari alla metà di quella dei conduttori del carico monofase.**

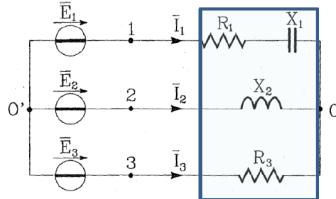
Il volume di rame richiesto nei due casi sarà:

$$\begin{cases} V = 2LS \\ V_T = 3LS_T = 3L \frac{1}{2}S \end{cases} \Rightarrow \textcolor{red}{V_T = \frac{3}{4}V}$$

Si conclude che, a parità di potenza impegnata e di distanza dai generatori, la scelta della alimentazione trifase consente **un risparmio del 25% in volume**, e di conseguenza, in costo di rame rispetto al caso monofase.

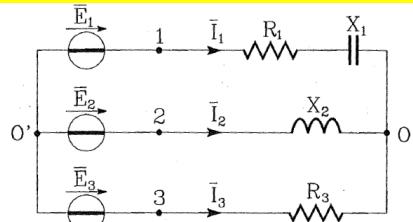
# CARICHI SIMMETRICI E SQUILIBRATI

Come operare nel caso di un carico simmetrico e squilibrato?



Una rete trifase costituita da un carico squilibrato può essere studiata piuttosto semplicemente, sfruttando la simmetria della terna delle tensioni di alimentazione.

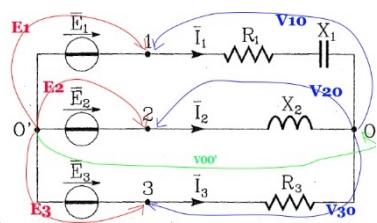
Si prenderà in esame il **caso in cui i tre sistemi trifase privo di neutro, venga persa la equipotenzialità tra il centro stella del carico e quello dei generatori**: si valuterà a questo punto **il Fasore spostamento del centro stella**.



Il centro stella O dei generatori non risulta più equipotenziale a quello dei generatori O'. Il fasore spostamento centro stella, pari alla differenza di potenziale  $\bar{V}_{OO'}$  può essere calcolato **attraverso la formula di Millmann**. Assumendo sempre  $\bar{E}_1$  a fase nulla si avrà:

$$\bar{V}_{OO'} = \frac{\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3}{\frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{jX_2} + \frac{1}{R_3}}$$

A questo punto **si possono valutare le tensioni del carico attraverso la LKT**, ovvero:



$$\begin{cases} \bar{V}_{10} = \bar{E}_1 - \bar{V}_{OO'} \\ \bar{V}_{20} = \bar{E}_2 - \bar{V}_{OO'} \\ \bar{V}_{30} = \bar{E}_3 - \bar{V}_{OO'} \end{cases}$$

E le **correnti** potranno così essere facilmente **valutate attraverso la Legge di Ohm generalizzata**:

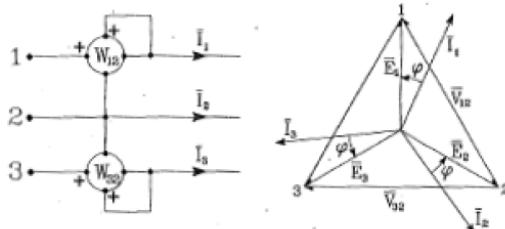
$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{10}}{R_1 + jX_1} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{20}}{jX_2} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{30}}{R_3} \end{cases}$$

**Per un carico squilibrato in derivazione invece, basta applicare le LKT e la legge di Ohm.**

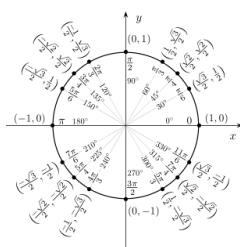
# INSERZIONE ARON

Un **metodo importante per la misura della potenza nei sistemi trifase** è quello a due wattmetri, noto come **Metodo/Inserzione ARON**.

Si consideri un sistema simmetrico ed equilibrato e il relativo diagramma fasoriale. I due wattmetri si suppongano inseriti come in figura.



Dalle relazioni del singolo wattmetro e da considerazione geometriche è possibile ricavare:



$$W_{12} = \operatorname{Re}(\bar{V}_{12}\bar{I}_1) = VI \cos(\varphi_{V12} - \varphi_{I_1})$$

$$\varphi_{V12} - \varphi_{I_1} = \left(\varphi_{E_1} + \frac{\pi}{6}\right) - (\varphi_{E_1} - \varphi) = \varphi + \frac{\pi}{6}$$

$$W_{12} = VI \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$W_{32} = \operatorname{Re}(\bar{V}_{32}\bar{I}_3) = VI \cos(\varphi_{V32} - \varphi_{I_3})$$

$$\varphi_{V23} = \varphi_{V12} - \frac{2}{3}\pi = \varphi_{E_1} + \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi = \varphi_{E_1} - \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{V32} = \varphi_{E_1} + \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{I_3} = \varphi_{I_2} - \frac{2}{3}\pi - \varphi = \overbrace{\varphi_{I_1} - \frac{2}{3}\pi - \varphi}^{\varphi_{I_2}} - \frac{2}{3}\pi - \varphi = \overbrace{\varphi_{E_1} + \varphi}^{\varphi_{I_1}} - \frac{2}{3}\pi - \varphi - \frac{2}{3}\pi - \varphi =$$

$$= \varphi_{E_1} - \frac{4}{3}\pi - \varphi = \varphi_{E_1} + \frac{2}{3}\pi - \varphi$$

$$\varphi_{V32} - \varphi_{I_3} = \left(\varphi_{E_1} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\varphi_{E_1} + \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) =$$

$$= \varphi_{E_1} - \varphi_{E_1} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\pi + \varphi = -\frac{\pi}{6} + \varphi$$

$$W_{32} = VI \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$$

- 1) Attraverso le formule di prostaferesi per la **somma** dei coseni:

$$W_{12} + W_{32} = VI \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + VI \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= VI \left[ 2 \cos\left(\frac{(\varphi + \frac{\pi}{6}) + (\varphi - \frac{\pi}{6})}{2}\right) \cos\left(\frac{(\varphi + \frac{\pi}{6}) - (\varphi - \frac{\pi}{6})}{2}\right) \right] =$$

$$= 2VI \left[ \cos\left(\frac{2\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{2}{6}\pi}{2}\right) \right] = 2VI \left[ \cos(\varphi) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = 2VI \cos(\varphi) \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}VI \cos \varphi = P$$

$$W_{12} + W_{32} = \sqrt{3}VI \cos \varphi = P$$

**La somma delle misurazioni coincide con la potenza attiva totale assorbita dalla rete trifase.**

2) Attraverso le formule di prostaferesi per la **differenza** dei coseni:

$$\begin{aligned}
 W_{32} - W_{12} &= VI \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - VI \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \\
 &= VI \left[ 2 \sin\left(\frac{(\varphi - \frac{\pi}{6}) + (\varphi + \frac{\pi}{6})}{2}\right) \sin\left(\frac{(\varphi - \frac{\pi}{6}) - (\varphi + \frac{\pi}{6})}{2}\right) \right] = \\
 &= 2VI \left[ \sin\left(\frac{2\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{-\frac{2}{6}\pi}{2}\right) \right] = 2VI \left[ \sin(\varphi) \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = 2VI \left[ \sin(\varphi) \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right] = 2VI \sin(\varphi) \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \textcolor{red}{VI \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{32} - W_{12} &= VI \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \\
 Q &= \sqrt{3}(W_{32} - W_{12})
 \end{aligned}$$

**La differenza delle misurazioni coincide - a meno di un  $\sqrt{3}$  - con la potenza reattiva totale assorbita dalla rete trifase.**

**La conoscenza di  $P$  e  $Q$  consente così di valutare immediatamente la potenza apparente e il fattore di potenza del sistema:**

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{[W_{12} + W_{32}]^2 + [\sqrt{3}(W_{32} - W_{12})]^2} \\
 \varphi &= \arctan \left[ \frac{Q}{P} \right] = \arctan \left[ \frac{(\sqrt{3}(W_{32} - W_{12}))}{(W_{12} + W_{32})} \right] \\
 \cos \varphi &= \cos \left\{ \arctan \left[ \frac{(\sqrt{3}(W_{32} - W_{12}))}{(W_{12} + W_{32})} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Un **diverso metodo per esprimere la potenza attiva attraverso** la somma delle misurazioni dei wattmetri secondo l'inserzione **Aron** è

$$\begin{aligned}
 \textcolor{red}{W_{12} + W_{32}} &= \text{Re}(\bar{V}_{12}\tilde{I}_1 + \bar{V}_{32}\tilde{I}_3) = \text{Re}[(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)\tilde{I}_1 + (\bar{E}_3 - \bar{E}_2)\tilde{I}_3] = \text{Re}[(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)\tilde{I}_1 + (\bar{E}_3 - \bar{E}_2)\tilde{I}_3] = \\
 &= \text{Re}[\bar{E}_1\tilde{I}_1 - \bar{E}_2\tilde{I}_1 + \bar{E}_3\tilde{I}_3 - \bar{E}_2\tilde{I}_3] = \text{Re} \left[ \bar{E}_1\tilde{I}_1 + \bar{E}_3\tilde{I}_3 + \bar{E}_2 \underbrace{(-\tilde{I}_3 - \tilde{I}_1)}_{\tilde{I}_2} \right] = \textcolor{red}{\text{Re}[\bar{E}_1\tilde{I}_1 + \bar{E}_3\tilde{I}_3 + \bar{E}_2\tilde{I}_2]} \\
 &\textcolor{red}{P = W_{12} + W_{32} = \text{Re}[\bar{E}_1\tilde{I}_1 + \bar{E}_2\tilde{I}_2 + \bar{E}_3\tilde{I}_3]}
 \end{aligned}$$

In questo modo **si è inoltre dimostrato che la potenza attiva si può anche calcolare per sistemi trifase dissimmetrici e squilibrati.**

La tecnica di misura adottata equivale, infatti, ad effettuare la misura con tre wattmetri ognuno riferito al centro stella artificiale: la scelta di porre il centro stella artificiale su uno dei qualsiasi dei fili di linea elimina la necessità di uno dei tre wattmetri, che si riducono, ai due dell'inserzione ARON.

# TRANSITORI

Sono definiti "transitori" quelle fasi in cui le grandezze elettriche di una rete non sono costanti né variano in maniera periodica.

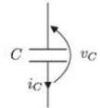
I transitori hanno luogo nelle reti elettriche contenenti almeno un elemento CONSERVATIVO, cioè bipoli in cui esiste la possibilità di accumulo di energia.

Quando una rete elettrica contenente elementi conservativi in equilibrio in uno stato stazionario viene sottoposta ad una variazione di stato, le sue grandezze elettriche variano portando la rete ad un nuovo stato di equilibrio in cui esse saranno di nuovo costanti.

I bipoli elettrici conservativi sono il **CONDENSATORE** caratterizzato dalla capacità  $C$  e l'**INDUTTORE** caratterizzato da un'induttanza  $L$ .

## CONDENSATORE

Il condensatore è un bipolo conservativo caratterizzato dal seguente legame tensione - corrente:



$$i(t) = \frac{dC(t)v(t)}{dt}$$

Il parametro  $C$  è detto Capacità e la sua unità di misura è il Farad [ $F$ ].

Nel caso di invarianza temporale delle caratteristiche fisiche e geometriche, il **legame costitutivo di un condensatore** diviene:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

L'intensità di corrente in un condensatore è perciò in relazione differenziale con la **tensione**: quest'ultima **sarà una variabile CONTINUA nel dominio temporale**.

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

Tale relazione, seppur sia lineare, non è però sufficiente a fornire le informazioni per risalire al valore della tensione; infatti, questo sarà univocamente definito se e solo se sarà noto il valore della tensione all'istante  $t_0$  iniziale.

Ciò che andrà risolto sarà perciò un problema di Cauchy alle condizioni iniziali.

La **POTENZA assorbita da un condensatore** sarà:

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt}$$

L'**energia assorbita** dal condensatore nel generico intervallo di tempo  $(0, t)$  è quindi:

$$w_c(0, t) = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t v(t)i(t) dt = \int_0^t v(t)C \frac{dv(t)}{dt} dt = \left[ \frac{1}{2} C v^2(t) \right]_0^t = \frac{1}{2} C [v^2(t) - v^2(0)]$$

L'**energia assorbita nell'intervallo temporale considerato** quindi, **dipende esclusivamente dal valore che la tensione sul condensatore assume nell'istante iniziale 0 e nell'istante finale t e non dipende dalla particolare evoluzione temporale della tensione nell'intervallo**. Questo significa che in un intervallo di tempo può accadere che il condensatore immagazzini o ceda energia al resto della rete.

$$w_c(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

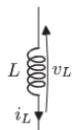
Esprime l'energia immagazzinata nel condensatore al generico istante  $t$ . Dato che **il condensatore è un bipolo passivo, esso NON è in grado di fornire più energia di quanto ne abbia immagazzinata** in precedenza.

**La tensione sul condensatore prende dunque le sembianze di una FUNZIONE DI STATO in quanto legata all'energia immagazzinata.**

**Una FUNZIONE DI STATO** è semplicemente una funzione la cui variazione tra due punti, detti stati del sistema, dipende solo dal valore di questi ultimi ammettendo sempre un differenziale esatto.

Di conseguenza, come precedentemente accennato, la tensione sul condensatore è una VARIABILE CONTINUA, se la sua forma d'onda si mantiene inoltre limitata.

## INDUTTORE



L'induttore è un bipolo conservativo caratterizzato dal seguente legame costitutivo:

$$v(t) = \frac{dL(t)i(t)}{dt}$$

Il parametro  $L$  è detto induttanza e la sua unità di misura è l'Henry [H].

Il bipolo induttore è il duale del bipolo condensatore.

Nel caso di invarianza temporale delle caratteristiche fisiche e geometriche **il legame costitutivo di un induttore diviene:**

$$v(t) = L \frac{i(t)}{dt}$$

**Che ci mostra come è la corrente questa volta a dover essere continua.**

Il legame integrale/differenziale di un induttore è:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$$

Per cui il legame tensione corrente è univocamente definito se e solo se è noto il valore della corrente  $i(t_0)$  all'istante iniziale  $t_0$ .

La **POTENZA assorbita da un induttore** è:

$$p(t) = v(t)i(t) = i(t)C \frac{di(t)}{dt}$$

E l'**energia assorbita** dell'induttore nel generico intervallo di tempo  $(0, t)$  sarà

$$w_L(0, t) = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t v(t)i(t) dt = \int_0^t i(t)C \frac{di(t)}{dt} dt = \left[ \frac{1}{2} L \int_0^t \frac{di^2(t)}{dt} dt \right] = \frac{1}{2} L [i^2(t) - i^2(0)]$$

**L'energia assorbita dell'intervallo di tempo considerato quindi dipende esclusivamente dal valore che la corrente nell'induttore assume nell'istante iniziale 0 e nell'istante finale t e non dipende così dalla particolare evoluzione temporale della corrente nell'intervallo temporale.** Questo significa che in un intervallo di tempo può accadere che l'induttore immagazzini o ceda energia al resto della rete.

La funzione

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

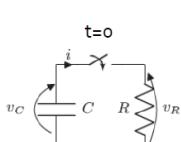
Esprime l'energia immagazzinata nell'induttore all'istante generico t.

Dato che **l'induttore è un bipolo passivo, esso non è in grado di fornire più energia di quanto non ne abbia immagazzinata** in precedenza.

**La corrente sull'induttore prende così le sembianze di una FUNZIONE DI STATO in quanto legata all'energia immagazzinata.**

Tale corrente è dunque una VARIABILE CONTINUA, se inoltre la forma d'onda della tensione si mantiene limitata.

## SCARICA DI UN CONDENSATORE



Generalmente un transitorio può immaginarsi dovuto all'apertura o alla chiusura istantanea di interruttori che escludano o inseriscono uno o più componenti, sia attivi che passivi.

