Parte 2

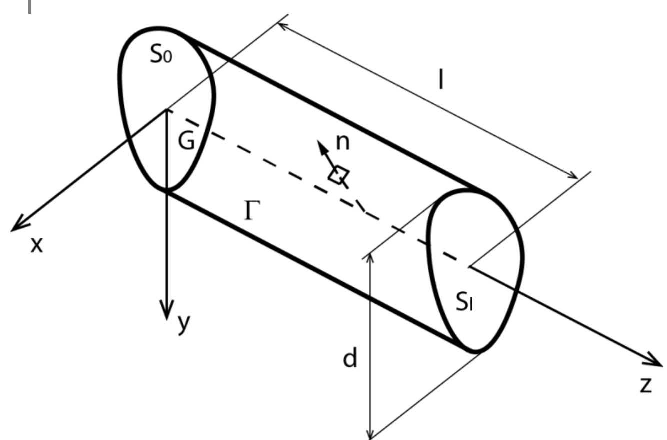
Il problema di De Saint Venant

Attraverso la dinamica del continuo, il problema elastico, il legame costitutivo ($\sigma\varepsilon$) e le equazioni di congruenza è impossibile risolvere in forma chiusa un problema postoci, è sempre necessaria una semplificazione, un'approssimazione.

Tale approssimazione sarà poi tanto necessaria quanto si complicheranno le condizioni base che si dovranno affrontare per la risoluzione dei problemi; se per *Meccanica dei solidi* si sono considerate le sole linee d'asse, come se il corpo fosse molto lontano, qui sarà necessario avvicinarsi, aumentare il dettaglio e concentrasi sullo studio delle aree, delle sezioni, dalle quali per estrusione si otterranno le forme finite e reali: si tratteranno perciò solidi ottenuti per estrusione lungo una linea retta di una sezione retta ortogonale alla linea media.
Ci si pone di tradurre il valore puntuale di una mappatura di tensioni all'interno della sezione, in questo modo si potranno individuare, sezione per sezione, i punti maggiormente tensionati e fare il confronto con le caratteristiche limite del materiale, questo approccio però porta con se un'analisi del tensore delle tensioni diverso per ogni punto della sezione e di infinite caratteristiche della sollecitazione associato ad esso, è necessario dunque un modello, una semplificazione che traduca le caratteristiche della sollecitazione in tensioni.

Il modello alla De Saint Venant si propone di ricavare deformazioni e tensioni su di un oggetto ideale, a partire dai carichi esterni opportunamente applicati.
Per la ricerca della soluzione esatta ci si avvarrà inoltre del metodo di risoluzione inverso, si ipotizzeranno ovvero delle soluzioni che sostituite nel problema porteranno al soddisfacimento delle ipotesi: partendo dalle ipotesi di De Saint Venant, si ipotizzerà una soluzione, se questa sostituita nelle ipotesi di partenza le soddisferà, allora la soluzione sarà esatta, ed esistendo, per il principio di Kirchhoff, sarà l'unica.

Ipotesi semplificative



1. Ipotesi sulla geometria:
   - La dimensione caratteristica (ingombro massimo di sezione) della sezione retta della trave deve risultare trascurabile rispetto alla sua lunghezza $d/l << 1$: la trave dev'essere snella, non tozza;
   - La trave è ad asse rettilineo;
   - Sezioni rette costanti lungo z;

2. Ipotesi sui carichi esterni:
    - Le forze di volume f sono nulle, si ignora la forza peso;
    - Le forze di superfici p sono applicate solo sulle basi e non sulla superficie laterale;
    - Il sistema si trova in equilibrio;
    - Il corpo è libero da vincoli, trascuro ovvero i carichi da questi generati all'interno delle caratteristiche della sollecitazione;
3. Ipotesi sul materiale costitutivo:
    - Materiale elastico lineare e isotropo (due parametri per caratterizzarlo: Young e Poisson);
    - La trave è omogenea, ovvero le caratteristiche del materiale non variano da punto a punto

Inoltre, va aggiunto che il sistema di riferimento deve essere baricentrico come quello in figura, con z asse della trave, altrimenti cambiando orientazione agli assi la soluzione del problema non potrebbe più valere od essere esatta.

