

Indice

I 2.MODELLAZIONE DEL SISTEMA DI MISURA	2
Definizioni	2
Strumento di ordine 0	3
Potenziometro	3
Strumento di ordine I	4
Gradino decrescente	4
Metodo delle sottotangenti per la determinazione del τ	5
Gradino crescente	6
Metodo delle sottotangenti per la determinazione del τ	7
Rampa	7
Ingressi periodici	8
Ricapitolando	10
Termometro a bulbo	11
Considerazioni finali	11
Strumento di ordine II	12
Gradino decrescente	12
Scelta del valore di ξ	15
Metodo grafico per la determinazione di ξ ed ω_n	16
Decremento logaritmico	16
Gradino crescente	17
Rampa	18
Ingressi periodici	20
Frequenza di taglio & grafico della fase	22
Galvanometro/Amperometro	23

Parte I

2. MODELLAZIONE DEL SISTEMA DI MISURA

Definizioni

Definisco un sistema dinamicamente lineare se vale

$$A_n \frac{d^n y}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_0 y(t) = B_n \frac{d^n x}{dt^n} + B_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + B_0 x(t)$$

Come si può semplificare?

Postoci essere in x ingressi tempovariabili, questi possono essere:

$$\begin{aligned} \text{A gradino} & \quad \begin{cases} x_0 & t = t^* \\ 0 & t < t^* \end{cases} \\ \text{A rampa} & \quad \begin{cases} x_0 t & t \neq t^* \\ 0 & t < t^* \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Periodici } x = x_0 \sin(\omega t)$$

Si nota facilmente come nei tre ingressi analizzati non ci siano derivate, il RHS dell'equazione proposta si modifica così in:

$$A_n \frac{d^n y}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_0 y(t) = B_0 x(t)$$

Per le uscite invece? Queste dipendono da come è costruito lo strumento di misura, li modellizzo questi in 3 categorie di strumenti reali/didattici:

- Strumenti di ordine 0: il LHS si presenta senza derivate.

$$A_0 y(t) = B_0 x(t)$$

$$y(t) = \frac{B_0}{A_0} x(t)$$

Sotto le ipotesi di sensibilità unitaria l'uscita coincide con l'ingresso.

- Strumenti di ordine I: il LHS si ferma alla prima derivata.

$$A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y(t) = B_0 x(t)$$

La soluzione a questa equazione differenziale prevede, come ben noto, la somma di una soluzione omogenea che descrive il comportamento dello strumento nel transitorio e di una soluzione particolare che descrive il comportamento dello strumento a regime.

- Strumenti di ordine II: il LHS si ferma alla seconda derivata.

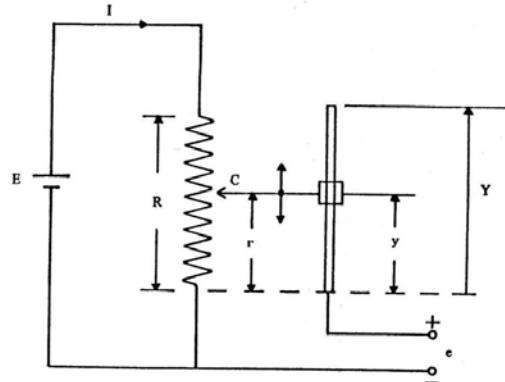
$$A_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y(t) = B_0 x(t)$$

Per studiare l'andamento di queste tipologie di strumenti, ovvero come sarà l'uscita in funzione dell'ingresso, si risolvono le equazioni differenziali.

Strumento di ordine 0

Potenziometro

Mi interessa studiare in questo caso come cambia la misura nel tempo se muovo il palpatore impulsivamente o velocemente.



$$V(0) = 0 \quad V(L) = E$$

$$\begin{cases} E = IR \\ e = rI \end{cases} \Rightarrow \frac{e}{E} = \frac{r}{R}$$

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad r = \rho \frac{x}{S}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{L}$$

Infine:

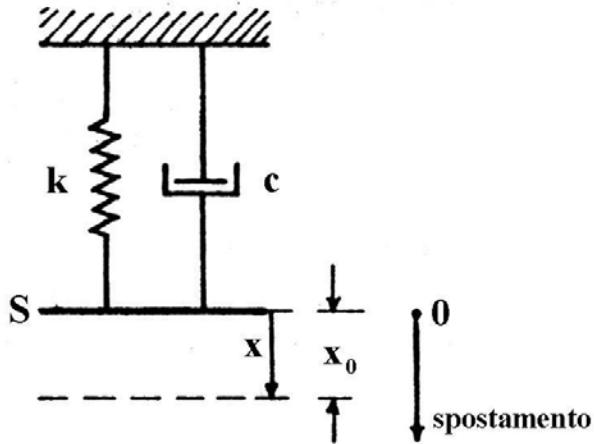
$$\frac{e}{E} = \frac{x}{L}$$

$$e(t) = \frac{E}{L}x(t)$$

Il potenziometro è in prima approssimazione uno strumento di ordine 0, perché in prima approssimazione? In realtà il palpatore C ha una sua ben definita massa, e quindi possiede inevitabilmente un'inerzia.

Strumento di ordine I

bilancia/dinamometro/termometro



In questo caso lo spostamento che misuro (y), è funzione della forza che applico (F):

$$ky + cy = F(t)$$

È necessario risolvere le uscite per ogni ingresso

Gradino decrescente

Applico all'elemento una forza F_0 , lo rilascio immediatamente e questa compie un gradino decrescente:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

Risolvo la funzione all'esterno del gradino, per $t > 0$, è lì che desidero tracciarne l'andamento, dopo quanto tempo la misura si adeguia al nuovo input?

$$ky + cy = 0 \quad y(0) = \frac{F_0}{k}$$

La soluzione generale è da ricercarsi nella forma:

$$y(t) = Ae^{\alpha t}$$

Per cui, sostituendo nell'equazione di partenza:

$$kAe^{\alpha t} + c\alpha Ae^{\alpha t} = 0$$

$$k + c\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{k}{c} = [1/s]$$

Chiamo costante di tempo:

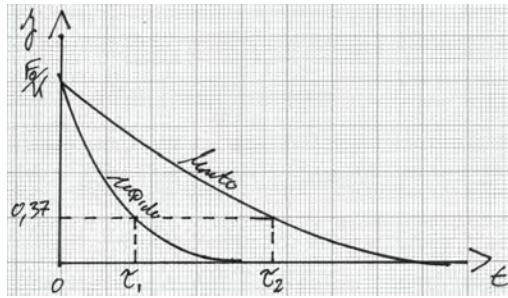
$$\tau = \frac{c}{k} = [s]$$

In modo che:

$$y(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Applicando la condizione iniziale si arriva ad una soluzione:

$$y(t) = \frac{F_0}{k} e^{-t/\tau}$$



Si noti che dopo un τ :

$$y(\tau) = \frac{F_0}{k} e^{-\tau} = 0.37 \frac{F_0}{k}$$

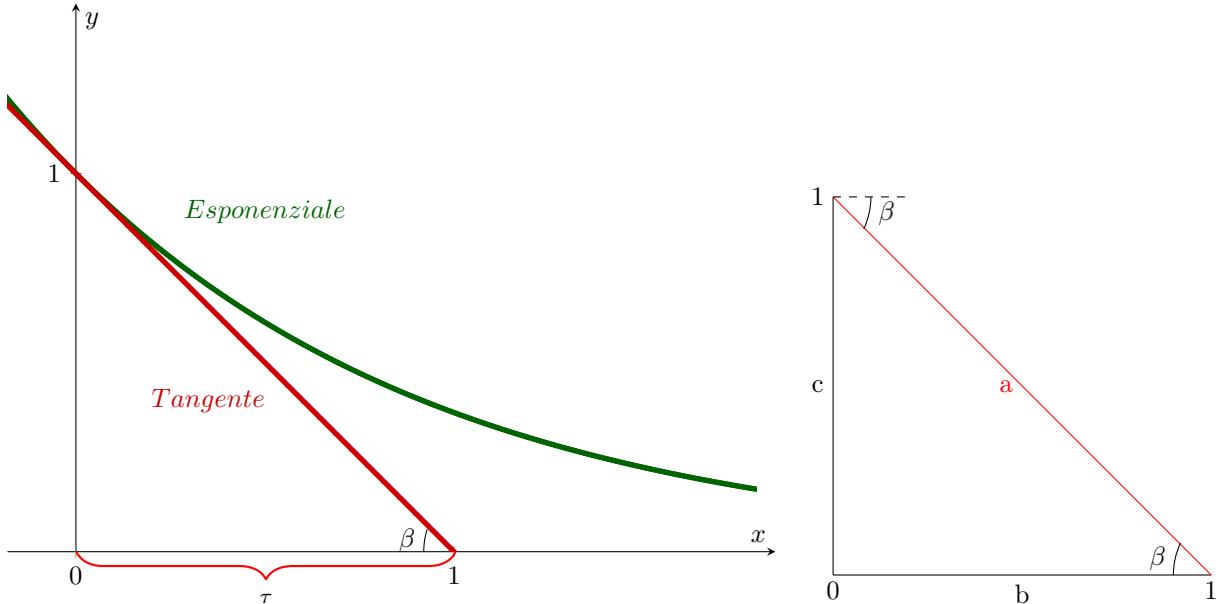
Ho raggiunto il 37% del valore iniziale.

Metodo delle sottotangenti per la determinazione del τ

Derivo nel tempo il risultato appena ottenuto:

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{\tau} \frac{F_0}{k} e^{-t/\tau}$$

Ma cos'è la derivata di una curva se non la retta tangente alla curva stessa?



La tangente dell'angolo β in $y = 0$ si trova geometricamente nel seguente modo:

$$a \sin(\beta) = c \quad a \cos(\beta) = b$$

$$\tan(\beta) = \frac{c}{b}$$

Ma la stessa tangente si può calcolare come:

$$\dot{y}(0) = -\frac{1}{\tau} \frac{F_0}{k}$$

Si può porre così:

$$\frac{c}{b} = -\frac{1}{\tau} \frac{F_0}{k}$$

$$c = \frac{F_0}{k} \quad b = \tau$$

Per un punto generico si trova così:

$$y(t^*) = \frac{F_0}{k} e^{-t^*/\tau}$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{\tau} y(t^*)$$

$$\tan(\beta) = \frac{c}{b}$$

$$\frac{c}{b} = -\frac{1}{\tau} y(t^*)$$

$$c = y(t^*) \quad b = \tau$$

Gradino crescente

Considero in questo caso il sistema in equilibrio, fermo, e a t_0 lo muovo dandogli una F_0 , poiché interessa l'andamento ottenuto dopo l'applicazione della forza, studio in questo caso l'equazione, dopo quanto tempo la misura si adeguia al nuovo input?

$$ky + c\dot{y} = F_0 \quad y(0) = 0$$

In questo caso si procederà con la soluzione dell'equazione differenziale con la composizione di una soluzione omogenea e di una soluzione particolare, poiché la soluzione omogenea è già stata ricavata attraverso il gradino decrescente, si vaglierà in questo caso la soluzione particolare, questa da trovarsi attraverso il metodo di somiglianza, uguagliando un polinomio dello stesso ordine.

$$y_p = b$$

Che sostituita mi conduce a:

$$c0 + kb = F_0 \Rightarrow b = \frac{F_0}{k} = y_p$$

La soluzione generale sarà perciò nella forma:

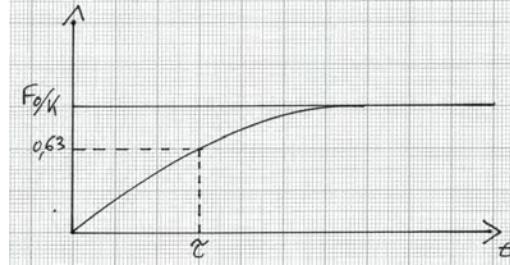
$$y(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{F_0}{k}$$

Applicando le condizioni iniziali, la costante A sarà:

$$A = -\frac{F_0}{k}$$

E la soluzione si potrà scrivere come:

$$y(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - e^{-t/\tau} \right]$$



$$y(\tau) = \frac{F_0}{k} [1 - e^{-1}] = 0.63 \frac{F_0}{k}$$

Al tempo τ raggiungo il 63% del valore finale.

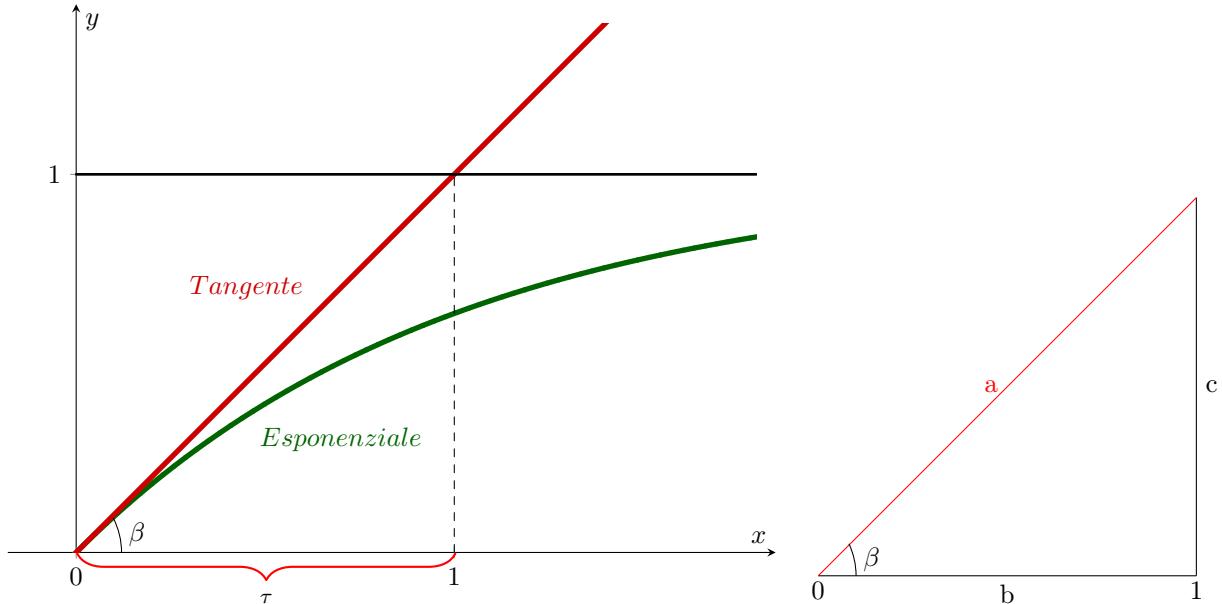
Solitamente si dà il tempo di $4\tau \div 5\tau$ per effettuare una misurazione in prima approssimazione più vicina al valore reale, passando il transitorio rimane la sola soluzione asintotica.

Logicamente per τ maggiori si hanno più sicurezze sul valore misurato, ma quanto è necessario aspettare?

$$y(3\tau) = 0.95 \frac{F_0}{k} \quad y(3\tau) = 0.99 \frac{F_0}{k}$$

Anche in questo caso è possibile applicare il

Metodo delle sottotangenti per la determinazione del τ



$$\dot{y}(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow \dot{y}(0) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\tau}$$

$$\tan(\beta) = \frac{c}{b} = \frac{F_0/k}{\tau}$$

Vorrà, come visto sopra, per ogni punto.

Rampa

Per immaginare un ingresso a rampa ci si pone nel caso in cui all'elemento in oggetto si applica una forza che aumenta nel tempo.

$$F(t) = f_0 t$$

In cui la costante sarà dimensionalmente omogenea, in questo caso $f_0 = [N/s]$. L'equazione differenziale da risolvere in questo caso è:

$$c\dot{y} + ky = f_0 t \quad y(0) = 0$$

Anche in questo caso l'omogenea è nota, si studia perciò la soluzione particolare sempre attraverso il metodo di somiglianza:

$$y_p = at + b$$

Che sostituita porta a:

$$ca + kat + kb = f_0 t$$

$$\begin{cases} ca + kb = 0 \\ ka = f_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{f_0}{k} \\ b = -\frac{1}{k} \underbrace{\frac{c}{\tau}}_{f_0} \end{cases} f_0 = -\frac{1}{k} \tau f_0$$

$$y_p = \frac{f_0}{k} t - \frac{f_0}{k} \tau$$

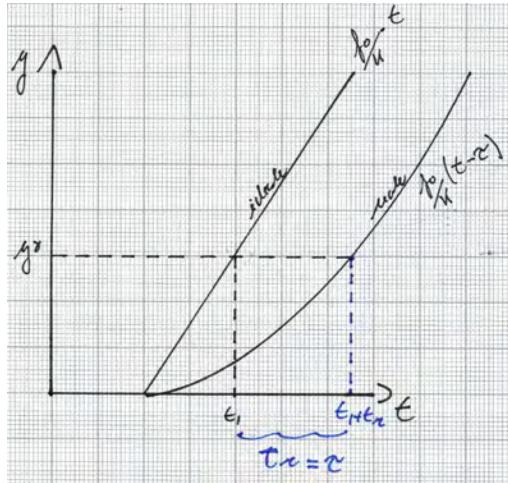
La soluzione in forma generale sarà:

$$y(t) = A e^{-t/\tau} - \frac{f_0}{k} (t - \tau)$$

Infine, applicando le condizioni al contorno si giunge, trovando che $A = \frac{f_0}{k} \tau$ a:

$$y(t) = \frac{f_0}{k} \tau e^{-t/\tau} - \frac{f_0}{k} (t - \tau)$$

Transitorio *Regime*



All'infinito il transitorio si estingue, rimane solo la soluzione particolare, l'andamento a regime, che si discosta dalla retta reale a causa del transitorio esponenziale.

Quant'è il tempo di ritardo tra la soluzione ideale e quella reale?

$$\begin{aligned} y^* &= y(t_1) = \frac{f_0}{k} t_1 = \frac{f_0}{k} [(t_1 + t_r) - \tau] = y(t_1 + t_r) \\ \frac{f_0}{k} t_1 &= \frac{f_0}{k} [(t_1 + t_r) - \tau] \\ t_r &= \tau \end{aligned}$$

Il tempo di ritardo non dipende nè da f_0 nè dalla pendenza della curva.

Ingressi periodici

Applico una forza periodica all'elemento.

Ciò a cui ci si ricondurrà saranno un grafico del guadagno e uno dello sfasamento.

$$c\dot{y} + ky = F_0 \sin(\omega t)$$

Si è dunque visto come la soluzione omogenea (ormai nota) identifichi sempre il transitorio dello strumento, in questo caso il primo periodo della sinusoida, tale soluzione sarà perciò nulla per tempi elevati ed idealmente infiniti, il che significa che nella seguente trattazione può essere lasciata da parte.

Si ricavi la soluzione particolare attraverso il metodo dei fasori:

$$c\dot{y} + ky = F_0 e^{j\omega t}$$

Questa sarà nella forma:

$$y_p = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Sostituendo:

$$c j \omega y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} + k y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = F_0 e^{j\omega t}$$

$$y_0 e^{j\varphi} (k + c j \omega) = F_0$$

$$y_0 e^{j\varphi} \left(1 + \frac{j\omega c}{k}\right) = \frac{F_0}{k}$$

Ricordando che $\tau = c/k$:

$$y_0 e^{j\varphi} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

A cosa mi riconduco? Ad un'uguaglianza tra numeri complessi nella quale y_0 mi identifica il modulo e φ la fase, il problema ora diventa ricondurre il RHS ad un numero complesso con modulo e fase.

Razionalizzo il RHS:

$$\frac{F_0}{k} \frac{1}{1 + j\omega\tau} \frac{1 - j\omega\tau}{1 - j\omega\tau} = \frac{F_0}{k} \frac{1 - j\omega\tau}{1 - (\omega\tau)^2} = \frac{F_0}{k[1 - (\omega\tau)^2]} \cdot (1 - j\omega\tau)$$

Riscrivo ora l'uguaglianza da risolvere col metodo di somiglianza:

$$y_0 e^{j\varphi} = \frac{F_0}{k[1 - (\omega\tau)^2]} \cdot (1 - j\omega\tau)$$

Al RHS ora è associato il seguente modulo:

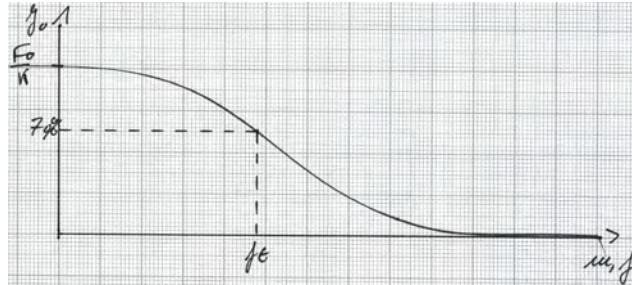
$$\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$$

E così:

$$y_0 = \frac{F_0}{k[1 - (\omega\tau)^2]} \cdot \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

Quali sono i risultati ottenibili da questa formulazione? Si vede immediatamente che il modulo dipende dalla pulsazione ω da fornire in ingresso,

in più per $\omega \rightarrow 0$; $y_0 \rightarrow \frac{F_0}{k}$ mentre per $\omega \rightarrow \infty$; $y_0 \rightarrow 0$ in completo accordo con il grafico seguente, che non è nient'altro che il grafico del guadagno. (Il modulo della soluzione a regime/particolare, è il guadagno?)



Dove posso trovare la frequenza di taglio?

$$-3dB = 20 \log_{10} \left[\frac{y_{0f}}{y_{00}} \right]$$

$$-3dB = 20 \log_{10} \left[\frac{\frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}}{F_0/k} \right] = 20 \log_{10} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \right]$$

Ma

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \right] = 0.707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{1}{2}$$

$$2 = 1 + (\omega\tau)^2$$

$$1 = \omega\tau$$

$$\omega_t = \frac{1}{\tau}$$

Infine, poiché:

$$\omega_t = 2\pi f_t$$

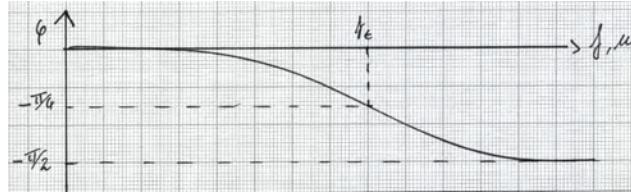
La frequenza di taglio sarà:

$$f_t = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Mentre per la fase? la fase sarà data da:

$$\varphi = \arctan(-\omega t)$$

L'arcotangente tende a 0 per $f \rightarrow 0$ mentre tende a $-\frac{\pi}{4}$ per $f \rightarrow \infty$



Ricapitolando

Quali sono i metodi per il calcolo del τ per strumenti del primo ordine?

1. Metodo analitico

Il calcolo è reso possibile dalla conoscenza di valori noti $y^* = y(t^*)$:

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow y(t^*) = y_0 e^{-t^*/\tau}$$

$$\frac{y^*}{y_0} = e^{-t^*/\tau} \Rightarrow \tau = \frac{-t^*}{\log \left[\frac{y^*}{y_0} \right]}$$

2. Primo metodo grafico

È una prova sperimentale per la quale, data la curva, si calcolano per n punti, $(y_1, t_1); (y_2, t_2); \dots (y_n, t_n)$ e si ricavano le rispettive $\tau_1; \tau_2; \dots \tau_n$, il valore finale della τ sarà la media dei valori così ottenuti.

3. Secondo metodo grafico: sottotangenti

Anche qua l'obiettivo è quello di trovare tanti più τ possibili ma stavolta col metodo delle sottotangenti per cui il valore finale sarà la media dei valori ottenuti.

4. Terzo metodo grafico

In questo metodo di sfrutta la funzione di ingresso a gradino sapendo che per il gradino discendente e crescente τ si trova rispettivamente al 37% e al 63% del valore totale.

5. Quarto metodo grafico

Sfrutto l'ingresso a rampa per calcolare il τ , che in questo caso sarà proprio uguale al tempo di riposo.

6. Attraverso il grafico del guadagno

In questo metodo, data una serie di seni, calcolo per tutti e per punti l'andamento in frequenza da plottare.

Trovo la frequenza o la pulsazione di taglio e il τ sarà presto determinato:

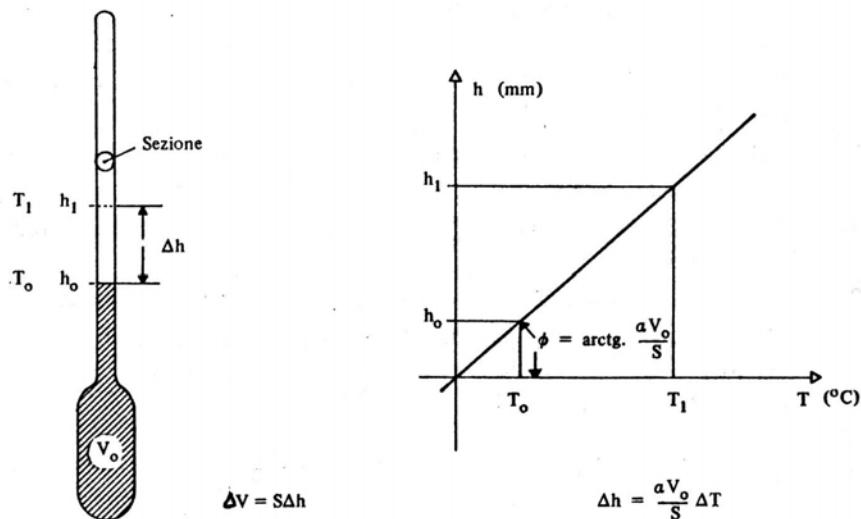
$$\omega_t = \frac{1}{\tau} \quad f_t = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Oltre al fatto che:

$$0.7G_0 = \frac{1}{\tau}$$

Termometro a bulbo

Un esempio di strumento del primo ordine è un termometro a bulbo che viene rapidamente inserito in un ambiente a T_a .



A livello statico si era visto che:

$$\Delta h = \frac{\alpha V}{A} \Delta T \quad S = \frac{\alpha V}{A}$$

Lo scambio termico con l'ambiente è regolato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} dQ = kA_s(T_a - T)dt \\ dQ = mcdT \end{cases}$$

In cui A_s è l'area di scambio termico.

Il calore scambiato con l'ambiente dev'essere uguale a quello assorbito dal fluido all'interno del termometro, per cui:

$$kA_s(T_a - T)dt = mcdT$$

$$(T_a - T) = \frac{mc}{kA_s} \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{mc}{kA_s} \frac{dT}{dt} + T = T_a$$

Come nelle equazioni viste fin'ora, ci si è ricondotti ad una forma:

$$cy + ky = F_0$$

Essendo $\tau = c/k$, in questo caso

$$\tau = \frac{mc}{kA_s}/1 = \frac{mc}{kA_s}$$

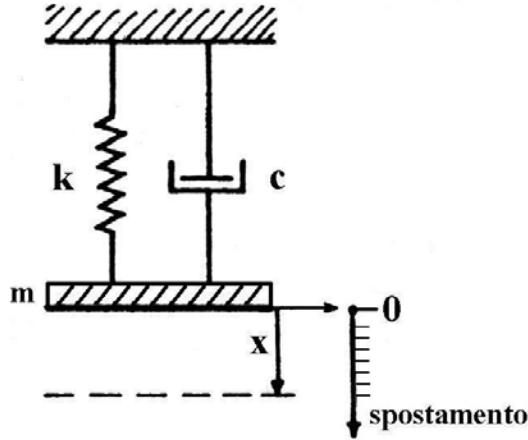
Considerazioni finali

Si conclude con alcune considerazioni: un τ piccolo comporta uno strumento più rapido ma per ottenerlo si deve diminuire la massa del fluido o la superficie di scambio termico, ma questo significherebbe diminuire anche la sensibilità dello strumento, d'altra parte uno strumento molto sensibile presenta un volume di fluido più elevato che va ad innalzare giocoforza la massa e dunque ad innalzare il τ .

Spesso le caratteristiche metrologiche dinamiche cozzano con quelle statiche.

Si preferisce quindi manipolare i fluidi in modo che i coefficienti c, α siano alti e il coefficiente k sia basso.

Strumento di ordine II



La differenza con gli strumenti del I ordine ora risiede nel considerare la massa dell'oggetto e quindi la sua forza peso, l'equazione differenziale vista negli strumenti del primo ordine si modificherà aggiungendo una forza e dunque la massa per l'accelerazione dell'oggetto.

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t)$$

Esattamente come negli strumenti del primo ordine si analizzeranno i vari ingressi.

Gradino decrescente

Come si ottiene un gradino decrescente? Si pone l'oggetto avere un allungamento $\frac{F_0}{k}$, lo si blocca in quella posizione e poi si taglia il supporto facendolo ritornare nella posizione di partenza.

L'equazione diviene così:

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

Alla quale dovranno essere aggiunte due equazioni al contorno:

$$\begin{cases} y(0) = F_0/k \\ \dot{y}(0) = F_0 \end{cases}$$

La soluzione nota è:

$$y(t) = Ae^{\alpha t}$$

Quanto vale α ? Sostituisco:

$$\begin{aligned} MA\alpha^2 e^{\alpha t} + cA\alpha e^{\alpha t} + kAe^{\alpha t} &= 0 \\ M\alpha^2 + c\alpha + k &= 0 \\ \alpha &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4Mk}}{2M} \end{aligned}$$

Si introducono due parametri:

- **Pulsazione naturale:** $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$
- **Fattore di smorzamento:** $\xi = \frac{c}{\sqrt{kM}}$

E allora si può scrivere

$$c = 2\sqrt{kM}\xi$$

E quindi

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{c}{2M} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4M^2} - \frac{4Mk}{4M^2}} = -\frac{c}{2M} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4M^2} - \frac{k}{M}} = \\ &= -\frac{2\sqrt{kM}\xi}{2M} \pm \sqrt{\frac{4kM\xi^2}{4M^2} - \frac{k}{M}} = -\sqrt{\frac{k}{M}} \pm \sqrt{\frac{k}{M}\xi^2 - \frac{k}{M}} = \\ &= -\omega_n\xi \pm \sqrt{\omega_n^2\xi^2 - \omega_n^2}\end{aligned}$$

Infine si avrà:

$$\alpha_{1,2} = -\omega_n\xi \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Col risultato che α varia in funzione di ξ , che questo sia maggiore, uguale o minore di 1 si avranno diverse soluzioni e diverse tipologie di smorzamento.

(I) Caso $\xi > 1$: Soluzioni reali distinte

$$\begin{aligned}y(t) &= A_1e^{\alpha_1 t} + A_2e^{\alpha_2 t} \\ \dot{y}(t) &= A_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + A_2\alpha_2 e^{\alpha_2 t}\end{aligned}$$

Imponendo le condizioni al contorno ottengo:

$$\begin{cases} y(0) = A_1 + A_2 = \frac{F_0}{k} \\ \dot{y}(t) = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Un sistema lineare di due equazioni in due incognite.



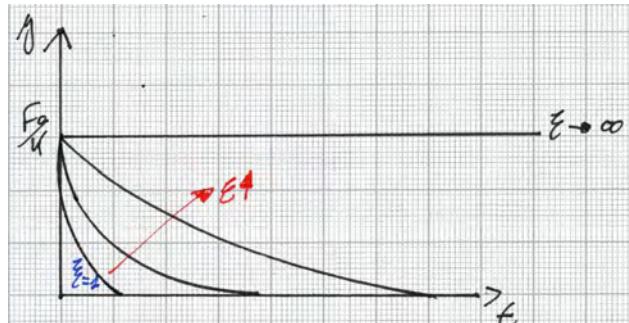
(II) Caso $\xi = 1$: Soluzioni reali coincidenti $\alpha_{1,2} = -\omega_n$

$$\begin{aligned}y(t) &= A_1e^{-\omega_n t} + A_2te^{-\omega_n t} \\ \dot{y}(t) &= -\omega_n A_1e^{-\omega_n t} + A_2(-\omega_n te^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t})\end{aligned}$$

Imponendo le condizioni al contorno ottengo:

$$\begin{cases} y(0) = A_1 = \frac{F_0}{k} \\ \dot{y}(t) = -\omega_n A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Il grafico che si ottiene è quello la curva più interna di qualsiasi altra prima ottenuta fin'ora.



(III) Caso $\xi < 1$: Soluzioni complesse

$$\alpha_{1,2} = -\omega_n \xi \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1)$$

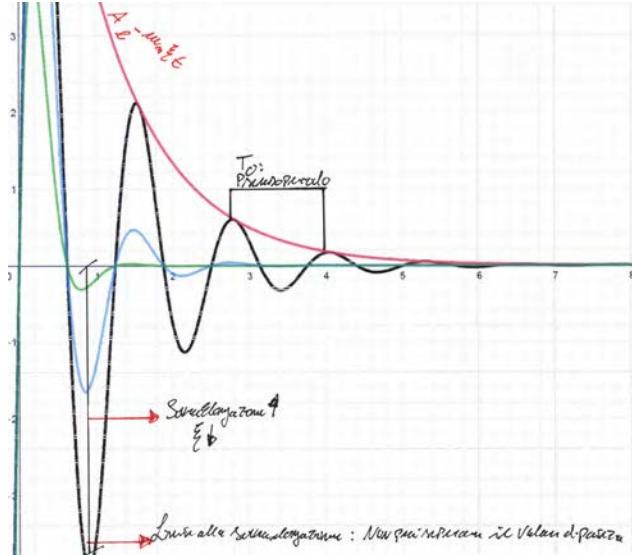
$$y(t) = A_1 e^{-\omega_n \xi t} e^{j \sqrt{1-\xi^2} t} + A_2 e^{-\omega_n \xi t} e^{-j \sqrt{1-\xi^2} t} \quad (2)$$

$$y(t) = A e^{-\omega_n \xi t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) \quad (3)$$

Introducendo la pulsazione propria del sistema $\omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$:

$$y(t) = A e^{-\omega_n \xi t} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

I grafici che si ottengono saranno i seguenti:



NB: la sovraelongazione non può andare oltre al valore di partenza, c'è sempre un sin che nel peggiore dei casi può valere -1 .

Introduco lo pseudoperiodo T_0 come il periodo tra due oscillazioni, tenendo conto che la funzione non è una sinusoidale pura.

Dagli andamenti inoltre si nota che, come ξ cresce la sovraelongazione diminuisce ed il periodo aumenta, mentre viceversa, come ξ diminuisce la sovraelongazione aumenta ed il periodo diminuisce.

(IV) E se $\xi = 0$?

Vorrà

$$\omega_0 = \omega_n$$

E quindi

$$y(t) = A \sin(\omega_n t + \varphi)$$

Non c'è smorzamento.

$$\dot{y}(t) = A \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi)$$

Applicando le condizioni al contorno si ottiene:

$$\begin{cases} y(0) = \frac{F_0}{k} = A \sin \varphi \\ \dot{y}(0) = 0 = A \omega_n \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = A \omega_n \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \frac{F_0}{k} = A \sin \varphi \Leftrightarrow A = \frac{F_0}{k} \end{cases}$$

Infine:

$$y(t) = \frac{F_0}{k} \sin(\omega_n t + \frac{\pi}{2})$$

Oppure, equivalentemente:

$$y(t) = \frac{F_0}{k} \cos(\omega_n t)$$

È irrealistico, il grafico non presenta smorzamento.

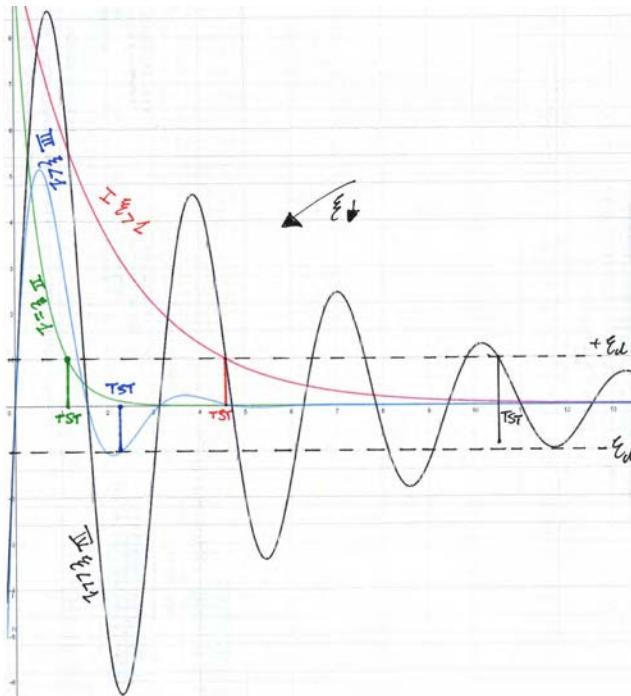
Il grafico è una cosinusoide pura che non presenta smorzamento, e quindi ha un tempo di stabilizzazione infinito, oscilla tra

$$\pm \frac{F_0}{k}$$

Scelta del valore di ξ

Diviene così di vitale importanza la scelta del parametro ξ : qual è il suo miglior valore?

Si è appena visto come questo debba obbligatoriamente essere non nullo, ma di quanto? Me lo dicono l'errore rispetto al quale è accettabile quella misura e il tempo che sono disposti ad attendere prima che il risultato sia disponibile senza errori, ovvero rispettivamente la banda di errore dinamico ε_d ed il tempo di stabilizzazione T_{st} , tempo impiegato ad entrare in ε_d e non uscire più.



Al diminuire di ξ si percorrono via via esponenziali più veloci, fino ad arrivare a quella identificata da $\xi = 1$, la più veloce.

- I. impiega molto tempo ad arrivare a 0 e ad entrare in ε_d .
- II. impiega meno tempo ad arrivare a 0 e ad entrare in ε_d .
- III. impiegherebbe ancor meno tempo ad entrare in ε_d (in funzione della frequenza), ma presenta una sovraelongazione, siamo nel campo $\xi < 1$.

Si potrebbe perciò pensare che continuando a diminuire $\xi \ll 1$ incontreremmo tempi di stabilizzazione ancor minori. Nulla di più sbagliato.

- IV. Aumentando la sovraelongazione la risposta non entra più immediatamente all'interno della banda di ε_d , ma entra ed esce, entra ed esce, e il tempo di stabilizzazione aumenta rendendo inefficace la trattazione.

Devo scegliere un ξ che mi permetta di entrare subito nella banda di errore dinamico e permanerci il più possibile il prima possibile, come in III, empiricamente e sperimentamene si sceglie un valore pari a:

$$\xi = 0.7$$

Metodo grafico per la determinazione di ξ ed ω_n

Decremento logaritmico

Valido solo per $\xi < 1$.

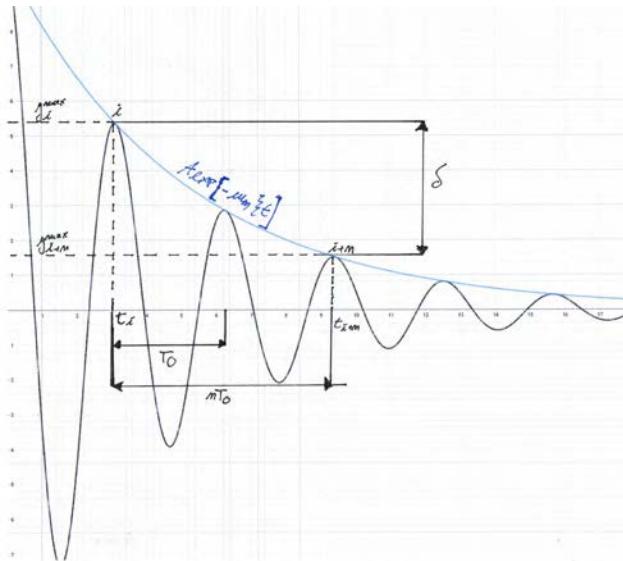
La soluzione dell'equazione era:

$$y(t) = Ae^{-\omega_n \xi t} \sin(\omega_n t + \varphi)$$

L'inviluppo dei massimi è fornito dall'equazione:

$$y(t) = Ae^{-\omega_n \xi t}$$

Si prendano due massimi di ordine diverso, a titolo d'esempio $y_{M,i}, y_{M,i+n}$, in modo che la distanza tra i massimi sia n (per un massimo dopo l'altro $n = 1$), si ricordi poi la definizione di periodo T_0 in modo che, la distanza tra i due massimi prima considerati sia proprio nT_0 .



Si definisce decremento logaritmico:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{y_{M,i}}{y_{M,i+n}} \right)$$

Graficamente determinabile.

Matematicamente, equivale a sostituire le rispettive equazioni dei massimi:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{y_{M,i}}{y_{M,i+n}} \right) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{Ae^{-\omega_n \xi t_i}}{Ae^{-\omega_n \xi t_{i+n}}} \right) = \\ &= \frac{1}{n} (-\xi \omega_n t_i + \xi \omega_n t_{i+n}) = \frac{1}{n} \xi \omega_n (t_{i+n} - t_i) = \\ &= \frac{1}{n} \xi \omega_n n T_0 = \xi \omega_n T_0 = \xi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_0} = \xi \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \\ &\quad \xi \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned}$$

Infine:

$$\delta = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Conoscendo il δ attraverso il grafico, possono ricavarmi il ξ :

$$\xi = \sqrt{\frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2}}$$

Nella quale si è implicitamente scelto il segno positivi: ξ dev'essere una grandezza positiva.

Attraverso la conoscenza di δ e dopo aver determinato ξ , ci si può calcolare ω_n :

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{2\pi}{T_0} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \omega_0 \\ \frac{2\pi}{T_0} &= \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ \omega_n &= \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1 - \xi^2}}\end{aligned}$$

Gradino crescente

Come applico un gradino crescente? Applico una forza istantanea costante, in questo modo l'equazione diviene:

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0$$

Con le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

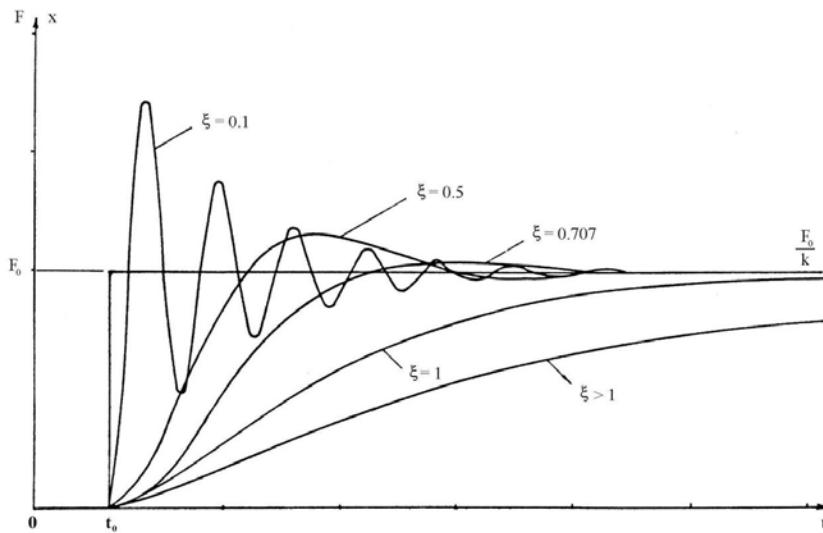
La soluzione finale sarà la composizione di una soluzione omogenea (già vista nell'ingresso a gradino decrescente) più una soluzione particolare, quest'ultima col metodo di somiglianza sarà da trovare nella forma di un polinomio di grado uguale a quello a destra dell'uguale, in questo caso:

$$y_p = a$$

Che sostituita nell'equazione di partenza porta a:

$$[y_p = a = \frac{F_0}{k}]$$

La soluzione particolare sarà quella alla quale tenderà il sistema dopo aver esaurito il transitorio dovuto alla soluzione omogenea.



I. $\xi > 1$

$$y(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{F_0}{k}$$

II. $\xi = 1$

$$\alpha_{1,2} = -\omega_n \quad y(t) = A_1 e^{-\omega_n t} + A_2 t e^{-\omega_n t} + \frac{F_0}{k}$$

III. $\xi < 1$

$$\alpha_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_0 \quad y(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{k}$$

In cui alla diminuzione di ξ è associata una diminuzione di periodo.

IV. $\xi = 0$

$$\alpha_{1,2} = \pm j\omega_n \quad y(t) = Ae \sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{F_0}{k}$$

Sinusoide pura.

NB: Il massimo è al massimo il doppio del valore di F_0/k .

Si studino le condizioni al contorno della quarta tipologia di funzioni, ideale, senza smorzamento:

$$\begin{cases} y(t) = Ae \sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{F_0}{k} \Rightarrow y(0) = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{F_0}{k} \\ \dot{y}(t) = Ae\omega_n \cos(\omega_n t + \varphi) \Rightarrow \dot{y}(0) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos(\omega_n t)]$$

Tra quanto varia il termine tra parentesi? tra 0 e 2, il che vorrà dire che gli y potranno variale al massimo tra 0 e $2F_0/k$.

Similmente a quanto fatto per il gradino decrescente, anche in questa occasione la miglior scelta di ξ rimane quella per cui:

$$\xi = 0.7$$

NB: Per il calcolo del decremento logaritmico si fa riferimento alle quote dei massimi traslate ora rispetto all'asintoto, e non a 0 come nel gradino decrescente.

Rampa

Caratterizzato da una forza linearmente dipendente dal tempo:

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f_0 t$$

Anche qui la soluzione particolare si andrà a cercare nella forma di un polinomio con lo stesso grado della funzione nota, per cui:

$$y_p = a + bt$$

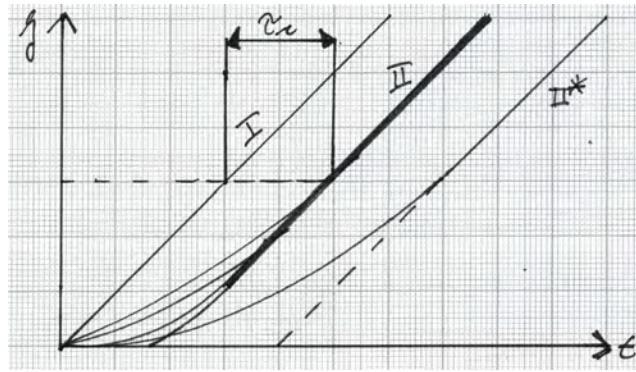
Che sostituita porta ad avere:

$$cb + ka + kbt = f_0 t$$

Il metodo di somiglianza sancisce che:

$$\begin{cases} kb = f_0 \Rightarrow b = \frac{f_0}{k} \\ cb + ka = 0 \Rightarrow a = -\frac{c}{k} \frac{f_0}{k} \end{cases}$$

Ricordi come $\frac{c}{k}$ fosse uguale al τ_r di ritardo?



La soluzione particolare che questo ingresso produrrà sarà:

$$y_p = \frac{f_0}{k}(t - \tau_r)$$

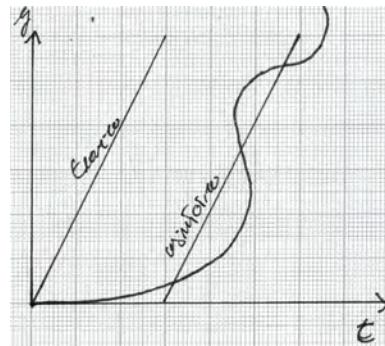
- I. $\xi > 1$ è caratterizzato dallo stesso andamento dello strumento del primo ordine, una partenza esponenziale con tendenza ad un valore asintotico in ritardo rispetto al valore ideale/teorico.
- II. $\xi \gg 1$ è caratterizzato da un'esponenziale più lenta.
- II*. $\xi \gg 1$, sottocaso del precedente in cui si può ottenere addirittura la traslazione dell'asintoto:

$$\tau_r = \frac{c}{k} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{kM}}$$

Come ottengo uno ξ elevato? (perchè lo dovrei ottenere?)

Diminuendo la massa, ξ varia e τ_r rimane invariato, agendo invece su $k \downarrow$ e $c \uparrow$, oltre a far variare ξ ottengo una variazione di τ_r , e dunque una traslazione dell'asintoto.

- III. $\xi = 1$ si ottiene la curva che più delle altre tende più rapidamente all'asintoto.
- IV. $\xi < 1$, si ottiene una curva come in figura seguente.



Ingressi periodici

Si ottiene applicando una forza sinusoidale.

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \sin \omega t$$

Così come effettuato negli strumenti del primo ordine, si visualizzeranno con questo ingresso i grafici del guadagno e delle pulsazioni/frequenza.

Sempre come effettuato con gli strumenti del primo ordine, si trascurerà la soluzione omogenea caratteristica del transitorio dello strumento e ci si concentrerà sulla soluzione a regime fornita da quella particolare.

Si passerà sempre attraverso il metodo simbolico

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 e^{j\omega t}$$

La soluzione particolare sarà data nella forma:

$$y_p = y_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

Che sostituita porta a:

$$\begin{aligned} -M\omega^2 y_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} + cj\omega y_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} + ky_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} &= F_0 e^{j\omega t} \\ -M\omega^2 y_0 e^{j\varphi} + cj\omega y_0 e^{j\varphi} + ky_0 e^{j\varphi} &= F_0 \\ y_0 e^{j\varphi} (-\omega^2 M + jc\omega + k) &= F_0 \\ y_0 e^{j\varphi} \left(-\omega^2 \frac{M}{k} + j\omega \frac{c}{k} + 1 \right) &= \frac{F_0}{k} \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$c = 2\sqrt{kM}\xi \quad \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Si giunge a

$$\begin{aligned} y_0 e^{j\varphi} \left[-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\omega \frac{2\sqrt{kM}\xi}{k} + 1 \right] &= \frac{F_0}{k} \\ y_0 e^{j\varphi} \left[-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} + 1 \right] &= \frac{F_0}{k} \\ y_0 e^{j\varphi} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right] &= \frac{F_0}{k} \end{aligned}$$

Ottenendo così che:

$$y_0 e^{j\varphi} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

Come per gli strumenti del primo ordine razionalizzo per ottenere un numero complesso dal quale ricavare un modulo ed una fase:

$$\begin{aligned} \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}} \\ y_0 e^{j\varphi} = \frac{F_0}{k} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{aligned}$$

Il modulo è dato da:

$$y_0 = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

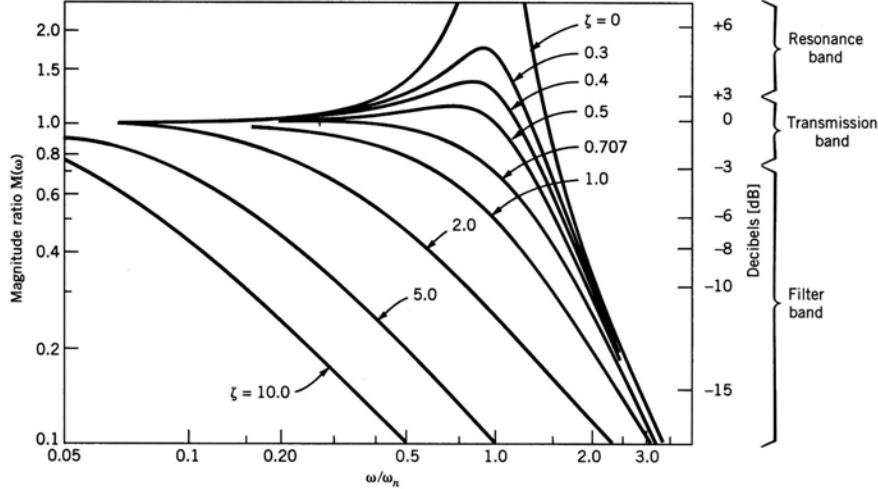
Infine:

$$y_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

E la fase sarà data da:

$$\varphi = \arctan \left[\frac{-2\xi\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right]$$

Si ottiene un grafico del guadagno dipendente sia da ω che da ω_n :



Dove a $\omega = 0$ $y_0 = \frac{F_0}{k}$: a segnale costante corrisponde valore massimo, idealmente.

Per $\omega \rightarrow \infty$ $y_0 \rightarrow 0$.

Per $\omega = \omega_n$ $y_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi}$, su questa ordinata, si possono identificare i seguenti casi:

- Se $\xi \gg 1$ $y_0 \rightarrow 0$;
- Se $\xi = 1$ $y_0 = \frac{1}{2} \frac{F_0}{k}$;
- Se $\xi = \frac{1}{2}$ $y_0 \approx \frac{F_0}{k}$;

Al diminuire della frequenza so salendo di quota sull'ascissa prefissata, cosa succede per l'unico caso che non si è trattato? Cosa succede se $\xi = 0$? Avviene una discontinuità: se $\xi = 0$ $y_0 \rightarrow \infty$, sto dando una sinusoida la cui frequenza è pari a quella naturale del sistema, sto dando la frequenza di risonanza.

Per progettare uno strumento è necessario stare ben alla larga dalla frequenza di risonanza.

Anche qui la miglior scelta rimane quella di avere uno smorzamento pari a

$$\xi = 0.7$$

Frequenza di taglio & grafico della fase

Questa è definita come

$$f_t := -3dB = 20 \log \left[\frac{y_0(f_t)}{y_0(0)} \right]$$

Ovvero quella frequenza alla quale si ha una deamplificazione di $3dB$ data da un rapporto dove al numeratore compare il guadagno alla frequenza di taglio e al denominatore il guadagno a frequenza costante, nulla, ideale.

$$-3dB = 20 \log \left[\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} \right] = 0.7$$

Ne consegue che la frequenza di taglio si avrà per una deamplificazione del segnale del 30%.

Importante notare come la frequenza di taglio sia dipendente da ξ ed ω_n .

La banda passante sarà così:

$$BP = [0, f_t]$$

Logico che se vorrò avere una frequenza maggiore del segnale in ingresso, bisognerà avere una banda passante maggiore.

In che modo aumenta la banda passante? Diminuendo ξ .

Attenzione però a ridurlo troppo, in questo modo la frequenza di taglio torna indietro, presentando un segnale ora crescente che incontrando prematuramente la frequenza di taglio ne abbassa la banda, la curva esce subito, mentre va mantenuta il più possibile all'interno della banda passante.

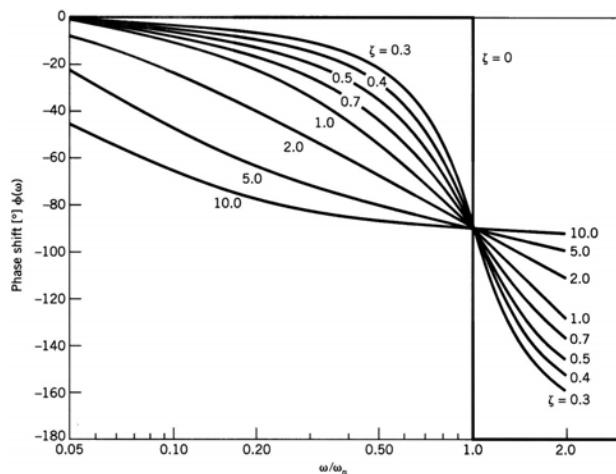
Come scelgo ora il valore di $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$?

Innanzitutto con ω_n elevato la banda passante cresce riuscendo ad ottenere uno strumento dalla dinamica più rapida, ed in secondo luogo, è bene rimanere distanti dalla pulsazione naturale per evitare fenomeni di risonanza potenzialmente distruttivi, un ω_n basso in aggiunta ad uno ξ elevato permetterebbe di far passare all'interno della banda passante anche la frequenza di risonanza.

Il grafico della fase si ottiene imponendo all'equazione della fase i valori

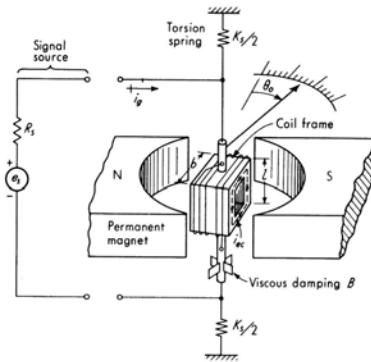
$$\omega = \omega_n, 0, \infty$$

Disegnando poi il grafico per vari ξ si incontra in $\xi = 0$ una discontinuità di salto.



Galvanometro/Ampereometro

Tale strumento riceve in input una corrente che trasforma, attraverso lo schema di seguito, in una variazione angolare su di un display.



Un nucleo ferromagnetico avvolto di spire è posto tra un campo magnetico, il nucleo ruoterà a causa della corrente che percorrendo le spire genererà un momento magnetico mentre due molle torsionali che fissano il nucleo al telaio manterranno il nucleo in sede. Un indicatore solidale al nucleo indicherà l'angolo di rotazione.

