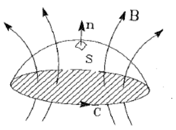
CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

Il trasformatore cambia il rapporto tensione - corrente mantenendo trascurabili le perdite di potenza: in questo modo la potenza elettrica può essere prodotta, trasmessa e utilizzata su larga scala.

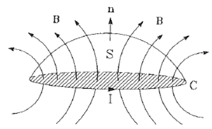
Ma cosa si intende per circuiti mutuamente accoppiati?

Sia data una generica superfice S orlata dalla curva C, l'orientazione della normale $\hat{n}$ a S e quella della curva C sono associate dalla regola della vite destrorsa, che avanza in direzione di $\hat{n}$ quando ruota in senso concorde al verso assunto positivo per C.



Si definisce flusso di induzione attraverso la superfice S l'integrale

$$\boldsymbol{\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = [V \cdot s = Wb]}$$

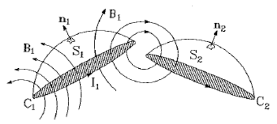


AUTO E MUTUA INDUZIONE

- ➔ In assenza di altre sorgenti, si può immaginare il campo di induzione $\vec{B}$ dovuto ad una corrente I (supponendola circolante attraverso un conduttore filiforme).
- ➔ In un mezzo lineare, omogeneo e isotropo (quale il vuoto, ad esempio), il campo di induzione è, inoltre proporzionale alla corrente.
  Sussiste in particolare una **relazione di proporzionalità fra la corrente I e il flusso di conduzione concatenato** con la linea che rappresenta il circuito entro il quale circola la corrente:

$$\boldsymbol{\Phi = L \cdot I}$$

  Con $L = \left[\frac{Wb}{A} = H\right]$ coefficiente di autoinduzione o autoinduttanza del cirucuito.



Si considerino ora due circuiti orientati filiformi, C_1, C_2 e si supponga che solo il primo sia sede di una corrente I_1.

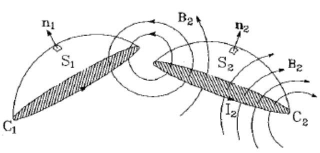
Si dirà che i due circuiti sono mutuamente accoppiati e almeno una parte delle linee di induzione del campo B_1 prodotto dalla corrente I_1 nel circuito C_1 si concatenano anche con il secondo circuito C_2.

Si indichi con Φ_{21} il flusso concatenato con C_2 per il campo prodotto dalla I_1 circolante in C_1.

Analogamente alla definizione del coefficiente di autoinduzione, **si introduce il coefficiente di mutua induzione M_{21} del primo circuito sul secondo:**

$$\boldsymbol{\Phi_{21} = M_{21} \cdot I_1}$$

A differenza di L, **M_{21} ha segno che dipende dal segno del flusso mutuamente concatenato legato alle orientazioni, arbitrarie, dei due circuiti**: in generale M_{21} potrà essere positivo, negativo o nullo, in quest'ultimo caso i circuiti si dicono disaccoppiati.



Analogamente, **alimentando questa volta solo il circuito C_2 con una corrente I_2, si può definire il flusso Φ_{12} di mutua induzione di C_2 su C_1 e si definisce il relativo coefficete di mutua induzione:**

$$\boldsymbol{\Phi_{12} = M_{12} \cdot I_2}$$

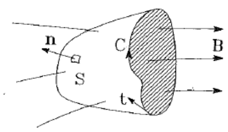
Si verificherà che:

$$M_{12} = M_{21}$$

E il mutuo accoppiamento tra circuiti è completamente caratterizzato da un'unica induttanza mutua M.

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Nello spazio tridimensionale, C è un qualunque percorso chiuso concatenato con un flusso di induzione Φ_C variabile nel tempo, la tensione indotta e_i lungo C dipende dalla rapidità di variazione di Φ_C.



La Legge di Faraday afferma che una variazione di campo magnetico induce un campo elettrico che sussiste nello spazio indipendentemente dal fatto che nella porzione di spazio considerato esista o meno un filo conduttore.

$$e_i = \oint_C E \cdot t dl = -\frac{d}{dt}\iint_S B \cdot n dS$$

Quando il percorso C è identificato con un vero e proprio conduttore, alla forza elettromotrice indotta e_i si associa la circolazione di una corrente indotta.

LA LEGGE DI FARADAY è ALLA BASE DEL FUNZIONAMENTO DELLA MAGGIOR PARTE DELLE MACCHINE ELETTRICHE.

