J.Cooley
IBM

J.Tukey
University
of Princeton

L'algoritmo Fast Fourier Transform – FFT per il calcolo veloce della Trasformata Discreta di Fourier

"one of the 10 algorithms with the greatest influence on the development and practice of science and engineering in the 20th century,"

January/February 2000 issue of
Computing in Science & Engineering,

In molti problemi è richiesto il calcolo di :

$$\mathcal{F}\{u\}(\omega) = \hat{u}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} u(t)\, dt \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}(\omega t) \qquad i = \sqrt{-1}$$

F(ω) = Trasformata di Fourier della Funzione u(t)

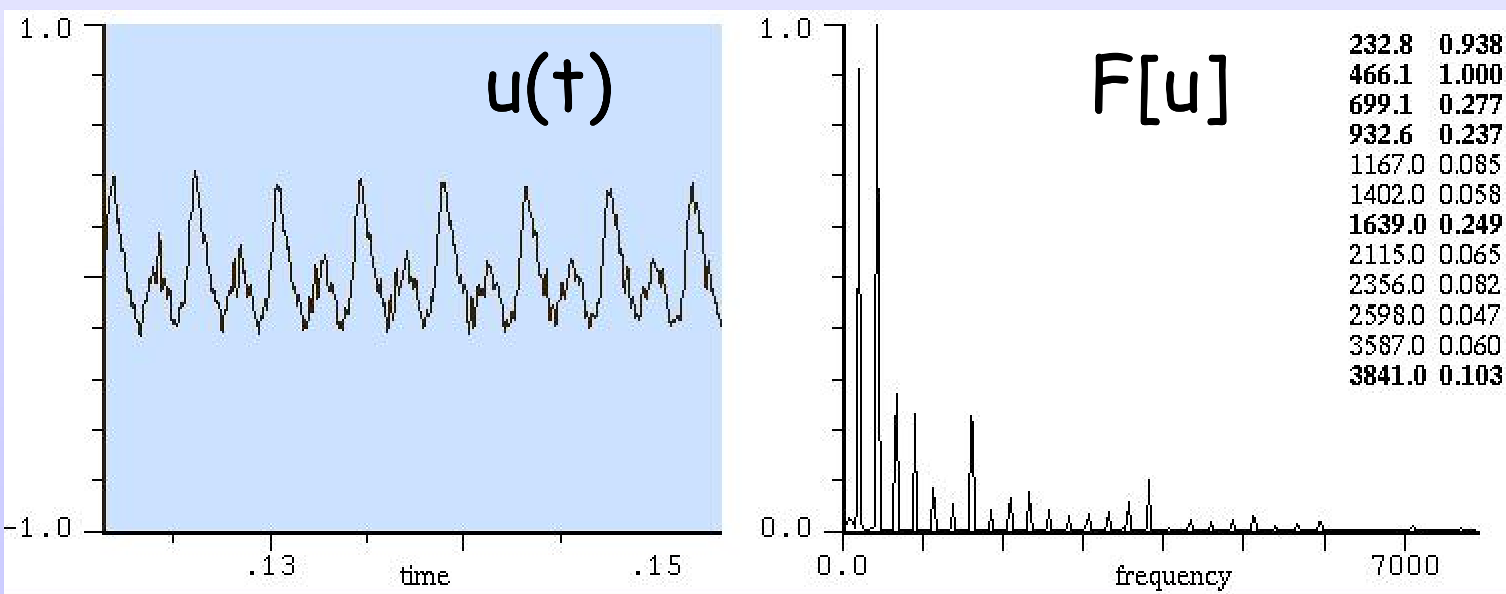
A cosa serve la trasformata di Fourier?

In molti problemi è richiesto il calcolo di :

$$\mathcal{F}\{u\}(\omega) = \hat{u}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} u(t)\, dt \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

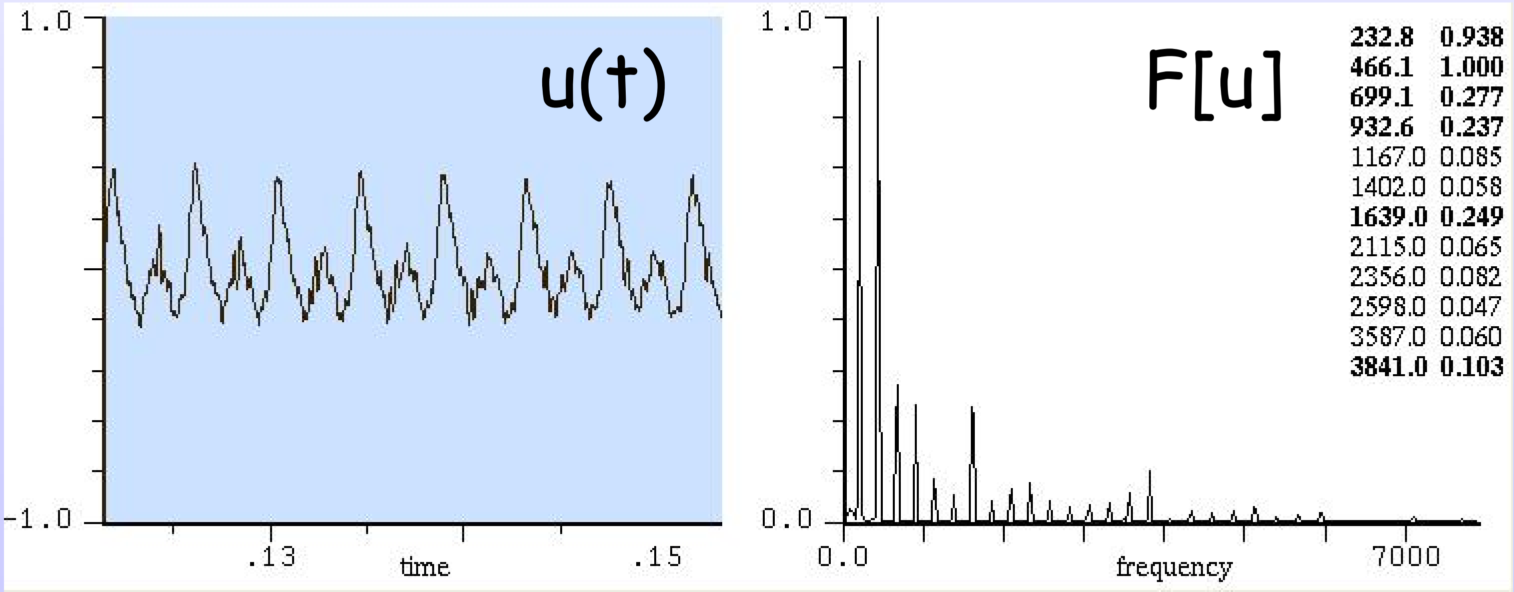
$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}(\omega t) \qquad i = \sqrt{-1}$$

Dominio del "tempo" $\longrightarrow$ Dominio delle "frequenze"



- Che significa rappresentare una funzione nel dominio delle frequenze ?

Dominio del “tempo” → Dominio delle “frequenze”



f(t) periodica

$\nu =$ frequenza $T=1/\nu$ =periodo

Sviluppabile in serie di Fourier

k= ampiezza

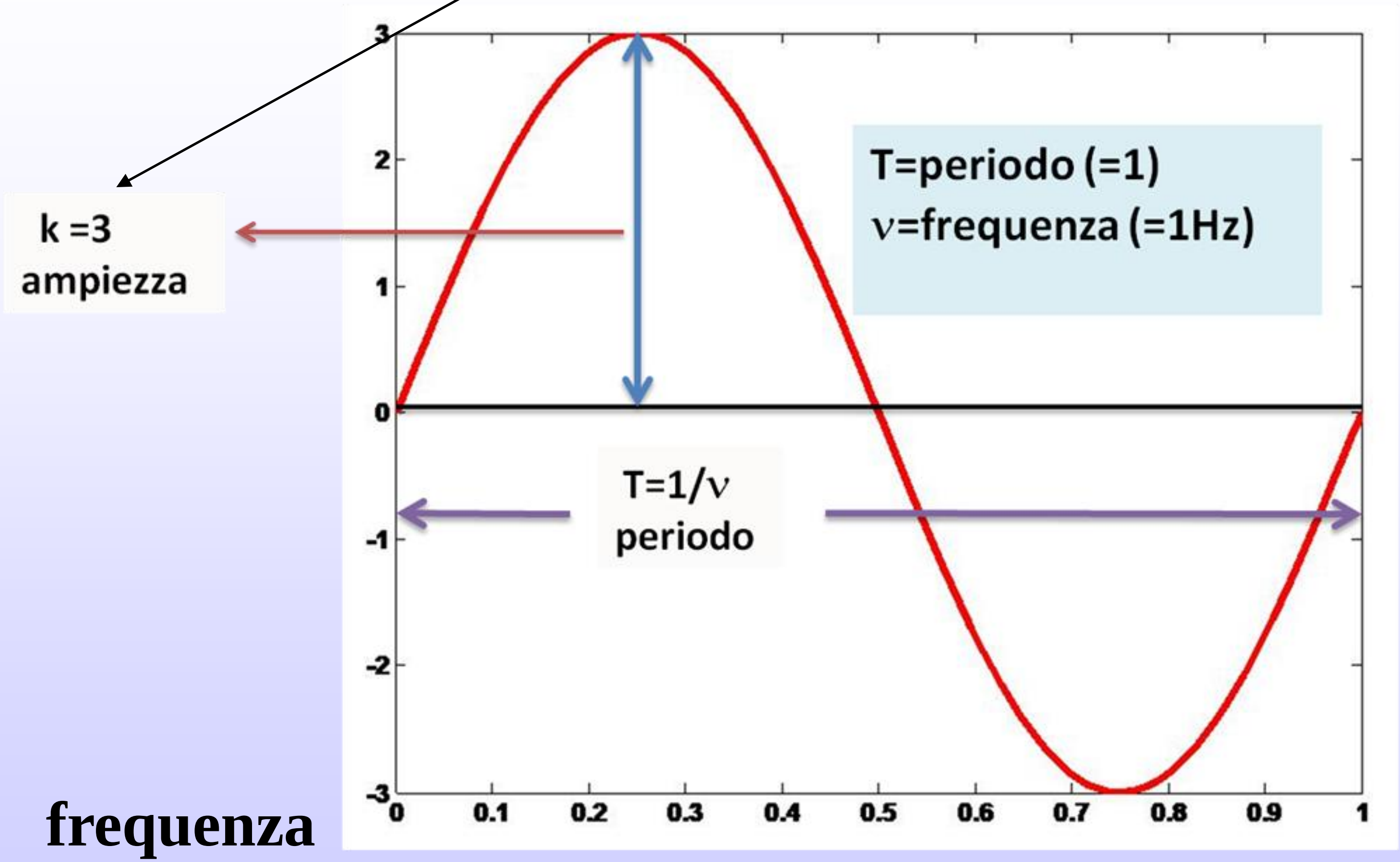
$f(t) = \sum F(\omega)$ armoniche elementari

$2\pi\nu =$ frequenza radiale

$\cos(2\pi\ \nu\ x)$, $\text{sen}(2\pi\nu x)$

$F(\omega) =$ ampiezza dell' armonica corrispondente alla frequenza $\omega = \nu$

3 sen(2π ν t)



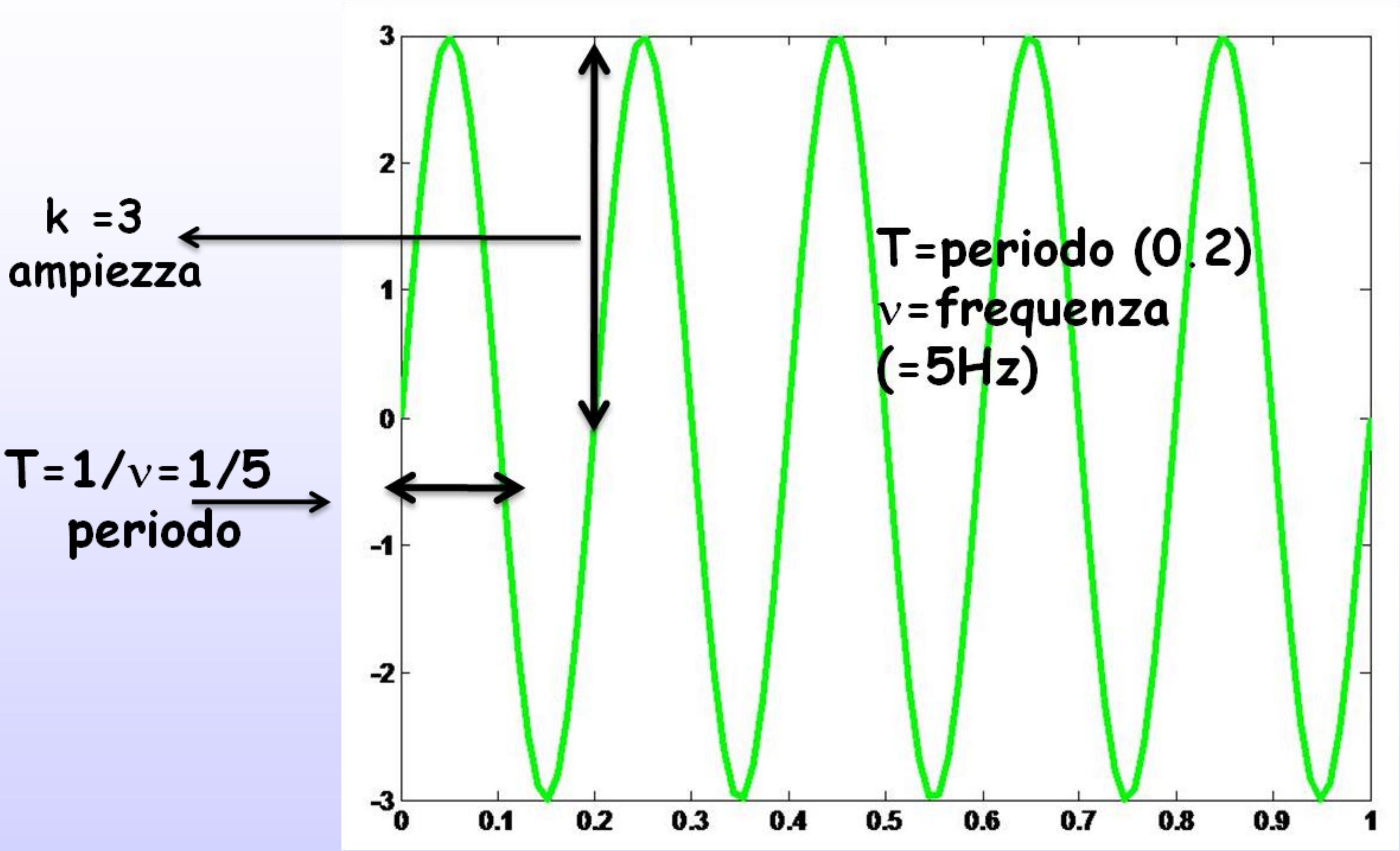
ν= frequenza

T=1/ν =periodo

k= ampiezza

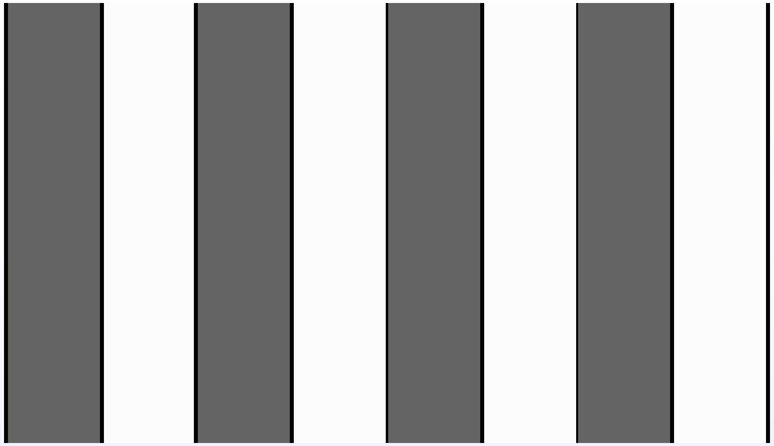
2πν= frequenza radiale

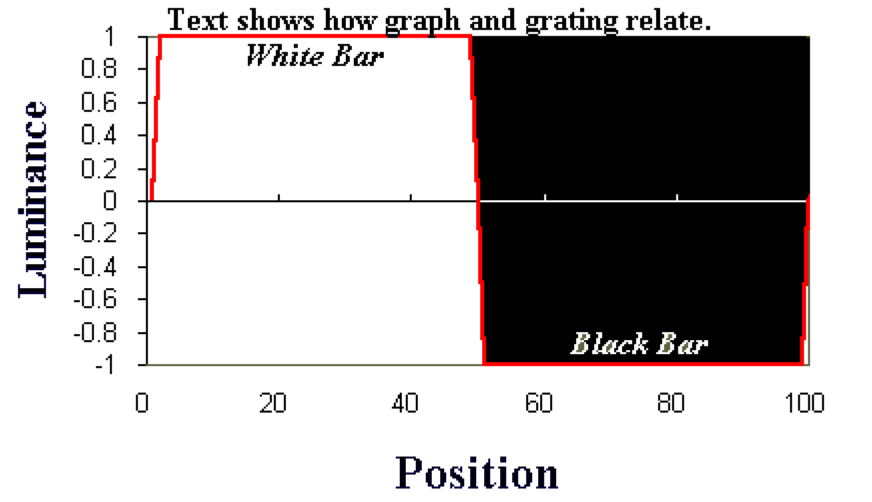
3 sen(2π5t)



k =3
ampiezza
T=1/ν=1/5
periodo
T=periodo (0.2)
ν=frequenza
(=5Hz)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

