

## Parte 20: resistenza degli ingranaggi

### Indice

Criteri di costruzione	2
Resistenza degli ingranaggi	5
Modello di Lewis per la flessione	6
Resistenza a pitting	11
Effetto d'intaglio alla radice del dente	17
Modello di Neimann per la flessione	18
Verifica a flessione secondo UNI 8862 ISO C	21
Verifica a pitting secondo UNI 8862 ISO C	22
Verifica a grippaggio secondo Block	23

## Criteri di costruzione

Prima di tutto, per verificare il corpo ruota, è necessario tenere in considerazione in posizionamento dell'ingranaggio sull'albero, questo infatti dev'essere verificato a resistenza e a rigidezza dovendo minimizzare gli spostamenti relativi. So dovrà fare così molta attenzione alla luce tra gli appoggio, cioè alla distanza tra i cuscinetti, così da minimizzare l'inflessione della trave appoggio-appoggio. Il rapporto tra la distanza dei cuscinetti ed il diametro dell'albero dovrebbe attestarsi intorno a valori di  $2,5 \div 2,7$ . Com'è noto, ridurre la distanza tra gli appoggi permette di limitare l'inflessione.

I materiali tipici da utilizzare per le ruote sono gli acciai a basso tenore di carbonio, leghe a base di nichel, facendo una distinzione tra ruote di pezzo e ruote calettate.

Altro aspetto da tenere in considerazione sarà la lubrificazione, così come per i cuscinetti, anche per gli ingranaggi si deve prevedere un sistema di lubrificazione, il più delle volte a bagno/nebbia d'olio.

Il sistema di lubrificazione dev'essere tale da ridurre il carico termico dovuto all'attrito e garantire il corretto funzionamento attraverso uno smaltimento del calore ed il mantenimento della temperatura di *bulk*, cioè la temperatura media degli elementi intorno agli  $80^{\circ}C$ .

Il lubrificante di base si attesta ad una temperatura tra i  $(30 \div 40)^{\circ}C$ , in prossimità dell'ingranaggio si riscalda e smaltisce il calore una volta allontanato.

La ruota dentata è sostanzialmente composta da tre parti:

1. Una corona esterna, un disco dove vengono realizzati in denti.
2. Un mozzo centrale, la parte di connessione con l'albero
3. Un corpo ruota, la parte intermedia che connette il mozzo alla corona

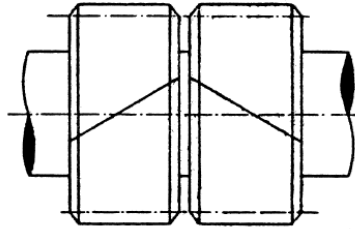
Corona e mozzo solo elementi massivi, mentre invece il corpo ruota può essere un elemento più leggero e sottile che ha solo la funzione di connettere le due parti tra loro: il corpo ruota può essere addirittura alleggerito mediante fori o realizzato attraverso razze radiali.

In base ai carichi transitori e alle necessità dinamiche si può giocare soprattutto sul corpo ruota per avere maggior rigidità o minore massa.

Per quanto riguarda il rapporto rigidità/massa le ruote dentate sono quei volani che influiscono sul comportamento vibrazionale dell'albero: la frequenza propria del sistema è dettata proprio dalle rigidità delle masse calettate sull'albero, e quindi laddove le frequenze proprie dell'albero si sovrappongono a quelle di eccitazione, si potrà lavorare sulla massa degli elementi calettati.

Le ruote dentate possono essere stampate a caldo o realizzate per fusione: dipende principalmente dalle dimensioni della ruota e dalle necessità di realizzazione della dentatura, naturalmente in questo passaggio viene realizzato il grezzo e a partire da questo, la dentatura.

La forma del corpo ruota dipende dal rapporto tra diametro di primitiva e diametro dell'albero: se il diametro di primitiva è paragonabile al diametro dell'albero (il loro rapporto è inferiore a 2) allora la ruota viene realizzata di pezzo (solitamente si fa per i pignoni).

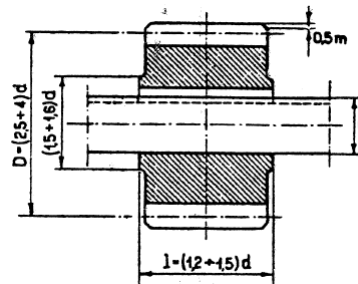


C'è poco spazio tra albero e primitiva, vuol dire che il piede del dente - a meno di correzioni - arriva molto vicino all'albero, andando a creare una zona di estrema concentrazione di tensioni.

Realizzare poi una cava per linguetta porterebbe via troppo materiale resistente indebolendo troppo la ruota dentata.

Questa scelta porta con sé il fatto che il materiale utilizzato per la ruota dev'essere lo stesso da utilizzare per l'albero, comportando un maggiore costo.

Se il rapporto tra diametro di primitiva e diametro dell'albero è tra  $2,4 \div 4$  allora la ruota è un elemento a se stante calettato assialmente sull'albero.

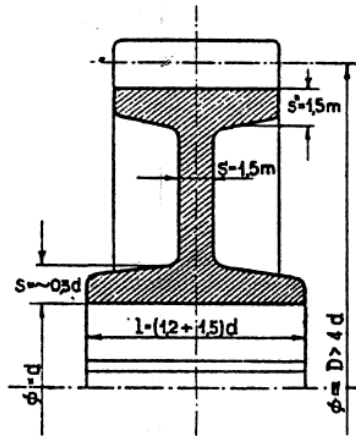


In proporzione all'albero la ruota dentata è piuttosto piccola, di conseguenza non c'è dimensione radiale tale da garantire una distinzione tra mozzo-corpo ruota-corona, per cui il corpo ruota scompare e la corona diventa un'unica parte col mozzo, la ruota si dice **piena**, la larghezza di fascia non supera mai una volta e mezza il diametro.

Se invece il rapporto supera il valore di 4, si potrà visualizzare ben distinta la parte centrale del corpo ruota dalla corona e dal mozzo.

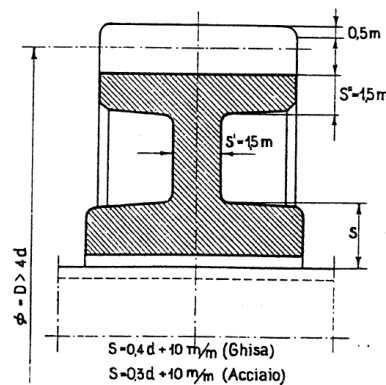
La dimensione assiale del mozzo non è mai superiore ad una volta e mezzo il diametro dell'albero.

Diviene più estesa per minimizzare le rotazioni della ruota rispetto all'albero, per renderla più solidale possibile rispetto all'albero.



Mentre la sua larghezza è indipendente dalla larghezza del mozzo, sempre proporzionale al modulo della dentatura.

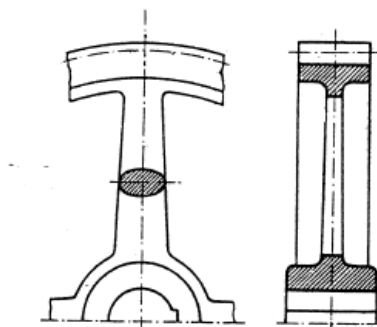
Se i diametri sono molto grandi, tramite realizzazione di fonderia si può optare per soluzione più tozze



In alcuni casi poi ci si può permettere di alleggerire il corpo ruota, e quindi piuttosto che dimensionare un disco pieno (argomento di magistrale) si possono realizzare fori o razze.

