

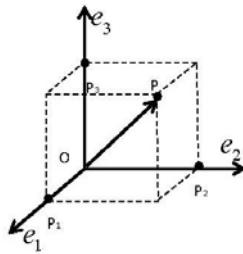
Appunti del corso di
Meccanica dei Solidi
A.A 2021-2022

Andrea Marchegiani mat. 810513

MECCANICA DEI SOLIDI: PARTE 1

Richiami di geometria

- Norma o modulo di $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$



La base utilizzata sarà una base ortonormale destrogiro (e_1, e_2, e_3) tale che:

$$e_1 \cdot e_2 \times e_3 = 1$$

In uno spazio di punti, presi due punti, questi definiscono un vettore:

$$P - O = \vec{V}$$

Si definisce quindi spazio affine euclideo, se presi:

$$(P, Q) \in \xi \Rightarrow \exists \vec{V} : \vec{V} = P - Q$$

- Spazio vettoriale V: insieme di vettori in cui siano comprese le operazioni di combinazione lineare.
 - Spazio Euclideo: spazio vettoriale fisico tangibile formato da vettori a 3 componenti.
 - Base di spazio vettoriale: insieme di vettori linearmente indipendenti tale che le loro combinazioni lineari diano tutti gli elementi di V.
- Data la base (e_1, e_2, e_3) posso definire un vettore in \mathbb{R}^3 come:

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3$$

- Prodotto Scalare: $\vec{V} \cdot \vec{W} = V_1 W_1 + V_2 W_2 + V_3 W_3$

- Prodotto Vettoriale:

$$\vec{V} \times \vec{W} = V_1 W_2 \vec{e}_3 - V_1 W_3 \vec{e}_2 - V_2 W_1 \vec{e}_3 + V_2 W_3 \vec{e}_1 + V_3 W_1 \vec{e}_1 + V_3 W_2 \vec{e}_3$$

NB: per i versori degli assi x, y, z , rispettivamente $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, si ha:

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \text{ oppure } \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \end{cases}$$

Sistemi di forze

Si definisce corpo un insieme aperto di punti dello spazio euclideo affine. Un insieme A si dice aperto se contiene i punti di A:

$$\forall x \in A \exists u_x$$

Un corpo Ω si dice rigido se, per ogni configurazione spaziale del corpo:

$$\forall (P, Q) \in \Omega \Rightarrow \|(P - Q)\| = cost$$

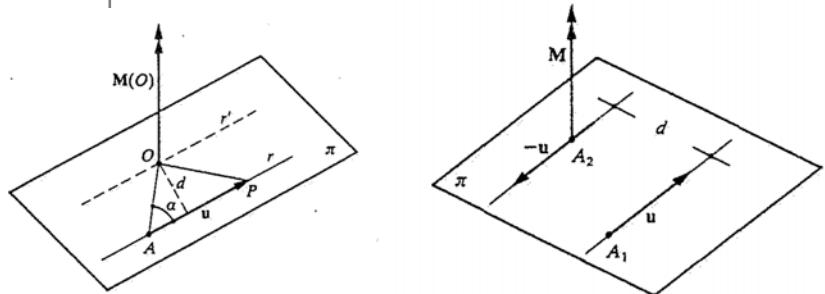
Una forza è una qualunque causa che, se applicata ad un corpo, tende a modificarne lo stato di quiete o di moto o a causarne una deformazione.

- Forza Concentrata: rappresentata da un vettore \vec{F} applicato, funzione della posizione e della velocità del punto, nonché del tempo.
- Momento Polare: momento della forza \vec{F} rispetto al polo O:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = (P - O) \times \vec{F}$$

$$\|\vec{M}_O(\vec{F})\| = |\vec{F}| |(P - O)| \sin \alpha = |\vec{F}| d$$

- Coppia di forze: sistema di due forze \vec{F} uguali e contrarie applicate ai due punti P_1, P_2 .



$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (P_1 - O) \times \vec{F}_1 + (P_2 - O) \times \vec{F}_2 = \\ &= (P_1 - O) \times \vec{F} - (P_2 - O) \times \vec{F} = \\ &= (P_1 - O - P_2 + O) \times \vec{F} = (P_1 - P_2) \times \vec{F} \\ |\vec{M}_O| &= |\vec{F}| d \end{aligned}$$

Una coppia di forze o un momento concentrato è null'altro che un vettore momento applicato in un certo punto Q, ad esempio.

Su un corpo rigido possono agire contemporaneamente forze e momenti concentrati.

Si definisce sistema di forze l'insieme:

$$S = (\vec{F}_i, P_i); (\vec{M}_j, Q_j)$$

$$i = 1 \dots n; j = 1 \dots n$$

Per un sistema di forze si definiscono i descrittori statici di un dominio le informazioni sintetiche attribuibili ad un sistema di forze:

- Risultante: Somma vettoriale dei vettori forza.

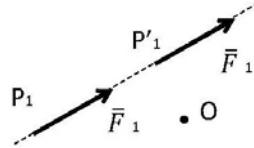
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

- Momento Risultante: somma dei momenti generati dalle forze e dei momenti concentrati rispetto ad un polo arbitrario O.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

Proprietà dei descrittori statici

1. \vec{M}_O e \vec{R} non dipendono dai punti Q in quanto non sono contenuti nelle loro definizioni.
2. \vec{M}_O e \vec{R} non variano spostando una forza lungo la sua retta d'azione.



$$\vec{M}_O = (P_1 - O) \times \vec{F}_1 + \cdots + (P_n - O) \times \vec{F}_n + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

Traslo a questo punto \vec{F}_1 lungo la sua direzione:

$$\vec{M}'_O = (P'_1 - O) \times \vec{F}_1 + \cdots + (P_n - O) \times \vec{F}_n + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

ove $(P'_1 - O) = (P'_1 - P_1 + P_1 - O)$ e dunque:

$$\vec{M}'_O = (P'_1 - P_1) \times \vec{F}_1 + (P_1 - O) \times \vec{F}_1 + \cdots + (P_n - O) \times \vec{F}_n + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

ma $(P'_1 - P_1) \times \vec{F}_1 = 0$: $(P'_1 - P_1) \parallel \vec{F}_1$.

Si giunge così a:

$$\vec{M}'_O = (P_1 - O) \times \vec{F}_1 + \cdots + (P_n - O) \times \vec{F}_n + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = \vec{M}_O$$

$$\vec{M}'_O = \vec{M}_O \quad \blacksquare$$

3. Legge di variazione del polo.

Il momento di un sistema di forze calcolato rispetto ad un polo A arbitrario è legato al momento polare in O come:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + (O - A) \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n (P_i - A) \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

Essendo $(P_i - A) = (P_i - O + O - A)$ allora:

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n (O - A) \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

Ma:

$$\sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = \vec{M}_O$$

E quindi:

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n (O - A) \times \vec{F}_i + \vec{M}_O = (O - A) \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{M}_O$$

$$\vec{M}_A = (O - A) \times \vec{R} + \vec{M}_O \quad \blacksquare$$

4. Equivalenza dei sistemi di forze

Due sistemi di forze S ed S' sono equivalenti se:

$$(a) \vec{R} = \vec{R}'$$

$$(b) \exists O \text{ polo} : \vec{M}_O = \vec{M}'_O$$

Equivalentemente, se S ed S' sono equivalenti, allora $\vec{M}_O = \vec{M}'_O \forall \text{polo}$

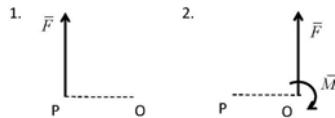
$$\vec{M}_A = (O - A) \times \vec{R} + \vec{M}_O$$

$$\vec{M}'_A = (O - A) \times \vec{R}' + \vec{M}'_O$$

Essendo $\vec{R} = \vec{R}'$, $\vec{M}_O = \vec{M}'_O$, si ha infine:

$$\vec{M}_A = \vec{M}'_A$$

Nel seguente esempio si pongano:



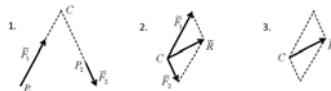
$$\begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 = \vec{F} \\ |\vec{M}_O^1| = |\vec{F}| d \\ |\vec{M}_O^2| = |\vec{M}| \end{cases}$$

E i due sistemi si diranno equivalenti se il momento di trasporto $|\vec{M}|$ è:

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| d$$

5. Teorema del trasporto

Posso spostare una forza perpendicolarmente alla direzione mantenendo il sistema equivalente, aggiungendo un momento di trasporto pari al momento dato dalla forza posizionato nel punto di partenza, rispetto al punto di arrivo.



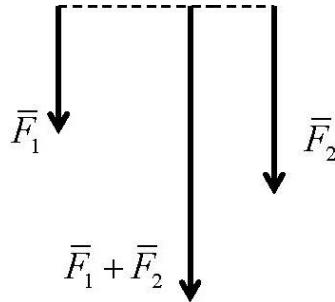
$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 = \vec{R}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{M}'_O = (P_1 - O) \times \vec{F}_1 + (P_2 - O) \times \vec{F}_2$$

Traslando lungo la retta d'azione:

$$\vec{M}_O^1 = (C - O) \times \vec{F}_1 + (C - O) \times \vec{F}_2 = \vec{M}_O^2 = (C - O) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (C - O) \times \vec{R} = \vec{M}_O^3$$

Un sistema di due forze con rette d'azione concorrenti in più punti è equivalente al sistema di una forza uguale alla risultante, applicata nel punto di incontro delle rette d'azione:



$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ |\vec{M}_O| = |\vec{F}_1| d_1 + |\vec{F}_2| d_2 \Rightarrow \frac{d_1 F_1 + d_2 F_2}{F_1 + F_2} \\ |\vec{M}_O| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| d \end{cases}$$

6. Equilibrio di un sistema di forze applicate su un corpo rigido.

Dire che un sistema di forze è in equilibrio equivale a dire che il corpo su cui è applicato il sistema di forze è anch'esso in equilibrio.

Un sistema di forze è in equilibrio se e solo se è equivalente a zero.

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \text{ Equilibrio a Traslazione} \\ \exists O : \vec{M}_O = 0 \text{ Equilibrio a Rotazione} \end{cases}$$

- Condizione necessaria e sufficiente:

$$S \text{ in equilibrio} \Leftrightarrow \vec{M}_A = 0 \forall A$$

Siano O_1, O_2, O_3 tre punti non allineati e per ipotesi si abbia $\vec{M}_{O1} = \vec{M}_{O2} = \vec{M}_{O3}$:

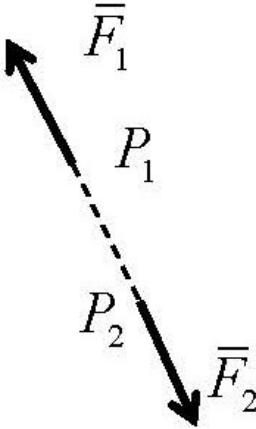
$$\begin{cases} \vec{M}_{O2} = \vec{M}_{O1} + (O_1 - O_2) \times \vec{R} \\ \vec{M}_{O3} = \vec{M}_{O1} + (O_1 - O_3) \times \vec{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (O_1 - O_2) \times \vec{R} = 0 \\ (O_1 - O_3) \times \vec{R} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (O_1 - O_2) \parallel \vec{R} \\ (O_1 - O_3) \parallel \vec{R} \end{cases}$$

E ciò diviene possibile se:

- (a) $(O_1 - O_2) \parallel (O_1 - O_3)$;
- (b) $\vec{R} = 0$

Mentre la prima è negata per ipotesi, la seconda conferma il fatto che il sistema S è in equilibrio. ■

- Un sistema di due forze è in equilibrio se e solo se la risultante è nulla, le forze sono uguali e contrarie ed agiscono sulla stessa retta d'azione.



Se il sistema è in equilibrio allora la risultante delle forze ed il momento devono essere nulle: $\vec{R} = \vec{M}_O = 0$. Posto poi essere le due forze $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, si può scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (P_1 - O) \times \vec{F}_1 + (P_2 - O) \times \vec{F}_2 = \\ &= (P_1 - O - P_2 - O) \times \vec{F}_1 = \\ \vec{M}_O &= (P_1 - P_2) \times \vec{F}_1 = 0 \\ (P_1 - P_2) &\parallel \vec{F}_2 \parallel \vec{F}_1 \blacksquare\end{aligned}$$

- Un sistema di tre forze è in equilibrio se e solo se la risultante è nulla e le forze sono complanari e con rette d'azione concorrenti tra loro [= in pratica non sono parallele tra loro].

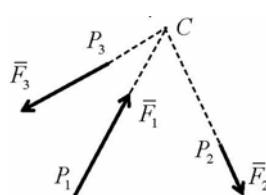


Figura 1

Se il sistema è in equilibrio allora la risultante delle forze ed il momento devono essere nulle: $\vec{R} = \vec{M}_O = 0$.

$$\begin{aligned}\vec{M}_{P_1} &= (P_1 - P_1) \times \vec{F}_1 + (P_2 - P_1) \times \vec{F}_2 + (P_3 - P_1) \times \vec{F}_3 = 0 \\ &= (P_2 - P_1) \times \vec{F}_2 + (P_3 - P_1) \times \vec{F}_3 = 0 \\ &= (P_2 - P_1) \times \vec{F}_2 \cdot (P_3 - P_1) + (P_3 - P_1) \times \vec{F}_3 \cdot (P_3 - P_1) = 0\end{aligned}$$

Moltiplicando perciò per lo stesso termine $(P_3 - P_1)$ ci si accorge che la quantità:

$$(P_3 - P_1) \times \vec{F}_3 \cdot (P_3 - P_1) = 0$$

Per le proprietà del prodotto vettoriale. Ci si accorge inoltre che \vec{F}_2 appartiene al piano contenente i punti di applicazione, come anche \vec{F}_3 , e quindi, rispetto ai poli P_3, P_2 varrà equivalentemente:

$$(P_3 - P_1) \times \vec{F}_3 \cdot (P_2 - P_1) = 0$$

Ipotizzando che \vec{F}_1, \vec{F}_3 concorrono in un punto C, allora il momento rispetto a tale polo sarà:

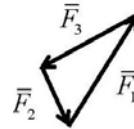
$$(P_2 - C) \times \vec{F}_2 \equiv 0$$

Per l'equilibrio ora imposto, allora:

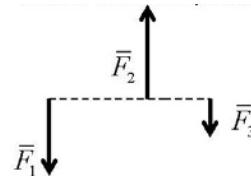
$$(P_2 - C) \parallel \vec{F}_2$$

E le tre rette d'azione concorrono nello stesso punto. ■

Un sistema in equilibrio può essere rappresentato da un poligono di lati pari al valore delle forze e versi uguali a quelli dei vettori posti in maniera tale che si inseguono.



- In caso di rette d'azione parallele, posso avere equilibrio anche se le forze non sono concorrenti in un punto, ma queste devono essere complanari.



$$\begin{aligned} \vec{R} = 0 \quad M_{P_1} &= (P_1 - P_1) \times \vec{F}_1 + (P_2 - P_1) \times \vec{F}_2 + (P_3 - P_1) \times \vec{F}_3 = 0 \\ &= (P_2 - P_1) \times \vec{F}_2 + (P_3 - P_1) \times \vec{F}_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{F}_2 \parallel \vec{F}_3 \Rightarrow \text{Complanari}$$

$$\vec{F}_1 = -(\vec{F}_2 + \vec{F}_3) \Rightarrow \text{Complanari} \quad ■$$

- Un sistema si dice piano se può essere rappresentato su di un piano II.

$$\exists \pi : \begin{cases} P_i \in \pi \Rightarrow F_i \parallel \pi, i = \dots n \\ Q_y \text{ in } \pi \Rightarrow M_y \perp \pi, y = \dots m \end{cases}$$

Ovvero, le forze applicate in punti del piano sono parallele al piano, mentre i momenti sono perpendicolari al piano.

In questo modo le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases}$$

Diventano un sistema di tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

Cinematica del corpo rigido

Si ha un moto di Traslazione Pura quando ad ogni punto appartenente al corpo si può associare il medesimo vettore velocità:

$$\forall P \in \Omega : \vec{v} = cost$$

Una Rotazione Rigida intorno ad un punto fisso è caratterizzata da una velocità angolare ω che può avere una componente per ogni asse nella base principale:

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

La velocità di un punto è data da:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O})$$

E può essere espressa in forma matriciale in cui la matrice $[\omega]$ è antisimmetrica:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il Moto Vario sarà dunque descritto da una traslazione piana e da una rotazione rigida, per cui:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O})$$

Spostamenti virtuali

Quando un corpo rigido è sottoposto ad un generico campo di velocità in un infinitesimo intervallo temporale, compirà un altrettanto infinitesimo spostamento dato da:

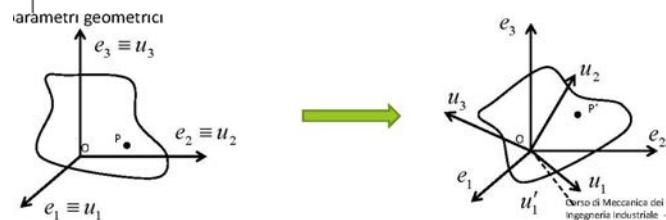
$$ds_P = \vec{v}_P dt + \vec{\omega} dt \times (\vec{P} - \vec{O}) = ds_0 + d\varphi \times (\vec{P} - \vec{O})$$

Definendo in questo modo il campo di spostamenti virtuale:

$$\vec{s}(P) = \vec{s}_0 + \varphi \times (\vec{P} - \vec{O})$$

Angolo di Eulero e Matrice di Rotazione

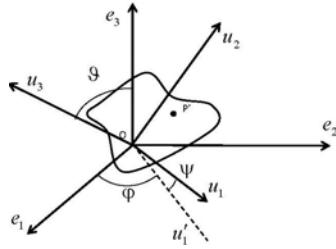
Si vuole determinare le caratteristiche di variazione di configurazione del corpo rigido in moto facendo riferimento a soli parametri geometrici.



considerando un corpo libero di ruotare attorno ad un punto O fisso, la terna di riferimento fissa (e_1, e_2, e_3) e quella solidale al corpo (u_1, u_2, u_3) sono inizialmente coincidenti.

Dopo la rotazione si possono individuare gli angoli Ψ, φ, θ detti Angoli di Eulero, formatisi tra le terne ai quali si da il nome di:

- φ Angolo di Precessione formato da e_1 e la proiezione di u_1 sul piano e_1e_2 ;
- Ψ Angolo di Rotazione Propria tra u_1 e il piano e_1e_2 ;
- θ Angolo di Nutazione tra u_3 ed e_3 .



Il nuovo vettore posizione si ottiene per trasformazione lineare del precedente:

$$(P' - O) = [Q](P - O)$$

Con $[Q] = Q(\Psi, \varphi, \theta)$ matrice di rotazione, ortogonale.

Si ricordi brevemente che una matrice ortogonale è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

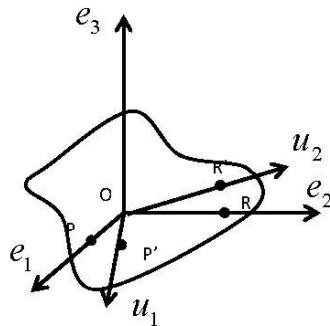
$$\begin{cases} \det[Q] = 1 \\ [Q]^{-1} = [Q]^{-T} \Rightarrow [Q][Q]^T = [Q]^T[Q] = [I] \end{cases}$$

Considerando una rotazione rigida intorno al solo asse e_3 :

$$(P - O) = \begin{bmatrix} x_P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (R - O) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (P' - O) = [Q](P - O) \\ (R' - O) = [Q](R - O) \end{cases} \Rightarrow (P' - O) = \begin{bmatrix} x_P \cos(\varphi) \\ x_P \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (R' - O) = \begin{bmatrix} -y_R \sin(\varphi) \\ y_R \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque in un moto piano si ha:



$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E la matrice $[Q - I]$ sarà:

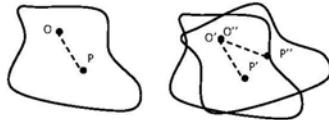
$$Q - I = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) - 1 & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1 \end{bmatrix}$$

In caso di piccole variazione si può porre $\cos(\varphi) \approx \sin(\varphi) \approx 1$ e dunque:

$$Q - I = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ottenendo una matrice antisimmetrica proprio come $[\omega]$.

Ora, se per la traslazione da P a P' vale: $(P' - O') = (P - O)$ e per la rotazione da P' a P'' vale: $(P'' - O') = [Q](P' - O') = [Q](P - O)$, allora, lo spostamento per rototraslazione sarà:



$$\vec{s}_P = (P' - P) = (P'' - O') + (O' - O) + (O - P) = [Q](P - O) + \vec{s}_0 - (P - O)$$

Giungendo alla formula generale del campo degli spostamenti per un corpo rigido:

$$\vec{s}_P = \vec{s}_0 + [Q - I](P - O)$$

Definendo a questo punto:

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{bmatrix} : (Q - I)\vec{r} = \vec{\Phi} \times \vec{r}$$

Si ottiene infine:

$$\vec{s}_P = \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \times (P - O)$$

Con $\vec{s}_0, \vec{\Phi}$ descrittori cinematici.

Lavoro Virtuale

Si consideri un corpo rigido a cui sia associato un sistema di forze, a questi si possono associare due descrittori statici e due descrittori cinematici:

$$(\vec{M}_O; \vec{R}), (\vec{s}_0; \vec{\Phi})$$

I descrittori cinematici possono essere completamente indipendenti da quelli statici, cioè si possono associare al corpo spostamenti non dovuti al sistema di forze su esso applicato.

il Lavoro Virtuale di un sistema di forze è il lavoro che questo sistema compirebbe se fosse sottoposto a spostamenti virtuali associati al corpo - descritti dai descrittori cinematici -, indipendentemente dal sistema di forze su esso applicato.

$$L_V = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot \vec{s}_{P_i}) + \sum_{j=1}^m (\vec{M}_j \cdot \vec{\Phi}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{s}_{P_i} &= \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \times (P_i - O) \Rightarrow L_V = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot [\vec{s}_0 + \vec{\Phi} \times (P_i - O)] + \sum_{j=1}^m (\vec{M}_j \cdot \vec{\Phi}) \\ L_V &= \vec{s}_0 \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{\Phi} \times (P_i - O) + \sum_{j=1}^m (\vec{M}_j \cdot \vec{\Phi}) \\ L_V &= \vec{s}_0 \cdot \vec{R} + \vec{\Phi} \left[\sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j \right] \\ L_V &= \vec{s}_0 \cdot \vec{R} + \vec{\Phi} \cdot \vec{M}_O \end{aligned} \quad (2)$$

NB: il polo intorno a cui si hanno le rotazioni deve essere lo stesso usato per ridurre i momenti delle forze.

Teorema dei Lavori Virtuali

Preso un corpo rigido soggetto ad un sistema di forze, questo è in equilibrio se e solo se $L_V = 0$ per ogni campo di spostamento virtuale rigido.

- Per ipotesi $\vec{R} = \vec{M}_O = 0$, per cui:

$$L_V = \vec{s}_0 \cdot \vec{R} + \vec{\Phi} \cdot \vec{M}_O = 0 \quad \forall (\vec{s}_0, \vec{\Phi})$$

- Per ipotesi $L_V = \vec{s}_0 \cdot \vec{R} + \vec{\Phi} \cdot \vec{M}_O = 0$, allora non può essere che:

$$\vec{R} = \vec{M}_O = 0$$

■

Vincoli

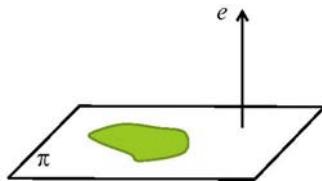
I corpi rigidi nello spazio NON sono liberi di muoversi, ma vengono opportunamente vincolati.

Vincolo: restrizione cinematica alle capacità di spostamento del corpo.

Un vincolo è una qualsiasi limitazione della mobilità di un corpo nello spazio, una limitazione della velocità o della posizione del corpo, una restrizione della sua cinematica in termini di spostamenti o atti di spostamento.

Un vincolo è applicato in un punto ed è esprimibile come una funzione di posizione, velocità e tempo:

$$\varphi = \varphi(P, \dot{P}, t)$$



Esempio: il corpo giace sul piano, per cui l'unico vincolo alla sua mobilità è traducibile nell'impossibilità di andare al di fuori del piano.

Gli spostamenti consentiti sono:

$$\begin{cases} \vec{s} \perp \vec{e} \\ \vec{s} \parallel \vec{e} \times \vec{s} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{s}_P \times \vec{e} \geq 0$$

Classificazione dei Vincoli

- **UNILATERALI:** vengono vincolati gli spostamenti in un solo verso e sono espressi da una disequazione $\varphi \geq 0$;
- **BILATERALI:** vengono vincolati gli spostamenti in entrambi i versi esprimendo un'equazione $\varphi = 0$;
- **SCLERONOMI:** non hanno una dipendenza esplicita dal tempo $\varphi = \varphi(P, \dot{P})$;
- **REONOMI:** hanno una dipendenza esplicita dal tempo $\varphi = \varphi(P, \dot{P}, t)$;
- **OLONOMI:** non dipendono esplicitamente dalla velocità $\varphi = \varphi(P, t)$;
- **ANOLONOMI:** dipendono esplicitamente dalla velocità $\varphi = \varphi(P, \dot{P}, t)$;
- **PERFETTI:** sono esprimibili attraverso un'equazione omogenea $\varphi \geq 0$;
- **IMPERFETTI:** l'equazione non è omogenea, siamo in presenza di cedimenti $\varphi \geq \delta$

Questa trattazione vedrà l'uso di vincoli BILATERALI, CLERONOMI, OLONOMI, PERFETTI / IMPERFETTI, per cui:

$$\varphi(P) = 0, \delta$$

Reazione Vincolare

Ad un vincolo corrisponde sempre una reazione vincolare, ovvero una forza di opposizione che tende a trasgredire la condizione di vincolo.

Ad ogni vincolo si associa così una forza e/o un momento concentrati nel punto di applicazione del vincolo.

Vincolo liscio: la reazione vincolare è sempre diretta lungo la direzione della componente vincolata.

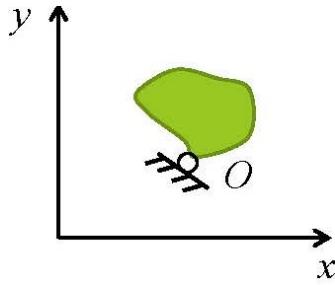
Il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è sempre nullo per qualsiasi spostamento virtuale compatibile col vincolo.

- **Molteplicità Cinematica (MC):** numero di equazioni scalari indipendenti che descrivono la restrizione cinematica del vincolo;
- **Molteplicità Statica (MS):** numero di equazioni scalari indipendenti che descrivono le condizioni di vincolo.

Vincoli nel Piano

I vincoli sono da considerarsi puntiformi.

1. Cerniera



Blocca le traslazioni del corpo ma permette le rotazioni intorno al punto di applicazione del vincolo.

$$\vec{s}_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{0x} = 0 \\ s_{0y} = 0 \end{cases} \Rightarrow MC = 2$$

Applico le ipotesi di vincolo liscio:

$$L_V = 0 \forall \vec{s}_P = \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \times (P - O)$$

$$L_V = \vec{s}_0 \cdot \vec{R} + \vec{\Phi} \cdot \vec{M}_O = R_x s_{0x} + R_y s_{0y} + \varphi_z M_z = 0$$

Valendo:

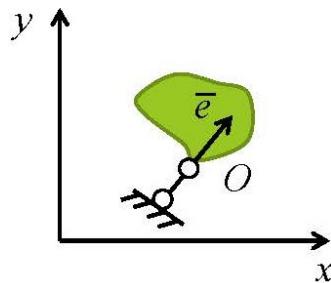
$$\vec{s}_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{0x} = 0 \\ s_{0y} = 0 \end{cases} \Rightarrow L_V = \varphi_z M_z = 0 \Rightarrow M_z = 0$$

La cerniera non è in grado di fornire un momento resistente, può soltanto applicare una forza in una qualunque direzione in modo tale che le sue componenti rimangano tra loro indipendenti.

$$\vec{s}_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{0x} = 0 \\ s_{0y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \{0\} \Rightarrow S = \{\lambda_1 \hat{i} + \lambda_2 \hat{j}; 0\}$$

Trovando così due reazioni vincolari λ_1, λ_2 da dover imporre perciò $MS = 2$

2. Pendolo



Il pendolo è caratterizzato da una direzione espressa dal versore $\vec{e} = (e_x, e_y)$. Gli spostamenti paralleli ad \vec{e} sono impediti mentre sono permesse le traslazioni perpendicolari e le rotazioni intorno ad O.

$$\vec{s}_0 \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow s_{0x} e_x + s_{0y} e_y = 0 \Rightarrow MC = 1$$

$$\begin{bmatrix} e_x & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$L_V = \vec{R} \cdot \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \cdot \vec{M}_O = R_x s_{0x} + R_y s_{0y} + \varphi_z M_z = 0$$

Scegliendo lo spostamento nullo:

$$L_V = \varphi_z M_z = 0 \Rightarrow M_z = 0$$

E il vincolo non applica momenti concentrati. Con la conoscenza di ciò si scelga di applicare ora lo spostamento NON nullo, allora:

$$L_V = \vec{R} \cdot \vec{s}_0 = 0$$

$$\begin{cases} \vec{R} \perp \vec{s}_0 \\ \vec{s}_0 \perp \vec{e} \end{cases} \Rightarrow \vec{R} \parallel \vec{e} \Rightarrow R \in L(e)$$

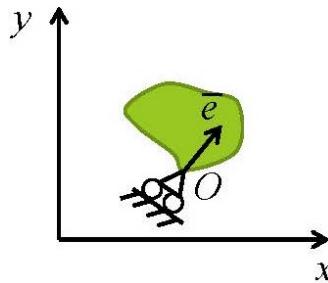
E la reazione vincolare viene in questo modo a far parte del sottospazio generato da tutte le possibili combinazioni lineari di \vec{e} .

Perciò nel polo O si avrà:

$$S = \left\{ \lambda_1 (e_x \hat{i} + e_y \hat{j}); 0 \right\}$$

Una reazione vincolare λ_1 da imporre e dunque $MS = 1$

3. Carrello



Il carrello blocca gli spostamenti in direzione parallela ad $\vec{e} = (e_x, e_y)$.

Sotto le ipotesi si spostamenti virtuali ho le stesse condizioni del pendolo.

$$\vec{s}_0 \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow s_{0x} e_x + s_{0y} e_y = 0 \Rightarrow MC = 1$$

$$\begin{bmatrix} e_x & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$L_V = \vec{R} \cdot \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \cdot \vec{M}_O = R_x s_{0x} + R_y s_{0y} + \varphi_z M_z = 0$$

Scegliendo lo spostamento nullo:

$$L_V = \varphi_z M_z = 0 \Rightarrow M_z = 0$$

E il vincolo - anche in questo caso - non applica momenti concentrati. Con la conoscenza di ciò si scelga di applicare ora lo spostamento NON nullo, allora:

$$L_V = \vec{R} \cdot \vec{s}_0 = 0$$

$$\begin{cases} \vec{R} \perp \vec{s}_0 \\ \vec{s}_0 \perp \vec{e} \end{cases} \Rightarrow \vec{R} \parallel \vec{e} \Rightarrow R \in L(e)$$

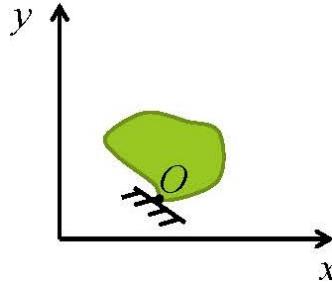
E la reazione vincolare viene in questo modo a far parte del sottospazio generato da tutte le possibili combinazioni lineari di \vec{e} .

Perciò nel polo O si avrà:

$$S = \left\{ \lambda_1(e_x \hat{i} + e_y \hat{j}); 0 \right\}$$

Una reazione vincolare λ_1 da imporre e dunque $MS = 1$

4. Incastro



L'incastro blocca tutte le possibilità di spostamento.

$$\begin{cases} \vec{s}_0 = 0 \\ \vec{\Phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{0x} = 0 \\ s_{0y} = 0 \\ \varphi_z = 0 \end{cases} \Rightarrow MC = 3$$

Ed il vincolo si risolve in 3 equazioni scalari.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \{0\}$$

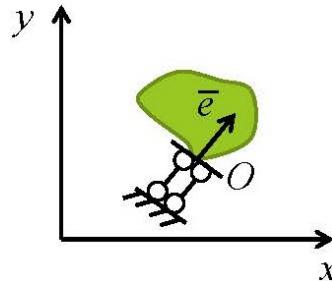
$$L_V = \vec{R} \cdot \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \cdot \vec{M}_O = 0 \text{ ma } \vec{s}_0 = 0 = \vec{\Phi} \Rightarrow L_V = 0 \forall \vec{R}, \vec{M}_O$$

L'incastro fornisce una direzione qualunque ed una coppia ortogonale al piano:

$$S = \left\{ \lambda_1 \hat{i} + \lambda_2 \hat{j}; \lambda_3 \hat{k} \right\}$$

Tre reazioni vincolare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ da imporre e dunque $MS = 3$

5. Doppio Pendolo



O pattino, impedisce le rotazioni e le traslazioni in direzione parallela ad \vec{e} .

$$\begin{cases} \vec{s}_0 \cdot \vec{e} = 0 \\ \vec{\Phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{0x} e_x + s_{0y} e_y = 0 \\ \varphi_z = 0 \end{cases} \Rightarrow MC = 2$$

$$\begin{bmatrix} e_x & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$L_V = \vec{R} \cdot \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \cdot \vec{M}_O = 0$$

Scegliendo lo spostamento nullo:

$$L_V = \varphi_z M_z = 0 \Rightarrow M_z = 0$$

Ma so che $\varphi_z = 0 \Rightarrow M_z \neq 0$.

Perciò, da questo risultato, imponendo uno spostamento NON nullo si ottiene:

$$L_V = \vec{R} \cdot \vec{s}_0 = R_x s_{0x} + R_y s_{0y} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{R} \perp \vec{s}_0 \\ \vec{s}_0 \perp \vec{e} \end{cases} \Rightarrow \vec{R} \parallel \vec{e} \Rightarrow R \in L(e)$$

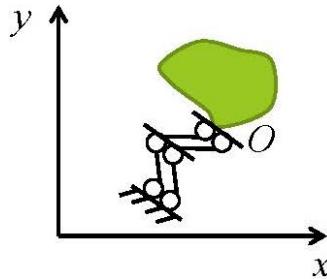
E la reazione vincolare viene in questo modo a far parte del sottospazio generato da tutte le possibili combinazioni lineari di \vec{e} .

Perciò nel polo O si avrà:

$$S = \left\{ \lambda_1 (e_x \hat{i} + e_y \hat{j}); \lambda_2 \hat{k} \right\}$$

Due reazioni vincolari λ_1, λ_2 da imporre e dunque $MS = 2$

6. Doppio Doppio Pendolo



Il doppio doppio pendolo impedisce le rotazioni, ma lascia libere tutte le traslazioni.

$$\vec{\Phi} = 0 \Rightarrow \varphi_z = 0 \Rightarrow MC = 1$$

Il sistema di reazioni può anche essere visto come il duale degli spostamenti bloccati. Il duale di un descrittore cinematico è l'elemento che gli fa compiere lavoro:

$$\begin{cases} \vec{s} \Leftrightarrow \vec{F} \\ \vec{M} \Leftrightarrow \vec{\Phi} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ 0; \lambda_1 \hat{k} \right\}$$

Una reazione vincolare λ_1 da imporre e dunque $MS = 1$.

Il doppio doppio pendolo agisce con un momento concentrato.

Molteplicità Cinematica e Statica

La restrizione cinematica può essere caratterizzata da una matrice di compatibilità M tale che:

$$[M] \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Con } \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} \in \ker(M).$$

Il $\ker(A)$ è il nucleo della matrice, l'insieme dei punti che vengono annullati dalla specifica funzione:

$$\ker(A) = \{x : Ax = 0\}$$

Si può a questo punto ridefinire la molteplicità cinematica MC come il minimo delle righe indipendenti di M:

$$\dim \{L[\text{righe}(M)]\} = rk[M] = MC$$

Poiché il lavoro virtuale è nullo per ogni spostamento virtuale ammissibile:

$$L_V = \vec{R} \cdot \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \cdot \vec{M}_O = R_x s_{0x} + R_y s_{0y} + \varphi_z M_z = 0$$

Si può riscrivere:

$$\begin{bmatrix} R_x & R_y & M_{0z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poiché per definizione annullano M:

$$\begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} \in \ker(M)$$

Allora:

$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ M_{0z} \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ \varphi_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ M_{0z} \end{bmatrix} \in [\ker(M)]^\perp$$

Dove:

$$[\ker(M)]^\perp = Im[A^T] = L[\text{colonne}[A^T]] = L[\text{righe}(A)]$$

Dunque:

$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ M_{0z} \end{bmatrix} \in L[\text{righe}[M]]$$

Allora, infine:

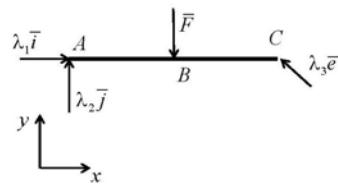
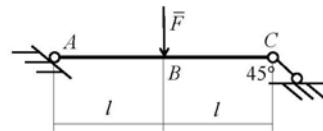
$$MS = \dim \{L[\text{righe}(M)]\} = rk[M] = MC$$

Strutture Piane

Si definisce struttura un insieme di corpi rigidi vincolati a terra. Si definiscono:

- t : numero di corpi;
- s : numero complessivo di vincoli semplici. Ogni vincolo moltiplicato per la sua molteplicità.

Esempio:



$$t = 1; \begin{cases} A \rightarrow s = 2 \\ B \rightarrow s = 1 \end{cases} \Rightarrow s = 3$$

Volendo determinare la condizione di equilibrio del sistema di forze, si dovranno includere anche le reazioni vincolari.

