

FISICA II

O. INTRODUZIONE

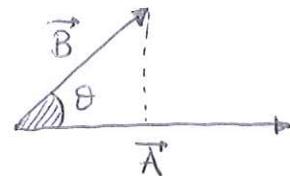
• PRODOTTO SCALARE:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} := |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

, è un valore SCALARE.

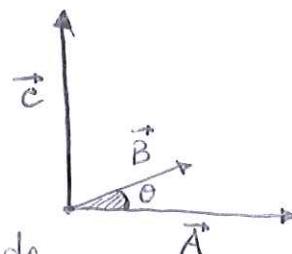
È la proiezione di \vec{B} su \vec{A} , moltiplicata per il modulo di \vec{A} .

Un esempio è il LAVORO: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$



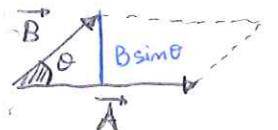
• PRODOTTO VETTORIALE:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} := \vec{C}, \text{ con } |\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$



Il VETTORE \vec{C} è perpendicolare al piano individuato da \vec{A} e \vec{B} ; il verso è dato dalle regole delle mani destre.

Nel modulo di \vec{C} figura $|\vec{B}| \sin \theta$ poiché il modulo, cioè l'intensità, è l'area del parallelogramma:



Area parallelogramma = $A \cdot B \sin \theta$

• PROPRIETÀ:

(1) Non Commutatività: $\vec{A} \wedge \vec{B} \neq \vec{B} \wedge \vec{A}$;

(2) Non Associatività: $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$

(3) Distributività: $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) + (\vec{A} \wedge \vec{C})$

• VERSORI CARTESIANI:

L'asse x ha versore \hat{i} , y ha \hat{j} e z ha \hat{k} .

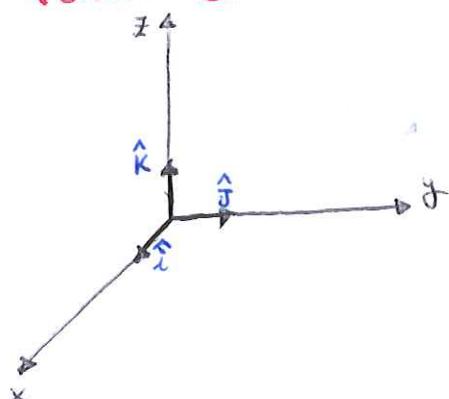
PROPRIETÀ DEI VERSORI:

$$(1) \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$(2) \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$(3) \hat{i} \wedge \hat{i} = \hat{j} \wedge \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{k} = 0$$

$$(4) \hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{i} \wedge \hat{k} = \hat{j} \wedge \hat{k} = 1$$



• IL GRADIENTE:

Sia H una funzione di x, y, z : $H = H(x, y, z)$. Si definisce GRADIENTE di H il VETTORE delle derivate parziali di H :

$$\text{Grad}(H) = \vec{V} := \frac{\partial H}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial H}{\partial z} \hat{k}$$

* ATTENZIONE! Il GRADIENTE esiste solo se il vettore \vec{V} definisce un CAMPO CONSERVATIVO.

Una notazione più comune è:

$$\vec{\nabla} H := \frac{\partial H}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial H}{\partial z} \hat{k}$$

Per esempio, le forze peso: sia $\vec{F} = -m\vec{g}$, si ha che $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, dove U è la funzione Energia Potenziale (mgh).

• LA DIVERGENZA:

Si definisce DIVERGENZA DI UN VETTORE \vec{V} la seguente grandezza SCALARE:

$$\text{div } \vec{V} := \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

È la somma delle derivate delle componenti di \vec{V} (somme algebrica, non vettoriale).

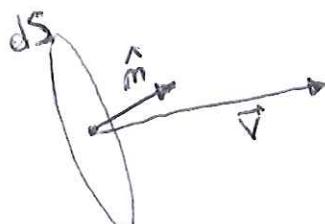
TEOREMA DELLA DIVERGENZA:

Supponiamo di avere un volume V la cui superficie sia S .

Il FLUSSO Φ attraverso la superficie S di \vec{V} coincide con l'integrale delle divergenze di \vec{V} svolto nel volume V .

$$\text{Flusso} = \Phi_S(V) = \int_S \vec{V} \cdot \hat{m} \, dS = \int_V \text{div } \vec{V} \, dV$$

Si passa da un integrale di superficie ad un integrale di volume



Il Flusso INFINITESIMO $d\Phi = \vec{V} \cdot \hat{m} \, dS$, dove \hat{m} è il versore normale alla sezione dS .

• $\operatorname{div} \vec{V} = 0 \iff \vec{V}$ è un CAMPO SOLENOIDALE (escono tutte le linee di forza) (quante ne entrano)

Per esempio, il campo magnetico \vec{B} è solenoidale e $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

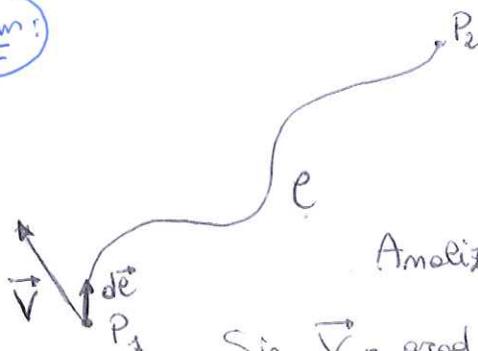
Sie $\vec{V} = \operatorname{grad}(H) = \frac{\partial H}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial H}{\partial z} \hat{k}$;

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} H) = \boxed{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} := \nabla^2 H}, \text{ che infatti è uno} \underline{\text{SEGUARRE}}!$$

• CAMPO CONSERVATIVO:

Dimostriamo che, se \vec{V} è un CAMPO CONSERVATIVO, l'integrale di \vec{V} lungo una qualsiasi curva dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale.

Dimm:



L'integrale che ci interessa è: $\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$

$$\text{Analizziamo } d\vec{r}: d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

$$\text{Sie } \vec{V} = \operatorname{grad}(H(x, y, z)). \quad dH = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right) dz$$

$$\Rightarrow dH = d\vec{r} \cdot \operatorname{grad}(H) = d\vec{r} \cdot \vec{V}. \quad \text{Quindi, l'integrale diventa:}$$

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{V} = \int_{P_1}^{P_2} dH = H(P_2) - H(P_1) \Rightarrow \text{l'integrale dipende solo da } P_1 \text{ e } P_2 \text{ e il campo } \vec{V} \text{ è un CAMPO CONSERVATIVO!}$$

$$• \text{Se } P_1 \equiv P_2 \Rightarrow \int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_C \operatorname{grad} H \cdot d\vec{r} = 0, \text{ se } \vec{V} \text{ è conservativo.}$$

Esempio: Sie $H = \frac{1}{r}$. $\vec{V} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \hat{r}$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{3}{r^{3/2}} + \frac{3}{r^{3/2}} = 0$$

• IL ROTORE:

IL ROTORE DI UN VETTORE $\text{Rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ indica la rotazione:

$$\text{Rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} := \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

È uno PSEUDO-VETTORE poiché dipende dalle coordinate di riferimento degli assi x, y, z .

• OPERATORE NABLA $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

• LAPLACIANO:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

• NOTAZIONI IMPORTANTI:

$$(1) \quad \text{grad}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \vec{u}$$

\downarrow
vettore

$$(2) \quad \text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

\downarrow
scalar

$$(3) \quad \text{Rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

\downarrow
vettore

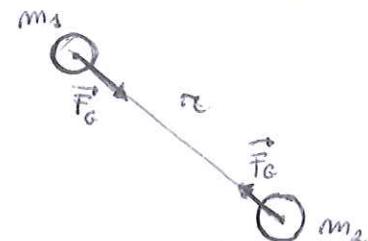
1. FORZA ELETTRICA E CAMPO ELETROSTATICO

• Forze e interazioni:

In natura, sono state classificate 4 tipologie di forze o interazioni: forze gravitazionali, elettromagnetiche, nuclei forti e nuclei deboli.

Introduciamo la **FORZA ELETTRICA**, portando per' delle FORZE GRAVITAZIONALI:

$$F_G = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$



• STRUTTURA ELETTRICA DELLA MATERIA:

Le molecole stabile che ci circondano è formata da 3 costituenti elementari: il PROTONE p , il NEUTRONE n , e l'ELETTRONE e .

• MASSE: $m_p \approx m_n \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, circa 1840 volte minore di m_p o m_n .

• CARICHE:

La carica dell'elettrone è la più piccola osservata sperimentalmente ed è chiamata CARICA ELEMENTARE ($-e$).

$$\begin{cases} e^- = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ p^+ = -e^- = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ n = 0 \text{ C} \end{cases}$$

Tutte le particelle subatomiche osservate hanno una carica che è multiplo di quella dell'elettrone: si dice che LA CARICA È QUANTIZZATA.