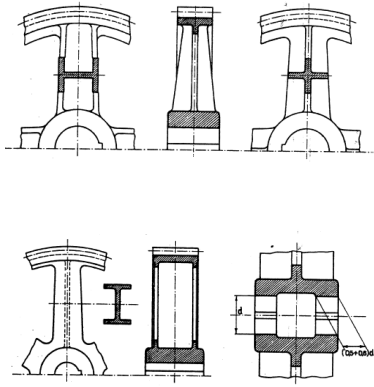
Il numero minimo di queste razze si attesta intorno a

$$n = \left( \frac{1}{7} \div \frac{1}{8} \right) \sqrt{D}$$



È sempre bene poi verificare il carico considerando le singole razze come degli elementi trave che con grande margine di sicurezza possono essere considerate incastrate al mozzo e libere sulla corona.

La sezione delle razze può essere variabile



La scelta della sezione della razza sarà dettata dalla distribuzione dei carichi, nonché dalla tipologia dei denti.

D'altronde una ruota a denti elicoidali ha anche una componente assiale, se questa è importante allora farà flettere la razza fuori dal piano della ruota, e quindi la sezione ad H rovesciato sarà la più indicata, perché ha un'inerzia maggiore in quella direzione, mentre una soluzione ad H dritta si può preferire per una ruota a denti dritti.

## Resistenza degli ingranaggi

In realtà i carichi e la rigidezza sono tali da spostare l'attenzione, piuttosto che al mozzo o al corpo ruota, sulla dentatura.

È molto più probabile che si porti a fine vita un ingranaggio con un danneggiamento sul dente piuttosto che sul corpo ruota e sul mozzo.

Questo perché sul dente accadono una certa quantità di fenomeni critici che possono portare alla rottura del dente a seconda della condizioni di funzionamento della ruota.

Le verifiche da apportare sono principalmente di 4 tipologie

1. **La resistenza a flessione del dente:** il carico transitante sul dente inflette il dente come se fosse una piccola trave incastrata sulla corona
  - Statica
  - A fatica
2. **Calcolo ad usura/pitting/vaiolatura:** basato sulla pressione Hertziana tra le parti, è un fenomeno legato alla forti pressioni di contatto che localmente si generano sul profilo del dente.
3. **Verifica a grippaggio:** fenomeno che si instaura a causa dell'improvvisa sublimazione del lubrificante in particolari condizioni di temperatura portando a contatto diretto le superfici metalliche.
4. **Usura a marcia lenta**

Le prime due verifiche sono le verifiche richieste dalla normative vigenti.

Storicamente l'attenzione si concentra sulla verifica a flessione.

Il primo a teorizzare un modello valido dell'analisi tensionale sul dente di un ingranaggio è stato Lewis e stima con buona approssimazione la resistenza del dente, è la relazione di partenza con cui si effettua una stima del modulo da assegnare alla ruota dentata.

Tuttavia è un modello semplificato perché il problema di resistenza del dente è estremamente complesso già a partire dagli input da inserire nel modello: l'effettivo carico sul dente, se non viene misurato sperimentalmente, è estremamente complesso da ricavare analiticamente.

Il carico per buona approssimazione è costante durante tutto l'ingranamento, per direzione, verso e intensità: dicendo questo si sta già teorizzando un ingranaggio con un solo dente in presa, e nella realtà ciò non è auspicabile. Nella realtà teorico-pratica il contatto avviene tra più denti: si prende in utilizzo la metà del carico sgravando il dente che sta uscendo dall'ingranamento in virtù del fatto che il dente può essere modellizzato come un sistema iperstatico con una ripartizione del carico dipendente dalle rigidezze dei denti, questi uguali tra loro.

Tuttavia le rigidezze del sistema sono diverse in accesso e in recesso, la ripartizione del carico non è perfettamente ed equamente ripartita.

L'intensità è costante in direzione solo nel sistema di riferimento globale, rispetto al sistema di riferimento locale, orientato secondo l'asse del dente, è invece variabile.

Inoltre a seguito delle flessioni dell'albero e della deformabilità della ruota, le superfici di contatto cambiano durante l'ingranamento.

Un effettivo carico sul dente si può calcolare soltanto sperimentalmente con complessi sistemi di misura.

## Modello di Lewis per la flessione

Il modello di Lewis è cautelativo, conservativo.

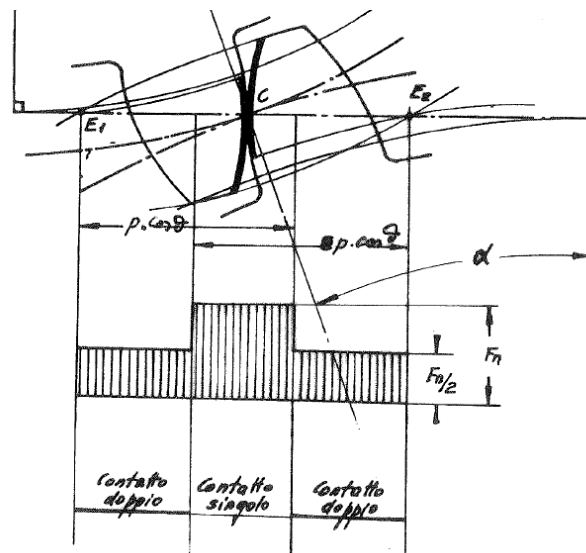


Figura 1: Ripartizione del carico durante l'ingranamento.

$E_1, E_2$  sono i punti estremali del contatto.

Secondo l'approssimazione di Lewis in accesso e in recesso avverrà un contatto doppio mentre sarà singolo al centro.

Lewis si è messo in condizioni conservative applicando il carico sulla punta del dente, ovvero dove finisce l'evolvente del dente.

Il carico si applica sulla testa del dente come se fosse l'unico dente in presa ed inclinato secondo un angolo  $\beta$  rispetto all'asse ortogonale del dente.

Le approssimazioni cautelative sono parecchie

1. Si prende tutto il carico applicato sul dente, come se ce ne fosse solo uno in presa.

Il dente si comporta così solo quando si trova in *contatto singolo*.

2. Si prende come punto d'applicazione quello con maggiore braccio.
3. Sulla testa del dente l'inclinazione della forza rispetto all'asse del dente è molto più grande: la forza scambiata, che segue sempre l'angolo di pressione nel sistema di riferimento globale, avrà un angolo completamente diverso rispetto all'asse:  $\beta \neq \theta$ .

L'approssimazione di Lewis dice invece di considerare sulla testa del dente un angolo di applicazione pari all'angolo di pressione  $\beta = \theta$ .

4. Considera il dente come una trave incastrata alla De Saint Venant, sapendo bene che questa è modellizzabile come una trave molto tozza, non studiabile con De Saint Venant.

Questa trave sarà sollecitata dal carico

$$\frac{Q}{\cos \theta}$$

Inclinato di un angolo  $\beta = \theta$ .

Operando un trasferimento del carico lungo la sua retta d'azione fino ad incontrare l'asse del dente, questo si troverà in posizione M

La trave diviene così caricata da una sollecitazione di taglio  $T$  e da sforzo normale pari ad  $N$

$$T = Q \frac{\cos \beta}{\cos \theta} \quad N = T \tan \beta$$

La sollecitazione ad un determinato spessore a quota  $z = B$  sarà data da una componente di flessione

$$\sigma_f = \frac{6Tz}{s^2b}$$

E da una componente di compressione

$$\sigma_c = -\frac{T}{sb} \tan \beta$$

E da una sollecitazione di taglio, che per sezione rettangolare

$$\tau_{medio} = \frac{T}{sb} \quad \tau_{max} = 1,5 \tau_{medio}$$

Siccome ci si è messi in forte conservatività sui carichi, l'approccio di Lewis ipotizza che la sollecitazione di taglio e quella di compressione non comportino criticità

- La sollecitazione di compressione non apre cricche di fatica
- Il taglio è massimo dov'è nulla la sollecitazione di pressione

Valutando unicamente solo la componente di pressione.