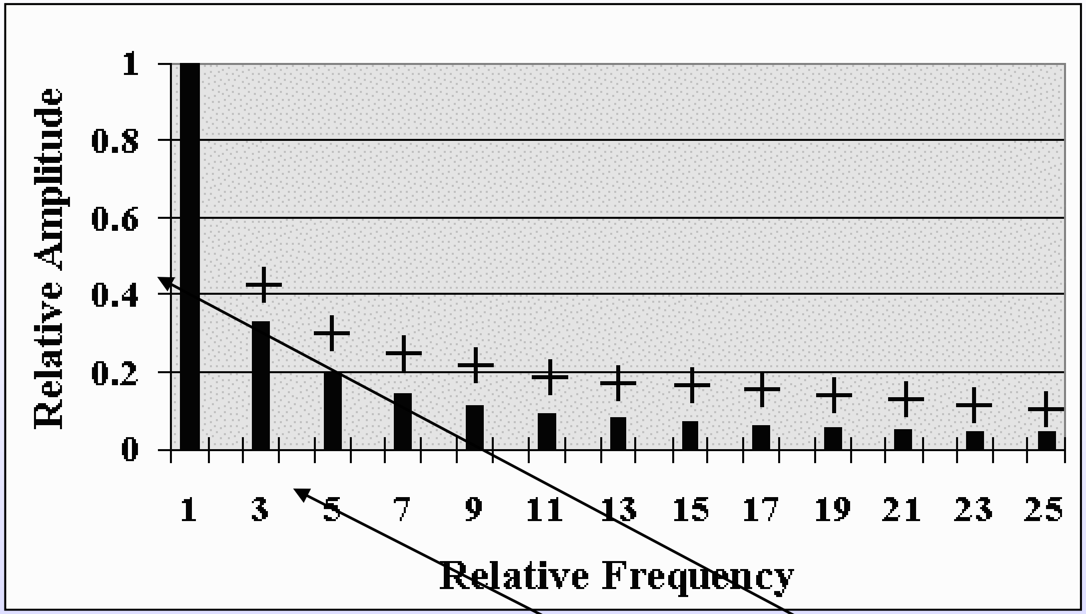
consideriamo
un segnale luminoso
nero/bianco





Rappresentazione
del segnale come funzione y= u(x) del piano 2D (x,y)
nel sistema di riferimento (x=posizione, y=luminosità)

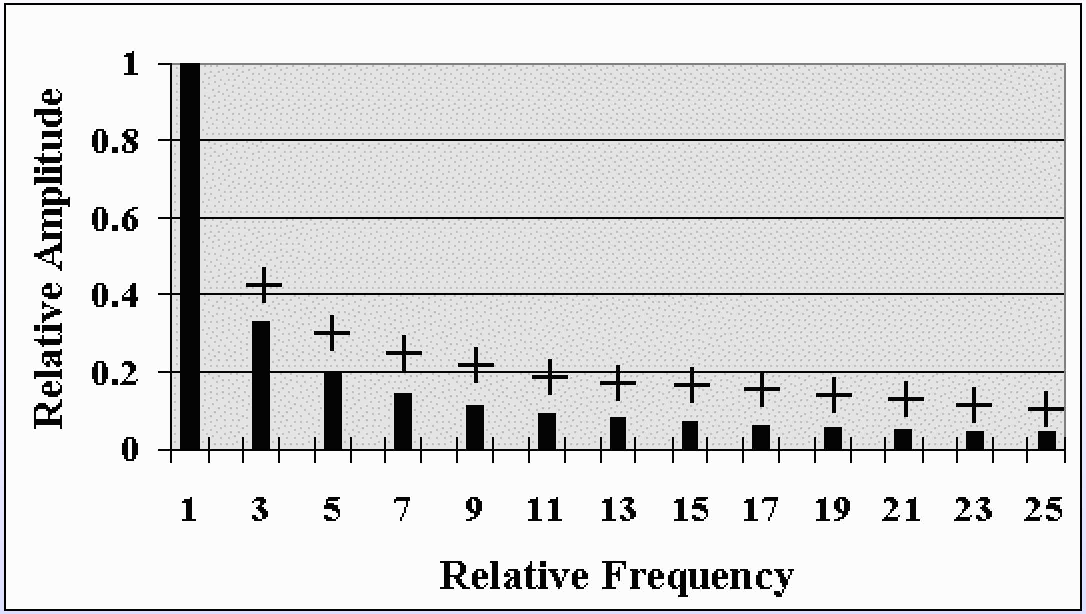
Calcoliamone la trasformata di Fourier…



Rappresentazione della funzione y=u(x)
nello spazio di Fourier
ovvero nel sistema di riferimento (ω, |F(ω)|)

freq. ampiez

Che significa ?



la funzione y=u(x) è ottenuta come somma di funzioni periodiche (seni/coseni)
di frequenza uguale 1, 3 ,5, 7,11,....
e di ampiezza (relativa) 1, 0.4, 0.2, 0.1, ...

Che significa ?

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\underbrace{n\,\omega_0}_{f_n} t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\mathrm{sen}(\underbrace{n\,\omega_0}_{f_n} t)$$

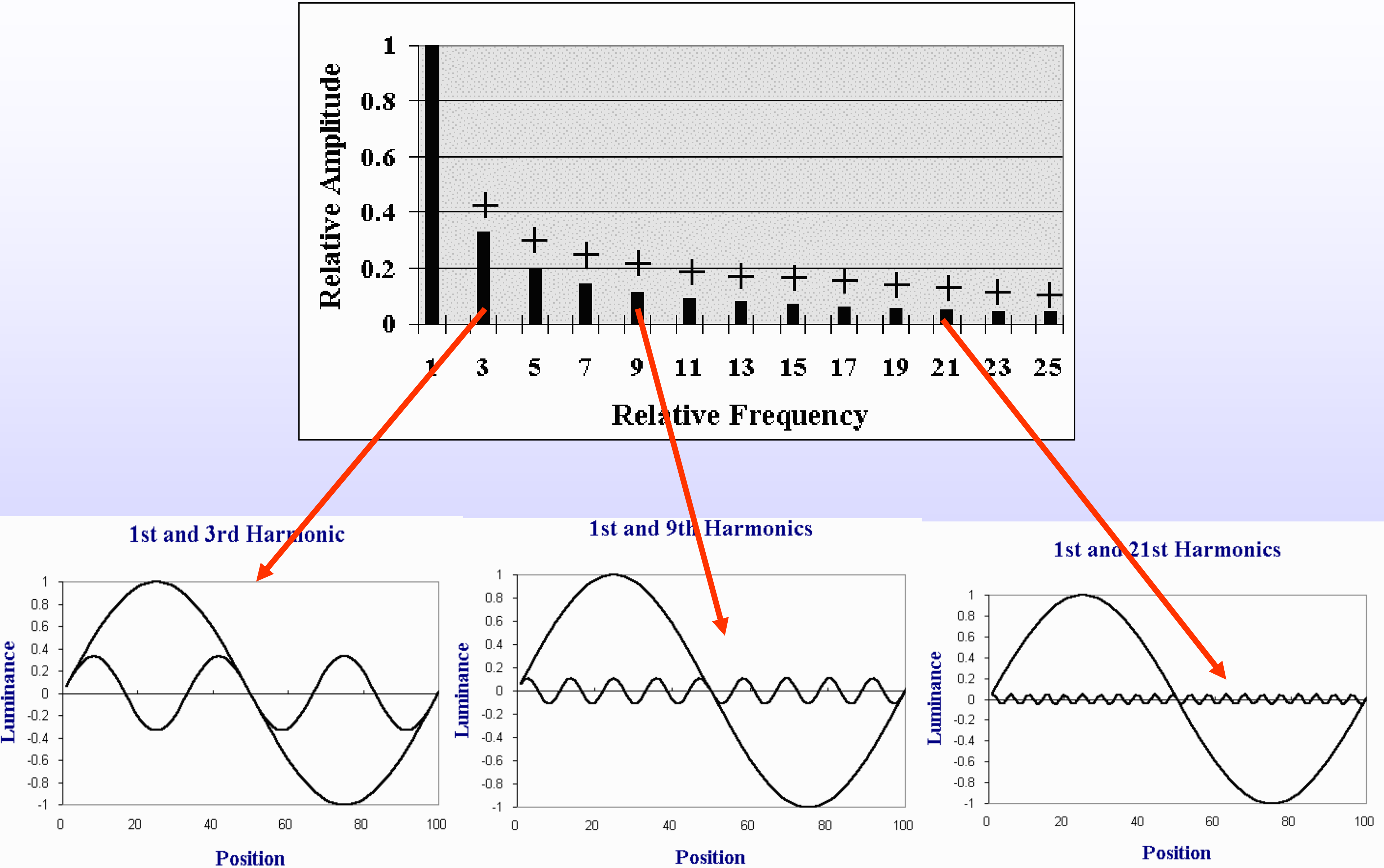
$\omega_0 = f_0 = \dfrac{1}{T}$ $\qquad f_n = n\, f_0$ armoniche

Frequenza fondamentale

la funzione y=u(x) è ottenuta come somma di funzioni periodiche (seni/coseni)
di frequenza uguale 1, 3 ,5, 7,11,....
e di ampiezza $\underbrace{1,\ 0.4,\ 0.2,\ 0.1,}_{}$ ....

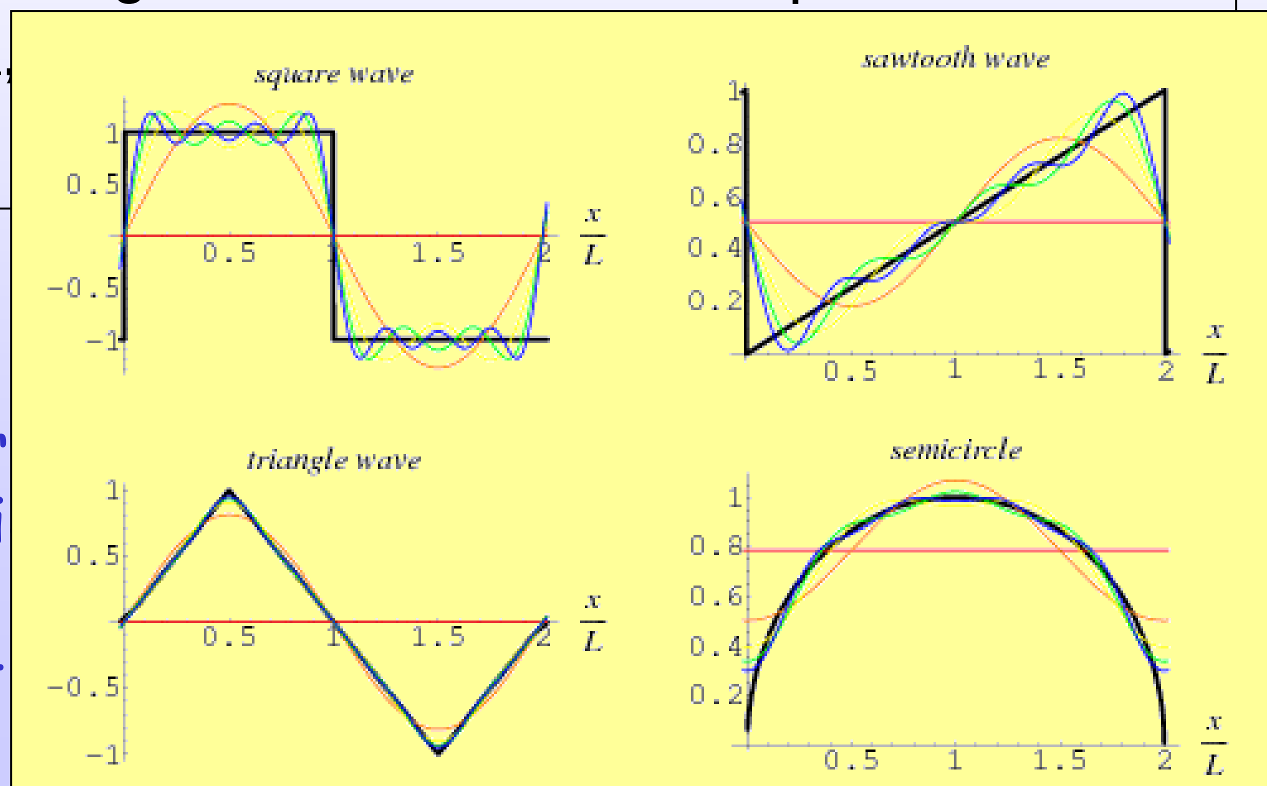
Ampiezza (dipende da A_n e B_n)

Che significa ?