- Cerniera

$$\vec{R} = \lambda_1 \hat{i} + \lambda_2 \hat{j}; \vec{M}_O = 0$$

- Pendolo

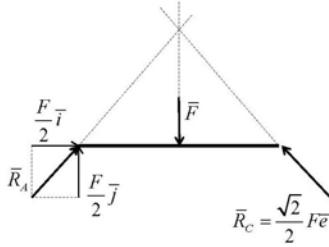
$$\vec{R} = \lambda_3 (e_x \hat{i} + e_y \hat{j})$$

Considerando il modulo unitario:

$$\vec{R} = \lambda_3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \right)$$

Condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_O = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ (l\hat{i}) \times (-F\hat{j}) + 2l\hat{i} \times [\lambda_3(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j})] = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ -Fl + \sqrt{2}l\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{F}{2} \\ \lambda_2 = \frac{F}{2} \\ \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}F \end{cases} \end{aligned}$$



Un sistema di tre forze in equilibrio deve essere complanare e con rette d'azione concorrenti in un punto: *CVD*.

Se è definibile una condizione di equilibrio allora il sistema si dice compatibile. Il problema della statica consiste nel trovare le reazioni vincolari incognite che consentono l'equilibrio della struttura; questo può essere sintetizzato come:

$$[E] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \vec{f} = 0$$

$$[E]_{m \times n} \lambda_n + f_m = 0$$

Con m numero di equazioni ed $n = s$ numero di incognite, numero di vincoli semplici.

Se il sistema ammette soluzioni allora si dice compatibile.

Si possono tuttavia individuare dei criteri di compatibilità che permettano di stabilire se un sistema è compatibile senza bisogno di risolverlo.

Criteri di compatibilità

Dato il sistema lineare:

$$AX = C$$

Il sistema è compatibile se e solo se:

$$C \in \text{Im}[AX] \Leftrightarrow C \in L[\text{colonne}(A)]$$

Si ponga con A la matrice incompleta e con A' la matrice completa, ottenuta con l'aggiunta dei termini noti in B .

Il teorema di Rouchè - Capelli afferma che un sistema lineare è compatibile se e solo se:

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A')$$

Il primo teorema dell'unicità afferma che un sistema è compatibile e la soluzione è unica se e solo se:

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A') = n$$

Con n grado della matrice quadrata.

Il secondo teorema dell'unicità afferma che per un sistema lineare compatibile, se $n =$ numero delle incognite e $p = \text{rk}(A)$:

$$\exists \infty^{n-p} \text{ soluzioni}$$

Ove, inoltre:

$$n - p = \dim [\text{ker}(A)]$$

Iperstaticità

Si definisce iperstaticità o grado di iperstaticità della struttura:

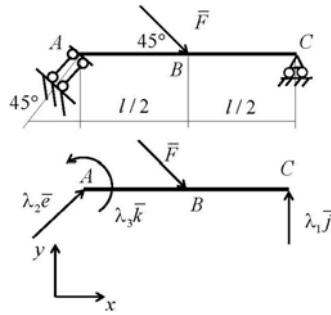
$$i = \dim[\ker(E)] = n - p$$

Ed è un parametro che NON dipende dai carichi ma è una caratteristica della struttura. Tale struttura può quindi essere così analizzata a prescindere da come viene caricata.

- $i = 0 \Rightarrow \exists! S$ la soluzione d'equilibrio è unica;
- $i \neq 0 \Rightarrow \exists \infty^i$ soluzioni d'equilibrio.

In generale, se un sistema è compatibile, questo ammette ∞^i soluzioni. L'iperstaticità rappresenta il numero di vincoli superflui, di quei vincoli cioè che non sono necessari a bloccare la struttura e possono essere eliminati senza che la possibilità di spostamento della stessa possa variare.

Esempio:



$$\begin{cases} \vec{R} = \lambda_1 \hat{j} + \lambda_2 \hat{e} + \vec{F} = 0 \\ \vec{M}_A = \lambda_3 \hat{k} + \bar{B}A \times \vec{F} + \bar{C}A \times \lambda_1 \hat{j} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = \lambda_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + F \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ R_y = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ M_A = \lambda_3 - F \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{l}{2} + \lambda_1 l = 0 \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ l & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -F \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -Fl \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

Si nota subito che il sistema 3×3 ottenuto, avendo tutte le righe e le colonne diverse (essendo linearmente indipendenti) presenta rango massimo uguale al numero delle incognite, pertanto il sistema è compatibile con un'unica soluzione:

$$p = rk(A) = n = 3 \Rightarrow i = n - p = 0 \Rightarrow \exists! S$$

NOTE

MECCANICA DEI SOLIDI: PARTE 2

Vincoli interni nel piano

I vincoli che agiscono tra un corpo e un riferimento assoluto solidale a terra, sono detti vincoli esterni.

Quando un vincolo agisce sullo spostamento relativo tra due corpi rigidi è detto vincolo interno.

Spostamenti relativi

Dati due corpi rigidi, per ciascuno di essi si può definire un campo di spostamenti virtuali.

$$\begin{aligned}\vec{s}_P' &= \vec{s}_0' + \vec{\Phi}' \times (P - O) \\ \vec{s}_P'' &= \vec{s}_0'' + \vec{\Phi}'' \times (P - O)\end{aligned}$$

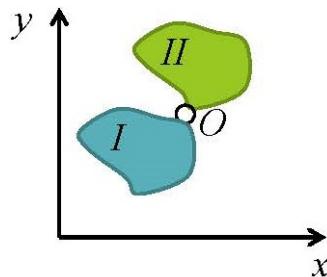
È bene notare che O e P NON appartengono ai corpi specifici, ma giacciono sul piano mobile infinitamente esteso e solidale al campo in esame.

Si definisce quindi lo spostamento relativo del corpo *II* rispetto al corpo *I*:

$$\vec{s}_P^{\prime\prime\prime} = \vec{s}_P'' - \vec{s}_P' = \vec{s}_0'' - \vec{s}_0' + (\vec{\Phi}'' - \vec{\Phi}') \times (P - O) = \vec{s}_0^{\prime\prime\prime} + \vec{\Phi}^{\prime\prime\prime} \times (P - O)$$

I vincoli interni sono situati tra due corpi e ne limitano lo spostamento relativo. Un vincolo interno lo si pone sempre essere un vincolo puntiforme condiviso tra due corpi.

1. Cerniera Interna



Sono impeditate tutte le traslazioni relative, mentre non si oppone alle rotazioni relative.

$$\vec{s}_0^{\prime\prime\prime} = 0 \Rightarrow \vec{s}_0'' - \vec{s}_0' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{s}_0'' - \vec{s}_0' = 0 \\ \vec{M}_O = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x}' \\ s_{0y}' \\ \varphi_z' \\ s_{0x}'' \\ s_{0y}'' \\ \varphi_z'' \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{cases} s_{0x}' = s_{0x}'' \\ s_{0y}' = s_{0y}'' \end{cases} \Rightarrow MC = 2$$

Per ottenere le equazioni statiche impongo il vincolo liscio:

$$L_V = 0 \quad \forall \vec{s}_P = 0 : \vec{s}_0^{\prime\prime\prime} = 0$$

E allora:

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' + \vec{\Phi}'' \cdot \vec{M}_O'' = 0$$

Applicando gli spostamenti compatibili $\vec{s}_0'' = \vec{s}_0' = 0$ si ottiene:

$$L_V = \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' + \vec{\Phi}'' \cdot \vec{M}_O'' = 0$$

Imponendo $\vec{\Phi}' = 0$ ottengo $L_V = \vec{\Phi}'' \cdot \vec{M}_O'' = 0 \Rightarrow \vec{M}_O'' = 0$.

Si può riscrivere a questo punto il lavoro virtuale come:

$$L_V = \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' = 0$$

Imponendo di nuovo gli spostamenti compatibili ottengo $L_V = \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' = 0 \Rightarrow \vec{M}_O' = 0$.

Il lavoro virtuale di una cerniera è dunque:

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' = 0 \Rightarrow (\vec{R}' + \vec{R}'') \cdot \vec{s}_0'' = 0 \Rightarrow \vec{R}' = -\vec{R}''$$

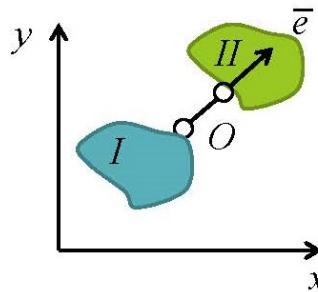
In pieno accordo al principio di azione e reazione.

Infine

$$\left\{ R_1 = (\lambda_1 \hat{i} + \lambda_2 \hat{j}; 0); R_2 = (-\lambda_1 \hat{i} - \lambda_2 \hat{j}; 0); M = 0 \right\}$$

Dovendo imporre due reazioni vincolari λ_1, λ_2 , la molteplicità statica sarà $MS = 2$.

2. Pendolo Interno



Sono impeditte le traslazioni relative in direzione \vec{e} , mentre sono libere quelle ortogonali ad \vec{e} ; sono libere anche le rotazioni relative.

$$\vec{s}_0'' \cdot \vec{e} - \vec{s}_0' \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{s}_0'' \cdot \vec{e} = \vec{s}_0' \cdot \vec{e}$$

$$\begin{bmatrix} e_x & e_y & 0 & -e_x & -e_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x}' \\ s_{0y}' \\ \varphi_z' \\ s_{0x}'' \\ s_{0y}'' \\ \varphi_z'' \end{bmatrix} = \{0\} \Rightarrow MC = 1$$

Le reazioni vincolari saranno quelle duali agli spostamenti vincolati:

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' + \vec{\Phi}'' \cdot \vec{M}_O'' = 0$$

Possibili spostamenti compatibili: $\vec{s}_0' = \vec{s}_0'' = \vec{\Phi}' = 0$

$$L_V = \vec{\Phi}'' \cdot \vec{M}_O'' = 0 \Rightarrow \vec{M}_O'' = 0$$

Allora:

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' = 0$$

Possibili spostamenti compatibili: $\vec{s}_0' = \vec{s}_0'' = 0$

$$L_V = \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' = 0 \Rightarrow \vec{M}_O' = 0$$

Il lavoro virtuale per un pendolo interno è:

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' = 0$$

Se si avesse lo spostamento $\vec{s}_0'' = 0$:

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}' \perp \vec{s}_0' \\ \vec{s}_0' \perp \vec{e} \end{cases} \Rightarrow \vec{R}' \parallel \vec{e}$$

Oppure se si avesse lo spostamento $\vec{s}_0' = 0$:

$$L_V = \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}'' \perp \vec{s}_0'' \\ \vec{s}_0'' \perp \vec{e} \end{cases} \Rightarrow \vec{R}'' \parallel \vec{e}$$

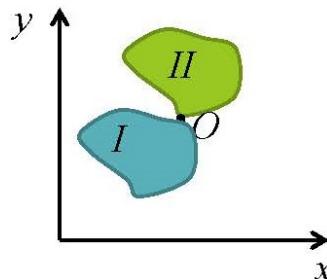
Perciò:

$$\begin{cases} \vec{s}_0'' \cdot \vec{e} = \vec{s}_0' \cdot \vec{e} \\ \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' = -\vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' \Rightarrow \vec{R}' = -\vec{R}''$$

$$\begin{cases} \vec{R}' = (\lambda_1 \vec{e}; 0) \\ \vec{R}'' = (-\lambda_1 \vec{e}; 0) \\ \vec{M}_O' = \vec{M}_O'' = 0 \end{cases}$$

Con una sola reazione vincolare λ_1 da imporre, $MS = 1$.

3. Incastro Interno



Sono impediti tutte le traslazioni e le rotazioni relative.

$$\begin{cases} \vec{s}_0''' = 0 \\ \vec{\Phi}''' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{s}_0' = \vec{s}_0'' \\ \vec{\Phi}' = \vec{\Phi}'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{0x}' = s_{0x}'' \\ s_{0y}' = s_{0y}'' \\ \varphi_z' = \varphi_z'' \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x}' \\ s_{0y}' \\ \varphi_z' \\ s_{0x}'' \\ s_{0y}'' \\ \varphi_z'' \end{bmatrix} = \{0\} \Rightarrow MC = 3$$

Il vincolo inibisce qualsiasi rotazione e traslazione, reagirà con un momento qualunque ed una forza qualsiasi.

Per il principio di azione e reazione varrà:

$$\vec{R}' = -\vec{R}''; \vec{M}_O' = -\vec{M}_O''$$

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' + \vec{\Phi}'' \cdot \vec{M}_O'' = 0$$

I possibili spostamenti compatibili sono:

$$\vec{s}_0'' = \vec{s}_0' = \vec{\Phi}' = \vec{\Phi}'' = 0$$

è dunque verificata la condizione per cui, per un vincolo liscio, si deve avere:

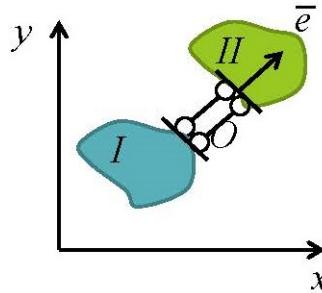
$$L_V = 0$$

Pertanto $\forall \vec{R}', \vec{R}''; \vec{M}_O', \vec{M}_O''$ varrà:

$$\begin{cases} \vec{R}' = (\lambda_1 \hat{i} + \lambda_2 \hat{j}; 0) \\ \vec{R}'' = (-\lambda_1 \hat{i} - \lambda_2 \hat{j}; 0) \\ \vec{M}_O' = (\lambda_3 \hat{k}; 0) \\ \vec{M}_O'' = (-\lambda_3 \hat{k}; 0) \end{cases}$$

Dovendo imporre 3 reazioni vincolari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ si avrà $MS = 3$.

4. Doppio Pendolo Interno



Sono impeditte le rotazioni relative e le traslazioni relative in direzione di \vec{e} .

$$\begin{cases} \vec{s}_0''' \cdot \vec{e} = 0 \\ \vec{\Phi}'' \cdot \vec{e} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{s}_0' \cdot \vec{e} = \vec{s}_0'' \cdot \vec{e} \\ \vec{\Phi}' = \vec{\Phi}'' \end{cases} \Rightarrow MC = 2$$

$$\begin{bmatrix} e_x & e_y & 0 & -e_x & -e_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x}' \\ s_{0y}' \\ \varphi_z' \\ s_{0x}'' \\ s_{0y}'' \\ \varphi_z'' \end{bmatrix} = \{0\}$$

Le reazioni vincolari saranno quelle duali agli spostamenti vincolati:

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' + \vec{\Phi}'' \cdot \vec{M}_O'' = 0$$

Possibili spostamenti compatibili: $\vec{s}_0' = \vec{s}_0'' = 0$

$$L_V = \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' + \vec{\Phi}'' \cdot \vec{M}_O'' = 0$$

Possibili spostamenti compatibili: $\vec{\Phi}' = \vec{\Phi}'' = \vec{\Phi}$

$$L_V = \vec{\Phi} \cdot (\vec{M}_O' + \vec{M}_O'') = 0 \Rightarrow \vec{M}_O' = -\vec{M}_O''$$

Possibili spostamenti compatibili: $\vec{\Phi}' = \vec{\Phi}'' = \vec{\Phi} = 0$

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' = 0$$

Se si avesse $\vec{s}_0'' = 0$:

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}' \perp \vec{s}_0' \\ \vec{s}_0' \perp \vec{e} \end{cases} \Rightarrow \vec{R}' \parallel \vec{e}$$

Oppure se si avesse $\vec{s}_0' = 0$:

$$L_V = \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}'' \perp \vec{s}_0'' \\ \vec{s}_0'' \perp \vec{e} \end{cases} \Rightarrow \vec{R}'' \parallel \vec{e}$$

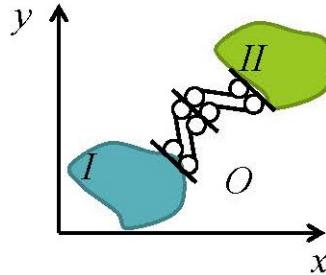
Perciò:

$$\begin{cases} \vec{s}_0'' \cdot \vec{e} = \vec{s}_0' \cdot \vec{e} \\ \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' + \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' = -\vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' \Rightarrow \vec{R}' = -\vec{R}''$$

$$\begin{cases} \vec{R}' = (\lambda_1 \vec{e}; 0) \\ \vec{R}'' = (-\lambda_1 \vec{e}; 0) \\ \vec{M}_O' = (\lambda_2 \hat{k}; 0) \\ \vec{M}_O'' = (-\lambda_2 \hat{k}; 0) \end{cases}$$

Con due sole reazioni vincolari λ_1, λ_2 da imporre, $MS = 2$.

5. Doppio Doppio Pendolo Interno



Sono impeditte le rotazioni relative.

$$\vec{\Phi}''_{:,'} = 0 \Rightarrow \vec{\Phi}' = \vec{\Phi} \Rightarrow MC = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_{0x} \\ s'_{0y} \\ \varphi'_z \\ s''_{0x} \\ s''_{0y} \\ \varphi''_z \end{bmatrix} = \{0\}$$

Opponendosi alla rotazione genera un momento, mentre lasciando libere le traslazioni non genera forze vincolari. Possibili spostamenti compatibili: $\vec{s}_0' = \vec{s}_0'' = 0$

$$L_V = \vec{\Phi}' \cdot \vec{M}_O' + \vec{\Phi}'' \cdot \vec{M}_O'' = 0$$

Possibili spostamenti compatibili: $\vec{\Phi}' = \vec{\Phi}'' = \vec{\Phi}$

$$L_V = \vec{\Phi} \cdot (\vec{M}_O' + \vec{M}_O'') = 0 \Rightarrow \vec{M}_O' = -\vec{M}_O''$$

Possibili spostamenti compatibili: $\forall \vec{s}_0$

Se si avesse $\vec{s}_0'' = 0$:

$$L_V = \vec{R}' \cdot \vec{s}_0' = 0 \Rightarrow \vec{R}' = 0 \forall \vec{s}_0'$$

Oppure se si avesse $\vec{s}_0' = 0$:

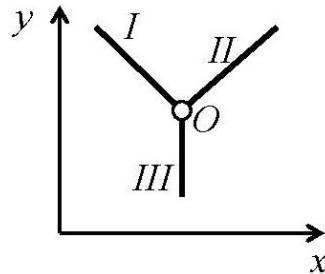
$$L_V = \vec{R}'' \cdot \vec{s}_0'' = 0 \Rightarrow \vec{R}'' = 0 \forall \vec{s}_0''$$

Perciò:

$$\begin{cases} \vec{R}' = 0 \\ \vec{R}'' = 0 \\ \vec{M}_O' = (\lambda_1 \hat{k}; 0) \\ \vec{M}_O'' = (-\lambda_1 \hat{k}; 0) \end{cases}$$

Con una sola reazione vincolare λ_1 da imporre, $MS = 1$.

Esempio: tante reazioni vincolari quanti corpi.



Cerniera

$$\begin{cases} \vec{s}_0'''' = 0 \\ \vec{s}_0'''' = 0 \\ \vec{s}_0'''' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{s}_0'' = \vec{s}_0' \\ \vec{s}_0''' = \vec{s}_0' \\ \vec{s}_0''' = \vec{s}_0'' \end{cases}$$

Da notare come la terza equazione sia combinazione lineare delle altre due, pervenendo così ad una molteplicità cinematica di 4 anziché di 6.

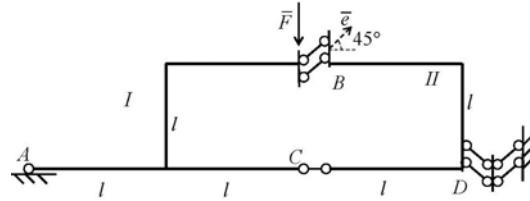
La cerniera non si oppone alla rotazione, per cui: $\vec{M}_O' = \vec{M}_O'' = \vec{M}_O''' = 0$

Per l'equilibrio: $\vec{R}' + \vec{R}'' + \vec{R}''' = 0 \Rightarrow \vec{R}' + \vec{R}'' = -\vec{R}'''$

E dunque:

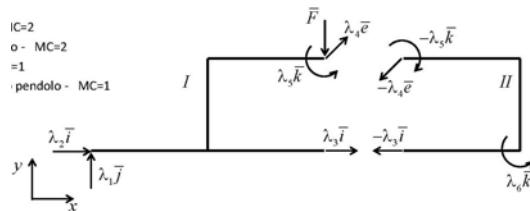
$$\begin{cases} \vec{R}' = (\lambda_1 \hat{i} + \lambda_2 \hat{j}; 0) \\ \vec{R}'' = (\lambda_3 \hat{i} + \lambda_4 \hat{j}; 0) \\ \vec{R}''' = [-(\lambda_1 - \lambda_3) \hat{i} - (\lambda_2 - \lambda_4) \hat{j}; 0] \\ \vec{M}_O' = \vec{M}_O'' = \vec{M}_O''' \end{cases}$$

Esempio:



- A: Cerniera esterna $\rightarrow MC = 2$;
- B: D. Pendolo interno $\rightarrow MC = 2$;
- C: Pendolo interno $\rightarrow MC = 1$;
- D: D. Pendolo esterno $\rightarrow MC = 1$;

Ottenendo un numero di vincoli semplici pari a $s = 6$, ho dunque bisogno di 6 reazioni vincolari λ per risolvere l'equilibrio.



Per il corpo 1:

$$\vec{R}' = \lambda_2\hat{i} + \lambda_1\hat{j} + \lambda_3\hat{i} + \lambda_4 \cdot \vec{e} - F\hat{j} = 0$$

\vec{M}_A' = tutte le forze \times tutti i bracci + momenti concentrati

1.

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 &= (2l\hat{i} + l\hat{j}) \times \lambda_4 \cdot \vec{e} = \\ &= 2l\hat{i} \times \left[\lambda_4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} \right) \right] + l\hat{j} \times \left[\lambda_4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} \right) \right] \\ &= 2l\lambda_4 \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k} + \left(-l\lambda_4 \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k} \right) \end{aligned}$$

2.

$$\vec{M}_2 = 2l\hat{i} \times -F\hat{j} = -2lF\hat{k}$$

3.

$$\begin{aligned} \vec{M}_3 &= \lambda_5\hat{k} \\ \vec{M}_A' &= 2l\lambda_4 \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k} + \left(-l\lambda_4 \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k} \right) - 2lF\hat{k} + \lambda_5\hat{k} \end{aligned}$$

Per il corpo 2:

$$\vec{R}'' = -\lambda_3 \hat{i} - \lambda_4 \cdot \vec{e} = 0$$

\vec{M}_B'' = tutte le forze \times tutti i bracci + momenti concentrati

1.

$$\vec{M}_1 = -\lambda_5 \hat{k}$$

2.

$$\vec{M}_2 = \lambda_6 \hat{k}$$

3.

$$\vec{M}_3 = l \hat{j} \times \lambda_3 \hat{i} = -l \lambda_3 \hat{k}$$

$$\vec{M}_B'' = -l \lambda_3 \hat{k} - \lambda_5 \hat{k} + \lambda_6 \hat{k}$$

Allora, per componenti:

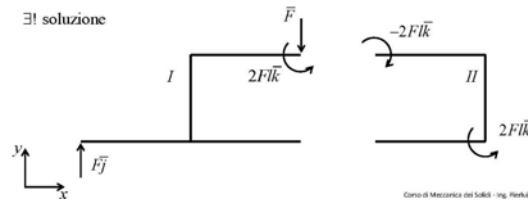
$$\begin{cases} R_{1x} = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ R_{1y} = \lambda_1 + \lambda_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0 \\ M_{1Az} = l \lambda_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - 2lF + \lambda_5 \\ R_{2x} = -\lambda_3 - \lambda_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ R_{2y} = -\lambda_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ M_{2Bz} = +\lambda_6 - l \lambda_3 - \lambda_5 \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 2lF \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Riducendo con il metodo di Gauss si perviene a:

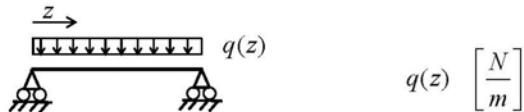
$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -F \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2lF \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -2lF \end{bmatrix} \Rightarrow rk(E) = 6 \Rightarrow \exists! S : \\ S = \begin{cases} \lambda_1 = F \\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \\ \lambda_5 = \lambda_6 = 2Fl \end{cases}$$



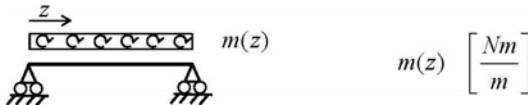
Carichi distribuiti

Qualora il carico non sia concentrato in un punto di applicazione, ma ogni elemento infinitesimo di struttura risulta caricato, si parla di carico distribuito. Classico esempio è il carico proprio della struttura.

Forza Distribuita



Momento Distribuito



Per poter scrivere le equazioni cardinali della struttura si deve poter esprimere i descrittori statici in funzione dei carichi distribuiti:

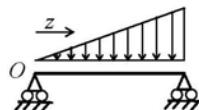
$$\vec{R} = \int_0^l q(z) dz \quad \vec{M}_O = \int_0^l (P - O) \times q(z) dx = \int_0^l \vec{z} \times q(z) dx$$

Per un carico distribuito costante:

$$\vec{R} = -ql\hat{j} \quad \vec{M}_O = \frac{-ql^2}{2} = \frac{Rl}{2}\hat{k}$$

Il sistema di forze e momenti è equivalente ad un sistema dove si ha una forza, pari alla risultante, applicata nel baricentro della distribuzione di carico.

Esempio:



$$q(z) = \frac{\tilde{q}z}{l}$$

$$\vec{R} = \int_0^l \frac{\tilde{q}z}{l} dz = \frac{\tilde{q}}{l} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^l = \frac{\tilde{q}l^2}{l} \frac{l}{2} = -\tilde{q}\frac{l}{2}\hat{j}$$

$$\vec{M}_0 = \int_0^l z \frac{\tilde{q}}{l} z dz = \frac{\tilde{q}}{l} \int_0^l z^2 dz = \frac{\tilde{q}}{l} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^l = \frac{\tilde{q}l^3}{l} \frac{1}{3} = -\frac{\tilde{q}l^2}{3}\hat{k}$$

La posizione della risultante è data dalla media dei carichi pesata con i bracci di ciascuno.

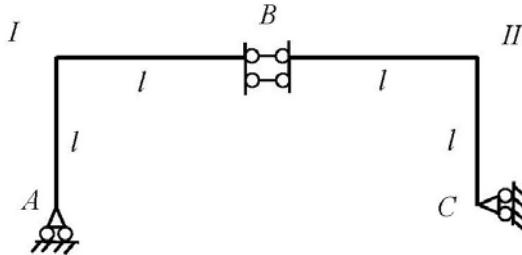
$$x_R = \frac{\text{forza per braccio}}{\text{risultante}} = \frac{\sum x_i F_i}{R}$$

$$z_P = \frac{\int_0^l z \frac{\tilde{q}}{l} z dz}{\int_0^l \frac{\tilde{q}z}{l} dz} = \frac{-\frac{\tilde{q}l^2}{3}}{-\tilde{q}\frac{l}{2}} = \frac{\frac{l}{3}}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{3}l$$

Ci si può così ricondurre ad un problema di carichi concentrati applicati al baricentro del carico distribuito.

Labilità

Si può studiare la possibilità di spostamento di una struttura indipendentemente dai carichi esterni, andando ad analizzare gli spostamenti compatibili con i vincoli.



I generici campi di spostamento per i due corpi, così, senza tenere conto della presenza dei vincoli, possono essere espressi come:

$$\vec{s}_P' = \vec{s}_A' + \vec{\Phi}' \times (P - A)$$

$$\vec{s}_P'' = \vec{s}_B'' + \vec{\Phi}'' \times (P - B)$$

Per caratterizzare i possibili spostamenti vincolati vanno conosciuti i descrittori cinematici compatibili coi vincoli:

$$A : \text{carrello} \rightarrow \vec{s}_A' \cdot \hat{j} = 0 \Rightarrow s_{Ay}' = 0$$

$$B : \text{d.pendolo} \rightarrow \begin{cases} \vec{s}_B' \cdot \hat{i} = \vec{s}_B'' \cdot \hat{i} \\ \vec{\Phi}' = \vec{\Phi}'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{Bx}' = s_{Bx}'' \\ \varphi_z' = \varphi_z'' \end{cases}$$

Per utilizzare l'equazione generica del campo di spostamenti, devo esprimere le condizioni di vincolo in funzione dei descrittori che compaiono nell'equazione generica.

Scelgo un polo che appartenga al corpo 1, questo lo chiamo A. Scelgo un polo appartenente al corpo 2, questo lo chiamo B, i descrittori associati a questi due poli saranno:

$$s_{Ax}', s_{Ay}', \varphi_A'; s_{Bx}'', s_{By}'', \varphi_B''$$

In modo che:

$$\vec{s}_B' = \vec{s}_A' + \vec{\Phi}' \times (B - A) = \vec{s}_A' + \varphi' \hat{k} \times (l\hat{i} + l\hat{j}) = \vec{s}_A' + \varphi' l \hat{j} - \varphi' l \hat{i}$$

$$s_{Bx}' = s_{Ax}' - \varphi' l$$

E dunque:

$$\begin{cases} s_{Bx}' = s_{Bx}'' \\ \varphi_z' = \varphi_z'' \end{cases} = \begin{cases} s_{Bx}' = s_{Ax}' - \varphi' l = s_{Bx}'' \\ \varphi_z' = \varphi_z'' \end{cases}$$

$$C : \text{carrello} \rightarrow \vec{s}_C'' \cdot \hat{j} = 0 \Rightarrow s_{Cx}' = 0$$

Ma:

$$\vec{s}_C'' = \vec{s}_B'' + \vec{\Phi}'' \times (C - B) = \vec{s}_B'' + \varphi'' \hat{k} \times (l\hat{i} + l\hat{j}) = \vec{s}_B'' + \varphi'' l \hat{j} - \varphi'' l \hat{i}$$

$$s_{Cx}'' = s_{Bx}'' + \varphi'' l$$

E dunque per i carrello in C si ha:

$$s_{Cx}'' = s_{Bx}'' + \varphi'' l = 0$$

Quello che in totale si otterrà sarà un sistema:

$$\begin{cases} s'_{Ay} = 0 \\ s'_{Ax} - \varphi' l = s''_{Bx} \\ \varphi'_z = \varphi''_z \\ s''_{Bx} + \varphi'' l = 0 \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_{Ax} \\ s'_{Ay} \\ \varphi' \\ s''_{Bx} \\ s''_{By} \\ \varphi'' \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$[C][S] = [0]$$

Nel caso di vincoli ideali.

Con $[C]$ matrice di compatibilità, $[S]$ vettore degli spostamenti.

Per definizione le soluzioni di un sistema lineare omogeneo appartengono al suo nucleo $\ker(C)$, perciò se:

- $\dim \{\ker(C)\} = 0$ l'unica possibilità è lo spostamento nullo;
- $\dim \{\ker(C)\} \neq 0$ esistono $\infty^{\dim \{\ker(C)\}}$ spostamenti compatibili.

Si definisce Labilità:

$$l = \dim \{\ker(C)\}$$

Il numero l di parametri indipendenti da cui dipendono gli spostamenti virtuali della struttura, tali che, gli spostamenti ammissibili siano ∞^l .

L'analisi statica di una struttura si esegue con $n = 3t$ incognite ed s equazioni, in questo modo:

$$l = \dim \{\ker(C)\} = 3t - rk(C)$$

$[C]$ è indipendente dai carichi applicati; gli spostamenti considerati nel calcolo della labilità NON sono generati da forze o momenti applicati, sono solo teorici. Nell'esempio considerato $rk(C) = 4 \Rightarrow l = 3t - rk(C) = 6 - 4 = 2 \Rightarrow \infty^2$ spostamenti possibili o possibilità di spostamento.

Se invece si applicasse un sistema di forze alla struttura, mantenendo la scelta dei poli fatta in precedenza, si ottiene:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l \end{bmatrix}$$

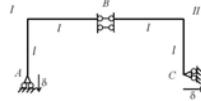
Che avrebbe condotto anche qua a ∞^2 soluzioni.

Infine si nota come:

$$C = E^T$$

Vincoli NON Perfetti

Se i vincoli non sono perfetti, questi permettono cedimenti.



Nello stesso esempio di prima si pongano con cedimento $\vec{\delta}$ i vincoli $A_{\downarrow}; C_{\rightarrow}$. Le limitazioni cinematiche diverranno così:

$$\begin{cases} s'_{Ay} = -\delta \\ s'_{Bx} = s''_{Bx} \\ \varphi'_z = \varphi''_z \\ s_{Cx} = \delta \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_{Ax} \\ s'_{Ay} \\ \varphi' \\ s''_{Bx} \\ s''_{By} \\ \varphi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta \\ 0 \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$[C][S] = [\delta]$$

Sebbene la matrice $[C]$ non cambi, il sistema NON è più omogeneo.

La labilità diviene così indice della molteplicità di una eventuale soluzione, non offrendo tuttavia informazioni sull'esistenza delle stesse. Per sapere con sicurezza se esiste o meno una soluzione si ricorrerà al teorema di Rouchè - Capelli.

Risolvendo col metodo di Gauss si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -l & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_{Ax} \\ s'_{Ay} \\ \varphi' \\ s''_{Bx} \\ s''_{By} \\ \varphi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\delta \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix}$$

E le soluzioni saranno date da:

$$\begin{cases} x_1 = lx_3 + x_4 \\ x_2 = -\delta \\ x_3 = x_6 \\ x_4 = -lx_6 + \delta \\ x_5 = t_1 \\ x_6 = t_2 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = lx_3 - lx_6 + \delta \\ x_2 = -\delta \\ x_3 = x_6 \\ x_4 = -lx_6 + \delta \\ x_5 = t_1 \\ x_6 = t_2 \end{cases} = \begin{cases} s'_{Ax} = x_1 = \delta \\ s'_{Ay} = x_2 = -\delta \\ \varphi' = x_3 = t_2 \\ s''_{Bx} = x_4 = -lt_2 + \delta \\ s''_{By} = x_5 = t_1 \\ \varphi'' = x_6 = t_2 \end{cases}$$

E dunque:

$$\begin{bmatrix} s'_{Ax} \\ s'_{Ay} \\ \varphi' \\ s''_{Bx} \\ s''_{By} \\ \varphi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ -\delta \\ 0 \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \varphi'' \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -l \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s''_{By} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

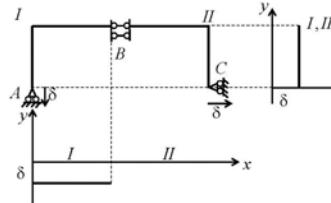
Le soluzioni si ottengono perciò al variare di due parametri.

Catene Cinematiche

Cosa si ottiene dalla lettura delle matrici? Le devo tradurre in campi di spostamento.

Le catene cinematiche sono un metodo per rappresentare gli spostamenti di un generico punto P della struttura. Si rappresentino gli spostamenti dovuto ai cedimenti della struttura:

$$\begin{bmatrix} s'_{Ax} \\ s'_{Ay} \\ \varphi' \\ s''_{Bx} \\ s''_{By} \\ \varphi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ -\delta \\ 0 \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{s}_P' = \vec{s}_A' + \vec{\Phi}' \times (P - A) = \delta \hat{i} - \delta \hat{j} \\ \vec{s}_P'' = \vec{s}_B'' + \vec{\Phi}'' \times (P - B) = \delta \hat{i} \end{cases}$$



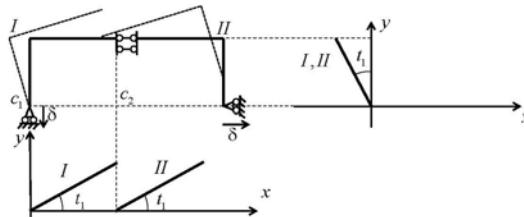
Si rappresentino gli spostamenti dovuti ai movimenti ammissibili dei vincoli, in particolare, quelli dovuti a rotazione, immaginando i vincoli perfetti:

$$\begin{bmatrix} s'_{Ax} \\ s'_{Ay} \\ \varphi' \\ s''_{Bx} \\ s''_{By} \\ \varphi'' \end{bmatrix} = \varphi'' \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -l \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -l \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E dunque:

$$\begin{cases} \vec{s}_P' = \vec{s}_A' + \vec{\Phi}' \times (P - A) = t_1 \hat{k} \times (x \hat{i} + y \hat{j}) = t_1 x \hat{j} - t_1 y \hat{i} \\ \vec{s}_P'' = \vec{s}_B'' + \vec{\Phi}'' \times (P - B) = -t_1 l \hat{i} + t_1 \hat{k} \times [(x - l) \hat{i} + (y - l) \hat{j}] = \\ = -t_1 l \hat{i} + t_1 (x - l) \hat{j} - t_1 (y - l) \hat{i} = \\ = t_1 y \hat{i} + t_1 (x - l) \hat{j} \end{cases}$$

Per strutture rigide lo spostamento x è tutt'alpiù lineare secondo y e lo spostamento y è tutt'alpiù lineare secondo x .



t_1 rappresenta una rotazione infinitesima, cioè un angolo di rotazione della retta che rappresenta in corpo 1.

Le catene cinematiche permettono di rappresentare gli spostamenti di un generico punto della struttura.

Il centro istantaneo di rotazione è il punto rispetto al quale si può descrivere il moto del corpo come un moto di rotazione pura, ovvero come quel punto del piano mobile che ha spostamento nullo.

Note

MECCANICA DEI SOLIDI: PARTE 3

Centro di Spostamento

Un generico campo di spostamento (CDS) è dato da:

$$\vec{s}_P = \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \times (P - O)$$

Ovvero, nel riferimento assoluto nel piano lo spostamento è individuabile tramite un vettore traslazione parallelo al piano e un vettore rotazione ortogonale al piano.

REMAINDER: Punto fermo \rightarrow punto a spostamento nullo, centro di istantanea rotazione. Punto per il quale l'atto di moto è descrivibile mediante una sola rotazione.

La definizione di centro di spostamento è:

$$\vec{s}_P \neq 0 \Rightarrow \exists! C :$$

1. $\vec{s}_C = 0$
2. $\vec{s}_P = \vec{\Phi} \times (P - C)$
3. La retta passante per C ed O è $\perp \vec{s}_0$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} \vec{s}_P = \vec{s}_C + \vec{\Phi} \times (P - O) \\ \vec{s}_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{s}_P = \vec{\Phi} \times (P - O)$$

Si cerca un punto C tale che: $\vec{s}_C = 0$.