Un ATOMO è formato da un NUCLEO carico positivamente formato da protoni e neutroni e da una NUBE ELETTRONICA formata da elettroni.

Il NUMERO ATOMICO $Z = \#$ protoni ed in genere anche uguali al numero di elettroni.

Il NUMERO DI MASSA $A = N + Z$, con $N = \#$ neutroni e $Z = \#$ protoni.

Poiché il numero di protoni p^+ è uguale al numero di elettroni e^- in ogni atomo, la carica elettrica totale è nulla \rightarrow L'ATOMO È NEUTRO.

Il RAGGIO r di un NUCLEO ATOMICO è dato dalla formula:

$$r = A^{1/3} \cdot R_0, \quad \text{con } R_0 = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

• LA FORZA ELETTRICA, LEGGE DI COULOMB :

Due cariche puntiformi q_1 e q_2 , poste a distanze r , interagiscono con una forza \vec{F}_E diretta lungo la loro congiungente e di modulo:

$$F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad k = 8,9875 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

C'è molte somigliante con la legge delle Forze Gravitazionale; in particolare, notiamo che entrambe le forze sono inversamente proporzionali al quadrato delle distanze.

Unità di Misura: $[q] := 1 \text{ C}$, Coulomb → corrisponde alla carica trasportata da una corrente di 1 Ampere in 1 secondo.

È più comodo ridefinire la costante k nel seguente modo:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \text{con } \epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}, \quad \text{detta COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO.}$$

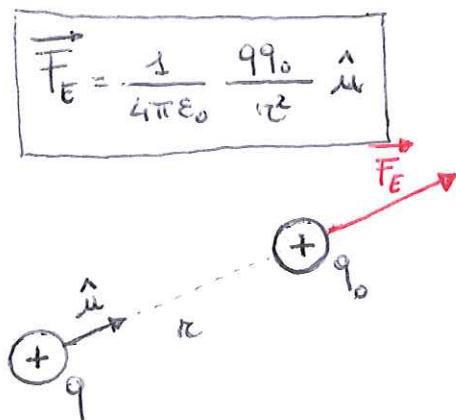
Dunque, la LEGGE DI COULOMB assume la seguente forma:

$$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \rightarrow \text{FORZA ELETTROSTATICA}$$

Ovviamente, essendo una forza, la relazione è VETTORIALE. Sia q la carica q_1 e q_0 la carica q_2 ; indichiamo con \hat{u} il vettore uscente da q che va verso q_0 .

Si ha che, se q e q_0 hanno lo stesso segno ($qq_0 > 0$), allora \vec{F}_E ha lo stesso verso del vettore \hat{u} , poiché q respinge q_0 .

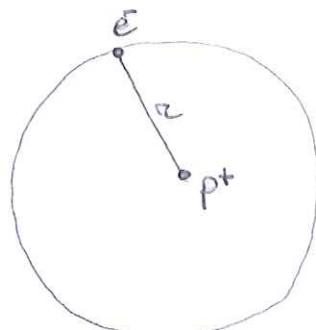
Altrimenti, se q e q_0 hanno segno opposto ($qq_0 < 0$), q attira q_0 ed \vec{F}_E ha verso opposto rispetto ad \hat{u} .



ESEMPIO 3.1: Atomo di Idrogeno:

L'elettrone e il protone in un atomo di idrogeno sono a distanze medie $r = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Calcolare l'intensità delle forze gravitazionale e delle forze elettrica.



$$F_G = G \frac{m_p m_e}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}{(0,53 \cdot 10^{-10})^2} = 3,65 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(0,53 \cdot 10^{-10})^2} = 8,20 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

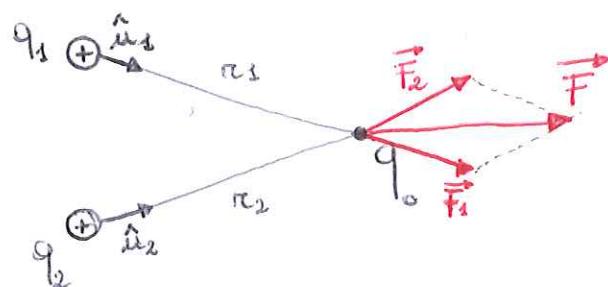
Il rapporto $F_E/F_G \approx 2,3 \cdot 10^{33}$ → A livello atomico, la forza gravitazionale è trascurabile rispetto alla forza elettrica.

Notiamo che la Forza di Coulomb è una FORZA CENTRALE, dipende cioè dalla distanza tra i 2 punti. Dunque, è connessa ad un CAMPO CONSERVATIVO (si conserva l'energia).

Anticipiamo che, una FORZA CENTRALE si può esprimere come GRADIENTE DI UN POTENZIALE.

• IL CAMPO ELETROSTATICO:

Le forze elettriche agenti su una CARICA DI PROVA q_0 (molto piccola) dovute alle cariche circostanti si sommano vettorialmente: vale cioè il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, che vediamo nel caso più semplice.



$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r_1^2} \hat{\mu}_1$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_0}{r_2^2} \hat{\mu}_2$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r_1^2} \hat{\mu}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_0}{r_2^2} \hat{\mu}_2$$

In generale, per un SISTEMA DISCRETO di cariche:

$$\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mu}_i}$$

È interessante notare che la Forza Risultante esercitata sulla carica q_0 è DIRETTAMENTE PROPORZIONALE a q_0 stessa!

Il Campo Elettrostatico è la grandezza vettoriale: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q_0}$, dove \vec{F}_E è la Forza

di Coulomb esercitata sulla carica q_0 .

[Il CAMPO ELETTROSTATICO \vec{E} generato in un punto dello spazio da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrica risultante \vec{F}_E che agisce su una carica di prova q_0 positiva posta in quel punto, divise per la carica q_0 stessa.]

Poiché $\vec{F}_E = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$. Inoltre, se consideriamo il campo elettrico generato da una carica q_1 , si ha: $\boxed{\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{u}_1}$ \Rightarrow IL VERSO dipende solo del segno di q_1 !

- Se $q_1 > 0$, il campo è USCENTE da q_1 ;
- Se $q_1 < 0$, il campo è ENTRANTE in q_1 .

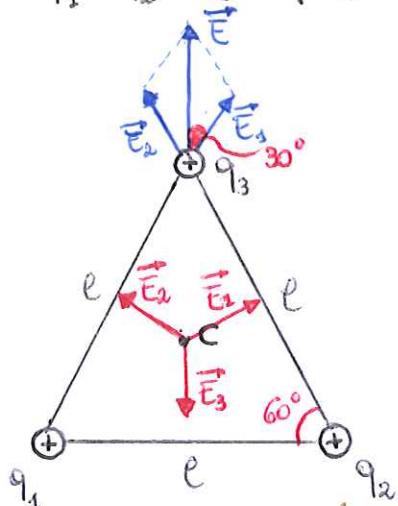
L'unità di misura di \vec{E} è le Newton su Coulomb: $[\vec{E}] := N/C$

Dunque, se si vuole calcolare le forze elettriche in un punto $P = (x, y, z)$ dove è presente una carica q_0 , si ha:

$$\vec{F}_E(x, y, z) = q_0 \vec{E}(x, y, z)$$

ESEMPIO 1.5: Triangolo Equilatero

$q_1 = q_2 = q_3 = q$. Calcolare \vec{F}_E su q_3 ed il campo elettrico al centro del triangolo.



$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{l^2}$$

$\vec{E}_{1,x}$ ad $\vec{E}_{2,x}$ si annullano per il principio di sovrapposizione.

