

Fatica

Indice

Fatica	2
Tipi di fatica	2
Le fasi di Fatica	6
Fase 1: innesco	7
Fase 2: Propagazione	8
Fase 3: Rottura di Schianto	8
Caratteristiche della frattura per fatica	9
Tipi di cicli di sollecitazione	10
Caratteristiche dei cicli	12
Prove di fatica	14
Parametri che influenzano la vita a fatica	15
Effetti legati al materiale	16
Effetto della finitura superficiale e delle tensioni residue	17
Effetto scala, effetto delle dimensioni	18
Corrosione	19
Effetto di forma, fattore effettivo di intaglio	19
Tipo di sollecitazione	20
Temperatura	21
Frequenza di applicazione del carico	22
Effetto del ciclo di carico	22
Storia del carico	25
Progettazione a fatica	28
Curva classica di Wöhler	28
Altri diagrammi di fatica	29
Altre considerazioni sulla curva classica di Wöhler	32
Goodman-Smith	33
Master Diagram	35
Stati di tensioni non monodimensionali	35
Progettazione a fatica	37
Coefficiente di sicurezza in fatica	37
Curva SN per sollecitazione media non nulla	38

Fatica

Se il carico ha un'evoluzione nel tempo molto rapida, con dei cambi repentini di valore, si dovrà tenere conto degli effetti dinamici con dei coefficienti amplificativi legati a fenomeni d'inerzia della risposta del componente.

Tra i carichi statici e quelli dinamici c'è una condizione legata alla risposta del materiale per carichi variabili nel tempo in maniera ciclica.

Queste tipologie di sollecitazioni portano il componente ad una rottura di schianto simile ad una rottura fragile anche per comportamento duttile del materiale.

I componenti meccanici soggetti a carichi ciclici possono presentare un cedimento fragile per valori del carico applicato inferiori al limite ammissibile statico.

Questo fenomeno di apparente infragilimento del materiale è detto comportamento a fatica. Il carico ciclico non fa altro che innescare e far propagare quella che dapprima si identifica come un piccolo danneggiamento/inclusione/difetto sulla superficie di un componente ma che si trasforma in una cricca, ovvero una spaccatura del materiale che propagandosi attraverso di esso ad ogni ciclo di sollecitazione avanza sempre più fino al raggiungimento di una condizione limite che porta ad inevitabile rottura.

La fatica si manifesta per livelli di carico molto inferiori a quelli che nominalmente portano a criticità il materiale, indicativamente il limite di fatica è circa la metà del limite di rottura; ma l'aspetto più pericoloso della rottura per fatica è che avviene all'improvviso senza indizi macroscopici, l'innescò e la propagazione della cricca non sono individuabili macroscopicamente, ci si accorge della rottura per fatica solamente all'ormai avvenuto schianto.

È intorno al 1850 che l'ingegnere tedesco August Wöhler comincia a studiare gli assalti ferroviari, colpevoli questi di troppe e frequenti rotture improvvise. I modelli della valutazione della fatica sono modelli semplificati che si basano su ipotesi molto forti, quali uno spettro di carico ciclico di tensione sinusoidale e l'applicazione di una sollecitazione monoassiale.

Tipi di fatica

1. La fatica meccanica è dovuta a tensioni che variano nel tempo;
2. Nella fatica termomeccanica le tensioni variano nel tempo ma anche le deformazioni termiche, e quindi la temperatura;
3. Il creep è invece quel fenomeno in cui si assiste ad una deformazione variabile nel tempo a seguito dell'applicazione ad alte temperature di carichi costanti nel tempo, se tali carichi sono anche ciclici, allora si avrà fatica per creep;
4. Ci sono poi casi molto più specifici che riguarderanno l'accoppiamento di fatica e carichi di contatto, di strisciamento, di rotolamento, di corrosione. . .

La valutazione degli effetti di un carico variabile nel tempo in modo ciclico può essere classificata in due approcci.

l'oscillazione
 è su tensioni
 elastiche, il
 parametro
 che viene
 utilizzato
 per valutare
 la resistenza
 a fatica è la
 tensione
 esercitata

fatica ad alto numero di cicli –

numero di
 applicazioni
 superiore
 indicativamente
 a 10^4

carichi che
 generano
 tensioni
 puramente
 in campo
 elastico

le tensioni
 raggiungono
 lo
 snervamento,
 si fa uso della
 deformazione
 ε

elastoplastica,
 somma di
 quella
 elastica e di
 quella
 plastica

fatica oligociclica

numero di
 ripetizioni
 molto
 ridotto ma
 carichi
 decisamente
 superiori

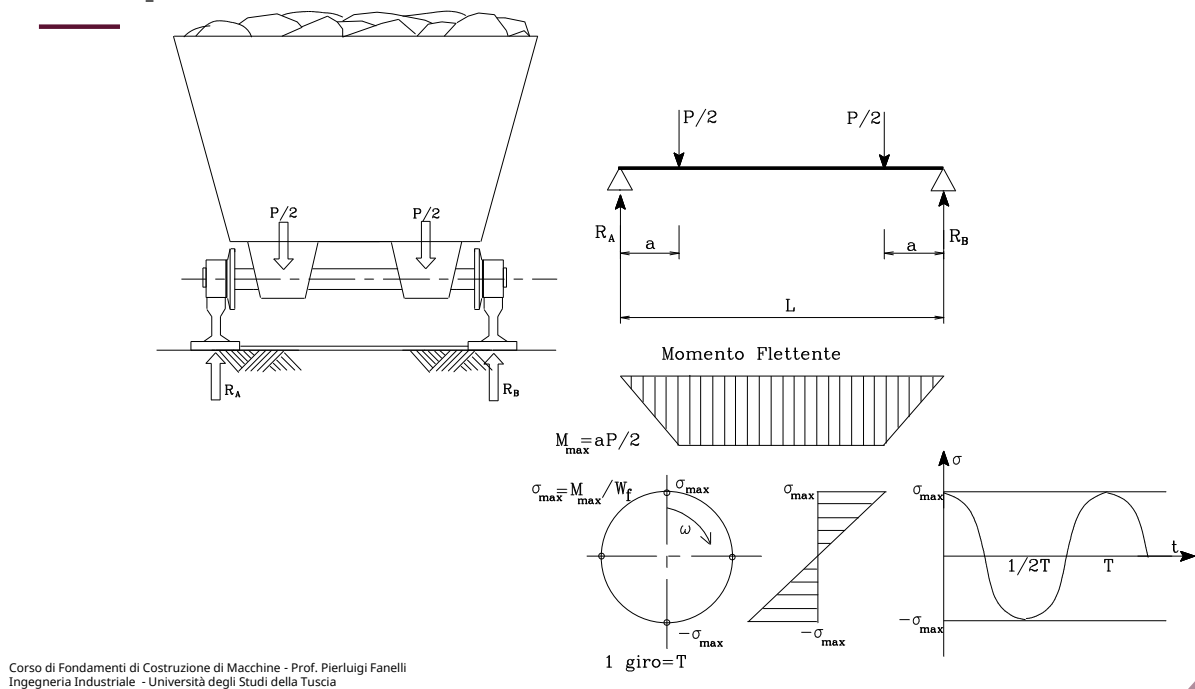
ambito
 elastoplastico,
 tensioni che
 portano
 deformazioni
 plastiche

Qual è lo studio che fa Wöhler? Un assale ferroviario è un elemento a trave che connette tra loro due ruote su cui grava il peso del vagone: ha la duplice funzione di permettere il rotolamento sui binari garantendo l'avanzamento insieme al supporto del vagone verticalmente. Dal punto di vista statico equivalente lo si può

vedere come una trave a sezione circolare costante soggetta ad un carico nei punti di ancoraggio del vagone. P è la forza peso del vagone, per cui nei due punti di ancoraggio si avrà $P/2$ mentre a terra si avrà la reazione vincolare verticale.

La trave è caricata con sollecitazioni di taglio e momento flettente, dato che in una trave snella la sollecitazione di taglio genera tensioni molto piccole e comunque distribuite in modo tale che l'andamento è nullo dove ci sarà il massimo della tensione di flessione, ci si concentrerà sulla sola azione di momento flettente.

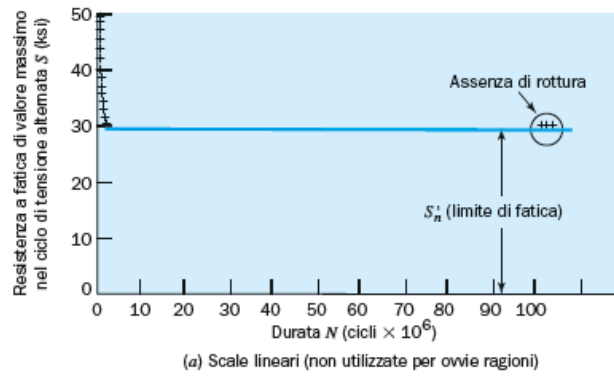
Esempio di sollecitazioni di fatica



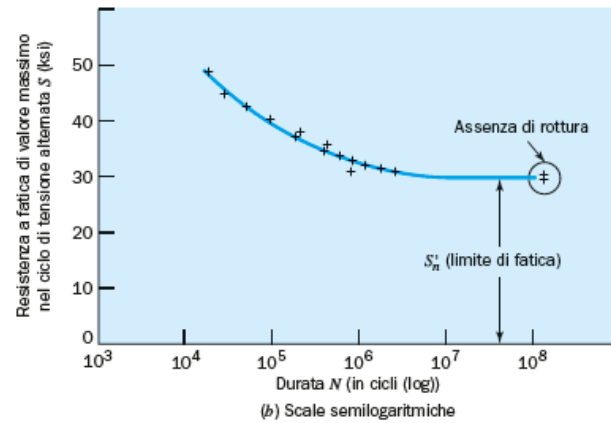
L'aspetto su cui si concentra Wöhler è che durante il viaggio del vagone la sollecitazione è costante. Il peso viaggia insieme all'assale e in ogni istante di tempo il momento flettente è costante e non ci sono effetti dinamici da considerare. In realtà l'oggetto-assale che si considera come una trave lineare, ha una sua sezione e durante il moto del vagone ruota intorno al suo asse: il carico e il vincolo rimangono sì nella stessa posizione, ma l'assale no, ruota su se stesso: la sollecitazione in questo modo sposta il punto di applicazione insieme la rotazione dell'assale al punto successivo, scaricando il punto di applicazione precedente, fino a quando, seguendo l'andamento a farfalla, lo stesso punto che si ritrovava sollecitato a trazione dopo mezzo giro si trova sollecitato a compressione, e così via ciclicamente: ogni giro che fa l'assale compie un ciclo completo di sollecitazione, da un valore massimo fino ad un valore minimo di sollecitazione ritornando ad un valore massimo.

Per come è fatto l'oggetto, ovvero a sezione circolare che rotola senza strisciare, nel tempo l'evoluzione della tensione, lineare con la quota, si traduce in un'oscillazione perfettamente sinusoidale dove il periodo T altro non è che è il tempo intercorso tra due posizioni identiche: ecco una tensione oscillante tra un valore massimo e un valore minimo, un carico ciclico.

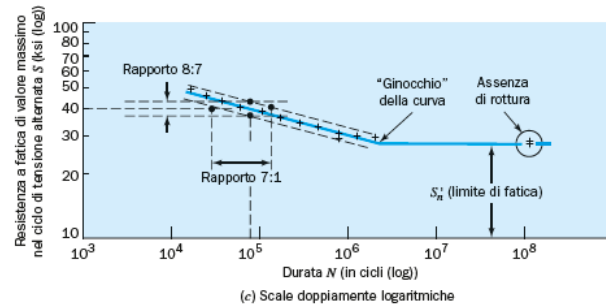
Wöhler costruì così delle curve mettendo tutti i dati sperimentali a sua disposizione in un digramma che prevedeva sulle ascisse il numero di cicli di sollecitazione e quindi il numero di giri che compiva l'assale e sulle ordinate la tensione per la quale era arrivato a rottura.



Ma cosa emerge riportando gli stessi grafici in forma semi logaritmica?



Improvvisamente i dati si vengono a correlare lungo una curva, ma se il grafico fosse allora doppio logaritmico?



Ecco così che i dati sperimentali si attestano lungo ad una retta.

Questa dispersione di dati rappresenta un valore limite (ginocchio della curva di Wöhler) al di sotto del quale non c'è limite di fatica: sotto a quel livello di carico il componente dura idealmente all'infinito.

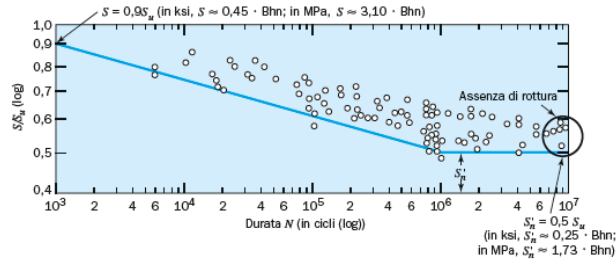
Si può così considerare, per tutti i materiali che presentino questo ginocchio, una distribuzione doppio logaritmica rettilinea che si traduce in una relazione del tipo:

$$\sigma^c N = cost$$

Poiché Wöhler ha fatto sperimentazione sulla flessione rotante e dunque su un'oscillazione ciclica del carico caratterizzata da tensioni massime e minime uguali in modulo ma opposte di segno (a valore medio nullo), σ altro non è che la semi-ampiezza di sollecitazione, che nel caso di sigma media nulla corrisponde alla sollecitazione massima; c è un coefficiente in prima approssimazione legato alle caratteristiche del materiale, che subirà delle correzioni in funzione di tutti quei fattori che influenzano la durata a fatica di un componente; N è il numero di cicli di applicazione della sollecitazione periodica considerata.

Porre tale relazione costante equivale a dire che i punti della detta curva sono tutti legati tra loro, in pratica vuol dire che la conoscenza di una coppia di valori (N, σ) di un punto sperimentale e la pendenza della curva, permette di conoscere, entrando col numero di cicli previsto, qual è la tensione limite da dover considerare.

In realtà esiste una forte dispersione statistica del dato sperimentale, questo soggetto ad una distribuzione gaussiana anche piuttosto importante secondo la variabile N , questa caratterizzata da un'ampiezza decisamente superiore.



In questo grafico reale si ritrova sicuramente il trend ritrovato Wöhler, sostanzialmente la curva originale in azzurro delimita inferiormente o superiormente i dati sperimentali: tracciare una curva come in figura significa identificare una bassa probabilità che i dati sperimentali siano al di sotto e un'altissima probabilità che siano al di sopra, vuol dire che associata a quella curva c'è un'alta probabilità di sopravvivenza e una bassa probabilità di rottura.

Se quella curva la si utilizza come verifica di resistenza, c'è un'alta probabilità che il dato sperimentale caschi oltre, mentre una bassa probabilità che caschi al di sotto: è molto affidabile.

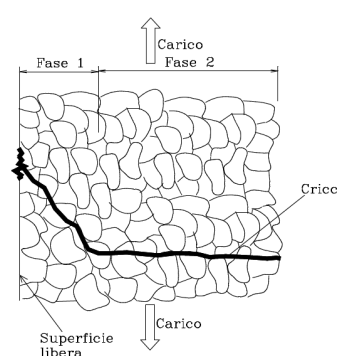
Le curve limite che si utilizzano per determinare i limiti di fatica sono quelle al 10% e al 90% della probabilità di rottura, due curve identificano un'area, l'80% dei dati sperimentali.

Perché c'è così tanta dispersione? Il fenomeno della fatica a livello microscopico è estremamente complesso, prima di tutto perché sia la possibilità che si inneschi che la condizione per la quale si propaghi possiedono una loro probabilità, e poi c'è da considerare la probabilità legata al raggiungimento della condizione critica.