Lo spostamento del punto C rispetto ad un polo O è dato da: $\vec{s}_C = \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \times (C - O)$.

Moltiplico entrambi i membri per il vettore rotazione:

$$\vec{\Phi} \times \vec{s}_C = \vec{\Phi} \times [\vec{s}_0 + \vec{\Phi} \times (C - O)]$$

E dunque:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\Phi} \times [\vec{s}_0 + \vec{\Phi} \times (C - O)] \\ \vec{\Phi} \times \vec{s}_0 + \vec{\Phi} \times \vec{\Phi} \times (C - O) &= 0 \end{aligned}$$

Ricordando la proprietà dei vettori per cui:

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = -(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} \times \vec{s}_0 - (\vec{\Phi} \cdot \vec{\Phi}) \cdot (C - O) &= 0 \\ \vec{\Phi} \times \vec{s}_0 &= |\vec{\Phi}|^2 \cdot (C - O) \\ (C - O) &= \frac{\vec{\Phi} \times \vec{s}_0}{|\vec{\Phi}|^2} \Rightarrow (C - O) \perp \vec{s}_0, (\vec{\Phi}) \end{aligned}$$

Ed indica che C è punto proprio.

Se il moto è di traslazione pura, allora $\vec{\Phi} = 0$, allora:

$$(C - O) = \lim_{\vec{\Phi} \rightarrow 0} \frac{\vec{\Phi} \times \vec{s}_0}{|\vec{\Phi}|^2} \rightarrow +\infty \quad \blacksquare$$

Indicando che C è punto improprio in direzione ortogonale ad \vec{s}_0 .

TEOREMA

$$\text{Se } \exists C_1, C_2 \text{ con } C_1 \neq C_2 : \begin{cases} s_{C_1} = 0 \\ s_{C_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow s_P = 0 \forall P$$

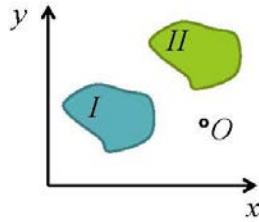
Cioè, se si hanno due punti candidati ad essere centro di spostamento, allora lo spostamento del campo è quello banale, quello nullo.

$$s_P = s_{C_1} + \vec{\Phi} \times (P - C_1) \quad s_{C_2} = s_{C_1} + \vec{\Phi} \times (C_2 - C_1)$$

Ma per ipotesi $s_{C_1} = 0 = s_{C_2}$, allora:

$$\begin{cases} 0 = s_{C_2} = \vec{\Phi} \times (C_2 - C_1) \\ s_P = \vec{\Phi} \times (P - C_1) \end{cases} \Rightarrow s_P = 0 \quad \blacksquare$$

Centro di Spostamento Relativo



Dati nel piano mobile due corpi 1 e 2 in movimento relativo e un polo O, si può scrivere:

$$\begin{cases} s_P' = s_0' + \vec{\Phi}' \times (P - O) \\ s_P'' = s_0'' + \vec{\Phi}'' \times (P - O) \\ s_P''' = s_0''' + \vec{\Phi}''' \times (P - O) \end{cases}$$

Analogamente, la definizione di centro di spostamento relativo è:

$$s_P''' \neq 0 \Rightarrow \exists! C_{12} :$$

$$1. s_{C_{12}}''' = 0$$

$$2. s_P''' = \vec{\Phi}''' \times (P - C_{12})$$

$$3. \text{ La retta passante per } C_{12} \text{ ed } O \text{ è } \perp s_0''' \Rightarrow (C_{12} - O) = \frac{\vec{\Phi}''' \times s_0'''}{|\vec{\Phi}'''|^2}$$

Inoltre:

$$C_{12} = C_{21}$$

$$\begin{cases} s_0''' = -s_0'' \\ \vec{\Phi}''' = -\vec{\Phi}'' \end{cases} \Rightarrow (C_{21} - O) = \frac{\vec{\Phi}'' \times s_0''}{|\vec{\Phi}''|^2} = -\frac{\vec{\Phi}''' \times s_0''}{|\vec{\Phi}'''|^2} = \frac{\vec{\Phi}''' \times s_0'''}{|\vec{\Phi}'''|^2} = (C_{12} - O)$$

PRIMO TEOREMA DELL'ALLINEAMENTO

Dato C_1 il centro di spostamento del corpo 1 e C_2 il centro di spostamento del corpo 2 e C_{12} il centro di spostamento relativo, affinché il moto NON sia banale, la condizione necessaria e sufficiente è che i tre Centro di Spostamento siano allineati.

Dimostrazione **HOMEWORK**

Corollario: unicità del centro di spostamento

Se esistono due punti P_1, P_2 tali che $s\vec{P}_1 = s\vec{P}_2 = 0$ allora il corpo è fermo poiché non può esistere più di un centro di spostamento, difatti, se esso esiste, è unico.

Corollari: corpo fermo

Se si hanno due corpi mobili e i punti C_1, C_2, C_{12} sono possibili candidati ad essere centri di spostamento e se:

$$C_1 = C_{12} \neq C_2$$

Allora il corpo 2 è fermo.

$$\begin{cases} s\vec{C}_1' = 0 \\ s\vec{C}_2'' = 0 \\ s\vec{C}_{12}''' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\vec{C}_{12}''' = s\vec{C}_{12}' + s\vec{C}_{12}''' = s\vec{C}_{12}''' \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow s\vec{C}_{12}''' = s\vec{C}_{12}' = s\vec{C}_1' = 0$$

Esistono 2 punti con spostamento nullo per il corpo 2, quindi è fermo. ■

Se si hanno due corpi mobili e i punti C_1, C_2, C_{12} sono possibili candidati ad essere centri di spostamento e se:

$$C_1 = C_2 \neq C_{12}$$

Allora non si ha spostamento relativo tra i corpi.

$$s\vec{P}''' = 0$$

$$\begin{cases} s\vec{C}_1' = 0 \\ s\vec{C}_2'' = 0 \\ s\vec{C}_{12}''' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\vec{C}_2''' = s\vec{C}_2' + s\vec{C}_2'' = s\vec{C}_2' \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow s\vec{C}_2''' = s\vec{C}_2' = s\vec{C}_1' = 0$$

C_2 è centro del moto relativo. ■

SECONDO TEOREMA DELL'ALLINEAMENTO

Si considerino 3 corpi di una struttura labile, se esistono i punti C_{12}, C_{13}, C_{23} centri di spostamento relativo, allora essi sono allineati.

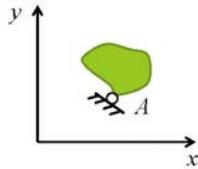
Centro di Spostamento e Vincoli

Un vincolo consiste in una restrizione cinematica del corpo.

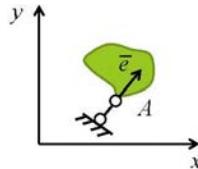
Il centro di spostamento è il punto di rappresentazione della cinematica del corpo.

Esiste dunque una relazione tra i vincoli e i centro di spostamento che permette di studiare la labilità di una struttura e tracciarne le catene cinematiche.

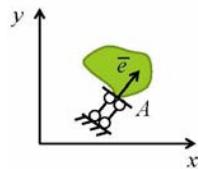
- **Cerniera** $s_A = 0 \Rightarrow$ se $\exists C \Rightarrow C \equiv A$



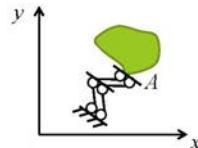
- **Pendolo** $s_A \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow$ se $\exists C \Rightarrow C \in e$



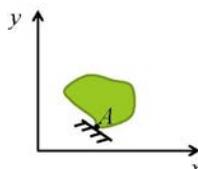
- **Doppio Pendolo** $\begin{cases} s_A \cdot \vec{e} = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \exists C \Rightarrow C \in e \\ \text{se } \exists C \Rightarrow C \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow C \rightarrow \infty \in e$



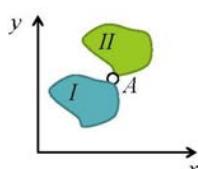
- **Doppio Doppio Pendolo** $\Phi = 0 \Rightarrow$ se $\exists C \Rightarrow C \rightarrow \infty$



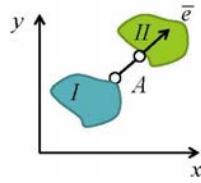
- **Incastro** $s_P = 0 \Rightarrow \forall P$ tengo spostamenti banali $\Rightarrow \nexists C$



- **Cerniera Interna** $s_A''' = 0 \Rightarrow$ se $\exists C_{12} \Rightarrow C_{12} \equiv A$

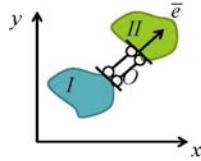


- **Pendolo Interno** $\vec{s}_A^{'''} \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow$ se $\exists C_{12} \Rightarrow C_{12} \in e$

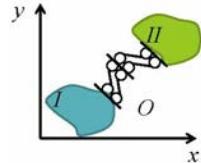


- **Doppio Pendolo Interno**

$$\begin{cases} \vec{s}_A^{'''} \cdot \vec{e} = 0 \\ \vec{\Phi}^{'''} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \exists C_{12} \Rightarrow C_{12} \in e \\ \text{se } \exists C_{12} \Rightarrow C_{12} \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow C_{12} \rightarrow \infty \in e$$



- **Doppio Doppio Pendolo Interno** $\vec{\Phi}^{'''} = 0 \Rightarrow$ se $\exists C_{12} \Rightarrow C_{12} \rightarrow \infty$

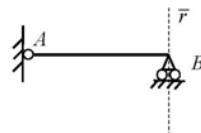


Osservazione: per determinare la posizione di un punto nel piano si necessita di due coordinate, di conseguenza solo i vincoli doppi sono in grado di posizionare il centro di spostamento, mentre quelli singoli lasciano un grado di incertezza.

Centro di Spostamento e Labilità

Esiste una correlazione tra la labilità e i moti di spostamento.

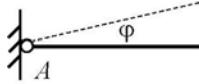
Caso 1



$$\begin{cases} A \rightarrow \text{cerniera} \Rightarrow \text{se } \exists C \Rightarrow C \equiv A \\ B \rightarrow \text{pendolo o carrello} \Rightarrow \text{se } \exists C \Rightarrow C \in r \end{cases}$$

C dovrebbe essere contemporaneamente sia in A che su r: assurdo. Si perviene al fatto che il corpo è fermo e la labilità è perciò nulla: $l = 0$.

Caso 2

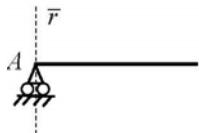


$$A \rightarrow \text{cerniera} \Rightarrow \text{se } \exists C \Rightarrow C \equiv A$$

La cerniera presente blocca due spostamenti possibili: $\rightarrow \uparrow$ l'unico spostamento possibile è la rotazione.

Con un solo spostamento possibile la labilità diviene $l = 1$.

Caso 3



$$A \rightarrow \text{pendolo o carrello} \Rightarrow \text{se } \exists C \Rightarrow C \in r$$

Il pendolo impedisce soltanto gli spostamenti paralleli alla sua direzione \vec{r} , il che significa che sono possibili 2 dei 3 spostamenti previsti.

In particolare $C \in r$ ma si necessita di ancora un'altra coordinata per fissare C nel piano, si dice quindi che C ha 1 grado di incertezza, ho la necessità di introdurre un'informazione.

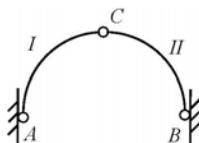
Quindi, in generale, se $l \neq e$ cioè se $\exists C$, la labilità è nota attraverso:

$$l = 1 + g$$

Dove g è il numero di informazioni arbitrarie che è necessario introdurre per trovare univocamente, senza incertezze, C.

Serie di esempi

1.



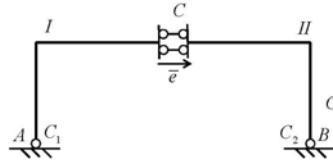
$$A \rightarrow \text{cerniera} \Rightarrow \text{se } \exists C_1 \Rightarrow C_1 \equiv A$$

$$B \rightarrow \text{cerniera} \Rightarrow \text{se } \exists C_2 \Rightarrow C_2 \equiv B$$

$$C \rightarrow \text{cerniera} \Rightarrow \text{se } \exists C_{12} \Rightarrow C_{12} \equiv C$$

Ma C_1, C_2, C_{12} non sono e non possono essere allineati, perciò l'unico spostamento possibile sarà quello banale, nullo, il corpo è fermo $l = 0$

2.



$$A \rightarrow \text{cerniera} \Rightarrow \text{se } \exists C_1 \Rightarrow C_1 \equiv A$$

$$B \rightarrow \text{cerniera} \Rightarrow \text{se } \exists C_2 \Rightarrow C_2 \equiv B$$

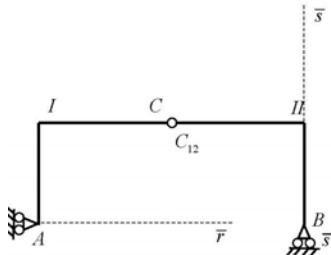
$$C \rightarrow \text{doppio pendolo} \Rightarrow \text{se } \exists C_{12} \Rightarrow C_{12} \rightarrow \infty \in \vec{e}$$

Poiché C_{12} è all'infinito non c'è modo di non credere che C_{12} all'infinito sia allineato a C_1, C_2 , e i tre punti si possono considerare allineati.

Se inoltre C_{12} appartiene alla retta per \bar{AB} , risulta spazialmente fissato e quindi $g = 0$;

$$l = 1 + g = 1$$

3.



$$A \rightarrow \text{carrello} \Rightarrow C_1 \in \vec{r}$$

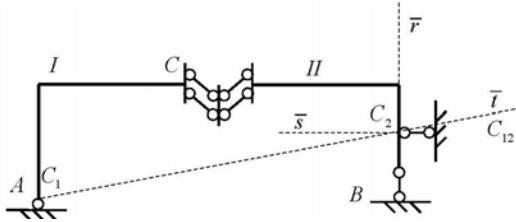
$$B \rightarrow \text{carrello} \Rightarrow C_2 \in \vec{s}$$

$$C \rightarrow \text{cerniera} \Rightarrow C_{12} \equiv C$$

Si può tracciare una qualsiasi retta che dimostri come C_1, C_2, C_{12} siano allineati, con la condizione per cui C_1, C_2 sono da scegliersi in maniera arbitraria, a partire da C_{12} che fornisce la posizione di C_1 sulla retta \vec{r} e in seguito quella di C_2 sulla retta \vec{s} .

Ci si accorge in questo modo che si è dovuto scegliere un parametro e dunque $g = 1 \Rightarrow l = 1 + g = 2$: per poter fissare i dentri di spostamento, è necessario fissare arbitrariamente o C_1 o C_2 .

4.



Corpo 1 vincoli esterni: Cerniera A $C_1 \equiv A$

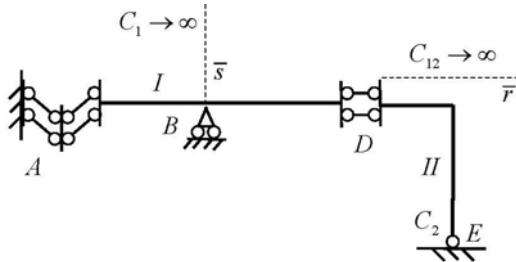
Corpo 2 vincoli esterni: Pendolo B $C_2 \in \vec{r}$, Pendolo D $C_2 \in \vec{s}$ e dunque $C_2 = \{\vec{r} \cap \vec{s}\}$

Vincoli interni: Doppio Doppio Pendolo C $C_{12} \rightarrow \infty$

Perciò con $C_1 \equiv A$, $C_2 = \{\vec{r} \cap \vec{s}\}$, $C_{12} \rightarrow \infty$ i tre punti sono allineati se e solo se sono allineati C_1, C_2 .

C_1, C_2 sono allineati sulla retta \vec{t} e questi significa che C_{12} apparterrà all'infinito a tale retta e non diviene più necessario scegliere nemmeno un parametro per identificare i centri di spostamento $g = 0 \Rightarrow l = 1 + g = 1$: C_{12} è univocamente determinato dagli univocamente determinati C_1, C_2 .

5.



Corpo 1 vincoli esterni: Doppio Doppio Pendolo A $C_1 \rightarrow \infty$, Pendolo B $C_1 \in \vec{s}$ allora $C_1 \rightarrow \infty \in \vec{s}$

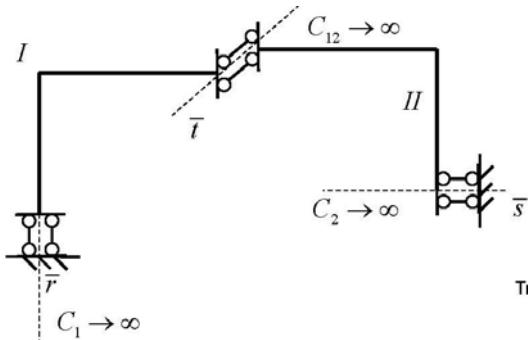
Corpo 2 vincoli esterni: Cerniera E $C_2 \equiv E$

Vincoli interni: Doppio Pendolo D $C_{12} \rightarrow \infty \in \vec{r}$

Poiché C_1 è all'infinito lungo \vec{s} , C_{12} è all'infinito lungo \vec{r} e $C_2 \equiv E$, non c'è alcuna possibilità che C_1, C_2, C_{12} siano allineati e perciò $l = 0$. C_1 e C_{12} sono all'infinito lungo direzioni diverse.

Due punti impropri ed uno proprio, sono allineati se e solo se le direzioni dei due punti impropri sono parallele.

6.



Corpo 1 vincoli esterni: Doppio Pendolo A $C_1 \rightarrow \infty \in \vec{r}$

Corpo 2 vincoli esterni: Doppio Pendolo A $C_2 \rightarrow \infty \in \vec{s}$

Vincoli interni: Doppio Pendolo C $C_{12} \rightarrow \infty \in \vec{t}$

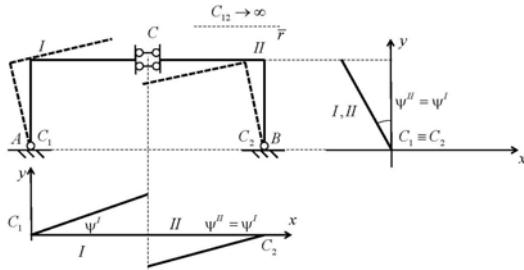
C_1, C_2, C_{12} sono all'infinito lungo tre direzioni diverse, essi sono allineati e univocamente definiti: $g = 0 \Rightarrow l = 1$

Tre punti impropri sono sempre allineati.

Centro di Spostamento e Catene Cinematiche

Conoscendo i centri di spostamento si possono facilmente tracciare le catene cinematiche, tracciando gli spostamenti come rotazioni intorno ai centro di spostamento.

Modus Operandi



- Individuare i centri di spostamento

Cerniera A $C_1 \equiv A$

Cerniera B $C_2 \equiv B$

Doppio Pendolo C $C_{12} \rightarrow \infty \in \vec{t}$

C_1, C_2, C_{12} allineati $\Rightarrow g = 0 \Rightarrow l = 1$

- Rappresentare gli spostamenti come rotazioni pure intorno al centro di spostamento, unico punto che non si muove.

$l = 1$ dunque si può scegliere arbitrariamente un solo parametro, solitamente l'angolo di spostamento.

Corpo 1: spostamento su y di φ' .

Corpo 2: spostamento su y di $\varphi'' = \varphi'$ parallelo a quello del corpo 1 a causa del doppio pendolo interno.

Corpo 1 e Corpo 2: spostamenti su x perpendicolari a quelli su y .

This box has a height of 1cm.

MECCANICA DEI SOLIDI: PARTE 4

Problema Cinematico e Statico

Il problema della statica si prefigge di risolvere:

$$[E]_{3t \times s}[\lambda] = [f]$$

In cui λ sono i descrittori statici delle reazioni vincolari e f sono i descrittori statici delle forze esterne.

Il problema della cinematica si prefigge di risolvere:

$$[C]_{s \times 3t}[s] = [\delta]$$

In cui s sono gli spostamenti ammissibili e δ sono i cedimenti.

Se si assume lo stesso polo rappresentativo sia per gli spostamenti che per le forze esterne, allora per un sistema di vincoli lisci si avrà:

$$[C]_{s \times 3t} = [E]_{3t \times s}^T$$

Si ricordi un utile proprietà dei sistemi lineari e delle matrici trasposte, se:

$$\begin{cases} A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ A^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Allora vale:

$$AX \cdot Y = A^T Y \cdot X \quad \forall X \in \mathbb{R}^n; \forall Y \in \mathbb{R}^m$$

Il lavoro virtuale per una struttura vincolata è:

$$\begin{cases} L_V = 0 & \text{Vincoli perfetti} \\ L_V = \vec{R} \cdot \vec{\delta} & \text{Vicoli con cedimenti} \end{cases}$$

Perciò:

$$L_V = \vec{\lambda} \cdot \vec{\delta} = \vec{\lambda} \cdot [C][s] = [C]^T \vec{\lambda} \cdot \vec{s}$$

Sfruttando il fatto che $[C]_{s \times 3t} = [E]_{3t \times s}^T$ allora:

$$L_V = [E] \vec{\lambda} \cdot \vec{s}$$

Formula di Grassmann

Da $\begin{cases} A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ A^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$ si ottiene che, per definizione:

$$\mathbb{R}^n = \ker[A] + \text{Im}[A]^T$$

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker[A] + \dim \text{Im}[A]^T = n$$

$$\mathbb{R}^m = \ker[A]^T + \text{Im}[A]$$

$$\dim \mathbb{R}^m = \dim \ker[A]^T + \dim \text{Im}[A] = m$$

In più, per definizione:

$$\dim \text{Im}[A] = \dim \text{Im}[A]^T = \text{rk}[A]$$

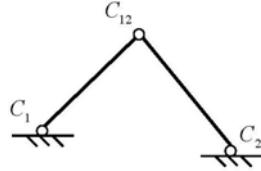
Infine:

$$n - m = \dim \ker[A] - \dim \ker[A]^T$$

Allora, nel caso del problema cinematico e statico $\begin{cases} C : \mathbb{R}^{3t} \rightarrow \mathbb{R}^s \\ E : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{3t} \end{cases} :$

$$3t - s = \dim \ker[C] - \dim \ker[E] = l - i$$

Esempio 1:

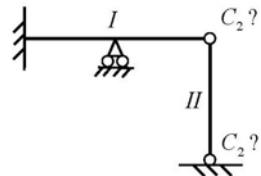


$$\begin{cases} t = 2 \\ s = 6 \Rightarrow 3t - s = 0 \end{cases}$$

Notando poi che C_1, C_2, C_{12} sono palesemente NON allineati, allora $l = 0$ e quindi:

$$\begin{aligned} 3t - s &= l - i \\ 0 &= 0 - i \Rightarrow i = 0 \end{aligned}$$

Esempio 2:

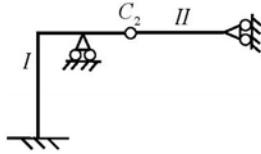


$$\begin{cases} 3t = 6 \\ s = 8 \end{cases} \Rightarrow 3t - s = -2$$

Il corpo 1 è fermo a causa dell'incastro in A, il corpo 2 è fermo perché i due possibili centro di spostamento in B e C, questi sono allineati, ma dov'è C_2 ? Sarebbe contemporaneamente in due punti, e questo non può essere, si conclude che $C_2 \notin$ e la struttura è ferma $l = 0$, allora:

$$\begin{aligned} 3t - s &= l - i \\ -2 &= 0 - i \Rightarrow i = 2 \end{aligned}$$

Esempio 3:



$$\begin{cases} 3t = 6 \\ s = 7 \end{cases} \Rightarrow 3t - s = -2$$

Il corpo 1 è fermo a causa dell'incastro in A, il corpo 2 ha il suo centro di spostamento $C_2 \equiv C$ e dunque, potendo esistere equilibrio $l = 1$ e allora:

$$\begin{aligned} 3t - s &= l - i \\ 6 - 7 &= 1 - i \Rightarrow i = 2 \end{aligned}$$

Teorema degli Spostamenti Virtuali

Un corpo è in equilibrio se e solo se le forze esterne compiono lavoro virtuale nullo considerando i vincoli lisci e perfetti.

$$L_V = \vec{f} \cdot \vec{s} = 0 \quad \forall \vec{s} \in \ker[C]$$

Spazio Ortonormale

Dato uno spazio V , si definisce spazio ortogonale lo spazio formato da tutti i vettori ortogonali agli elementi di V .

$$\begin{aligned} \ker[A] &= \{Im[A]^T\}^\perp \Leftrightarrow Im[A]^T = \{\ker[A]\}^\perp \\ \ker[A]^T &= \{Im[A]\}^\perp \Leftrightarrow Im[A] = \{\ker[A]^T\}^\perp \end{aligned}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} \vec{f} \in Im[E] \\ Im[E] = [\ker[E]^T]^\perp \end{cases} \Rightarrow Im[E] = [\ker[C]]^\perp$$

In caso di vincoli perfetti:

$$\vec{\delta} = 0 \Rightarrow [C] \cdot \vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{s} \in \ker[C]$$

$$L_V = \vec{f} \cdot \vec{s} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f} \in [\ker[C]]^\perp \\ \vec{s} \in \ker[C] \end{cases} \Rightarrow \vec{f} \perp \vec{s} \Rightarrow L_V = 0 \quad \blacksquare$$

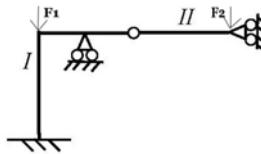
Se $l = 0$ vale l'equilibrio per ogni forza applicata, indipendentemente dal carico applicato in quanto l'unico spostamento compatibile è quello nullo:

$$L_V = \vec{f} \cdot \vec{s} \quad \forall \vec{f}$$

Se $l \neq 0 \Rightarrow \exists \infty^l$ spostamenti ammissibili per cui si ha equilibrio se e solo se è rispettato il teorema degli spostamenti virtuali.

La labilità fornisce informazioni sull'esistenza delle soluzioni del problema di equilibrio, della statica.

Esempio



Nell'esempio qui riportato si era visto come $l = 1, i = 2$, come si comporta la struttura con forze applicate?

$\vec{F}_1 \cdot \vec{s} = 0$ equivale al caso in cui F_1 sia applicata alla cerniera. Che spostamenti ammette quel punto sul corpo? Ricordando le condizioni sulla cerniera, si conclude che essendo $\vec{s} = 0$, il teorema degli spostamenti virtuali è verificato.

$\vec{F}_2 \cdot \vec{s} = 0$ ma il carrello potrebbe ben compiere una rotazione e quindi potrebbe valere $\vec{s} \neq 0$: non ci sarebbero reazioni vincolari in grado di contrastare la forza, che sarebbe NON equilibrabile.

Teorema delle Forze Virtuali

Il problema della compatibilità ha soluzione se e solo se il lavoro virtuale che le reazioni vincolari autoequilibrate compiono per la presenza di cedimenti è nullo:

$$L_V = \vec{\lambda} \cdot \vec{\delta} = 0 \quad \forall \vec{\lambda} \in \ker [E]$$

Per rispettare l'equilibrio con:

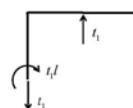
$$\vec{f} = 0 \rightarrow [E] \cdot \vec{\lambda} = 0$$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} \vec{\delta} \in \text{Im}[C] \\ \text{Im}[C] = [\ker[C]^T]^\perp \Rightarrow \text{Im}[C] = [\ker[E]]^\perp \\ [C]^T = [E] \end{cases}$$

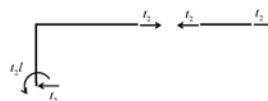
$$L_V = \vec{\lambda} \cdot \vec{\delta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{\delta} \in [\ker[E]]^\perp \\ \vec{\lambda} \in \ker E \end{cases} \Rightarrow \vec{\delta} \perp \vec{\lambda} \Rightarrow L_V = 0 \quad \blacksquare$$

Applicando il teorema delle forze virtuali all'esempio irrisolto precedente si ottiene che, considerando i due corpi separatamente:



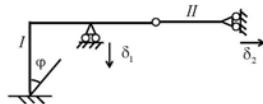
Posso utilizzare come parametro per trovare le restanti reazione, la reazione t_1 del carrello.

L'unico vincolo che può equilibrare la reazione del carrello è l'incastro che compensa anche il momento.



Utilizzo poi la reazione t_2 del carrello del secondo corpo. L'equilibrio del secondo corpo è garantito dalla cerniera interna, equilibrata dall'incastro.

E se fossero presenti cedimenti?



In una struttura di questo tipo non è detto che i cedimenti siano compatibili, bisogna ricorrere al teorema delle forze virtuali.

$$\begin{aligned} -t_1\delta_1 + t_1l\varphi &= 0 \Rightarrow \delta_1 = \varphi l \quad \forall t_1 \\ t_2\delta_2 - t_2l\varphi &= 0 \Rightarrow \delta_2 = \varphi l \quad \forall t_2 \end{aligned}$$

Infine:

Se $i = 0 \rightarrow \ker E = 0 \rightarrow \vec{\lambda} \cdot \vec{s} = 0 \quad \forall \vec{\delta}$

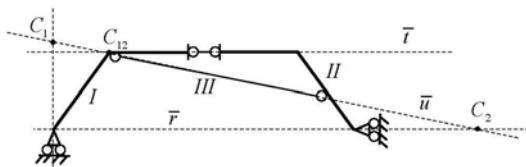
Se $i > 0$ e cioè la struttura è iperstatica, non è detto che qualsiasi cedimento sia compatibile ma bisogna ricorrere al teorema delle forze virtuale.

L'iperstaticità fornisce informazioni dell'esistenza delle soluzioni del problema della compatibilità, della cinematica.

	Statica esistenza Il problema statico Si risolve?	Statica unicità C'è soluzione di Equilibrio?	Compatibilità esistenza Esistono spostamenti Compatibili?	Compatibilità unicità Esiste la soluzione di compatibilità?
$\begin{cases} i = 0 \\ l = 0 \end{cases}$	\exists equilibrio $\forall \vec{f}$	$\exists!$ soluzione	\exists soluzione $\forall \vec{\delta}$	$\exists!$ Soluzione
$\begin{cases} i > 0 \\ l = 0 \end{cases}$	\exists equilibrio $\forall \vec{f}$	∞^i soluzioni	Soluzioni per alcuni $\vec{\delta}$	Se esiste $\exists!$ soluzione
$\begin{cases} i = 0 \\ l > 0 \end{cases}$	Equilibrio per alcuni \vec{f}	Se esiste $\exists!$ soluzione	\exists soluzione $\forall \vec{\delta}$	∞^l soluzioni
$\begin{cases} i = 0 \\ l = 0 \end{cases}$	Equilibrio per alcuni \vec{f}	Se esiste ∞^i soluzioni	Soluzioni per alcuni $\vec{\delta}$	Se esiste ∞^l soluzioni

- $\begin{cases} i \geq 0 \\ l \geq 0 \end{cases}$ perché sono dimensioni di spazi vettoriali;
- $3t - s > 0 \Rightarrow l > 0$ significa che esistono obbligatoriamente i centri di spostamento compatibili;
- $3t - s < 0 \Rightarrow i > 0$;
- $3t - s = 0 \Rightarrow l = i$ ma non è detto che la struttura sia isostatica.

Applicazione



Il terzo corpo, non essendo direttamente caricato ed avendo le stesse restrizioni cinematiche di un pendolo, può essere considerato un pendolo. Perciò se il corpo 3 è un pendolo ottengo:

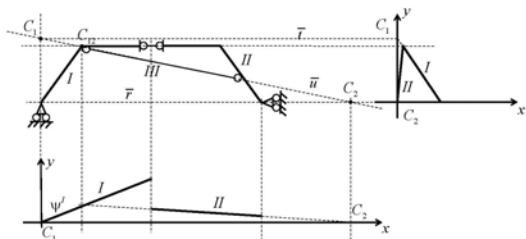
$$\begin{cases} t = 2 \\ s = 4 \end{cases} \Rightarrow 3t - s = 2 > 0 \Rightarrow \text{sicuramente esistono i centro di spostamento}$$

Siccome il centro relativo è fissato, mi basta scegliere la posizione di un centro assoluto per trovare immediatamente l'altro centro assoluto e dunque $g = 1 \Rightarrow l = g + 1 = 2$:

$$3t - s = l - 1$$

$$2 = 2 - i \Rightarrow i = 0$$

Da notare come per il corpo 2, lo spostamento assoluto dei centri di spostamento sia identico.



Metodo di Lagrange

Si tratta di un metodo per trovare la reazione vincolare di un singolo vincolo all'interno di una struttura. Ogni vincolo multiplo può essere rappresentato come una somma di vincoli semplici.

Si definisce vincolo essenziale un vincolo semplice che viene rappresentato da una riga indipendente della matrice C.

Quando un vincolo è essenziale, se viene eliminato varia il rango della matrice C, per cui varia la labilità della struttura.

Nell'esempio seguente i vincoli sono entrambi essenziali perché danno restrizioni differenti. Rimuovendone uno la labilità passerebbe da 1 a 2.

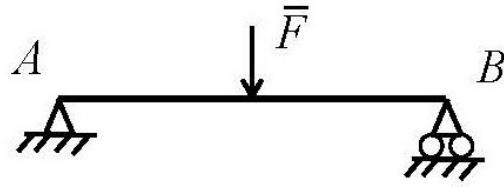


Si definisce vincolo sovrabbondante un vincolo semplice che può essere rappresentato da una riga dipendente nella matrice C .

Un vincolo sovrabbondante dà una restrizione cinematica che viene già fornita da un altro vincolo, per cui se viene eliminato non varia né il rango di C , né e la labilità della struttura né varia la possibilità di spostamento della struttura.

Perciò a partire da una struttura in equilibrio per conoscere la reazione di un singolo vincolo che sia semplice ed essenziale bisogna eliminare il vincolo e sostituirlo con una generica reazione vincolare che questo può esercitare e in seguito applicare il principio degli spostamenti virtuali.

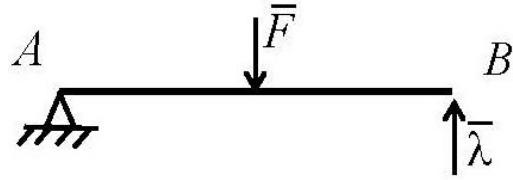
Struttura appoggio - appoggio



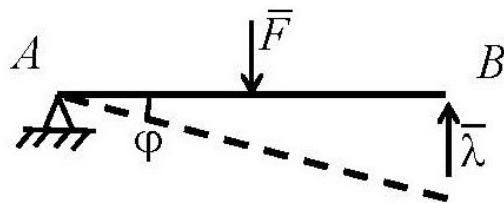
$$3t - s = 0 \Rightarrow l - i = 0 \Rightarrow l = i$$

$l = 0 \Rightarrow i = 0 \rightarrow$ La struttura è isostatica

Se voglio trovare la reazione vincolare in B, sostituisco il carrello con una forza vincolare.



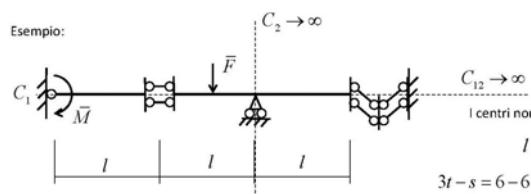
Poiché la struttura è in equilibrio applico il principio degli spostamenti virtuali agli spostamenti compatibili.



$$L_V = F\varphi \frac{l}{2} - \lambda\varphi l = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{F}{2}$$

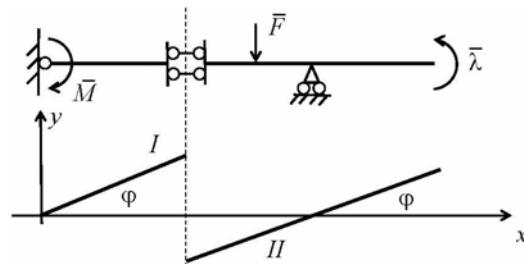
$$\vec{R} = \vec{\lambda} = \frac{F}{2}$$

Esempio



I 3 centri di spostamento non sono allineati $\Rightarrow l = 0 \Rightarrow 3t - s = 6 - 6 = 0 = l - i \Rightarrow 0 = 0 - i \Rightarrow i = 0$ e tutti i vincoli sono essenziali.

Da questo esempio si ricavi la reazione del doppio pendolo.
Si sostituisce la reazione vincolare del doppio pendolo (il momento angolare $\vec{\lambda}$) al posto del vincolo e si applica il principio degli spostamenti virtuali.

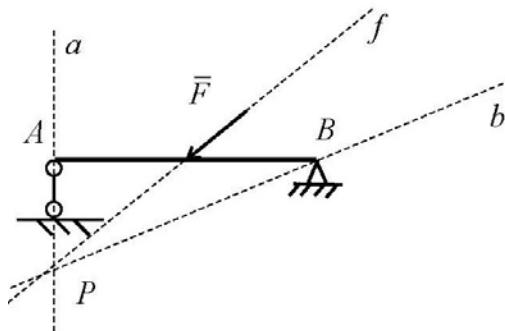


$$L_V = -M\varphi + F\varphi \frac{l}{2} + \lambda\varphi = 0$$

$$\lambda = M - F \frac{l}{2}$$

Metodo Grafico per le Reazioni Vincolari VALIDO SOLO PER STRUTTURE A IPERSTATICITÀ NULLA $i = 0$

Per la trave appoggio - appoggio
Si era trovato che era una struttura ad iperstaticità nulla e dunque isostatica.



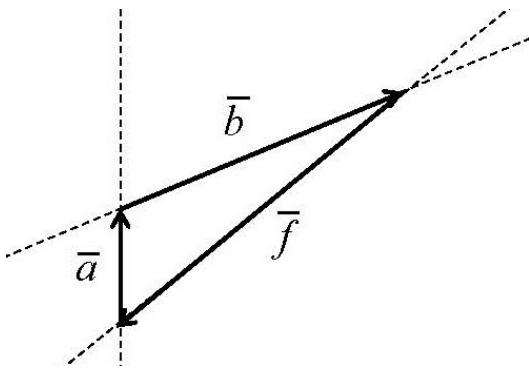
In questo caso si nota che la reazione del pendolo è parallela all'asse dello stesso ed è passante per A e la reazione della cerniera giace su una qualsiasi retta passante per B.

