L’ Algoritmo FFT radix – 2:

L’idea di Cooley e Tukey

e

La variante di Gentleman e Sande

Algoritmo di Cooley e Tukey

Cooley-Tukey FFT Algorithms

Amente Bekele

IV. FFT Algorithm when N is a power of two

Theorem 2: *The DFT where the input array A has a size $N = 2^m$ for integer $m \geq 0$ can be calculated in $O(N\log(N))$ time with the following algorithm: [3]*

procedure FFT(A)

Input: An array of complex values which has a size of 2^m for $m \geq 0$.

Output: An array of complex values which is the DFT of the input

N := A.length
if N = 1 **then return** A
else
    $W_N := e^{2\pi i/N}$
    W := 1
    $A_{even} := (A_0, A_2, ..., A_{N-2})$
    $A_{odd} := (A_1, A_3, ..., A_{N-1})$
    Y_{even} := FFT(A_{even})
    Y_{odd} := FFT(A_{odd})
    for j:=0 to $N/2 - 1$ **do**
        $Y[j]$ = $Y_{even}[j]$ + W * $Y_{odd}[j]$
        $Y[j + N/2]$ = $Y_{even}[j]$ - W * $Y_{odd}[j]$
        W := W * W_N
    return Y

The above algorithm divides the input into two parts each having a size of $N/2$. The dividing operation and updating of the result takes O(N). From this the following recurrence relation can be derived:

$$T(N) = 2T(N/2) + O(N)$$

The recurrence shows the total running time is O($Nlog(N)$).

Esempio: • $N = 2^2 = 4$

Calcolo della DFT di un vettore $\underline{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$

(f_0, f_1, f_2, f_3)

d=2 d=2

(f_0, f_2) (f_1, f_3)

1 DFT di lunghezza 4

2 DFT di lungh. 2

Suddividiamo il vettore iniziale
In modo tale che la DFT di lungh. 4
Sia decomposta in 2 DFT di lungh. 2

Esempio: • $N = 2^3 = 8$

Calcolo della DFT di un vettore $\underline{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3\ f_4 \ldots\ldots f_7)$

$(f_0, f_1, f_2, f_3\ f_4, f_5, f_6, f_7)$

d=2 d=2 d=2 d=2 d=2 d=2

$(f_0, f_2\ f_4, f_6)$ $(f_1, f_3 f_5 f_7)$

1 DFT di lunghezza 8

2 DFT di lungh. 4

La DFT di lungh. 8 viene decomposta in 2 DFT di lungh. 4

Si può applicare lo schema radix – 2 alle DFT di lungh. 4

Esempio: • $N = 2^3 = 8$

Calcolo della DFT di un vettore $\underline{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3\ f_4 \ldots\ldots f_7)$

$(f_0, f_1, f_2, f_3\ f_4, f_5, f_6, f_7)$

1 DFT di lunghezza 8

$(f_0, f_2\ f_4, f_6)$ $(f_1, f_3 f_5 f_7)$

d=2 d=2 d=2 d=2

2 DFT di lungh. 4

$(f_0 f_4)$ $(f_2 f_6)$ $(f_1\ f_5)$ $(f_3 f_7)$

4 DFT di lungh. 2

SCHEMA RICORSIVO

Esempio: • $N = 2^m$

Calcolo della DFT di un vettore $\underline{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{N-2}, f_{N-1})$

$$(f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{N-2}, f_{N-1})$$

$$(f_0, f_2, \ldots, f_{N-2}) \qquad (f_1, f_3, \ldots, f_{N-1})$$

1 DFT di lunghezza 2^m

2 DFT di lunghezza 2^{m-1}

La DFT di lungh. 2^m viene decomposta in 2 DFT di lungh. 2^{m-1}

Si può riapplicare lo schema radix - 2 a ciascuna DFT

Esempio: • $N = 2^m$

Calcolo della DFT di un vettore $\underline{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{N-2}, f_{N-1})$

$(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 \ldots, f_{N-2}, f_{N-1})$

d=2 d=2

$(f_0, f_2, f_4 \ldots, f_{N-2})$ $(f_1, f_3, f_4 \ldots, f_{N-1})$

d=2 d=2 d=2

$(f_0\, f_4\, f_8 \ldots)$ $(f_2 f_6 f_{10} \ldots)$ $(f_1 f_5 f_9 \ldots)$ $(f_3 f_7 f_{11} \ldots)$

1 DFT di lunghezza 2^m

2 DFT di lunghezza 2^{m-1}

4 DFT di lunghezza 2^{m-2}

Riapplicando lo schema a ciascuna DFT ....

Esempio: • $N = 2^m$

Si vuole calcolare la DFT di un vettore $\underline{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{N-2}, f_{N-1})$

$(f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{N-2}, f_{N-1})$

1 DFT di lunghezza 2^m

$(f_0, f_2, \ldots, f_{N-2})$ $(f_1, f_3, \ldots, f_{N-1})$

2 DFT di lunghezza 2^{m-1}

$(\ldots)$ $(\ldots)$ $(\ldots)$ $(\ldots)$

...

...

$(f_0, f_{2^k}, \ldots, f_{2^{m-k}})$ $(\ldots)$ $(\ldots)$ $(f_{k2^{m-k}}, \ldots, f_{N-1})$

2^k DFT di lunghezza 2^{m-k}

...

...

2^{m-1} DFT di lunghezza 2

$(f_0, f_{N/2})(f_1, f_{N/2+1})$ $(f_{N/2-2}, f_{N-2})(f_{N/2-1}, f_{N-1})$

Elementi da combinare con lo schema butterfly

La FFT radix - 2
utilizza uno schema ricorsivo
(di profondità m=log(N))
in cui ad ogni passo
la lunghezza delle DFT si dimezza

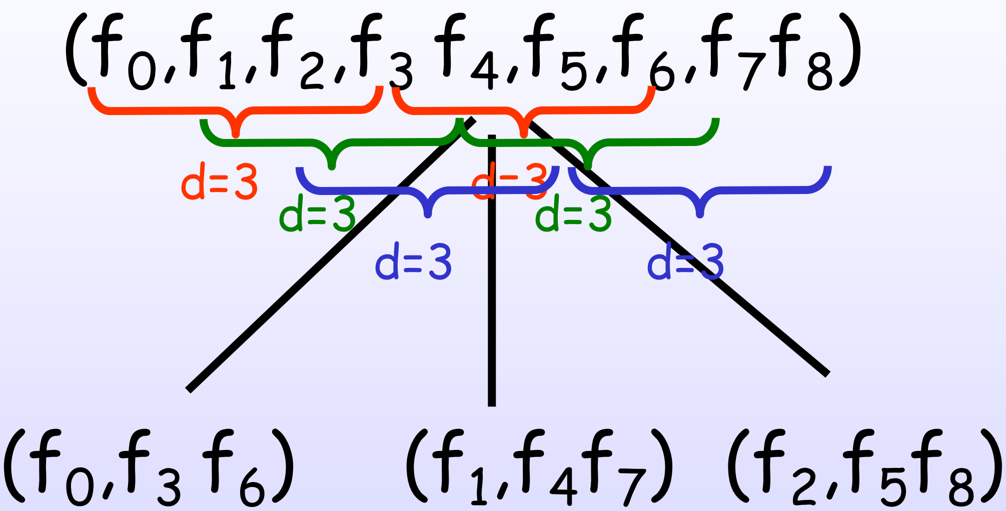
Si può applicare uno schema ricorsivo

anche per il calcolo di DFT la cui lunghezza

N non è potenza di 2 ?

Esempio: • $N = 3^2 = 9$

Calcolo della DFT di un vettore $\underline{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3\ f_4 \ldots.. f_8)$



1 DFT di lunghezza 9

3 DFT di lungh. 3

La DFT di lungh. 9 viene decomposta in 2 DFT di lungh. 3

Algoritmo FFT radix-3

Esempio: • $N = 3^3 = 27$

Calcolo della DFT di un vettore $\underline{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{26})$

$(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{26})$

$(f_0, f_3, \dots, f_{24})$ $(f_1, f_4, \dots, f_{25})$ $(f_2, f_5, \dots, f_{26})$

1 DFT di lunghezza 27

3 DFT di lunghezza 9

Si può applicare lo schema radix -3 per DFT di lungh. 9

Esempio: • $N = 3^3 = 27$

Calcolo della DFT di un vettore $\underline{f} = (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{26})$

$(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{26})$

$(f_0, f_3, \ldots, f_{24})$ $(f_1, f_4, \ldots, f_{25})$ $(f_2, f_5, \ldots, f_{26})$