Per cui la tensione di flessione alla Lewis diviene

$$\sigma_L = \frac{6Qz}{s^2b}$$

Questo è un andamento della tensione di flessione in funzione della quota  $z$ , solo che il dente non è una trave alla DSV a sezione costante.

Si individueranno così le situazioni critiche laddove ci siano spessori minori in punti di incastro.

**Enunciato.** *Una trave a sezione rettangolare sarebbe a iso-resistenza (presentando la stessa tensione lungo tutto il bordo della sezione) se avesse una delle due dimensioni della sezione rettangolare (e.g. base costante e altezza variabile), con una legge di variazione del lato variabile di forma parabolica.*

Per cui se la trave a sezione rettangolare considerata anziché avere una sezione costante avesse l'altezza del rettangolo variabile con legge parabolica, allora tutti i punti del fianco della trave avrebbero tutti la stessa tensione di flessione.



Questa legge parabolica si può scrivere come

$$y = k\sqrt{z}$$

Con  $k$  coefficiente di amplificazione della parabola in funzione del livello di tensione raggiunto o raggiungibile.

La massima tensione si può così avere per la parabola più grande inscritta nel profilo del dente.

Il punto di tangenza di questa parabola col profilo del dente sarà il punto più sollecitato del dente, in questo caso il punto  $H$ .

Sostituendo nei i valori di tensioni trovati le dimensioni tipiche della sezione più sollecitata (apice '), si giunge a

$$\sigma_L = \frac{Q}{\frac{1}{6} \frac{s'}{z'} \frac{s'}{m} mb} = \frac{Q}{ymb} \quad y = \frac{s'^2}{6z'm}$$

Individuando così il termine  $y$  che determina la sezione più sollecitata.

Invertendo tale relazione si trova il carico ammissibile

$$Q_{amm} = \sigma_{amm}ymb$$

Cioè imponendo che la tensione di flessione sia pari all'ammissibile di resistenza del dente, si trova quale sia il carico ammissibile transitante per un singolo dente.

La  $y$  così individuata dipende dell'angolo di pressione, dall'involuppo di realizzazione, dal numero di denti... Dev'essere ricavata geometricamente. Per ricavare una relazione di progetto si parte dal fatto che  $Q$  è proporzionale al momento torcente transitante,

$$M = QR = Q \frac{zm}{2} \Rightarrow Q = \frac{2M}{zm} = ymb\sigma_{amm}$$

Introducendo il fatto che la larghezza di fascia è pari a

$$b = \lambda m$$

Dove per i denti dritti  $\lambda = 8 \div 12$  e per i denti elicoidali  $\lambda = 10 \div 30$ .

Allora si può scrivere

$$Q = ym^2\lambda\sigma_{amm}$$

Moltiplicando per la stessa quantità

$$mQ = mym^2\lambda\sigma_{amm}$$

Sostituendo  $Q$  si ottiene

$$\frac{2M}{z} = ym^3\lambda\sigma_{amm}$$

Esplicitando il modulo

$$m = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{2}{zy}}}_k \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{\lambda\sigma_{amm}}}$$

Infine

$$m = k \sqrt[3]{\frac{M}{\lambda \sigma_{amm}}}$$

La  $\sigma_{amm}$  è quella propria del materiale considerando tuttavia un fattore di sicurezza per a 3 o a 5.

L'approccio di Lewis è - come detto - semplificato, quindi da solo non può essere la verifica di resistenza a flessione del dente, però può essere una relazione di primo dimensionamento del dente.

Per cui proprio come si faceva per l'albero in cui il primo diametro si ricavava a partire da una relazione statica di flessione con un'importante fattore di sicurezza sull'ammissibile, questa relazione verrà utilizzata per una prima scelta del modulo del dente utilizzando un opportuno fattore di sicurezza sull'ammissibile statica del materiale della ruota.

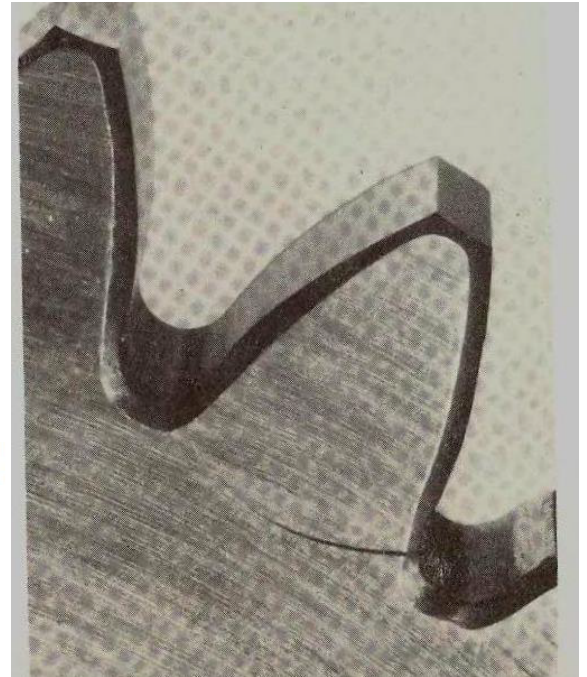
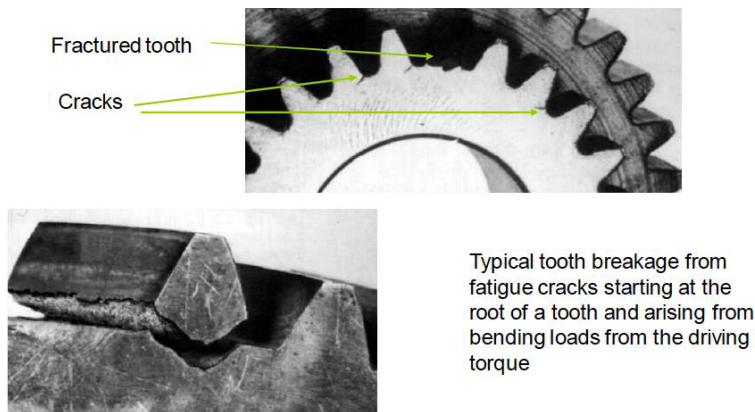
Per la ruota a denti dritti, si individua così un primo modulo della dentiera, per le ruote a denti elicoidali invece quello non è affatto il modulo della dentiera - quello sul piano normale - ma quello sul piano frontale perché la forza utile è lì che giace!

Questa relazione per le ruote dentate elicoidali tira fuori il modulo frontale di funzionamento, dal quale è possibile ricostruire il modulo della dentiera attraverso equazioni già note.

z	$\theta$			z	$\theta$		
	14,5° normale	20° normale	20° stub		14,5° normale	20° normale	20° stub
12	0,926	0,880	0,812	26	0,631	0,606	0,560
13	0,888	0,839	0,780	28	0,610	0,588	0,550
14	0,859	0,803	0,750	30	0,593	0,571	0,534
15	0,827	0,773	0,727	34	0,565	0,541	0,509
16	0,803	0,751	0,702	38	0,539	0,516	0,487
17	0,777	0,730	0,684	43	0,512	0,490	0,465
18	0,752	0,712	0,666	50	0,484	0,461	0,439
19	0,728	0,695	0,649	60	0,453	0,430	0,410
20	0,707	0,679	0,634	75	0,419	0,395	0,377
21	0,691	0,663	0,620	100	0,378	0,355	0,341
22	0,678	0,651	0,608	150	0,328	0,307	0,295
24	0,654	0,629	0,586	300	0,259	0,242	0,232