Siccome tre forze per essere in equilibrio devono concorrere in uno stesso punto, la retta b passerà dovrà incontrarsi dove si incontrano a ed f, per cui, l'equilibrio simbolico è dato da:

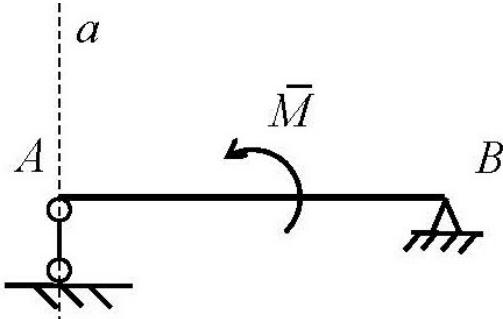
$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{f} = 0$$

I moduli delle forze sono così tali da formare dei triangoli chiusi formati da vettori che si rincorrono.

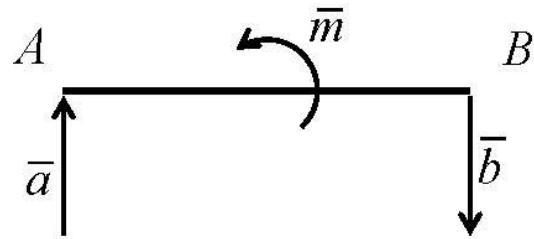
Per facilitare la visualizzazione del poligono chiuso traslo a in modo da chiudere in maniera arbitraria il triangolo, d'altro canto ciò che si conosce è su che retta agisce A e la direzione di F, il poligono si chiuderà con vettori che si devono rincorrere, in questo modo si sono trovati i verso delle reazioni vincolari ignote.



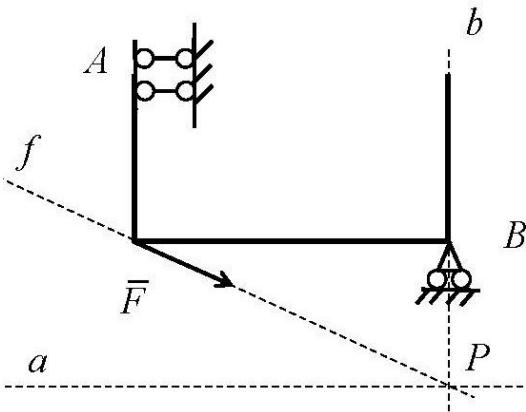
Trave appoggio - appoggio con momento concentrato



La reazione del pendolo è parallela all'asse dello stesso e passa per A.
Per rispettare l'equilibrio la reazione della cerniera in B dovrà essere parallela ad A, passante per B ed opposta a quella di A, con le direzioni relative date da M.
Quello che si deve rispettare è l'equilibrio a rotazione: un momento concentrato genera una coppia di forze oraria se M è antiorario, antioraria se M è orario.



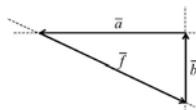
Esempio 2



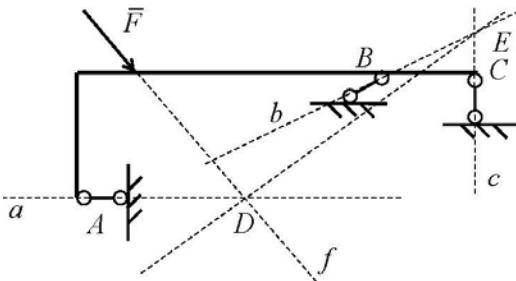
$$3t - s = 3 - 3 = 0; i = l = 0 \text{ e la struttura è isostatica}$$

Il vincolo in A contribuisce sia con una forza che con un momento, che per quanto ci riguarda è possibile vedere come una forza traslata di un braccio d la cui retta d'azione si può traslare dove serve.

Alla fine bisognerà ricordarsi che in A agirà una reazione trovata graficamente PIÙ un momento pari a $\vec{m}_a = \vec{d} \cdot \vec{P}\vec{A}_y$



Esempio 3 Forza



Le rette d'azione sono tutte fissate.

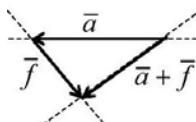
$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{f} = 0$$

Dal grafo della struttura si nota come sia comodo raggrupparle due a due in questo modo:

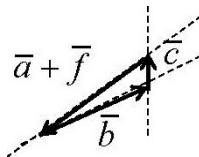
$$(\underline{a} + \underline{f}) + (\underline{c} + \underline{b}) = 0$$

Nella somma vettoriale di due vettori, questi si traslano in modo che l'origine di ognuno coincida con l'estremo del precedente. Il risultato si ottiene congiungendo l'origine del primo addendo con l'estremo dell'ultimo addendo.

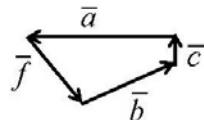
Si procede perciò calcolando la somma $(\underline{a} + \underline{f})$:



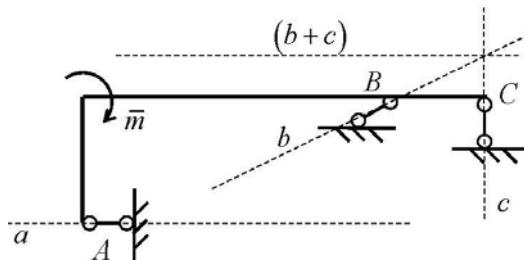
Ora che sono note 3 rette d'azione di tre vettori concorrenti in un punto (D), si può riscrivere un nuovo equilibrio per stabilire le direzioni dei vettori incogniti $\underline{c} + \underline{b}$, ricordando prima di tutto che questi nuovi vettori dovranno concorrere in un nuovo punto in comune (E) e che in una somma di tre vettori, questi devono "rincorrersi".



Stabilendo così la direzione di tutte le reazioni vincolari.



Esempio 3 Momento



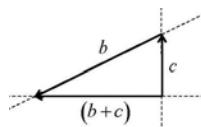
Le rette d'azione sono tutte determinate.

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{m} = 0$$

Dal grafo della struttura si nota come sia comodo raggrupparle in questo modo:

$$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) + \underline{m} = 0$$

Si trova con una certa rapidità che la somma $(\underline{b} + \underline{c})$ è una retta passante per l'intersezione di \underline{b} e \underline{c} .



Tale retta è parallela alla retta \underline{a} , perciò conoscendo la presenza di un momento orario, su \underline{a} e $(\underline{b} + \underline{c})$ agirà una coppia di forze antioraria.



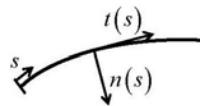
REMAINDER : un pendolo soggetto a trazione si chiama tirante, un pendolo soggetto a compressione si chiama puntone.

Note

MECCANICA DEI SOLIDI: PARTE 5

Caratteristiche della Sollecitazione

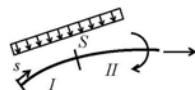
Si consideri un corpo monodimensionale, ovvero con una dimensione preponderante rispetto alle altre. Si fissi su di esso un'ascissa curvilinea e un riferimento formato da un asse normale ed un asse tangenziale all'asse del corpo.



Un corpo monodimensionale di questo tipo si dice trave.

Si carichi la struttura con un sistema di forze generico e autoequilibrato in modo

$$\text{che } \begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases} .$$

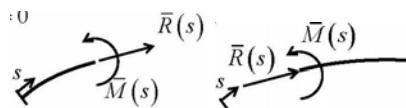


Si immagini di tagliare in S la trave in due tronchi in modo che:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}'' = 0 \\ \vec{M} = \vec{M}' + \vec{M}'' = 0 \end{cases}$$

Considerando l'applicazione di soli carichi esterni, i due corpi - ora separati - non sono più in equilibrio. Affinché il corpo 1 rimanga equilibrato è necessario applicare sulla sezione di taglio S le azioni che gli vengono comunicate dal corpo 2. Viceversa accadrà per il corpo 2.

I due tratti si scambiano così delle forze attraverso la sezione di taglio, di conseguenza se si carica la trave in un punto l'effetto si risconterà lungo tutta la sua lunghezza.



Si possono così definire i descrittori statici delle forze di interazione tra i due tratti, questi funzione dell'ascissa curvilinea:

$$\vec{R}(s)$$

$$\vec{M}(s)$$

In modo che si possano riscrivere gli equilibri per ogni corpo ottenuto dalla sezione:

$$\text{Equilibrio corpo 1} \begin{cases} \vec{R}' + \vec{R}(s) = 0 \\ \vec{M}' + \vec{M}(s) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Equilibrio corpo 2} \begin{cases} \vec{R}'' - \vec{R}(s) = 0 \\ \vec{M}'' - \vec{M}(s) = 0 \end{cases}$$

In questo modo si ottiene come:

- $\vec{R}(s)$ sia: $\begin{cases} \text{la risultante di tutte le forze che precedono la sezione di taglio, cambiata di segno;} \\ \text{la risultante di tutte le forze che seguono la sezione di taglio.} \end{cases}$
- $\vec{M}(s)$ sia: $\begin{cases} \text{la risultante di tutti i momenti che precedono la sezione di taglio, cambiata di segno;} \\ \text{la risultante di tutti i momenti che seguono la sezione di taglio.} \end{cases}$

Si definiscono le caratteristiche della sollecitazione come le proiezioni sul riferimento solidale all'ascissa curvilinea di $R(s)$ ed $M(s)$.

- **SFORZO DI TAGLIO:** azione trasferita lungo la direzione parallela alla sezione di taglio

$$T(s) = \vec{R}(s) \cdot \hat{n}$$

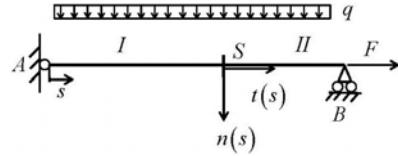
- **SFORZO NORMALE:** azione trasferita lungo la direzione ortogonale alla sezione di taglio

$$N(s) = \vec{R}(s) \cdot \hat{t}$$

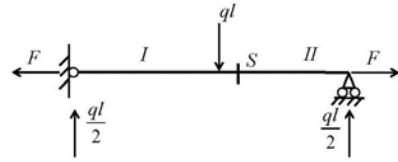
- **MOMENTO FLETTENTE:** momento il cui vettore agisce ortogonalmente al piano nt

$$M_f(s) = \vec{M}(s) \cdot \hat{k}$$

Esempio



A partire dal corpo 2 e ricordando che la risultante da considerare è quella che considera tutto ciò che accade a seguire rispetto alla sezione S , si ha:



$$\vec{R}(s) = \vec{R}'' = F\hat{i} + \frac{ql}{2}\hat{j} - q(l-s)\hat{j} = F\hat{i} + q\left(s - \frac{l}{2}\right)\hat{j}$$

$$\vec{M}(s) = \vec{M}'' = \frac{ql}{2}(l-s)\hat{k} - q(l-s)\frac{(l-s)}{2}\hat{k}$$

$$T(s) = \vec{R}(s) \cdot \hat{n} = -\vec{R}(s) \cdot \hat{j} = q\left(-s + \frac{l}{2}\right)$$

$$N(s) = \vec{R}(s) \cdot \hat{t} = \vec{R}(s) \cdot \hat{i} = F$$

$$M_f(s) = \vec{M}(s) \cdot \hat{k} = qs\frac{l-s}{2}$$

Considerando ora il corpo 1 e ricordando che la risultante da considerare è quella che considera tutto ciò che accade a precedere rispetto alla sezione S , si ha:

$$\vec{R}(s) = -\vec{R}' = -\left[-F\hat{i} + \frac{ql}{2}\hat{j} - qs\hat{j}\right] = F\hat{i} + q\left(s - \frac{l}{2}\right)\hat{j}$$

$$\vec{M}(s) = -\vec{M}' = -\left[-\frac{ql}{2}s\hat{k} + qs\frac{(s)}{2}\hat{k}\right]$$

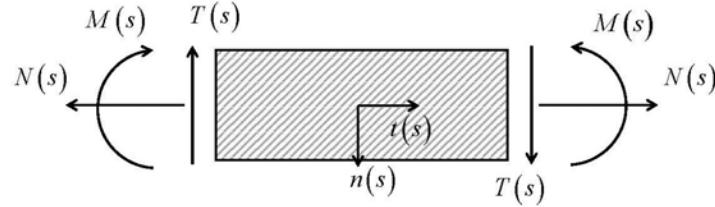
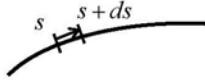
$$T(s) = \vec{R}(s) \cdot \hat{n} = -\vec{R}(s) \cdot \hat{j} = q\left(-s + \frac{l}{2}\right)$$

$$N(s) = \vec{R}(s) \cdot \hat{t} = \vec{R}(s) \cdot \hat{i} = F$$

$$M_f(s) = \vec{M}(s) \cdot \hat{k} = qs\frac{l-s}{2}$$

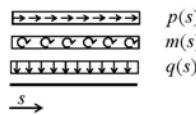
Concio Elementare

Un elemento di lunghezza infinitesima di trave si dice concio elementare.

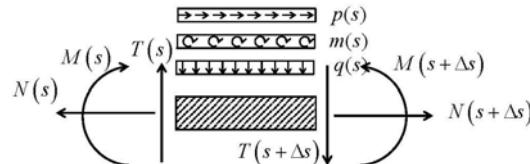


Equazioni Indefinite di Equilibrio

Si consideri una trave rettilinea in equilibrio con pendenza continua dell'asse e caricata esclusivamente con carichi distribuiti.



Si estratta da questa un concio elementare.



Le equazioni di equilibrio diverranno:

$$T(s + \Delta s) - T(s) + \int_s^{s+\Delta s} q(x) dx = 0$$

$$N(s + \Delta s) - N(s) + \int_s^{s+\Delta s} p(x) dx = 0$$

$$M(s + \Delta s) - M(s) - T(s + \Delta s)\Delta s + \int_s^{s+\Delta s} m(x) dx - \int_s^{s+\Delta s} q(x)(x - s) dx = 0$$

Per dimostrare che le funzioni sono continue si ponga essere $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \int_s^{s+\Delta s} q(x) dx \\ \int_s^{s+\Delta s} p(x) dx \\ \int_s^{s+\Delta s} m(x) dx - \int_s^{s+\Delta s} q(x)(x - s) dx \end{cases} \rightarrow 0$$

E allora:

$$T(s + \Delta s) - T(s) = 0$$

$$N(s + \Delta s) - N(s) = 0$$

$$M(s + \Delta s) - M(s) = 0$$

Dimostrando che le tre funzioni sono tutte e tre continue.

Si divida ora le stesse equazioni di equilibrio di partenza per $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{T(s + \Delta s) - T(s)}{\Delta s} + \frac{\int_s^{s+\Delta s} q(x)dx}{\Delta s} &= 0 \\ \frac{N(s + \Delta s) - N(s)}{\Delta s} + \frac{\int_s^{s+\Delta s} p(x)dx}{\Delta s} &= 0 \\ \frac{M(s + \Delta s) - M(s)}{\Delta s} - \frac{T(s + \Delta s)\Delta s}{\Delta s} + \frac{\int_s^{s+\Delta s} m(x)dx}{\Delta s} - \frac{\int_s^{s+\Delta s} q(x)(x-s)dx}{\Delta s} &= 0 \end{aligned}$$

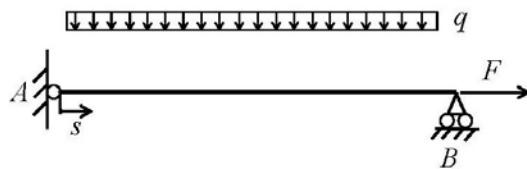
Ottenendo infine le **EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO**:

$$\frac{dT(s)}{ds} + q(s) = 0$$

$$\frac{dN(s)}{ds} + p(s) = 0$$

$$\frac{dM(s)}{ds} - T(s) + m(s) = 0$$

Si ritorni all'esempio precedente



Si nota come integrando le equazioni indefinite di equilibrio queste non pro-durranno una soluzione univoca ma genereranno costanti da definire attraverso opportune condizioni al contorno, queste valori particolari dei descrittori statici che si possono esprimere senza necessariamente eseguire dei calcoli.

$$\begin{cases} \frac{dT(s)}{ds} + q(s) = 0 \\ \frac{dN(s)}{ds} + p(s) = 0 \\ \frac{dM(s)}{ds} - T(s) + m(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(s) = -qs + C_2 \\ N(s) = C_1 \\ M(s) = -\frac{1}{2}qs^2 + sC_2 + C_3 \end{cases}$$

Condizioni al Contorno

Si osserva, in punti chiave della struttura, se ci sono applicati a precedere o a seguire momenti, sforzi normali o sforzi tangenziali:

- Ponendosi in A e osservando ciò che precede non ci sono momenti:

$$M(s = 0) = 0$$

- Ponendosi in B e osservando ciò che segue non ci sono momenti:

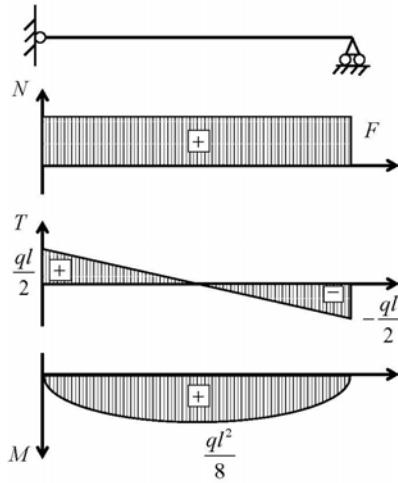
$$M(s = l) = 0$$

- Ponendosi in B e guardando ciò che segue, c'è F:

$$N(s = l) = F$$

Si sostituiranno queste condizioni al contorno nelle funzioni generali prima ottenute:

$$\begin{cases} M(s = 0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ M(l) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}ql \\ N(s = l) = F \Rightarrow C_1 = F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(s) = q\left(\frac{l}{2} - s\right) \\ N(s) = F \\ M(s) = -\frac{1}{2}qs^2 + -\frac{1}{2}qls \end{cases}$$



Si sono così ottenute le stesse identiche caratteristiche della sollecitazione ottenute prima, ma senza risolvere il problema statico, ovvero senza dover trovare le reazioni vincolari.

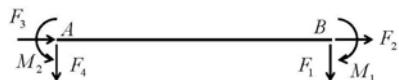
Le caratteristiche della sollecitazione si possono graficare

Come si è visto per ottenere la soluzione particolare associata alle equazioni indefinite di è necessario dobbiamo porre delle condizioni al contorno.

Queste dovranno essere conosciute a priori e riguarderanno solamente le forze agenti sulla trave e non le sue caratteristiche cinematiche.

Il numero di condizioni al contorno da individuare per ottenere le costanti di integrazione lo si ha solo se la struttura è isostatica.

Si tratta solitamente di condizioni al bordo, ovvero localizzate sul bordo del dominio di integrazione delle equazioni, legate alla presenza di vincoli o forze concentrate.



$$M(A) = -M_2$$

$$M(B) = M_1$$

$$T(A) = -F_4$$

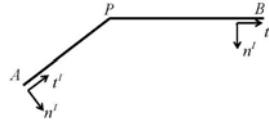
$$T(B) = F_1$$

$$N(A) = -F_3$$

$$N(B) = F_2$$

Altre fonti di condizioni al contorno possono essere le discontinuità di pendenza dell'asse della trave o la presenza di forze concentrate interne alla trave.

Discontinuità di pendenza

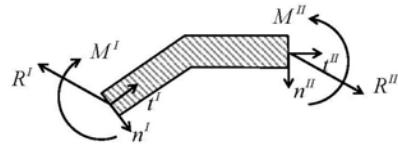


A e B sono i bordi del dominio fisico.

Presentando l'asse della trave una discontinuità, vengono meno le ipotesi di formulazione delle equazioni indefinite di equilibrio.

Quello che si fa è distinguere la trave in due domini matematici.

Si ponga essere il particolare concio elementare:

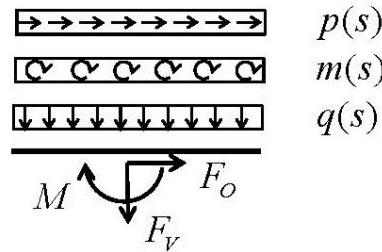


$$\begin{aligned} N'(P) &= \vec{R}' \cdot \hat{t}' \\ \vec{R}' &= -\vec{R}'' \\ \vec{M}' &= -\vec{M}'' \\ N''(P) &= \vec{R}'' \cdot \hat{t}'' = -\vec{R}' \cdot \hat{t}'' \\ T'(P) &= \vec{R}' \cdot \hat{n}' \\ T''(P) &= \vec{R}'' \cdot \hat{n}'' = -\vec{R}' \cdot \hat{n}'' \end{aligned}$$

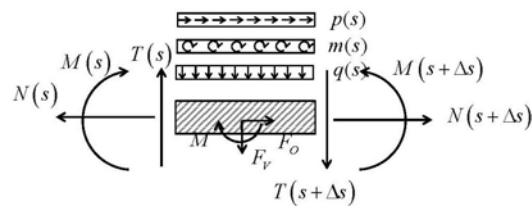
Sebbene il modulo delle reazioni vincolari rimanga lo stesso, è da notare che i versori tangenti variano direzione e questo basta ad affermare che N e T non sono continue in un intorno di P.

Ciò che rimane continuo nell'intorno di P è invece il momento M.

Presenza di forze concentrate



A causa delle forze concentrate non è garantita la continuità delle caratteristiche di sollecitazione, anche in questo caso è necessario dividere la trave in due domini di integrazione.



Le equazioni di equilibrio in forma integrale diventano così:

$$T(s + \Delta s) - T(s) + \int_s^{s+\Delta s} q(x)dx + F_V = 0$$

$$N(s + \Delta s) - N(s) + \int_s^{s+\Delta s} p(x)dx + F_O = 0$$

$$M(s + \Delta s) - M(s) - T(s + \Delta s)\Delta s + \int_s^{s+\Delta s} m(x)dx - \int_s^{s+\Delta s} q(x)(x-s)dx + M = 0$$

Per $\Delta s \rightarrow 0$:

$$T(s + \Delta s) - T(s) = -F_V$$

$$N(s + \Delta s) - N(s) = -F_O$$

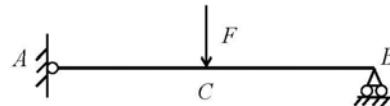
$$M(s + \Delta s) - M(s) = -M$$

Presentando una discontinuità di prima specie si conclude che nel caso di forze concentrate le caratteristiche della sollecitazione non sono continue.

È questa discontinuità che sarà necessario tenere in considerazione nell'assegnazione delle condizioni al contorno.

L'entità della discontinuità è pari al modulo del carico concentrato.

Esempio



Si divida il tratto di trave in due tratti AC e CB, se si sceglie di usare la stessa ascissa curvilinea per entrambe i tratti le equazioni indefinite di equilibrio restituiscono:

$$AC : \begin{cases} \frac{dT(s)}{ds} = 0 \\ \frac{dN(s)}{ds} = 0 \\ \frac{dM(s)}{ds} = T(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(s) = C_2 \\ N(s) = C_1 \\ M(s) = sC_2 + C_3 \end{cases}$$

$$CB : \begin{cases} \frac{dT(s)}{ds} = 0 \\ \frac{dN(s)}{ds} = 0 \\ \frac{dM(s)}{ds} = T(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(s) = C_5 \\ N(s) = C_4 \\ M(s) = sC_5 + C_6 \end{cases}$$

Condizioni al contorno/al bordo: cosa so sicuramente accadere alle estremità della struttura?

$$M_A = 0 \Rightarrow M_{AC}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$N_B = 0 \Rightarrow N_{CB}(l) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$M_B = 0 \Rightarrow M_{CB}(l) = 0 \Rightarrow lC_5 + C_6 = 0$$

Discontinuità C, ho una forza concentrata le caratteristiche della sollecitazione sono:

$$N_C^+ - N_C^- = 0 \Rightarrow N_{AC}\left(\frac{l}{2}\right) = N_{CB}\left(\frac{l}{2}\right) \Rightarrow C_1 = 0$$

$$M_C^+ - M_C^- = 0 \Rightarrow M_{AC}\left(\frac{l}{2}\right) = M_{CB}\left(\frac{l}{2}\right) \Rightarrow \frac{l}{2}C_2 + C_3 = \frac{l}{2}C_5 + C_6$$

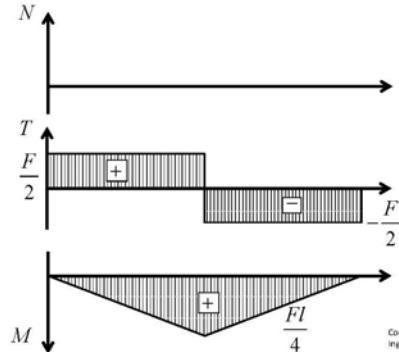
$$T_C^+ - T_C^- = 0 \Rightarrow T_{AC}\left(\frac{l}{2}\right) = T_{CB}\left(\frac{l}{2}\right) + F \Rightarrow C_2 = C_5 + F$$

Riorganizzando i risultati ottenuti:

$$AC : \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{F}{2} \\ C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AC} = \frac{F}{2} \\ N_{AC} = 0 \\ M_{AC} = s \frac{F}{2} \end{cases}$$

$$CB : \begin{cases} C_4 = 0 \\ C_5 = -\frac{F}{2} \\ C_6 = \frac{Fl}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{CB} = -\frac{F}{2} \\ N_{CB} = 0 \\ M_{CB} = s \frac{F}{2} + \frac{Fl}{2} = \frac{F}{2}(l-s) \end{cases}$$

Ricordando poi che il diagramma del momento flettente è sempre disegnato positivo dalla parte delle fibre tese:



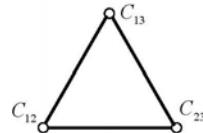
This box has a height of 1cm.

MECCANICA DEI SOLIDI: PARTE 6

Strutture Reticolari

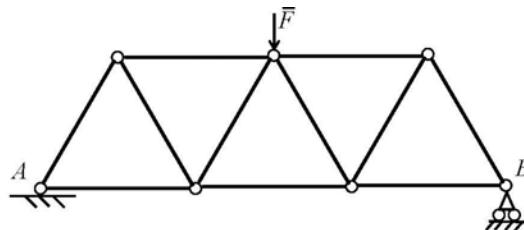
Una struttura reticolare è un tipo di struttura formata solamente da maglie triangolari, la sua particolarità risiede nel fatto che le aste non sono mai caricate e le forze e i momenti vengono applicati sui nodi della struttura.

A parità di resistenza è una struttura molto più leggera di qualunque struttura piana.



Per queste particolari strutture la labilità risulta nulla: internamente perché ogni terna di corpi a contatto non ha i centri relativi allineati, esternamente causa della natura dei vincoli in A e B.

Si può perciò considerare una struttura reticolare come un corpo unico.



Inoltre, poiché i tratti interni non sono direttamente caricati, si possono considerare come pendoli interni.

I vincoli, da sono sempre concepiti come applicati a corpi, in questo caso vengono applicati ai corpi-pendoli: nelle strutture reticolari i punti di collegamento tra i pendoli interni diventano i corpi su cui sono applicati in vincoli.

Poiché tra i vincoli sono interposti dei punti (le cerniere che sono diventate i corpi), allora questi non hanno rotazioni ma solo traslazioni.

Indicando con c il numero di cerniere, o il numero di punti di contatto, o i nodi della struttura reticolare; con a in numero di aste, o il numero di pendoli e con s_{ext} il numero di vincoli esterni, si ha che per una struttura reticolare vale:

$$l - i = 2c - (a - s_{ext})$$

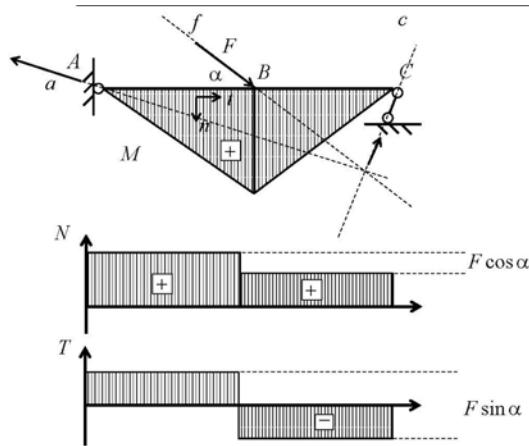
Diagramma di Momento Flettente

Le equazioni indefinite di equilibrio sono:

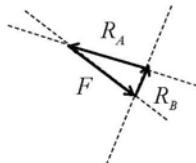
$$\begin{aligned}\frac{dN}{ds} + p(s) &= 0 \\ \frac{dT}{ds} + q(s) &= 0 \\ \frac{dM}{ds} - T(s) + m(s) &= 0\end{aligned}$$

L'integrazione di queste equazioni porta al disegno dei diagrammi corrispettivi.
ATTENZIONE nei punti di discontinuità della struttura e nell'applicazione di carichi concentrati, in questi casi sarà necessario applicare opportune condizioni di continuità negli intorni considerati.

Caso 1



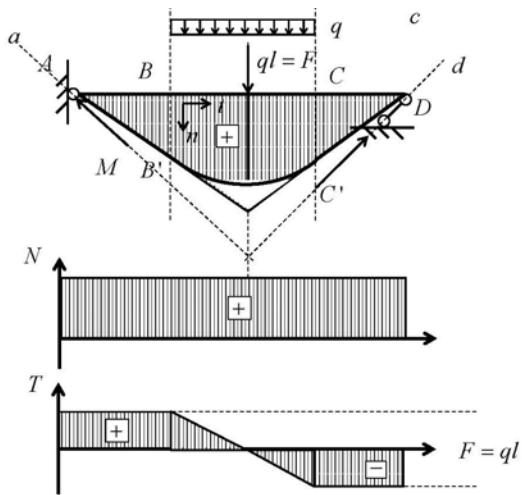
Con determinate direzioni vincolari e condizioni di continuità:



$$a + f + c = 0 \quad \begin{cases} \Delta N_B = N_B^+ - N_B^- = -F \cos \alpha \\ \Delta T_B = T_B^+ - T_B^- = -F \cos \alpha \end{cases}$$

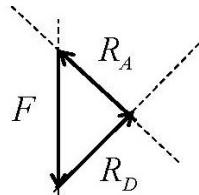
Notare come in B la discontinuità imposta dalla forza concentrata corrisponda ad uno scalino in Taglio e Normale ed ad una cuspide nel diagramma del Momento. La cerniera in A applica uno sforzo di taglio e uno sforzo normale, il pendolo in C applica uno sforzo normale in direzione dell'asse di C, e quindi in questo caso sia tangenziale che normale. La discontinuità sarà pari ai moduli normale e tangenziale della forza concentrata.

Caso 2



Con le determinate direzioni vincolari trovate

$$a + f + d = 0$$



La cerniera in A applica uno sforzo tangenziale e normale, il pendolo in C, anche lui applica uno sforzo normale e tangenziale.

In B' e C' il diagramma reale ha la stessa pendenza di quello dovuto alla Forza concentrata (T in B e C è uguale nei due casi).

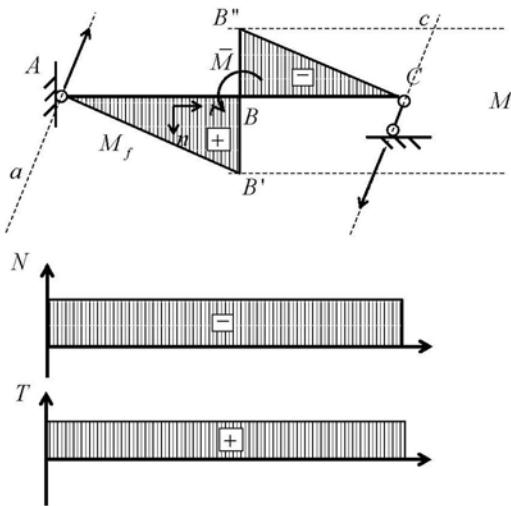
Non essendo applicato alcun sforzo normale, il diagramma risulterà costante, mentre essendo lo sforzo di taglio come se fosse applicato al centro, l'integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio restituisce una retta con pendenza negativa che si annulla nel punto di applicazione della forza, il diagramma del momento invece, restituisce una parabola, data dall'integrazione della retta dello sforzo di taglio.

Focus: Costruzione di una parabola



Siano P_1 e P_2 punti per i quali passa la parabola, siano t_1 e t_2 le rette tangenti alla parabola in P_1 e P_2 . Dato Q l'intersezione di t_1 e t_2 , M_i sono i punti medi dei segmenti P_iQ . La parabola passa per P_3 punto medio di M_1M_2 e ivi tangente a t_3 . Iterando il procedimento si ottiene la parabola.

Caso 3



Con le determinate direzioni vincolari trovate

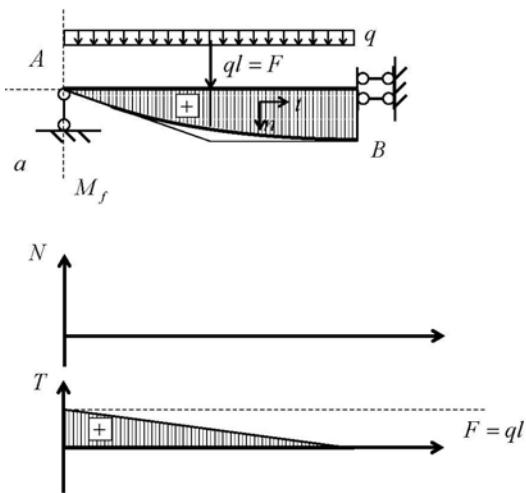
$$a + m + c = 0 \Rightarrow a \parallel c \quad \Delta M_B = M_B^+ + M_B^- = -M$$

$$AB' \parallel B''C$$

L'applicazione di un momento concentrato porta alla creazione di una coppia di forze/reazioni vincolari uguali e opposte, non essendoci l'applicazione diretta di sforzi normali o tangenziali i diagrammi di questi risulteranno costanti pari ai valori assunti da questi sforzi negli intorni della cerniera e del carrello .

Essendo, come detto, il taglio costante il diagramma del momento sarà una retta di pendenza costante che si annulla negli intorni dei vincoli che non esplicano momento (in questo caso cerniera e carrello); la discontinuità data dal momento concentrato sarà pari al valore del momento concentrato, e il diagramma sarà la composizione di due rette parallele posizionate rispettivamente dove sono le fibre tese e quelle scariche.

Caso 4



Con le determinate direzioni vincolari trovate:

$$a + f + b = 0$$

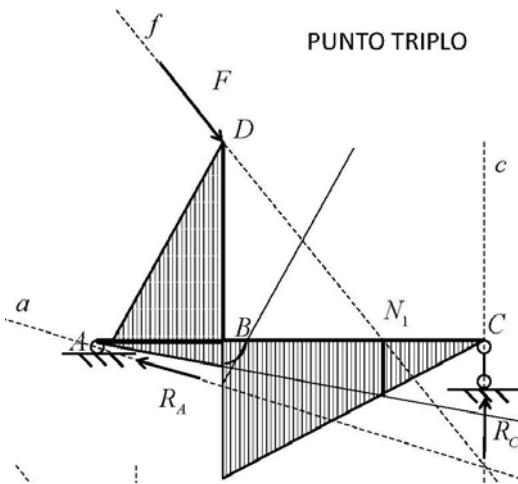
Il carico è distribuito ma si può vedere come se fosse concentrato e applicato a metà della struttura. Il pendolo in A, così disposto, non esplica alcuno sforzo normale ma solo uno sforzo di taglio. Il doppio pendolo in B esplicherà un momento.

Il diagramma dello sforzo normale sarà nullo.

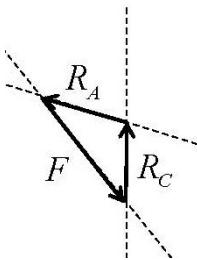
Il diagramma dello sforzo tangenziale sarà una retta dal valore costante che scende da un massimo dato dalla reazione vincolare del carrello di valore pari alla forza distribuita, e si annullerà dove sarà nullo lo sforzo di taglio, in B, nell'intorno del doppio pendolo.

Il diagramma del momento sarà nullo negli intorni del pendolo per poi crescere fino al valore ottenuto per il doppio pendolo, suo massimo, con andamento parabolico dato dall'integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio.

Punto Triplo



Dopo aver trovato le reazioni vincolari attraverso il metodo grafico, si procede all'analisi della struttura e al disegno del diagramma del momento flettente.



1. AB: non esiste BD

Il diagramma del momento si annulla sulla cerniera in A, ma dato che questa fornisce uno sforzo di taglio, il diagramma falso che si ottiene avrà pendenza costante. In C non c'è alcuna applicazione né di sforzo di taglio né di momento.

2. BC: non esiste BD

Il diagramma falso del momento che si ottiene avrà punto di nullo in C e dato che il carrello esplica uno sforzo di taglio, tale diagramma rimarrà costante.

La vera pendenza del diagramma in C si otterrà considerando che F incontra la struttura in N_1 e in quel punto incontra anche il diagramma falso ottenuto nel passo precedente.

3. BD: non esiste BC

Il diagramma falso lo si ottiene ribaltando per continuità quello vero.

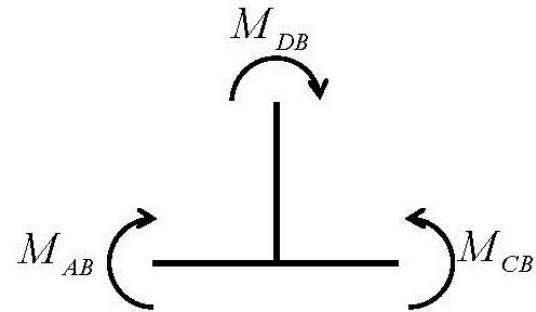
La pendenza post-ribaltamento si ottiene considerando la retta d'azione della reazione vincolare in A: il diagramma cercato avrà punto di nullo passante per quella retta e pendenza data dal ribaltamento.

Il diagramma vero in BD lo si ottiene considerando che avrà la stessa pendenza del diagramma falso appena trovato, traslato in modo da avere, dove la forza incontra la struttura, punto di nullo in F.