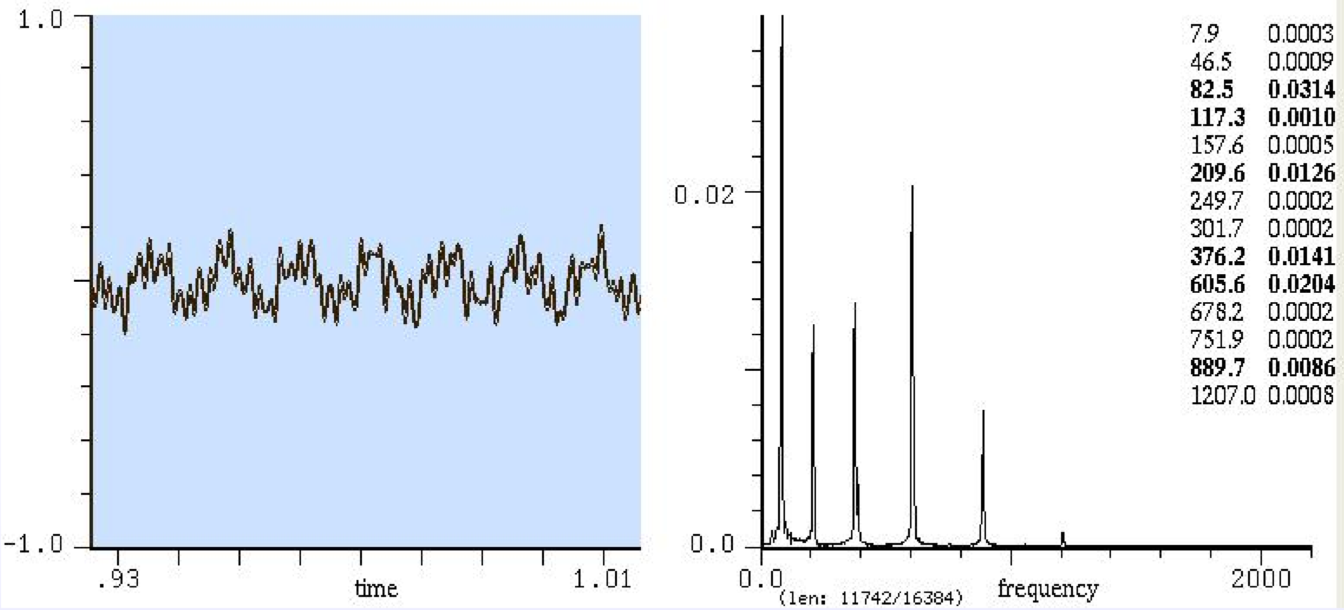


L'Analisi di Fourier

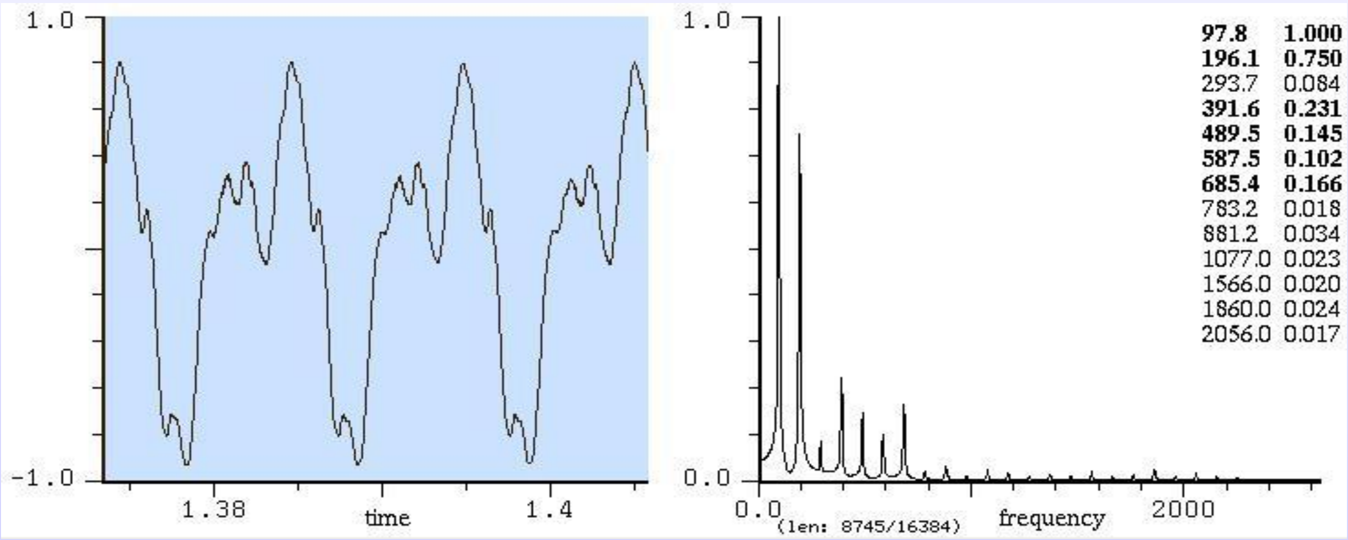
- Ciascuna funzione u(t) rappresenta un segnale ottenuto dalla somma di seni e coseni (armoniche)
- La rappresentazione di u(t) nel dominio delle frequenze fornisce indicazioni relative alle frequenze presenti nel segnale con le relative ampiezze
- Frequenza, segnale



Segnale elettr
Segnale acusti
Segnale elettromagnet
……….



gong



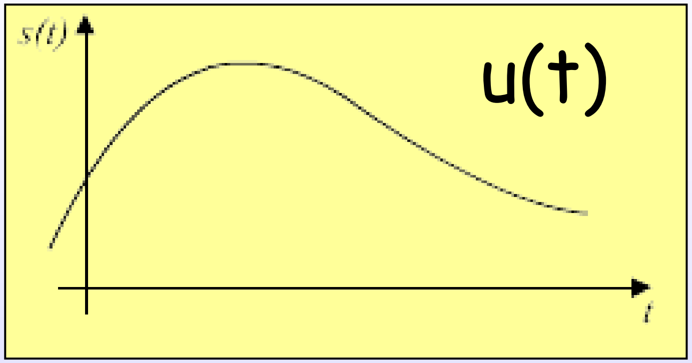
Nota di un violoncello

Il suono dipende in modo significativo dalle Frequenze (armoniche) e relative ampiezze presenti nel segnale

Come si fa ad usare la FT nelle applicazioni ?

Dalla trasformata di Fourier....

$$\boxed{\mathcal{F}\{u\}(\omega) = \hat{u}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} u(t)\, dt \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}}$$



se $f_j = u(t_j)$

$$\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\ 2\pi jk/N} \qquad k=0,\ldots,N-1}$$

Integrazione numerica con formula di quadratura trapezoidale

....Alla trasformata discreta di Fourier

In molti problemi e' richiesto il calcolo di somme del tipo:

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i \ 2\pi jk/N}$$ con $k=0,\dots,N-1$

$$i = \sqrt{-1}$$

$f_j \in C$ (insieme dei numeri complessi) con $j=0,\dots,N-1$

$$e^{i \ 2\pi jk/N} = \cos(\frac{2\pi}{N} jk) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{N} jk)$$

Che cosa rappresenta una somma del tipo

$$\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\,2\pi\,jk/N}}$$

?

Il vettore F è detto

Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

del vettore $\underline{f} = (f_0 , f_1 \ldots\ldots, f_{N-1})$

Il vettore $\underline{f} = (f_0 , f_1 \ldots\ldots, f_{N-1})$ con

$$f_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k w_N^{-jk} \qquad j = 0,\ldots N-1$$

dove si è posto

$$w_N = e^{-i\,2\pi/N} = \cos(2\pi/N) - i\sin(2\pi/N)$$

è detto

Trasformata Discreta Inversa di Fourier (IDFT)

del vettore $\underline{F} = (F_0 , F_1 \ldots\ldots, F_{N-1})$

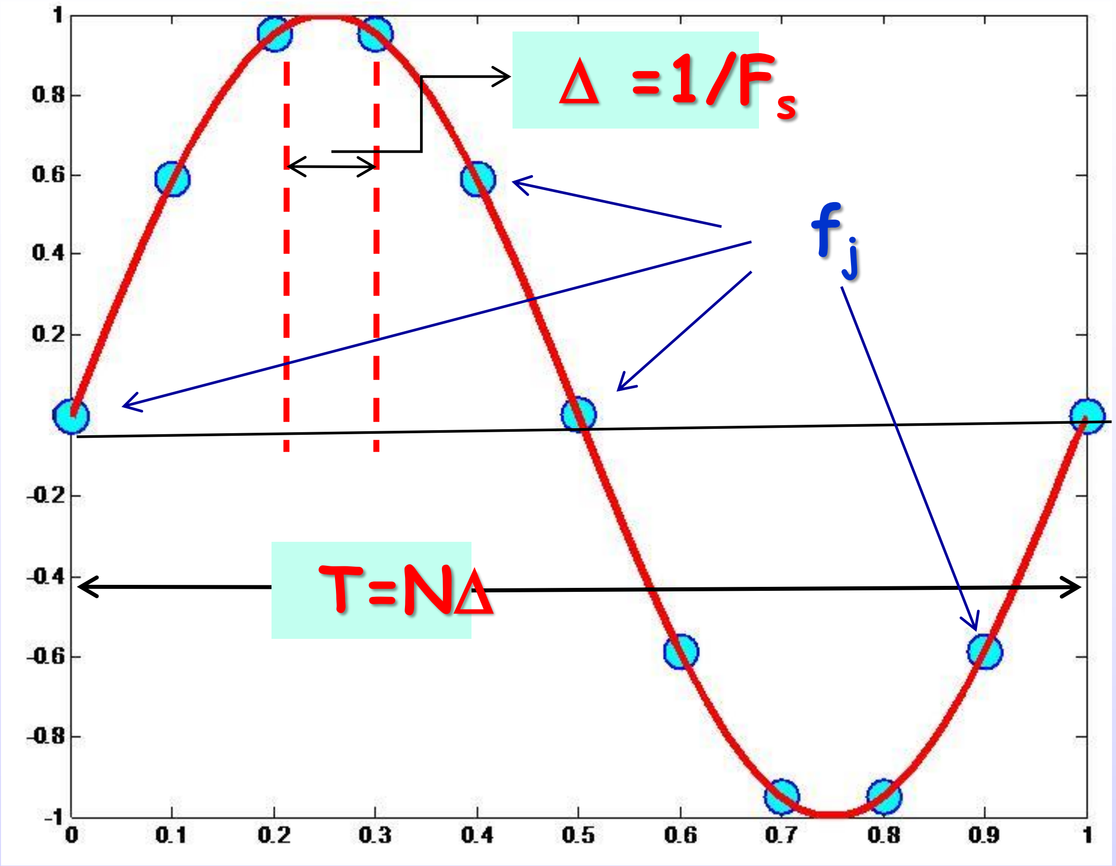
f(t) periodica in [0,T] :
Discretizziamo la f(t) (Campionamento di f(t))

Δ = passo di discretizzazione (unità di campionamento)

N = #valori, equidistanziati di Δ

$t_j = j\Delta \in [0,T]$ $\quad$ j=0,…,N-1
$f_j = f(t_j)$ $\quad$ j=0,…,N-1

$T=N\Delta$ = periodo (fondamentale)
$F_s = N/T = 1/\Delta$ = frequenza di campionamento di f
(# campioni per unità di tempo)



$T=N\Delta$ = periodo (fondamentale)

$F_s = N/T = 1/\Delta$ = frequenza di campionamento di f

(# campioni per unità di tempo)

Quali sono le frequenze che intervengono nella DFT di f?

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\,2\pi\, jk/N}$$

$$2\pi\, k\, j\, /N = 2\pi\, k\, j\, \Delta/T \;= 2\pi\, t_j\, k\, 1/T$$

$T = N\Delta = N/Fs;$

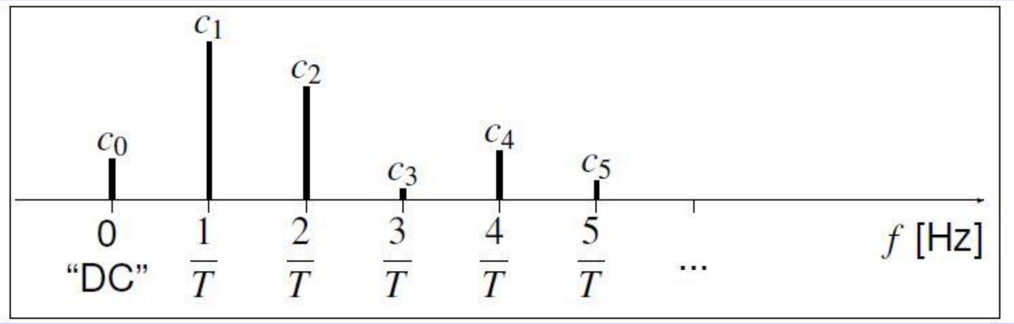
$t_j = j\,\Delta$

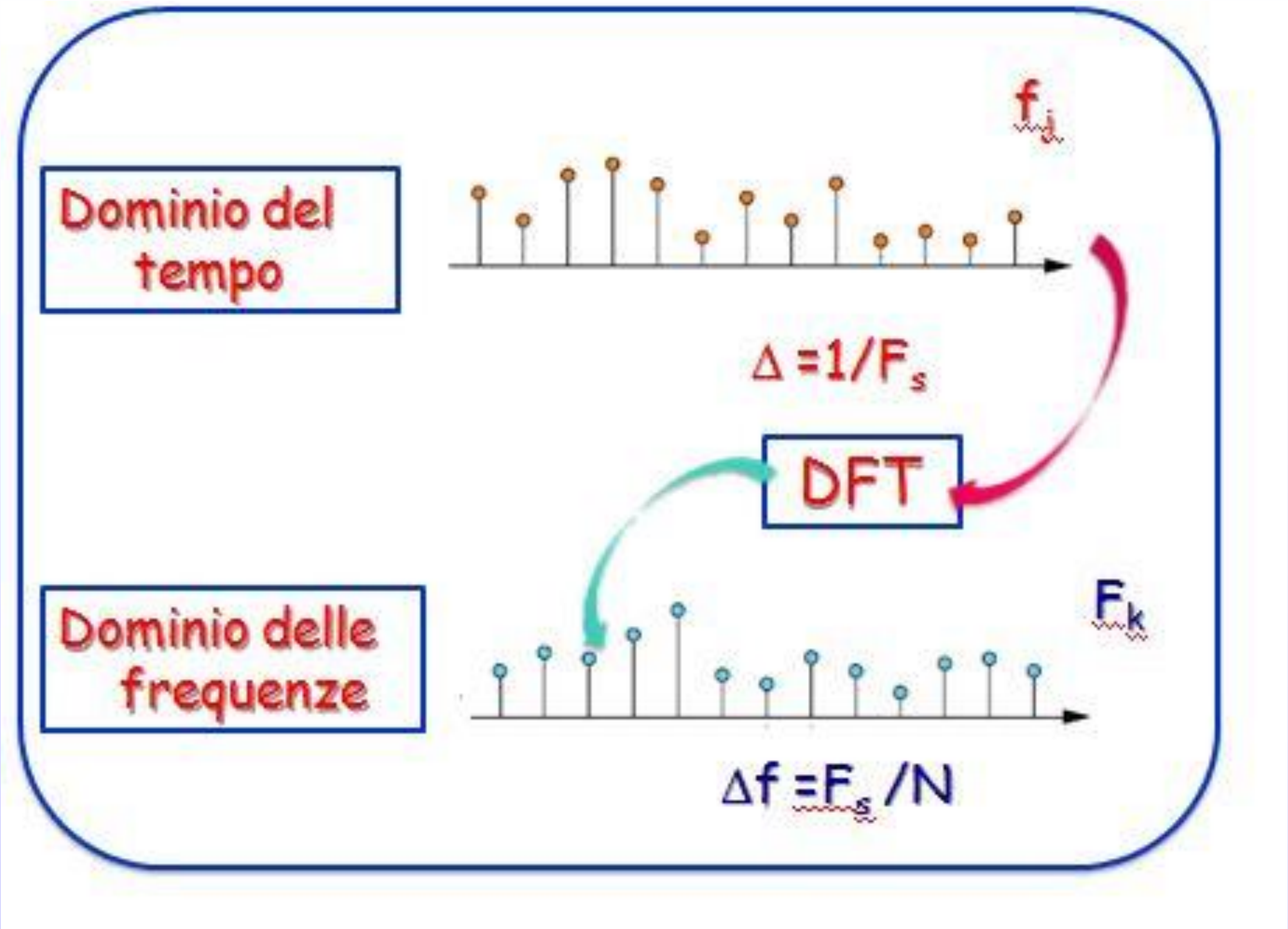
$\Delta f = 1/T = 1/N\Delta = Fs/N$ = frequenza fondamentale

$\Delta f = 1/T = 1/N\Delta = Fs/N$ = **frequenza fondamentale**
è la frequenza più bassa nella DFT

ν= k/T =k (F_s/N)= frequenze (in Hz)

K=0,..,N-1
multiple di 1/T=Fs/N
2π k /T = frequenze radiali





f_j
Dominio del tempo
$\Delta = 1/F_s$
DFT
F_k
Dominio delle frequenze
$\Delta f = F_s / N$

$1/T = 1/N\Delta = F_s/N$ = frequenza più bassa della DFT

inversamente proporzionale ad N

qual è la frequenza più alta?