FFT radix 3 | FFT radix 3 | FFT radix 3

1 DFT di lunghezza 27

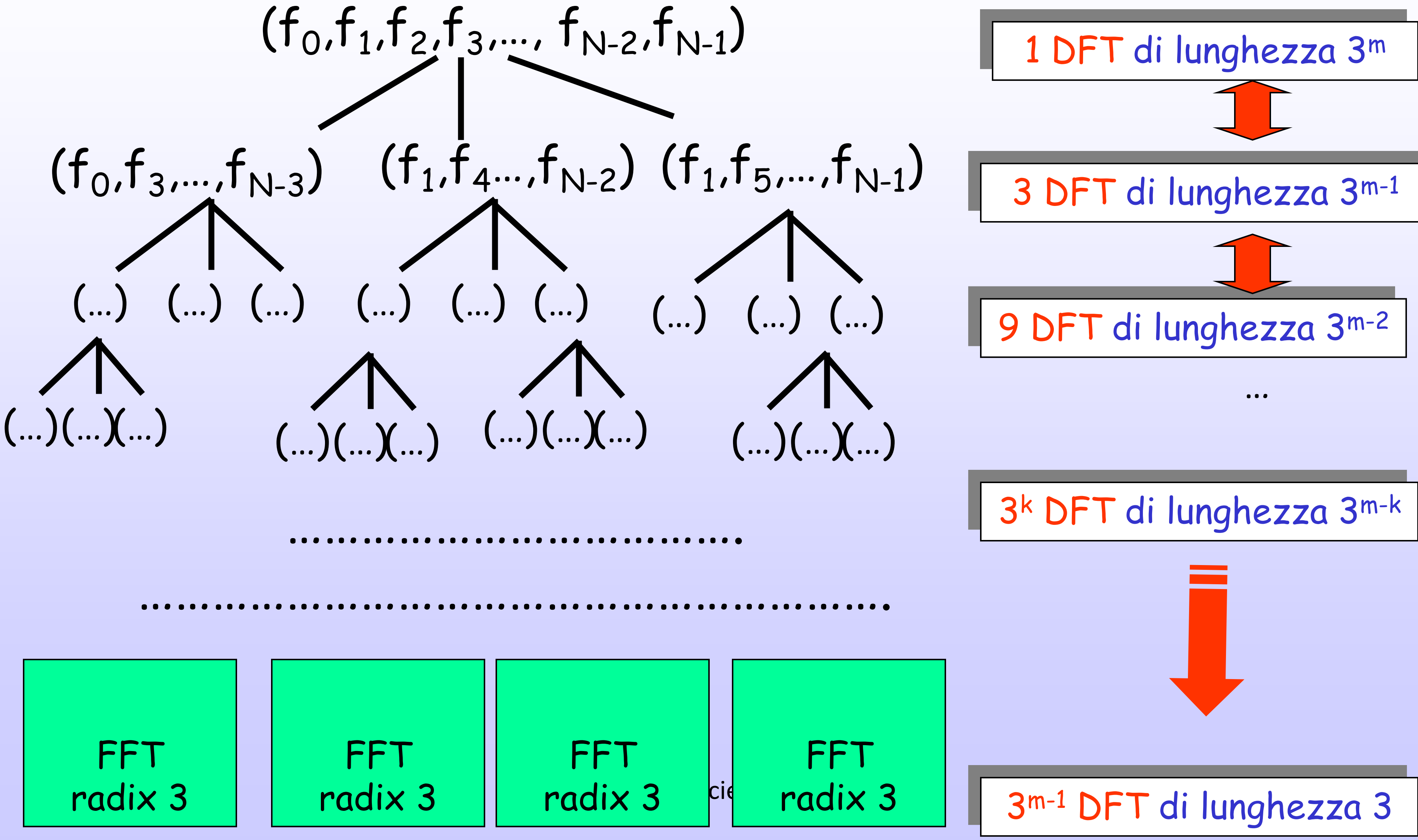
3 DFT di lunghezza 9

9 DFT di lunghezza 3

SCHEMA RICORSIVO PER ALGORITMO FFT -RADIX 3

Esempio: $N=3^m$

Calcolo della DFT di un vettore $\underline{f}=(f_0,f_1,f_2,f_3,\dots,f_{N-2},f_{N-1})$



Come si modifica l'agoritmo FFT

per N=12

ovvero

per $N = r_1 r_2$

?

Esempio 1: • N = 12 = 4 • 3

$(\underbrace{f_0, f_1, f_2, f_3,}_{d=4} f_4 \ldots, f_{10}, f_{11})$

(f_0, f_4, f_8) (f_1, f_5, f_9) (f_2, f_6, f_{10}) (f_3, f_7, f_{11})

1 DFT di lunghezza 12

4 DFT di lunghezza 3

La DFT di lungh. 12 viene decomposta in 4 DFT di lungh. 3

Algoritmo FFT mixed-radix

Esempio 1: • $N = 12 = 3 \cdot 4$

$$(\underbrace{f_0, f_1, f_2, f_3}_{d=3}, \ldots, f_{10}, f_{11})$$

$$(f_0, f_3, f_6 f_9) \quad (f_1, f_4, f_7 f_{10}) \quad (f_2, f_5, f_8\ f_{11})$$

1 DFT di lunghezza 12

3 DFT di lunghezza 4

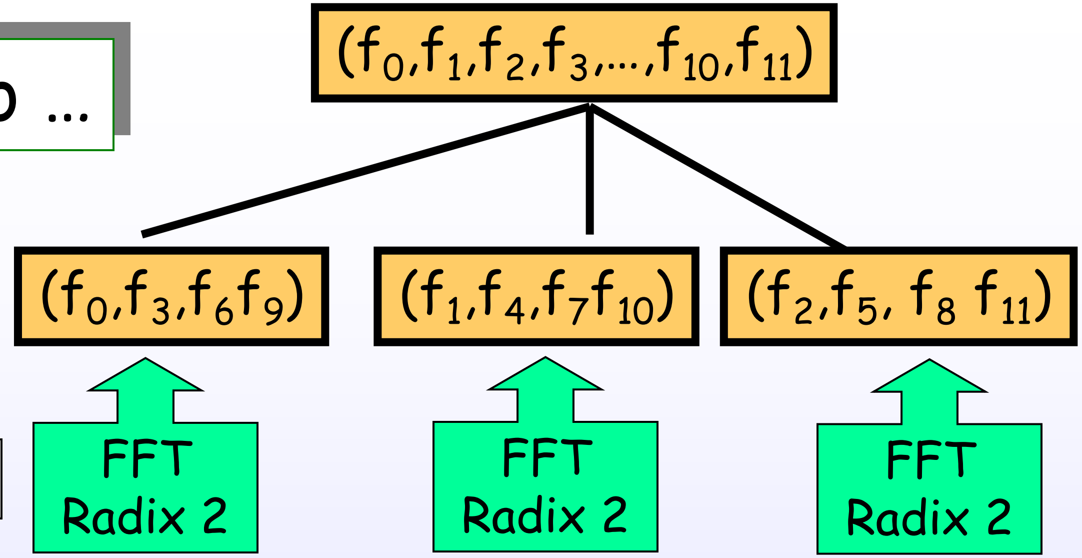
La DFT di lungh. 12 viene decomposta in 3 DFT di lungh. 4

Algoritmo FFT mixed-radix

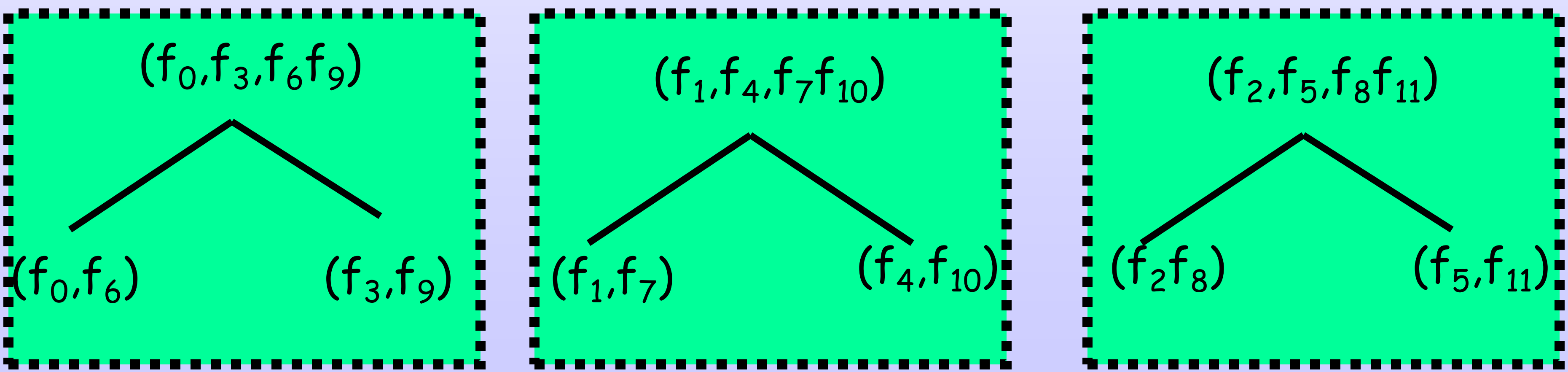
Inoltre, in questo caso …

3 DFT di lunghezza 4

3 x 2 DFT di lunghezza 2



Possiamo applicare lo schema FFT - radix 2 a ciascuna delle 3 DFT di lunghezza 4



Esempio 1: • N = 36 = 4 • 3²

$(f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{10}, f_{11} \ldots f_{35})$

$(f_0, f_4, \ldots f_{32})$ $(f_1, f_5, \ldots f_{33})$ $(f_2, f_6, \ldots f_{34})$ $(f_3, f_7, \ldots f_{35})$

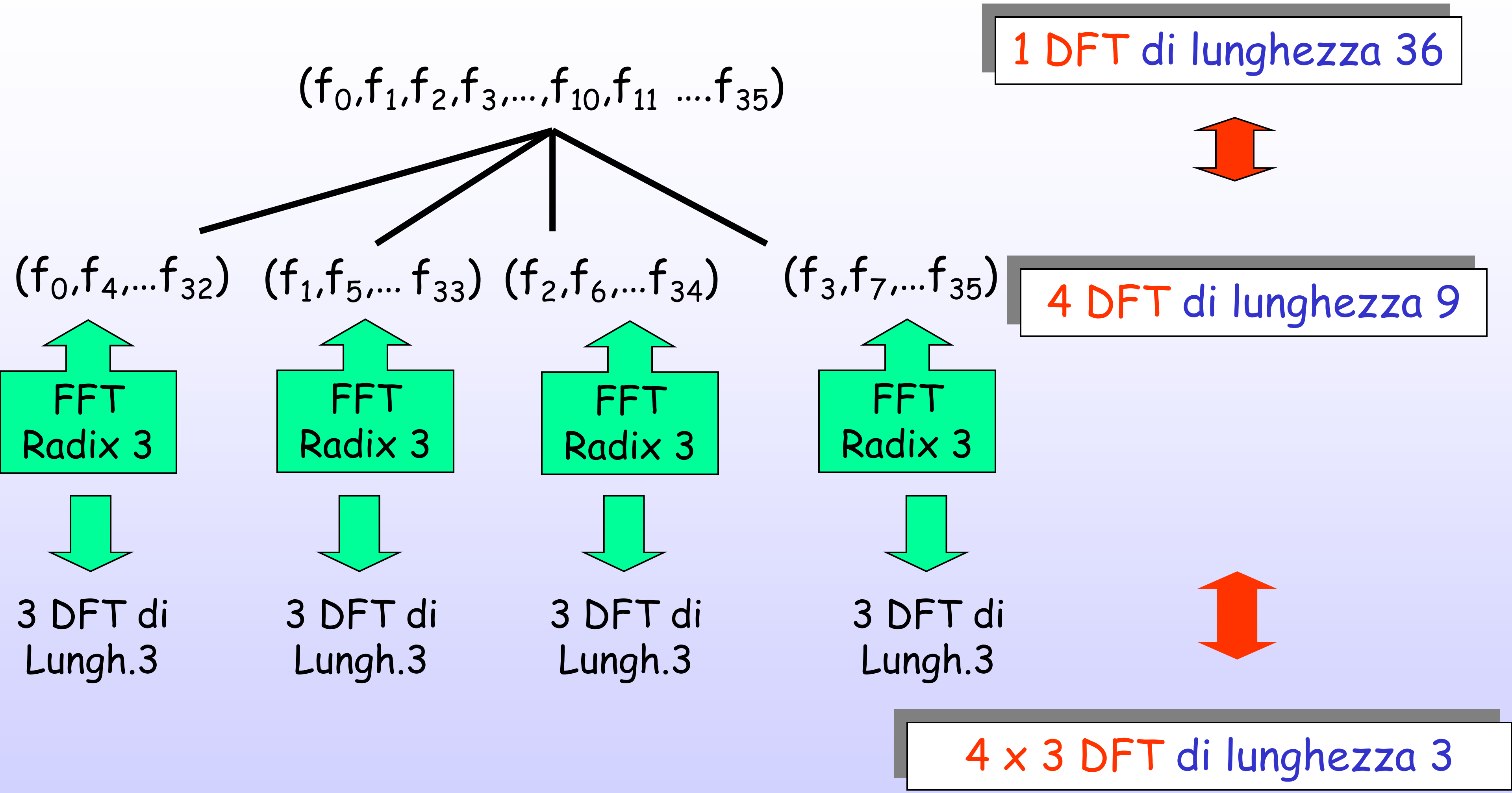
1 DFT di lunghezza 36

4 DFT di lunghezza 9

La DFT di lungh. 12 viene decomposta in 4 DFT di lungh. 9

Si può applicare lo schema radix - 3 alle 4 DFT di lunghezza 9

Esempio 1(cont): • N = 36 = 4 • 3^2



In GENERALE:

FFT - mixed radix

Se $N = r_1 r_2$
gli algoritmi FFT calcolano r_1 DFT di lunghezza r_2

Se $r_2 = r^p \rightarrow N = r_1 r^p$
gli algoritmi FFT calcolano pr_1 DFT di lunghezza r

FFT - radix r

Se $r_1 = r_2 = r \rightarrow N = r^q$
gli algoritmi FFT calcolano q DFT di lunghezza r

ALGORITMI FFT
(Cooley & Tukey)

FFT radix 2 (CT)

- Al passo k (k=1, m-1)
  - il vettore iniziale viene suddiviso in k vettori di lunghezza 2^{m-k}
  - Per ciascun sottovettore, si separano le componenti di indici pari da quelle di indici dispari
  - al passo k=m-1 si ottengono 2^{m-1} coppie

FASE DI DECOMPOSIZIONE / PREPROCESSING

Dopodichè…

- Per k=m-1, 1
  - si calcolano le 2^{m-1} DFT di lunghezza 2 ottenute dall'ultimo passo della decomposizione
  - Combinando a 2 a 2 sottovettori di lunghezza 2 si calcolano 2^{m-4} DFT di lunghezza 4
  - Etc. etc
  - All'ultimo passo si combinano 2 DFT di lunghezza 2^{m-1} per ottenere la DFT del vettore iniziale di lunghezza m

FASE DI CALCOLO

Algoritmo di Cooley & Tukey (1965)

Come si deriva l'algoritmo ricorsivo per il calcolo di

$$\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j w_N^{jk}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1}$$

?

Esempio: N=16

$$F_k = \sum_{j=0}^{15} f_j w_{16}^{-jk},$$

1DFT (16)

Si ha…

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j w_N^{-jk},$$

$$F(k) = \sum_{j=0}^{15} f(2j) w_{16}^{-2jk} + \sum_{j=0}^{15} f(2j+1) w_{16}^{-(2j+1)k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{7} f(2j) w_8^{-jk}}_{F^e} + w_8^{-jk} \underbrace{\sum_{j=0}^{7} f(2j+1) w_8^{-jk}}_{F^o}$$

Il calcolo del vettore F viene ricondotto al calcolo dei due vettori F^e e F^o di 8 componenti ciascuno

$$F = (F^e + w^{-jk}_8 F^o)$$

2DFT (8)

- L'idea alla base dell'algoritmo di CT è riapplicare la stessa idea ai due vettori F^e e F^o

$$\boxed{F^e_k = \sum_{j=0}^{7} f(2j) w_8^{-jk},}$$

DFT (8)

$$F_k^e = \sum_{j=0}^{3} f(4j) w_8^{-2jk} + w_8^{-jk} \sum_{j=0}^{3} f(4j+2) w_8^{-(2j+1)k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{3} f(4j) w_4^{-jk} + w_4^{-jk} \sum_{j=0}^{3} f(4j+2) w_4^{-jk} =$$

F^{ee} F^{eo}

$$\boxed{F^e = (F^{ee} + w^{-jk}_4 F^{eo})}$$

2DFT (4)

- Analogamente, per il vettore F^o si ha: $F^o = (F^{oe} + w^{-jk}_4 F^{oo})$

F

1DFT (16)

F^e $\qquad$ F^o

$F = (F^e + w^{-jk}_8 F^o)$

2DFT (8)

$F^e = (F^{ee} + w^{-jk}_4 F^{eo})$ $\qquad$ $F^o = (F^{oe} + w^{-jk}_4 F^{oo})$

4DFT (4)

- Riapplicando la stessa idea ai 4 vettori DFT(4)….ad es.

$$\boxed{F^{ee}{}_k = \sum_{j=0}^{3} f(4j) w_4^{-jk},}$$

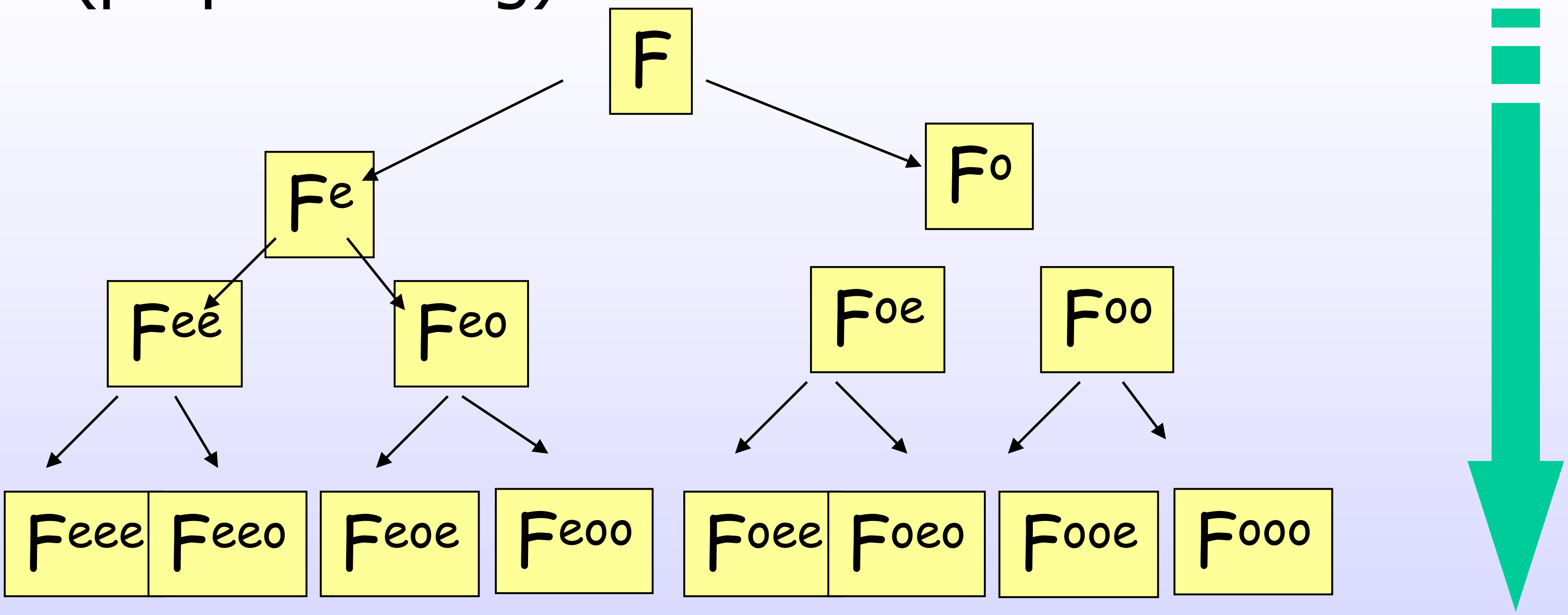
$$F_k^{ee} = \sum_{j=0}^{1} f(8j) w_4^{-2jk} + w_4^{-jk} \sum_{j=0}^{1} f(8j+4) w_4^{-(2j+1)k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{1} f(8j) w_2^{-jk}}_{F^{eee}} + w_2^{-jk} \underbrace{\sum_{j=0}^{1} f(8j+4) w_2^{-jk}}_{F^{eeo}} =$$

$F^{ee} = (F^{eee} + w^{-jk}{}_2 \, F^{eeo})$

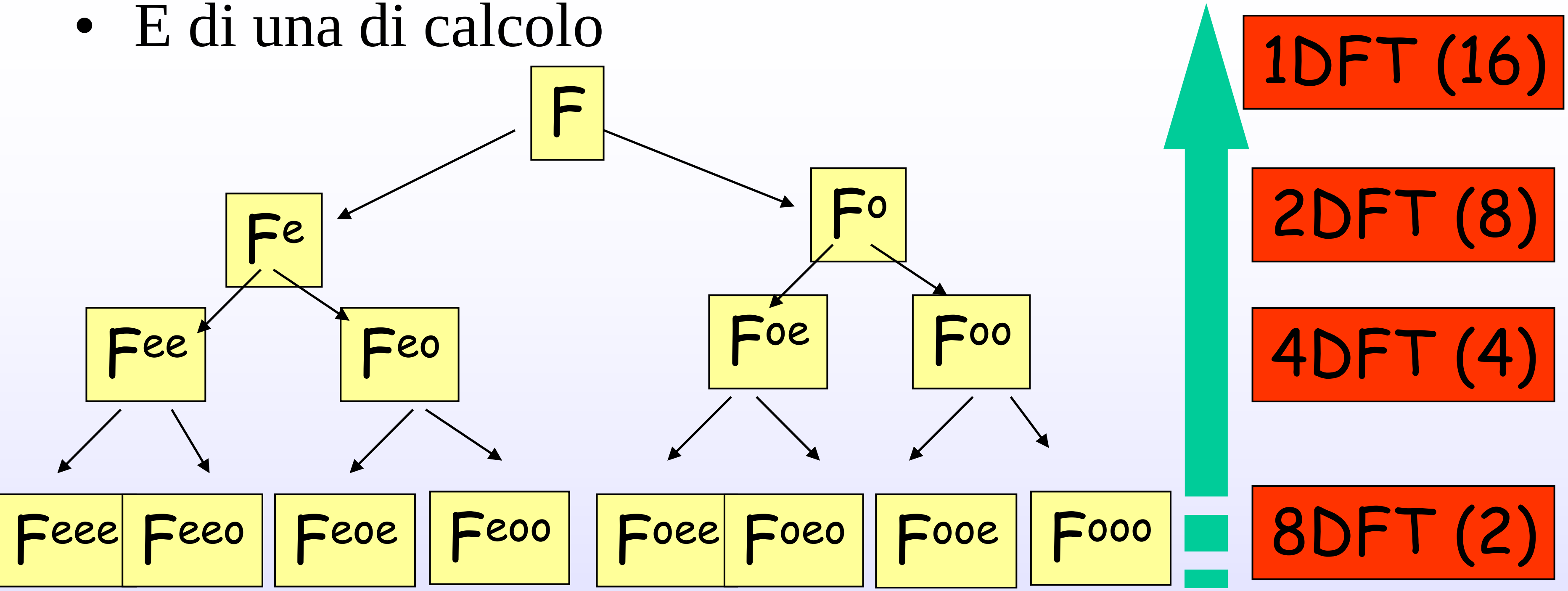
2DFT (2)

- In sintesi, l’algoritmo FFT radix -2 di C.T. è composto di una fase di decomposizione (preprocessing):



