10. Campi Elettromagnetici Variabili nel Tempo

Abbiamo visto che le EQUAZIONI DI MAXWELL in forma locale sono:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \; ; & \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \; ; & \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array}}$$

in cui le sorgenti sono la densità $\rho(x,y,z)$ e la densità di corrente $\vec{J}(x,y,z)$, entrambe COSTANTI NEL TEMPO.

Abbiamo detto che:

Campo elettroSTATICO $\vec{E}$ → CONSERVATIVO, generato da cariche elettriche ferme

Campo magnetoSTATICO → NON conservativo, generato da cariche in moto stazionario

Faraday ed Henry videro che:

Un campo magnetico VARIABILE NEL TEMPO genera un campo elettrico non conservativo che può dar luogo ad una FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA, e quindi una CORRENTE INDOTTA che può scorrere in un circuito chiuso.

Maxwell riuscì a dimostrare che anche un campo elettrico variabile nel tempo genera un campo magnetico.

- Campo elettrico e magnetico variabili nel tempo non possono esistere separatamente:

  → CAMPO ELETTROMAGNETICO.

Inoltre Maxwell dimostrò che un campo elettromagnetico si può propagare con velocità pari a quella della luce (FENOMENO ELETTROMAGNETICO RAPIDAMENTE VARIABILE).

Avevamo definito la f.e.m.:

$$\text{f.e.m.} = \boxed{f := \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

se $f \neq 0 \Rightarrow \vec{E}$ non è conservativo.

Il FLUSSO del campo magnetico come:

$$\boxed{\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma}$$

• LEGGE DI FARADAY – NEUMANN :

Un campo magnetico $\vec{B}$ variabile nel tempo genera in un circuito una CORRENTE INDOTTA, o, meglio, una f.e.m. INDOTTA.

La legge dice che:

Ogni qual volta che il FLUSSO del campo magnetico $\Phi(\vec{B})$ concatenato con un circuito varia nel tempo, si ha nel circuito una f.e.m. INDOTTA data dall'opposto della derivata del flusso rispetto al tempo:

$$\boxed{f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}}$$

Se R è la RESISTENZA DEL CIRCUITO, si ha la CORRENTE INDOTTA:

$$\boxed{i = \frac{f_i}{R} = \frac{-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}}{R}}$$

Legge di Lenz: il SEGNO MENO indica che la f.e.m. indotta si oppone alla VARIAZIONE DI FLUSSO!

- se $\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} > 0 \Rightarrow f < 0$
- se $\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} < 0 \Rightarrow f > 0$

• ORIGINE DELLA f.e.m. INDOTTA :

Dalla definizione di FLUSSO, poiché f.e.m. $= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$:

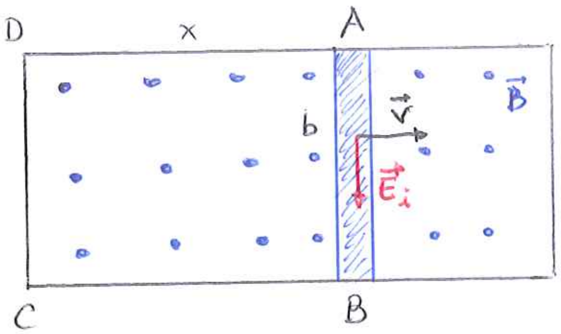
$$\boxed{\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma}$$

Consideriamo ora un circuito rettangolare in cui un lato è costituito da una barretta di lunghezza mobile b ($\overline{AB}$).

Il circuito è posto in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme, costante e ortogonale.

Immaginiamo che la barretta si muova con velocità $\vec{v}$.

Gli ELETTRONI sulla barretta, avendo velocità $\vec{v}$, saranno soggetti ad una FORZA DI LORENTZ pari a $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$.



Si puo' definire una f.e.m. ed un CAMPO ELETTROMOTORE INDOTTO:

$$\boxed{\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}}$$

la f.e.m. f_i è la circuitazione di $\vec{E}_i$: (contributo solo del lato mobile)

$$\boxed{f_i = \int_{ABCD} \vec{v} \times \vec{B}\, dl = \int_{B}^{A} \vec{v} \times \vec{B}\, dl = -vBb}$$

(segno meno perche $\vec{v} \times \vec{B}$ è discorde a $\overline{BA}$).

Detta x la distanza $\overline{DA}$, si puo' calcolare il FLUSSO di $\vec{B}$:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma = Bbx$$

Quindi, dalla <u>LEGGE DI FARADAY</u>: $f_i = -\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -Bb\dfrac{dx}{dt} = -Bbv$; si trova!

