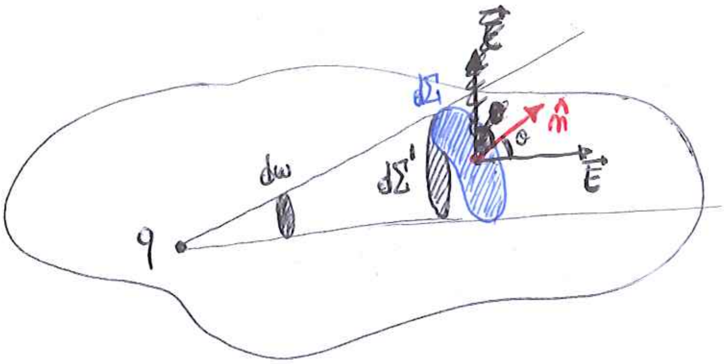
3. Flusso del Campo Elettrico, Legge di Gauss

a) CASO 1: carica q interna alla superficie $d\Sigma$

Consideriamo un elementino di superficie $d\Sigma$ ed indichiamo con $d\omega$ l'ANGOLO SOLIDO sotto cui tale superficie $d\Sigma$ è vista dalla carica q.

Per definizione, l'angolo solido $d\omega$ è: $d\omega = \dfrac{d\Sigma'}{r^2}$, dove r è la distanza da q alla superficie $d\Sigma$



Il flusso del vettore $\vec{E}$ attraverso l'elemento di superficie $d\Sigma$ è, per definizione:

$$d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = E\cos\theta\,d\Sigma = E\,d\Sigma'$$

poiché $\cos\theta\,d\Sigma = d\Sigma'$ poiché $\vec{E}$ è ortogonale a $d\Sigma'$ ed $\hat{n}$ a $d\Sigma$ e θ è compreso tra $\vec{E}$ ed $\hat{n}$.

Esprimiamo ora $\vec{E}$ con la Legge di Coulomb e $d\Sigma'$ con l'ANGOLO SOLIDO:

$$\boxed{d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = E\,d\Sigma' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\cancel{r^2}}\cdot\cancel{r^2}\,d\omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\omega}$$

Questa espressione NON DIPENDE da r (distanza della carica) e NON DIPENDE dall'elemento di superficie $d\Sigma$, MA SOLO DALL'ANGOLO SOLIDO ω.

Quindi:

Qualunque sia la forma della superficie considerata e la distanza della carica interna dalla superficie, il FLUSSO del CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ attraverso la superficie $d\Sigma$ ha SEMPRE LO STESSO VALORE.

Calcoliamo il flusso totale integrando sull'angolo solido:

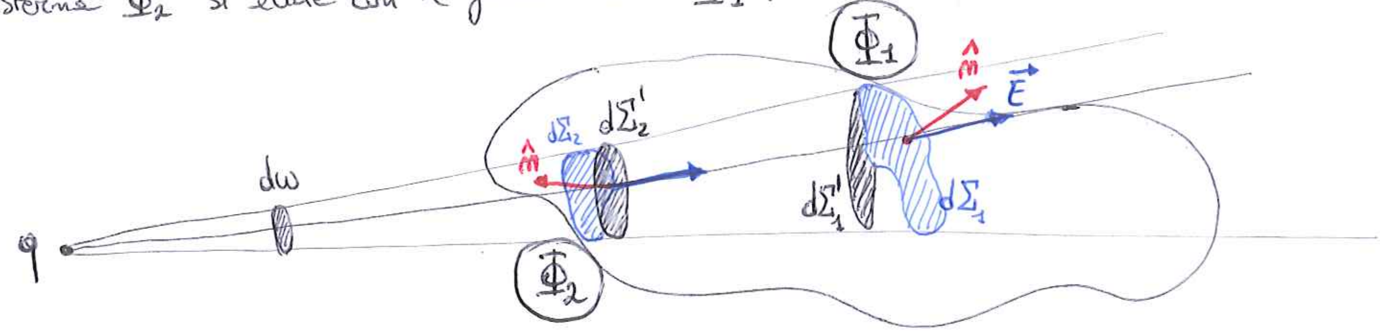
$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_\Sigma d\omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi = \boxed{\frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$\oint_\Sigma d\omega = 4\pi$, poiché l'ANGOLO SOLIDO TOTALE sotto cui è vista una superficie chiusa qualunque da un punto all'interno è 4π.