L'equazione che governa il moto è:

$$F = i \vec{l} \times \vec{B}$$

Più spire in un campo magnetico uniforme imposto generano un momento di rotazione dato da:

$$M = n \cdot i l b B$$

Bene notare che l'unica grandezza qui a variare è la corrente, oggetto di misura, il campo magnetico è imposto e noto.

Da cosa sarà impedita la rotazione della spira? Dalle molle torsionali solidali al telaio che applicheranno un momento pari a:

$$M = k\theta$$

Avremo perciò l'uguaglianza:

$$n \cdot i l b B = k\theta \Rightarrow \theta = \frac{l b n B}{k} i$$

E la sensibilità è data da:

$$S = \frac{l b n B}{k}$$

Che legge dinamica è espressa dallo strumento? Ricordando che per un corpo in rotazione entra in gioco il momento d'inerzia I dello specifico oggetto, si avrà:

$$I \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + k\theta = M$$

Alla quale si associano pulsazione naturale e fattori di smorzamento dati da:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{I}} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{kI}}$$

Come si vede, ad esempio un aumento di k , che porterebbe ad un aumento di ω_n , porta ad una diminuzione di S : le caratteristiche metrologiche statiche sono ancora in disaccordo con quelle dinamiche.

NOTE

Indice

I 3.STATISTICA	2
Introduzione	2
Distribuzione dei valori attorno al valor medio: curva di Gauss	4
Deviazione standard del valor medio	9
Distribuzione t di Student	11
Test di interferenza	12
1. Test sulla media: test a due code	13
2. Test sul dato	14
3. Test su campioni differenti	14
Retta di regressione	16
Test di significatività	17
Test di linearità	18
Test di parallelismo	19

Parte I

3. STATISTICA

Introduzione

La misura di una grandezza fisica riportata mediante un numero esatto è scientificamente priva di senso se non si precisa l'entità dell'errore da cui essa può essere affetta. La norma UNI 4546 definisce infatti la misura come un'informazione costituita da un numero, da un'incertezza e da un'unità di misura.

Esistono due tipo di errori.

- **Casuali:** non controllabili, risultato di una misura meno la media che risulterebbe da un numero infinito di misurazioni del misurando effettuate sotto condizioni di ripetibilità [VIM 3.13].

Potendo essere di entrambi i segni possono determinare una sottostima od una sovrastima del misurando.

- **Sistematici:** controllabili ed eliminabili se noti, media che risulterebbe da un numero infinito di misurazioni del misurando effettuate sotto condizioni di ripetibilità meno il valore vero del misurando [VIM 3.14].

Influiscono sulla misurazione sempre nello stesso modo e hanno sempre lo stesso segno qualunque misura del misurando venga effettuata.

Agli errori sistematici è associata la **giustezza**, questa aumenta quanto minore diviene lo scostamento tra valore vero ed il valore medio delle misure fatte.

Agli errori casuali è associata la **precisione**: una misura è più precisa quanto è minore lo scostamento tra la singola misura e la media di tutte le misurazioni fatte.

L'entità di tale scostamento rappresenta l'incertezza associata alla misura.

LA SEGUENTE TRATTAZIONE È PRIVA DI ERRORE SISTEMATICO

Lo scopo così che si prefigge la statistica sarà quello di capire come l'incertezza influenzi il valore vero attraverso l'errore casuale.

L'analisi dell'incertezza si basa su due concetti fondamentali:

1. Distribuzione di probabilità dell'errore

Risponde alle domande:

- Qual è la probabilità che ho nel commettere l'errore?
- Qual è la probabilità che ho che la misura cada nell'intervallo che voglio?

Quantifica perciò la probabilità che si verifichi un errore di entità fissata rispetto al valor vero di una misura.

Equivalentemente, quantifica l'entità dell'errore sulla misura corrispondente ad una data percentuale di probabilità.

2. Campione VS Popolazione

Mentre la popolazione è identificata da tutte le possibili misura che si potrebbero effettuare, il campione sono null'altro le misure realmente ottenute.

L'analisi statistica degli errori utilizza sempre un modello matematico che descrive la distribuzione degli errori commessi nelle misure effettuate. Solo mediante la conoscenza di tale distribuzione è possibile calcolare la probabile differenza tra la media \bar{X} dei valori di una serie di campioni x_i e quella della popolazione μ .

Si definiscono:

- Campione

$$x = x_1 \dots x_n$$

- Numero di campioni

$$n$$

- Media aritmetica del campione X

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

- Media della popolazione

$$\mu$$

Non calcolabile: non ho la popolazione ma solo il campione.

Se la popolazione uguaglia il campione $\mu = \bar{X}$

- Scarto della i-esima misura dalla media

$$\xi_i = x_i - \bar{x}$$

Per definizione di media, la somma degli scarti è sempre nulla.

$$\sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \right) = 0$$

- Errore della i-esima misura

$$\varepsilon_i = x_i - \mu$$

- Errore medio

$$\bar{\varepsilon} = \bar{x} - \mu$$

- Deviazione standard della popolazione

$$\sigma_x \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n}}$$

- Deviazione standard del campione

$$s_x \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{n-1}}$$

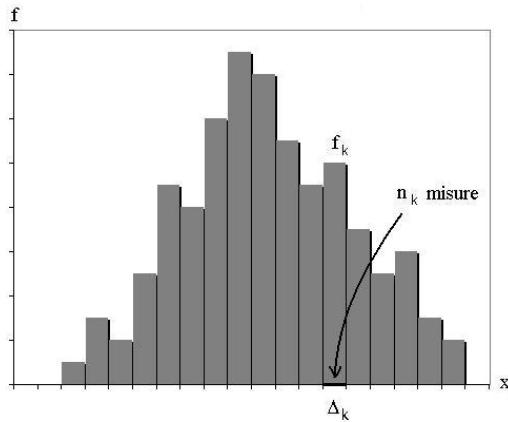
Questo parametro è fondamentale poiché, nella maggior parte dei casi, per risalire all'incertezza associata ad una misura non sono note né σ né μ .

Notare il -1 al denominatore, fattore correttivo. Deriva dal fatto che se il campione coincide con la popolazione, è meglio ottenere un'incertezza pari a $0/0$ e quindi indeterminata, che un'incertezza nulla derivante dall'assenza del fattore -1 , il che è un assurdo fisico dato che l'incertezza è sempre legata alla misura.

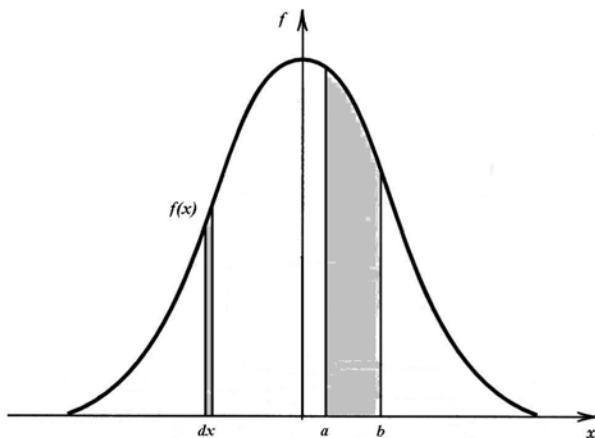
Distribuzione dei valori attorno al valor medio: curva di Gauss

Sotto le seguenti ipotesi: $\bar{x} = \mu; s_x = \sigma_x$; e che tutti gli errori siano casuali ($N \rightarrow \infty$) e quindi considerabili a media nulla, ci si chiede come si distribuisce la misura intorno al valor medio.

Ci si chiede perciò: se si effettua un'ulteriore misurazione, quale è la probabilità che si trovi un valore pari proprio alla media? Come ci si deve comportare se si trova un valore molto diverso dalla media? Fino a che punto possiamo considerare attendibile anche tale nuovo valore?



Per rispondere a tali domande si introduce la distribuzione Gaussiana, ovvero, si prendano gli x_i valori ottenuti e li si componga ad istogramma da x_{min} ad x_{max} ; l'altezza di ogni barra corrisponde alla quantità di misure/valori mentre la base sarà un intervallo di valori Δx ; come questo intervallo diminuisce, l'istogramma presenterà barre sempre più sottili e fine fino ad approssimare una curva.



Il teorema limite centrale afferma che la distribuzione gaussiana permette di descrivere, in maniera soddisfacente, tutti quei fenomeni fisici caratterizzati dalla sovrapposizione di un elevato numero di effetti deboli indipendenti aventi loro natura statistica a media nulla. Questa distribuzione è anche detta Normale in quanto si suppone, alle volte in modo non corretto, che molti fenomeni tra cui quelli fisici e biologici "normalmente" si distribuiscono secondo la curva gaussiana.

$$y(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Tale funzione, integrata, indicherà la probabilità che una determinata misura caschi all'interno di un determinato intervallo.

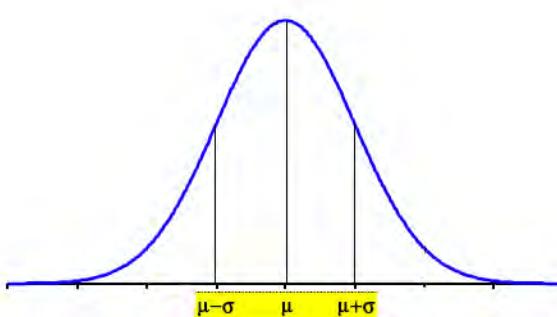
$$P(x) = \int_a^b y(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

Come ottengo il 100%? Integrando su tutto lo spazio.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}} dx = 1$$

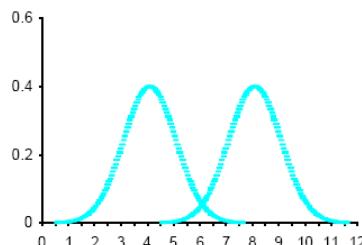
La distribuzione normale con media μ e varianza σ_x^2 si indica con $N(\mu, \sigma_x)$. Al variare di questi due parametri si possono avere infinite curve.

La funzione di densità in esame è simmetrica rispetto alla media ed ha due flessi nei punti $\mu \pm \sigma_x$.

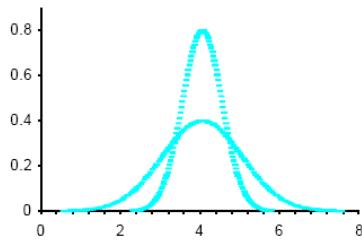


Si identificano due casistiche per le quali:

- $\begin{cases} \mu_2 > \mu_1 \\ \sigma_{x2} = \sigma_{x1} \end{cases}$ la curva è traslata, ha la stessa forma e dimensione ma l'asse di simmetria in un punto diverso.



- $\begin{cases} \mu_2 = \mu_1 \\ \sigma_{x2} > \sigma_{x1} \\ \sigma_{x2} < \sigma_{x1} \end{cases}$ la curva in questo caso si abbassa; si alza nel caso in cui $\sigma_{x2} < \sigma_{x1}$ preservando lo stesso asse di simmetria.



Con questa distribuzione gaussiana si può trovare l'integrale a partire dalla conoscenza delle n misure, di μ e σ_x calcolabili, ma è assai dispendioso calcolare ogni volta un integrale, non è meglio avere un andamento standardizzato, magari tabulato? Si ricorre ad un cambio di variabili per ottenere la distribuzione normale standardizzata.

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma_x}$$

Per cui:

$$\mu_z = \sum_i^n \frac{z_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_i^n \frac{x_i - \mu}{\sigma_x} = \frac{1}{\sigma_x n} [\sum x_i - \sum \mu]$$

Ricordando che sommare n volte una costante significa moltiplicare per n il valore della costante:

$$\frac{1}{\sigma_x n} [\sum x_i - \sum \mu] = \frac{1}{\sigma_x n} [\sum x_i - n\mu] = \frac{1}{\sigma_x} [\mu - \mu] = 0$$

Che si aggiunge al fatto che:

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum(z_i - 0)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_x} \right)^2} = \frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{n}} = \frac{1}{\sigma_x} \sigma_x = 1$$

La curva distribuzione gaussiana standardizzata si può esprimere nella forma $N(0, 1)$ ed è rappresentata dalla seguente funzione:

$$y(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

z altri non è che la distanza sull'asse delle ascisse misurato in unità di deviazioni standard.

Tale relazione evidenzia inoltre come la forma della distribuzione non dipenda più né dalla sua media né dalla sua varianza.

Nella pratica statistica le proprietà più utili della distribuzione normale non sono i rapporti tra ascissa ed ordinata, bensì la relazione tra la distanza di un determinato valore x dalla media μ e la densità di probabilità (area) sottesa dalla curva.

In questa distribuzione i punti si flesso si troveranno a $z = \pm 1$, quant'è l'area sottesa in questo intervallo? Si svolge banalmente l'integrale:

$$\int_{-1}^{+1} y(z) dz = 68.3\%$$

Ci si chiede a questo punto quanto valga la vecchia variabile nel punto di flesso:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma_x} \Big|_{z=1} \Rightarrow x = \mu + \sigma_x$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma_x} \Big|_{z=-1} \Rightarrow x = \mu - \sigma_x$$

Definendo:

$$x = \mu \pm \sigma_x$$

Ottengo che se faccio un'altra misura, al 68.3% quella cadrà all'interno di quell'intervallo, mentre σ_x indicherà la probabilità di avere una misura esterna, in questo caso pari al 31.7%.

Sempre nella trattazione di intervalli simmetrici si ottiene che:

$$\int_{-2}^{+2} y(z) dz = 95.5\% \Rightarrow z|_{z=2} = \mu + 2\sigma_x \Rightarrow x = \mu \pm 2\sigma_x$$

Ho il 95.5% di sicurezza che la mia misura caschi all'interno dell'intervallo.

E ancora:

$$\int_{-3}^{+3} y(z) dz = 99.7\% \Rightarrow z|_{z=3} = \mu + 3\sigma_x \Rightarrow x = \mu \pm 3\sigma_x$$

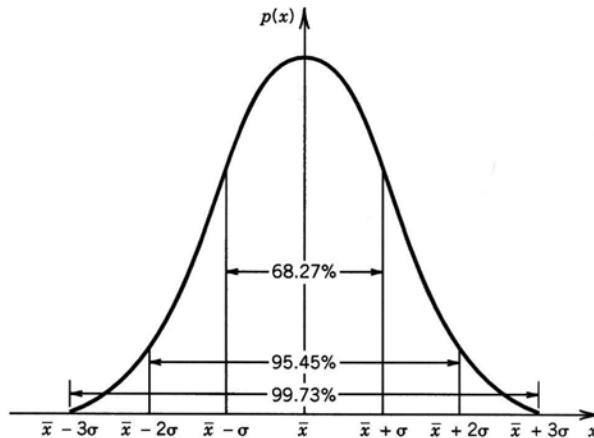
Dare il $\pm 3\sigma_x$ come incertezza significa dire che ho lo 0.3% di probabilità che la misura caschi fuori dall'intervallo considerato.

Si avrà infine:

$$x = \mu \pm z\sigma_x$$

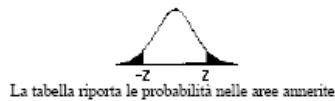
Dove $z\sigma_x$ altro non è che l'incertezza strumentale, legata allo strumento.

Per minimizzarla si può scegliere di minimizzare la σ_x e quindi di avere uno strumento maggiormente preciso e che garantista una maggiore ripetibilità, oppure si può aumentare z , questo deciso in modo da non incorrere in errori esageratamente elevati.



La tabella di Gauss dà il valore dell'area esterna, le colonne sono la seconda cifra decimale di z mentre le righe sono z fino alla prima cifra decimale, i risultati che si ottengono entrando con z nella tabella sono le aree esterne alla z considerata, la significatività α , per ottenere l'area interna, la confidenza c , basterà sottrarre all'unità la significatività.

$$c + \alpha = 1$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	1.000	0.992	0.984	0.976	0.968	0.960	0.952	0.944	0.936	0.928
0,1	0.920	0.912	0.904	0.897	0.889	0.881	0.873	0.865	0.857	0.849
0,2	0.841	0.834	0.826	0.818	0.810	0.803	0.795	0.787	0.779	0.772
0,3	0.764	0.757	0.749	0.741	0.734	0.726	0.719	0.711	0.704	0.697
0,4	0.689	0.682	0.674	0.667	0.660	0.653	0.646	0.638	0.631	0.624
0,5	0.617	0.610	0.603	0.596	0.589	0.582	0.575	0.569	0.562	0.555
0,6	0.549	0.542	0.535	0.529	0.522	0.516	0.509	0.503	0.497	0.490
0,7	0.484	0.478	0.472	0.465	0.459	0.453	0.447	0.441	0.435	0.430
0,8	0.424	0.418	0.412	0.407	0.401	0.395	0.390	0.384	0.379	0.373
0,9	0.368	0.363	0.358	0.352	0.347	0.342	0.337	0.332	0.327	0.322
1,0	0.317	0.312	0.308	0.303	0.298	0.294	0.289	0.285	0.280	0.276
1,1	0.271	0.267	0.263	0.258	0.254	0.250	0.246	0.242	0.238	0.234
1,2	0.230	0.226	0.222	0.219	0.215	0.211	0.208	0.204	0.201	0.197
1,3	0.194	0.190	0.187	0.184	0.180	0.177	0.174	0.171	0.168	0.165
1,4	0.162	0.159	0.156	0.153	0.150	0.147	0.144	0.142	0.139	0.136
1,5	0.134	0.131	0.129	0.126	0.124	0.121	0.119	0.116	0.114	0.112
1,6	0.110	0.107	0.105	0.103	0.101	0.099	0.097	0.095	0.093	0.091
1,7	0.089	0.087	0.085	0.084	0.082	0.080	0.078	0.077	0.075	0.073
1,8	0.072	0.070	0.069	0.067	0.066	0.064	0.063	0.061	0.060	0.059
1,9	0.057	0.056	0.055	0.054	0.052	0.051	0.050	0.049	0.048	0.047
2,0	0.046	0.044	0.043	0.042	0.041	0.040	0.039	0.038	0.038	0.037
2,1	0.036	0.035	0.034	0.033	0.032	0.032	0.031	0.030	0.029	0.029
2,2	0.028	0.027	0.026	0.026	0.025	0.024	0.024	0.023	0.023	0.022
2,3	0.021	0.021	0.020	0.020	0.019	0.019	0.018	0.018	0.017	0.017
2,4	0.016	0.016	0.016	0.015	0.015	0.014	0.014	0.014	0.013	0.013
2,5	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010
2,6	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007
2,7	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005
2,8	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
2,9	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
3,0	0.003									

Come si usa?

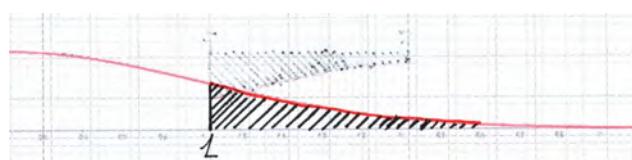
Esempio:

In una popolazione di studenti, l'altezza media μ è di 170 cm e la deviazione standard σ_x è di 10 cm. Qual è la probabilità di trovare:

1. Studenti di altezza superiore a 180 cm?
2. Studenti di altezza compresa tra 180 cm e 190 cm?

1.

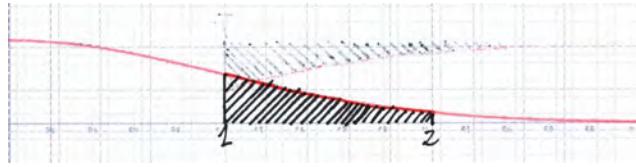
$$\int_{180}^{\infty} y(x)dx \Rightarrow z(1) = \frac{x - \mu}{\sigma_x} = \frac{180 - 170}{10} = 1, z(\infty) = \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} y(z)dz$$



In tabella vedo che $z = 1$ l'area esclusa è 0.317 essendo l'area di entrambe le ali dividendo per due si ottiene una probabilità del 15.85%.

2.

$$\int_{180}^{190} y(x)dx \Rightarrow z(180) = 1, z(190) = 2 \Rightarrow \int_1^2 y(z)dz$$



In tabella ottengo che per $z = 1$ l'area esclusa è 0.317 mentre per $z = 2$ l'area esclusa è 0.046, ottengo perciò $\frac{0.317 - 0.046}{2} = 13.5\%$

Deviazione standard del valor medio

Che succede se rimuovo un'ipotesi dal modello iniziale di Gauss?
Che succede se $\mu \neq \bar{x}$?

Sto ipotizzando che il campione considerato non coincida più con la popolazione, ma ho lo stesso un gran numero di misure per cui $s_x \approx \sigma_x$.

Un problema in statistica è quello di desumere quanto si discosta la media del campione dalla media della popolazione. Per far questo si ipotizza di estrarre da una popolazione di dati aventi media μ una serie di sottogruppi di cui si calcolano le medie e le deviazioni standard.

Si identificano cioè p campioni composti da n misure di cui si calcoleranno le \bar{x}_p medie fino ad ottenere la completezza della popolazione $n \times p$, di queste medie se ne calcolerà la media per cui si identificheranno:

$$\bar{\bar{x}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_i^p \frac{(\bar{x}_i - \mu)^2}{p}}$$

Sempre sotto le ipotesi in cui $s_x \approx \sigma_x$, vale l'importante fatto che:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Questo risulta essere un indice di quanto il valor medio, determinato con una sola serie di misure, differisca dal valore vero della grandezza in esame.

Ci si chiede allora, come si distribuisce la media delle medie intorno al valor medio?

Si vuole trattare il problema come appena fatto con Gauss, ovvero standardizzandolo:

$$z_i = \frac{\bar{x}_i - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Se si ha una media in più con che probabilità cade nell'intervallo considerato?

$$\bar{x} = \mu \pm z\sigma_{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \mu \pm z \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Ovvero posso esprimere:

$$\mu - z \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + z \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Sebbene σ_x, n, \bar{x} siano oggetti noti, la media della popolazione non lo è, e allora converrà riscrivere la precedente relazione in funzione dell'incognita.

Si definisce **livello di confidenza** (c) la percentuale di probabilità che la media μ di una popolazione giaccia in un intervallo (intervallo di confidenza) compreso tra:

$$\bar{x} - z \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

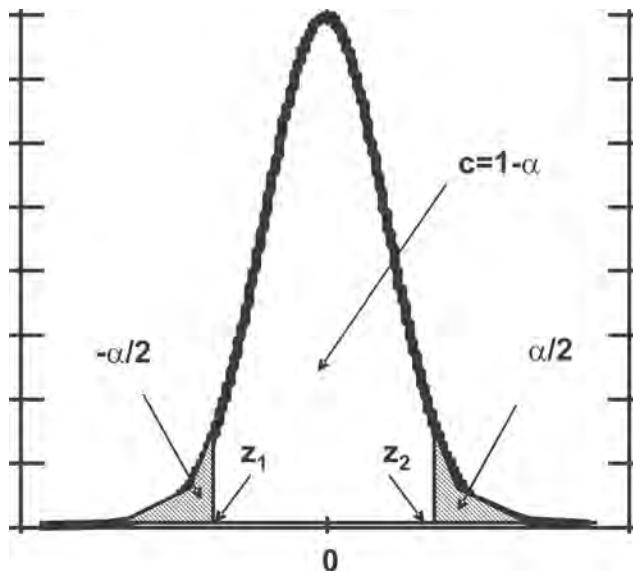
Dicendomi così con quale probabilità la media della popolazione (incognita) cade all'interno di un intervallo che si può calcolare: si può in questo modo estrarre un concetto sulla popolazione considerando i campioni!

$$\mu = \bar{x} \pm z \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Ora il valore $z \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ è l'incertezza legata alla misura: d'altro canto si sta lavorando sulla popolazione.

Questa si può diminuire aumentando n , il numero delle prove, tant'è che per $n \rightarrow \infty$ l'incertezza è nulla, si sta analizzando l'intera popolazione.

Oltre alla confidenza c si è parlato del parametro α , questo rappresenta il livello di significatività ossia la percentuale di probabilità che la media μ giaccia all'esterno di un dato intervallo.



Come si usa la tabella in questo caso?

Ad esempio si ipotizzi che per una data serie di n misure si sia calcolata la media \bar{x} e la deviazione standard s_x ($s_x \approx \sigma_x$). Si vuole calcolare l'intervallo in cui cade la media dell'intera popolazione con una probabilità (livello di confidenza) del 95%. Per far questo si dovrà trovare dalla tabella il valore di z corrispondente a 0.05 ossia $z = 1.96$.

Distribuzione t di Student

E se oltre ad essere $\mu \neq \bar{x}$ si aggiungesse $\sigma_x \neq s_x$? Ovvero e se la deviazione standard del campione fosse diversa dalla deviazione standard della popolazione?

Nella prassi della ricerca sperimentale, non sono note né la media della popolazione né la deviazione standard della popolazione. Tuttavia per un numero di misure superiore a 30 o 50 è possibile sostituire quest'ultima con la deviazione standard del campione. Nel caso in cui, invece, il numero di misure sia inferiore o uguale a 30 o 50, la distribuzione delle probabilità non è più fornita dalla distribuzione normale ma da quella del t , detta t di Student, dallo pseudonimo di William Sealy Gosset.

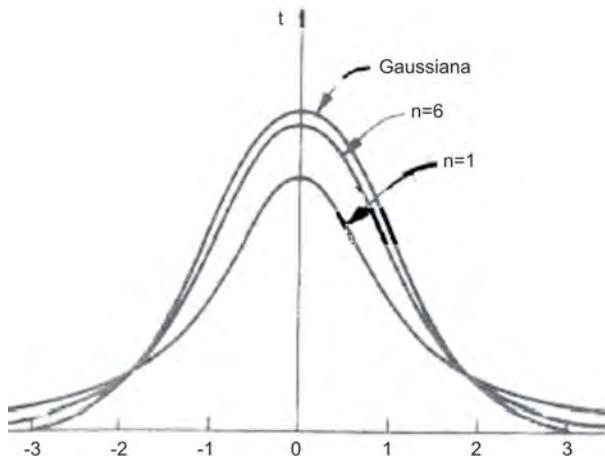
All'aumento del numero di dati campionari, s è una stima sempre migliore di σ_x . Quando n è sufficientemente grande, s e σ_x hanno valori praticamente identici. Di conseguenza all'aumentare di n si ha la convergenza dei valori della distribuzione t di Student verso la distribuzione normale standardizzata.

In parole povere la distribuzione t di Student è una correzione della curva di Gauss data dal fatto che n diminuisce, questa è legata al grado di libertà ($gdl = \nu = n - 1$):

$$gdl = \nu = n - 1$$

I vincoli sono equazioni che legano tra loro le misure. Poiché si sta prendendo in considerazione la media, il vincolo in questo caso è offerto dal fatto che la somma degli scarti è nulla, se si è definita $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ allora varrà che $\sum \xi = 0$, il numero di vincoli imposti è uno.

Si ottengono una serie di curve parametrizzate a seconda del grado di libertà.



Si noti come tutte le curve corrette passino per i flessi della gaussiana e si abbassino gradualmente col diminuire delle misure e del gdl : l'area diminuisce, la media cade in quell'intervalle con una percentuale minore.

Che fare per ottenere la stessa probabilità che avevo negli intervalli di Gauss? Dovrò avere un intervallo maggiore aumentando necessariamente l'incertezza: varia z , oltre che n !

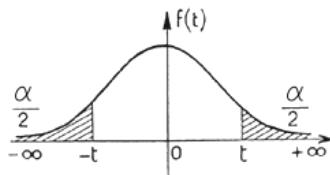
Utilizzare la gaussiana significa sottostimare l'incertezza del t di Student.

L'equazione della media della popolazione viene così riscritta con una nuova variabile t , funzione del grado di libertà:

$$\mu = \bar{x} \pm t_{gdl} \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Anche in questo caso ci sarà una tabella per calcolare i valori di t ma al contrario di z questi valori saranno dipendenti dal numero di misure.

Nella tabella α indica l'area complementare all'intervallo considerato, la significatività, a cui si assocerà una percentuale; ν indica invece il grado di libertà, in questo caso $\nu = n - 1$; all'interno della tabella si troverà il valore di t , il valore per cui si dovrà moltiplicare l'intervallo ottenuto da z .



α	0, 90	0, 80	0, 70	0, 60	0, 50	0, 40	0, 30	0, 20	0, 10	0, 05	0, 02	0, 01	0, 001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,557	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,785	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,611
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,385	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,261	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,861	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,282	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,745	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,087	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,086	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,084	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,705	2,056	2,478	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,680	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Test di interferenza

Alla base del t di Student ci sono i test d'interferenza. Questi andranno sempre a decidere se due grandezze sono diverse tra loro, risponderanno alla domanda: Quanto è possibile considerare due grandezze differenti o uguali? Qual è la probabilità di sbagliare nel considerare due grandezze differenti o uguali?

I test di interferenza sono principalmente 3:

1. **Test sulle media:** confronto tra la media di un campione e la media attesa

Note $\mu \bar{x}$ quante sono diverse tra loro? Se sono diverse tra loro è perché è successo un evento o non ho svolto la giusta quantità di misure?

2. **Test sul dato:** confronto tra un singolo dato e la media di un campione
Quanto una misura in più è diversa dalla media?

3. **Test su campioni differenti:** confronto tra le medie di due campioni differenti

Se ho due gruppi di misure, quanto li posso considerare diversi tra loro?

Tutti i testi d'interferenza si basano su un'ipotesi nulla H_0 , il test si compie vedendo che errore si commette nel rifiutare H_0 .

Ci si chiede poi, quand'è che si può considerare accettabile l'errore? Lo decide lo sperimentatore, è la significatività α dell'errore, questa rappresenta la probabilità che \bar{x} sia lontano dalla media, voglio un α basso che mi dica se è accettabile o meno il risultato del test.

Ciò che si fa è dunque imporre un α_L limite, una significatività limite nel quale dovrà rientrare il test, si calcolerà poi attraverso dati noti α_m , misurato e si vedrà se entra o meno nell'intervallo considerato.

1. Test sulla media: test a due code

$$H_0 : \mu = \bar{x}$$

Il test è a due code quando si vuole studiare se la media del campione è differente dalla media attesa. Il test è ad una coda nel caso in cui il confronto venga effettuato per vedere se la media del campione è unicamente minore oppure maggiore della media attesa.

Che errore faccio nel rifiutare H_0 ? $\mu \neq \bar{x}$

$$\mu = \bar{x} \pm t \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}$$

Il primo passo che si compie è quello di imporre una significatività limite α_L , così, noti i *gdl*, si troverà dalla tabella un t_L .

Il secondo passo è applicare l'equazione in t appena ricavata per calcolare, attraverso dati noti, il t_m misurato.

Dopo aver svolto questi passaggi ci si troverà in due casistiche:

1.

$$t_m > t_L \Rightarrow \begin{cases} c_m > C_L \\ \alpha_m < \alpha_L \end{cases}$$

Ero disposto ad accettare un errore addirittura maggiore! Supero il limite imposto positivamente.

Il risultato del test è positivo: posso considerare $\mu \neq \bar{x}$ Cos'è successo tra il calcolo delle due medie? Sicuramente qualcosa.

2.

$$t_m < t_L \Rightarrow \begin{cases} c_m < C_L \\ \alpha_m > \alpha_L \end{cases}$$

In questo caso l'esito del test è negativo non posso rifiutare l'ipotesi nulla, questo vuol dire che misure sono uguali tra loro? NO.

Non posso dire né che sono uguali né che sono differenti, se le considero uguali compio un errore del $c\%$.

Esempio:

In un vivaio sono coltivate piante della specie A; una lunga serie di misure ha dimostrato che tali piante, dopo due mesi dalla semina, raggiungono un'altezza media di 25 cm. A causa di una dispersione di sostanze tossiche si ritiene che esse incidano sulla crescita di alcune specie, tra le quali la specie A. Per una verifica di tale ipotesi vengono seminate sul terreno inquinato 7 pianticelle che, controllate dopo 2 mesi, raggiungono le seguenti altezze in cm.: 22, 25, 21, 23, 24, 25, 21. Si intende rispondere a due quesiti. Si può sostenere che le sostanze tossiche disperse influiscono sulla crescita della specie A con livello di confidenza pari al 90%? Quale è la media reale dell'altezza delle piante dell'età di due mesi (media della popolazione), nella nuova condizione del terreno?

Risposta:

Il test è a due code in quanto bisogna vedere se la media del campione è differente dalla media della popolazione. La significatività è $\alpha = 0,10$ e la media dell'altezza delle piante $x = 23cm$ ed $s = 1,73cm$. Il corrispondente in tabella è $t_6 = 1,943$.

Utilizzando ORA i dati dell'esercizio si ottiene un t stimato pari a:

$$t_{gdl} = t_6 = \frac{|23 - 25|}{1.73\sqrt{7}} = 3.053$$

Tale valore è superiore a quello riportato nella tabella sinottica della distribuzione t , ci troviamo nel caso (a). SI PUÒ dire, quindi con una confidenza maggiore

del 95% - e quindi con una significatività inferiore a 0.05 - che le sostanze tossiche disperse influiscono sulla crescita delle piante della specie A in modo significativo.

L'altezza media reale della popolazione dalla quale sono stati estratti i sette dati può essere stimata considerando che ora il t da prendere in tabella è $t_{0.10;6} = 1.943$:

$$\mu = 23 \pm 1.943 \frac{1.73}{\sqrt{7}} = 23.0 \pm 1.3$$

2. Test sul dato

$$H_0 : x_{n+1} = \bar{x}$$

Ho un campione di misure a cui aggiungo una misura, questa $n + 1$ -esima misura fa ancora parte della distribuzione già calcolata?

Che errore faccio nel rifiutare H_0 ? $x_{n+1} \neq \bar{x}$

$$t = \frac{\left| \bar{x} - x_{n+1} \right|}{\frac{s_x}{\sqrt{\frac{N+1}{N}}}}$$

Dove la quantità sotto radice altro non è che un fattore correttivo dato dal fatto che abbiamo una misura in più < la deviazione standard va ricalcolata.

1.

$$t_m > t_L \Rightarrow \begin{cases} c_m > C_L \\ \alpha_m < \alpha_L \end{cases}$$

L'esito del test è positivo.

È successo qualcosa che ha reso la misura differente dalle altre: la misura in più non appartiene alla distribuzione delle altre misure.

2.

$$t_m < t_L \Rightarrow \begin{cases} c_m < C_L \\ \alpha_m > \alpha_L \end{cases}$$

Il test è negativo, commetto un errore di $c\%$ nel considerare quella misura uguale alle altre.

3. Test su campioni differenti

$$H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

Prendendo due campioni di misura, le medie sono diverse tra loro? Per quale motivo le medie vengono differenti? Per un evento particolare o perché non ho abbastanza misure?

In questo test il numero di misure per campione può essere differente, si suddivide in:

- Dati non appaiati quando tra le misure dei due campioni non c'è alcuna relazione;
- Dati appaiati, quando si ottengono misure diverse da campioni uguali in condizioni diverse e quindi c'è una relazione orizzontale tra le misure, si considera la variabilità di ogni soggetto.

Dati appaiati

Soggetti	Condizione 1	Condizione 2	Differenze
I	$x_{I,1}$	$x_{I,2}$	$d_I = x_{I,1} - x_{I,2}$
II	$x_{II,1}$	$x_{II,2}$	$d_{II} = x_{II,1} - x_{II,2}$
III	$x_{III,1}$	$x_{III,2}$	$d_{III} = x_{III,1} - x_{III,2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X	$x_{X,1}$	$x_{X,2}$	$d_X = x_{X,1} - x_{X,2}$
μ			\bar{d}

Dove d è null'altro che la differenza con segno.

Cambio soggetto dell'analisi statistica, ora non è più la media del campione ma la media delle differenze \bar{d} !

La nuova ipotesi nulla che ottengo è:

$$H_0 : d = 0$$

Che errore faccio nel rifiutarla?

$$t = \frac{|\bar{d} - \delta|}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

Dove $\delta = 0$ ed n è ora il numero delle differenze.

Anche qui, se:

1.

$$t_m > t_L \Rightarrow \begin{cases} c_m > C_L \\ \alpha_m < \alpha_L \end{cases}$$

L'esito del test è positivo. Rifiuto H_0 e la differenza $d \neq 0$ è non nulla: le due medie sono diverse tra loro

2.

$$t_m < t_L \Rightarrow \begin{cases} c_m < C_L \\ \alpha_m > \alpha_L \end{cases}$$

Il test è negativo, NON rifiuto l'ipotesi nulla ma questo non vuol dire che la differenza d sia nulla! Significa semplicemente che non si può rifiutare l'ipotesi nulla con la data significatività limite imposta.

(Dati non appaiati: NO)

Retta di regressione

Ricordi la differenza tra curva di graduazione e quella di taratura? Se la curva di graduazione era la caratteristica dello strumento, quella di taratura meglio approssima lo strumento e si ricostruisce dando ingressi noti allo strumento.

Si definisce una relazione di regressione tra ingresso e uscita, una relazione del tipo semplice polinomiale:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

La **regressione lineare** è definita come una sola uscita y dipendente da un solo ingresso x , un'equazione polinomiale di primo grado, una retta:

$$y = a + bx$$

Occorre pertanto ricavare i due coefficienti a e b , corrispondenti rispettivamente all'intercetta e all'inclinazione della retta.

Ora, ricordi perché si preferisce lavorare con curve lineari? Perché la sensibilità è costante:

$$S = \frac{dy}{dx} = b$$

In questo modo lo strumento si comporta nello stesso modo in tutto il campo di misura.

Come si effettua una taratura? Dando ingressi noti se ne registra l'uscita.

Ad esempio per una bilancia $y = a + bx \rightarrow \theta = a + bF$.

Di quanti punti ho bisogno per tracciare una retta? Due, ma quando si hanno a disposizione n punti (X_i, Y_i) il sistema diviene sovradeterminato ($2xn$).

È necessario allora trovare una strategia di ottimizzazione per determinare la “migliore” retta che approssimi globalmente tutto l’insieme di punti a disposizione e che riduca le equazioni vincolari da n a 2. In generale tale strategia consiste nella minimizzazione di una funzione $g(y)$ detta *errore ammissibile* o *funzione obiettivo*.

$$g(y) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Questa è definita come la somma degli scarti verticali, dove \hat{y}_i altro non sono che i punti appartenenti alla retta e gli y_i sono quelli ottenuti dalla costruzione.

Come trovo la retta che minimizzi tale funzione? Annullando le derivate parziali rispetto ad a e b (le uniche due quantità che variano).

Sostituendo i punti sulla retta nell’equazione di g ottengo:

$$g(y) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

Derivando si trova in questo modo gli unici due valori di a e b che minimizzano la funzione g :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial a} = 0 &\Leftrightarrow -2 \sum (y_i - a - bx_i) = 0 \Leftrightarrow \\ \sum y_i - \sum a - \sum bx_i &= \sum y_i - na - b \sum x_i = 0 \Leftrightarrow \sum \frac{y_i}{n} - a - b \sum \frac{x_i}{n} = 0 \Leftrightarrow \\ \bar{y} - a - b\bar{x} &= 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \bar{y} - b\bar{x}} \end{aligned}$$

Si sostituisca quanto appena trovato nella formula di partenza di g :

$$g(y) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - b\bar{x} - bx_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x})]^2$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial b} = 0 &\Leftrightarrow -2 \sum [y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x})] (x_i - \bar{x}) \Leftrightarrow \\ &\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) - b \sum (x_i - \bar{x})^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & \boxed{b = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} = \frac{cod_{xd}}{dev_x} \end{aligned}$$

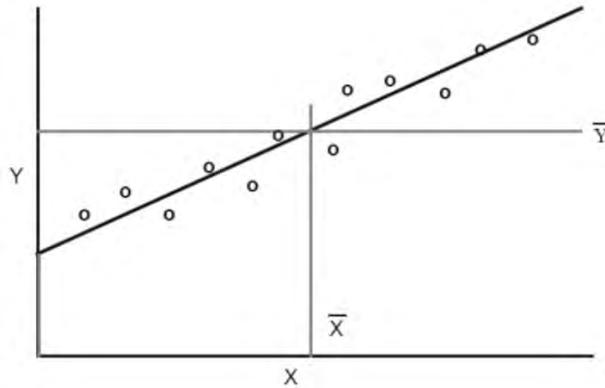
Dove cod e dev sono rispettivamente la codevianza e la devianza.

La retta di regressione lineare vale soltanto nel range di valori dati, non si può estendere la legge lineare trovata all'esterno dell'intervallo di valori considerato.

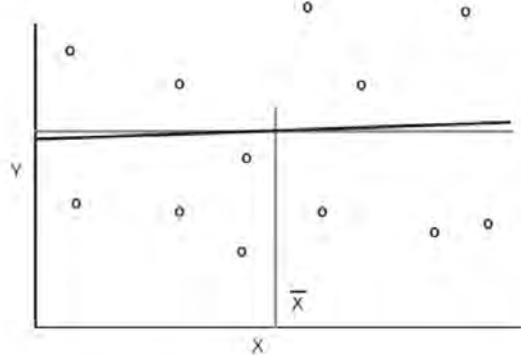
Test di significatività

In quali casi non si può calcolare la retta di regressione lineare? Sempre, a patto di avere almeno due punti, è una relazione matematica.

Il problema è capire quanto ciò che si calcola è indice o meno di linearità.



Più b si discosta da 0, più si può dire che sussiste una relazione di linearità tra ingresso ed uscita, ma non dipenderà soltanto dall'inclinazione b , ma anche dalla dispersione dei dati.



Questo è ad esempio uno strumento poco sensibile ma pur sempre lineare. Ci si chiede allora se il risultato dell'avere un b piccolo è causato dall'avere uno strumento dalla bassa sensibilità o perché se si avessero fatte più misure allora $b \rightarrow 0$?

Test di linearità

Occorre determinare quindi quale è la soglia inferiore accettabile di b per asserire la linearità del campione. L'analisi che si effettuerà sarà soltanto sul coefficiente b . Tale test dirà pertanto se sussiste una relazione lineare, ma non darà informazioni sulla migliore approssimazione dei dati, che può essere quadratica, cubica, etc

Dall'equazione della retta $\hat{y} = a + bx$ ci si chiede quanto b sia non nullo, l'ipotesi nulla sarà pertanto

$$H_0 : b = 0$$

Che errore si commette nel rifiutarla? Si rifiuti H_0 con un limite di significatività α_L . Si esegua il test t di Studenti su b :

$$t_m = t_{gdl} = \frac{b - 0}{S_b}$$

Dove S_b è la deviazione standard di b così calcolata:

$$S_b = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

In cui il termine al numeratore altro non è che la deviazione standard degli errori, in qui gli \hat{y}_i si calcolano dalla formula della retta.

Quanti sono i gradi di libertà gdl ? Valendo sempre:

$$gdl = \text{numero di misure} - \text{vincoli}$$

In questo caso i vincoli sono due e sono offerti dalle condizioni di nullo delle derivate parziali in a e b :

$$gdl = n - 2$$

Ad esempio se si vuole essere sicuri al 95% ($c_L = 95\% \Rightarrow \alpha_L = 5\%$) si calcola il corrispettivo t_L e lo si confronterà con il t_m .

1.

$$\begin{aligned} t_m > t_L &\Rightarrow c_m > C_L \\ \alpha_m < \alpha_L \end{aligned}$$

L'esito del test è positivo, il test è significativo, superato. Si può rifiutare H_0 e si può considerare $b \neq 0$: si può considerare la dipendenza lineare piuttosto che non avere dipendenza.

2.

$$\begin{aligned} t_m < t_L &\Rightarrow c_m < C_L \\ \alpha_m > \alpha_L \end{aligned}$$

Il test è negativo, non significativo non si può rifiutare l'ipotesi nulla con quella confidenza dichiarata. Tuttavia non si può neanche dire che b sia nulla!

Vorrà dire che la relazione lineare c'è ma non è così forte da stabilirsi con quella α_L data.

(Significatività dell'intercetta a : NO)

Test di parallelismo

La retta di regressione $y = a + bx$ è parallela ad un'altra retta se presenta lo stesso coefficiente angolare/pendenza b , ma cosa significa per due rette di regressione avere in questo caso la stessa pendenza? Avere la stessa sensibilità.

Magari se lo strumento ha subito danni il nuovo b potrà essere differente dal vecchio, di quanto la sensibilità dello strumento è compromessa? Sono diversi perché un evento li ha resi tali o perché non sono state effettuate il numero sufficiente di misure?

$$y = a + bx \quad y = a + \beta x$$

Quanto $b = \beta$?

Con il test di parallelismo si deve rispondere alla seguente domanda: *è possibile affermare, con un livello di significatività α , che i due coefficienti angolari b e β sono diversi?*

- (a) Se il test risulta essere positivo, i due coefficienti sono significativamente diversi con un livello di significatività α .
- (b) Se il test è negativo, NON si può affermare che i due coefficienti sono uguali ma unicamente che i due coefficienti non sono significativamente differenti tra loro con il livello di significatività α scelto.

Se si ricade nel caso (a) l'elemento oggetto della taratura (trasduttore/catena di misura) ha una sensibilità diversa da quella di riferimento.

Se si ricade invece nel caso (b) si può confidare che le due sensibilità siano uguali tuttavia, non essendo possibile affermarlo con certezza, è necessario formulare una seconda domanda *è possibile considerare i due coefficienti "poco differenti" per gli scopi della misura?*

Per rispondere alla prima domanda, come per il test di linearità, si utilizza il test di Student.

Con il valore di t infatti è possibile valutare la probabilità $\alpha_{(tn-2)}$ cheb sia significativamente diverso da un dato valore atteso β . Tale probabilità corrisponde all'area sottesa dalla distribuzione t di Student esterna a $-t$ e t .

Tutti i test di inferenza analizzati finora, dalla loro definizione, si adoperavano a negare una condizione e pertanto venivano usati per quantificare quanto due grandezze fossero differenti. In questo caso, l'approccio è il contrario.

L'ipotesi nulla è data da:

$$H_0 : b = \beta$$

Con β valore noto.

Quel che si fa questa volta, ragionando al contrario, è scegliere un $\alpha_L \uparrow$ in modo da avere un $c_L \downarrow$: si vuole "sbagliare", si vuole *NON-rifiutare* l'ipotesi nulla, si vuole essere sicuri che le due grandezze siano uguali al $\alpha\%$ più alto possibile e differenti al $c\%$ più basso possibile.

Per cui:

$$t_m = t_{gdl} = \frac{|b - \beta|}{S_b}$$

Mentre il t_l si troverà imponendo questa volta un elevato valore di α_L .

1.

$$t_m > t_L \Rightarrow \begin{cases} c_m > C_L \\ \alpha_m < \alpha_L \end{cases}$$

L'esito del test è positivo, il test è significativo. Si può rifiutare H_0 e si può considerare $b = \beta$: le due pendenze sono diverse al $c\%$.

2.

$$t_m < t_L \Rightarrow \begin{cases} c_m < C_L \\ \alpha_m > \alpha_L \end{cases}$$

Il test è negativo, non significativo non si può rifiutare l'ipotesi nulla con quella confidenza dichiarata. Si può sbagliare di un $\alpha\%$ a non considerarle uguali.

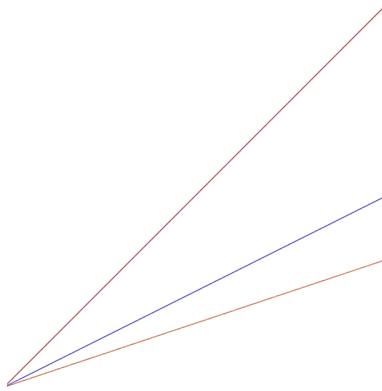
Si può considerare $b = \beta$ con quel livello di significatività dichiarato.

SOLO se il test è NON significativo, si potrà rispondere alla seconda domanda e considerare le uscite dei due trasduttori.

Si effettuerà cioè un controllo misuristico chiedendosi se l'errore fatto nello step di test precedente si può accettare a livello di utilizzo: il test non è uno strumento in grado di accertare l'uguaglianza tra le sensibilità, per cui si procede a considerare il massimo errore che si ottiene a causa della differenza esistente tra la sensibilità ottenuta e quella nominale.

Si continui ad ipotizzare a in prima approssimazione uguale, in modo che:

$$y = a + bx \quad y' = a + \beta x$$



In ogni caso, che sia $\beta \geq b$ l'errore massimo sarà sempre in corrispondenza del massimo valore di ingresso x_{max} , l'errore Δy che ne consegue può essere ricavato, a livello teorico:

$$\Delta y = |y - y'| = |b - \beta| x$$

In questo modo a livello misuristico l'errore massimo si potrà scrivere come:

$$\Delta y_{max,misurato} = |b - \beta| x_{max}$$

Tale risultato dovrà essere confrontato con un valore noto (dato dall'esercizio) per vedere se è accettabile o meno.

Poiché interessa sapere il valore sul misurando, sull'ingresso, verrà fornito un Δx_{max} , nominale che dovrà essere confrontato con un $\Delta x_{max,misurato}$:

$$\Delta x_{max,misurato} = \frac{\Delta y_{max}}{\beta}$$

Oppure, equivalentemente, si possono calcolare i valori massimi delle rette di regressione, una nominale e l'altra modificata, ottenendone un Δ , tale valore può essere poi ricondotto nelle unità di misura del misurando attraverso il valore o l'espressione della sensibilità nominale.

(Intervallo di confidenza: NO)

NOTE

Indice

I 4.GUM: guide to the expression of uncertainty in measurement	2
Introduzione	2
Errore vs Incertezza	2
Valutazione dell'incertezza	3
TIPO A	4
TIPO B	4
Distribuzione Normale	5
Distribuzione Rettangolare	5
Distribuzione Triangolare	7
Distribuzione ad U	8
Ricapitolando	8
Propagazione delle incertezze	9
Grandezze misurate indipendenti	9
Grandezze misurate correlate	9
Esempio - Misura di una resistenza nel partitore di tensione	10
Propagazione delle distribuzioni: Simulazione Monte Carlo	12
Esempio - Misura di una resistenza nel partitore di tensione	13
Esprimere l'incertezza	15
Taratura	15
Taratura di un multimetro	17
Taratura di un calibro	17
Riferibilità	18
Documentazione: Certificato vs Rapporto	18
Certificato di taratura	18
Rapporto di taratura	19

Parte I

4.GUM: guide to the expression of uncertainty in measurement

Introduzione

La GUM definisce le regole per valutare ed esprimere l'incertezza nelle misure.

Una misura è un'informazione costituita da un numero, un'incertezza e un'unità di misura:

$$X = (z \pm u)g$$

Per cui il risultato di una misurazione altro non è che la stima del valore del misurando che si considera completo solo quando viene accompagnato dalla valutazione dell'incertezza legata a tale stima, sempre sotto le ipotesi per cui il misurando deve essere definito con sufficiente completezza in funzione dell'accuratezza richiesta.

Errore vs Incertezza

Il concetto di **errore** è ben diverso dal concetto di incertezza; l'errore rappresenta la differenza tra il valore misurato ed il valore e può essere sia causale che sistematico.

Un **errore casuale** deriva da variazioni stocastiche non conosciute delle grandezze di influenza determinando variazioni nella misura del misurando in presenza di misure ripetute. Questo viene ridotto aumentando il numero di misure sotto le ipotesi che il suo valore medio, il suo valore atteso sia nullo.

Un **errore sistematico** è caratterizzato dall'avere media non nulla per cui, se l'effetto di una determinata grandezza di influenza è noto la misurazione può essere corretta attraverso un fattore di correzione a cui però si lega un'incertezza.

L'**incertezza** è invece un parametro associato al risultato di una misurazione che caratterizza la sua specifica dispersione di valori attribuibili al misurando. L'incertezza del risultato di una misurazione riflette così la mancanza di conoscenza del valore esatto del misurando, per cui eliminando gli errori sistematici saranno gli errori casuali a determinare l'incertezza relativa alla correzione utilizzata.

Alcune fonti di incertezza possono essere l'incompleta e l'imperfetta definizione del misurando, l'inadeguata conoscenza degli effetti delle condizioni ambientali sulla misura, un errore di lettura negli strumenti analogici, una risoluzione degli strumenti non infinita... .

Le componenti dell'incertezza vengono suddivise in due categorie basate sul metodo di valutazione, la *Tipo A* e la *Tipo B*. Questa classificazione indica due metodi differenti per valutare l'incertezza non indicando altresì alcuna differenza tra la natura delle componenti di incertezza, in entrambi i casi infatti l'incertezza è sempre valutata attraverso una distribuzione di probabilità e la sua deviazione standard.

Tale trattazione inoltre non risente di legami con errori di tipo sistematico o casuale.

TIPO A

Ottenuta da una funzione di probabilità calcolata da dati
Statistica applicata alle misure effettuate

TIPO B

Ottenuta da una funzione di probabilità assunta essere quella reale
Statistica applicata ad una misura effettuata

Valutazione dell'incertezza

Come si trova l'incertezza di Y variabile dipendente a partire da quella di X variabile indipendente?

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)$$

I valori e l'incertezza delle X_i grandezze in ingresso **O** sono determinate direttamente tramite la misura **O** hanno origine esterna alla misurazione e i coefficiente sino ottenibili da manuali o certificati di taratura.

La stima della misura risulta sempre essere:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, X_{3,k}, \dots, X_{N,k})$$

Si definisce l'**incertezza combinata standard** $u_c(Y)$ come funzione delle **incertezze standard** relative ad ogni grandezza d'ingresso $u(X_i)$.
L'incertezza standard viene anche chiamata incertezza tipo e può esse calcolata sia col metodo **A** che col metodo **B**.

Considerando sia ogni grandezza in ingresso X_i che Y , l'**incertezza estesa** U è ottenuta moltiplicando l'incertezza combinata standard per un **fattore di copertura** k .

$$U(X_i) = k u(X_i) \quad U(Y) = k u_c(Y)$$

Come si sceglie K ? k viene scelto in funzione del livello di confidenza richiesto; nel caso di errori della misura a media nulla ed in presenza di un numero maggiore di 30 misure, il valore di k coincide con il valore di z della distribuzione gaussiana:

$$k = 1 \Rightarrow c = 68.3\% \quad k = 2 \Rightarrow c = 95.5\% \quad k = 3 \Rightarrow c = 99.7\%$$

Nel caso sempre di errori della misura a media nulla ma in presenza di un numero minore di 30 misure, il valore di k coincide con il valore di t della distribuzione del t di Student in funzione del numero di gradi di libertà.

TIPO A

Comprende quelle incertezze di misura la cui valutazione può essere basata su metodi statistici oggettivi.

TIPO B

Comprende quelle incertezze la cui stima è basata su "altri metodi", implicando valutazioni di tipo soggettivo.

Come trovare e valutare l'incertezza?

1. Si calcola l'incertezza sulle X : come si valutano queste incertezze sulle variabili indipendenti? In che modo influenzano il risultato finale?
2. Attraverso la propagazione delle incertezze (ex. degli errori) si giunge a capire come le incertezze al punto 1. influenzano il risultato sulla variabile dipendente Y .

Se durante la misura tutte le grandezze d'influenza variano in modo casuale e di conseguenza gli errori della misura hanno media nulla con distribuzione gaussiana, il calcolo dell'incertezza può essere effettuato utilizzando un approccio statistico **TIPO A**, ma è un'operazione lunga, costosa e non sempre attuabile.

TIPO A

La migliore stima del valore vero μ nel caso di una i-esima grandezza che varia in modo casuale è rappresentata dalla media:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k}$$

La deviazione standard di ogni singola misura per l'i-esima grandezza è:

$$s(X_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (X_{i,k} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

La deviazione standard della media dell'i-esima grandezza è:

$$s(\bar{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}}$$

Si definisce l'incertezza standard dell'i-esima grandezza X_i come:

$$u(X_i) = S(\bar{X}_i)$$

In modo che l'incertezza estesa associata alla misurazione sia:

$$U = ku$$

Chi sceglie k ? Lo sperimentatore, solitamente per avere valori statisticamente affidabili $k \geq 2$.

TIPO B

L'incertezza stimata con B dà informazioni riguardanti la possibile variabilità della i-esima grandezza da misurare.