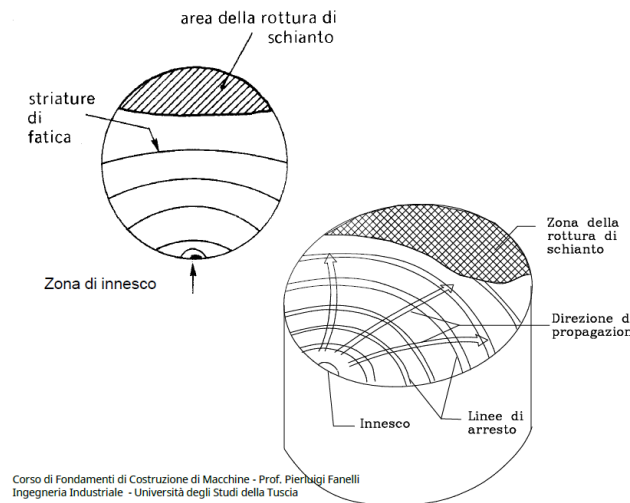
Le fasi di Fatica

La fatica si innesca in presenza di un qualunque tipo di difetto sulla superficie e questi, in casi reali, sono sempre presenti. La rottura per cricca di fatica si suddivide in tre fasi: l'innesco (o nucleazione), la propagazione e il cedimento.

In una prima fase la cricca avanza all'interno del materiale, ad esempio nei materiali duttili a 45° rispetto alla direzione di carico, arrivata ad una certa profondità si propaga in direzione ortogonale alla direzione di applicazione del carico, fino a separare così tanta sezione resistente che quella rimasta non diviene più staticamente più in grado di sorreggere il carico applicato.



Queste tre fasi lasciano sul materiale un'impronta tale che, se si dovesse analizzare la superficie di frattura si è chiaramente in grado di capire se la rottura è avvenuta staticamente o per fatica. La zona dell'innesco è frastagliata, talvolta più scura a causa dell'ossidazione e ha una forma irregolare, a partire poi dalla zona d'innesco, inizia la propagazione della cricca viaggerà lungo la sezione permettendo la visione del progressivo danneggiamento.



Su questo avanzamento si è in grado di notare esattamente delle linee di avanzamento, le striature di fatica, *beachlines*.

Fase 1: innesco

La prima fase di nucleazione, ovvero la fase in cui un piccolo danneggiamento superficiale diventa un vero e proprio innesco della cricca, occupa solitamente l'80% della vita del componente, il vero problema è che proprio l'innesco fa poi partire la fase di propagazione, questa nettamente più veloce.

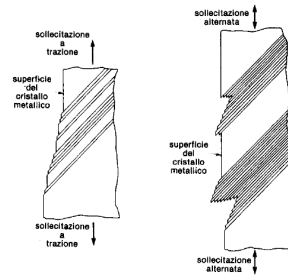
Raggiunta una determinata condizione di innesco, la fase di nucleazione si conclude e la cricca procede a 90° rispetto al carico.

L'innesco della frattura può avvenire per:

- Difetto locale sulla superficie;
- Zone di brusche discontinuità geometriche;
- Difetti interni considerevoli (soffiature)
- Zone attaccate chimicamente (presenza rugosità più accentuata)
- Tensioni residue considerevoli (dalle lavorazioni)
- Zone di contatto
- Inclusioni

Talvolta non è un danno a creare l'innesco, ma semplicemente lo scorrimento dei piani cristallini.

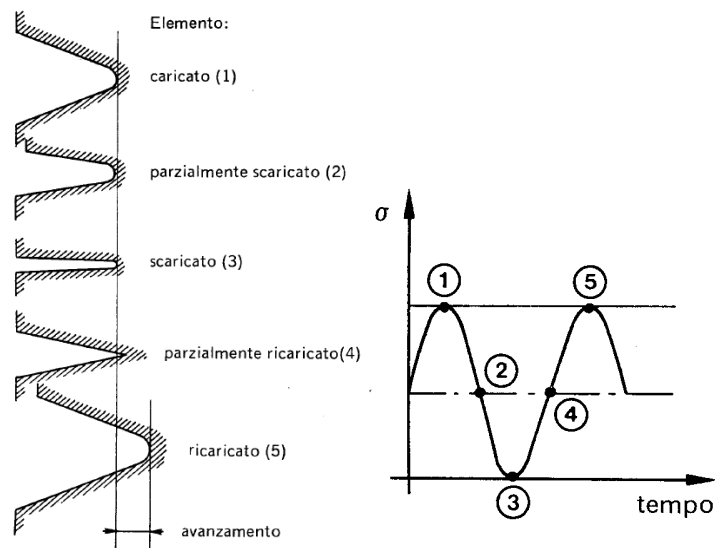
In un materiale duttile soggetto a trazione si ha uno scorrimento dei piani cristallini a 45°, se questa sollecitazione diviene alternata, questi piani scorrono in una direzione e poi tornano indietro e dato che non riusciranno mai a re-impilarsi esattamente come prima, la superficie di bordo subisce una variazione di forma con sporgenze e rientranze. Sono queste variazioni a determinare una concentrazione di tensioni, un difetto superficiale che innescherà la cricca.



Si è facilmente dimostrato come lappando il componente si allunga la sua vita utile a fatica.

Fase 2: Propagazione

L'innescio ora è caricato, è aperto, quando si scarica si richiude, richiudendosi l'apice della cricca diminuisce il suo raggio di curvatura: $K_t \rightarrow 1000$, localmente si sta pasticizzando il materiale, ma in realtà è ben oltre la plasticizzazione, si arriva alla rottura locale del materiale, sono che essendo circondato da materiale ancora in condizione plastica non avviene una propagazione per tutta la sezione ma una rottura locale con plasticizzazione della zona subito adiacente, quando si va a riaprire, a ricaricare, a trazionare la cricca, si ha una nuova separazione dei due lembi con il conseguente avanzamento dell'apice: ad ogni ciclo di trazione compressione, la cricca avanza.



La legge temporale con cui avanza, ovvero la sua velocità di avanzamento, è definibile tramite la meccanica della frattura attraverso la relazione di Paris.

$$\frac{da}{dN} = c\Delta K^n$$

Tale velocità di propagazione è elevatissima, centinaia di metri al secondo.

A quanti giri al minuto va un albero motore di una vettura? 500 1/s, se la cricca avanza di 0.1mm a giro avanza di 50cm/s ed in meno di mezzo secondo l'albero è distrutto.

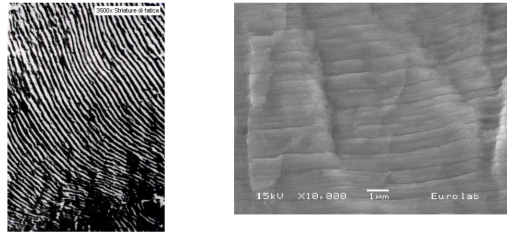
Fase 3: Rottura di Schianto

Quando la propagazione indebolisce la sezione resistente al punto che la superficie residua non è più sufficiente a sopportare il carico massimo applicato il componente cede di schianto, senza preavviso.

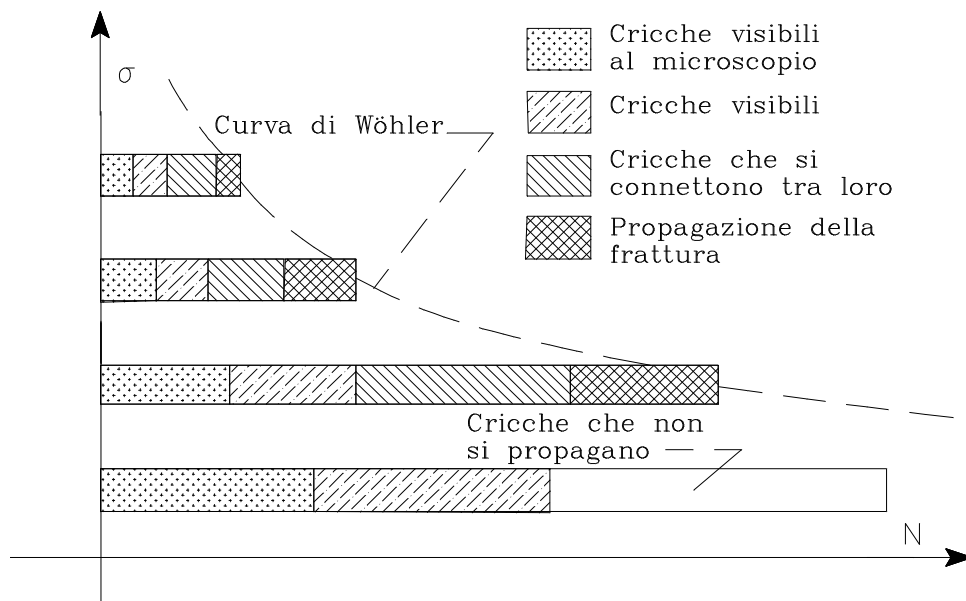
Caratteristiche della frattura per fatica

L'aspetto microscopico è transgranulare, a livello macroscopico è piatta e regolare.

Nella porzione di sezione sede della propagazione vi è la presenza di una serie di striature, rughe, avvallamenti, cretti. Il passo tra due striature consecutive è piccolo nella fase iniziale dove la cricca si propaga lentamente e aumenta quando la riduzione dell'area resistente fa aumentare lo sforzo applicato e la cricca si propaga velocemente.



Quando ci si trova ad evidenziare la rottura di un componente, quel componente durante la sua storia di carico ha dapprima subito una prima iniziale dove i difetti, le cricche, sono estremamente piccole e visibili solo al microscopio, poi una fase in cui le cricche divengono visibili e poi ancora una possibile situazione dove queste condizioni si sommano tra loro portando un avanzamento più veloce che conduce alla la propagazione e poi all'inevitabile frattura.



Corso di Fondamenti di Costruzione di Macchine - Prof. Pierluigi Fanelli
Ingegneria Industriale - Università degli Studi della Toscana

Per livelli di carico più bassi non c'è sostanzialmente sufficiente energia per far propagare le cricche che si estendono sulla sezione, e quindi all'avanzare del numero di cicli le cricche rimangono ferme: non c'è sufficiente energia di deformazione per farle avanzare.

Tipi di cicli di sollecitazione

Quali sono gli elementi che vanno a influenzare la fatica e cosa determina l'insorgenza delle criticità?

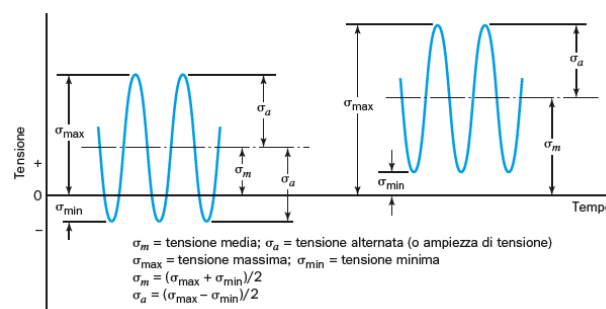
Ricapitolando, la fatica è un fenomeno che si manifesta esternamente attraverso una frattura fragile istantanea che avviene a seguito dell'applicazione di carichi ciclici, ripetuti, con entità del carico massimo anche piuttosto bassa rispetto ai limiti statici di snervamento.

La semplificazione che si andrà a fare nel trattare questo fenomeno sarà quella di valutare una condizione del tutto ideale nella quale i carichi siano perfettamente ciclici, o comunque, nella loro ciclicità abbiano un andamento sinusoidale.

In realtà lo studio con questo approccio deriva dalle prime evidenze sperimentali nelle quali effettivamente si studiava proprio una sollecitazione ciclica con andamento temporale sinusoidale: l'andamento della σ_z su un elemento cilindrico sottoposto a flessione rotante (assale di Wöhler) è proprio un andamento sinusoidale della tensione nel tempo, con massimo, minimo e valore medio nullo.

La sollecitazione di flessione rotante è proprio quella sollecitazione descritta da un momento flettente costante in direzione modulo e verso ma applicata ad un elemento cilindrico rotante, di conseguenza la tensione è ciclica a fronte di una sollecitazione costante.

Nella realtà si è in grado di schematizzare il tipo di ciclo di sollecitazione in funzione di due o tre parametri caratteristici. Stante l'ipotesi di una tensione che varia con legge sinusoidale, quindi con ampiezza e periodo costanti nel tempo, si dovrà fissare la tensione massima e quella minima o la tensione media ed una semiampiezza di sollecitazione per conoscere il ciclo di sollecitazione: i parametri di riferimento saranno sempre le due coppie di valori appena citate.



La semiampiezza altro non è che:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Si conclude così che una coppia di valori di tensione fornisce uno spettro di carico.

Un altro parametro interessante per classificare i tipi di cicli di sollecitazione è il rapporto di ciclo

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

- $R = -1$ è una sollecitazione di flessione rotante.

Qual era la caratteristica del grafico di Wöhler in condizioni standard? Di avere $\sigma_m = 0$. In quel diagramma nelle ordinate si metteva la semiampiezza di sollecitazione σ_a relativa ad un ciclo a tensione media nulla, perciò per andare a individuare esattamente un diagramma standard di sollecitazione basta dire o che la tensione media è nulla o che il rapporto di ciclo è uguale a -1 .

- $R = 0$ indica una sollecitazione di pulsazione di trazione, una sollecitazione che va parte da 0 e arriva ad un valore di trazione.
- $R = 1$ non è un carico ciclico, è un carico costante, è la condizione di sollecitazione statica.

- $R = \pm\infty$ è caratterizzato dall'avere una massima nulla ed una minima non nulla, e poiché per definizione la minima avrà valore negativo, sarà condizione di pulsazione dallo 0 di compressione.

Come identificare un ciclo che non ha questi valori determinati? Analizzando la sollecitazione.

Innanzitutto se questa fosse mista trazione-compressione il rapporto di ciclo avrebbe un segno meno ed un valore compreso tra 0 ed 1 quindi è sola trazione: i rapporti con segno meno davanti indicano che le tensioni massime e minime sono discordi le la sollecitazione sarà mista.

Perciò per avere la sola compressione dovrà essere $R > 1$, la minima e la massima saranno entrambe negative e il rapporto di ciclo sarà positivo con minima in modulo maggiore della massima.

Con queste classificazioni si indicano i tipi di sollecitazione, ma perché è importante indicarlo?

È il rapporto di ciclo ad influenzare la durata a fatica del componente, indica il processo di avanzamento delle cricche, queste infatti si aprono a trazione, mentre a compressione si richiudono, e poiché si quantifica la vita a fatica del componente in funzione del numero di cicli di carico che questo è in grado di sopportare, sarà proprio la quantità di cicli di trazione a fare allora la differenza di durata di un componente.

Infatti nei diagrammi di rappresentazione della fatica non basta mica indicare media e semiampiezza ma si devono aggiungere altri due termini, come la durata N di giri e probabilità di accadimento di un evento, di rottura.

Questi quattro parametri sono esattamente quelli che servono per identificare una condizione di criticità.

Il fatto però di avere 4 parametri e di lavorare con rappresentazioni di tipo cartesiano a due variabili, impone che la rappresentazione della condizione di criticità a fatica avvenga utilizzandone due mentre gli altri verranno fissati ad un valore di riferimento. Esempio tipicissimo è proprio il diagramma di Wöhler, in ascissa c'è il numero di cicli e in ordinata la semiampiezza mentre vengono fissate un certo valore di probabilità di rottura ed un certa tensione media (nulla).

Dov'è che però si ha difficoltà nell'interpretazione pratica di questi grafici?