In conclusione: il FLUSSO uscente da una superficie chiusa con una carica interna q, dipende solo dalla carica stessa, ma non dalla forma della superficie $\longrightarrow$ $\boxed{\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}}$

b) CASO 2: Carica q ESTERNA alla superficie chiusa

Se la CARICA è ESTERNA alla superficie, il FLUSSO TOTALE è ZERO, poiché il flusso infinitesimale dipende solo dall'angolo solido e non dalla distanza dalla carica (e dalla forma della superficie infinitesimale), pertanto il FLUSSO che entra nella superficie esterna Φ_2 si elide con il flusso uscente Φ_1:



Pertanto, si ha: $\boxed{d\Phi_1(\vec{E}) + d\Phi_2(\vec{E}) = 0}$

poiché: $d\Phi_1(\vec{E}) = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}\, d\Sigma_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\omega$

$$d\Phi_2(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\omega = -d\Phi_1(\vec{E})$$

In conclusione, il flusso totale uscente da una superficie chiusa del campo elettrico generato da una CARICA PUNTIFORME ESTERNA alla superficie è sempre nullo.

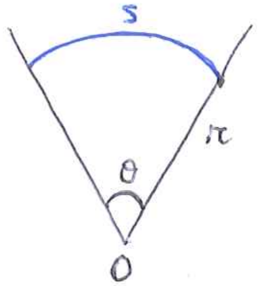
In generale, se ho un sistema discreto di n cariche DENTRO una superficie chiusa, il flusso totale è dato dalla somma dei flussi $\frac{q_i}{\varepsilon_0}$ generati da ogni carica:

TEOREMA DI GAUSS $\longrightarrow$ $\boxed{\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}}$

$\Rightarrow$ Il FLUSSO TOTALE è dato dalla SOMMA DI TUTTE LE CARICHE, divise per ε_0.

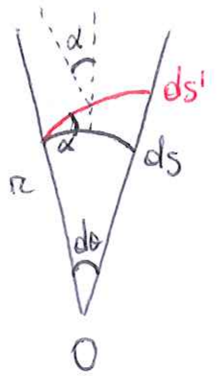
• L'ANGOLO SOLIDO Ω:

Partiamo dall'angolo piano: rapporto tra arco di circonferenza s e raggio r.



$$\boxed{\theta = \frac{s}{r}}$$; Vale anche a LIVELLO INFINITESIMO : $d\theta = \dfrac{ds}{dr}$

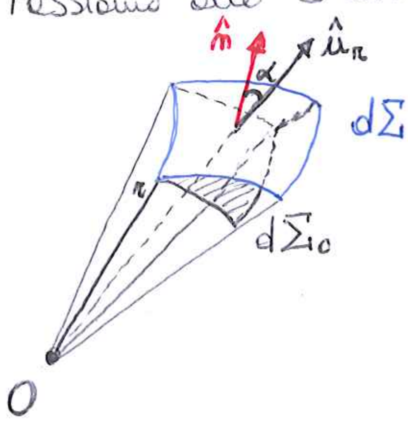
Si può estendere ad un tratto ds' formante l'angolo α con ds:

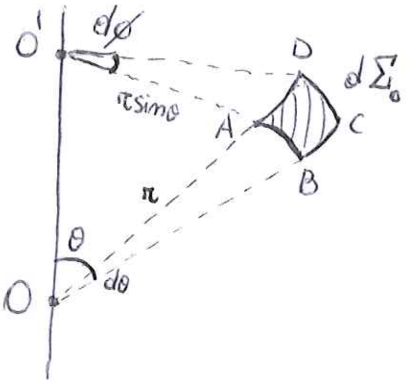


$$\boxed{d\theta = \frac{ds}{r} = \frac{ds'\cos\alpha}{r}}$$

α è anche l'angolo formato tra la normale a ds e la normale a ds'.