Dalla **legge di Lentz** si ottiene che, **considerando un circuito elettrico chiuso con il quale si concatena un flusso di induzione Φ_C variabile nel tempo, il circuito diverrà così sede di una forza elettromotrice distribuita di segno tale che la corrente che la fa circolare tende a neutralizzare la causa che l'ha generata,** cioè la stessa variazione di flusso:

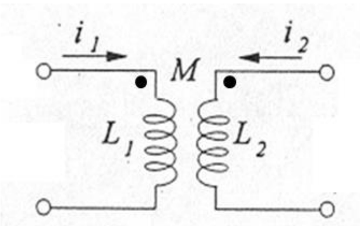
$$\begin{cases} e_i = -\dfrac{d\Phi_C}{dt} \text{ attraverso la convenzione dei generatori: FEM} \\ v_i = \dfrac{d\Phi_C}{dt} \text{ attraverso la convenzione degli utilizzatori: TENSIONE} \end{cases}$$

Si consideri ora una corrente variabile nel tempo $i(t)$, che percorra un circuito elettromagneticamente isolato C di geometria qualsiasi e autoinduttanza L; il fluisso Φ_C autoconcatenato con C, anche esso dunque variabile nel tempo, sarà ancora legato alla corrente attraverso il coefficiente di autoinduzione L.

La variabilità del flusso concatenano perciò, determina la comparsa di una fem autoindotta che, nel caso di L costante, può essere espresso come:

$$\begin{cases} e_i = -\dfrac{d\Phi_C}{dt} = -\dfrac{d[L \cdot i(t)]}{dt} = -L\dfrac{di(t)}{dt} \\ v_i = \dfrac{d\Phi_C}{dt} = \dfrac{d[L \cdot i(t)]}{dt} = L\dfrac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

RETI EQUIVALENTI PER CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPPIATI



Si considerino ora **due circuiti orientati mutuamente accoppiati fissi nello spazio**, contrassegnati come 1 e 2 precorsi da due correnti variabili nel tempo, rispettivamente $i_1(t), i_2(t)$.

I due circuiti possono essere **caratterizzati attraverso i rispettivi coefficienti di autoinduzione L_1 ed L_2 e il coefficiente di mutua induzione M**, questo supposto positivo.

Il flusso concatenato di ognuno di essi vale:

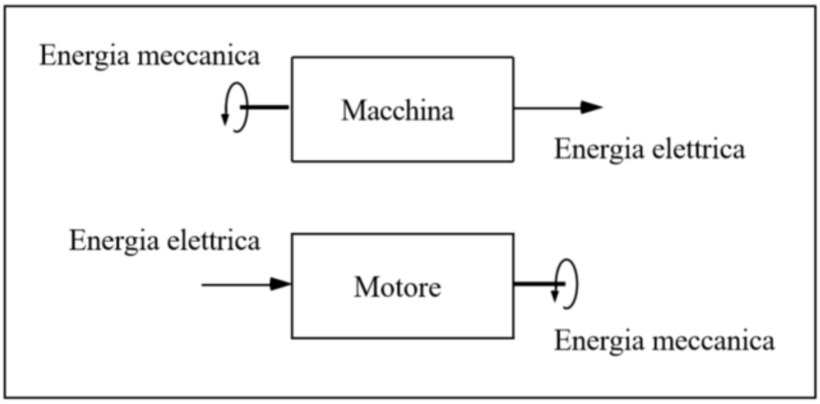
$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 \Rightarrow v_1 = \dfrac{d\Phi_1}{dt} = L_1\dfrac{di_1}{dt} + M_{12}\dfrac{di_2}{dt} \\ \Phi_2 = L_2 i_i + M_{21} i_1 \Rightarrow v_2 = \dfrac{d\Phi_2}{dt} = L_2\dfrac{di_1}{dt} + M_{21}\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Ciò che si vuole determinare però è la relazione funzionale che lega le quattro grandezze fondamentali (tensioni e correnti) ai terminali, ci si pone di risolvere cioè un sistema di 2 equazioni in 2 incognite nelle quali si esprime un legame tra due grandezze, in funzione delle altre due. Si può facilmente passare attraverso il DOPPIO BIPOLO!

Si supponga così così che il doppio bipolo sia puramente resistivo cosicché il legame sia (dalla definizione) algebrico lineare.

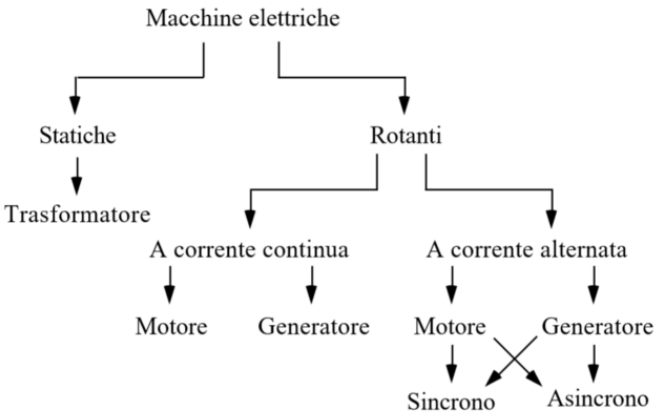
Se si continua a suppore di alimentare il doppio bipolo con due generatori di corrente I_1, I_2 la linearità della rete consente di esprimere le due tensioni in funzione delle due correnti per mezzo di due semplici relazioni nelle quali il contributo di ciascuna delle correnti impresse è formalmente valutato attraverso un opportuno coefficiente di peso.