4. Diagramma vero

Il diagramma vero si otterrà considerando il diagramma falso nel primo punto troncato in B, il diagramma falso del secondo punto troncato in B e il diagramma vero ottenuto dal terzo punto.

Per verifica della costruzione si valuta l'equilibrio a rotazione in B, aiutandosi con la convenzione delle fibre tese:



Il cui i moduli dei momenti $M_{AB} + M_{DB} = M_{CB}$ sono proporzionali alle altezze dei triangoli tracciati nel diagramma.

This box has a height of 1cm.

MECCANICA DEI SOLIDI: PARTE 7

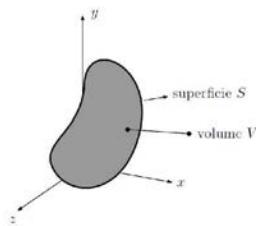
Meccanica del continuo

Analisi dello stato di tensione

Si consideri il caso generico di un solido tridimensionale soggetto a:

- Forze di volume $f(x, y, z)$;
- Forze di superficie $p(x, y, z)$

Si analizzi il solido nella sua configurazione indeformata, considerando cioè trascurabili gli spostamenti dei punti del solido dovuti all'applicazione dei carichi. Si consideri un solido deformabile in equilibrio sotto l'azione di forze esterne:

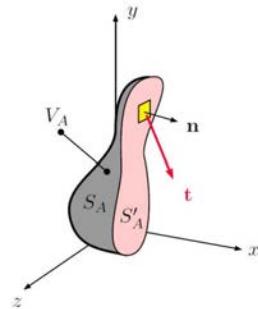


$$\int_S p(x, y, z) dS + \int_V f(x, y, z) dV = 0$$

Si tagli il solido considerato con un piano A.

Se il solido di partenza era in equilibrio, ciascuno dei due solidi così ottenuti rimarrà in equilibrio.

Si suppone così la presenza sul piano di sezione di forze superficiali $t(x, y, z)$.



Indicando con S_A la superficie esterna di uno dei due solidi, con S'_A la superficie della sezione e con V_A il relativo volume, si ha:

$$\int_{S_A} p(x, y, z) dS + \int_{S'_A} t(x, y, z) dS + \int_V f(x, y, z) dV = 0$$

Sia dato un punto P della sezione individuato dal vettore posizione $\vec{r}(x, y, z)$. Si è visto così che su tale punto agiranno delle forze di superficie t il cui valore dipenderà anche dalla giacitura del piano di sezione:

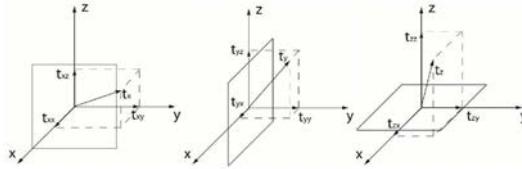
$$t(\vec{r}, \hat{n})$$

Poiché però nel punto P si hanno infinite giaciture \vec{n} , si hanno infiniti valori di t_n : il suo complesso costituisce proprio lo stato di tensione in P.

Si supponga di conoscere i valori di t nel punto P lungo le tre giaciture individuate dalle basi del nostro sistema di riferimento ortonormale:

$$t_x = \begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{xy} \\ t_{xz} \end{pmatrix} \quad t_y = \begin{pmatrix} t_{yx} \\ t_{yy} \\ t_{yz} \end{pmatrix} \quad t_z = \begin{pmatrix} t_{zx} \\ t_{zy} \\ t_{zz} \end{pmatrix}$$

In cui si possono ulteriormente individuare i tre valori di t nel punto P lungo le giaciture perpendicolari, rispettivamente, alle basi \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} .



Si noti come:

- Il primo indice caratterizza la giacitura;
- Il secondo indice descrive l'asse secondo il quale è diretta la componente;
- Le componendi di indici uguali sono le tensioni normali sulle tre giaciture;
- Le componenti con indice diverso sono invece le componenti di tensione tangenziale.

Teorema di Cauchy

La conoscenza delle tensioni su tre distinte giaciture in P è sufficiente a determinare la tensione su ogni altra giacitura in P.

Se si assume come terna di giaciture quelle ortogonalali all'asse, le tensioni che si suppongono note sono:

$$t_x = \begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{xy} \\ t_{xz} \end{pmatrix} \quad t_y = \begin{pmatrix} t_{yx} \\ t_{yy} \\ t_{yz} \end{pmatrix} \quad t_z = \begin{pmatrix} t_{zx} \\ t_{zy} \\ t_{zz} \end{pmatrix}$$

Data una generica giacitura di normale \hat{n} , la tensione su di essa sarà:

$$t_n = \begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix}$$

Per il Teorema di Cauchy:

$$\begin{cases} t_{nx} = t_{xx}n_x + t_{yx}n_y + t_{zx}n_z \\ t_{ny} = t_{xy}n_x + t_{yy}n_y + t_{zy}n_z \\ t_{nz} = t_{xz}n_x + t_{yz}n_y + t_{zz}n_z \end{cases}$$

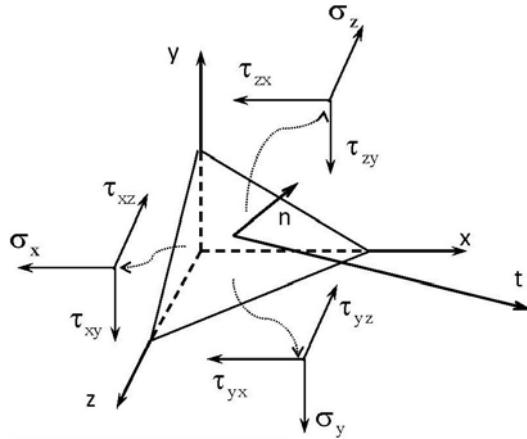
E lo stato di tensione in P diventa noto a partire dalla matrice 3x3:

$$t_n = \begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = [t]\hat{n}$$

In cui $[t]$ è il tensore degli sforzi, ben più noto nella seguente forma:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Si consideri ora un tetraedro infinitesimo con un vertice nel punto P, tre facce normali agli assi e una quarta secondo la giacitura \hat{n} .



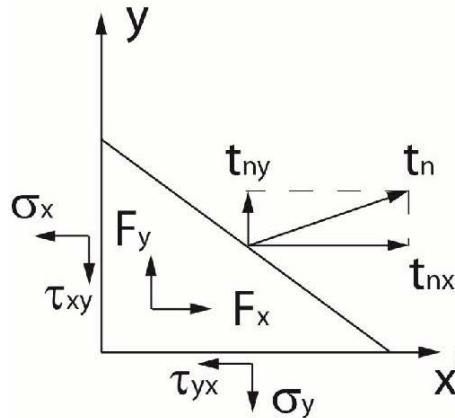
Nota dA l'area della giacitura in \hat{n} le altre aree saranno:

$$dA_x = dAn_x$$

$$dA_y = dAn_y$$

$$dA_z = dAn_z$$

Si scriva - uno per tutti - l'equilibrio in direzione x :



$$t_{nx}dA - \sigma_xdAn_x - \tau_{yx}dAn_y - \tau_{zx}dAn_z + F_xdV = 0$$

Ricordando che il tetraedro è infinitesimo:

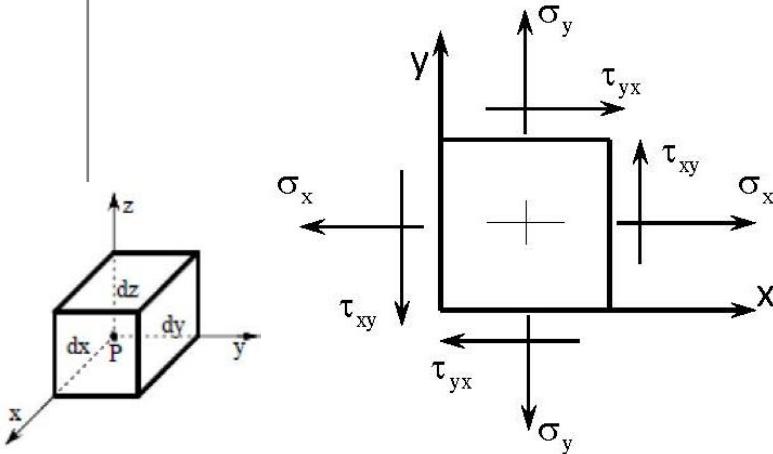
$$dV \rightarrow 0$$

Si giunge a:

$$t_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z$$

Simmetria dello stato di tensione

Si consideri un parallelepipedo infinitesimo con un vertice nel punto P individuato dal vettore posizione \vec{r} ed avente spigoli di lunghezza dx, dy, dz . Imponendo l'equilibrio a rotazione lungo un asse parallelo all'asse z e passante per il baricentro, si ottiene:



$$(\tau_{xy}dzdy)dx - (\tau_{yx}dxdz)dy = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Equivalentemente:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

E il tensore degli sforzi è simmetrico

Equazioni indefinite di equilibrio

Le condizioni esterne agenti sul corpo in equilibrio devono soddisfare le equazioni cardinali della statica.

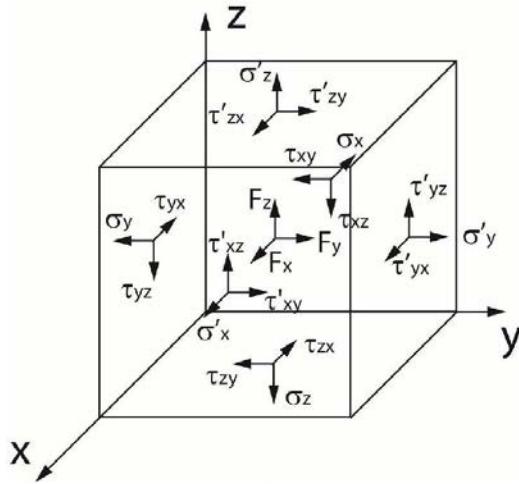
Localmente devono però essere valide ulteriori relazioni di equilibrio, queste valide in tutti i punti del corpo, che leghino le tensioni alle forze esterne.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \sigma + \vec{F} = 0$$

Sono dette equazioni indefinite di equilibrio alla traslazione.

Si consideri un parallelepipedo infinitesimo con un vertice in P e spigoli dx, dy, dz .



$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx & \sigma'_y &= \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy & \sigma'_z &= \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \\ \tau'_{xy} &= \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx & \tau'_{yx} &= \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy & \tau'_{zx} &= \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \\ \tau'_{xz} &= \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx & \tau'_{yz} &= \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy & \tau'_{zy} &= \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\end{aligned}$$

Si imponga a questo punto l'equilibrio a traslazione in direzione x:

$$-\sigma_x dy dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \\ -\tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + F_x dx dy dz = 0$$

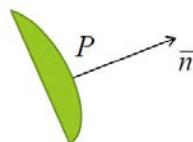
Quello che rimane dopo le opportune semplificazioni è:

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x \right) dx dy dz = 0$$

E dunque:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

In maniera analoga però sul contorno del corpo dovranno essere valide ulteriori relazioni di equilibrio, valide in tutti i punti del contorno, che leghino le tensioni alle forze di superficie.



Analogamente al Teorema di Cauchy considerando in questo caso le tensioni della generica giacitura come le forze di superficie applicate, si ottiene:

$$\begin{cases} p_x = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ p_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ p_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{cases}$$

Dove n_x, n_y, n_z identificano i coseni direttori della normale esterna sul contorno del corpo.

In questo modo assegnate ad un corpo le forze di volume e quelle di superficie, le equazioni fin'ora proposte costituiscono un sistema di:

- 3 equazioni differenziali lineari
- 3 equazioni al contorno lineari

Nelle quali, tenendo in considerazione la simmetria del tensore, sono presenti;

► 6 incognite

Tali equazioni sono valide a prescindere dalla deformazione del corpo (quindi anche se il corpo è rigido).

Tuttavia il problema risulta indeterminato, per cui saranno necessarie ulteriori relazioni costitutive, queste ricavabili a partire dalle deformazioni.

Direzioni e Tensioni Principali

In un punto P su una generica giacitura di normale \hat{n} agisce una tensione t_n con componente normale σ e componente tangenziale τ .

Esistono tre giaciture ortogonali tra loro che presentano tensioni con componenti solo normali. Esse si dicono giaciture principali e le loro normali direzioni principali. L'insieme delle direzioni definisce una terna principale (ortogonale). Le tensioni sulle giaciture principali (tutte tensioni normali) sono dette tensioni principali.

$$\begin{cases} \text{Giacitura Generica} \\ t_x = \sigma n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ t_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Giacitura Principale} \\ t_x = \sigma n_x \\ t_y = \sigma n_y \\ t_z = \sigma n_z \end{cases}$$

Si può dunque scrivere:

$$\begin{cases} \sigma n_x = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ \sigma n_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ \sigma n_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0 \\ \tau_{xy} n_x + (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_{zy} n_z = 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + (\sigma_z - \sigma) n_z = 0 \end{cases}$$

Dove si possono identificare: le componenti note delle tensioni rispetto alla terna x, y, z di partenza; i coseni direttori n_x, n_y, n_z , della direzione principale ricercata espressi rispetto alla terna x, y, z ; infine σ come tensione principale corrispondente.

La soluzione banale che prevede tutti i coseni pari a 0 non è accettabile in quanto:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Per cui, attraverso i teoremi dell'algebra lineare, si ottiene che le soluzioni si ottengono imponendo il determinante della matrice dei coefficienti nullo:

$$\det \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{bmatrix} = 0$$

La cui soluzione si ottiene attraverso un'equazione di terzo grado chiamata Equazione Secolare:

$$\sigma^3 + I\sigma^2 + II\sigma + III = 0$$

In cui:

-

$$I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

-

$$II = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{zy}^2$$

-

$$III = \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

I termini I, II, III sono detti invarianti principali della tensione perché ruotando gli assi x, y, z il loro valore non varia.

Le tre radici $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ dell' equazione secolare sono le tre tensioni principali.

Sostituendo la tensione principale nel sistema di partenza si ottengono (con l'aiuto dell'equazione di definizione dei coseni direttori) i valori della terna di coseni direttori che definisce la corrispondente direzione principale.

Se sei assume che:

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

Allora:

- σ_I è la massima tra tutte le tensioni riscontrabili nel punto P.
- σ_{III} è la minima tra tutte le tensioni riscontrabili nel punto P.

Definizione alternativa di terna principale: Terna assi per la quale il tensore delle tensioni è una matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

Stati di Tensione

- Stato di tensione Cilindrico

$$\sigma_I = \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$$

Tutte le direzioni ortogonali a quella corrispondente a σ_{III} sono principali.

- Stato di tensione Sferico

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$$

Tutte le direzioni nel punto P sono principali.

- Stato di tensione Triassiale

Tutte le tensioni principali sono non nulle, diverse da 0.

- Stato di tensione Biassiale

Una tensione principale è nulla, uguale a 0.

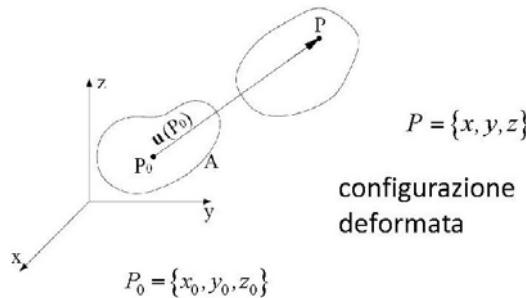
- Stato di tensione Monoassiale

Due tensione principali sono uguali a 0.

- Stato di tensione Nullo

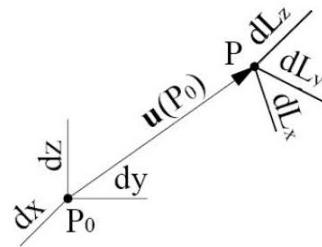
Tutte le tensione principali sono uguali a 0.

Deformazione



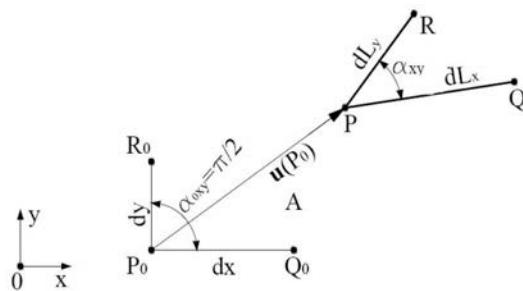
Si indichi lo spostamento del punto P:

$$\begin{aligned} u &= u_x = x - x_0 \\ v &= u_y = y - y_0 \\ w &= u_z = z - z_0 \end{aligned}$$



La terna di elementi lineari dx, dy, dz nella configurazione deformata si trasforma in dL_x, dL_y, dL_z in cui ogni elemento ha modificato la sua lunghezza e le terne non sono più ortogonali tra loro.

Si riporta per semplicità una visualizzazione in due dimensioni sul piano xy ma in tre dimensioni è anche possibile che P, dL_x e dL_y non siano neanche più appartenenti al piano xy .



Definisco le dilatazioni lineari:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{PQ - P_0Q_0}{P_0Q_0}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{PR - P_0R_0}{P_0R_0}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{PS - P_0S_0}{P_0S_0}$$

Definisco gli scorrimenti angolari o distorsioni:

$$\gamma_{xy} = \alpha_{0xy} - \alpha_{xy}$$

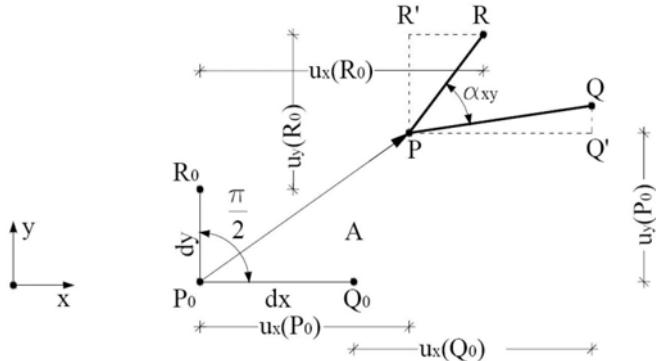
$$\gamma_{xz} = \alpha_{0xz} - \alpha_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \alpha_{0yz} - \alpha_{yz}$$

In modo che:

$$\alpha_{0xy} + \alpha_{0xz} + \alpha_{0yz} = \frac{\pi}{2}$$

Per ottenere una relazione lineare tra spostamenti e dilatazioni si ipotizza la configurazione deformata molto "vicina" a quella indeformata, e dunque gli spostamenti saranno infinitesimi. Nell'ambito della teoria lineare si trascureranno poi tutti i termini del secondo ordine.



$$u_x(Q_0) = u_x(x + dx, y, z) = u_x(P_0) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_{P_0} dx$$

$$u_y(Q_0) = u_y(x + dx, y, z) = u_y(P_0) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)_{P_0} dx$$

$$u_x(R_0) = u_x(x, y + dy, z) = u_x(P_0) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{P_0} dy$$

$$u_y(R_0) = u_y(x, y + dy, z) = u_y(P_0) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)_{P_0} dy$$

Dunque:

$$dL_x \approx dx + u_x(Q_0) - u_x(P_0) = dx + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_{P_0} dy$$

Allora:

$$\begin{aligned} \alpha_{0xy} - \alpha_{xy} &= \frac{\pi}{2} - \alpha_{xy} = Q' \hat{P} Q + R \hat{P} R' = \\ &= \frac{|u_y(Q_0) - u_y(P_0)|}{dx} + \frac{|u_x(R_0) - u_x(P_0)|}{dy} = \\ &= \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)_{P_0} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{P_0} \end{aligned}$$

Perciò:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{dL_x - dx}{dx} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_{P_0} \text{ Dilatazione lineare lungo } x \\ \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{xy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)_{P_0} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{P_0} \text{ Distorsione dell'angolo retto } \alpha_{0xy} \end{array} \right.$$

Attraverso un procedimento equivalente, considerando le altre direzioni si ottengono infine le **Relazioni implicite di Congruenza per lo Stato di Deformazione al I ordine**

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{zz} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \gamma_{zx} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{aligned} u(Q) &= u(P) + du \\ du &= [du_x, du_y, du_z] \\ du_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \\ du_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \\ du_z &= \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \\ \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \\ u_z(Q) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \\ u_z(P) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definisco in questo modo la matrice F , somma di una componente simmetrica e di una antisimmetrica:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = E + \Omega$$

$$E = \frac{1}{2}[F + F^T] \text{ Deformazione}$$

$$\Omega = \frac{1}{2}[F - F^T] \text{ Rotazione}$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Definisco il Tensore di Cauchy:

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

E le componenti del tensore di Cauchy divengono:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{cases}$$

Si trova così che anche la deformazione si descrive mediante un tensore, anche in questo caso sono definite le tre direzioni principali ove la terna elementare di elementi lineari non si distorce durante la deformazione e nel caso di corpo isotropo le direzioni principali del tensore deformazione coincidono con quelle del tensore di tensione.

Dato un campo di spostamenti, ad esso corrisponde sempre uno stato di deformazione.

Ad un campo di deformazione non corrisponde necessariamente un campo di spostamenti: si possono trattare deformazioni non compatibili.

Il sistema di equazioni differenziali proposto non è sempre integrabile.

Si Consideri il corpo come un insieme di volumi infinitesimi, la cui deformazione è dettata, nell'intorno infinitesimo di un punto, dalle derivate precedentemente introdotte.

Il loro valore non potrà essere arbitrario e indipendente, ma deve essere compatibile con i volumi adiacenti per non generare compenetrazioni o separazioni.

Le condizioni di integrabilità sono state espresse da Saint Venant e Beltrami e sono denominate equazioni esplicite di compatibilità o congruenza.



Legame Costitutivo

Si tratta delle equazioni costitutive che legano tensioni e deformazioni e caratterizzano il materiale del corpo.

Comportamento ideale del materiale:

- Elastico
- Plastic
- Viscoso
- Elasto plastico
- Visco plastico
- ...

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{hk}, t)$$

Ci si occupi, per ora, del solo comportamento elastico lineare, per cui si ognisiasi influenza della «storia» precedente di carico: elasticità del I ordine.

Ci si ponga nelle ipotesi di materiale isotropo: il suo comportamento non dipende dalla direzione di sollecitazione.

Ci si ponga nelle ipotesi di materiale omogeneo: le grandezze caratteristiche del materiale sono uniformi.

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} \\ \varepsilon_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G} \end{cases}$$

Dove definisco:

- Modulo elastico tangenziale

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Modulo di Young o Elasticità normale

$$E > 0$$

- Coefficiente di Poisson

$$-1 < \nu < 0.5$$

In cui solo de sono indipendenti.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

E dunque

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix}$$

Stato di Tensione Piano: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{zz} = 0$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Ci si accorge però che la condizione $-\nu = -\nu = 0$ non è necessaria perciò non considerandola, si determina la matrice di rigidezza in condizioni di tensione piana:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Lo stato di deformazione è tridimensionale

Stato di deformazione Piano: $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Dove anche qui la condizione $-\nu = -\nu = 0$ non è necessaria.

Lo stato di tensione è tridimensionale.

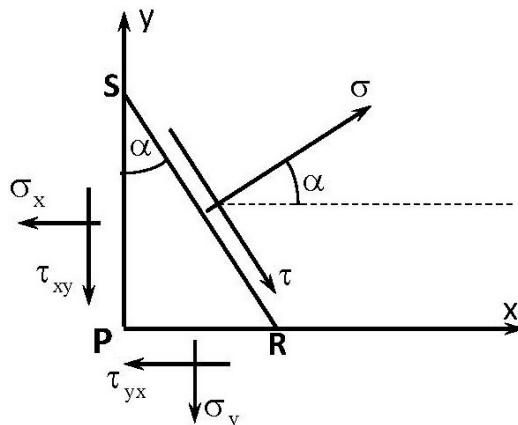
Materiale	E [Gpa]	v	α [$^{\circ}\text{C}^{-1}$] 10^{-5}	σ_y [Mpa]	σ_{RT} [Mpa]	σ_{RC} [Mpa]
Acciaio al carbonio	206	0.3	0.17			
Acciaio legato	206	0.3	0.18			
Acciaio inox	190	0.3	0.17			
Ghisa	103	0.26				
Leghe di Al	72	0.32	2.35			
Bronzo	110	0.33				
Leghe di Mg	45	0.35				
Leghe di Ti	114	0.33	0.90			
Rame	120	0.36	1.69			
Calcestruzzo	25-30		0.99			
Muratura	30					
Marmo	55					
Legno	9-15					
Gomma	<1	0.49				

Circonferenze di Mohr

Le circonference di Mohr descrivono lo stato di tensione rispetto ad un fascio di piani avente per sostegno un asse che coincide con una direzione principale. Esse sono una rappresentazione bidimensionale dello stato di tensione tridimensionale in un punto P.

Tale rappresentazione non ha senso se non è nota almeno una delle direzioni principali.

$$\text{HP: } \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \forall \sigma_z$$



Si assume che $\tau > 0$ se il momento è orario. In tal modo rotazioni nel riferimento geometrico e nel piano di Mohr hanno lo stesso verso

$$PS = RS \cos \alpha$$

$$PR = RS \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \sigma_x \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + \sigma_y \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(\alpha) &= \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \cos^2 \alpha = \\ &= -\tau_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Se poi x-y è un sistema principale $\tau_{xy} = 0$ si hanno le equazioni parametriche di una circonferenza nel piano $\sigma\tau$:

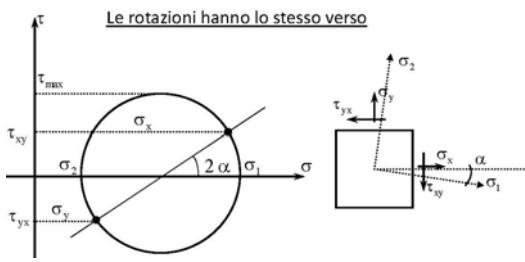
$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha \\ \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha \end{cases}$$

Infatti posto:

$$\begin{cases} \delta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{Spostamento del centro della circonferenza dall'origine} \\ \rho = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad \text{raggio della circonferenza} \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma - \delta = \rho \cos 2\alpha \\ \tau = \rho \sin 2\alpha \end{cases} \Rightarrow (\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$



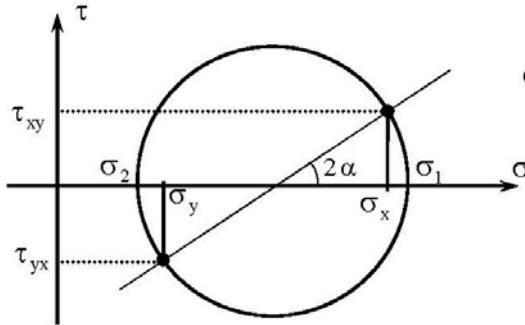
NB: Rotazioni di 2α nel piano di Mohr corrispondono a rotazioni di α nel piano fisico.

Per calcolare l'angolo α tra la giacitura principale ed una generica giacitura, se è ivi noto lo stato tensionale, basta porre $\tau = 0$ in:

$$\tau(\alpha) = -\tau_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha \Rightarrow \begin{cases} \tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \\ \alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \end{cases}$$

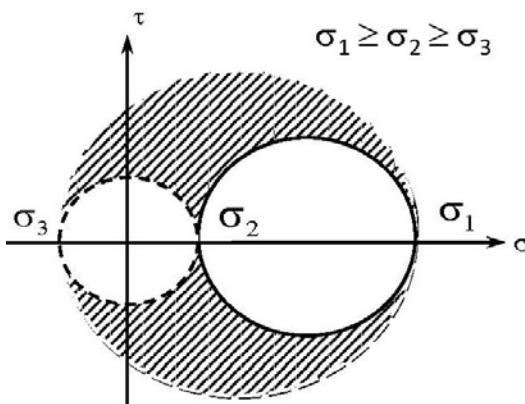
Oppure, dai cerchi di Mohr, tramite relazioni trigonometriche.

Se, sempre nella generica giacitura, è noto lo stato tensionale, allora è possibile calcolare i valori delle tensioni principali dal teorema di Pitagora:



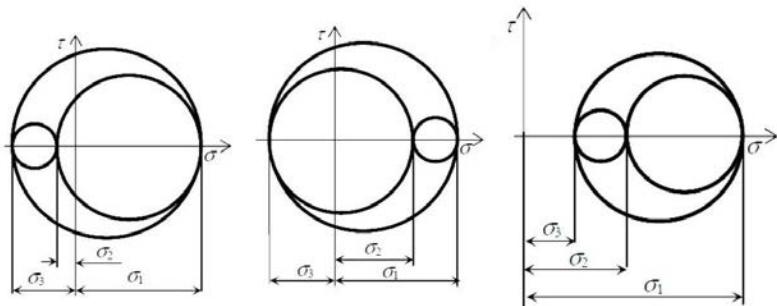
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Considerando gli altri due fasci di piani aventi per sostegno gli assi coincidenti con le altre due direzioni principali, si ottiene la rappresentazione tridimensionale dello stato di tensione nel punto P.

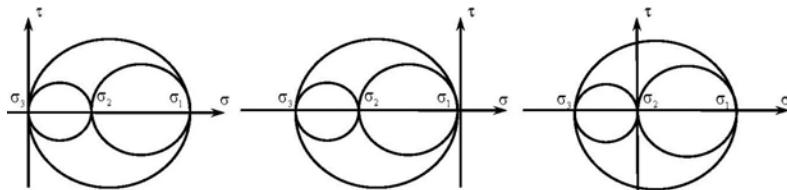


In una direzione non principale, le tensioni si posizionano nell'area tratteggiata.

$$\sigma_1 > 0 \quad \sigma_3 < \sigma_2 < 0 \quad \sigma_1 > \sigma_2 > 0 \quad \sigma_3 < 0 \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$$



Sollecitazione piana



Solo trazione

Solo compressione

Mista

Monodimensionale - trazione

Monodimensionale - compressione

Tensione idrostatica: Le circonferenze degenerano in un punto.
I cerchi di Mohr sono definiti anche per il tensore deformazione.

Principio del Lavori Virtuali per Corpi Deformabili

Si consideri un corpo Ω soggetto a dei carichi superficiali p e di volume f .

Si supponga che il corpo, a seguito di una eventuale deformazione, raggiunga una condizione di equilibrio tra i carichi esterni e lo stato di tensione interno.

$$\nabla \cdot [\sigma] + \vec{f} = 0 \\ \vec{p} = [\sigma]\hat{n}$$

Si introduca un campo di spostamenti s' indipendenti dai carichi applicati.

Ne deriva un campo di deformazioni espresso dal tensore delle deformazioni sotto l'ipotesi di garanzia della compagine.

Il sistema di forze applicato compie un lavoro virtuale in presenza degli spostamenti introdotti.

$$\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{s}' d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{p} \cdot \vec{s}' d\Sigma = 0$$

Si vuole esprimere l'integrale superficiale in termini volumici:

$$\int_{\Sigma} \vec{p} \cdot \vec{s}' d\Sigma$$

Ricordando che il vettore \vec{p} diviene esprimibile attraverso la generica orientazione:

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \vec{p} \cdot \vec{s}' d\Sigma &= \int_{\Sigma} \vec{t}_n \cdot \vec{s}' d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{s}' \cdot ([t] \cdot \hat{n}) d\Sigma = \int_{\Sigma} (t_{nx}u' + t_{ny}v' + t_{nz}w') d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} [(t_{xx}n_x + t_{yx}n_y + t_{zx}n_z)u' + (t_{xy}n_x + t_{yy}n_y + t_{zy}n_z)v' + (t_{xz}n_x + t_{yz}n_y + t_{zz}n_z)w'] d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} [(\sigma_x u' + \tau_{xy}v' + \tau_{xz}w')n_x + (\tau_{yz}u' + \sigma_yv' + \tau_{zy}w')n_y + (\tau_{zx}u' + \tau_{zy}v' + \sigma_zw')n_z] d\Sigma\end{aligned}$$

Attraverso il teorema di Gauss Green un integrale di superficie diviene un integrale di volume attraverso la sua divergenza:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u' + \tau_{xy}v' + \tau_{xz}w') + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}u' + \sigma_yv' + \tau_{zy}w') + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}u' + \tau_{zy}v' + \sigma_zw') \right] d\Omega$$

E dunque, infine:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{s}' d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{p} \cdot \vec{s}' d\Sigma &= \\ &= \int_{\Omega} d\Omega \left\{ \left[u' \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + v' \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \right) + w' \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z \right) \right] + \\ &\quad \left. + \left[\sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v'}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w'}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

Si noti come il termine:

$$\begin{aligned}&\left[u' \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) + \right. \\ &\quad \left. + v' \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \right) + w' \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z \right) \right]\end{aligned}$$

Rappresenti null'altro che l'equilibrio interno del corpo, essendo il corpo in equilibrio con se stesso, tale termine è nullo, perciò, il teorema dei lavori virtuali si traduce in:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{s}' d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{p} \cdot \vec{s}' d\Sigma &= \int_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v'}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w'}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \right] d\Omega\end{aligned}$$

Ricordando le relazioni valide per allungamento e distorsioni si ottiene una forma finale:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{s}' d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{p} \cdot \vec{s}' d\Sigma}_{\text{Lavoro Virtuale ESTERNO}} = \underbrace{\int_{\Omega} \left[\sigma_x \varepsilon'_x + \sigma_y \varepsilon'_y + \sigma_z \varepsilon'_z + \tau_{xy} \gamma'_{xy} + \tau_{xz} \gamma'_{xz} + \tau_{yz} \gamma'_{yz} \right] d\Omega}_{\text{Lavoro Virtuale INTERNO}}$$

Dato un corpo in equilibrio sotto l'azione di forze di volume e forze di superficie (carichi esterni) e delle tensioni interne, se si considera un campo di spostamenti congruente (che rispetta il tensore di Cauchy) il lavoro virtuale esterno deve essere uguale al lavoro virtuale interno.

- Caso di corpo rigido:

Campo di spostamenti: $\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$

Tensore delle deformazioni: $[\varepsilon] = 0$

$$L_V = 0$$

E ci si riconduce al principio dei lavori virtuali per corpi indeformabili.

- Caso di traslazione rigida

$$\vec{s} = \vec{s}_0$$

$$\left[\int_{\Omega} \vec{f} d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{p} d\Sigma \right] \cdot \vec{s}_0 = 0$$

E si ritrovano le equazioni cardinali della statica per la traslazione.

- Caso di rotazione rigida

$$\vec{s} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

E si ritrovano le equazioni cardinali della statica per la rotazione.

Le equazioni cardinali della statica sono contenute nel principio dei lavori virtuali: non è necessario imporle separatamente.

Si consideri ora un incremento di spostamento δs :

$$L_V = \int_{\Omega} \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \right] d\Omega$$

Il termine tra le parentesi rappresenta null'altro che un incremento di lavoro interno specifico:

$$L_V = \int_{\Omega} \delta \Phi d\Omega$$

In uno spazio ideale a 6 dimensioni (le componenti di deformazione in un generico punto), l'incremento di deformazione può essere visto come uno spostamento da un punto D_0 ad un punto D .

Durante questo spostamento si ha un incremento complessivo di lavoro interno pari a:

$$\Phi = \int_{D_0}^D \delta \Phi$$

Tale integrale, in genere, non dipende solo da D_0 e D , ma anche dal tipo di deformazione, ovvero dalla traiettoria tra i due punti nello spazio immaginario.

Un corpo si dice elastico se il lavoro virtuale interno per unità di volume Φ non dipende dal percorso di deformazione ma solo dalla configurazione iniziale e da quella finale.

In altre parole i corpi elastici non dissipano lavoro interno (energia) lungo una trasformazione ciclica.

$$\oint \delta \Phi = 0$$

$\delta\Phi$ dovrà allora risultare un differenziale esatto. esisterà quindi una funzione potenziale che prende il nome di POTENZIALE ELASTICO tale che:

$$\delta\Phi = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x} \delta\varepsilon_x + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_y} \delta\varepsilon_y + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_z} \delta\varepsilon_z \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{xy}} \delta\gamma_{xy} + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{xz}} \delta\gamma_{xz} + \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{yz}} \delta\gamma_{yz} \right] d\Omega$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x} & \sigma_y &= \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_y} & \sigma_z &= \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{xy}} & \tau_{xz} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{xz}} & \tau_{yz} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{yz}}\end{aligned}$$

Si definisce quindi un legame diretto tra il campo di spostamento e le tensioni necessarie per ottenere l'equilibrio partendo dalla semplice ipotesi di elasticità.

Se definisco la quantità $\delta\Psi$ come:

$$\delta\Psi = \delta\sigma_x\varepsilon_x + \delta\sigma_y\varepsilon_y + \delta\sigma_z\varepsilon_z + \delta\tau_{xy}\gamma_{xy} + \delta\tau_{xz}\gamma_{xz} + \delta\tau_{yz}\gamma_{yz}$$

Allora anche $d\Psi$ sarà un differenziale esatto.

Sarà un differenziale esatto anche la somma di due differenziali esatti:

$$\delta\Phi + \delta\Psi = \delta(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) = \delta(\Phi + \Psi)$$

$$\Phi + \Psi = \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz} = [\sigma]^T \cdot [\varepsilon]$$

Chiamando ora la funzione Ψ POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial\Psi}{\partial\sigma_x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial\Psi}{\partial\sigma_y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial\Psi}{\partial\sigma_z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial\Psi}{\partial\tau_{xy}} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial\Psi}{\partial\tau_{xz}} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial\Psi}{\partial\tau_{yz}}\end{aligned}$$

Il comportamento meccanico di un corpo elastico risulta completamente definito se sono note Φ e Ψ .

In caso di campo elastico lineare, sotto l'ipotesi di sufficiente regolarità della funzione Φ (continuità delle derivate seconde):

$$\Phi = \Phi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) = \Phi_0 + \nabla\Phi|_0 \cdot \vec{\varepsilon} + \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^T H|_0 \vec{\varepsilon} + o(\varepsilon^3)$$

Dove $\vec{\varepsilon}$ è il vettore delle deformazioni e i termini di H sono del tipo:

$$h_{i,j} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j}$$

Se è valida l'ipotesi di piccole deformazioni l'ultimo termine diviene trascurabile. Il primo termine è il potenziale elastico corrispondente allo stato indeformato, in generale non è nullo ma lo si considererà tale poiché solo gli incrementi dovuti alle deformazioni interessano questa trattazione.

$$\nabla\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_x} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{yz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \vdots \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = [\sigma] = \nabla\Phi|_0 + [H][\varepsilon]$$

Dove H è una matrice 6x6 reale e simmetrica che fornisce, in caso di piccole deformazioni, il legame lineare tra deformazioni e tensioni.

$$[\sigma] = [H][\varepsilon]$$

Il termine $\nabla\Phi|_0$ è dunque l'aliquota costante che si ottiene per deformazione nulla ed è pertanto evidente che rappresenta lo stato tensionale nel materiale alla configurazione di partenza.