Figura 2:  $k$  della relazione di Lewis

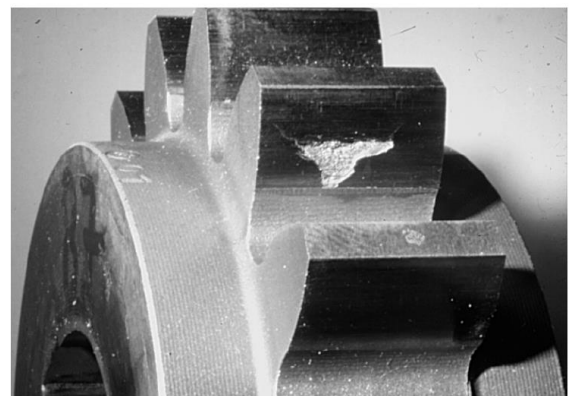
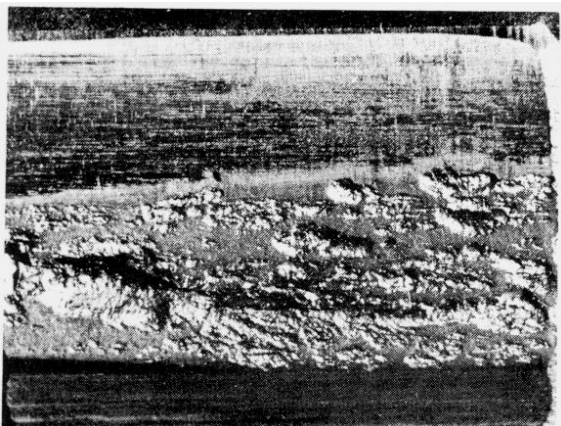
Se i calcoli a resistenza non vengono fatti adeguatamente, queste saranno le conseguenze.



La cricca di pressione a fatica parte proprio dalla base del dente. Tuttavia nell'approccio di Lewis questa variazione di forma non c'è: il calcolo prevede una trave con spessore variabile senza valutare concentrazioni di tensioni teoriche dovute alle variazioni di forma ed è una grande pecca di questo modello.

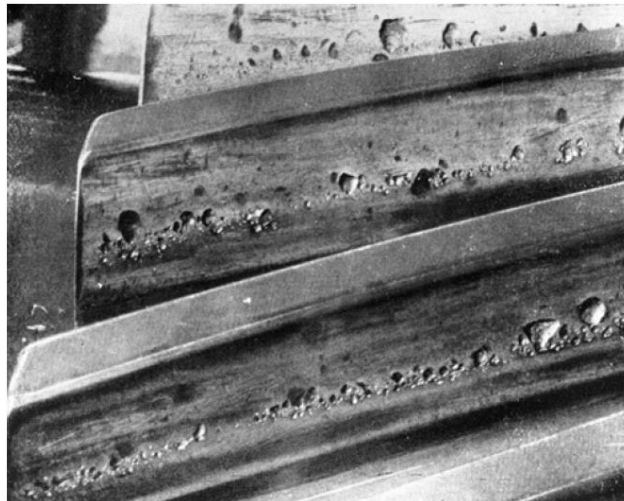
## Resistenza a pitting

Un altro fenomeno di criticità è quello della vaiolatura (pitting). In questo caso non è una rottura del dente a portare il malfunzionamento della ruota dentata ma un danneggiamento della superficie del dente. Qual è la conseguenza? Se si danneggia la superficie del dente si perdono le condizioni di ingranamento corretto secondo l'evolvente, ma al tempo stesso una grande quantità di materiale viene espulsa e finisce nel bagno d'olio interponendosi successivamente tra i denti durante l'ingranamento portando al bloccaggio dell'ingranaggio.



Questa superficie così butterata e ruvida, incoerente, viene generata dall'eccessivo carico di pressione di contatto sulle superfici.

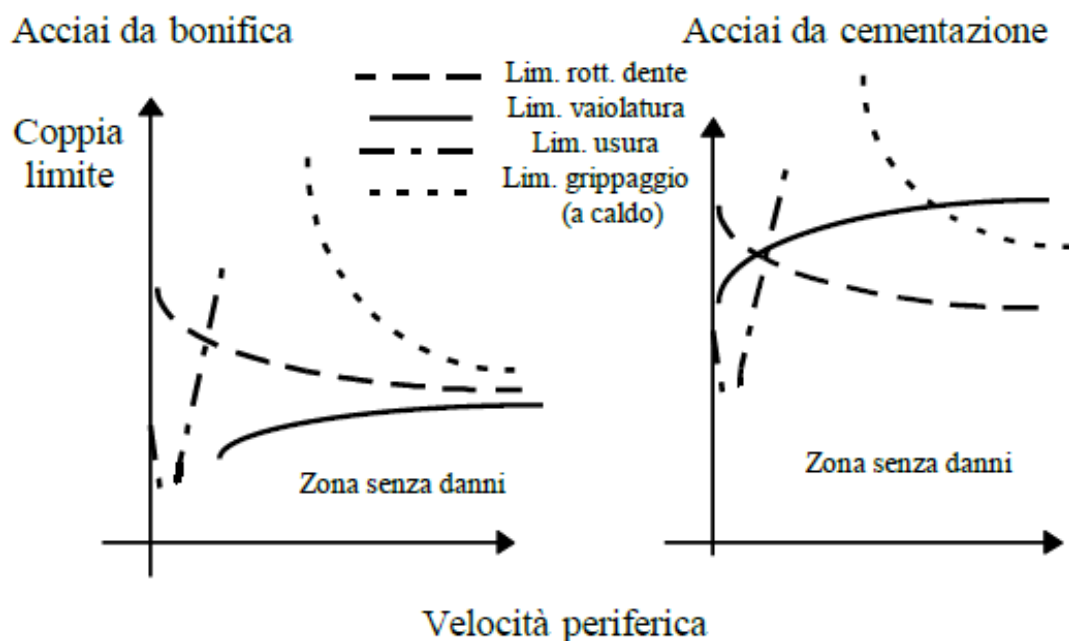
Questa pressione di contatto hertziana tra le superfici genera uno stato tensionale sotto-pelle che porta ad un distacco del materiale a causa proprio del cedimento locale del materiale



Può essere più o meno estesa ma comunque porta al distacco dal fianco del dente di una grande quantità di materiale.

Il fenomeno del pitting si presenta molto più frequentemente sugli acciai da bonifica.

Confrontando la resistenza dei materiali ai vari fenomeni citati finora.



Finché non c'è stato un sufficiente sviluppo dei materiali, la vaiolatura era la maggior causa di rottura delle ruote dentate.

Il passaggio ad acciai da cementazione (acciai legati a basso tenore di carbonio) ha innalzato il limite molto più in alto, permettendo di concentrare gli sforzi sulla resistenza a flessione del dente.

Come quantificare il pitting?

La corretta valutazione dello stato tensionale sul dente è legata alla valutazione della pressione hertziana, questa è un carico per unità di superficie, dettato dalle caratteristiche del materiale, ma anche dalle forme delle superfici in contatto, e quindi dai raggi di curvatura delle due superfici che si toccano.