MACCHINE ELETTRICHE

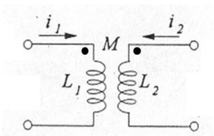


Le macchine elettriche vengono tradizionalmente divise in due gruppi, le macchine statiche e quelle rotanti.

- **Le macchine statiche sono prive di parti in movimento, modificano il valore della tensione o della corrente** alternate fornite in ingresso **mantenendo** pressoché **inalterato il valore di potenza**, a questa categoria appartiene il trasformatore.
- **Nelle macchine rotanti è invece presente una parte che ruota attorno ad un asse**, queste di classificano a loro volta in
  - Sincrone, se operano in regime sinusoidale con velocità di rotazione costante;
  - Asincrone se funzionano, sempre in regime sinusoidale, ma con una velocità di rotazione dipendente dal campo magnetico interno alla macchina e variabile con il carico.
  - A corrente continua, se opera in regime stazionario: in questo caso l'energia viene fornita o prodotta in corrente continua.



DOPPIO BIPOLO MUTUO INDUTTORE



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M_{12} \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M_{21} \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

La potenza assorbita dal doppio bipolo è:

$$P_a = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

1. **L'energia magnetica associata a questa potenza è, per definizione:**

$$dW = P_a dt = (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt$$

E dunque:

$$v_1 i_1 dt = (L_1 di_1 + M_{12} di_2) i_1$$

$$v_2 i_2 dt = (L_2 di_2 + M_{21} di_1) i_2$$

$$\boldsymbol{dW} = v_1 i_1 dt + v_2 i_2 dt = (L_1 di_1 + M_{12} di_2) i_1 + (L_2 di_2 + M_{21} di_1) i_2 =$$
$$= L_1 i_1 di_1 + M_{12} i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M_{21} i_2 di_1 =$$
$$\boldsymbol{= (L_1 i_1 + M_{21} i_2) di_1 + (M_{12} i_1 + L_2 i_2) di_2}$$

La variazione di energia magnetica si mostra così nella forma di un differenziale esatto, lineare in di_1 e di_2.
Varrà dunque:

$$\frac{\partial(L_1 i_1 + M_{21} i_2)}{\partial i_2} = \frac{\partial(M_{12} i_1 + L_2 i_2 +)}{\partial i_1}$$

Implicando:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Infatti:

$$dW = (L_1 i_1 + M_{21} i_2) di_1 + (M_{12} i_1 + L_2 i_2) di_2$$

$$\boldsymbol{dW = d\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right) + d\left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2\right) + d(M i_1 i_2)}$$

Per cui, quando gli induttori sono vicini tra loro c'è un termine di interazione $M i_1 i_2$.

E **l'energia magnetica totale** associata a due circuiti sarà così:

$$\boldsymbol{W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$$

E la condizione tra i coefficienti di mutua induzione vale:

$$\boldsymbol{W \geq 0 \Rightarrow M^2 \leq L_1 L_2}$$

Dimostrazione.
Sia $W \geq 0\ \forall i_1, i_2$

i. $i_2 = 0 \Rightarrow$

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \Rightarrow L_1 \geq 0$$

ii. $\boldsymbol{i_2 \neq 0 \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{W = \left[\frac{1}{2} L_1 \frac{i_1^2}{i_2^2} + \frac{1}{2} L_2 + M \frac{i_1}{i_2}\right] i_2^2}$$

Per cui il **termine tra parentesi quadra dev'essere positivo**, e lo sarà sicuramente se le sue radici non sono reali e distinte, ovvero:

$$\boldsymbol{\Delta = M^2 - L_1 L_2 \leq 0}$$

$$\boldsymbol{M^2 \leq L_1 L_2}$$

Si definisce coefficiente di accoppiamento:

$$\boldsymbol{k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \leq 1}$$

Ma il coefficiente di mutua induzione può non essere positivo, in dipendenza dei diversi riferimenti adottati, per cui:

$$0 \leq k^2 \leq 1 \Rightarrow \boldsymbol{-1 \leq k \leq 1}$$

Si ha accoppiamento perfetto per: $\boldsymbol{k = \pm 1}$.