Passiamo alle 3 dimensioni:





con $\phi \in [0, 2\pi]$
$\theta \in [0, \pi]$
In Coordinate Polari Sferiche

L'ANGOLO SOLIDO INFINITESIMO $d\Omega$ è definito come segue: data una superficie $d\Sigma$ e la sua proiezione $d\Sigma_0$ ortogonale al raggio uscente da un punto O e passante per $d\Sigma$, si chiama ANGOLO SOLIDO la quantità:

$$\boxed{d\Omega = \frac{d\Sigma\cos\alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma_0}{r^2}}$$

La superficie di $d\Sigma_0$ è un elemento di calotta sferica e la sua area vale, nel sistema di coordinate polari:

$$(AB)\cdot(AD) = (r\,d\theta)(r\sin\theta\,d\phi) = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi \quad ,$$

poiché, per la definizione di angolo piano: $d\theta = \dfrac{AB}{r}$ e $d\phi = \dfrac{AD}{O'A} = \dfrac{AD}{r\sin\theta}$

Dunque, L'ANGOLO SOLIDO è:

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_{i0}}{r^2} = \frac{\cancel{r^2}\sin\theta \, d\theta \, d\phi}{\cancel{r^2}} = \boxed{\sin\theta \, d\theta \, d\phi}$$

* $d\Omega$ NON DIPENDE dal raggio r.

Geometricamente, così come l'angolo piano dà una misura della parte di piano compresa tra 2 semirette uscenti da O,

L'ANGOLO SOLIDO dà una misura della PARTE DI SPAZIO compresa entro un fascio di semirette uscenti da O.

Per una superficie finita:

$$\boxed{\Omega = \iint \sin\theta \, d\theta \, d\phi}$$

Se, con θ costante, si fa variare ϕ da 0 a 2π:

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \cdot 2\pi$$

Se si fa variare θ da 0 a π (coordinate sferiche):

$$\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 2\pi \left[\cos(0) - \cos(\pi) \right] = 4\pi$$

- $\boxed{\Omega = 4\pi}$ è valido per OGNI SUPERFICIE CHIUSA CHE RACCHIUDA O.

  Cioè: l'angolo solido sotto cui un punto interno a una superficie chiusa vede la superficie è sempre 4π, che è il valore massimo di Ω.

• Teorema di Gauss in un Sistema di Cariche:

Consideriamo un sistema discreto di cariche puntiformi. Sfruttando il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE e la proprietà additive degli integrali, il FLUSSO di $\vec{E}$ generato da un sistema discreto di cariche è dato da:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \oint \left(\sum_i \vec{E}_i\right) \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot \hat{n}\, d\Sigma$$

I singoli integrali $\oint \vec{E}_i \cdot \hat{n}\, d\Sigma$ hanno 2 possibilità: $\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \begin{cases} \frac{q_i}{\varepsilon_0} & \text{se } q_i \in \Sigma \\ 0 & \text{se } q_i \notin \Sigma \end{cases}$

$\Rightarrow$ Influiscono al flusso $\Phi(\vec{E})$ solo le cariche interne alla superficie Σ, quindi:

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \sum_i \frac{(q_i)_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Se invece consideriamo una DISTRIBUZIONE CONTINUA di cariche, con densità spaziale $\rho(x,y,z)$, si ha:

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_\Sigma \rho(x,y,z)\, d\tau}$$

poiché la densità spaziale è definita come $\rho(x,y,z) = \frac{dq}{d\tau}$, dove $d\tau$ è il volume infinitesimo racchiuso da $d\Sigma$.

$\Rightarrow \int_\Sigma \rho(x,y,z)\, d\tau$ = Carica Totale contenuta in Σ

- Il CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ è generato da tutte le cariche (sia interne che esterne); Il FLUSSO di $\vec{E}$, $\Phi(\vec{E})$ è dipendente SOLO dalle CARICHE INTERNE!

APPLICAZIONI DI GAUSS CON SIMMETRIE

Diventa utile per DETERMINARE il CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ se la distribuzione di carica che genera il campo ha una certa simmetria (sferica, cilindrica, piana).
Si può individuare facilmente la direzione delle linee di forza e quindi trovare delle SUPERFICI CHIUSE nei cui punti il campo è parallelo oppure ortogonale alla superficie stessa, per cui i contributi:

$$\vec{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \begin{cases} E\, d\Sigma & \text{se } \vec{E} \parallel \hat{n} \ (\vec{E} \perp \Sigma) \\ 0 & \text{se } \vec{E} \parallel d\Sigma \end{cases}$$

Se, inoltre, il campo elettrico E è costante in modulo nelle zone in cui $\vec{E} \parallel \hat{n}$:

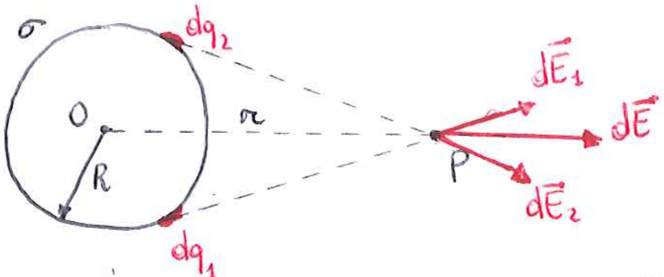
$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = E\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Da cui si ricava il modulo del campo: $\boxed{E = \dfrac{q}{\varepsilon_0 \Sigma}}$

dove q è la carica posta ALL'INTERNO della SUPERFICIE CHIUSA Σ.

• **ESEMPIO 3.1** (Superficie Sferica):

Una carica q è distribuita con densità superficiale costante σ su una superficie sferica di raggio R. Calcolare $\vec{E}$ all'interno e all'esterno della superficie.



Calcoliamo prima il campo all'esterno ($r > R$). Poiché σ è uniforme e per il principio di sovrapposizione, il campo $\vec{E}$ nel punto P è RADIALE.
In qualsiasi altro punto alla stessa distanza di P (cioè r), la situazione è la stessa.

$\Rightarrow$ Il MODULO E è costante su una superficie sferica di raggio r, è ortogonale alla superficie ed il verso dipende dal segno della carica:

$$\boxed{\vec{E} = E(r)\, \hat{n}}$$

Il modulo può dipendere solo da r!

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \Rightarrow \boxed{q = 4\pi R^2 \sigma}$$

Consideriamo come Σ la superficie sferica passante per il punto P, quindi di raggio $r > R$; abbiamo:

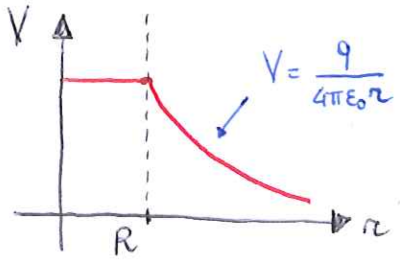
$$\Phi(\vec{E}) = \oint E(r)\hat{n}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = E(r)\oint d\Sigma = E(r)\Sigma = E(r) \cdot 4\pi r^2 \overset{\text{Thm. di Gauss}}{=} \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$ Troviamo $E(r)$:
$$E(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\cancel{4\pi} R^2 \sigma}{\cancel{4\pi} r^2 \varepsilon_0} = \boxed{\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}}$$

Dunque, per $(r > R)$: $\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{n}}$

- Il campo all'esterno è come se tutta la carica fosse concentrata nel centro O! Quindi non dipende dal raggio della distribuzione (R).

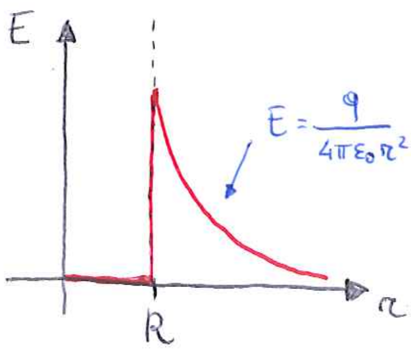
Per $(r < R)$, quindi all'INTERNO della superficie sferica, il campo $\vec{E}$ è sempre radiale ed ortogonale ad Σ, MA (dovrebbe valere $E\Sigma'$ il flusso) ALL'INTERNO NON CI SONO CARICHE $\xRightarrow{\text{Thm. Gauss}}$ $\Phi_{\Sigma'}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \boxed{E = 0}$



- Per $r \to R^-$, $E = 0$.
- Per $r \to R^+$, $E = \lim_{r \to R^+} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Il POTENZIALE, si calcola a partire da $\vec{E}$:

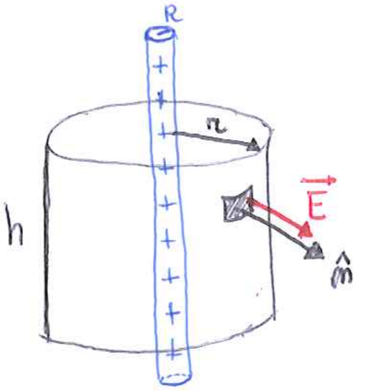
$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow V = -\int E\, dr$$



- (Per $r > R$): $V = -\int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$
- (Per $r = R$): $V = V_0 = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$
- (Per $r < R$): il Potenziale è COSTANTE e pari a $\boxed{V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

• Esempio 3.3 (cilindro):

Una distribuzione spaziale di carica continua ed uniforme ha forma cilindrica di raggio R. Calcolare il campo $\vec{E}$ che produce.