FASE DI DECOMPOSIZIONE (pre processing)

- E di una di calcolo



FASE DI CALCOLO

Algoritmo di Gentleman e Sande (1966)

- L'idea alla base dell'algoritmo di G.S. è di decomporre il calcolo del vettore DFT nel calcolo delle componenti di indici pari da quello delle componenti di indici dispari di **F**
- **(decimazione delle frequenze)**

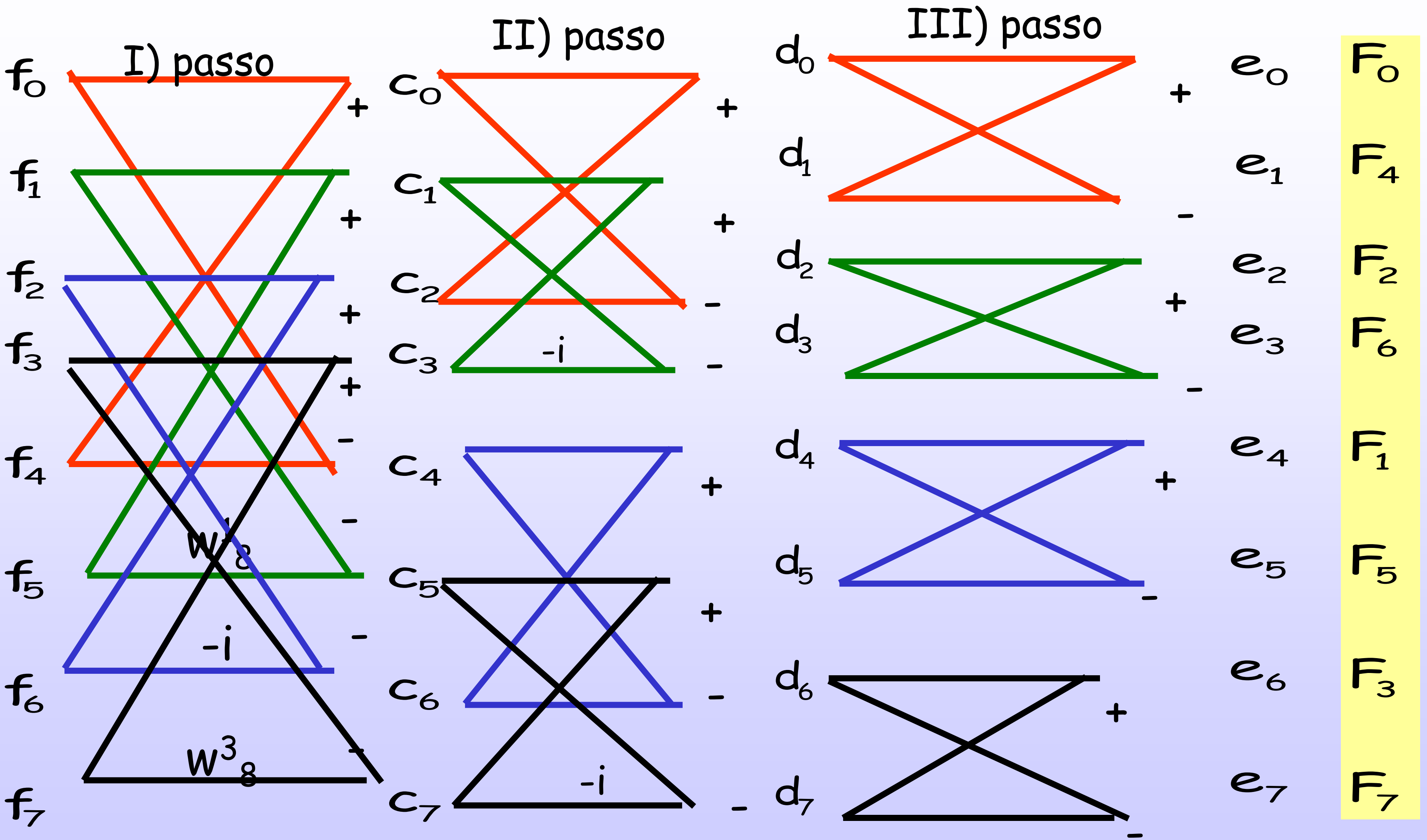
Algoritmo di Gentleman e Sande (1966)

Come si deriva l'algoritmo ricorsivo per il calcolo di

$$\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j w_N^{jk}, \quad k = 0,1,\dots,N-1}$$

?

FFT radix 2 di un vettore N=8



Esempio: N=8

$$F_k = \sum_{j=0}^{7} f_j w_8^{-jk},$$

1DFT (8)

Si ha…

$$F_k = \sum_{j=0}^{7} f_j w_N^{-jk},$$

$$F(2k) = \sum_{j=0}^{3} \underbrace{\left[f(j) + f(j+4)\right]}_{y} w_4^{-jk}, \quad k = 0,\dots,3$$

$$F(2k+1) = \sum_{j=0}^{3} \underbrace{\left[f(j) - f(j+4)\right] w_4^{-j}}_{z} w_4^{-jk}, \quad k = 0,\dots,3$$

Il calcolo del vettore F viene ricondotto
al calcolo dei due vettori F(2k) e F(2k+1) di 4 componenti ciascuno

F(2k) = DFT(y)

F(2k+1) = DFT(z)

In particolare,

$F(2k)=(F_0, F_2, F_4, F_6)$ $F(2k+1)=(F_1, F_3, F_5, F_7)$

$F(2k) = DFT\ (y)$

dove

$y=(f_0+f_4, f_1+f_5 , f_2+f_6 , f_3+f_7)$

$F(2k + 1) = DFT\ (z)$

dove

$z=(f_0-f_4, f_1-f_5 , f_2-f_6 , f_3-f_7)$

$$F_k = \sum_{j=0}^{7} f_j w_8^{-jk},$$

1DFT (8)

Si ha…

$$F_k = \sum_{j=0}^{7} f_j w_N^{-jk},$$

$$F_0\,F_2\,F_4\,F_6 \rightarrow F(2k)$$

$$F_1\,F_3\,F_5\,F_7 \rightarrow F(2k+1)$$

$$\mathrm{F(2k)} = \sum_{j=0}^{7} f_j w_8^{-j2k} = \sum_{j=0}^{7} f_j w_4^{-jk} = \sum_{j=0}^{3} [\,f(\ j\ ) + f\,(j+4)]w_4^{-jk}, k = 0,\ldots,3$$

$$F(2k+1) = \sum_{j=0}^{3} \left[f\,(j) - f\,(j+4) \right] w_4^{-j} w_4^{-jk}, \quad k = 0,\ldots,3$$

$$F_k = \sum_{j=0}^{7} f_j w_8^{-jk},$$

1DFT (8)

Si ha…

$$F_k = \sum_{j=0}^{7} f_j w_N^{-jk},$$

$$F(2k) = \sum_{j=0}^{3} \underbrace{\left[f(j) + f(j+4)\right]}_{y} w_4^{-jk}, \quad k = 0,\ldots,3$$

$$F(2k+1) = \sum_{j=0}^{3} \underbrace{\left[f(j) - f(j+4)\right] w_4^{-j}}_{z} w_4^{-jk}, \quad k = 0,\ldots,3$$

2DFT (4)

Il calcolo del vettore F viene ricondotto al calcolo dei due vettori F(2k) e F(2k+1) di 4 componenti ciascuno

F(2k) = DFT(y)

F(2k+1) = DFT(z)

In particolare, al primo passo

$F(k)=(F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6)$ **1DFT (8)**

$F(2k)=(F_0, F_2, F_4, F_6)$

$= DFT(y)$

dove

$y=(f_0+f_4, f_1+f_5, f_2+f_6, f_3+f_7)$

2DFT (4)

$F(2k+1)=(F_1, F_3, F_5, F_7)$

$= DFT(z)$

dove

$z=(f_0-f_4, f_1-f_5, f_2-f_6, f_3-f_7)$

II PASSO: Applichiamo la stessa idea a F(2k) e F(2k+1)

$$F(2k)=\sum_{j=0}^{3} y(k) w_4^{-jk}, \quad k=0,\dots,3$$

$F(2k)=(F_0, F_2, F_4, F_6)$

(F_0, F_4) (F_2, F_6)

$$F(2k)_{k=1,3}=\sum_{j=0}^{1}\boxed{[y(j)-y(j+2)w_2^{-j}}]w_2^{-jk}, \quad k=0,1$$

DFT (2) del vettore $y''=(y_0-y_2,(y_1-y_3)w_2^{-1})$

$$F(2k)_{k=0,2}=\sum_{j=0}^{1}\boxed{[y(j)+y(j+2)]}w_2^{-jk}, \quad k=0,1$$

DFT(2) del vettore $y'=(y_0+y_2, y_1+y_3)$

II PASSO: Applichiamo la stessa idea a F(2k) e F(2k+1)

$$F(2k+1) = \sum_{j=0}^{3} z(k) w_4^{-jk}, \quad k = 0,\ldots,3$$

$F(2k+1) = (F_1, F_3, F_5, F_7)$

(F_1, F_3) $\quad$ (F_5, F_7)

$$F(2k+1)_{k=1,3} = \sum_{j=0}^{1} [z(j) - z(j+2) w_2^{-j}] w_2^{-jk}, \quad k = 0,1$$

DFT (2) del vettore $z'' = (z_0 - z_2, (z_1 - z_3) w_2^{-1})$

$$F(2k+1)_{k=0,2} = \sum_{j=0}^{1} [z(j) + z(j+2)] w_2^{-jk}, \quad k = 0,1$$

DFT(2) del vettore $z' = (z_0 + z_2, z_1 + z_3)$

Quindi, al secondo passo

$F(2K) = DFT(y)$ $\boxed{2DFT\ (4)}$ $F(2K+1) = DFT(z)$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

(F_0, F_4) (F_2, F_6) (F_1, F_3) (F_5, F_7)

$$\downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow$$

$DFT(y')$ $DFT(y'')$ $\boxed{4DFT\ (2)}$ $DFT(z')$ $DFT(z'')$

Al terzo passo si calcolano le 4 DFT di lunghezza 2

$f \Rightarrow (y, z) \Rightarrow (y', y'', z', z'') \Rightarrow$ DFT(y'), DFT(y''), DFT(z'), DFT(z'')

FASE DI CALCOLO

DFT(y')
DFT(y'')
DFT(z')
DFT(z'')

$\Downarrow$

F=DFT(f)

FASE DI RIORDINAMENTO

Algoritmo di Gentleman e Sande (1966)

- Ricaviamo l'algoritmo seguendo gli autori (in base 2)

Fast Fourier Transforms: for fun and profit

AFIPS '66 (Fall): Proceedings of the November 7-10, 1966, fall joint computer conference November 1966 Pages 563–578 https://doi.org/10.1145/1464291.1464352

Esempio:

- $N = 2^2 = 4$

$$\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{3} f_j w_4^{jk}, \qquad k = 0,1,\ldots,3}$$