Si riscriva e risolva il problema elastico sotto queste ipotesi, voglio che escano fuori le tensioni e le deformazioni.

Le **equazioni indefinite di equilibrio** divengono:

$$\text{in } \Omega \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Equazioni al contorno:

$$\text{in } \Sigma \begin{cases} p_x = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ p_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ p_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{cases}$$

Che divengono:

$$\text{mantello } (n_x, n_y, 0) \begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y = 0 \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \end{cases}$$

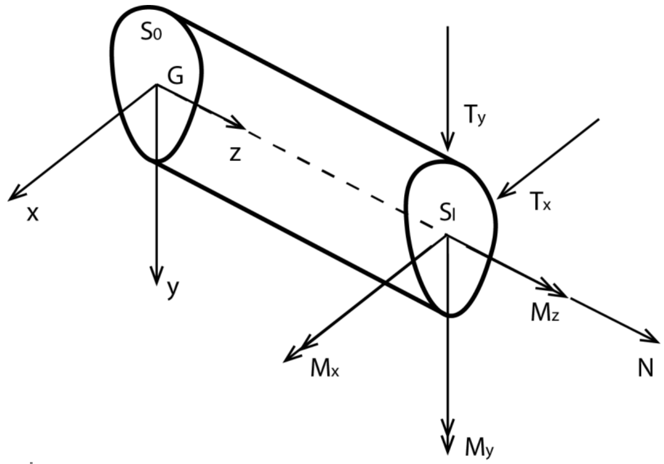
$$S_0 \ (0,0,-1) \begin{cases} \tau_{zx} = -p_x \\ \tau_{zy} = -p_y \\ \sigma_z = -p_z \end{cases} \qquad S_l \ (0,0,1) \begin{cases} \tau_{zx} = p_x \\ \tau_{zy} = p_y \\ \sigma_z = p_z \end{cases}$$

Legame costitutivo:

$$[\varepsilon] = [C][\sigma]$$

Equazioni di congruenza:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \end{cases}$$



Ottengo così un set di equazioni per cui si ipotizzerà una soluzione che si dovrà verificare in queste equazioni per controllare che siano tutte rispettate.

A questo punto è necessario tradurre le sollecitazioni in tensioni: servono le caratteristiche della sollecitazione.

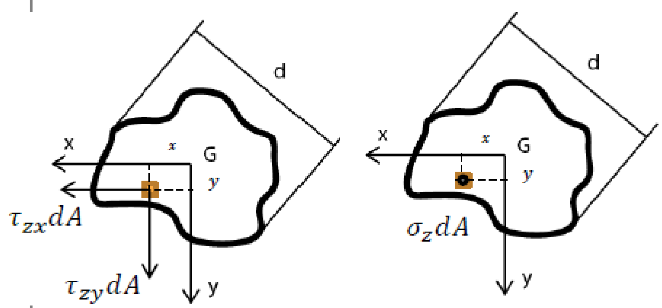
→ La risultante dello sforzo normale? È la risultante delle azioni in direzione z;

→ La risultante dello sforzo di taglio? È la risultante delle rispettive azioni sull'asse x e sull'asse y

→ Come si genera il momento intorno all'asse x? P_x e P_y giacciono in xy e quindi non hanno braccio per generare una rotazione intorno ad x, l'unica azione che può farlo è P_z.

→ Il momento intorno all'asse y sarà generato come appena detto, introducendo un segno $-$ dovuto alla convenzione della regola della mano destra.

→ Ed il momento intorno ad z? È un momento torcente.
L'azione di un momento torcente porta alla spostamento in direzione x degli elementi infinitesimi della sezione e non genera spostamento sull'asse baricentrico.
È generato da P_x e P_y e non da P_z, questo parallelo a z.
Il segno è dato in base al fatto che gli elementi infinitesimi soggetti a P_x e distanti y sono negativi, mentre quelli soggetti a P_y e distanti x sono positivi, sempre in accordo con la regola della mano destra.