La simmetria della figura, ci dice che il campo $\vec{E}$ è diretto ortogonalmente all'asse del cilindro carico.

Inoltre è COSTANTE su ogni superficie cilindrica coassiale di raggio r.

Consideriamo una scatola cilindrica Σ di raggio $\underline{r > R}$ e altezza h.

$\Phi(\vec{E})$ lungo le basi di Σ è NULLO, in quanto $\vec{E} \perp \hat{n}$. Invece, lungo la superficie laterale $d\Phi(\vec{E}) = E\,d\Sigma$ in ogni punto, poiché $\vec{E} \parallel \hat{n}$.

$$\Rightarrow \quad \Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = \oint E\,d\Sigma = E\Sigma = E\cdot 2\pi r h \underset{\text{Gauss}}{=} \frac{q}{\varepsilon_0}$$

La carica q contenuta dentro Σ è:

$$q = \int_V \rho(x,y,z)\,d\tau = \rho\pi R^2 h = \lambda h$$

definendo la densità di carica λ come: $\boxed{\lambda = \rho\pi R^2}$ → Carica contenuta in un cilindro di raggio R e altezza $h = 1$.

Quindi: $\Phi(\vec{E}) = 2\pi r h E = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}}$

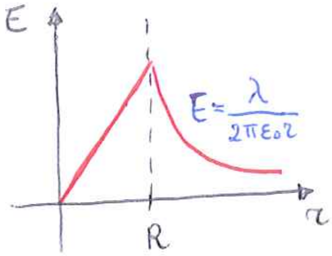
• Un cilindro uniformemente carico genera all'esterno un campo uguale a quello che genererebbe la stessa carica distribuita LINEARMENTE sull'asse del cilindro (UN FILO).

Per $\underline{r < R}$: $\quad \Phi_\Sigma(\vec{E}) = E\Sigma = 2\pi r h E \underset{\text{Gauss}}{=} \dfrac{q'}{\varepsilon_0}$

dove q' è la carica contenuta in un cilindro di raggio più piccolo del cilindro carico di raggio R:

$$q' = \int \rho\,dV = \rho\pi h r^2 = \rho\pi h R^2 \frac{r^2}{R^2} = \boxed{\lambda h \frac{r^2}{R^2}}$$

Per cui: $\quad E = \dfrac{q'}{2\pi\varepsilon_0 h r} = \dfrac{\rho\cancel{\pi}\cancel{h}r^{\cancel{2}}}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0\cancel{h}\cancel{r}} = \boxed{\dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}}$



Il campo $\vec{E}$ cresce LINEARMENTE da 0 sull'asse del cilindro fino a $\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$ per $r=R$.

All'ESTERNO decresce come $1/r$; inoltre è continuo per $r=R$.

Per quanto riguarda la DIFFERENZA DI POTENZIALE:

- per $r<R$:

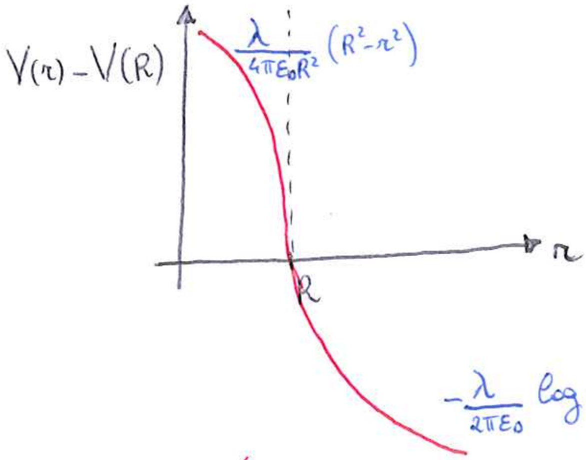
$$V(r)-V(R)=\int_r^R E\,dr=\int_r^R \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\,dr=\underline{\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(R^2-r^2\right)}$$