Teorema di Shannon

(del campionamento)

$F_N = 1/(2\Delta) = N/(2T) = F_s/2$

frequenza di Nyquist

FN = limite massimo delle frequenze ottenibili **$|freq| \le FN$**

$\Downarrow$

f(t) ha $|freq| \le FN$ è completamente determinata dal campionamento

f(t) ha $|freq| > FN$ bisogna diminuire Δ

Aliasing

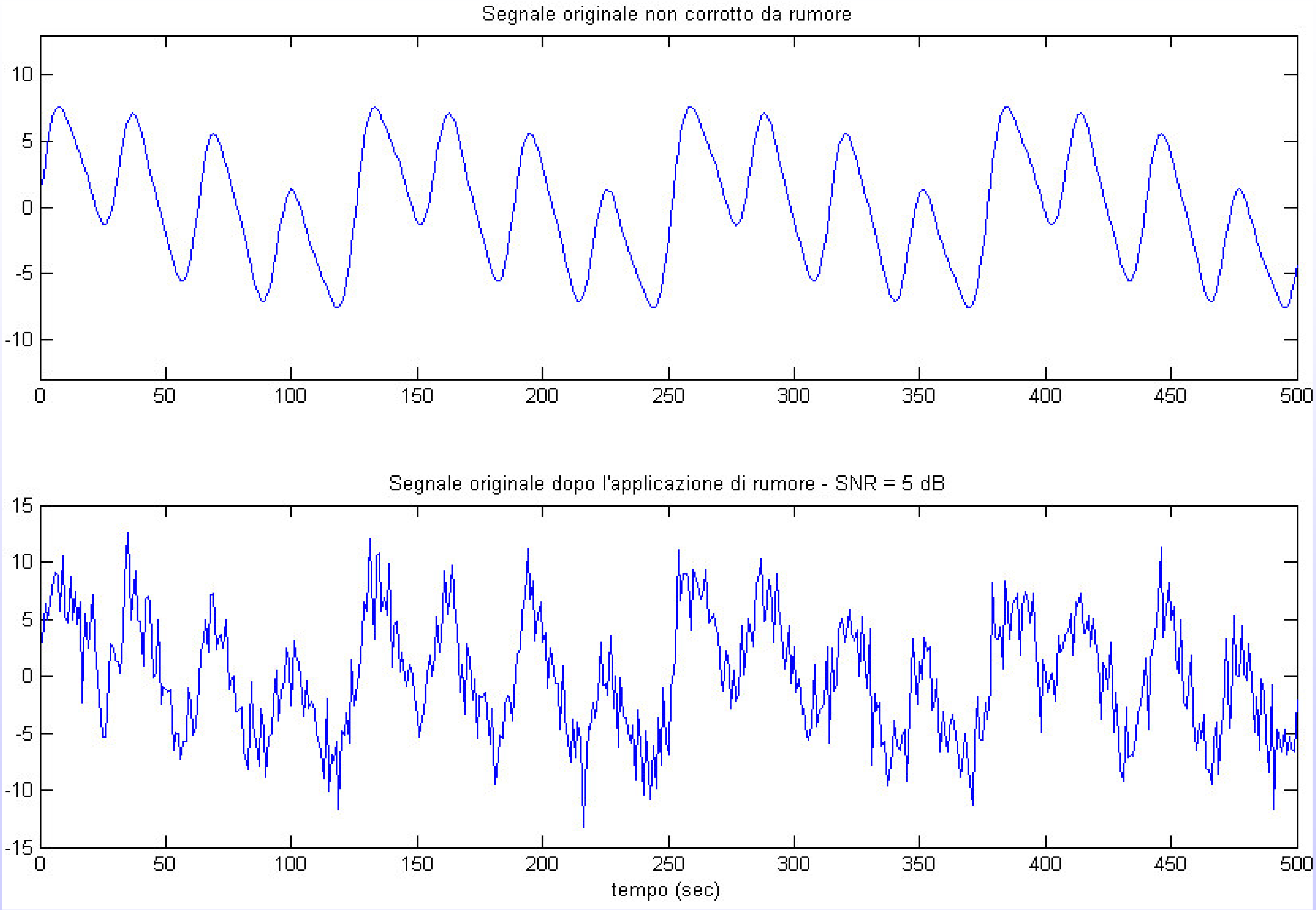
discretizzazione nel tempo non sufficientemente fitta (Δ non è sufficientemente piccolo da ricostruire le frequenze alte di f)

⇩

le frequenze alte disturbano quelle basse

Un esempio di applicazione

- Denoising di immagini (eliminazione del rumore presente sulle immagini acquisite da strumenti a raggi X, gamma, …)
- Il rumore è un segnale regolare caratterizzato dalla presenza di determinate frequenze


Segnale originale non corrotto da rumore
10
5
0
-5
-10
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
Segnale originale dopo l'applicazione di rumore - SNR = 5 dB
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
tempo (sec)

Esempio: analisi di immagini acquisite da radiografie

Immagine originale

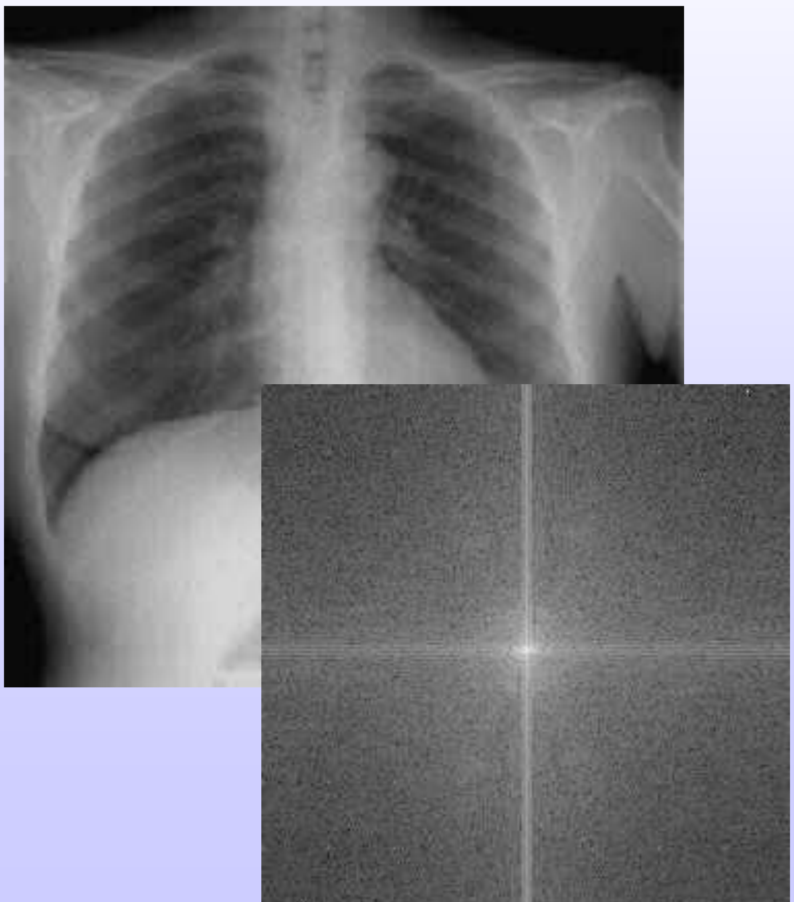
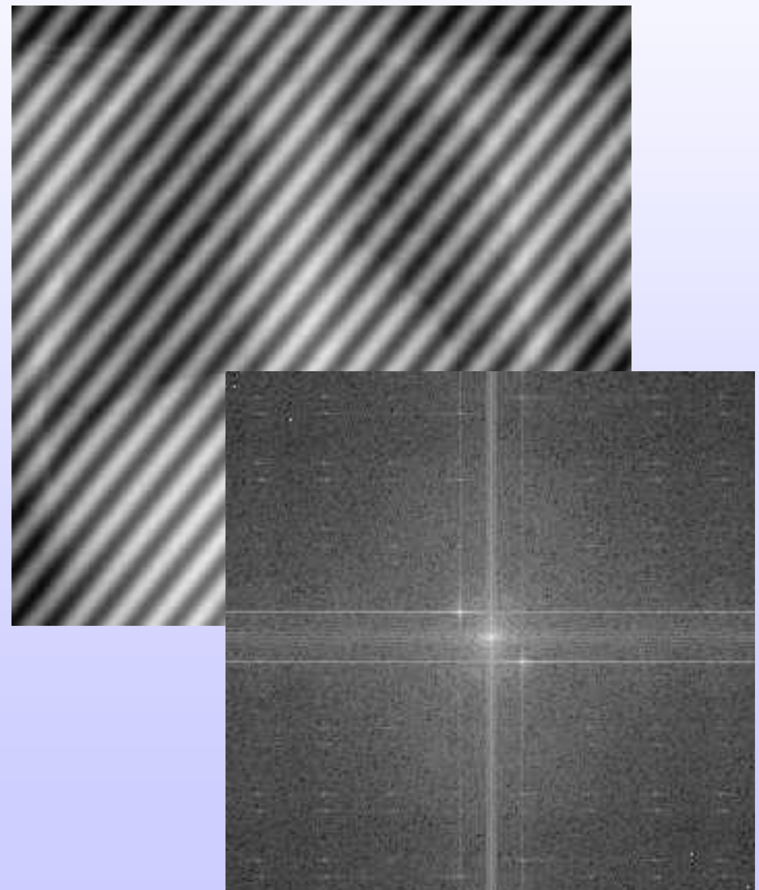
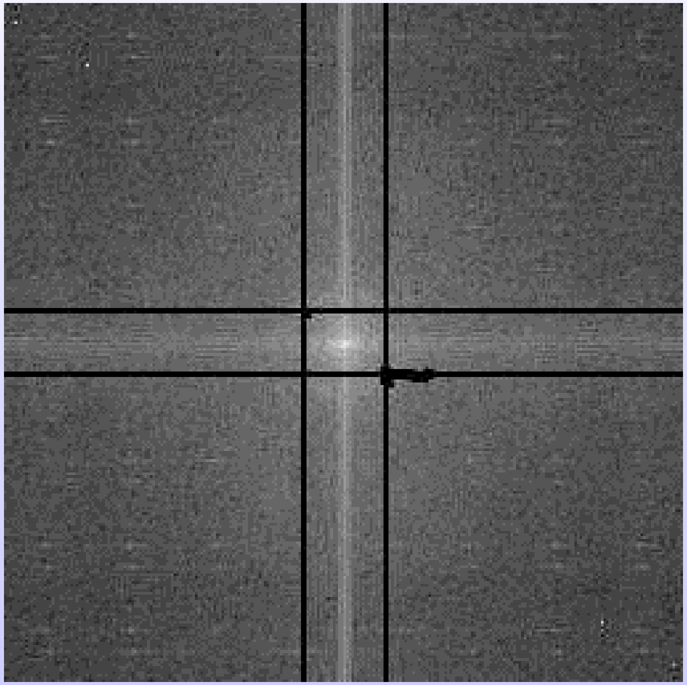


Immagine rumorosa



Eliminazione delle frequenze relative al rumore e ricostruzione dell’immagine pulita



Aspetti computazionali

- Per ciascuna componente del vettore DFT bisogna calcolare N somme
- Ciascuna somma richiede la valutazione di N esponenziali complessi e N operazioni complesse
- Nelle applicazioni 1D e 2D (N^2) la lunghezza del vettore (N) è almeno 10^4

Le somme $$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j w_N^{jk} \qquad k = 0,\ldots,N-1$$

Forniscono le componenti del vettore risultante da un prodotto matrice-vettore

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & w_N^1 & \ldots & w_N^{(N-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & \ldots. & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}}_{W} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ \ldots \\ \ldots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}}_{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_0 \\ \ldots \\ \ldots \\ F_{N-1} \end{bmatrix}}_{F}$$

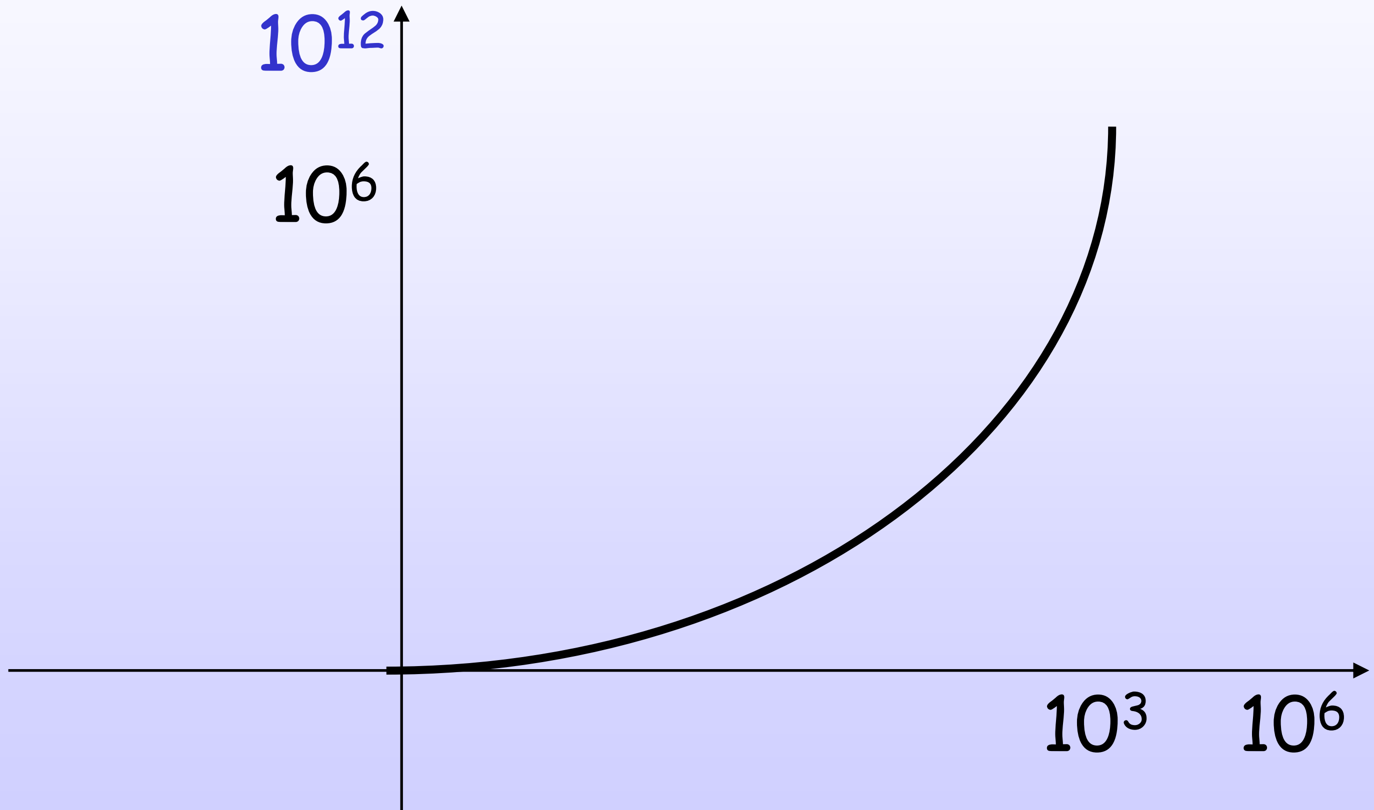
DFT

matrice di Fourier

La DFT di un vettore <u>f</u>
=
prodotto della matrice di Fourier per un vettore <u>f</u>

la complessità di tempo asintotica del calcolo diretto di un prodotto Matrice-Vettore

$T(N) = O(N^2)$



Nelle applicazioni N è almeno 10^3
e le funzioni sono 2D /3D

L'algoritmo FFT

- Fu pubblicato nel 1965 ad opera di Cooley e Tukey
- Gli autori proposero uno schema di calcolo che utilizzando le proprietà dell'esponenziale complesso e riorganizzando le operazioni effettua appena **$N\log_2(N)$** operazioni!

Esempio:

- $N = 2^1 = 2$

$$\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{1} f_j w_2^{jk}, \qquad k = 0,1}$$

Esplicitando la sommatoria...

k=0 $$F_0 = f_0 w_2^0 + f_1 w_2^0$$

k=1 $$F_1 = f_0 w_2^0 + f_1 w_2^1$$

il calcolo diretto richiede
2x2 moltiplicazioni complesse
oltre alle valutazioni
dell'esponenziale complesso

Cosa rappresentano i fattori w_N^{jk} con j=0,1 k=0,1 ?

Esempio: N=2 $\qquad w_2 = e^{-i\,2\pi/2}$

jk=0 $\qquad w_2^0 = e^{(-i\,2\pi/2)\,0} = \cos(\frac{2\pi}{2}0) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{2}0) = 1$

jk=1 $\qquad w_2^1 = e^{(-i\,2\pi/2)\,1} = \cos(\frac{2\pi}{2}1) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{2}1) = -1$

si ottiene ...

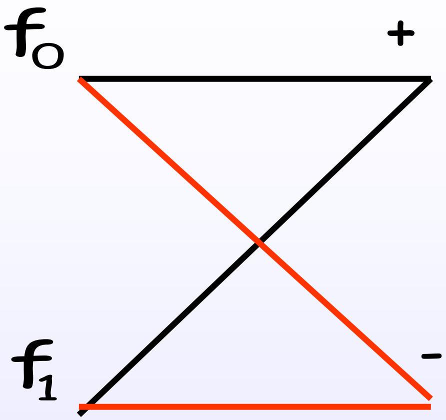
1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ -1

$$F_0 = f_0 \boxed{w_2^0} + f_1 \boxed{w_2^0}$$
$$F_1 = f_0 \boxed{w_2^0} + f_1 \boxed{w_2^1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_0 &= f_0 + f_1 \\ F_1 &= f_0 - f_1 \end{aligned}}$$

solo 2 addizioni!!

