3. Campi nel Dominio della Frequenza

• Notazioni Complesse:

Consideriamo campi elettromagnetici SINUSOIDALI (quindi con SORGENTI SINUSOIDALI) con pulsazione ω:

$$\underline{E}(t) = E_x(t)\,\underline{x}_0 + E_y(t)\,\underline{y}_0 + E_z(t)\,\underline{z}_0$$

dove: $E_x(t) = E_{0x}\cos(\omega t + \phi_x)$; $E_y(t) = E_{0y}\cos(\omega t + \phi_y)$; $E_z(t) = E_{0z}\cos(\omega t + \phi_z)$

$$\hat{E}_x := \underbrace{E_{0x}\,e^{j\phi_x}}_{\text{NOTAZIONE DI EULERO}} = E_{0x}(\cos\phi_x + j\sin\phi_x) = \underbrace{E_{xr}}_{\text{Parte Reale}} + j\underbrace{E_{xj}}_{\text{Parte Immaginaria}}$$

Quindi: $\hat{E}_x\,e^{j\omega t} = E_{0x}\,e^{j(\omega t+\phi_x)} = \underbrace{E_{0x}\left[\cos(\omega t+\phi_x)\right.}_{E_x(t)} \left. + j\sin(\omega t+\phi_x)\right]$

$$\Rightarrow \boxed{E_x(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{E}_x\,e^{j\omega t}\right]}$$

• Estendiamo ora lo stesso ragionamento in termini VETTORIALI:

$$\hat{\underline{E}} = \hat{E}_x\,\underline{x}_0 + \hat{E}_y\,\underline{y}_0 + \hat{E}_z\,\underline{z}_0 = \underbrace{(E_{xr}+jE_{xj})\,\underline{x}_0 + (E_{yr}+jE_{yj})\,\underline{y}_0 + (E_{zr}+jE_{zj})\,\underline{z}_0}_{\text{Componenti Complesse}} =$$

$$= \underbrace{(E_{xr}\,\underline{x}_0 + E_{yr}\,\underline{y}_0 + E_{zr}\,\underline{z}_0)}_{\text{vettore Reale}} + j\underbrace{(E_{xj}\,\underline{x}_0 + E_{yj}\,\underline{y}_0 + E_{zj}\,\underline{z}_0)}_{\text{vettore Immaginario}}$$

$$= \underline{E}_r + j\,\underline{E}_j$$

dove:

$$\underline{E}_r = E_{0x}\cos\phi_x\,\underline{x}_0 + E_{0y}\cos\phi_y\,\underline{y}_0 + E_{0z}\cos\phi_z\,\underline{z}_0$$

$$\underline{E}_j = E_{0x}\sin\phi_x\,\underline{x}_0 + E_{0y}\sin\phi_y\,\underline{y}_0 + E_{0z}\sin\phi_z\,\underline{z}_0$$

Dunque:

$$\boxed{\hat{\underline{E}} = \underline{E}_r + j\,\underline{E}_j}$$

* $\underline{\hat{E}}$ è una quantità COMPLESSA di carattere VETTORIALE, NON rappresentabile nello spazio ordinario! Invece $\underline{E}_r$ ed $\underline{E}_j$ sono REALI e rappresentabili.

$$\underline{E}(t) = Re\left[\underline{\hat{E}}\, e^{j\omega t}\right] = Re\left[(\underline{E}_r - j\underline{E}_j)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right] = \underline{E}_r \cos\omega t - \underline{E}_j \sin\omega t$$

Dunque:

$$\boxed{\underline{E}(t) = \underline{E}_r \cos\omega t - \underline{E}_j \sin\omega t}$$

* **NOTA**: $\underline{E}_r$ ed $\underline{E}_j$ NON sono le componenti di un vettore euclideo! Ma sono 2 vettori che, moltiplicati per funzioni circolari di ωt e sottratti, danno un altro vettore $\underline{E}(t)$ variabile nel tempo in AMPIEZZA.
Notare che i vettori $\underline{E}_r$ ed $\underline{E}_j$ sono COSTANTI NEL TEMPO!
La variazione è data dal termine $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$.

È importante notare che, dalla relazione precedente di $\underline{E}(t)$, si evince che comunque siano le SORGENTI, purché SINUSOIDALI, il campo $\underline{E}(t)$ varierà sempre nel PIANO individuato dai vettori $\underline{E}_r$ ed $\underline{E}_j$.

* **NOTA**: le INFORMAZIONI portate da una sinusoide sono date solo dalla PULSAZIONE (ω); al più, anche la fase può portare informazioni (ϕ), ma è interessante solo in presenza di altre sinusoidi, in quanto si tratta solo di una traslazione temporale.