- Il FLUSSO cambia, poiché <u>aumenta</u> l'area Σ del circuito!

- **AUTOINDUZIONE:**

Secondo la Legge di Ampére-Laplace, un qualsiesi circuito produce un campo magnetico:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

e l' <u>AUTOFLUSSO</u> è dato da:

$$\Phi(\vec{B}) = \int \left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma = Li$$

, dove L è il COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE o <u>INDUTTANZA</u>: $\boxed{\Phi(\vec{B}) = Li}$

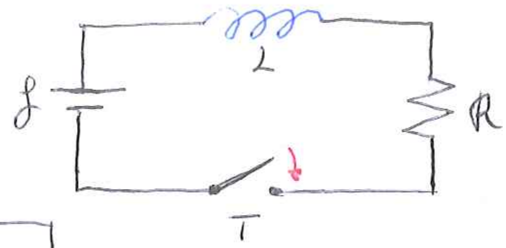
L è COSTANTE se il circuito è indeformabile e dipende dalla FORMA del circuito e dalle proprietà magnetiche del mezzo.

<u>Se L è COSTANTE</u>, utilizzando la Legge di FARADAY:

$$\boxed{f_L = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -L\frac{di}{dt}}$$

Se L è diverso da zero, un CIRCUITO si dice INDUTTIVO. L puo' essere schematizzata come concentrata in un punto:

• Apertura e Chiusura di un Circuito Induttivo



Supponiamo di avere un circuito RL in serie;

L'equazione equivalente del circuito è:

$$f_{generatore} + f_L = Ri \longrightarrow \boxed{f_{gen} = L\frac{di}{dt} + Ri = Li' + Ri}$$

Si risolve l'eq. differenziale separando le variabili e integrando:

$$f_{gen} - Ri = Li' \longrightarrow \frac{di}{f_{gen} - Ri} = \frac{dt}{L}$$

$$\Rightarrow \int \frac{di}{f_{gen} - Ri} = \int \frac{dt}{L} \longrightarrow \underbrace{\log\left(f_{gen} - Ri\right) = -\frac{R}{L}t + \text{cost.}}$$

Quindi: $\boxed{f_{gen} - Ri = A e^{-\frac{R}{L}t}}$, con A costante di integrazione determinabile dalle condizioni iniziali.

(1) Chiusura Circuito:

All'istante $t=0 \rightarrow i=0$ si chiude il circuito, troviamo A:

$$f_{gen} - 0 = Ae^{-\frac{R}{L}(t=0)} = A \longrightarrow \boxed{A = f_{gen}}$$

$$\Rightarrow f_{gen} - Ri(t) = f_{gen}e^{-\frac{R}{L}t}$$

Quindi: $\boxed{i(t) = \frac{f_{gen}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{f_{gen}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$, con $\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \rightarrow$ COSTANTE DI TEMPO DEL CIRCUITO

Per $t \rightarrow \infty$:

$$\boxed{i_{t\rightarrow\infty} = \frac{f_{gen}}{R}} \qquad \boxed{f_L = -L\frac{di(t)}{dt} = -f_{gen}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Corrente si comporta tendendo asintoticamente a $\frac{f_{gen}}{R}$ (Legge di Ohm) con $t \rightarrow \infty$ e f_L termine induttivo non gioca più un ruolo predominante.

(2) Apertura del Circuito:

all'istante $t=0 \rightarrow i = i_{t\to\infty} = \frac{f_{gen}}{R}$; una volta aperto l'interruttore è come se si passasse ad una resistenza $R' \gg R$, quindi $i(t)$ varia secondo la legge:

$$\boxed{i(t) = \frac{f_{gen}}{R} e^{-\frac{R'}{L}t} = \frac{f_{gen}}{R} e^{-\frac{t}{\tau'}}} \quad ; \quad \boxed{f_L = \frac{R'}{R} f_{gen} e^{-\frac{t}{\tau'}}}$$

Poiché $A = f_{gen} - R' i_\infty = f_{gen} - R' \cdot \frac{f_{gen}}{R} = f_{gen}\left(1 - \frac{R'}{R}\right)$

- **Energia Magnetica:**

La presenza di una f.e.m. in un circuito implica, per definizione, la produzione di un LAVORO per spostare le cariche. Riprendiamo l'equazione del circuito RL:

$$f_{gen} = L\frac{di}{dt} + Ri$$

Moltiplicando per la corrente i si ha la POTENZA:

$$i f_{gen} = Li\frac{di}{dt} + Ri^2$$

Quindi, il LAVORO nel tempo dt è:

$$\boxed{i f_{gen}\, dt = Li\, di + Ri^2 dt}$$

Si ha:

- $i f_{gen} dt = f_{gen} dq \rightarrow$ lavoro compiuto dal generatore
- $Ri^2 dt \rightarrow$ lavoro speso per far circolare la corrente e trasformato in calore per EFFETTO JOULE
- $Li\,di \rightarrow$ lavoro speso contro la f.e.m. di AUTOINDUZIONE per passare da i a $i+di$.