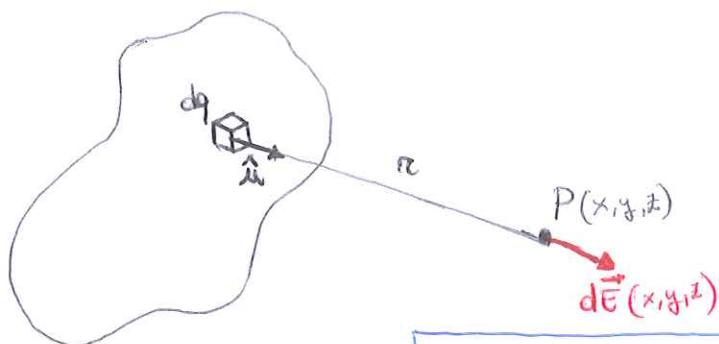
Quindi $\vec{E} = \vec{E}_y$; $\vec{E} = E_{1,y} + E_{2,y} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \cdot \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{F}_E = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{l^2} \hat{u}_y}$

Poiché il centro C è equidistante dai vertici, si ha che:

$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3|$ e i 3 vettori sono disposti come i lati di un triangolo equilatero $\Rightarrow \boxed{\vec{E}_c = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0}$

• CAMPO ELETROSTATICO PRODOTTO DA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA

Com'è ovvio che sia, si pesce delle sommatorie all'integrale:



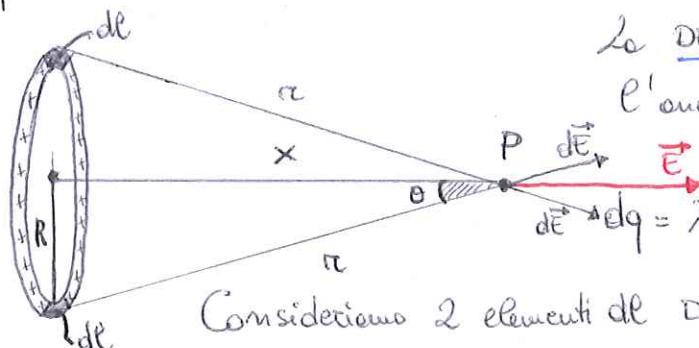
$$d\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \hat{u}$$

Tenendo presente che $dq = \rho dr$, dove ρ è la DENSITÀ SPAZIALE DI CARICA e $dr = dx dy dz$ è il volume infinitesimo,

Quindi, $\vec{E}(x,y,z) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{u}$

Esempio 1.7: Anello Carico

Una carica q è distribuita uniformemente su un anello sottile di raggio R . Calcolare il campo elettrostatico sull'asse dell'anello.



La DENSITÀ DI CARICA LINEARE, costante su tutto

$$\text{l'anello, è } \lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

$$dq = \lambda dl, \text{ con } dl \text{ arco infinitesimo dell'anello.}$$

Consideriamo 2 elementi dl DIAMETRALMENTE OPPosti, ognuno con carica $dq = \lambda dl$. Sia r le distanze tra dl e P .

Per il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, dovuto alle simmetrie esiste, i dE_y si elidono a due e due \Rightarrow Il campo elettrico risultante è parallelo all'asse x .

$$dl = R d\hat{\Phi}, \text{ con } d\hat{\Phi} := \text{ANGOLI SOLIDI}$$

$$\text{Dunque, } d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{u}_x \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl \cos\theta}{r^2} \hat{u}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\hat{\Phi} \cos\theta}{r^2} \hat{u}_x$$

$$\text{Abbiamo che: } r^2 = x^2 + R^2 \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x) = \frac{\lambda R x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} d\hat{\Phi} \hat{u}_x = \frac{\lambda R x}{2\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x = \boxed{\frac{q x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x}$$

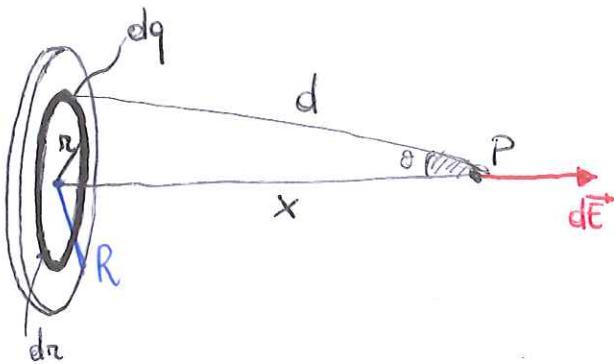
* Per i punti a grande distanza dal centro ($x \gg R$) si ha:

$$\vec{E}(x \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \hat{u}_x \Rightarrow \text{Come se la CARICA fosse CONCENTRATA in un SOLO PUNTO!}$$

Non si distingue più la struttura della distribuzione.

Esempio 1.8: Disco Carico

Un disco sottile di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente sulla sua superficie. Calcolare il campo \vec{E} sull'asse del disco. Estendere il risultato al caso in cui R tende all'infinito (piano uniformemente carico).



- La DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA è $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$

Isoliamo una corona infinitesima compresa tra r ed $r+dr$ → un ANELLO.

La superficie di questo anello è $d\Sigma = 2\pi r dr$ e la carica $dq = \sigma d\Sigma = \sigma 2\pi r dr$.

Il campo prodotto sull'asse da queste corone circolari è:

$$d\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{d^2} \cos\theta \hat{u}_x, \text{ ma } \cos\theta = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow d\vec{E}(x) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{d^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} \hat{u}_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} \hat{u}_x$$

Quindi, integrando per $0 \leq r \leq R$:

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} \cdot \hat{u}_x = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right) \hat{u}_x}$$

Questo è però nel verso positivo, per $x > 0$; più in generale:

$$\vec{E}(x) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+R^2}} \right) \hat{u}_x$$

• Per $R \rightarrow +\infty$:

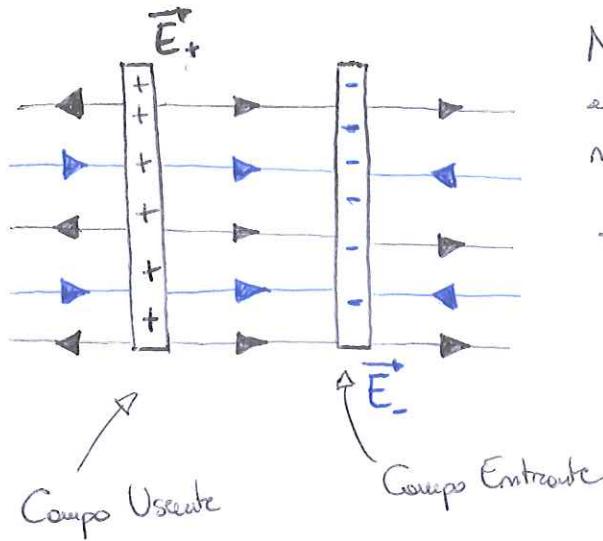
$$\boxed{\vec{E}(x) \rightarrow \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x}$$

ed è ortogonale al piano (non più disco ormai), uscente da esso e costante in ogni punto dello spazio, cioè UNIFORME!

Esso è discontinuo quando lo si attraversa da una parte all'altra del piano con discontinuità $\vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x \right) = \boxed{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_x}$.

Esempio 1.9 : CAMPO ELETROSTATICO DI 2 PIANI PARALLELI

Calcolare il campo eletrostatico prodotto da 2 piani indefiniti paralleli uniformemente carichi con densità superficiale l'uno $+\sigma$ e l'altro $-\sigma$.



Nell'esercizio precedente, abbiamo visto che il campo eletrostatico generato da un piano ha intensità in modulo pari a $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

$$\vec{E}(x) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_x$$

Tuttavia, utilizzando il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE per calcolare il campo risultante $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$, si vede che il campo si annulla all'esterno dei due piani e invece si somma in modo da nelle parti di piano comprese tra i 2 piani carichi (diciamo per $x_1 < x < x_2$)

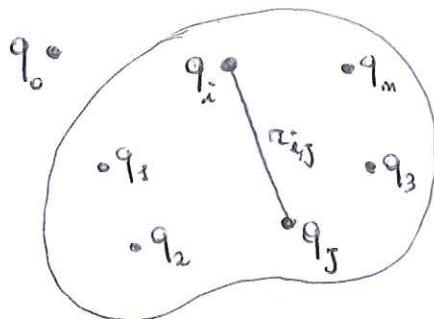
$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq x_1 \text{ o } x \geq x_2 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_x & \text{per } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

2. LAVORO ELETTRICO, POTENZIALE ELETROSTATICO

• ENERGIA POTENZIALE ELETROSTATICA:

Risolviamo il problema del calcolo dell'ENERGIA POTENZIALE di un SISTEMA di cariche fisse:

L'energia potenziale elettrostatica complessiva andrebbe scritta come $U_e = U_e(q_0) + U_e(\text{sistema})$, poiché la carica q_0 è stata considerata separatamente dal sistema di cariche che genera il campo.



Ciascuna carica è nel CAMPO delle altre ed ha una determinata energia potenziale che dipende dalle relative distanze e dai valori delle cariche:

$$\text{in generale } U_e(i,j) = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE è la SOMMA di tutti questi termini:

$$U_e(\text{sistema}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i V_{ji}$$

, dove V_{ji} è il POTENZIALE che la carica q_j genera nel punto in cui si trova la carica q_i .

* C'è $\frac{1}{2}$ davanti alla sommatoria, poiché, essendo $r_{ij} = r_{ji}$ è evidente che ogni contributo compare 2 volte!

• MOTO DI UNA CARICA, CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

Consideriamo una carica q_0 che sia in moto in un campo elettrostatico \vec{E} . Essendo la Forza Elettrica CONSERVATIVA:

quando q_0 , di massa m , pesse da A a B, le sue ENERGIA CINETICA cambia;

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\text{Ma } W = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B) = q_0 V_A - q_0 V_B ;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + q_0 V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q_0 V_B , \text{ da cui si ha che:}$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$E = E_k + U_e = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V$$

Se nella regione in cui avviene il moto il campo \vec{E} è UNIFORME (cioè costante in direzione, verso e modulo), abbiamo che:

$$V_A - V_B = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = \vec{E} \cdot \vec{s}_{AB} = E(z_B - z_A)$$

da cui si ha:

$$V_A = -EZ_A + \text{costante} \quad e \quad V_B = -EZ_B + \text{costante}$$

Quindi: $V(z) = -EZ + \text{costante}$.