Costruiamo lo schema grafico delle operazioni da effettuare…



$f_0 + f_1$ $\boxed{F_0}$ somma

$f_0 - f_1$ $\boxed{F_1}$ differenza

DFT di lunghezza 2 della coppia (f_0,f_1)

=

Schema "butterfly"

Esempio:

- $N = 2^2 = 4$ $\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{3} f_j w_4^{jk}, \quad k = 0,1,\ldots,3}$

Esplicitando la sommatoria…

k=0 $F_0 = f_0 w_4^0 + f_1 w_4^0 + f_2 w_4^0 + f_3 w_4^0$

k=1 $F_1 = f_0 w_4^0 + f_1 w_4^1 + f_2 w_4^2 + f_3 w_4^3$

k=2 $F_2 = f_0 w_4^0 + f_1 w_4^2 + f_2 w_4^4 + f_3 w_4^6$

k=3 $F_3 = f_0 w_4^0 + f_1 w_4^3 + f_2 w_4^6 + f_3 w_4^9$

il calcolo diretto richiede
4x4 moltiplicazioni complesse

Cosa rappresentano i fattori w_N^{jk} $j=0,1\ldots3$ $k=0,1\ldots3$?

Esempio: N=4

$$w_4 = e^{-i\,2\,\pi/4}$$

jk=0 $$w_4^0 = e^{(-i\,2\pi/4)\,0} = \cos(\frac{2\pi}{4}0) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{4}0) = 1$$

jk=1 $$w_4^1 = e^{(-i\,2\pi/4)\,1} = \cos(\frac{2\pi}{4}1) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{4}1) = -i$$

jk=2 $$w_4^2 = e^{(-i\,2\pi/4)\,2} = \cos(\frac{2\pi}{4}2) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{4}2) = -1$$

jk=3 $$w_4^3 = e^{(-i\,2\pi/4)\,3} = \cos(\frac{2\pi}{4}3) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{4}3) = i$$

jk=4 $$w_4^4 = e^{(-i\,2\pi/4)\,4} = \cos(\frac{2\pi}{4}4) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{4}4) = 1$$

jk=6 $$w_4^6 = e^{(-i\,2\pi/4)\,6} = \cos(\frac{2\pi}{4}6) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{4}6) = -1$$

jk=9 $$w_4^9 = e^{(-i\,2\pi/4)\,9} = \cos(\frac{2\pi}{4}9) - i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{4}9) = -i$$

Sostituendo…

$$1$$

$$F_0 = f_0 w_4^0 + f_1 w_4^0 + f_2 w_4^0 + f_3 w_4^0$$

$$F_1 = f_0 w_4^0 + f_1 w_4^1 + f_2 w_4^2 + f_3 w_4^3$$

$$F_2 = f_0 w_4^0 + f_1 w_4^2 + f_2 w_4^4 + f_3 w_4^6$$

$$F_3 = f_0 w_4^0 + f_1 w_4^3 + f_2 w_4^6 + f_3 w_4^9$$

Sostituendo...

-1

$$
\begin{aligned}
F_0 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\
F_1 &= f_0 + f_1 w_4^1 + f_2 w_4^2 + f_3 w_4^3 \\
F_2 &= f_0 + f_1 w_4^2 + f_2 + f_3 w_4^6 \\
F_3 &= f_0 + f_1 w_4^3 + f_2 w_4^6 + f_3 w_4^9
\end{aligned}
$$

Sostituendo...

$-i \qquad +i$

$$
\begin{aligned}
F_0 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\
F_1 &= f_0 + f_1 \boxed{w_4^1} - f_2 + f_3 \boxed{w_4^3} \\
F_2 &= f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \\
F_3 &= f_0 + f_1 \boxed{w_4^3} - f_2 + f_3 \boxed{w_4^9}
\end{aligned}
$$

Ovvero…

$$
\begin{aligned}
F_0 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\
F_1 &= f_0 - i\,f_1 - f_2 + i f_3 \\
F_2 &= f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \\
F_3 &= f_0 + i f_1 - f_2 - i f_3
\end{aligned}
$$

Riorganizziamo le somme …

$$
\begin{aligned}
F_0 &= (f_0 + f_2) + (f_1 + f_3) \\
F_1 &= (f_0 - f_2) - i\,(f_1 - f_3) \\
F_2 &= (f_0 + f_2) - (f_1 + f_3) \\
F_3 &= (f_0 - f_2) + i\,(f_1 - f_3)
\end{aligned}
$$

Alcune di queste si ripetono …

Sono necessarie solo
8 addizioni/sottrazioni

Costruiamo lo schema grafico delle operazioni da effettuare...

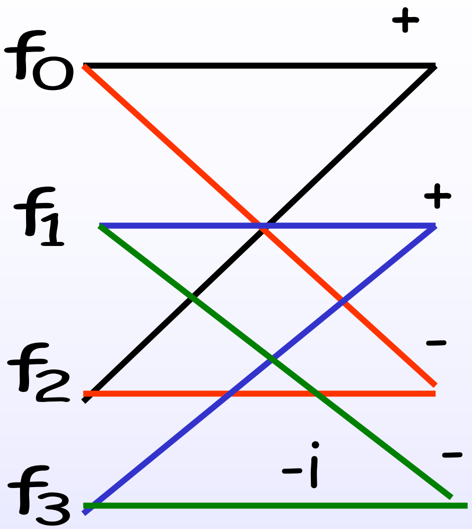
$$
\begin{aligned}
F_0 &= \boxed{(f_0 + f_2)} + \boxed{(f_1 + f_3)} \\
F_1 &= \boxed{(f_0 - f_2)} - i\,\boxed{(f_1 - f_3)} \\
F_2 &= \boxed{(f_0 + f_2)} - \boxed{(f_1 + f_3)} \\
F_3 &= \boxed{(f_0 - f_2)} + i\,\boxed{(f_1 - f_3)}
\end{aligned}
$$

Poniamo:

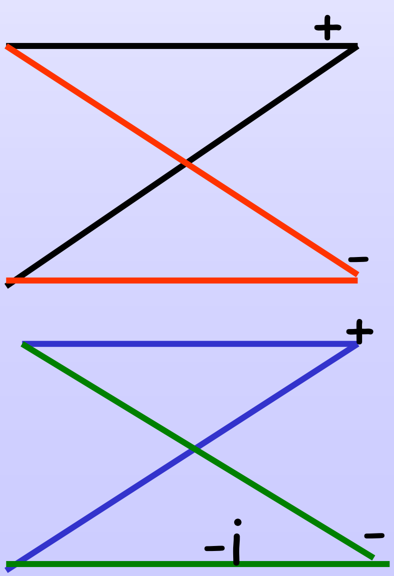
$\boxed{c_0 = f_0 + f_2}$ $\boxed{c_1 = f_1 + f_3}$

$\boxed{c_2 = f_0 - f_2}$ $\boxed{c_3 = -i(f_1 - f_3)}$

Ovvero…



$f_0 + f_2$	c_0	somma
$f_1 + f_3$	c_1	somma
$f_0 - f_2$	c_2	differenza
$-i(f_1 - f_3)$	c_3	differenza



…la prima è uno schema butterfly

si utilizzano 2 butterfly

…la seconda è un altro schema butterfly …

Costruiamo lo schema grafico delle operazioni da effettuare…

$$F_0 = (f_0 + f_2) + (f_1 + f_3) = \boxed{c_0 + c_1}$$

$$F_2 = (f_0 + f_2) - (f_1 + f_3) = \boxed{c_0 - c_1}$$

$$F_1 = (f_0 - f_2) - i\,(f_1 - f_3) = \boxed{c_2 + c_3}$$

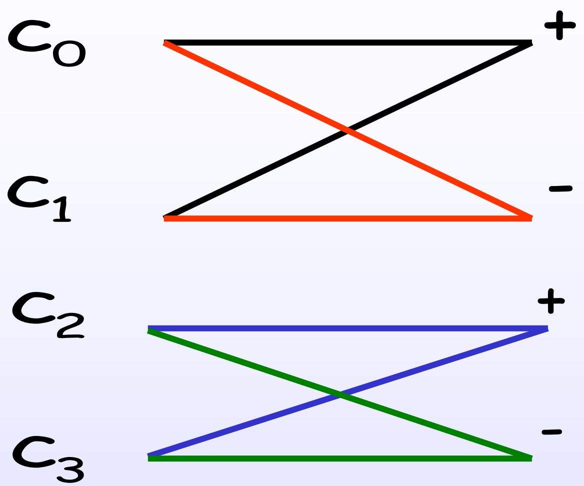
$$F_3 = (f_0 - f_2) + i\,(f_1 - f_3) = \boxed{c_2 - c_3}$$

Poniamo:

$\boxed{d_0=c_0+c_1}$ $\boxed{d_1=c_0-c_1}$

$\boxed{d_2=c_2+c_3}$ $\boxed{d_4=c_2-c_3}$

II) passo



$c_0 + c_1$ | d_0 | somma

$c_0 - c_1$ | d_1 | differenza

$c_2 + c_3$ | d_2 | somma

$c_2 - c_3$ | d_3 | differenza

DFT di lunghezza 2 della coppia $(c_0\ , c_1\ )$

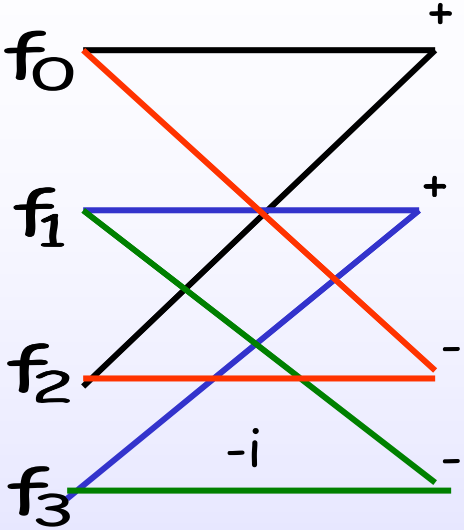
DFT di lunghezza 2 della coppia $(c_2\ , c_3\ )$

Si utilizzano 2 butterfly ovvero

Al secondo passo si calcolano 2 DFT di lunghezza 2

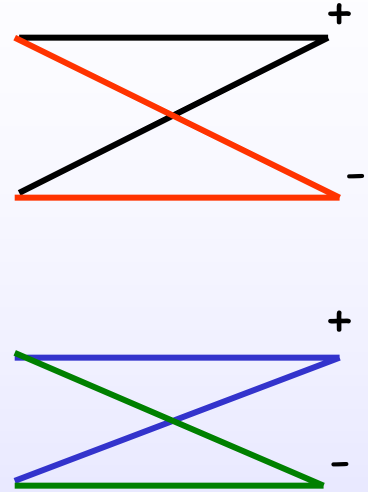
In conclusione

Passo I



$$c_0 = f_0 + f_2$$
$$c_1 = f_1 + f_3$$
$$c_2 = f_0 - f_2$$
$$c_3 = i(f_1 - f_3)$$

Passo II



$$c_0 + c_1 = d_0 \quad F_0$$
$$c_0 - c_1 = d_1 \quad F_2$$
$$c_2 + c_3 = d_2 \quad F_1$$
$$c_2 - c_3 = d_3 \quad F_3$$

2 DFT di lunghezza 2
(ovvero 4 somme)

2 DFT di lunghezza 2
(ovvero 4 somme)

In totale si calcolano 8 somme

OSSERVAZIONE

d è un vettore che contiene nella prima metà le componenti pari e nella seconda quelle dispari della DFT F

Quindi, per $N=4$,
anziché effettuare $16=N^2$ operazioni
ne bastano solo
$8 = N \log N$

Esempio:

- $N = 2^3 = 8$ $\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{7} f_j w_8^{jk}, \quad k = 0,1,\ldots,7}$

Esplicitando la sommatoria…

$$
\begin{aligned}
F_0 &= f_0 w_8^0 + f_1 w_8^0 + \ldots + f_7 w_8^0 \\
F_1 &= f_0 w_8^0 + f_1 w_8^1 + \ldots + f_7 w_8^7 \\
F_2 &= f_0 w_8^0 + f_1 w_8^2 + \ldots + f_7 w_8^{14} \\
F_3 &= f_0 w_8^0 + f_1 w_8^3 + \ldots + f_7 w_8^{21} \\
F_4 &= f_0 w_8^0 + f_1 w_8^4 + \ldots + f_7 w_8^{28} \\
F_5 &= f_0 w_8^0 + f_1 w_8^5 + \ldots + f_7 w_8^{35} \\
F_6 &= f_0 w_8^0 + f_1 w_8^6 + \ldots + f_7 w_8^{42} \\
F_7 &= f_0 w_8^0 + f_1 w_8^7 + \ldots + f_3 w_8^{49}
\end{aligned}
$$

il calcolo diretto richiede
8x8 moltiplicazioni complesse

Cosa rappresentano i fattori w_N^{jk} $j=0,1\ldots7$ $k=0,1\ldots7$?

Esempio: N=8

$w_8 = e^{-i\,2\pi/8}$

jk=0 $\quad w_8^0 = e^{-i2\pi/8\ 0} = \cos(\frac{2\pi}{8}0) - i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{8}0) = 1$

jk=1 $\quad w_8^1 = e^{-i2\pi/8\,1} = \cos(\frac{2\pi}{8}1) - i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{8}1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

jk=2 $\quad w_8^2 = e^{-i2\pi/8\,2} = \cos(\frac{2\pi}{8}2) - i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{8}2) = -i$

jk=3 $\quad w_8^3 = e^{-i2\pi/8\ 3} = \cos(\frac{2\pi}{8}3) - i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{8}3) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

jk=4 $\quad w_8^4 = e^{-i2\pi/8\ 4} = \cos(\frac{2\pi}{8}4) - i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{8}4) = -1$

jk=5 $\quad w_8^5 = e^{-i2\pi/8\ 5} = \cos(\frac{2\pi}{8}5) - i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{8}5) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

jk=6 $\quad w_8^6 = e^{-i2\pi/8\,6} = \cos(\frac{2\pi}{8}6) - i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{8}6) = +i$

jk=7 $\quad w_8^7 = e^{-i2\pi/8\ 7} = \cos(\frac{2\pi}{8}7) - i\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{8}7) = +\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Sostituendo…

-1

1

$$F_0 = f_0 w_8^{\,0} + f_1 w_8^{\,0} + f_2 w_8^{\,0} + f_3 w_8^{\,0} + f_4 w_8^{\,0} + f_5 w_8^{\,0} + f_6 w_8^{\,0} + f_7 w_8^{\,0}$$

$$F_1 = f_0 w_8^{\,0} + f_1 w_8^{\,1} + f_2 w_8^{\,2} + f_3 w_8^{\,3} + f_4 w_8^{\,4} + f_5 w_8^{\,5} + f_6 w_8^{\,6} + f_7 w_8^{\,7}$$

$$F_2 = f_0 w_8^{\,0} + f_1 w_8^{\,2} + f_2 w_8^{\,4} + f_3 w_8^{\,6} + f_4 w_8^{\,0} + f_5 w_8^{\,2} + f_6 w_8^{\,4} + f_7 w_8^{\,6}$$

$$F_3 = f_0 w_8^{\,0} + f_1 w_8^{\,3} + f_2 w_8^{\,6} + f_3 w_8^{\,1} + f_4 w_8^{\,4} + f_5 w_8^{\,7} + f_6 w_8^{\,2} + f_7 w_8^{\,5}$$

$$F_4 = f_0 w_8^{\,0} + f_1 w_8^{\,4} + f_2 w_8^{\,0} + f_3 w_8^{\,4} + f_4 w_8^{\,0} + f_5 w_8^{\,4} + f_6 w_8^{\,0} + f_7 w_8^{\,0}$$

$$F_5 = f_0 w_8^{\,0} + f_1 w_8^{\,5} + f_2 w_8^{\,2} + f_3 w_8^{\,7} + f_4 w_8^{\,0} + f_5 w_8^{\,5} + f_6 w_8^{\,6} + f_7 w_8^{\,3}$$

$$F_6 = f_0 w_8^{\,0} + f_1 w_8^{\,6} + f_2 w_8^{\,4} + f_3 w_8^{\,2} + f_4 w_8^{\,0} + f_5 w_8^{\,6} + f_6 w_8^{\,4} + f_7 w_8^{\,2}$$

$$F_7 = f_0 w_8^{\,0} + f_1 w_8^{\,7} + f_2 w_8^{\,6} + f_3 w_8^{\,5} + f_4 w_8^{\,4} + f_5 w_8^{\,3} + f_6 w_8^{\,2} + f_7 w_8^{\,1}$$

