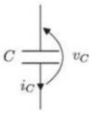
TRANSITORI

Sono definiti "transitori" quelle fasi in cui le grandezze elettriche di una rete non sono costanti né variano in maniera periodica.
I transitori hanno luogo nelle reti elettriche contenenti almeno un elemento CONSERVATIVO, cioè bipoli in cui esiste la possibilità di accumulo di energia.
Quando una rete elettrica contenente elementi conservativi in equilibrio in uno stato stazionario viene sottoposta ad una variazione di stato, le sue grandezze elettriche variano portando la rete ad un nuovo stato di equilibrio in cui esse saranno di nuovo costanti.
I bipoli elettrici conservativi sono il **CONDENSATORE** caratterizzato dalla capacità C e l'**INDUTTORE** caratterizzato da un'induttanza L.

CONDENSATORE



Il condensatore è un bipolo conservativo caratterizzato dal seguente legame tensione - corrente:

$$i(t) = \frac{dC(t)v(t)}{dt}$$

Il parametro C è detto Capacità e l sua unità di misura è il Farad $[F]$.
Nel caso di invarianza temporale delle caratteristiche fisiche e geometriche, il **legame costitutivo di un condensatore diviene:**

$$\boldsymbol{i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}}$$

L'intensità di corrente in un condensatore è perciò in relazione differenziale con la **tensione**: quest'ultima **sarà una variabile CONTINUA nel dominio temporale.**

$$v(t) = v(t_o) + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i(\tau)d$$

Tale relazione, seppur sia lineare, non è però sufficiente a fornire le informazioni per risalire al valore della tensione; infatti, questo sarà univocamente definito se e solo se sarà noto il valore della tensione all'istante t_0 iniziale.
Ciò che andrà risolto sarà perciò un problema di Cauchy alle condizioni iniziali.

La **<u>POTENZA assorbita da un condensatore</u>** sarà:

$$\boldsymbol{p(t)} = v(t)i(t) = \boldsymbol{v(t)C\frac{dv(t)}{dt}}$$

L'energia assorbita dal condensatore nel generico intervallo di tempo $(0, t)$ è quindi:

$$\boldsymbol{w_c(0,t)} = \int_0^t p(t)dt = \int_0^t v(t)i(t)dt = \int_0^t v(t)C\frac{dv(t)}{dt}dt = \|1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}C\int_0^t \frac{dv^2(t)}{dt}dt = \frac{1}{2}C\left[v^2(t) - v^2(0)\right]}$$

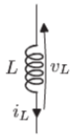
L'energia assorbita nell'intervallo temporale considerato quindi, **dipende esclusivamente dal valore che la tensione sul condensatore assume nell'instante iniziale 0 e nell'istante finale t e non dipende dalla particolare evoluzione temporale della tensione nell'intervallo.** Questo significa che in un intervallo di tempo può accadere che il condensatore immagazzini o ceda energia al resto della rete.

$$w_c(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

Esprime l'energia immagazzinata nel condensatore al generico istante t. Dato che **il condensatore è un bipolo passivo, esso NON è in grado di fornire più energia di quanto ne abbia immagazzinata** in precedenza.
La tensione sul condensatore prende dunque le sembianze di una FUNZIONE DI STATO in quanto legata all'energia immagazzinata.

Una FUNZIONE DI STATO è semplicemente una funzione la cui variazione tra due punti, detti stati del sistema, dipende solo dal valore di questi ultimi ammettendo sempre un differenziale esatto.
Di conseguenza, come precedentemente accennato, la tensione sul condensatore è una VARIABILE CONTINUA, se la sua forma d'onda si mantiene inoltre limitata.

INDUTTORE



L'induttore è un bipolo conservativo caratterizzato dal seguente legame costitutivo:

$$v(t) = \frac{dL(t)i(t)}{dt}$$

Il parametro L è detto induttanza e la sua unità di misura e l'Henry $[H]$.
Il bipolo induttore è il duale del bipolo condensatore.
Nel caso di invarianza temporale delle caratteristiche fisiche e geometriche **il legame costitutivo di un induttore diviene:**

$$\boldsymbol{v(t) = L\frac{i(t)}{dt}}$$

Che ci mostra come è la corrente questa volta a dover essere continua.
Il legame integrale/differenziale di un induttore è:

$$i(t) = i(t_o) + \frac{1}{L}\int_{t_o}^{t} v(\tau)d$$

Per cui il legame tensione corrente è univocamente definito se e solo se è noto il valore della corrente $i(t_0)$ all'istante iniziale t_0.