- per $r>R$:

$$V(r_1)-V(r_2)=\int_{r_1}^{r_2} E\,dr=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr=\underline{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

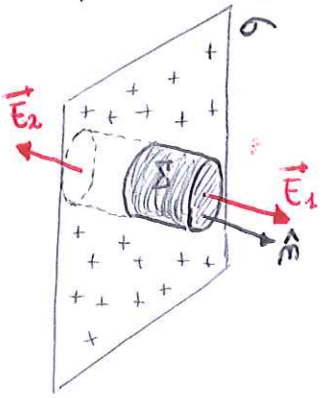
Quindi, riferite al bordo ($r_1=R$):

$$V(R)-V(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{r}{R}\right)\Rightarrow V(r)-V(R)=\underline{-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{r}{R}\right)}$$



- Esempio 3.4 (Piano carico):

Calcolare il campo $\vec{E}$ generato da una carica distribuita con densità superficiale σ su un piano indefinito.



Per simmetria, il campo $\vec{E}$ è ORTOGONALE al PIANO. Consideriamo una scatola cilindrica Σ attraversante il piano.

Il FLUSSO sulle superfici laterali è NULLO, rimane solo quello attraverso le BASI del cilindro, dove $\vec{E}\parallel\hat{n}$:

poiché $\sigma=\frac{q}{\Sigma}$, abbiamo:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E})=2E\Sigma\underset{\text{GAUSS}}{=}\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma\Sigma}{\varepsilon_0}\Rightarrow\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Dunque, sia l'asse x diretto come $\hat{m}$, si ha:

$$\underbrace{\vec{E}(x>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{m} = \vec{E}_1}\quad ; \quad \underbrace{\vec{E}(x<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{m} = \vec{E}_2}$$

Si ha quindi, attraversando la superficie piana, la DISCONTINUITÀ:

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\right]\hat{m} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{m}$$

Calcoliamo la differenza di potenziale:

$$V(x_1) - V(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} E\,dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1)$$

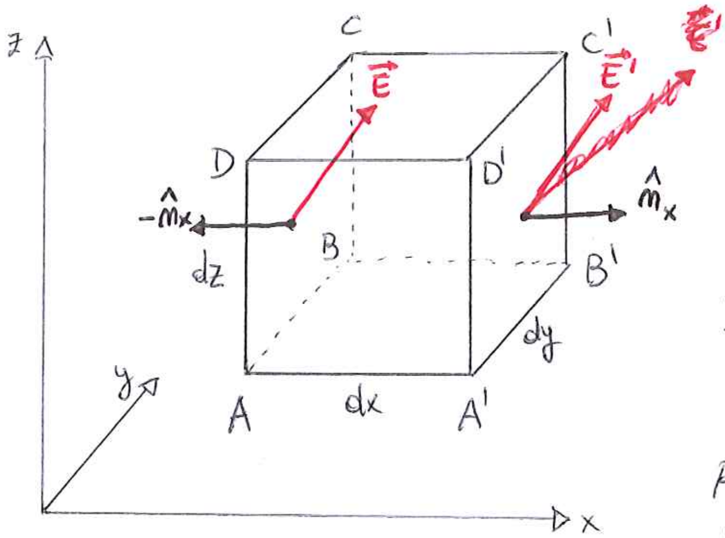
- Il risultato DIPENDE solo da x, ciò vuol dire che le superfici equipotenziali sono PIANI PARALLELI alla piastra carica.

LEGGE DI GAUSS DIFFERENZIALE ($\operatorname{div}\vec{E}$)

Abbiamo introdotto nel seguente modo la LEGGE DI GAUSS: $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}$

oppure come $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Sigma \rho(x,y,z)\,dV$

Consideriamo ora un parallelepipedo infinitesimo di volume $dV = dx\,dy\,dz$ che contiene ALL'INTERNO una carica $dq = \rho(x,y,z)\,dV$.



Il FLUSSO di $\vec{E}'$ attraverso $A'B'C'D'$ è:

$$\vec{E}'\cdot\hat{m}_x\,dy\,dz = E'_x\,dy\,dz$$

dove E'_x è la componente x di $\vec{E}'$.

Il FLUSSO di $\vec{E}$ attraverso ABCD è:

$$\vec{E}\cdot(-\hat{m}_x)\,dy\,dz = -E_x\,dy\,dz,$$

poiché la NORMALE alla superficie verso l'esterno (dq è nel volume) è $-\hat{m}_x$.