Adesso, attraverso le equazioni di equilibrio al contorno, si possono legare le tensioni alle deformazioni, le caratteristiche della sollecitazione sulla S_l perciò saranno:

$$N = \int_A P_z dA = \int_A \sigma_z dA \qquad M_x = \int_A P_z y dA = \int_A \sigma_z y dA$$
$$T_x = \int_A P_x dA = \int_A \tau_{zx} dA \qquad M_y = -\int_A P_z x dA = -\int_A \sigma_z x dA$$
$$T_y = \int_A P_y dA = \int_A \tau_{zy} dA \qquad M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

Il problema si riduce così alla determinazione dello stato tensionale a partire dalla conoscenza dell'equilibrio delle caratteristiche della sollecitazione.
Sapendo inoltre che le equazioni trovate sono valide per una sezione del materiale, essendo questo LOI per ipotesi, varranno per tutto il materiale.

Principio di De SaintVenant: se ad un elemento superficiale di un solido è applicato un sistema di forze autoequilibrato, lo stato di tensione nei punti del solido a sufficiente distanza dall'elemento caricato è praticamente nullo (distanza di estinzione).

Ne consegue che, se si applica alla base dell'elemento trave un sistema di forze autoequilibrato, ad una certa distanza da tale base lo stato di tensione non dipende dalla distribuzione dei carichi effettivi applicati sulle basi ma soltanto dalle caratteristiche della sollecitazione, saranno queste dunque ad interessarci.

Notevole è che si ottenga lo stesso risultato anche a parità di carico: le tensioni in una sezione della trave dipenderanno solamente dalle caratteristiche della sollecitazione che si instaureranno in quel punto indipendentemente dalla distribuzione di forze applicata (NB: questo non è valido localmente).

La distanza a cui l'effetto dei carichi in equilibrio sulle basi diventa nullo è detta distanza di estinzione e risulta in genere pari alla dimensione massima d della sezione retta.
Ad esempio, in una trave tozza è persino possibile che non ci sia alcuna lunghezza di estinzione.

Per cui se si determina lo stato tensionale interno per una distribuzione particolare delle sollecitazioni superficiali sulle basi allora si è in grado di determinare lo stato tensionale per una qualsiasi distribuzione con le stesse caratteristiche.

Come si scrive il tensore delle tensioni di De Saint Venant? Si ottiene una rappresentazione dello stato tensionale di un qualunque punto sulla trave secondo una terna che è sempre orientata come quella baricentrica.
Le caratteristiche della sollecitazione varieranno lungo l'asse per cui in ogni punto dell'asse varrà una mappatura di tensioni lungo la sezione.

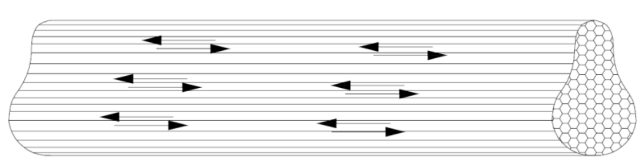
In questo caso sulla base sono presenti 3 tensioni:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xz} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Le soluzioni di questo tensore delle tensioni sono dette soluzioni alla De Saint Venant.

Nel tensore sono così presenti solo i termini che definiscono le caratteristiche della sollecitazione, semplificando il problema senza perdere di generalità.

Come si comporta la trave di De Saint Venant?
Fisicamente equivale a considerare la trave come un insieme di fibre longitudinali *spaghettiformi* che trasferiscono azioni mutue tangenzialmente alla direzione delle fibre stesse.



Valendo inoltre il principio di sovrapposizione, il problema generale è componibile attraverso la composizione di soluzioni - e quindi di caratteristiche di sollecitazione - semplici.
In questo modo la composizione, ottenuta anche variando il punto di applicazione, permette di descrivere un qualsiasi caso generale.

⇒ Le equazioni indefinite di equilibrio diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si deriva che il vettore delle tensioni $\vec{\tau}_z = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ risulta costante in z e quindi indipendente da z, ovvero su di un piano ortogonale a z agisce un campo vettoriale del tipo:

$$\vec{\tau}_z = \tau_{xz}(x,y)\hat{i} + \tau_{yz}(x,y)\hat{j}$$

Per ottenere la tensione normale si derivi la terza equazioni in z:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial^2 z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial^2 z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = cost$$

$$\sigma_z(x,y,z) = \frac{z}{l}\sigma_z(x,y,z) + \frac{l-z}{l}\sigma_z(x,y,z)$$

σ_z è lineare, lungo la fibra varia linearmente.