**Nel transitorio di scarica (RISPOSTA/EVOLUZIONE LIBERA) si suppone il condensatore inizialmente carico supposto ad una generica tensione  $v_{c0}$ .**

Per cui nell'istante  $t = 0$  l'interruttore si chiude e inizia a fluire corrente fino a che il condensatore non ha disperso sulla resistenza l'energia che aveva immagazzinato. Dal momento che la tensione sul condensatore è una funzione di stato, essa NON può variare istantaneamente, di conseguenza il valore della tensione rimarrà invariato anche nell'istante immediatamente successivo alla chiusura dell'interruttore stesso:

$$\begin{cases} v_c(0^-) = v_{c0} \\ i(0^-) = 0A \end{cases} \Rightarrow v_c(0^-) = v_c(0^+) = v_{c0}$$

Dalla legge di Ohm si ottiene:

$$i(t = 0^+) = \frac{v_{c0}}{R}$$

Esaurita la fase transitoria il condensatore sarà carico e quindi non ci sarà più flusso di corrente:

$$i_C(t = \infty) = 0A; v_C(t = \infty) = Ri_C(t) = 0$$

Alla chiusura dell'interruttore ( $t = 0$ ) si possono evidenziare le seguenti relazioni:

$$i(t) = -i_C = -\frac{CdV_C}{dt}; i(t) = \frac{v_R}{R}; v_R = v_C$$

Di conseguenza è possibile scrivere l'equazione risolutiva:

$$-\frac{CdV_C}{dt} = \frac{v_C}{R}$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costanti, lineare ed omogenea la cui soluzione sarà:

$$v_C(t) = A e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

Se  $t_0 = 0$

$$v_C(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Da un punto di vista dimensionale, la costante è una tensione. [V]

Per trovare il valore di  $\tau$  è possibile sostituire nell'equazione risolutiva la soluzione generica:

$$\begin{aligned} -C \frac{d(A e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} &= \frac{A e^{-\frac{t}{\tau}}}{R} \\ C \frac{1}{\tau} A e^{-\frac{t}{\tau}} &= \frac{A e^{-\frac{t}{\tau}}}{R} \\ \tau &= RC \end{aligned}$$

$\tau$  è detta anche costante di tempo del Sistema. Dimensionalmente è un tempo in secondi. Essa indica la velocità dell'evoluzione del Sistema, in quanto risulta un parametro di scala della variabile tempo.

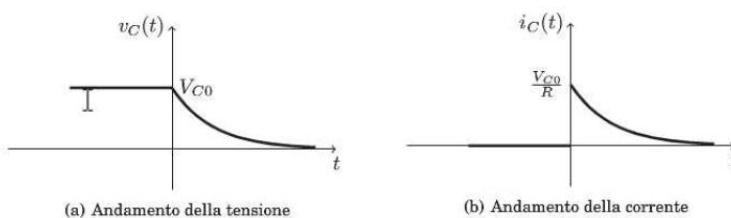
Per trovare il valore del coefficiente A si può utilizzare la seguente CC, per  $t = 0^+$

$$\begin{aligned} v_C(0^-) &= v_C(0^+) = v_{C0} \\ A &= v_{C0} \end{aligned}$$

Di conseguenza, gli andamenti della tensione ai capi del condensatore e della corrente nel circuito sono

$$\begin{aligned} v_C &= v_{C0} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i &= \frac{v_{C0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

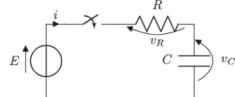
Dopo un intervallo temporale che va dai  $4\tau \div 5\tau$  il transitorio si esaurisce, scende ovvero al 2-3% del valore di partenza.



$$v_C = v_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = \frac{v_{C0}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

## TRANSITORIO FORZATO DEL PRIMO ORDINE



Anche in questo caso il condensatore è sottoposto ad una tensione  $v_{C0}$ :

$$\begin{cases} v_C(0^-) = v_{C0} \\ i(0^-) = 0A \end{cases}$$

Nell'istante  $t = 0$  l'interruttore si chiude e il condensatore si trova connesso in serie ad una resistenza e ad un generatore di tensione, in questo modo inizierà a fluire corrente fino a che il condensatore si caricherà fino ad un nuovo equilibrio.

Sempre dal fatto che la tensione sul condensatore è una funzione di stato, essa non può variare istantaneamente valore e quindi rimarrà invariato anche nell'istante immediatamente successivo alla chiusura del tasto:

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_{C0}$$

**Cosa accade nelle varie finestre temporali?**

**A  $t = 0$**

Tutti i bipoli sono attraversati dalla stessa corrente  $i(t)$  ed utilizzando le LKT si può scrivere:

$$E = v_R(t) + v_C(t)$$

Per risolvere il circuito è necessario considerare anche le equazioni di stato della capacità e della resistenza e l'equazione risolutiva prenderà così la seguente forma:

$$E = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C$$

Si tratta anche questa di un'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costante lineare, ma questa volta non omogenea.

Riordinando i termini e imponendo le condizioni iniziali per cui la tensione ai capi del condensatore sia la stessa per  $0^-$  come per  $0^+$ , si ha il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{E}{RC} \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases}$$

Che, come soluzione, avrà:

$$v_C(t) = v_C^0(t) + v_C^p(t)$$

Ove  $v_C^0(t)$  è la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = 0$$

La cui soluzione è:

$$v_C^0(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}}$$

E  $v_C^p(t)$  è la soluzione particolare, questa data dalla soluzione a regime del sistema, in questo caso:

$$v_C^p(t) = E$$

Perciò alla fine, si avrà:

$$v_C(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

Il valore della costante  $k$  si determinerà, solo a questo punto, dall'imposizione delle condizioni iniziali del problema di Cauchy:

$$v_C(0) = k + E = v_{C0}; k = v_{C0} - E$$

E la soluzione finale del problema sarà:

$$v_C(t) = (v_{C0} - E)e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

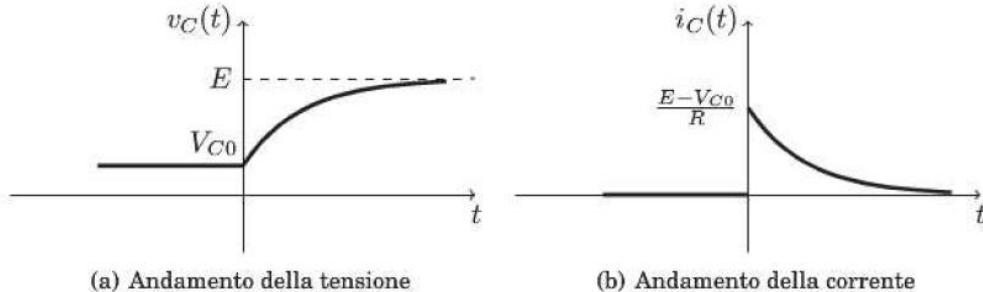
Nota così la  $v_C(t)$  è possibile determinare tutte le altre grandezze del circuito tramite le leggi di Kirchhoff:

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t) = -C \frac{1}{RC} (v_{C0} - E) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E - v_{C0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

In generale, la tensione ai capi di un condensatore si può scrivere:

$$v_c(t) = (v_{C0} - v_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_\infty$$

La costante  $\tau = RC = [s]$  è anche qua un tempo e indica la velocità dell'evoluzione del Sistema: risulta un parametro di scala della variabile tempo.



$$v_C(t) = (v_{C0} - E) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{1}{R}(v_{C0} - E) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

- La corrente in valore assoluto è massima per  $t = 0$  e decresce con t.
- Per  $t \rightarrow \infty$  o per  $t \gg \tau$ , ovvero alla fine del transitorio, si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$ .  
Questo si può riassumere dicendo che la capacità, alla fine del transitorio, si comporta come un circuito aperto.
- All'istante  $t = 0$ , ovvero all'inizio del transitorio, la corrente vale  $i(0) = \frac{E - v_{C0}}{R}$ .  
Questo valore è lo stesso che si avrebbe sostituendo alla capacità un generatore di tensione  $v_{C0}$ .  
In particolare, assumendo che la capacità sia inizialmente scarica, ovvero  $v_{C0} = 0$ , si può dire che all'inizio del transitorio la capacità si comporta come un cortocircuito.

### CONSIDERAZIONI CIRCUITO ERC

1. La forma vista finora dell'equazione dell'evoluzione del sistema permette di distinguere una componente transitoria, quella banalmente che ha andamento transitorio e che si esaurisce per  $t \gg \tau$ , ed una permanente che non dipende dal tempo/transitorietà del fenomeno.

$$v_c(t) = \underbrace{(v_{C0} - E) e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Transitoria}} + \underbrace{E}_{\text{Permanente}}$$

$$i(t) = \underbrace{\frac{E - v_{C0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Transitoria}}$$

La corrente in questo circuito presenta la sola componente transitoria.

2. I termini possono poi essere raggruppati per mettere in luce l'evoluzione libera, ovvero l'evoluzione dipendente dalla sola condizione iniziale e non dai generatori presenti nel circuito, e l'evoluzione forzata, questa indipendente dalla condizioni iniziali e stabilita solo dai generatori presenti:

$$v_c(t) = \underbrace{\frac{v_{C0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Evoluzione Libera}} + \underbrace{E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}_{\text{Evoluzione Forzata}}$$

$$i(t) = \underbrace{-\frac{v_{C0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Evoluzione Libera}} + \underbrace{\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Evoluzione Forzata}}$$

## CONSIDERAZIONI ENERGETICHE CIRCUITO ERC

Da un punto di vista energetico, si ricordi che l'energia assorbita/ceduta da un bipolo è data da:

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt$$

E per una capacità tale energia vale:

$$w(t_1, t_2) = \frac{1}{2}C[v_C(t_2)^2 - v_C(t_1)^2]$$

Si assuma per semplicità  $t_1 = 0$ ,  $t_2 \rightarrow \infty$ ,  $v_C(0) = v_{C0} = 0V$

Dall'equazione di bilancio del sistema si ottiene:

$$V_0 = v_R(t) + v_C(t)$$

Moltiplicando ogni termine per  $i(t)$  e integrando tra  $t_1$ ,  $t_2$ :

$$\underbrace{\int_0^{\infty} V_0 i(t) dt}_I = \underbrace{\int_0^{\infty} v_R(t) i(t) dt}_II + \underbrace{\int_0^{\infty} v_C(t) i(t) dt}_III$$

- I. **Il primo termine**  $\int_0^{\infty} V_0 i(t) dt = w_E(0, \infty)$  **è l'energia erogata dal generatore**  $V_0$  durante il transitorio, e può essere calcolata come:

$$w_E(0, \infty) = \int_0^{\infty} V_0 C \frac{dv_C(t)}{dt} dt = V_0 C \int_0^{V_0} dv_C(t) = CV_0^2$$

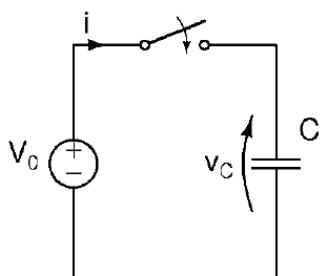
- II. **Il secondo termine**  $\int_0^{\infty} v_R(t) i(t) dt = w_R(0, \infty)$  **è l'energia dissipata sulla resistenza R** durante il transitorio.

- III. **Il terzo termine**  $\int_0^{\infty} v_C(t) i(t) dt = w_C(0, \infty)$  **è l'energia immagazzinata sulla capacità** durante il transitorio e può essere espressa come:

$$w_C(0, \infty) = \int_0^{\infty} v_C(t) i(t) dt = \frac{1}{2}C \int_0^{V_0} v_C(t) \frac{dv_C(t)}{dt} dt = \frac{1}{2}C[v_C(\infty)^2 - v_C(0)^2] = \frac{1}{2}CV_0^2$$

Si può notare subito che  $\frac{1}{2}w_E(0, \infty) = w_C(0, \infty)$  e quindi, di conseguenza, anche  $w_R(0, \infty) = \frac{1}{2}w_E(0, \infty)$ . **In un transitorio di carica di una capacità, assunta inizialmente scarica, metà dell'energia fornita dal generatore di tensione viene immagazzinata sulla capacità, l'altra metà viene invece dissipata sulla resistenza. Questo indipendentemente dal valore della resistenza R e dalla costante di tempo τ del sistema.**

## SOVRACCORRENTE



**Il seguente circuito viene considerato un circuito degenere, in quanto la sua resistenza ha un valore nullo.** Nella realtà si avrà comunque una resistenza di valore molto basso, dovuta all'interruttore, alla distribuzione e/o ai parassiti del condensatore utilizzato.

1. Si supponga per  $t < 0$  l'interruttore si aperto:  
 $i = 0$
2. Si supponga che la capacità sia scarica, ovvero che  $v_{C(t)} = 0$

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

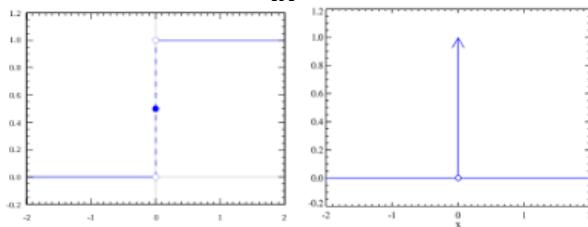
D'altronde una qualunque tensione costante è compatibile con l'ipotesi di corrente nulla.

Alla chiusura dell'interruttore si ha un transitorio di carica con costante di tempo  $\tau \rightarrow 0$ . La tensione passa istantaneamente da 0 a  $V_0$ :

$$v_C(t) = V_0 u(t)$$

Portando ad una corrente sul circuito impulsiva e non limitata: la derivata di tale tensione sarà una funzione a gradino conosciuta come Delta di Dirac  $\delta(t)$ :

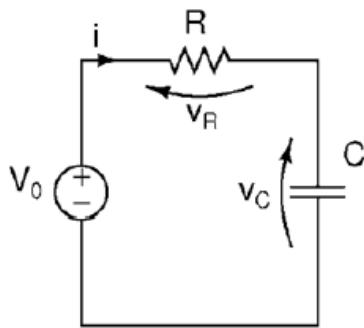
$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = CV_0\delta(t)$$



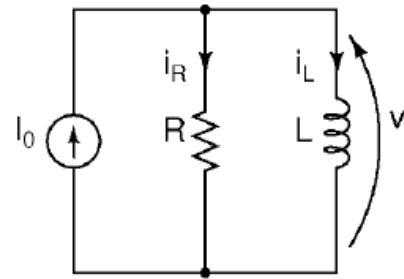
**Nei casi pratici, la corrente non sarà infinita ma comunque estremamente elevata, e potrebbe essere tale da danneggiare le apparecchiature o la stessa rete elettrica. Questo fenomeno prende il nome di sovraccorrente.**

### TRANSITORIO DEL PRIMO ORDINE: INDUTTANZA

Per quanto riguarda l'induttanza, si comporta esattamente come la capacità, fatte salve alcune sostituzioni. Si consideri i due circuiti seguenti per cui valgono, rispettivamente:



$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t)$$



$$v(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$$

Entrambi portano a due equazioni differenziali:

$$V_0 = v_R(t) + v_C(t) = RC \frac{d}{dt} v_C(t) + v_C(t)$$

$$I_0 = i_R(t) + i_L(t) = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} i_L(t) + i_L(t)$$

Che portano a due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{V_0}{RC} = \frac{d}{dt} v_C(t) + \frac{v_C(t)}{RC} \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_0 = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} i_L(t) + i_L(t) \\ i_L(0) = I_{L0} \end{cases}$$

Risolti da:

$$\begin{cases} v_C(t) = (V_{C0} - V_0)e^{-\frac{t}{\tau}} + V_0 \\ i(t) = \frac{V_0 - V_{C0}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_L(t) = (I_{L0} - I_0)e^{-\frac{t}{\tau}} + I_0 \\ v(t) = R(I_0 - I_{L0})e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

Per cui:

$$\tau = RC$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

E i comportamenti all'inizio e alla fine del transitorio sono dati da:

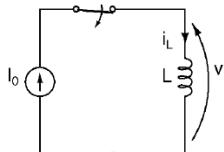
$$\begin{cases} i(0) = \frac{V_0 - V_{C0}}{R} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(0) = R(I_0 - I_{L0}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \end{cases}$$

Ovvero se la capacità si comporta all'inizio come un generatore di tensione  $V_{C0}$  (o un CC assumendo la capacità scarica) e alla fine del transitorio come un Circuito Aperto, un'induttanza si comporta all'inizio del transitorio come un generatore di corrente  $I_{L0}$  (o un CA assumendo l'induttanza scarica) e alla fine del transitorio come un Corto Circuito.