$j = 2^0\, p_0 + 2^1\, p_1 = (p_0, p_1)_2$

$k = 2^0\, q_0 + 2^1\, q_1 = (q_0, q_1)_2$ $\qquad q_i,\ p_i = 0,1$

$$F(q_1, q_0) = \sum_{p_1=0}^{1} \sum_{p_0=0}^{1} f(p_1, p_0)\, w_4^{jk}$$

Sostituiamo la rappresentazione binaria dell'indice j in:

$$w_4^{jk}$$

Per cui

$$F(q_1,q_0) = \sum_{p_1=0}^{1}\sum_{p_0=0}^{1} f(p_1,p_0)\, w_4^{\frac{kp_0 2^0 + kp_1 2^1}{4}} = \sum_{p_1=0}^{1}\sum_{p_0=0}^{1} f(p_1,p_0)\, e^{\frac{-2\pi i (kp_0 2^0 + kp_1 2^1)}{4}} =$$

… sfruttando le proprietà moltiplicative

dell'esponenziale ...

$$= \sum_{p_1=0}^{1}\sum_{p_0=0}^{1} f(p_1,p_0)\, e^{\frac{-2\pi i\ kp_0}{4}}\, e^{\frac{-2\pi i\ kp_1}{2}} = \underbrace{\sum_{p_0=0}^{1} e^{\frac{-2\pi i\ kp_0}{4}} \underbrace{\sum_{p_1=0}^{1} f(p_1,p_0)\, e^{\frac{-2\pi i\ kp_1}{2}}}_{I^\circ\ \text{sommatoria}}}_{II^\circ\ \text{sommatoria}}$$

Per effettuare la DFT F è NECESSARIO calcolare le due sommatorie (ovvero effettuare due passi)

Calcolo della prima sommatoria

$$F(q_1,q_0) = \sum_{p_0=0}^{1} e^{\frac{-2\pi i\ kp_0}{4}} \sum_{p_1=0}^{1} f(p_1,p_0) e^{\frac{-2\pi i\ kp_1}{2}}$$

Osserviamo che:

$$\boxed{e^{\frac{-2\pi i\,kp_1}{2}}} = e^{-\pi i\,kp_1} = e^{-\pi i\,p_1(2^0 q_0 + 2^1 q_1)} = e^{-\pi i\ p_1 q_0} \underbrace{e^{-2\pi i\ p_1 q_1}}_{= \cos(2\pi p_1 q_1) - i\sin(2\pi p_1 q_1) = 1} = \boxed{e^{-\pi i\ p_1 q_0}}$$

Il Calcolo della prima sommatoria equivale a costruire le componenti del vettore:

$$c^{(1)}(q_0,p_0) = \sum_{p_1=0}^{1} f(p_1,p_0) e^{-\pi i p_1 q_0}$$

$$\boxed{q_0, p_0 = 0,1}$$

Ovvero

$$c^{(1)}(q_0,p_0) = \sum_{p_1=0}^{1} f(p_1,p_0)e^{-\pi i p_1 q_0}$$

$q_0=0$ e $p_0=0$ $\quad c^{(1)}(0,0) = f(0,0)e^{0} + f(1,0)e^{0} = f_0 + f_2$

$q_0=0$ e $p_0=1$ $\quad c^{(1)}(0,1) = f(0,1)e^{0} + f(1,1)e^{0} = f_1 + f_3$

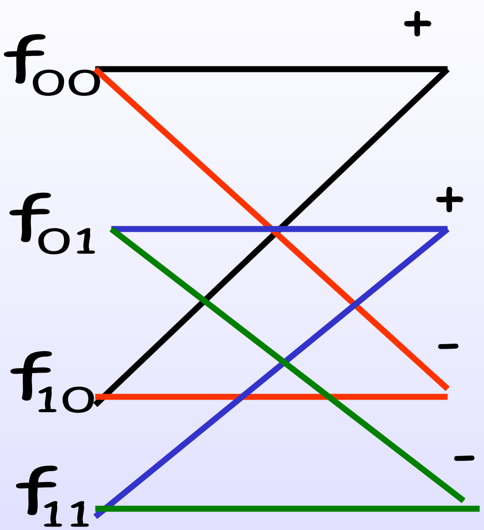
$q_0=1$ e $p_0=0$ $\quad c^{(1)}(1,0) = f(0,0)e^{0} + f(1,0)e^{-i\pi} = f_0 - f_2$

$q_0=1$ e $p_0=1$ $\quad c^{(1)}(1,1) = f(0,1)e^{0} + f(1,1)e^{-i\pi} = f_1 - f_3$

Il calcolo della prima sommatoria cosa rappresenta?

… il primo passo dello schema grafico

I) passo



$f_{00} + f_{10}$	$C_0^{(1)}$	somma
$f_{01} + f_{11}$	$C_1^{(1)}$	somma
$f_{00} - f_{10}$	$C_2^{(1)}$	differenza
$f_{01} - f_{11}$	$C_3^{(1)}$	differenza

Si combinano le componenti di f
che differiscono al primo bit da sinistra…

Calcolo della seconda sommatoria

$$F(q_1, q_0) = \sum_{p_0=0}^{1} e^{\frac{-2\pi i \; kp_0}{4}} c^{(1)}(q_0, p_0)$$

Osserviamo che:

$$\boxed{e^{\frac{-2\pi i \, kp_0}{4}}} = e^{\frac{-\pi i \, kp_0}{2}} = e^{\frac{-\pi i \, p_0 (2^0 q_0 + 2^1 q_1)}{2}} = \boxed{e^{-\pi i \left(\frac{p_0 q_0}{2} + p_0 q_1 \right)}}$$

Il calcolo della seconda sommatoria equivale a costruire le componenti del vettore:

$$c^{(2)}(q_0, q_1) = \sum_{p_0=0}^{1} c^{(1)}(q_0, p_0) e^{-\pi i \left(\frac{p_0 q_0}{2} + p_0 q_1 \right)}$$

$$\boxed{q_0, q_1 = 0{,}1}$$

Ovvero

$$c^{(2)}(q_0,q_1)=\sum_{p_0=0}^{1}c^{(1)}(q_0,p_0)e^{-\pi i\left(\frac{p_0q_0}{2}+p_0q_1\right)}$$

$$\Downarrow$$

$q_1=0$ e $q_0=0$ $$c^{(2)}(0,0)=c(0,0)e^{0}+c(0,1)e^{0}=c_0^{(1)}+c_1^{(1)}$$

$q_1=1$ e $q_0=0$ $$c^{(2)}(0,1)=c^{(1)}(0,0)e^{0}+c^{(1)}(0,1)e^{-i\pi}=c_0^{(1)}-c_1^{(1)}$$

$q_1=0$ e $q_0=1$ $$c^{(2)}(1,0)=c^{(1)}(1,0)e^{0}+c^{(1)}(1,1)e^{\frac{-i\pi}{2}}=c_2^{(1)}+(-i)c_3^{(1)}$$

$q_1=1$ e $q_0=1$ $$c^{(2)}(1,1)=c^{(1)}(1,0)e^{0}+c^{(1)}(1,1)e^{\frac{-i\pi 3}{2}}=c_2^{(1)}-(-i)c_3^{(1)}$$

Il calcolo della prima sommatoria rappresenta ?

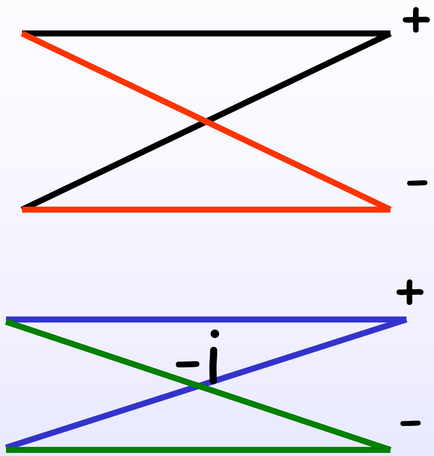
… il secondo passo dello schema grafico

$c_{00}^{(1)}$

$c_{01}^{(1)}$

$c_{10}^{(1)}$

$c_{11}^{(1)}$



$c_{00}^{(1)} + c_{01}^{(1)}$ $\quad \boxed{c_0^{(2)}}$

$c_{00}^{(1)} - c_{01}^{(1)}$ $\quad \boxed{c_1^{(2)}}$

$c_{10}^{(1)} + (-i)c_{11}^{(1)}$ $\quad \boxed{c_2^{(2)}}$

$c_{10}^{(1)} - (-i)c_{11}^{(1)}$ $\quad \boxed{c_3^{(2)}}$

Si combinano le componenti di $\underline{c}^{(1)}$
che differiscono al secondo bit da sinistra…

Nel caso N=4 dopo due passi si effettua la DFT infatti…

$$c^{(2)}(0,0) = c_0^{(1)} + c_1^{(1)} = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$$

$$c^{(2)}(0,1) = c_0^{(1)} - c_1^{(1)} = f_0 + f_2 - f_1 - f_3$$

$$c^{(2)}(1,0) = c_2^{(1)} + (-i)c_3^{(1)} = f_0 - f_2 - if_1 + if_3$$

$$c^{(2)}(1,1) = c_2^{(1)} - (-i)c_3^{(1)} = f_0 - f_2 + if_1 - if_3$$

F_{00}	F_0
F_{10}	F_2
F_{01}	F_1
F_{11}	F_3

Il vettore $c^{(2)}$ ha le stesse componenti del vettore DFT $\underline{F}$ ma in ordine di BIT inverso (ordine “scrambled”)

$$F(q_{1,}q_0) = c^{(2)}(q_0, q_1)$$

E’ necessario ***riordinare*** le componenti del vettore $\underline{c}^{(2)}$ invertendo l’ordine dei bit (operazione di ***Bit reversal***)

Esempio:

- $N = 2^3 = 8$

$$F_k = \sum_{j=0}^{7} f_j w_7^{jk}, \quad k = 0,1,\ldots,7$$

Applicando l'algoritmo radix-2 e' possibile esprimere gli indici j e k …

$j = 2^0 * p_0 + 2^1 * p_1 + 2^2 * p_2 = (p_0, p_1, p_2)_2$

$k = 2^0 * q_0 + 2^1 * q_1 + 2^2 * p_2 = (q_0, q_1, q_2)_2$ $\quad q_i, p_i = 0,1$

$$F(q_2, q_1, q_0) = \sum_{p_2=0}^{1} \sum_{p_1=0}^{1} \sum_{p_0=0}^{1} f(p_2, p_1, p_0) w_8^{(p_2, p_1, p_0)(q_2, q_1, q_0)}$$

Quali proprietà dell'esponenziale possono essere sfruttata utilizzando la rappresentazione binaria dell'indice j in

$$w_8^{jk} \qquad ?$$

$$F(q_2,q_1,q_0) = \sum_{p_2=0}^{1}\sum_{p_1=0}^{1}\sum_{p_0=0}^{1} f(p_0,p_1,p_2) w_8^{kp_0 2^2 + kp_1 2 + kp_2} = \sum_{p_2=0}^{1}\sum_{p_1=0}^{1}\sum_{p_0=0}^{1} f(p_0,p_1,p_2) e^{-2\pi i (\frac{kp_1 2^2 + kp_2 2 + kp_0}{8}}$$