Cioè che in un campo uniforme, parallelo e concorde all'asse z :

$$\boxed{V(z) = -EZ + \text{costante}}$$

La conservazione dell'energia diventa:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = q_0 q_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) q_0 E (z_B - z_A)$$

che, nel caso di una carica puntiforme è:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Esempio 2.5: MODELLO DI BOHR - CLASSICO:

Nel modello di Bohr, nell'atomo di idrogeno l'elettrone compie un'orbita circolare di raggio $r = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ attorno al protone. Calcolare l'energia di legame dell'atomo di idrogeno H.

Il potenziale del protone alla distanza r è:

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27,2 \text{ V}$$

Quindi, l'energia potenziale dell'elettrone nel campo del protone è:

$$U_e = -eV = -27,2 \cdot e \text{ V} = -4,35 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Sull'elettrone agisce la forza di Coulomb e, per la legge di Newton:

$$F = ma = m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{Forza di Coulomb} \equiv \text{Forza centripeta})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{m 4\pi\epsilon_0 r}} = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$E_{\text{TOT}} = E_k + U_e = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -13,6 \text{ eV} = -21,8 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Energia di Interazione

$$\boxed{E_{\text{TOT}} < 0}$$

\Rightarrow IL SISTEMA È LEGATO con energie di legame $-13,6 \text{ eV}$.

• IL MODELLO ATOMICO DI BOHR - SOMMERSFELD:

Bohr suppose che l'elettrone potesse descrivere orbite circolari intorno al nucleo, ubbidendo alla QUANTIZZAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE: il momento angolare L dell'elettrone rispetto al nucleo deve essere multiplo intero della quantità $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, dove h è la COSTANTE DI PLANCK:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \Rightarrow \hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Quindi, per un'orbita circolare di raggio r_m :

$$L = mVr_m = m\hbar, \text{ con } m = 1, 2, 3, \dots$$

La condizione classica di equilibrio è:

$$m\frac{V^2}{r_m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_m^2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 m r_m}} \Rightarrow \boxed{r_m = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 m^2}{me^2}}$$

$$= m^2 \cdot 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Quindi: $r_1 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 $r_2 = 2,116 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
 $r_3 = 4,761 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

In ciascuno di questi stati, chiamati STATI QUANTICI, l'energia totale dell'elettrone è data da:

$$U_m = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_m} = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 m^2} = \boxed{-\frac{13,6}{m^2} \text{ eV}} = U_m$$

⇒ Anche l'ENERGIA è QUANTIZZATA!

• IL CAMPO COME GRADIENTE DEL POTENZIALE:

Il POTENZIALE è una funzione scalare continua e derivabile. Per uno spostamento infinitesimo $d\vec{r} = dx \hat{i}_x + dy \hat{i}_y + dz \hat{i}_z = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$ che unisce due punti A(x, y, z) e B($x+dx, y+dy, z+dz$) la variazione di potenziale dV è:

$$dV = V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y, z) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Per il TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE:

$$\rightarrow \text{Perché } V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

Dunque, abbiamo trovato che :

$$\vec{E} = -\text{grad}(V)$$

il campo elettrostatico è uguale al gradiente del potenziale elettrostatico cambiato di segno.

Il gradiente può essere rappresentato tramite l'operatore vettoriale NABLA:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = \text{grad}(V) \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

ESEMPIO 2.6 :

Una carica puntiforme q è posta in un punto (x_0, y_0, z_0) . Calcolare il campo \vec{E} a partire dal potenziale.

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \text{ con } r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

Derivando il potenziale rispetto alle coordinate, si ha:

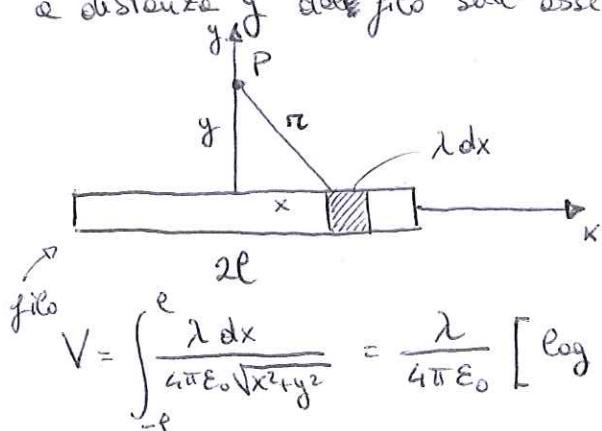
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (x-x_0);$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (y-y_0) \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (z-z_0)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \underbrace{\left[(x-x_0) \hat{i} + (y-y_0) \hat{j} + (z-z_0) \hat{k} \right]}_{r \hat{u}_r} = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r}$$

ESEMPIO 2.7: FILO CARICO

Una carica q è distribuita uniformemente su un filo lungo $2l$. Calcolare \vec{E} a y a distanza y dall'filo sull'asse del filo.



$dq = \lambda dx$; il potenziale dovuto a dq è:

$$dV = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2+y^2}}$$

Integrando su tutto il filo da $-l$ ad l , si ha:

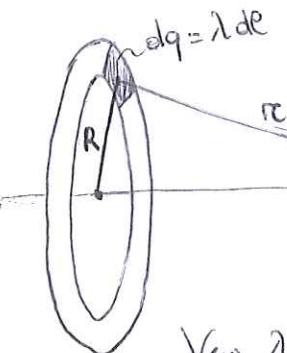
$$V = \int_{-l}^{l} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\log(x + \sqrt{x^2+y^2}) \right]_{-l}^{l} \Rightarrow V(y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left(\frac{l + \sqrt{l^2+y^2}}{-l + \sqrt{l^2+y^2}} \right)$$

Derivando il potenziale $\frac{\partial V}{\partial y}$ si trova il campo elettrico \vec{E} :

$$\vec{E}(y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{l^2+y^2}}$$

Esempio 2.8: ANELLO CARICO

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottili anello di raggio R . Calcolare V ed \vec{E} sull'asse dell'anello a distanza x .



$$\text{La densità di carica } \lambda = \frac{q}{2\pi R} ; \quad dq = \lambda dl$$

Si può scrivere il potenziale V nel seguente modo:

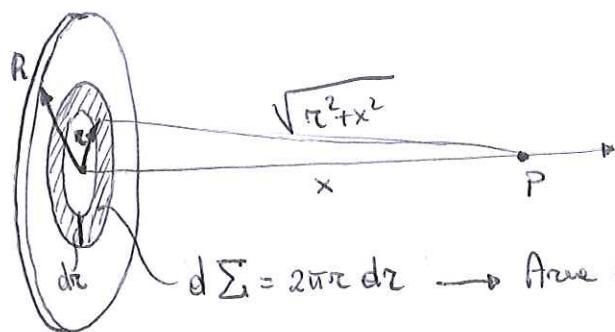
$$V = \int dV(r) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \int dl = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int dl = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r}$$

$$V(x) = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 r} = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}}$$

$$\text{Il campo elettrico è dato da: } \vec{E} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \hat{i} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + R^2)^{-1/2} \hat{i} = \boxed{\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{i}}$$

Esempio 2.9: DISCO CARICO

Un disco di raggio R ha carica q distribuita uniformemente. Calcolare V ed \vec{E} sull'asse del disco a distanza x .



$$\text{La densità di carica è data da } \sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

Consideriamo un anello distante r dal centro e di spessore dr , con area $d\Sigma = 2\pi r dr$.

Ha una carica $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi r dr \sigma$.

$$\text{Il potenziale generato da questo anello è: } dV(r) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma d\Sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}} = \\ = \frac{2\pi r dr \sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}} \Rightarrow V(r) = \int_0^R dV(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x \right)}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x \right)$$

$$\Rightarrow \text{Per } (x \gg R) : \sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} \approx 1 + \frac{R^2}{2x^2} \Rightarrow V(x \gg R) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{2x^2} = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x} = \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

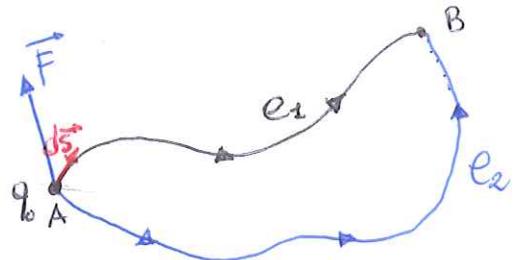
$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \hat{i}$$

LAVORO ELETTRICO:

Abbiamo già visto che se un campo vettoriale \vec{V} è CONSERVATIVO, esiste una funzione scalare $u(x,y,z)$, tale che: $\vec{V} = \text{grad}(u)$.