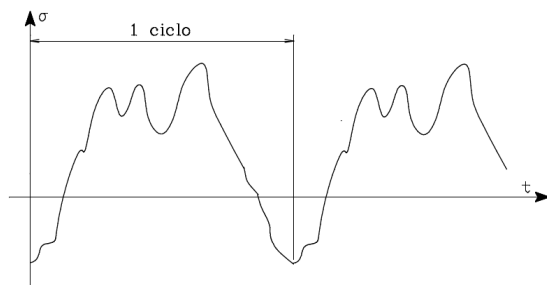
1. Le sollecitazioni nella realtà spesso non sono monodimensionali, mentre nel diagramma c'è una semiampiezza: la fatica è studiata in condizioni monodimensionali ma nella realtà è un problema tridimensionale.
2. Combinazione di cicli, questi di solito non hanno una forma regolare e sinusoidale, ma possono avere una certa non-stazionarietà, per cui solo con forte approssimazione sono perfettamente costanti in ampiezza e periodo nel tempo.
3. Non si può poi non considerare il valore di tensione media, questa infatti altera importantemente la durata a fatica di un componente, tant'è che il diagramma standardizzato così com'è non può essere utilizzato in presenza di $\sigma_m \neq 0$.
4. presenza di un susseguirsi di cicli di carico con frequenze differenti: la storia di carico influenza anch'essa la durata a fatica. Questo lo si può già immaginare ricordando il meccanismo che porta alla rottura, se si sta sollecitando un pezzo e questo comincia a presentare delle cricche durante la trazione, non è più come sollecitare un componente elasticamente per cui non importa della sua storia di carico finché questo non abbia raggiunto il suo valore limite, in realtà nella fatica ogni ciclo di sollecitazione sta apportando un danneggiamento. Infatti se ad esempio si sollecita un componente a bassi livelli di tensione, questi, incapaci di aprire una cricca non sortiranno alcun effetto al materiale, se poi a questi livelli si susseguono tensioni già più importanti che riescono ad aprire una cricca, il componente giungerà a rottura ma solo con questo nuovo treno di sollecitazioni. Al contrario, applicando subito una tensione considerevole facendola seguire da una più moderata, non importerà più che quella nuova sia minore della precedente, se la cricca è già formata il componente arriverà a rottura ugualmente anche per tensioni più piccole.

L'approccio alla fatica può avvenire così in modi differenti, in questa trattazione si userà il *Safe Life*: si predirà la durata a fatica del componente soggetto a quella sollecitazione.

Caratteristiche dei cicli

La prima cosa che deve essere approfondita è legata ad una serie di considerazioni da fare sul ciclo reale di carico, nella realtà come detto questi non sono affatto perfettamente sinusoidali, ma sono spettri di carico ad ampiezza, frequenza e sforzo medio non costante.

Ora, dato che si vuole trovare una corrispondenza tra teoria e realtà con approcci semplificativi e quindi con modelli equivalenti da applicare al caso reale, si è nella condizione di ricercare un ciclo di carico che per quanto irregolare nel tempo e complesso da analizzare sia, presenti lo stesso in qualche modo una ripetibilità temporale, d'altronde solo in presenza di ciclicità si manifesta la fatica, dato poi che questa si manifesta a 10^4 cicli, un'altra condizione che deve rispettare il ciclo di carico è quello di essere sufficientemente ripetuto.

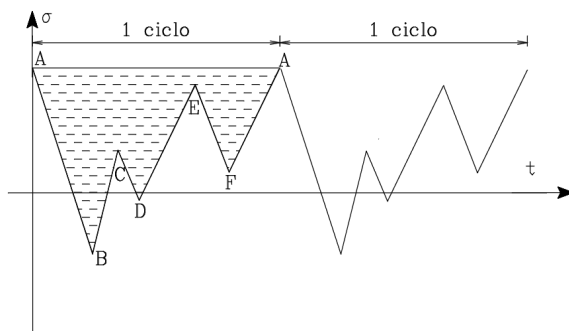


Varrebbe in questo caso un'analisi dello spettro con Fourier? D'altro canto una qualunque curva nel tempo si può ridurre ad una combinazione di linee di funzioni sinusoidali ma su che concetto si basa la trasformata di Fourier? Questa è basata sulla combinazione in frequenze di seni e coseni a diversa ampiezza e fase, nella fatica si lavora solo con fase zero mentre tutti i cicli di carico devono avere lo stesso periodo, l'unica cosa su cui si può lavorare rimane l'ampiezza della sollecitazione.

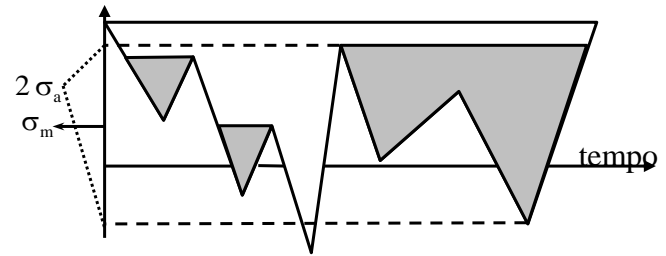
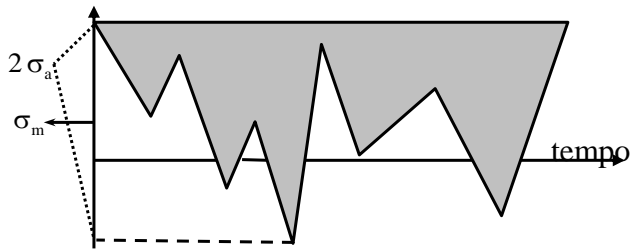
Nella fatica la funzione sinusoidale si può distinguere solo in ampiezza, mentre non può essere manipolata né in forma, né in periodo e né in fase.

Metodo del serbatoio

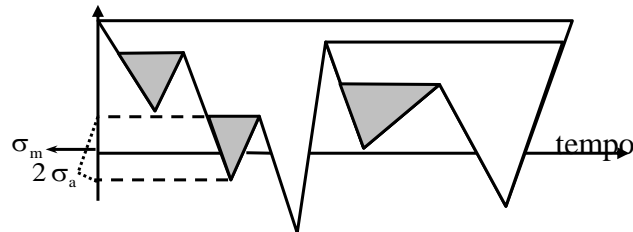
Molto pratico, permette il calcolo di un certo numero di cicli equivalenti che abbiano lo stesso effetto del ciclo reale.



Si riempie il grafico con acqua, a seguito del riempimento si stappi il minimo dei minimi, svuotando il serbatoio dove rimane l'acqua? Nelle valli, laddove si avranno delle valli ben definite caratterizzate da valori massimo e minimo, quello sarà il ciclo di carico. Reiterando il processo e stappando tra più cicli sempre il minimo dei minimi, quello che si ottiene infine è una successione di cicli di carico che sommati insieme procurano lo stesso danneggiamento a fatica del ciclo reale.



serbatoio pieno di liquido, si stappa il punto più basso, uno alla volta



In genere il conteggio si effettua dopo opportuno filtraggio che elimina picchi poco significativi

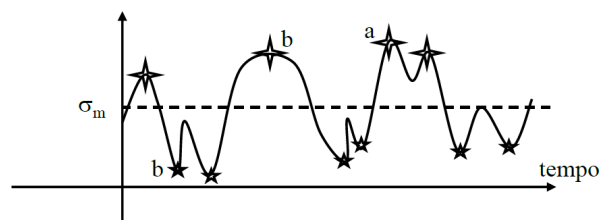
Corso di Fondamenti di Costruzione di Macchine - Prof. Pierluigi Fanelli
Ingegneria Industriale - Università degli Studi della Toscana

Questo metodo permette di individuare tutta una serie di cicli caratterizzati da diverse semiampiezze e valori medi.

Esistono metodi più semplici, mono-parametrici, in cui si individua di volta in volta la semiampiezza di ciascun ciclo. I cicli che si vanno così ad individuare hanno in comune la medesima tensione media e differiscono l'uno dall'altro dal solo valore di semiampiezza.

Peak Counting

Il metodo del Peak Counting consiste nel calcolare la tensione media del ciclo.



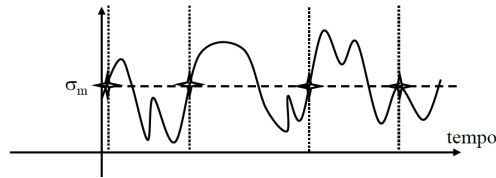
Si attribuisce una tensione media e si dividono i minimi coi massimi in un processo in cui il massimo dei massimi viene abbinato al minimo dei minimi a seguire. Accoppiando a due a due i picchi si ottiene un certo numero di cicli equivalenti ognuno di semiampiezza pari a

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Level Crossing

In questo metodo si individua la media del ciclo e si isola un nuovo sotto-ciclo ogni volta che la retta del valore medio interseca due volte il ciclo di partenza, proprio come se fosse un periodo, il sotto-ciclo sarà così caratterizzato da una semiampiezza pari a

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

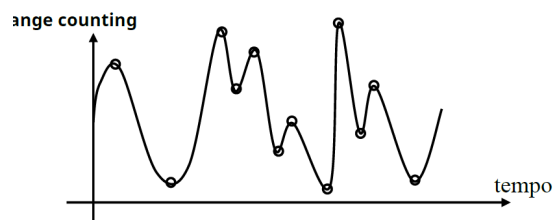


Range Counting

Oltre al metodo del serbatoio esistono metodi bi-parametrici come il *Range Counting* in cui ogni coppia locale massimo-minimo contigua, in successione, accoppiata insieme, fornisce un valore medio e un valore di semiampiezza.

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

Ogni coppia massimo - minimo contigua costituisce un mezzo ciclo.



Questi sono solo una manciata di metodi che sperimentalmente funziona, riescono a ricavare un numero di cicli equivalente che abbia lo stesso apporto di danneggiamento del ciclo reale, per poterlo utilizzare manca però una legge di accumulo del danneggiamento, questa infatti sarà in grado di quantificare quando ciascun ciclo influenzi il danneggiamento del componente rispetto ad una criticità finale del componente stesso.

Prove di fatica

Come tutte le verifiche ingegneristiche è però necessario confrontare una grandezza d'esercizio con una caratteristica di resistenza del componente per quella determinata sollecitazione.

La resistenza a fatica di un materiale non fa eccezione dalle prove statiche e si testa anch'essa in laboratorio.

Le prove saranno ovviamente cicliche per questo più onerose di quelle statiche: non è economico provare un ginocchio a $2 \cdot 10^6$ cicli: una prova di fatica occupa per molto tempo le macchine operatrici.

Tali macchine dovranno poi rispondere anche ad esigenze particolari di carico, queste infatti devono caratterizzare trazione e compressione in rapida successione sempre sotto le ipotesi di basse frequenze di applicazione per evitare l'instaurarsi di effetti dinamici, deve valere ciò che l'applicazione del carico non sia altro che l'applicazione statica di una successione di sollecitazioni, e quindi l'applicazione del carico non può non avvenire a basse velocità, per quanto questa risulti bassa però non è tuttavia attuabile mediante le classiche macchine di trazione note: le macchine di fatica sono estremamente più costose.

Dato inoltre che il tipo di sollecitazione modifica completamente la durata a fatica del componente, si avrà la necessità di macchine che riescano a caratterizzarlo a sforzo normale, a flessione piana (flessione variabile nel tempo con pezzo fermo = sollecitazione variabile e tensione variabile), a flessione rotante, a torsione e a sollecitazione multiassiale.

In più, siccome il problema della fatica è affetto da una grande dispersione statistica - molto più di quella associata al problema statico -, per avere dei valori di riferimento si ha la necessità di una standardizzazione delle prove: la prova di caratterizzazione a fatica deve rispondere il più possibile a un certo numero di standard, solo in questo modo si è in grado di esporre e tabulare una resistenza legata il più possibile a quella del materiale.

Per fare un parallelismo con la verifica statica, questa prevedeva infatti che a destra della disuguaglianza ci fosse una tensione limite per quel componente in condizioni statiche e quella tensione limite era proprio quella del materiale, ovvero quanto questo potesse sopportare quel carico statico al netto di fattore di sicurezza, ora invece nella sollecitazione di fatica il termine che sta a destra della disuguaglianza è un termine che viene fortemente influenzato da tanti altri parametri oltre che dal materiale.

Parametri che influenzano la vita a fatica

I parametri di cui è necessario tener conto per stabilire la vita a fatica di un componente (non più del materiale) sono suddivisibili in interni ed esterni.

Quelli interni sono specifici del componente, quelli esterni sono dettati dalle condizioni di utilizzo del componente.

Parametri Interni:

- Materiale;
- Finitura superficiale. D'altronde è da lì che partono le cricche;
- Tensioni residue dovute alle lavorazioni del componente;
- Dimensioni. Delle sollecitazioni statiche non si è mai parlato della dimensione assoluta della trave, al massimo si è parlato di proporzioni, di snellezza, di quantificare una sezione rispetto alla lunghezza; a fatica le dimensioni influenzano la durata del componente;
- Fattore di forma. Si era detto che per i materiali duttili la K_t di concentrazione delle tensioni in condizioni statiche non si prende in considerazione, in condizioni di fatica la concentrazione di tensione dovute al fattore di forma è invece estremamente importante;
- La corrosione è un parametro a cavallo tra interni ed esterni, è legata al livello di corrosione del componente ma è dovuta a condizioni ambientali di esercizio;

Parametri esterni:

- Tipo di sollecitazione agente. Flessione rotante, trazione, flessione perfettamente alternata...
- Ciclo di sollecitazione > tutta trazione, tutta compressione o alternato;
- Frequenza del carico. Sotto una certa frequenza di carico esiste la fatica, al di sopra una si entra nel modo della dinamica;
- Anche la resistenza a fatica come la resistenza statica è influenzata dalla temperatura;
- Tensioni residue legate a sollecitazioni di utilizzo, alla storia di carico del pezzo. Ad esempio se il componente ha lavorato in condizioni plastiche per un po' e poi ritorna in fase elastica, le tensioni residue che si sono instaurate possono portare ad un'accelerazione della durata a fatica;
- Saldature. La stragrande maggioranza dei componenti cede per fatica sulle saldature, sono delle zone di debolezza del componente;
- Presenza di sollecitazioni multiassiali. Il problema tridimensionale influenza notevolmente la durata, è la frontiera di ricerca nell'ambito della fatica;

Effetti legati al materiale

La durata a fatica di un materiale dipende sostanzialmente dalla struttura cristallina, in base alla cella elementare si avrà un limite di fatica diverso.

Una cella CCC (Fe, Mo) evidenzia maggior limite di fatica, al contrario di una cella EC (Zn, Mn), nel mezzo si trova la cella CFC (Acciai, Cu, Al).

Come cambia la curva di Wöhler in base al materiale? Dato che questo diagramma evidenzia una retta limite oltre la quale si ha l'insorgenza delle criticità è necessario fornire almeno due parametri per caratterizzarla. Se un punto lo si prende convenzionalmente all'insorgere della fatica per alto numero di cicli, ovvero a cavallo della fatica per bassi numero di cicli a $8 \cdot 10^3$ cicli con valore di semiampiezza dato dalla rottura in condizioni statiche, allora sarà sufficiente caratterizzare soltanto un altro punto: il ginocchio.

Il ginocchio della curva di Wöhler è convenzionalmente preso a 10^6 cicli e la sua sollecitazione abbinata risponde alla domanda: qual è il carico che porta a rottura il materiale applicandolo 10^6 volte? Si evidenzia in questo modo così il limite di fatica.

In sostanza per tracciare un diagramma di Wöhler si ha la necessità di una sola prova, quella che caratterizza per a 10^6 cicli il materiale: questo sarà tanto più vero quanto il materiale conterrà ferro, diversamente un materiale non ferroso non presenterà né un evidente ginocchio, né un chiaro limite di fatica, che verrà preso convenzionalmente pari a 10^8 cicli.