La **POTENZA assorbita da un induttore** è:

$$\boldsymbol{p(t)} = v(t)i(t) = \boldsymbol{i(t)C\frac{di(t)}{dt}}$$

E l'**energia assorbita** dell'induttore nel generico intervallo di tempo $(0, t)$ sarà

$$\boldsymbol{w_L(0,t)} = \int_0^t p(t)dt = \int_0^t v(t)i(t)dt = \int_0^t i(t)C\frac{di(t)}{dt}dt = \|1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}L\int_0^t \frac{di^2(t)}{dt}dt = \frac{1}{2}L\left[i^2(t) - i^2(0)\right]}$$

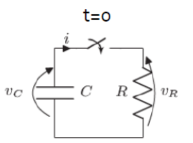
L'energia assorbita dell'intervallo di tempo considerato quindi dipende esclusivamente dal valore che la corrente nell'induttore assume nell'istante iniziale 0 e nell'istante finale t e non dipende così dalla particolare evoluzione temporale della corrente nell'intervallo temporale. Questo significa che in un intervallo di tempo può accadere che l'induttore immagazzini o ceda energia al resto della rete.

La funzione

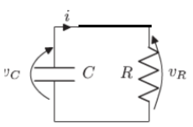
$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Esprime l'energia immagazzinata nell'induttore all'istante generico t.
Dato che **l'induttore è un bipolo passivo, esso non è in grado di fornire più energia di quanto non ne abbia immagazzinata** in precedenza.
La corrente sull'induttore prende così le sembianze di una FUNZIONE DI STATO in quanto legata all'energia immagazzinata.
Tale corrente è dunque una VARIABILE CONTINUA, se inoltre la forma d'onda della tensione si mantiene limitata.

SCARICA DI UN CONDENSATORE



Generalmente un transitorio può immaginarsi dovuto all'apertura o alla chiusura istantanee di interruttori che escludano o inseriscono uno o più componenti, sia attivi che passivi.
Nel transitorio di scarica (RISPOSTA/EVOLUZIONE LIBERA) si suppone il condensatore inizialmente carico supposto ad una generica tensione v_{c0}.



Per cui nell'istante $t = 0$ l'interrruttore si chiude e inizia a fluire corrente fino a che il condensatore non ha disperso sulla resistenza l'energia che aveva immagazzinato. Dal momento che la tensione sul condensatore è una funzione di stato, essa NON può variare valore istantaneamente, di conseguenza il valore della tensione rimarrà invariato anche nell'istante immediatamente successivo alla chiusura dell'interruttore stesso:

$$\begin{cases} v_c(0^-) = v_{C0} \\ i(0^-) = 0A \end{cases} \Rightarrow v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_{C0}$$

Dalla legge di Ohm si ottiene:

$$i(t = 0^+) = \frac{v_{c0}}{R}$$

Esaurita la fase transitoria il condensatore sarà carico e quindi non ci sarà più flusso di corrente:

$$i_C(t=\infty) = 0A; v_C(t=\infty) = Ri_C(t) = 0$$

Alla chiusura dell’interruttore ($t = 0$) si possono evidenziare le seguenti relazioni:

$$i(t) = -i_C = -\frac{Cdv_C}{dt}; i(t) = \frac{v_R}{R}; v_R = v_C$$

Di conseguenza è possibile scrivere l’equazione risolutiva:

$$-\frac{Cdv_C}{dt} = \frac{v_C}{R}$$

Si tratta di un’equazione differenziale del primo ordine a coefficienti constanti, lineare ed omogenea la cui soluzione sarà:

$$v_C(t) = A\, e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

Se $t_0 = 0$

$$v_C(t) = A\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Da un punto di vista dimensionale, la constante è una tensione. $[V]$

Per trovare il valore di τ è possibile sostituire nell’equazione risolutiva la soluzione generica:

$$-C\frac{d\left(A\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} = \frac{A\, e^{-\frac{t}{\tau}}}{R}$$

$$C\frac{1}{\tau}Ae^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{R}$$

$$\tau = RC$$

τ è detta anche costante di tempo del Sistema. Dimensionalmente è un tempo in secondi. Essa indica la velocità dell’evoluzione del Sistema, in quanto risulta un parametro di scala della variabile tempo.