IL TRASFORMATORE IDEALE: APPROCCIO CIRCUITALE

Il trasformatore - macchina elettrica statica - non è altro che un doppio bipolo induttore utilizzato per trasformare/variare i parametri di ingresso (tensione e corrente) rispetto a quelli di uscita, mantenendo costante la potenza elettrica apparente.

Si considerino ora due circuiti orientati mutuamente accoppiati, fissi nello spazio, con M positivo e in convenzione dell'utilizzatore:

$$\begin{cases} e_1(t) = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ e_2(t) = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

In regime sinusoidale permanete, attraverso il metodo simbolico, si giunge a:

$$\begin{cases} E_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ E_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1 = j\omega L_1 \left(I_1 + \dfrac{M}{L_1} I_2\right) \\ E_2 = j\omega M (I_1 + \dfrac{L_2}{M} I_2) \end{cases}$$

Dividendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{j\omega L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L_1} I_2\right)}{j\omega M (I_1 + \frac{L_2}{M} I_2)}$$

Supponendo accoppiamento perfetto $M^2 = L_1 L_2 \Rightarrow \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = a$: rapporto di trasformazione.

$$\boldsymbol{\frac{E_1}{E_2} = a}$$

Ricavando adesso dallo stesso sistema fasoriale **la corrente I_1** si ottiene:

$$\boldsymbol{I_1} = \frac{E_1}{j\omega L_1} - \frac{M}{L_1} I_2 = \boldsymbol{\frac{E_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{a} I_2}$$

Il termine $\frac{E_1}{j\omega L_1}$ viene detto corrente magnetizzante, trascurabile per L_1 molto grande o pulsazione ω elevata.

Il legame tra la corrente del circuito primario e quella nel circuito secondario di riduce allora alla proporzionalità

$$\boldsymbol{I_2 = -\frac{I_2}{a}}$$

Per cui la corrente primaria risulta sia in opposizione di fase che scalata rispetto alla secondaria.

Si possono a questo punto esplicitare **due importanti proprietà del trasformatore ideale**:

1. **Trasparenza alla potenze**
   Il trasformatore ideale assorbe potenza attiva e reattiva nulle. Infatti:
   $$\boldsymbol{P_{TOT} = P_1 + P_2 = V_1 I_1 + V_2 I_2 = I_1 I_1 + \frac{V_1}{a}(-a I_1) = 0}$$
2. **Trasformazione delle impedenze**
   L'impedenza Z_2 applicata alla porta secondara può essere espressa come rapporto tra V_2 eI_2 attraverso le relazioni caratteristiche del trasformatore ideale:
   $$Z_2 = \frac{V_2}{I_1} = \frac{V_1}{a}\frac{1}{aI_1} = \frac{1}{a^2}\frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_1}{a^2}$$
   $$\boldsymbol{Z_2 = \frac{Z_1}{a^2}}$$

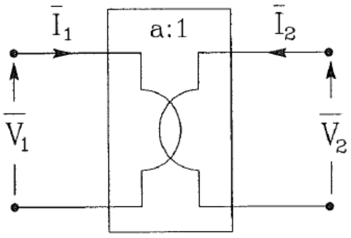
   Di conseguenza **un'impedenza Z applicatt ai morsetti secondari di un trasformatore ideale può essere**, dunque, **sostituita da un'impedenza $a^2 Z$ ai morsetti primari senza alterarne il funzionamento complessivo.**

Perciò affinché due induttori accoppiati si comportino come un trasformatore ideale, devono valere le seguenti condizioni:

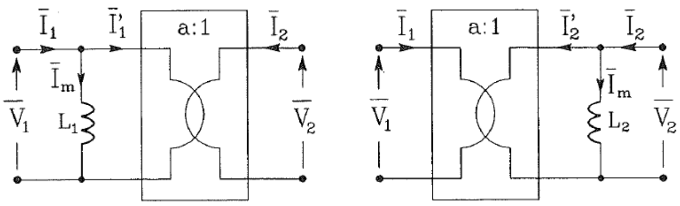
$$\begin{cases} M^2 = L_1 L_2 \Rightarrow \dfrac{L_1}{M} = \dfrac{M}{L_2} = a \rightarrow accoppiamento\ perfetto \\ \omega L_1 \rightarrow \infty \rightarrow corrente\ magnetizzante\ nulla \end{cases}$$

E dunque valgono:

$$\begin{cases} \dfrac{E_1}{E_2} = a \\ \dfrac{I_1}{I_2} = -\dfrac{1}{a} \end{cases}$$



Nel caso che la seconda condizione non venisse verificata, il doppio bipolo perfettamente accoppiato si può vedere come un trasformatore ideale con una reattanza ωL_1 in parallelo o alla prima porta o alla seconda porta.