Anche per quanto riguarda le **considerazioni energetiche** si può procedere similmente a quanto già visto per la capacità, ed affermare che **metà dell'energia fornita dal generatore viene immagazzinata nell'induttanza e metà dissipata sulla resistenza indipendentemente dal suo valore.** In questo caso, sarà perciò la CORRENTE ad essere la funzione di stato, sarà dunque la CORRENTE a dover variare con CONTINUTA' durante il transitorio.

### SOVRATENSIONE



Per quanto riguarda il circuito degenere, per una induttanza i problemi non si verificano in fase di collegamento al circuito, ma in fase di distaccamento.

1. Si consideri in questo caso il circuito in figura dove all'istante  $t = 0$  il generatore  $I_0$  viene scollegato dall'induttanza.
2. All'apertura dell'interruttore si ha un transitorio di scarica con costante di tempo  $\tau \rightarrow 0$  che porta la corrente dell'induttore dal valore  $I_0$  al valore 0, cioè:

$$i_L(t) = I_0(1 - u(t))$$

In questo caso è la tensione ai capi dell'induttanza ad essere impulsiva e non limitata:

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) = -LI_0 \delta(t)$$

**Si parla perciò in questo caso di sovratensione. Nei casi reali, per via della resistenza non infinita dell'interruttore aperto e dei parassiti dell'induttanza, si avrà un valore non infinito ma comunque estremamente alto, capace di danneggiare il circuito.**

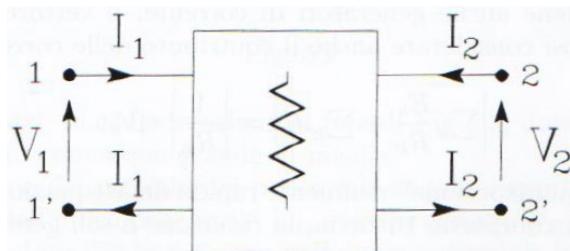
# DOPPI BIPOLI

Nell'esperienza reale un doppio bipolo si visualizza come quel corpo centrale dal quale fuoriescono due coppie di fili conduttori e questi non saranno altro che due cavi contenenti ciascuno due fili isolati.

Solitamente uno dei due cavi termina con una spina, mentre l'altro termina con una presa che contiene a sua volta due o tre fori nei quali si possono opportunamente infilare gli spinotti dei vari apparecchi.

Si noti come LKT ed LKC continuino a valere nello stesso modo in cui valgono per le reti di soli bipoli e continuano ad essere applicate nello stesso modo.

## DOPPI BIPOLI IN REGIME STAZIONARIO



**Si definisce doppio bipolo resistivo una rete di resistori, comunque complessa, che risulti accessibile attraverso due coppie di morsetti, queste indicate come porte, e alimentata in modo tale che sia unica la corrente per i due terminali di ogni porta.**

In figura appare il simbolo grafico del doppio bipolo, si notino le porte 11'; 22'.

Indipendentemente dal numero di resistori che esso contiene e dal modo in cui sono connessi, un doppio bipolo può essere descritto per mezzo di relazioni complessive fra le quattro grandezze alle due porte: le due tensioni  $V_1, V_2$  e le due correnti  $I_1, I_2$ . In particolare, si può scegliere di esprimere due in funzione delle altre due.

- Si supponga il doppio bipolo puramente resistivo. Ci si aspetta un legame di tipo algebrico lineare.
- Si supponga di alimentare il bipolo con due GENERATORI di corrente  $I_1, I_2$ , la linearità della rete consente di esprimere le due tensioni in funzione delle due correnti per mezzo di due semplici relazioni nelle quali il contributo di ciascuna delle correnti impresse è formalmente valutato attraverso un opportuno coefficiente di peso.

## RAPPRESENTAZIONE BASE CORRENTE

**Il bipolo viene alimentato da una coppia di generatori di corrente.**

Caratteristica del doppio bipolo in cui:

- **I: Variabili di controllo;**
- **V: Variabili controllate;**

$$\begin{cases} V_1 = f_1(I_1, I_2) \\ V_2 = f_2(I_1, I_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \\ V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Le  $R_{ij}$  hanno le dimensioni di una resistenza e la matrice  $R$  che si viene a formare è detta matrice delle resistenze.

Dalle relazioni che esprimono il modello analitico del doppio bipolo si ottiene che:

$$R_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}; \quad R_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}; \quad R_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}; \quad R_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

Gli elementi posti sulla diagonale della matrice delle resistenze sono chiamate **RESISTENZE PROPRIE** o **AUTORESISTENZE**. Gli elementi che non stanno sulla diagonale della matrice sono chiamate **RESISTENZE MUTUE**.

**Per risalire ai valori delle  $R_{ij}$  occorre annullare le correnti, ossia eseguire delle prove a vuoto.**

Ad esempio, per determinare  $R_{11}, R_{21}$  occorre aprire la porta 22' ed alimentare la porta 11' con un generatore di corrente che eroghi la corrente  $I_1$ .

Tornando alla matrice delle resistenze:

$$R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}$$

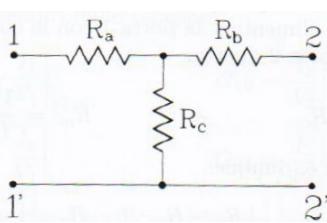
È possibile dimostrare che le resistenze mutue hanno lo stesso valore:  $R_{12} = R_{21} = R_m$ , e la competa caratterizzazione del bipolo è affidata ai soli 3 parametri:

$$R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_m \\ R_m & R_{22} \end{vmatrix}$$

Che verrà infine detta matrice descrittiva del doppio bipolo.

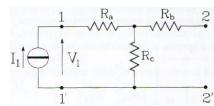
Così come si dicono equivalenti due bipoli che presentano ai loro morsetti la stessa caratteristica, **due doppi bipoli saranno equivalenti se presentano le identiche matrici descrittive.**

### DETERMINAZIONE DOPPIO BIPOLI A T



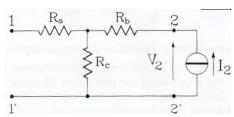
Si determini la matrice delle resistenze del doppio bipolo in figura.

**1. Cominciando dalla  $R_{11}$  si apra la porta 22' e si applichi il generatore di corrente  $I_1$  alla porta 11' e si determini la tensione  $V_1$ :**



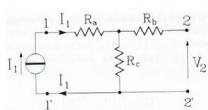
$$V_1 = I_1(R_a + R_c) \rightarrow R_{11} = \frac{V_1}{I_1} = R_a + R_c$$

**2. Analogamente, per la resistenza della porta 22':**



$$V_2 = I_2(R_b + R_c) \rightarrow R_{22} = \frac{V_2}{I_2} = R_b + R_c$$

**3. Per la resistenza mutua** invece si può procedere applicando una delle due definizioni date, supponendo perciò di alimentare la porta 11' con la corrente  $I_1$ , occorrerà valutare la tensione alla porta 22' aperta:



$$V_2 = I_1 R_c \rightarrow R_m = \frac{V_2}{I_1} = R_c$$

E la matrice delle resistenze per la configurazione del doppio bipolo a T diviene

$$R = \begin{vmatrix} R_a + R_c & R_c \\ R_c & R_b + R_c \end{vmatrix}$$

Si può in questo modo osservare che un qualsiasi doppio bipolo può essere ricondotto alla semplice configurazione a T nota la sua matrice descrittiva  $R$ , la trasformazione è determinata dalle relazioni:

$$R_c = R_m; \quad R_a = R_{11} - R_m; \quad R_b = R_{22} - R_m$$

## RAPPRESENTAZIONE BASE TENSIONE

Il bipolo viene alimentato da una coppia di generatori di tensione.

Caratteristica del doppio bipolo in cui:

- **V: Variabili di controllo;**
- **I: Variabili controllate;**

Scegliendo come variabili indipendenti le tensioni alle due porte e applicando ancora il principio di sovrapposizione degli effetti, si può esprimere, anche in questo caso, la dipendenza di ciascuna delle correnti attraverso altri coefficienti, pervenendo alla **rappresentazione in base tensione del doppio bipolo:**

$$\begin{cases} I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2 \\ I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2 \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Dove i coefficienti vengono definiti dalle relazioni:

$$G_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}; \quad G_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}; \quad G_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}; \quad G_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

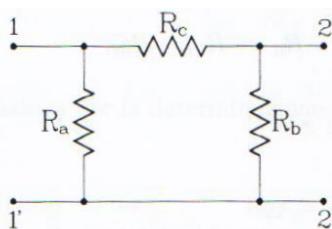
I coefficienti così trovati hanno le dimensioni di conduttanze [Siemens].

A  **$G_{11}$  e  $G_{22}$**  si dà il nome di **conduttanze proprie, o autoconduttanze** delle porte 11' e 22' rispettivamente, le  **$G_{12}, G_{21}$**  vengono indicate come **conduttanze mutue** per cui  $G_{12} = G_{21} = G_m$ .

Perciò, in analogia a quanto accaduto alla matrice delle resistenze, si definisce la matrice delle conduttanze G:

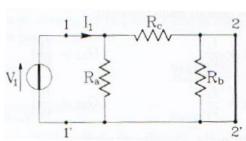
$$G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_m \\ G_m & G_{22} \end{vmatrix}$$

## DETERMINAZIONE DEL DOPPIO BIPOLLO A $\Pi$



Si procede in maniera simile a quanto fatto per la sintesi a T.

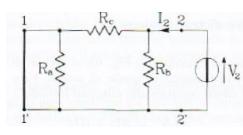
1. Per la sintesi a  $\Pi$  l'autoconduttanza della porta 11' viene determinata applicando un generatore di tensione  $V_1$  alla porta 11' mentre alla porta 22' viene applicato un corco circuito.:



$$I_1 = \frac{V_1}{R_a \parallel R_c} = V_1(G_a + G_c)$$

$$G_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{R_a \parallel R_c} = (G_a + G_c)$$

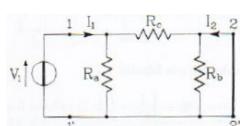
2. Per l'autoconduttanza  $G_{22}$  si applica alla porta 22' un generatore di tensione  $V_2$  mentre la porta 11' viene cortocircuitata:



$$I_2 = \frac{V_2}{R_b \parallel R_c} = V_2(G_b + G_c)$$

$$G_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{R_b \parallel R_c} = (G_b + G_c)$$

3. La conduttaza mutua può venire determinata secondo una delle due modalità previste dalla definizioni. Si proceda, ad esempio, valutando la corrente nel ramo di cortocircuito che collega i morsetti della porta 22' mentre la porta 11' è alimentata dal generatore di tensione  $V_1$ .



Notando che su  $R_b$  non scorre corrente; su  $R_c$  scorre  $I_2$ ,  $V_c = -V_1$  e che  $I_2 R_c = -V_1$  si giunge a:

$$I_2 = -\frac{V_1}{R_c} = -V_1 G_c \Rightarrow G_m = \frac{I_2}{V_1} = -\frac{1}{R_c} = -G_c$$

E la matrice delle conduttanze sarà:

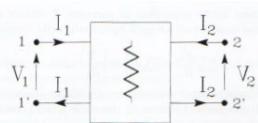
$$G = \begin{bmatrix} G_a + G_c & -G_c \\ -G_c & G_b + G_c \end{bmatrix}$$

Si può in questo modo osservare che un qualsiasi doppio bipolo può essere ricondotto alla semplice configurazione a  $\Pi$  nota la sua matrice descrittiva G, la trasformazione è determinata dalle relazioni:

$$|G_c| = |G_m|; \quad G_a = G_{11} - |G_m|; \quad G_b = G_{22} - |G_m|$$

## POTENZA ASSORBITA DAL DOPPIO BIPOLI RESISTIVO

Per il generico doppio bipolo di resistori si faccia riferimento alla rappresentazione in base corrente:



$$\begin{cases} V_1 = R_{11}I_1 + R_m I_2 \\ V_2 = R_m I_1 + R_{22} I_2 \end{cases}$$

- Con la convenzione dell'utilizzatore a entrambe le porte, la potenza complessivamente assorbita da doppio bipolo è data dalla somma delle potenze assorbite dalla due porte:

$$P = P_1 + P_2 = V_1 I_1 + V_2 I_2 = R_{11} I_1^2 + 2R_m I_1 I_2 + R_{22} I_2^2$$

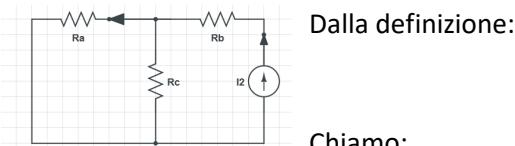
- Utilizzando la prima delle relazioni descrittive offerte dalla rappresentazione in base corrente si ottiene:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_{11}} - \frac{R_m}{R_{11}} I_2$$

- Sostituendo all'interno della potenza si ottiene:

$$\begin{aligned} P &= R_{11} \left( \frac{V_1}{R_{11}} - \frac{R_m}{R_{11}} I_2 \right)^2 + 2R_m \left( \frac{V_1}{R_{11}} - \frac{R_m}{R_{11}} I_2 \right) I_2 + R_{22} I_2^2 \\ P &= R_{11} \left( \frac{V_1^2}{R_{11}^2} + \frac{R_m^2 I_2^2}{R_{11}^2} - 2 \frac{V_1 R_m}{R_{11}^2} I_2 \right) + \left( \frac{2R_m V_1}{R_{11}} - \frac{2R_m^2}{R_{11}} I_2 \right) I_2 + R_{22} I_2^2 \\ P &= \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{R_m^2 I_2^2}{R_{11}} - \frac{2V_1 R_m I_2}{R_{11}} + \frac{2R_m V_1 I_2}{R_{11}} - \frac{2R_m^2 I_2^2}{R_{11}} + R_{22} I_2^2 \\ P &= \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{R_m^2 I_2^2}{R_{11}} - \frac{2R_m^2 I_2^2}{R_{11}} + R_{22} I_2^2 \\ P &= \frac{V_1^2}{R_{11}} - \frac{R_m^2 I_2^2}{R_{11}} + R_{22} I_2^2 \\ P &= \frac{V_1^2}{R_{11}} + \left( R_{22} - \frac{R_m^2}{R_{11}} \right) I_2^2 \end{aligned}$$

È immediato verificare come il termine tra parentesi sia la resistenza vista dalla porta 22' quando la 11' è cortocircuitata.