Per trovare il valore del coefficiente A si può utilizzare la seguente CC, per $t = 0^+$

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_{C0}$$

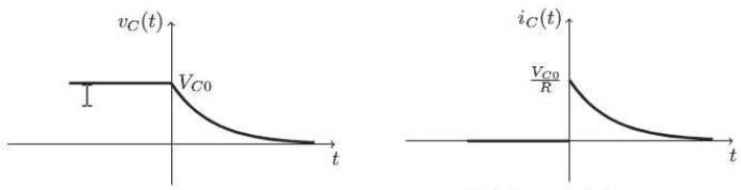
$$A = v_{C0}$$

Di conseguenza, gli andamenti della tensione ai capi del condensatore e della corrente nel circuito sono

$$v_C = v_{C0}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = \frac{v_{C0}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

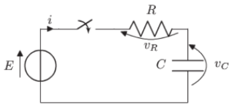
Dopo un intervallo temporale che va dai $4\tau \div 5\tau$ il transitorio si esaurisce, scende ovvero al 2-3% del valore di partenza.



(a) Andamento della tensione (b) Andamento della corrente

$$v_C = v_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \qquad i = \frac{v_{C0}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

TRANSITORIO FORZATO DEL PRIMO ORDINE



Anche in questo caso il condensatore è sottoposto ad una tensione v_{C0}:

$$\begin{cases} v_c(0^-) = v_{C0} \\ i(0^-) = 0A \end{cases}$$

Nell'istante $t = 0$ l'interruttore si chiude e il condensatore si trova connesso in serie ad una resistenza e ad un generatore di tensione, in questo modo inizierà a fluire corrente fino a che il condensatore si caricherà fino ad un nuovo equilibrio.

Sempre dal fatto che la tensione sul condensatore è una funzione di stato, essa non può variare istantaneamente valore e quindi rimarrà invariato anche nell'istante immediatamente successivo alla chiusura del tasto:

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_{C0}$$

Cosa accade nelle varie finestre temporali?

A $\boldsymbol{t = 0}$

Tutti i bipoli sono attraversati dalla stessa corrente $i(t)$ ed utilizzando le LKT si può scrivere:

$$E = v_R(t) + v_C(t)$$

Per risolvere il circuito è necessario considerare anche le equazioni di stato della capacità e della resistenza e l'equazione risolutiva prenderà così la seguente forma:

$$E = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

Si tratta anche questa di un'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costante lineare, ma questa volta non omogenea.

Riordinando i termini e imponendo le condizioni iniziali per cui la tensione ai capi del condensatore sia la tessa per 0^- come per 0^+, si ha il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{RC}\, v_C(t) = \dfrac{E}{RC} \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases}$$

Che, come soluzione, avrà:

$$v_C(t) = v_C^0(t) + v_C^p(t)$$

Ove $v_C^0(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\, v_C(t) = 0$$

La cui soluzione è:

$$v_C^0(t) = k\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

E $v_C^p(t)$ è la soluzione particolare, questa data dalla soluzione a regime del sistema, in questo caso:

$$v_C^p(t) = E$$

Perciò alla fine, si avrà:

$$v_C(t) = k\, e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

Il valore della costante k si determinerà, solo a questo punto, dall'imposizione delle condizioni iniziale del problema di Cauchy:

$$v_C(0) = k\ + E = v_{C0}\, ; k = v_{C0} - E$$

E la soluzione finale del problema sarà:

$$v_c(t) = (v_{C0} - E)e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

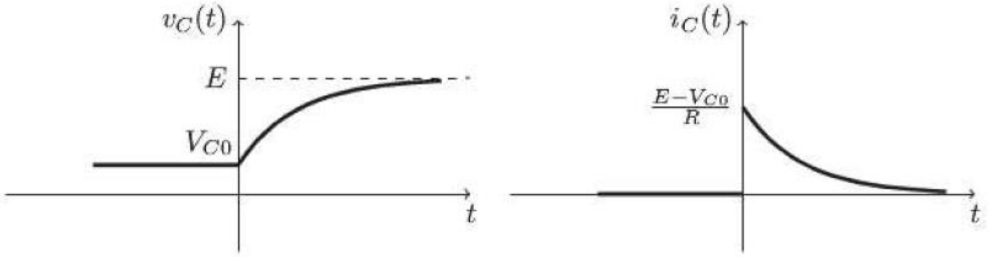
Nota così la $v_C(t)$ è possibile determinare tutte le altre grandezze del circuito tramite le leggi di Kirchhoff:

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t) = -C\frac{1}{RC}(v_{C0} - E)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E - v_{C0}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

In generale, la tensione ai capi di un condensatore si può scrivere:

$$v_c(t) = (v_{C0} - v_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_\infty$$

La costante $\tau = RC = [s]$ è anche qua un tempo e indica la velocità dell'evoluzione del Sistema: risulta un parametro di scala della variabile tempo.



(a) Andamento della tensione (b) Andamento della corrente

$$v_C(t) = (v_{C0} - E) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \qquad i(t) = -\frac{1}{R}(v_{C0} - E) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

- ➔ La corrente in valore assoluto è massima per $t = 0$ e decresce con t.
- ➔ Per $t \to \infty$ o per $t \gg \tau$, ovvero alla fine del transitorio, si ha $\lim_{t\to\infty} i(t) = 0$.
  Questo si può riassumere dicendo che la capacità, alla fine del transitorio, si comporta come un circuito aperto.
- ➔ All'istante $t = 0$, ovvero all'inizio del transitorio, la corrente vale $i(0) = \frac{E - v_{C0}}{R}$.
  Questo valore è lo stesso che si avrebbe sostituendo alla capacità un generatore di tensione v_{C0}.
  In particolare, assumendo che la capacità sia inizialmente scarica, ovvero $v_{C0} = 0$, si può dire che all'inizio del transitorio la capacità si comporta come un cortocircuito.

CONSIDERAZIONI CIRCUITO ERC

1. **La forma vista finora dell'equazione dell'evoluzione del sistema permette di distinguere una componente transitoria,** quella banalmente che ha andamento transitorio e che si esaurisce per $t \gg \tau$, **ed una permanente** che non dipende dal tempo/transitorietà del fenomeno.

$$\boldsymbol{v_c(t) = \underbrace{(v_{C0} - E)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{Transitoria} + \underbrace{E}_{Permanente}}$$

$$\boldsymbol{i(t) = \underbrace{\frac{E - v_{C0}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}_{Transitoria}}$$

La corrente in questo circuito presenta la sola componente transitoria.

2. **I termini possono poi essere raggruppati per mettere in luce l'evoluzione libera**, ovvero l'evoluzione dipendente dalla sola condizione iniziale e non dai generatori presenti nel circuito, **e l'evoluzione forzata**, questa indipendente dalla condizioni iniziali e stabilita solo dai generatori presenti:

$$\boldsymbol{v_c(t) = \underbrace{v_{C0}e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{Evoluzione\\Libera}} + \underbrace{E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}_{\substack{Evoluzione\\Forzata}}}$$

$$\boldsymbol{i(t) = \underbrace{-\frac{v_{C0}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{Evoluzione\\Libera}} + \underbrace{\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{Evoluzione\\Forzata}}}$$

CONSIDERAZIONI ENERGETICHE CIRCUITO ERC

Da un punto di vista energetico, si ricordi che l'energia assorbita/ceduta da un bipolo è data da:

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt$$

E per una capacità tale energia vale:

$$w(t_1, t_2) = \frac{1}{2}C[v_C(t_2)^2 - v_C(t_1)^2]$$

Si assuma per semplicità $t_1 = 0,\ t_2 \to \infty,\ v_C(0) = v_{C0} = 0V$

Dall'equazione di bilancio del sistema si ottiene:

$$V_0 = v_R(t) + v_C(t)$$

Moltiplicando ogni termine per $i(t)$ e integrando tra $t_1,\ t_2$:

$$\underbrace{\int_0^\infty V_0 i(t)dt}_{I} = \underbrace{\int_0^\infty v_R(t)i(t)dt}_{II} + \underbrace{\int_0^\infty v_C(t)i(t)dt}_{III}$$