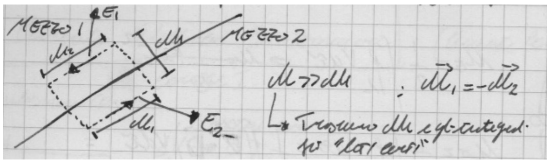
(a) (b)

TRASFORMATORE REALE

Cosa succede al campo magnetico e al campo elettrico in un trasformatore reale?

CONDIZIONI DI RACCORDO: CAMPO ELETTRICO

- **Campo elettrico**



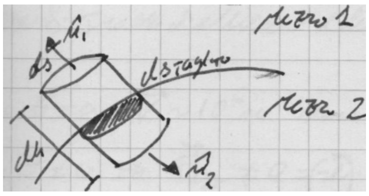
Valendo $dl \ll dh; dl_1 = -dl_2$:

$$\oint_{\blacksquare} E\cdot dl \approx \int_1 E_1\cdot dl_1 + \int_2 E_2\cdot dl_2 \approx E_1\cdot dl_1 - E_2\cdot dl_1 = E_1 dl\cos\theta_1 - E_2 dl\cos\theta_2 = E_T^1 dl - E_T^2 dl = 0$$

La circuitazione e la conservatività del campo elettrico hanno portato al fatto che **la componente tangenziale dello stesso si conserva:**

$$\boldsymbol{E_T^1 = E_T^2}$$

- **Vettore induzione elettrica**



$$n_1 = -n_2; \sqrt{dS} \gg dh$$
$$\varphi_{cil}(D) = Q_L^{INT}$$

Per cui:

- φ_{cil}

$$\varphi_{cil} = \int 1 + \int 2 + \cancel{\int LATO} = \int_1 D_1\cdot n_1 dS + \int_2 D_2\cdot n_2 dS$$
$$\approx D_1\cdot n_1 dS + D_2\cdot n_2 dS = D_1\cdot n_1 dS - D_2\cdot n_1 dS = D_1^n dS - D_2^n dS$$

- Q_L^{INT}

$$Q_L^{INT} \stackrel{Th.G.}{\triangleq} \sigma_L dS$$

E quindi

$$D_1^n - D_2^n = \sigma_L$$

Se $\sigma_L = 0$ ovvero si verifica **assenza di cariche libere:**

$$\boldsymbol{D_1^n = D_2^n}$$

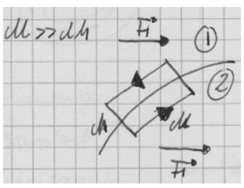
Ma $D = \varepsilon E$ e dunque:

$$\varepsilon_r^1\varepsilon_0 E_1^n = \varepsilon_r^2\varepsilon_0 E_2^n$$

Poiché, pe definizione, per due mezzi differenti: $\varepsilon_r^1 \neq \varepsilon_r^2$, se ne deduce che la **componente normale del campo elettrico NON si conserva.**

CONDIZIONI DI RACCORDO: CAMPO MAGNETICO

- **Vettore campo magnetico**



Dal teorema della circuitazione di Ampere per il vettore campo magnetico è noto come:

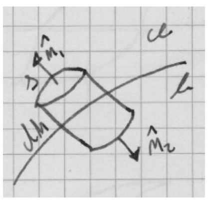
$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{conc}^{cond}$$

Perciò ponendosi nel caso in cui $I_{conc}^{cond} = 0$:

$$\oint_{\blacksquare} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_1 H_1\cdot dl_1 + \int_2 H_2\cdot dl_2 = H_T^1 dl - H_T^2 dl = 0$$

$$\boldsymbol{H_T^1 = H_T^2}$$

- **Vettore induzione magnetica**



Dal fatto che

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \varphi_S(\vec{B}) = 0$$

$$\varphi_{cil}(\vec{B}) = \int_1 \vec{B}\cdot\hat{n}dS + \int_2 \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int_1 B_n\, dS - \int_2 B_n dS = (B_n^a - B_n^b)ds = 0$$

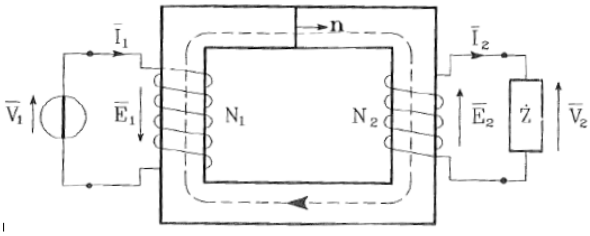
La componente normale del vettore di induzione magnetica si conserva.

$$\boldsymbol{B_n^a = B_n^b}$$

Come tutte le macchine elettriche, anche il trasformatore reale è costituito da circuiti mutuamente accoppiati avvolti su di un nucleo di materiale ferromagnetico: la grande permeabilità del mezzo consente di ottenete elevati valori di induzione magnetica con un numero di amperspire relativamente contenuto.