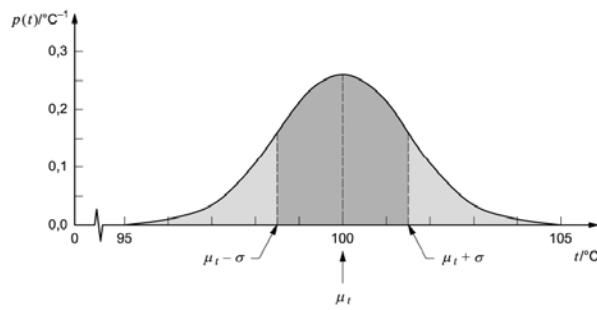
L'incertezza stimata B risulta più "soggettiva", è lo sperimentatore che assegna il valore all'incertezza. È una tipologia di analisi da utilizzare e preferire quando gli errori delle misure non hanno media nulla e quindi non sono a distribuzione casuale.

Le informazioni su questa misura possono derivare da dati di misure precedenti, o dalla conoscenza del comportamento dei materiali e degli strumenti, o da note specifiche del costruttore, da certificati o dati di taratura, dall'incertezza assegnata a dati di riferimento in manuali, a previsioni circa variazioni delle grandezze d'influenza...

1. Si individua un intervallo di valori entro il quale si suppone debbano cadere i valori della i-esima grandezza da misurare.
2. Si stabilisce una densità di probabilità per ogni fonte di incertezza:
 - Distribuzione normale;
 - Distribuzione rettangolare;
 - Distribuzione triangolare;
 - Distribuzione ad U;
3. Si stima l'incertezza standard della i-esima grandezza da misurare in funzione della distribuzione di probabilità che la caratterizza e dà informazioni note "a priori".

Distribuzione Normale

La distribuzione normale si utilizza quando è maggiore la probabilità di trovare valori prossimi al valor medio che lontani da esso.



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx \\ u(x) = \sigma(x)$$

Distribuzione Rettangolare

La distribuzione rettangolare si utilizza quando si conoscono i limiti di variazione del misurando, questo varia in un range di valori finito e definito.
È caratterizzata dal fatto che la probabilità di trovare valori all'interno dell'intervallo è la stessa, questi non si attestano intorno al valor medio.
Generalmente viene utilizzata nel caso in cui non si abbiano informazioni sulla distribuzione all'interno dell'intervallo.

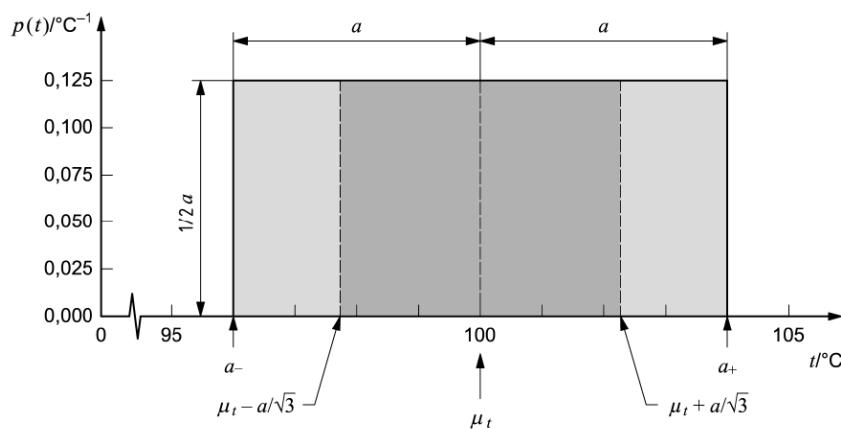
Le equazioni che individuano questa distribuzione sono:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & a_- \leq x \leq a_+ \\ 0 & x < a_- \quad x > a_+ \end{cases}$$

In cui a è il semi intervallo di valori possibili.

Per far valere il fatto che la sua area sia unitaria, ovvero che debba abbracciare una probabilità del 100%, le dimensioni del rettangolo dovranno esser pari a:

$$A = b \cdot h = 2a \cdot \frac{1}{2a} = 1$$



In questo caso, svolgendo l'integrale ottengo:

$$u(x) = \sigma(x) = \frac{2a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

L'area evidenziata in grigio identifica così i valori di $\pm u(x)$.

Che valori si scelgono di k ? Scegliendo $k = 2$ ottengo:

$$U = \pm 2u = \pm \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Sto sovradimensionando l'incertezza, sto andando oltre la distribuzione di probabilità definita, al massimo si può scegliere $k = \sqrt{3}$, in questo modo

$$U = \pm \sqrt{3}u = \pm a$$

Deve essere perciò $k \leq \sqrt{3}$ per $k = 1$ l'area racchiusa è il 59%.

Quando si usa questa distribuzione? La risoluzione degli strumenti digitali ne è un classico esempio, si ha infatti ad esempio, la seguente misura di una grandezza, 1.28 per cui non si conosce la cifra decimale, per cui quale potrebbe essere?

$$1.280 \quad 1.282 \quad 1.277$$

Queste ad esempio sono tutte plausibili, si ha la stessa probabilità di vere una misura tra queste, ma cosa sicuramente si esclude? Si esclude la possibilità che sia 1.286 perché altrimenti sullo strumento si leggerebbe 1.29 anziché 1.28, per cui, qual è il limite?

$$1.275 < 1.28 < 1.285$$

In questo modo a si configura essere:

$$a = \frac{\text{minimo scarto}}{2}$$

E perciò in questo caso, avendo l'incertezza sul decimo, si avrà:

$$a = \frac{0.01}{2} = 0.005$$

E quindi, l'incertezza associata a tale semi intervallo sarà:

$$u = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0.005}{\sqrt{3}} = 0.0028$$

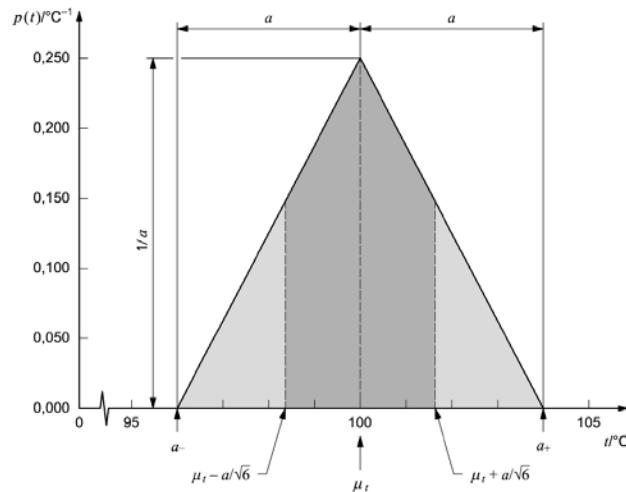
Un altro classico esempio di distribuzione rettangolare è la tolleranza dimensionale.

Distribuzione Triangolare

La distribuzione triangolare si utilizza qualora vi sia maggiore probabilità di trovare valori prossimi alla media piuttosto che lontano da essa.

Si ipotizza una variazione lineare tra la media ed i limiti, per cui le equazioni che la identificano sono:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x - a_-}{a^2} & a_- \leq x \leq \frac{a_+ + a_-}{2} \\ p(x) &= \frac{a_+ - x}{a^2} & \frac{a_+ + a_-}{2} \leq x \leq a_+ \\ p(x) &= 0 & \text{altrimenti} \end{aligned}$$



Per cui:

$$u(x) = \sigma(x) = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

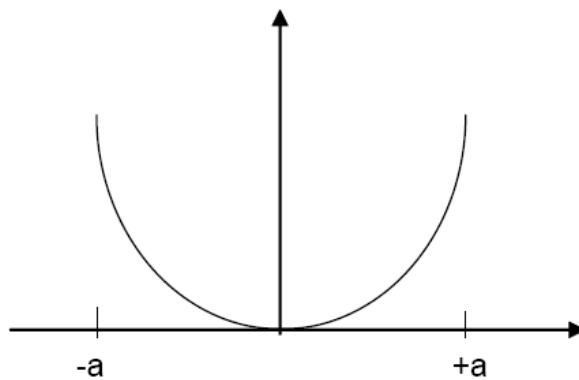
questa è una distribuzione a metà, a cavallo tra quella gaussiana e quella rettangolare, perché identifica i valori centrali come i più probabili ed è limitata.

In questo caso $k \leq \sqrt{6}$ per cui $k = 1$ identifica un'area pari al 41%.

Distribuzione ad U

La distribuzione ad "U" è utilizzata quando è maggiore la probabilità di trovare i valori misurati vicino ai limiti piuttosto che intorno al valore medio. Tale distribuzione è usata ad esempio in meteorologia, dove il malore medio non è rappresentativo, si danno valori minimi e valori massimi.

Anche le vibrazioni fanno uso di questa distribuzione, hanno andamenti sinusoidali spesso a media nulla identificati da un minimo ed un massimo.



In questo caso, poiché:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Allora $k \leq \sqrt{2}$

Ricapitolando i contributi all'incertezza combinata standard possono essere calcolati tramite i metodi **TIPO A** e **TIPO B**. Infatti si possono avere due situazioni limite:

1. Singola misurazione – non è possibile stimare le incertezze di tipo A, si considerano unicamente quelle di tipo B;
2. Numerose misurazioni – tutte le grandezze di influenza vengono fatte variare in modo casuale per stimare le cause di incertezza unicamente tramite metodo A;

Si stabilisce infine il fattore di copertura e si fornisce il valore dell'incertezza estesa per ogni i-ma grandezza.

Si noti infine come il fattore moltiplicativo k è maggiore nella distribuzione "U" piuttosto che nella distribuzione rettangolare e triangolare.

Propagazione delle incertezze

L'incertezza composta si usa in presenza di misure indirette ossia dove è presente un legame funzionale tra le grandezze misurate X_i ed il parametro di cui si vuole conoscere la misura Y :

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)$$

L'incertezza composta è una stima della dispersione dei valori di Y a causa delle incertezze associate a X_i . Le incertezze standard possono essere di **TIPO A** e di **TIPO B** e le grandezze misurate possono essere tra di loro indipendenti o correlate.

Grandezze misurate indipendenti

Valendo solamente se le grandezze sono tra di loro indipendenti, ovvero se ad esempio $y = f(x_1, x_2, x_3) \neq x_1 = f(x_2)$ si effettuano le derivate parziali rispetto alle singole variabili:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)}$$

Dove la $u(x_i)$ sarà l'incertezza di tipo A o B per ogni variabile.

Ad esempio se:

$$y = a + b + c \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial c} = -1$$

Allora:

$$u_c(y) = \sqrt{1 \cdot u_a^2 + 1 \cdot u_b^2 + 1 \cdot u_c^2}$$

Grandezze misurate correlate

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)$$

In cui r è il fattore di correlazione:

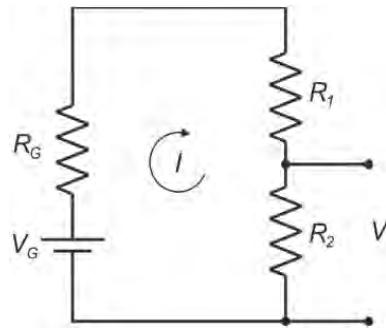
$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)}$$

In cui $u(x_i, x_j)$ è la covarianza tra x_i e x_j :

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)$$

Per cui se $r = 0$ non c'è correlazione e se $r = 1$ c'è correlazione.

Esempio - Misura di una resistenza nel partitore di tensione



$$R_2 = \frac{V}{V_G - V} (R_G + R_1)$$

1. $V_G = 12V$ tensione di alimentazione con incertezza estesa $U(V_G) = 10mV(k=2)$
2. $R_G = 10\Omega$ misurata tramite 10 letture, la deviazione standard è $12,65\Omega$
3. $R_1 = 1k\Omega$ e $u(R_1) = 5\Omega$
4. $V = 7,77V$ misurata tramite voltmetro a 3 cifre (presente unicamente l'errore di quantizzazione a distribuzione rettangolare)

Si chiede di

- Calcolare l'incertezza assoluta per tutti i parametri
- Calcolare il valore di R_2
- Calcolare l'incertezza combinata standard di R_2
- Calcolare l'incertezza estesa di R_2

Si procede a dare la soluzione:

$$u(R_1) = u(R_1) = 5\Omega \text{ nota}$$

$$u(R_G) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12,65}{\sqrt{10}} = 4\Omega$$

$$u(V_G) = \frac{U(V_G)}{k} = 10mV/2 = 5mV$$

$$u(V) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{0.01}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{0.005}{\sqrt{3}} = 2.29mV$$

$$R_2 = \frac{7.77}{12 - 7.77} (10 + 1000) = 1855\Omega$$

L'incertezza combinata standard su R_2 si trova tramite l'ottenimento delle derivate parziali:

$$\frac{\partial R_2}{\partial R_1} = \frac{V}{V_G - V} = 1.84mV$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial R_G} = \frac{V}{V_G - V} = 1.84mV$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial V_G} = \frac{V_G(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2} = 667.3$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial V} = -\frac{(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2} = 438.6$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial R_1}\right)^2 = 3.38; \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial R_G}\right)^2 = 3.38; \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial V_G}\right)^2 = 458821; \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial V}\right)^2 = 192369.96$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial R_1}\right)^2 (R_1)^2 = 84.5; \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial R_G}\right)^2 u(R_G)^2 = 61.82; \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial V_G}\right)^2 u(V_G)^2 = 11.47; \quad \left(\frac{\partial R_2}{\partial V}\right)^2 u(V)^2 = 1.61;$$

In questo modo:

$$u_c(R_2) = \sqrt{\left(\frac{\partial R_2}{\partial R_1}\right)^2 \cdot u(R_1)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial R_G}\right)^2 \cdot u(R_G)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial V_G}\right)^2 \cdot u(V_G)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial V}\right)^2 \cdot u(V)^2} = \sqrt{165.4} = 12.86 \approx 12\Omega$$

In più, se $k = 2$ sia avrà:

$$U(R_2) = 24\Omega$$

Propagazione delle distribuzioni: Simulazione Monte Carlo

Cosa succede se però non è noto il legame funzionale tra le grandezze misurate x_i ed il parametro di cui si vuole conoscere la misura y ? ovvero non è nota la:

$$y = f(x_N)$$

o è molto difficile da ricavare.

Si utilizza il supplemento alla GUM (JCGM 101:2008) basato sulla propagazione delle distribuzioni tale Supplemento raccomanda di implementare detta propagazione delle distribuzioni mediante la Simulazione Monte Carlo.

La propagazione delle distribuzioni va utilizzata quando:

- Il modello funzionale devia fortemente dalla linearità;
- Le derivate parziali sono difficilmente calcolabili;
- Le distribuzioni di probabilità associate alle grandezze da misurare non sono gaussiane;
- La propagazione delle incertezze fornisce una sovrastima dell'incertezza associata alla misura finale (dello stesso ordine della variabile analizzata);
- Modello funzionale non noto;
- Modello funzionale complesso (logaritmo, ecc).

Per cui, nota la media e la deviazione standard che si vuole avere, si chiede al calcolatore di generare un numero di misure simulate, fintizie, tali per cui la media e la deviazione standard siano uguali al valore imposto. Una volta ottenute tali misure si inseriscono all'interno dell'equazione funzionale di partenza dalla quale si crea una funzione cumulativa della distribuzione, a questo punto si può finalmente dare un valore alla confidenza.

Che tipo di distribuzione ci si aspetta? Se sono ognuna di tipologia diversa non si è in grado di stabilirlo devono essere tutte uguali per stabilirlo a priori.

La simulazione Monte Carlo procede per step per cui è necessario:

1. Selezionare un numero M di simulazioni (di solito 10^6);
2. Generare M vettori di numeri per le variabili X_i tenendo in considerazione la funzione di distribuzione di probabilità associata ad ogni X_i ;
3. Per ogni vettore calcolare la relazione funzionale di partenza:

$$y_k = g(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{N,k}) \quad k = 1 \dots M$$

4. Ordinare gli M elementi di y in ordine non decrescente (\approx crescente, potrebbero esserci termini uguali);
5. Costruire la F_y come conteggio progressivo normalizzato al numero totale dell'insieme $y(k)$;

x	y
$R_{2;\min}$	$1/M$
.	$2/M$
.	$3/M$
.	.
.	.
$R_{2;\max}$	1

6. Calcolare la media e la deviazione standard di y ;
7. L'intervallo di copertura $[y_1, y_2]$ correlato ad una probabilità di copertura p , è il più piccolo intervallo $[y_1, y_2]$ per cui:

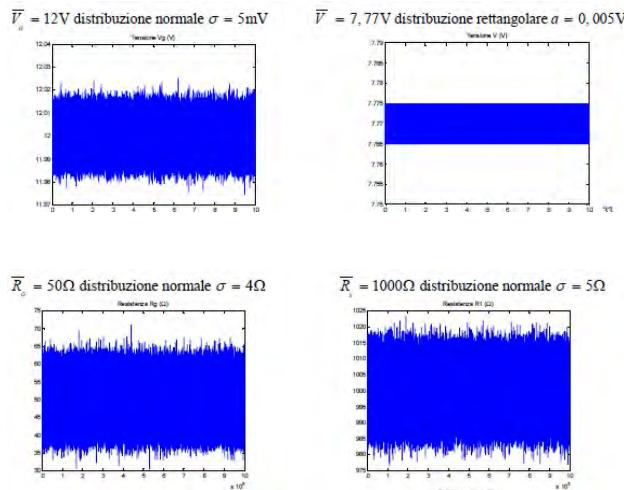
$$F_y(y_2) - F(y_1) = p$$

Esempio - Misura di una resistenza nel partitore di tensione

1.

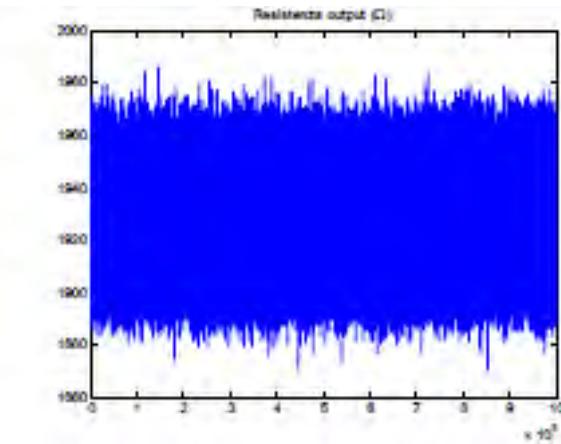
$$R_2 = \frac{V}{V_G - V} (R_G + R_1) \quad M = 10^6$$

2. Per ogni variabile nota la distribuzione di probabilità si calcola il vettore numerico corrispondente.

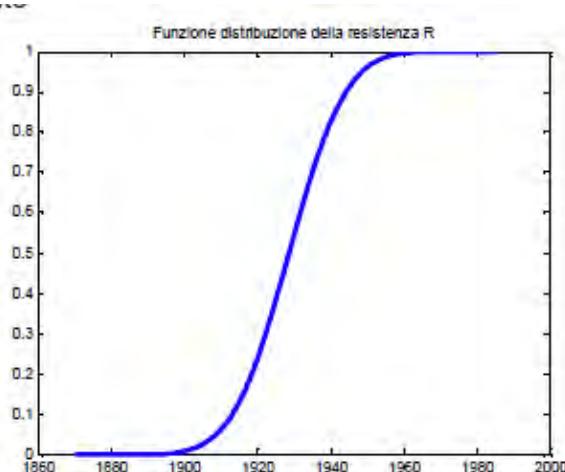


3. Per ogni valore ottenuto si calcola la resistenza R_2

Figura 1



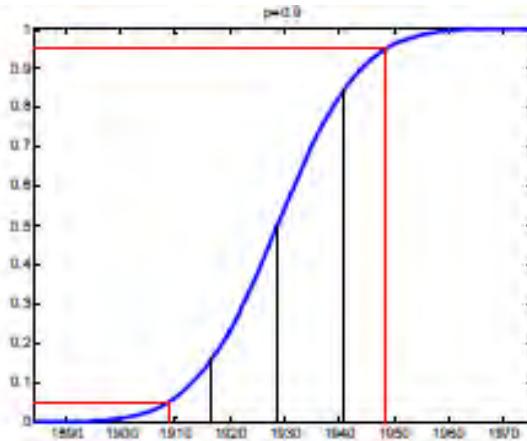
4. + 5. Dopo aver ordinato i valori di R_2 in modo non decrescente si costruisce la F_R avente in ascissa i valori di R_2 ed in ordinata l'indice normalizzato,



6. Si passa al calcolo della media e della deviazione standard di R_2 :

$$\bar{R}_2 = 1928.7\Omega \quad \sigma(R_2) = 12.2\Omega$$

7. Infine si calcola l'intervallo di copertura $[R_{2,\min}, R_{2,\max}]$, correlato ad una probabilità di copertura p , come il più piccolo intervallo $[R_{2,\min}, R_{2,\max}]$ per cui $F_R(R_{2,\max}) - F(R_{2,\min}) = p$



Si fissi perciò una confidenza:

$$100\% \Rightarrow [R_{2,\min}, R_{2,\max}]$$

Più realisticamente:

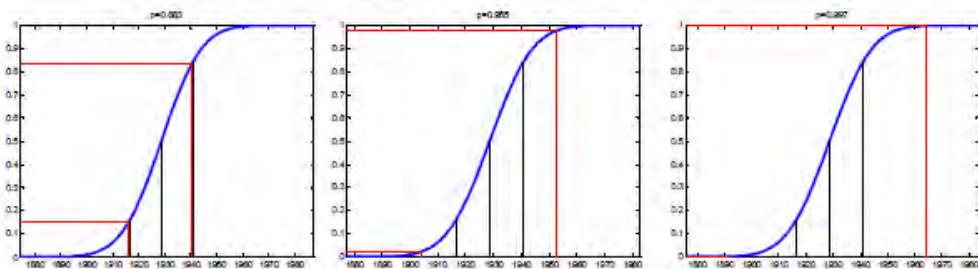
$$90\% \Rightarrow 0.9$$

Si scandagliano con questo valore tutti gli intervalli possibili alla ricerca della media

$$[0; 0.9] \rightarrow [1945; 1870] \quad [0.001; 0.91] \rightarrow [1902; 1949] \quad [0.1; 1] \rightarrow [1985; 1918]$$

Dove varia il ΔR ? Dove sarà maggiore o minore? Sarà massimo agli estremi e minimo nella zona centrale, in questo modo si prende l'intervallo minimo calcolato, nell'area così sottesa si identificherà una probabilità pari al 90%.

Tale curva ad S è bene notare che cresce rapidamente nella zona centrale, è dunque lì che si aspetterà la media, inoltre tale curva è ad S se le distribuzioni di partenza sono tutte gaussiane, come cominciano ad essere tutte rettangolari, si linearizza dal valore minimo al valore massimo.



Esprimere l'incertezza

Per esprimere l'incertezza bisogna:

- Descrivere chiaramente il metodo usato per calcolare il risultato della misura e l'incertezza correlata (GUM 7.1.4 a);
- Riportare una lista contenente tutte le componenti dell'incertezza e come esse sono state calcolate (GUM 7.1.4 b)
- Nel caso di incertezza estesa $U(Y) = ku_c(Y)$ bisogna (GUM 7.2.3):
 - Fornire una descrizione esaustiva di come il parametro x è definito;
 - Riportare il risultato della misurazione come $Y = \bar{Y} \pm U$ fornendo l'unità di misura;
 - Fornire l'incertezza estesa relativa pari a $\frac{U}{|\bar{Y}|}$;
 - Riportare il valore di k ;
 - Fornire il livello di confidenza approssimato associato con l'intervallo $\pm U$ e come è stato calcolato;
- Se si misurano due grandezze contemporaneamente, oltre alla misura e alle incertezze relative ad ogni parametro, bisogna fornire la covarianza ed il coefficiente di correlazione (GUM 7.2.5)

Taratura

Come si associa l'incertezza alla taratura?

La taratura è quell'insieme di operazioni che stabiliscono, sotto condizioni specificate, la relazione tra i valori indicati da uno strumento - o da un sistema per misurazione - o i valori rappresentati da un campione materiale, ed i corrispondenti valori noti di un misurando [V.I.M., 6.13], per cui **Tarare uno strumento** significa stabilire una relazione tra le indicazioni fornite dallo strumento ed i valori di un misurando precedentemente determinati con altri metodi di misura, **Tarare un campione materiale** significa stabilire invece la relazione che intercorre tra il valore nominale del campione e il valore di un misurando precedentemente misurato con altri metodi.

$$y = F(x)$$



La relazione $F(X)$ rappresenta la modellizzazione del comportamento dello strumento di misura, questa è nota che possa essere espressa tramite un polinomio troncato al primo ordine evidenziando così un comportamento lineare tra ingresso e uscita tramite la retta di regressione.

$$y = F(x) = a + bx$$

In un misurazione l'incertezza da associare alla misura è legata anche alle incertezze dovute a:

- Caratteristiche metrologiche della strumentazione nella catena di misura;
- Effetto delle grandezze di influenza sulla strumentazione;
- Metodo di misurazione o prova;
- Qualificazione del personale;

Nel processo di taratura l'incertezza da associare allo strumento in taratura è legata anche alle incertezze dovute a:

- Strumento tarante;

I valori dello strumento tarato sono calcolati attraverso uno strumento che possiede intrinsecamente una sua incertezza, come nell'esempio che era stato fatto ad inizio corso della massa campione che propagava la sua incertezza.

Ogni strumento tarato ingloba l'incertezza dello strumento tarante, a catena.

- Caratteristiche metrologiche della strumentazione nella catena di taratura;
- Grandezze d'influenza;
- Processo di taratura;
- Effetto delle grandezze di influenza sullo strumento in taratura, sullo strumento tarante, su ogni elemento del setup di taratura;
- Qualificazione del personale;

Ogni componente della catena di misura possiede una sua incertezza.

L'incertezza legata all'operazione di taratura viene calcolata conoscendo

- **L'incertezza del misurando** u_m , legata all'imperfetta realizzazione o definizione del misurando;
- **l'incertezza della strumentazione** u_{st} , legata ad ogni elemento appartenente alla catena; di misura (lettura analogica, risoluzione, incertezza strumento tarante, ecc.)
- **l'incertezza del protocollo** u_p , legata ad approssimazioni del metodo di misura;
- **l'incertezza di interpolazione** u_{int} deriva dalla relazione funzionale che si è deciso di usare per collegare ingresso e uscita, è legata agli algoritmi matematici utilizzati in fase di taratura (retta di regressione, ecc.).

$$u_{int} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n M_i^2}{n-m}} \quad M_i = \left. \frac{y_{rif,i} - \hat{y}_i}{\frac{dy}{dx}} \right|_i$$

In cui n è il numero di punti di taratura, m è il numero di coefficienti del polinomio, dei vincoli che si applicano e dx/sy è la derivata calcolata nel punto i-esimo.

Per una regressione lineare i punti \hat{y} sono i valori che assume la retta in quei punti, sono i valori stimati (dalla retta), perciò la differenza $(y_{rif,i} - \hat{y}_i)$ altro non è che la distanza verticale tra il punto sperimentale e lo stesso punto stimato dalla retta.

La differenza $(n-m)$ invece indica nient'altro che i gradi di libertà del sistema.

Per una relazione lineare si arriva così a:

$$u_{int} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_{rif,i} - \hat{y}_i)^2}{b(n-2)}}$$

L'incertezza è sul misurando e come si è appena visto può essere causata da molti fattori, ci si pone di identificare allora una sola incertezza, **incertezza combinata standard di taratura** u_t , che si calcola considerando tutte le i-esime cause di incertezza

$$u_t = \sqrt{\sum_i^k u_i^2} = \sqrt{u_m^2 + u_{st}^2 + u_p^2 + u_{int}^2 + \dots + u_i^2}$$

Le incertezze standard coincidono con le σ/N se le singole incertezze possono essere considerate tutte distribuite intorno alla media secondo una gaussiana.

L'incertezza estesa U_{BMC} (*Best Measurement Capability*) si calcola attraverso il fattore di confidenza k ad un valore definito di confidenza.

Se non sono rispettate le ipotesi del teorema del limite centrale si applica il fattore k legato ai valori ricavati dalla distribuzione t .

Taratura di un multimetro

Nell'esempio di taratura numerale da parte di Accredia, si vede come l'incertezza finale sia largamente governata dal fattore maggiormente preponderante

S9.10 Bilancio delle incertezze (E_x):

Grandezza X_i	Stima x_i	Incetezza tipo $u(x_i)$	Distrib. di probabilità	Coeffic. di sensibilità c_i	Contributo d'incertezza $u_i(y)$
V_X	100,1 V	-	normale	-	-
V_S	100,0 V	0,001 V		- 1,0	- 0,001 V
δV_X	0,0 V	0,029 V	rettangolare	1,0	0,029 V
δV_S	0,0 V	0,0064 V	rettangolare	- 1,0	- 0,0064 V
E_X	0,1 V				0,030 V

Taratura di un calibro

Nell'esempio di taratura di un calibro a nonio con blocchetti pian paralleli, si considererà anche l'incertezza dovuta alla variazione di temperatura $L\alpha\Delta T$ tra il calibro e il blocchetto e una correzione I_M dovuta ad effetti meccanici, come la forza di misura applicata, errori di piattezza e parallelismo e di chiusura.

È un chiaro esempio di come sia necessario considerare tutti gli elementi che fanno parte della catena di misura.

Anche in questo caso si evidenzia che l'incertezza dal valore maggiore governerà per larga parte l'incertezza finale.

S10.9 Bilancio delle incertezze (E_x):

Grandezza X_i	Stima x_i	Incetezza tipo $u(x_i)$	Distrib. di probabilità	Coeffic. di sensibilità c_i	Contributo d'incertezza $u_i(y)$
l_X	150,10 mm	-	-	-	-
l_S	150,00 mm	0,46 μm	rettangolare	- 1,0	- 0,46 μm
Δt	0	1,15 K	rettangolare	1,7 $\mu\text{m K}^{-1}$	2,0 μm
δl_X	0	15 μm	rettangolare	1,0	15 μm
δl_M	0	29 μm	rettangolare	1,0	29 μm
E_X	0,10 mm				33 μm

I servizi di taratura in Italia prima del 2010 venivano svolti dal SIT, Servizio di Taratura. Dal 2010 il servizio di taratura e di accreditamento viene svolto unicamente da ACCREDIA.

ACCREDIA è l'Ente unico nazionale di accreditamento designato dal Governo italiano, opera sotto la vigilanza del Ministero dello sviluppo economico ed è l'unico ente riconosciuto in Italia ad attestare che gli organismi di certificazione ed ispezione, i laboratori di prova e quelli di taratura abbiano le competenze per valutare la conformità dei prodotti, dei processi e dei sistemi agli standard di riferimento.

Ogni Paese europeo ha il suo Ente di accreditamento. L'Ente Nazionale è responsabile per l'accreditamento in conformità agli standard internazionali

della serie ISO 17000 e alle guide e alla serie armonizzata delle norme europee EN 45000. Tutti gli Enti operano senza fini di lucro.

Le attività dell’Ente si articolano in quattro Dipartimenti: Certificazione ed ispezione, Laboratori di prova, laboratori di prova per la sicurezza degli alimenti, laboratori di taratura.

Ogni centro Accredia fornisce dei servizi e le massime incertezze raggiungibile dalle loro strumentazioni di taratura.

Grandezza	Strumento in taratura	Campo di misura	Incertezza (*)	Note
Velocità (1)	Misuratori di velocità autoveicoli	da 30 km/h a 190 km/h	0,28 km/h	

(*) L’incertezza di misura è espressa al livello di fiducia del 95%.

NB: Notare come il campo di misura COINCIDA col campo di taratura, d’altro canto il campo di misura identifica il campo di utilizzo dello strumento, quindi quando si tara uno strumento si definisce automaticamente il suo campo di misura.

Riferibilità

Proprietà del risultato di una misurazione consistente nel poterlo riferire a campioni appropriati, generalmente nazionali o internazionali, attraverso una catena ininterrotta di confronti [V.I.M., 6.12].

Proprietà che un dispositivo per misurazione e/o regolazione acquisisce quando viene sottoposto a taratura impiegando misurandi le cui misure sono state assegnate con riferimento a campioni riconosciuti come primari in un determinato contesto [UNI 4546, 7.1.1].

Adottando un campione unico a livello nazionale, tutti gli operatori che eseguono misure con riferibilità al campione adottato sono in grado di eseguire misure tra loro compatibili e confrontabili.

Se il campione ha però una sua incertezza, quello tarato attraverso il campione possiederà l’incertezza del campione, e così via con un meccanismo a cascata, il trasferimento della misura del campione internazionale al campione nazionale si ottiene con l’aggiunta di una incertezza: ogni trasferimento comporta una incertezza di ampiezza crescente.

Siccome allora ogni trasferimento o confronto si configura così come un’operazione di taratura ci si chiede, quanto la misura è riferibile a quella del campione? Si deve poter riferire il risultato di una misurazione a campioni noti attraverso una catena interrotta di confronti tra essi, in modo che mai e poi mai l’incertezza potrà essere minore di quella del campione di partenza, con cui si è definito il campione.

Documentazione: Certificato vs Rapporto

Certificato di taratura

Il Certificato di Taratura è emesso da un Centro accreditato da Accredia e le attività relative all’emissione del Certificato di Taratura sono svolte conformemente ai requisiti della norma UNI CEI EN ISO/IEC 17025:2005 ed ai regolamenti di Accredia.

Il garante che controlla periodicamente il Centro approvando le procedure di misura, curando il monitoraggio, ecc... è Accredia, per cui il cliente che abbina ad uno strumento di misura un Certificato di Taratura non ha alcun ulteriore necessità di dimostrare a terze parti che il servizio metrologico acquisito è stato svolto in conformità alla norma, scarica la copertura, la responsabilità legata alla taratura sul laboratorio Accredia.

Il Certificato garantisce inoltre la riferibilità dei risultati e la sua validità è garantita livello internazionale, è tuttavia economicamente e tempisticamente oneroso.

Rapporto di taratura

Il Rapporto di Taratura (RDT) (UNI EN ISO 10012:2004) è un documento rilasciato da centri di taratura attraverso il quale viene assicurata la riferibilità della misura ai campioni nazionali, senza l'accreditamento da parte degli organismi preposti.

I Rapporti di Taratura sono emessi dai laboratori di taratura secondo procedure redatte ed approvate internamente dagli esperti metrologici del laboratorio, per cui la validità tecnica del RDT deriva dalla qualifica del laboratorio, dalla competenza tecnica degli operatori e dalle procedure metrologiche utilizzate.

Al contrario del Certificato, il cliente che abbina ad uno strumento di misura un Rapporto di Taratura ha l'onere di dimostrare a terze parti che il servizio metrologico è stato svolto secondo la norma e di documentare i confronti tecnici in base ai quali è stata mantenuta la riferibilità dei risultati, è tuttavia più economico e per grandi produzioni si può considerare la realizzazione di un laboratorio Metrologico in loco così da non dover passare attraverso Accredia.

Un documento di taratura consiste in:

- Titolo del documento ad esempio: "Certificato di Taratura";
- Nome e indirizzo del Laboratorio Metrologico;
- Identificazione univoca del documento e di ogni sua pagina;
- Nome ed indirizzo di chi fa eseguire la taratura;
- Descrizione e identificazione dello strumento o campione in taratura:
 - Tipo di strumento;
 - Ditta costruttrice;
 - Numero di serie;
 - Versione del SW installato;
- Data di taratura dello strumento;
- Metodi o procedure o istruzioni seguite per la taratura;
- Dichiarazione di deviazioni dal metodo dichiarato per la taratura;
- Definizione del misurando e del suo stato;
- Risultati della taratura e note o osservazioni utili;
- Identificazione univoca dei campioni utilizzati per la taratura (riferibilità);
- Assegnazione dell'incertezza di misura;
- Identificazione del personale che ha eseguito la taratura;
- Dichiarazioni generali (per esempio la non riproducibilità del documento, se non autorizzata in modo formale).



Centro di Taratura LAT N° 147
Calibration Centre
Laboratorio Accreditato di Taratura



LABCERT snc di G. Blandino & C.
Via Giacomo 3 - 20090 S. Giuliano - Provincia di Italy
Tel.: 0434 - 554707 - Fax: 0434 - 362081
INTERNET: www.labcert.it - www.meteorologia-legale.it
e-mail: info@labcert.it

LAT N° 147
Membro degli Accordi di Mutuo
Riconoscimento
EA, IAF e ILAC

Signatory of EA, IAF and ILAC
Mutual Recognition Agreements

Pagina 1 di 3
Page 1 of 3

CERTIFICATO DI TARATURA LAT 147 N° xxxx
Certificate of Calibration

- Data di emissione 10/05/2012
- date of issue
- client
- customer
- destinatario ROSSI & BIANCHI
SS Adriatica
XXXXXXXXXXXXXX
addressee

- richiesta application
- in data date FAX
02/05/2012

Si riferisce a
referring to
- oggetto item
- costruttore manufacturer
- modello model
- matricola serial number
- data di ricevimento oggetto 10/05/2012
- tipo oggetto type of item
- data delle misure date of measurements
- registro di laboratorio laboratory reference

Il presente certificato di taratura è emesso in base
all'accreditamento LAT N° 147 rilasciato in accordo
ai decreti attuativi della legge n. 273/1991 che ha
istituito il Sistema Nazionale di Taratura (SNT).
ACCREDIA attesta le capacità di misura e di
taratura, le competenze meteorologiche del Centro e
la riferibilità delle tarature eseguite ai campioni
nazionali e internazionali delle unità di misura del
Sistema Internazionale di Unità di Misura (SI).

Questo certificato non può essere riprodotto in
modo parziale, salvo espresa autorizzazione
scritta da parte del Centro.

This certificate of calibration is issued in compliance with
the accreditation LAT N° 147 granted according to
decrees issued under Law No. 273/1991 which
has established the National Calibration System.
ACCREDIA attests the calibration and measurement
capacities, the meteorological competencies of the Centre and
the traceability of calibrations results to the national and
international standards of the International System of Units
(SI).

This certificate may not be partially reproduced, except
with the prior written permission of the issuing Centre.

CERTIFICATO DI TARATURA LAT 147 N° xxxxxxxx
Certificate of Calibration

Pagina 3 di 3
Page 3 of 3

TABELLA DEI RISULTATI

1	2	3	4
Valore Nominale	Marchio	Massa convenzionale	Incertezza di misura
10 mg		0,0100066 g	0,0024 mg
20 mg		0,0199985 g	0,0027 mg
50 mg		0,0499832 g	0,0030 mg
100 mg		0,0999512 g	0,0034 mg
100 mg	*	0,0999767 g	0,0034 mg
200 mg		0,1999552 g	0,0043 mg
1 g	*	1,0000133 g	0,0064 mg
1 g	**	0,9999763 g	0,0064 mg
1 g	***	1,0000113 g	0,0064 mg
2 g		1,9999504 g	0,0085 mg
5 g		5,0000940 g	0,0112 mg
10 g		10,0001109 g	0,0153 mg
10 g	*	10,0000419 g	0,0153 mg
20 g		20,0000935 g	0,0195 mg
50 g		50,000055 g	0,030 mg
100 g		99,999838 g	0,098 mg

Fine del certificato

L'Operatore:

Il Responsabile del Centro:

IDENTIFICAZIONE delle procedure e dei campioni di prima linea:

I risultati di misure riportati nel presente Certificato sono stati ottenuti applicando le procedure N° PL 16 02 r02	PL 16 02 r02
The measurement results reported in this Certificate were obtained following procedures N° LM 0101	LM 0101
Le campioni di riferibilità hanno risalito dai campioni di prima linea N° G1-253	G1-253
Tracability is through first line standards N° DKD-K-11801 - 06.10.11	DKD-K-11801 - 06.10.11

CONDIZIONI AMBIENTALI:

La taratura è stata effettuata nelle seguenti condizioni:	Inizio	Fine
Temperatura ambiente °C	20,1	20,3
Umidità relativa %	49,2	49,2
Pressione atmosferica hPa	1006,6	1006,6

Per la densità media sono stati assunti i seguenti valori:

Massa	Densità	Materiale
10 mg - 20 mg	2700 kg/m³	Alluminio
50 mg - 500 mg	8600 kg/m³	Alpacca
1 g - 100 g	8400 kg/m³	Ottone cromato

MISURAZIONI:

I misuranti identificati a pag.1 sono stati confrontati con i campioni del centro ivi specificati per mezzo della procedura indicata.

La massa convenzionale del peso in esame è stata determinata attraverso confronto con campioni di riferimento, riconducibili al campione nazionale o internazionale.

RIFERIBILITÀ:

La riferibilità al Kilogrammo Prototipo Internazionale dei campioni di riferimento del Centro di Taratura della Labcert è garantita dalla periodica taratura dei campioni medesimi presso Istituti (nazionali o internazionali) firmatarie degli accordi multilaterali dell'EA e dell'ILAC che garantiscono la riferibilità ai campioni primari nazionali o internazionali.

RISULTATI:

I risultati delle misurazioni sono riportati nella tabella allegata: essi sono valori convenzionali di massa secondo le prescrizioni della Raccomandazione Internazionale OIML R111.

La colonna 4 riporta il valore convenzionale misurato.

La colonna 4 l'incertezza estesa ottenuta moltiplicando l'incertezza tipo per il fattore di copertura k corrispondente ad un livello di fiducia di circa il 95%. Normalmente tale fattore k vale 2.

DICHIARAZIONE DI CONFORMITÀ:

Le masse oggetto della taratura sono state tarate in conformità alla Raccomandazione Internazionale OIML R111-2004, Cap.5 punto 5.1, 5.2, 5.3.

NOTE

Indice

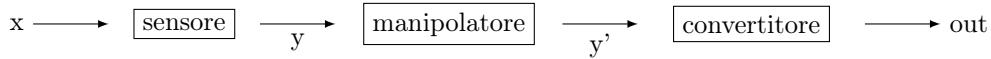
I 5.AMPLIFICATORI OPERAZIONALI	2
Introduzione	2
Circuito aperto	4
Circuito chiuso	5
Circuito Chiuso Invertente	6
Circuito Chiuso invertente sommatore	7
Circuito Chiuso invertente integratore	8
Circuito Chiuso invertente derivatore	11
Circuiti Convertitori	13
Tensione-Corrente	13
Corrente-Tensione	13
Circuito Chiuso non Invertente	14
Circuito Buffer o Disaccoppiatore	14
Circuito Sommatore Non Invertente	15
Circuito Sottrattore Non Invertente	16
Amplificatore per Strumentazione	16
Amplificatori Reali	17
Esercizio d'esame	18
Filtri Attivi	19
Filtri Attivo Passa Basso	19
Filtri Attivo Passa Alto	22
Filtri Attivo Passa Banda	24
Filtri Attivo a Reiezione di Banda o Filtro Notch	25

Parte I

5. AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

Introduzione

Gli amplificatori operazionali sono blocchi di misura che si aggiungono al sensore già noto e prendono il nome di manipolatori di segnale, a questi potrà poi seguire un convertitore analogico/digitale a cui seguirà la visualizzazione del segnale tramite PC, USB ...

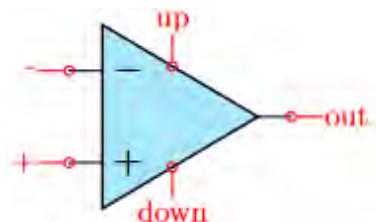


Il blocco di manipolazione del segnale ne permette:

- L'amplificazione;
- Il filtraggio;
- L'integrazione o la derivazione;
- La somma o sottrazione di segnali provenienti da più sensori ;

Quali sono i circuiti elettronici che permetto Queste operazioni? Per eseguirle si necessita di un componente elettronico detto Amplificatore Operazionale, di cui in questa trattazione verrà fornita una spiegazione da utilizzatore.

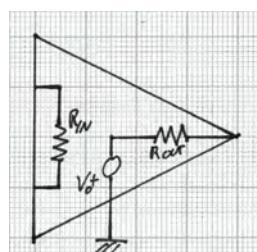
L'amplificatore operazionale è un elemento attivo, per cui per funzionare ha bisogno di corrente, solitamente lavora ad una tensione di alimentazione di $\pm 15V$



È perciò caratterizzato da un morsetto negativo chiamato *ingresso invertente*, uno positivo chiamato *ingresso non invertente*, e uno di uscita; oltre a due morsetti di alimentazione. Il morsetto invertente produrrà in uscita un segnale di segno opposto al segnale in ingresso mentre quello non invertente produrrà un segnale nello stesso segno di quello di ingresso, la tensione in uscita è tale che:

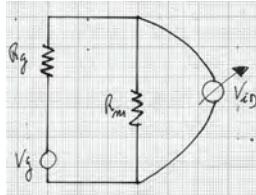
$$V_{out} = A(V_+ - V_-)$$

In cui $A = 10^6 \div 10^9$ è il guadagno; $R_{in} = (10^6 \div 10^9)\Omega$; $R_{out} = (10 \div 100)\Omega$. Si ricordi poi come essendo la misura di V una differenza, la V_{out} , l'uscita andrà riferita a terra, al ground.



Cos'era l'errore di inserzione? Ricordi il termometro nella tazzina? La misurazione, lo strumento di misurazione interferisce col misurando, questo errore è ovviamente present anche nelle misure di tensione.

Ad esempio si voglia misurare la tensione V_g ai capi di questo circuito, in cui R_g è la resistenza interna del sensore. Un multmetro ideale misurererebbe $V_{ID} = V_g$.



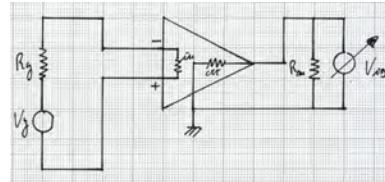
In realtà il multmetro possiede una sua resistenza interna R_m , sulla quale scorrerà corrente e porterà errore di inserzione.

$$\begin{cases} V_{Real} = IR_m \\ V_g = I(R_g + R_m) \end{cases} \Rightarrow V_R = \frac{R_m}{R_g + R_m} V_g$$

Per cui, senza eseguire passaggi già fatti precedentemente:

$$\varepsilon_{ins} = \frac{V_{ID} - V_R}{V_R} = \frac{R_g}{R_m} \Rightarrow \varepsilon_{ins} \rightarrow 0 \text{ se } \begin{cases} R_g \rightarrow 0 \\ R_m \rightarrow \infty \end{cases}$$

Magari lo strumento presenta sia un R_g molto alto che un R_m molto basso, come lo si può minimizzare? Inserendo un amplificatore operazionale.



A prima vista potrebbe sembrare di star peggiorando la situazione perché si stanno inserendo due errori di inserzione, un in ingresso all'amplificatore ed uno in uscita:

$$\varepsilon_{ins} = \frac{\text{Resistenza da dove viene il segnale}}{\text{Resistenza che vede il segnale}} \quad \varepsilon_{ins,in} = \frac{R_g}{R_{in}} \quad \varepsilon_{ins,out} = \frac{R_{out}}{R_m}$$

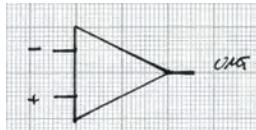
Poiché si è detto che $R_{in} \rightarrow 10^9$ e che $R_{out} \rightarrow 10$, entrambi gli errori risultano trascurabili: si è notevolmente abbattuto l'errore di inserzione.

In questo caso l'amplificatore operazionale si chiama disaccoppiatore di segnale, disaccoppia il segnale ma va a diminuire l'errore di inserzione.

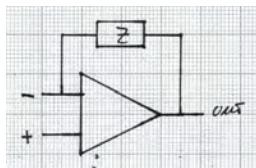
Ci sono poi altri due utilizzi dell'amplificatore operazionale, in **Circuito aperto** o in **Circuito chiuso**.

il **circuito aperto** collega due segnali ed identifica un'uscita:

$$V_{out} = A(V_+ - V_-)$$



Il **circuito chiuso** o ramo di feedback collega due segnali e si ricollega attraverso un banco di impedenze al ramo negativo.

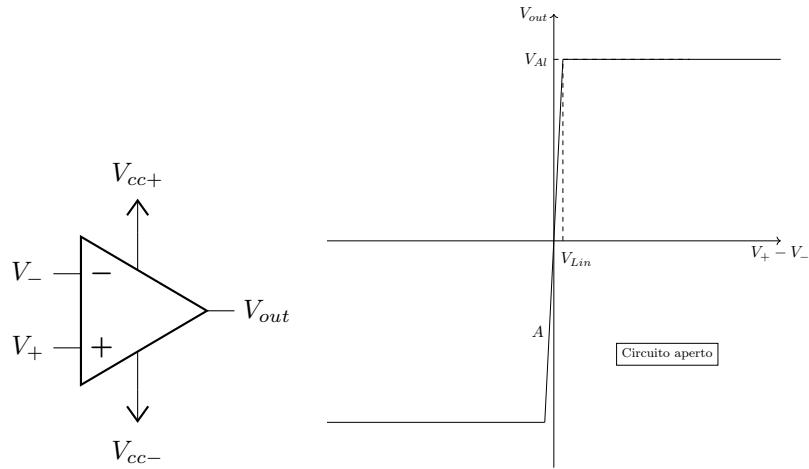


Circuito aperto

Per un amplificatore a circuito aperto si può scrivere

$$V_{out} = A(V_+ - V_-)$$

In questo tipo di amplificatori il guadagno può raggiungere valori dell'ordine di $A = 10^6$, poiché il guadagno indica la pendenza della caratteristica ingresso - uscita, più il guadagno cresce più la retta diviene pendente, ciò significa avere una zona di linearità estremamente ridotta.



Infatti per un circuito aperto varrebbe

$$\Delta V_{Lin} = \frac{V_{cc}}{A} = 15 \mu V$$

Ciò significa che non appena la differenza di tensione in ingresso è di pochissimo superiore allo zero, il segnale satura alla tensione di alimentazione: è per questo che il circuito aperto non può essere usato come amplificatore (tuttalpiù come comparatore), proprio a causa del suo elevatissimo guadagno che limita fortemente la sua zona di linearità.

$$\begin{cases} V_+ > V_- \Rightarrow V_{out} = +15V \\ V_+ < V_- \Rightarrow V_{out} = -15V \end{cases}$$

Notare come non si sta affatto amplificando il segnale, il segnale che si vorrebbe amplificato è quello tratteggiato: si dice quindi che in questo caso l'amplificatore operazionale sta lavorando come un comparatore. Compara due segnali, quando è collegato si saprà quando $V_+ > V_-$ e $V_+ < V_-$.

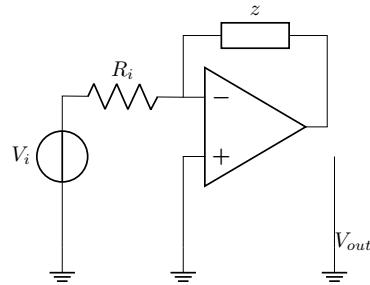
Circuito chiuso

Al fine perciò di realizzare un amplificatore che permetta la corretta visualizzazione del segnale amplificato si decide di chiudere il circuito e applicare una retroazione: il segnale in uscita viene riportato all'ingresso mediante un ramo di feedback costituito da elementi passivi, che sebbene comporti un abbassamento del guadagno, permette di avere una zona di linearità maggiore, pur non eliminando del tutto il problema della saturazione.

Il circuito chiuso si suddivide a sua volta in due configurazioni.

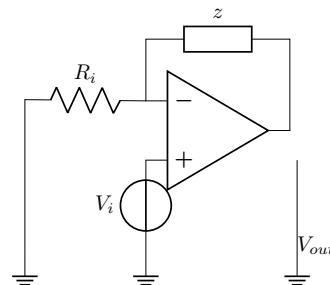
- **Invertente**

Il segnale da misurare è collegato al morsetto invertente.



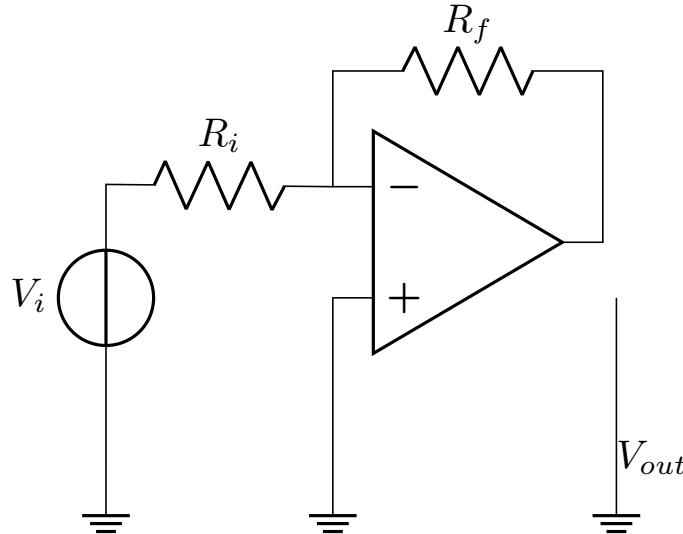
- **Non invertente**

Il segnale da misurare è collegato al morsetto non invertente.



Circuito Chiuso Invertente

Sul ramo di feedback è posta una resistenza R_f .



Principio di massa virtuale, di Virtual Ground: in prima approssimazione

$$V_+ = V_-$$

. Considerazioni:

$$1. R_{in} \uparrow \Rightarrow \begin{cases} I \downarrow \approx 0 \\ \Delta V \downarrow \approx 0 \end{cases} \Rightarrow V_+ \approx V_-$$

2. Dato che il segnale NON satura, si vede segnale in uscita, dalla relazione $V_{out} = A(V_+ - V_-)$ se $A \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta V \rightarrow 0$ e dunque $V_+ \approx V_-$

Ora, nel circuito chiuso invertente $V_+ = 0$ perché è collegato a terra, applicando quindi il principio di massa virtuale si conclude che:

$$V_- = V_+ = 0$$

E quei morsetti collassano in un nodo, perciò essendo:

$$I^* = \frac{V_i - V_-}{R_i} \quad I^{**} = \frac{V_- - V_{out}}{R_f}$$

Poiché la corrente sul circuito è la stessa, questi due contributi devono essere uguali, si ricava così:

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_i} V_i$$

In cui $\frac{R_f}{R_i}$ rappresenta il guadagno: si sta amplificando il segnale e lo si sta cambiando di segno, d'altro canto è invertente.

Come amplificare di 5 volte il segnale? Il guadagno dev'essere pari a 5, si scelgono così $R_i = 1k\Omega$ e $R_f = 5k\Omega$.

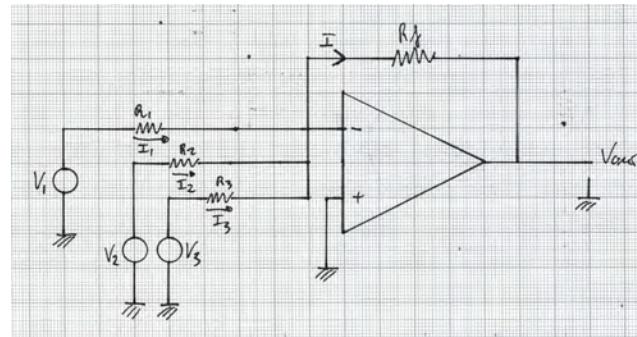
Si ricordi poi che raggiunta la tensione di alimentazione l'amplificatore andrà in saturazione.

Disegno grafico fatto bene

NB: Alcune volte amplifica, anche volte non legge neanche il segnale, in dipendenza della tensione di alimentazione (CAPISCI PERCHÉ).

Si può anche deamplificare il segnale, sempre scegliendo opportune resistenze come $R_i = 2k\Omega$ e $R_f = 1k\Omega$.

Circuito Chiuso invertente sommatore



Sempre secondo il Principio di massa virtuale $V_- = V_+ = 0$.
Semplicemente si ha

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} = -\frac{V_{out}}{R_f}$$

Allora si ottiene:

$$V_{out} = -R_f \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right)$$

Come si ottiene la somma di tre segnali? Scegliendo $R_1 = R_2 = R_3 = R_f$, in questo modo:

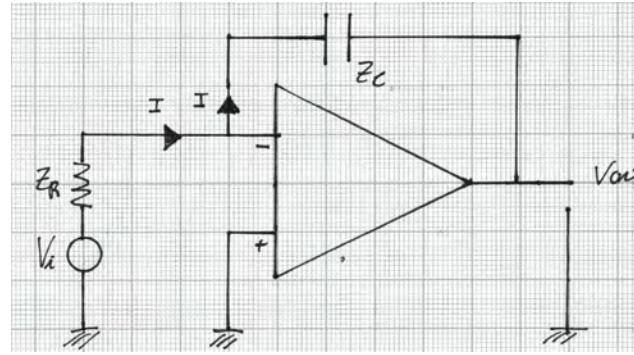
$$V_{out} = -R_f \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right) = -(V_1 + V_2 + V_3)$$

E per un **Circuito mediatore?**, in questo caso si sceglierà $R_1 = R_2 = R_3 = 3R_f$:

$$V_{out} = \frac{-(V_1 + V_2 + V_3)}{3}$$

Circuito Chiuso invertente integratore

Questo circuito integra un segnale.