Dato un campo elettrico \vec{E} , il LAVORO per spostare una carica q_0 da A a B lungo il percorso l_1 è:

$$W(A \rightarrow B) = \int_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{l_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



Se il campo vettoriale (in questo caso il campo elettrico \vec{E}) è CONSERVATIVO, il lavoro è indipendente dal percorso compiuto, cioè:

$$q_0 \int_{l_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{l_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad \text{con } l_1 \neq l_2$$

Se il percorso è chiuso ($A \equiv B$):

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Essendo le Forze di Coulomb una FORZA CENTRALE, si ha che:

$$W = \oint \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = 0$$

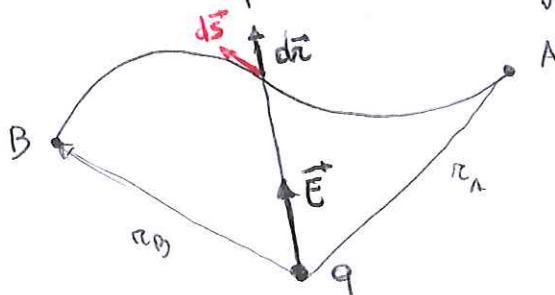
La grandezza seguente è definita come **FORZA ELETTROMOTRICE** relativa ad un percorso chiuso:

$$\text{f.e.m.} := \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}; \quad \text{in un campo elettrostatico: f.e.m.} = 0$$

Supponiamo ora di avere una carica q che esercita un campo elettrico su una carica di prova q_0 , il lavoro per spostare q_0 da A a B è:

$$W(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \boxed{\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)}$$

Come si può vedere, essendo il campo conservativo, il lavoro W non dipende dal percorso, ma solo dai punti iniziale e finale, poiché le forze sono centrali.



Definiamo ora la DIFFERENZA DI POTENZIALE tra A e B;

$$V(A) - V(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

e la VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE:

$$U(A) - U(B) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

• ROTORE DI UN CAMPO VETTORIALE, TEOREMA DI STOKES:

Un CAMPO CONSERVATIVO soddisfa le seguenti relazioni:

$$(1) V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} , \text{ differenze di potenziale tra A e B}$$

$$(2) W_{AB} = q_0 (V_A - V_B) = -q_0 \Delta V , \text{ lavoro delle forze elettriche}$$

$$(3) W = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 ; \text{ f.e.m.} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 , \text{ forza elettromotrice}$$

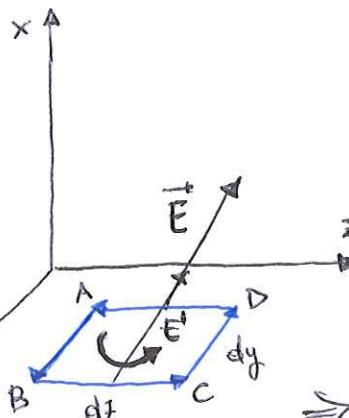
$$(4) \vec{E} = -\text{grad}(V) = -\vec{\nabla}V , \text{ campo elettrico è meno il gradiente del potenziale.}$$

Vale la (3), ma vale anche il viceversa: se la circolazione di un campo è nulla lungo qualsiasi linea chiusa, vale anche il viceversa.

Comunque sia, concentriamoci su $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$.

E' scritto in forma integrale; proviamo ad esprimere in FORMA LOCALE e introduciamo il concetto di ROTORE.

Cominciamo col considerare un percorso rettangolare infinitesimo nel piano (y, z) delimitato con $dR_x = ABCD$, con $AB = dy$ e $BC = dz$



L'area vale $d\sum_x = dy dz$

Calcoliamo l'integrale di linea di \vec{E} lungo questo percorso (prodotto scalare):

$$dR_x = \vec{E}(AB) \cdot \vec{AB} + \vec{E}(BC) \cdot \vec{BC} + \vec{E}(CD) \cdot \vec{CD} + \vec{E}(DA) \cdot \vec{DA}$$

Si osservi che: $\vec{AB} = dy \hat{y} = -\vec{CD}$ e $\vec{BC} = -\vec{DA}$

$$\Rightarrow dR_x = [\vec{E}(AB) - \vec{E}(CD)] dy \hat{y} + [\vec{E}(BC) - \vec{E}(DA)] dz \hat{z}$$

Eseguiamo i prodotti scalari, cioè le proiezioni lungo gli assi $y = z$:

$$dR_x = [E_y(\vec{AB}) - E_y(\vec{CD})] dy + [E_z(\vec{BC}) - E_z(\vec{DA})] dz \Rightarrow \text{essendo } \vec{E}(AB) \cdot dy \hat{y} = E_y(\vec{AB}) dy$$

Essendo $\vec{E}(AB) \cdot dy \hat{u}_y = E_y(z) dy$:

$$dR_x = [E_y(z) - E_y(z+dz)] dy + [E_z(y+dy) - E_z(y)] dz$$

Sviluppando in serie al 1° ordine, si ha: (oppure moltiplica e divide i° membro per dy e dz):

$$E_z(y+dy) - E_z(y) = \frac{\partial E_z}{\partial y} dy$$

$$E_y(z+dz) - E_y(z) = \frac{\partial E_y}{\partial z} dz$$

Dunque:

$$dR_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy dz = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) d\Sigma_x := \text{rot } \vec{E}_x d\Sigma_x$$

Analogamente, per rettangoli infinitesimi sui piani (x,z) e (x,y) , si ha:

$$dR_y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) d\Sigma_y ; \quad dR_z = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) d\Sigma_z$$

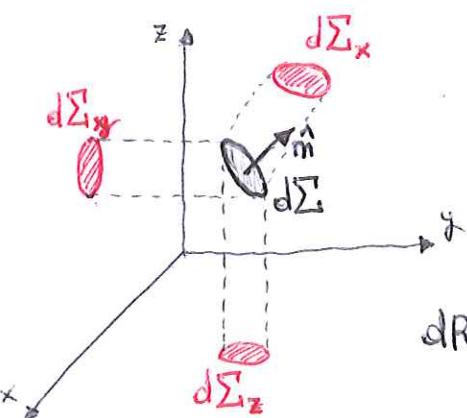
Osserviamo che il risultato è diverso a seconda del piano coordinato scelto, MA NON DIPENDE DALLA FORMA DEL CONTORNO della superficie $d\Sigma_i$, sia esso rettangolare o generico.

Consideriamo ora l'elemento di superficie $d\Sigma_i$, lungo il cui vettore associato $d\hat{\Sigma}$ si vuole calcolare la circuitazione del campo elettrico \vec{E} . \hat{m} è il vettore NORMALE a $d\Sigma$ ed indichiamo le proiezioni di $d\Sigma$ sui piani coordinati nel seguente modo:

$$d\Sigma_x = \cos \hat{m}_x d\Sigma$$

$$d\Sigma_y = \cos \hat{m}_y d\Sigma$$

$$d\Sigma_z = \cos \hat{m}_z d\Sigma$$



Si può dimostrare che la CIRCUITAZIONE di \vec{E} lungo il CONTORNO di $d\Sigma$ è proprio:

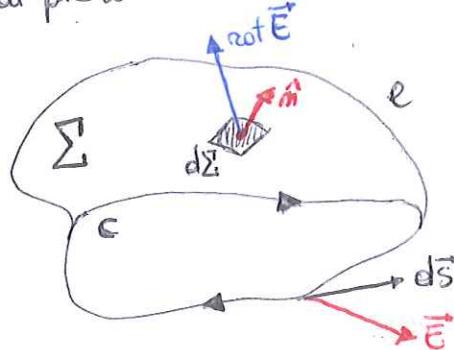
$$dR = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) d\Sigma_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) d\Sigma_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) d\Sigma_z$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \cos \hat{m}_x d\Sigma + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \cos \hat{m}_y d\Sigma + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \cos \hat{m}_z d\Sigma$$

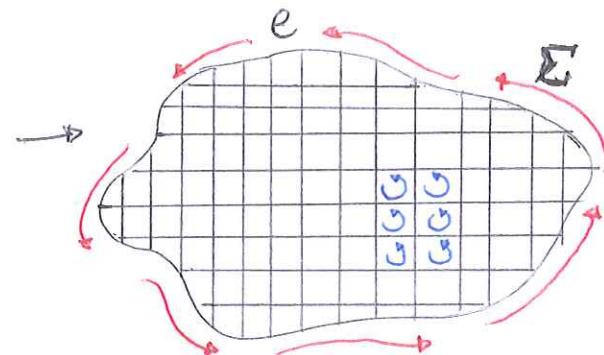
$$= \text{rot } \vec{E} \cdot \hat{m} d\Sigma = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{m} d\Sigma$$

* Questo risultato vale per qualunque superficie $d\Sigma$, purché sia INFINITESIMA ∇

Calcoliamo ora la circuitazione del campo elettrico \vec{E} lungo una LINEA CHIUSA ℓ e finita ℓ . Supponiamo che esse sia su un piano ed indichiamo con Σ la porzione di piano che racchiude.