Nelle ipotesi di trasformatore reale monofase in regime sinusoidale si avrà un circuito primario alimentato da un generatore di tensione ideale di valore efficace V_1 e un circuito secondario alla quale è applicata una generica impedenza di carico Z.

Ipotesi semplificative del trasformatore ideale



$$\begin{cases} \text{1. Ferro Ideale} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a}) \text{ Permeabilità elevatissima: } \boldsymbol{\mu} \rightarrow \infty \\ \boldsymbol{b}) \text{ Perdite nel ferro nulle} \\ \boldsymbol{c}) \text{ Accoppiamento perfetto: } \boldsymbol{k} = \mathbf{1} \end{cases} \\ \text{2. Rame ideale} \Rightarrow \boldsymbol{\rho_{Cu}} = \mathbf{0} \rightarrow \text{ Perdite per effetto Juole nulle} \end{cases}$$

1. **Perciò con permeabilità del nucleo infinita, la corrente magnetizzante necessaria a creare il fluso del nucleo è nulla portando ad essere nulli i flussi dispersi risultado così i duie circuiti perfettamente accoppiati.**
2. **Resistenza degli avvolgimenti nulla.**

Poiché al primario costituito da N_1 spire è applicata la tensione $v_1(t) = V_1 \sin(\omega t)$, ai suoi capi, per la legge dell'induzione elettromagnetica, si manifesterà una $fem\ e_1$:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\varphi}{dt}$$

con φ flusso concatenato con il primario.

Perciò, in termini fasoriali:

$$\bar{V}_1 + \bar{E}_1 = 0$$
$$\bar{V}_1 = -\bar{E}_1 = -(-j\omega N_1 \Phi) = j\omega N_1 \Phi$$

Le tensione sinusoidale ai morsetti del primario genera così un flusso ad andamento sinusoidale, questo, concatenandosi col secondario costituito da N_2 spire, genererà una $fem\ e_2$ tale che:

$$e_2 = -N_2 \frac{d\varphi}{dt}$$

E dunque (positiva per convezione utilizzatori):

$$\bar{V}_2 = \bar{E}_2 = -j\omega N_2 \Phi$$

Pertanto

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = -\bar{E}_1 = j\omega N_1 \Phi \\ \bar{V}_2 = \bar{E}_2 = -j\omega N_2 \Phi \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = -\frac{E_1}{E_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -a$$

Attraverso i valori efficaci si avrà:

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{\omega}{\sqrt{2}} N_1 \Phi_M = \dfrac{2\pi f}{\sqrt{2}} N_1 \Phi_M = 4.44 f N_1 \Phi_M \\ E_2 = \dfrac{\omega}{\sqrt{2}} N_2 \Phi_M = \dfrac{2\pi f}{\sqrt{2}} N_2 \Phi_M = 4.44 f N_2 \Phi_M \end{cases}$$

Considerazioni:

- **Il trasformatore è costituito da due elementi strutturali di base: il nucleo, detto anche ossatura magnetica, e gli avvolgimenti, generalmente in rame o alluminio.**

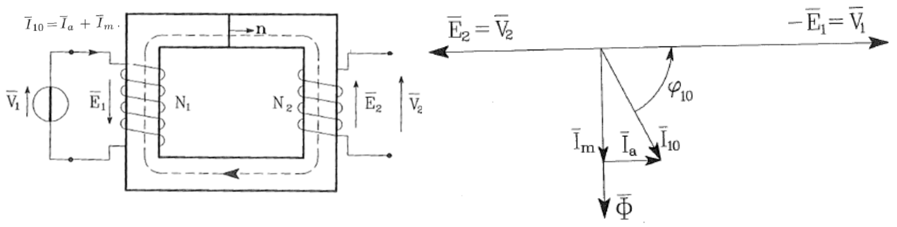
- **Gli avvolgimenti del trasformatore risultano meglio accoppiati se disposti su una struttura di materiale ferromagnetico.**

- Forme costruttive, materiali impiegati e particolari soluzioni tecnologiche dipendono dalle specifiche esigenze dal campo e dalle condizioni di impiego dei ciascuna categoria di trasformatori.