Tale termine in generale è non nullo ma lo si supporrà nullo, come analogamente fatto in precedenza.

Il potenziale si ridurrà così alla funzione quadratica:

$$\Phi = \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^T H |_0 \vec{\varepsilon}$$

Il comportamento elastico del corpo risulterà così completamente definito non appena saranno noti i 21 valori numerici delle componenti della matrice H . Occupandoci soltanto di corpi la cui deformazione è possibile solo fornendo lavoro, si impone:

$$\Phi([\varepsilon]) \geq 0$$

$$\Phi = 0 \Leftrightarrow [\varepsilon] = 0$$

Ovvero note sia le tensioni che H , si è in grado di determinare sia il potenziale elastico che le deformazioni.

$$\begin{cases} [\sigma] = [H][\varepsilon] \\ \Phi = \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^T H |_0 \vec{\varepsilon} \geq 0 \end{cases}$$

Che si traduce nelle seguenti disposizioni:

- H deve essere definita positiva;
- I termini diagonali di H devono essere positivi;
- Il determinante di H è non nullo (per cui il sistema è reversibile);

$$[\sigma] = [H][\varepsilon]$$

$$[\varepsilon] = [H]^{-1}[\sigma]$$

$$\Psi = \frac{1}{2} [\sigma]^T [H]^{-1} [\sigma] = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [H]^{-1} [H] [\varepsilon] = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [H]^T [\varepsilon] = \Phi$$

Nel caso generale di elasticità valeva:

$$\Phi + \Psi = [\sigma]^T \cdot [\varepsilon]$$

Aggiungendo l'ipotesi di elasticità lineare i due valori del potenziale sono numericamente uguali:

$$\Psi = \frac{1}{2} [\sigma]^T [H]^{-1} [\sigma] = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [H]^T [\varepsilon] = \Phi$$

$$\Psi = \Phi = \frac{1}{2} [\sigma]^T \cdot [\varepsilon]$$

Per i materiali isotropi il potenziale elastico complementare in forma generale è funzione delle tensioni xyz :

$$\Psi = \Psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$$

Poiché il lavoro interno deve essere indipendente dalla terna di base:

$$\Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} [\sigma]^T [H]^{-1} [\sigma] = \frac{1}{2} (a_{11}\sigma_1^2 + a_{22}\sigma_2^2 + a_{33}\sigma_3^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2a_{23}\sigma_2\sigma_3 + 2a_{31}\sigma_1\sigma_3)$$

Il potenziale deve rimanere immutato se si scambiano mutuamente le tensioni principali, per cui:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{23}$$

Che assumono i valori:

$$a_{ii} = \frac{1}{E} \quad a_{ij} = -\frac{\nu}{E}$$

E dunque:

$$\Psi = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

Accorgendosi della presenza di un quadrato di trinomio si può scrivere, per mantenere l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2E} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)] = \\ &= \frac{1}{2E} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2} \frac{2(1+\nu)}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \end{aligned}$$

Ricordando che il modulo elastico tangenziale vale:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Allora:

$$\frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G}$$

Equazioni Costitutive di Navier per Corpi Elastici Isotropi

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xz}} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{yz}} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{array} \right.$$

$$[\varepsilon] = [H]^{-1}[\sigma] = [C][\sigma]$$

Con $[C]$ matrice delle costanti elastiche.

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}$$

Le distorsioni sono nulle se e solo se sono nulle le tensioni tangenziali:

► Quando il materiale è lineare elastico ed isotropo lo stato di tensione e lo stato di deformazione presentano la stessa terna di direzioni principali.

Le dilatazioni dipendono esclusivamente dalle tensioni normali.

L'ipotesi di potenziale positivo si traduce in termini analitici nella condizione che la matrice C sia definita positiva:

- I termini sulla diagonale devono essere positivi:

$$E > 0; \quad G > 0 \Rightarrow 1 + \nu > 0 \Rightarrow \nu > -1$$

- I minori di ordine 2 devono avere determinante positivo:

$$\det \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E \end{bmatrix} = \frac{1}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2} = \frac{1}{E^2}(1 - \nu^2) > 0$$

$$(1 - \nu^2) > 0 \Rightarrow \nu < 1$$

E quindi:

$$-1 < \nu < 1$$

- I minori di ordine 3 devono avere determinante positivo:

$$\det \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2} \right] + \frac{\nu}{E} \left[-\frac{\nu}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2} \right] - \frac{\nu}{E} \left[\frac{\nu^2}{E^2} + \frac{\nu^2}{E^2} \right] > 0$$

$$(1 - \nu^2) - \nu(\nu + \nu^2) - \nu(\nu + \nu^2) > 0$$

$$(1 - \nu^2) - 2\nu(\nu + \nu^2) > 0$$

$$2\nu^3 + 3\nu^2 - 1 < 0$$

Che si traduce nella condizione finale:

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$

Problema dell'Equilibrio Elastico

Si consideri un corpo Ω soggetto a carichi di volume f e superficiali p applicati sulla superficie Σ_p , mentre la superficie Σ_s risulta vincolata con spostamento nullo.

Il problema risulta definito da 15 equazioni:

- 3 equazioni d'equilibrio: le equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases}$$

- 6 equazioni costitutive del materiale del corpo: equazioni di Navier

$$[\varepsilon] = [C][\sigma]$$

- 6 equazioni che assicurano la congruenza del campo di spostamenti:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{cases}$$

- Alle quali si aggiungono 6 equazioni al contorno:

$$3 \text{ su } \Sigma_p \quad \begin{cases} p_x = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ p_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ p_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{cases}$$

$$3 \text{ su } \Sigma_s \quad u = v = w = 0$$

Le 15 equazioni correlate alle condizioni al contorno potrebbero essere sufficienti per determinare le 15 incognite (3 spostamenti, 6 deformazioni e 6 tensioni).

Ipotesi:

- Materiale dal comportamento lineare elastico, isotropo, omogeneo;
- Ipotesi di piccole deformazioni;

Il sistema può essere ridotto a 9 equazioni in 9 incognite sostituendo le equazioni di congruenza all'interno delle equazioni costitutive eliminando le incognite relative alle deformazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{cases}$$

Alle quali si sommano le equazioni di equilibrio e le 6 equazioni al contorno. Tutte le equazioni che compaiono nel sistema godono della proprietà di linearità.

Date essere s_1 e t_1 le soluzioni ai carichi applicati f_1 e p_1 e s_2 e t_2 le soluzioni ai carichi applicati f_2 e p_2 , se se si applica un sistema di carichi $f_1 + f_2$ e $p_1 + p_2$:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \Rightarrow \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2; \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2$$

Tale principio prende il nome di principio di sovrapposizione degli effetti:
L'effetto complessivo dovuto ad una serie di cause è uguale alla somma dei singoli effetti generati dalle cause considerate singolarmente.

Principio di Kirchoff: Al problema elastico esiste sempre una unica soluzione.

$$\begin{aligned} f, p \rightarrow \vec{s}_1, \vec{\sigma}_1; \vec{s}_2, \vec{\sigma}_2 & \quad -f, -p \rightarrow -\vec{s}_2, -\vec{\sigma}_2 \\ f^* = 0, p^* = 0 & \rightarrow \Delta \vec{s}, \Delta \vec{\sigma} \end{aligned}$$

Inserite nel teorema dei lavori virtuali forniscono:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{f}^* \Delta \vec{s} d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{p}^* \Delta \vec{s} d\Sigma &= \int_{\Omega} \Delta \vec{\sigma}^T \Delta \vec{\varepsilon} d\Omega \\ \int_{\Omega} \Delta \vec{\sigma}^T \Delta \vec{\varepsilon} d\Omega &= 2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} \Delta \vec{\sigma}^T \Delta \vec{\varepsilon} d\Omega = 2 \int_{\Omega} \Phi d\Omega = 0 \\ \Phi = 0 \Rightarrow \Delta \vec{\varepsilon} &= 0 \Rightarrow \Delta \vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{s}_1 = \vec{s}_2 \end{aligned}$$

Si consideri un corpo inizialmente scarico a cui viene applicato un carico lentamente crescente fino ad una condizione di carico finale:

$$\vec{f} = \lambda \vec{f}_{fin} \quad \vec{p} = \lambda \vec{p}_{fin}$$

Si definisce adesso il lavoro che queste forze compiranno sul corpo elastico a seguito delle deformazioni che loro stesse causano.

Ricordando che ad ogni variazione di forza corrisponde una sola variazione possibile di spostamenti.

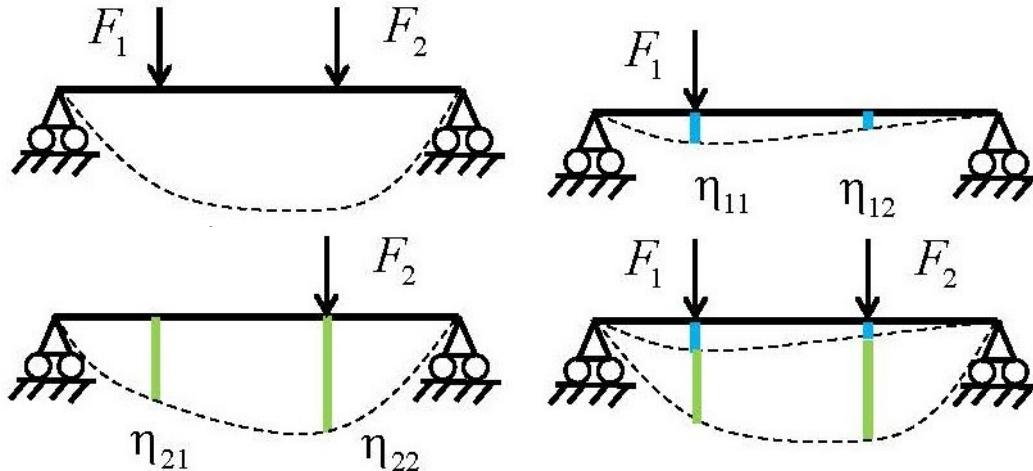
$$L_i = \int_{\Omega} \Phi d\Omega$$

$$L_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon} d\Omega = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \vec{f}_{fin} \cdot \vec{s} d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{p}_{fin} \cdot \vec{s} d\Sigma \right]$$

Il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) è stato applicato all'integrale al primo membro, e in questo caso coincide con il lavoro virtuale interno compiuto dalle tensioni: vengono applicate deformazioni non relative alle forze esterne.

Teorema di Clapeyron *Il lavoro di deformazione per un solido elastico lineare (il lavoro compiuto dalle forze di carico conseguentemente alle deformazioni provocate da loro stesse) è la metà del lavoro virtuale esterno (lavoro compiuto dalle stesse forze quando le stesse deformazioni vengono applicate ma non sono dovute alle forze stesse).*

Esempio: trave inflessa



Si consideri una trave appoggiata sottoposta a due carichi F_1 ed F_2 con punti di applicazione diversi. Il principio di sovrapposizione è valido per tensioni e deformazioni, ma non è applicabile al lavoro di deformazione: tale lavoro infatti non è pari alla somma dei lavori di deformazione prodotti dalle singole forze.

Sia η_{ij} lo spostamento dovuto alla forza i nel punto di applicazione della forza j .

Applicando la forza 1 e successivamente la forza 2 mantenendo applicata 1 si ottiene:

$$L_{1,2} = \frac{1}{2}F_1\eta_{11} + \frac{1}{2}F_2\eta_{22} + F_1\eta_{21}$$

Il terzo termine è null'altro che il lavoro compiuto dalla forza 1 per lo spostamento del punto di applicazione della stessa ma dovuto all'applicazione della forza 2.

Invertendo l'ordine di applicazione:

$$L_{2,1} = \frac{1}{2}F_2\eta_{22} + \frac{1}{2}F_1\eta_{11} + F_2\eta_{12}$$

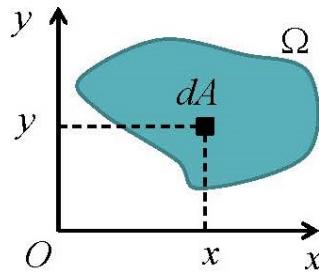
Poiché in un corpo elastico il lavoro non dipende dal percorso di deformazione, i due lavori devono essere uguali:

$$L_{1,2} = L_{2,1}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}F_1\eta_{11} + \frac{1}{2}F_2\eta_{22} + F_1\eta_{21} &= \frac{1}{2}F_2\eta_{22} + \frac{1}{2}F_1\eta_{11} + F_2\eta_{12} \\ F_1\eta_{21} &= F_2\eta_{12}\end{aligned}$$

Teorema di Betti: il lavoro compiuto da un sistema di forze F_1 per gli spostamenti provocati da un secondo sistema di forze F_2 è uguale al lavoro compiuto dal secondo sistema di forze F_2 per gli spostamenti provocati dal primo sistema di forze F_1

Geometria delle Aree



Si consideri un sistema di riferimento cartesiano con Oxy ed una figura piana Ω . L'area della figura sarà:

$$A = \int_{\Omega} dA$$

Definisco il **momento statico** (o momento del primo ordine) **rispetto all'asse x**:

$$S_x = \int_{\Omega} y dA$$

Definisco il **momento statico** (o momento del primo ordine) **rispetto all'asse y**:

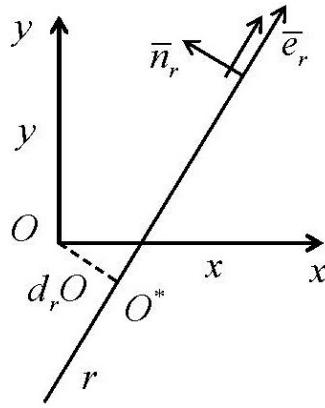
$$S_y = \int_{\Omega} x dA$$

Si definisce baricentro della figura il punto G tale che:

$$G(x_G, y_G) \quad \begin{cases} x_G = \frac{S_y}{A} \\ y_G = \frac{S_x}{A} \end{cases}$$

Il baricentro della figura rimane lo stesso al variare del sistema di riferimento.

Data una retta orientata r , si definiscono:



- e_r il versore della retta orientata r

$$\vec{e}_r = (\alpha_x, \alpha_y, 0)$$

- n_r il versore normale alla retta orientata, tale che:

$$\hat{n}_r = \hat{k} \times \vec{e}_r$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

L'equazione che descrive i punti della retta orientata è:

$$-\alpha_y x + \alpha_x y + d_r O = 0$$

Dove la distanza $d_r O$ è positiva se misurata dalla stessa parte del verso positivo di n_r

$$d_r O > 0 \Leftrightarrow (O - O^*) \cdot \hat{n}_r > 0$$

$$d_r O < 0 \Leftrightarrow (O - O^*) \cdot \hat{n}_r < 0$$

La distanza di un generico punto P dalla retta r è:

$$d_r P = -\alpha_y x_P + \alpha_x y_P + d_r O$$

dove i segni dei termini non possono essere modificati per non alterare l'orientamento della retta.

Definisco il **Momento statico rispetto ad una retta r**:

$$S_r = \int_{\Omega} d_r P dA$$

Da questa relazione si possono ricavare i momenti rispetto a x e y: S_x risulterà coincidente, mentre S_y di segno opposto.

Convenzionalmente si usa S_y positivo per x positive.

Si giunge ad una nuova definizione di baricentro:

Data una distribuzione di aree $\exists!$ punto $G(x_G, y_G) \Leftrightarrow \forall r : G \in r, S_r = 0$

$$\begin{aligned} S_r &= \int_{\Omega} d_r P dA = \int_{\Omega} (-\alpha_y x_P + \alpha_x y_P + d_r O) dA = -\alpha_y S_y + \alpha_x S_x + A d_r O = \\ &= A(-\alpha_y x_G + \alpha_x y_G + d_r O) = A d_r G \end{aligned}$$

Per cui l'inerzia di una figura piana rispetto ad una generica retta r è linearmente dipendente dalla distanza di tale retta dal baricentro G della figura.

Di conseguenza sia G che S_r posso essere calcolati indipendentemente dalla terza di riferimento scelta.

Momenti di Inerzia (o momenti del secondo ordine)

- Momento d'inerzia rispetto all'asse x

$$I_x = \int_{\Omega} y^2 dA$$

- Momento d'inerzia rispetto all'asse y

$$I_y = \int_{\Omega} x^2 dA$$

- Momento centrifugo rispetto agli assi x e y

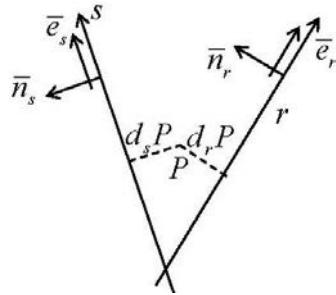
$$I_{xy} = \int_{\Omega} xy dA$$

- Momento d'inerzia rispetto ad un generico asse r

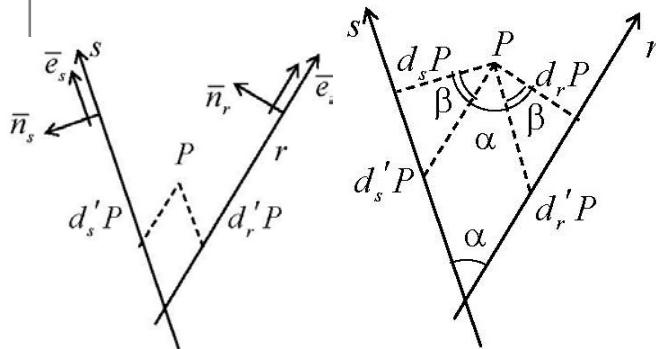
$$I_r = \int_{\Omega} (d_r P)^2 dA$$

- Momento centrifugo rispetto agli assi generici r es s

$$I_{rs} = \int_{\Omega} (d_r P)(d_s P) dA$$



Gli stessi possono essere scritti in coordinate oblique:



$$\beta = 90 - \alpha \quad \begin{cases} d_s P = d'_s P \cos \beta = d'_s P \sin \alpha \\ d_r P = d'_r P \cos \beta = d'_r P \sin \alpha \end{cases}$$

$$I'_r = \int_{\Omega} (d'_r P)^2 dA$$

$$I'_{rs} = \int_{\Omega} (d'_r P)(d'_s P) dA$$

$$S'_r = \int_{\Omega} d'_r P dA$$

Raggi di Inerzia

- Raggio di inerzia rispetto all'asse x

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

- Raggio di inerzia rispetto all'asse y

$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

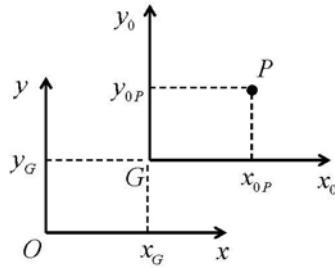
- Raggio d'inerzia rispetto ad un generico asse r

$$\rho_r = \sqrt{\frac{I_r}{A}}$$

- Raggio di inerzia rispetto ad un generico asse r in coordinate oblique

$$\rho'_r = \sqrt{\frac{I'_r}{A}}$$

Teorema di Huyghens-Steiner



Si supponga di avere due sistemi di riferimento paralleli di cui uno baricentrico.

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_{\Omega} y^2 dA = \int_{\Omega} (y_{0P} + y_G)^2 dA = \\
 &= \int_{\Omega} y_{0P}^2 dA + \int_{\Omega} y_G^2 dA + \int_{\Omega} 2y_G y_{0P} dA = \\
 &= \int_{\Omega} y_{0P}^2 dA + 2y_G \int_{\Omega} y_{0P} dA + y_G^2 \int_{\Omega} dA = \\
 &= I_{x0} + y_G S_{x0} + y_G^2 A = \\
 &= I_{x0} + y_G^2 A
 \end{aligned}$$

Infine:

$$I_r = I_{r0} + (d_r G)^2 A$$

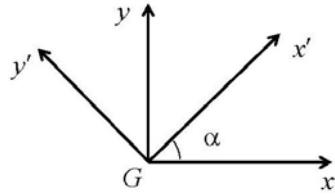
Dove r_0 è la retta parallela a r e passante per G.

Il momento di inerzia è un minimo per la retta passante per G.

Analogamente per il momento centrifugo:

$$I_xy = I_{x0y0} + x_G y_G A$$

Si considerino ora due sistemi di riferimento baricentrici diversamente orientati.



La matrice di trasferimento tra i due sistemi di riferimento si scrive:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = T^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha & y \sin \alpha \\ -x \sin \alpha & y \cos \alpha \end{bmatrix}$$

E i momenti d'inerzia possono quindi essere espressi come:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_{\Omega} y'^2 dA = \int_{\Omega} (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 dA = \\ &= I_y \sin^2 \alpha + I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= I_y (1 - \cos^2 \alpha) + I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = I_y + (I_x - I_y) \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - I_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= \int_{\Omega} x'y'dA = \int_{\Omega} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) dA = \\ &= -I_y \sin \alpha \cos \alpha + I_x \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Si definisce coppia di assi principale centrale di inerzia, una coppia baricentrica ortogonale che abbia il momento centrifugo nullo.

Vanno perciò cercate le soluzioni angolari all'equazione:

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

► Si possono avere infinite coppie di assi principali se:

$$I_{xy} = 0 \quad I_x = I_y \Rightarrow \forall \alpha$$

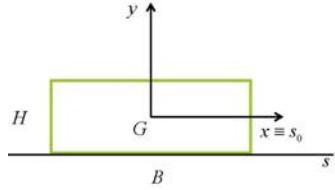
► Si ottiene un Unico riferimento principale centrale se:

$$I_{xy} = 0 \quad I_x \neq I_y \Rightarrow \alpha = k \frac{\pi}{2}$$

$$I_{xy} \neq 0 \quad I_x = I_y \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$$

$$I_{xy} \neq 0 \quad I_x \neq I_y \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} + k \frac{\pi}{2}$$

Rettangolo



Il baricentro G si trova sull'intersezione degli assi di simmetria.

Il momento di prim'ordine

$$S_r = \int_{\Omega} (d_r P) dA$$

È nullo se r è di simmetria, d'altro canto il dominio è simmetrico.

$$S_s = A(d_s G) = BH \frac{H}{2} = \frac{BH^2}{2}$$

Inoltre se r è di simmetria ortogonale, r e la sua perpendicolare sono coniugati e baricentrici, quindi sono assi principali di inerzia.

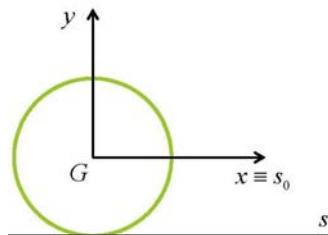
$$I_{s_0} = \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} y^2 dx dy = \frac{BH^3}{12}$$

$$I_s = I_{s_0} + A(d_s G)^2 = \frac{BH^3}{12} + BH \left(\frac{H}{2} \right)^2 = \frac{BH^3}{3}$$

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{I_{s_0}}{A}} = \frac{H}{\sqrt{12}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{B}{\sqrt{12}} \quad I_{xy} = \int_{\Omega} xy dA = 0$$

Gli assi x e y sono principali di inerzia

Cerchio



Il baricentro G si trova sull'intersezione degli assi di simmetria.

Il momento di prim'ordine

$$S_r = \int_{\Omega} (d_r P) dA$$

È nullo se r è di simmetria, d'altro canto il dominio è simmetrico.

$$S_s = A(d_s G) = \pi R^2 R = \pi R^3$$

Inoltre se r è di simmetria ortogonale, r e la sua perpendicolare sono coniugati e baricentrici, quindi sono assi principali di inerzia.

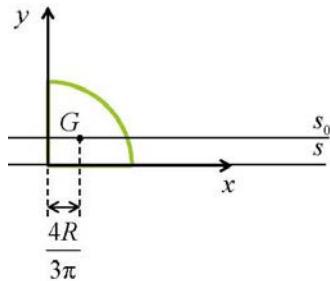
$$I_{s_0} = \int_{-R}^R \int_{-R}^R y^2 dx dy = \frac{I_p}{2} = \frac{\int_0^R r^2 dA}{2} = \frac{\int_0^R 2\pi r^3 dy}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_s = I_{s_0} + A(d_s G)^2 = \frac{\pi R^4}{4} + \pi R^4 = \frac{5\pi R^4}{4}$$

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{R}{2} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{R}{2} \quad I_{xy} = \int_{\Omega} xy dA = 0$$

Gli assi x e y sono principali di inerzia

Settore Circolare

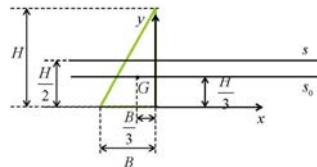


Il momento di inerzia di un settore circolare siffatto è un quarto di quello del cerchio relativo, rispetto però all'asse passante per il baricentro del cerchio.

$$I_s = \frac{1}{2} \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_{s_0} = I_s - A(d_s G)^2 = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi}$$

Triangolo Rettangolo



Il momento di inerzia di un triangolo rettangolo è la metà di quello del relativo rettangolo rispetto all'asse baricentrico del rettangolo.

$$I_s = \frac{BH^3}{24}$$

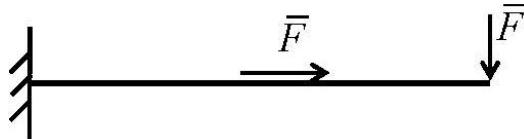
$$I_{s_0} = I_s - A(d_s G)^2 = \frac{BH^3}{24} - \frac{BH}{2} \left(\frac{H}{6} \right)^2 = \frac{BH^4}{36}$$

NOTE

MECCANICA DEI SOLIDI: PARTE 8

Equazioni della Linea Elastica

Si considerino travi piane ad asse rettilineo, caricate da forze contenute nel piano di simmetria geometrica della trave: problema piano.



Si studia la deformazione della linea d'asse della trave.

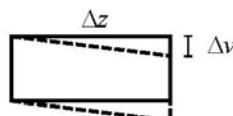
Distorsione di Volterra: si definisce distorsione ogni causa deformante che non sia una forza, può essere concentrata o distribuita.

Le distorsioni concentrate si ottengono operando dei tagli sulla trave, facendo subire ai tratti degli scorrimenti, rotazioni o spostamenti assiali e ricollegando le sezioni precedentemente sconnesse.

Distorsione impressa concentrata di scorrimento:



Per un concio di trave di lunghezza Δz la distorsione è distribuita:

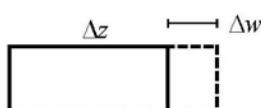


$$\vartheta = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta z}$$

Distorsione impressa concentrata assiale:



Per un concio di trave di lunghezza Δz la distorsione è distribuita:

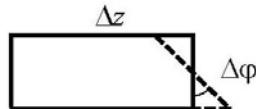


$$\lambda = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Distorsione impressa concentrata angolare:



Per un concio di trave di lunghezza Δz la distorsione è distribuita:



$$\mu = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\mu}{\Delta z}$$

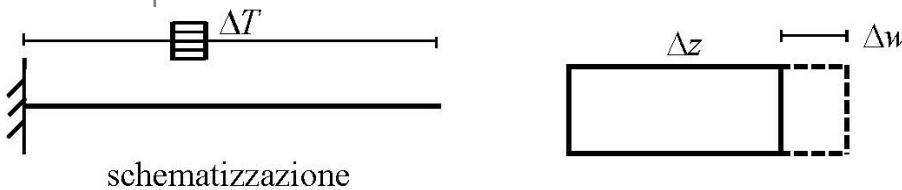
Dove μ è detta curvatura impressa.

Si definiscono positive le distorsioni che fanno compiere lavoro positivo alle caratteristiche della sollecitazione positiva, sulla base della convenzione delle sollecitazioni.

Le unità di misura per le distorsioni sono:

$$\begin{aligned} Dv^i &\rightarrow [L] & \vartheta &\rightarrow \text{numero puro} \\ Dw^i &\rightarrow [L] & \lambda &\rightarrow \text{numero puro} \\ D\varphi^i &\rightarrow \text{numero puro} & \mu &\rightarrow [L^{-1}] \end{aligned}$$

Un tipico caso di distorsioni distribuite è quello dato dalle **dilatazioni termiche**.
► **Salto termico uniforme in tutta la sezione.**



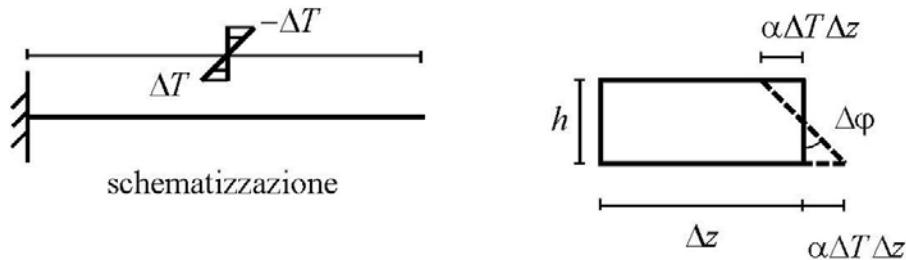
schematizzazione

$$\Delta w = \alpha \Delta T \cdot \Delta z$$

$$\lambda = \alpha \Delta T$$

Con α coefficiente di dilatazione termica.

► Gradiente termico lineare lungo la trave o distorsione termica.



$$\Delta\varphi = \frac{2\alpha\Delta T \Delta z}{h}$$

$$\mu = \frac{2\alpha\Delta T}{h}$$

► Generica distribuzione termica.

Qualsiasi distribuzione termica può essere ricondotta alla composizione delle due distribuzioni precedenti, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

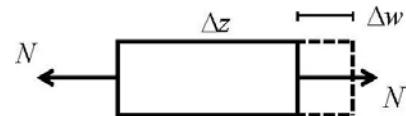


$$\frac{\Delta T_{sup} + \Delta T_{inf}}{2} \quad \frac{\Delta T_{sup} - \Delta T_{inf}}{2}$$

Si vuole ora determinare l'equazione della linea elastica generale per una trave ad asse rettilineo caricata nel modo più generale possibile.

Siano note le caratteristiche della sollecitazione $N(z), T(z), M(z)$ e le distorsioni distribuite $\lambda(z), \vartheta(z), \mu(z)$. Si applichino queste una per volta e ci si avvalga alla fine del principio di sovrapposizione degli effetti.

• **SFORZO ASSIALE**



$$\text{Equazione di congruenza: } \varepsilon_z = \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

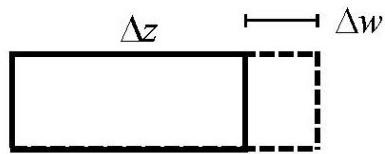
$$\text{Legame costitutivo elastico: } \sigma_z = E\varepsilon_z$$

$$\text{Equilibrio tra sollecitazione esterna e tensioni interne: } \int_A \sigma_z dA = \sigma_z A$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA} \quad N = EA\varepsilon_z$$

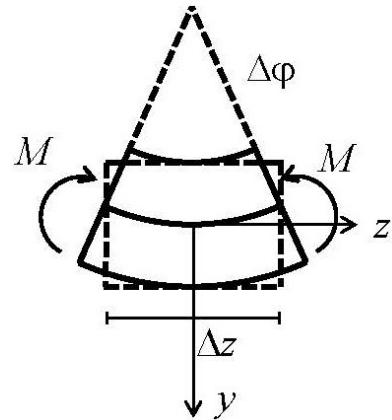
$$\Delta w = \frac{N}{EA} \Delta z$$

- DISTORSIONE λ



$$\Delta w = \lambda \Delta z$$

- MOMENTO FLETTENTE



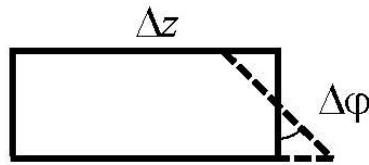
$$\Delta z = r \Delta \varphi \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta \varphi}{\Delta z} y$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{2} \frac{\Delta \varphi}{2} y \quad \sigma_z = E \frac{\Delta \varphi}{\Delta z} y$$

$$M = \int_A \sigma_z y dA = E \frac{\Delta \varphi}{\Delta z} \int_A y^2 dA = EI \frac{\Delta \varphi}{\Delta z}$$

$$\Delta \varphi = \frac{M}{EI} \Delta z$$

- DISTORSIONE μ



$$\Delta\varphi = \mu\Delta z$$

- SFORZO DI TAGLIO

Ipotesi di Eulero - Bernoulli:

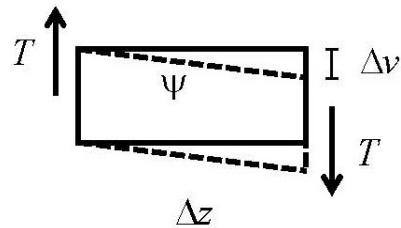
- Una sezione piana resta piana dopo la deformazione della trave;
- Una sezione retta resta ortogonale all'asse della trave

$$\gamma = 0$$

Ipotesi di Timoshenko:

- Una sezione piana resta piana dopo la deformazione della trave;
- Una sezione retta non resta necessariamente ortogonale all'asse della trave

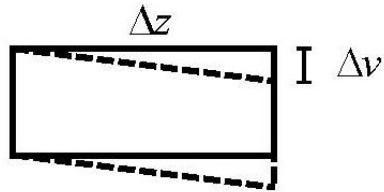
$$T = \int_A \tau dA = \gamma G A'$$



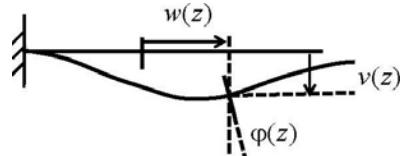
$$\Delta v = \Psi \Delta z$$

$$\Delta v = \chi \frac{T}{GA} \Delta z$$

- DISTORSIONI ϑ



Per determinare la deformazione della linea d'asse della trave occorre determinare tre funzioni scalari in z :

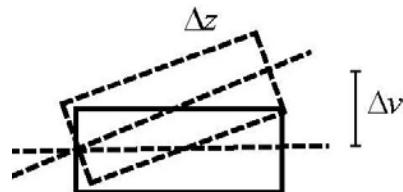


$$\begin{cases} w(z) = 0 \\ v(z) = 0 \\ \varphi(z) = 0 \end{cases}$$

Noti gli spostamenti nella sezione posta alla quota z , alla quota $z + \Delta z$ sarà:

$$\begin{cases} w(z + \Delta z) = w(z) + \frac{N}{EA} \Delta z + \lambda \Delta z \\ v(z + \Delta z) = v(z) + \chi \frac{T}{GA} \Delta z + \vartheta \Delta z \\ \varphi(z + \Delta z) = \varphi(z) + \frac{M}{EI} \Delta z + \mu \Delta z \end{cases}$$

Nella seconda equazione deve essere però aggiunto un termine dovuto alla traslazione verticale dovuta alla rotazione: rotazioni positive (antiorarie) provocano spostamenti verso l'alto (v positive verso il basso).



$$\Delta v = -\varphi \Delta z$$

E dunque

$$\begin{cases} w(z + \Delta z) = w(z) + \frac{N}{EA} \Delta z + \lambda \Delta z \\ v(z + \Delta z) = v(z) + \chi \frac{T}{GA} \Delta z + \vartheta \Delta z - \varphi \Delta z \\ \varphi(z + \Delta z) = \varphi(z) + \frac{M}{EI} \Delta z + \mu \Delta z \end{cases}$$

Isolando i termini a sinistra dell'uguale e dividendo per Δz :

$$\begin{cases} \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} = \frac{N}{EA} + \lambda \\ \frac{v(z + \Delta z) - v(z)}{\Delta z} = \chi \frac{T}{GA} + \vartheta - \varphi \\ \frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\Delta z} = \frac{M}{EI} + \mu \end{cases}$$

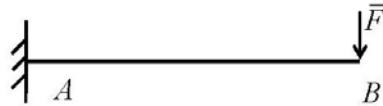
Per $\Delta z \rightarrow 0$ si ottengono le

EQUAZIONI INDEFINITE DELLA LINEA ELASTICA PER LE TRAVI AD ASSE RETTILINEO

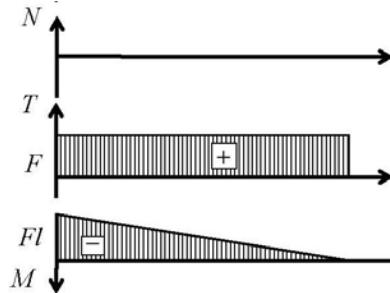
$$\begin{cases} w'(z) = \frac{N}{EA} + \lambda \\ v'(z) = \chi \frac{T}{GA} + \vartheta - \varphi \\ \varphi'(z) = \frac{M}{EI} + \mu \end{cases}$$

Esempio:

Della trave di lunghezza l si vogliono conoscere le funzioni spostamento in B.



Si determinino per prima cosa le caratteristiche della sollecitazione:



$$\begin{cases} N(z) = 0 \\ T(z) = F \\ M(z) = -F(l - z) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda(z) = 0 \\ \vartheta(z) = 0 \\ \mu(z) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w'(z) = 0 \\ v'(z) = \chi \frac{F}{GA} - \varphi \\ \varphi'(z) = -\frac{F(l - z)}{EI} \end{cases}$$

Le ultime tre integrate danno:

$$\begin{cases} w(z) = C_1 \\ \varphi(z) = -\frac{Fl}{EI}z + \frac{F}{EI}\frac{z^2}{2} + C_2 \\ v(z) = \chi \frac{F}{GA}z + \frac{Fl}{EI}\frac{z^2}{2} - \frac{F}{EI}\frac{z^3}{6} - C_2z + C_3 \end{cases}$$

Le condizioni al contorno sono dettate dai vincoli, per cui:

$$v(0) = 0 \quad w(0) = 0 \quad \varphi(0) = 0$$

Da cui si ottiene:

$$C_1 = 0 \quad C_2 = 0 \quad C_3 = 0$$

E perciò:

$$\begin{cases} w(z) = 0 \\ \varphi(z) = -\frac{Fl}{EI}z + \frac{F}{EI}\frac{z^2}{2} \\ v(z) = \chi \frac{F}{GA}z + \frac{Fl}{EI}\frac{z^2}{2} - \frac{F}{EI}\frac{z^3}{6} \end{cases}$$

E all'estremità della trave si avrà:

$$\begin{cases} w(l) = 0 \\ \varphi(l) = -\frac{Fl}{EI}l + \frac{F}{EI}\frac{l^2}{2} = -\frac{Fl^2}{2EI} \\ v(l) = \chi \frac{F}{GA}l + \frac{Fl}{EI}\frac{l^2}{2} - \frac{F}{EI}\frac{l^3}{6} = \frac{Fl^3}{3EI} + \chi \frac{Fl}{GA} \end{cases}$$

Se si considerasse valida l'ipotesi di Eulero, trascurando ovvero la deformabilità tagliente, il contributo del taglio alla deformazione è nullo:

$$v(z) = \chi \frac{F}{GA}z + \frac{Fl}{EI}\frac{z^2}{2} - \frac{F}{EI}\frac{z^3}{6} \Rightarrow v(z) = \frac{Fl}{EI}\frac{z^2}{2} - \frac{F}{EI}\frac{z^3}{6}$$

$$v(l) = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Essendo in questo caso lo spostamento inferiore, la trave di Eulero risulterà più rigida.