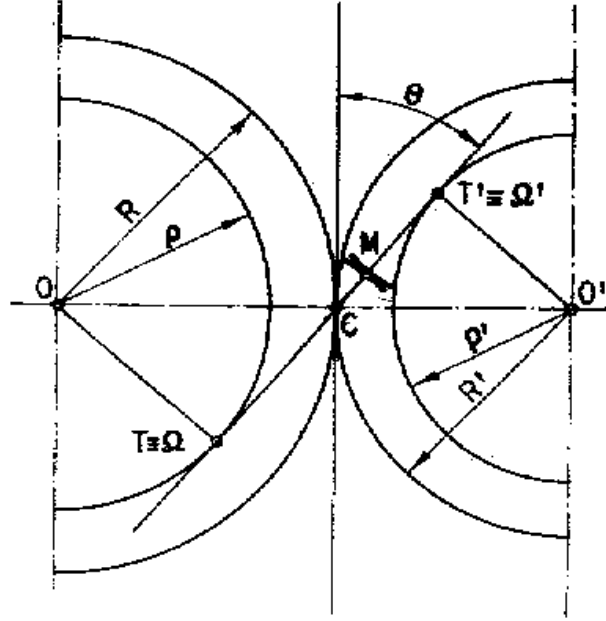


Figura 3:

La tensione hertziana teorica si scrive come

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{Q}{b \cos \theta} \cdot \frac{\rho}{\pi \Delta}}$$

In cui

- $\frac{Q}{b \cos \theta}$  è il carico lineare per unità di larghezza di fascia.
- $\rho$  è il termine geometrico che tiene conto delle curvature principali delle superfici

$$\rho = \frac{1}{MT} + \frac{1}{MT'}$$

- $\Delta$  raccoglie le proprietà elastiche dei materiali

$$\Delta = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

Sostituendo il Poisson tipico degli acciai e considerando lo stesso materiale per ruota e per pignone, si ottiene

$$\sigma_H^{\max} = 0.418 \sqrt{\frac{QE\rho}{b \cos \theta}}$$

Per definire  $\rho$  basta passare dalla geometria

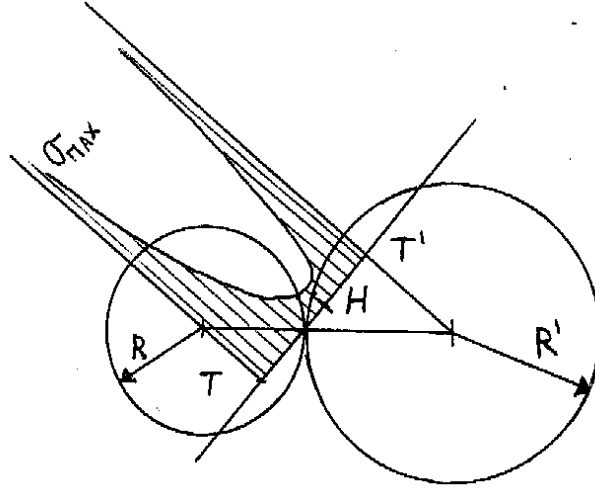
$$\begin{cases} MT = R \sin \theta + \delta \\ MT' = R' \sin \theta - \delta \end{cases}$$

Per cui

$$\rho = \frac{(R + R') \sin \theta}{(R \sin \theta + \delta)(R' \sin \theta + \delta)}$$

Con  $\delta$  ascissa curvilinea che misurava la distanza del punto di contatto da centro di istantanea rotazione.

La pressione hertziana varia così lungo il segmento dei contatti, con un andamento simile.



Riportando il grafico delle tensioni hertziane massime si individua un valore infinito in  $T, T'$  per poi decrescere fino ad un minimo osservato nel punto  $H$ .

### Osservazioni

1. È finita laddove finisce l'evolvente, giammai avvicinarsi alla circonferenza fondamentale.
2. Il punto  $H$  NON è il centro di istantanea rotazione.

Mentre gli strisciamenti specifici sono nulli nel centro di istantanea rotazione, la pressione non è minima nel centro di istantanea rotazione.

Un breve studio di funzione identifica infatti un valore minimo nel punto

$$\delta_{\min} = \frac{1}{2}(R' - R) \sin \theta$$

Ovvero a metà del segmento teorico dei contatti.

Questo valore sostituito all'interno della formulazione di  $\rho$  porta a

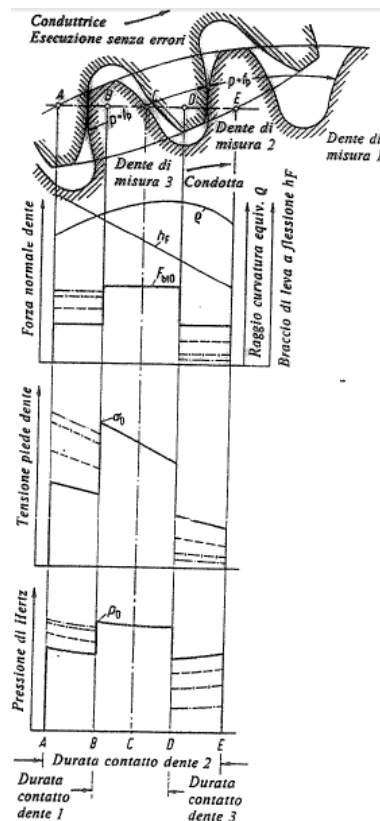
$$\rho_{\min} = \frac{4}{L} \frac{1}{1 - \left( \frac{\delta - \delta_{\min}}{L} \right)^2}$$

Con  $L = (R + R') \sin \theta$ .

Questo valore è a sua volta sostituibile nella funzione  $\sigma_H^{\max}$  ricavando quanto vale la minima pressione hertziana in quel punto.

La tensione hertziana è massima laddove sia massimo  $\rho$  e quindi in  $T, T'$ , allora se si limita il segmento dei contatti al segmento effettivo determinato dalle troncature esterne di ruota e pignone, il valore di  $\sigma$  sarà sì elevato ma non più infinito.

In realtà questa tensione (figura 3) si manifesterebbe quando durante l'ingranamento la coppia dei denti in presa fosse sempre e solo una, ma quando inizia il contatto è almeno una coppia, e allora considerando la distribuzione di forze teorica (figura 1), la funzione hertziana si riduce notevolmente in ingresso e in uscita.



Ne consegue che non sarà l'inizio del contatto il punto con maggior pressione hertziana, ma sarà il punto B in figura caratterizzato da  $\rho_0$ .

Dal punto di vista pratico sussistono due approssimazioni, il fatto che la forza in ingresso non sia la metà (sperimentalmente è di più) e per il fatto che - sperimentalmente - il fenomeno del pitting non si manifesta in B ma esattamente nel centro di istantanea rotazione.

La verifica a pitting si fa perciò in C, a  $\delta = 0$ .

Questo perché le ipotesi di Hertz non sono sempre garantite:

1. Corpi perfettamente elastici: ipotesi reale
2. Superfici asciutte: ipotesi negata dalla lubrificazione

Correggendo le relazioni hertziane considerando anche la lubrificazione la lubrificazione che ne risulta è questa

$$\sigma_H^{\max} = 0.59 \sqrt{\frac{Q}{b} \frac{E}{\sin^2 \theta} \frac{1 + \tau}{R}}$$

Correggendola attraverso la modifica del fattore numerico e l'inserimento del rapporto di trasmissione.

Questa relazione è utile per ricavare a ritroso un'equazione di progetto simile a quella di Lewis

$$Q = cmb$$



Dove

$$c = \frac{\sin 2\theta}{0,696} \frac{\sigma_{max}^2}{e} \frac{z}{1 + \tau}$$

Esplicitando la tensione ammissibile si può così trovare il carico massimo per pitting

<b>Rocchetto</b>	<b>Ruota</b>	$\frac{\sigma_{max}^2}{0,696E}$	$\frac{\sigma_{max}}{kg/mm^2}$
Acciaio forgiato	Ghisa da ingranaggi	0,050	27
Acciaio fuso	Acciaio fuso	0,067	31
Acciaio forgiato	Acciaio fuso	0,084	35
Acciaio forgiato	Acciaio forgiato	0,115	40
Acciaio temperato	Acciaio fuso	0,140	45
Acciaio temperato	Bronzo	0,196	43
Acciaio temperato	Ghisa malleabile	0,224	45
Materiale non metallico	Acciaio	0,280	16
Ghisa malleabile	Ghisa malleabile	0,280	40
Acciaio trattato	Acciaio trattato	0,280	65
Acciaio temperato	Acciaio trattato	0,421	80
Acciaio temperato	Acciaio temperato	0,700	100

Figura 4: Tensioni massime

Evidenziando valori totalmente diversi da quelli visti per la resistenza a flessione.