I valori del limite di fatica, molto spesso indicati con un σ_{la} (limite alternata), non sono una tensione massima dato che non ha alcun senso parlare di tensione massima in condizioni di fatica, sono bensì semiampiezze di sollecitazione associate ad un certo valore medio: le prove di fatica si fanno in condizioni standard di carico altemo-simmetrico a tensione media nulla.

Nella tabella sottostante è mostrata la semiampiezza limite di fatica per una sollecitazione altemo simmetrica per diversi materiali, notare come i valori limite siano molto diversi tra loro.

Materiale	R (Mpa)	σ_{la} (Mpa)	K*
C 16	700	270	0.38
C 20	450	230	0.51
C 40	710	280	0.39
C 60	850	320	0.38
40 NiCrMo7	1000	550	0.55
X 12 CrNi 188	550	200	0.36
Fe 360	360	180	0.50
Fe 430	420	210	0.50
Ti - A	830	480	0.58
G 15	150	70	0.47
G 25	250	120	0.48
Ottone 90/10	520	160	0.310
Bronzo (95/5)	330	180	0.54
Cuproberillio	140	380	0.27
Avional	420	130	0.31
Silumin	220	75	0.34
Ti Al 6 V4	1000	590	0.59

Ad esempio si identificano per un C40 dei valori di $710Mpa$ a rottura e $280Mpa$ di semiampiezza.

Tipologia materiale	Rapporto di fatica $\frac{\Delta\sigma_s}{\sigma_s}$	Cicli riferimento
Acciai dolci al carbonio	0.5	10^6
Acciai medio tenore di carbonio	0.42	10^6
Acciai legati da bonifica	0.4	10^6
Acciai legati alto resistenziali	0.32	10^6
Ghise	$0.35 \div 0.50$	10^8
Leghe di alluminio	$0.2 \div 0.60$	10^8
Leghe di magnesio	0.35	10^8
Leghe di rame	$0.25 \div 0.5$	10^8
Leghe di nichel	$0.35 \div 0.5$	10^8
Leghe di titanio	$0.45 \div 0.65$	10^6
Materiali Compositi	???	

In funzione poi della composizione dell'acciaio varia il rapporto fra il limite di fatica e limite a rottura. Indicativamente per acciai legati in assenza di una prova specifica di fatica si può prendere in prima approssimazione un rapporto compreso tra $0.3 \div 0.5$. Se 0.5 è un valore indicato per quelli al carbonio, acciai legati arrivano a 0.32, ma perché il legame con altri componenti riduce la durata a fatica?

Ad esempio i costosi acciai alto resistenziali che hanno altissimi valori di resistenza presentano però un rapporto di fatica basso, in generale materiali staticamente molto resistenti hanno, proporzionalmente, resistenza a fatica più bassa, il materiale alto resistenziale è un materiale che essendo più duro e nettamente più sensibile all'intaglio, e quindi al meccanismo di propagazione della cricca.

Laddove poi nel materiale non c'è più ferro i rapporti di fatica divengono molto dispersi, il 10^6 di limite diviene convenzionalmente 10^8 , non essendoci più un ginocchio nella curva, il problema va approcciato in modo statistico.

Effetto della finitura superficiale e delle tensioni residue

Ogni valle tra due creste della rugosità del materiale è un potenziale innesco, minori sono queste valli, minori sono le probabilità di innesco.

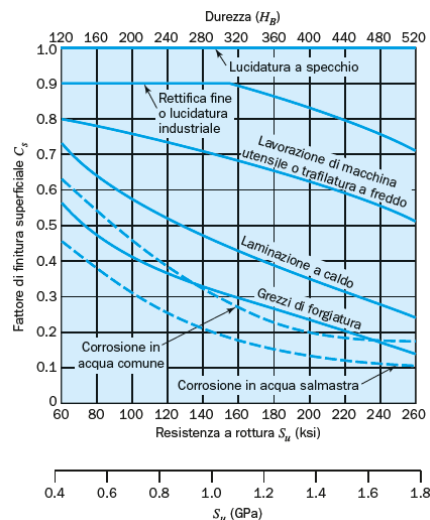
Un pezzo grezzo preso dalla fonderia è molto più probabile che faccia partire una cricca di fatica rispetto ad un materiale lavorato, rettificato e lucidato. Le stesse lavorazioni che portano alla rettifica della rugosità però sono lavorazioni meccaniche che interferiscono con gli strati superficiali del materiale, ad esempio un trattamento superficiale di *pallinatura*, che consiste nel bombardamento del pezzo con palline d'acciaio duro, genera tensioni residue ma a quale scopo? Si creano infatti delle condizioni di stato tensionale residuo che vanno a contrastare un eventuale trazione, in più al tempo stesso si migliora la finitura superficiale, si ottiene così uno stato tensionale effettivo localmente più basso rispetto al picco, questo tipo di lavorazione tuttavia influenza uno spessore molto piccolo di materiale e genera anche una leggera trazione sottopelle, la superficie va in compressione e sottopelle va in trazione.

Altre **lavorazioni tecnologiche** includono la *rullatura*

- Rulli e dischi variamente sagomati
- Migliore finitura superficiale
- Profondità fino a circa 2 mm
- Pezzi assialsimmetrici (raccordi)

la *sabbatura*, utilizzata per la pulizia dei getti, la *rettifica* e la *lucidatura* che portano sì a miglioramento superficiale ma inducono possibili tensioni di trazione, infine si fanno menzione delle *macchine utensili* che lavorano per asportazione di truciolo, il taglio di queste induce però tensioni residue di trazione.

Ciascuna di queste lavorazioni ha un impatto sulla durata, un diagramma come questo



Introduce un coefficiente correttivo della durata del pezzo, ma cosa corregge? Le condizioni standard.

Si parte cioè dal limite a fatica del provino (non del materiale) in condizioni standard, per cui se ce ne se discosta sarà necessario correggerlo. Il valore unitario, standard, si ha per un pezzo lucidato a specchio.

Influenzano poi la durata a fatica di un componente i **trattamenti termici**.

Ad esempio la tempra si utilizza quando negli acciai si vuole un passaggio a martensite, in questo modo andando a modificare la struttura cristallina e aumentando il volume della stessa si dà vita ad una compressione residua che indurisce il componente e in più è favorevole alla durata a fatica dello stesso.

Altri trattamenti termici noti sono la carbocementazione e la nitrurazione, quest'ultimo in particolare è un tipo di trattamento termico che ha un limitato impatto sulla fatica al contrario dell'impatto che ha sulla resistenza ad usura.

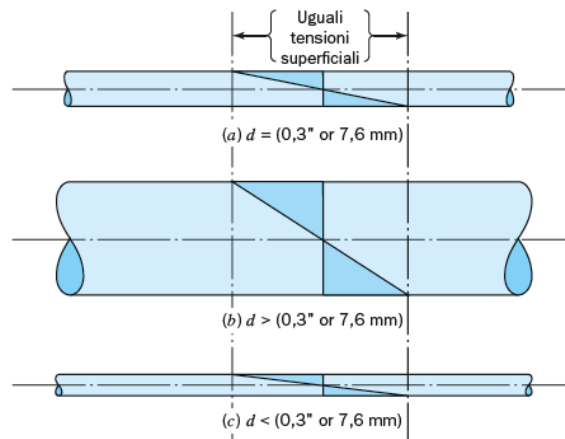
Un altro aspetto importante da considerare è il **rivestimento** del materiale, accade spesso infatti che un componente venga rivestito con dei metalli, ad esempio un rivestimento duro sarà in grado di rispondere meglio alle esigenze di contatto e quindi ridurre l'usura e aumentare la vita del componente, ma proprio perché è duro è un materiale molto più sensibile ad una cricca, ad un danneggiamento, se malauguratamente la placcatura dovesse criccarsi questa cricca possiederà una concentrazione di tensione tale da portare il materiale sottostante ad un innesco estremamente pericoloso.

Finché si degrada il materiale superiore che ha o esigenze estetiche, o anti-usura, o di protezione alla corrosione, ma non ha assolutamente responsabilità strutturali, non è un gran problema; ma se questo incomincia a criccarsi e questa cricca arriva al materiale sottostante, venendosi a creare una fortissima concentrazione di tensioni mette in pericolo la resistenza strutturale dell'intero componente.

Effetto scala, effetto delle dimensioni

Un componente più grande dura meno rispetto ad uno più piccolo principalmente per due motivi. Il primo è prettamente statistico, siccome la superficie è più grande c'è molta più probabilità che ci siano difetti: dato che la fatica dipende dalla presenza di difetti nel materiale, un pezzo più grande ha più probabilità di avere un difetto.

L'altro è legato soprattutto, per le sollecitazioni di flessione, al gradiente di tensione.



In presenza di un piccolo danneggiamento sulla superficie in un pezzo minuto, quando la cricca entra di 1mm nel pezzo, trova sotto di sé una tensione che sta variando linearmente con lo spessore - o col raggio - che è già scalata di $1/3$: l'apice della cricca si trova ad uno stato tensionale molto più ridotto e progredisce molto più lentamente.

Trovandosi invece su un pezzo più grande, essendo il gradiente molto più basso, a parità di tensione massima l'andamento a farfalla ha una pendenza molto diversa, è molto meno ripida: la cricca che di 1mm si trova ancora ad uno stato tensionale molto importante.

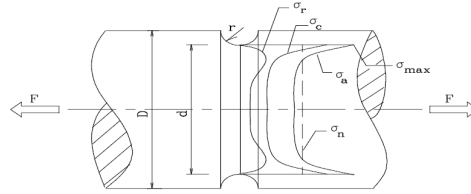
Le dimensioni del pezzo hanno notevole impatto sulla durata a fatica

Corrosione

Questa altera irrimediabilmente la superficie esterna, un elemento corrosivo porta ad una rugosità superficiale molto elevata.

Effetto di forma, fattore effettivo di intaglio

In fatica la variazione di forma ha un impatto anche sui materiali duttili.



Il coefficiente di forma o effettivo di tensione è definito come il rapporto tra il limite di fatica del provino senza intaglio e quello con l'intaglio.

$$K_f = \frac{\text{limite di fatica SENZA intaglio}}{\text{limite di fatica CON intaglio}}$$

Per materiali fragili si può utilizzare il K_t anche per fatica, per i materiali duttili al contrario va determinato il K_f .

Questo K_f è compreso tra l'unità e il K_t :

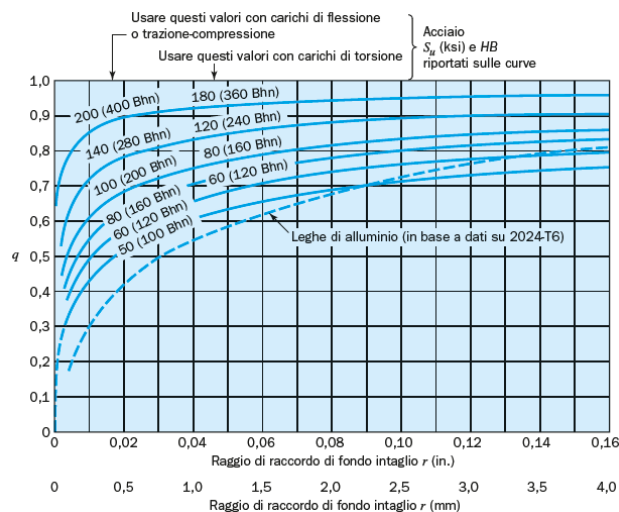
$$1 < K_f < K_t$$

Non si può comunque andare oltre il K_t teorico di concentrazione di tensione. Come si quantifica il K_f ? Tale fattore nella sua formulazione più utilizzata è funzione del K_t teorico e di un parametro q , fattore di sensibilità all'intaglio del materiale

$$K_f = q(K_t - 1) + 1 \quad q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$$

Perciò in funzione del tipo di materiale si può avere una diversa sensibilità all'intaglio, tale fattore essendo compreso tra 0 ed 1 indica con il valore nullo nessuna sensibilità all'intaglio mentre con valute unitario una sensibilità all'intaglio massima. Un acciaio alto resistenziale ha ad esempio una q prossima all'unità.

Nel grafico sottostante si può vedere la combinazione tra la sensibilità all'intaglio q e i livelli di sollecitazione limite a rottura, le varie curve rappresentano i valori di carico limite.

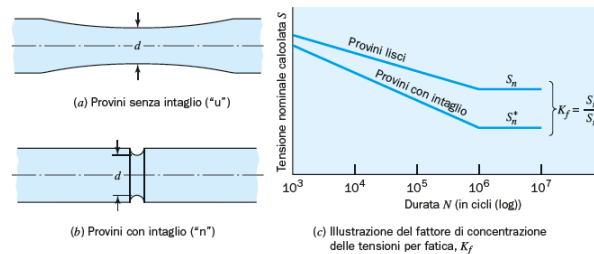


q dipende dalla geometria dall'intaglio e varia con la temperatura, all'aumentare di questa q diminuisce e viceversa.

Ricordi l'aneddoto per cui le navi da trasporto *Liberty Ship* in acqua gelida cedevano a fatica? Quello stesso materiale a basse temperature aumentava la sua q , la sua sensibilità all'intaglio e quindi un piccolo difetto portava ad una maggiore probabilità di rottura.

Come impatta la K_f sulla curva di Wöhler?

Sposta il ginocchio della curva di Wöhler, il provino con l'intaglio avrà un ginocchio spostato più in basso rispetto al provino standard, sempre posto allo stesso numero di cicli.



Il rapporto tra i ginocchi rappresenta proprio la K_f .

Si analizzeranno adesso i parametri esterni, le modalità di lavoro del componente, il modo in cui viene utilizzato il componente, le caratteristiche di carico e ambientali che lo circondano.

Tipo di sollecitazione

NB: si sta considerando la tipologia di sollecitazione, non le modalità del carico.

Nelle applicazioni meccaniche si avrà a che fare principalmente con flessione, trazione e torsione cicliche, meno frequentemente si avrà una condizione ciclica sul taglio.

La flessione in condizioni di sollecitazione costante nel tempo si traduce, in casi di elemento rotante, in uno stato tensionale variabile nel tempo. Ad esempio nel caso di un albero di trasmissione ci si troverà di fronte ad una condizione di carico caratterizzata da una flessione rotante ma una torsione costante nel tempo, se poi non c'è neanche variazione del rapporto di trasmissione si avrà una torsione costante.

In funzione della tipologia di sollecitazione ciclica e quindi delle tensioni cicliche derivanti si avrà una variazione della durata a fatica del componente.

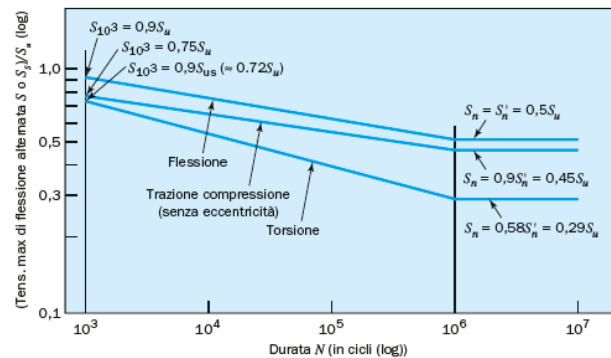
Se si riporta su un diagramma di Wöhler le diverse sollecitazioni, ovvero i dati sperimentali dello stesso provino soggetto a sollecitazioni differenti le curve si modificano in modo considerevole.

Si nota infatti come la flessione è quella sollecitazione che garantisce una durata maggiore, mentre scendendo si incontrano trazione-compressione pure ed infine torsione.

Le curve di Wöhler relative alla tipologia di sollecitazione vengono convenzionalmente modificate da coefficienti che spostano sul piano i due punti d'interesse: quello a 10^3 cicli e il ginocchio a 10^6 cicli, mentre il valore della tensione è invece un valore che deve essere fissato.