Rapportando così gli spostamenti ottenuti considerando la deformabilità a taglio (T) e senza (ST) si ottiene un fattore di forma ρ :

$$\frac{v(l)^{(T)}}{v(l)^{(ST)}} = 1 + \chi \frac{Fl}{GA} \frac{3EI}{Fl^3} = 1 + \chi \frac{3E}{G} \left(\frac{\rho}{l}\right)^2$$

Dove:

$$\rho^2 = \frac{I}{A}$$

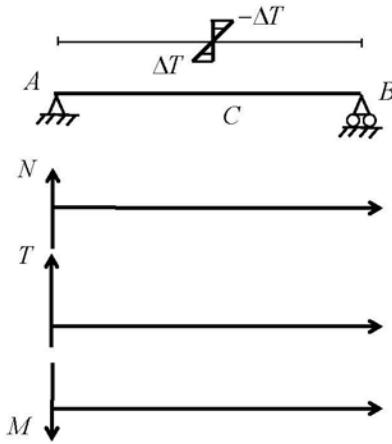
Si ottiene così che per travi snelle, ovvero quelle per cui risulta:

$$\frac{h}{l} < \frac{1}{10} \quad \left(\frac{\rho}{l}\right)^2 \approx \frac{1}{400}$$

La deformazione dovuta al taglio è trascurabile.

Dilatazioni Termiche

Si ricavino la rotazione sul carrello e l'abbassamento in mezzeria della seguente struttura.



La struttura è isostatica e non è soggetta a forze o momenti esterni. Il sistema di equazioni indefinite della statica è un sistema omogeneo.

$$\begin{cases} N(z) = 0 \\ T(z) = 0 \\ M(z) = 0 \end{cases}$$

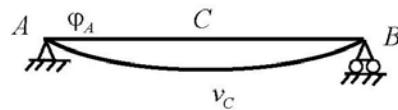
La struttura è isostatica, per cui ammette una sola soluzione che sarà quella banale, identicamente nulla.

Le distorsioni sulle strutture non iperstatiche (in particolare isostatiche) non forniscono caratteristiche della sollecitazione né reazioni vincolari.

$$\begin{cases} w'(z) = 0 \\ v'(z) = -\varphi \\ \varphi'(z) = \mu = \frac{2\alpha\Delta T}{h} \end{cases} \quad \begin{cases} v(0) = 0 \\ w(0) = 0 \\ v(l) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w(z) = 0 \\ v(z) = -\frac{\alpha\Delta T}{h} z^2 + \frac{\alpha\Delta T l}{h} z \\ \varphi(z) = \frac{2\alpha\Delta T}{h} z - \frac{\alpha\Delta T l}{h} \end{cases}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \varphi(0) = -\frac{\alpha\Delta T l}{h} \\ v(C) &= v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{\alpha\Delta T}{h} \frac{l^2}{4} + \frac{\alpha\Delta T l}{h} \frac{l}{2} = \frac{\alpha\Delta T}{h} \frac{l^2}{4} \end{aligned}$$



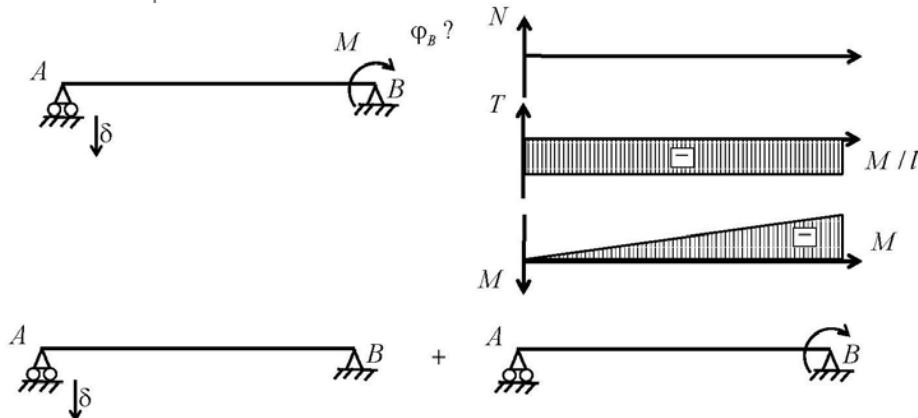
Cedimenti Impressi Vincolari Anelastici

Anche i vincoli possono essere soggetti a cedimenti.

Come visto in precedenza, i cedimenti si esplicano nell'ambito delle limitazioni cinematiche che il vincolo produce.

Ogni vincolo può cedere con uno spostamento di cedimento duale all'azione che esercita.

Qualora il cedimento sia indipendente dalle azioni esterne, esso si dirà anelastico.

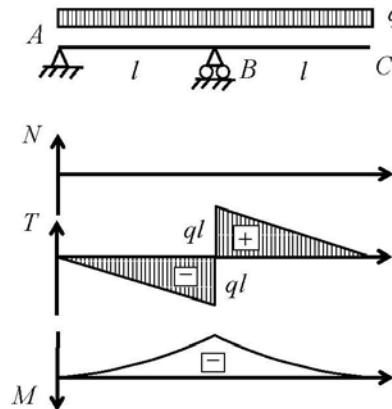


$$\varphi_B = \varphi'_B + \varphi''_B = \frac{\delta}{l} - \frac{Ml}{3EI}$$

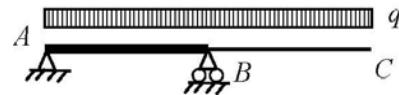
Composizione cinematica degli spostamenti

Il metodo della composizione cinematica degli spostamenti ha valenza generale, rimuovendo il limite di asse rettilineo.

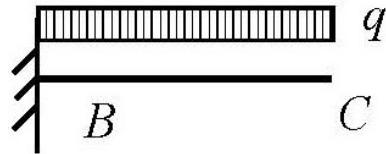
Ad esempio, in una struttura del genere, quanto valgono v_C e φ_C ?



Punto 1: considero AB rigido



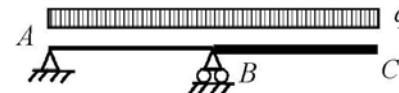
$$\varphi_B^+ = \varphi_B^- \quad \varphi_B^- = 0$$



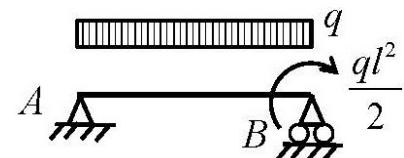
$$v'_C = \frac{ql^4}{8EI} \quad \varphi'_C = -\frac{ql^3}{6EI}$$

Il carico agente sulla parte rigida viene trasferito sul dominio deformabile mediante trasporto delle forze.

Punto 2: considero BC rigido



$$\varphi_B^- = \varphi_B^+ = \varphi^{BC} \quad v_C = -l\varphi^{BC} \quad \varphi_{C-} = \varphi^{BC}$$



$$\varphi_B = \varphi_B^{cont} + \varphi_B^q = \frac{ql^2}{2} \frac{l}{3EI} + \frac{ql^3}{24EI} = -\frac{ql^3}{8EI}$$

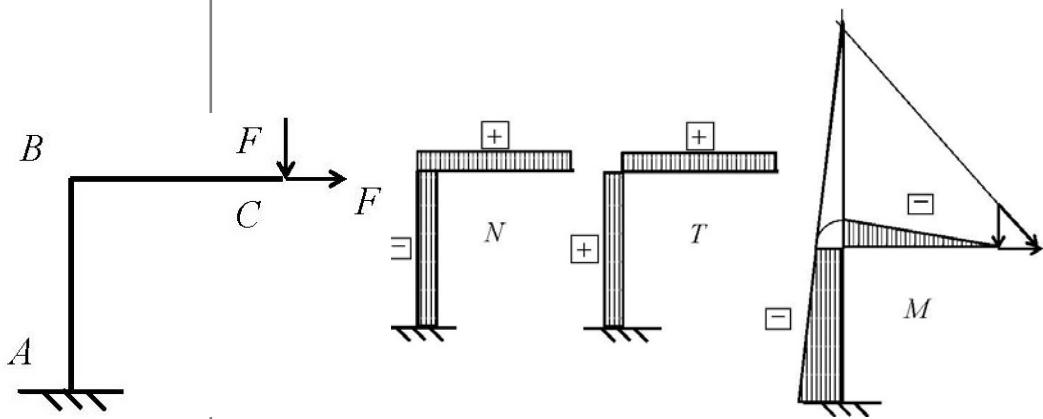
$$v''_C = \frac{ql^4}{8EI} \quad \varphi''_C = \frac{ql^3}{8EI}$$

Infine

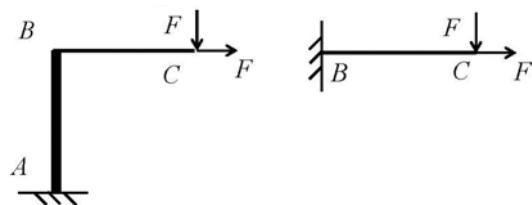
$$\varphi_C = \varphi'_C + \varphi''_C = -\frac{ql^3}{6EI} - \frac{ql^3}{8EI} = -\frac{7ql^3}{24EI}$$

$$v_C = v'_C + v''_C = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^4}{8EI} = \frac{ql^4}{4EI}$$

Ed in una struttura del genere invece quali sarebbero v_C , φ_C e w_C ?

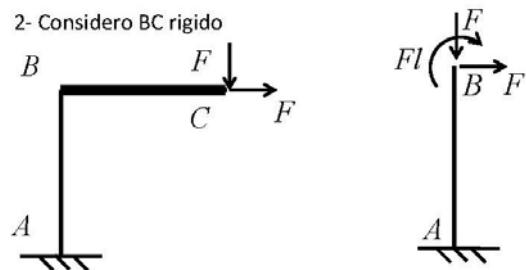


Punto 1: Considero AB rigido



$$\begin{cases} v'_C = \frac{Fl^3}{3EI} \\ w'_C = \frac{Fl}{EA} \\ \varphi'_C = -\frac{Fl^2}{2EI} \end{cases}$$

Punto 2: Considero BC rigido



$$\begin{cases} v''_B = \frac{Fl}{EA} \\ w''_B = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fl^3}{2EI} \\ \varphi''_B = -\frac{Fl^2}{2EI} - \frac{Fl^2}{EI} \\ s''_C = s''_B + \varphi''_B \times (C - B) \\ v''_C = v''_B - l\varphi''_B = \frac{Fl}{EA} + \frac{3Fl^3}{2EI} \\ w''_C = w''_B = \frac{5Fl^3}{6EI} \\ \varphi''_C = \varphi''_B = -\frac{3Fl^2}{2EI} \end{cases}$$

Allora:

$$\begin{cases} v_C = v'_C + v''_C = \frac{11Fl^3}{6EI} + \frac{Fl}{EA} \\ w_C = w'_C + w''_C = \frac{Fl}{EA} + \frac{5Fl^3}{6EI} \\ \varphi_C = \varphi'_C + \varphi''_C = -\frac{2Fl^2}{EI} \end{cases}$$

Servibilità di una struttura

La deformabilità di una struttura è uno dei parametri di progetto da considerare nel dimensionamento della stessa.

Si misura in termini di freccia , ovvero di inflessione a pieno carico.

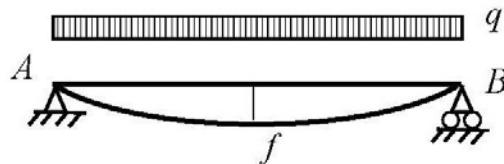
Una deformabilità eccessiva della struttura (freccia troppo elevata) non è accettabile.

L'ordine di grandezza ammissibile del rapporto freccia/luce è fornito dalle normative di legge vigenti:

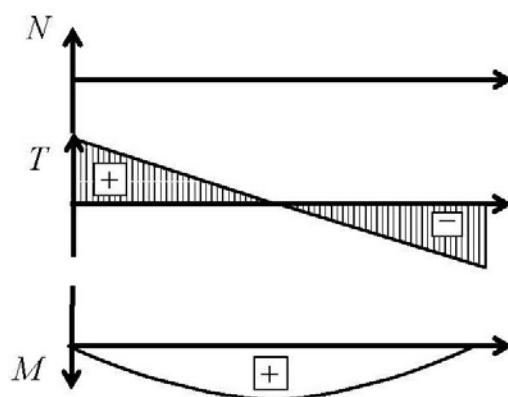
$$\begin{cases} \frac{f}{l} \leq \frac{1}{500} \rightarrow \text{Struttura molto rigida} \\ \frac{1}{500} \leq \frac{f}{l} < \frac{1}{300} \rightarrow \text{Struttura rigida} \\ \frac{1}{300} \leq \frac{f}{l} < \frac{1}{150} \rightarrow \text{Struttura deformabile} \\ \frac{f}{l} \geq \frac{1}{150} \rightarrow \text{Deformabilità non accettabile} \end{cases}$$

Casi Notevoli

In questo esempio si vogliono determinare le seguenti grandezza da una struttura appoggio - appoggio: f, φ_A, φ_B .



$$\begin{cases} N = 0 \\ T = q(l-z) - q\frac{l}{2} = q\left(\frac{l}{2} - z\right) \\ M = -\frac{q(l-z)^2}{2} + q\frac{l}{2}(l-z) = \frac{q}{2}(lz - z^2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} w'(z) = \frac{N}{EA} = 0 \\ \varphi'(z) = \frac{M}{EI} = \frac{q}{2EI}(lz - z^2) \\ v'(z) = -\varphi \end{cases}$$

Integrando:

$$\begin{cases} w(z) = C_1 \\ \varphi(z) = \frac{ql}{4EI}z^2 - \frac{q}{6EI}z^3 + C_2 \\ v'(z) = -\frac{ql}{12EI}z^3 + \frac{q}{24EI}z^4 - C_2z + C_3 \end{cases}$$

Con le Seguenti condizioni al contorno:

$$w(0) = 0 \quad v(0) = 0 \quad v(l) = 0$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} w(z) = 0 \\ \varphi(z) = \frac{ql}{4EI}z^2 - \frac{q}{6EI}z^3 - \frac{ql^3}{24EI} \\ v'(z) = -\frac{ql}{12EI}z^3 + \frac{q}{24EI}z^4 + \frac{ql^3}{24EI}z \end{cases}$$

Si può dunque rispondere alla richiesta iniziale:

$$\begin{cases} \varphi_A = -\frac{ql^3}{24EI} \\ \varphi_B = \frac{ql^3}{24EI} \\ f = v_c = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \end{cases}$$

Per cui, fornendo dei dati:

$$m_{trave} = 50 \text{ kg/m}; \quad m_{carichi} = 500 \text{ kg/m}; \quad l_{trave} = 10 \text{ m}; \quad I = 5790 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4; \quad E = 210 \text{ GPa}$$

Si ottiene:

$$f = 0.06 \text{ m} \Rightarrow \frac{f}{l} = \frac{1}{170}$$

Equazioni del IV ordine della linea elastica

Equazioni Indefinite di Equilibrio

$$\begin{cases} N' = -P \\ M' = T - m \\ T' = -q \end{cases}$$

Equazioni indefinite della linea elastica

$$\begin{cases} w'(z) = \frac{N}{EA} + \lambda \\ v'(z) = \chi \frac{T}{GA} + \vartheta - \varphi \\ \varphi'(z) = \frac{M}{EI} + \mu \end{cases}$$

Sotto le ipotesi di:

- Indeformabilità a taglio;
- Distorsioni ϑ nulle;

Si ottengono:

$$\begin{aligned} v'(z) &= \chi \frac{T}{GA} + \vartheta - \varphi = -\varphi \\ v''(z) &= -\varphi' = -\frac{M}{EI} - \mu \\ M &= -EI(v'' + \mu) \\ N &= EA(w' - \lambda) \end{aligned}$$

Si sostituisca ora la terza Equazione indefinita di equilibrio nella seconda derivata due volte, per cui:

$$M'' = T' - m' = -q - m'$$

Si sostituisca l' M allena trovato dalla ipotesi precedenti e si riaggiusti il segno:

$$[EI(v'' + \mu)]'' = q + m'$$

Equivalentemente si ottiene, anche per la prima equazione indefinita di equilibrio:

$$\begin{aligned} N' &= -P \\ [EA(w' - \lambda)]' &= -p \end{aligned}$$

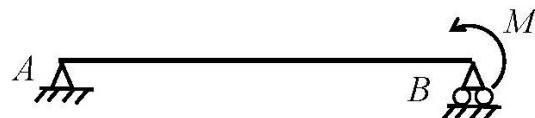
Si ottiene così un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} [EI(v'' + \mu)]'' = q + m' \\ [EA(w' - \lambda)]' = -p \end{cases}$$

Che se risolto in v e w permette di ricavare N, M, T senza passare esplicitamente per il problema statico:

$$\begin{cases} N = [EA(w' - \lambda)]' = -p \\ M = -[EI(v'' + \mu)]'' = -q - m' \\ T = M' + m = -[EI(v'' + \mu)]' + m \end{cases}$$

Caso particolare con distorsioni e momento distribuito nulli.



$$\lambda = \mu = m = 0$$

$$\begin{cases} Elv''' = q \\ EAw'' = -p \end{cases} \quad \begin{cases} N = EAw' \\ M = -ELv'' \\ T = -ELv''' \end{cases}$$

Le condizioni al contorno per v possono essere applicate su:

- Rotazioni
- Spostamenti
- Taglio
- Momento

Servono 4 condizioni al contorno su v e 2 su w .

$$M_A = 0; \quad v_A = 0; \quad w_A = 0; \quad M_B = M; \quad v_B = 0; \quad N_B = 0$$

$$\begin{cases} Elv''' = q = 0 \Rightarrow Elv''' = C_1 \Rightarrow Elv'' = C_1 z + C_3 \Rightarrow Elv' = C_1 \frac{z^2}{2} + C_3 z + C_5 \\ EAw'' = -p = 0 \Rightarrow EAw' = C_2 \Rightarrow EAw = C_2 z + C_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{1}{EI} \left(C_1 \frac{z^3}{6} + C_3 \frac{z^2}{2} + C_5 z + C_6 \right) \\ w = \frac{1}{EA} (C_2 z + C_4) \end{cases}$$

Applico le condizioni al contorno:

$$v_A = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \Rightarrow C_6 = 0$$

$$w_A = 0 \Rightarrow w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$M_A = 0 \Rightarrow Elv''(0) = 0 \Rightarrow v''(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

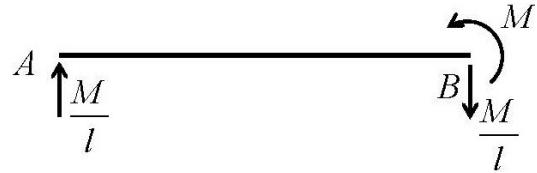
$$v_B = 0 \Rightarrow v(l) = 0 \Rightarrow \frac{C_1 l^3}{6EI} + \frac{C_5 l}{EI} = 0 \Rightarrow C_5 = \frac{C_1 l^2}{6}$$

$$M_B = M \Rightarrow Elv''(l) = M \Rightarrow v''(l) = -\frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{C_1 l}{EI} = -\frac{M}{EI} \Rightarrow C_1 = -\frac{M}{l}$$

$$N_B = 0 \Rightarrow EAw'(l) = 0 \Rightarrow w'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

E così:

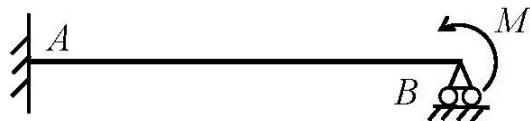
$$\begin{cases} v(z) = -\frac{M}{l} \frac{z^3}{6EI} + \frac{Ml}{6EI} z \\ w(z) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N = EAw' = 0 \\ M = -EIv'' = \frac{M}{l} z \\ T = -EIv'' = \frac{M}{l} \end{cases}$$



Questo metodo risulta però di scarsa utilità per la risoluzione di strutture isostatiche, in queste strutture risulta immediato risolvere il problema statico determinando le reazioni vincolari e calcolando le risultanti.

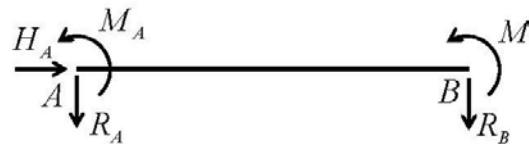
Diventa tuttavia fondamentale per la risoluzione di quelle strutture iperstatiche nelle quali, per definizione, le reazioni sono determinabili a meno di «i» parametri.

Strutture iperstatiche – Equilibrio



$$l = 0 \quad \begin{cases} t = 1 \\ s = 4 \end{cases} \Rightarrow 3t - s = -1 \Rightarrow i = 1$$

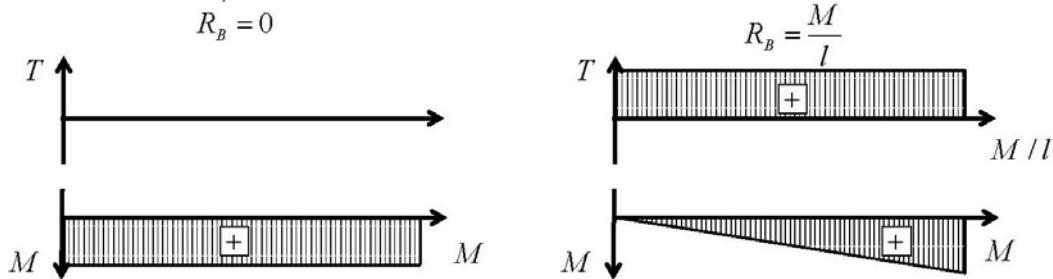
La struttura è iperstatica, non si è in grado di tracciare i diagrammi delle sollecitazioni.



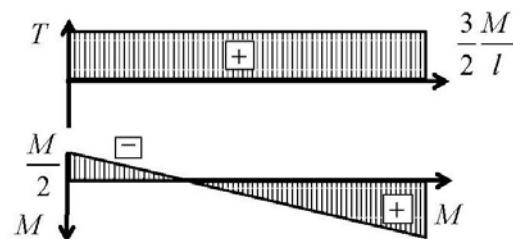
$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ R_A + R_B &= 0 \\ M_A + M - R_B l &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} H_A \\ R_A \\ M_A \\ R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \\ 0 \end{bmatrix} + R_B \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ l \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} N(z) = 0 \\ T(z) = R_B \\ M(z) = M - R_B(l - z) \end{cases}$$

Strutture iperstatiche – Caratteristiche della sollecitazione



$$R_B = \frac{3}{2} \frac{M}{l}$$



Strutture iperstatiche – Equazioni del IV ordine

Per la stessa struttura, si ricorre alle equazioni del quarto ordine:

$$Elv''' = 0$$

$$v = \frac{1}{EI} \left(C_1 \frac{z^3}{6} + C_2 \frac{z^2}{2} + C_3 z + C_4 \right)$$

Applico le condizioni al contorno:

$$v_A = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\varphi_A = 0 \Rightarrow -v'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$v_B = 0 \Rightarrow v(l) = 0 \Rightarrow \frac{C_1 l^3}{6EI} + \frac{C_2 l^2}{2EI} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{C_1 l}{3}$$

$$M_B = M \Rightarrow Elv''(l) = M \Rightarrow v''(l) = -\frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{C_1 l}{EI} + \frac{C_2}{EI} = -\frac{M}{EI} \Rightarrow C_1 l + C_2 = -M$$

$$N_B = 0 \Rightarrow EAw'(l) = 0 \Rightarrow w'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

E quindi:

$$\begin{cases} v(z) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Mz^3}{4l} + \frac{Mz^2}{4} \right) \\ \varphi(z) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Mz^2}{4l} + \frac{Mz}{2} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} M(z) = -EIv'' = M \left(\frac{3z}{2l} - \frac{1}{2} \right) \\ T = -EIv'' = \frac{3}{2} \frac{M}{l} \end{cases}$$

Si confrontino ora i risultati ottenuti dalle equazioni cardinali:

$$\begin{cases} T(z) = R_B \\ M(z) = M - R_B(l - z) \end{cases}$$

Per cui:

$$R_B = \frac{3}{2} \frac{M}{l}$$

Le equazioni della linea elastica permettono così di determinare la reazione vincolare in B.

In generale, le equazioni della linea elastica offrono più informazioni delle sole equazioni cardinali in quanto contengono sia le condizioni di congruenza che il legame costitutivo che hanno permesso di trattare i corpi deformabili.

Strutture iperstatiche – Metodo delle Forze

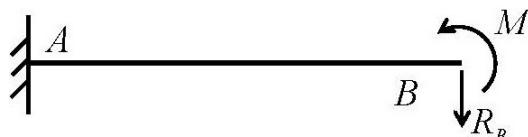
Lo stesso problema iperstatico può essere risolto in maniera diversa.

Si riproponga ancora una volta la stessa struttura:



Dalla statica si è visto che la soluzione ottenibile è funzione di un parametro R_B (o anche R_A o M_A).

Scelta la reazione in B come il parametro descrivente la soluzione, si può definire un sistema del tipo:

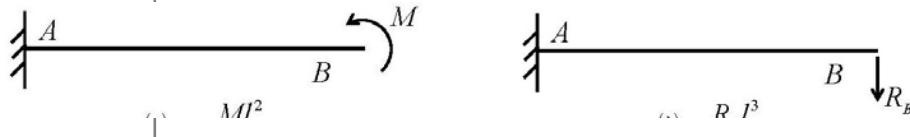


Che sarà equivalente a quello di partenza se, considerando la reazione come un'incognita, sia soddisfatta l'equazione di congruenza:

$$v_B = 0$$

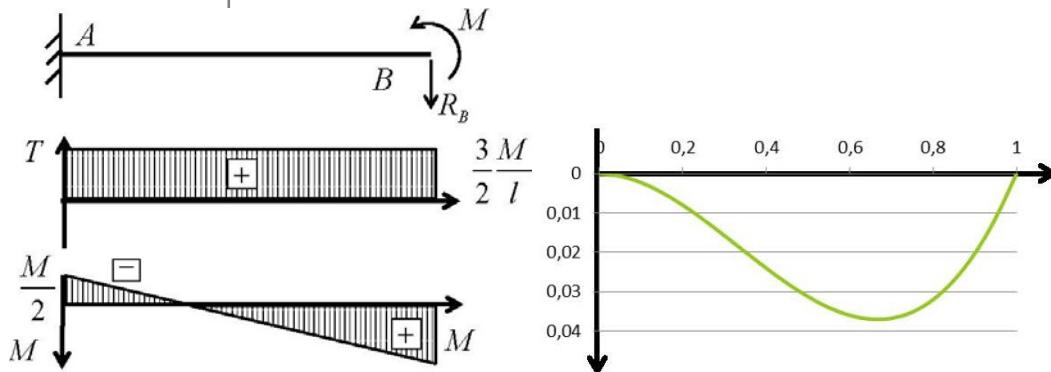
Per sovrapposizione degli effetti:

$$v_B^{(a)} = -\frac{Ml^2}{2EI} \quad v_B^{(b)} = \frac{R_B l^3}{3EI}$$

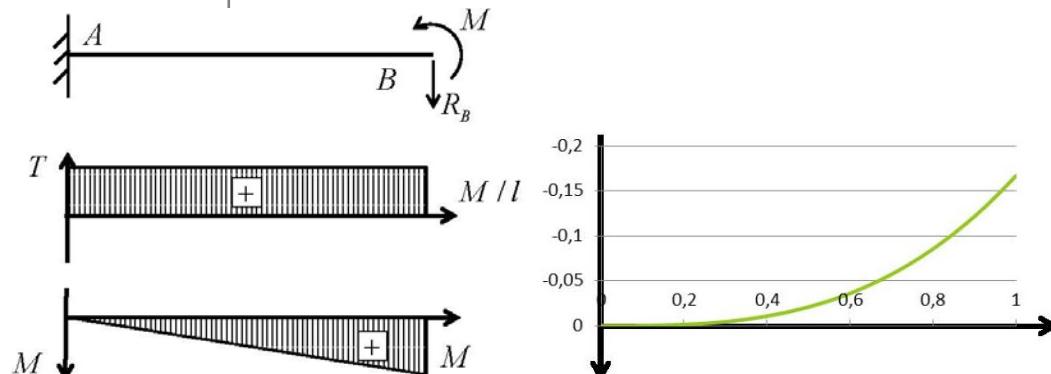


$$v_B = v_B^{(a)} + v_B^{(b)} = 0 \Rightarrow -\frac{Ml^2}{2EI} + \frac{R_B l^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3}{2} \frac{M}{l}$$

Perché altre soluzioni per la reazione vincolare in B non sono ammissibili?



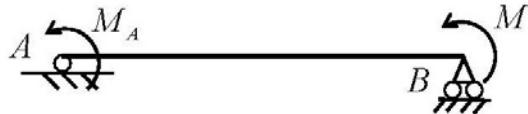
Se si immaginasse una soluzione differente per la reazione vincolare in B, tipo $R_B = \frac{M}{l}$



Questa non sarebbe compatibile con la congruenza: $v_B = -\frac{Ml^2}{6EI} \neq 0$, assurdo!

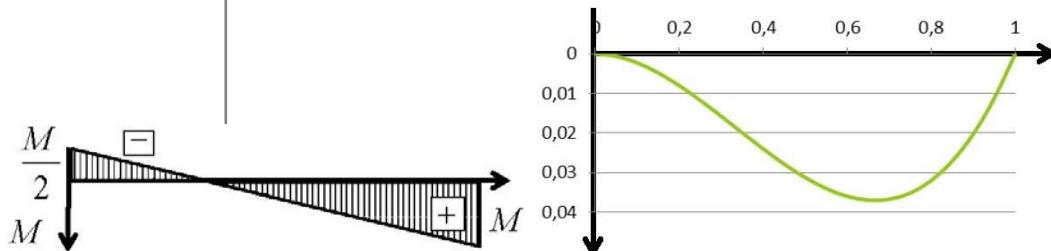
Attraverso il metodo delle forze, quindi, per una struttura iperstatica in una classe infinita di diagrammi equilibrati, si identifica l'unico sistema congruente. La scelta del parametro descrivente la soluzione è ininfluente sulla soluzione finale, a patto di garantire la labilità nulla del sistema.

Se si cambia il parametro infatti:

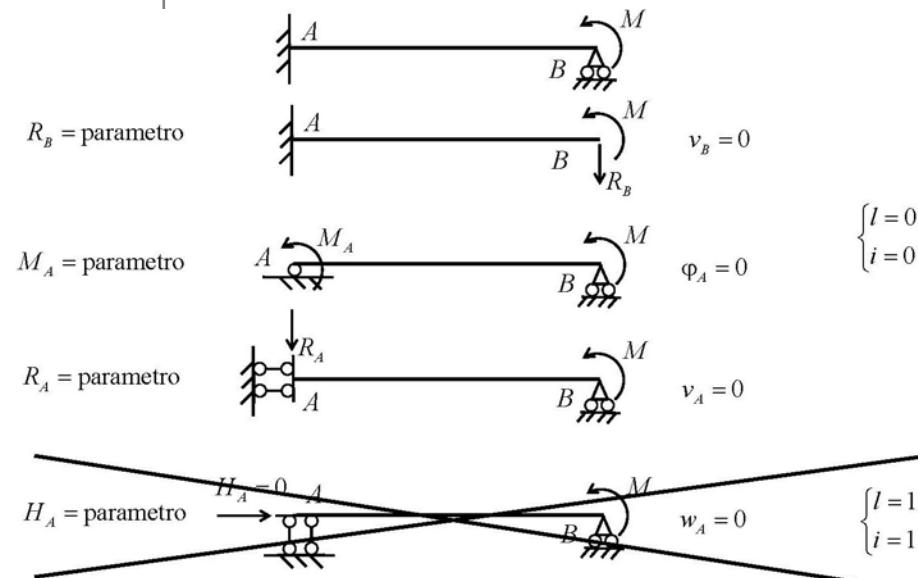


$$\begin{bmatrix} H_A \\ R_A \\ M_A \\ R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M/l \\ 0 \\ M/l \end{bmatrix} + M_A \begin{bmatrix} 0 \\ -1/l \\ l \\ 1/l \end{bmatrix}$$

$$\varphi_A = 0 \Rightarrow \varphi_A = -\frac{Ml}{6EI} + \frac{M_A l}{3EI} \Rightarrow M_A = \frac{M}{2}$$



Alcune considerazioni sulla scelta del parametro



La reazione H è fissata, rimuovendola otteniamo una struttura iperstatica

Per scegliere un buon parametro ho due possibilità:

1. Scrivere esplicitamente le soluzioni delle reazioni vincolari e scegliere un parametro non fissato;
2. Verificare che nella struttura, dopo aver rimosso il vincolo corrispondente alla reazione scelta come parametro, non si sia incrementato il grado di labilità;

Se si prende una struttura S caratterizzata da l ed i ed e si eliminano i vincoli e si ottiene una struttura S' caratterizzata da l' ed i' , allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (a) $i' = 0$
- (b) $l' = l$
- (c) I parametri scelti sono atti a scrivere le soluzioni delle ECS di S

Dimostrazione:

$$(a) i' = 0 \Leftrightarrow (b) l' = l$$

Si parta con l'ipotizzare che $i' = 0$, si dimostrerà allora che $l' = l$.

Sia C la matrice di compatibilità per S:

$$[C]_{s \times 3t} \vec{s}_{3t} = 0$$

$$l = \dim \ker[C] = 3t - rk[C]$$

$$i = \dim \ker[C^T] = s - rk[C]$$

Eliminare «i» vincoli equivale a eliminare «i» righe della matrice C, ottenendo una nuova matrice C' relativa alla struttura S'.

$$[C]_{s \times 3t} = \begin{bmatrix} [C']_{(s-i) \times 3t} \\ [C^*]_{i \times 3t} \end{bmatrix} \quad s' = s - i$$

C^* è la matrice formata dalle righe cancellate da C per ottenere C'. Nelle nostre ipotesi $i=0$, ciò è vero se e solo se:

$$\dim \ker[C'^T] = 0$$

$$s' - rk[C'] = 0 \Rightarrow s - i = rk[C']$$

$$3t - s' = l' - i' \Rightarrow l' = 3t - s - i$$

$$l' = 3t - s + i = 3t - rk[C']$$

$$rk[C'] = 3t - l'$$

$$s - i = 3t - l'$$

Ma per definizione:

$$3t - s = l - i \Rightarrow 3t - l = s - i$$

E infine

$$s - i = 3t - l'$$

$$3t - l = s - i$$

$$l = l' \quad \blacksquare$$

Si dimostri ora che:

- (c) I parametri scelti sono atti a scrivere le soluzioni delle ECS di S \Leftrightarrow (b) $l' = l$

$$[E]_{3t \times s} = [C^T]_{3t \times s}$$

Per la struttura S' si avrà:

$$[E']_{3t \times (s-i)}$$

questa ottenuta cancellando da E le colonne corrispondenti ai vincoli eliminati

$$[E]_{3t \times s} = [[E']_{3t \times (s-i)} \ [E^*]_{3t \times i}]$$

$$[E]_{3t \times s} \vec{\lambda}_s + \vec{f}_{3t} = 0$$

In λ sono presenti i parametri relativi a tutti i vincoli.

λ' , con «s-i» componenti, sono i parametri relativi ai vincoli che rimangono; λ^* , con «i» componenti, sono i parametri relativi ai vincoli che vengono eliminati;

Per il sistema S le equazioni cardinali sono:

$$[E']_{3t \times (s-i)} \vec{\lambda}'_{s-i} + [E^*]_{3t \times i} \vec{\lambda}^*_i + \vec{f}_{3t} = 0$$

Per il sistema S' le equazioni cardinali coincidono formalmente con quelle di S con la differenza sostanziale che per S' le grandezze λ^* non sono più incognite ma parametri:

Si riformuli così l'ipotesi (c).

Il vettore λ^* deve risultare un vettore di parametri liberi atto a descrivere la soluzione delle ECS.

Che equivale a dire:

$$\text{rk}[E] = \text{rk}[E^T]$$

Una tale uguaglianza è equivalente al punto a), infatti osservando che:

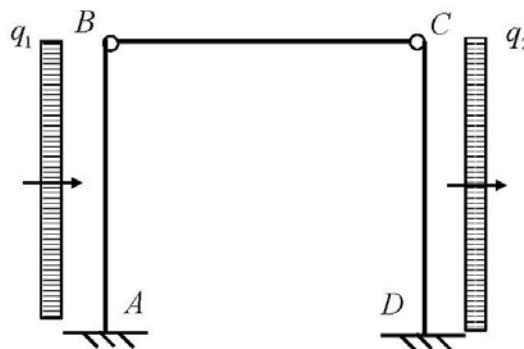
$$\text{rk}[C] = \text{rk}[C^T] = \text{rk}[E]$$

Allora:

$$l = 3t - \text{rk}[C] = 3t - \text{rk}[E] = 3t - \text{rk}[E'] = 3t - \text{rk}[C'] = l' \quad \blacksquare$$

Metodo delle Forze

Caso 1

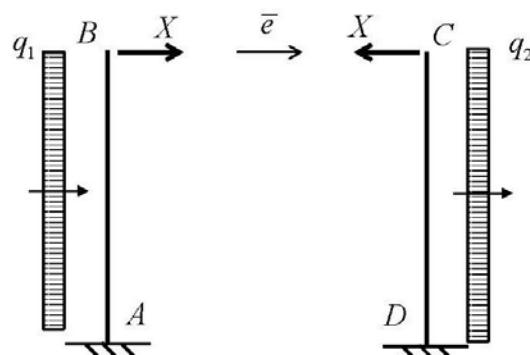


$$t = 2; s = 3 \rightarrow 3t - s = -1 \rightarrow l = 0; i = 1$$

Poiché le ECS non sono sufficienti a definire il problema, si deve scegliere un parametro che ne descriva le soluzioni.