Dalla definizione:

$$G_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \Rightarrow \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{1}{G_{22}}$$

Chiamo:

$$R_p = \frac{R_a R_c}{R_a + R_c}$$

E allora:

$$V_2 = I_2 (R_b + R_p)$$

E quindi:

$$\frac{V_2}{I_2} = \frac{I_2}{I_2} (R_b + R_p) = R_b + R_p$$

Ma:

$$R_p = \frac{R_a R_c}{R_a + R_c} = \frac{(R_{11} - R_M) R_M}{R_{11} - R_M + R_M} = \frac{R_{11} R_M - R_M^2}{R_{11}} = R_M - \frac{R_M^2}{R_{11}}$$

E perciò:

$$R_b + R_p = R_b + R_M - \frac{R_M^2}{R_{11}} = R_{22} - R_M + R_M - \frac{R_M^2}{R_{11}} = R_{22} - \frac{R_M^2}{R_{11}}$$

E dunque, in conclusione:

$$\frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1} = R_{22} - \frac{R_M^2}{R_{11}} = \frac{1}{G_{22}}$$

$$R_{22} - \frac{R_m^2}{R_{11}} = \frac{1}{G_{22}}$$

E la **potenza assorbita** diverrà:

$$P = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{I_2}{G_{22}} = P_0 + P_{cc}$$

E può essere vista come somma di due termini:

1. Un **primo termine coincidente con la potenza assorbita dalla porta 11'** quando la 22' viene lasciata aperta  
 $I_2 = 0$ .
2. Un **secondo termine pari alla potenza dissipata dalla  $I_2$  sulla conduttanza  $G_{22}$**  quando la porta 11' è cortocircuitata.

Per la determinazione della potenza assorbita da doppio bipolo basta dunque conoscere solo due dei 3 parametri della matrice descrittiva la resistenza propria della prima porta e la conduttanza propria della seconda imponendo una volta la tensione  $V_1$  e un'altra la corrente  $I_2$ .

Il risultato trovato si estende proficuamente al caso in cui la potenza debba essere misurata.

La misurazione può essere effettuata per via indiretta misurando prima la  $R_{11}$  cosiddetta prova a vuoto alla porta 11' e quindi la  $G_{22}$  cosiddetta prova di cortocircuito alla porta 22'.

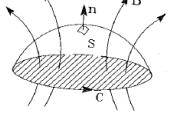
# CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

Il trasformatore cambia il rapporto tensione - corrente mantenendo trascurabili le perdite di potenza: in questo modo la potenza elettrica può essere prodotta, trasmessa e utilizzata su larga scala.

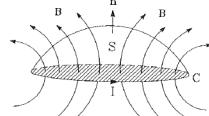
**Ma cosa si intende per circuiti mutuamente accoppiati?**

Sia data una generica superficie  $S$  orlata dalla curva  $C$ , l'orientazione della normale  $\hat{n}$  a  $S$  e quella della curva  $C$  sono associate dalla regola della vite destrorsa, che avanza in direzione di  $\hat{n}$  quando ruota in senso concorde al verso assunto positivo per  $C$ .

Si definisce flusso di induzione attraverso la superficie  $S$  l'integrale



$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = [V \cdot s = Wb]$$



## AUTO E MUTUA INDUZIONE

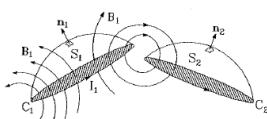
- In assenza di altre sorgenti, si può immaginare il campo di induzione  $\vec{B}$  dovuto ad una corrente  $I$  (supponendola circolante attraverso un conduttore filiforme).
- In un mezzo lineare, omogeneo e isotropo (quale il vuoto, ad esempio), il campo di induzione è, inoltre proporzionale alla corrente.

Sussiste in particolare una **relazione di proporzionalità fra la corrente  $I$  e il flusso di conduzione**

**concatenato** con la linea che rappresenta il circuito entro il quale circola la corrente:

$$\Phi = L \cdot I$$

Con  $L = \left[ \frac{Wb}{A} = H \right]$  coefficiente di autoinduzione o autoinduttanza del circuito.



Si considerino ora due circuiti orientati filiformi,  $C_1, C_2$  e si supponga che solo il primo sia sede di una corrente  $I_1$ .

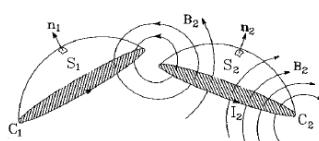
Si dirà che i due circuiti sono mutuamente accoppiati e almeno una parte delle linee di induzione del campo  $B_1$  prodotto dalla corrente  $I_1$  nel circuito  $C_1$  si concatenano anche con il secondo circuito  $C_2$ .

Si indichi con  $\Phi_{21}$  il flusso concatenato con  $C_2$  per il campo prodotto dalla  $I_1$  circolante in  $C_1$ .

Analogamente alla definizione del coefficiente di autoinduzione, si introduce il coefficiente di mutua induzione  $M_{21}$  del primo circuito sul secondo:

$$\Phi_{21} = M_{21} \cdot I_1$$

A differenza di  $L$ ,  $M_{21}$  ha segno che dipende dal segno del flusso mutuamente concatenato legato alle orientazioni, arbitrarie, dei due circuiti: in generale  $M_{21}$  potrà essere positivo, negativo o nullo, in quest'ultimo caso i circuiti si dicono disaccoppiati.



Analogamente, alimentando questa volta solo il circuito  $C_2$  con una corrente  $I_2$ , si può definire il flusso  $\Phi_{12}$  di mutua induzione di  $C_2$  su  $C_1$  e si definisce il relativo coefficiente di mutua induzione:

$$\Phi_{12} = M_{12} \cdot I_2$$

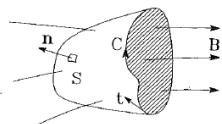
Si verificherà che:

$$M_{12} = M_{21}$$

E il mutuo accoppiamento tra circuiti è completamente caratterizzato da un'unica induttanza mutua  $M$ .

## INDUZIONE ELETROMAGNETICA

Nello spazio tridimensionale,  $C$  è un qualunque percorso chiuso concatenato con un flusso di induzione  $\Phi_C$  variabile nel tempo, la tensione indotta  $e_i$  lungo  $C$  dipende dalla rapidità di variazione di  $\Phi_C$ .



**La Legge di Faraday afferma che una variazione di campo magnetico induce un campo elettrico che sussiste nello spazio indipendentemente dal fatto che nella porzione di spazio considerato esista o meno un filo conduttore.**

$$e_i = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{n} ds$$

**Quando il percorso  $C$  è identificato con un vero e proprio conduttore, alla forza elettromotrice indotta  $e_i$  si associa la circolazione di una corrente indotta.**

**LA LEGGE DI FARADAY è ALLA BASE DEL FUNZIONAMENTO DELLA MAGGIOR PARTE DELLE MACCHINE ELETTRICHE.**

Dalla legge di Lenz si ottiene che, considerando un circuito elettrico chiuso con il quale si concatena un flusso di induzione  $\Phi_C$  variabile nel tempo, il circuito diverrà così sede di una forza elettromotrice distribuita di segno tale che la corrente che la fa circolare tende a neutralizzare la causa che l'ha generata, cioè la stessa variazione di flusso:

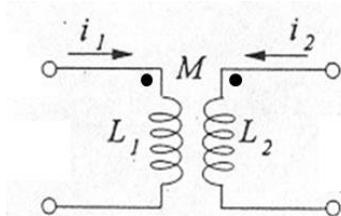
$$\begin{cases} e_i = - \frac{d\Phi_C}{dt} \text{ attraverso la convenzione dei generatori: FEM} \\ v_i = \frac{d\Phi_C}{dt} \text{ attraverso la convenzione degli utilizzatori: TENSIONE} \end{cases}$$

Si consideri ora una corrente variabile nel tempo  $i(t)$ , che percorra un circuito elettromagneticamente isolato  $C$  di geometria qualsiasi e autoinduttanza  $L$ ; il flusso  $\Phi_C$  autoconcatenato con  $C$ , anche esso dunque variabile nel tempo, sarà ancora legato alla corrente attraverso il coefficiente di autoinduzione  $L$ .

La variabilità del flusso concatenano perciò, determina la comparsa di una fem autoindotta che, nel caso di  $L$  costante, può essere espresso come:

$$\begin{cases} e_i = - \frac{d\Phi_C}{dt} = - \frac{d[L \cdot i(t)]}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} \\ v_i = \frac{d\Phi_C}{dt} = \frac{d[L \cdot i(t)]}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

## RETI EQUIVALENTI PER CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPIATI



Si considerino ora **due circuiti orientati mutuamente accoppiati fissi nello spazio**, contrassegnati come 1 e 2 precorsi da due correnti variabili nel tempo, rispettivamente  $i_1(t), i_2(t)$ .

I due circuiti possono essere **caratterizzati attraverso i rispettivi coefficienti di autoinduzione  $L_1$  ed  $L_2$  e il coefficiente di mutua induzione  $M$** , questo supposto positivo.

Il flusso concatenato di ognuno di essi vale:

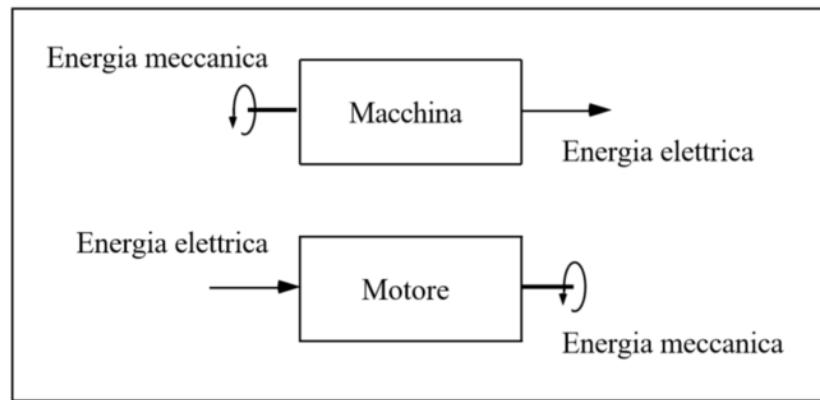
$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 \Rightarrow v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ \Phi_2 = L_2 i_2 + M_{21} i_1 \Rightarrow v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Ciò che si vuole determinare però è la relazione funzionale che lega le quattro grandezze fondamentali (tensioni e correnti) ai terminali, ci si pone di risolvere cioè un sistema di 2 equazioni in 2 incognite nelle quali si esprime un legame tra due grandezze, in funzione delle altre due. Si può facilmente passare attraverso il DOPPIO BIPOLO!

Si supponga così così che il doppio bipolo sia puramente resistivo cosicché il legame sia (dalla definizione) algebrico lineare.

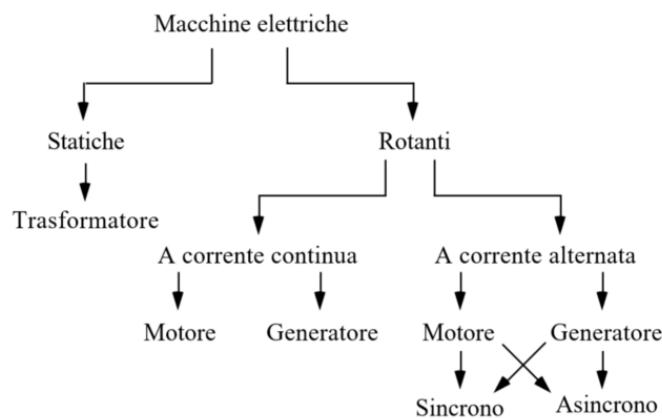
Se si continua a supporre di alimentare il doppio bipolo con due generatori di corrente  $I_1, I_2$  la linearità della rete consente di esprimere le due tensioni in funzione delle due correnti per mezzo di due semplici relazioni nelle quali il contributo di ciascuna delle correnti impresse è formalmente valutato attraverso un opportuno coefficiente di peso.

# MACCHINE ELETTRICHE

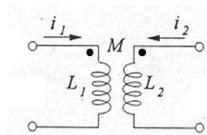


Le macchine elettriche vengono tradizionalmente divise in due gruppi, le macchine statiche e quelle rotanti.

- **Le macchine statiche sono prive di parti in movimento, modificano il valore della tensione o della corrente alternate fornite in ingresso mantenendo pressoché inalterato il valore di potenza**, a questa categoria appartiene il trasformatore.
- **Nelle macchine rotanti è invece presente una parte che ruota attorno ad un asse**, queste di classificano a loro volta in
  - Sincrone, se operano in regime sinusoidale con velocità di rotazione costante;
  - Asincrone se funzionano, sempre in regime sinusoidale, ma con una velocità di rotazione dipendente dal campo magnetico interno alla macchina e variabile con il carico.
  - A corrente continua, se opera in regime stazionario: in questo caso l'energia viene fornita o prodotta in corrente continua.



## DOPPIO BIPOLÒ MUTUO INDUTTORE



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

La potenza assorbita dal doppio bipolo è:

$$P_a = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

1. **L'energia magnetica associata a questa potenza è, per definizione:**

$$dW = P_a dt = (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt$$

E dunque:

$$v_1 i_1 dt = (L_1 di_1 + M_{12} di_2) i_1$$

$$v_2 i_2 dt = (L_2 di_2 + M_{21} di_1) i_2$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}W &= v_1 i_1 dt + v_2 i_2 dt = (L_1 di_1 + M_{12} di_2)i_1 + (L_2 di_2 + M_{21} di_1)i_2 = \\ &= L_1 i_1 di_1 + M_{12} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M_{21} i_2 di_1 = \\ &= (\mathbf{L}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{M}_{21} \mathbf{i}_2) \mathbf{d}i_1 + (\mathbf{M}_{12} \mathbf{i}_1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{i}_2) \mathbf{d}i_2\end{aligned}$$

La variazione di energia magnetica si mostra così nella forma di un differenziale esatto, lineare in  $di_1$  e  $di_2$ . Verrà dunque:

$$\frac{\partial(L_1 i_1 + M_{21} i_2)}{\partial i_2} = \frac{\partial(M_{12} i_1 + L_2 i_2)}{\partial i_1}$$

Implicando:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Infatti:

$$dW = (L_1 i_1 + M_{21} i_2) di_1 + (M_{12} i_1 + L_2 i_2) di_2$$

$$\mathbf{d}W = \mathbf{d}\left(\frac{1}{2} \mathbf{L}_1 \mathbf{i}_1^2\right) + \mathbf{d}\left(\frac{1}{2} \mathbf{L}_2 \mathbf{i}_2^2\right) + \mathbf{d}(M \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2)$$

Per cui, quando gli induttori sono vicini tra loro c'è un termine di interazione  $M i_1 i_2$ .

E l'**energia magnetica totale** associata a due circuiti sarà così:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{L}_1 \mathbf{i}_1^2 + \frac{1}{2} \mathbf{L}_2 \mathbf{i}_2^2 + M \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2$$

E la condizione tra i coefficienti di mutua induzione vale:

$$W \geq 0 \Rightarrow M^2 \leq L_1 L_2$$

### Dimostrazione.

Sia  $W \geq 0 \forall i_1, i_2$

i.  $i_2 = 0 \Rightarrow$

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \Rightarrow L_1 \geq 0$$

ii.  $i_2 \neq 0 \Rightarrow$

$$W = \left[ \frac{1}{2} L_1 \frac{i_1^2}{i_2^2} + \frac{1}{2} L_2 + M \frac{i_1}{i_2} \right] i_2^2$$

Per cui il **termine tra parentesi quadra dev'essere positivo**, e lo sarà sicuramente se le sue radici non sono reali e distinte, ovvero:

$$\Delta = M^2 - L_1 L_2 \leq 0$$

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

**Si definisce coefficiente di accoppiamento:**

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \leq 1$$

Ma il coefficiente di mutua induzione può non essere positivo, in dipendenza dei diversi riferimenti adottati, per cui:

$$0 \leq k^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq k \leq 1$$

**Si ha accoppiamento perfetto per:  $k = \pm 1$ .**

### IL TRASFORMATORE IDEALE: APPROCCIO CIRCUITALE

Il trasformatore - macchina elettrica statica - non è altro che un doppio bipolo induttore utilizzato per trasformare/variare i parametri di ingresso (tensione e corrente) rispetto a quelli di uscita, mantenendo costante la potenza elettrica apparente.