In realtà il punto che serve a tracciare la curva è soltanto il ginocchio, infatti solitamente il punto a 10^3 cicli è dato dal valore di rottura in condizioni standard statiche (flessione). Alcuni codici consigliano di prendere lo 0.9 del valore a rottura, infatti in funzione del codice scelto (UNI7670, EuroCodice) quel punto è fissato in

funzione del carico di rottura, per cui non c'è alcun bisogno di eseguire prove sul materiale, per identificare quel punto bastano i valori di targa statici; il test servirà quindi a caratterizzare il ginocchio ovvero il limite di fatica S_n o σ_{la} , equivalentemente per acciai questo valore lo si può perdere pari al 50% del carico ultimo a flessione.



Per cui il limite di sinistra, quello per la fatica oligociclica, viene ridotto al 90% per la flessione, al 75% per la trazione e al 90% per cento della τ ammissibile a torsione, oppure utilizzando Von Mises al 90% del carico utile diviso $\sqrt{3}$, ugualmente anche per il ginocchio, per il limite di fatica, lo si usa ridurre attraverso l'utilizzo di un fattore.

Se infatti si riportano questi fattori su un diagramma $\sigma_1\sigma_2$ di Von Mises in condizioni piane, i limiti imposti non sono altro che dei coefficienti che traducono lo stato tensionale in valori equivalenti, quei fattori correttivi sono infatti i fattori utilizzati per ricavare le tensioni equivalenti in condizioni statiche con Von Mises il fattore 0.58 trovato nella trasformazione della tensione è il termine che permette di stare all'interno dell'ellisse nel quarto quadrante nel passaggio da τ_{amm} a σ_{amm} .

Nei materiali duttili la resistenza a fatica in caso di sollecitazioni di torsione alternata risulta circa pari al 58% di quella a flessione alternata (in accordo con la formulazione di Von Mises). Il limite ultimo statico a taglio è circa 80% di quello a trazione per gli acciai (70% per i materiali duttili in genere)

Temperatura

Nel caso dell'influenza della temperatura il discorso è simile a quello effettuato in condizioni statiche, per cui una temperatura che aumenta riduce la sensibilità del materiale all'intaglio e rende il materiale più duttile e meno fragile aumentando la durata a fatica, mentre una temperatura più bassa porta ad un comportamento fragile con una resistenza a fatica che diminuisce.

Oltre alla sensibilità all'intaglio però, nel caso di aumento di temperatura si evidenzia purtroppo un doppio trend, infatti quando si arriva a temperature che si avvicinano anche solo alla metà di quelle di fusione $0.4T_{fus}$, si innescano fenomeni legati allo scorrimento viscoso del materiale: si evidenzia infatti in questo una dipendenza delle deformazioni dal tempo oltre che dal carico.

In questo modo l'applicazione di un carico costante porta a variazioni di deformazione nel tempo e l'applicazione di un carico variabile nel tempo porta a deformazioni ancor più variabili nel tempo. Ad esempio un carico applicato a t_0 genera una deformazione legata al carico t_0 che cresce nel tempo, per cui quando si andrà ad applicare un carico t_1 si troverà un oggetto ancora deformato per il carico t_0 .

Le ipotesi fatte all'inizio della trattazione della fatica prevedevano che questa era assimilabile ad una successione di condizioni statiche, tale ipotesi implica che applicando il carico si ottiene istantaneamente un effetto che si annulla rimuovendo il carico, la presenza di uno scorrimento viscoso invece invalida queste ipotesi: applicando il carico se ne vede l'effetto nel tempo e rimuovendo il carico si continua a vederne l'effetto, in questo modo quando poi si va nuovamente a riapplicare il carico si ritrova una condizione già deformata.

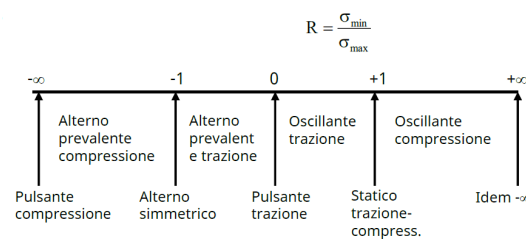
Il range di temperature per le quali si ha un comportamento senza *creep* viscoelastico è tra 0° C e 200° C. Per gli acciai di normale applicazione, all'interno di questo range sono garantite le condizioni standard di fatica.

Frequenza di applicazione del carico

L'ipotesi per cui la fatica è assimilabile ad una successione di carichi statici è vera solo se il carico ha una frequenza di applicazione piuttosto bassa; un'applicazione di carico più veloce e quindi a più alte frequenze implica che il materiale non sia più in grado di rispondere in tempo reale alle sollecitazioni dando vita ad uno sfasamento tra causa ed effetto, ovvero tra forza e risposta, che porta alle amplificazioni dinamiche.

L'ipotesi aggiuntiva che si fa dunque per evitare questo tipo di amplificazione è quella per cui la frequenza di applicazione del carico non superi gli 80 Hz, infatti sotto questa soglia e tanto diviene più bassa la frequenza di applicazione del carico, tanto più acquisisce validità l'ipotesi di partenza. Di contro all'aumentare della frequenza si crea un effetto di isteresi (comportamento viscoelastico) della risposta del materiale con presenza di surriscaldamenti con variazione locale di temperatura, sopra 150 Hz c'è addirittura l'instaurazione di una dinamicità della risposta: si ha una sovrapposizione dinamica degli effetti, con dati irregolari e il paradossale aumento di resistenza a fatica, le tensioni interne del materiale seguono in ritardo la sollecitazione esterna.

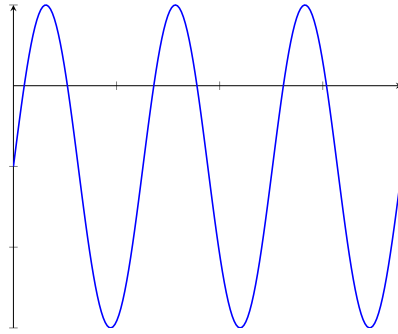
Effetto del ciclo di carico



Questa tabella riporta i valori di riferimento per rapporto di ciclo $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ in funzione della tipologia dello spettro di carico.

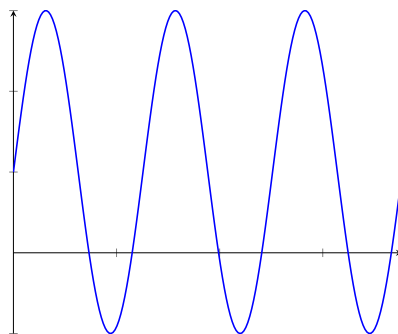
- $R = -1$ è tipico dell'alternante simmetrica, ovvero della flessione rotante dove $\max = \min$ in modulo con media nulla.
- Le pulsazioni di trazione e compressione si hanno per un rapporto $R = 0$ per cui la $\min = 0$ mentre $\max > 0$ di trazione.
- $R = -\infty$ per pulsazioni di compressione, la $\min < 0$ mentre $\max = 0$ e ugualmente varrà per $R = +\infty$.
- La $R = 1$ è il caso di condizione statica di trazione o di compressione, non si è in grado di distinguerla perché il rapporto dà sempre il valore unitario.

I valori intermedi tra $[-\infty; -1]$ sono quelli che danno le famiglie alterno simmetriche a prevalente compressione, in pratica si ha in questo caso:

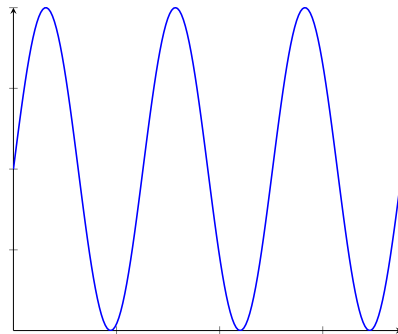


Per cui prevalente di compressione significa dire che la tensione minima ha un modulo molto più grande della tensione massima.

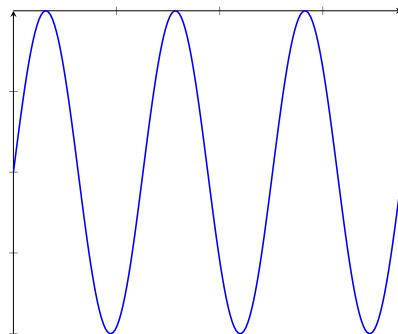
Tra $[-1; 0]$ si ha:



Tra $[0; 1]$ sono entrambe positive:



Tra $[1; +\infty]$ invece:



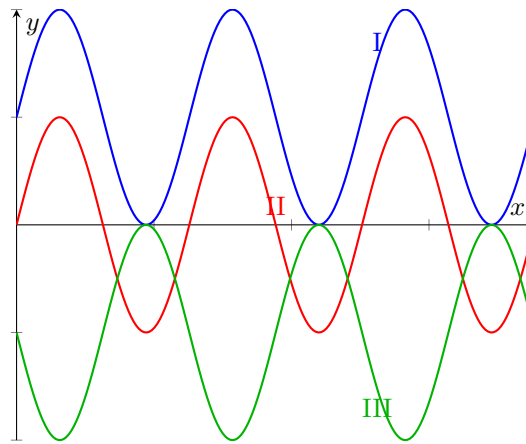
A parità di semiampiezza di sollecitazione è evidente perciò che la durata a fatica sia completamente diversa in questi 4 casi, proprio per il meccanismo di apertura della cricca che porta al cedimento del componente,

per cui una σ_m di trazione, a parità di semiampiezza, è una condizione più critica, mentre naturalmente, a parità di semiampiezza una σ_m di compressione è molto favorevole alla durata a fatica, perché tende a tenere chiusa la cricca.

Se si lavora invece a parità di tensione massima $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_{la}$, facendo variare la tensione media è evidente che si debba avere un spettro di carico con una semiampiezza più piccola, per cui se si lavora con una tensione massima di progetto che è necessario mantenere, ad esempio magari non si può andare oltre lo snervamento, allora si dovrà valutare uno spettro di carico che potrà avere differenti tensioni medie ma un'ampiezza minore dello snervamento. Questa condizione vuol dire legare la semiampiezza al valore medio, quindi una tensione media di trazione che si è appena detto essere sfavorevole, ragionando per tensioni medie, in realtà è accompagnata da una semiampiezza molto piccola.

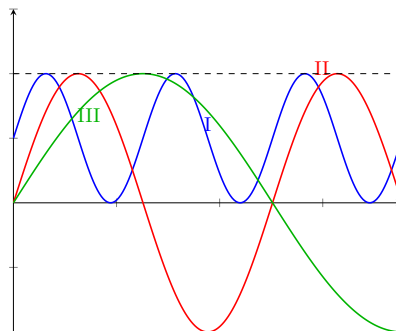
Quella che si valuta sperimentalmente a parità di carico massimo è la condizione peggiore, ovvero quella che prevede una $\sigma_m = 0$, e sforzo puramente alternato. Infatti partendo da questa condizione e aumentando la tensione media, sia nel verso della compressione e sia nel verso della trazione, la resistenza aumenta (ragionando sempre in termini di stessa tensione massima).

Quale delle tre, immaginando semiampiezze uguali, è la condizione peggiore?



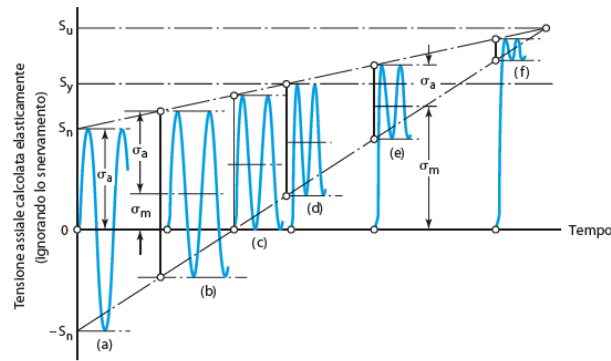
La prima, quella che ha una sigma media di trazione.

Lavorando a parità di tensione massima



La peggiore è la seconda, quella con tensione media nulla, è vero che la prima ha una tensione molto più alta di trazione però è anche vero che le si associa una semiampiezza molto piccola.

In figura, qualitativamente, le differenti configurazioni di carico



In questo caso si sta lavorando considerando la condizione statica di rottura e una condizione perfettamente alterno simmetrica con un limite sullo snervamento, questo può essere visto quindi come un campionamento di condizioni critiche tra una condizione alterno simmetrica e una condizione statica, quindi per avere parità di condizione all'aumentare del carico medio di trazione si deve ridurre la semiampiezza.

Storia del carico

Estremamente importante è l'elemento più aleatorio che si ha nel fenomeno di fatica, influenza notevolmente le previsioni e purtroppo ad oggi non vi è ancora una modellizzazione sufficientemente approfondita che permetta di avere una predizione matematica - sia pur affetta dal problema statistico - soddisfacente, ci si deve piuttosto basare su valori di riferimento sperimentali.

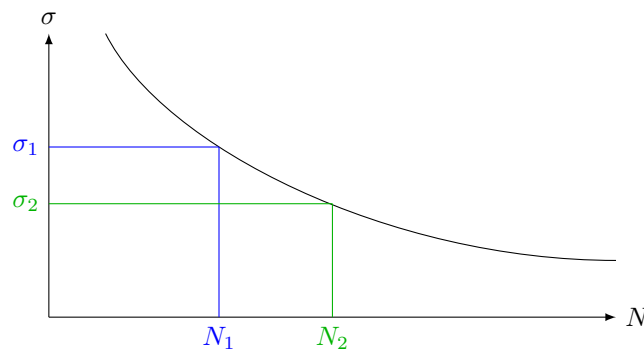
Quando si è visto che i cicli di carico sono caratterizzati da una tensione media e da una semiampiezza, si è detto che la condizione di studio è quella di un singolo ciclo di applicazione del carico variabile sinusoidalmente con parametri costanti nel tempo. Si è però poi detto che il caso reale presenta però un andamento nel tempo molto più complesso, si è così individuata con metodi approssimati una serie di cicli equivalenti che messi insieme danno lo stesso danneggiamento del ciclo reale. Questo vuol dire che gli stessi cicli equivalenti messi in successione, uno dopo l'altro, dovranno dare la stessa vita a fatica di un ciclo reale.

Al tempo stesso si può manifestare in realtà anche una situazione che preveda una successione temporale di cicli differenti.

Perciò sia nella trasformazione di un caso reale in una successione di casi equivalenti che nell'applicazione in successione reale di casi semplici, si ottiene un effetto di fatica dovuto a cicli sinusoidali differenti sovrapposti l'uno sull'altro. Purtroppo in fatica non esiste la semplificazione data dalla sovrapposizione lineare degli effetti come in un problema elastico, ma il tutto viene trattato secondo un modello di danno che il singolo ciclo causa sul componente.

La teoria di Palmgren-Miner si basa sull'ipotesi dell'accumulo lineare degli effetti della fatica, definendo il danneggiamento come la combinazione dei danni fatti da ciascun singolo ciclo di carico pesato su un limite che si avrebbe applicandolo separatamente.

Si immagini di avere σ_1, σ_2 semiampiezze di sollecitazioni a cui sono associati un certo numero di cicli a rottura per fatica N_1, N_2 questo vuol dire che se si prende la curva caratteristica doppio logaritmica di Wöhler a σ_1 corrisponde N_1 e a σ_2 corrisponde N_2 .



N_1, N_2 sono il numero di cicli limite che quel componente potrebbe sopportare applicando quella determinata semiampiezza, n è invece il numero di cicli effettivamente applicato. Ad esempio dire che se a 100 MPa di semiampiezza di sollecitazione corrispondono $N = 10^5$ cicli come numero massimo di cicli di applicazione del carico, si può equivalentemente applicarne un numero inferiore n senza avere la rottura a fatica, il danno che si introduce sul pezzo applicando un numero inferiore è proporzionale al rapporto tra queste grandezze, quindi se $\sigma_1 = 100$ MPa al quale corrispondo magari 10^5 cicli di applicazione come limite ultimo: se sono stati applicati in realtà 10^4 cicli ho esaurito il 10% della durata a fatica del componente, contribuendo ad un danno dello 0,1.