Si utilizza un criterio operativo che prevede l'eliminazione di un vincolo semplice che non alteri il grado di labilità.

Se invece la struttura fosse stata labile, si sarebbe dovuto verificare la condizione di equilibrio della struttura e solo successivamente si poteva valutare l'eliminazione della iperstaticità.



$$(s_C - s_B) \cdot \vec{e} = 0$$

$$s_C \cdot \vec{e} = \frac{q_2 h^4}{8EI} - \frac{X h^3}{3EI}$$

$$s_B \cdot \vec{e} = \frac{q_1 h^4}{8EI} + \frac{X h^3}{3EI}$$

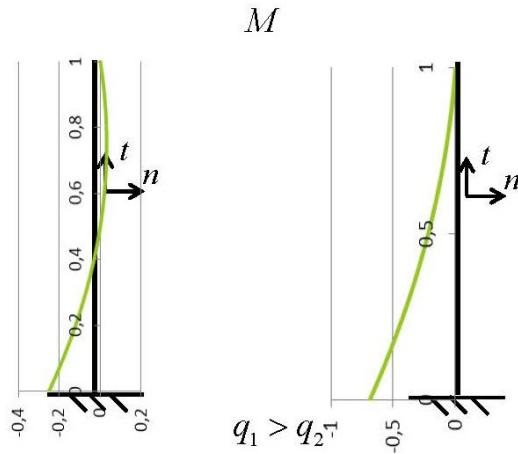
Allora:

$$\frac{q_2 h^4}{8EI} - \frac{X h^3}{3EI} - \frac{q_1 h^4}{8EI} - \frac{X h^3}{3EI} = 0$$

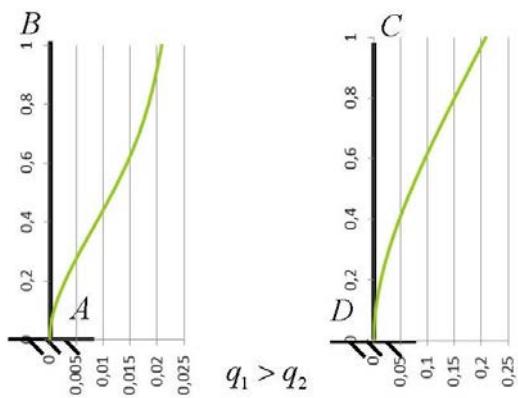
$$(q_1 - q_2) \frac{h^4}{8EI} - X \frac{2h^3}{3EI} = 0$$

La reazione vincolare del pendolo X garantisce la congruenza, l'equivalenza, tra la struttura equivalente e quella originale sia in termini statici che cinematici.

$$X = (q_1 - q_2) \frac{h^4}{8EI} \frac{3EI}{2h^3} = (q_1 - q_2) \frac{3}{16} h$$

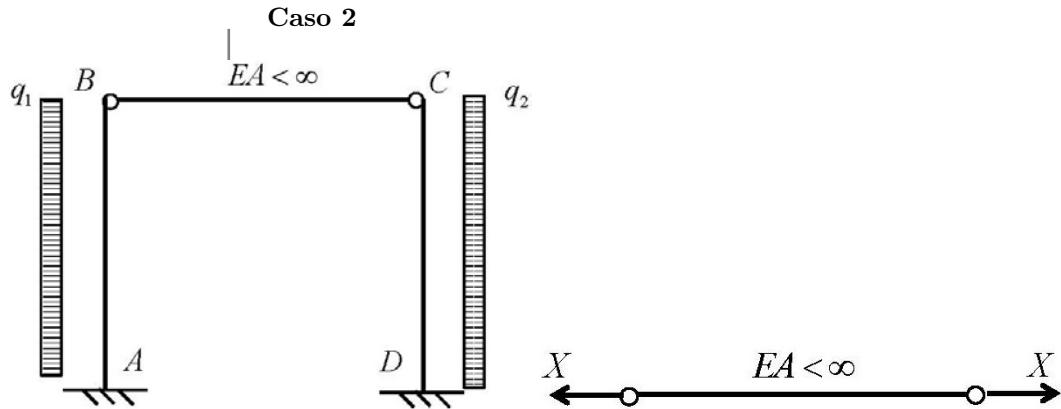


Per un carico maggiore sulla prima trave, la seconda contribuisce a sostenere il carico.



La deformata sulla prima trave presenta un punto di flesso dove:

$$v'' = M = 0$$



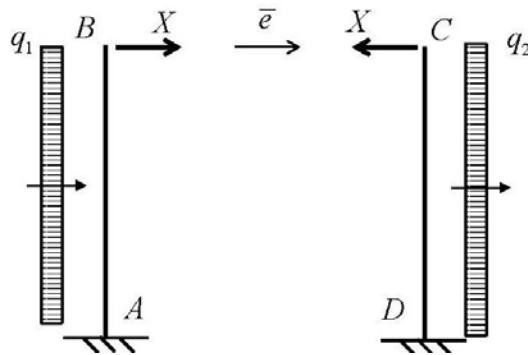
Questa volta il pendolo è deformabile.

$$(s_C - s_B) \cdot \vec{e}|_{pendolo} = \frac{Xh}{EA}$$

$$(s_C - s_B) \cdot \vec{e}|_{struttura} = (s_C - s_B) \cdot \vec{e}|_{pendolo} = \frac{Xh}{EA}$$

$$(q_2 - q_1) \frac{h^4}{8EI} - X \frac{2h^3}{3EI} = \frac{Xh}{EA}$$

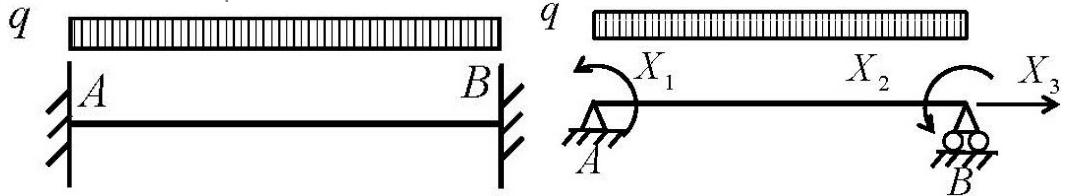
E dunque:



$$X = \frac{(q_2 - q_1) \frac{h^4}{8EI}}{\frac{2h^3}{3EI} + \frac{h}{EA}}$$

In questo modo una volta fissato il rapporto tra EI e EA diverrà possibile tracciare i diagrammi delle sollecitazioni e la deformata.

Caso 3
Quanto vale f ?



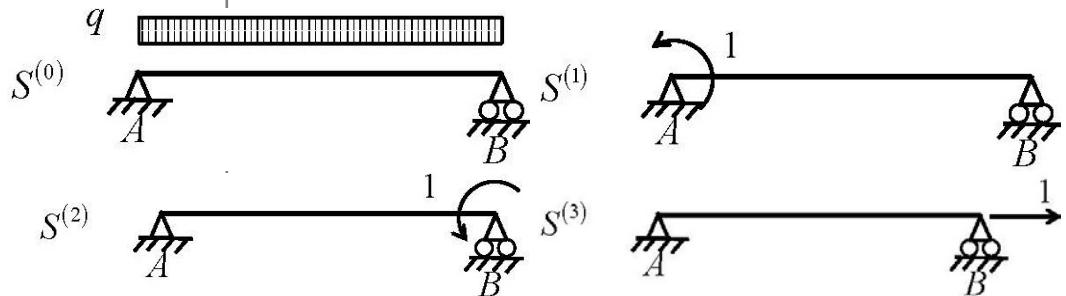
$$t = 1; s = 6 \rightarrow 3t - s = -3 \rightarrow l = 0; i = 3$$

Per rendere la struttura non iperstatica devono essere rimossi 3 vincoli semplici.
Impongo:

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \varphi_B = 0 \\ w_B = 0 \end{cases}$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si scomponete la struttura in 4 sottoschemi.

$$S^0 = X_1 S^1 + X_2 S^2 + X_3 S^3$$



$$X_1 \varphi_A^1 + X_2 \varphi_A^2 + X_3 \varphi_A^3$$

$$\begin{cases} \varphi_A = \varphi_A^0 + X_1 \varphi_A^1 + X_2 \varphi_A^2 + X_3 \varphi_A^3 = 0 \\ \varphi_B = \varphi_B^0 + X_1 \varphi_B^1 + X_2 \varphi_B^2 + X_3 \varphi_B^3 = 0 \\ w_B = w_B^0 + X_1 w_B^1 + X_2 w_B^2 + X_3 w_B^3 = 0 \end{cases}$$

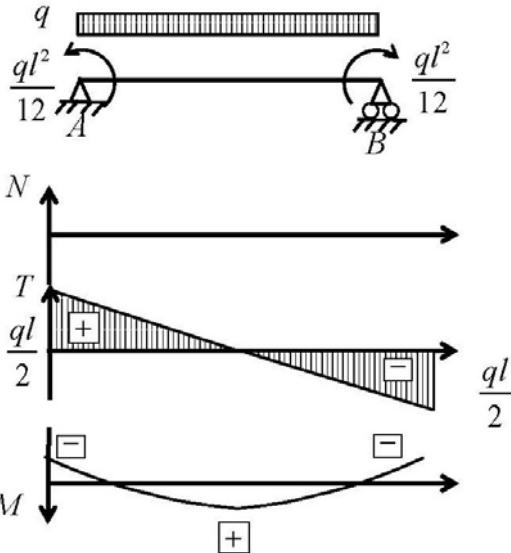
In cui:

$$\varphi_A^0 = -\frac{ql^3}{24EI} \quad \varphi_B^0 = \frac{ql^3}{24EI} \quad w_B^0 = 0$$

$$\varphi_A^1 = \frac{1 \cdot l}{3EI} \quad \varphi_B^1 = -\frac{1 \cdot l}{6EI} \quad w_B^1 = 0$$

$$\varphi_A^2 = -\frac{1 \cdot l}{6EI} \quad \varphi_B^2 = \frac{1 \cdot l}{3EI} \quad w_B^2 = 0$$

$$\varphi_A^3 = 0 \quad \varphi_B^3 = 0 \quad w_B^3 = \frac{1 \cdot l}{EA}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1 \cdot l}{3EI} & -\frac{1 \cdot l}{6EI} & 0 \\ -\frac{1 \cdot l}{6EI} & \frac{1 \cdot l}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 \cdot l}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ql^3}{24EI} \\ -\frac{ql^3}{24EI} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giungendo a:

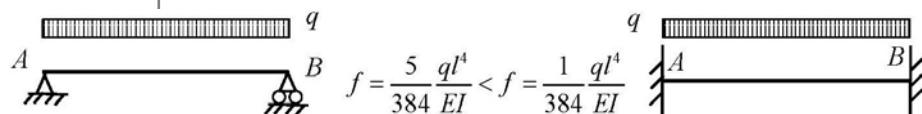
$$X_1 = \frac{ql^2}{12}; \quad X_2 = -\frac{ql^2}{12}; \quad X_3 = 0$$

E dunque:

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} - \frac{ql^2}{12} \frac{l^2}{16EI} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

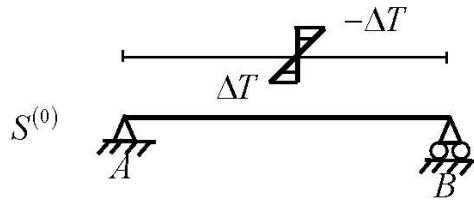
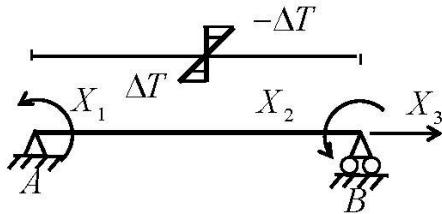
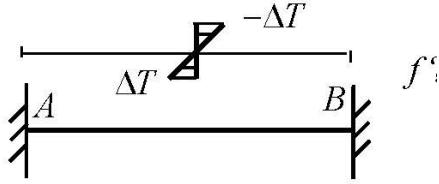
Infine:

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} < f = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$$



Caso 4

Quanto vale f ?



Come prima, per rendere la struttura non iperstatica devono essere rimossi 3 vincoli semplici.

Impongo:

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \varphi_B = 0 \\ w_B = 0 \end{cases}$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si scomponete la struttura in 4 sottoschemi.

$$\begin{aligned} S^0 &= X_1 S^1 + X_2 S^2 + X_3 S^3 \\ \mu &= \frac{2\alpha\Delta T}{h} \quad \varphi' = \mu \\ \varphi &= \mu z + C_1 \quad \nu = \mu \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \end{aligned}$$

Applicando le condizioni al contorno si ottiene:

$$\nu(0) = 0 = C_2 \quad \nu(l) = \mu \frac{l^2}{2} + C_1 l = 0$$

$$\varphi(z) = \mu \left(z - \frac{l}{2} \right) \quad \nu(z) = \mu z \left(\frac{z}{2} - \frac{l}{2} \right)$$

La matrice sarà la stessa del caso precedente eccezion fatta per il vettore dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} \frac{1 \cdot l}{3EI} & -\frac{1 \cdot l}{6EI} & 0 \\ -\frac{1 \cdot l}{6EI} & \frac{1 \cdot l}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 \cdot l}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu l}{2} \\ -\frac{\mu l}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giungendo a:

$$X_1 = EI\mu; \quad X_2 = -EI\mu; \quad X_3 = 0$$

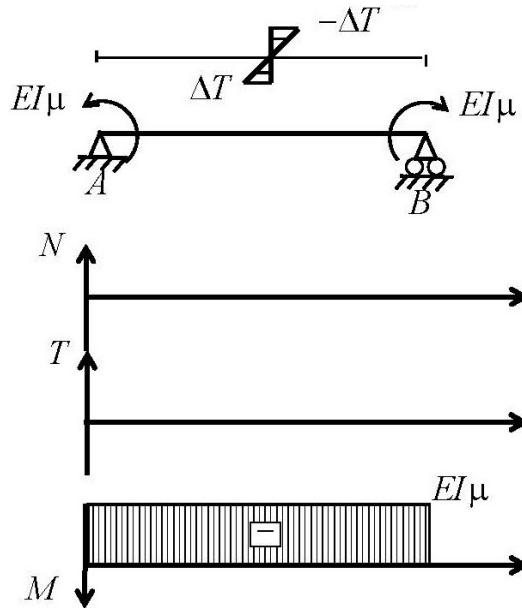
Da Mohr si ottiene:

$$q^* = \frac{M}{EI} + \mu = -\frac{EI/mu}{EI} + \mu = 0$$

E dunque:

$$M^* = v = 0$$

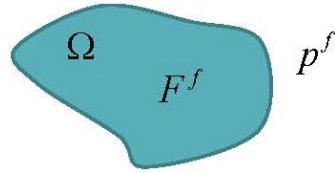
E la struttura non si deforma ma si tensiona.



Per strutture iperstatiche le distorsioni provocano sollecitazioni.

Principio dei Lavori Virtuali applicato al calcolo delle travi

In un sistema deformabile, il lavoro virtuale esterno compiuto da un sistema di forze generico per un qualunque insieme di spostamenti virtuali compatibili è uguale al lavoro virtuale interno compiuto dalle tensioni interne, in equilibrio con le suddette forze esterne, per le componenti di deformazione associate al sistema di spostamenti virtuali prescelto.



Si consideri un sistema di forze e tensioni in equilibrio e un sistema di spostamenti e deformazioni congruenti, il lavoro suddetto risulta:

$$L_{Vint} = \int_{\Omega} [T] \cdot [D] = \int_{\Omega} (\sigma_x^f \varepsilon_x^s + \sigma_y^f \varepsilon_y^s + \sigma_z^f \varepsilon_z^s + \tau_{xy}^f \gamma_{xy}^s + \tau_{xz}^f \gamma_{xz}^s + \tau_{yz}^f \gamma_{yz}^s) d\Omega$$

In cui:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x^f & \tau_{xy}^f & \tau_{xz}^f \\ \tau_{xy}^f & \sigma_y^f & \tau_{yz}^f \\ \tau_{xz}^f & \tau_{yz}^f & \sigma_z^f \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^s & \gamma_{xy}^s & \gamma_{xz}^s \\ \gamma_{xy}^s & \varepsilon_y^s & \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s & \gamma_{yz}^s & \varepsilon_z^s \end{bmatrix}$$

$$L_{Vext} = \int_{\Omega} \vec{F}^f \cdot \vec{s}^s + \int_{\partial\Omega} \vec{p}^f \cdot \vec{s}^s$$

Deve ovviamente sussistere:

$$L_{Vint} = L_{Vext}$$

Innanzitutto, poiché si applica il criterio al caso di elementi monodimensionali come le travi, varrà:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

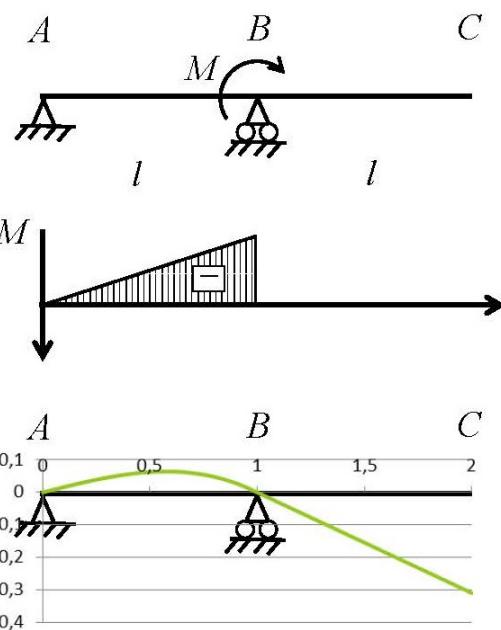
E dunque:

$$\begin{aligned} L_{Vint} &= \int_{\Omega} \left(\sigma_z^f \varepsilon_z^s + \vec{\tau}_z^f \vec{\gamma}_z^s \right) d\Omega = \int_l \int_A \left(\sigma_z^{f,N} \varepsilon_z^{s,N} + \sigma_z^{f,M} \varepsilon_z^{s,M} + \vec{\tau}_z^{f,T} \vec{\gamma}_z^{s,T} \right) dldA \\ &\quad \sigma_z^{f,N} = \sigma_z^{N=1} N^f \\ &\quad \varepsilon_z^{s,N} = \varepsilon_z^{N=1} N^s \\ L_{Vint} &= \int_l \int_A \left(\sigma_z^{N=1} N^f \varepsilon_z^{N=1} N^s + \sigma_z^{M=1} M^f \varepsilon_z^{M=1} M^s + \vec{\tau}_z^{T=1} T^f \vec{\gamma}_z^{T=1} T^s \right) dldA \\ &\quad \left[\int_A \frac{1}{2} (\sigma_z^{N=1} \varepsilon_z^{N=1}) dA \right] = \frac{1}{2} \frac{1^2}{EA} dz \\ &\quad \left[\int_A \frac{1}{2} (\sigma_z^{M=1} \varepsilon_z^{M=1}) dA \right] = \frac{1}{2} \frac{1^2}{EI} dz \\ &\quad \left[\int_A \frac{1}{2} (\tau_z^{T=1} \gamma_z^{T=1}) dA \right] = \frac{1}{2} \frac{1^2 \chi}{GA} dz \\ L_{Vint} &= \int_l \left(N^f N^s \frac{1}{EA} + M^f M^s \frac{1}{EI} + T^f T^s \frac{\chi}{GA} \right) dz \\ L_{Vint} &= \int_l \left[N^f \left(\frac{N^s}{EA} + \lambda^s \right) + M^f \left(\frac{M^s}{EI} + \mu^s \right) + T^f \left(\frac{\chi T^s}{GA} + \vartheta^s \right) \right] dz + \\ &\quad + \underbrace{\sum_{h=1}^k \left(N_h^f \cdot D w_h^i + M_h^f \cdot D \varphi_h^i + T_h^f \cdot D u_h^i \right)}_{\text{Distorsioni distribuite e localizzate}} \end{aligned}$$

Principio dei Lavori Virtuali per strutture ISOSTATICHE

Caso 1

Quanto vale v_C ?



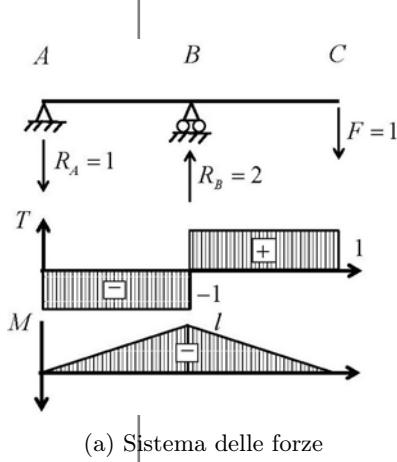
Composizione cinematica:

$$v_C = -\varphi_B l \quad \varphi_B = -\frac{Ml}{3EI} \quad v_C = \frac{Ml^2}{3EI}$$

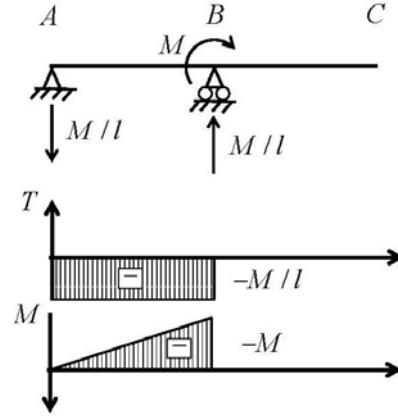
Per applicare il principio dei lavori virtuali si deve definire qual è il sistema di forze e qual è quello degli spostamenti.

Il sistema degli spostamenti è quello fornito dal problema, dato che dev'essere individuato v_C .

Il sistema di forze potà invece essere un qualsiasi sistema di forze, purché in equilibrio e scelto opportunamente per fare lavoro solo con v_C .



(a) Sistema delle forze



(b) Sistema degli spostamenti

$$L_{Vext} = F^f \cdot v_C + R_A^f \cdot v_A^s + R_B^f \cdot v_B^s = 1 \cdot v_C^s = v_C^s$$

$$L_{Vint} = \int_l \left[N^f \left(\frac{N^s}{EA} + \lambda^s \right) + M^f \left(\frac{M^s}{EI} + \mu^s \right) + T^f \left(\frac{\chi T^s}{GA} + \vartheta^s \right) \right] dz$$

Per $0 < z < l$:

$$\begin{aligned} T^f &= -1 & T^s &= -\frac{M}{l} \\ M^f &= -z & M^s &= -\frac{Mz}{l} \end{aligned}$$

Per $l < z < 2l$:

$$\begin{aligned} T^f &= 1 & T^s &= 0 \\ M^f &= -(2l - z) & M^s &= 0 \end{aligned}$$

Allora:

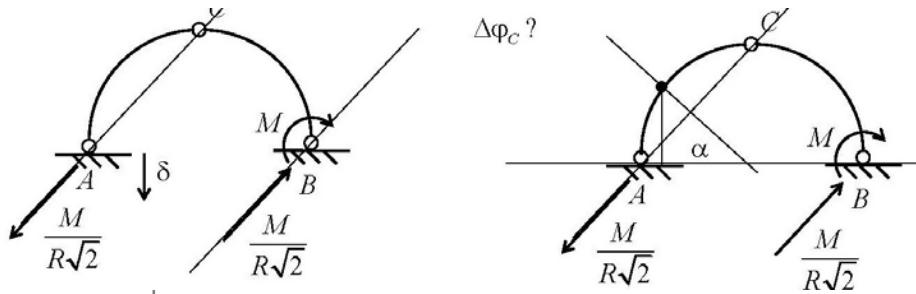
$$\begin{aligned} L_{Vint} &= \int_0^l \left[M^f \left(\frac{M^s}{EI} + \mu^s \right) + T^f \left(\frac{\chi T^s}{GA} + \vartheta^s \right) \right] dz + \\ &\quad + \int_l^{2l} \left[M^f \left(\frac{M^s}{EI} + \mu^s \right) + T^f \left(\frac{\chi T^s}{GA} + \vartheta^s \right) \right] dz \\ L_{Vint} &= \int_0^l \left[-z \left(-\frac{M}{lEI} z \right) - 1 \left(l \frac{M\chi}{lGA} \right) \right] dz + \int_l^{2l} \left[-(2l - z) \left(0 \cdot \frac{M^s}{EI} \right) + 1 \left(0 \cdot \frac{\chi T^s}{GA} \right) \right] dz \\ L_{Vint} &= \int_0^l \left[\left(\frac{M}{lEI} z^2 \right) \left(\frac{M\chi}{lGA} \right) \right] dz = \frac{M}{l} \frac{1}{EI} \frac{z^3}{3} + \frac{M}{l} \frac{\chi}{GA} z \Big|_0^l = \frac{Ml^2}{3EI} + \frac{M\chi}{GA} \end{aligned}$$

Infine:

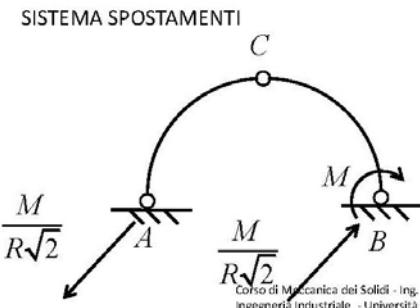
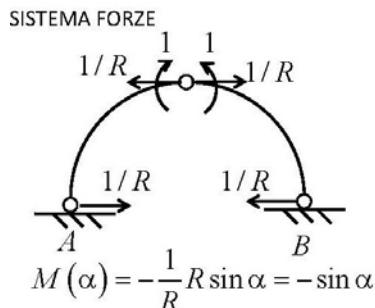
$$L_{Vint} = L_{Vext} \Rightarrow v_C = \frac{Ml^2}{3EI} + \frac{M\chi}{GA}$$

Caso 2

Quanto vale $\Delta\varphi_C$?



$$M(\alpha) = \frac{M}{R\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} R \sin \alpha - \frac{M}{R\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} R(1 - \cos \alpha)$$



Corso di Mecanica dei Solidi - Ing. Ingegneria Industriale - Università

La cerniera esterna di destra non subisce spostamenti e quindi non compie lavoro. La cerniera esterna di sinistra subisce uno spostamento dovuto al cedimento nel sistema degli spostamenti, ma è ortogonale alla forza applicata nel sistema delle forze per cui compie lavoro nullo.

Le forze sulla cerniera interna compiono lavoro uguale ed opposto per cui la loro risultante è nulla.

$$L_{Vext} = M_{C+}^f \cdot \varphi_{C+}^s + M_{C-}^f \cdot \varphi_{C-}^s = 1 \cdot \varphi_{C+}^s + (-1) \cdot \varphi_{C-}^s = \Delta \varphi_C^s$$

Nel calcolo del lavoro virtuale interno si trascuri la deformabilità a taglio.

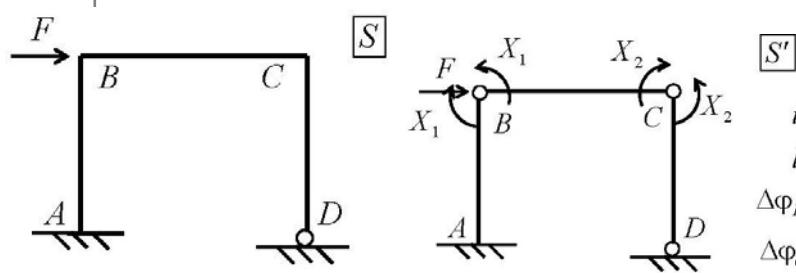
$$\begin{aligned} L_{Vint} &= \int_l \left[M^f \left(\frac{M^s}{EI} + \mu^s \right) \right] = \int_0^\pi -\sin \alpha \left(\frac{M}{2EI R} (\sin \alpha - 1 + \cos \alpha) \right) Rd\alpha = \\ &= \frac{MR}{2EI} \left(\frac{\sin 2\alpha - 2\alpha}{2} \Big|_0^\pi - \cos \alpha \Big|_0^\pi + \frac{\cos^2 \alpha}{2} \Big|_0^\pi \right) = \\ &= \frac{MR}{2EI} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Infine:

$$L_{Vint} = L_{Vext} \Rightarrow \Delta \varphi_C = \frac{MR}{2EI} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)$$

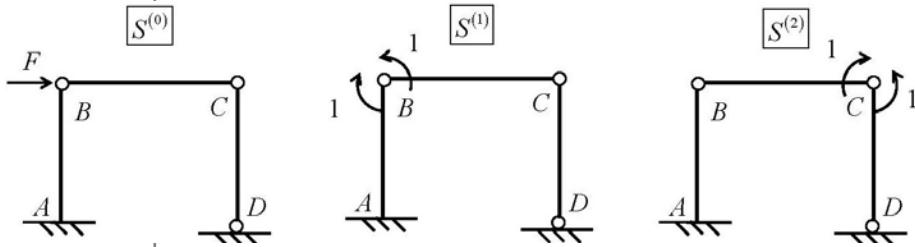
Principio dei Lavori Virtuali per strutture IPERSTATICHE

Quanto vale φ_D ?



$$i = 2, l = 0$$

La struttura è due volte iperstatica, purché non ne venga alterata la labilità si possono considerare i vincoli agenti uno per volta applicando il principio di sovrapposizione degli effetti a 1 + 2 sottostrutture: S^0, S^1, S^2 .



Le reazioni vincolari incognite sono X_1, X_2 , necessito quindi di un sistema 2×2 che collega spostamenti a reazioni.

$$\begin{cases} \Delta\varphi_B = \Delta\varphi_B^0 + X_1\Delta\varphi_B^1 + X_2\Delta\varphi_B^2 = 0 \\ \Delta\varphi_C = \Delta\varphi_C^0 + X_1\Delta\varphi_C^1 + X_2\Delta\varphi_C^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_B^1 & \Delta\varphi_B^2 \\ \Delta\varphi_C^1 & \Delta\varphi_C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\varphi_B^0 \\ \Delta\varphi_C^0 \end{bmatrix} = 0$$

Il Principio dei Lavori Virtuali può essere applicato per il calcolo dei termini della matrice dei coefficienti di X .

Il termine della matrice a_{ij} rappresenta lo spostamento del punto «i» quando è attiva la sola forza «j».

Se si considera che nel punto «i» agisca la forza «i», da cui il relativo schema S^i , allora:

$$a_{ij} \rightarrow \begin{array}{l} S^i \text{ Sistema di Forze} \\ S^j \text{ Sistema di Spostamenti} \end{array}$$

Questo approccio risulta però piuttosto laborioso nonostante la matrice dei coefficienti - matrice di deformabilità della struttura - risulti simmetrica.

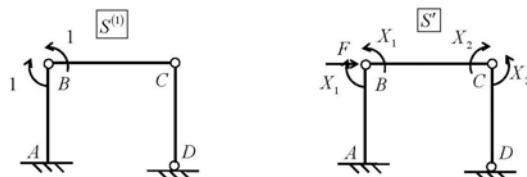
Se invece si applica il PLV con:

$$\begin{array}{l} S^i \text{ Sistema di Forze} \\ S' \text{ Sistema di Spostamenti} \end{array}$$

Si ottiene la «i»esima riga della matrice completa associata alla matrice di deformabilità.

Per definire perciò la matrice è necessario applicare «i» volte il PLV, con «i» pari al grado di iperstaticità della struttura.

Prima applicazione



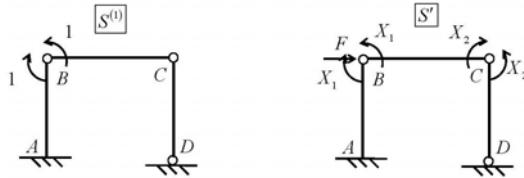
$$L_{Vext} = M_{B+}^f \cdot \varphi_{B+}^s + M_{B-}^f \cdot \varphi_{B-}^s = 1 \cdot \varphi_{B+}^s + (-1) \cdot \varphi_{B-}^s = \Delta\varphi_B^s$$

$$L_{Vint} = \int_s \left[M^f \left(\frac{M^s}{EI} + \mu^s \right) \right] = \int_s M^1 \left(\frac{M^0}{EI} + X_1 \frac{M^1}{EI} + X_2 \frac{M^2}{EI} \right) ds$$

E dunque, poiché:

$$L_{Vint} = L_{Vext} \Rightarrow \Delta\varphi_B = \int_s M^1 \left(\frac{M^0}{EI} + X_1 \frac{M^1}{EI} + X_2 \frac{M^2}{EI} \right) ds = 0$$

Seconda applicazione



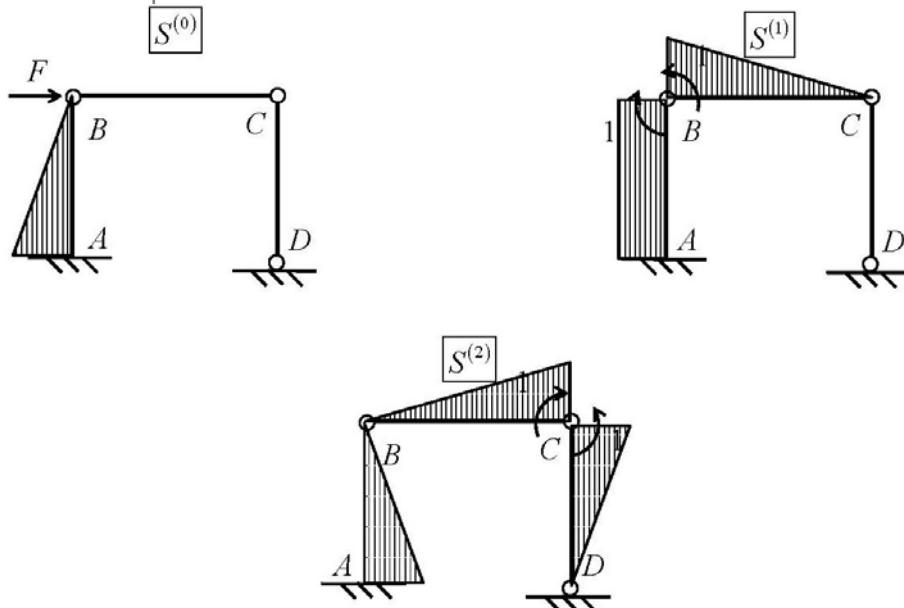
$$L_{Vext} = M_{C+}^f \cdot \varphi_{C+}^s + M_{C-}^f \cdot \varphi_{C-}^s = 1 \cdot \varphi_{C+}^s + (-1) \cdot \varphi_{C-}^s = \Delta\varphi_C^s$$

$$L_{Vint} = \int_s \left[M^f \left(\frac{M^s}{EI} + \mu^s \right) \right] = \int_s M^2 \left(\frac{M^0}{EI} + X_1 \frac{M^1}{EI} + X_2 \frac{M^2}{EI} \right) ds$$

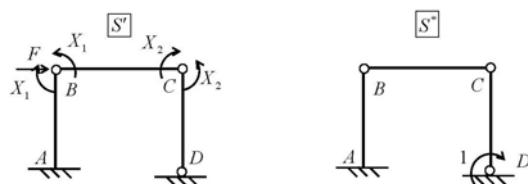
E dunque, poiché:

$$L_{Vint} = L_{Vext} \Rightarrow \Delta\varphi_C = \int_s M^2 \left(\frac{M^0}{EI} + X_1 \frac{M^1}{EI} + X_2 \frac{M^2}{EI} \right) ds = 0$$

Al fine di definire le forze X, per la risoluzione delle equazioni di congruenza sono necessari gli andamenti dei momenti flettenti.



A questo punto lo spostamento incognito richiesto si può ricercare nello schema isostatico ora perfettamente noto.



Si applica un'ultima volta il PLV usando ora come sistema delle forze una configurazione di carico che generi lavoro con lo spostamento richiesto.

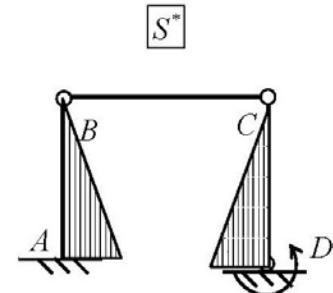
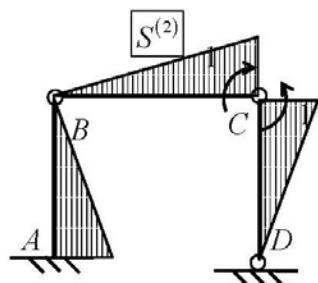
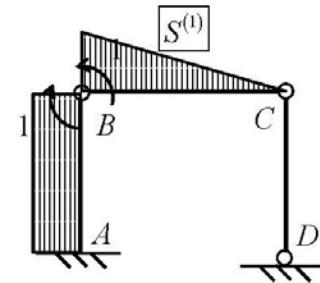
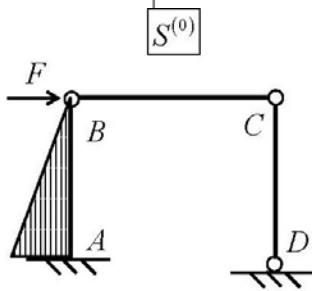
Ricerca Spostamento \rightarrow S^* Sistema di Forze
 S' Sistema di Spostamenti

$$L_{Vext} = M_D^f \cdot \varphi_D^s = \varphi_D^s$$

$$L_{Vint} = \int_s \left[M^f \left(\frac{M^s}{EI} + \mu^s \right) \right] = \int_s M^* \left(\frac{M^0}{EI} + X_1 \frac{M^1}{EI} + X_2 \frac{M^2}{EI} \right) ds$$

E dunque, poiché:

$$L_{Vint} = L_{Vext} \Rightarrow \varphi_D = \int_s M^* \left(\frac{M^0}{EI} + X_1 \frac{M^1}{EI} + X_2 \frac{M^2}{EI} \right) ds = 0$$



NOTE