Si considerino ora due circuiti orientati mutuamente accoppiati, fissi nello spazio, con  $M$  positivo e in convenzione dell'utilizzatore:

$$\begin{cases} e_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ e_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

In regime sinusoidale permanente, attraverso il metodo simbolico, si giunge a:

$$\begin{cases} E_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ E_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1 = j\omega L_1 \left( I_1 + \frac{M}{L_1} I_2 \right) \\ E_2 = j\omega M \left( I_1 + \frac{L_2}{M} I_2 \right) \end{cases}$$

Dividendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{j\omega L_1 \left( I_1 + \frac{M}{L_1} I_2 \right)}{j\omega M \left( I_1 + \frac{L_2}{M} I_2 \right)}$$

**Supponendo accoppiamento perfetto  $M^2 = L_1 L_2 \Rightarrow \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = a$ : rapporto di trasformazione.**

$$\frac{E_1}{E_2} = a$$

Ricavando adesso dallo stesso sistema fasoriale **la corrente  $I_1$**  si ottiene:

$$I_1 = \frac{E_1}{j\omega L_1} - \frac{M}{L_1} I_2 = \frac{E_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{a} I_2$$

**Il termine  $\frac{E_1}{j\omega L_1}$  viene detto corrente magnetizzante, trascurabile per  $L_1$  molto grande o pulsazione  $\omega$  elevata.**

**Il legame tra la corrente del circuito primario e quella nel circuito secondario di riduce allora alla proporzionalità**

$$I_2 = -\frac{I_1}{a}$$

Per cui la corrente primaria risulta sia in opposizione di fase che scalata rispetto alla secondaria.

Si possono a questo punto esplicitare **due importanti proprietà del trasformatore ideale**:

### 1. Trasparenza alla potenza

Il trasformatore ideale assorbe potenza attiva e reattiva nulle. Infatti:

$$P_{TOT} = P_1 + P_2 = V_1 I_1 + V_2 I_2 = I_1 I_1 + \frac{V_1}{a} (-a I_1) = 0$$

### 2. Trasformazione delle impedenze

L'impedenza  $Z_2$  applicata alla porta secondaria può essere espressa come rapporto tra  $V_2$  e  $I_2$  attraverso le relazioni caratteristiche del trasformatore ideale:

$$Z_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{V_1}{a I_1} \frac{1}{a I_1} = \frac{1}{a^2} \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_1}{a^2}$$

$$Z_2 = \frac{Z_1}{a^2}$$

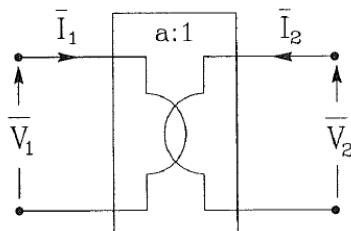
Di conseguenza **un'impedenza  $Z$  applicata ai morsetti secondari di un trasformatore ideale può essere sostituita da un'impedenza  $a^2 Z$  ai morsetti primari senza alterarne il funzionamento complessivo.**

**Perciò affinché due induttori accoppiati si comportino come un trasformatore ideale, devono valere le seguenti condizioni:**

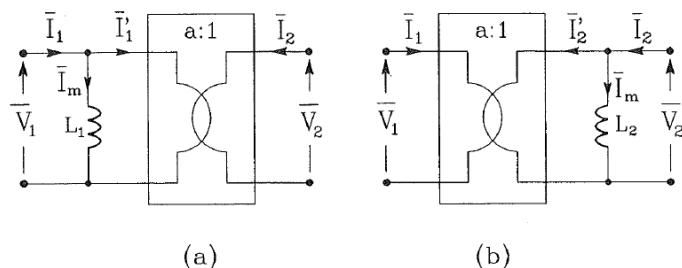
$$\begin{cases} M^2 = L_1 L_2 \Rightarrow \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = a \rightarrow \text{accoppiamento perfetto} \\ \omega L_1 \rightarrow \infty \rightarrow \text{corrente magnetizzante nulla} \end{cases}$$

E dunque valgono:

$$\begin{cases} \frac{E_1}{E_2} = a \\ \frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{a} \end{cases}$$



Nel caso che la seconda condizione non venisse verificata, il doppio bipolo perfettamente accoppiato si può vedere come un trasformatore ideale con una reattanza  $\omega L_1$  in parallelo o alla prima porta o alla seconda porta.

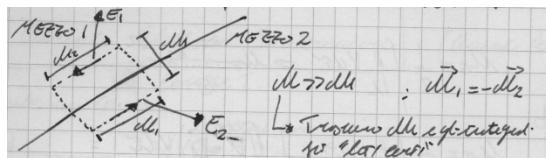


## TRASFORMATORE REALE

Cosa succede al campo magnetico e al campo elettrico in un trasformatore reale?

**CONDIZIONI DI RACCORDO: CAMPO ELETTRICO**

- Campo elettrico



Valendo  $dl \ll dh$ ;  $dl_1 = -dl_2$ :

$$\oint E \cdot dl \approx \int_1 E_1 \cdot dl_1 + \int_2 E_2 \cdot dl_2 \approx E_1 \cdot dl_1 - E_2 \cdot dl_1 = E_1 dl \cos \theta_1 - E_2 dl \cos \theta_2 = E_T^1 dl - E_T^2 dl = 0$$

La circuitazione e la conservatività del campo elettrico hanno portato al fatto che **la componente tangenziale dello stesso si conserva**:

$$E_T^1 = E_T^2$$

- Vettore induzione elettrica



$$n_1 = -n_2; \sqrt{dS} \gg dh$$

$$\varphi_{cil}(D) = Q_L^{INT}$$

Per cui:

- $\varphi_{cil}$

$$\varphi_{cil} = \int_1 1 + \int_2 + \int_{LATO} = \int_1 D_1 \cdot n_1 dS + \int_2 D_2 \cdot n_2 dS$$

$$\approx D_1 \cdot n_1 dS + D_2 \cdot n_2 dS = D_1 \cdot n_1 dS - D_2 \cdot n_1 dS = D_1^n dS - D_2^n dS$$

- $Q_L^{INT}$

$$Q_L^{INT} \stackrel{Th.G.}{=} \sigma_L dS$$

E quindi

$$D_1^n - D_2^n = \sigma_L$$

Se  $\sigma_L = 0$  ovvero si verifica **assenza di cariche libere**:

$$D_1^n = D_2^n$$

Ma  $D = \epsilon E$  e dunque:

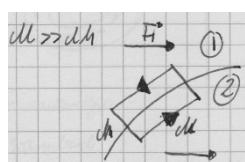
$$\epsilon_r^1 \epsilon_0 E_1^n = \epsilon_r^2 \epsilon_0 E_2^n$$

Poiché, per definizione, per due mezzi differenti:  $\epsilon_r^1 \neq \epsilon_r^2$ , se ne deduce che la **componente normale del campo elettrico NON si conserva**.

**CONDIZIONI DI RACCORDO: CAMPO MAGNETICO**

- Vettore campo magnetico

Dal teorema della circuitazione di Ampere per il vettore campo magnetico è noto come:



$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{conc}^{cond}$$

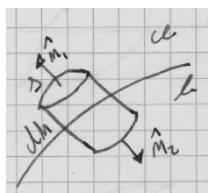
Perciò ponendosi nel caso in cui  $I_{conc}^{cond} = 0$ :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_1 H_1 \cdot dl_1 + \int_2 H_2 \cdot dl_2 = H_T^1 dl - H_T^2 dl = 0$$

$$H_T^1 = H_T^2$$

- Vettore induzione magnetica

Dal fatto che



$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \varphi_S(\vec{B}) = 0$$

$$\varphi_{cil}(\vec{B}) = \int_1 \vec{B} \cdot \hat{n} dS + \int_2 \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_1 B_n dS - \int_2 B_n dS = (B_n^a - B_n^b) ds = 0$$

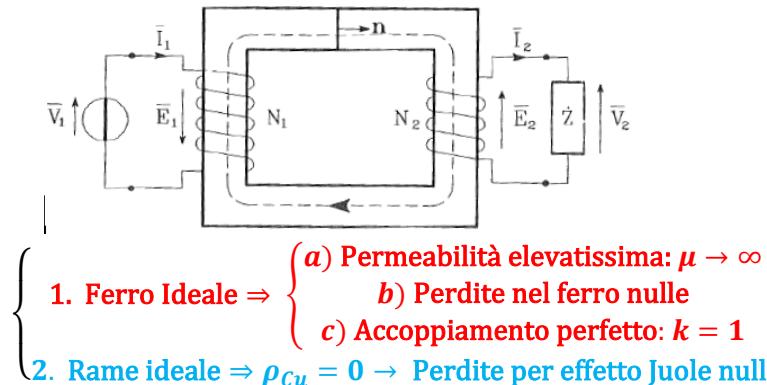
**La componente normale del vettore di induzione magnetica si conserva.**

$$B_n^a = B_n^b$$

Come tutte le macchine elettriche, anche il trasformatore reale è costituito da circuiti mutuamente accoppiati avvolti su di un nucleo di materiale ferromagnetico: la grande permeabilità del mezzo consente di ottenere elevati valori di induzione magnetica con un numero di amperspire relativamente contenuto.

Nelle ipotesi di trasformatore reale monofase in regime sinusoidale si avrà un circuito primario alimentato da un generatore di tensione ideale di valore efficace  $V_1$  e un circuito secondario alla quale è applicata una generica impedenza di carico  $Z$ .

### Ipotesi semplificative del trasformatore ideale



1. Perciò con permeabilità del nucleo infinita, la corrente magnetizzante necessaria a creare il flusso del nucleo è nulla portando ad essere nulli i flussi dispersi risultando così i due circuiti perfettamente accoppiati.

2. Resistenza degli avvolgimenti nulla.

Poiché al primario costituito da  $N_1$  spire è applicata la tensione  $v_1(t) = V_1 \sin(\omega t)$ , ai suoi capi, per la legge dell'induzione elettromagnetica, si manifesterà una *fem*  $e_1$ :

$$e_1 = -N_1 \frac{d\varphi}{dt}$$

con  $\varphi$  flusso concatenato con il primario.

Perciò, in termini fasoriali:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 + \bar{E}_1 &= 0 \\ \bar{V}_1 &= -\bar{E}_1 = -(-j\omega N_1 \Phi) = j\omega N_1 \Phi \end{aligned}$$

Le tensione sinusoidale ai morsetti del primario genera così un flusso ad andamento sinusoidale, questo, concatenandosi col secondario costituito da  $N_2$  spire, genererà una *fem*  $e_2$  tale che:

$$e_2 = -N_2 \frac{d\varphi}{dt}$$

E dunque (positiva per concezione utilizzatori):

$$\bar{V}_2 = \bar{E}_2 = -j\omega N_2 \Phi$$

Pertanto

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = -\bar{E}_1 = j\omega N_1 \Phi \\ \bar{V}_2 = \bar{E}_2 = -j\omega N_2 \Phi \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = -\frac{E_1}{E_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -a$$

Attraverso i valori efficaci si avrà:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} N_1 \Phi_M = \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} N_1 \Phi_M = 4.44 f N_1 \Phi_M \\ E_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} N_2 \Phi_M = \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} N_2 \Phi_M = 4.44 f N_2 \Phi_M \end{cases}$$

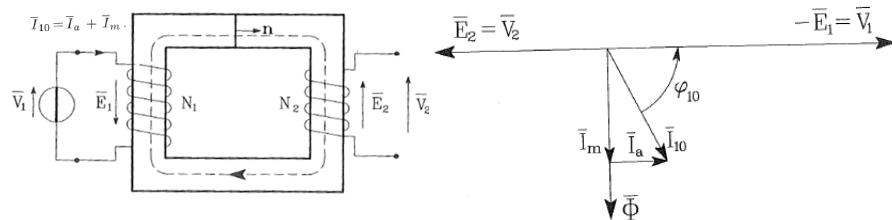
Considerazioni:

- Il trasformatore è costituito da due elementi strutturali di base: il nucleo, detto anche ossatura magnetica, e gli avvolgimenti, generalmente in rame o alluminio.
- Gli avvolgimenti del trasformatore risultano meglio accoppiati se disposti su una struttura di materiale ferromagnetico.

- Forme costruttive, materiali impiegati e particolari soluzioni tecnologiche dipendono dalle specifiche esigenze dal campo e dalle condizioni di impiego dei ciascuna categoria di trasformatori.

Si ottiene un modello progressivamente più aderente al **trasformatore reale rimuovendo** man mano **le ipotesi semplificative** fatte in precedenza:

- Sia il circuito primario sempre alimentato i regime sinusoidale, mentre il **circuito secondario momentaneamente a vuoto**;
- **Resistenza degli avvolgimenti, induttanza di magnetizzazione e flussi dispersi non sono più supposti trascurabili.**



In questo modo il primario assorbirà una corrente  $\bar{I}_{10}$ , detta **corrente a vuoto**, somma di una **corrente magnetizzante  $\bar{I}_m$**  che crea il flusso e di una **corrente attiva  $\bar{I}_a$**  in anticipo di  $90^\circ$  rispetto a  $I_m$  e dunque **in fase con la tensione**:

$$\bar{I}_{10} = \bar{I}_m + \bar{I}_a$$

La **corrente attiva  $\bar{I}_a$**  rende conto della potenza attiva assorbita dal trasformatore a vuoto per compensare le perdite per isteresi e correnti parassite nel nucleo; la **corrente magnetizzante  $\bar{I}_m$**  invece tiene conto del fatto che occorre una corrente finita per mantenere un flusso finito in un nucleo di riluttanza finita.

In questo modo l'espressione della **potenza complessa** assorbita alla porta primaria vale:

$$P_1 = V_1 I_{10} = V_1 I_a + jV_1 I_m = P_a + jQ_m$$

Non avendo un accoppiamento perfetto si genererà un flusso di dispersione sia al primario che al secondario, questi rispettivamente dovuti a induttanze di dispersione:

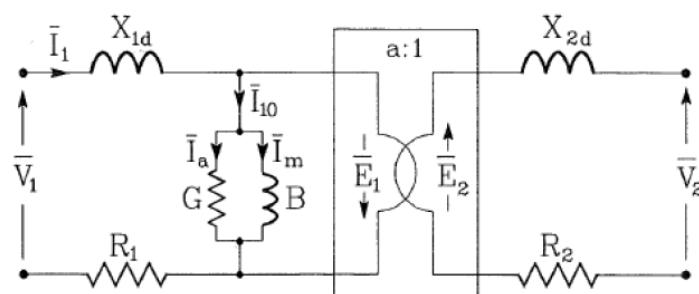
$$L_{1d} = \frac{\Phi_{1d}}{I_1}; \quad L_{2d} = \frac{\Phi_{2d}}{I_2}$$

La rete equivalente andrà modificata aggiungendo in serie a ciascuna delle due porte una reattanza di dispersione:

$$X_{1d} = 2\pi f L_{1d}, \quad X_{2d} = 2\pi f L_{2d}$$

La rimozione dell'ipotesi di "rame ideale" infine, comporterà una ulteriore modifica della rete equivalente, con l'aggiunta in serie a ciascuna porta, una resistenza pari alla resistenza effettiva di ognuno dei due avvolgimenti.

**Il modello circuitale complessivo del trasformatore reale a vuoto sarà:**



Se i morsetti secondari sono lasciati aperti, come nel caso appena trattato, la corrente secondaria è rigorosamente nulla e quella primaria coincide con la corrente a vuoto.