Se successivamente di applica un carico $\sigma_2 = 50$ MPa il limite magari diventa $5 \cdot 10^5$ se questi 50 MPa li ho applicati per 10^5 cicli, va fatto $D = \frac{10^5}{5 \cdot 10^5}$ pari a 0,2: il danno accumulato sommando tutti i cicli diviene $0,1 + 0,2 = 0,3$.

Quando ci si ferma?

Palmgren-Miner nella loro prima versione della teoria evidenziavano un limite pari ad 1 se vengono sommati due cicli, per cui, finché la somma del danno non arrivava all'unità, non si vedevano problemi; va da se che tale limite valeva uno anche per singolo ciclo, ovvero quando il numero di cicli $n = N$: se c'è solo un ciclo di applicazione, ci si ferma a quel valore trovato.

Per individuare N_1 sul diagramma di Wöhler ci si deve ricordare che la curva corrisponde a una determinata probabilità di sopravvivenza, nel diagramma classico la curva corrisponde al 90% di probabilità che il provino sia ceduto.

Per cui dire che il provino si rompe non appena viene applicato esattamente questo numero di cicli e quando il rapporto tra cicli n/N è unitario, non è sempre vero, c'è una certa incertezza, una dispersione dei dati, motivo per cui la legge di Palmgren-Miner e poi la legge generalizzata di Miner - che poneva la sommatoria dei rapporti pari - non è sperimentalmente vera, è estremamente conservativa, tant'è che proprio sperimentalmente la sommatoria dei danneggiamenti dovuti ai singoli cicli oscilla tra 0,7 e 2,0: perché?

Un po' per la dispersione statistica dei casi sperimentali: la dispersione rispetto al numero di cicli è estremamente più grande della dispersione rispetto al livello di carico, e quindi dato che nel danneggiamento entra elusivamente il numero di cicli, si ha una dispersione di valori notevole rispetto alle regole teoriche.

La legge di Palmgren-Miner è talvolta non cautelativa, soprattutto perché non considera la storia di carico, infatti a carichi crescenti (ovvero cicli a livelli di carico sempre più grandi), corrispondono valori più alti del danneggiamento limite $D_{lim} = \sum D_i = \sum \frac{n_i}{N_i}$.

Si è già detto come applicando un carico di bassa intensità poco il componente si danneggia poco, al contrario alte intensità aprono cricche e portano a rottura.

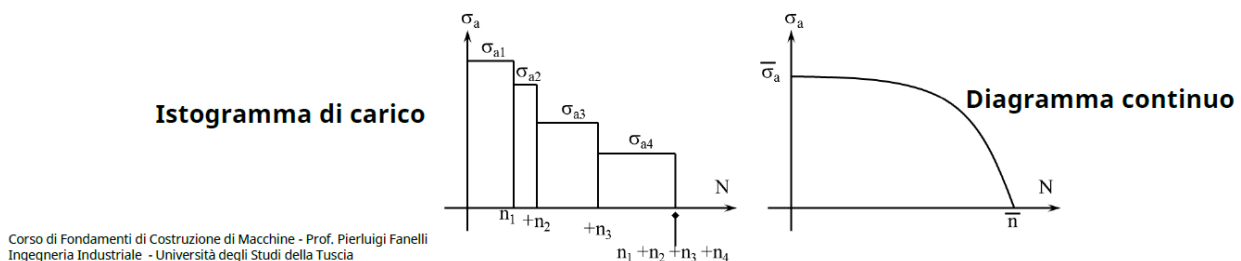
Applicando perciò sin da subito un carico elevato, questo porta giocoforza all'innescare di cricche, quando poi si applicano carichi decrescenti - ora che la cricca è innescata - anche questi contribuiranno al suo avanzamento: con una successione di carichi decrescenti si può arrivare a livelli di D più bassi.

Sperimentalmente si è addirittura notato che occasionali (non ciclici) sopraccarichi di trazione (overloads) portano ad un miglioramento della vita del pezzo; questo fenomeno è legato al fatto che localmente alla cricca avviene la plasticizzazione della sezione che incrudisce e quindi ne si rallenta localmente l'avanzamento.

Purtroppo per il danneggiamento non c'è una legge analitica di riferimento che dia un valore limite consolidato, di cui ci si possa fidare ciecamente, per cui di volta in volta si dovrà considerare il modello di studio più adeguato: spesso si utilizza quello più conservativo per poter avere una stima "peggiorativa" del risultato di durata.

Un'ulteriore argomento da trattare riguarda la rappresentazione dell'accumulo del danno.

Le condizioni che portano ad un accumulo del danno sono una successione di carichi variabile nel tempo che di solito vengono rappresentati come un treno di sollecitazioni attraverso un istogramma di carico o come una funzione continua data dalla una sommatoria dei cicli effettivi di applicazione.



Sull'istogramma si può porre la reale successione dei carichi come i cicli equivalenti ottenuti dalla regola del serbatoio.

Più spesso è utile utilizzare la legge di accumulo del danno per valutare un singolo ciclo equivalente: testato che la combinazione di questi cicli deve dare un danneggiamento - per semplicità - pari a 1 allora potrebbe essere comodo provare un solo spettro di carico caratterizzato da una certa semiampiezza e da un certo numero di applicazioni tale che dia lo stesso identico danneggiamento della sommatoria dei singoli cicli, e quindi lavorare con una sola semiampiezza, una sola σ_m ed un solo numero limite di cicli applicati e applicabili.

Partendo poi dal presupposto che l'obiettivo è quello di ottenere lo stesso livello di danneggiamento, cioè che la sommatoria di n/N sia il numero che posto, allora il ciclo equivalente dovrà avere lo stesso danneggiamento n/n , tuttavia ponendo $D = 1$ si trovano infinite coppie (n, N) che soddisfano quel rapporto, che giocoforza dovrà essere limitato.

Si deve applicare il ciclo equivalente per un numero di applicazioni n che potrà al danno dei cicli reali per il numero massimo di cicli che si potrebbero applicare in condizioni equivalenti.

Questo ciclo equivalente appartiene comunque al diagramma di Wöhler, è un punto sulla curva, una condizione limite per quel materiale o specifico componente, per cui è in relazione a qualsiasi ciclo di carico applicato, quindi se si individua un altro punto sulla curva (NB: $\Delta\sigma$ è un altro modo per dire semiampiezza) al di sotto dei valori equivalenti, Si possono porre in relazione grazie alla seguente formula:

$$\sigma^c N = \text{cost}$$

Di n_{eq} e σ_{eq} esistono infinite coppie arbitrarie che soddisfino questa relazione, allora posso decidere di scegliere arbitrariamente la σ_{eq} e ricavare la n_{eq} o viceversa. La condizione di criticità a fatica è una combinazione

di carico e durata, c'è una variabile in più rispetto alla condizione critica statica, in condizioni statiche c'è criticità quando raggiungo il carico limite, in fatica la criticità è legata sia al carico che a quante volte lo applico: ho la stessa criticità se applico tante volte un carico basso o poche volte un carico alto. Fissando il carico ovvero, la σ_{eq} , il numero di cicli di applicazione di quel carico equivalente affinché si individui lo stesso danno del caso reale è dato da questa relazione:

$$n_{eq} = \left(\sum \frac{n_i}{N_i} \right) \cdot N_{eq}$$

Trovo così qual è il numero di applicazioni del carico che ho scelto arbitrariamente al fine di ottenere lo stesso danno del treno di cicli di carico reale.

In alternativa, ed è solitamente il metodo più utilizzato, si fissa il numero di applicazioni equivalenti come la sommatoria delle applicazioni reali, si fa una sostituzione inversa e si ottiene il carico equivalente come:

$$\Delta\sigma_{eq} = \sqrt[k]{\frac{n_1\Delta\sigma_1^k + n_2\Delta\sigma_2^k + \dots + n_t\Delta\sigma_t^k}{\sum_i n_i}}$$

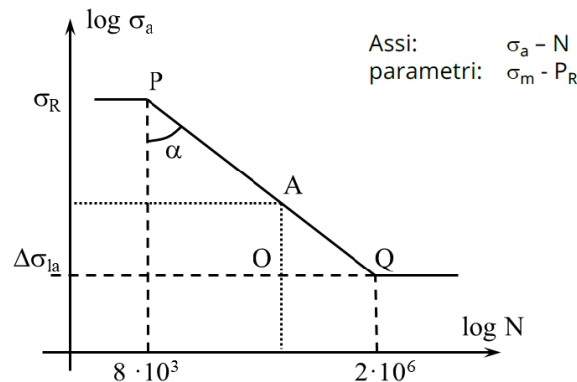
Ovvero la conversione da una successione di carichi ad un carico equivalente, col quale meglio si potranno visualizzare i carichi di fatica.

Progettazione a fatica

Curva classica di Wöhler

La classica curva di Wöhler si ottiene in condizioni di probabilità di rottura fissata e per rapporto di ciclo pari a -1 e con σ_m nulla.

Come si ricava la pendenza del diagramma di Wöhler?



k è l'inverso della pendenza, nel diagramma doppio-logaritmico questa è legata all'angolo α , tuttavia la pendenza solitamente è espressa come $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ovvero come il complementare ad α .

La tangente di α è data da $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, se si immagina di conoscere la coppia di valori limite relativa al punto A sul diagramma di Wöhler, e avendo dalla teoria noti i valori di P, Q , per ricavare la pendenza si può porre:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{QO}}{\overline{AO}} = \frac{\log N_Q - \log N_A}{\log \sigma_A - \log \sigma_Q} = k$$

Per cui:

$$\log \left(\frac{N_Q}{N_A} \right) = k \log \left(\frac{\sigma_A}{\sigma_Q} \right)$$

E quindi:

$$N_Q \sigma_Q^k = N_A \sigma_A^k = N \sigma^k = \text{cost}$$

Maggiore è k e meno pendente risulterà il diagramma.

Questo vuol dire che siccome P è fissato dal materiale, ovvero dalla sua rottura, una k più grande e quindi una curva meno pendente vuol dire un provino che dura di più: si incontra la curva molto più tardi.

I valori indicativi di k sono intorno a $8 \div 10$ per provini lisci, mentre in presenza di intagli si aggirano intorno ai $3 \div 6$.

Si ricorda che il ginocchio non è "presente" per i materiali che non hanno ferro all'interno viene lo stesso preso convenzionalmente a 10^8 cicli.

Altri diagrammi di fatica

Il classico diagramma di Wöhler è rappresentato per tensioni medie nulle, se si vanno a diagrammare casi con $\sigma_m \neq 0$ si trovano curve che si abbassano a parità di tensione massima, questo perché aumentando la sigma media deve ridursi la semiampiezza: al crescere della sigma media si riscontra una riduzione del diagramma, tuttavia non è possibile sapere l'entità della riduzione dato che il diagramma di Wöhler non ne fornisce l'informazione.

Per rappresentare una condizione limite di fatica bisogna identificare quattro parametri: o σ_m , $\Delta\sigma$ o in alternativa σ_{\max} e σ_{\min} oppure ancora N e $P_R\%$.

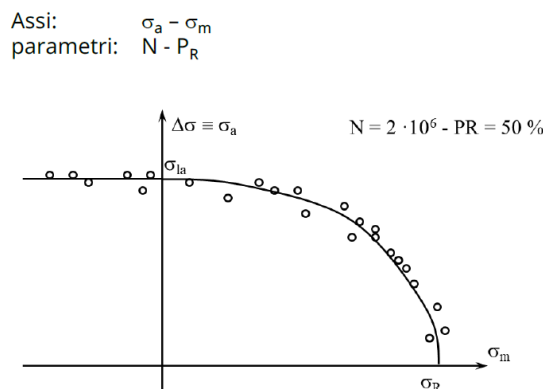
Quest'ultimo termine (la probabilità di rottura) può mantenersi bloccato: si ottengono semplicemente diagrammi scalati in funzione della rappresentazione probabilistica di cui si necessita.

I restanti parametri si possono così combinare a due a due per avere diverse rappresentazioni della condizione critica.

Come ampiamente detto il diagramma di Wöhler fissava la σ_m e usava semiampiezza $\Delta\sigma$ ed N .

Una rappresentazione diversa, quella di Haig prevede che su le ascisse si metta la σ_m e sulle ordinate la $\Delta\sigma$, a fissati N .

Diagramma di Haig o di Sodeberg



Standardizzando l'operazione, i cicli che si possono fissare sono quelli del ginocchio di Wöhler 10^6 si vanno poi a riportare su questo diagramma tutti quei provini che si sono rotti applicando 10^6 volte il carico: la popolazione di provini rotti a questo ciclo di sollecitazione si distribuisce secondo questa funzione, una sorta di parabola nel primo quadrante con un andamento lineare nel secondo.

Quando siamo a σ_R che condizione sto caricando? $\sigma_m, \Delta\sigma \neq 0$, ma com'è lo spettro di carico a semiampiezza nulla? Costante.

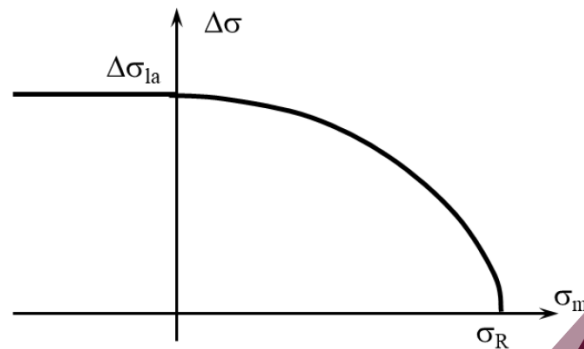
Questa è la condizione critica statica: è stato applicato σ_R (il carico di rottura) quando sono a σ_{la} invece cosa ho? Sollecitazione alterno simmetrica a sigma media nulla, quello è il valore di semiampiezza del ginocchio della curva di Wöhler standard: era la semiampiezza a 10^6 cicli valutata per una sigma media nulla.

Altre combinazioni intermedie si distribuiscono lungo un ramo di parabola, le sigma medie di compressione sono nel secondo quadrante (favorevoli), mentre la semiampiezza limite rimane costante.

Tale curva può essere rappresentata mediante la parabola di Gerber.

Diagramma di Haig semplificato
Parabola di Gerber

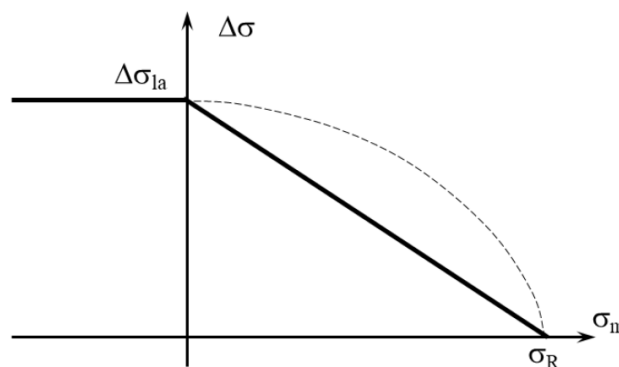
$$\Delta\sigma_l = \Delta\sigma_{la} \cdot \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R} \right)^2 \right] \quad \text{Valida per } \sigma_m > 0$$



Poiché ci si vuole mantenere in condizioni di sicurezza, la parabola di Gerber viene approssimata da Goodman come una semplice retta che passi per la condizione alterno simmetrica standard e per quella statica.