… sfruttando le proprietà moltiplicative dell'esponenziale ...

$$F(q_2,q_1,q_0) = \sum_{p_2=0}^{1}\sum_{p_1=0}^{1}\sum_{p_0=0}^{1} f(p_0,p_1,p_2) w_8^{kp_2 2^2 + kp_1 2 + kp_0} = \sum_{p_2=0}^{1}\sum_{p_1=0}^{1}\sum_{p_0=0}^{1} f(p_0,p_1,p_2) e^{-2\pi i (\frac{kp_2 2^2}{8})} e^{-2\pi i (\frac{kp_1 2}{8})} e^{-2\pi i (\frac{kp_0}{8})} =$$

$$= \underbrace{\sum_{p_0=0}^{1} e^{-\pi i \frac{kp_0}{4}} \underbrace{\sum_{p_1=0}^{1} e^{-\pi i (\frac{kp_1}{2})} \underbrace{\sum_{p_2=0}^{1} f(p_0,p_1,p_2) e^{-\pi i \, kp_2}}_{I^\circ \text{ sommatoria}}}_{II^\circ \text{ sommatoria}}}_{III^\circ \text{ sommatoria}}$$

Per effettuare la DFT F è NECESSARIO calcolare le due sommatorie

Calcolo della prima sommatoria

$$F(q_2,q_1,q_0)=\sum_{p_0=0}^{1} e^{-\pi i\frac{kp_0}{4}}\sum_{p_1=0}^{1} e^{-\pi i(\frac{kp_1}{2})}\sum_{p_2=0}^{1} f(p_0,p_1,p_2)e^{-\pi i\ kp_2}$$

$$\boxed{e^{-\pi i\,kp_2} = e^{-\pi i\,p_2(2^0 q_0+2^1 q_1+2^2 q_2)}} = e^{-\pi i\ p_2q_0}\underbrace{e^{-2\pi i\ p_2q_1}}_{=\cos(2\pi p_2q_1)-i\sin(2\pi p_2q_1)=1}\overbrace{e^{-4\pi i\ p_2q_2}}^{=\cos(4\pi p_2q_1)-i\sin(4\pi p_2q_1)=1} = \boxed{e^{-\pi i\ p_2q_0}}$$

Il calcolo della prima sommatoria equivale a costruire le componenti del vettore:

$$c^{(1)}(q_0,p_1,p_0)=\sum_{p_2=0}^{1} f(p_2,p_1,p_0)e^{-\pi i p_2 q_0}$$

$$\boxed{q_0,p_0,p_1 = 0,1}$$

Ovvero

$$c^{(1)}(q_0,p_1,p_0) = \sum_{p_2=0}^{1} f(p_2,p_1,p_0)e^{-\pi i p_2 q_0}$$

$q_0=0$ $p_1=0$ e $p_0=0$ $\quad c^{(1)}(0,0,0) = f(0,0,0)e^0 + f(1,0,0)e^0 = f_0 + f_4$

$q_0=0$ $p_1=0$ e $p_0=1$ $\quad c^{(1)}(0,0,1) = f(0,0,1)e^0 + f(1,0,1)e^0 = f_1 + f_5$

$q_0=0$ $p_1=1$ e $p_0=0$ $\quad c^{(1)}(0,1,0) = f(0,1,0)e^0 + f(1,1,0)e^0 = f_1 + f_6$

$q_0=0$ $p_1=1$ e $p_0=1$ $\quad c^{(1)}(0,1,1) = f(0,1,1)e^0 + f(1,1,1)e^0 = f_3 + f_7$

$q_0=1$ $p_1=0$ e $p_0=0$ $\quad c^{(1)}(1,0,0) = f(0,0,0)e^0 + f(1,0,0)e^{-i\pi} = f_0 - f_4$

$q_0=1$ $p_1=0$ e $p_0=1$ $\quad c^{(1)}(1,0,1) = f(0,0,1)e^0 + f(1,0,1)e^{-i\pi} = f_1 - f_5$

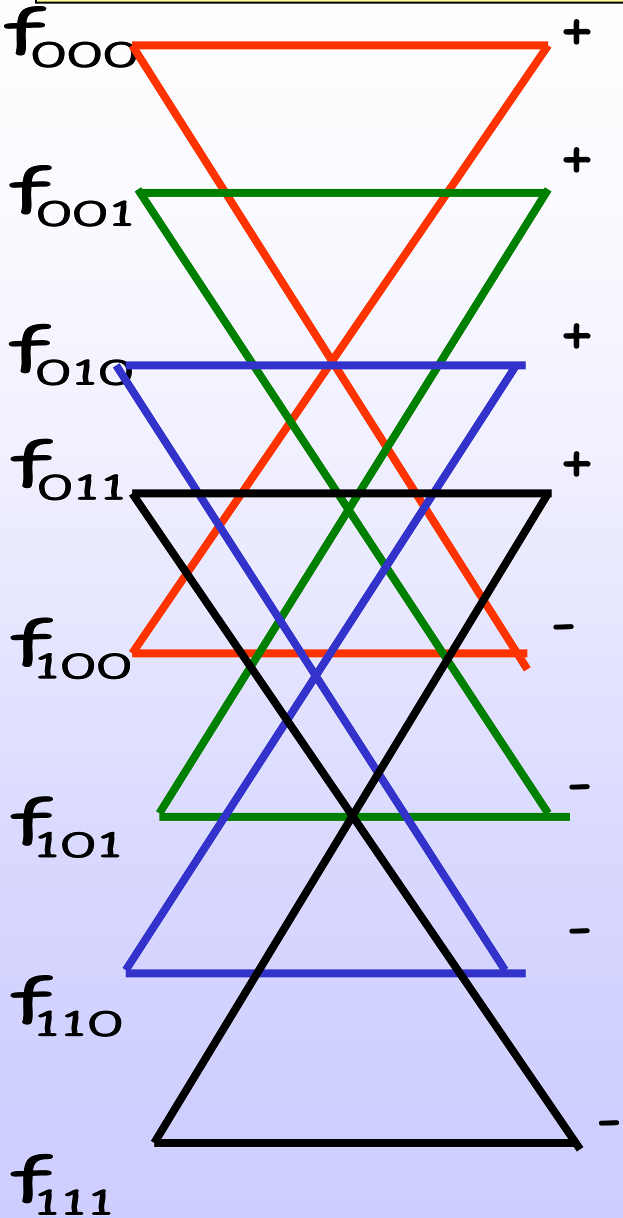
$q_0=1$ $p_1=1$e $p_0=0$ $\quad c^{(1)}(1,1,0) = f(0,1,0)e^0 + f(1,1,0)e^{-i\pi} = f_2 - f_6$

$q_0=1$ $p_1=1$ e $p_0=1$ $\quad c^{(1)}(1,1,1) = f(0,1,1)e^0 + f(1,1,1)e^{-i\pi} = f_3 + f_7$

Il calcolo della prima sommatoria cosa rappresenta?

… il primo passo dello schema grafico

I) passo



$f_{000} + f_{100}$ — $c_0^{(1)}$

$f_{001} + f_{101}$ — $c_1^{(1)}$

$f_{010} + f_{110}$ — $c_2^{(1)}$

$f_{011} + f_{111}$ — $c_3^{(1)}$

$f_{000} - f_{100}$ — $c_4^{(1)}$

$f_{001} - f_{101}$ — $c_5^{(1)}$

$f_{010} - f_{110}$ — $c_6^{(1)}$

$f_{011} - f_{111}$ — $c_7^{(1)}$

Si combinano le componenti
di f
che differiscono al primo bit
da sinistra…

Calcolo della seconda sommatoria

$$F(q_2,q_1,q_0)=\sum_{p_0=0}^{1} e^{-\pi i \frac{kp_0}{4}} \sum_{p_1=0}^{1} e^{-\pi i (\frac{kp_1}{2})} c^{(1)}(q_0,p_1,p_0)$$

$$\boxed{e^{\frac{-\pi i\, kp_1}{2}}} = e^{\frac{-\pi i\, p_1(2^0 q_0+2^1 q_1+2^2 q_2)}{2}} = e^{-\pi i\left(\frac{p_1q_0}{2}+p_1q_1+2p_1q_1\right)} = e^{-\pi i\left(\frac{p_1q_0}{2}+p_1q_1\right)} \underbrace{e^{-\pi i\,(2p_1q_1)}}_{=1} =$$

$$= \boxed{e^{-\pi i\left(\frac{p_1q_0}{2}+p_1q_1\right)}}$$

Il calcolo della seconda sommatoria equivale a costruire le componenti del vettore:

$$c^{(2)}(q_0,q_1,p_0)=\sum_{p_1=0}^{1} e^{-\pi i (\frac{p_1q_0}{2}+p_1q_1)} c^{(1)}(q_0,p_1,p_0)$$

$$\boxed{p_0,q_0,q_1 = 0{,}1}$$

Ovvero

$$c^{(2)}(q_0,q_1,p_0)=\sum_{p_1=0}^{1} e^{-\pi i\left(\frac{p_1 q_0}{2}+p_1 q_1\right)} c^{(1)}(q_0,p_1,p_0)$$

$q_0=0$ $q_1=0$ e $p_0=0$ $$c^{(2)}(0,0,0)=c^{(1)}(0,0,0)e^{0}+c^{(1)}(0,1,0)e^{0}=c_0^{(1)}+c_2^{(1)}$$

$q_0=0$ $q_1=0$ e $p_0=1$ $$c^{(2)}(0,0,1)=c^{(1)}(0,0,1)e^{0}+c^{(1)}(0,1,1)e^{0}=c_1^{(1)}+c_3^{(1)}$$

$q_0=0$ $q_1=1$ e $p_0=0$ $$c^{(2)}(0,1,0)=c^{(1)}(0,0,0)e^{0}+c^{(1)}(0,1,0)e^{-\pi i}=c_0^{(1)}-c_2^{(1)}$$

$q_0=0$ $q_1=1$ e $p_0=1$ $$c^{(2)}(0,1,1)=c^{(1)}(0,0,1)e^{0}+c^{(1)}(0,1,1)e^{-\pi i}=c_1^{(1)}-c_3^{(1)}$$

$q_0=1$ $q_1=0$ e $p_0=0$ $$c^{(2)}(1,0,0)=c^{(1)}(1,0,0)e^{0}+c^{(1)}(1,1,0)e^{-\frac{\pi i}{2}}=c_2^{(1)}+(-i)c_6^{(1)}$$

$q_0=1$ $q_1=0$ e $p_0=1$ $$c^{(2)}(1,0,1)=c^{(1)}(1,0,1)e^{0}+c^{(1)}(1,1,1)e^{-\frac{\pi i}{2}}=c_5^{(1)}+(-i)c_7^{(1)}$$