La presenza di un carico farà circolare nell'avvolgimento secondario la corrente:

$$I_2 = \frac{V_2}{Z}$$

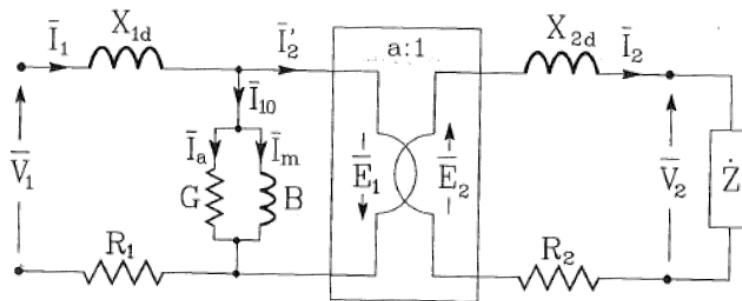
Si dimostra che **nel trasformatore reale, la presenza di una corrente a vuoto non nulla impedisce di stabilire un rapporto semplice e diretto fra le correnti primaria e secondaria:**

$$I_1 = I_{10} - \frac{N_2}{N_1} I_2$$

Nei migliori trasformatori il contributo a vuoto risulta modesto, potendo così ricavare il rapporto di trasformazione come rapporto fra le due correnti alle due porte, queste misurabili operativamente in prove di cortocircuito:

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{a} = -\frac{N_2}{N_1}$$

Si applichino le LKT al modello circuitale del **trasformatore reale sotto carico**:



$$\begin{cases} V_1 + E_1 - (R_1 + jX_{1d})I_1 = 0 \\ V_2 - E_2 + (R_2 + jX_{2d})I_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = -E_1 + (R_1 + jX_{1d})I_1 \\ V_2 = E_2 - (R_2 + jX_{2d})I_2 \end{cases}$$

E il **rapporto di trasformazione sotto carico** diverrà, al contrario del trasformatore ideale:

$$K = \frac{V_1}{V_2} = \frac{|-E_1 + (R_1 + jX_{1d})I_1|}{|E_2 - (R_2 + jX_{2d})I_2|} \neq \frac{N_1}{N_2} = a$$

In condizioni di funzionamento a vuoto, in cui  $I_2 = 0$  il rapporto di trasformazione a vuoto vale:

$$K_0 = \frac{V_1}{V_2} |_{I_2=0} = \frac{V_1}{E_2} \approx \frac{N_1}{N_2} = a$$

Coincidente con quello teorico/ideale.

La differenza tra la potenza assorbita alla porta primaria e quella ceduta all'impedenza di carico applicata alla porta secondaria rappresenta la potenza perduta entro il trasformatore:

$$\begin{cases} P_1 = V_1 I_1 \cos \phi_1 \\ P_2 = V_2 I_2 \cos \phi_2 \end{cases} \Rightarrow P_p = P_1 - P_2$$

Come tutte le macchine, il trasformatore è caratterizzato da un **rendimento**, rapporto tra la potenza in uscita e la potenza in ingresso:

$$\eta = \frac{P_u}{P_i}$$

Per potenze dell'ordine dei MVA i trasformatori sono caratterizzati da un rendimento pari quasi all'unità, generalmente hanno un rendimento molto elevato, sebbene non sia facile effettuare una misura diretta di questo, dato che risulta influenzata da errori di misura dei wattmetri alle porte, ma necessiterebbe anche di un carico ad hoc, capace di assorbire l'enorme potenza richiesta dalla misura. Si preferisce così dare del rendimento una misura indiretta.

**Se si considera** perciò come **potenza complessivamente assorbita** dal trasformatore quella **somma delle potenze perdute, nel rame e nel ferro, e della potenza convenzionale trasferita al secondario**, si ottiene un rendimento convenzionale:

$$P_i = P_{Cu} + P_{Fe} + V_2 I_2 \cos \varphi_2$$

E dunque:

$$\eta = \frac{V_2 I_2 \cos \varphi_2}{P_{Cu} + P_{Fe} + V_2 I_2 \cos \varphi_2}$$

**Si ottiene la condizione di massimo rendimento annullando la derivata rispetto alla corrente:**

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dI_2} &= \frac{d}{dI_2} \left( \frac{V_2 I_2 \cos \varphi_2}{P_{Cu} + P_{Fe} + V_2 I_2 \cos \varphi_2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ P_{Cu} &= P_{Fe} \end{aligned}$$

Ponendosi nel caso in cui la condizione ora trovata dipende dalla corrente di carico, eventualmente diversa da quella nominale.

La condizione di massimo rendimento corrisponde ad un preciso regime di funzionamento, desiderabilmente costante: ogni scostamento da questa condizione comporta un aggravio dei costi di esercizio derivante da un calo più o meno apprezzabile del rendimento.

### **IMPIEGHI DEL TRASFORMATORE**

#### **- TRASFORMATORI DI POTENZA**

L'utilizzo di sicuro più rilevante è quello legato alla trasmissione e alla distribuzione dell'energia elettrica su scala nazionale. La tensione di uscita dei generatori delle centrali di produzione (qualche decina di kV) viene innalzata fino a diverse centinaia di kV proprio ad opera dei trasformatori (innalzatori) allo scopo di ridurre le perdite energetiche sulle linee in prossimità dei punti di "consegna" dell'energia, sarà ancora un trasformatore, detto di "distribuzione" che abbasserà la tensione (abbassatore) ai livelli previsti per la normale utilizzazione domestica.

#### **- TRASFORMATORI DI ISOLAMENTO**

Sono trasformatori a rapporto unitario che hanno l'unica funzione di evitare che un carico sia metallicamente collegato alla rete di alimentazione migliorando la sicurezza elettrica dell'utente;

#### **- ADATTATORI O TRASLATATORI DI IMPEDENZA**

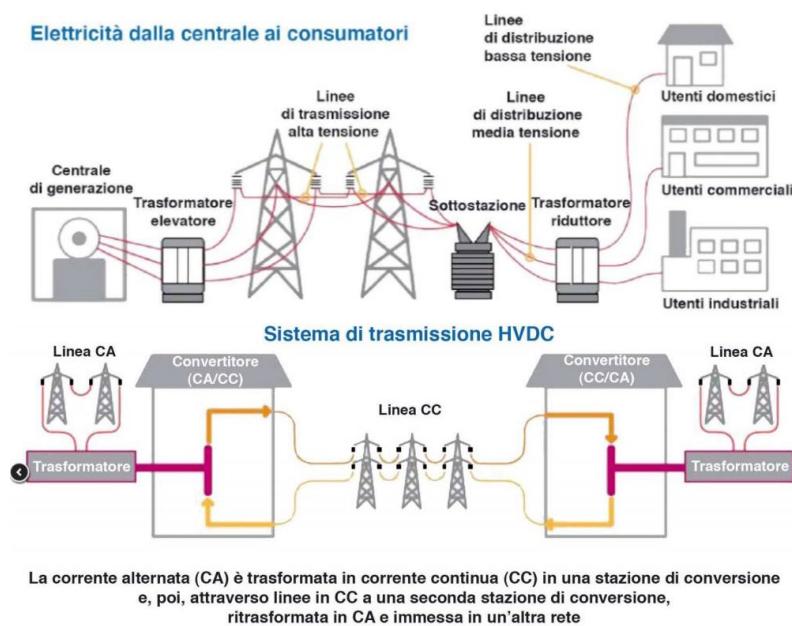
Si è visto in precedenza come è possibile trasferire una generica impedenza Z da una porta all'altra: basta quindi moltiplicare o dividere il valore dell'impedenza per il quadrato del rapporto di trasformazione, questa esigenza particolarmente sentita per generatori di piccolissima potenza per es. microfoni: la loro potenza ( $\sim mW$ ) viene trasferita al meglio grazie al traslatore di impedenza, che consente di adattare la loro impedenza di uscita a quella di ingresso dell'amplificatore; valori del rapporto di trasformazione nell'amplificazione sonora sono standard, come 50, 200, 600 o  $10000\Omega$ .

# CONVERTITORI

Diversi utilizzatori richiedono un'alimentazione con tensione a polarità costante nel tempo (anche se l'ampiezza può variare) e assorbono una corrente unidirezionale (con ampiezza che può essere variabile).

Dato che la maggior parte dei sistemi di produzione, trasmissione e distribuzione funzionano in regime sinusoidale (monofase o trifase), risulta necessario interporre tra rete di alimentazione ed utilizzatore un dispositivo chiamato convertitore o raddrizzatore, in grado di effettuare la conversione da corrente alternata a corrente continua, che spesso viene indicata con la sigla AC/DC.

In molti altri casi è necessario effettuare il processo opposto e convertire una tensione continua in una tensione alternata (approssimativamente sinusoidale tri o monofase) in modo da alimentare un utilizzatore funzionante in corrente alternata. In questo caso viene interposto tra rete di alimentazione ed utilizzatore un dispositivo (chiamato invertitore o più spesso inverter), in grado di effettuare la conversione da continua ad alternata che spesso viene indicata con la sigla DC/AC.



In altri casi è necessario produrre una tensione o un sistema di tensioni con ampiezza e frequenza diverse da quelle della rete di alimentazione: ciò si ottiene con un dispositivo chiamato convertitore alternata - alternata o convertitore di frequenza.

Esistono infine dispositivi, chiamati convertitori continua - continua o più spesso chopper, che consentono di eseguire la conversione da una tensione continua di ingresso ad una tensione continua di diverso valore.

**Queste funzioni vengono** normalmente **svolte mediante convertitori statici**, che sono **dispositivi basati su componenti che**, pur privi di organi in movimento, **si comportano come interruttori** elettrici, **consentendo o impedendo**, in determinate condizioni, **il passaggio di corrente nel circuito**.

A tale scopo si utilizzano componenti elettronici di potenza a semiconduttore quali Diodi, Transistor, Tiristori. Nel loro utilizzo ricadono applicazioni del tipo azionamento di motori elettrici in corrente continua, che siano essi sincroni e asincroni, eccitazione di alternatori, elettrolisi in impianti chimici, in gruppi di continuità statici, in stabilizzatori di reti trifase, in linee di trasmissione.

## DIODO

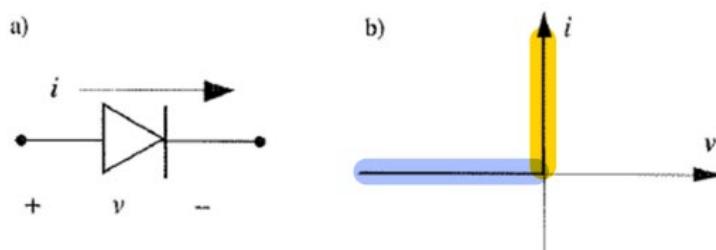
Il componente più semplice è il diodo ideale, questo **è un bipolo non lineare**.

È bene conoscere che esistono componenti più complessi del diodo, dotati di un terzo terminale di comando oltre ai due terminali principali, essi si comportano come degli interruttori nei quali la commutazione dipende non solo dal segno di tensione e corrente ai terminali principali, ma anche dalla corrente del terminale di comando o dalla tensione rispetto agli altri due.

**In analogia idrodinamica, un diodo è come se fosse una valvola di non ritorno, all'interno di un condotto, che permette lo scorrimento dell'acqua in una sola direzione.**

I diodi reali sono componenti elettronici che hanno due terminali, un corpo in cui una bandina determina il terminale negativo o anodo, e fanno sì che la corrente, in un circuito, scorra in una sola direzione. Questo viene reso possibile da una giunzione PN creata accostando due metalli semiconduttori uno "più positivo" e l'altro "più negativo" in questo modo si crea una barriera al flusso ordinato di elettroni, e la corrente scorrerà in un senso piuttosto che in un altro.

Il diodo ideale ha la seguente caratteristica:



In cui **la tensione e la resistenza allo scorrimento della corrente sono nulle quando questa assume qualsiasi valore positivo, mentre la corrente che scorre è nulla non appena la tensione assume qualsiasi valore negativo.**

**Il diodo ideale si comporta come un interruttore che commuta spontaneamente le seguenti condizioni:**

- Si chiude non appena la tensione da valori negativi si annulla, lasciando scorrere corrente;
- Si apre non appena la corrente da valori positivi si annulla, impedendo lo scorrimento della stessa.

Un diodo reale ha invece una caratteristica meno accentuata, presentando un ginocchio addolcito che prende il via intorno agli 0.5V, in questo modo, non appena la corrente attraversa il diodo nel verso giusto, si può misurare una caduta di tensione.

Appena la corrente circolerà nel senso inverso la tensione ai capi del diodo sarà inevitabilmente molto alta (tensione di breakdown 10 ÷ 100 V).

I diodi possono essere utilizzati per proteggere i circuiti da inversioni di polarità; a cavallo di relè, bobine, motori per assorbire le correnti inverse che andrebbero a danneggiare i circuiti di pilotaggio e in tutti quei casi in cui sia necessario raddrizzare la corrente, ovvero farla passare solo in un senso, come accade per esempio negli alimentatori.

## SEMICONDUTTORI

I semiconduttori (silicio, germanio) sono materiali che possono assumere una resistività intermedia tra quella dei conduttori e quella degli isolanti. La resistività diminuisce all'aumentare della temperatura.

La conduttività dei semiconduttori può essere modificata con l'aggiunta di impurità (drogaggio), con lazione di un campo elettrico, con l'esposizione alla luce o con altri mezzi.

### DROGAGGIO

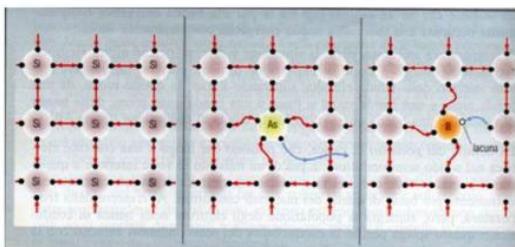
Con il termine drogaggio si intende l'aggiunta al semiconduttore puro di piccole percentuali di atomi non facenti parte del semiconduttore stesso, allo scopo di modificare le proprietà elettroniche del materiale. Il drogaggio in genere aumenta la conducibilità del semiconduttore.

Il drogaggio può essere di due tipi:

- **N:** l'atomo drogante ha un elettrone in più di quelli che servono per soddisfare i legami del reticolo cristallino. Tale elettrone acquista libertà di movimento all'interno del semiconduttore.
- **P:** l'atomo drogante ha un elettrone in meno e tale mancanza, vacanza di elettrone - lacuna - si comporta come una particella carica positivamente e si può spostare all'interno del semiconduttore.

Si ponga l'esempio di un cristallo di silicio drogato con arsenico, donatore; avendo il silicio 4 elettroni negli orbitali atomici più esterni forma 4 legami covalenti con gli atomi vicini. L'arsenico ha 5 elettroni esterni e se viene sostituito al silicio rimane un elettrone libero, che aumenta la conducibilità: si è in questo modo visto un **semiconduttore di tipo N, negativo**.

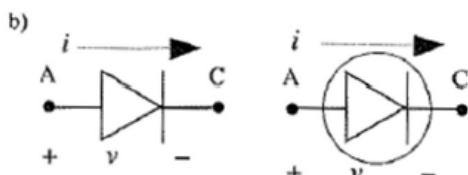
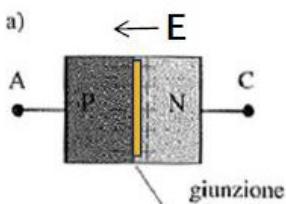
Si osservi adesso un cristallo di silicio drogato con boro, accettore; avendo il boro 3 elettroni esterni, se viene sostituito al silicio, rimane un posto libero, una lacuna che si comporta proprio come un portatore di carica positiva, appena una lacuna viene occupata da un elettrone vicino che lascia inevitabilmente dietro di sé un posto vuoto, la lacuna si è spostata in senso opposto all'elettrone: si è in questo modo visto un **semiconduttore di tipo P, positivo**.