Dividiamo la superficie in infiniti quadratini



Consideriamo quindi la circuitazione di \vec{E} lungo il CONTORNO DI OGNI QUADRATINO:

- Sommando tra 2 quadratini contigui, il termine corrispondente al lato in comune scomparso, poiché ha verso opposto (guardare verso di percorrenza), \Rightarrow la circuitazione "interne" è NULLA;
- RESTA SOLO IL CONTRIBUTO DEL CONTORNO ℓ di Σ .

TEOREMA DI STOKES :

Abbiamo visto che, per ottenere la CIRCUITAZIONE del CAMPO ELETTRICO \vec{E} lungo le linee chiuse ℓ , basta INTEGRARE LUNGO LA SUPERFICIE Σ :



$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Sigma} \text{rot} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

La circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa ℓ è uguale al FLUSSO del ROTORE del campo stesso attraverso una qualunque superficie Σ avente per contorno ℓ .

Il verso sul versore normale \hat{n} è dato dalla REGOLA DELLA VITE DESTROSA.

$$\text{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} := \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z$$

- Se il campo vettoriale è CONSERVATIVO, la circuitazione è nulla lungo ogni linea chiusa:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Questo è la FORMA LOCALE di:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \text{ già visto prima.}$$

\Rightarrow Un campo conservativo HA ROTORE NULLO \rightarrow È IRROTAZIONALE!

Poiché $\vec{E} = -\text{grad} V = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$, poiché $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V$ sono paralleli.

ESEMPIO 2.11 : SFERA superficie

All'interno di una sfera di raggio R con centro nell'origine (xyz) è definito il potenziale elettrostatico $V = \frac{Ar^2}{2}$ con r distanza dall'origine ed A costante positiva.

Calcolare la rotazione del campo elettrostatico e dimostrare che è irrotazionale.

Se una particella q_0 con massa m è abbondonata con velocità nulla a distanza r_0 dal centro, calcolare il moto delle carica elettrica.

$$\text{Si ha } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \text{il potenziale è } V = \frac{Ar^2}{2} = \frac{A}{2}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2$$

Calcoliamo, scrivendo, le componenti di \vec{E} :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Ax ; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -Ay ; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -Az$$

$\Rightarrow \vec{E} = -A\vec{r} \rightarrow$ è un campo centrale poiché dipende solo dalla distanza \vec{r} e quindi è conservativo $\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$.

Altimenti:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 .$$

\Rightarrow IL CAMPO È IRROTATZIONALE.

Le particelle, lasciate libere con velocità iniziale nulla, viene accelerate lungo una direzione passante per l'origine ed il moto è rettilineo.

Dalle leggi di Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q_0 \vec{E} = -q_0 A \vec{r}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{q_0 A}{m} \vec{r} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\text{MOTORE ARMONICO}}} \text{ con pulsazione } \omega = \sqrt{\frac{q A}{m}}$$

$$\Rightarrow \text{Dalle condizioni iniziali } (r_0, v_0=0) \text{ si ha :} \left\{ \begin{array}{l} r = r_0 \cos(\omega t) \\ v = -\omega r_0 \sin(\omega t) \end{array} \right.$$

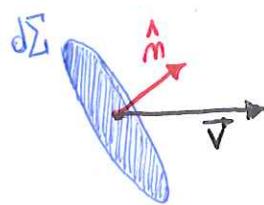
• TEOREMA DELLA DIVERGENZA (richiamo):

Consideriamo un campo vettoriale generico $\vec{V}(x, y, z)$ ed immaginiamo una superficie qualsiasi S contenuta nella regione sotto l'effetto del campo. Prendiamo un elemento infinitesimo di superficie $d\Sigma$ e chiamiamo \hat{m} il versore normale a $d\Sigma$.

Definiamo nel seguente modo il FLUSSO del CAMPO VETTORIALE \vec{V} attraverso la superficie $d\Sigma$:

$$d\Phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \vec{V} \cdot \hat{m} d\Sigma$$

Prodotto scalare di $d\Sigma$ per la componente \vec{V} nella DIREZIONE NORMALE alla superficie.



Per avere il FLUSSO TOTALE, si integra sulla superficie Σ :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \hat{m} d\Sigma$$

Ora definisco le DIVERGENZA DI UN VETTORE \vec{V} :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Somme delle derivate parziali rispetto a (x, y, z) rispettivamente delle componenti V_x, V_y, V_z del vettore $\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$.

Dunque, il TEOREMA DELLA DIVERGENZA afferma che:

[Il FLUSSO $\Phi_{\Sigma}(\vec{V})$ del vettore \vec{V} attraverso una qualsiasi superficie chiusa qualsiasi $d\Sigma$ è uguale all'integrale della $\text{div } \vec{V}$ esteso al VOLUME V racchiuso da ~~dΣ~~ $d\Sigma$:]

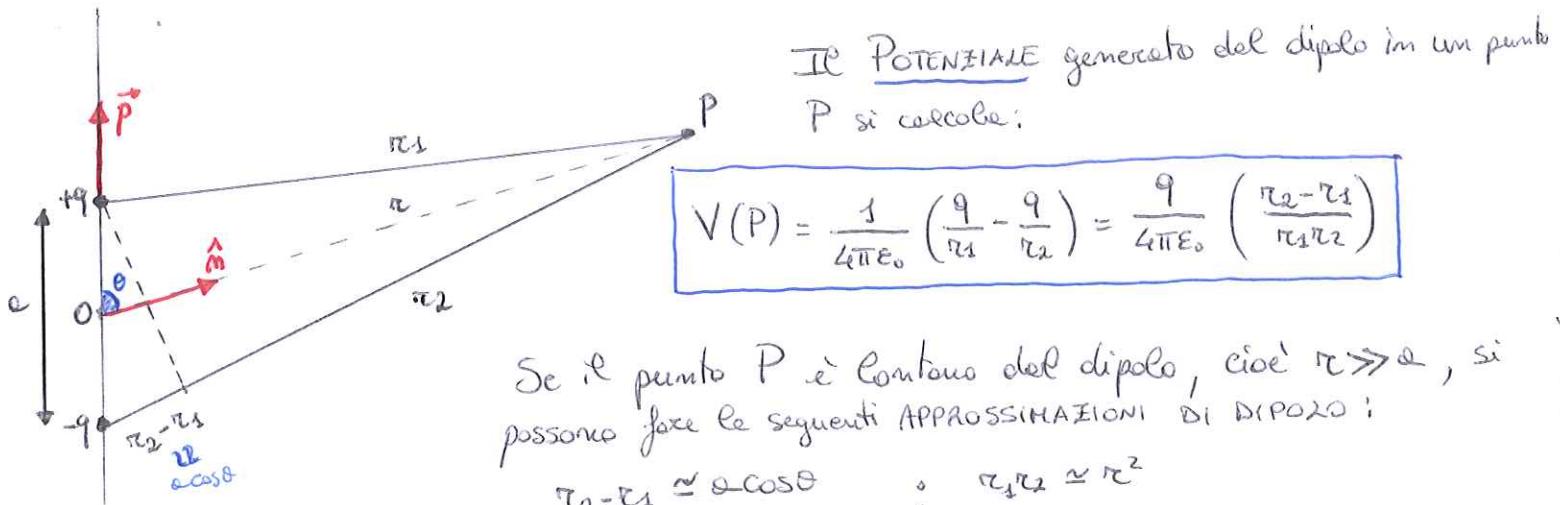
$$\Phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \hat{m} d\Sigma = \int_V \text{div } \vec{V} dV$$

Grazie a questo teorema, si può passare da un integrale di superficie ad uno di volume e viceversa.

IL DIPOLO ELETTRICO

- **DIPOLO ELETTRICO:** un sistema formato da 2 cariche puntiformi con la stessa carica, ma di segno opposto ($+q$ e $-q$), poste a distanza a .

- **MOMENTO DEL DIPOLO:** $\vec{P} = q\vec{\alpha}$, dove $\vec{\alpha}$ è orientato da $-q$ a $+q$.



Se il punto P è lontano dal doppio polo, cioè $r \gg a$, si possono fare le seguenti APPROSSIMAZIONI DI DOPPIO POLO:

$$r_2 - r_1 \approx a \cos \theta \quad ; \quad r_1 r_2 \approx r^2$$

Dunque, il potenziale $V(P)$ si può calcolare nel seguente modo:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) = \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{m}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

dove \hat{m} è il versore nella direzione OP, con O punto medio del doppio polo.