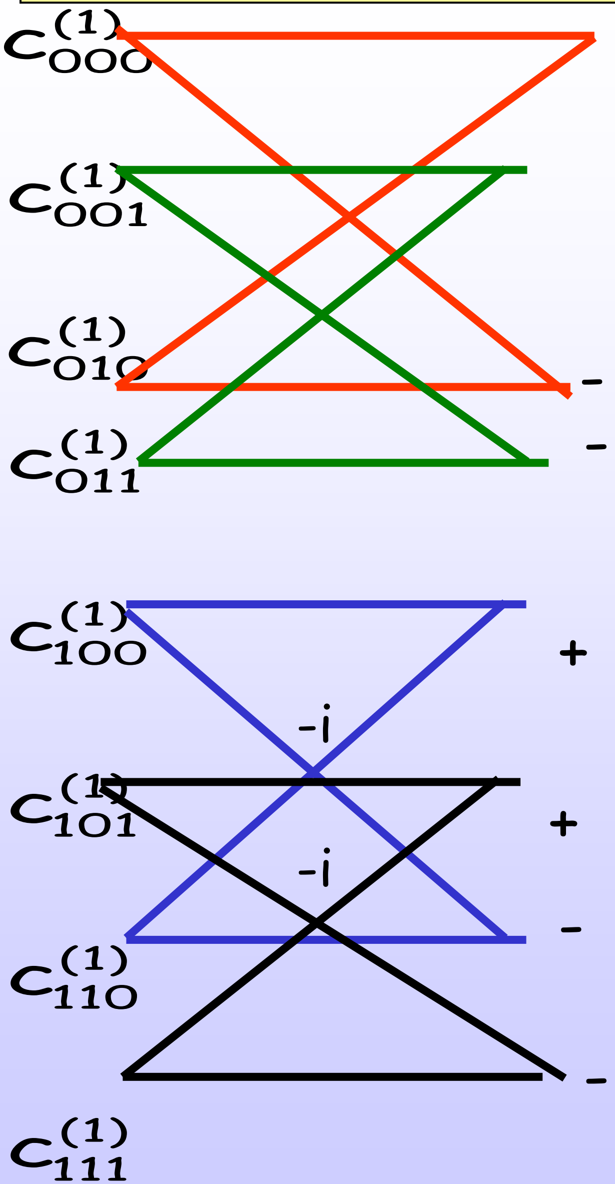
$q_0=1$ $q_1=1$e $p_0=0$ $$c^{(2)}(1,1,0)=c^{(1)}(1,0,0)e^{0}+c^{(1)}(1,1,0)e^{-\frac{3\pi i}{2}}=c_2^{(1)}-(-i)c_6^{(1)}$$

$q_0=1$ $q_1=1$ e $p_0=1$ $$c^{(2)}(1,1,1)=c^{(1)}(1,0,1)e^{0}+c^{(1)}(1,1,1)e^{-\frac{3\pi i}{2}}=c_5^{(1)}-(-i)c_7^{(1)}$$

Il calcolo della seconda sommatoria cosa rappresenta?

… il secondo passo dello schema grafico

II) passo



$c^{(1)}_{000} + c^{(1)}_{100}$ $\boxed{C^{(2)}_{0}}$

$c^{(1)}_{001} + c^{(1)}_{011}$ $\boxed{C^{(2)}_{1}}$

$c^{(1)}_{000} - c^{(1)}_{100}$ $\boxed{C^{(2)}_{2}}$

$c^{(1)}_{001} - c^{(1)}_{011}$ $\boxed{C^{(2)}_{3}}$

$c^{(1)}_{100} + (-i)c^{(1)}_{110}$ $\boxed{C^{(2)}_{4}}$

$c^{(1)}_{101} + (-i)c^{(1)}_{111}$ $\boxed{C^{(2)}_{5}}$

$c^{(1)}_{100} - (-i)c^{(1)}_{110}$ $\boxed{C^{(2)}_{6}}$

$c^{(1)}_{101} - (-i)c^{(1)}_{111}$ $\boxed{C^{(2)}_{7}}$

Si combinano le componenti di $c^{(1)}$ che differiscono al secondo bit da sinistra…

Calcolo della terza sommatoria

$$F(q_2,q_1,q_0)=\sum_{p_0=0}^{1} e^{-\pi i\frac{kp_0}{4}} c^{(2)}(q_0,q_1,p_0)$$

$$\boxed{e^{\frac{-\pi i\, kp_0}{4}}}=e^{\frac{-\pi i\, p_0(2^0 q_0+2^1 q_1+2^2 q_2)}{4}}=e^{\boxed{-\pi i\left(\frac{p_0 q_0}{4}+\frac{p_0 q_1}{2}+p_0 q_2\right)}}$$

Il calcolo della seconda sommatoria equivale a costruire le componenti del vettore:

$$c^{(3)}(q_0,q_1,q_2)=\sum_{p_1=0}^{1} e^{-\pi i(\frac{p_0 q_0}{4}+\frac{p_0 q_1}{2}+p_0 q_2)} c^{(2)}(q_0,q_1,p_0)$$

$$\boxed{q_0,q_1,q_2=0{,}1}$$

Ovvero

$$c^{(3)}(q_0,q_1,q_2)=\sum_{p_0=0}^{1} e^{-\pi i\left(\frac{p_0 q_0}{4}+\frac{p_0 q_1}{2}+p_0 q_2\right)} c^{(2)}(q_0,q_1,p_0)$$

$q_0=0$ $q_1=0$ e $q_2=0$
$$c^{(3)}(0,0,0)=c^{(2)}(0,0,0)e^{0}+c^{(2)}(0,0,1)e^{0}=c_0^{(2)}+c_1^{(2)}$$

$q_0=0$ $q_1=0$ e $q_2=1$
$$c^{(3)}(0,0,1)=c^{(2)}(0,0,0)e^{0}+c^{(2)}(0,0,1)e^{-i\pi}=c_0^{(2)}-c_1^{(2)}$$

$q_0=0$ $q_1=1$ e $q_2=0$
$$c^{(3)}(0,1,0)=c^{(2)}(0,1,0)e^{0}+c^{(2)}(0,1,1)e^{-\frac{\pi i}{2}}=c_2^{(2)}+(-i)c_3^{(2)}$$

$q_0=0$ $q_1=1$ e $q_2=1$
$$c^{(3)}(0,1,1)=c^{(2)}(0,0,1)e^{0}+c^{(2)}(0,1,1)e^{-\frac{3\pi i}{2}}=c_2^{(2)}-(-i)c_3^{(2)}$$

$q_0=1$ $q_1=0$ e $q_2=0$
$$c^{(3)}(1,0,0)=c^{(2)}(1,0,0)e^{0}+c^{(2)}(1,0,1)e^{-\frac{\pi i}{4}}=c_4^{(2)}+w_8^{1}c_5^{(2)}$$

$q_0=1$ $q_1=0$ e $q_2=1$
$$c^{(3)}(1,0,1)=c^{(2)}(1,0,0)e^{0}+c^{(2)}(1,0,1)e^{-\frac{5\pi i}{4}}=c_4^{(2)}-w_8^{1}c_5^{(2)}$$

$q_0=1$ $q_1=1$e $q_2=0$
$$c^{(3)}(1,1,0)=c^{(2)}(1,1,0)e^{0}+c^{(2)}(1,1,1)e^{-\frac{3\pi i}{4}}=c_6^{(2)}+w_8^{3}c_7^{(2)}$$

$q_0=1$ $q_1=1$ e $q_2=1$
$$c^{(3)}(1,1,1)=c^{(2)}(1,1,0)e^{0}+c^{(2)}(1,1,1)e^{-\frac{7\pi i}{4}}=c_5^{(2)}-w_8^{3}c_7^{(2)}$$

Il calcolo della terza sommatoria cosa rappresenta?

… il terzo passo dello schema grafico

III) passo

$c^{(2)}_{000}$

$c^{(2)}_{001}$

$c^{(2)}_{010}$

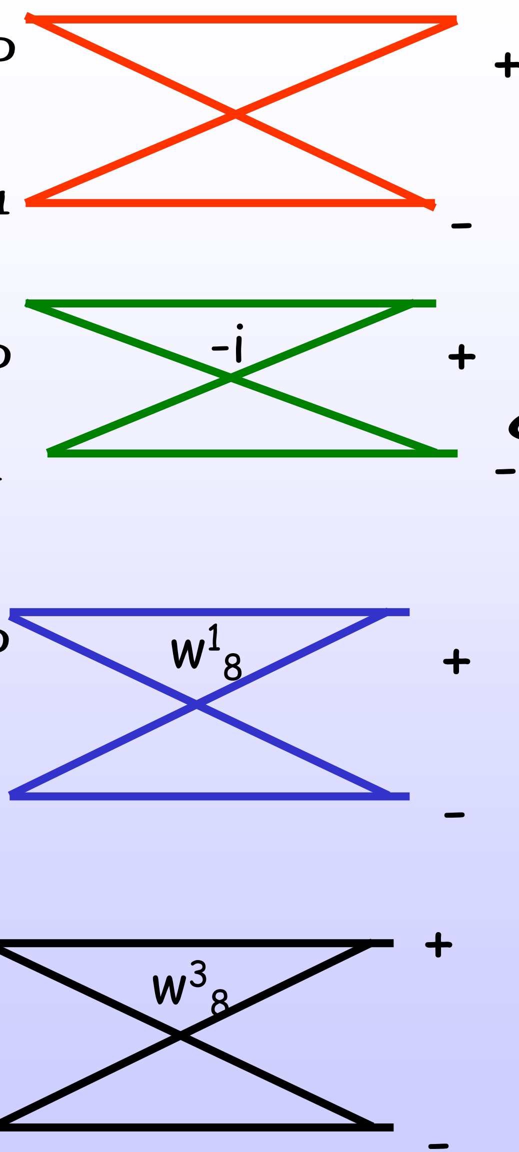
$c^{(2)}_{011}$

$c^{(2)}_{100}$

$c^{(2)}_{101}$

$c^{(2)}_{110}$

$c^{(2)}_{111}$



$c^{(2)}_{000} + c^{(2)}_{001}$ — $C^{(3)}_0$

$c^{(2)}_{000} - c^{(2)}_{001}$ — $C^{(3)}_1$

$c^{(2)}_{010} + (-i)c^{(2)}_{011}$ — $C^{(3)}_2$

$c^{(2)}_{010} - (-i)c^{(2)}_{011}$ — $C^{(3)}_3$

$c^{(2)}_{100} + w^1_8 c^{(2)}_{101}$ — $C^{(3)}_4$

$c^{(2)}_{100} - w^1_8 c^{(2)}_{101}$ — $C^{(3)}_5$

$c^{(2)}_{110} + w^3_8 c^{(2)}_{111}$ — $C^{(3)}_6$

$c^{(2)}_{110} - w^3_8 c^{(2)}_{111}$ — $C^{(3)}_7$

Si combinano le componenti di $c^{(2)}$ che differiscono al terzo bit da sinistra…