### DIODO REALE, A GIUNZIONE, A SEMICONDUTTORE

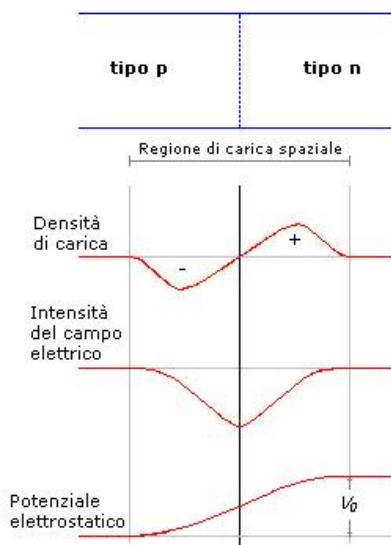
Il diodo a semiconduttore è costituito da un semiconduttore tetravalente (generalmente silicio) modificato inserendo atomi di elementi trivalenti o pentavalenti in due zone contigue, tale processo è rispettivamente chiamato drogaggio a P o N.

Queste due zone sono accessibili tramite due terminali indicati con A di anodo e C di catodo:



Il drogaggio non modifica la natura elettrica del materiale, ma provoca nella zona di tipo N un addensamento di elettroni liberi dato da un esubero di elettroni di legame, e nella zona P una carenza di elettroni liberi che equivale ad un esubero di cariche positive fittizie in forma di lacune.

Elettroni liberi e lacune si sposano verso la regione di confine tra zona P ed N - detta giunzione - e tendono a diffondere reciprocamente nella zona adiacente, in questo modo si formano due concentrazioni di cariche di segno opposto ai due lati della giunzione le quali genereranno un campo elettrico che tenderà a muoverle in verso opposto a quello di diffusione, quello che si raggiunge è così uno stato di equilibrio dinamico in cui un uguale numero di cariche dello stesso segno attraversa la giunzione in direzioni opposte.



Come si vede dalla figura, il diodo a giunzione tipo P-N crea intorno alla regione di carica spaziale un gradiente di carica in cui, per diffusione, le lacune dalla zona tipo P tenderanno a spostarsi verso la zona N e, viceversa, gli elettroni tenderanno a spostarsi verso la zona tipo P.

**Nel punto di giunzione avviene il fenomeno della ricombinazione:** le lacune e gli elettroni si ricombinano dando luogo ad una piccola regione di svuotamento (o di transizione o regione di carica spaziale) dello spessore di  $\sim 0.5 \mu\text{m}$  in cui si nota a destra e a sinistra di questa un accumulo di cariche.

Il secondo diagramma mostra il campo elettrico in modulo che si crea nella regione di carica spaziale: esso è dovuto al doppio strato che si viene a formare per la presenza delle densità di carica positive e negative accumulate in vicinanza del punto di giunzione. Questo campo elettrico ha direzione da  $N \rightarrow P$  ed è negativo in modulo. Esso si oppone ad un ulteriore passaggio di cariche tra le zone bloccando la diffusione di carica: si ha equilibrio:

$$E = \int_{x_0}^x \frac{\rho}{\epsilon} dx$$

dove  $\rho$  è la densità di carica ed  $\epsilon$  la costante dielettrica assoluta del materiale.

Nel terzo diagramma della figura, si vede l'andamento del potenziale elettrostatico nella regione di carica spaziale:

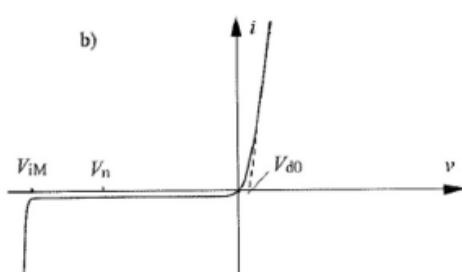
$$V = - \int E dx$$

che crea una barriera di potenziale che si oppone alla diffusione di cariche entro la giunzione.

Applicando così una tensione positiva, ovvero ordinando le cariche, il campo coulombiano all'interno della giunzione si riduce: le cariche addensate ai lati di questa vengono attratte verso i terminali e altre cariche possono finalmente attraversare la giunzione, dando così luogo ad un flusso di cariche che varia esponenzialmente con la tensione applicata. Quando la tensione applicata eguaglia quella generata dalle cariche fisse (atomi di drogante ionizzati), i portatori sono liberi di muoversi e la caratteristica tensione-corrente è lineare, cioè il materiale si comporta da conduttore ohmico.

Se si applica invece una tensione negativa, questa porterà ad aumentare il campo coulombiano all'interno della giunzione portando un maggior allontanamento delle cariche bloccate ai lati della giunzione, si creerà in questo modo un nuovo equilibrio dinamico nel quale le cariche di ciascun segno, pur attraversando la giunzione in entrambi i versi, si bilanciano in una maniera tale da non comportare alcuno scorrimento di cariche: la corrente complessiva sarà nulla.

Poiché la regione di tipo P è connessa al terminale negativo dell'alimentazione, le lacune nella regione di tipo P verranno spinte lontano dalla giunzione facendo così crescere l'ampiezza della zona svuotata. Lo stesso succede nella zona di tipo N, dove gli elettroni vengono spinti lontano dalla giunzione a causa dell'azione del terminale positivo dell'alimentazione. Questo aumenta l'ampiezza della zona svuotata e la tensione negativa applicata al dispositivo si concentra quasi completamente ai capi della zona di carica spaziale alzando la barriera di potenziale. Anche qui la risultante è un flusso di cariche che varia esponenzialmente con la tensione applicata. Tuttavia, il risultato è molto diverso perché l'esponenziale è negativo e quindi la corrente inversa risultante è molto piccola. Si arriva in questo modo a descrivere LA CARATTERISTICA DEL DIODO REALE:



$$v = V_{d0} + R_d \cdot i$$

Dove tipicamente  $V_{d0} = 0.3 \div 0.5$  ed è chiamata tensione di polarizzazione, mentre la  $R_d = [m\Omega]$  è la resistenza differenziale del diodo, dipendente dalle sue dimensioni.

La caratteristica si legge entrando dalla corrente: quando il diodo è polarizzato direttamente ad una specifica corrente è associato un valore di tensione al diodo localizzato sull'asse delle ascisse.

La corrente nominale  $I_n$  nei diodi di potenza può arrivare agli ordini dei KA.

Un diodo molto diffuso appartiene alla serie 1N, 4004, 4005, 4007 e cambia solo la corrente diretta  $I_f$  che possono sopportare: da qualche ampere a qualche decina di ampere.

## RIASSUMENDO

→ Con tensione positiva non nulla (tensione diretta) e con corrente positiva (corrente diretta), ovvero postisi nel primo quadrante, si dice il bipolo essere in conduzione: polarizzazione diretta.

Nella trattazione circuitale un diodo in polarizzazione diretta viene sostituito da un generatore di tensione pari a  $V_{d0}$  (nella stessa direzione) in serie ad una resistenza  $R_d$ .

→ Con tensione negativa (tensione inversa) si ha una debole corrente negativa (corrente inversa), tipicamente nell'ordine degli  $10^{-6} \div 10^{-7}$  volte la corrente nominale, in questo caso si pone il diodo essere in interdizione: polarizzazione inversa.

Nella trattazione circuitale un diodo in polarizzazione inversa viene sostituito da un tratto di circuito aperto.

Se la tensione inversa supera un dato valore massimo  $V_{iM}$  costituente la tensione di rottura del diodo, si ha una scarica, un brusco aumento di corrente inversa che porta ad una distruzione del componente.

La tensione nominale del diodo dev'essere sempre tale che  $V_n < V_{iM}$ .

Esiste perciò un intervallo di tensioni e correnti entro il quale il dispositivo si comporta quasi come un diodo ideale, avendo la caratteristica che si discosta poco da quella ideale.

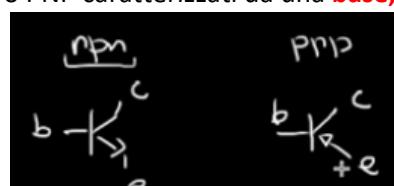
## TRANSISTOR

I transistor sono dispositivi che servono ad amplificare o controllare correnti e tensioni.

Attraverso un parallelo idrodinamico si può immaginare un transistor come un rubinetto un cui la valvola è controllata da un altro condotto in cui scorre lo stesso tipo di fluido, valvola capace di variare la quantità di flusso in uscita.

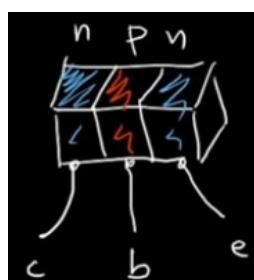
Sia i BJT Bipolar Junction Transistor che gli SCR Silicon Controlled Rectifier sono dispositivi realizzati con semiconduttori caratterizzati da un pin di ingresso in cui entrerà una corrente, un pin di uscita dal quale uscirà la corrente e un pin di controllo a cui è applicata una corrente o una tensione con la quale si potrà modificare il flusso di corrente che lo attraversa.

I più diffusi sono i transistor bipolar NPN o PNP caratterizzati da una base, un collettore ed un emettitore:

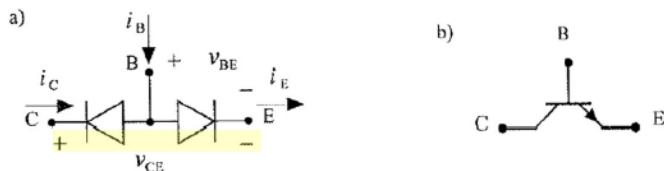


Il transistor bipolare è un dispositivo che funziona in corrente, questa circola all'interno del dispositivo dal collettore all'emettitore e può essere controllata intervenendo con una piccola corrente sulla base.

Questi dispositivi vengono realizzati con dei semiconduttori P ed N combinati a sandwich, in cui una zona a debole drogaggio N fa da collettore, un piccolissimo spessore di drogaggio P fa da base e un'altra zona con forte drogaggio N fa da emettitore.



Queste giunzioni si comportano come se fossero dei diodi in serie: visualizzandole così si riconosceranno sia la regione di svuotamento e che le caratteristiche di polarizzazione diretta e indiretta.



- Quando si applica tra collettore ed emettitore una tensione tenendo la base aperta, mantenendo quindi  $i_B = 0$  o collegando la base a terra, il diodo di sinistra presenterà un'ampia regione di svuotamento: risulterà così polarizzato inversamente e quindi interdetto.

Il circuito risulterà in questo modo globalmente aperto e le correnti di collettore ed emettitore saranno entrambe nulle, il transistor sarà schematizzabile con un circuito aperto e il dispositivo sarà in interdizione.

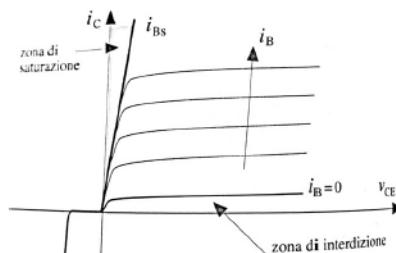
- Quando, sempre con una tensione tra collettore ed emettitore positiva, appena si applica tra la base e l'emettitore una tensione positiva o una corrente equiversa capace di superare il potenziale di barriera, avendo la zona P uno spessore inferiore al libero cammino medio degli elettroni, questi è come se venissero risucchiati creando un forte forte flusso tra emettitore e collettore: dal lato N gli elettroni occuperanno così le lacune del lato P, ma essendo questo di spessore molto più piccolo degli strati N, le lacune verranno riempite e liberate molto più velocemente.

Il transistor può così condurre corrente tra C ed E con  $i_E = i_C + i_B > 0$ .

In questo caso il transistor sarà schematizzabile come un amplificatore e il dispositivo sarà in zona attiva.

- Se al contrario la tensione tra collettore ed emettitore è negativa, il transistor rimane in interdizione per qualsiasi valore di  $i_B$  purché  $|V_{CE}|$  non sia maggiore di alcuni volt, altrimenti sarà inevitabile una scarica di corrente  $i_C < 0$  intensa e distruttiva.

Il transistor sarà schematizzabile con un cortocircuito e si troverà in saturazione.



### INTERESSANTE È L'UTILIZZO DEL TRANSISTOR NELLE ZONE DI SATURAZIONE E DI INTERDIZIONE:

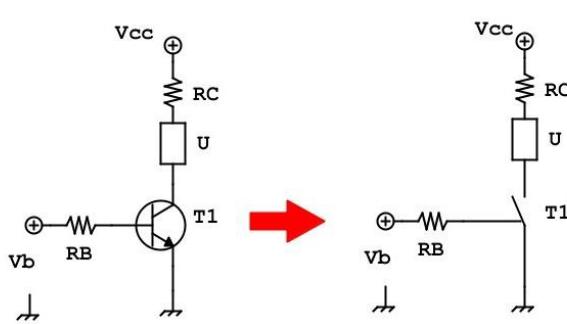
Nel grafico, a partire dallo stato di interdizione, con  $V_{CE} > 0$ , appena si applica  $i_B = i_{BS}$  il transistor si porta in saturazione, ossia commuta in conduzione diventando attivo, essendo  $i_C > 0$ , non appena  $i_B$  ritorna a zero il transistor commuta nuovamente, tornando allo stato di interdizione in maniera controllata.

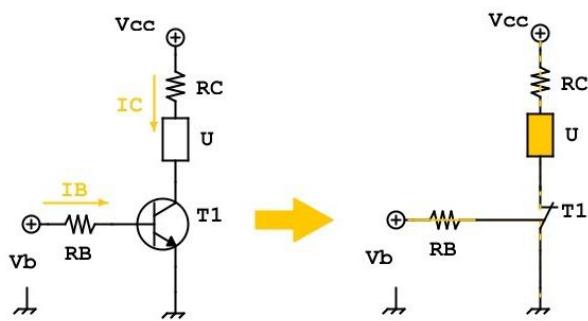
Pertanto il dispositivo tra C ed E si comporta come un interruttore unidirezionale che può essere chiuso o aperto agendo sulle grandezze di controllo  $V_{BE}$  e  $i_B$ , tipicamente molto minori dei valori nominali di  $V_{CE}$  diretta in interdizione e  $i_C \sim i_E$  diretta in conduzione.

#### CASO $i_B = i_C = 0$

il transistor generalmente utilizzato in questo tipo di applicazione è di tipo NPN ed il generico carico è inserito in serie alla giunzione collettore - emettitore lato collettore.

Il funzionamento è semplice: quando alla base non è applicata nessuna tensione ( $v_B = 0$ ) la corrente è nulla ( $i_B = 0$ ) e questo si ripercuoterà anche nella giunzione dove è collegato l'utilizzatore nella quale non scorrerà alcuna corrente: la giunzione collettore - emettitore si comporterà proprio come un circuito aperto.





CASO  $i_B > \frac{i_C}{\beta_F}$

Quando invece viene applicata una tensione di polarizzazione alla base ( $v_B \neq 0$ ), si avrà una corrente di base con un valore sufficiente ad istituire una corrente collettore – emettitore ( $i_C$  questa funzione della tensione di alimentazione del carico) che interesserà lo stesso carico: la giunzione collettore – emettitore equivarrà ad un **interruttore chiuso**.

Nel BJT la corrente  $i_C$  è controllata da una piccola corrente di base  $i_B$ , questa proprietà è sfruttata per progettare amplificatori o interruttori.

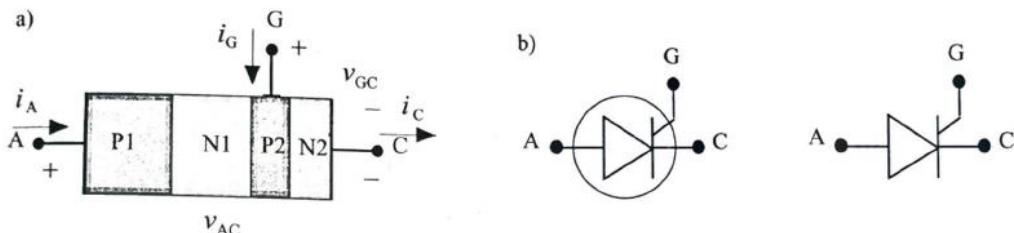
**L'IGBT Insulated Gat Bipolar Transistor** è un dispositivo che alle proprietà del BJT unisce:

- Una bassissima corrente al terminale di controllo, facendo sì che la commutazione avvenga con la sola applicazione di tensione tra la base e l'emettitore: il dispositivo in questo caso sarà controllato in tensione;
- Elevata velocità di commutazione, che ne consente l'utilizzo fino a frequenze dell'ordine dei KHz.