Passando attraverso le impedenze: $Z_R = R_1; Z_C = 1/j\omega C$, ricordando la relazione che lega ingresso uscita di un amplificatore si ha:

$$\frac{V_i}{R_i} = I = -V_{\frac{out}{Z_C}} \Rightarrow V_{out} = -\frac{Z_C}{R_i} V_i = -\frac{1}{j\omega R_i C} V_i$$

Esprimendo la tensione di entrata in termini fasoriali questa è:

$$V_i = V_0 e^{j\omega t}$$

L'integrale di questa tensione in ingresso è pari a:

$$\begin{aligned} \int V_i dt &= \frac{V_0}{j\omega} e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} V_i \\ \int V_i dt &= \frac{1}{j\omega} V_i \\ V_i &= j\omega \int V_i dt \end{aligned}$$

Per cui:

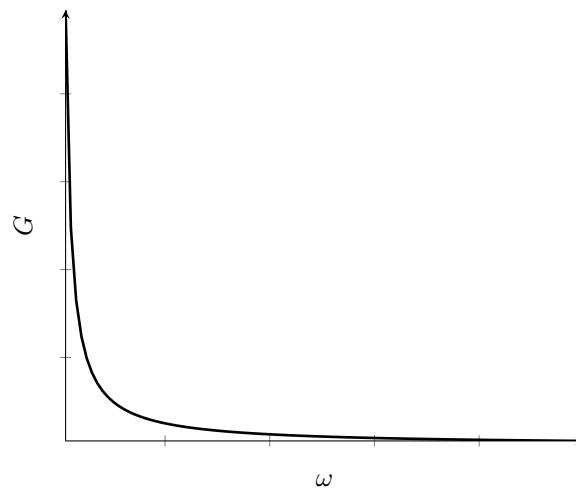
$$\begin{aligned} V_{out} &= -\frac{1}{j\omega R_i C} j\omega \int V_i dt = -\frac{1}{R_i C} \int V_i dt \\ V_{out} &= -\frac{1}{R_i C} \int V_i dt \end{aligned}$$

Si ottiene così in uscita un segnale integrato.

Il guadagno dell'uscita rispetto all'ingresso è:

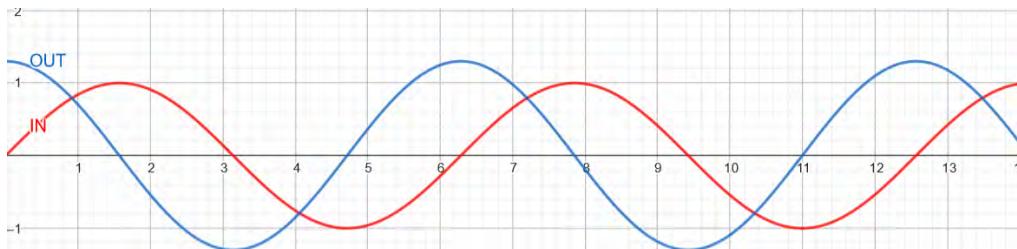
$$G = \left| \frac{V_{out}}{V_i} \right| = \frac{1}{\omega R_i C}$$

Che evidenzia un andamento teorico del genere



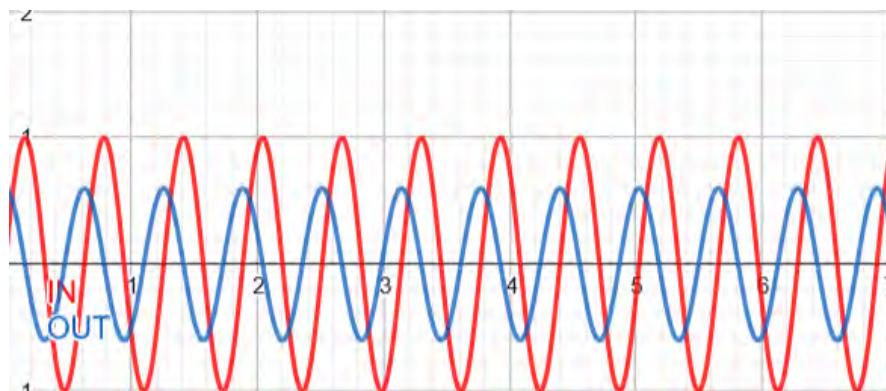
Ricordando sempre che al massimo l'amplificatore raggiunge la tensione di alimentazione, non ottiene mai quel guadagno teorico per le frequenze che tendono a zero.

Quindi cos'è che si ottiene dal circuito invertente integratore? Ad esempio se in ingresso si ha una funzione sinusoidale, questa verrà integrata fornendo in uscita una funzione cosinusoidale leggermente amplificata magari, cambiata di segno, sia ad esempio $IN = \sin(x) \Rightarrow OUT = -1.3(-\cos(x))$.



E se l'ingresso ha un'elevata frequenza? Sia ad esempio $IN = \sin(10x) \Rightarrow OUT = -0.6(-\cos(10x))$.

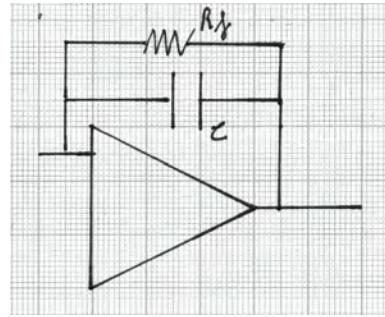
Guardando il grafico del guadagno, questo per frequenze elevate fornisce valori minori, significa che in uscita il segnale avrà ampiezze minori, sarà più piccolo.



E per frequenze minori? Sia ad esempio $IN = \sin(0.3x) \Rightarrow OUT = \text{sgn}(-10(-\cos(0.3x)))$. Guardando il grafico del guadagno, si vede che per frequenze minori il segnale in uscita avrebbe ampiezza infinita, ma ricordando che al massimo si potrà avere la frequenza di alimentazione l'integratore va in saturazione e si ottiene in uscita un'onda quadra.



Per evitare la saturazione si aggiunge un resistore in parallelo al ramo di feedback.



In questo modo:

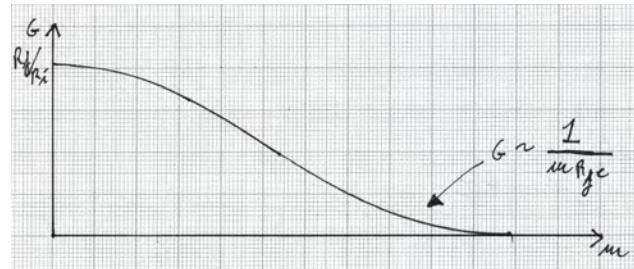
$$V_{out} = -\frac{Z_{\parallel}}{Z_{R_i}} V_i = -\frac{Z_{R_f} Z_C}{(Z_{R_f} + Z_C) Z_{R_i}} V_i$$

$$V_{out} = -\frac{R_f}{(j\omega R_f C + 1) R_i} V_i$$

Si proceda a razionalizzare per trovare il guadagno:

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1 - j\omega R_f C}{1 + (\omega R_f C)^2} V_i \Rightarrow G = \frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1 + (\omega R_f C)^2} \sqrt{1 + (\omega R_f C)^2} \Rightarrow$$

$$G = \frac{R_f}{R_i} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_f C)^2}}$$

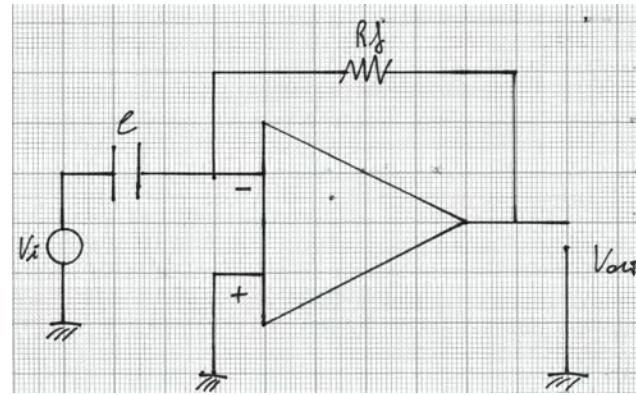


Per $\omega \rightarrow \infty$ $G \approx \frac{1}{\omega R_f C}$ per cui continua ad integrare.

Si ricordi poi da elettrotecnica che per $\omega \uparrow$ il condensatore si comporta come un circuito aperto, mentre per $\omega \downarrow$ il condensatore si comporta come un circuito chiuso, un corto circuito che fa passare tutto il segnale, saturando. In questo caso l'integratore, non saturando, a basse frequenze come un classico amplificatore invertente.

Ad esempio l'integratore potrà essere utilizzato per stabilire l'entità del segnale costante, infatti, per un andamento in ingresso dato da un'onda quadra, si sceglie di integrare un segnale esponenziale, in questo modo diminuendo la frequenza dell'onda quadra gli esponenziali vengono via via tagliati fino ad ottenere una linea, ovvero l'integrale del segnale costante desiderato, il segnale uscente diviene così a dente di sega.

Circuito Chiuso invertente derivatore



$$V_{out} = -\frac{Z_{R_f}}{Z_C} V_i = -j\omega R_f C V_i$$

È questo segnale la derivata del segnale in ingresso?

$$\begin{aligned} V_i &= V_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{dV_i}{dt} = j\omega V_0 e^{j\omega t} = j\omega V_i \Rightarrow V_i = \frac{dV_i}{dt} \frac{1}{j\omega} \\ V_{out} &= -j\omega R_f C V_i = -j\omega R_f C \frac{dV_i}{dt} \frac{1}{j\omega} = -R_f C \frac{dV_i}{dt} \\ V_{out} &= -R_f C \frac{dV_i}{dt} \end{aligned}$$

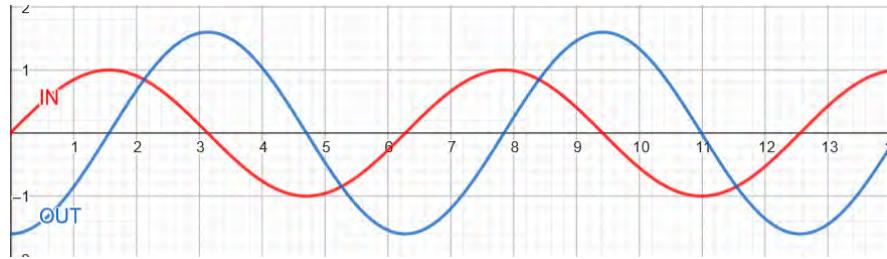
Il Guadagno del circuito integratore è:

$$G = \left| \frac{V_{out}}{V_i} \right| = \omega R_f C$$

L'andamento è lineare tutt'alpiù fino al valore di saturazione.

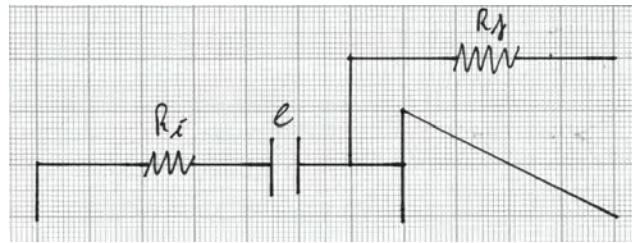


Il segnale che si vedrà in uscita sarà derivato, invertito e amplificato. Sia ad esempio $IN = \sin(x) \Rightarrow OUT = -\cos(x)$.



In questo caso osservando il grafico del guadagno, aumentando la frequenza l'uscita sarà più amplificata.

Come si evita in questo caso la saturazione? Con una resistenza in serie al condensatore.



Per cui se $\omega \uparrow$ il condensatore si comporta come un cortocircuito.

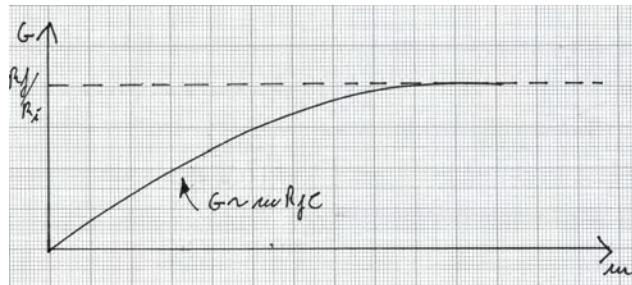
$$V_{out} = -\frac{Z_{R_f}}{Z_{R_i} + Z_C} = -\frac{R_f}{R_i + \frac{1}{j\omega C}} V_i = -\frac{j\omega R_f C}{1 + j\omega R_i C} V_i$$

Razionalizzando ottengo:

$$V_{out} = -\frac{j\omega R_f C}{1 + (\omega R_i C)^2} (1 - j\omega R_i C) V_i = \frac{\omega R_f C}{1 + (\omega R_i C)^2} [-j - \omega R_i C] V_i$$

Il guadagno sarà analogamente pari a:

$$G = \frac{\omega R_f C}{\sqrt{1 + (\omega R_i C)^2}}$$

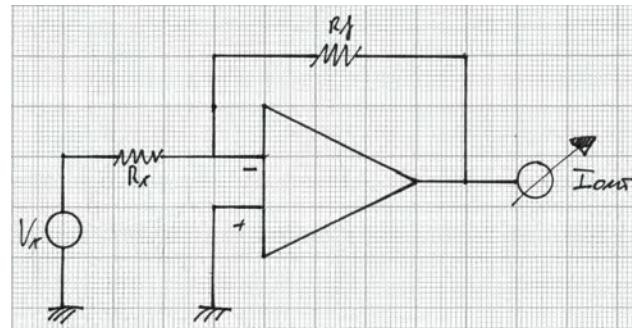


Per cui per $\omega \rightarrow \infty$ $G \rightarrow \frac{R_f}{R_i}$ e per $\omega \downarrow$ $G \approx \omega R_f C$.

Circuiti Convertitori

Tensione-Corrente

Questo tipo di circuito viene utilizzato quando si vuole avere una corrente in uscita corrispondente numericamente ad un valore di tensione di ingresso, a parte un fattore 1000, questo applicato alla corrente per non bruciare le resistenze.

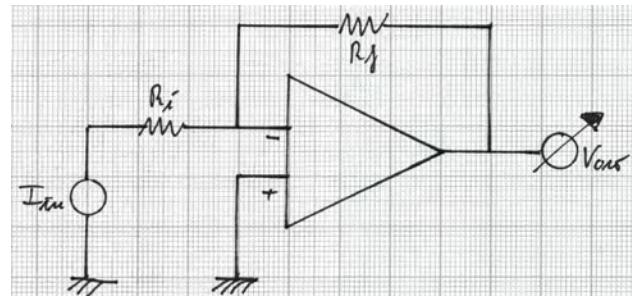


$$I_{out} = \frac{V_i}{R_f}$$

Ad esempio se si vuole misurare una corrente a partire da un ingresso di 5V si sceglierà una $R_f = 1k\Omega$ per ottenere una corrente in uscita pari a $I_{out} = 5mA$.

Corrente-Tensione

Equivalentemente si avrà, se in uscita si vuole misurare una tensione a partire da un ingresso in corrente.

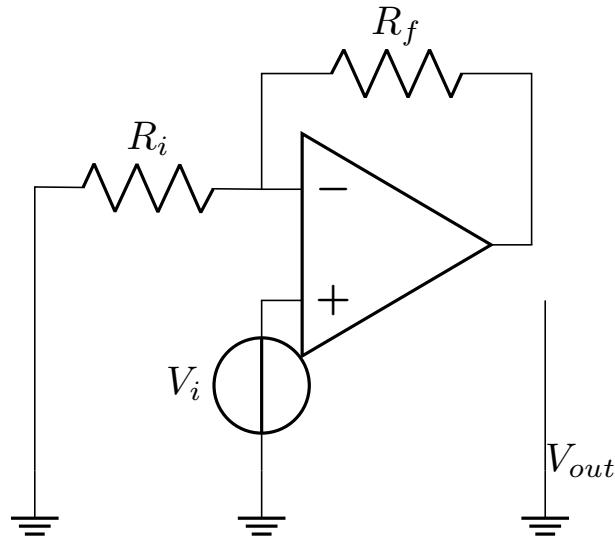


$$I_{in} = -\frac{V_{out}}{R_f} \Rightarrow V_{out} = -R_f I_{in}$$

Ad esempio se si vuole misurare una tensione a partire da un ingresso di 3mA si sceglierà una $R_f = 1k\Omega$ per ottenere una tensione in uscita pari a $V_{out} = 3V$.

Circuito Chiuso non Invertente

Usato per ottenere in uscita un segnale dello stesso segno di quello in entrata.



L'ipotesi di partenza è quella per cui si considera sempre valido il principio di massa virtuale:

$$V_+ = V_i = V_-$$

Ottenendo:

$$\frac{0 - V_i}{R_i} = \frac{V_i - V_{out}}{R_f} \Rightarrow V_{out} = V_i \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right)$$

Come volevasi dimostrare, si ottiene un segnale dello stesso segno di quello in ingresso.

Il guadagno è pari a:

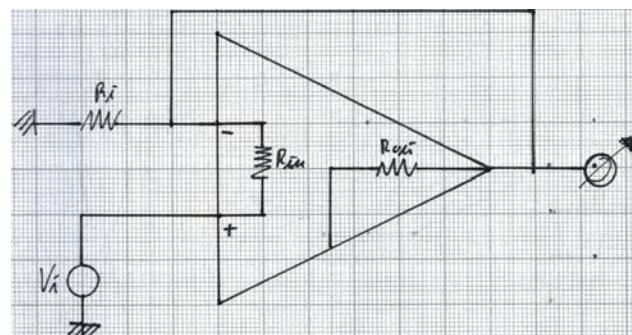
$$G = 1 + \frac{R_f}{R_i}$$

Sempre positivo.

Per cui se con la configurazione invertente si può anche deamplificare il segnale, in questo caso, non si può, perché anche se $R_f = R_i = 0$ il guadagno è sempre unitario, che ottiene o per $R_i \uparrow$ o per $R_f \uparrow 0$.

Circuito Buffer o Disaccoppiatore

Configurazione non invertente in cui $R_f = 0 \Rightarrow V_{out} = V_i$ usato per minimizzare l'errore di inserzione, per evitare che la fonte del segnale sia influenzata da qualsiasi corrente o tensione.



Con un attacco diretto al multimetro di avrebbe:

$$\varepsilon_{ins} = \frac{R_{batteria}}{R_{multimetro}}$$

Interponendo un circuito buffer si avrebbe:

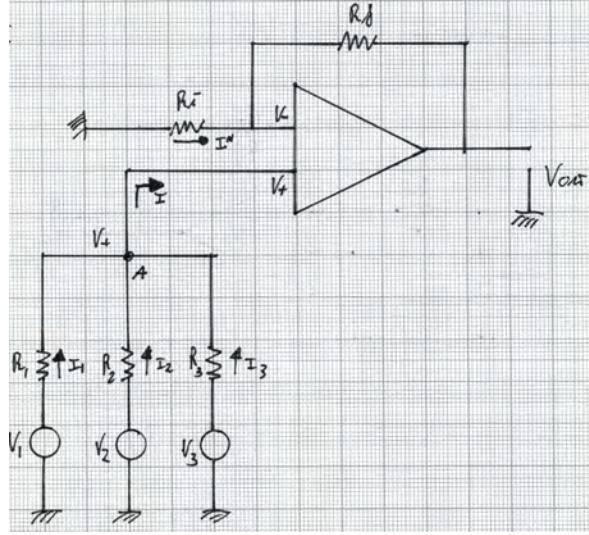
$$\varepsilon_1 = \frac{R_b}{R_{in}} \rightarrow 0 \quad \varepsilon_2 = \frac{R_{out}}{R_m} \rightarrow 0$$

In questo caso, con la misura di tensione di una batteria si vuole minimizzare l'errore di inserzione nella misura data da una $R_b \uparrow$ su cui scorre corrente per cui si potrebbe misurare un valore falsato, minore.

Circuito Sommatore Non Invertente

Come per la configurazione invertente, si vuole ottenere

$$V_{out} = \sum V_i = V_1 + V_2 + V_3$$



$$I^* = \frac{-V_+}{R_i} = \frac{V_+ - V_{out}}{R_i} \Rightarrow V_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) V_+$$

Sul nodo A:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= I \\ \frac{V_1 - V_+}{R_1} + \frac{V_2 - V_+}{R_2} + \frac{V_3 - V_+}{R_3} &= 0 \end{aligned}$$

Scegliendo $R_1 = R_2 = R_3 = R$ si ottiene:

$$V_+ = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$$

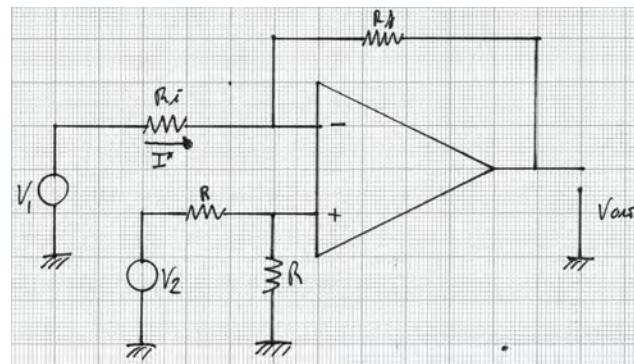
Per cui:

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$$

Per avere un sommatore vasta scegliere $R_f = 2R_i$, per avere invece un circuito mediatore, si sceglie $R_f = 0$, si realizza un buffer cortocircuitando il ramo di feedback.

Circuito Sottrattore Non Invertente

Dati due segnali in ingresso, in uscita se ne vuole misurare la differenza:
 $V_{out} = V_2 - V_1$.



La resistenza aggiuntiva a massa ha la funzione di partitore di tensione:

$$V_2 = I2R; V_+ = IR \Rightarrow V_+ = \frac{1}{2}V_2$$

Applicando la classica formula dell'amplificatore ottengono:

$$\begin{aligned} I* &= \frac{V_1 - V_+}{R_i} == \frac{V_+ - V_{out}}{R_f} \Rightarrow \frac{R_f}{R_i}V_1 - \frac{R_f}{R_i}V_+ = V_+ - V_{out} \\ V_{out} &= \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right)V_+ - \frac{R_f}{R_i}V_1 = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right)\frac{V_2}{2} - \frac{R_f}{R_i}V_1 \end{aligned}$$

Prendendo $R_f = R_i$ si ottiene:

$$V_{out} = V_2 - V_1$$

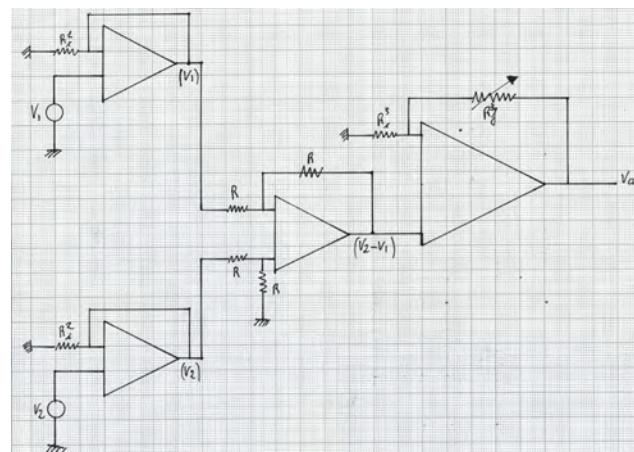
Amplificatore per Strumentazione

È usato per amplificare la differenza tra due segnali in ingresso con un guadagno variabile $G \nearrow$:

$$V_{out} = G \nearrow (V_2 - V_1)$$

Cosa deve fare un amplificatore per strumentazione?

1. Disaccoppiare i segnali in ingresso → Buffer
2. Sottrarre i segnali in ingresso → Sottrattore
3. Moltiplicare il segnale in uscita per un guadagno variabile ⇒ L'amplificazione de segnale dev'essere variabile.



In questo modo

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_{f3}}{R_{i3}}\right) (V_2 - V_1)$$

In cui R_{f3} non è nient'altro che un potenziometro.

Ad esempio se $R_{i3} = 10 \text{ k}\Omega$; $R_{f3} = (0 \div 10) \text{ k}\Omega$ si avrà quando $C \equiv A$

$$V_{out} = V_2 - V_1$$

E quando $C \equiv \max$

$$V_{out} = \left(1 + \frac{10k\Omega}{10k\Omega}\right) (V_2 - V_1) = 11(V_2 - V_1)$$

Amplificatori Reali

Si sono trattati finora solo amplificatori ideali in cui:

$$V_{out} = A(V_+V_-)$$

Dall'esperienza si nota che se si cortocircuitano morsetto positivo e morsetto negativo dell'amplificatore, si misura una $\Delta V \neq 0$ in contrasto con la teoria, che considerata la costante A essere molto alta, porta immediatamente a saturazione il segnale in ingresso.

Nella realtà l'equazione dell'amplificatore reale è:

$$V_{out} = A_+V_+ - A_-V_-$$

Per cui ho guadagni differenti per i differenti morsetti, ci si riconduce facilmente al caso ideale non appena $A_+ = A_-$.

Si definiscono **Tensione Differenziale** e **Tensione di Modo Comune** rispettivamente le seguenti quantità:

$$V_d = V_+ - V_- \quad V_{cm} = \frac{V_+ + V_-}{2}$$

In questo modo:

$$\begin{cases} V_- = V_+ - V_d \\ V_{cm} = \frac{V_+ + V_-}{2} = V_+ - \frac{V_d}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} V_+ = V_{cm} + \frac{V_d}{2} \\ V_- = V_{cm} - \frac{V_d}{2} \end{cases}$$

Così facendo:

$$\begin{aligned} V_{out} &= A_+V_{cm} + A_+\frac{V_d}{2} - A_-V_{cm} + A_-\frac{V_d}{2} \\ V_{out} &= \underbrace{\left(\frac{A_+ - A_-}{2}\right)}_{A_d} V_d + \underbrace{(A_+ - A_-)}_{A_{cm}} V_{cm} \end{aligned}$$

In cui si identifica il guadagno differenziale A_d e il guadagno di modo comune A_{cm} quello che determina l'errore rispetto all'idealità, per cui se $A_+ = A_-$ è nullo e riconduce all'idealità.

$$V_{out} = A_dV_d + A_{cm}V_{cm}$$

Con rigorosamente $A_{cm} < A_d$.

Si indica poi con CMRR il rapporto di reiezione di modo comune ed indica la capacità di rigettare il guadagno di modo comune per avvicinarsi all'idealità, non considerando V_{cm} .

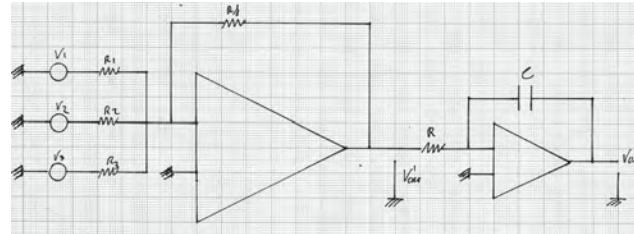
$$CMRR = 20 \log (A_d/A_{cm})$$

Più alto questo fattore è e migliore sarà l'amplificatore.

Esercizio d'esame

Disegnare il circuito elettrico che note tre tensioni in ingresso in uscita generi $\frac{1}{RC} \int \frac{V_1 + V_2 + V - 3}{3} dt$.

Si propone per un mediatore invertitore più un integratore invertitore.



In questo modo:

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} = -\frac{V'_{out}}{R_f} \Rightarrow -R_f \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right)$$

Si scelgono $R_1 = R_2 = R_3 = 3R_f$, in modo da avere in output:

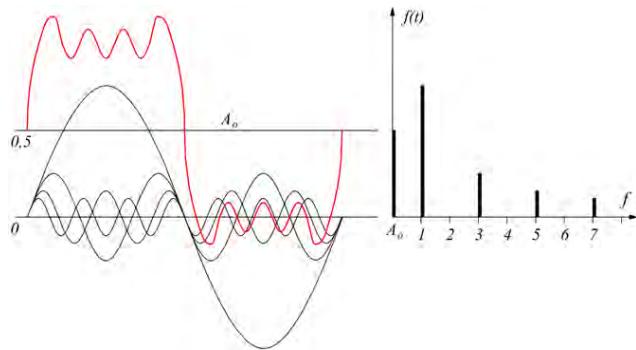
$$V_{out} = -\frac{1}{RC} \int -\frac{V_1 + V_2 + V - 3}{3} dt$$

Filtrati Attivi

I filtri attivi sono filtri che oltre a filtrare il segnale lo amplificano, a differenza dei filtri passivi. Questi sono:

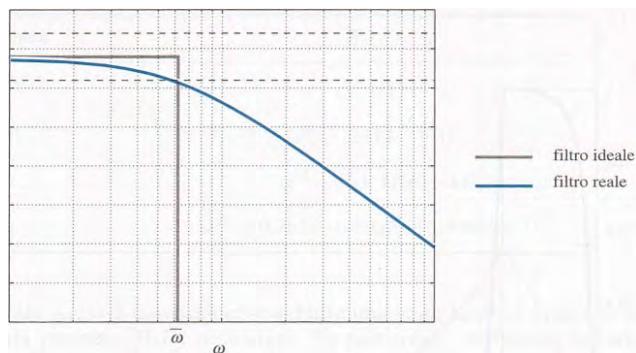
- Passa Basso
- Passa Alto
- Passa Banda
- A Reiezione di Banda o Filtro Notch.

Sia un segnale scomposto Attraverso Fourier tramite una somma di soli seni: $\sum_i^n A_i \sin(2\pi f_i t)$, tale segnale può così essere scomposto in spettri di frequenze.



Filtrati Attivo Passa Basso

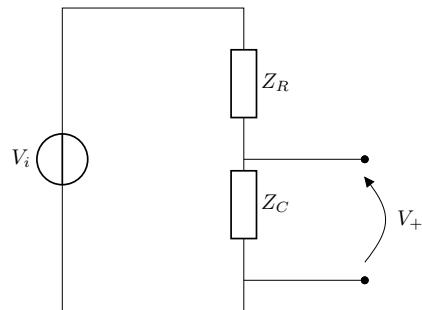
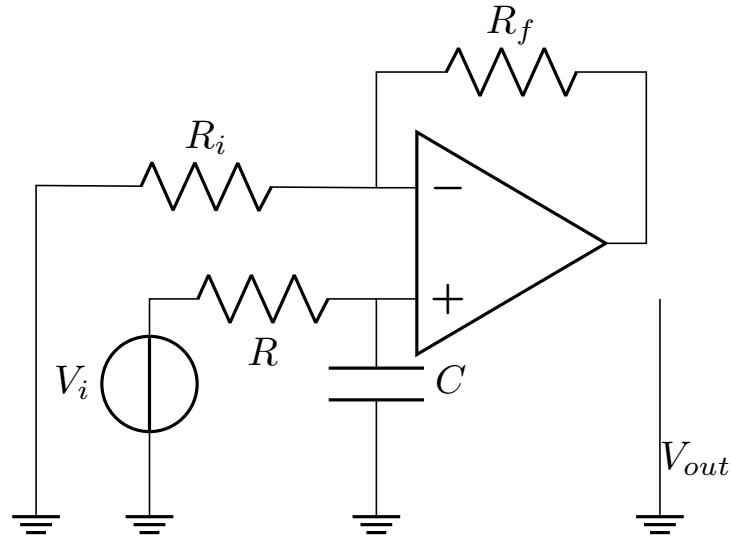
Il filtro Passa Basso, imponendo una determinata frequenza di taglio f_t permette il filtraggio delle alte frequenze. Il filtro ideale moltiplica per una costante che si indica come unitaria per semplicità (si ricordi che amplifica) gli spettri dei segnali che vuole far passare, si vuole così eliminare il segnale alle alte frequenze.



Nel filtro reale la frequenza di taglio f_t si trova dove è presente il 30% di deamplificazione del segnale.

NB: è importante non moltiplicare il segnale per valori prossimi o uguali alla frequenza di taglio, perché il segnale verrebbe deamplificato.

L'ordine del filtro indica la pendenza del guadagno, quanto è ovvero più vinci all'unità senza subire deamplificazione, da 1 a 4.



Dal partitore si ottiene:

$$\begin{cases} V_i = I(Z_R + Z_C) \\ V_+ = IZ_C \end{cases} \Rightarrow V_+ = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} V_i \Rightarrow V_+ = \frac{1}{1 + j\omega RC} V_i$$

Noto V_+ si calcola V_{out} :

$$-\frac{V_+}{R_i} = \frac{V_+ - V_{out}}{R_f} \Rightarrow V_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) V_+ = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \frac{1}{1 + j\omega RC} V_i$$

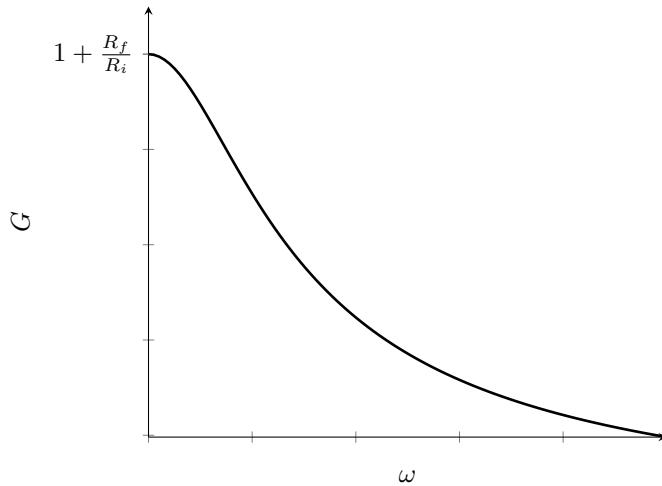
Razionalizzando:

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} V_i$$

Allora il guadagno sarà:

$$G = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Per $\omega \rightarrow 0$ $G \rightarrow 1 + \frac{R_f}{R_i}$, per $\omega \rightarrow \infty$ $G \rightarrow 0$.



Dove c'è deamplificazione del segnale pari a 3 dB? Dov'è la frequenza di taglio?

$$-3dB = 20 \log \left(\frac{G_{f_t}}{G_0} \right) \Rightarrow -3dB = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \right)$$

Ovvero ci si chiede quando:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega RC = 1 \Leftrightarrow \omega_{f_t} = 2\pi f_t = \frac{1}{RC}$$

Infine:

$$f_t = \frac{1}{2\pi RC}$$

Ad esempio se si vuole costruire un filtro che fa passare segnale fino ai 10 Hz, si avrà che:

$$RC = \frac{1}{2\pi 10}$$

Solitamente si decide, si fissa il valore del condensatore e poi si sceglie la resistenza da mettere nel circuito.

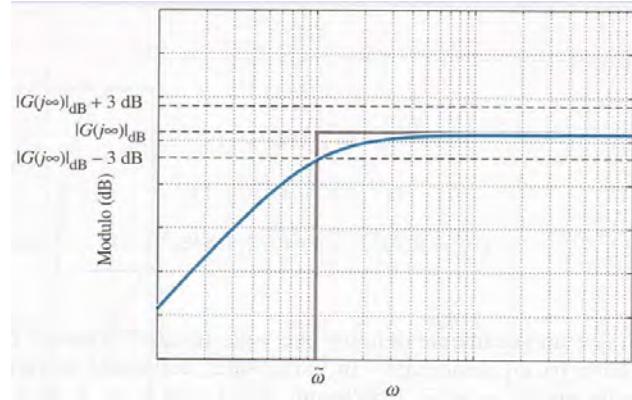
In che modo si comporta il filtro per pulsazioni e frequenze crescenti? Se ω cresce molto il guadagno diviene:

$$G = \left(1 + \frac{R_f}{R_i} \right) \frac{1}{\omega RC}$$

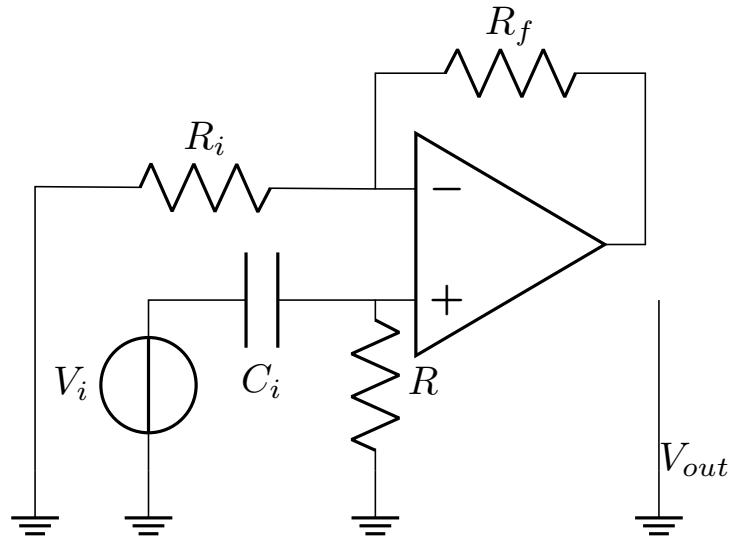
Si comporta come un circuito integratore, ad ω elevati, non oggetto del filtraggio, il segnale viene deamplificato ed integrato, oltre la frequenza di taglio avviene uno sfasamento.

Filtri Attivo Passa Alto

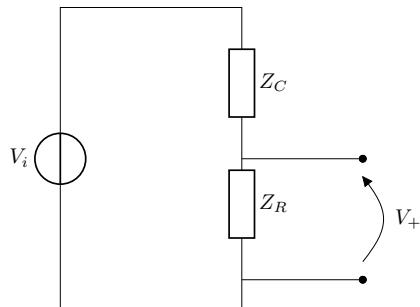
Il filtro Passa Alto blocca il segnale alle basse frequenze lasciando passare solo quello alle alte frequenze.



Anche in questo caso il filtro reale si caratterizza alla frequenza di taglio per un guadagno del 30% inferiore, quindi sarà necessario prestare attenzione ai fattori moltiplicativi nel suo intorno per non ottenere deamplificazioni non volute del segnale in uscita.



Equivalentemente al filtro Passa Bassa si avrà:



Dove il partorire permette di ottenere:

$$V_+ = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} V_i = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_i = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} V_i$$

Pertanto:

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) V_+ = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} V_i$$

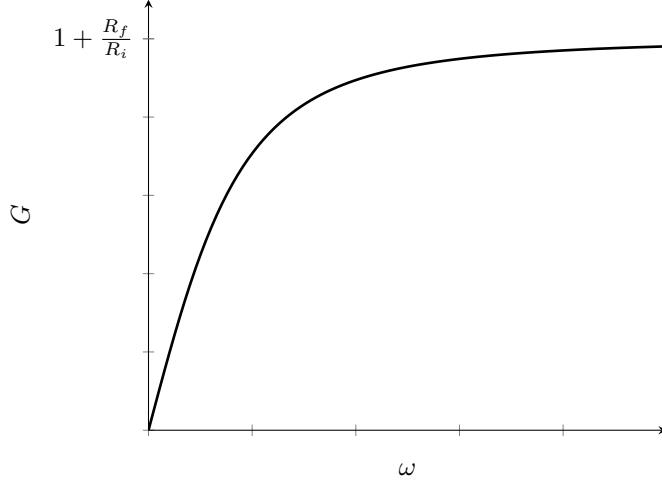
Razionalizzando:

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} (j + \omega RC) V_i$$

Il guadagno sarà così:

$$G = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Per $\omega \rightarrow 0$ $G \rightarrow 0$, per $\omega \rightarrow \infty$ $G \rightarrow 1 + \frac{R_f}{R_i}$.



Anche in questo caso la frequenza di taglio è pari a:

$$-3dB = 20 \log \left(\frac{G_{f_t}}{G_0} \right) \Rightarrow -3dB = 20 \log \left(\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \right)$$

Ovvero ci si chiede quando:

$$\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega_{f_t} = 2\pi f_t = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_t = \frac{1}{2\pi RC}$$

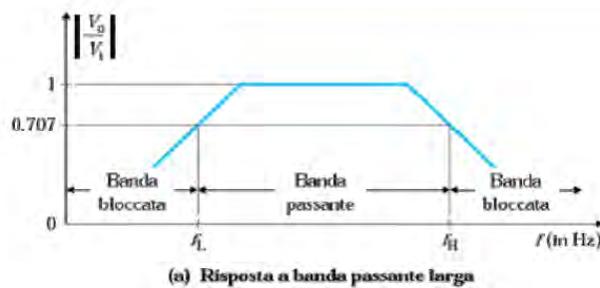
In che modo si comporta il filtro per pulsazioni e frequenze decrescenti? Se ω decresce molto il guadagno diviene:

$$G = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \omega RC$$

Si comporta come un circuito derivatore, ad ω minori, non oggetto del filtraggio, il segnale viene deamplificato e derivato.

Filtri Attivo Passa Banda

In questo caso interessa far passare una banda mediana tra due frequenze di taglio f_{t1} ed f_{t2} .



Il filtro Passa Banda può essere ad Ampia banda o a Stretta banda, che questa trattazione non tratterà.

disegno del guadagno preciso con dettaglio dello spettro lasciato passare
Si definiscono:

- **Frequenza Centrale**

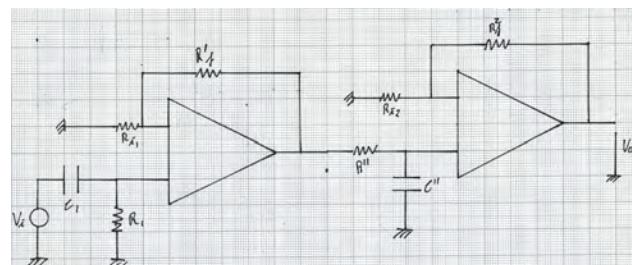
$$f_c = \sqrt{f_{bb}f_{ba}}$$

- **Fattore di Forma**

$$Q = \frac{f_c}{f_{ba} - f_{bb}}$$

Si sceglie perciò un filtro Passa Alto alla più bassa frequenza necessaria e un Passa Basso alla più alta frequenza necessaria:

$$f_{PB} = f_{ba} > f_{bb} = f_{PA}$$



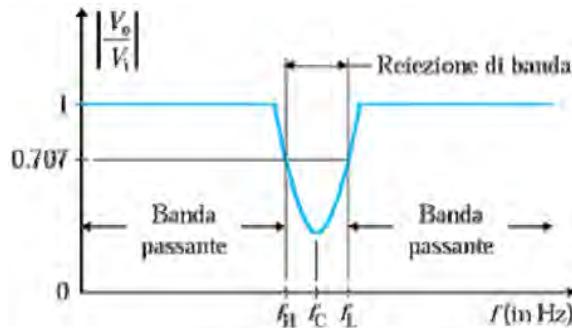
$$V'_{out} = \left(1 + \frac{R'_f}{R'_i}\right) \frac{j\omega R'C'}{1 + j\omega R'C'} V_i$$

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R''_f}{R''_i}\right) \frac{1}{1 + j\omega R''C''} V'_{out}$$

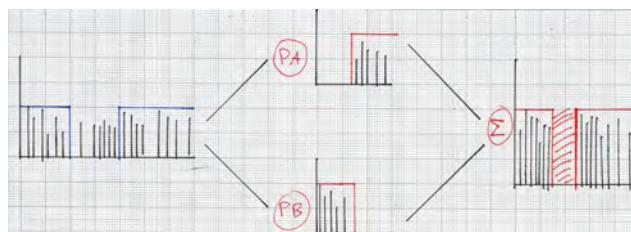
$$f_{PA} = f_{bb} = \frac{1}{R'C'} \quad f_{PB} = f_{ba} = \frac{1}{R''C''}$$

Filtri Attivo a Reiezione di Banda o Filtro Notch

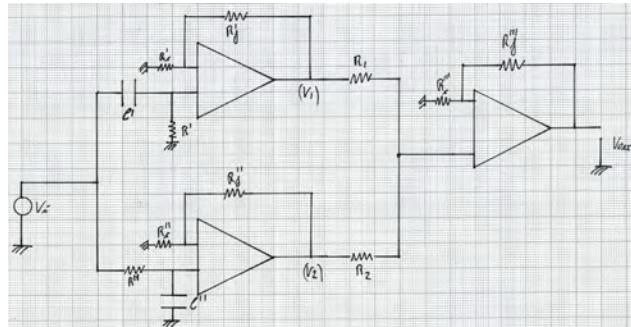
In questo caso interessa un segnale che elimini delle frequenze mediane, si utilizza ad esempio, per eliminare il segnale a 50 Hz nell'analisi dei dati.



(a) Risposta di tipo notch



Si sceglie così di lavorare in parallelo con lo stesso segnale in ingresso applicandogli un filtro Passa Alto, un filtro Passa Basso e alla fine un sommatore che darà il segnale in uscita.



Per assicurarsi di avere la somma in uscita sarà necessario scegliere: $R_1 = R_2 = R_i''' = R_f'''$, in questo modo:

$$V_{out} = V_1 + V_2 = \left(1 + \frac{R'_f}{R'_i}\right) \frac{j\omega R' C'}{1 + j\omega R' C'} V_i + \left(1 + \frac{R''_f}{R''_i}\right) \frac{1}{1 + j\omega R'' C''} V'_{out}$$

Si sceglie perciò un filtro Passa Alto alla minore delle maggiori frequenze necessarie per filtrare le alte frequenze e un Passa Basso alla più alta delle minori frequenze necessarie per filtrare le basse frequenze:

$$f_{PB} = f_{bb} < f_{ba} = f_{PA}$$

$$f_{PB} = f_{bb} = \frac{1}{R'' C''} \quad f_{PA} = f_{ba} = \frac{1}{R' C'}$$

NOTE

Indice

I 6.MISURE DI CORRENTE, TENSIONE e RESISTENZA	2
Misure di corrente	2
Galvanometro	2
Amperometro	4
Amperometro Multicampo	5
Pinza Amperometrica	6
Misure di tensione	7
Voltmetro	7
Voltmetro Multicampo	7
Voltmetro Potenziometrico	8
Voltmetro Digitale	9
Misure di Resistenza	10
Ponte di Wheatstone	10
Metodo di zero	11
Metodo a deflessione - Voltmetro	12
Voltmetro	12
Configurazione a quarto di ponte	13
Configurazione a mezzo ponte I	14
Configurazione a mezzo ponte II	15
Configurazione a ponte intero	16
Esempio: lamina incastrata e cella di carico	17
Metodo a deflessione - Amperometro	18
Nota Bene	19
Limitazioni	19
Misura tramite multimetero	20
Metodo a due fili	20
Metodo a tre fili	20
Metodo a quattro fili	21
Autoriscaldamento	22

Parte I

6. MISURE DI CORRENTE, TENSIONE e RESISTENZA

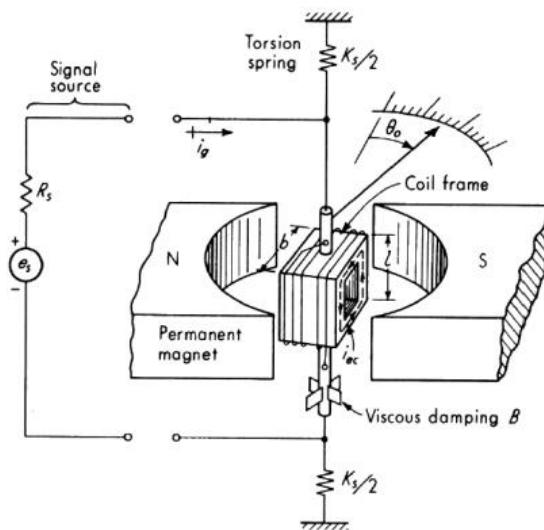
Misure di corrente

Galvanometro

Il galvanometro è il dispositivo elettromeccanico alla base degli strumenti per la misura della corrente (amperometri) e della tensione (voltmetri).

$$i \rightarrow \boxed{\text{Galvanometro}} \rightarrow \theta$$

Tale strumento riceve in input una corrente che trasforma, attraverso lo schema di seguito, in una variazione angolare su di un display.



Un nucleo ferromagnetico avvolto di spire è posto tra un campo magnetico, il nucleo ruoterà a causa della corrente che percorrendo le spire genererà un momento magnetico mentre due molle torsionali che fissano il nucleo al telaio manterranno il nucleo in sede. Un indicatore solidale al nucleo indicherà l'angolo di rotazione.

L'equazione che governa il moto è:

$$F = il \times \vec{B}$$

Più spire in un campo magnetico uniforme imposto generano un momento di rotazione dato da:

$$M = n \cdot ilbB$$

Bene notare che l'unica grandezza qui a variare è la corrente, oggetto di misura, il campo magnetico è imposto e noto.

Da cosa sarà impedita la rotazione della spira? Dalle molle torsionali solidali al telaio che applicheranno un momento pari a:

$$M = k\theta$$

Avremo perciò l'uguaglianza:

$$n \cdot ilbB = k\theta \Rightarrow \theta = \frac{lbnB}{k}i$$

E la sensibilità è data da:

$$S = \frac{lb_n B}{k}$$

Che legge dinamica è espressa dallo strumento? Ricordando che per un corpo in rotazione entra in gioco il momento d'inerzia I dello specifico oggetto, si avrà:

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = M$$

Alla quale si associano pulsazione naturale e fattori di smorzamento dati da:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{I}} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{kI}}$$

Come si vede, ad esempio un aumento di k , che porterebbe ad un aumento di ω_n , porta ad una diminuzione di S : le caratteristiche metrologiche statiche sono ancora in disaccordo con quelle dinamiche.

In special modo se si diminuisce $k \downarrow$, agendo sulla molla, se ne intacca il suo funzionamento, la molla per correnti elevate potrebbe andare in deformazione plastica, sarà dunque minore la corrente che si potrà misurare, diminuendo quindi il valore massimo, si restringe il campo di misura.

Se invece si aumenta $n lb \uparrow$ e dunque si aumenta la dimensione del parallelepipedo interno e quindi il numero di spire, si rischia un errore di inserzione elevato, questo infatti per le misure di corrente era dato da:

$$\varepsilon_{ins} = \frac{R_{\text{misuratore}}}{R_{\text{ingresso/sensore}}}$$

Aumentando il numero di spire aumenta inevitabilmente la resistenza dello strumento di misura e quindi necessariamente il suo errore di inserzione, senza contare la potenza dissipata per effetto Joule $P = Ri^2$ che potrebbe rovinare irrimediabilmente l'elemento resistore, e il conseguente aumento di massa che deriverebbe da un nucleo ferromagnetico più imponente, con conseguente aumento di inerzia e peggioramento delle caratteristiche metrologiche dinamiche, infatti se aumenta l'inerzia, diminuisce la pulsazione naturale e conseguentemente anche la frequenza di taglio e la banda passante del sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

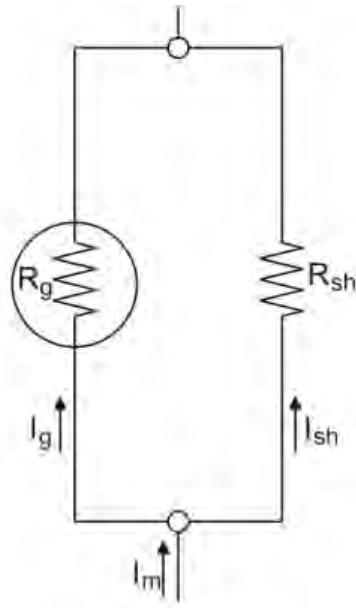
Per gli strumenti del secondo ordine si aveva che la frequenza di taglio, definita come quella frequenza del segnale a cui si ha una deamplificazione dello stesso pari a $3dB$, è definita come:

$$-3dB = 20 \log \left[\underbrace{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}}_{= 0.7} \right]$$

Un tipico galvanometro ha $R = 30\Omega$ e una corrente di fondo scala di $20\mu A$. E se si vuole misurare una corrente più elevata? Il galvanometro fornisce un campo di misura piuttosto ristretto.

Ampierometro

Per misurare correnti più elevate si ricorre all'ampierometro, questo strumento è formato da un galvanometro e da una resistenza di *shunt* in parallelo allo stesso.



Della I_m totale, si fa passare sul galvanometro la corrente I_g che questo può sopportare mentre il resto scorre sulla resistenza di shunt R_{sh} , è ovviamente una corrente di maggiore entità.

$$I_m = I_g + I_{sh}$$

$$V = I_g R_g = I_{sh} R_{sh} \Rightarrow I_{sh} = I_g \frac{R_g}{R_{sh}}$$

Per cui:

$$I_m = \left(1 + \frac{R_g}{R_{sh}}\right) I_g$$

Esempio: con $R_g = 50\Omega$, $I_g = 1mA$, come deve essere la resistenza di shunt?

$$I_m = \left(1 + \frac{R_g}{R_{sh}}\right) I_g \Rightarrow R_{sh} I_m = (R_{sh} + R_g) I_g \Rightarrow R_{sh} I_m = R_{sh} I_g + R_g I_g$$

$$R_{sh}(I_m - I_g) = R_g I_g$$

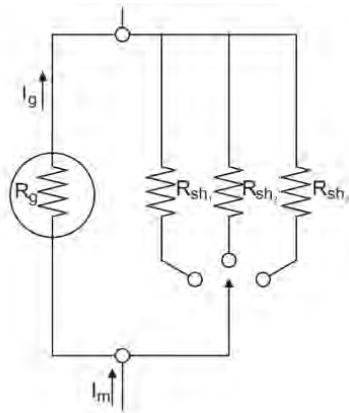
$$R_{sh} = \frac{I_g}{I_m - I_g} R_g$$

Per cui in questo caso:

$$R_{sh} = \frac{0.001A}{5A - 0.001A} 50\Omega = 0.01\Omega$$

Amperometro Multicampo

L'amperometro può essere uno strumento multicampo, ovvero tramite uno switch che sceglie la resistenza di shunt da mettere in parallelo, può misurare diverse correnti.



Ad esempio sempre con $R_g = 50\Omega$, $I_g = 1mA$:

$$\begin{cases} R_{sh}^1 = 50\Omega \Rightarrow I_m = 2mA \\ R_{sh}^2 = 10\Omega \Rightarrow I_m = 6mA \\ R_{sh}^3 = 5\Omega \Rightarrow I_m = 11mA \end{cases}$$

Ruotando lo switch si cambia il campo di misura, ma per quale necessità? Se serve misurare una piccola corrente scegliendo una grande resistenza come può essere il caso in **esempio** ma mantenendo invariata la resistenza del galvanometro, trovando una piccola resistenza sul ram di shunt la corrente passerà interamente lì col rischio che non percorra il galvanometro, in questo modo facendo passare sul galvanometro una corrente sempre minore si rischia la sottorisoluzione, ovvero la corrente che scorre sullo strumento non basta neanche a far muovere il nucleo ferromagnetico.
È perciò importante selezionare il campo di misura più adeguato, quello più vicino alla corrente che si intende misurare.

Tuttavia né il galvanometro né l'amperometro riescono a misurare correnti elevate anche mediante l'utilizzo di resistenze molto basse, infatti queste verrebbero facilmente bruciate.

Pinza Amperometrica

Per la misura di correnti elevate e per evitare di mettere in serie l'amperometro o il galvanometro per misurare la corrente e quindi interrompere il circuito, si sceglie la pinza amperometrica. In questo modo, non interferendo minimamente col circuito, presenta un errore di inserzione nullo.



La pinza amperometrica possiede sensori diversi per principi di misure diversi.