$\Rightarrow$ Complessivamente:

$$(E'_x - E_x)\,dy\,dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dx\,dy\,dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dV$$ è il flusso tra le superfici considerate.

Cioè, espresso come sviluppo in serie fino al 1° ordine di E_x.

Facendo ragionamenti analoghi sulle altre coppie di facce, sommando tutti i contributi ottenuti, si ha:

$$d\Phi = \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\vec{E}}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$

Dalla <u>LEGGE DI GAUSS</u>: $d\Phi = \dfrac{dq}{\varepsilon_0} = \dfrac{dV\cdot\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$

Quindi, risolvendo l'equazione, otteniamo la $\boxed{\text{RELAZIONE LOCALE}}$ che cerchiamo:

$$d\Phi = \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{\nabla\cdot\vec{E}}\cancel{dV} = \frac{\cancel{dV}}{\varepsilon_0}\cdot\rho(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \rightarrow$$

Il campo $\vec{E}$ ha DIVERGENZA diversa da zero, solo NEI PUNTI <u>in cui ESISTE UNA DENSITÀ DI CARICA</u>

In sostanza: $\nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{d\Phi}{dV}$ in un punto P dov'è situato un parallelepipedo di volume dV. → <u>RELAZIONE LOCALE</u>

- **DIVERGENZA IN COORDINATE CILINDRICHE:**

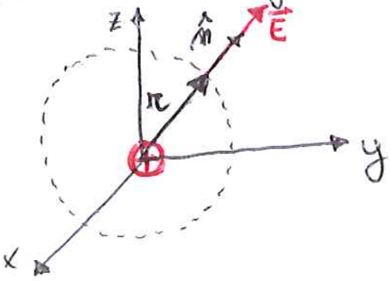
$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

- **DIVERGENZA IN COORDINATE SFERICHE:**

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2E_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\theta\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}}$$

- <u>Esempio 3.5</u>:

Calcolare la DIVERGENZA del campo prodotto da una carica puntiforme q posta nell'origine degli assi.



$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+z^2\right)} = \frac{k}{r^2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(y^2+z^2-2x^2\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(r^2-3x^2\right)$$

Analogamente, $\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(r^2 - \cancel{y}\,3y^2\right)$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(r^2 - 3z^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(3r^2 \underbrace{-3x^2 - 3y^2 - 3z^2}_{-3r^2}\right) = 0$$

Il Calcolo è molto più semplice sfruttando le COORDINATE POLARI SFERICHE:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{m}_r \Rightarrow E_r = \frac{k}{r^2}, \quad E_\theta = 0, \quad E_\phi = 0.$$

Quindi:
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\cdot\frac{k}{\cancel{r^2}}\right) = \boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial k}{\partial r} = 0}$$

→ La DIVERGENZA è nulla ovunque, tranne che per $r = 0$ dove va all'infinito: se la carica q è contenuta in un volume nullo, la densità è infinita.

- Se q fosse distribuita con densità uniforme ρ dentro una piccola sfera, si troverebbe:
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

  Quindi: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\cancel{r^2}} \cdot \frac{\rho \cancel{r^2}}{\varepsilon_0} = \boxed{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$, in accordo con il Teorema visto in precedenza.

Equazioni di Maxwell, Poisson e Laplace

Con gli operatori di ROTORE e DIVERGENZA, si può scrivere in maniera sintetica il fatto che il campo $\vec{E}$ sia CONSERVATIVO e che rispetta la LEGGE DI GAUSS:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0} \longrightarrow \text{Campo conservativo}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \longrightarrow \text{Legge di Gauss}$$

Equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico

Ma, poiché sappiamo che $\vec{E} = -\nabla V$, possiamo sostituire nella Legge di Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Operando in coordinate cartesiane, si ottiene la seguente:

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},} \longrightarrow \text{Equazione di Poisson}$$

Questa EQUAZIONE DIFFERENZIALE che lega il Potenziale alla DENSITÀ di carica.