Notare come i valori massimi dipendano dall'accoppiamento dei due materiali.

La scelta della tensione ammissibile è legata ad evidenze sperimentali o alla durezza Brinell o alle caratteristiche elastiche del materiale, secondo normativa.

Attualmente le Normative ISO prevedono una verifica a flessione e a pitting. Tali normative, pur basandosi sul ragionamento di Lewis, introducono alcune modifiche proposte da Neimann e alcuni coefficienti che prendono in considerazione ulteriori fattori che concorrono alla resistenza.



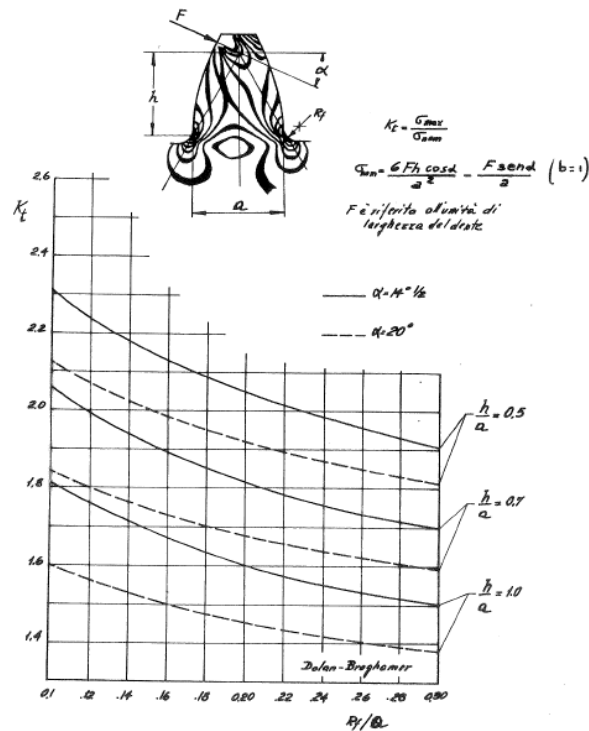
## Effetto d'intaglio alla radice del dente

Primo fra tutti i fattori di correzione, viene introdotto quello di concentrazione di tensione alla base del dente dovuto alle variazioni di forma.

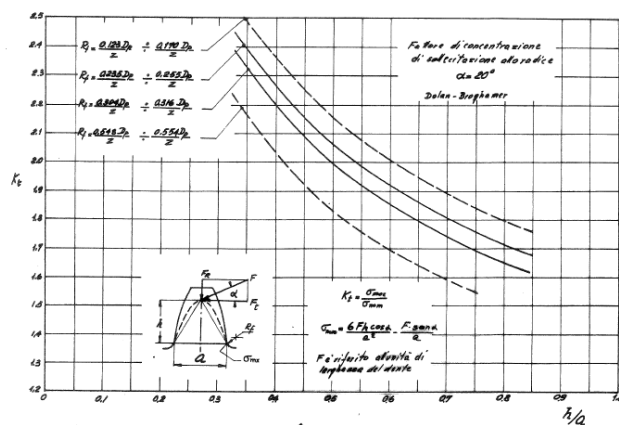
Il valore di tensione di flessione sarà un valore nominale al quale andrà aggiunto il  $K_t$ .

Ragionando su fenomeni di fatica, tale  $K_t$  ha senso di esistere anche su materiali duttili come gli acciai di comune impiego per le ruote dentate.

Questo fattore di concentrazione di tensione viene introdotto attraverso modelli articolati in funzione del raggio di piede.



Ed in funzione del rapporto tra altezza e spessore del dente



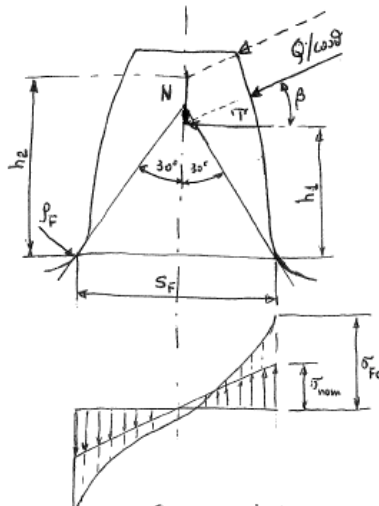
Questi studi vengono raccolti da Neimann che li avvicina alla realtà allontanandosi dalle considerazioni conservative di Lewis.

## Modello di Neimann per la flessione

La prima modifica risiede nell'individuazione della sezione critica, che non avviene più mediante una parabola inscritta all'interno del profilo del dente, ma mediante l'iscrizione nel profilo del dente di un triangolo equilatero, che ne punto di tangenza del profilo individua il punto di massima tensione.

la seconda modifica che introduce riguarda l'applicazione del carico, questo infatti non verrà più posto agente sulla testa del dente, bensì nell'effettiva posizione ultima in cui si ha il contatto singolo.

Considerando l'effettiva inclinazione dell'applicazione della forza.



Questo risulta così un modello più realistico e meno conservativo.

Rispetto a Lewis, secondo Neimann sarà

$$\sigma_N = \frac{6h_1 Q \cos \beta}{bs_F^2 \cos \theta} = \frac{6 \left( \frac{h_1}{m} \right)^2 m Q \cos \beta}{b \left( \frac{s_F}{m} \right)^2 m^2 \cos \theta} = \frac{Q}{mb} Y_F$$

Con  $Y_F$  fattore di forma.

Questa sarà la tensione nominale e avrà un andamento a farfalla perfettamente centrato alla base del dente.

Il valore effettivo di tensione Neimann lo ricava correggendo la tensione nominale attraverso una  $Y_S$ , questa funzione di

$$Y_S = (1, 2 + 0, 13L) q_s^{\frac{1}{1,21 + \frac{2,3}{L}}}$$

$$\text{Dove } L = \frac{s_F}{h_1}, q_s = \frac{s_F}{2\rho_F}$$

Questo approccio implica la conoscenza del punto di contatto reciproco tra i denti, l'altezza  $h_1$  dipende da tutto l'ingranamento: l'ultimo punto di contatto dipende dal cinematismo dell'ingranaggio e quindi dipende dalla ruota coniugata.

Di conseguenza si preferisce avere una relazione che dipenda esclusivamente dalla ruota in esame, se ci si riporta ad applicare la forza sulla testa del dente, questa sarà sempre la stessa indipendentemente dall'accoppiamento

coniugato, e quindi correggere Neimann utilizzando l'altezza del dente  $h_2$  al posto di  $h_1$ .

Naturalmente tale scelta porta con sè un momento flettente maggiore, aggravando il carico ma tornando ad avere un'effettiva stima della resistenza indipendente dal montaggio effettivo.