Il LAVORO SPESO CONTRO L'AUTOINDUZIONE è:

$$W = \int_0^i Li\, di = \frac{1}{2}Li^2$$

che NON dipende dal modo in cui avviene la variazione di corrente, ma solo DAI VALORI INIZIALI e FINALI della CORRENTE i!

Dunque, si può definire l'ENERGIA INTRINSECA DELLA CORRENTE:

$$\boxed{U_L = \frac{1}{2} L i^2}$$

- Consideriamo un SOLENOIDE di lunghezza d:

$\boxed{L = \mu_0 n^2 \Sigma d} \rightarrow L$ per unità di lunghezza è: $\boxed{L = \mu_0 n^2 \Sigma}$

Essendo il campo magnetico: $\underbrace{B = \mu_0 i n}$, si ha:

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \Sigma d) i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0} \tau$$

Si definisce DENSITÀ DI ENERGIA MAGNETICA per unità di volume:

$$\boxed{u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} HB}$$

LEGGE DI AMPÉRE-MAXWELL

Abbiamo già visto che:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

supponendo di stare in condizioni di STAZIONARIETÀ.

- Nei condensatori, essendo fatti con un materiale dielettrico tra le armature, non può circolare corrente, ma, in effetti, c'è uno spostamento delle cariche sulle 2 armature nel tempo, legato alla VARIAZIONE NEL TEMPO del CAMPO ELETTRICO.

Possiamo quindi definire la CORRENTE DI SPOSTAMENTO:

$$i_s = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h} V\right) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\Sigma E\right) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Essendo la capacità del condensatore $C = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h}$ e h la distanza tra le armature.

Quindi:

$$\boxed{i_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t}}$$

La corrente che percorre il circuito durante la carica del condensatore è DI CONDUZIONE i_c lungo i fili e DI SPOSTAMENTO i_s tra le armature.

Pertanto possiamo scrivere la Legge di Ampère come:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i_c + \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t} \right)}$$

• Legge di Ampère - Maxwell:

[I campi magnetici sono prodotti sia dalle correnti di conduzione che dalle variazioni temporali del campo ELETTRICO.]

Se nello spazio non ho correnti di conduzione ($i_c = 0$), ma VARIA IL CAMPO ELETTRICO nel TEMPO, ho:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}}$$

che stabilisce la simmetria con la relazione che definisce un campo elettrico $\vec{E}$ a partire dalla variazione del FLUSSO di $\vec{B}$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma = 0 \quad ; \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$$

• FORMA INTEGRALE:

LEGGI DI MAXWELL

$\oint \vec{E} \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$	Stabilisce il legame tra carica e campo elettrico
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$	Un campo magnetico variabile nel tempo
$\oint \vec{B} \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma = 0$	Mostra che il campo magnetico è sempre SOLENOIDALE e che quindi non esistono cariche magnetiche
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(i_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right)$	Le sorgenti del campo magnetico sono correnti di conduzione e/o le variazioni temporali del campo elettrico.

In sostanza, note le correnti i e le cariche q, le soluzioni delle equazioni di Maxwell forniscono il campo elettrico $\vec{E}$ e il campo magnetico $\vec{B}$ che agiscono su una carica di prova q_0:

$$\boxed{\vec{F} = q_0 \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)}$$

Il moto della carica obbedisce alla Legge di Newton: $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Possiamo scrivere la DENSITÀ DI ENERGIA ELETTROMAGNETICA come:

$$\boxed{u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

- EQUAZIONI di MAXWELL in ASSENZA DI SORGENTI:

Nello spazio vuoto privo di CORRENTI e di CARICHE $(i=0\ ;\ q=0)$ si ha:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0 \quad ; & \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \\ \oint \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0 \quad ; & \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \end{array}}$$

Equazioni di Maxwell in forma differenziale:

Dal Teorema della Divergenza, si ha:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \text{Teorema di Gauss per i campi } \vec{E} \text{ e } \vec{B}$$

Grazie a ciò, si possono esprimere le Leggi di Maxwell in forma locale (eq. differenziali):

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x,y,z)}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0}$$