- ESPRESSIONE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA:

Un qualsiasi campo vettoriale con una generica DIPENDENZA DAL TEMPO può essere espresso mediante ANTITRASFORMATA DI FOURIER:

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\hat{A}}(\underline{r},\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}$$

dove:

$$\underline{\hat{A}}(\underline{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\underline{r},t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Dato che $\underline{A}(t)$ è una variabile fisica (reale), $\underline{\hat{A}}(-\omega) = \underline{\hat{A}}^*(\omega)$ e quindi:

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\underline{\hat{A}}(\underline{r},\omega)\, e^{j\omega t}\right] d\omega}$$

Quindi: in ciascun punto $\underline{r}$ dello spazio, $\underline{A}(\underline{r},t)$ è dato dalla SOVRAPPOSIZIONE in ampiezza e fase di CAMPI VETTORIALI ARMONICI, ottenuti prendendo la parte reale di "vettori" rappresentativi COMPLESSI $\underline{\hat{A}}(\underline{r},\omega)$ moltiplicati per $e^{j\omega t}$.

- Nel caso di VARIAZIONE PURAMENTE ARMONICA con pulsazione ω_0, lo SPETTRO ha FORMA IMPULSIVA e quindi si ottiene:

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\underline{\hat{A}}(\underline{r})\, e^{j\omega_0 t}\right]}$$

La variazione nel TEMPO è data solo da questo termine!

- Se le SORGENTI hanno andamento SINUSOIDALE nel tempo con PULSAZIONE GENERICA ω, tutte le quantità elettromagnetiche sono sinusoidali con la STESSA PULSAZIONE e i campi elettrico e magnetico si scrivono:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\underline{\hat{E}}(\underline{r})\, e^{j\omega t}\right] \quad ; \quad \underline{H}(\underline{r},t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\underline{\hat{H}}(\underline{r})\, e^{j\omega t}\right]$$

dove: $\underline{\hat{E}}$ ed $\underline{\hat{H}}$ sono "VETTORI" COMPLESSI, cioè con componenti complesse, e non rappresentabili; invece, $\underline{E}_r, \underline{H}_r, \underline{E}_j$ ed $\underline{H}_j$ sono rappresentabili.

$$\underline{E}(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[(\underline{E}_r + j\underline{E}_j)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right] = \boxed{\frac{1}{\pi}\left(\underline{E}_r\cos\omega t - \underline{E}_j\sin\omega t\right)}$$

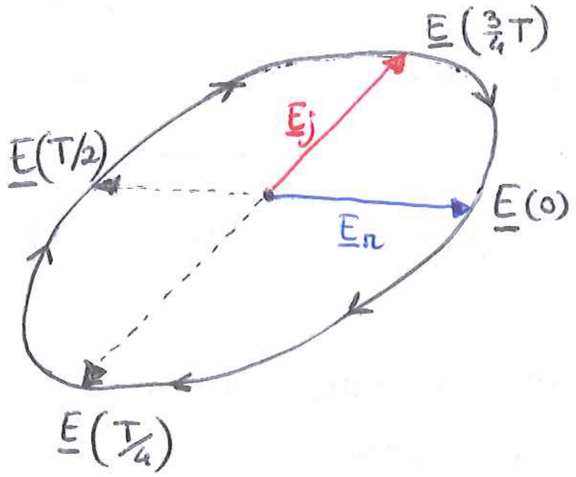
Da: $\underline{\hat{E}}\cdot\underline{\hat{E}}^* = E_r^2 + E_j^2$ si ottiene il MODULO di $\underline{\hat{E}}$: $|\underline{\hat{E}}| = \sqrt{E_r^2 + E_j^2}$

* L'AMPIEZZA di $\underline{E}(t)$ è in generale funzione del tempo, ma NON coincide con il modulo del vettore complesso $\underline{\hat{E}}$.

- NOTA: Il fattore $\frac{1}{\pi}$ viene trascurato, poiché presente ad entrambi i membri delle equazioni per $\underline{E}$ e per $\underline{H}$, quindi si elide!

- POLARIZZAZIONE DI UN VETTORE :

La relazione $\underline{E}(t) = \underline{E}_r \cos\omega t - \underline{E}_j \sin\omega t$, ci indica che l'estremo libero di $\underline{E}(t)$ descrive, in generale, un' ELLISSE nel piano individuato da $\underline{E}_r$ ed $\underline{E}_j$: il vettore $\underline{E}(t)$ è POLARIZZATO ELLITTICAMENTE.