Corrente Alternata	Corrente continua
<p>Induzione Elettromagnetica</p> <p>Un trasformatore attraverso una variazione del $\varphi(\vec{B})$ che determina una corrente sul circuito secondario.</p> <p>L'elemento ferromagnetico è la pinza</p> <p>Il primario è ad un solo avvolgimento ed è il filo da misurare</p> <p>Il secondario è all'interno dello strumento.</p> <p>Si ottiene una misura dallo strumento proporzionale a quella del pirmario.</p> <p>Non si possono misurare correnti costanti</p>	<p>Effetto Hall</p> <p>l'effetto Hall, riguarda la formazione di una differenza di potenziale tra le opposte facce di un conduttore elettrico; tale differenza è attribuibile a un campo magnetico che si pone perpendicolarmente rispetto al flusso della corrente elettrica.</p> <p>Una corrente genera un campo magnetico che genera uno spostamento di cariche e quindi una variazione di tensione</p>

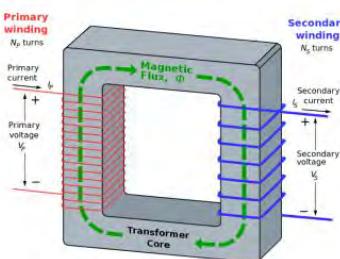


Figura 1: Ganasce, elemento ferromagnetico

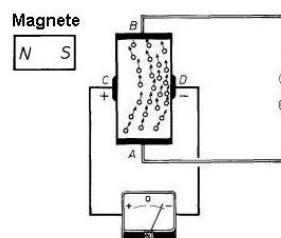


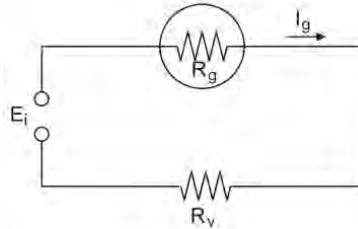
Figura 2: Effetto Hall

Con la pinza amperometrica si riescono a misurare correnti elevate, anche dell'ordine delle 600A.

Misure di tensione

Voltmetro

La misura di tensione avviene in parallelo al circuito, lo strumento è sempre costituito da un galvanometro in serie ad una resistenza di shunt R_v ora in serie al galvanometro.



$$E_i = I_g(R_v + R_g)$$

L'errore di inserzione per le misure di tensione è:

$$\varepsilon_{ins} = \frac{R_{\text{ingresso/sensore}}}{R_{\text{misuratore}}}$$

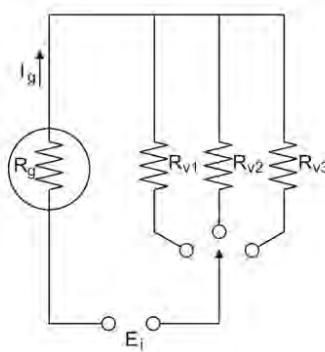
Per cui essendo la resistenza del galvanometro molto bassa, si dovrà avere una resistenza di shunt elevata.

$$R_v = \frac{E_i}{I_g} - R_g$$

Un'elevata resistenza del voltmetro diminuirà l'errore di inserzione.

Voltmetro Multicampo

Il voltmetro multicampo, analogamente all'amperometro, ha una serie di switch che permettono la scelta della resistenza ora da mettere in serie al galvanometro.



Ad esempio per misurare una tensione $E_i = 100mV$ avendo un galvanometro da $R_g = 30\Omega$ e $I_g = 20\mu A$ si sceglie una resistenza di shunt pari a:

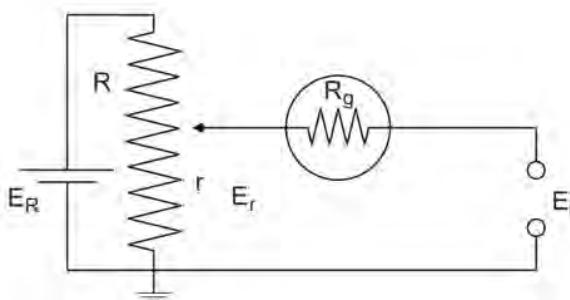
$$R_v = \frac{0.1V}{0.00002A} - 30\Omega = 4970\Omega$$

Si possono realizzare voltmetri multicampo che vadano dai 100mV ai 1000V.

Voltmetro e amperometro sono concettualmente identici e sono entrambi strumenti passivi.

Voltmetro Potenziometrico

Il voltmetro potenziometrico è uno strumento di zero, indicherà perciò l'equilibrio. Si confronterà perciò una tensione di riferimento nota E_R , tensione di alimentazione del potenziometro, con la tensione data dallo scorrimento di un palpatore sul potenziometro, indicando dove questa raggiunge lo zero.



$$r = [0, R] \quad E_r = [0, E_R]$$

$$E_R = IR \quad E_r = Ir$$

$$E_r = \frac{r}{R} E_R$$

Si vuole che l'indicatore dello strumento segni lo zero.

La scala graduata, indicando la porzione di resistenza presa in esame, indica la tensione che si sta misurando: Se $E_i \neq E_r$ nel galvanometro passa corrente, per cui la misura di zero si avrà quando:

$$E_i = E_r = \frac{r}{R} E_R$$

Anche in questo caso si hanno errori di inserzione nulli dovuti al semplice fatto che lo strumento è semplicemente utilizzato per verificare la condizione $I_g = 0$: quando non passa corrente si hanno tensioni uguali e si misura lo zero.

È uno strumento attivo, dato che necessita di alimentazione, ed è usato per la sola misurazione di corrente statica, non tempo variante.

Voltmetro Digitale

Rispetto ad un voltmetro analogico, quello digitale garantisce tre vantaggi, come maggiore precisione, maggiore velocità di lettura e un limitato livello di rumore.



Il risultato è presente su di un display con un'incertezza di tipo uniforme, dalla distribuzione rettangolare.

All'interno alloggerà un convertitore da analogico a digitale A/D, ed è nient'altro che un multimetro, fornendo la possibilità quindi di misurare sia corrente che tensione che resistenza.

Un voltmetro digitale garantisce inoltre una certa **sovraportata**, riuscendo quindi a misurare - per una certa percentuale del fondo scala - grandezze maggiori del suo campo di misura.

Il display permette poi la visualizzazione di un certo **numero di digit**. Ad esempio con 3 digit lo strumento permette la visualizzazione di numeri da 999 a 0,00. La scelta di dove porre la virgola mobile sarà poi dipendente dallo sperimentatore e dalla risoluzione che si vuole ottenere, prestando attenzione a non perdere informazioni: 1,2 è un'informazione molto meno dettagliata di 1,23.

Può essere poi presente un "mezzo" digit che può assumere solo il valore di 0 o 1, in questo caso possono essere rappresentati numeri da 1999 a 0,000 con una sovraportata del 100%.

La **portata** del voltmetro digitale rappresenta il range di misura del voltmetro in funzione delle cifre a disposizione. La portata può essere fatta variare spostando la virgola. Sono permesse misure tra 0,000 e 1,999; 00,00 e 19,99; 000,0 e 199,9; 0000 e 1999. L'aumento del fondo scala determina naturalmente un aumento dell'incertezza.

Il **tempo di misura** è semplicemente il tempo necessario allo strumento per effettuare la misurazione.

Misure di Resistenza

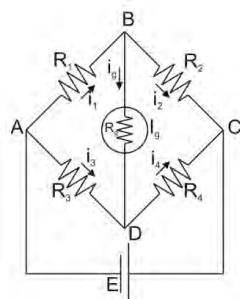
Ponte di Wheatstone

Da un punto di vista strettamente sperimentale, lo scopo di una misura non è quello di determinare l'esatto valore di una grandezza ma piuttosto individuare un idoneo intervallo che contenga tale grandezza con una probabilità ragionevole. Misurare una resistenza può apparire un'operazione semplice e alla portata di tutti... "basta avere un tester con adeguato fondo scala" ma in realtà è così solo se si prescinde dalla precisione e dall'accuratezza con cui vogliamo ottenere il risultato.

La teoria e la pratica delle misure elettriche ci insegnano che esistono diversi metodi per misurare una resistenza i quali vanno applicati in base all'ordine di grandezza e alla precisione che si desidera ottenere. Il primo e il più conosciuto è senz'altro il metodo volt-amperometrico che consente di determinare il valore di una resistenza alimentata con un'opportuna tensione continua V_{cc} , misurando tensione e corrente e facendone poi il rapporto. La precisione della misura in questo caso dipende solo dalla qualità e dalla corretta calibrazione della strumentazione di misura utilizzata (un voltmetro e un amperometro) e normalmente consente di soddisfare la maggior parte delle esigenze pratiche.

In tutti quei casi in cui occorra invece misurare una resistenza con una precisione superiore a quella fornita dal metodo volt-amperometrico si può utilizzare un metodo di misura che adotta uno schema circuitale detto **ponte di Wheatstone**.

Il ponte di Wheatstone è costituito da quattro rami ciascuno contenente una resistenza, un elemento passivo, al cui interno è posto un rilevatore, che sia un amperometro (galvanometro + shunt in parallelo) o voltmetro (galvanometro + shunt in serie).

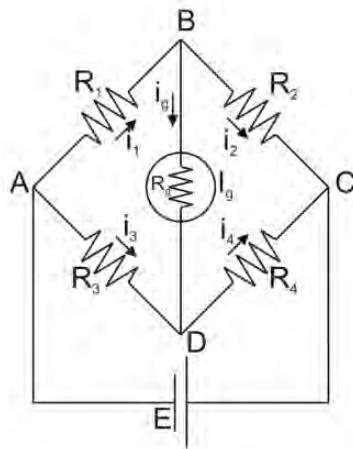


Esso viene normalmente alimentato per mezzo di un generatore di tensione costante E ed è utilizzato allo scopo di determinare il valore incognito di una delle quattro resistenze.

Questo strumento permette due possibili misure: quella di zero, per ingresso statico; e quella di deflessione.

Metodo di zero

Lo strumento rilevatore è un amperometro e segnerà l'equilibrio quando $I_g = 0$.



Si pone come resistenza da misurare R_1 , R_2 , R_4 sono resistenze note, mentre $R_3 \nearrow$ è una resistenza variabile, un potenziometro. Sarà questa infatti a variare fino a quando si misurerà una corrente nulla sul galvanometro, ma come si arriva a questa condizione? L'unica condizione che soddisfa una corrente nulla sul galvanometro è:

$$I_g = 0 \Rightarrow E_g = 0 \Leftrightarrow V_D = V_B$$

Da questo risultato, si sottrae in due casi la stessa quantità, prima V_A e poi V_C :

$$V_B = V_D$$

$$\begin{cases} V_B - V_A = V_D - V_A \\ V_B - V_C = V_D - V_C \Leftrightarrow V_C - V_B = V_C - V_D \end{cases}$$

A queste differenze di potenziale corrispondono rispettivamente:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = I_3 R_3 \\ I_2 R_2 = I_4 R_4 \end{cases}$$

Dividendo membro si ottiene:

$$\frac{I_1 R_1}{I_2 R_2} = \frac{I_3 R_3}{I_4 R_4}$$

Dall'equilibrio delle correnti al nodo B si ottiene: $I_1 - I_g - I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2$ così come $I_3 = I_4$, allora:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Avendo la libertà di scegliere, essendo queste note, $R_2 = R_4$ ci si riconduce a:

$$R_1 = R_3$$

Quando la resistenza individuata sul potenziamento è uguale alla resistenza incognita R_1 , si arresta il flusso di corrente I_g e si misurerà conseguentemente con precisione la resistenza incognita.

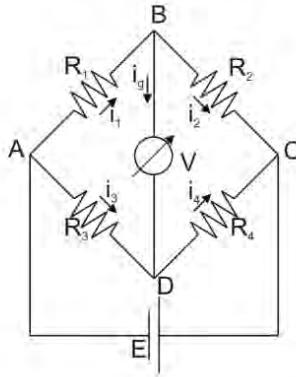
Inutilizzabile se R_1 varia nel tempo, si dovrebbe rincorrere la resistenza variabile sul potenziometro.

Metodo a deflessione - Voltmetro

Il metodo a deflessione è usato per misure dinamiche poco variabili e permette di leggere un'uscita su di una scala graduata in base alla corrente e alla tensione che interessano la resistenza incognita.

Nel metodo a deflessione si possono usare come strumenti rivelatori o un voltmetro $R_{\text{strumento}} \rightarrow \infty \Rightarrow I_g \rightarrow 0$, o un amperometro $R_g \neq 0 \Rightarrow I_g \neq 0$ d'altra parte è la corrente che serve per misurare.

Voltmetro



Per l'equilibrio ai nodi B e D è dato che $I_g = 0$:

$$I_1 = I_2 \quad I_3 = I_4$$

Maglia ABD:

$$V = I_1 R_1 - I_3 R_3$$

Maglia BCD:

$$V = I_2 R_2 - I_4 R_4 = I_1 R_2 - I_3 R_4$$

La misura del voltmetro dovrà essere la stessa, per cui

$$V = I_1 R_1 - I_3 R_3 = I_1 R_2 - I_3 R_4$$

Maglia ABC:

$$E = R_1 I_1 + R_2 I_2 = I_1 (R_1 + R_2)$$

Maglia ADC:

$$E = I_3 R_3 + I_4 R_4 = I_3 (R_3 + R_4)$$

Essendo la tensione di alimentazione la stessa:

$$E = I_1 (R_1 + R_2) = I_3 (R_3 + R_4)$$

Ottenendo un sistema descritto dalle incognite I_3, I_4 :

$$\begin{cases} I_1 R_1 - I_3 R_3 = I_1 R_2 - I_3 R_4 \\ I_1 (R_1 + R_2) = I_3 (R_3 + R_4) \end{cases}$$

Che risolto conduce a:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad I_3 = \frac{E}{R_3 + R_4}$$

Che sostituite in $V = I_1 R_1 - I_3 R_3$ conducono a:

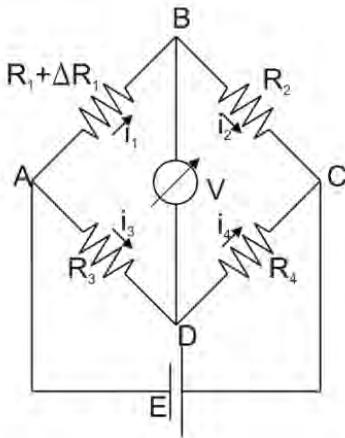
$$V = E \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) = E \left[\frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right]$$

Quando il ponte è bilanciato l'uscita dello strumento rivelatore è nulla:

$$V = E \left[\frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right] = 0 \Leftrightarrow R_1 R_4 = R_2 R_3$$

E se la resistenza da misurare fosse variabile, come varierebbe l'uscita del voltmetro?

Configurazione a quarto di ponte
Variazione di una sola resistenza.



In che modo varia ΔV variando ΔR ?

$$R_1 = R_1 + \Delta R_1$$

$$V + \Delta V = E \left[\frac{(R_1 + \Delta R_1)R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + \Delta R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right]$$

Sotto l'ipotesi di resistenze uguali: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R \Rightarrow V = 0$ rimarrà quindi il solo termine:

$$\Delta V = E \left(\frac{R \Delta R}{4R^2 + 2R \Delta R} \right)$$

Normalizzando:

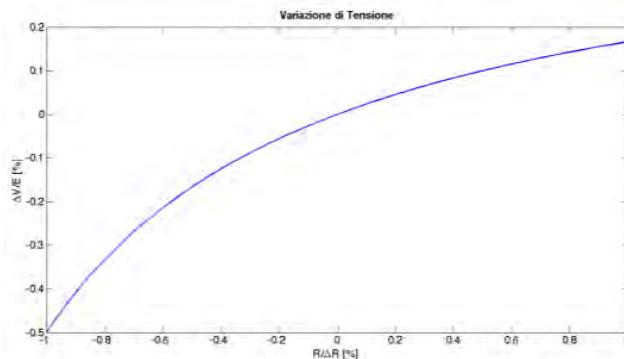
$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{\Delta R/R}{4 + 2\Delta R/R}$$

Basterà quindi misurare un ΔV per ottenere un ΔR .

L'andamento dell'equazione trovata è lineare? No, è come se fosse

$$y = \frac{x}{A + x}$$

- Per $\frac{\Delta R}{R} \rightarrow 0$ $\frac{\Delta V}{E} \rightarrow 0$
- Per $\frac{\Delta R}{R} \rightarrow +\infty$ $\frac{\Delta V}{E} \rightarrow \frac{1}{2}$
- Per $\frac{\Delta R}{R} \rightarrow -\infty$ $\frac{\Delta V}{E} \rightarrow -2$

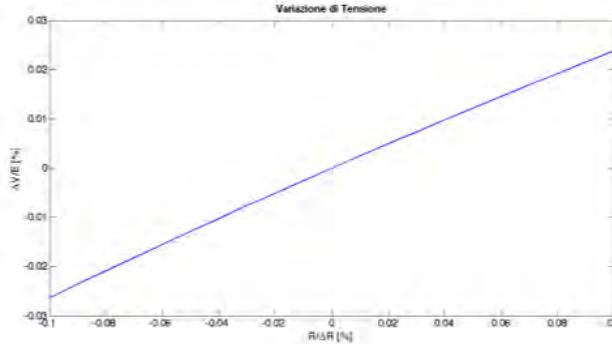


Dato che si spinge per avere una sensibilità sempre costante su tutto il campo di misura, si mira ad avere una funzione caratteristica che sia lineare, ma questa non lo è.

Si restringe quindi il campo di misura a ΔR piccoli, in questo modo la funzione la si osserva essere lineare e diviene:

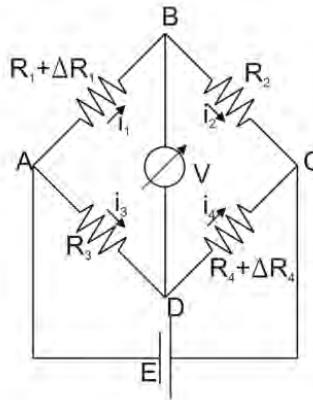
$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R}$$

Ottenendo un ΔV chiaramente proporzionale al ΔR .



Siccome però non ha senso fisico considerare resistenze negative, l'unico grafico che si considererà sarà solo nel semipiano positivo.

Configurazione a mezzo ponte I Variazione di due resistenze opposte R_1, R_4



$$R_1 = R_1 + \Delta R_1 \quad R_4 = R_4 + \Delta R_4$$

$$V + \Delta V = E \left[\frac{(R_1 + \Delta R_1)(R_4 + \Delta R_4) - R_2 R_3}{(R_1 + \Delta R_1 + R_2)(R_3 + R_4 + \Delta R_4)} \right]$$

Sotto l'ipotesi di resistenze uguali: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R \Rightarrow V = 0$ rimarrà quindi il solo termine:

$$\Delta V = E \left(\frac{R \Delta R_1 + R \Delta R_4 + \Delta R_1 \Delta R_4}{4R^2 + 2R \Delta R_1 + 2R \Delta R_4 + \Delta R_1 \Delta R_4} \right)$$

Normalizzando:

$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{\Delta R_1/R + \Delta R_4/R + (\Delta R_1 \Delta R_4)/R^2}{4 + 2\Delta R_1/R + 2\Delta R_4/R + (\Delta R_1 \Delta R_4)/R^2}$$

Per ΔR piccoli:

$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R} + \frac{\Delta R_4}{R} \right)$$

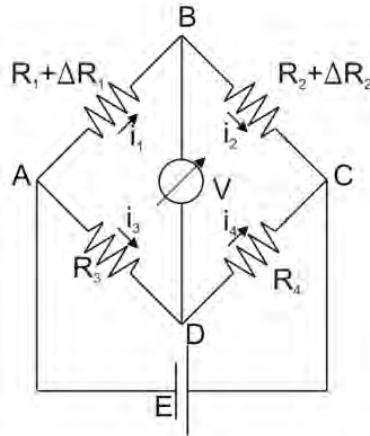
Ottenendo anche il grande risultato che le variazioni di resistenza su rami opposti si sommano.

Se poi si fa in modo che le variazioni delle due resistenze misurate siano uguali, ovvero $\Delta R_1 = \Delta R_4 = \Delta R$, si ottiene:

$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R}$$

Ed una sensibilità raddoppiata.

Configurazione a mezzo ponte II
Variazione di due resistenze contigue R_1, R_2



$$R_1 = R_1 + \Delta R_1 \quad R_2 = R_2 + \Delta R_2$$

$$V + \Delta V = E \left[\frac{(R_1 + \Delta R_1)R_4 - (R_2 + \Delta R_2)R_3}{(R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2)(R_3 + R_4)} \right]$$

Sotto l'ipotesi di resistenze uguali: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R \Rightarrow V = 0$ rimarrà quindi il solo termine:

$$\Delta V = E \left(\frac{R\Delta R_1 - R\Delta R_2}{4R^2 + 2R\Delta R_1 + 2R\Delta R_2} \right)$$

Normalizzando:

$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{\Delta R_1/R - \Delta R_2/R}{4 + 2\Delta R_1/R + 2\Delta R_2/R}$$

Per ΔR piccoli:

$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R} - \frac{\Delta R_2}{R} \right)$$

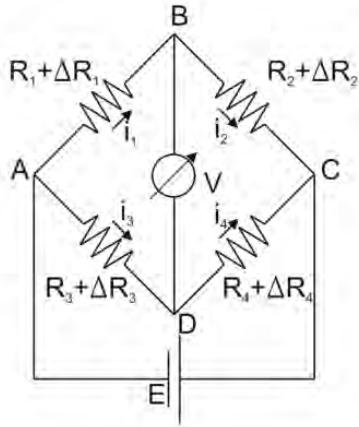
Ottenendo anche il grande risultato che le variazioni di resistenza su rami contigui si sottraggono.

Se poi si fa in modo che le variazioni delle due resistenze misurate siano uguali, ovvero $\Delta R_1 = \Delta R_2 = \Delta R$, si ottiene:

$$\frac{\Delta V}{E} = 0$$

Ossia un annullamento della sensibilità.

Configurazione a ponte intero



$$R_1 = R_1 + \Delta R_1 \quad R_2 = R_2 + \Delta R_2$$

$$R_3 = R_3 + \Delta R_3 \quad R_4 = R_4 + \Delta R_4$$

$$V + \Delta V = E \left[\frac{(R_1 + \Delta R_1)(R_4 + \Delta R_4) - (R_2 + \Delta R_2)(R_3 + \Delta R_3)}{(R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2)(R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4)} \right]$$

Sotto l'ipotesi di resistenze uguali: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R \Rightarrow V = 0$ rimarrà quindi il solo termine che normalizzato e per ΔR piccoli diviene:

$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R} - \frac{\Delta R_2}{R} - \frac{\Delta R_3}{R} + \frac{\Delta R_4}{R} \right)$$

Si distinguono due casi:

- Se $\Delta R_1 = \Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = \Delta R$ e quindi si fa in modo che le variazioni resistenza siano uguali su tutti i rami, si ottiene:

$$\frac{\Delta V}{E} = 0$$

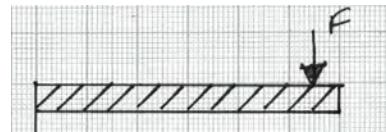
Ossia un annullamento della sensibilità.

- Se $\Delta R_1 = -\Delta R_2 = -\Delta R_3 = \Delta R_4 = \Delta R$ e quindi si fa in modo che le variazioni resistenza siano uguali in modulo su tutti i rami ma opposte su rami opposti e quindi diverse su rami contigui, si ottiene:

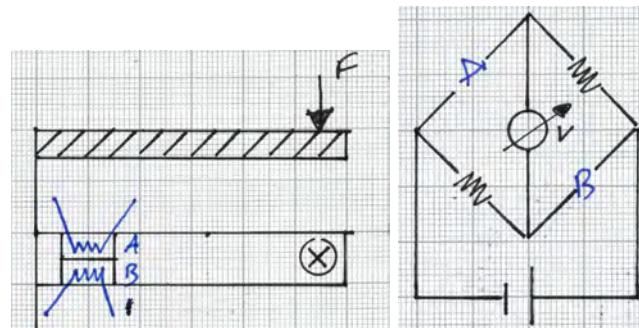
$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{\Delta R}{R}$$

Ossia una sensibilità quadruplicata: Si misura un ΔV grazie ad una variazione di resistenza ΔR

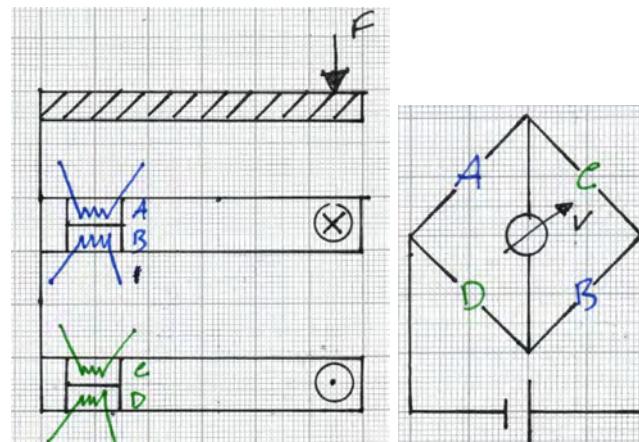
Esempio: lamina incastrata e cella di carico



Si immagini di porre solo due estensimetri A e B sul lato superiore della barra incastrata, in questo modo tuttavia si ottiene una sensibilità minore del caso di 4 estensimetri.

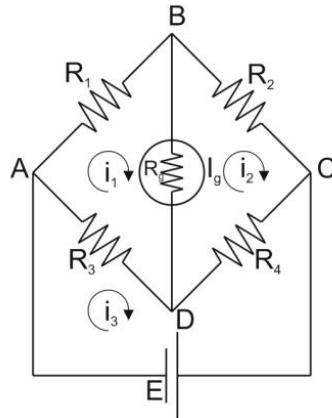


Si rimedia quindi ponendo due estensimetri C e D anche sotto alla barra incastrata, negli stessi punti dove sono stati applicati gli altri estensimetri, ma in modo da misurare una variazione di resistenza opposta a quelli del lato superiore. Si noti inoltre come non abbia la minima importanza la maniera con cui si collegano C e D ai rami A e B, l'importante è che risultino opposti e misurino in modulo le stesse deformazioni.



Metodo a deflessione - Amperometro

A differenza del metodo a deflessione con il voltmetro qui $R_g \downarrow$, deve scorrere una corrente I_g che lo strumento rivelatore dovrà misurare.



Per le equazioni delle correnti nelle tre maglie si ottiene:

- Maglia ABD:

$$R_1 I_1 + R_g(I_1 - I_2) + R_3(I_1 - I_3) = 0$$

- Maglia BCD:

$$R_2 I_2 + R_4(I_2 - I_3) + R_g(I_2 - I_1) = 0$$

- Maglia ADC:

$$R_3(I_3 - I_1) + R_4(I_3 - I_2) = E$$

Sul ramo dell'amperometro di legge che la corrente di lato misurata è pari a:

$$I_g = I_1 - I_2$$

Le equazioni delle maglie possono essere arrangiate in un sistema:

$$\begin{cases} I_1(R_1 + R_g + R_3) & -I_2 R_g & -I_3 R_3 & = 0 \\ -I_1 R_g & +I_2(R_2 + R_4 + R_g) & -I_3 R_4 & = 0 \\ -I_3 R_3 & -I_2 R_4 & +I_3(R_3 + R_4) & = E \end{cases}$$

Che in forma matriciale diviene:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_g + R_3) & -R_g & -R_3 \\ -R_g & (R_3 + R_4 + R_g) & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & (R_3 + R_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

Trovando I_1, I_2 , si sostituiscono in I_g e portano a

$$I_g = E \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_g[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)] + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}$$

Per cui considerando una resistenza variabile ed una configurazione a quarto di ponte:

$$R_1 = R_1 + \Delta R_1$$

Con l'ipotesi di $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R \Rightarrow I_g = 0$ e rimane soltanto:

$$\Delta I_g = \frac{E}{R} \frac{\Delta R/R}{R_g/R (4 + 2\Delta R/R) + 4 + 3\Delta R/R}$$

Per $R_g \rightarrow 0$, d'altronde si deve garantire una lettura sull'amperometro:

$$\frac{\Delta I_g}{E/R} = \frac{\Delta R/R}{4 + 3\Delta R/R}$$

Per ΔR piccoli:

$$\frac{\Delta I_g}{E/R} = \frac{\Delta R}{4R}$$

Evidenziando un andamento lineare.

Nota Bene

Dato che l'approccio al ponte di Wheatstone col metodo a deflessione utilizzando l'amperometro è concettualmente simile a quello effettuato con il voltmetro, valgono le stesse considerazioni fatte col voltmetro, per cui:

- Variazioni di resistenza su rami opposti si sommano;
- Variazioni di resistenza su rami contigui si sottraggono;
- La sensibilità si annulla se c'è una stessa variazione di resistenza sui rami contigui;
- La sensibilità si annulla se c'è una stessa variazione di resistenza su tutti i rami;
- La sensibilità raddoppia se c'è una stessa variazione di resistenza sui rami opposti;
- La sensibilità quadruplica se c'è una stessa variazione di resistenza sui rami opposti e di segno opposto sui rami contigui.

Limitazioni

Il ponte di Wheatstone presenta tuttavia delle limitazioni, ad esempio i cavi di collegamento in materiale metallico - dotati di resistenze proprie, possono influenzare le piccole variazioni di resistenza che si devono misurare, col metodo di zero si dovrebbe misurare uno zero ma nella realtà dei fatti si misura un offset, una sovrastima.

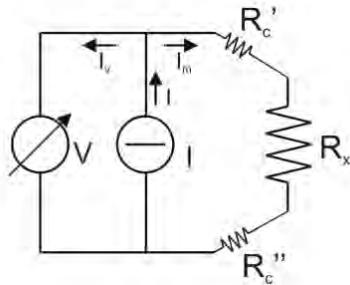
Il problema potrebbe essere eliminato utilizzando cavi uguali su rami contigui in modo che le variazioni di resistenza proprie dei cavi di collegamento si eliminino, ma non è sempre banale ottenere cavi di collegamento dalle resistenze perfettamente identiche; un altro modo per correggere la misura potrebbe essere quello di misurare a priori la resistenza dei cavi di collegamento e sottrarla alla misura, trattandola come un errore sistematico; oppure ancora si potrebbe effettuare una seconda misura, invertendo i cavi e mediando i risultati ottenuti.

Ancor più della presenza di una resistenza non voluta però, spaventa l'effetto termoelettrico: lo scorrimento di corrente in un sistema attivo porta inevitabilmente all'effetto Joule, con conseguente aumento di resistenza data da un aumento di resistività.

Si approcciano perciò, per evitare errori di misura, diverse tecniche di misurazione.

Misura tramite multmetro

Metodo a due fili



La misura a due fili è la classica misura effettuata col multmetro, questo infatti, essendo dotato di un proprio generatore interno, forza una intensità di corrente nella resistenza in esame e ne misura la caduta di tensione.
 $I_V \downarrow R_V \uparrow$, c'è solo la corrente del multmetro I_m che circola:

$$V_m = I_m R_x + I_m R'_c + I_m R''_c$$

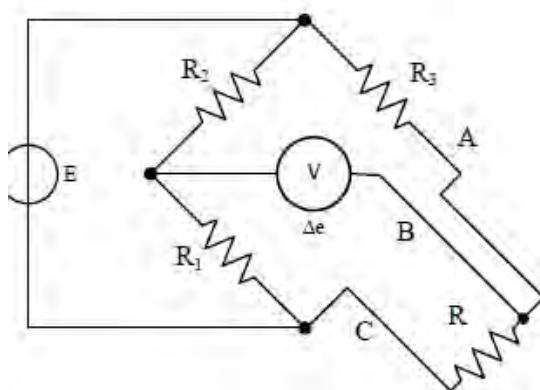
Considerando e approssimando i cavi uguali si può trattare l'errore sulla misura della resistenza che ne consegue come un errore sistematico:

$$\varepsilon = 2I_m R_c$$

Se l'oggetto della misurazione sono resistenze nominalmente elevate, quelle dei due cavi so possono trascurare, come ad esempio si vedrà nelle misure col termistore: 1Ω di cavo rispetto ai 1000Ω della misura non dà effetto.

Il problema reale sussiste con l'effetto Joule, possono svilupparsi infatti, anche in cavi nominalmente uguali, diversi gradienti di temperatura che non possono essere né evitati, né controllati non permettendo l'esatta correzione dell'errore sistematico.

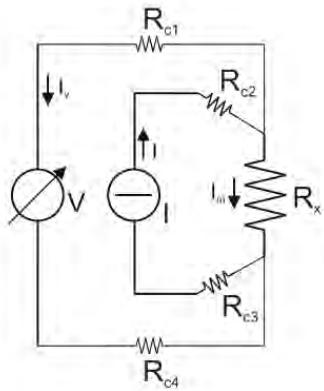
Metodo a tre fili



Un esempio di misura a tre fili avviene con l'estensimetro.

Si realizza un nodo del ponte di Wheatstone in prossimità della resistenza da misurare, ma se il fine è quello di ottenere una resistenza da misurare minore, un cavo in più non la aumenta? Il cavo che si introduce è collegato al voltmetro, essendo il voltmetro in ogni caso (sia col metodo zero che a deflessione) caratterizzato ad una resistenza/impedenza elevata, in quel cavo non scorre corrente, in più applicando i restanti due cavi come in A e C contigui, le due variazioni di resistenza che si vanno a creare si sottraggono ed il loro effetto sulla misurazione si annulla.

Metodo a quattro fili



Il circuito di alimentazione è identificato da una maglia diversa rispetto a quella con cui si fa la misurazione. Di fatto, la maglia di alimentazione non è importante ai fini misuristici perché le sue cadute di tensione su R_{c3} , R_{c2} non intervengono nella misura, perciò si trascura a pié pari, si ignora: la misura che si vuole ottenere è identificata solamente dalla maglia esterna.

Il voltmetro infatti misura:

$$V = I_m R_x + I_v R_{c1} + I_v R_{c4}$$

Poiché per definizione di multimetro $I_v \ll I_m$ il voltmetro misurerà infine:

$$V = I_m R_x + I_v \cancel{R_{c1}} + I_v \cancel{R_{c4}} \Rightarrow V = I_m R_x$$

Si ottiene in questo modo un errore sistematico assai trascurabile.

Questo è un metodo utilizzato per misurare resistenze nominalmente molto basse: due resistenze non entrano in gioco mentre sulle altre due scorre una corrente $I_v \rightarrow 0$: si ottiene solo la misura di interesse.

Usato nella termocoppia PT10, dove su 10Ω di misurazione 1Ω di cavo impatta.

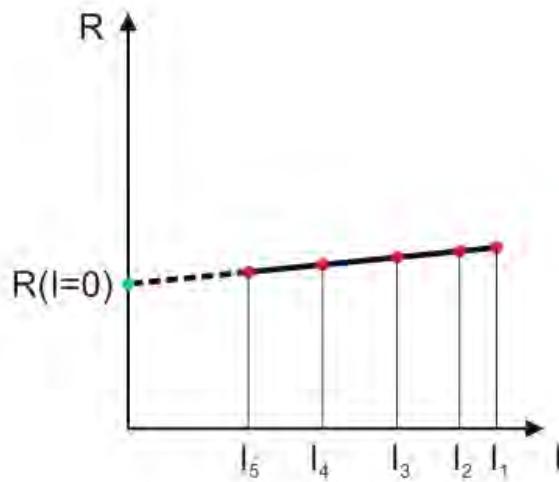


Figura 3: Multimetro Digitale

Autoriscaldamento

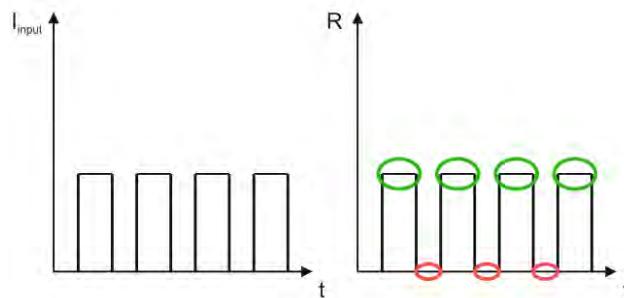
Come si tiene a bada l'autoriscaldamento? Questo infatti entra sempre in gioco come grandezza di influenza, è infatti causato da una corrente ed è inevitabile per misure in cui questa entra in gioco.

1. Si aumenta lo scambio termico;
2. Si diminuisce la tensione di alimentazione, ma questo implica una diminuzione della corrente sul circuito e quindi una diminuzione della sensibilità dello strumento.
3. Si effettuano più misure variando la corrente e stimando la misura di resistenza a $I = 0$.



L'intercetta della retta di interpolazione di più misure, è la misura che sarebbe ottenuta senza lo scorrimento di corrente.

4. Si usa una sorgente di alimentazione pulsata. Questa infatti permette il mantenimento di una elevata sensibilità limitando il calore dissipato.



Si usa in alimentazione un onda quadra e non si dà il tempo alla corrente di scorrere in modo da non far instaurare l'effetto Joule. Si danno perciò una serie di ON-OFF in rapida successione in modo da non far surriscaldare le resistenze.

Il limite di questa misurazione è che è una misura discreta, non continua e costante.

NOTE

6. MISURE DI DEFORMAZIONE, FORZA E PRESSIONE

Indice

Misure di Deformazione: estensimetri	2
Principio di funzionamento	3
Estensimetri a semiconduttore	4
Schemi di funzionamento	5
Grandezze di influenza	6
Esempio	7
Misure di Forza	8
Criteri di progetto	8
Eliminazione dell'effetto di carichi trasversali	9
Celle di carico a Trazione e Compressione	10
Celle di carico a Flessione	12
Lamina Incastrata	14
Celle di carico a Taglio	15
Celle di carico a Torsione	16
Cella Differenziale	17
Torsiometro Ottico I	18
Torsiometro Ottico II	18
Celle di carico Multicomponente	19
Misura di F_z, M_y, M_z	19
Misura della Forza F_z	20
Misura del Momento M_x	21
Misura del Momento M_y	22
Taratura delle Celle di Carico	23
Taratura statica	23
Taratura dinamica	24
Misure di Pressione	25
Manometro a colonna di liquido	25
Manometri a deformazione	27
Manometro Bourdon - configurazione a C	27
Tubo Bourdon a spirale	29
Tubo Bourdon ad elica	29
Sezione del tubo	29
Manometro a diaframma	30
Diaframma Estensimetrico	31
Sistemi di misura per basse pressioni	32
Vacuometro di McLeod	32
Vacuometro a conducibilità termica	33
Vacuometro a conducibilità termica - a termocoppia	33
Vacuometro a conducibilità termica - Pirani	33

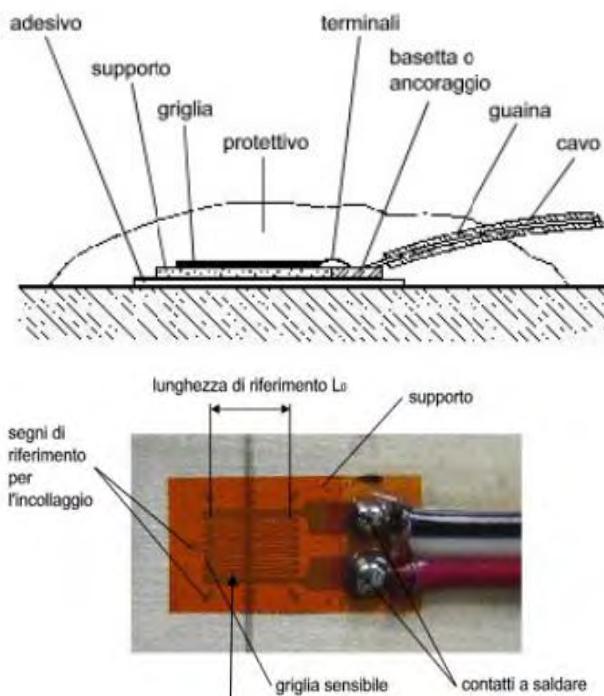
Misure di Deformazione: estensimetri

La misura della deformazione costituisce un settore delle misure meccaniche tra i più sviluppati e diffusi nell'ingegneria industriale, è infatti utilizzata per la determinazione di grandezze fisiche come forza e pressione.

Il trasduttore più utilizzato è l'estensimetro elettrico a resistenza e posto all'interno delle celle di carico permettono la valutazione e la misurazione di forze.

Il passaggio più delicato nell'utilizzo di un estensimetro è l'incollaggio sull'elemento deformabile, prima di tutto perché essendo gli incollaggi molto resistenti, lo strumento diviene monouso e poi perché un errato incollaggio può causare una misura errata.

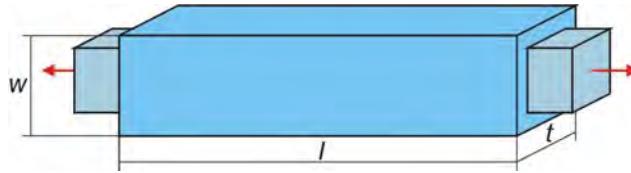
L'incollaggio deve perciò evitare la presenza di microbolle, per le quali si misurerrebbe la deformazione dell'aria e non dell'elemento oggetto dell'incollaggio, allo stesso tempo però le resistenze non devono neanche entrare in contatto con l'elemento metallico oggetto della misurazione, altrimenti si cortocircuita il sistema; in più la misura degli estensimetri è sensibile all'orientamento assunto dal proprio asse longitudinale.



Principio di funzionamento

Come si valuta una deformazione attraverso una variazione di resistenza?

$$R = \rho \frac{l}{S}$$



$$R = \rho \frac{l}{wt} \Rightarrow dR = \frac{l}{wt} d\rho + \frac{\rho}{wt} dl - \frac{\rho l}{w^2 t} dw - \frac{\rho l}{wt^2} dt$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dw}{w} - \frac{dt}{t}$$

Dove si individuano le deformazioni longitudinali:

$$\varepsilon_l = \frac{dl}{l}$$

E quelle trasversali, esprimibili secondo quelle longitudinali attraverso il modulo di Poisson ν :

$$\varepsilon_t = \frac{dt}{t} = -\nu \varepsilon_l \quad \varepsilon_w = \frac{dw}{w} = -\nu \varepsilon_l$$

Per cui:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + (1 + 2\nu) \varepsilon_l$$

Introduco il fattore di taratura dell'estensimetro come:

$$K = \frac{dR/R}{\varepsilon_l} = \underbrace{\frac{d\rho/\rho}{\varepsilon_l}}_{\text{Effetto piezoresistivo}} + \underbrace{(1 + 2\nu)}_{\text{Effetto geometrico}}$$

In modo che:

$$\frac{\Delta R}{R} = K \varepsilon_l$$

È l'effetto piezoresistivo che permette di misurare una variazione di resistenza con la deformazione, mentre l'effetto geometrico dipende invece dal solo modulo di Poisson ν del materiale.

Se l'effetto piezoresistivo fosse nullo si avrebbe $K \approx 1.6$.

In realtà il fattore K calcolato sperimentalmente per gli estensimetri da applicare su acciaio o alluminio è circa pari a 2.

Estensimetri a semiconduttore

Gli estensimetri a semiconduttore sfruttano proprio l'effetto piezoresistivo, infatti la piezoresistività aumenta in funzione del drogaggio del semiconduttore: $K \approx 200$ tipo p , $K \approx -125$ tipo n .

Trascurando l'effetto geometrico si ha:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \pi_l \sigma_l + \pi_t \sigma_t$$

Con π_l, π_t rispettivamente coefficienti di piezoresistività longitudinale e trasversa, dipendenti dal tipo di drogaggio. La sensibilità dell'estensimetro è tale per cui, essendo:

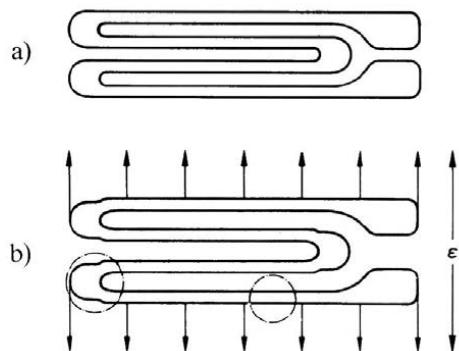
$$\frac{\Delta R}{R} = K\varepsilon \Rightarrow S = \frac{d\varepsilon}{R} = KR$$

Per ottenere allora un estensimetro più sensibile a parità di resistività si possono percorrere due vie, quella per la quale si sceglie una resistenza maggiore ma di contro si ottiene una maggiore dimensione dell'estensimetro; oppure quella per la quale si sceglie un alto valore di K , e quindi estensimetri piezoresistivi, che di contro hanno un'alta sensibilità alla temperatura. Gli estensimetri piezoresistivi sono miniaturizzabili.

Come si aumenta la resistenza?

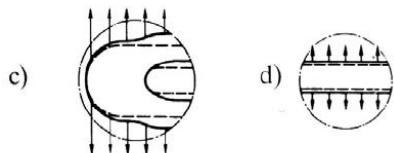
$$R = \rho \frac{l}{S}$$

A resistività costante, si può scegliere un aumento di lunghezza o una diminuzione di sezione.



L'errore in questo caso sta nel fatto che il sensore ottiene una misura mediata e non puntuale come la si vorrebbe, allora verrebbe automatico diminuirne le dimensioni, ma se $l \downarrow \Rightarrow R \downarrow$ ed $S \downarrow$, cosa assolutamente non auspicabile, e quindi si aumentano le dimensioni con una configurazione a griglia, che mantenga elevata la sensibilità ma permetta ugualmente una misura puntuale, locale.

Una configurazione a griglia però è succube di errori dovuti al posizionamento degli assi delle resistenze secondo direzioni trasversali non oggetto della misurazione:

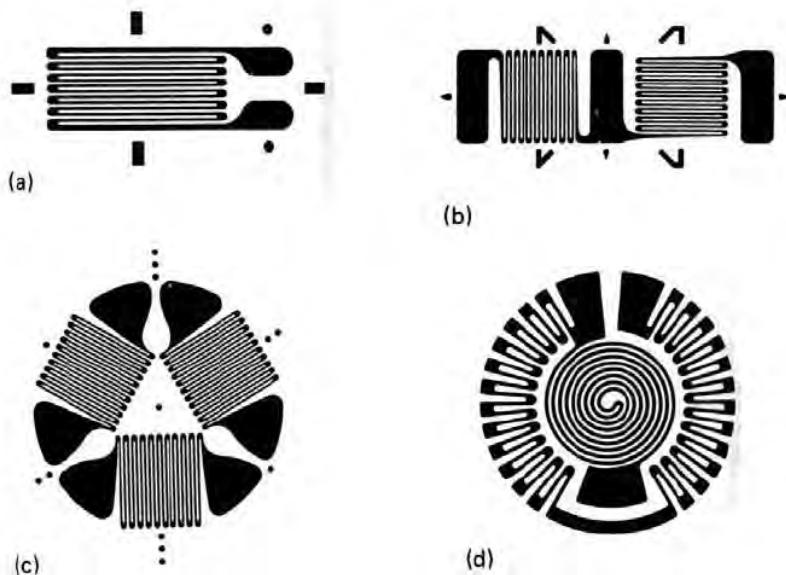


The causes of transverse sensitivity in strain gages

- a) initial condition
- b) under transverse strain
- c) deformation in the region of the transverse connections
- d) deformation in the other regions of the measuring grid

Per ovviare a questo inconveniente si ingrandisce la sezione che non si vuole misurare, in questo modo, attraverso la legge della resistenza, si nota subito che all'aumentare della sezione si misura una variazione di resistenza sempre minore: si sono resi trascurabili gli effetti sull'estensimetro delle deformazioni trasversali.

Schemi di funzionamento



Nei casi in figura è possibile misurare deformazioni :

- (a) trazione & compress.
- (b) XY con assi a 90°
- (c) rosetta con assi 120°
- (d) radiale e circonferenz.

Valori tipici di resistenza base variano tra $100 \div 1000\Omega$.

Grandezze di influenza

Un grande problema per gli estensimetri è dato dalle grandezze di influenza, all'interno del trasduttore cioè, oltre a misurare una variazione di resistenza dovuta alla deformazione, si misura una variazione di resistenza dovuta anche alla temperatura, che se fosse ambientale potrebbe essere mantenuta sotto controllo, ma dato che una misura di resistenza non avviene senza un'alimentazione e quindi un passaggio di corrente, si manifesta come un inevitabile autoriscaldamento per effetto Joule.

$$\frac{\Delta R}{R}_{\text{finale}} = \frac{\Delta R}{R} \frac{\Delta T}{\varepsilon} + \frac{\Delta R}{R} \varepsilon$$

I contributi che si identificano non appena sussiste uno squilibrio di temperatura sono:

- Effetto Joule

$$\frac{\Delta R'}{R} = \alpha \Delta T$$

- Deformazione della griglia dell'estensimetro

$$\frac{\Delta l'}{l} = \beta' \Delta T$$

- Deformazione del materiale al di sotto dell'estensimetro

$$\frac{\Delta l''}{l} = \beta'' \Delta T$$

L'effetto che si ottiene è perciò quello di un allungamento differenziale tra la griglia dell'estensimetro ed il materiale del pezzo sottostante:

$$\frac{\Delta l}{l} = (\beta' - \beta'') \Delta T$$

Che porta ad un'ulteriore variazione di resistenza misurata, che si aggiunge a quella già ottenuta per effetto Joule.

$$\frac{\Delta R''}{R} = K(\beta' - \beta'') \Delta T$$

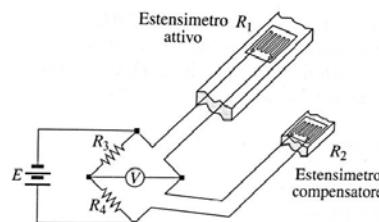
Un uscita si ha così una somma di effetti voluti, oggetto della misurazione, ed effetti non voluti dovuti alle grandezze d'influenza:

$$\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta R}{R} \varepsilon$$

$$K\varepsilon + [\alpha + K(\beta' - \beta'') \Delta T]$$

Come si tengono a bada le grandezze d'influenza?

- Si ricorre ad un Ponte di Wheatstone a due estensimetri, uno attivo che misurerà la deformazione in oggetto, a cui viene collegato sul ramo contiguo un estensimetro compensatore; questo, non essendo soggetto alla deformazione darà la sua quota parte dovuta alle grandezze di influenza.



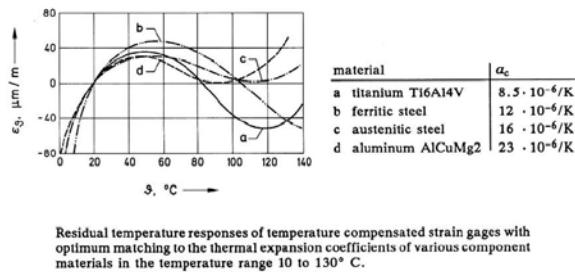
$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R} - \frac{\Delta R_2}{R} \right) = \frac{1}{4} \left(\underbrace{\frac{\Delta R_{\text{misurato}}}{R}}_{\frac{\Delta R_1}{R}} + \underbrace{\frac{\Delta R_{\text{influenza}}}{R}}_{\frac{\Delta R_1}{R}} - \underbrace{\frac{\Delta R_{\text{influenza}}}{R}}_{\frac{\Delta R_2}{R}} \right)$$

Col Ponte di Wheatstone si compensano automaticamente le variazioni di resistenza.

- Equivalentemente si può ricorrere ad estensimetri autocompensati in temperatura, dove si minimizza il contributo dovuto alla temperatura scegliendo opportunamente, per ogni materiale da studiare l'estensimetro che meglio approssima la relazione:

$$[\alpha + K(\beta' - \beta'')\Delta T] = 0$$

Questa tipologia di estensimetri annulla gli effetti termici ma è utilizzabile per specifici materiali e affinché valgano le ipotesi di misurare bassi ΔT , le variazioni di temperatura devono essere contenute $\sim 20^\circ C$.



Esempio

L'unità di misura della deformazione "non esiste", dato che questa è adimensionale, nelle applicazioni meccaniche, dato che le deformazioni misurate sono dell'ordine dei micrometri, si usa spesso la quantità:

$$\mu m \ m = 10^{-6} = \mu\varepsilon = \text{microstrength}$$

In questo modo, piuttosto che dire la deformazione è pari a $100 \cdot 10^{-6}$ si dice che la deformazione è pari a $100\mu\varepsilon$.

Ora, avendo una deformazione pari a $100\mu\varepsilon$ ed un estensimetro di resistenza 120Ω , la variazione di resistenza è pari a:

$$\frac{\Delta R}{R} = K\varepsilon \Rightarrow \Delta R = RK\varepsilon = 120\Omega \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0.024\Omega = 24m\Omega$$

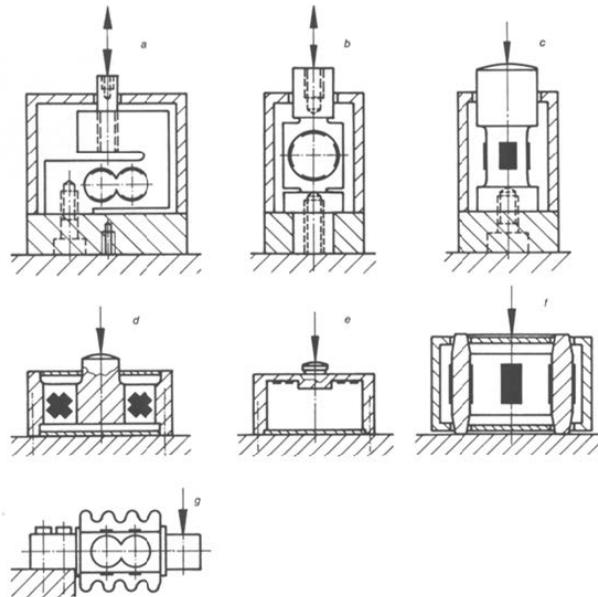
Per effettuare la misura si utilizzano o il metodo di zero, valutando quindi la resistenza quando $\Delta V = 0$, oppure il metodo a deflessione, quest'ultimo risulta il più utilizzato per misurare una deformazione variabile nel tempo.

Misure di Forza

Per misurare una forza si utilizzano le celle di carico, queste sono costituite da un elemento elastico (trasduttore primario) che converte forza e torsione in deflessione o deformazione ed uno o più trasduttori secondari che convertono la deflessione o la deformazione in un'altra grandezza fisica generalmente di natura elettrica.

$$F \text{ o } M \rightarrow \boxed{\text{trasduttore}} \rightarrow \Delta V$$

$$F \text{ o } M \rightarrow \boxed{I} \rightarrow \varepsilon \rightarrow \boxed{II} \rightarrow \frac{\Delta R}{R} \rightarrow \boxed{PW} \rightarrow \Delta V$$



Le celle di carico devono coprire la maggior parte delle applicazioni, per questo se ne trovano delle più svariate dimensioni ma sempre di tre tipologie, o a Trazione o a Flessione o a Taglio.

Una cella di carico multicomponente riunisce sotto un unico strumento le tre tipologie appena viste.

Criteri di progetto

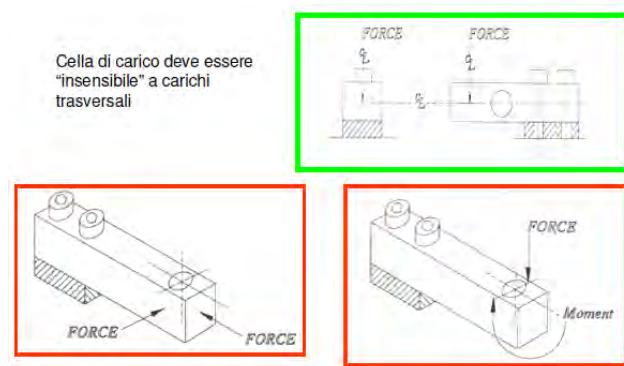
Come si progetta l'elemento elastico che si deve deformare? Come si progettano i trasduttori?

Ipotesi di progetto dell'elemento elastico:

1. L'applicazione della forza determina una variazione lineare del campo di deformazioni rilevato dall'estensimetro: si deve rimanere all'interno del limite elastico;
2. Frequenza di oscillazione propria di valore sufficientemente elevato: si deve evitare la risonanza e l'amplificazione dinamica degli effetti $\omega_n = \sqrt{k/m} \neq \omega_0$;
3. Sufficiente valore del campo delle deformazioni nella zona di applicazione degli estensimetri elettrici a resistenza ($1000 - 1700 \mu\text{m}/\text{m}$ a carico nominale): si devono avere delle dimensioni atte a misurare la deformazione;
4. Uniformità della distribuzione delle deformazioni nell'area esaminata dagli estensimetri elettrici a resistenza: la zona di incollaggio deve essere uniforme, senza presenza di microbolle o variazioni delle caratteristiche superficiali del materiale;
5. La zona nella quale sono applicati gli estensimetri deve essere quella dove si manifestano le deformazioni di valore più elevato;
6. Realizzazione dell'elemento elastico in un solo pezzo;

7. Disegno capace di facilitare l'installazione degli estensimetri, l'elemento elastico deve predisporre degli alloggiamenti per l'installazione degli estensimetri;
8. Protezione dai sovraccarichi (circa il 200% del FS e 300-500% FS rottura cella): non si vuole superare il limite elastico.
9. Modesto spostamento del punto di applicazione della forza dovuto alla deflessione dell'elemento elastico: non si deve variare la distanza di applicazione della forza;
10. Modesti effetti dovuti a variazioni della temperatura di lavoro.
11. Insensibilità ai carichi trasversali.