Prendiamo adesso le 2 equazioni che riguardano le circuitazioni e usiamo il Teorema di Stokes:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \text{rot}\,\vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \int_\Sigma \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \text{rot}\,\vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \int_\Sigma \nabla \times \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

Quindi, si ha:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Applicando Stokes:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \int_\Sigma -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

Portando la derivata dentro l'integrale, quindi:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \longrightarrow \text{Legge di Faraday in forma locale}$$

Se $\vec{B}$ è nullo o costante nel tempo $\Rightarrow$ $\vec{E}$ è irrotazionale e quindi conservativo (campo elettrostatico)

Vediamo ora la Legge di Ampère-Maxwell:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \nabla \times \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right) = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma + \mu_0 \varepsilon_0 \int_\Sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

Dunque:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \longrightarrow \text{Legge di Ampère-Maxwell in forma locale}$$

Ricapitolando:

- Equazioni di MAXWELL nel VUOTO:

	CON SORGENTI	SENZA SORGENTI
Legge di Gauss	$\oint \vec{E}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$; $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla\cdot\vec{E} = 0$
Legge di Faraday	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$; $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Legge di Gauss	$\oint \vec{B}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma = 0$; $\nabla\cdot\vec{B} = 0$	$\nabla\cdot\vec{B} = 0$
Legge di Ampère - Maxwell	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\left(i + \varepsilon_0\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}\right)$; $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

- CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA:

Applicando l'operatore divergenza alla Ampere-Maxwell, essendo $\nabla\cdot\nabla\times\vec{B} = 0$, si ha:

$$\nabla\cdot\left(\mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

Quindi:

$$\nabla\cdot\vec{J} + \cancel{\mu_0}\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) = \nabla\cdot\vec{J} + \cancel{\mu_0}\cancel{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\cancel{\varepsilon_0}}\right) = 0$$

E si ottiene l'EQUAZIONE DI CONTINUITA':

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

Ci dice che la densità di carica ρ deve variare in ogni punto in cui la divergenza della densità di corrente $\vec{J}$ è diversa da zero.

Integriamo su un volume τ entrambi i membri:

$$\int_\tau \nabla\cdot\vec{J}\, d\tau = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho\, d\tau = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t}$$

Applicando il Teorema della Divergenza:

$$-\frac{\partial q_{int}}{\partial t} = \int_\tau \nabla\cdot\vec{J}\, d\tau = \int_\Sigma \vec{J}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma = i \longrightarrow$$ Carica Totale nell'unità di tempo attraverso Σ

Se ρ non varia nel tempo:

$$\nabla\cdot\vec{J} = 0 \quad ; \quad i = \int_\Sigma \vec{J}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma = 0$$

Che sono le condizione di stazionarietà.

- Campo Magnetizzante $\vec{H}$ e vettore INDUZIONE ELETTRICA $\vec{D}$ nei materiali:

Nei materiali, la presenza di un campo elettrico ed un campo magnetico provoca cariche di polarizzazione e correnti di magnetizzazione, le cui DENSITÀ sono espresse dai vettori $\vec{P}$ e $\vec{M}$, che modificano i valori di ρ e $\vec{J}$. Possiamo introdurre, per eliminare questi effetti, i seguenti vettori:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \qquad \boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$$

$\vec{M}$ tiene conto dei momenti di magnetizzazione degli atomi all'interno e $\vec{P}$ il momento di dipolo del materiale. Scriviamo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in funzione di $\vec{D}$ ed $\vec{H}$:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

dove ε_r e μ_r dipendono dal materiale.

EQUAZIONI DI MAXWELL IN UN MEZZO

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$;	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$;	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

13. ONDE ELETTROMAGNETICHE

Consideriamo un mezzo indefinito e omogeneo di costanti ε e μ, nel quale non ci siano cariche elettriche libere e correnti ($\rho = 0$; $\vec{J} = 0$). Pertanto, le equazioni di Maxwell:

$$a)\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad c)\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$b)\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad d)\ \nabla \times \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Risolviamo le eq. differenziali nel CASO PARTICOLARE di un' ONDA PIANA :
$\vec{B}$ ed $\vec{E}$ DIPENDONO solo dalla coordinata x e dal tempo t.