Sostituendo…

-i   i

$$F_0 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7$$

$$F_1 = f_0 + f_1 w_8^{1} + f_2 w_8^{2} + f_3 w_8^{3} - f_4 + f_5 w_8^{5} + f_6 w_8^{6} + f_7 w_8^{7}$$

$$F_2 = f_0 + f_1 w_8^{2} - f_2 + f_3 w_8^{6} + f_4 + f_5 w_8^{2} - f_6 + f_7 w_8^{6}$$

$$F_3 = f_0 + f_1 w_8^{3} + f_2 w_8^{6} + f_3 w_8^{1} - f_4 + f_5 w_8^{7} + f_6 w_8^{2} + f_7 w_8^{5}$$

$$F_4 = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + f_6 + f_7$$

$$F_5 = f_0 + f_1 w_8^{5} + f_2 w_8^{2} + f_3 w_8^{7} + f_4 + f_5 w_8^{5} + f_6 w_8^{6} + f_7 w_8^{3}$$

$$F_6 = f_0 + f_1 w_8^{6} - f_2 + f_3 w_8^{2} + f_4 + f_5 w_8^{6} - f_6 + f_7 w_8^{2}$$

$$F_7 = f_0 + f_1 w_8^{7} + f_2 w_8^{6} + f_3 w_8^{5} - f_4 + f_5 w_8^{3} + f_6 w_8^{2} + f_7 w_8^{1}$$

Sostituendo e raggruppando gli esponenziali uguali si ottiene…

$$F_0 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7$$

$$F_1 = f_0 + \boxed{w_8^{\,1}(f_1 - f_5)} + if_2 + \boxed{w_8^{\,3}(f_3 - f_7)} - f_4 - i f_6$$

$$F_2 = f_0 + i f_1 - f_2 - i f_3 + f_4 + i f_5 - f_6 - i f_7$$

$$F_3 = f_0 + \boxed{w_8^{\,3}(f_1 - f_5)} - i f_2 + \boxed{w_8^{\,1}(f_3 - f_7)} - f_4 + if_6$$

$$F_4 = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + f_6 + f_7$$

$$F_5 = f_0 - \boxed{w_8^{\,1}(f_1 - f_5)} + if_2 - \boxed{w_8^{\,3}(f_3 - f_7)} - f_4 - i f_6$$

$$F_6 = f_0 - i f_1 - f_2 + i f_3 + f_4 - i f_5 - f_6 + if_7$$

$$F_7 = f_0 - \boxed{w_8^{\,3}(f_1 - f_5)} - if_2 - \boxed{w_8^{\,1}(f_3 - f_7)} - f_4 + if_6$$

Inoltre raggruppando le componenti che contengono
l'unità immaginaria .....

$$F_0 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7$$

$$F_1 = f_0 + w_8^{\,1}(f_1 - f_5) \boxed{-i\,(f_2 - f_6)} + w_8^{\,3}(f_3 - f_7) - f_4$$

$$F_2 = f_0 + \boxed{i\,(f_1 + f_5)} - f_2 \boxed{-i\,(f_3 + f_7)} + f_4 - f_6$$

$$F_3 = f_0 + w_8^{\,1}(f_1 - f_5) \boxed{-i\,(f_2 - f_6)} + w_8^{\,3}(f_3 - f_7) - f_4$$

$$F_4 = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + f_6 + f_7$$

$$F_5 = f_0 - w_8^{\,1}(f_1 - f_5) + i\boxed{(f_2 - f_6)} - w_8^{\,3}(f_3 - f_7) - f_4$$

$$F_6 = f_0 \boxed{-i\,(f_1 + f_5}) - f_2 + \boxed{i\,(f_3 + f_7}) + f_4 - f_6$$

$$F_7 = f_0 - w_8^{\,1}(f_1 - f_5) \boxed{-i\,(f_2 - f_6}) - w_8^{\,3}(f_3 - f_7) - f_4$$

si ottiene …

$$F_0 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7$$

$$F_1 = f_0 + w_8^{\,1} (f_1 - f_5) - i\,(f_2 - f_6) + w_8^{\,3} (f_3 - f_7) - f_4$$

$$F_2 = f_0 + i\, f_1 - f_2 - i\, f_3 + f_4 + i\, f_5 - f_6 - i\, f_7$$

$$F_3 = f_0 + w_8^{\,1}(f_1 - f_5) - i\,(f_2 - f_6) + w_8^{\,3} (f_3 - f_7) - f_4$$

$$F_4 = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + f_6 + f_7$$

$$F_5 = f_0 - w_8^{\,1} (f_1 - f_5) + i\,(f_2 - f_6) - w_8^{\,3} (f_3 - f_7) - f_4$$

$$F_6 = f_0 - i\, f_1 - f_2 + i\, f_3 + f_4 - i\, f_5 - f_6 + i f_7$$

$$F_7 = f_0 - w_8^{\,1} (f_1 - f_5) - i\,(f_2 - f_6) - w_8^{\,3} (f_3 - f_7) - f_4$$

Ma riorganizzando le somme …

...

$$F_0 = \boxed{(f_0 + f_4)} + \boxed{(f_1 + f_5)} + \boxed{(f_2 + f_6)} + \boxed{(f_3 + f_7)}$$

$$F_1 = \boxed{(f_0 - f_4)} + \boxed{w_8^{\,1}(f_1 - f_5)} - \boxed{i\,(f_2 - f_6)} + \boxed{w_8^{\,3}(f_3 - f_7)}$$

$$F_2 = \boxed{(f_0 + f_4)} + \boxed{i\,(f_1 + f_5)} - \boxed{(f_2 + f_6)} - \boxed{i\,(f_3 + f_7)}$$

$$F_3 = \boxed{(f_0 - f_4)} + \boxed{w_8^{\,1}(f_1 - f_5)} - \boxed{i\,(f_2 - f_6)} + \boxed{w_8^{\,3}(f_3 - f_7)}$$

$$F_4 = \boxed{(f_0 + f_4)} - \boxed{(f_1 + f_5)} + \boxed{(f_2 + f_6)} - \boxed{(f_3 + f_7)}$$

$$F_5 = \boxed{(f_0 - f_4)} - \boxed{w_8^{\,1}(f_1 - f_5)} + \boxed{i\,(f_2 - f_6)} - \boxed{w_8^{\,3}(f_3 - f_7)}$$

$$F_6 = \boxed{(f_0 + f_4)} - \boxed{i(f_1 + f_5)} - \boxed{(f_2 + f_6)} + \boxed{i\,(f_3 + f_7)}$$

$$F_7 = \boxed{(f_0 - f_4)} - \boxed{w_8^{\,1}(f_1 - f_5)} - \boxed{i\,(f_2 - f_6)} - \boxed{w_8^{\,3}(f_3 - f_7)}$$

Alcune di queste si ripetono ...

Costruiamo lo schema grafico delle operazioni da effettuare…

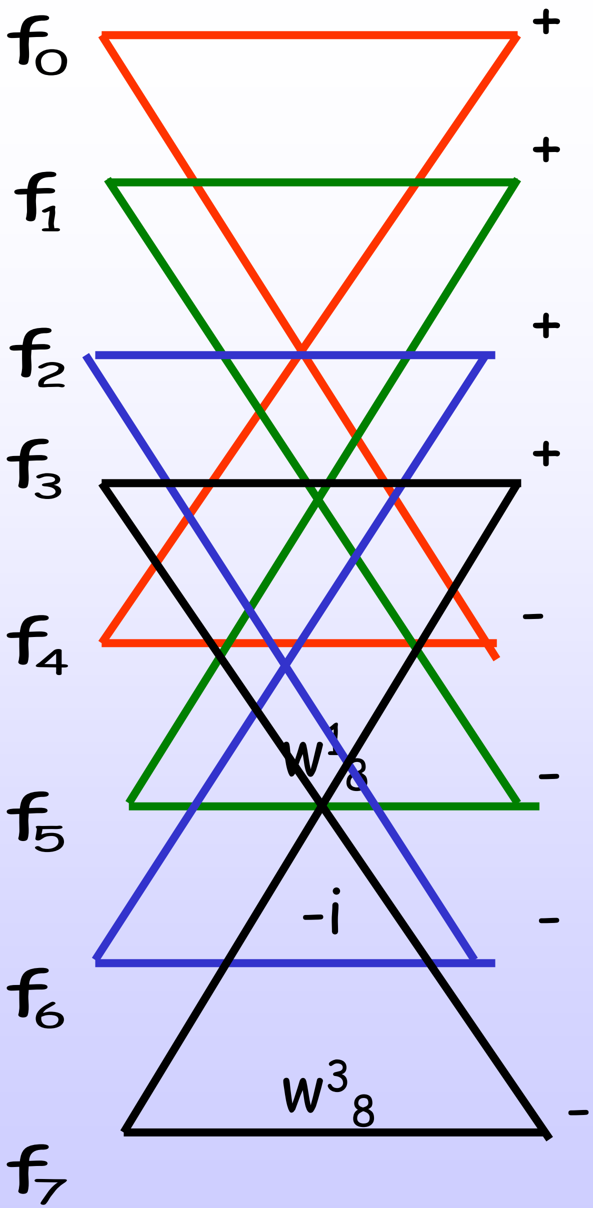
$$F_0 = (f_0 + f_4) + (f_1 + f_5) + (f_2 + f_6) + (f_3 + f_7)$$
$$F_1 = (f_0 - f_4) + w_8^{\,1}(f_1 - f_5) - i(f_2 - f_6) + w_8^{\,3}(f_3 - f_7)$$
$$F_2 = (f_0 + f_4) + i(f_1 + f_5) - (f_2 + f_6) - i(f_3 + f_7)$$
$$F_3 = (f_0 - f_4) + w_8^{\,1}(f_1 - f_5) - i(f_2 - f_6) + w_8^{\,3}(f_3 - f_7)$$
$$F_4 = (f_0 + f_4) - (f_1 + f_5) + (f_2 + f_6) - (f_3 + f_7)$$
$$F_5 = (f_0 - f_4) - w_8^{\,1}(f_1 - f_5) + i(f_2 - f_6) - w_8^{\,3}(f_3 - f_7)$$
$$F_6 = (f_0 + f_4) - i(f_1 + f_5) - (f_2 + f_6) + i(f_3 + f_7)$$
$$F_7 = (f_0 - f_4) - w_8^{\,1}(f_1 - f_5) - i(f_2 - f_6) - w_8^{\,3}(f_3 - f_7)$$

Poniamo:

$c_0 = f_0 + f_4$ $\quad$ $c_1 = f_1 + f_5$ $\quad$ $c_2 = f_2 + f_6$ $\quad$ $c_3 = f_3 + f_7$ $\quad$ $c_4 = f_0 - f_4$

$c_5 = w_8^{\,1}(f_1 - f_5)$ $\quad$ $c_6 = -i(f_2 - f_6)$ $\quad$ $c_7 = w_8^{\,3}(f_3 - f_7)$

Ovvero…



$f_0 + f_4$	c_0	somma
$f_1 + f_5$	c_1	somma
$f_2 + f_6$	c_2	somma
$f_3 + f_7$	c_3	somma
$f_0 - f_4$	c_4	differenza
$w_8^1(f_1 - f_5)$	c_5	differenza
$i(f_2 - f_6)$	c_6	differenza
$w_8^3(f_3 - f_7)$	c_7	differenza

si utilizzano 4 butterfly

Cosa succede al passo successivo

del calcolo della DFT

?

Costruiamo lo schema grafico delle operazioni da effettuare…

$$F_0 = (f_0+f_4) + (f_1+f_5) + (f_2+f_6) + (f_3+f_7) = (c_0 + c_2) + (c_1 + c_3)$$

$$F_2 = (f_0+f_4) + i\,(f_1+f_5) - (f_2+f_6) - i\,(f_3+f_7) = (c_0 - c_2) - i(c_1 - c_3)$$

$$F_1 = (f_0-f_4) + w_8^{\,1}(f_1-f_5) - i\,(f_2-f_6) + w_8^{\,3}(f_3-f_7) = (c_4 + c_6) + (c_5 + c_7)$$

$$F_3 = (f_0-f_4) + w_8^{\,1}(f_1-f_5) - i\,(f_2-f_6) + w_8^{\,3}(f_3-f_7) = (c_4 - c_6) - i(c_5 - c_7)$$

$$F_4 = (f_0+f_4) - (f_1+f_5) + (f_2+f_6) - (f_3+f_7) = (c_0 + c_2) - (c_1 + c_3)$$

$$F_6 = (f_0+f_4) - i\,(f_1+f_5) - (f_2+f_6) - i\,(f_3+f_7) = (c_0 - c_2) + i(c_1 - c_3)$$

$$F_5 = (f_0-f_4) - w_8^{\,1}(f_1-f_5) + i\,(f_2-f_6) - w_8^{\,3}(f_3-f_7) = (c_4 + c_6) + i(c_5 + c_7)$$

$$F_7 = (f_0-f_4) - w_8^{\,1}(f_1-f_5) - i\,(f_2-f_6) - w_8^{\,3}(f_3-f_7) = (c_4 - c_6) + i(c_5 - c_7)$$

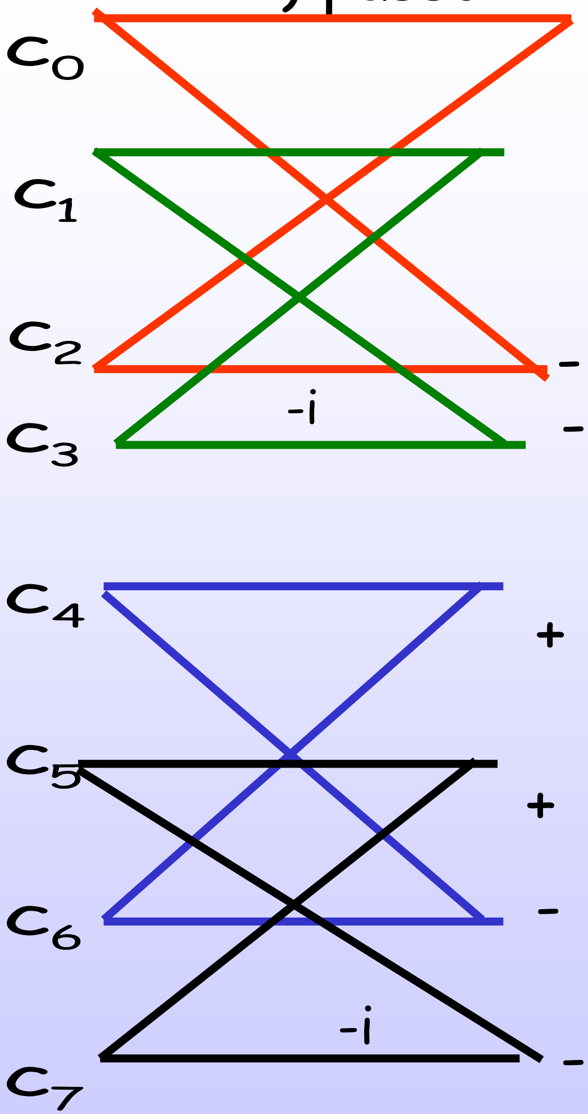
Poniamo:

$d_0=c_0+c_2$ $d_1=c_1+c_3$ $d_2=c_0-c_2$ $d_3=-i(c_1-c_3)$ $d_4 = c_4+c_6$

$d_5=(c_5+c_7)$ $d_6=(c_4-c_6)$ $d_7=-i\,(c_5-c_7)$

Ovvero…

II) passo



$c_0 + c_2$	d_0	somma
$c_1 + c_3$	d_1	somma
$c_0 - c_2$	d_2	differenza
$-i(c_1 - c_3)$	d_3	differenza
$c_4 + c_6$	d_4	somma
$c_5 + c_7$	d_5	somma
$(c_4 - c_6)$	d_6	differenza
$w_8^3(f_3 - f_7)$	d_7	differenza

si utilizzano 4 butterfly

Costruiamo lo schema grafico delle operazioni da effettuare…

$F_0 = (c_0 + c_2) + (c_1 + c_3) = \boxed{d_0 + d_1}$

$F_4 = (c_0 + c_2) - (c_1 + c_3) = \boxed{d_0 - d_1}$

$F_2 = (c_0 - c_2) - i(c_1 - c_3) = \boxed{d_2 + d_3}$

$F_6 = (c_0 - c_2) + i(c_1 - c_3) = \boxed{d_2 - d_3}$

$F_1 = (c_4 + c_6) + (c_5 + c_7) = \boxed{d_4 + d_5}$

$F_5 = (c_4 + c_6) - (c_5 + c_7) = \boxed{d_4 - d_5}$

$F_3 = (c_4 - c_6) - i(c_5 - c_7) = \boxed{d_6 + d_7}$

$F_7 = (c_4 - c_6) + i(c_5 - c_7) = \boxed{d_6 - d_7}$

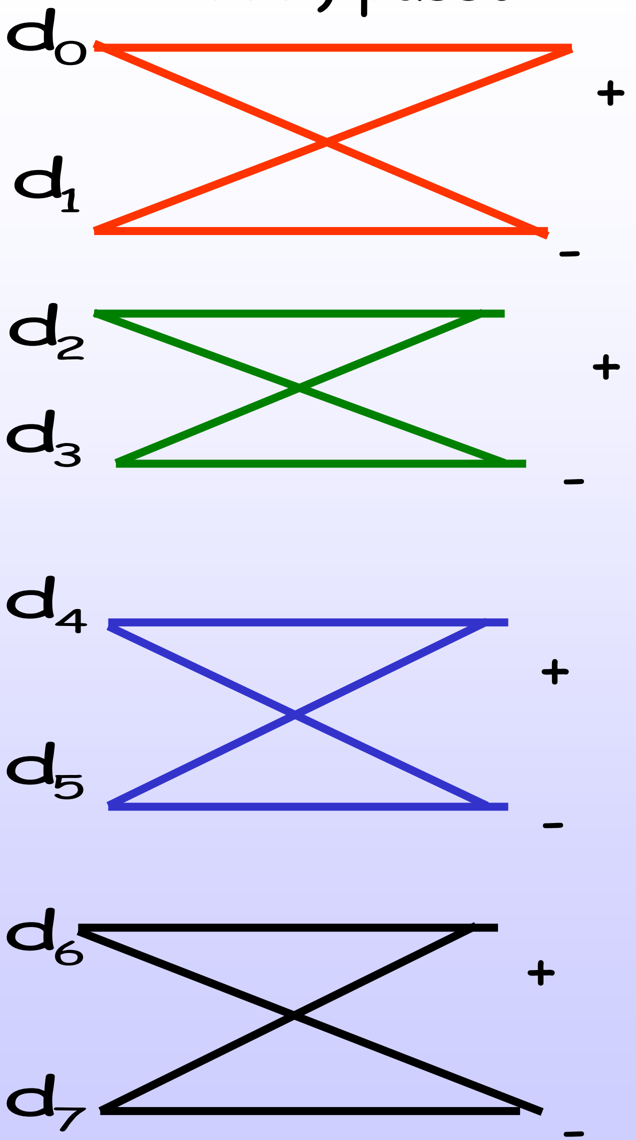
Poniamo:

$\boxed{e_0 = d_0 + d_1}$ $\boxed{e_1 = d_0 - d_1}$ $\boxed{e_2 = d_2 + d_3}$ $\boxed{e_3 = d_2 - d_3}$ $\boxed{e_4 = d_4 + d_5}$

$\boxed{e_5 = d_4 - d_5}$ $\boxed{e_6 = d_6 - d_7}$ $\boxed{e_7 = d_6 - d_7}$

Ovvero…

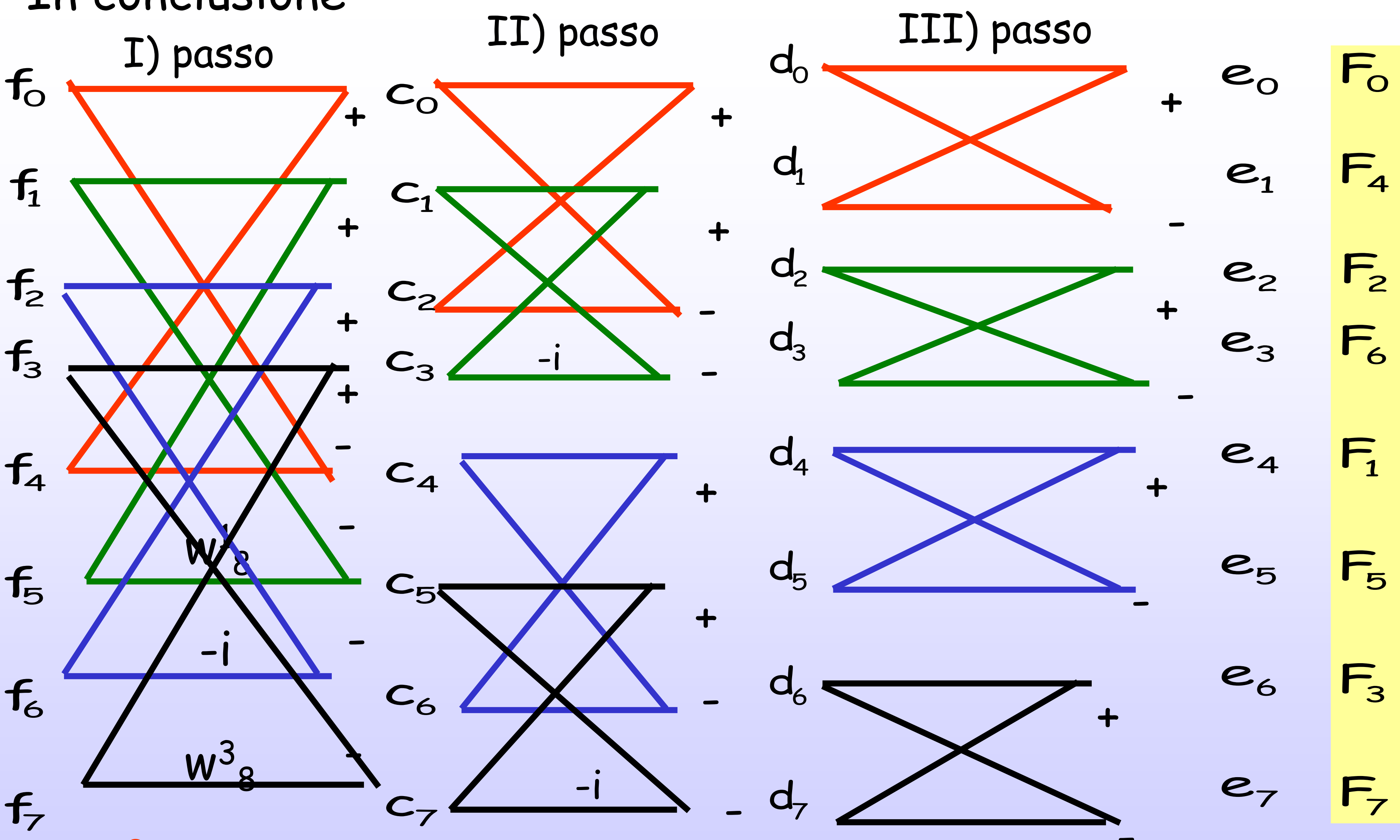
III) passo



$d_0 + d_1$	e_0	somma
$d_0 - d_1$	e_1	differenza
$d_2 + d_3$	e_2	somma
$d_2 - d_3$	e_3	differenza
$d_4 + d_5$	e_4	somma
$d_4 - d_5$	e_5	differenza
$d_6 + d_7$	e_6	somma
$d_6 - d_7$	e_7	differenza

si utilizzano 4 butterfly

In conclusione



8 somme
I passo

8 somme
II passo

8 somme
III passo

In totale si calcolano 24 somme

Quindi, per $N=8$,
anziché effettuare $64=N^2$ operazioni
ne bastano solo $N \log(N) = 24$

Qual è lo schema generale per il calcolo della

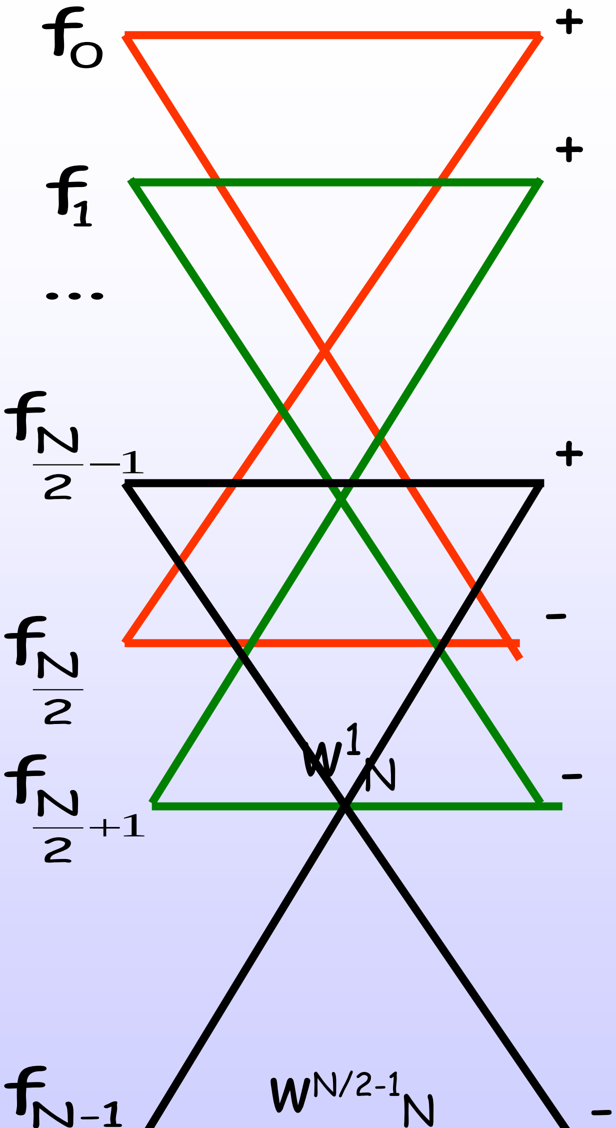
DFT di un vettore $\underline{f}$

di lunghezza

$N=2^m$...

?

I) Passo



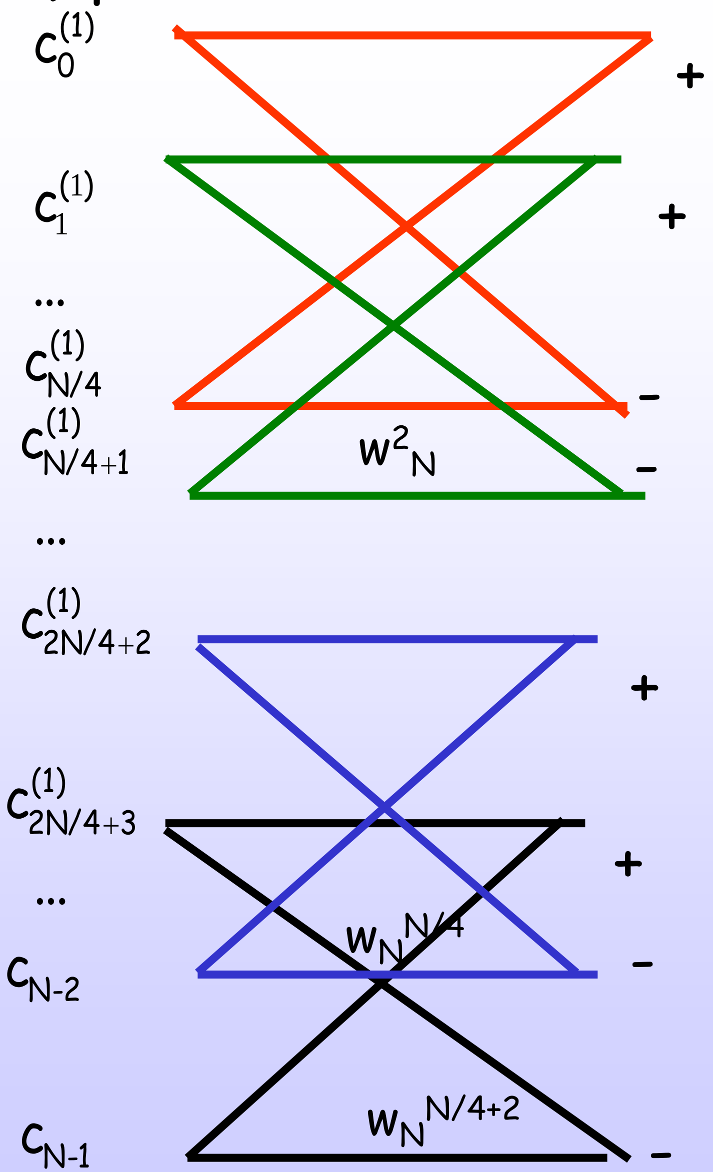
$f_0 + f_{\frac{N}{2}}$	$c_0^{(1)}$	somma
$f_1 + f_{\frac{N}{2}+1}$	$c_1^{(1)}$	somma
	...	
$f_{\frac{N}{2}-1} + f_{N-1}$	$c_{N/2-1}^{(1)}$	somma
$f_0 - f_{\frac{N}{2}}$	$c_{N/2}^{(1)}$	differenza
$w^1_N(f_1 - f_{\frac{N}{2}+1})$	$c_{N/2+1}^{(1)}$	differenza
$w_N^{N/2-1}(f_{N/2-1} - f_{N-1})$	$c_{N-1}^{(1)}$	differenza

AL I PASSO

Per il calcolo di una DFT di lunghezza N
si utilizzano N/2 butterfly

ciascuna ottenuta combinando
le componenti del vettore che hanno distanza
p=N/2

II) passo



$$c_0^{(1)} + c_{N/4}^{(1)}$$

$$c_1^{(1)} + c_{N/4+1}^{(1)}$$

$$c_0^{(1)} - c_{N/4}^{(1)}$$

$$w_N^2(c_1^{(1)} + c_{N/4+1}^{(1)})$$

$$c_{2N/4+2}^{(1)} + c_{N-2}^{(1)}$$

$$(c_{2N/4+3}^{(1)} + c_{N-1}^{(1)})$$

$$w_N^{N/4}(c_{2N/4+2}^{(1)} - c_{N-2}^{(1)})$$

$$w_N^{N/4+2}(c_{2N/4+3}^{(1)} + c_{N-1}^{(1)})$$

$c_0{}^{(2)}$

$c_1{}^{(2)}$

...

$c_{N/4}{}^{(2)}$

$c_{N/4+1}{}^{(2)}$

...

$c_{2N/4+2}{}^{(2)}$

$c_{2N/4+3}{}^{(2)}$

...