Diagramma di Haig semplificato
Retta di Goodman

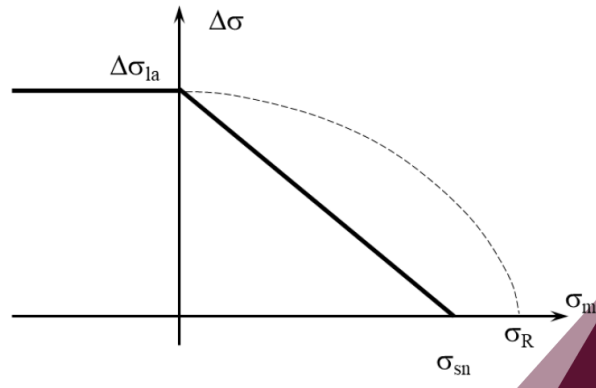
$$\Delta\sigma_l = \Delta\sigma_{la} \cdot \left[1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R} \right]$$



A causa della duttilità di alcuni materiali non è preferibile avere una condizione limite a rottura, allora Soderberg considera approssimabile e correggibile questa retta con un limite statico allo snervamento, semplicemente spostando, abbassando la curva che ora passa per σ_Y anziché σ_R .

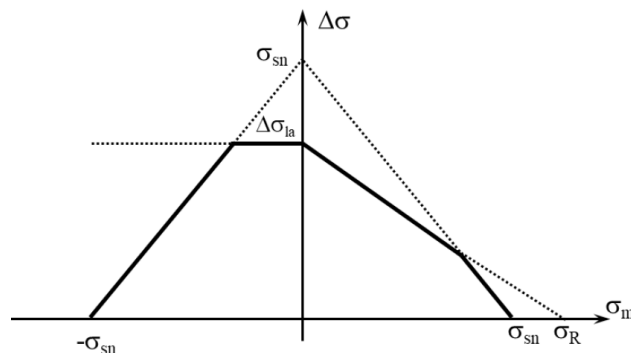
Diagramma di Haig semplificato
Retta di Soderberg

$$\Delta\sigma_l = \Delta\sigma_{la} \cdot \left[1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{sn}} \right]$$



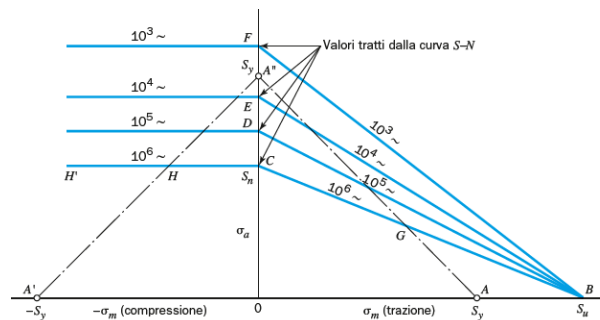
Questa curva tuttavia risulta troppo conservativa rispetto ai dati sperimentali, questi appartenenti alla parabola iniziale, per i materiali duttili si utilizza allora una rappresentazione semplificata: la curva di Goodman viene corretta localmente attraverso una spezzata sia a trazione che a compressione che punta alle rispettive condizioni di snervamento statico, insieme alla condizione alternata che punta anch'essa allo snervamento

Diagramma di Haig semplificato
ottimizzato per materiali duttili



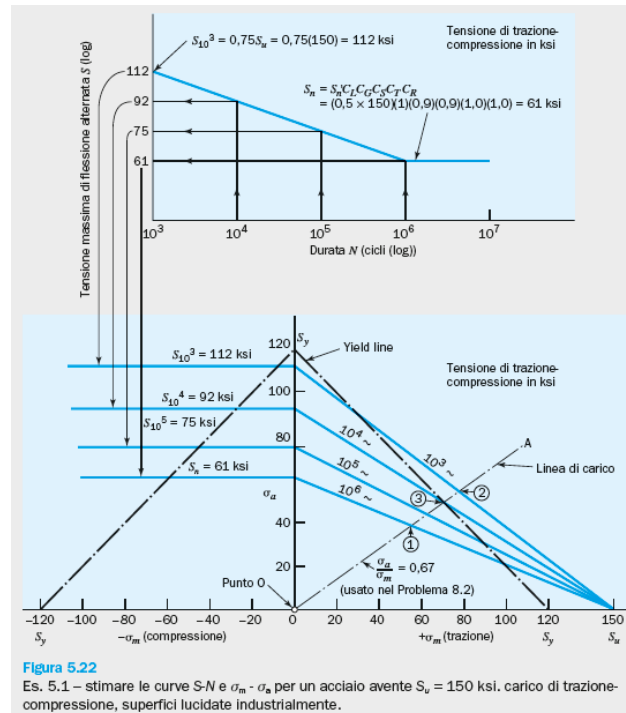
È possibile in questo modo visualizzare la condizione limite a fatica per i materiali duttili.

Ed in funzione del numero di cicli?



Altre considerazioni sulla curva classica di Wöhler

Tale diagramma viene indicato nei testi anglosassoni come curva SN.



Per capire quale sia la dipendenza della durata a fatica dalla tensione media qualora non fosse nulla abbiamo bisogno di una diversa rappresentazione, quella di Haig o di Soderberg prevede una diagramma cartesiano in cui la semiampiezza sta in ordinata e la sigma media occupa le ascisse, con dei parametri fissati come il numero di cicli e la probabilità di rottura.

Solitamente si trova che il diagramma di Haig base ha un'affidabilità del 50% a $20 \cdot 10^6$ cicli, in quel caso si incontrano sulle ascisse il valore di rottura a semiampiezza nulla e sulle ordinate una tensione media nulla al valore del ginocchio delle curva di Wöhler.

Dal punto di vista progettuale questa curva è poco pratica, per cui si sono diffusi diagrammi semplificati di Goodman e di Soderberg.

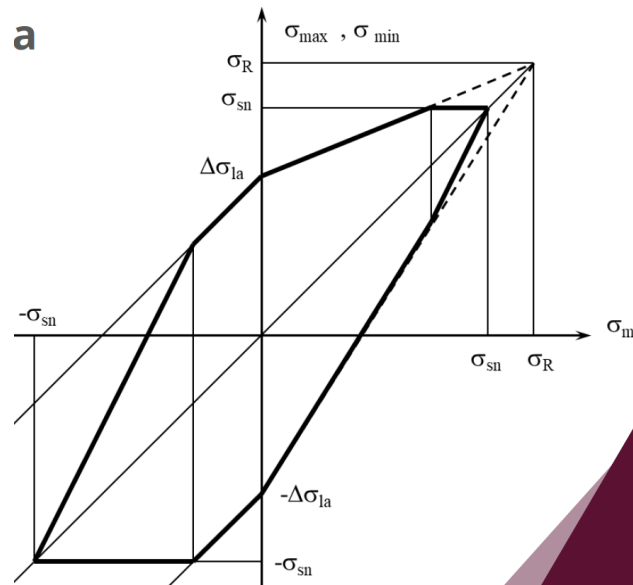
Un approccio ottimizzato per i materiali duttili, tuttavia, è quello che prevede l'abbinamento del diagramma di Goodman con l'ipotesi che la tensione non debba mai in alcun modo arrivare allo snervamento. Il risultato che si ricava è un'area più ristretta che limita sia a compressione sia a trazione la semiampiezza; a trazione la limitazione (zona esclusa) riguarda alti livelli di tensione media, a compressione invece - se è vero che la fatica non risente del valore assoluto di tensione media di compressione è anche vero che a compressione il materiale non deve assolutamente snervare - si limitano le combinazioni tensione alternata e tensione media.

NB: cosa accade a questo diagramma quando cambio il numero di cicli?

La costruzione è nata dall'individuare i punti a rottura e snervamento (statici) e con la semiampiezza alternata, che deriva da Wöhler: il ginocchio è il valore di semiampiezza relativo a $2 \cdot 10^6$ cicli, cambiando il numero di cicli di riferimento basterà porsi su di un diagramma di Wöhler e vedere quale sia il nuovo punto: si osserverà che diminuendo i cicli si aumenta la semiampiezza e questo si traduce nell'imporre un passaggio più in alto sul diagramma corretto, ovvero variare il numero di cicli si traduce in una variazione dell'area sottesa dovuta alla relativa variazione del punto sull'asse delle ordinate.

Goodman-Smith

Una rappresentazione alternativa della condizione critica di un materiale a fatica è quella di **Goodman-Smith**.



Questa rappresentazione utilizza come parametri non semiampiezza e tensione media ma tensione massima e tensione minima, i parametri fissati sono ancora una volta in numero di cicli e la probabilità di rottura. In ascissa si trova la tensione media mentre sulle ordinate sono presenti sia il valore massimo che il valore minimo, una curva superiore rappresenta l'andamento della tensione massima ed una curva inferiore quello della minima.

Punti caratteristici

1. $\sigma_m = 0$

Intersezione della curva con l'asse delle y , quando la sigma media è nulla - ipotizzando un numero di cicli pari a quelli del ginocchio di Wöhler - il valore di semiampiezza è noto e pari a σ_{la} ed il ciclo sarà esattamente alterno-simmetrico con $R = 1$.

2. $\sigma_{max}, \sigma_{min}$

Poiché il valore massimo è pari al valore minimo in modulo, è possibile individuarle entrambe e poter costruire il diagramma.

3. **Bisettrice**

La costruzione del diagramma avviene attraverso la bisettrice del primo e terzo quadrante, ovvero quel luogo di punti caratterizzato da coordinate identiche di tensione massima e sigma media.

Cosa significa?

- $\sigma_{max} = \sigma_m$

La sollecitazione è costante e si sta applicando un carico statico: ci si sta muovendo lungo la bisettrice per combinazioni di carico statico ben al di sotto dei limiti di sicurezza, imposti al massimo per lo snervamento

4. σ_R

La σ_{max} , e per costruzione anche la retta per la σ_{min} , partono rispettivamente da $\pm\sigma_{la}$ e si raccordano sul vertice a σ_R . (curva tratteggiata)

5. Sollecitazione ciclica

Si immagini di avere un certo valore di σ_m al quale corrispondono un valore di massima ed un valore di minima presi sulle rispettive rette.

Poiché si è preso un valore di tensione media, questo sarà uguale sia per x , che per y (d'altro canto la retta è la bisettrice), per cui la differenza tra le coordinate corrisponde esattamente a σ_m , questo ci porta a concludere che la distanza verticale che va dalla retta del massimo alla bisettrice altri non è che la semiampiezza corrispondente a quel tipo di sollecitazione.

D'altronde la semiampiezza è uguale sia sopra che sotto la sinusoidale, proprio per costruzione, allora si è confermato come su questa curva ogni volta che si prende una terna di punti si ha rispettivamente un massimo, una media ed un minimo, ottenendo quest'ultimo imponendo l'uguaglianza delle distanze.

- **Haig**

Il diagramma di Haig utilizzava tensione media e semiampiezza, partiva sulle ordinate da una σ_{la} e finiva nel primo quadrante sulle ascisse ad una tensione di rottura, la distanza verticale curva-ascisse era proprio il valore di semiampiezza per un determinato valore di tensione media ed è esattamente la distanza verticale tra la bisettrice e la curva di massimo di Goodman-Smith.

Se si sceglie un valore di σ_m più basso, in Haig ci si avvicina all'asse delle ordinate e la semiampiezza diventava più grande, sempre ricalcando la distanza dalla bisettrice dal valore di massimo di Goodman-Smith.

- **Goodman-Smith**

Il diagramma di Goodman-Smith utilizzando massima e minima è "equivalente" al diagramma di Haig ruotato di 45° rispetto alla bisettrice: è come se si stesse costruendo il diagramma di Haig sulla bisettrice

6. Limitazioni

La limitazione imposta dai materiali duttili imponeva che la tensione non arrivasse mai allo snervamento, basterà allora limitare superiormente e inferiormente la curva allo snervamento ottenendo una spezzata che limiti le tensioni massime e minime, d'altronde se a parità di tensione media limito la massima sto riducendo la semiampiezza possibile e di conseguenza ho innalzamento della tensione minima: in altre parole, imponendo la limitazione sulla massima si riduce giocoforza la semiampiezza, dato che la minima altro non è che la media meno la semiampiezza, si ottiene un valore di minimo maggiore rispetto a quello che si aveva in precedenza.

Nella pratica quel ramo di curva (continua, limitata) si ottiene una volta che è stata limitata superiormente la massima a partire dal valore di condizione statica di snervamento, ovvero scendendo giù ed individuando l'ultimo punto valido della vecchia curva: proprio dove si innesta la limitazione.

La minima si sposta sempre in funzione della massima.

7. Compressione

Cosa succede dalla parte delle tensioni medie di compressione?

Il diagramma di Haig proseguiva con semiampiezza costante indipendentemente dal valore di σ_m .

Nel diagramma di Smith questa semiampiezza è la distanza tra la tensione massima e la bisettrice, significando che il diagramma proseguirebbe con distanza costante.

Poiché il valore di semiampiezza è stato imposto a partire dalle osservazioni sul diagramma Haig, lo stesso si può fare anche per la tensione minima: se $\sigma_{\max} - \sigma_m$ forniscono la distanza per le tensioni di trazione, allora lo stesso varrà, con uguale valore, anche per la compressione e $\sigma_m - \sigma_{\min}$ fornirà la distanza per le tensioni di compressione.

L'andamento della minima passa per le $-\sigma_{la}$ ed è parallelo alla bisettrice.

Imponendo un limite allo snervamento (o alla rottura) si va a limitare il valore della tensione minima, questa altri non è che la minima algebrica può al più esser pari allo snervamento.

Come fatto per la trazione si procede limitando la minima con lo snervamento, ora che si è notevolmente ridotto il valore di semiampiezza, questo valore sommato alla media individua la massima: il nuovo punto proiezione. Ripetendo il ragionamento della trazione si ottiene il nuovo ramo di curva di tensione massima.

Questa tuttavia rimane una costruzione semplificata: con tutte queste spezzate non si fa altro che rincorrere i dati sperimentali.

Il diagramma così riportato è tipico dei materiali duttili.

Tutto ciò questo è stato tuttavia tracciato per un numero di cicli prefissato, come quello del ginocchio di Wöhler.

Qualora fossi di fronte ad un numero di cicli differente da quello di Wöhler, significherebbe avere:

- Per un numero di cicli inferiore un diagramma che si amplierebbe similmente ad un diagramma di Haig. Infatti se passo ad un numero di cicli inferiore, si aumenta il valore di semiampiezza e l'intercetta σ_{la} sale di quota;
- Per un un numero di cicli superiore si assottiglierebbe, avvicinandosi le le intercette sull'asse delle y.

Master Diagram

In questa rappresentazione si rapportano nelle due coordinate i valori di σ_{\max} e σ_{\min} e si diagrammano gli andamenti nelle due bisettrici.

Quando massimo e minimo sono uguali tra loro $R = 1$ e allora siamo in condizioni statiche, quando siamo sull'altra bisettrice $R = -1$ e la minima è uguale alla massima in modulo ma opposta in segno e siamo in condizioni alterno simmetrica.

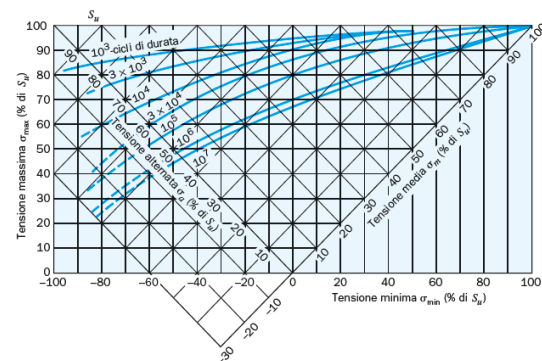
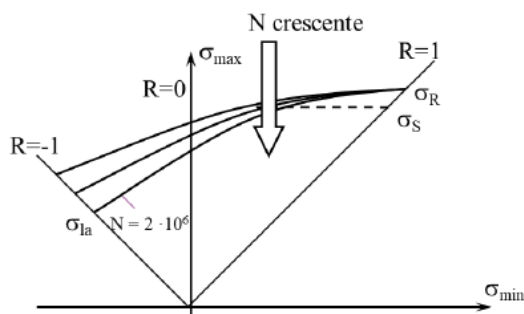


Figura 5.17
Diagrammi di resistenza a fatica per un acciaio legato avente S_u compresa tra 125 e 180 ksi, caricato in trazione-compressione. Media di dati sperimentali ottenuti da provini lucidati di acciaio AISI 4340 (applicabili anche ad altri acciai legati, come l'AISI 2330, 4130, 8630). (Per gentile concessione della Grumman Aerospace Corporation).