Considerando il carico in testa si aggiungerà un pedice  $t$  alle ban note grandezze fin'ora introdotte.

$$Y_{Ft} \quad Y_{St} \quad \sigma_{Ft}$$

I tue approcci possono essere legati attraverso un fattore di correzione  $Y_\epsilon$  che dipende dal fattore di ricoprimento (SOLO RELATIVO ALL'EVOLVENTE).

$$Y_\epsilon = 0.25 + \frac{0.75}{\epsilon}$$

E quindi

$$\sigma_{F0} = \frac{Q}{bm} Y_F Y_S = \frac{Q}{bm} Y_{Ft} Y_{St} Y_\epsilon$$

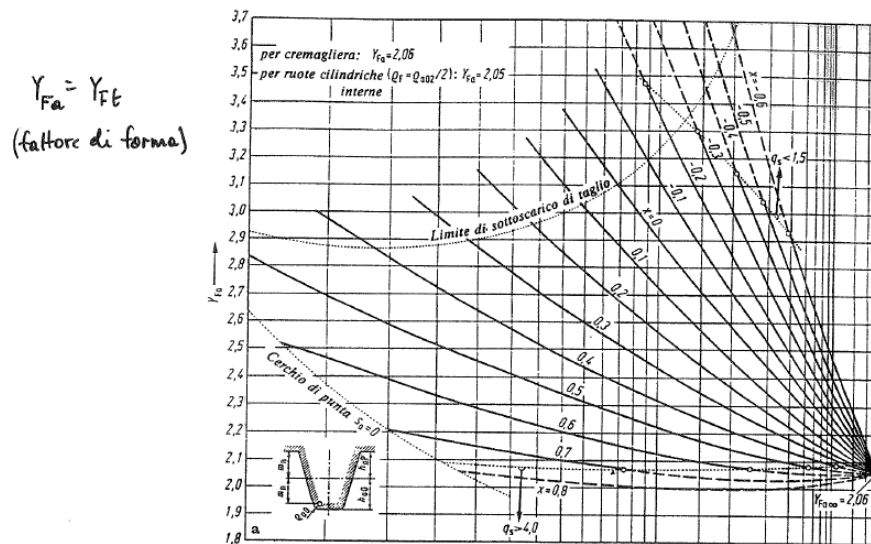
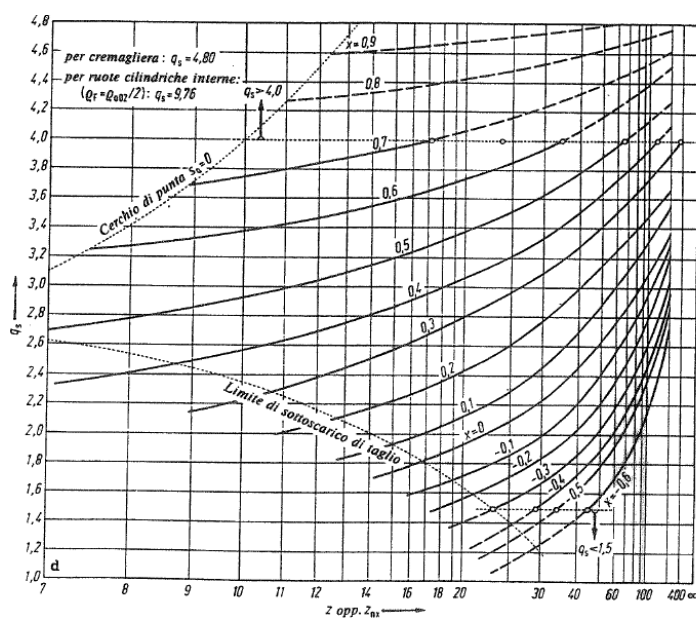
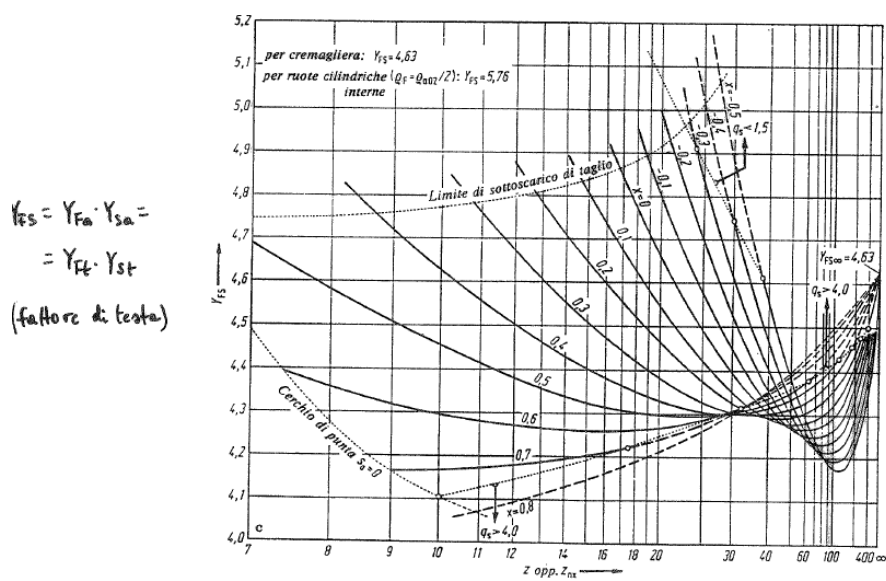
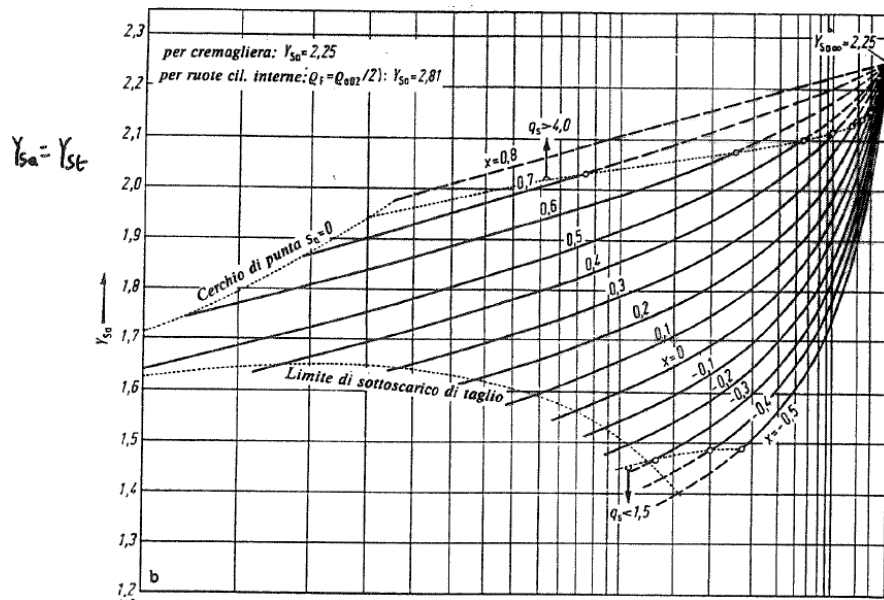


Figura 5: Fattore di forma

In alternativa ai grafici, la normativa fornisce anche delle formule.



fattore d'intaglio  
 $q_s = S_F / 2P_F$

## Verifica a flessione secondo UNI 8862 ISO C

Il picco di tensione è pari alla tensione di Neimann in testa al dente moltiplicato per un fattore che tiene conto dell'eventuale elicoidalità della dentatura.

$$\sigma_{F0} = \frac{Q}{bm} Y_{Ft} Y_{St} Y_{\varepsilon} Y_{\beta}$$

Tale normativa introduce inoltre una serie di fattori maggiorativi dello stato tensionale, dovuto a tutti quegli effetti non presi in considerazione da Neimann

$$\sigma_F = \sigma_{F0} K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha}$$

$K_A$	Fattore di applicazione del carico che tiene conto dell'influenza a livello tensionale di forze secondarie dinamiche esterne agenti per effetto del collegamento dell'ingranaggio con una macchina motrice a monte ed operatrice a valle e dipendente dalle condizioni di funzionamento.
$K_V$	Fattore dinamico che tiene conto dell'influenza di forze secondarie dinamiche derivanti dalla presenza di errori di natura tecnologica (errori di passo) e dalle inevitabili deformabilità caratteristiche degli elementi in gioco (alberi, supporti, etc.)
$K_{F\beta}$	Fattore di distribuzione longitudinale del carico che tiene conto della non uniforme ripartizione del carico stesso lungo la larghezza di fascia.
$K_{F\alpha}$	Fattore di distribuzione trasversale del carico che tiene conto della non uniforme ripartizione del carico stesso in direzione tangenziale (secondo la retta dei contatti).