I. **Il primo termine $\int_0^\infty V_0 i(t)dt = w_E(0,\infty)$ è l'energia erogata dal generatore** V_0 durante il trasnitorio, e può essere calcolata come:

$$w_E(0,\ \infty) = \int_0^\infty V_0 C\frac{dv_C(t)}{dt}dt = V_0 C\int_0^{V_0} dv_C(t) = \boldsymbol{CV_0^2}$$

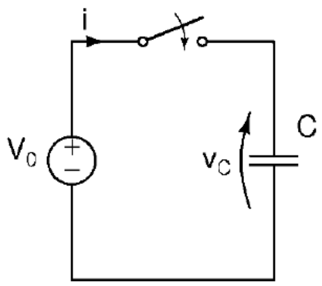
II. **Il secondo termine $\int_0^\infty v_R(t)i(t)dt = w_R(0,\infty)$ è l'energia dissipata sulla resistenza R** durante il transitorio.

III. **Il terzo termine $\int_0^\infty v_C(t)i(t)dt = w_C(0,\infty)$ è l'energia immagazzinata sulla capacità** durante il transitorio e può essere espressa come:

$$w_C(0,\ \infty) = \int_0^\infty v_C(t)i(t)dt = \frac{1}{2}C\int_0^{V_0} v_C(t)\frac{dv_C(t)}{dt}dt\ = \frac{1}{2}C[v_C(\infty)^2 - v_C(0)^2] = \boldsymbol{\frac{1}{2}CV_0^2}$$

Si può notare subito che ½ $w_E(0,\ \infty) = w_C(0,\ \infty)$ e quindi, di conseguenza, anche $w_R(0,\ \infty) = \frac{1}{2}w_E(0,\ \infty)$. **In un transitorio di carica di una capacità, assunta inizialmente scarica, metà dell'energia fornita dal generatore di tensione viene immagazzinata sulla capacità, l'altra metà viene invece dissipata sulla resistenza. Questo indipendentemente dal valore della resistenza R e dalla costante di tempo τ del sistema.**

SOVRACORRENTE



Il seguente circuito viene considerato un circuito degenere, in quanto la sua resistenza ha un valore nullo. Nella realtà si avrà comunque una resistenza di valore molto basso, dovuta all'interruttore, alla distribuzione e/o ai parassiti del condensatore utilizzato.

1. Si supponga per $t < 0$ l'interruttore si aperto:

$$i = 0$$

2. Si supponga che la capacità sia scarica, ovvero che $v_{C(t)} = 0$

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

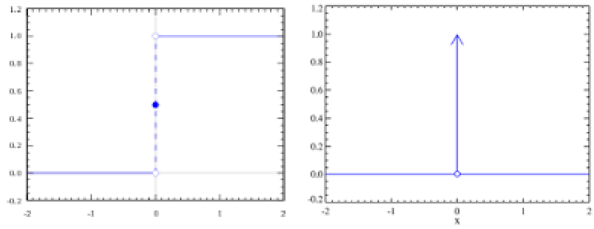
D'altronde una qualunque tensione costante è compatibile con l'ipotesi di corrente nulla.

Alla chiusura dell'interruttore si ha un transitorio di carica con costante ti tempo $\tau \to 0$. La tensione passa istantaneamente da 0 a V_0:

$$v_C(t) = V_0 u(t)$$

Portando ad una corrente sul circuito impulsiva e non limitata: la derivata di tale tensione sarà una funzione a gradino conosciuta come Delta di Dirac $\delta(t)$:

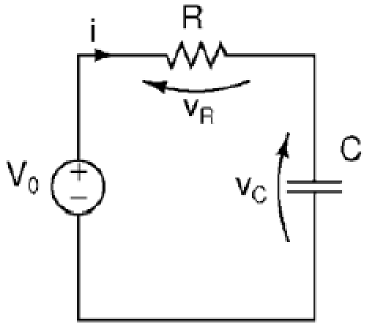
$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = CV_0\delta(t)$$

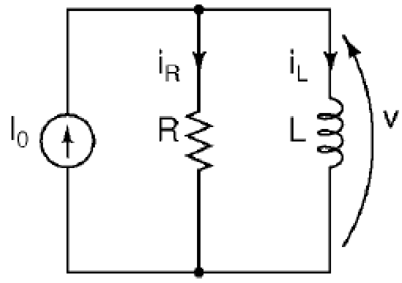


Nei casi pratici, la corrente non sarà infinita ma comunque estremamente elevata, e potrebbe essere tale da danneggiare le apparecchiature o la stessa rete elettrica. Questo fenomeno prende il nome di sovracorrente.