Se la consideriamo nello SPAZIO VUOTO, diventa:

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0} \longrightarrow \text{Equazione di Laplace}$$

Se applichiamo delle CONDIZIONI AL CONTORNO: il Potenziale all'infinito fa zero così come tutte le sue derivate (quindi anche $\vec{E}_\infty = 0$);

Se $\rho^*(x',y',z')$ è una fissata distribuzione di carica volumetrica in (x',y',z') e se $V(x,y,z)$ è il potenziale in (x,y,z): la SOLUZIONE dell'Eq. di Poisson è:

$$\boxed{V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x',y',z')\,dx'dy'dz'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}}}$$

Il Laplaciano

L'operatore $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, che in coordinate cartesiane è:

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

è chiamato LAPLACIANO. Applicato ad un campo SCALARE, dà luogo ad un'altra grandezza SCALARE.

- IN COORDINATE POLARI:

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}}$$

- IN COORDINATE CILINDRICHE:

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

Si può applicare anche ad un VETTORE $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$; in tal caso:

$$\nabla^2\vec{a} = (\nabla^2 a_x)\hat{i} + (\nabla^2 a_y)\hat{j} + (\nabla^2 a_z)\hat{k}.$$

Il risultato è un VETTORE che ha come componenti i Laplaciani delle componenti.

- Esempio 3.6:

Verificare che il potenziale di una carica puntiforme posta nell'origine soddisfi l'equazione di Laplace.

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \xrightarrow{\text{C. POLARI}} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ ;\ \frac{\partial V}{\partial\theta} = 0\ ;\ \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

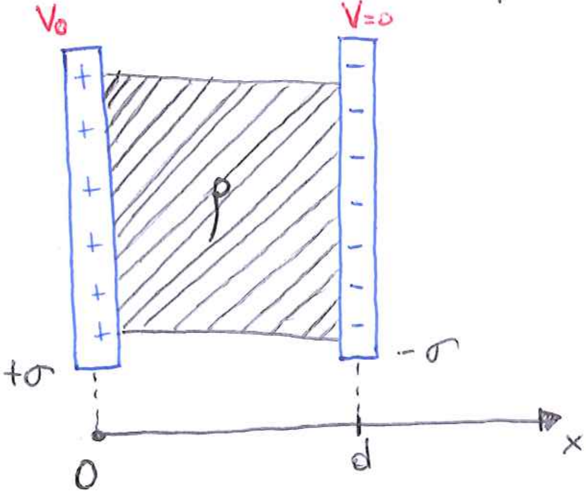
$$\Rightarrow \nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\cdot\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r^2}}\right)\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V(r) = 0 \Rightarrow \text{L'EQUAZIONE DI LAPLACE è verificata!}$$

ok!!!

• Esempio 3.7 (Piani Paralleli):

Tra due piani indefiniti, distanti d e carichi con densità uniforme $+\sigma$ e $-\sigma$, è posta una carica distribuita in tutto lo spazio con densità uniforme ρ.
Determinare, nella regione compresa tra i 2 piani, il campo e il potenziale, assumendo che sia $V=0$ per $x=d$.



L'equazione di Poisson dipende solo da x:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Risolvendo l'equazione differenziale, si ha:

$$V(x) = A + Bx - \frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$$

Abbiamo da sfruttare le seguenti condizioni iniziali: $\begin{cases} V(x=0) = V_0 \\ V(x=d) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow V(0) = A = V_0$$

$$V(d) = A + Bd - \frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow B = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} - \frac{V_0}{d}$$

Quindi: $$\boxed{V(x) = V_0 + \left(\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} - \frac{V_0}{d}\right)x - \frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}}$$

Sfruttando $E = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \Rightarrow E(x) = \frac{V_0}{d} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} + \frac{2\rho x}{2\varepsilon_0} = \underbrace{\frac{V_0}{d} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(2x-d)}$

Sappiamo però che il CAMPO tra due piani carichi è: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{m}_x$; quindi:

$$V_0 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$ → In altre parole, V_0 è la d.d.p. tra i 2 piani

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(2x-d)}$$ → Il campo $\vec{E}$ è dato dalla somma di 2 contributi: E_ρ dalla carica con densità ρ; E_σ dovuto ai piani carichi con densità σ.

$$E(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \quad ; \quad E(d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

Si vede che, il contributo della carica di volume con densità ρ è NEGATIVO per $0 \leq x < d/2$, è NULLO per $x = \frac{d}{2}$ ed è POSITIVO per $\frac{d}{2} < x \leq d$.

ok!!!