Viene realizzato per potenze nominali ( $P_n = V_{ni} I_{nc}$ ) che vanno dal KVA alle centinaia di KVA.

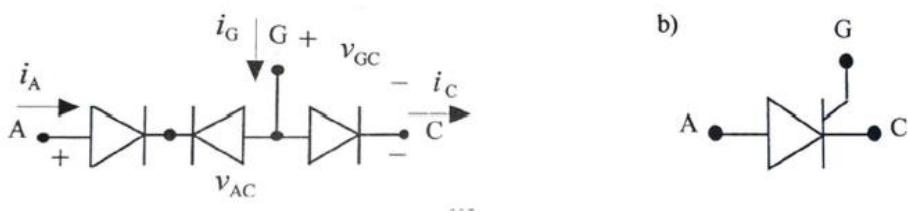
### TIRISTORE SCR

Il tiristore o Silicon Controlled Rectifier è un dispositivo a quattro zone condensatore drogaggio:



Le zone P1 ed N1 sono di spessore maggiore e presentano drogaggio più debole di P2 ed N2, che hanno spessori inferiori al libero cammino medio delle cariche libere. Le tre zone sono rese accessibili per mezzo di terminali indicati da A anodo, C catodo, G gate.

Il comportamento può essere descritto per mezzo dello schema equivalente:



→ Si assume il gate aperto:  $i_G = 0$ .

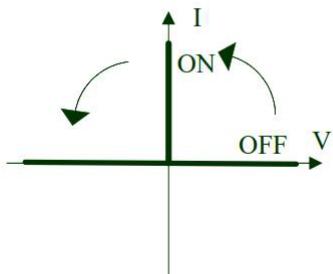
1. In questa condizione, se tra A e C è applicata una tensione inversa  $V_{AC} < 0$  i due dodi estremi sono interdetti e l'SCR non è in condizione di condurre:  $i_A = i_C = 0$ .
2. Quando invece è applicata una tensione diretta  $V_{AC} > 0$  è il diodo centrale ad essere interdetto, ma la situazione non cambia, l'SCR non è ancora in condizione di condurre.

→ Applicando invece un breve impulso di corrente al gate (una corrente di latching  $\approx 100 \text{ mA}$ ) e mantenendo una tensione diretta  $V_{AC} > 0$ , il diodo centrale commuterà in conduzione (come nel BJT) e rimarrà in tale stato anche se  $i_G$  si dovesse annullare purché  $i_A$  rimanga nell'ordine delle  $100 \text{ mA}$ , altrimenti commutando, ritornerà allo stato di interdizione.

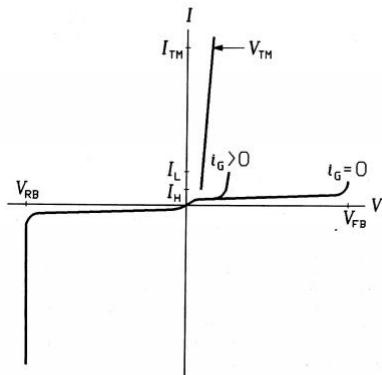
- o Se l'impulso di corrente al gate viene applicato ma la tensione ai capi dello stesso è negativa, l'SCR rimane interdetto.

Anche questo è un dispositivo elettronico di potenza comandato in corrente in cui la transizione OFF -> ON avviene tramite l'innescaggio di un effetto valanga.

Caratteristica ideale



Caratteristica reale



Il dispositivo tra anodo e catodo si comporta come un interruttore unidirezionale ( $i_C = i_A > 0$ ) che può essere chiuso applicando impulsi di grandezze di controllo  $v_{GC}, i_G$ . Con ampiezze tipicamente molto minori dei valori nominali di  $V_{AC}$  in interdizione e  $i_A \approx i_C$  in conduzione. L'apertura avviene solo quando la corrente  $i_A \approx i_C = 0$ . In altre parole, l'SCR si comporta come un diodo in cui è possibile ritardare l'istante di entrata in conduzione, per questo viene chiamato anche diodo controllato; l'SCR agisce conducendo quando viene fornito un impulso al gate: funziona in stato ON o OFF.

Quando il gate viene attivato con un impulso il tiristore passa allo stato ON e continua a condurre fino a quando la corrente diretta diventa inferiore al valore di soglia noto come "mantenimento corrente".

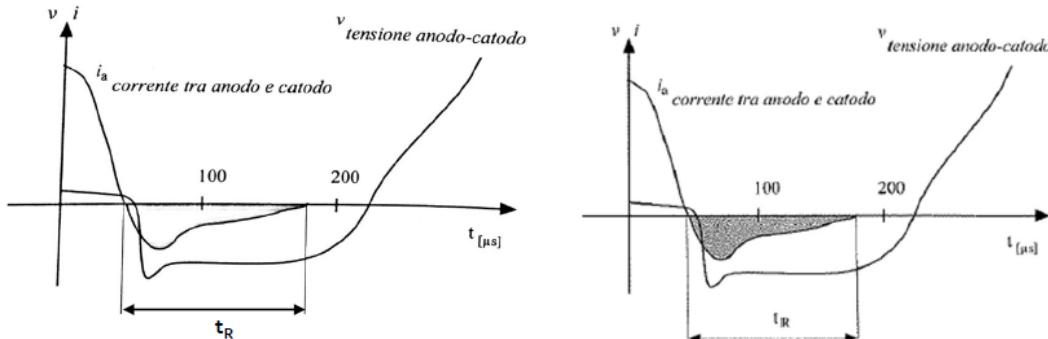
Il SCR viene utilizzato in applicazioni in cui sono presenti alte correnti e tensioni. L'applicazione più utilizzata avviene controllando e rettificando correnti alternate.

SCR può essere visto come una coppia di trasistor strettamente accoppiata.

Il diodo a giunzione, BJT e l'SCR possono essere usati come interruttori elettronici ognuno con diversa specificità.

**Si devono tuttavia tenere presenti particolari fenomeni che avvengono durante la commutazione**, cioè nel passaggio da conduzione a interdizione e viceversa.

Ad esempio, l'entrata in conduzione di un triristore richiede circa  $10\mu s$  e alla fine della fase di conduzione l'andamento della corrente è quello in figura:



Si noti come l'annullamento della corrente non sia sufficiente per lo spegnimento del componente: la carica in eccesso presente nelle varie zone del componente è legata alla conduzione, deve essere rimossa purchè il componente possa sopportare una riapplicazione di una tensione diretta. Questo avviene mediante il passaggio di una corrente inversa.

Il componente viene portato in interdizione solo dopo che la carica  $Q_R = \int_{t_R} i_A dt$  ha superato la carica in eccesso da rimuovere.

Il tempo necessario perché questo fenomeno abbia luogo è di alcune centinaia di microsecondi. L'area tratteggiata è proporzionale al valore di  $Q_R$ .

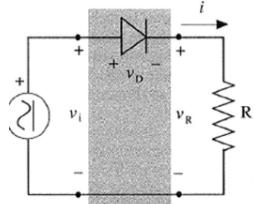
## RADDRIZZATORI

**La conversione alternata/continua consiste nel trasformare tensioni e correnti alternate in tensioni e correnti unidirezionali.**

- ➔ I circuiti più semplici che riescono ad operare una conversione AC/DC o raddrizzamento, impiegano soltanto diodi e consentono di ottenere tensioni e correnti unidirezionali di valore non regolabile.
- ➔ Circuiti più complessi, che utilizzano i tiristori, permettono di ottenere tensioni e correnti di valore regolabile entro un certo campo, in questo caso si parla di conversione controllata AC/DC o raddrizzamento controllato.

Per la trattazione dei raddrizzatori, si assumerà, per semplicità:

- Che la rete di alimentazione sia rappresentabile con un generatore ideale di tensione sinusoidale;
- Che il circuito utilizzatore, ossia il carico, sia rappresentabile con un resistore di resistenza  $R_I$ , anche se esistono applicazioni in cui il carico è di tipo induttivo od ohmico induttivo.

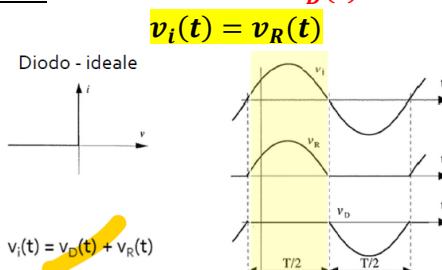


**Il più semplice circuito che permette di ottenere una corrente unidirezionale in un resistore R a partire da una tensione sinusoidale è mostrato qui a fianco in figura.**

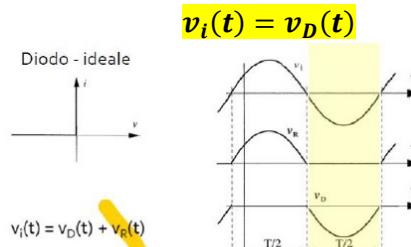
$v_D(t)$  è la tensione applicata ai terminali del diodo supposto ideale,  $v_R(t)$  è la tensione applicata sul resistore  $R$ ,  $i(t)$  è la corrente di maglia e  $v_i(t)$  è la tensione del generatore.

$$LKT: v_i(t) = v_D(t) + v_R(t)$$

➔ Con  $v_i(t)$  positiva il diodo - ideale - è in conduzione e  $v_D(t) = 0$ :



➔ Con  $v_i(t)$  negativa il diodo - ideale - è in interdizione:  $i(t) = 0 \Rightarrow v_R = R \cdot i(t) = 0$ :



Indicando con  $V$  il valore efficace della tensione  $v_i(t)$  del generatore, **il valore medio della  $v_R(t)$  risulta pari alla metà del valore medio di una semionda:**

$$V_M = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V \right] = 0.45V$$

**La differenza  $\delta V_M$  tra valore minimo e massimo della  $v_R(t)$  della ampiezza dell'ondulazione vale:**

$$\delta V_M = V_M = \sqrt{2}V$$

**Il fattore di ondulazione  $K_0$  è definito come:**

$$K_0 = \frac{1}{2} \frac{\delta V_M}{V_M}$$

E viene usato per indicare la qualità del raddrizzamento, tanto migliore quanto più basso risulta  $K_0$ .

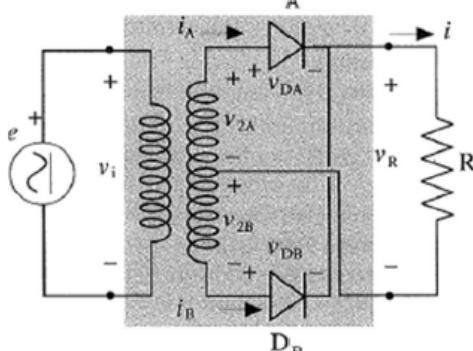
Nel caso in esame esso è dato da:

$$K_0 = \frac{\pi}{2}$$

### RADDRIZZATORE A DUE SEMIONDE

Il circuito di funzionamento comprende due diodi uguali e un trasformatore con secondario a presa centrale: il terzo terminale (presa centrale) rende disponibili due tensioni secondarie uguali alla primaria.

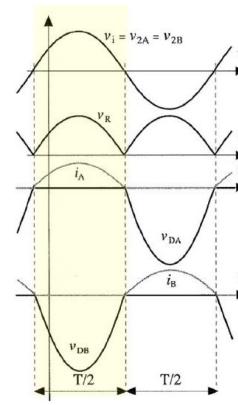
$$v_{2A} = v_{2B} = v_i(t)$$



$$LKT: \begin{cases} v_i(t) - v_{DA}(t) - v_R(t) = 0 \\ v_i(t) + v_{DB}(t) + v_R(t) = 0 \end{cases}$$

→  $v_i(t) > 0 \rightarrow D_A$  conduce,  $D_B$  interdetto →  $v_{DA}(t) = 0, i_B(t) = 0$

$$\begin{cases} v_i(t) = v_R(t) \\ v_{DB}(t) = -2v_i(t) \end{cases}$$

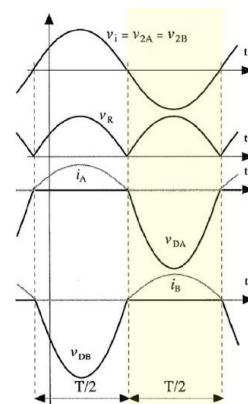


→  $v_i(t) < 0 \rightarrow D_A$  interdetto,  $D_B$  conduce →  $v_{DB}(t) = 0, i_A(t) = 0$

$$\begin{cases} v_{DA}(t) = v_i(t) \\ -v_i(t) = v_R(t) \end{cases}$$

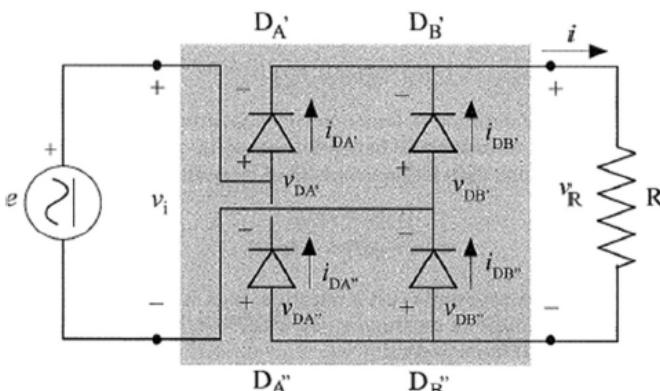
La tensione media sul resistore è data da  $V_M = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V = 0.9V$ , valore doppio rispetto al caso precedente, si osservi che i due diodi vanno dimensionati per una tensione doppia rispetto a quella che si ottiene ai terminali del resistore.

$$K_0 = \frac{\pi}{4}$$



### RADDRIZZATORE CON PONTE DI GRAETZ

Le stesse forme d'onda di tensione e corrente nel resistore  $R$  si possono ottenere con il circuito in figura, che comprende 4 diodi connessi nella configurazione nota come ponte di Graetz monofase:



All'alternarsi della polarità della tensione al generatore entrano in conduzione le coppie di diodi  $DA' - DB''$  e  $DB' - DA''$ , consentendo così il passaggio di una corrente unidirezionale nel resistore  $R$ .

→ Quando  $v_i(t)$  è positiva, le tensioni sui diodi  $DA' - DB''$  sono nulle insieme alle correnti  $i_{DA'}, i_{DB''}$ :

$$v_i(t) = v_R(t)$$

→ Quando  $v_i(t)$  è negativa, le tensioni sui diodi  $DB' - DA''$ , sono nulle insieme alle correnti  $i_{DB'}, i_{DA''}$ :

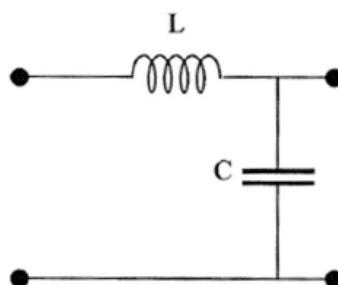
$$-v_i(t) = v_R(t)$$

Le espressioni del valore medio  $V_M$  e del fattore di ondulazione  $K_0$  non cambiano.

Questo circuito richiede 4 diodi con tensioni nominali pari alla metà di quelle dei due diodi del circuito con trasformatore, e non richiede l'utilizzo di un trasformatore.

### FILTRAGGIO

I filtri sono doppi bipoli interposti tra l'uscita del convertitore e il carico, caratterizzati dalla seguente struttura elementare:



La funzione dell'induttore è quella di limitare le ondulazioni di corrente mentre quella del condensatore è quella di limitare le ondulazioni della tensione. Qualora siano necessari per applicazioni particolarmente sofisticate vengono anche usati componenti non lineari e attivi.