TRANSITORIO DEL PRIMO ORDINE: INDUTTANZA

Per quanto riguarda l'induttanza, si comporta esattamente come la capacità, fatte salve alcune sostituzioni.
Si consideri i due circuiti seguenti per cui valgono, rispettivamente:





$$i(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t) \qquad\qquad v(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t)$$

Entrambi portano a due equazioni differenziali:

$$V_0 = v_R(t) + v_C(t) = RC\frac{d}{dt}v_C(t) + v_C(t) \qquad\qquad I_0 = i_R(t) + i_L(t) = \frac{L}{R}\frac{d}{dt}i_L(t) + i_L(t)$$

Che portano a due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{V_0}{RC} = \dfrac{d}{dt}v_C(t) + \dfrac{v_C(t)}{RC} \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} I_0 = \dfrac{L}{R}\dfrac{d}{dt}i_L(t) + i_L(t) \\ i_L(0) = I_{L0} \end{cases}$$

Risolti da:

$$\begin{cases} v_c(t) = (V_{C0} - V_0)e^{-\frac{t}{\tau}} + V_0 \\ i(t) = \dfrac{V_0 - V_{C0}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} i_L(t) = (I_{L0} - I_0)e^{-\frac{t}{\tau}} + I_0 \\ v(t) = R(I_0 - I_{L0})e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

Per cui:

$$\tau = RC \qquad\qquad \tau = \frac{L}{R}$$

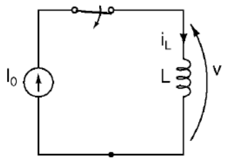
E i comportamenti all'inizio e alla fine del transitorio sono dati da:

$$\begin{cases} i(0) = \dfrac{V_0 - V_{C0}}{R} \\ \lim\limits_{t\to\infty} i(t) = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} v(0) = R(I_0 - I_{L0}) \\ \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0 \end{cases}$$

Ovvero se la capacità si comporta all'inizio come un generatore di tensione V_{C0} (o un CC assumendo la capacità scarica) e alla fine del transitorio come un Circuito Aperto, un'induttanza si comporta all'inizio del transitorio come un generatore di corrente I_{L0} (o un CA assumendo l'induttanza scarica) e alla fine del transitorio come un Corto Circuito.

Anche per quanto riguarda le **considerazioni energetiche** si può procedere similmente a quanto già visto per la capacità, ed affermare che **metà dell'energia fornita dal generatore viene immagazzinata nell'induttanza e metà dissipata sulla resistenza indipendentemente dal suo valore.** In questo caso, sarà perciò la CORRENTE ad essere la funzione di stato, sarà dunque la CORRENTE a dover variare con CONTINUTA' durante il transitorio.

SOVRATENSIONE



Per quanto riguarda il circuito degenere, per una induttanza i problemi non si verificano in fase di collegamento al circuito, ma in fase di distaccamento.

1. Si consideri in questo caso il circuito in figura dove all'istante $t = 0$ il generatore I_0 viene scollegato dall'induttanza.
2. All'apertura dell'interruttore si ha un transitorio di scarica con costante di tempo $\tau \to 0$ che porta la corrente dell'induttore dal valore I_0 al valore 0, cioè:

$$i_L(t) = I_0\big(1 - u(t)\big)$$

In questo caso è la tensione ai capi dell'induttanza ad essere impulsiva e non limitata:

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t) = -LI_0\delta(t)$$

Si parla perciò in questo caso di sovratensione. Nei casi reali, per via della resistenza non infinita dell'interruttore aperto e dei parassiti dell'induttanza, si avrà un valore non infinito ma comunque estremamente alto, capace di danneggiare il circuito.