* Il valore del potenziale decresce con il QUADRATO DELLA DISTANZA del doppio polo, non linearmente come nel caso di singola carica puntiforme. Ciò è dovuto al fatto che gli effetti delle 2 cariche opposte si neutralizzano parzialmente.

- **OPERATORE $\vec{\nabla}$ IN COORDINATE SFERICHE:** $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{u}_\phi$

Dunque, il CAMPIONE ELETTRICO è espresso in coordinate polari è:

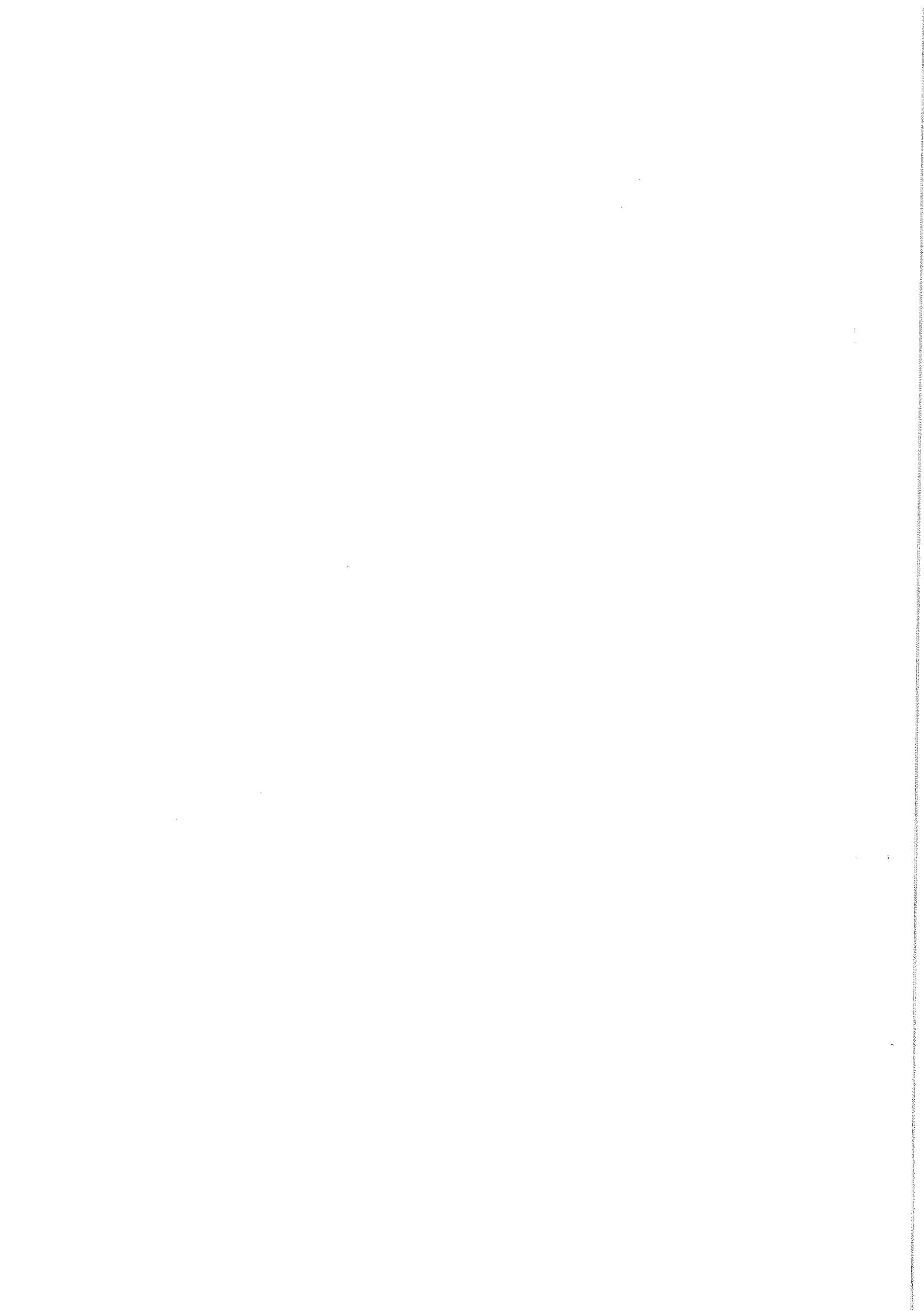
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

- **CAMPIONE ELETTRICO DI UN DOPPIO POLO:** Calcoliamolo usando le coordinate sferiche:

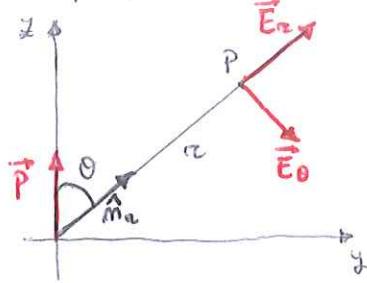
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$



Dunque, il campo elettrico sta nel piano \vec{P} , \hat{m}_r (o lì che sia):



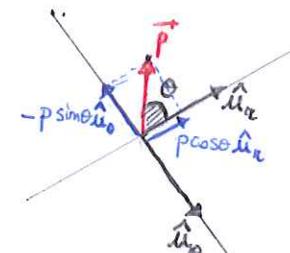
$$\vec{E} = E_r \hat{m}_r + E_0 \hat{m}_0 = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \hat{m}_r + \sin\theta \hat{m}_0)$$

$$\text{e il modulo è: } E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

Si noti che il campo elettrico \vec{E} decresce come R CUBO DELLA DISTANZA, in accordo col fatto che il potenziale $V(r)$ va come $1/r^2$.

• Esprimiamo anche il MOMENTO DI DIPOLO IN COORDINATE POLARI:

$$\vec{P} = p\cos\theta \hat{m}_r - p\sin\theta \hat{m}_0$$



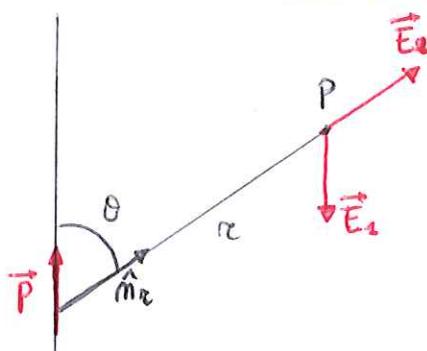
Introduciamolo nelle formule del campo elettrico, sommando e sottraendo $p\cos\theta$ nelle parentesi:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p\cos\theta \hat{m}_r + p\sin\theta \hat{m}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \underbrace{(3p\cos\theta \hat{m}_r - p\cos\theta \hat{m}_r + p\sin\theta \hat{m}_0)}_{-\vec{P}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \underbrace{(3p\cos\theta \hat{m}_r - \vec{P})}_{3(\vec{P} \cdot \hat{m}_r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{P} \cdot \hat{m}_r) \hat{m}_r - \vec{P}]$$

Con queste espressioni, invece che in componenti polari, il campo è espresso come somma di 2 contributi, uno lungo \vec{E}_1 e l'altro lungo ~~la direzione OP~~, detto \vec{E}_2 :

$$\vec{E}_1 = \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} ; \quad \vec{E}_2 = \frac{3(\vec{P} \cdot \hat{m}_r) \hat{m}_r}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



- \vec{E}_1 è ANTIPARALLELO a \vec{P} e variabile solo con la distanza;
- \vec{E}_2 è parallelo ad \hat{m}_r (come la ~~direzione OP~~ direzione momento di dipolo) e quindi dipende anche dall'angolo polare θ tra \vec{P} e \hat{m}_r , oltre che delle distanze r .

L'approssimazione di doppio ($r \gg a$) è molto usata anche a livello atomico. Molto importanti sono i dipoli atomici e molecolari: un atomo sottoposto ad un campo elettrico esterno si DEFORMA e acquista un momento di dipolo (si **POLARIZZA**).

Esistono inoltre le MOLECOLE POLARI che hanno una struttura elettrica assimilebile ad un doppio, anche in ASSENZA DI CAMPI ESTERNI.

Esercizio (esempio 2.12):

Espriremo il Potenziale V e il campo elettrico \vec{E} di dipolo in coordinate cartesiane.