Si ottiene un modello progressivamente più aderente al **trasformatore reale rimuovendo** man mano **le ipotesi semplificative** fatte in precedenza:

- ➔ Sia il circuito primario sempre alimentato i regime sinusoidale, mentre il **circuito secondario momentaneamente a vuoto**;

- ➔ **Resistenza degli avvolgimenti, induttanza di magnetizzazione e flussi dispersi non sono più supposti trascurabili.**



In questo modo il primario assorbirà una corrente $\bar{I}_{10}$ detta **corrente a vuoto**, somma di una **corrente magnetizzante $\bar{I}_m$ che crea il flusso e di una corrente attiva $\bar{I}_a$** in anticipo di 90° rispetto a I_m e dunque **in fase con la tensione**:

$$\bar{I}_{10} = \bar{I}_m + \bar{I}_a$$

La **corrente attiva $\bar{I}_a$** rende conto della potenza attiva assorbita dal trasformatore a vuoto per compensare le perdite per isteresi e correnti parassite nel nucleo; la **corrente magnetizzante $\bar{I}_m$** invece tiene conto del fatto che occorre una corrente finita per mantenere un flusso finito in un nucleo di riluttanza finita.

In questo modo l'espressione della **potenza complessa** assorbita alla porta primaria vale:

$$P_1 = V_1 I_{10} = V_1 I_a + jV_1 I_m = P_a + jQ_m$$

Non avendo un accoppiamento perfetto si genererà un flusso di dispersione sia al primario che al secondario, questi rispettivamente dovuti a induttanze di dispersione:

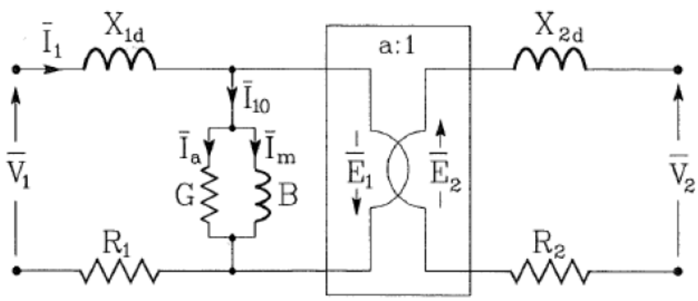
$$L_{1d} = \frac{\Phi_{1d}}{I_1}; \quad L_{2d} = \frac{\Phi_{2d}}{I_2}$$

La rete equivalente andrà modificata aggiungendo in serie a ciascuna delle due porte una reattanza di dispersione:

$$X_{1d} = 2\pi f L_{1d},; \quad X_{2d} = 2\pi f L_{2d}$$

La rimozione dell'ipotesi di "rame ideale" infine, comporterà una ulteriore modifica della rete equivalente, con l'aggiunta in serie a ciascuna porta, una resistenza pari alla resistenza effettiva di ognuno dei due avvolgimenti.

Il modello circuitale complessivo del trasformatore reale a vuoto sarà:



Se i morsetti secondari sono lasciati aperti, come nel caso appena trattato, la corrente secondaria è rigorosamente nulla e quella primaria coincide con la correte a vuoto.

La presenza di un carico farà circolare nell'avvolgimento secondario la corrente:

$$I_2 = \frac{V_2}{Z}$$

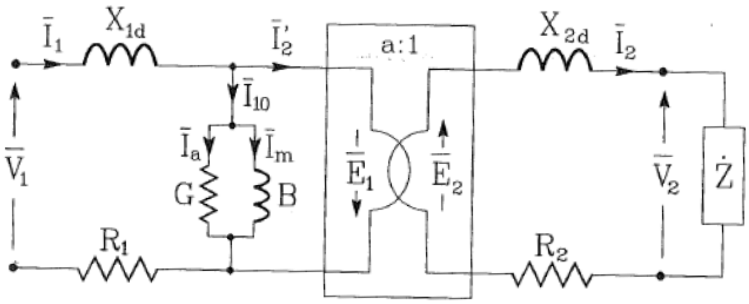
Si dimostra che **nel trasformatore reale, la presenza di una corrente a vuoto non nulla impedisce di stabilire un rapporto semplice e diretto fra le correnti primaria e secondaria:**

$$\boldsymbol{I_1 = I_{10} - \frac{N_2}{N_1} I_2}$$

Nei migliori trasformatori il contributo a vuoto risulta modesto, potendo così ricavare il rapporto di trasformazione come rapporto fra le due correnti alle due porte, queste misurabili operativamente in prove di cortocircuito:

$$\boldsymbol{\frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{a} = -\frac{N_2}{N_1}}$$

Si applichino le LKT al modello circuitale del **trasformatore reale sotto carico**:



$$\begin{cases} V_1 + E_1 - (R_1 + jX_{1d})I_1 = 0 \\ V_2 - E_2 + (R_2 + jX_{2d})I_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{V_1 = -E_1 + (R_1 + jX_{1d})I_1} \\ \boldsymbol{V_2 = E_2 - (R_2 + jX_{2d})I_2} \end{cases}$$