La valutazione dei coefficiente  $K_i$  avviene secondo un procedimento indicato nella normativa.

Tale valore di sforzo sul dente dev'essere confrontato con la tensione ammissibile.

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim}}{F_{Flim}} Y_{ST} Y_{NT} Y_{\delta relT} Y_{RrelT} Y_X$$

$\sigma_{Flim}$	Tensione massima ammissibile dal materiale al limite di fatica (punto di 'ginocchio' della curva di fatica) determinata in riferimento ad una ruota campione.
$Y_{ST}$	Fattore assoluto di correzione della tensione delle ruote di prova. Esso è da considerarsi sempre pari a 2.
$Y_{NT}$	Fattore di durata. Tale fattore è maggiore di 1 per un numero di cicli previsti di lavoro inferiore a quello corrispondente al 'ginocchio' della curva di fatica relativa alla ruota campione.
$Y_{\delta relT}$	Fattore di sensibilità all'intaglio alla radice del dente relativo alla dentatura di prova.
$Y_{RrelT}$	Fattore relativo alla rugosità superficiale del raccordo di piede del dente relativo a quello della dentatura di prova.
$Y_X$	Fattore di scala.
$S_{Fmin}$	Fattore di sicurezza minimo per il calcolo a flessione. Assume valori compresi tra 1,2 ed 1,5.

Deve ovviamente risultare che la tensione di picco della flessione dev'essere minore di quella ammissibile

$$\sigma_F \leq \sigma_{FP}$$

Tale verifica dovrebbe essere effettuata anche in condizioni statiche, tuttavia la normativa afferma che è sufficiente considerare un numero di cicli inferiori a  $10^3$ , al limite della fatica oligociclica.

## Verifica a pitting secondo UNI 8862 ISO C

L'approccio per la verifica a pitting è simile a quello visto per la flessione, si prende la teoria hertziana e si corregge con una serie di fattori amplificati dalle condizioni dinamiche di ingranamento.

$$\sigma_H = Z_H Z_E Z_\epsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b} \frac{u \pm 1}{u}} \sqrt{K_A K_V K_{H\beta} K_{H\alpha}}$$

Questa tensione dovrà essere minore dell'ammissibile

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim}}{S_{Hmin}} \cdot Z_{NT} Z_L Z_R Z_V Z_W Z_X$$

$Z_H$	Fattore di zona che tiene conto della geometria delle superfici a contatto.
$Z_E$	Fattore di elasticità che tiene conto delle caratteristiche meccaniche dei materiali a contatto.
$Z_\epsilon$	Fattore del rapporto di condotta che tiene conto del valore assunto dal fattore di ricoprimento $\epsilon$ .
$Z_\beta$	Fattore dell'angolo d'elica che tiene conto dell'inclinazione dell'elica nel caso di ruote elicoidali.
$Z_N$	Fattore di durata.
$Z_L$	Fattore di lubrificazione.
$Z_R$	Fattore di rugosità.
$Z_V$	Fattore di velocità.
$Z_W$	Fattore di durezza che tiene conto del rapporto fra le durezza dei materiali delle ruote in mutuo contatto.
$Z_X$	Fattore di scala.
$S_{Hmin}$	Coefficiente di sicurezza minimo, che assume valori dell'ordine di 1,1÷1,3.
$K_{H\alpha}$	Fattore di distribuzione trasversale del carico per la pressione di contatto.
$K_{H\beta}$	Fattore di distribuzione longitudinale del carico per la pressione di contatto.

## Verifica a grippaggio secondo Block

Questa verifica si vedrà per ora solo in termini qualitativi, le relazioni sperimentali secondo Block sono complesse e poco interessanti a fini didattici, tuttavia sono da tenere in considerazione perché influenzano la scelta del lubrificante.

Il grippaggio avviene per condizioni di lubrificazione non ideali, ovvero a causa di elevate temperature locali, istantanee, il lubrificante raggiunge una condizione di temperatura limite andando in sublimazione portando istantaneamente a contatto le superfici delle ruote dentate.

Il contatto istantaneo avviene in punti caratterizzati da strisciamento specifico non nullo e quindi si viene a creare un'adesione tra le parti con fusione, microsaldature e rottura istantanea di queste ultime.

Queste raschiature finiscono anch'esse nel bagno d'olio, portando a materiale interposto durante l'ingranamento e dunque ad un danneggiamento a catena dell'organo.

Secondo la teoria di Block la temperatura che si manifesta nel contatto tra le dentature è legata ad effetti locali.

Sostanzialmente la temperatura che si instaura dall'inizio alla fine del contatto è dovuta ad una temperatura di *bulk* intorno agli  $80^{\circ}\text{C}$  che si instaura a seguito dell'equilibrio termico tra lo smaltimento del calore del lubrificante e la creazione di calore dovuta all'attrito tra le parti, con l'aggiunta di una temperatura di *flash* nel meato di lubrificante.

Quest'ultima è nulla nel centro di istantanea rotazione ed è non nulla nelle zone di contatto dov'è massimo lo scorrimento specifico questo reo di innalzamento delle temperature.

Se la somma

$$T_c = T_b + T_f$$

Raggiunge un limite imposto dalla temperatura critica del lubrificante, allora si avrà sublimazione dello stesso e grippaggio locale.

Valutare la temperatura di *flash* è estremamente importante ma estremamente complesso perché dipende dagli scorrimenti specifici, dalle curvature delle superficie e da fattori prettamente legati alla lubrificazione.

L'obiettivo è quindi quello di tenere la temperatura *flash* al di sotto della differenza tra la temperatura limite del lubrificante e quella *bulk* di progetto.

Alcune relazioni sperimentali traducono la temperatura *flash* in un carico massimo transitante sul pezzo e quindi valutando che il carico sia sempre minore di quello limite che porta alla temperatura *flash*.

Individuata la temperatura *flash* massima, si deve garantire che le caratteristiche del lubrificante siano sempre garantite.

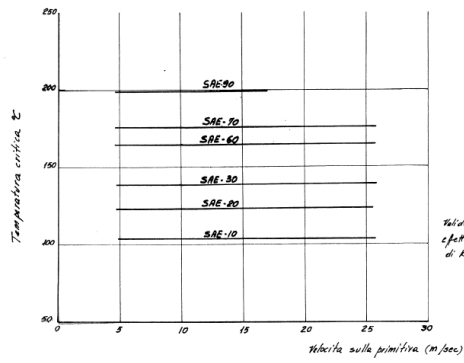
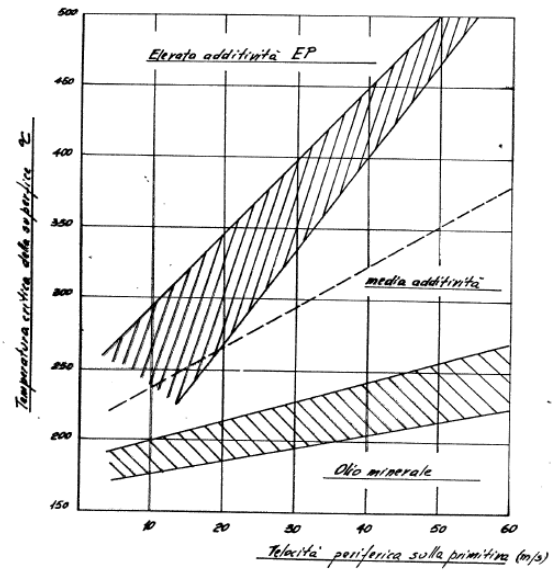


fig. 7-38  
Tabelle per valutazioni  
effettuate con la formula  
di Kelley





# NOTE