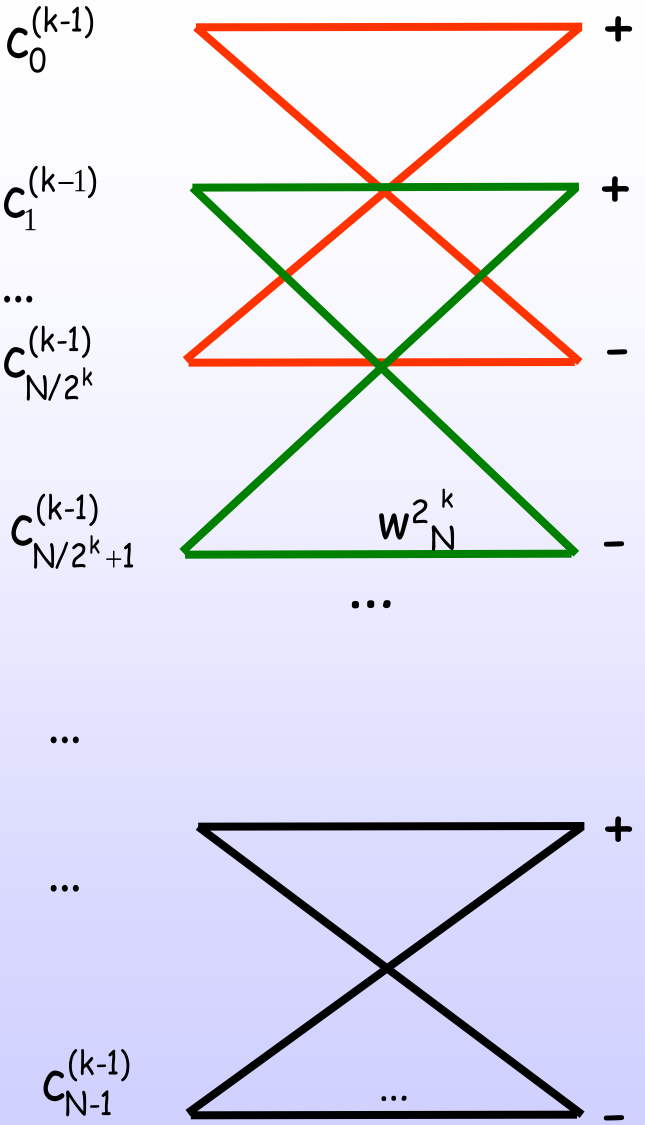
$c_{N-2}{}^{(2)}$

$c_{N-1}{}^{(2)}$

AL II PASSO

si costruiscono N/2 butterfly
e si combinano le componenti del vettore
che hanno distanza
p=N/4

passo k



$$c_0^{(k-1)} + c_{N/2^k}^{(k-1)}$$

$$c_1^{(k-1)} + c_{N/2^k+1}^{(k-1)}$$

$$c_0^{(k-1)} - c_{N/2^k}^{(k-1)}$$

$$w_N^{2^k}\left(c_1^{(k-1)} + c_{N/2^k+1}^{(k-1)}\right)$$

$c_0^{(k)}$

$c_1^{(k)}$

...

$c_{N/2^k}^{(k)}$

$c_{N/2^k+1}^{(k)}$

...

...

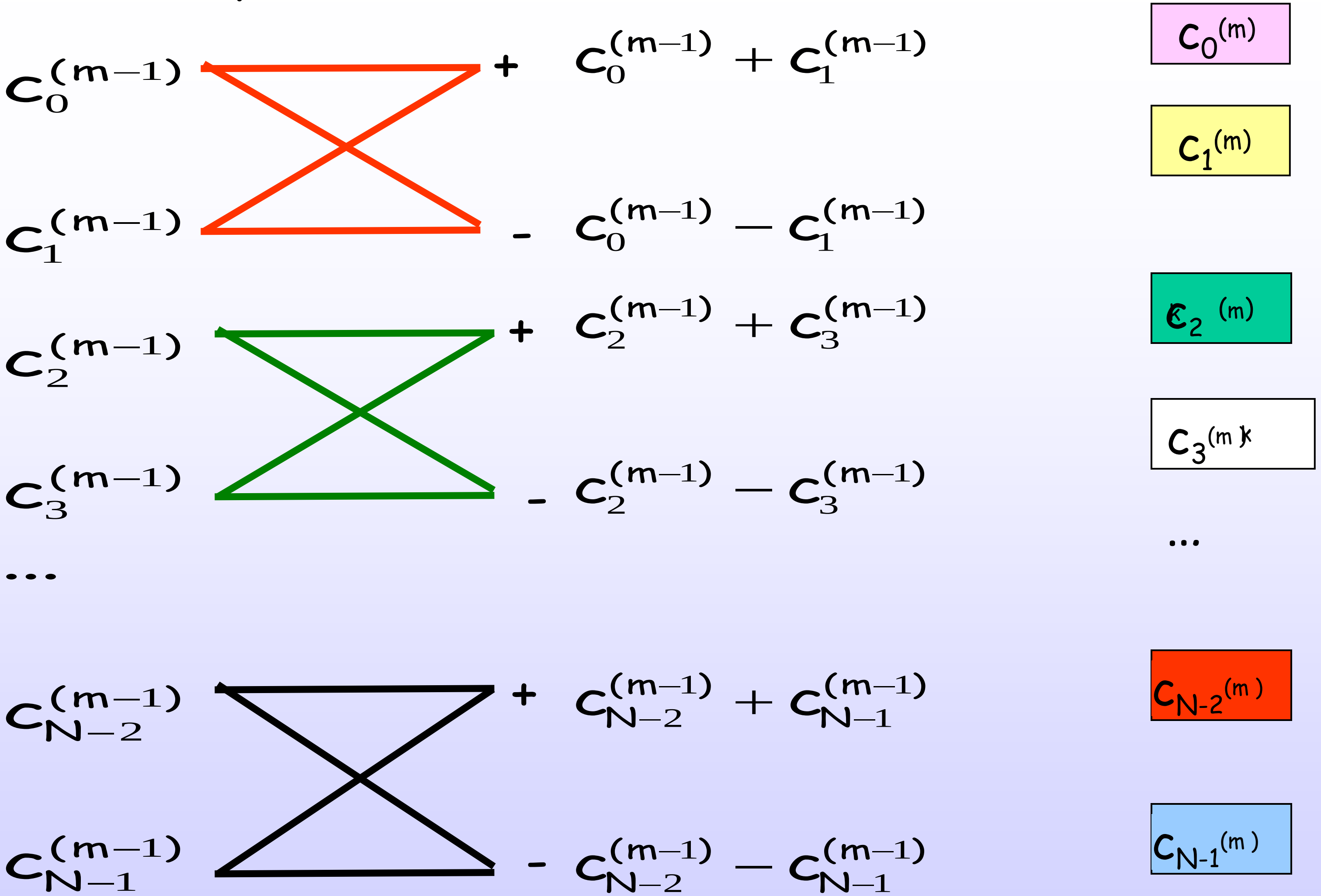
$c_{N-1}^{(k)}$

AL PASSO K

si costruiscono N/2 butterfly
e si combinano le componenti del vettore
che hanno distanza

$$p=N/2^K$$

All'ultimo passo (m)..



AL PASSO m

si costruiscono N/2 butterfly
e si combinano le componenti del vettore
che hanno distanza
$p=N/2^m=1$

In conclusione

- Ad ogni passo si costruiscono N/2 butterfly

- Si eseguono m =log(N) passi

⇓

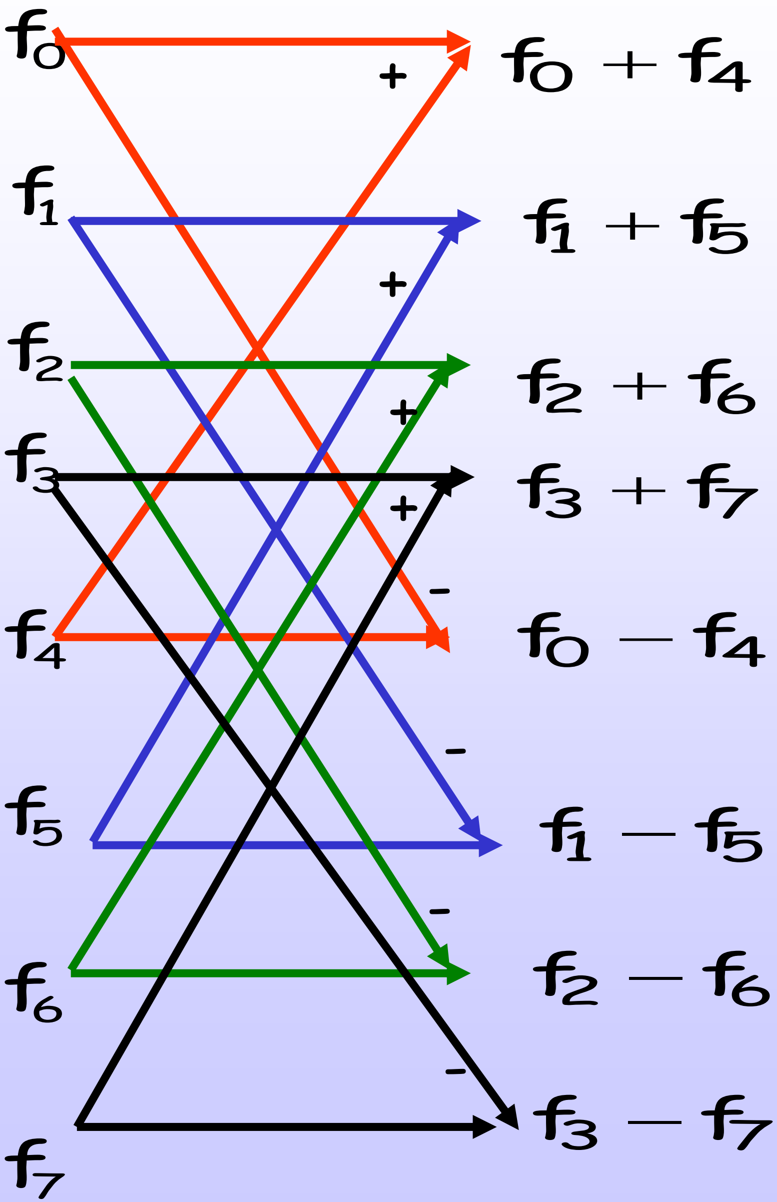
anziché eseguire N^2 operazioni ne bastano solo $O(N \log(N))$

In generale,
dato un vettore di lunghezza N
l'idea di base dell'algoritmo **FFT –radix2** è quella di **ricondurre il calcolo della DFT di lunghezza N** al **calcolo di N/2 DFT di lunghezza 2**

Come sono ottenute queste DFT di lunghezza 2 ?

Per N=8

Passo 1:



(f_0, f_4)
(f_1, f_5)
(f_2, f_6)
(f_3, f_7)

→ DFT di lunghezza 2

Come fare per individuare al primo passo le coppie

$(f_0, f_4), (f_1, f_5), (f_2, f_6), (f_3, f_7)$

?

Consideriamo la rappresentazione binaria dell'indice delle componenti di f:

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

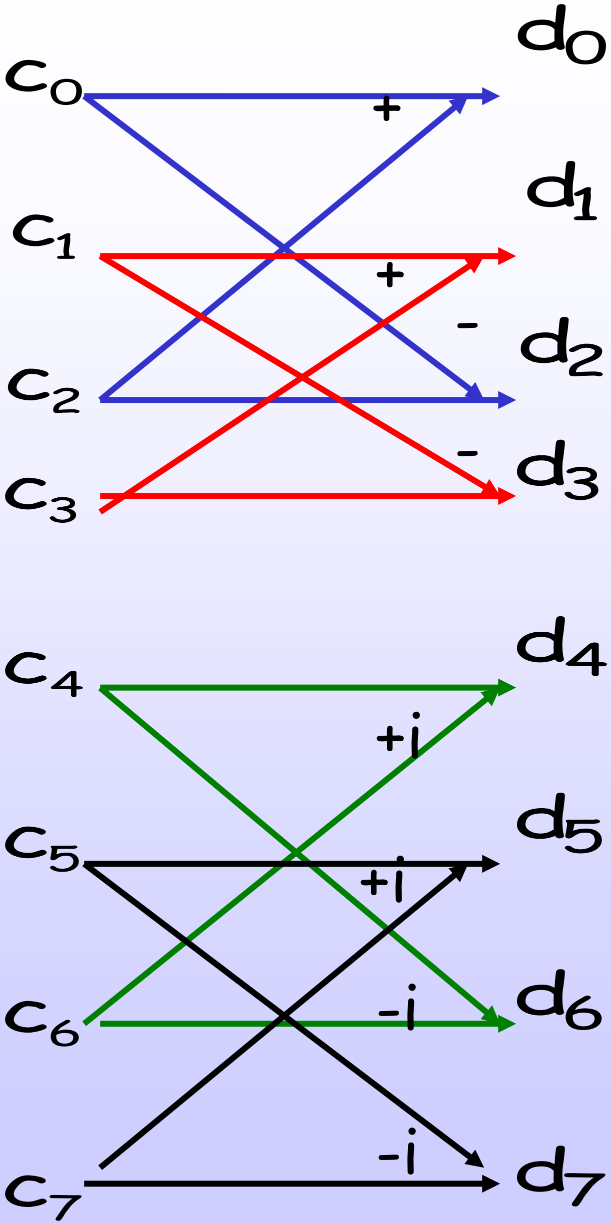
Differiscono nel primo bit

Differiscono nel primo bit

Differiscono nel primo bit

Differiscono nel primo bit

Analogamente, al II passo:



Passo 2:

$(c_0 \;, c_2)$

$(c_1 \;, c_3)$

$(c_4 \;, c_6)$

$(c_5 \;, c_7)$

$\Rightarrow$ DFT di lunghezza 2

Se guardiamo la rappresentazione binaria dell'indice

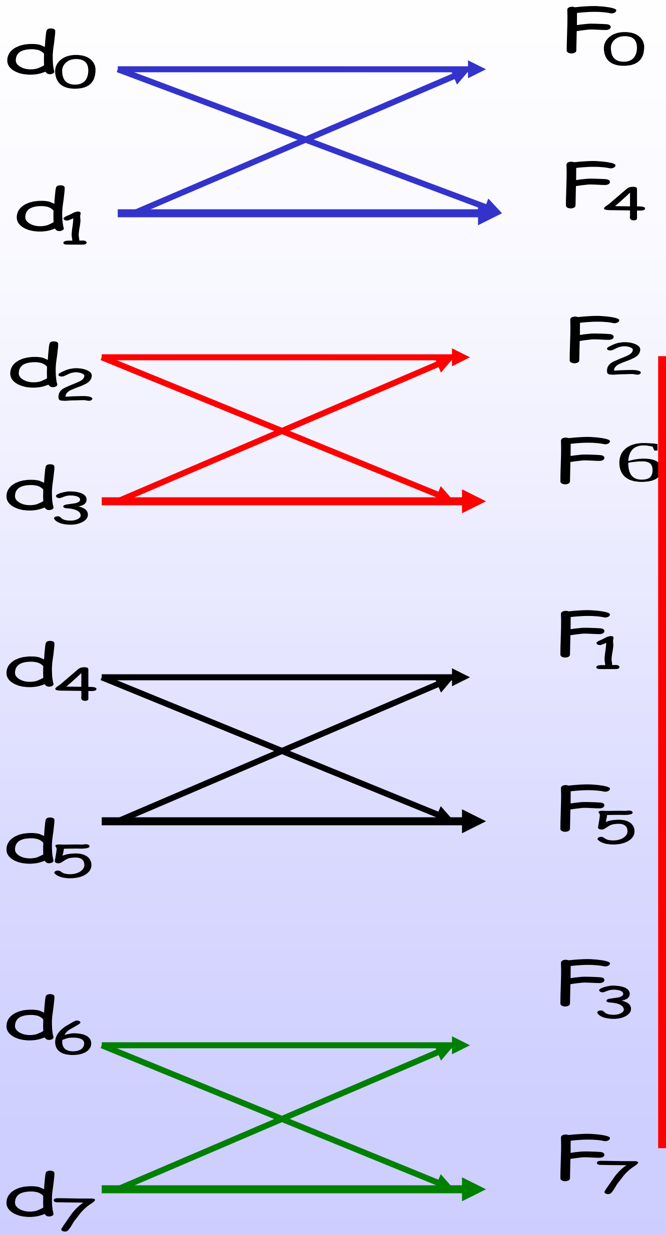
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Differiscono nel secondo bit

Differiscono nel secondo bit

Differiscono nel secondo bit

Differiscono nel secondo bit



Passo 3:

$(d_0\ ,d_1)$

$(d_2\ ,d_3)$

$(d_4\ ,d_5)$

$(d_6\ ,c_7)$

DFT di lunghezza 2

Se consideriamo la rappresentazione binaria dell'indice

0	000	Differiscono nel terzo bit
1	001	
2	010	Differiscono nel terzo bit
3	011	
4	100	Differiscono nel terzo bit
5	101	
6	110	Differiscono nel terzo bit
7	111	

per **N=8**, le componenti che costituiscono una DFT di lunghezza 2 hanno indici tali da differire nella loro rappresentazione binaria

- al I passo nel primo bit (da sinistra)
- al II passo nel secondo bit
- al III passo nel terzo bit