Modificando la dimensione dell'elemento elastico si fa in modo che questo sia deformabile nella zona in cui interessa la misura e indeformabile e rigido dove NON interessa la misura.

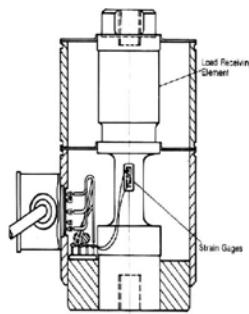


Eliminazione dell'effetto di carichi trasversali

Per evitare e limitare questi effetti la prima idea che si sviluppa è quella di "insottilire" l'elemento elastico per renderlo più deformabile, ma inevitabilmente sia a taglio che a trazione si romperebbe, si usano allora degli elementi a cedevolezza differenziata, questi infatti nascono dalla necessità di svincolare la cella di carico dalla base e dalla forza applicata.

Si usano dei dischi che permettono lo spostamento dell'elemento elastico nella direzione di deformazione interessata dalla misurazione, ma lo bloccano nelle altre direzioni.

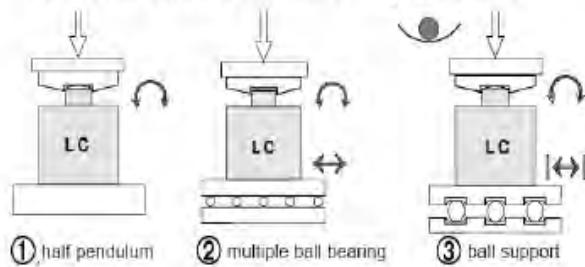
In figura l'elemento può muoversi \uparrow ma è impedito in \leftrightarrow .



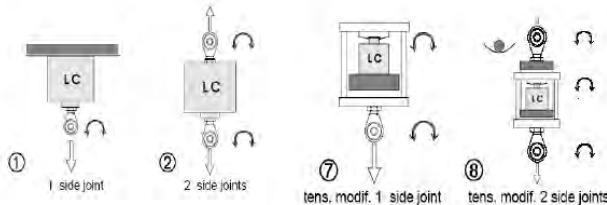
Un'altra misura adottata per limitare gli spostamenti trasversali è l'applicazione di disaccoppiatori.

Questi, disaccoppiando la forza svincolano il vincolo che determinerebbe la rottura dell'elemento elastico in modo da non opporsi alla forza indesiderata che subisce.

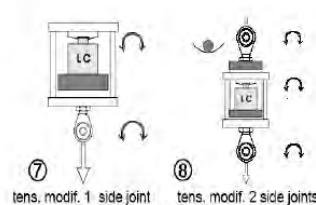
Celle di carico a sola compressione



Celle di carico a sola trazione

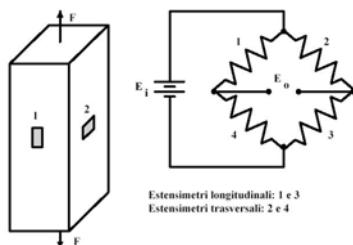


Celle di carico a sola compressione



Celle di carico a Trazione e Compressione

L'asse sensibile di questa tipologia di celle di carico è quello verticale, l'elemento elastico si muove $\uparrow\downarrow$.



Si schematizza come un parallelepipedo a cui è applicata una forza assiale e si misura una deformazione assiale:

$$\varepsilon_a = \frac{F}{AE} \quad \varepsilon_t = -\nu\varepsilon_a$$

Il collegamento degli estensimetri avviene attraverso il più che collaudato Ponte di Wheatstone, in cui gli estensimetri 1 e 3, opposti, sono quelli sensibili alla deformazione assiale, oggetto della misura:

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_3}{R_3} = K\varepsilon_a = K \frac{F}{AE}$$

In questo modo si ottiene un uscita pari a:

$$\frac{\Delta V}{E} = \frac{1}{2} \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{1}{2} K \frac{F}{AE}$$

Ovvero il doppio di quella che si sarebbe ottenuta applicando un solo estensimetro assiale.

Come si aumenta la sensibilità?

Applicando due estensimetri contigui a 1 e 3 che misurino una variazione opposta a questi e tra di loro contrapposti, 2 e 4.

Questi estensimetri ora trasversali misurano la compressione dell'elemento elastico:

$$\frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{\Delta R_4}{R_4} = K\varepsilon_t = -K\nu \frac{F}{AE}$$

L'uscita che si ottiene sarà data infine da:

$$\frac{\Delta V}{E_i} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) = \frac{1}{4} \left[2K \frac{F}{AE} - \left(-2K\nu \frac{F}{AE} \right) \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{2KF(1+\nu)}{AE} \right]$$

$$\frac{\Delta V}{E_i} = \frac{KF(1+\nu)}{2AE}$$

Invertendo si ottiene:

$$F = \frac{\Delta V}{E_i} \frac{2AE}{K(1+\nu)}$$

La sensibilità è:

$$S = \frac{\Delta V}{F} = \frac{K(1+\nu)E_i}{2AE}$$

Questa dipende:

- Dalla geometria dell'elemento elastico, ossia dalla sezione assiale A .
 $A \downarrow$ implica l'utilizzo di un elemento elastico più piccolo, ma un $A \downarrow$ implica anche una sezione di materiale resistente molto più bassa, ovvero entità minori di forze misurabili.
- Dal materiale scelto per realizzare l'elemento elastico di connessione, ossia E e ν .
 $E \downarrow$ si ottiene utilizzando materiali dal modulo elastico più marcato, come l'alluminio.
- Dagli estensimetri utilizzati, ossia dal fattore di taratura K .
Un $K \uparrow$ si può ottenere tramite l'impiego di estensimetri piezoresistivi.
- Dalla tensione di alimentazione utilizzata per il Ponte di Wheatstone E_i .
Una $E_i \uparrow$ implica però un rischio maggiore di incorrere nell'effetto Joule.

Notare tuttavia come sia impossibile ottenere una sensibilità unitaria ed intera perché questa sarà sempre funzione del modulo di Poisson, in ogni caso sarà sempre maggiore di quella ottenuta utilizzando solamente due estensimetri.

La portata massima della cella di carico dipende così dal limite elastico del materiale σ_F :

$$\left(\frac{\Delta V}{E_i} \right)_{\max} = \frac{K\sigma_F(1+\nu)}{2AE}$$

Con:

$$F_{\max} = A\sigma_F$$

All'aumentare della sezione trasversale aumenta si il valore della portata massima, ma diminuisce inevitabilmente la sensibilità.

La sensibilità di una cella di carico si misura:

$$S = \frac{\Delta V}{F} = \left[\frac{mV}{N} \right]$$

Generalmente a catalogo la sensibilità di una cella di carico viene espressa secondo una sensibilità nominale definita come mV/V a Fondo Scala (FS) ed un valore tipico è $2mV/V$.

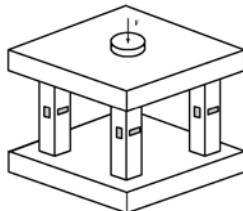
Per ottenere la sensibilità propria della cella di carico a partire da quella nominale:

$$\left[\frac{mV}{\mathcal{V}} \cdot \frac{\mathcal{E}_i}{FS} \right] = \left[\frac{mV}{N} \right]$$

E quindi l'operazione da effettuare è la seguente:

$$S = S_n \cdot \frac{E_i}{FS}$$

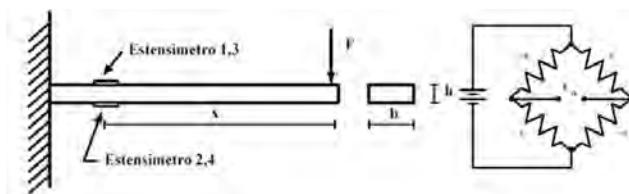
Moltiplicando per un fattore 1000 se si vuole una sensibilità in $\left[\frac{V}{N}\right]$ E se si volesse misurare forze e masse nell'ordine delle tonnellate? Dato che si usa dimensionarlo con una sezione assiale 5 volte maggiore della sezione trasversale per evitare effetti di bordo dovuti all'anisotropia tra trazione e compressione, si costruirebbero elementi elastici enormi, ciò che si fa è distribuire e riequilibrare la forza tra più elementi elastici e la misura in oggetto diventa possibile attraverso 4 punti di Wheatstone ed un circuito sommatore.



Celle di carico a Flessione

Sono costituite da una lamina incastrata che studia e misura la deformazione a flessione.

Gli estensimetri si mettono sempre nella zona di massima deformazione, si collocano il più possibile vicino al vincolo d'incastro.



Come si è visto quando si è trattato il Ponte di Wheatstone, si incollano 1, 3 sopra e 2, 4 sotto, in modo che misurino deformazioni uguali sui rami opposti e opposte sui rami contigui:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_4 = \frac{6M}{EA} = \frac{6Fx}{Ebh^2}$$

In cui b ed h sono rispettivamente la larghezza e l'altezza della lamina, x è la distanza del punto di applicazione della forza dal punto medio dell'area esaminata dagli estensimetri ed E è il modulo di Young del materiale costituente la lamina.

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_3}{R_3} = -\frac{\Delta R_2}{R_2} = -\frac{\Delta R_4}{R_4} = K \frac{6Fx}{Ebh^2}$$

In questo modo si ottiene, al contrario della cella a trazione dove non si poteva eliminare il contributo dato da Poisson, una sensibilità intera:

$$\frac{\Delta V}{E_i} = K \frac{6Fx}{Ebh^2}$$

Invertendo:

$$F = \frac{\Delta V}{E_i} \frac{Ebh^2}{K6Fx}$$

Per cui:

$$S = \frac{E_0}{F} = \frac{K6FxE_i}{Ebh^2}$$

La sensibilità dipende perciò da:

- La geometria scelta per la lamina, attraverso b ed h .
 $A \downarrow$ e quindi scegliendo una mensola più sottile si giunge tuttavia prima allo snervamento.
- Il modulo elastico del materiale utilizzato per la lamina, E .
 $E \downarrow$ scegliendo magari un materiale come l'alluminio.
- Il posizionamento del punto di applicazione del carico rispetto a dove sono stati applicati gli estensimetri, x .
 $x \uparrow$ si devono scegliere punti di applicazione e rilevamento sufficientemente lontani.
- La sensibilità degli estensimetri, K .
Scegliendoli ad esempio piezoresistivi.
- Il valore della tensione di alimentazione scelta per il ponte, E_i .
Cercando di limitare quanto possibile l'autorisaldamento.

Le celle di carico a flessione sono di loro natura più sensibili di quelle a trazione/compressione, in queste ultime infatti erano stati usati due estensimetri per misurare la deformazione assiale e due estensimetri per quella trasversale, per cui c'era di mezzo un Poisson, mentre in questo caso tutti e quattro gli estensimetri misurano la stessa tipologia deformazione a flessione.

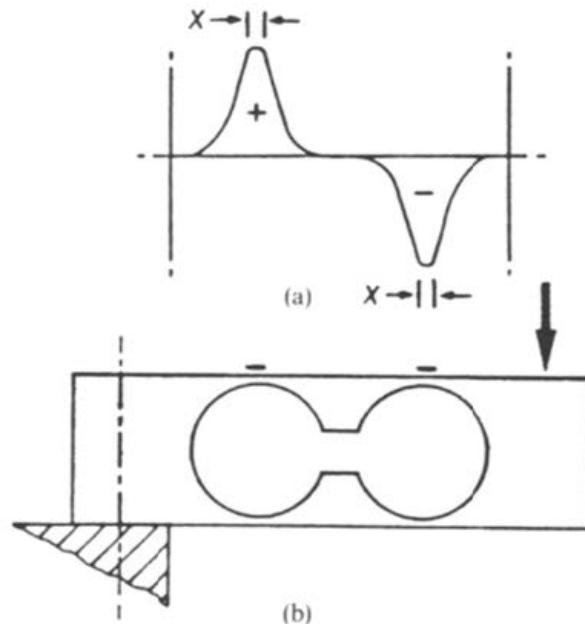
Applicando gli estensimetri in prossimità dell'incastro, come si è anticipato, questi percepiscono il momento flettente massimo:

$$\sigma_{\max} = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{6Fx}{Ebh^2} \quad F_{\max} = \frac{\sigma_{\max}bh^2}{6x}$$

In cui σ_{\max} è il limite elastico del materiale.

Se l'obiettivo è quello di ottenere un elevato campo di misura, o si diminuisce la distanza x di applicazione del momento o si aumenta la sezione resistente, ma entrambe portano ad un crollo della sensibilità.

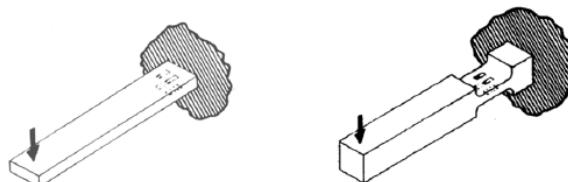
$$\left(\frac{\Delta V}{E_i}\right)_{\max}^{\text{flessione}} = \frac{K\sigma_{\max}}{E} \quad \text{VS} \quad \left(\frac{\Delta V}{E_i}\right)_{\max}^{\text{trazione}} = \frac{K\sigma_{\max}(1+\nu)}{2AE}$$



Lamina Incastrata

- ✓ Elevata sensibilità;
- ✓ Presenza di due superfici nelle quali si manifestano deformazioni di segno opposto;
- ✓ Applicazione facile degli estensimetri;
- ✓ Se lo spessore della lamina è sufficientemente piccolo si ottengono evidenti vantaggi per la compensazione degli effetti indotti dalla temperatura: gli estensimetri subiscono lo stesso ΔT e il contributo delle grandezze di influenza si sottrae.
- ✗ La conversione della forza applicata in momento flettente viene effettuata su tutta la lamina e non solamente nella zona di applicazione degli estensimetri.

Per ovviare a questo inconveniente si rastrema l'elemento nella zona d'applicazione degli estensimetri e lo si ingrandisce nel punto di applicazione della forza, in questo modo a sentire la deformazione sarà soltanto la zona di applicazione degli estensimetri.



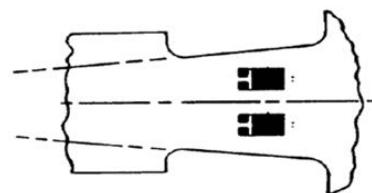
La deformazione variabile su tutto il pezzo si contiene ricordando inoltre che questa:

$$\varepsilon \sim \frac{x}{bh^2}$$

Variando inevitabilmente la x , si può manipolare b per ottenere sempre un rapporto costante, si fa in modo che:

$$\frac{x}{b} = \text{cost}$$

Rastremando il pezzo.

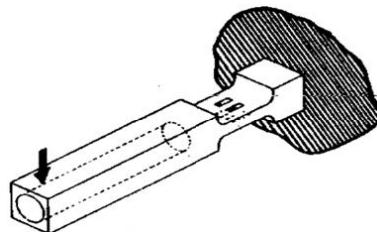


- ✗ La frequenza propria è tendenzialmente di valore contenuto.

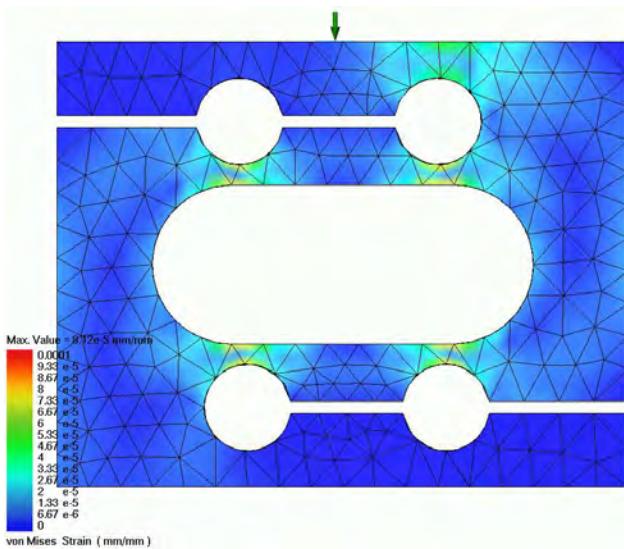
Per ovviare a questo problema si sceglie di forare longitudinalmente il pezzo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Come $M \downarrow$, $\omega_n \uparrow$ e si aumenta la banda passante del sistema.

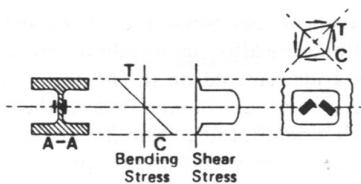
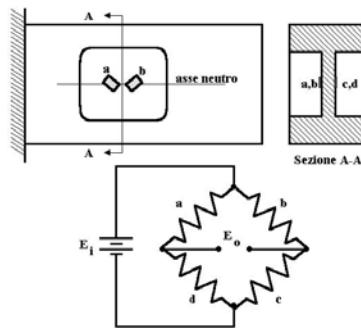


Inoltre, per ovviare problemi di compensazione, se scelgono geometrie particolarmente studiate come quella a S, dove la zona di massima deformazione, e quindi dove si applicano gli estensimetri, è quella centrale, e non più le lamine, le quali, a flessione, longitudinalmente possono andare contemporaneamente a compressione e a trazione sui rami contigui.



Celle di carico a Taglio

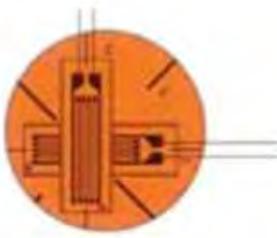
La sezione dell'elemento elastico di una cella di carico a taglio è nient'altro che una trave a doppia T, dove gli estensimetri vengono posti a 45° esattamente sull'asse neutro di tale sezione in modo da non sentire alcuna influenza delle sollecitazioni a flessione, ma solo la massima della sollecitazione di taglio.



- ✓ Modesto ingombro trasversale;
- ✓ La massa dell'equipaggio mobile del trasduttore è di valore contenuto;
- ✓ Intrinseca compattezza e rigidezza;
- ✓ Riescono a rilevare fenomeni rapidamente variabili nel tempo (2-20kHz), alta variabilità dell'applicazione della forza;
- ✓ Estensimetri protetti.
- ✗ Non agevole applicazione degli estensimetri;
- ✗ La portata minima non può essere ridotta oltre un certo limite poiché la sezione equipaggiata con estensimetri non può essere troppo sottile per evitare fenomeni di instabilità;

✗ Non completa uniformità del campo delle deformazioni al di sotto degli estensimetri.

Per risolvere questo problema si ricorre sia all'utilizzo di rosette estensimetriche che alla scelta di una configurazione più compatta.

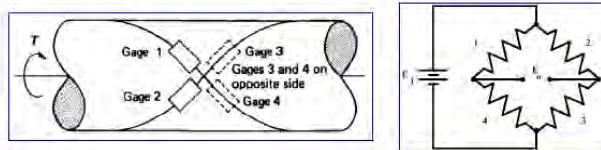


Celle di carico a Torsione

In che modo e che tipo di elemento elastico misura la deformazione a torsione?

I torsiometri possono essere installati sia su alberi fissi che su alberi rotanti, sia vincolando l'albero che interrompendolo.

Un torsiometro è schematizzabile come un primo trasduttore della figura un elemento elastico costituito da un albero di sezione circolare, ed un secondo trasduttore costituito da estensimetri elettrici a resistenza.



Gli estensimetri così posti, sulla superficie misurano, a 45° ad elica, la massima deformazione alla massima sensibilità possibile.

La torsione alla Jourasky per sezione circolare era:

$$\tau_{\max} = \frac{TD}{2J} = \frac{16T}{\pi D^3}$$

In cui T è la torsione applicata, D è il diametro dell'albero, J è il momento d'inerzia polare della sezione circolare, e τ_{\max} è la tensione tangenziale massima.

Per un albero circolare sollecitato a pura torsione, le tensioni normali sono nulle:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

Dunque, le tensioni principali saranno:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\max} = \frac{16T}{\pi D^3}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(\sigma_1 - \nu\sigma_2)}{E} = \frac{16T}{\pi D^3} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(\sigma_2 - \nu\sigma_1)}{E} = -\frac{16T}{\pi D^3} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right)$$

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = -\frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{\Delta R_3}{R_3} = -\frac{\Delta R_4}{R_4} = K \frac{16T}{\pi D^3} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right)$$

Allora dal ponte di Wheatstone:

$$\frac{\Delta V}{E_i} = K \frac{16T}{\pi D^3} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right)$$

Invertendo, la torsione è pari a:

$$T = \frac{\Delta V}{E_i} \frac{\pi D^3 E}{16(1+\nu)K}$$

E la sensibilità è:

$$S = K \frac{16}{\pi D^3} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) E_i$$

Questa dipende:

- Dalla geometria scelta per l'albero, ovvero dal diametro D : $D \downarrow S \uparrow$;
- Dal materiale costituente l'albero, ossia dal modulo elastico E e dal modulo di Poisson ν ;
- Dagli estensimetri utilizzati, ossia dal fattore di taratura K ;
- Dalla tensione di alimentazione E_i applicata al ponte.

Il campo di misura è anche qui dato dalla tensione massima ammissibile che l'albero è in grado di sopportare:

$$T_{\max} = \frac{\pi D^3}{16} \sigma_{\max}$$

Per cui sostituendo:

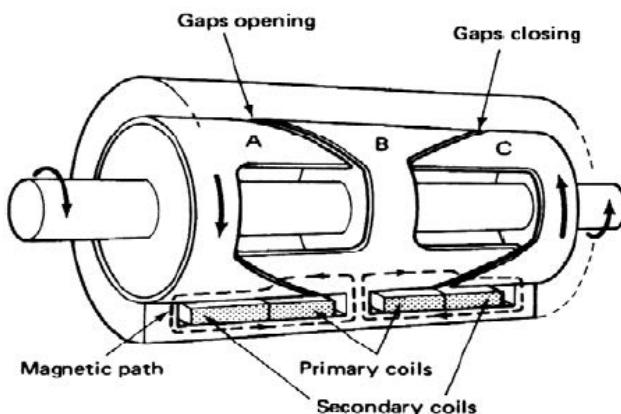
$$\left(\frac{E_0}{E_i} \right)_{\max} = K \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{\max}$$

E dipende da:

- Dal diametro D dell'elemento elastico;
- Dal limite elastico a torsione del materiale scelto;

Cella Differenziale

Questa cella di carico permette la misurazione della torsione senza l'utilizzo di estensimetri.



È costituita da una barra di torsione (elemento elastico) realizzato in materiale non ferromagnetico a cui vengono applicati tre elementi di materiale ad alta permeabilità magnetica, dei traferri (A, B, C) opportunamente distinti e distinguibili a cui a loro volta sono applicati avvolgimenti primari e secondari.

Dando la stessa intensità di corrente sui circuiti primari si viene a formare un circuito che senza deformazione in atto è simmetrico.

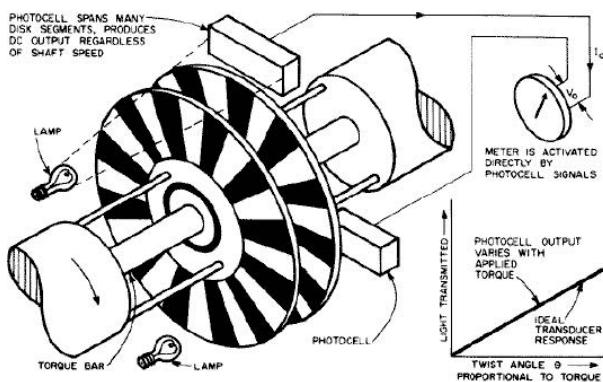
Ricordando che la mutua induzione dipende dal numero di spire degli avvolgimenti e dalla permeabilità magnetica, come la torsione prende luogo, viene a crearsi tra le separazioni dei tre elementi rispettivamente un gap, un allontanamento e dall'altro lato un contatto, un avvicinamento. Il gap determina spazio vuoto, quindi aria che intercorre ed una variabilità della permeabilità magnetica: in questo modo ci si accorge che sta avvenendo deformazione da torsione.

- $V_{AB} - V_{BC} = 0$ Assenza di torsione;
- $V_{AB} \downarrow V_{BC} \uparrow \Rightarrow \Delta V < 0 \Leftrightarrow AB$ si allontana e BC si avvicina;
- $V_{AB} \uparrow V_{BC} \downarrow \Rightarrow \Delta V > 0 \Leftrightarrow AB$ si avvicina e BC si allontana;

Infine, a valle del trasduttore uscirà un segnale la cui intensità sarà proporzionale al valore della torsione e la fase dipenderà dalla direzione della stessa.

Torsiometro Ottico I

Due identici dischi del tipo ad encoder angolare incrementale sono posti agli estremi dell'albero di torsione.



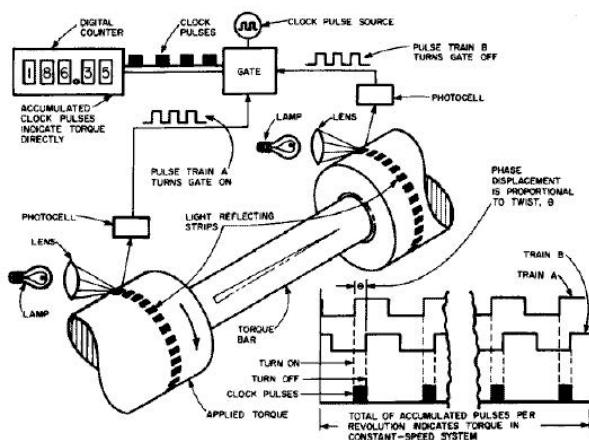
Ogni disco - intervallato da zone nere e zone trasparenti- è solidale all'albero, tra i due dischi è posto un alberino dal diametro molto più contenuto rispetto a quello esterno che si deformerà e accentuerà la deformazione, si predispongono poi un emettitore di luce ed un foto-rivelatore connesso ad un microamperometro, questo rileverà l'output delle fotocellule.

A riposo, in assenza di torsione, i dischi sono sfasati esattamente della metà, l'area di ricopertura è esattamente pari al 50%, la quantità di luce che traspone è esattamente la metà del totale.

Appena questo torsiometro ottico viene messo in rotazione relativa dalla torsione, le bande nere si allontanano \Rightarrow e l'intensità luminosa aumenta, se invece la rotazione relativa è invertita le bande nere si sovrappongono a quelle trasparenti \Leftarrow e l'intensità luminosa diminuisce.

Torsiometro Ottico II

Ciascun estremo della barra di torsione è equipaggiato con marker riflettenti che sono illuminati da luce collimata.



Questo tipo di torsiometro è prettamente utilizzata per alberi in movimento perché garantisce assenza di contatti tra le parti, i cavi di misurazione sono collegati al sistema di misura e non all'oggetto della misurazione.

Anche in questo caso l'albero dal diametro minore è indotto a deformarsi, mentre i diametri maggiori sulla circonferenza sono intervallati da tacche nere e riflettenti.

Una luce fissa al telaio viene collimata da una lente ad incidere su di una tacca per volta, in questo modo durante la rotazione la fotocellula legge una sequenza di ON/OFF, ovvero un'onda quadra che non dà la misura della torsione ma misura solo la presenza della luce.

Per luce riflessa dalla tacca l'onda quadra si accende, per luce assorbita dalla tacca l'onda quadra si spegne.

In assenza di torsione i segnali sono in fase e l'uscita è nulla, in presenza di torsione viene invece a crearsi una variazione dell'output in funzione dello sfasamento dei due segnali, il sistema misura così il tempo tra gli sfasamenti. Il segnale acquisito è di natura digitale e il segno della torsione si discrimina in funzione dello sfasamento tra i due segnali ottenuti agli estremi degli alberi.

Notare come il metodo di misura, al contrario di quanto accadeva con gli estensimetri, non sia applicato non più all'elemento elastico.

Celle di carico Multicomponente

Le celle di carico multicomponente possono misurare fino a 3 diverse componenti di forza e momento, in direzione x, y, z . In uscita si ottengono così dai due ai sei output.

È necessario perciò adottare un elemento deformabile a tutte le forze ed a tutti i momenti, perché lo stesso strumento deve misurare forze e momenti lungo più direzioni, e allora gli schemi tipici possono essere quelli che prevedono un unico elemento elastico e quattro estensimetri per ogni ponte estensimetrico oppure un unico elemento elastico e selezionate combinazioni di estensimetri su più punti estensimetrici.

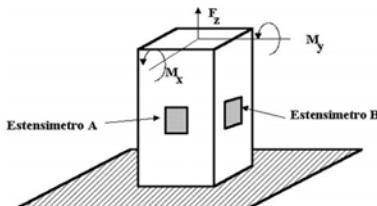
Diviene tuttavia necessario uno studio teorico-numerico per scegliere preventivamente il numero degli estensimetri elettrici da utilizzare (più è alto e più migliora l'accuratezza nella misura ma più aumenta il costo della catena di misura), il loro posizionamento sulla struttura ed il loro orientamento.

Misura di F_z, M_y, M_z

È necessario studiare in modo per il quale, se si vuole misurare F_z, M_y, M_z , le altre componenti F_x, F_y, M_x devono essere nulle.

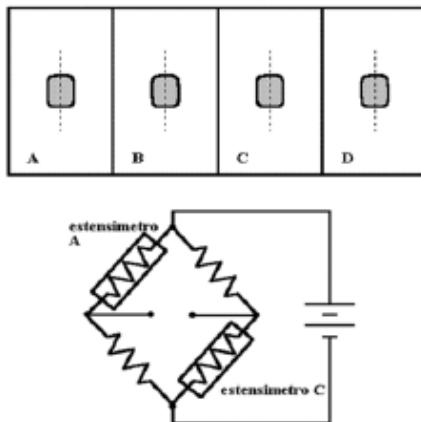
È una cella tipo a trazione, l'elemento elastico ha quattro estensimetri elettrici a resistenza con la differenza che sono presenti tre punti estensimetrici, uno per ogni grandezza da misurare.

I quattro estensimetri sono posti tutti secondo l'asse longitudinale, in questo modo non si misurano componenti trasversali.



Misura della Forza F_z

Se si collegano tutti e quattro gli estensimetri e si applica F_z , l'uscita per Ponte di Wheatstone per definizione è nulla perché questi misurano tutti la stessa deformazione, la soluzione a questo problema si ottiene considerando solo due estensimetri opposti.



Per la misura della forza, il Ponte di Wheatstone avrà soltanto due estensimetri sui due rami opposti **A** e **C**, le resistenze ulteriori sono resistenze di precisione e di completamento.

$$\frac{E_0}{E_i} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_A}{R_A} + \frac{\Delta R_C}{R_C} \right)$$

$$\frac{\Delta R_A}{R_A} = \frac{\Delta R_C}{R_C} = K\varepsilon = K \frac{F_z}{AE}$$

Per cui:

$$E_0 = \frac{KE_i}{2AE} F_z = S_{F_z} F_z$$

Similmente alla cella di carico a trazione ma con sensibilità inevitabilmente minore.

- In presenza di un M_x :

$$\frac{\Delta R_A}{R_A} = \frac{\Delta R_C}{R_C} = 0 \Rightarrow E_0 = 0$$

E l'uscita del ponte è nulla.

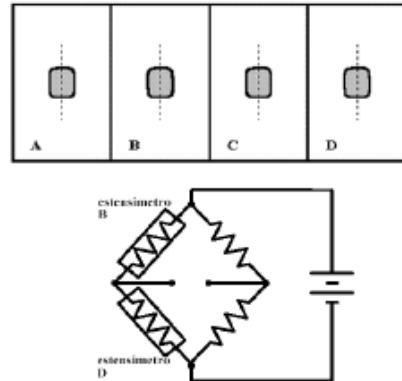
- In presenza di un M_y :

$$\frac{\Delta R_A}{R_A} = -\frac{\Delta R_C}{R_C} = \frac{6KM_y}{Eh^3} \Rightarrow E_0 = \frac{1}{4} \frac{\Delta R_A}{R_A} + \frac{\Delta R_C}{R_C} = 0$$

E l'uscita del ponte è nulla.

Misura del Momento M_x

Per la misura del momento gli estensimetri che ne misureranno la deformazione saranno quelli contigui **B** e **D**, in questo modo quando un estensimetro è in trazione l'altro è in compressione e viceversa.



$$\frac{E_0}{E_i} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_B}{R_B} - \frac{\Delta R_D}{R_D} \right)$$

$$\frac{\Delta R_B}{R_B} = -\frac{\Delta R_D}{R_D} = K\varepsilon = 6K \frac{M_x}{Eh^3}$$

Per cui:

$$E_0 = \frac{3KE_i}{Eh^3} M_x = S_{M_x} M_x$$

- In presenza di una forza F_z lungo l'asse:

$$\frac{\Delta R_B}{R_B} = \frac{\Delta R_D}{R_D} = K\varepsilon \Rightarrow E_0 = 0$$

E l'uscita del ponte è nulla.

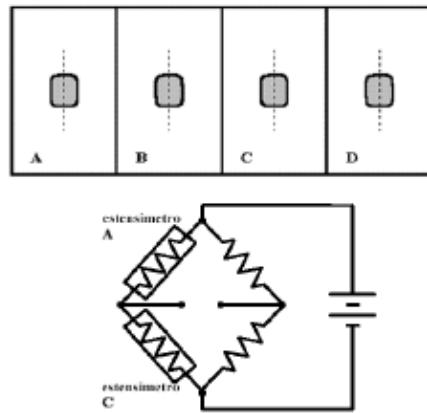
- In presenza di un M_y gli estensimetri **A** e **C** si deformano ma non sono all'interno del circuito, quindi:

$$\frac{\Delta R_B}{R_B} = \frac{\Delta R_D}{R_D} \simeq 0$$

E l'uscita del ponte è nulla.

Misura del Momento M_y

La misura del momento M_y è analoga a quella di M_x gli estensimetri interessati saranno sempre quelli contigui **A** e **C**, in modo da avere un estensimetro in trazione e l'altro in compressione e viceversa.



$$\frac{E_0}{E_i} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_A}{R_A} - \frac{\Delta R_C}{R_C} \right)$$

$$\frac{\Delta R_A}{R_A} = -\frac{\Delta R_C}{R_C} = K\varepsilon = 6K \frac{M_y}{Eh^3}$$

Per cui:

$$E_0 = \frac{3KE_i}{Eh^3} M_y = S_{M_y} M_y$$

- In presenza di una forza F_z lungo l'asse:

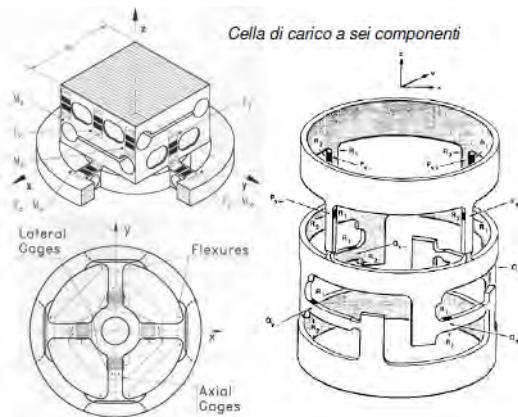
$$\frac{\Delta R_A}{R_A} = \frac{\Delta R_C}{R_C} = K\varepsilon \Rightarrow E_0 = 0$$

E l'uscita del ponte è nulla.

- In presenza di un M_x gli estensimetri **B** e **D** si deformano ma non sono all'interno del circuito, quindi:

$$\frac{\Delta R_A}{R_A} = \frac{\Delta R_C}{R_C} \simeq 0$$

E l'uscita del ponte è nulla.



Taratura delle Celle di Carico

Taratura statica

La taratura statica può essere effettuata per mezzo di:

- macchine di trazione alle quali si forniscono forze note;
- una cella di carico tarante in serie ad una cella di carico da tarare (a meno del peso di quella tarante), effettuando una taratura per confronto.
- utilizzo di pesi noti senza l'ausilio di alcuna cella tarante.

In questo caso in input viene fornita una $F = mg$ dove la g è nota con una sua incertezza, questa dipendente dal luogo in cui si effettua la taratura.

zona A	zona B	zona C	zona SICILIA 1	zona SICILIA 2
9,80497	9,80237	9,80165	9,80063	9,79181
LAZIO LIGURIA MARCHE PIEMONTE TOSCANA UMBRIA	EMILIA ROMAGNA FRIULI V. G. LOMBARIA TRENTINO ALTO A. VENETO	ABRUZZO BASILICATA CALABRIA MOLISE PUGLIA SARDEGNA	MESSINA PALERMO TRAPANI	AGRIGENTO CALTANISSETTA CATANIA ENNA RAGUSA SIRACUSA

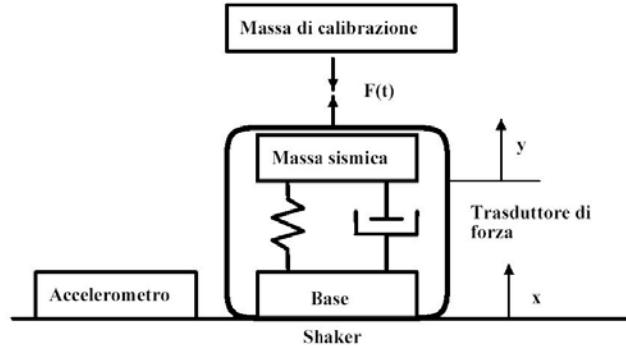
E la m con un'incertezza che si basa sul tipo di classe di massa campione acquistata, con distribuzione rettangolare data da $\pm a/\sqrt{3}$

Tabella 3 delle classi di precisione secondo OIML-R 111, per i pesi (toleranza $\pm \dots$ mg)

Valore nominale della massa	Classe E1 (mg)	Classe E2 (mg)	Classe F1 (mg)	Classe F2 (mg)	Classe M1 (mg)	Classe M2 (mg)	Classe M3 (mg)
1 mg	0,0020	0,0060	0,020	0,060	0,20		
2 mg	0,0020	0,0060	0,020	0,060	0,20		
5 mg	0,0020	0,0060	0,020	0,060	0,20		
10 mg	0,0020	0,0080	0,025	0,080	0,25		
20 mg	0,0030	0,010	0,030	0,10	0,30		
50 mg	0,0040	0,012	0,040	0,12	0,40		
100 mg	0,0050	0,015	0,050	0,15	0,50	1,5	
200 mg	0,0060	0,020	0,060	0,20	0,60	2,0	
500 mg	0,0080	0,025	0,080	0,25	0,80	2,5	
1 g	0,010	0,030	0,10	0,30	1,0	3,0	10
2 g	0,012	0,040	0,12	0,40	1,2	4,0	12
5 g	0,015	0,050	0,15	0,50	1,5	5,0	15
10 g	0,020	0,060	0,20	0,60	2,0	6,0	20
20 g	0,025	0,080	0,25	0,80	2,5	8,0	25
50 g	0,030	0,10	0,30	1,0	3,0	10	30
100 g	0,05	0,15	0,50	1,5	5,0	15	50
200 g	0,10	0,30	1,0	3,0	10	30	100
500 g	0,25	0,75	2,5	7,5	25	75	250
1 kg	0,50	1,5	5,0	15	50	150	500
2 kg	1,0	3,0	10	30	100	300	1000
5 kg	2,5	7,5	25	75	250	750	2500
10 kg	5,0	15	50	150	500	1500	5000
20 kg	10	30	100	300	1000	3000	10000
50 kg	25	75	250	750	2500	7500	25000

Taratura dinamica

La taratura dinamica prevede la presenza di una cella di carico composta da una massa sismica M_s intelaiata ad una base insieme ad una molla e ad uno smorzatore. Un accelerometro si preoccuperà infine di misurare l'accelerazione inerziale che lo shaker sta dando al sistema.



Si applicano masse di calibrazione M_c e si mette il sistema in vibrazione, si studia l'effetto sismico.

In x è il movimento della shaker mentre in y sarà l'uscita della cella di carico:

$$(m_s + m_c)\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x) = 0$$

In cui $(\dot{y} - \dot{x})$ è la differenza di velocità tra lo shaker e la cella di carico e $(y - x)$ è un termine legato all'elasticità della cella di carico, se non si deformasse non si avrebbero variazioni in x ed y .

Si sostituisca $z = y - x$:

$$(m_s + m_c)\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -(m_s + m_c)\ddot{x}$$

Se E_f ed E_a sono rispettivamente l'uscita in tensione della cella di carico e dell'accelerometro ed S_f con S_a le loro sensibilità:

$$E_f = S_f(m_s + m_c)\ddot{x}$$

Le grandezze dell'accelerometro si misurano in unità di $g = \frac{\ddot{x}}{g}$.

$$E_a = S_a \frac{\ddot{x}}{g}$$

$$\frac{E_f}{E_a} = \frac{S_f}{S_a}(m_s + m_c)g = \frac{S_f}{S_a}(W_s + W_c)$$

Ripetendo lo stesso procedimento variando le masse di calibrazione si giunge ad una retta di regressione:



$$\frac{E_f}{E_a} = \frac{S_f}{S_a}(W_s + W_c)$$

Con la quale si può calcolare il coefficiente angolare $s = \frac{S_f}{S_a}$ ed infine giungere alla sensibilità della cella di carico:

$$S_f = s \cdot S_a$$

Misure di Pressione

La pressione è definita come rapporto tra la forza F e la superficie A su cui agisce:

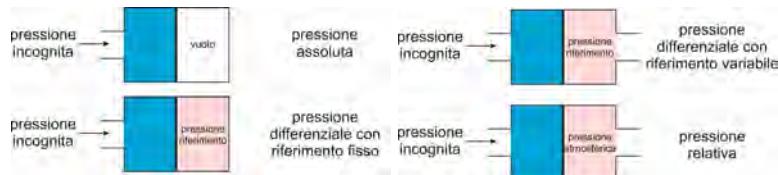
$$P = \frac{F}{A}$$

La pressione tanto maggiore quanto minore è la superficie sulla quale agisce una uguale forza.

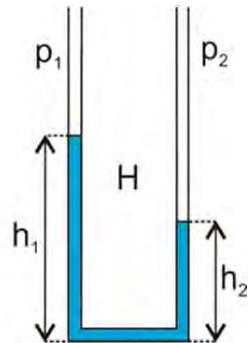
Come unità di misura ha il pascal: $Pa = \frac{N}{m^2}$.

I sensori maggiormente usati per la misura della pressione sono i manometri ad U o a deformazione.

Un manometro può misurare:



Manometro a colonna di liquido
Misura della pressione atmosferica



$$\Delta P \rightarrow \square \rightarrow H$$

Con un tubo ad U contenente mercurio, dopo aver fatto il vuoto il mercurio raggiunge un dislivello H pari a 760 mm equilibrando la pressione atmosferica $1atm = 76cmHg$, se $\gamma_{Hg} = g\rho_{Hg}$:

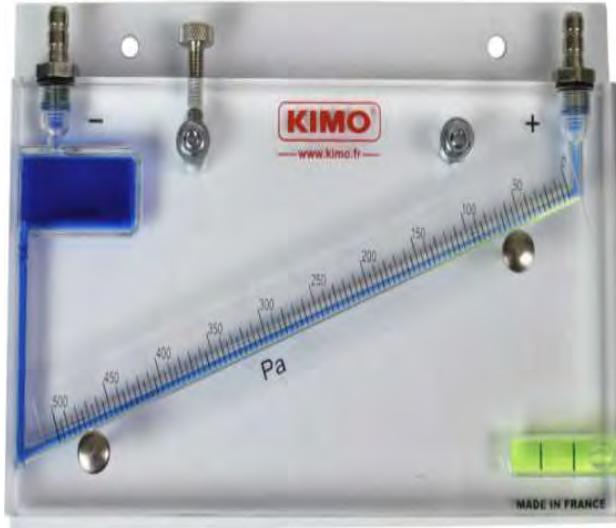
$$p_1 + \gamma_{Hg}h_1 = p_2 + \gamma_{Hg}h_2$$

$$p_1 - p_2 = \gamma_{Hg}(h_1 - h_2) = \gamma_{Hg}(H)$$

È uno strumento ad alta precisione di scarso impiego in ambito industriale, utilizzato per la taratura per confronto, ha una bassa risoluzione, è delicato e non adatto a misurare alte pressioni.

La sensibilità di questo strumento è

$$S = \frac{H}{\Delta p} = \frac{1}{\gamma}$$



Per aumentare la sensibilità i manometri da taratura ad U si realizzano con una colonna inclinata di 45° piuttosto che verticale, in questo modo:

$$\Delta P = \gamma \cdot H = \gamma \cdot L \sin \alpha \Rightarrow S = \frac{1}{\gamma \sin \alpha}$$

Più $\alpha \downarrow$ più $S \uparrow$ ma anche $L \uparrow$ e sono necessari tubi più lunghi.

Una variazione di sensibilità si ottiene anche variando γ ovverosia il liquido misurazione.

È uno strumento che va messo in piano, il sistema ruotato o inclinato introduce grandezze di influenza.

Manometri a deformazione

Il manometro a deformazione è formato da un trasduttore primario, chiamato anche elemento elastico questo capace di convertire la pressione in altra grandezza meccanica, generalmente converte il moto rototraslatorio dell'elemento finale in pura rotazione e da un trasduttore secondario il cui compito è quello di fornire in uscita un segnale di natura elettrica che sia funzione dell'output del trasduttore primario.

$$\text{Pressione} \rightarrow \boxed{I} \rightarrow \text{Deformazione/Spostamento} \rightarrow \boxed{II} \rightarrow \text{Output}$$

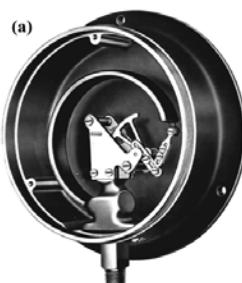
Manometro Bourdon - configurazione a C

Prende il nome dall'inventore francese Eugene Bourdon.

L'elemento deformabile è un tubicino di materiale elastico chiuso all'estremità e dalla sezione non circolare.

In dipendenza dei modelli può avere con un angolo di curvatura variabile tra i 150° e i 270° .

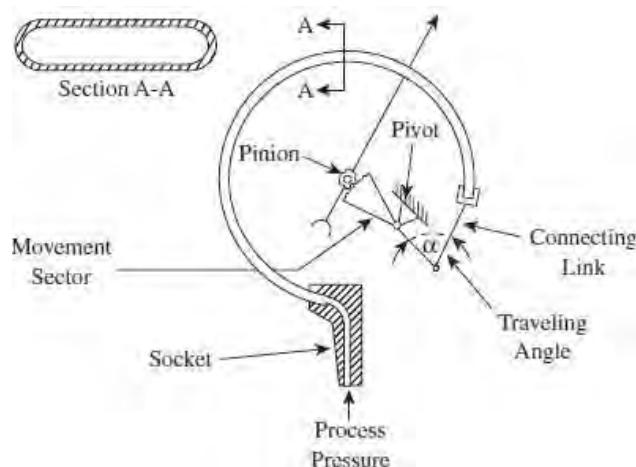
$$P \rightarrow \square \rightarrow \vartheta$$



L'ingresso del manometro viene connesso alla pressione da misurare.

Il fluido in pressione entra nell'elemento deformabile in modo che l'aumento della stessa tende a far assumere al tubo una forma circolare, in questo modo la variazione di sezione determina lo spostamento estremale del tubo.

L'estremità del tubo si muove di moto rototraslatorio che viene convertito in pura rotazione tramite una movimentazione composta da ruote e pignoni.



Lo spostamento di AA' è funzione:

- Dell'angolo totale α noto dall'estensione del tubo
- dalla forma della sezione a, b
- Da parametri definiti tramite taratura k, x, y, w
- Dalla pressione P
- Dal materiale utilizzato (modulo di Young E)
- Dal raggio di curvatura R

Per cui:

$$AA' = k \frac{\alpha P}{E} \left(\frac{R}{b} \right)^x \left(\frac{a}{b} \right)^y \left(\frac{a}{s} \right)^w$$

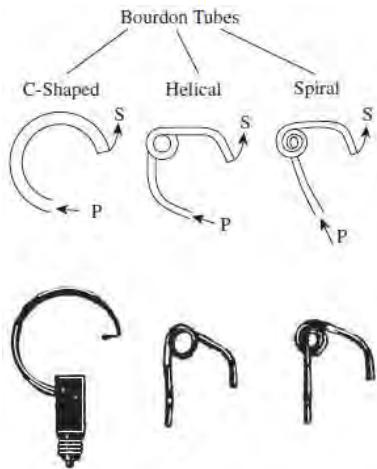
LA sensibilità risulta così essere pari a:

$$S = \frac{d}{dP} AA' = k \frac{\alpha}{E} \left(\frac{R}{b} \right)^x \left(\frac{a}{b} \right)^y \left(\frac{a}{s} \right)^w$$

Una volta noto lo spostamento x, y, w l'equazione della sensibilità diviene lineare, si nota così che un aumento della stessa lo si ottiene diminuendo E, b, s spessore e aumentando a , e questo spiega inoltre perché la sezione del tubicino debba essere ellittica e non circolare $a \neq b$, in questo modo $b < a$ e la sensibilità ne viene aumentata.

$$S \uparrow \Leftrightarrow E \downarrow s \downarrow b \downarrow a \uparrow \alpha \uparrow a < b$$

Per incrementare ulteriormente la sensibilità, si passa a configurazioni ad elica o a spirale in modo da far aumentare il parametro α .



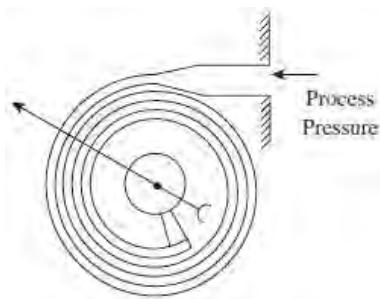
Infatti l'elemento deformabile all'interno del manometro può essere di tipo:

- **C** ottenuto curvando l'elemento elastico in modo da formare un segmento circolare.
- **Elicoidale** ottenuto aumentando la lunghezza del tubo in modo da ottenere un'elica
- **Spirale** ottenuto avvolgendo l'elemento elastico per due o tre giri dandone la forma a spirale

I Manometri Bourdon a C sono utilizzati per la misura di elevate pressioni, fino almeno a 700 MPa, mentre le altre configurazioni sono urate per misurazioni al di sotto dei 7 kPa.

Tubo Bourdon a spirale

L'elemento a spirale può così essere visto come una serie di elementi a C collegati tra di loro, quando è applicata una pressione la spirale tende a svolgersi e determina uno spostamento maggiore del punto terminale garantendo un movimento di pura rotazione.



Oltre all'aumento della sensibilità dato da un α più elevato si registra anche un aumento dell'accuratezza, questo a causa dell'assenza degli attriti indotti dal meccanismo di conversione del moto del punto finale.

Tubo Bourdon ad elica

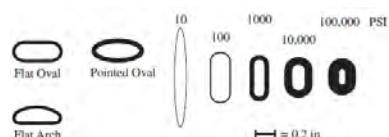
L'elemento a spirale determina in questo caso un movimento più ampio della parte terminale del tubicino, si ottiene così un movimento di pura rotazione senza l'ausilio di amplificazione meccanica.



Oltre all'aumento della sensibilità diviene considerevole l'aumento della protezione dello strumento dai sovraccarichi.

Sezione del tubo

Appurato che la sezione del tubo non sia circolare, questa si realizza attraverso equazioni empiriche ed osservazioni pratiche.



Il manometro Bourdon è caratterizzato da:

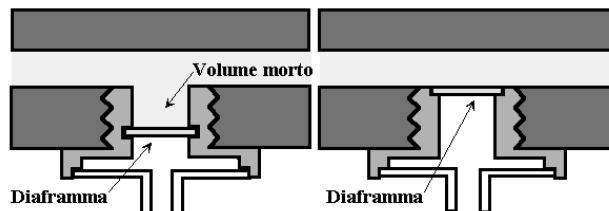
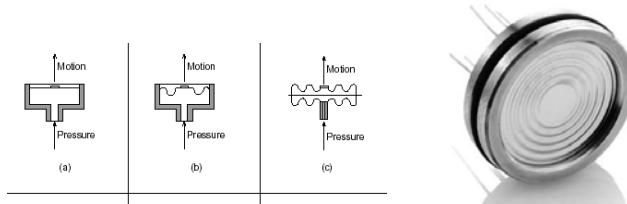
- Elevata rapidità: 0,1 s al fondo scala
- Limitata linearità: 0.5% del fondo scala
- Presenza di isteresi limitata da trattamenti termici
- Sensibilità alle variazioni di temperatura

Manometro a diaframma

Anche in questo caso la pressione provoca la deformazione di un elemento elastico

$$\Delta P \rightarrow \boxed{\text{Diaframma}}_{\Delta l} \rightarrow \boxed{\text{LVDT}} \rightarrow \Delta V$$

A differenza del monometro a C si misura lo spostamento di un diaframma che può essere liscio o corrugato, attraverso un sensori estensimetrici o LVDT.



- ✓ Minore ingombro rispetto al manometro Bourdon
- ✓ Curva di taratura nota
- ✓ Assenza di un volume morto di fluido
 - ✓ Aumento della banda passante della catena di misura
 - ✗ Maggiore dipendenza dell'output da variazioni repentine di temperatura
 - ✗ Maggiore sensibilità alle vibrazioni
- ✗ Isteresi
- ✗ Limitata linearità
- ✗ Errore di inserzione legato alla resistenza meccanica

Essendo la misura dipendente dalla cedevolezza del diaframma, vincolandolo troppo questo non si sposta e il valore misurato non è corretto.
- ✗ Presenza di un volume morto di fluido

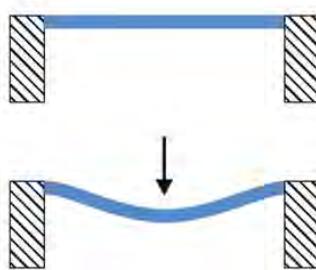
Il diaframma non è posto in diretto contatto col fluido

Varia il contributo inerziale del sistema di misura: non tanto la massa del diaframma ma la massa di fluido presente nel volume morto

 - ✓ Aumento della capacità termica: minore sensibilità alle variazioni termiche del fluido
 - ✗ Possibile accumulo di particolato sul diaframma da rimuovere attraverso pulizie periodiche
 - ✗ Bassa banda passante: se ΔP varia velocemente, c'è una massa di fluido che si oppone alla vibrazione

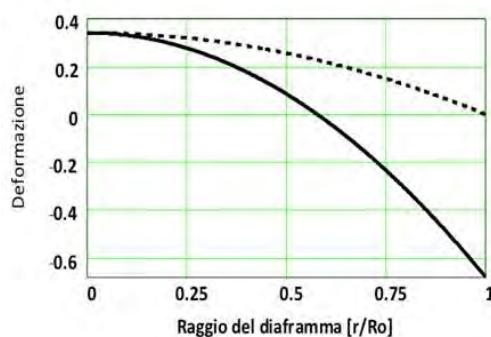
Diaframma Estensimetrico

Uso di estensimetri applicati ad un diaframma liscio che si deforma a cupola.



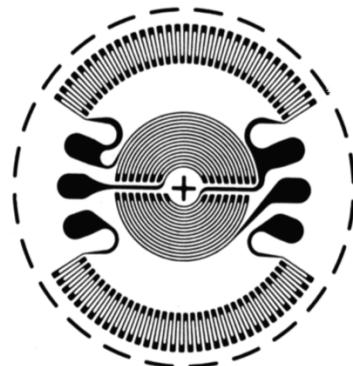
Analizzando le deformazioni si individuando le zone di massima deformazione della membrana, quelle ovvero dove applicare gli estensimetri.

Se R_0 è il raggio della membrana ed r è un raggio variabile tra 0 ed R_0 , si ottengono:



In cui la curva tratteggiata indice la deformazione tangenziale, mentre quella continua quella radiale.