E il **rapporto di trasformazione sotto carico** diverrà, al contrario del trasformatore ideale:

$$\boldsymbol{K = \frac{V_1}{V_2} = \frac{|-E_1 + (R_1 + jX_{1d})I_1|}{|E_2 - (R_2 + jX_{2d})I_2|} \neq \frac{N_1}{N_2} = a}$$

In condizioni di funzionamento a vuoto, in cui $\boldsymbol{I_2 = 0}$ il rapporto di trasformazione a vuoto vale:

$$\boldsymbol{K_0 = \frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_2=0} = \frac{V_1}{E_2} \approx \frac{N_1}{N_2} = a}$$

Coincidente con quello teorico/ideale.

La differenza tra la potenza assorbita alla porta primaria e quella ceduta all'impedenza di carico applicata alla porta secondaria rappresenta la potenza perduta entro il trasformatore:

$$\begin{cases} P_1 = V_1 I_1 \cos\varphi_1 \\ P_2 = V_2 I_2 \cos\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{P_p = P_1 - P_2}$$

Come tutte le macchine, il trasformatore è caratterizzato da un **rendimento**, rapporto tra la potenza in uscita e la potenza in ingresso:

$$\boldsymbol{\eta = \frac{P_u}{P_i}}$$

Per potenze dell'ordine dei MVA i trasformatori sono caratterizzati da un rendimento pari quasi all'unità, generalmente hanno un rendimento molto elevato, sebbene non sia facile effettuare una misura diretta di questo, dato che risulta influenzata da errori di misura dei wattmetri alle porte, ma necessiterebbe anche di un carico ad hoc, capace di assorbire l'enorme potenza richiesta dalla misura. Si preferisce così dare del rendimento una misura indiretta.

Se si considera perciò come **potenza complessivamente assorbita** dal trasformatore quella **somma delle potenze perdute, nel rame e nel ferro**, **e della potenza convenzionale trasferita al secondario**, si ottiene un rendimento convenzionale:

$$\boldsymbol{P_i = P_{Cu} + P_{Fe} + V_2 I_2 \cos\varphi_2}$$

E dunque:

$$\boldsymbol{\eta = \frac{V_2 I_2 \cos\varphi_2}{P_{Cu} + P_{Fe} + V_2 I_2 \cos\varphi_2}}$$

Si ottiene la condizione di massimo rendimento annullando la derivata rispetto alla corrente:

$$\frac{d\eta}{dI_2} = \frac{d}{dI_2}\left(\frac{V_2 I_2 \cos\varphi_2}{P_{Cu} + P_{Fe} + V_2 I_2 \cos\varphi_2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\boldsymbol{P_{Cu} = P_{Fe}}$$

Ponendosi nel caso in cui la condizione ora trovata dipende dalla corrente di carico, eventualmente diversa da quella nominale.

La condizione di massimo rendimento corrisponde ad un preciso regime di funzionamento, desiderabilmente costante: ogni scostamento da questa condizione comporta un aggravio dei costi di esercizio derivante da un calo più o meno apprezzabile del rendimento.

IMPIEGHI DEL TRASFORMATORE

- **TRASFORMATORI DI POTENZA**
  L'utilizzo di sicuro più rilevante è quello legato alla trasmissione e alla distribuzione dell'energia elettrica su scala nazionale. La tensione di uscita dei generatori delle centrali di produzione (qualche decina di kV) viene innalzata fino a diverse centinaia di kV proprio ad opera dei trasformatori (innalzatori) allo scopo di ridurre le perdite energetiche sulle linee in prossimità dei punti di "consegna" dell'energia, sarà ancora un trasformatore, detto di "distribuzione" che abbasserà la tensione (abbassatore) ai livelli previsti per la normale utilizzazione domestica.

- **TRASFORMATORI DI ISOLAMENTO**
  Sono trasformatori a rapporto unitario che hanno l'unica funzione di evitare che un carico sia metallicamente collegato alla rete di alimentazione migliorando la sicurezza elettrica dell'utente;

- **ADATTATORI O TRASLATORI DI IMPEDENZA**
  Si è visto in precedenza come è possibile trasferire una generica impedenza Z da una porta all'altra: basta quindi moltiplicare o dividere il valore dell'impedenza per il quadrato del rapporto di trasformazione, questa esigenza particolarmente sentita per generatori di piccolissima potenza per es. microfoni: la loro potenza (~mW) viene trasferita al meglio grazie al traslatore di impedenza, che consente di adattare la loro impedenza di uscita a quella di ingresso dell'amplificatore; valori del rapporto di trasformazione nell'amplificazione sonora sono standard, come 50, 200, 600 o 10000Ω.