Stati di tensioni non monodimensionali

Il caso più comune è quello dell'albero di trasmissione.

Questo organo meccanico è soggetto a flessione rotante e a momento torcente.

Il momento flettente è costante nel tempo ma siccome l'albero ruota la tensione è variabile sinusoidalmente nel tempo: questa altri non è che la componente σ_z del tensore delle tensioni.

Il momento torcente sarà invece costante nel tempo: è necessario trasmettere momento torcente continuamente. Questa sollecitazione è identificata dalle componenti τ_z del tensore delle tensioni.

Come si procede in questo studio? Solitamente si utilizzano delle formulazioni che si basano su criteri di resistenza statici come magari Von Mises, solo che siccome sono sollecitazioni diverse tra loro come tipologia

e formulazioni, attualmente si preferisce, anziché confrontare la combinazione delle tensioni con una tensione limite, normalizzare le tensioni per il proprio limite.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{Ip. Max tensione tangenziale}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad \text{Ip. Von Mises o Max energia di distorsione tangenziale}$$

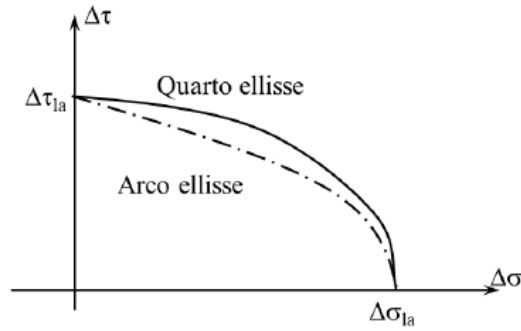
$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + \alpha^2 \tau^2} \quad \text{Ip. generica} \quad \alpha = \frac{\sigma_{lim}}{\tau_{lim}}$$

Questo vuol dire che la tensione limite per le σ , se questa è variabile nel tempo, sarà un limite di fatica, mentre quella sulle τ se questa è costante nel tempo, sarà un limite statico.

Se addirittura si hanno tensioni in due direzioni (caso xy) allora si può utilizzare la relazione di Von Mises in cui la normalizzazione anziché essere fatta tramite lo stesso limite viene effettuata con limiti distinti, separati, ciascuno per la tipologia di sollecitazione presente.

Lo sviluppo di questo studio è dovuto a Gaugh e Pollard ed è nato proprio dall'analisi degli alberi di trasmissione.

Senza scendere troppo nel dettaglio, in un piano cartesiano $\sigma\tau$, il limite è dettato da una curva che può essere approssimata come arco d'ellisse o come quarto di ellisse.



Le normative utilizzano sostanzialmente il quarto d'ellisse.

In queste formulazioni:

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{lim}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{lim}}\right)^2 \leq 1 \quad \text{Monodimensionale + torsione/taglio}$$

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,lim}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{y,lim}}\right)^2 - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{x,lim} \sigma_{y,lim}} + \left(\frac{\tau}{\tau_{lim}}\right)^2 \leq 1 \quad \text{Bidimensionale + torsione/taglio}$$

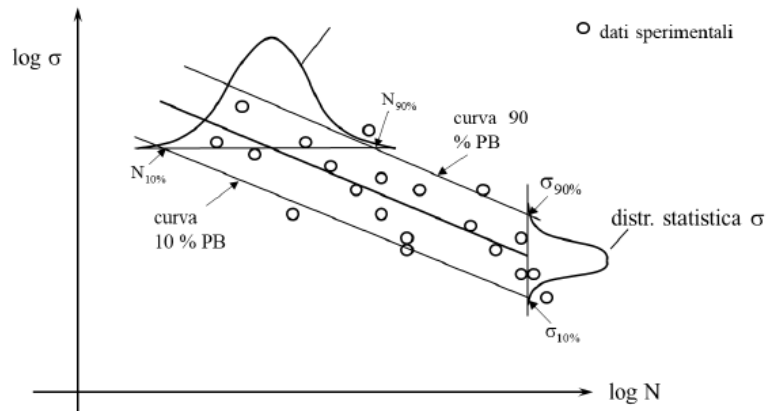
Ciascuna componente del tensore è separata e normalizzata rispetto a proprio limite.

Progettazione a fatica

Quando si tratta la progettazione in ambito di fatica devo necessariamente tenere conto di un elemento: l'affidabilità.

Ogni dato sperimentale di fatica dev'essere interpretato con una distribuzione come quella gaussiana.

Ad una distribuzione di punti sperimentali si associano le curve di Wöhler di tendenza per una probabilità di rottura del 10, 50 e 90%.



PB: Rottura, **PR:** Reliability

Fissato un certo numero di cicli, leggo nei dati sperimentali un certo livello di tensione al quale è associata una probabilità di sopravvivenza del 90% e un certo dato di tensione per cui è associata una probabilità di sopravvivenza del 10%; al contrario un valore a cui è associato un 10% di rottura è uno a cui è associato il 90% di probabilità di rottura: la distribuzione statistica rispetto alle tensioni è piuttosto stretta.

Tuttavia se si considera un determinato livello di carico, ad un valore del numero di cicli a cui è associato un 10% di rottura (o 90% di sopravvivenza) si individua un valore molto diverso da quello a cui è associato il 90% di rottura o 10% di sopravvivenza per cicli fissati: vuol dire che la distribuzione statistica dei dati sperimentali a partire da tensione (e quindi rispetto al numero di cicli) è decisamente più ampia, i dati sono molto più distribuiti, e l'incertezza sul valore di durata di un componente fissata la tensione è molto più elevata rispetto all'incertezza sul valore di tensione a numero di cicli fissato.

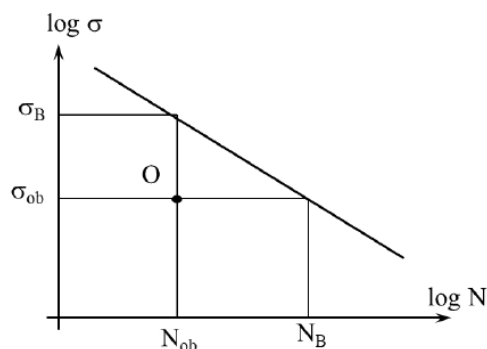
Come si fa nella pratica realizzativa?

Si usano vari diagrammi sperimentali. Curve semi-logaritmiche, diagrammi sperimentali,...

Coefficiente di sicurezza in fatica

Il fattore di sicurezza come si ricava?

Come il rapporto tra la tensione massima che si potrebbe avere a quel livello di carico (a un certo numero di cicli) rispetto alla tensione effettiva a quel livello di carico a quel numero di cicli.



Se ho il punto di lavoro O caratterizzato da una σ_O ed N_O , il fattore di sicurezza è il rapporto fra la tensione/semiampiezza massima che porrei avere a quel numero di cicli di applicazione rispetto a quella che sto applicando; mentre il fattore di sicurezza sul numero di cicli è il rapporto fra il numero massimo di cicli che potrei avere a quel livello di carico, rispetto al numero di cicli effettivamente applicato, ora questi punti massimi σ_B ed N_B sono in relazione fra loro con la legge di Wöhler per cui:

$$\gamma_\sigma = \frac{\sigma_B}{\sigma_{ob}} \quad \gamma_N = \frac{N_B}{N_{ob}} \quad \gamma_N > \gamma_\sigma$$

$$N_{ob}\sigma_B^k = N_B\sigma_{ob}^k$$

$$\gamma_N = \gamma_\sigma^k$$

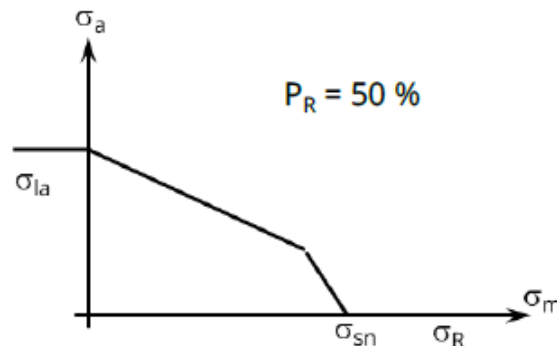
Ora se si sceglie convenzionalmente un fattore di sicurezza pari a 1,6 sulle tensioni - ricordando che il coefficiente k a seconda di come è fatto il provino può variare tra 3 e 10 - si ottiene che a pari affidabilità il fattore di sicurezza sul numero di cicli γ_N varia tra 4 e 100, potendo imporre un numero di cicli a pari affidabilità di due ordini di grandezza inferiore rispetto a quelli limite mantenendo la stessa sicurezza.

Curva SN per sollecitazione media non nulla

Avendo visto i diagrammi di fatica più comuni si è ora in grado di quantificare come impatta un valore di tensione media non nulla sul diagramma di Wöhler.

Come possiamo correggere il diagramma di Wöhler standard e trasformarlo nel diagramma di Wöhler per l'applicazione specifica?

Per far questo è necessario iniziare a tracciare il diagramma di Haig standard per 10^6 cicli, com'è noto si costruisce utilizzando il ginocchio di Wöhler sulle y e la rottura sulle x limitando il diagramma con lo snervamento ottenendo quindi un altro diagramma standard.



Qualora in ginocchio di Wöhler non fosse disponibile da tabelle specifiche si può prendere per materiali duttili comuni il valore della σ_{la} come il 30÷50% della rottura.

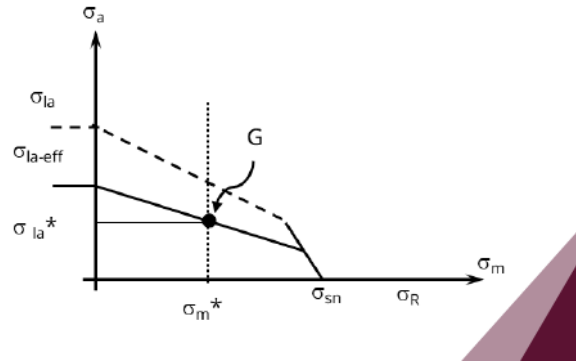
$$\text{fattore di fatica} = \frac{\sigma_{la}}{\sigma_R}$$

Siccome si vuole tracciare il diagramma di Haig e Wöhler per il pezzo specifico con $\sigma_m \neq 0$ si corregge il diagramma anche in funzione di tutti quei coefficienti che spostano il ginocchio.

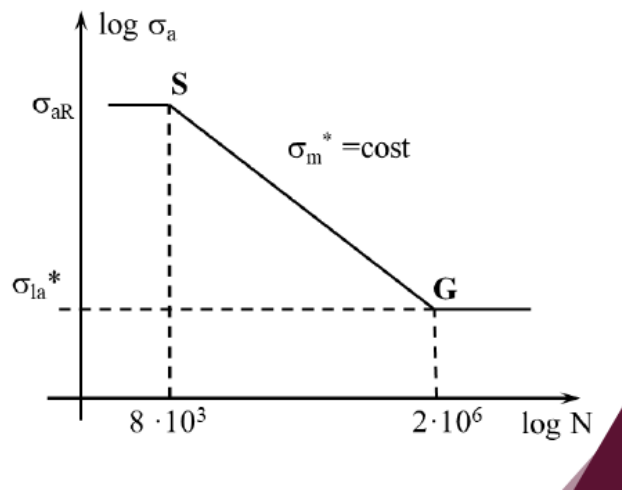
A seconda di quale sia il livello di scostamento dalla condizione standard, riducendo la semiampiezza effettiva si otterrà la $\sigma_{la-effettiva}$: per il limite di fatica effettivo si partirà comunque dal limite a fatica del materiale per cui il diagramma si sposterà più in basso.

A questo punto è possibile ricavare il nuovo valore del ginocchio della curva di Wöhler: sia per ipotesi $\sigma_m = \sigma_m^*$ di trazione (sempre per 10^6 cicli), il nuovo ginocchio si andrà a cercare per il σ_m^* desiderato,

il punto di intersezione così individuato darà alla luce anche il nuovo valore σ_{la}^* del ginocchio di Wöhler relativamente alla σ_m^* di input del problema, ecco allora come si è ridefinito il punto G del ginocchio.



Siccome però la rappresentazione di Wöhler è data dal numero di cicli rispetto alla semiampiezza di sollecitazione, si deve ragionare anche sul punto S, il punto di confine con quella che sarà poi la fatica oligociclica.



Le vecchie coordinate di quel valore erano $8 \cdot 10^3$ cicli con sigma di rottura data nel caso di sigma media nulla: il punto S corrisponde ad uno spettro di sollecitazione nel tempo sinusoidale, perfettamente simmetrico dove il valore massimo era la sigma di rottura.

Poiché devo rappresentare la semiampiezza, questa per $\sigma_m = 0$ era esattamente la massima, la rottura, nel momento in cui la $\sigma_m \neq 0$, il mio ciclo trasla verso l'alto sempre limitato superiormente dalla rottura e quindi S rappresenta la condizione di carico in cui la massima ha raggiunto la rottura: in queste condizioni la semiampiezza varrà $\sigma_{aR} = \sigma_R - \sigma_m$, questa nuova semiampiezza caratterizza così lo spettro di carico del punto S. In questo punto l'abbassamento è semplicemente dovuto alla σ_m e non dipende da nient'altro; l'abbassamento del ginocchio è invece funzione dei coefficienti correttivi e dello spostamento della curva di Haig da σ_{la} a $\sigma_{la-effettiva}$: è molto più complesso il meccanismo che ha portato a spostare il ginocchio che quello che ha spostato il punto S.

Si può ripetere lo steso ragionamento qualora anziché correggere il diagramma di Wöhler con una $\sigma_m \neq 0$, volessi correggere il diagramma di Wöhler perché ho un diverso rapporto di ciclo R .

Il ragionamento è praticamente il medesimo: si riduce il diagramma di Haig ad uno effettivo di Haig considerando i coefficienti di correzione, gli aspetti interni ed esterni del componente e a quel punto anziché imporre una sigma media individuo la retta corrispondente al rapporto di ciclo desiderato, l'intersezione darà il nuovo ginocchio di Wöhler e di conseguenza diviene possibile correggere il resto.

Curva S-N per sollecitazione media non nulla

In altri casi può essere noto il valore di $R = R^* = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ (con σ_m variabile)

$$R^* = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a} \quad \sigma_a = \frac{1 - R^*}{1 + R^*} \sigma_m$$

Conoscendo la curva limite è noto il punto $(\sigma_{la}^*, \sigma_m^*)$ (relativo a $N = 2 \cdot 10^6$)

$$\sigma_{la}^* = \frac{1 - R^*}{1 + R^*} \sigma_m^* \quad \text{Punto G su curva Wöhler}$$

Il punto **S** (ricerca di σ_{aR}) è da valutare in funzione di $R^* = \text{cost}$, considerando che :

$$\sigma_R = \sigma_{max} = \sigma_{min} + 2\sigma_{aR} = R^* \sigma_{max} + 2\sigma_{aR}$$

$$\sigma_{aR} = \frac{1 - R^*}{2} \sigma_R$$

Corso di Fondamenti di Costruzione di Macchine - Prof. Pierluigi Fanelli
Ingegneria Industriale - Università degli Studi della Toscana