La deformazione tangenziale ε_θ è massima in prossimità del centro, mentre quella radiale ε_r è massima sulla circonferenza in direzione assiale, si giunge così ad un estensimetro con la seguente configurazione, in cui ci sarà necessario fare attenzione a porre le basette per i collegamenti elettrici in zone in cui le deformazioni sono minime.

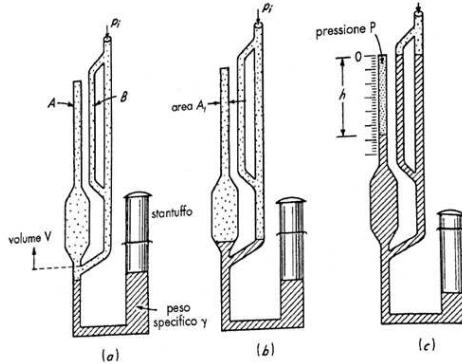


Sistemi di misura per basse pressioni

Vacuometro di McLeod

Utilizzato per pressioni ($0.1 \div 10$) Pa, è costituito da un'ampolla di vetro comunicante con un capillare, una presa di pressione dove effettuare la misura e una pompa manuale o stantuffo.

Il funzionamento si basa sulla compressione da parte mercurio di un campione di gas a partire da una bassa pressione fino al raggiungimento di una pressione sufficientemente elevata da poter essere letta con un manometro.



1. Si porta il mercurio al di sotto dell'ampolla (a) permettendo l'ingresso del gas alla pressione P_1
2. Si spinge lo stantuffo verso il basso andando a limitare un campione del gas nel capillare A ed il mercurio nel capillare B .
Entrambi i capillari hanno la stessa sezione.
3. Si aumenta la pressione fino a portare il livello del mercurio al riferimento 0
4. Nel capillare A il mercurio rimane ad un livello minore a causa della contropressione del fluido chiuso in A .

Dalla legge di Boyle dei gas perfetti

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

Dove la pressione all'interno del capillare è

$$P_2 = P_1 + \rho_{Hg}gh \quad V_2 = A_c h$$

In cui A_c è l'area del capillare ed h è il pelo libero del capillare.
Per cui la pressione incognita sarà

$$P_1 = \frac{P_1 + \rho_{Hg}gh}{V_1} A_c h$$

$$P_1 = \frac{\rho_{Hg}gA_ch^2}{V_1 - A_ch} \approx \frac{\rho_{Hg}gA_ch^2}{V_1}$$

X Strumento assoluto

X Uso delicato, introduzione di errori sistematici

X Nel recipiente in cui si vuol misurare la pressione sono immessi vapori di mercurio la cui pressione può falsare la misura

X Il vacuometro non misura correttamente la pressione dei vapori che non obbediscono alla legge di Boyle

Vacuometro a conducibilità termica

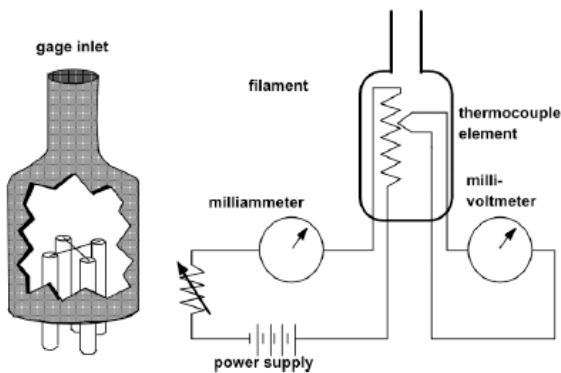
Dalla teoria cinetica dei gas, per pressioni inferiori ai 100 Pa la conducibilità termica diminuisce linearmente con la pressione.

Il vacuometro a conducibilità termica è costituito da un contenitore collegato al sistema di cui si vuole misurare la pressione.

All'interno, un filamento di metallo (platino o tungsteno) viene percorso da corrente e viene riscaldato per effetto Joule senza essere portato all'incandescenza, noto che le perdite di calore per conduzione dipendono dalla pressione, allora la temperatura del filamento dipende dalla quantità di calore che viene scambiata con il gas e, di conseguenza, dalla pressione del gas: La misura della pressione diviene ottenibile da una misura diretta della temperatura.

Vacuometro a conducibilità termica - a termocoppia

Realizzato con una termocoppia saldata in un punto del filamento elettrico.



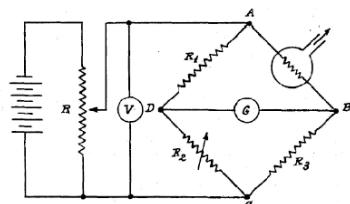
Al variare della pressione del gas, varia il numero di molecole che urta contro il filamento.

La variazione di temperatura è misurata dalla termocoppia

La risposta dello strumento è legata al gas considerato.

Vacuometro a conducibilità termica - Pirani

Utilizza un Ponte di Wheatstone e misura la variazione della resistenza dovuta alla variazione di temperatura in modo che maggiore è la pressione e minore è la temperatura misurata.



X Bassa accuratezza, per misure di basse entità è necessario accettare un grosso errore.



NOTE

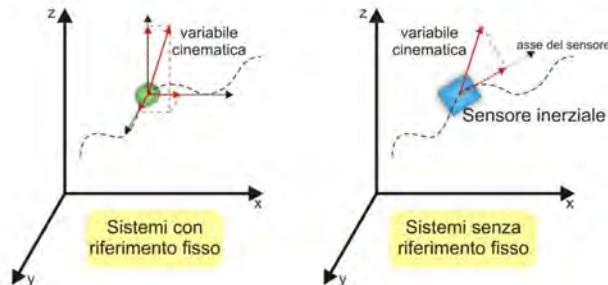
8. MISURE DI SPOSTAMENTO E VELOCITÀ

Indice

Misure di Spostamento	2
Potenziometro	2
Potenziometro Ideale	3
Potenziometro Reale	4
LVDT	7
Encoder	9
Encoder Incrementale	10
Encoder Assoluto	11
Laser a triangolazione	13
Misure di Velocità	14
Sistemi ad Induzione Magnetica	14

Per effettuare le misure di spostamento e velocità possono essere adottati due sistemi di misura

- **Con riferimento fisso:** fornisce la variabile cinematica nelle variabili di riferimento fisse.
La misura si esprime rispetto ad un sistema solidale col fisso.
Si usano potenziometri, LVDT, encoder, laser a triangolazione.
- **Senza riferimento fisso:** la misura si esprime secondo assi solidali al sensore stesso.
Si usano accelerometri, sensori inerziali, non trattati in questo corso.

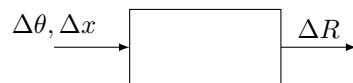


Misure di Spostamento

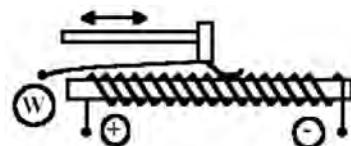
Potenziometro

Il potenziometro è un sistema di misura utilizzato per rilevare spostamento lineari e angolari.

In ingresso prende una lunghezza ed in uscita fornisce una resistenza.



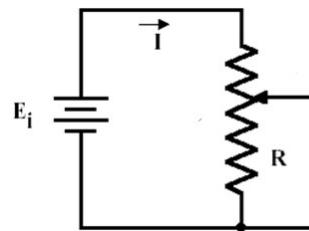
È realizzato mediante un filo di materiale conduttivo avvolto intorno ad un supporto rigido.



Potenziometro Ideale

Le equazioni de potenziometro reale si ottengono considerando un voltmetro ideale E_0 a $R_s \rightarrow \infty$, nello strumento terminale non scorre corrente, in questo modo si ottiene una perfetta linearità.

Nella realtà un minimo di corrente scorre, altrimenti non si misurererebbe alcuna resistenza.



La resistenza del potenziometro varia da

$$R_p = [0; R_p]$$

La resistenza misurata varia da

$$R = [0; R]$$

Alimentando il circuito con E_I scorre corrente, si misura perciò

$$E_0 = [0; E_i]$$

Perciò

$$\begin{aligned} E_0 &= IR & E_i &= IR_p \\ R &= \rho \frac{l}{S} & R_p &= \rho \frac{l_p}{S} \end{aligned}$$

In cui $l = x$ ed $l_p = L$ sono rispettivamente la lunghezza del filo fino al palpatore (la distanza percorsa dal palpatore) e la lunghezza del filo del potenziometro (la distanza massima del palpatore)

$$E_0 = E_i \frac{R}{R_p} = E_i \frac{l}{l_p} = E_i \frac{x}{L}$$

La **sensibilità** diviene pari a

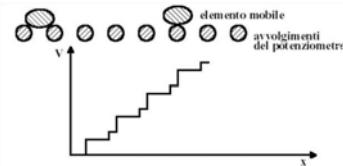
$$S = \frac{E_i}{L}$$

Funzione della tensione di alimentazione del potenziometro, facendo pur sempre attenzione all'autorisaldamento.

La resistenza del potenziometro non può essere troppo piccola altrimenti si avrebbe un'elevata dispersione per effetto Joule

$$P_{\max} = \frac{E_i^2}{R_p}$$

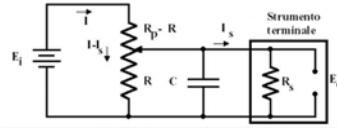
La **risoluzione** dei potenziometri del tipo a filo avvolto è pari a $\frac{L}{n}$ dove L è la distanza massima misurabile e n è il numero totale degli avvolgimenti.



È necessario avvicinare le spire per ottenere una maggiore risoluzione, un'alternativa a questo problema è data dalla plastica conduttriva.

Potenziometro Reale

Il potenziometro reale si differenzia da quello ideale per lo strumento terminale: infatti ora questo sarà percorso da corrente $R_s \rightarrow \infty$; la corrente che prima scorreva soltanto sul potenziometro ora si splitta anche sullo strumento terminale.



Per trovare le equazioni del potenziometro reale si sfruttano le equazioni delle maglie.

$$E_0 = I_s R_s \quad E_0 = (I - I_s)R \quad E_0 = E_i - I(R_p - R)$$

$$I_s = \frac{E_0}{R_s}$$

$$E_0 = IR - I_s R \quad E_0 = IR - \frac{E_0}{R_s} R$$

$$I = E_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_s} \right)$$

$$E_0 = E_i - E_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_s} \right) (R_p - R)$$

$$E_i = E_0 \left(1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_s} \right) (R_p - R) \right)$$

$$E_i = E_0 \left(1 + \left(\frac{R + R_s}{RR_s} \right) (R_p - R) \right)$$

$$E_i = E_0 \left(\frac{RR_s + (R + R_s)(R_p - R)}{RR_s} \right)$$

Allora

$$RR_s E_i = E_0 (RR_s RR_p - R^2 + R_s R_p - RR_s)$$

$$E_0 = E_i \left(\frac{RR_s}{RR_p - R^2 + R_s R_p} \right)$$

Dividendo numeratore e denominatore per R_p^2 si ottiene

$$E_0 = \left(\frac{\frac{R_s}{R_p}}{\frac{R_s}{R_p} + \frac{R}{R_p} + \left(\frac{R}{R_p} \right)^2} \right) \cdot \frac{R}{R_p} E_i$$

Ci si vuole ricondurre ad un'equazione simile a quella trovata per il potenziometro ideale, si introduce allora il fattore di carico o di non linearità

$$\eta = \frac{R/R_p - (R/R_p)^2}{R_s/R_p + R/R_p - (R/R_p)^2}$$

Per cui

$$E_0 = (1 - \eta) \frac{R}{R_p} E_i$$

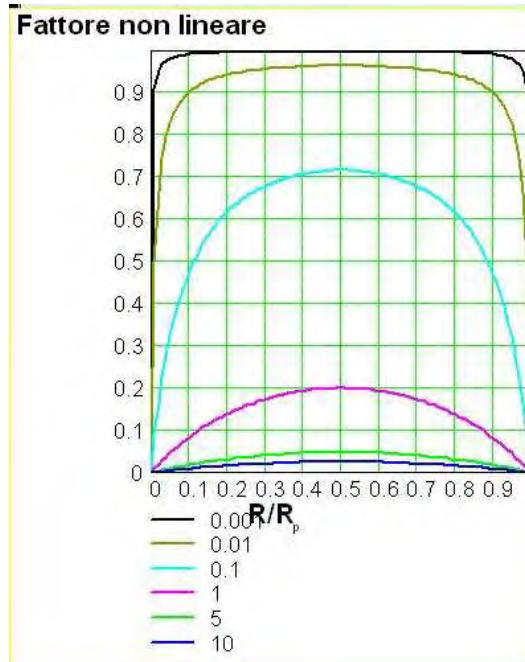
Da cosa dipende il fattore di carico? dal rapporto R/R_p , quindi da dove si sta effettuando la misura.

Inoltre, similmente all'errore di inserzione per le misure di tensione, se

$$\eta \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{R_s}{R_p} \rightarrow \infty \Rightarrow R_s \gg R_p$$

E allora si ricade nell'idealità.

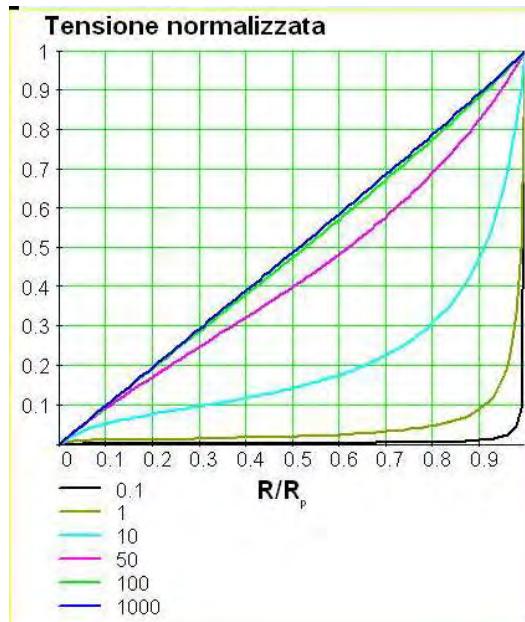
η si configura così come un parametro che indica quanto è distante lo strumento dall'idealità.



Dal grafico del fattore di carico si vede che, se

- $\frac{R_s}{R_p} = 10$ e quindi c'è un fattore 10 tra l'una e l'altra, η è molto basso
- $\frac{R_s}{R_p} = 0.1$ η diviene elevatissimo, induce un errore variabile a parabola che nel suo massimo può arrivare al 70% del valore misurato
- $\frac{R_s}{R_p} = 0.001$ η raggiunge quasi l'unità, l'uscita misurata è nulla: l'insieme potenziometro-strumento non hanno le impedenze corrette.

Impossibile non notare come il punto più critico nella misura di un potenziometro sia quello centrale.



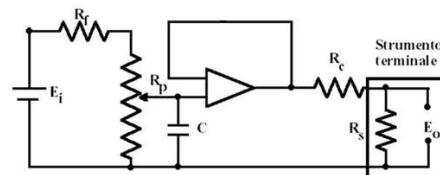
Dal grafico della tensione normalizzata si nota invece che, per $\eta \rightarrow 0$ si ottiene la bisettrice, e come $R_s/R_p \downarrow$ la curva diventa fortemente non lineare, dallo 0 cresce molto velocemente al massimo.

PROBLEMA

Come misurare la tensione in uscita da un sensore di elevata impedenza?

SOLUZIONE

Si inserisce tra il trasduttore e lo strumento terminale un amplificatore operazionale in configurazione buffer, in questo modo si sostituisce ad R_s la resistenza dell'amplificatore $10^6 \div 10^9 \Omega$



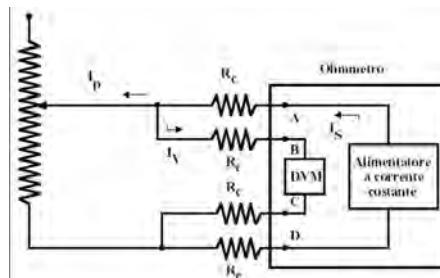
PROBLEMA

Necessaria una misura della resistenza escludendo il contributo dei cavi di collegamento.

SOLUZIONE

Attraverso un multimetro che lo permetta, si esegue una misura diretta con 4 fili, si ottiene così direttamente la misura che interessa.

La caduta di potenziale E_C che si manifesta ai connettori A e D non ha effetto nella determinazione della caduta di potenziale ai capi del potenziometro e l'impedenza del voltmetro è tale da rendere trascurabile la caduta di potenziale che si ha ai connettori B e C.



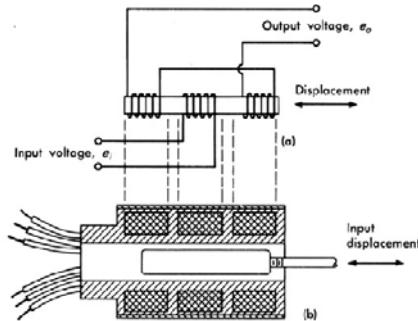
LVDT

Il trasformatore differenziale è utilizzato per la misura di piccoli spostamenti sia lineari che angolari.



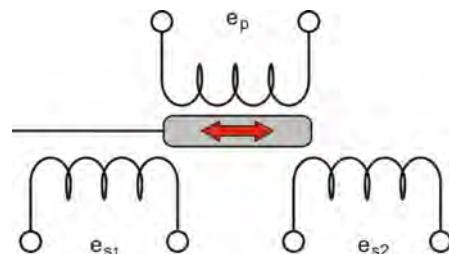
Dove L è l'induttanza.

È costituito da un cilindro cavo di materiale metallico ad alta permeabilità magnetica al cui interno può scorrere senza contatto un nucleo ferromagnetico, al di fuori del cilindro vi sono avvolte 3 bobine simmetriche di filo conduttivo.

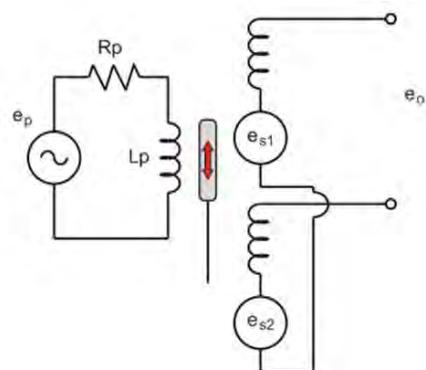


L'avvolgimento primario è il centrale, mentre gli avvolgimenti laterali sono i secondari.

In uscita si misura la differenza di induzione tra i due secondari, facendo scorrere il nucleo all'interno del cilindro si perde la simmetria e si misura una tensione al secondario proporzionale al primario attraverso le leggi della mutua induzione.



L'avvolgimento primario è alimentato da una tensione alternata di opportuna frequenza mentre gli avvolgimenti secondari sono avvolti in senso discorde e ricevono, per induzione elettromagnetica dal primario, le tensioni e_{s1} ed e_{s2} , secondo lo schema



L'induttanza è pari a

$$L = \mu F N^2$$

E le mutue induttanze sono

$$M_1 = \sqrt{L_1 \cdot L_p} \quad M_2 = \sqrt{L_2 \cdot L_p}$$

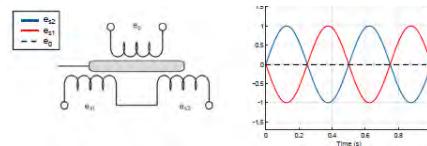
Ricordando che

$$i_p R_p + L_p \frac{di_p}{dt} - e_p = 0$$

Si individua allora

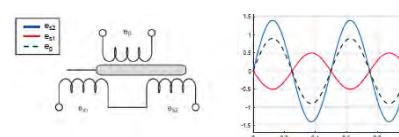
$$e_0 = e_{s1} - e_{s2} = (M_1 - M_2) \frac{di_p}{dt}$$

Quando il nucleo è centrato $e_0 = 0$ non si misura alcuna tensione, sarà lo spostamento del nucleo ad agire sui coefficienti di mutua induzione, modificandoli e portando ad una misurazione di una tensione alternata alla frequenza del segnale in ingresso.



- $e_{s2} > e_{s1}$

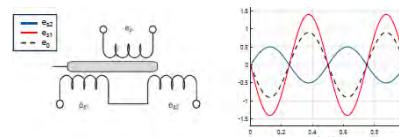
La tensione in uscita e_0 è sinusoidale e ha fase opposta alla tensione in ingresso (-).



Lo spostamento è verso destra \rightarrow .

- $e_{s1} > e_{s2}$

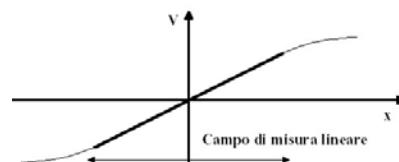
La tensione in uscita è sinusoidale e ha la stessa fase della tensione in ingresso (+).



Lo spostamento è verso sinistra \leftarrow .

In questo modo dalla tensione in uscita e_0 si può determinare sia l'ampiezza dello spostamento (dall'ampiezza del segnale), sia il verso dello spostamento (dalla fase del segnale), ovviamente per ottenere il verso dalla fase sarà necessario un circuito elettrico detto "discriminatore di fase".

X Nell'LVDT è necessario fare molta **attenzione** al **campo di misura**, questo infatti è compreso tra i 5 cm and 10 cm



Ed è limitato dalla quantità di spire/avvolgimenti che si possono fisicamente realizzare: lo strumento va in saturazione perché finisce le spire, per cui oltre alla zona di linearità la sensibilità crolla inevitabilmente a 0.

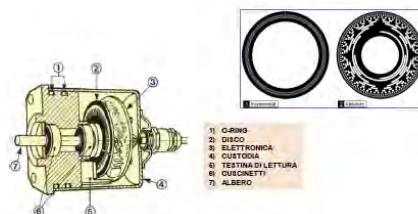
- ✗ È possibile utilizzare l'LVDT per effettuare **misure dinamiche**?

Sono se il valore della frequenza portante è almeno 10 volte superiore alla frequenza dell'armonica ritenuta ancora significativa nella rappresentazione del fenomeno fisico (principio di Shannon): la frequenza di spostamento dev'essere minore di quella di alimentazione, altrimenti non diviene possibile visualizzare né misurare alcuna sinusoide.

- ✗ Tra i fenomeni fisici che limitano la tensioni di alimentazione applicabile di trovano l'effetto Joule e l'aumento della non linearità nell'accoppiamento magnetico.
- ✗ Il disegno simmetrico del trasduttore rende il trasformatore differenziale particolarmente immune da effetti indotti da variazioni statiche e quasistatiche della temperatura, tuttavia se dovesse variare la temperatura varierebbe gioco forza anche la resistenza elettrica degli avvolgimenti elettrici del primario, e quindi anche l'intensità di corrente che scorre negli avvolgimenti, portando quindi ad una variazione della sensibilità del trasduttore.
- ✗ Anche in presenza di un perfetto allineamento tra i vari elementi costituenti, il trasformatore differenziale fornisce in uscita un segnale diverso da zero a causa delle capacità parassite presenti tra gli avvolgimenti.

Encoder

L'encoder converte uno spostamento in un segnale digitale e permette la misurazione di una variazione angolare.

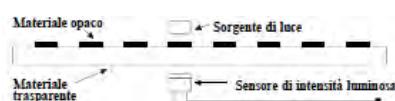


Possono essere

- **Incrementali**, se misurano una distanza rispetto ad una posizione iniziale
- **Absoluti**, se misurano una distanza assoluta rispetto ad un punto fisso.

Nella realizzazione invece si possono dividere in

- **Encoder ottico**

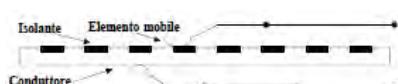


Un disco composto da zone trasparenti ed elementi scuri è posto solidalmente ad un albero posto in rotazione.

Un fotorilevatore assorbe ciò che un emettitore produce attraverso le zone trasparenti del disco.

L'uscita di questo segnale è a gradino.

- **Encoder a strisciamento**



Il disco frammentato è fisso all'albero, si esegue così una misura di torsione tra due contatti striscianti.

L'uscita di questo segnale è a gradino.

- Encoder magnetico

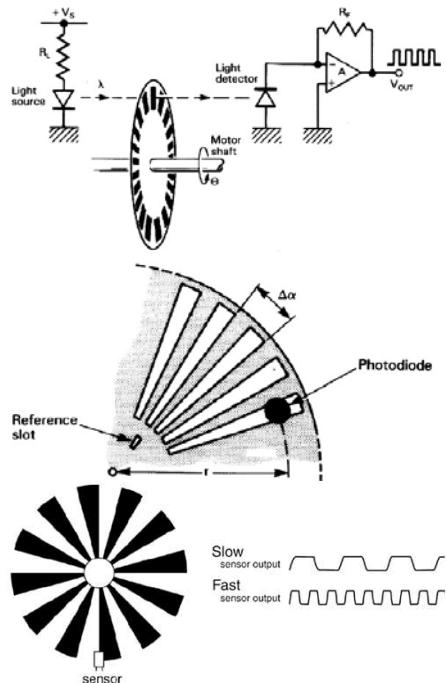


In questa applicazione, tra ingresso e uscita c'è un trasformatore, l'uscita di questo segnale è grossomodo sinusoidale

In ogni caso il segnale in uscita sarà un segnale digitale che varia tra due stati.

Encoder Incrementale

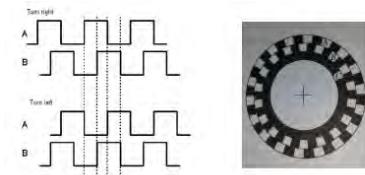
L'encoder incrementale misura la rotazione o lo spostamento lineare in funzione del numero di fronti di salita o discesa acquisiti.



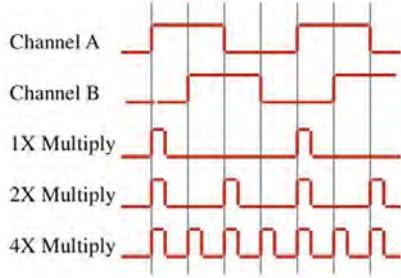
Per individuare la misura della rotazione basterà così contare i fronti d'onda individuati dal sensore.

Gli aspetti critici di questa prima realizzazione risiedono nel fatto che

- ✗ La risoluzione dipende dall'ampiezza degli spazi
- ✗ La direzione di rotazione non è un output fornito.
- ✓ Il problema del verso dello spostamento viene risolto introducendo un secondo elemento/disco generatore di segnale, in questo modo i segnali risulteranno sfasati di $1/4$.



- ✓ Il problema della risoluzione viene invece risolto dalla specifica codifica dell'encoder, questo infatti può avere codifica 1x, 2x, 4x in funzione del numero di fronti d'onda presi in considerazione per il calcolo dello spostamento.

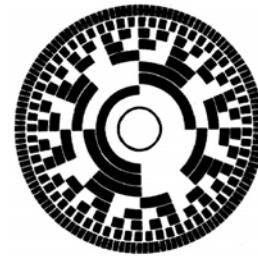


Se inoltre si realizza un'ulteriore fessura nel disco e si aggiunge un'altra coppia di led e fotodiodo relativa a tale fessura, può essere realizzato anche un segnale che fornisce il periodo di rotazione.

Encoder Assoluto

Negli encoder assoluti si ha una determinazione della posizione assoluta assunta dall'organo mobile indipendentemente dalla condizione iniziale di riferimento: la posizione si "ricorda" perché è l'ultima posizione assunta dallo strumento.

Per far ciò essi necessitano un altro tipo di corona e di una "schiera" di rivelatori in parallelo.



In questo modo ogni traccia rappresenta direttamente il valore del rispettivo bit ed è la combinazione dei bit in codice binario, a fornire la misura finale.

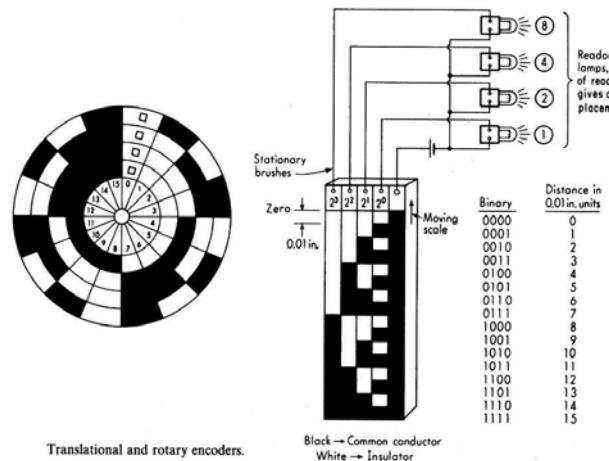
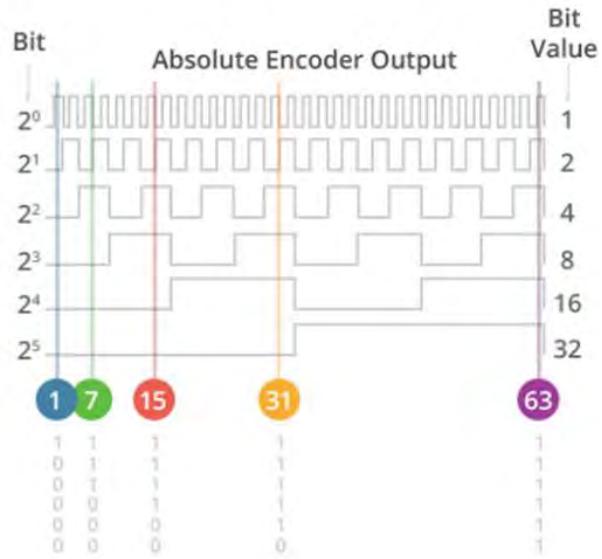


Figura 1: Encoder a 4 bit



Tuttavia in corrispondenza degli spostamenti rappresentati da un cambio di stato simultaneo di più di un bit, a causa di impercettibili errori di sincronizzazione, il dispositivo potrebbe incorrere in instabilità indicando stringhe errate, per cui si utilizzano codifiche particolari come il **codice gray** di modo che ad ogni spostamento si fa corrispondere un singolo bit.

Esempio

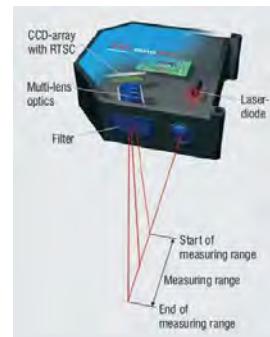
un encoder assoluto ha 8 anelli con 8 sensori e 8 bit di risoluzione. L'uscita è 10010110, qual è la posizione angolare?

Anello	Angolo (°)	1/0	Valore (°)
1	180,0000	1	180,0000
2	90,0000	0	
3	45,0000	0	
4	22,5000	1	22,5000
5	11,2500	0	
6	5,62500	1	5,62500
7	2,81250	1	2,81250
8	1,40625	0	

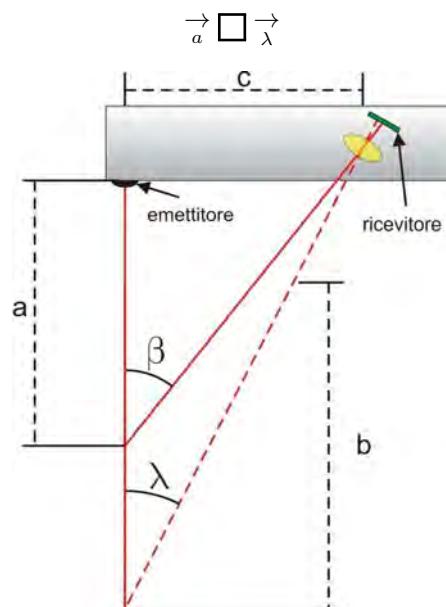
$$\text{Posizione finale} = 180.0000^\circ + 22.500^\circ + 5.6250^\circ + 2.8125^\circ = 210.9375^\circ$$

Laser a triangolazione

Il laser a triangolazione è un sistema di misura che avviene senza contatto diretto, con LVDT o potenziometro è sempre necessario collegare l'oggetto della misurazione.



Tale laser si basa sull'emissione e sulla ricezione di un segnale ottico: Un diodo proietta la luce nel visibile sulla superficie de target di misura, la luce riflessa da questo target viene nello stesso tempo registrata da un sensore CCD/CMOS.



In cui

- a: distanza dallo zero, è la distanza per la quale il raggio riflesso incide centralmente il sensore ottico.
- b: campo di misura, indica la zona dove l'oggetto si può muovere, oltre quella distanza la luce riflessa non entra più nel sensore ottico.

Un generico laser a triangolazione è caratterizzato dalle seguenti caratteristiche

- Lunghezza d'onda del laser di 670 nm (rosso)
- Ampie distanze fra sensore e target 50 mm÷250 mm
- Range di misura da ± 2 mm÷ ± 100 mm
- Precisione: 0,005% FS
- Linearità dello 0,03% FS
- Temperatura di funzionamento da 0 °C a 40 °C

Se per tutti questi sensori è possibile ottenere una misura di velocità indiretta dalla misura dello spostamento, con i seguenti si potrà risalire ad una misura diretta della velocità.

Misure di Velocità

Sistemi ad Induzione Magnetica

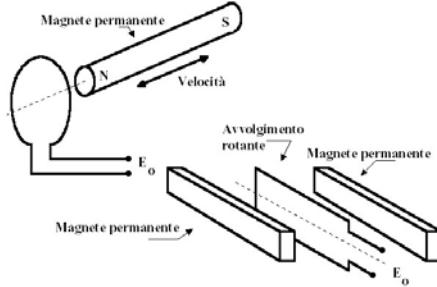
Questi sistemi si basano sulla legge dell'induzione elettromagnetica

$$E_0 = Blv$$

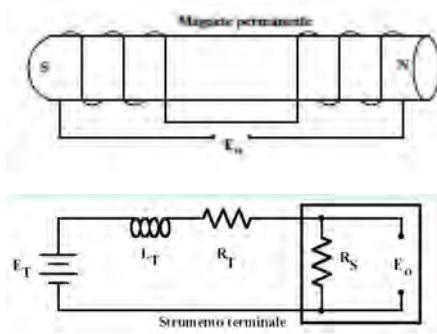
In cui

- E_0 è la tensione generata dal trasduttore
- B è la componente di densità del flusso, normale al vettore di velocità
- l è la lunghezza del conduttore
- v è la velocità

Il vantaggio di questo sistema è che nell'equazione fisica dello strumento compare direttamente la velocità.



Il trasduttore di velocità equivale così ad un generatore di tensione connesso in serie ad un'induttanza L_T e ad una resistenza R_T e collegato ad uno strumento per il rilievo della tensione caratterizzato da una resistenza in ingresso R_S .



La risposta diviene sempre così in funzione della frequenza del segnale in ingresso.

$$L_r \frac{di(t)}{dt} + (R_r + R_s)i(t) = E_0 = S_v v(t)$$

In cui

$$i(t) = I e^{j\omega t} \quad v(t) = V e^{j\omega t}$$

Portando a

$$(R_r + R_s + jL_r\omega)I = S_v V$$

$$H(j\omega) = \frac{I}{V} = \frac{S_v}{R_r + R_s + jL_r\omega}$$

Dove si possono individuare

- S_v Sensibilità del trasduttore
- v velocità istantanea [m s^{-1}]
- I, V valori istantanei dell'intensità di corrente e di tensione

Importante notare come si possa anche misurare uno spostamento indiretto tramite questi strumenti: basta derivare il segnale.

NOTE

9. Misure di temperatura

Indice

Scale termometriche	2
Scala termodinamica del gas perfetto	3
Scala termodinamica assoluta	4
Termometri a liquido	6
Termometri bimetallici	7
Termometri a variazione di resistenza	8
Termometri a metallo puro	8
Curva di graduazione	8
Materiali	9
Classificazione	10
Termistori	12
Curva di graduazione	12
Classificazione	13
Termistori vs Pt100	14
Termocoppie	15
Leggi delle termocoppie	15
I Legge	15
II Legge	16
III Legge	16
IV Legge	17
V Legge	17
VI Legge	18
Classificazione	19
Giunto di riferimento	20
Vaso Dewar	20
Cella Peltier	20
Compensazione con circuito a ponte	21
Compensazione con circuito integrato	21
Giunto di misura	22
Cavi di Compensazione	22
Termometri a circuito integrato	23
Termometri chimici	24
A cristalli liquidi	24
Funzionamento	25
A cambiamento di stato di aggregazione	25
Termometri a ultrasuoni	26
Taratura	26
Per confronto	26
A punto di solidificazione ed ebollizione	26
A filo fondente	27

Scale termometriche

I sensori di temperatura sono stati sviluppati piuttosto "tardi" principalmente perché questa è una grandezza fisica intensiva, e quindi definibile sono attraverso gli effetti provocati dalle sue variazioni sul comportamento dei materiali e poi perché ovvero non è correlabile a grandezze fisiche sensibili.

La temperatura descrive infatti lo stato termodinamico di sistemi che sono in equilibrio ed è funzione dell'energia cinetica media posseduta dalle molecole: questa non può essere direttamente misurata.

Come definire una scala termometrica? Magari individuando dei punti caratteristici di riferimento, come quelli del cambiamento di stato.

Potrebbe essere utilizzata una barra di rame immersa in una miscela a temperatura nota e registrare le variazioni di volume del materiale in funzione della variazione di temperatura della miscela, ma questo porterebbe ad una definizione di scala termometrica dipendente dalla tipologia di materiale utilizzato.

Nel corso della storia scienziati e filosofi hanno cercato di fornire una scala termometrica universalmente accettabile, la prima di queste è senza dubbio la **scala Fahrenheit** (1724), in cui per la sua realizzazione si utilizzò un bulbo di vetro graduato con all'interno del mercurio, questo caratterizzato da coefficiente di espansione costante e buona leggibilità.

Si vengono ad individuare così le seguenti temperature

- Solidificazione dell'acqua: 32 gradi
- Ebollizione dell'acqua: 212 gradi
- Uomo sano: 96 gradi

Un'altra scala termometrica universalmente accettata è la **scala Celsius** (1742), in questa si individuano invece

- Solidificazione dell'acqua: 0 gradi
- Ebollizione dell'acqua: 100 gradi

Dividendo l'intervallo in 100 parti uguali.

Queste scale termometriche si basano sull'utilizzo di un materiale, il mercurio e sono sostanzialmente differenti tra loro, per cui arriva la necessità di assolutizzare tale scala e renderla il più possibile indipendente dal materiale utilizzato per definirla.

Si passa così all'utilizzo di gas (1780) i quali, a bassa pressione e al di sotto delle loro temperature critiche, mostrano comportamenti pressoché identici e variazioni lineari del volume con la temperatura a pressione costante e viceversa.

Scala termodinamica del gas perfetto

Questa scala termodinamica si basa sull'utilizzo di gas perfetti per cui

$$P_T = P_0(1 + \alpha_V)T \Rightarrow T = \frac{P_T - P_0}{\alpha_V P_0} = 100 \cdot \frac{P_T - P_0}{P_{100} - P_0}$$

In cui si è sostituito, dalla formula

$$P_{100} = P_0(1 + \alpha_V)100$$

Dove

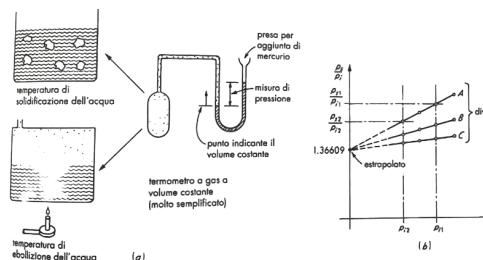
- P_T è la pressione del gas ideale alla generica temperatura T espressa magari in °C
- P_0 è la pressione del gas ideale a 0 °C
- P_{100} è la pressione del gas ideale a 100 °C
- α_V è il coefficiente di temperatura di un gas ideale a volume costante [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]

Tuttavia, anche in questo caso sorgono alcune criticità

✗ Incertezza associata al valore di α_V

✗ Definizione vincolata al gas utilizzato: nella realtà si utilizza un gas reale

Esiste tuttavia un metodo per **correggere** il comportamento del gas reale: fargli compiere una trasformazione isocora, a volume costante.



T_r e P_r sono la temperatura e la pressione scelte come riferimento (punto triplo dell'acqua)

$$T_i = AP_i \quad T_s = AP_s \Rightarrow T_s = \frac{P_s}{P_i} T_i$$

Dove A è una costante data dal gas reale e i pedici i ed s stanno ad individuare le temperature di *ice* e *steam*.

Si effettuano misure sperimentali di pressione mantenendo inalterato il ΔT , in questo modo si osserva che più le pressioni diminuiscono, più il comportamento del gas va a coincidere con quello ideale e converge ad uno specifico valore del rapporto $\frac{P_s}{P_i}$.

$$T_s = 1.36609 T_i$$

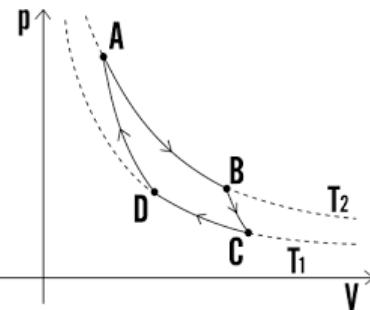
In questo modo si ottiene l'indipendenza dalla tipologia di gas.

$$T = \lim_{P_r \rightarrow 0} \frac{P}{P_r}$$

Questa è una scala ottimale ma risulta parimenti poco pratica.

Scala termodinamica assoluta

Si ottiene sin da subito una definizione indipendente dal materiale scelto perché si passa attraverso concetti teorici quali i principi termodinamici e la macchina di Carnot.



- AB assorbe calore Q_2 dalla sorgente a temperatura maggiore T_2
- BC espande adiabaticamente
- CD cede calore Q_1 alla sorgente a temperatura inferiore T_1
- DA comprime adiabaticamente riportando il fluido alle condizioni iniziali

Thompson e Kelvin proposero così (1848) una scala termometrica in cui la temperatura fosse indice dell'efficienza di una macchina termica ideale dove allo zero assoluto corrispondeva di fatto la temperatura dell'isoterma lungo la quale il sistema non può cedere alcuna quantità di calore.

Il rendimento di una macchina termica reversibile dipende solo dalle quantità di calore scambiate durante il ciclo.

Dalla definizione

$$\eta = \frac{L}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

Per un ciclo di Carnot si osserva che

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Ovvero il rapporto tra le quantità di calore non è una costante universale, ma dipende dalle temperature delle due isoterme, e quindi

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Una volta dimostrato e concordato ciò, al fine di individuare una scala termodinamica assoluta, si procede a partire da una scala termometrica arbitraria, ne sia "t" l'indice.

Si consideri a questo punto un ciclo di Carnot operante tra t_1 e t_2 con $t_1 > t_2$, in virtù di quanto esposto poco sopra si può scrivere i calori scambiati sono funzione delle temperature estremali del ciclo

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| = f(t_1, t_2)$$

Si identifichi ora uno nuovo ciclo di Carnot operante tra t_1 e $t_3 (< t_2)$, varrà sempre

$$\left| \frac{Q_1}{Q_3} \right| = f(t_1, t_3)$$

Identificando una nuova macchina termica che lavori tra t_2 e t_3 si può ancora una volta scrivere

$$\left| \frac{Q_2}{Q_3} \right| = f(t_2, t_3)$$

Ne segue che

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| = \left| \frac{Q_1}{Q_3} \right| \cdot \left| \frac{Q_3}{Q_2} \right| = \frac{f(t_1, t_3)}{f(t_2, t_3)}$$

Per cui

$$f(t_1, t_2) = \frac{f(t_1, t_3)}{f(t_2, t_3)}$$

Affinché sia verificata l'uguaglianza, se il membro di sinistra non dipende da t_3 , allora anche il membro di destra non deve dipenderne: dato che questa quantità è stata scelta ad arbitrio si assumerà costante.

A questo punto si definisce una funzione θ tale che

$$\theta(t) = kf(t, t_3)$$

In modo che

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| = \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)}$$

Poiché si è imposta essere la scala in "t" totalmente arbitraria, si può introdurre grazie a questa una nuova scala di temperature, in modo che

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

Dal momento che la nuova scala si basa sulle proprietà termodinamiche del ciclo di Carnot, viene chiamata **scala termodinamica**.

Poiché per un ciclo di Carnot vale

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Allora si avrà necessariamente

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Si ottiene la scala assoluta se si impone che alla temperatura del punto triplo dell'acqua l'indice di tale scala segni 273.16 a 0.6117 kPa.

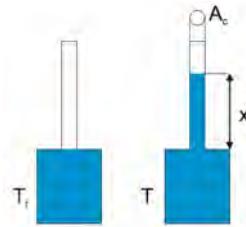
In ogni caso si devono fissare dei valori di temperatura di riferimento riproducibili secondo le normative IPTS68 e ITS90, quest'ultima in particolare si estende fino a 0.65 K ed è garanzia di maggiore precisione.

Termometri a liquido

I termometri a liquido sono sensori di temperatura costituiti da un bulbo di vetro a parete sottile che racchiude un liquido termometrico.

$$\xrightarrow{T} \square \xrightarrow{x}$$

Il loro funzionamento si basa sulla legge della dilatazione termica dei fluidi.



$$\frac{\Delta V}{V_r} = \alpha_d(T - T_r) \quad \Delta V = A_c x$$

In cui

- ΔV è la variazione di volume
- V_r è il volume alla temperatura di riferimento
- α_d è il coefficiente di dilatazione volumica
- A_c è l'area del capillare
- x è l'altezza della colonna liquida

Per risalire all'uscita

$$\Delta V = A_c x = V_r \alpha_d (T - T_r)$$

$$x = \frac{V_r \alpha_d (T - T_r)}{A_c}$$

La sensibilità è sempre la derivata dell'uscita rispetto all'ingresso, per cui

$$S = \frac{dx}{dT} = \frac{V_r \alpha_d}{A_c}$$

Per aumentare la sensibilità sarà necessario diminuire la sezione del capillare o costruire un bulbo di maggiore volume, tuttavia questo intaccherà inevitabilmente le caratteristiche metrologiche dinamiche, si era definito

$$\tau = \frac{m \cdot c}{k A_{sc}}$$

In cui

- m è la massa del fluido
- c è il calore specifico
- k è il coefficiente di scambio termico
- A_{sc} è la superficie di scambio termico

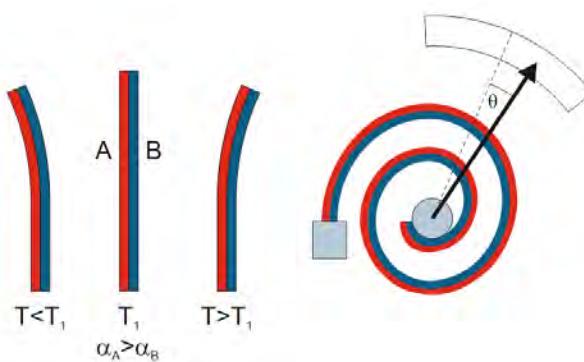
Per diversi range di temperatura si utilizzano

- Galistano (ex Mercurio) da -40°C a 540°C
- Alcol fino a -60°C
- Toluolo fino a -90°C
- Miscele di propano e propilene -190°C

Termometri bimetallici

$$\vec{T} \square \vec{\theta}$$

Questa tipologia di termometri è costituita da due lamine di materiali differenti che vengono saldate insieme alla temperatura T_1 , poiché i due materiali avranno diversi valori del coefficiente di dilatazione termica, si espanderanno e ritrarranno in funzione della temperatura.



Lamine A e B con coefficienti di dilatazione α_A e α_B determinano l'inflessione dell'insieme delle due lamine, la curvatura che assume l'elemento sensibile dipende anche dai moduli elastici dagli spessori delle lamine.

Questo strumento è concettualmente simile ad un manometro Bourdon, come aumenta la lunghezza dell'elemento sensibile ne aumenterà la sensibilità.

Viene utilizzato principalmente per piccoli campi di misura, essendo infatti una strumento fortemente non lineare, più piccolo è il campo di misura e più approssimabile ad una retta sarà il suo comportamento.

Termometri a variazione di resistenza

$$\vec{\Delta T} \square \vec{\Delta R}$$

Termometri a metallo puro

I termometri a metallo puro si basano sul fatto che la resistività ρ varia con la temperatura T .

Di base il termometro a metallo puro si basa su successivi miglioramenti

- 1821: osservazione che $\rho = f(T)$
- 1871: platino come trasduttore di temperatura
- 1932: filo di platino avvolto intorno ad una struttura di mica isolata all'interno di un tubo di vetro



Tuttavia, il principale difetto di questo strumento era l'elevato valore della costante di tempo τ dovuto alla ridotta superficie di contatto tra il punto di misura ed il metallo.

Curva di graduazione

La resistività dipende dalla temperatura tramite un'equazione non lineare e per campi di misura limitati

$$\rho_T = \rho_0(1 + \alpha_1\Delta T + \alpha_2\Delta T^2 + \cdots + \alpha_n\Delta T^n)$$

In cui

- ΔT è la differenza tra la temperatura T e quella di riferimento T_0
- α_i sono i coefficienti di temperatura
- ρ_0 è la resistività del sensore alla temperatura di riferimento T_0

Il numero di termini al secondo membro dipende da

- Materiale usato
- Campo di misura scelto
- Precisione ed accuratezza

Per **metalli puri** l'equazione si linearizza e diviene

$$\rho_T = \rho_0(1 + \alpha\Delta T) \Rightarrow R_T = R_0(1 + \alpha\Delta T)$$

In questo modo la sensibilità si può scrivere come (sempre attraverso la derivata dell'uscita rispetto all'ingresso)

$$\frac{dR_T}{dT} = R_0\alpha = \frac{\rho_0 l}{A}\alpha$$

Attraverso l'utilizzo di un metallo puro si ottiene una sensibilità costante e dipendente da un valore $\alpha \neq 0$.

Per aumentare la sensibilità si può

- Cambiare materiale: $\uparrow \rho \quad \uparrow \alpha$
- Modificare le dimensioni del filamento di metallo $\uparrow l \quad \downarrow A$

La curva di graduazione tuttavia varia fortemente in funzione del campo di misura:

tra 0 °C a 850 °C

$$\rho_T = \rho_0(1 + \alpha_1\Delta T + \alpha_2\Delta T^2)$$

tra -200 °C a 0 °C

$$\rho_T = \rho_0(1 + \alpha_1\Delta T + \alpha_2\Delta T^2 + \alpha_3\Delta T^3 + \alpha_4\Delta T^4)$$

Per arrivare alla misura di temperatura dalla misura di resistenza è necessario passare attraverso un'equazione empirica dalla soluzione iterativa

$$T_C = \left[\frac{R_T - R_0}{\alpha_0 R_0} \right] + \delta \left\{ \left[\frac{t}{100} - 1 \right] \frac{t}{100} \right\} + \beta \left\{ \left[\frac{t}{100} - 1 \right] \left(\frac{t}{100} \right)^3 \right\}$$

In cui

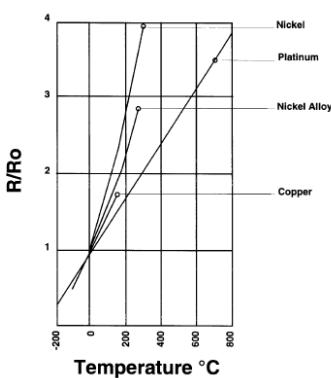
$$\alpha = \frac{R_{100} - R_0}{100R_0} \quad \delta = \frac{R_0(1 + 260\alpha) - R_{260}}{4.16R_0\alpha}$$

In cui servono almeno 5 iterazioni con un ΔT di ± 0.001 °C

Materiali

- **Rame:** lineare ma basso valore di resistività, e necessario molto materiale per aumentarne la sensibilità.
- **Nichel:** basso costo ma limitato campo di misura
- **Platino:** costoso, ampio campo di misura, minore sensibilità
 - ✓ Chimicamente e metallurgicamente inerte comportando una maggiore stabilità del trasduttore;
 - ✓ Un elevato valore della temperatura di fusione comporta un campo di misura maggiore;
 - ✓ Può essere ottenuto con grado di purezza elevato comportando una modesta differenza delle curve di taratura rispetto a quella di graduazione;
 - ✓ Modesta non linearità;
 - ✓ A parità di resistenza di base, un termometro al Pt è caratterizzato da una minore massa rispetto a quella di un termometro realizzato in Ni comportando maggiori vantaggi per quanto riguarda la banda passante
 - ✗ Il coefficiente di dilatazione termica del Pt è diverso da quello degli isolanti elettrici: si dilatano in maniera differente;

- ✗ La deriva è dovuta alla presenza dell'ossigeno inserito per stabilizzare le impurezze; sia del Pt che del materiale utilizzato come isolante elettrico;
- ✗ Alto costo

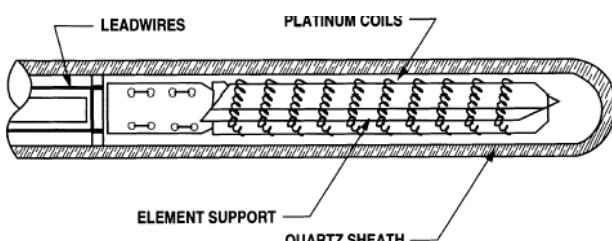


Se la scelta del materiale ricade sul platini (e generalmente è così) lo strumento di indica con Pt seguito dalla resistenza del materiale a 0 °C espressa in Ω : $Pt50, pT100$

Classificazione

- Standard Platinum Resistance Thermometer (SPRT)

incertezza = ± 0.001 °C purezza = 99.999%



- Secondary Standard Platinum Resistance Thermometer (SSPRT)

incertezza = ± 0.03 °C

Semi Standard Thermometers / various ranges

100 Ohm Semi Standard Thermometers



Description

A number of requirements exist where the accuracy and stability of a standard quartz sheathed 25.5 ohm or 0.25 ohm thermometer are not justified, or space limitations preclude their use. For these applications Isothermal have designed a series of semi-standards, 100 Ohm platinum resistance thermometers in stainless steel sheaths. Their details are given below:-

FEATURES

High Stability
NAMAS certified
Metal or Ceramic Sheath

Specifications

R₀	100 ohms ± 0.05 ohms
Alpha	0.003850 ± 0.000005
Stability	0.010 ohm/year
Calibration	A NAMAS Calibration Certificate can be provided at extra cost.
Self heating	0.002°C/100µW
Recommended Current I mA	Self heating error at 1mA ≈ 0.002°C

N.B. Performance figures are typical values. Actual values evaluated for a particular probe at extra cost.

How to Order

Model No Please specify whether
(e.g. 935/14/12) NAMAS certification is required

- Industrial Platinum Resistance Thermometer (IPRT)

incertezza = $\pm 0.1^\circ\text{C}$



Figura 1: Sensore a filo

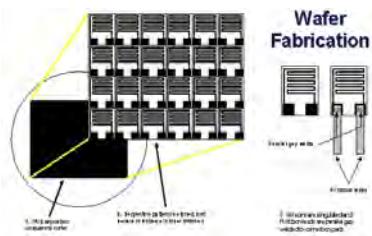


Figura 2: Sensore a film

Il fine di quest'ultimo strumento è quello di minimizzare l'effetto delle deformazioni (grandezza di influenza) sul sensore

Un'altra classificazione viene effettuata in funzione della tolleranza dei materiali

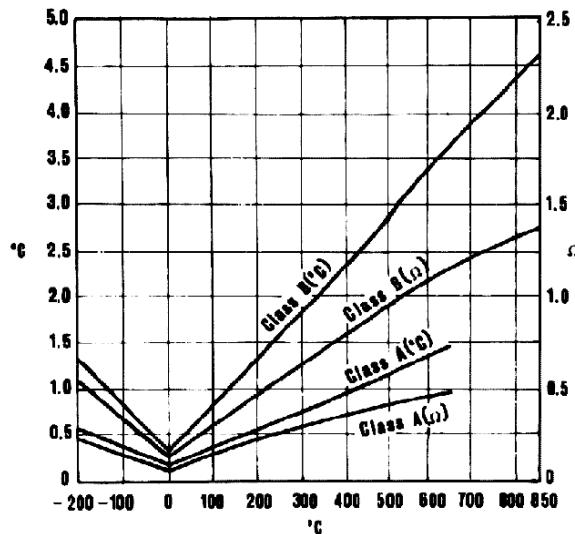
Measuring temp. °C	Permissible Deviations		
	Class A Ω	Class B °C	°C
-200	± 0.24	± 0.55	± 1.3
-100	± 0.14	± 0.35	± 0.8
0	± 0.06	± 0.15	± 0.3
100	± 0.13	± 0.35	± 0.8
200	± 0.20	± 0.55	± 1.3
300	± 0.27	± 0.75	± 1.8
400	± 0.33	± 0.95	± 2.3
500	± 0.38	± 1.15	± 2.8
600	± 0.43	± 1.35	± 3.3
650	± 0.46	± 1.45	± 3.6
700	—	—	± 1.17
800	—	—	± 1.28
850	—	—	± 1.34

The permissible deviations for platinum resistance elements (uncalibrated) are determined by the following equations (in accordance with DIN IEC 751):

Permissible Deviation – Class A
 ${}^\circ\text{C} = \pm(0.15 + 0.002 |t|)$

Permissible Deviation – Class B
 ${}^\circ\text{C} = \pm(0.3 + 0.005 |t|)$

Where $|t|$ is the temperature value in ${}^\circ\text{C}$.