$c^{(3)}(0,0,0) =$	$(f_0+f_4) + (f_1+f_5) + (f_2+f_6) + (f_3+f_7)$	F_{000}	F_0
$c^{(3)}(0,0,1) =$	$(f_0+f_4) - (f_1+f_5) + (f_2+f_6) - (f_3+f_7)$	F_{100}	F_4
$c^{(3)}(0,1,0) =$	$(f_0+f_4) - i(f_1+f_5) - (f_2+f_6) - i(f_3+f_7)$	F_{010}	F_2
$c^{(3)}(0,1,1) =$	$(f_0+f_4) + i(f_1+f_5) - (f_2+f_6) - i(f_3+f_7)$	F_{110}	F_6
$c^{(3)}(1,0,0) =$	$(f_0-f_4) - w_8^{1}(f_1-f_5) + i(f_2-f_6) - w_8^{3}(f_3-f_7)$	F_{001}	F_1
$c^{(3)}(1,0,1) =$	$(f_0-f_4) + w_8^{1}(f_1-f_5) - i(f_2-f_6) + w_8^{3}(f_3-f_7)$	F_{101}	F_5
$c^{(3)}(1,1,0) =$	$(f_0-f_4) + w_8^{1}(f_1-f_5) - i(f_2-f_6) + w_8^{3}(f_3-f_7)$	F_{011}	F_3
$c^{(3)}(1,1,1) =$	$(f_0-f_4) - w_8^{1}(f_1-f_5) - i(f_2-f_6) - w_8^{3}(f_3-f_7)$	F_{111}	F_7

Il vettore $c^{(3)}$ ha le stesse componenti del vettore DFT $\underline{F}$ ma in ordine di BIT inverso (ordine "scrambled")

$$F(q_2,q_1,q_0) = c^{(3)}(q_0,q_1,q_2)$$

E' necessario ***riordinare*** le componenti del vettore $\underline{c}^{(3)}$ invertendo l'ordine dei bit (operazione di ***Bit reversal***)

Esempio:

- $N = 2^m$

$$\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j W_N^{jk}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1}$$

Applicando l'algoritmo radix-2 e' possibile esprimere gli indici j e k …

$$j = 2^{m-1}p_0 + 2^{m-1}p_1 + \ldots\ldots + 2p_{m-2} + p_{m-1}$$

$$k = 2^{m-1}q_0 + 2^{m-1}q_1 + \ldots\ldots + 2q_{m-2} + q_{m-1}$$

$$F(q_0, q_1, \ldots., q_{m-1}) = \sum_{p_{m-1}=0}^{1} \cdots \sum_{p_1=0}^{1} \sum_{p_0=0}^{1} f(p_0, p_1, \ldots., p_{m-1}) W_N^{(p_0 \ldots. p_{m-1})(q_0 \ldots. q_{m-1})}$$

Quali proprietà dell'esponenziale possono essere sfruttata utilizzando la rappresentazione binaria dell'indice j in

$$w_N^{jk} \qquad ?$$

… sfruttando le proprietà moltiplicative

dell'esponenziale ...

$$= \underbrace{\sum_{p_{m-1}=0}^{1} e^{-2\pi i(\frac{kp_{m-1}}{N})} \ldots \underbrace{\sum_{p_1=0}^{1} e^{-2\pi i(\frac{kp_1}{2^2})} \underbrace{\sum_{p_0=0}^{1} e^{-2\pi i(\frac{kp_0}{N})} f(p_0,\ldots p_{m-1})}_{I^\circ \text{ sommatoria}}}_{II^\circ \text{ sommatoria}}}_{m^\circ \text{ sommatoria}}$$

Per effettuare la DFT F è NECESSARIO calcolare m sommatorie

Calcolo della prima sommatoria

Il calcolo della prima sommatoria equivale a costruire le componenti del vettore:

$$c^{(1)}(q_{m-1}, p_1, \ldots, p_{m-1}) = \sum_{p_0=0}^{1} f(p_0, \ldots, p_{m-1}) e^{-\pi i p_0 q_0}$$

le quali si ottengono al variare di p_i=0,1 i= m-1,….,1 q_{m-1}= 0 ,1

Calcolo della seconda sommatoria

Il calcolo della seconda sommatoria equivale a costruire le componenti del vettore:

$$c^{(2)}(q_{m-1}, p_1, \ldots, p_{m-1}) = \sum_{p_1=0}^{1} c^{(1)}(q_{m-1}, q_{m-2}, p_2, \ldots, p_{m-1}) e^{\left(\frac{2p_1 q_{m-2} + p_1 q_{m-1}}{2^2}\right)}$$

le quali si ottengono al variare di p_i=0,1 i= 2,….,m-1 q_j= 0 ,1 j = m-1, m-2

Calcolo della μ -esima sommatoria

Il calcolo della μ-esima sommatoria equivale a costruire le componenti del vettore:

$$c^{(\mu+1)} = \sum_{p_\mu=0}^{1} w\left(\frac{kp_\mu}{2^{\mu+1}}\right) c^{(\mu)}(q_{m-1},\dots,q_{m-\mu},p_\mu,\dots p_{m-1})$$

dopo $m=\log(N)$ passi…

Il vettore $c^{(m)}$ ha le stesse componenti del vettore DFT $\underline{F}$ ma in ordine di BIT inverso

$$F(q_0,\dots,q_{m-1}) = c^{(m)}(q_{m-1},\dots,q_1,q_0)$$

E' necessario ***riordinare*** le componenti del vettore $\underline{c}^{(m)}$ invertendo l'ordine dei bit (operazione di ***Bit reversal***)

"Bit Revesal"

- convertire j in rappresentazione binaria

- invertire l'ordine delle cifre binarie che rappresentano j.

il numero binario ottenuto è

la rappresentazione di k

ESEMPIO

Sia $j = 6$

$$j = (110)_2 = 1*2^2+1*2+0*2$$

$$(110)_2 \rightarrow (011)_2$$

$$k = 0*2^2 + 1*2 + 1*2^0 = 3$$

COMPLESSITA' COMPUTAZIONALE

$$F(r_2 q_1 + q_0) = \overbrace{\sum_{p_1=0}^{r_2-1} w_N^{r_2 p_1 q_1} \left[\sum_{p_0=0}^{r_1-1} \overbrace{f(r_1 p_0 + p_1) w_N^{r_1 p_0 q_0}}^{\text{DFT di lunghezza } r_1} \right] w_N^{p_1 q_0}}^{r_2 \text{ DFT di lunghezza } r_1}$$

- Calcolo della somma più interna = r_1 operazioni f.p.

- Calcolo della somma più esterna = r_2 operazioni f.p.

x

N componenti del vettore F

=

N(r_1 + r_2) operazioni f.p

T(N)=N(r_1+r_2) operazioni f.p.

In conclusione

Se N si può scrivere come $\bullet\ N = r^k$

$$\boxed{T_{radix\text{-}r}(N) = O(Nr \log_r(N))}$$

Se N si può scrivere come $\bullet\ N = r_1 r_2$

$$\boxed{T_{radix\text{-}r}(N) = O(N (r_1 + r_2))}$$

Per quali valori di r si ottiene l'algoritmo radix-r con complessità computazionale minore ?

Osservazione

$$T_{radix-r}(N) = O(Nr\log_r(N))$$

$$Nr\log_r(N) = Nr\frac{\log_2(N)}{\log_2(r)} = \boxed{\frac{r}{\log_2(r)}}N\log_2(N)$$

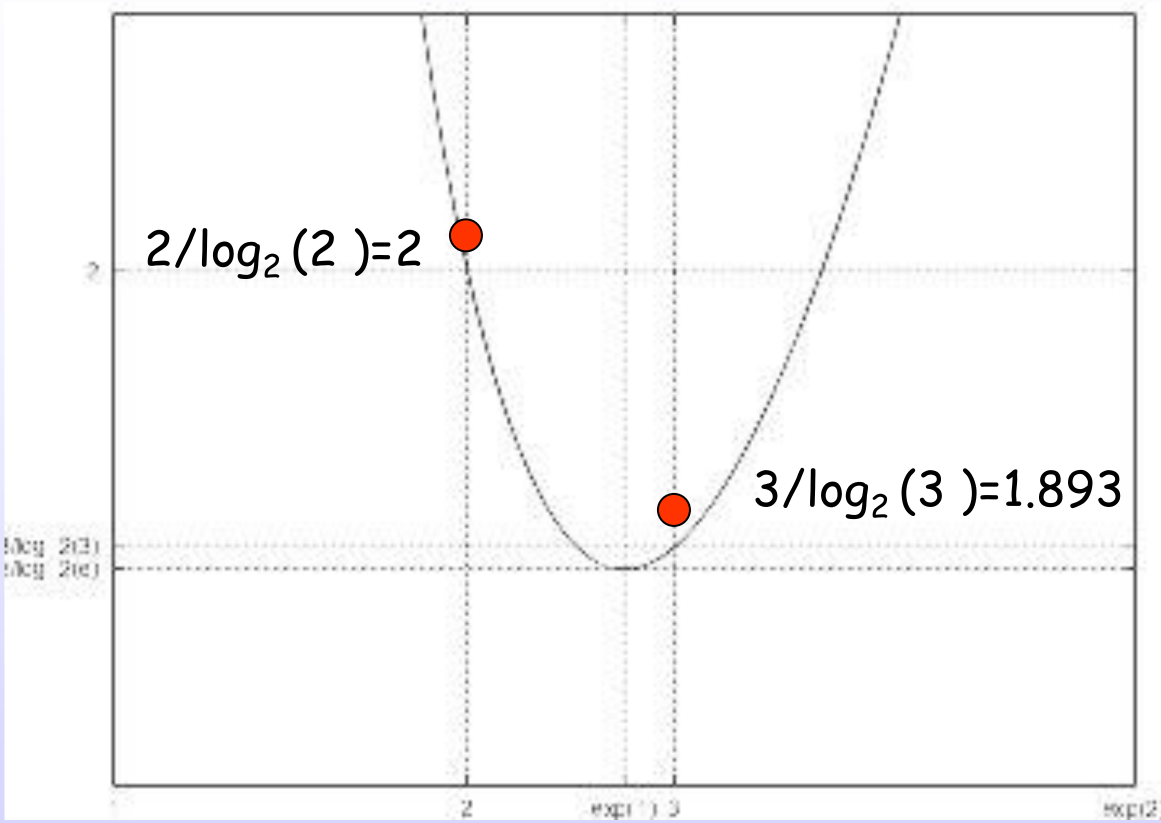
Applicando le formule di cambiamento di base del logaritmo

Per quale valore di r il fattore

$$\frac{r}{\log_2(r)}$$

risulta minimo?

La funzione $y = \dfrac{r}{\log_2(r)}$



Assume valore intero minimo in r=3

radix-3 è il più efficiente

degli algoritmi radix-r