Dunque:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$(\nabla \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$(\nabla \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$(\nabla \times \vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla \times \vec{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$(\nabla \times \vec{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

Essendo: $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow E_x(x,t) = \text{costante}$, ma, poiché abbiamo assunto che non ci siano cariche: $\boxed{E_x(x,t) = 0}$, Analogamente: $\boxed{B_x(x,t) = 0}$

→ Se dimostreremo che le altre componenti soddisfano all'equazione delle onde in x, y, queste onde saranno di sicuro ONDE TRASVERSALI, in quanto i campi oscillerebbero solo nel piano (y, z)

Dalle relazioni precedenti, abbiamo:

$$(a) \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (c)$$

$$(b) \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (d)$$

Mostriamo la correlazione tra:

$E_z \rightarrow B_y \quad ; \quad E_y \rightarrow B_z$ (COMPONENTI ORTOGONALI)

Deriviamo (a) rispetto a x e (b) rispetto a t:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} \quad ; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{\partial B_y}{\partial t \partial x}$$

Ma le 2 derivate miste di B_y sono uguali! Eguagliandole si ottiene:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}}$$

Allo stesso modo:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}}$$

Entrambe le componenti di $\vec{E}(y,z)$ e di $\vec{B}(y,z)$ soddisfano l'equazione delle onde:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}}$$

Da cui si ha v, velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche:

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}}$$

* Nel VUOTO, $\varepsilon_r \mu_r = 1 \Rightarrow v = c \rightarrow$ [Le Onde Elettromagnetiche si propagano alla velocità della luce!]

Maxwell fu portato a ipotizzare che la LUCE stessa fosse un campo elettromagnetico, cioè che fosse composta da un campo elettrico ed un campo magnetico che generano onde che viaggiano nel vuoto (non nell'ETERE)!

Le soluzioni dell'equazione differenziale delle onde:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Per i campi elettromagnetici sono del tipo:

$$\boxed{\vec{E} = E_y(x-vt)\,\hat{u}_y + E_z(x-vt)\,\hat{u}_z \quad ; \quad \vec{B} = B_y(x-vt)\,\hat{u}_y + B_z(x-vt)\,\hat{u}_z}$$

Se poniamo l'ARGOMENTO delle soluzioni $(x-vt) = u$, abbiamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v$$

Quindi si ha:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u}\cdot \overset{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial E_z}{\partial u}$$

Integrando:

$$B_y(x-vt) = \int \frac{\partial B_y}{\partial t}\,dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial u}\,dt = -\frac{1}{v}\int \partial E_z = -\frac{1}{v}E_z(x-vt)$$

considerando la costante di integrazione $(+c)$ uguale a 0. Analogamente:

$$B_z(x-vt) = \frac{1}{v}E_y(x-vt)$$

Quindi, le componenti di $\vec{B}$ dipendono da quelle di $\vec{E}$ e posso esprimere tutto in funzione del campo elettrico:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= E_y(x-vt)\,\hat{u}_y + E_z(x-vt)\,\hat{u}_z \\ v\vec{B} &= -E_z(x-vt)\,\hat{u}_y + E_y(x-vt)\,\hat{u}_z \end{aligned}}$$

→ $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ OSCILLANO PERPENDICOLARMENTE alla direzione di propagazione x.

- RELAZIONE TRA I MODULI:

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2}\left(E_y^2 + E_z^2\right) = \frac{E^2}{v^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = vB \quad ; \quad B = \frac{E}{v} \quad ; \quad v = \frac{E}{B}}$$

→ relazione per il selettore di velocità

- PRODOTTO SCALARE:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{v}\left(\cancel{-E_y E_z} + \cancel{E_z B_y}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{E} \cdot \vec{B} = 0}$$ Sono sempre ortogonali tra loro

- PRODOTTO VETTORIALE:

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & -\frac{E_z}{v} & \frac{E_y}{v} \end{vmatrix} = \frac{1}{v}\left(E_y^2 + E_z^2\right)\hat{u}_x = \frac{E^2}{v}\hat{u}_x = vB^2\hat{u}_x = EB\,\hat{u}_x$$

$$\boxed{\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{v}\hat{u}_x = vB^2\hat{u}_x = EB\,\hat{u}_x}$$

Il prodotto vettoriale dà la direzione di propagazione dell'onda, essendo parallelo e concorde all'asse x.

Riassumendo, per una radiazione che si propaga in un mezzo omogeneo ed isotropo privo di correnti e cariche libere (un'ONDA PIANA), si ha:

- $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si propagano con la stessa velocità v, che nel vuoto vale:

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \, m/s$$

- I moduli dei campi sono legati dalla relazione $B = \frac{E}{v}$, nel vuoto $B = \frac{E}{c}$;
- $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione $\rightarrow$ ONDE TRASVERSALI;
- $\vec{E} \times \vec{B}$ definisce il verso di propagazione dell'onda;
- $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono strettamente correlati, se esiste uno non può che esistere l'altro:

ONDA ELETTROMAGNETICA.