Termistori

I termistori si basano su sulla variazione della conduzione elettrica in dipendenza della concentrazione di ossigeno nel materiale.

Per la realizzazione dei termistori vengono utilizzati materiali quali ossidi a semiconduttore di nichel, cobalto, manganese o semiconduttori silicio o germanio drogati.

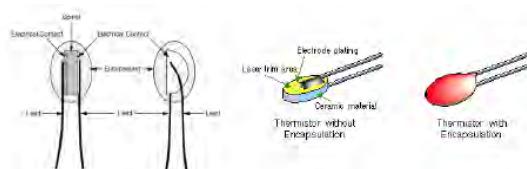
In funzione della quantità di ossigeno i termistori si dividono in

- **Di tipo P** quando un eccesso di ossigeno causa un difetto di atomi ionizzanti (difetto Scottky).
- **Di tipo N** quando nel reticolo un difetto di ossigeno determina la presenza di un eccesso di atomi ionizzati (difetto di Frankel).



Per la loro realizzazione si utilizzano ossidi metallici in polvere ai quali viene aggiunto un legante in modo da ottenere un impasto semiliquido che verrà poi sinterizzato.

Nella fase di sinterizzazione avviene il contatto elettrico tra i fili di connessione. Alla fine del processo viene applicato uno strato di vetro capace di eliminare la possibilità di adsorbimento del vapore da parte degli ossidi metallici.



Curva di graduazione

$$R_T = R_0 e^{\beta \left(\frac{T_0 - T}{T_0 T} \right)}$$

Dove

- β = [K] è una costante che varia in funzione del termistore e viene definita in funzione del campo di misura.
- R_0 è la resistenza alla temperatura di riferimento T_0 (25 °C)
- TUTTE le temperature sono espresse in Kelvin

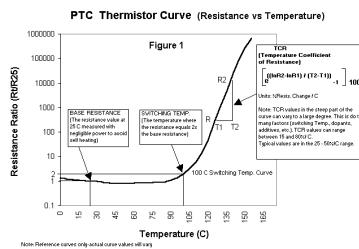
La sensibilità è

$$S = \frac{dR}{dT} = -\frac{\beta}{T^2} R_0 e^{\beta \left(\frac{T_0 - T}{T_0 T} \right)} = -\frac{\beta}{T^2} R_T$$

Si nota immediatamente come la sensibilità dello strumento sia fortemente non lineare e come all'aumentare della temperatura questa diminuisca e viceversa.

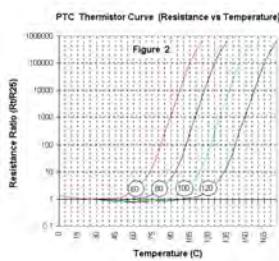
Classificazione

- **Termistore PTC:** fusibile termico.



È principalmente caratterizzato da 3 zone

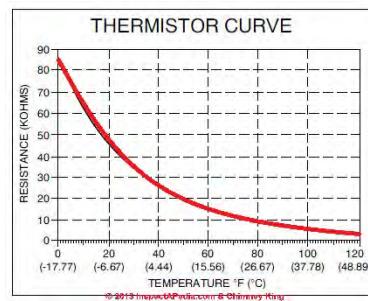
1. a sensibilità modesta $-1\% \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
2. di transizione da $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $120\text{ }^{\circ}\text{C}$
3. a ad altissima sensibilità $100\% \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$



Nella zona 3. la curva è quasi verticale, questo significa che ad un piccolo ΔT corrisponde un ΔR elevato: a $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ si possono arrivare a resistenze di $900\text{ k}\Omega$ e $10\text{ k}\Omega$, la resistenza assume così valori talmente elevati da impedire alla corrente di scorrere senza che il fusibile sia danneggiato, è un fusibile riutilizzabile.

- **Termistore NTC:** trasduttore di temperatura.

In questo tipo di termistori dalla sensibilità elevata la curva di graduazione dipende dai materiali utilizzati e dalla durata e temperatura del processo di sinterizzazione.



Il campo di misura è compreso tra $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $300\text{ }^{\circ}\text{C}$

Termistori vs Pt100

- Il valore della resistenza a temperatura ambiente di un termistore ($10\text{ k}\Omega$) è maggiore di quello di un termometro a filo metallico ($100\text{ }\Omega$)
- La sensibilità di un termistore ($3\% \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$) è maggiore di quella di un termometro a filo metallico ($0.4\% \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$)
- La curva di graduazione di un termistore non può essere assunta lineare al contrario di quella dei termometri a filo metallico
- La misura della resistenza a 2 fili può essere utilizzata con il termistore (ottenendo una misura più precisa) mentre è da evitare nel caso di termometri al platino (Pt50, Pt100)

Termistore 3 - 1 Metallo puro

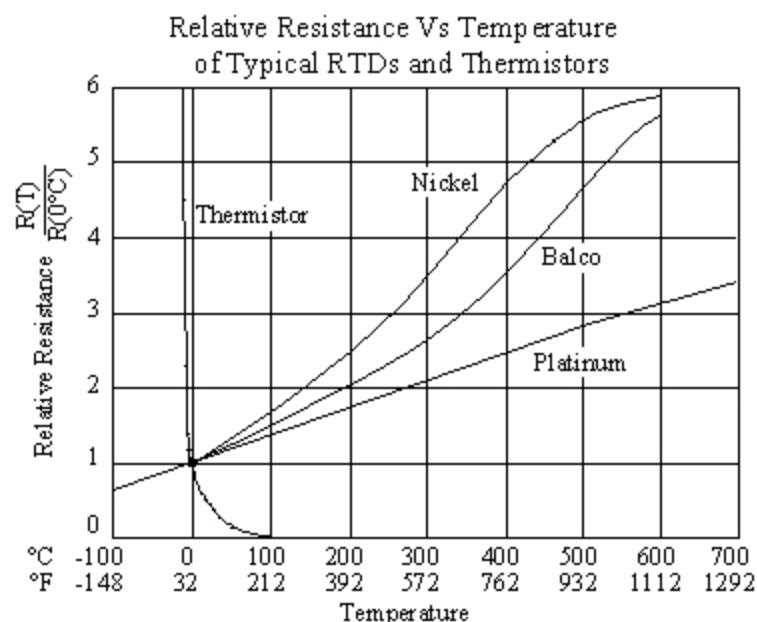


Figura 3: Curve di graduazione dei principali termometri metallici

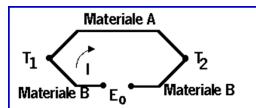
Termocoppie

La termocoppia si basa sull'effetto Seeback.

$$\xrightarrow{\Delta T} \square \xrightarrow{\Delta V}$$

L'effetto Seeback si basa sulla diffusione di elettroni attraverso l'interfaccia di due metalli saldati assieme attivata da una differenza di temperatura.

Il materiale che riceve elettroni (accettore) diventa all'interfaccia negativo, mentre il materiale che fornisce elettroni (donatore) diviene all'interfaccia positivo.



L'intensità di diffusione degli elettroni dipende dalla temperatura della giunzione in questo modo il potenziale elettrico sviluppato fornisce un'indicazione sulla temperatura mentre il campo elettrico impedisce l'ulteriore migrazione degli elettroni quando viene raggiunto un valore sufficientemente alto della differenza di potenziale.

La **curva di graduazione** delle termocoppie è descritta da

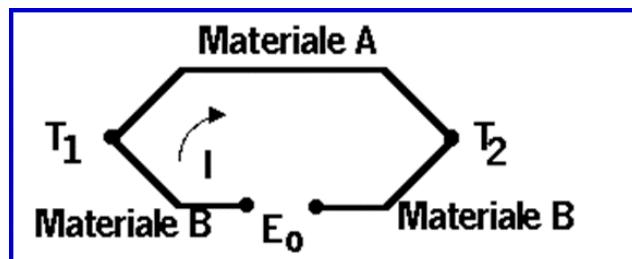
$$\Delta V = C_1(T_1 - T_2) + C_2(T_1^2 - T_2^2)$$

E non è lineare.

Leggi delle termocoppie

I Legge

Definizione. Un circuito di una termocoppia deve prevedere almeno due materiali e due giunzioni.

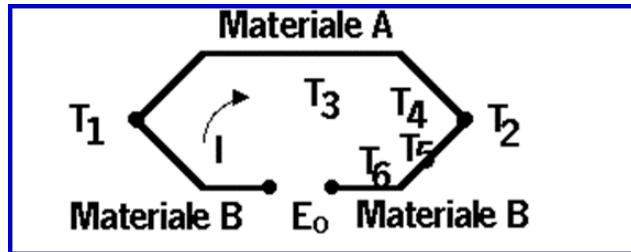


$$E_0 = e_{B/A}T_1 + e_{A/B}T_2 \quad e_{B/A} = -e_{A/B} = f(T) \Rightarrow E_0 = e_{B/A}(T_1 - T_2)$$

Con $e_{x/y}$ coefficiente termico che va dal materiale x al materiale y .

II Legge

Definizione. La tensione E_0 fornita da una termocoppia dipende solo dalla differenza delle temperature delle giunzioni ($T_1 - T_2$), mentre è del tutto indipendente da qualsiasi altra temperatura presente nel circuito.



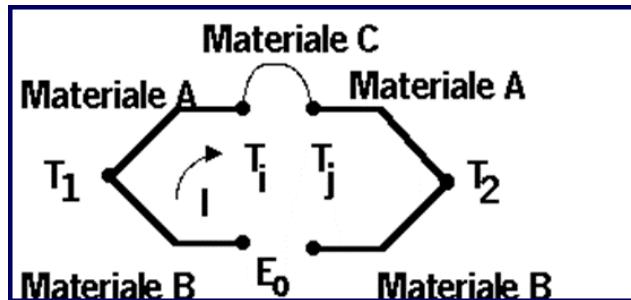
III Legge

Definizione. Se un terzo materiale C viene introdotto in un ramo del circuito di materiale A e le due nuove giunzioni A/C e C/A sono mantenute alla stessa temperatura, la E_0 non subisce variazioni.

$$E_0 = e_{B/A}T_1 + e_{A/C}T_i + e_{C/A}T_j + e_{A/B}T_2$$

$$e_{B/A} = -e_{A/B} \quad e_{A/C} = -e_{C/A}$$

$$E_0 = e_{B/A}(T_1 - T_2) + e_{A/C}(T_i - T_j)$$



La III legge diviene utile non appena la zona tra T_2 e T_1 è ampia, in questo modo il metallo puro viene utilizzato soltanto per la realizzazione dei giunti mentre il collegamento tra questi viene realizzato tramite lo stesso materiale, meno nobile e meno costoso.

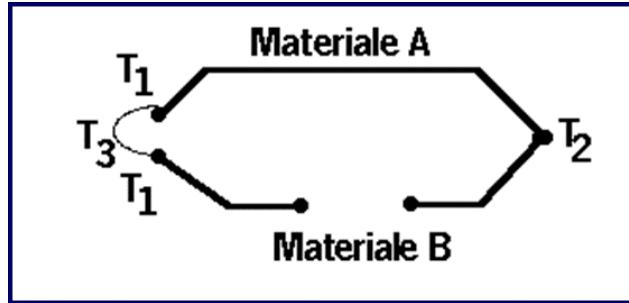
IV Legge

Definizione. Se un terzo materiale C viene introdotto in una giunzione A/B e le due nuove giunzioni A/C e C/B sono mantenute alla stessa temperatura T_1 , la E_0 non subisce variazioni.

$$E_0 = e_{B/C}T_1 + e_{C/A}T_1 + e_{A/B}T_2$$

$$e_{C/A} = e_{C/B} + e_{B/A}$$

$$E_0 = e_{B/A}(T_1 - T_2)$$

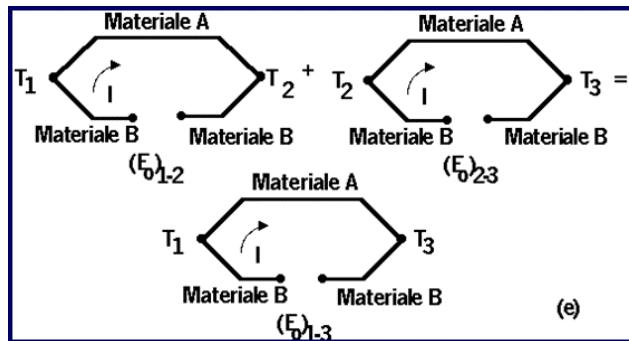


Questa legge permette di saldare fisicamente il giunto: utilizzando un terzo materiale (il metallo fusibile), l'output dello strumento non varia perché i tre materiali si trovano tutti alla stessa temperatura.

V Legge

Definizione. Se una termocoppia con i giunti alle temperature T_1 e T_2 genera una tensione $(E_0)_{1-2} = f(T_1 - T_2)$ ed un'altra termocoppia, dello stesso tipo, sottoposta a temperature T_2 e T_3 genera una tensione $(E_0)_{2-3} = f(T_2 - T_3)$, la tensione $(E_0)_{1-3}$ è data da:

$$(E_0)_{1-3} = f(T_1 - T_3) = (E_0)_{1-2} + (E_0)_{2-3}$$



$\Delta T_{1,2}$	$\Delta T_{2,3}$
$(E_0)_{1,2}$	$+ (E_0)_{2,3} = (E_0)_{1,3}$

Come se fosse un'unica termocoppia.

Per quale motivo è importante questa legge? Questa legge permette di individuare una temperatura incognita a partire da una termocoppia non riferita attraverso l'utilizzo di una termocoppia virtuale che sia riferita tra le stesse temperature.

L'uscita della termocoppia è dipendente dall'ingresso mediante questa formula

$$E_0 = e_{x/y} \Delta T$$

Dove il termine $e_{x/y}$ non è costante.

La misura del ΔT si esegue quindi attraverso la misura di un E_0 che avviene attraverso un termine incognito.

Sia ad esempio una termocoppia operante tra T_1 e T_2 che misura una tensione di 0.15 V. Si vuole conoscere T_1 sapendo che $T_2 \neq T_{rif}$ non è la usuale temperatura di riferimento.

Si utilizza allora una termocoppia "virtuale" operante tra T_2 e $T_3 = T_{rif}$, in cui quest'ultima è l'usuale temperatura di riferimento. Attraverso le tabelle delle termocoppie si risale così alla tensione misurata da questa termocoppia tra queste temperature, magari 0.25 V, in questo modo, grazie alla V legge:

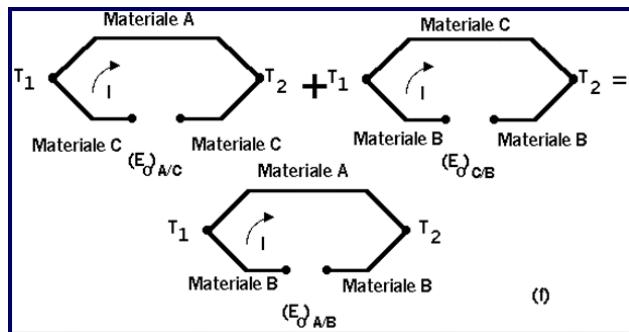
$$0.15_{real} + 0.25_{virtual} = 0.4 \text{ V}$$

Con questo valore di tensione si può così rientrare in tabella ed individuare il T_1 incognito.

VI Legge

Definizione. Se una termocoppia che utilizza materiali A/C viene sottoposta alla differenza di temperatura $(T_1 - T_2)$ e genera una $(E_0)_{A/C}$ ed un'altra termocoppia C/B, sottoposta alla stessa differenza di temperature genera una $(E_0)_{C/B}$, allora una termocoppia A/B, sottoposta alla stessa differenza di temperature genera una $(E_0)_{A/B}$ uguale a:

$$(E_0)_{A/B} = (E_0)_{A/C} + (E_0)_{C/B}$$



Classificazione

Esistono 3 principali classi di termocoppie, in base al metallo con cui vengono realizzate

- Metalli di base (Cu, Fe, Mn) con portata massima fino a 1000 °C
- Metalli nobili (Pt, Ir) con portata massima fino a 2000 °C
- Metalli refrattari (W, Ta, Mo) con portata massima fino a 2800 °C

Tra queste le più largamente usate sono le termocoppie di **tipo K** e di **tipo J**.

- **Tipo K**

$$-200^{\circ}\text{C} \text{ a } 1260^{\circ}\text{C} \quad S = 41.0 \mu\text{V}^{\circ}\text{C}^{-1}$$

- **Chromel NiCr:** **positivo**
- **Alumel NiAl:** **negativo**

- **Tipo J**

$$-40^{\circ}\text{C} \text{ a } 750^{\circ}\text{C} \quad S = 51.7 \mu\text{V}^{\circ}\text{C}^{-1}$$

- **Ferro:** positivo (bianco)
- **Costantana CuNi:** **negativo**

Per quanto riguarda l'impiego, si sceglie la tipologia di termocoppia in funzione dell'ambiente di destinazione:

- Ambienti riducenti: termocoppie J
- Ambienti ossidanti: termocoppie K (ed E)
- Tra -40°C e 400°C indipendentemente dall'ambiente: termocoppie T

TABLE 1 — Various thermocouple styles and materials.

Type ANSI Symbol	Materials	Temp. Range (°C)	Error +/- (°C)	Application Notes
T	Copper-Constantan	0-350	1.0	When moisture is present.
J	Iron-Constantan	0-750	2.2	For reducing atmosphere.
E	Chromel-Constantan	0-900	1.0	When corrosion possibility.
K	Chromel-Alumel	0-1250	2.2	For clean oxidizing atmosphere.
R	Platinum-13% Rhodium/Platinum	0-1450	1.5	High resistance to oxidation and corrosion.
S	Platinum-10% Rhodium/Platinum	0-1450	1.5	High resistance to oxidation and corrosion.

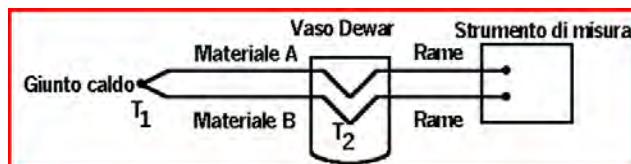
Giunto di riferimento

Affinché la termocoppia sia efficace si deve realizzare un giunto di riferimento. Questo consta nella realizzazione e nel mantenimento del "giunto freddo" ad una temperatura nota attraverso diverse applicazioni tecniche.

Vaso Dewar

Vaso adiabatico contenente una miscela di acqua e ghiaccio, per mantenere l'equilibrio termico (0°C) è necessario che l'operatore aggiunga ghiaccio ed rimuova l'acqua in eccesso.

L'incertezza associata a questo strumento è di 0.1°C

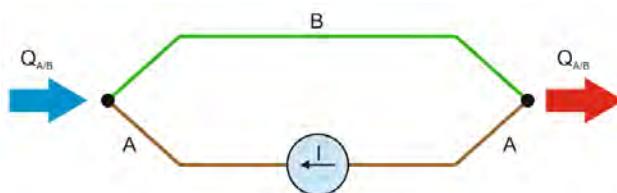


Cella Peltier

Il giunto freddo viene posto all'interno di un contenitore nel quale è presente acqua satura d'aria mantenuta a 0°C per effetto Peltier:

Definizione. *Fenomeno termoelettrico per cui una corrente elettrica che scorre tra due metalli o semiconduttori differenti posti in contatto (giunzione Peltier) produce un trasferimento di calore. È l'opposto dell'Effetto Seebeck.*

Il passaggio di corrente determina un assorbimento di calore dal metallo del giunto.



Controllando la corrente si riesce a stabilizzare la temperatura.

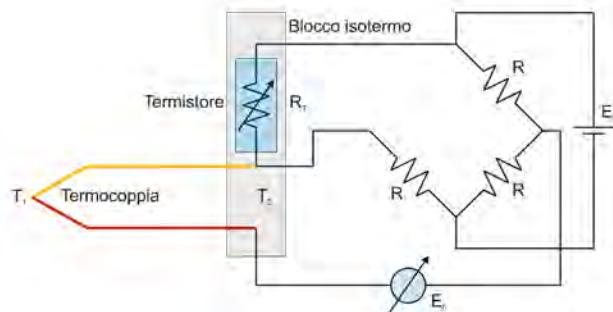
Compensazione con circuito a ponte

La tensione E_0 della termocoppia a T_1 si misura in serie all'uscita di un ponte di Wheatstone le cui resistenze vengono scelte per essere in equilibrio alla temperatura T_2 di riferimento.

Un ramo del ponte di Wheatstone è occupato da un termistore applicato ad un blocco isotermo a T_2 , se tale temperatura varia viene a crearsi una variazione di tensione E_1 - dovuta allo stesso termistore - ed una variazione E_2 dovuta alla variazione di temperatura del giunto freddo.

Il sistema è così dimensionato in modo che

$$E_1 = -E_2$$



Compensazione con circuito integrato

Misura la temperatura del giunto di riferimento tramite termometro a circuito integrato e fornisce una tensione uguale in modulo ma in verso opposto alla tensione generata dalla termocoppia a causa della variazione della temperatura del giunto di riferimento, questo posto all'interno del chip.

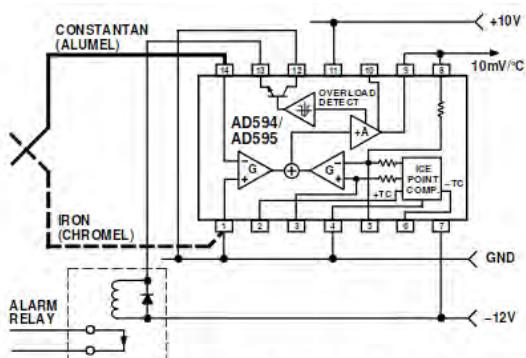
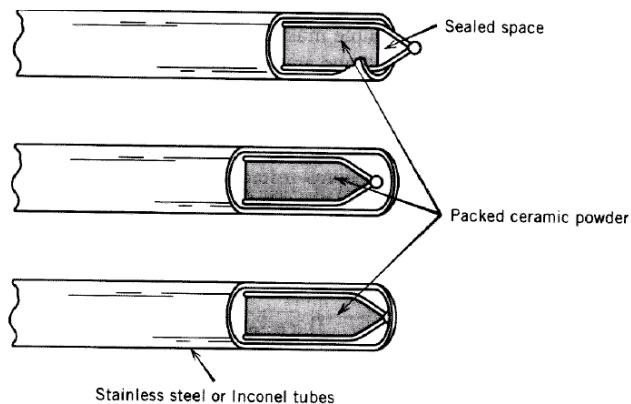


Figure 12. -ALM Driving A Negative Referenced Load © picforum.it

Giunto di misura

La scelta del diametro dei fili dipende dalla risposta dinamica desiderata e dalle caratteristiche corrosive dell'ambiente.



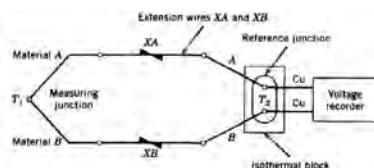
Si potrà così avere un giunto di misura

- Non protetto
- Collegato a massa
- Isolato

Cavi di Compensazione

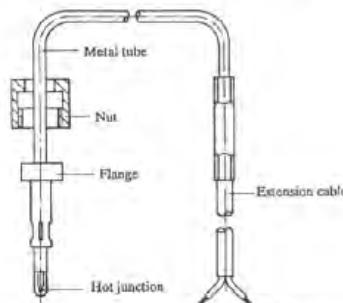
I cavi di compensazione devono prefiggersi due scopi:

1. Economicità: infatti il grado di purezza dei fili può essere inferiore di quello dei fili costituenti la termocoppia
2. Praticità: ottenere una maggiore facilità nella realizzazione dei collegamenti grazie alla maggiore flessibilità dei cavi di compensazione rispetto ai cavi delle termocoppie



Monitoraggio della temperatura dei fumi all'interno di catalizzatori

- campo di misura: 300-1000°C, intervallo di errore statico:
 - 3°C a 0°C
 - 10°C a 1000°C.



Operating temperature range
Measured medium
Output

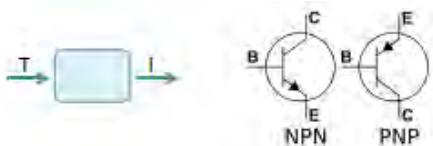
+300 °C to +1000 °C
exhaust gas
typ. 4 mV / 100 K
for NiCr - Ni

Termometri a circuito integrato

I termometri a circuito integrato fanno uso di transistor.

$$\xrightarrow{T} \square \xrightarrow{V} \square \xrightarrow{I}$$

Un transistor è formato da tre strati di silicio, nello strato centrale c'è un drogaggio opposto agli altri due.



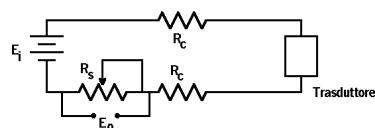
Ad ogni strato è associato un terminale: base (centrale), collettore ed emettitore (esterni).

Il principio di funzionamento si fonda sulla possibilità di controllare la corrente elettrica che attraversa il transistor mediante l'applicazione di una tensione tra i suoi terminali.

Il valore della tensione base-emettitore varia con la temperatura

$$V = AT + B + Ce^{-\alpha(T-T_0)}$$

Se varia la temperatura varia la tensione, al variare della tensione varia la corrente che attraversa il transistor: circuito integrato a conversione diretta di intensità di corrente.



$$E_0 = IR_s = S_i T_a R_s = S_t T_a$$

Dove

- I è l'intensità di corrente generata alla temperatura assoluta T_a ,
- R_s è la resistenza posta in serie, ai capi della quale è misurata la tensione in uscita,
- T_a è la temperatura assoluta,
- S_i è il fattore di sensibilità in corrente del trasduttore
- S_t è il fattore di sensibilità in tensione del circuito.

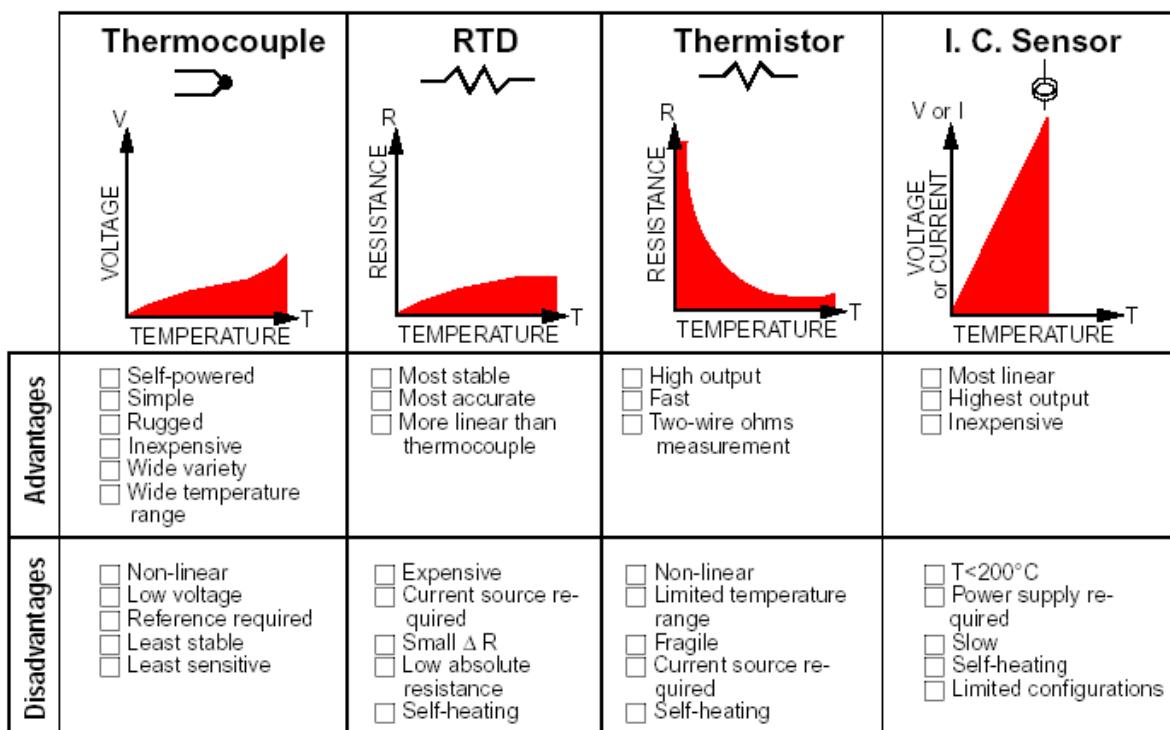


Figura 4: Termometri a confronto

Termometri chimici

A cristalli liquidi

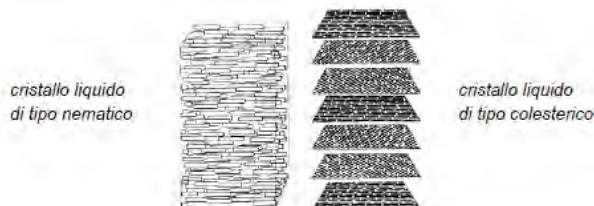
Cristalli liquidi: composti organici che non passano direttamente dallo stato liquido al quello stato solido ma attraversano prima stato di aggregazione intermedio tra la fase liquida e quella cristallina.

I cristalli liquidi sono caratterizzati da un'organizzazione molecolare intermedia tra la quasi totale assenza di ordine (liquido) e l'elevato grado di ordine (cristalli).

Si individuano due tipo di cristalli liquidi

- **Nematici:** molecole allungate distribuite secondo una direzione con un certo ordine
- **Colesterici:** strati adiacenti orientati in modo da formare un angolo tale che l'insieme delle direzioni individuate dalle molecole, spostandosi ortogonalmente agli strati, assume un andamento ad elica.

La distanza tra due piani consecutivi con stesso orientamento è il passo p dell'elicoide.



Funzionamento

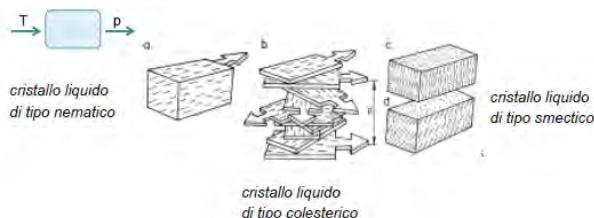
I cristalli liquidi mostrano una capacità di riflettere selettivamente la luce incidente

$$p = n\lambda$$

Al variare della temperatura varia il passo dell'elica e quindi λ : viene riflesso un colore differente.

Questo tipo di trasduttori si indicano con sigle tipo R35C1W dove

- 35 indica l'*event temperature*: la temperatura alla quale il cristallo assume il colore rosso
- 1 indica la *bandwidth*: la variazione in °C alla quale si ha la conversione in blu



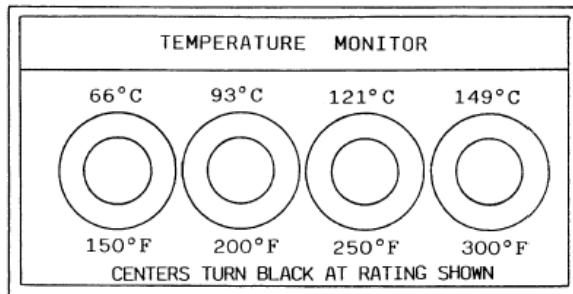
Il rilevamento delle diverse aree di colore assunto dai cristalli liquidi, condotto con mezzi fotografici o con metodi più recenti di acquisizione di immagini da parte di sistemi automatici, insieme ai dati di taratura relativi al particolare cristallo liquido utilizzato, consente il rilievo dei campi di temperatura con intervalli di incertezza pari a 0.1 °C.

Per assicurare detti intervalli di incertezza lo sperimentatore deve porre particolare attenzione affinché sia assicurato un contatto certo tra pelle e pellicola a cristalli liquidi.

A cambiamento di stato di aggregazione

Il principio fisico alla base di questi termometri è il cambiamento di stato solido - liquido di alcune sostanze (bromo/cloro-nitrobenzene) che avviene ad una temperatura funzione delle proporzioni della miscela.

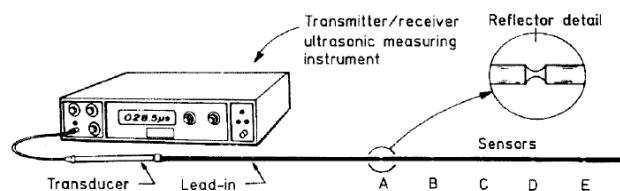
Hanno un campo di misura da 34 °C a 37 °C con una risoluzione di 0.1 °C. Viene utilizzato principalmente come monitoraggio: ad una determinata temperatura un elemento passa allo stato solido ed espandendo rompe il vetro nel quale è contenuto.



Termometri a ultrasuoni

I termometri ad ultrasuoni sono adatti ad una misura "non-a-contatto" e si basano sul mezzo come trasduttore di un'onda di segnale che varia con la temperatura.

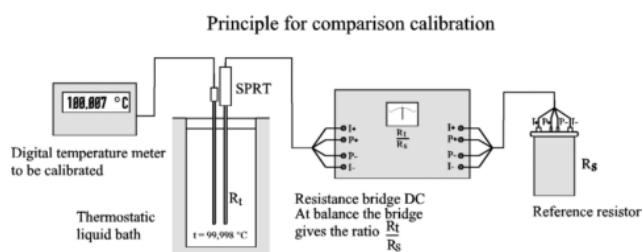
Ad un ampio campo di misura (fino a 3000°C) corrispondono tuttavia problemi di interferenza di natura meccanica e di valutazione di una temperatura media del conduttore (2-5 cm).



Taratura

Per confronto

Si utilizza un SPRT di alto grado in pozzetto di calibrazione



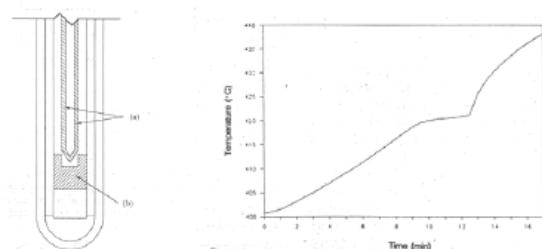
A punto di solidificazione ed ebollizione

Termocoppia Autocalibrante

1. Il trasduttore immerso in metallo puro fuso
2. Il metallo viene fatto raffreddare
3. Quando il metallo si solidifica si ha una uscita costante nel tempo: l'uscita è nulla, non si misura niente
4. A questo punto essendo nota la temperatura di fusione è possibile correggere.

Necessario condurre più prove con materiali puri.

Per campi di temperatura minori si usa il passaggio da vapore a liquido.



A filo fondente

Metodo utilizzato nelle termocoppie: il giunto caldo viene realizzato con un terzo materiale puro di cui si conosce l'esatta temperatura di fusione.

Appena questo metallo fonde non si misura più alcuna tensione: il valore misurato nell'istante precedente alla fusione equivale alla temperatura di fusione del metallo posto nel giunto di misura, in questo modo è possibile correggere la misura.

NOTE

10. Misure di portata e velocità per i fluidi

Indice

Misure di portata	2
Flussometri a strozzamento	2
Venturimetro	3
Flussometro a galleggiante - Rotametro	4
Funzionamento	5
Flussometro a turbina	6
Funzionamento	7
Misure di velocità	8
Tubo di Pitot	8
Funzionamento	8
Anemometro a filo caldo	9
Anemometro a temperatura costante	11

Misure di portata

Un fluido scorre in un condotto a causa di una differenza di pressione esistente fra due diverse sezioni.

La portata volumetrica rappresenta il volume di fluido che attraverso la sezione considerata nell'unità di tempo

$$\dot{Q} = \frac{dV}{dt} = [\text{m s}^{-3}]$$

Esprimendo il volume come una sezione per una lunghezza si ottiene che la portata può essere vista come il prodotto tra una sezione e una velocità.

Se al posto del volume si fa riferimento alla massa, si parla di portata massica

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = [\text{kg s}^{-1}]$$

I trasduttori per la misura di portata possono essere suddivisi in due categorie:

- A restringimento di sezione / A strozzamento

Se si basano sull'introduzione di un restringimento nella sezione di passaggio del fluido causando un decremento della pressione statica (perdita di carico): la misura della portata avviene sempre grazie al ΔP imposto, non è mai una misura diretta.

- NON a strozzamento

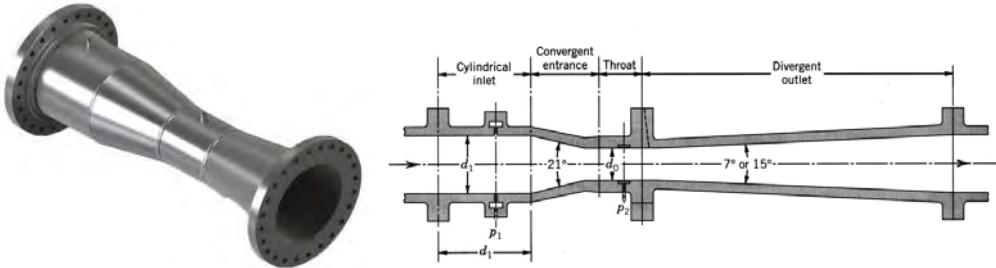
Se si basano su principi differenti come il bilancio di quantità di moto, o ultrasuoni ...

A prescindere dal principio fisico i trasduttori per la misura di portata vengono chiamati **flussometri**.

Flussometri a strozzamento

- **Diaframmi:** di semplice realizzazione e basso ingombro, inducono importanti perdite di carico >20% causate dal distacco della vena fluida e dall'instaurarsi di un moto fortemente turbolento.
- **Boccaglio:** per flussi di vapore ad elevata velocità, presenta un tratto convergente al fine di guidare i filetti fluidi, riduce le perdite di carico intorno al 15%.
- **Boccaglio - Venturi:** presenza di un tratto convergente-divergente, con dimensioni inferiori ad un venturimetro.
- **Venturimetri:** il tratto convergente è un cilindro a sezione costante mentre il tratto divergente presenta un piccolo angolo di conicità.
Le perdite di carico possono ridursi fino ad arrivare al 2%, tuttavia può raggiungere dimensioni ragguardevoli, dai 16 m di lunghezza con 4.5 m di diametro.

Venturimetro



Il graduale aumento di sezione dopo il tratto convergente permette una diminuzione delle perdite di carico ma comporta un maggiore ingombro.

L'equazione che governa il venturimetro è l'equazione di continuità, questa infatti garantisce che la portata - per fenomeni stazionari - è costante in ogni sezione

$$\dot{Q} = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Per fluidi incomprimibili se $S_2 < S_1$ si ha dalle equazioni di Hugoniot che $v_2 > v_1$.

Applicando il teorema di Bernoulli tra le sezioni, dopo aver verificato le sue ipotesi di applicabilità, si perviene a

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

La differenza di pressione diviene così esprimibile come

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

Si può risalire così alla velocità conoscendo la differenza di pressione, misurabile.

Si definisce a questo punto il coefficiente di strozzamento come

$$Z = \frac{S_2}{S_1} < 1$$

In modo che la conservazione della portata si possa riscrivere come

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 = Z v_2$$

Questa sostituita nell'equazione di Bernoulli ricavata porta a

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho v_2^2(1 - Z^2)$$

Da cui la velocità

$$v_2^2 = \frac{2\Delta P}{\rho(1 - Z^2)}$$

E la portata volumetrica diviene così pari a

$$\dot{Q} = S_2 v_2 = S_2 \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho(1 - Z^2)}}$$

La differenza di pressione è misurabile attraverso un manometro differenziale collegato alle due prese di pressione.

Per un fenomeno reale le perdite di carico non possono essere trascurate, per cui si dovrà tener conto di un coefficiente di efflusso

$$C = \frac{\dot{Q}_{id}}{\dot{Q}_{re}} < 1$$

Questo, non costante, dipenderà dal numero di Reynolds Re secondo tabelle fornite dal costruttore.

L'equazione finale per il calcolo della portata diviene così

$$\dot{Q} = CS_2 \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho(1 - Z^2)}}$$

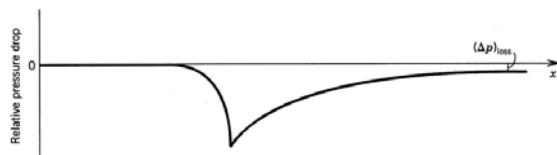
Notare come sia uno strumento fortemente non lineare dalla sensibilità non costante: è più alta nella zona finale del campo di misura, il venturimetro è adatto per elevati valori di portata.

X Costo elevato

X Ingombro elevato dovuto alla lunghezza del tratto divergente, questo infatti non può superare i 15° al fine di evitare distacchi di vena fluida

X Perdite di carico (seppur minime).

Alla fine del tratto divergente non tutto il carico di pressione viene recuperato, si verifica quindi un errore di inserzione



Herschel venturi meter with the associated flow pressure drop along its axis.

Flussometro a galleggiante - Rotametro



È uno strumento di facile costruzione che permette il raggiungimento di accuratezza elevata (1%).

È costituito da un tubo di vetro o materiale plastico trasparente dalla forma lievemente troncoconica, **quasi** a strozzamento, su cui è incisa esternamente una scala di "graduazione".

Al suo interno è collocato un galleggiante di materiale e di forma opportuni allo scopo.

Viene inserito in posizione verticale sul tubo di erogazione del fluido.

Ha un campo di misura molto vasto: dal decimo di litro a migliaia di litri al secondo e non ha bisogno di un manometro differenziale per la misura della pressione.

Funzionamento

1. Quando non vi è passaggio di fluido ($Q = 0$) il galleggiante è adagiato sul fondo del tubo.
2. Al passaggio del fluido il galleggiante viene sollevato dal flusso e, a seconda della portata evolente, si posizionerà ad una certa altezza in corrispondenza della quale l'operatore legge direttamente il valore della portata sulla scala graduata.

Il principio fisico su cui si basa il rotametro è legato alla semplice relazione di equilibrio tra la forza peso del galleggiante nel fluido e la spinta stessa del fluido.

Il peso del galleggiante nel fluido vale

$$P_g = (\rho_g - \rho_{fluido})gV_g$$

Mentre la spinta del flusso sarà data, proprio dalla definizione, come sezione massima del galleggiante per la pressione a cui è sottoposta

$$S = A(P_1 - P_2)$$

La differenza di pressione tra testa e piede del galleggiante, che contribuisce al suo sollevamento, sussiste in virtù della forma del galleggiante stesso.

Dall'equilibrio delle forze si ha così

$$(\rho_g - \rho_{fluido})gV_g = A(P_1 - P_2)$$

Da cui

$$\Delta P = \frac{\Delta \rho g V_g}{A}$$

Da questa equazione si nota immediatamente come la differenza di pressione sia costante perché

1. È funzione di parametri costanti
2. Non dipende dalla quota raggiunta dal galleggiante

Applicando infatti la conservazione dell'energia (NB: il galleggiante è totalmente immerso nel fluido) ci si riconduce a

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho_{fluido} v^2$$

La velocità v è relativa alla sezione anulare di passaggio del fluido che si viene a creare tra il galleggiante e il tubo troncoconico ed è anch'essa costante per qualunque quota raggiunta.

Sostituendo questo risultato nell'equazione precedente si ha

$$\frac{1}{2} \rho_{fluido} v^2 = \frac{\Delta \rho g V_g}{A}$$

Da cui

$$v = \sqrt{\frac{2 \Delta \rho g V_g}{A \rho_{fluido}}} = \sqrt{\frac{2 g V_g}{A} \cdot \frac{\rho_g - \rho_{fluido}}{\rho_{fluido}}}$$

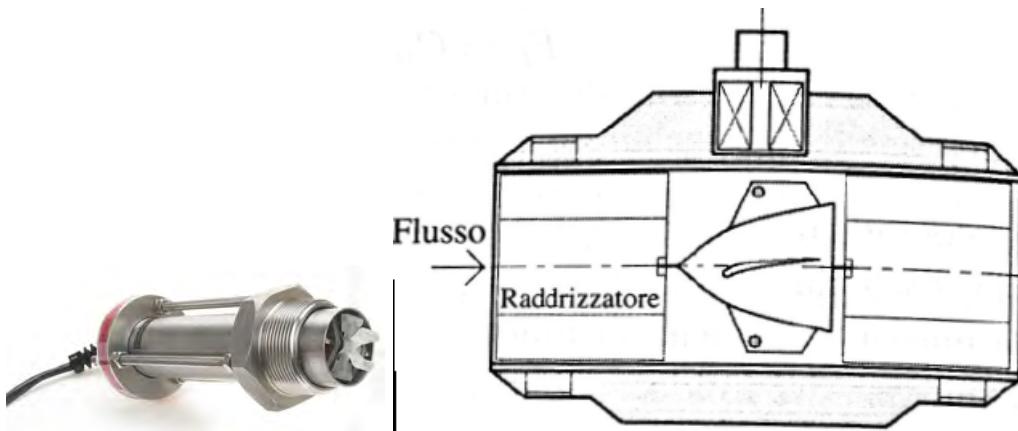
E la portata sarà così pari a

$$\dot{Q} = C S v = C S \sqrt{\frac{2 g V_g}{A} \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho_{fluido}} - 1 \right)}$$

Tuttavia, dalla sua relazione, si nota che la velocità è costante: come si può allora misurare una portata?

Attraverso il cambio di sezione: al variare di \dot{Q} deve variare la sezione anulare S , ecco perché il flussometro ha una forma troncoconica.

Flussometro a turbina

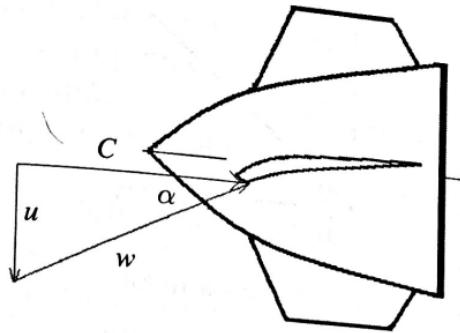


Il flussometro a turbina misura quanto velocemente ruota la turbina, il limite metrologico di questo strumento risiede nell'inerzia della turbina, per cui se la portata è troppo bassa questa non la mette in rotazione: è uno strumento del II ordine.

Si presenta come un cilindro contenente una girante il cui asse è sostenuto da due cuscinetti.

Il cilindro esterno presenta due estremità filettate per l'inserimento nella linea idraulica in esame.

A monte e a valle della girante possono essere presenti dei raddrizzatori di flusso che servono per guidare il flusso in direzione assiale.



Funzionamento La fisica che c'è dietro riguarda i triangoli di velocità.

- c velocità assiale, responsabile della portata
- w velocità relativa
- u velocità tangenziale

Per cui, dalla trigonometria è facile realizzare che

$$\frac{u}{c} = \tan \alpha \Rightarrow c = \frac{u}{\tan \alpha} = \frac{\omega r}{\tan \alpha}$$

In cui α è noto grazie al raddrizzatore, questo infatti ha il preciso compito di rendere il fluido più assiale possibile in modo da diminuire l'entità della velocità relativa.

Dall'equazione di continuità ci si riconduce a

$$\frac{dV}{dt} = c\pi \frac{d^2}{4} = \frac{\pi \omega d^3}{8 \tan \alpha} = \frac{\pi^2 f d^3}{4 \tan \alpha}$$

Dove f è la frequenza.

Ciò significa che la portata transitante diviene nota conoscendo la frequenza di rotazione della girante, significa allora che a valle del sistema di misura dovrà esserci un oscilloscopio, o un frequenzimetro, o un encoder che ad ogni giro invii un segnale digitale.

Il grosso limite di questo strumento è l'**inerzia meccanica**, a causa infatti delle irreversibilità meccaniche dei cuscinetti e della massa della girante, è necessaria una portata consistente affinché questa si metta in rotazione.

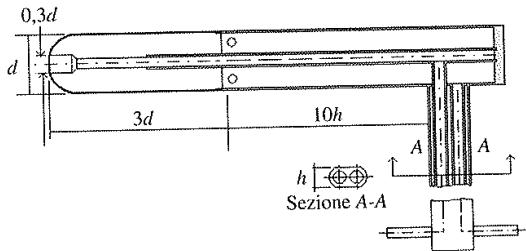
Il modello matematico descritto vale quando sussiste la relazione

$$\frac{\rho_{fluido} \omega d^3}{\mu} > 1000$$

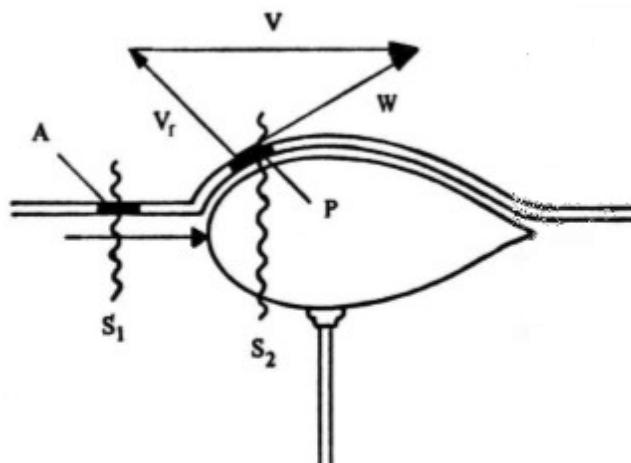
Misure di velocità

Tubo di Pitot

Il tubo di Pitot è un trasduttore per la misura della velocità di un flusso portante.



Si presenta come una sonda cilindrica con un foro assiale che costituisce la presa totale (ristagno) e una serie di fori sul profilo laterale per la presa statica.



Funzionamento Si consideri un fluido in moto laminare nel punto A.

Nella sezione S_1 il fluido scorre indisturbato a velocità v .

Nella generica sezione S_2 il fluido entra invece in contatto con il trasduttore e questo comporta una deviazione di traiettoria con velocità finale del flusso pari a

$$w = v + v_f$$

Con v_f componente di frenamento.

Si applichi il teorema di Bernoulli alle sezioni generiche

$$S_1 \rightarrow E_{tot} = P_{st} + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad S_2 \rightarrow E_{tot} = P + \frac{1}{2}\rho w^2$$

Dalla conservazione dell'energia si ricava che

$$P_{st} + \frac{1}{2}\rho v^2 = P + \frac{1}{2}\rho w^2$$

Allora

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho(v^2 - w^2)$$

Che si può riscrivere, introducendo il coefficiente di pressione K_p

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho (1 - K_p) v^2 \quad K_p = \frac{w^2}{v^2}$$

Tale coefficiente di pressione è un parametro fondamentale per la scelta del corretto posizionamento della presa statica e di quella dinamica

- $K_p = 1$

Il massimo del coefficiente di pressione si ha quando tutta la velocità del fluido viene frenata.

Ciò accade solamente all'inizio del sondino in corrispondenza dell'asse.

In questo punto infatti la pressione del fluido è massima: è qui che si deve posizionare la presa di pressione totale (ristagno).

- $K_p = 0$

Il minimo del coefficiente di pressione si ha quando il flusso è indisturbato, senza componente di frenamento.

Ciò accade ad una distanza di $5 \div 6$ diametri dall'inizio del sondino.

In questo punto tutta la pressione del fluido è solamente di tipo statico: è qui che si deve posizionare la presa di pressione statica.

Identificate le posizioni corrette delle prese dinamica e statica, il sondino può immediatamente essere utilizzato in accoppiamento ad un manometro differenziale, per effettuare misure di velocità del fluido.

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho v^2$$

- ✓ Economico
- ✓ Di facile realizzazione
- ✓ Assenza di perdite di carico grazie alla dimensioni estremamente contenute
- ✗ Difficoltà di allineamento con la direzione del fluido
- ✗ Basse accuratezze (si usano infatti TdP ridondanti negli aeromobili)

Anemometro a filo caldo



L'anemometria è una tecnica ad alta risoluzione molto utilizzata per la misura della velocità dei fluidi.

L'anemometro a filo caldo è lo strumento più diffuso.

Il principio fisico si basa sullo scambio termico tra fluido e filo che avviene per convezione, esiste infatti una relazione tra il coefficiente di scambio termico per convezione (h) e la velocità del fluido in cui il filo è immerso.

Nel campo industriale per valutare lo scambio termico tra un filo sottile e la corrente fluida che lo investe in direzione trasversale si utilizza la seguente relazione

$$Nu = A + B \cdot Re^n$$

Un cui

- Nu è il numero di Nusselt

$$Nu = \frac{hD}{k}$$

- Re è il numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

- A, B costanti dipendenti dal fluido in esame
- D dimensione caratteristica
- k conducibilità termica del fluido
- ρ densità del fluido
- ν viscosità dinamica del fluido
- v velocità assoluta del fluido
- n nel campo di applicazione industriale può essere considerato pari a 0.5

Ne consegue che la relazione finale tra coefficiente di scambio termico per convezione e velocità del fluido è

$$h = C_1 + C_2 \sqrt{v}$$

Si supponga a questo punto di far scorrere una corrente elettrica nel filo dello strumento (realizzato in metallo puro).

Temperatura e resistenza elettrica del filo dipenderanno da I corrente, T_f temperatura del fluido e h coefficiente di convezione.

La relazione di Newton per lo scambio termico per convezione si può scrivere quindi come

$$RI^2 = hA(T_s - T_f)$$

Dove A è la superficie di scambio termico e T_s è la temperatura dello strumento, del filo.

Sostituendo il coefficiente h si arriva a

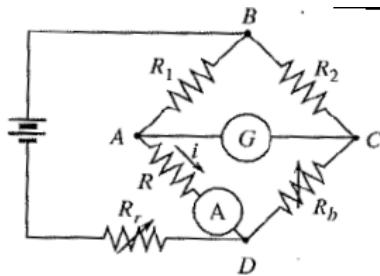
$$RI^2 = (C_1 + C_2 \sqrt{v})A(T_s - T_f)$$

Per poter calcolare la velocità, nell'ipotesi che T_f non varii, si può scegliere di mantenere costante o l'intensità di corrente o la temperatura del filo.

RICORDA: l'anemometro a filo caldo è uno strumento attivo!

Anemometro a temperatura costante

Lo schema circuitale di un anemometro a filo caldo a temperatura costante è quello mostrato in figura



In condizioni di equilibrio vale

$$I^2 = C_3 + C_3 \sqrt{v}$$

Al variare della velocità del fluido varia la corrente necessaria affinché la temperatura del filo, e quindi la resistenza, rimanga costante.

La corrente che scorre sul filo allora varia facendo variare R_r

La nuova corrente crea così uno squilibrio del ponte che viene azzerato andando a variare R_b attraverso una lettura col galvanometro G attraverso il metodo di zero.

A questo punto, a ponte azzerato, si procede alla lettura del valore I che scorre sul filo.

Ora si può procedere ad una taratura dello strumento per diversi valori di velocità v .

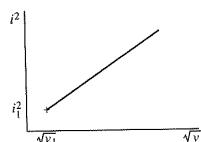


Figura 1: L'anemometro a filo caldo è uno strumento lineare

- ✓ Ingombri bassissime con conseguente ridotto errore di inserzione (strumento del I ordine)
- ✓ Elevata banda passante: Strumento molto rapido in grado di rilevare anche correnti ad elevata turbolenza (elevata banda passante)
- ✓ Elevato campo di misura
- ✓ Misure puntuali della velocità
- ✓ Sensibile alle basse velocità
- ✓ Non risente delle componenti trasversali delle velocità
- ✗ Fragile
- ✗ Nella maggior parte dei campi industriali si predilige la misura media e non puntuale della velocità (e quindi si utilizza Pitot)
- ✗ Generalmente in platino e il fluido può generare impurezze
- ✗ Misura di un vettore \vec{v} tramite uno scalare I
- ✗ La temperatura è una grandezza di influenza, quindi non viene utilizzato per la misura di fluidi ad alte temperature.

NOTE