Prendiamo come asse Z l'asse del dipolo (lungo a) con \hat{m}_z concorde a \vec{P} ; gli assi x e y stanno nel piano mediano, ammettiamo che l'origine O coincida col centro del dipolo. Dunque:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$V = \frac{P \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \boxed{\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}}$$

$$\text{Quindi: } E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Componenti}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)$$

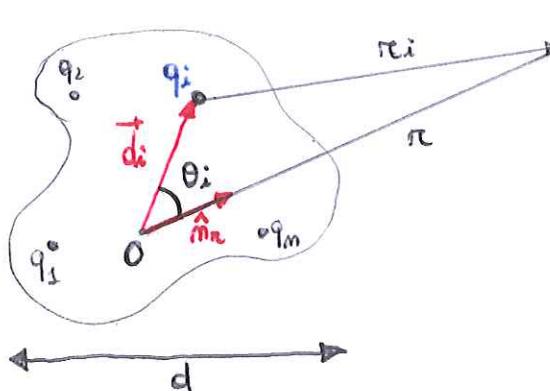
Calcolando il modello:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{9x^2 z^2}{r^{10}} + \frac{9y^2 z^2}{r^{10}} + \frac{9z^4}{r^{10}} - \frac{6z^2}{r^8} + \frac{1}{r^6}} = \\ &= \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{9z^2(x^2 + y^2 + z^2)}{r^{10}} - \frac{6z^2}{r^8} + \frac{1}{r^6}} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{3z^2}{r^2} + \frac{1}{r^6}} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{\frac{3z^2}{r^2} + 1} = \\ &= \boxed{\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{3\cos^2\theta + 1}} \end{aligned}$$

, come trovato in precedenza. In coordinate cartesiane, le proprietà di simmetria sono meno apparenti.

POTENZIALE DI UN SISTEMA DI CARICHE NELL'APPROXIMAZIONE DI DIPOLI

Consideriamo adesso un sistema di più cariche q_i in una regione dello spazio riunita, di dimensione massiva d (per esempio cariche positive e negative contenute in un atomo o una molecola). Detto O un punto interno alla regione, calcoliamo il potenziale in un punto P molto distante dal sistema di cariche. Sia r la distanza di P da O , dunque: $r \gg d \rightarrow \text{APPROXIMAZIONE DI DIPOLI}$.



Seppiamo che il potenziale è dato da:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Sia ora \vec{d}_i il vettore che unisce O alla carica q_i ; abbiamo che:

$\vec{d}_i + \vec{r}_i = \vec{r}$ e, se $r \gg d_i$, possiamo fare le seguenti approssimazioni:

$$r_i = r - d_i \cos \theta_i = r - \vec{d}_i \cdot \hat{m}_r$$

Dunque: $\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r - \vec{d}_i \cdot \hat{m}_r} = \frac{r + \vec{d}_i \cdot \hat{m}_r}{r^2 - (\vec{d}_i \cdot \hat{m}_r)^2} \approx \frac{r + \vec{d}_i \cdot \hat{m}_r}{r^2}$, omettendo di poter trascurare d_i^2 rispetto ad r^2

Pertanto, il POTENZIALE può essere scritto come:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i (r + \vec{d}_i \cdot \hat{m}_r)}{r^2}$$

Ponendo ora: $Q := \sum_i q_i$, cioè CARICA TOTALE DEL SISTEMA, si ha:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{(\sum_i q_i \vec{d}_i) \cdot \hat{m}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0 + V_{\text{dip}}$$

• MOMENTO DI DIPOLO DEL SISTEMA:

Definiamo il MOMENTO DI DIPOLO DEL SISTEMA rispetto al punto O come il vettore:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{d}_i$$

Pertanto, esprimiamo il POTENZIALE come segue:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{P} \cdot \hat{m}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0 + V_{\text{dip}}$$

dove: • V_0 rappresenta il potenziale generato da una carica Q (carica totale del sistema)

posta nel punto O e si chiama MONOPOLIO;

• V_{dip} si chiama TERMINE DI DIPOLO.

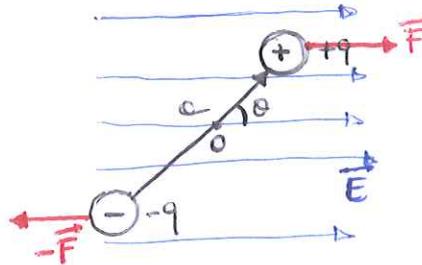
Se si approssime: $\vec{P} = \sum_i q_i \vec{d}_i \approx Q \vec{d}$, abbiamo che:

$$\frac{V_{\text{dip}}}{V_0} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{m}_r}{r Q} \approx \frac{Q d}{r Q} = \frac{d}{r} \ll 1 \quad \text{per l'approssimazione di dipolo } (r \gg d).$$

Se $Q \neq 0$, il termine di MONOPOLIO è preponderante!

• FORZA SU UN DIPOLO ELETTRICO:

Consideriamo un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico \vec{E} uniforme. Inoltre, sulle cariche $+q$ e $-q$ agiscono forze uguali, ma di verso opposto.



Sia $-q$ nel punto $P_1(x, y, z)$ e $+q$ nel punto $P_2(x+\epsilon_x, y+\epsilon_y, z+\epsilon_z)$.

Il momento di dipolo è $\vec{p} = q\vec{a}$.

L'ENERGIA POTENZIALE ELETROSTATICA del dipolo è:

$$U_e = qV(x+\epsilon_x, y+\epsilon_y, z+\epsilon_z) - qV(x, y, z)$$

Se ϵ è molto piccolo (APPROXIMAZIONE DI DIPOLO) posso sviluppare in serie il potenziale:

$$V(x+\epsilon_x, y+\epsilon_y, z+\epsilon_z) = V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} \epsilon_x + \frac{\partial V}{\partial y} \epsilon_y + \frac{\partial V}{\partial z} \epsilon_z$$

$$\Rightarrow U_e = qV(x+\epsilon_x, y+\epsilon_y, z+\epsilon_z) - qV(x, y, z) = q \frac{\partial V}{\partial x} \epsilon_x + q \frac{\partial V}{\partial y} \epsilon_y + q \frac{\partial V}{\partial z} \epsilon_z$$

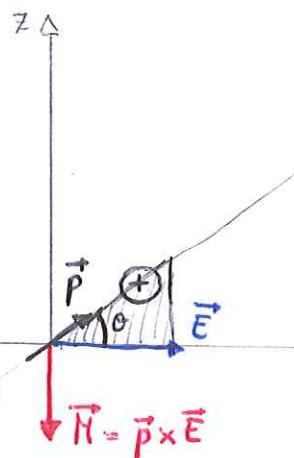
$$\Rightarrow U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -Ep \cos \theta \quad , \text{ ricordando che } \vec{E} = -\nabla V$$

Se il campo \vec{E} è uniforme, le forze $\vec{F}_1 = -q\vec{E}$, $\vec{F}_2 = q\vec{E}$ costituiscono una COPPIA DI FORZE, quindi hanno RISULTANTE NULLA, ma MOMENTO DIVERSO DA ZERO.

Il MOMENTO generato sul dipolo è:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\underbrace{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}_{\vec{a}}) \times q\vec{E} = q \underbrace{\vec{a} \times \vec{E}}_{\vec{p}} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}} \rightarrow \text{MOMENTO SUL DIPOLO}$$



Dalla figura, si vede che $\vec{M} = -p \sin \theta \vec{E} \hat{m}_z$

quindi :

$$\boxed{M = -p \sin \theta E = -\frac{dU_e}{d\theta}}$$

$$dy \text{ in accordo con } \boxed{dW = M d\theta = -dU_e}$$

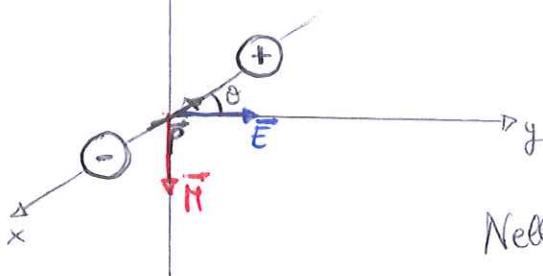
Nelle derivate dell'energia potenziale, non si è usato il simbolo di derivata parziale poiché, essendo \vec{E} uniforme, U_e dipende solo dall'angolo θ .

• ESEMPIO 2.34:

Un dipolo, di momento elettrico \vec{P} e momento d'inerzia I rispetto ad un asse passante per il centro e ortogonale a \vec{P} , è immerso in un campo \vec{E} uniforme. Descrivere il moto del dipolo quando viene spostato di un piccolo angolo dalla posizione di equilibrio.

Dalle DINAMICA DEI CORPI RIGIDI si ha l'equazione del moto di rotazione:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\omega} = \vec{P} \times \vec{E}$$



Proiettando sull'asse di rotazione (asse z):

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + pE \sin\theta = 0$$

Nell'ipotesi che θ sia molto piccolo, così $\sin\theta \approx \theta$:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + pE\theta = 0$$

Quindi: $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{I}\theta = 0}$ \rightarrow MOTO ARMONICO con le seguenti pulsazione e periodo:

$$\omega = \sqrt{\frac{pE}{I}} \quad \text{e} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{pE}}$$

Posizione e velocità angolare sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \\ \Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = -\omega \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \end{array} \right.$$

ok!!