⇒ Quello a cui ci si riconduce è uno stato tensionale piano: ridotto il tensore delle tensioni ad un tensore principale, ovvero se delle infinite terne disponibili ci si limita a quelle principali, se i 3 pivot sono non nulli lo stato di tensione è tridimensionale, se uno è nullo lo stato sarà bidimensionale e se due sono nulli lo stato sarà monodimensionale.

Le direzioni principali si ricavano dal tensore delle tensioni generico ponendo il determinale pari a zero, nel caso di De Saint Venant:

$$\det[\sigma] \equiv 0$$

Esistono allora sicuramente almeno due soluzioni non nulle, il problema sarà così definibile piano.
Poiché lo stato tensionale è piano, il piano delle tensioni sarà individuato dal vettore della tensione tangenziale τ e dal vettore della tensione normale σ, da cui ne consegue il fatto che i punti della stessa fibra avranno lo stesso piano delle tensioni: lungo lo spaghetto τ_{xz}, τ_{yz} sono costanti, ma non è detto che non possano variare nelle altre direzioni.

Quali sono a questo punto le direzioni principali? Una sarà data da z, l'altra da τ e la terza verrà ricavata di conseguenza.

Forza Normale Centrata

Si cerchi una soluzione al problema applicando la più semplice delle sollecitazioni, una tensione monodimensionale per cui la risultante delle forze esterne applicate sulle basi estremali sia equivalente ad una forza centrata N:

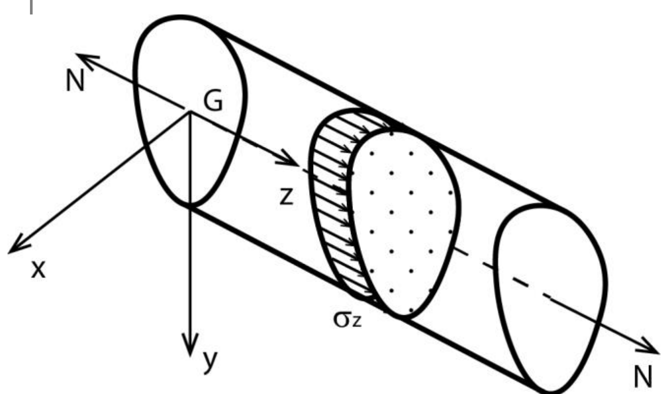
$$\begin{cases} p_x = 0 \\ p_y = 0 \\ p_z = c \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{xz} = p_x = 0 \\ \tau_{yz} = p_y = 0 \\ \sigma_z = p_z = c \end{cases}$$

Ne derivano le seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_z dA = cA & M_z &= \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y)dA = 0 \\ T_x &= \int_A \tau_{zx} dA = 0 & M_x &= \int_A \sigma_z y dA = c\int_A y dA = cS_x \\ T_y &= \int_A \tau_{zy} dA = 0 & M_y &= -\int_A \sigma_z x dA = -c\int_A zx dA = -cS_y \end{aligned}$$

Dove con S_x, S_y si sono identificati i momenti statici, questi nulli se - come per ipotesi - ci si è posti in un sistema di riferimento baricentrale. (Ricordi la geometria delle aree?)

La sollecitazione si configura così essere semplicemente di sforzo normale solo se l'asse z è baricentrico per la trave.



Si integrino le condizioni di equilibrio, in z: $\begin{cases} \tau_{zx} = cost \\ \tau_{zy} = cost \end{cases}$

per definizione le tensioni agli estremi sono nulle (è applicata solo N) e dunque $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \; \forall z \in (0, l)$ queste, sostituite nella terza equazione di equilibrio portano a:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \sigma_z = cost \text{ in } z$$

Poiché in $z = l$ la tensione è nota:

$$N = \int_A \sigma_z dA = cA$$

Ma è noto che:

$$\sigma_z = c$$

Allora:

$$N = \sigma_z A \Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A}$$

Verificando la forma del tensore delle tensioni per stato tensionale monoassiale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{A} \end{bmatrix}$$

Ricordi che la terna principale è una terna di assi per la quale il tensore delle tensioni è una matrice diagonale? In questo caso essendo la matrice diagonale, si conclude che la terna principale sarà così formata dall'asse z e da qualsiasi altri assi che siano ortogonali a z e tra di loro.

⇒ Si valutino a questo punto la congruenza ed il legame costituivo, condensati questi nelle relazioni di Navier, integrando queste equazioni si può così risalire agli spostamenti in maniera univoca.

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = -\dfrac{\nu N}{EA} \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\dfrac{\nu N}{EA} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \dfrac{N}{EA} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} = 0 \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} = \dfrac{1}{G}\tau_{xz} = 0 \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Ricordi che EA è il modulo di rigidezza?

Quali sono i risultati notevoli? Innanzitutto si nota subito che a seguito di una trazione che c'è un allungamento in direzione z dato da $\varepsilon_{zz} = \dfrac{N}{EA}$ e una diminuzione di sezione (strizione!) lungo x e lungo y data dai contributi $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\dfrac{\nu N}{EA}$, si nota infine la più totale assenza di distorsioni, i termini in γ sono tutti nulli, in questo modo la sezione NON si modificherà, non cambiando gli angoli tra le rette/fibre.

⇒ Adesso ci si pone di analizzare gli spostamenti associati a questo tipo di sforzo normale centrato: si integreranno le equazioni di Navier appena scritte.

$$\begin{cases} u = -\dfrac{\nu N}{EA}x + u_0(z, y) \\ v = -\dfrac{\nu N}{EA}y + v_0(z, x) \\ w = \dfrac{N}{EA}z + w_0(x, y) \end{cases}$$

Si ottengono così degli spostamenti definiti a meno di funzioni, se queste funzioni descrivono un moto che non dà contributi in termini direzionali deformativi, il corpo si muoverà nello spazio senza subire ulteriori tensioni e deformazioni compiendo un **moto rigido** e queste funzioni potranno essere trascurate.
Si sostituiscano perciò tali funzioni all'interno delle equazioni degli allungamenti e distorsioni:

$$\begin{cases} \varepsilon_{0x} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{0y} = \dfrac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{0xy} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{0yz} = \dfrac{\partial v_0}{\partial z} + \dfrac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{0zx} = \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Come ci si poneva di dimostrare a tali funzioni non sono associati nè allungamenti nè distorsioni, perciò sono caratteristiche di un moto rigido.

Gli spostamenti sono così infine definiti a meno di un moto rigido:

$$\boxed{\begin{cases} u = -\dfrac{\nu N}{EA}x \\ v = -\dfrac{\nu N}{EA}y \\ w = \dfrac{N}{EA}z \end{cases}}$$

In conclusione, lo sforzo normale genera una trasformazione omotetica del solido, ovvero una variazione di volume ma non di forma in base al segno di N:

$$\begin{cases} N > 0 \text{ Trazione, aumento di volume} \\ N < 0 \text{ Compressione, diminuzione di volume} \end{cases}$$

Rimanendo sempre nel campo di sollecitazioni elastiche, per $N > 0$ il volume aumenta, c'è di mezzo un modulo di Poisson, la trave si allunga di più di quanto si strizioni, le fibre longitudinali si allungano più di quanto non si accorcino quelle trasversali: i punti sul mantello si avvicinano al baricentro rendendo tuttavia la configurazione deformata affine a quella indeformata è per questo che la variazione di volume è comunque positiva: l'asse baricentrico viene allungato in direzione z, al contrario delle altre fibre longitudinali che subiscono anche una strizione (avvicinamento all'asse baricentrico).
Per la compressione $N < 0$ invece, la trave si comprime assialmente più di quanto si allunghi lateralmente.

L'entità dello spostamento delle fibre è proporzionale alla quota xy: la strizione diviene maggiore allontanandosi dalla zona centrale.

Inoltre la sezione retta resta tale spostandosi su di un piano parallelo cambiando però forma:

$$x' = x+u = x\left(1 - \frac{\nu N}{EA}\right) \qquad y' = y+v = y\left(1 - \frac{\nu N}{EA}\right) \qquad z' = z+w = w\left(1 - \frac{N}{EA}\right)$$

NOTE