con $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

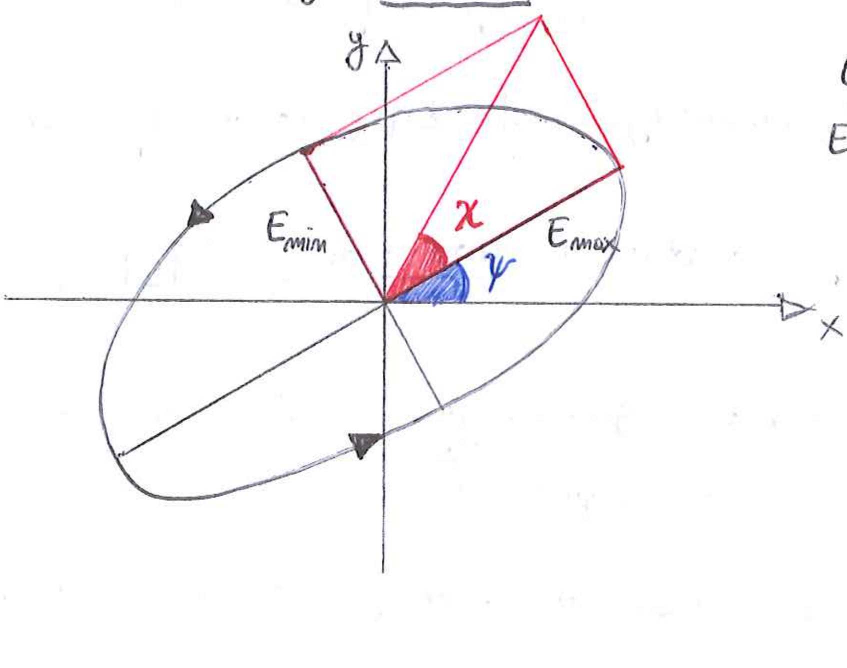
Ci sono 2 casi particolari da considerare; cioè quando l'ellisse degenera in:

- CIRCONFERENZA : quando $\underline{E}_r \cdot \underline{E}_j = 0$ (sono perpendicolari) e $|\underline{E}_r| = |\underline{E}_j|$; il vettore $\underline{E}(t)$ è POLARIZZATO CIRCOLARMENTE.

- SEGMENTO DI RETTA : quando $\underline{E}_r \times \underline{E}_j = 0$ (sono paralleli o nulli); il vettore $\underline{E}(t)$ è POLARIZZATO LINEARMENTE.

- PARAMETRI DI POLARIZZAZIONE :

Lo STATO DI POLARIZZAZIONE di un vettore può essere individuato da 2 parametri di polarizzazione : i due angoli ψ e χ :



E_{min} → Semiasse MINORE

E_{max} → Semiasse MAGGIORE

- **ANGOLO DI INCLINAZIONE ψ**: indica l'inclinazione dell'ellisse; è l'angolo tra il semiasse maggiore E_{max} e una direzione nel piano dell'ellisse, di solito l'orizzontale.

- **ANGOLO DI ELLITTICITÀ χ**: indica quanto è "schiacciata" l'ellisse;

$$\boxed{\chi = \pm \arctan \frac{E_{min}}{E_{max}}}$$

Il doppio segno denota il verso di polarizzazione, o meglio il verso di ROTAZIONE rispetto ad un versore di riferimento ortogonale al piano dell'ellisse:

- il segno $+$ indica una rotazione in senso ORARIO $\rightarrow$ POLARIZZAZIONE SINISTRA
- il segno $-$ indica una rotazione in senso ANTIORARIO $\rightarrow$ POLARIZZAZIONE DESTRA

È bene notare i "campi di esistenza" dei 2 parametri di polarizzazione:

$$\boxed{0 \leq \psi \leq \pi} \quad e \quad \boxed{-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}}$$

Nel caso di:

(1) POLARIZZAZIONE LINEARE: $\chi = 0$ e ψ dipende dall'inclinazione della retta

(2) POLARIZZAZIONE CIRCOLARE: $\chi = \pm\frac{\pi}{4}$ e ψ indeterminato

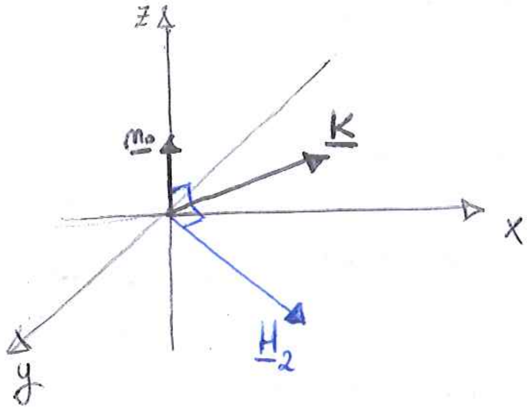
- ESERCIZI / ESEMPI :

- Es. 1.9.2.1 : Sulla superficie piana di un conduttore ideale scorre una corrente $\underline{K} = 10\,(\underline{x}_0 - \underline{y}_0)$ A/m. Scrivere il campo magnetico sulla superficie del conduttore.

Applichiamo le CONDIZIONI AL CONTORNO : $\underline{n}_0 \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \underline{K}$

Essendo il conduttore IDEALE, il campo interno è nullo, cioè $\underline{H}_1 = \underline{0}$, quindi:

$$\underline{n}_0 \times \underline{H}_2 = \underline{K} = 10\,(\underline{x}_0 - \underline{y}_0)\ \frac{A}{m}$$



$$\boxed{\underline{H}_2 = 10\,(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)\ A/m}$$

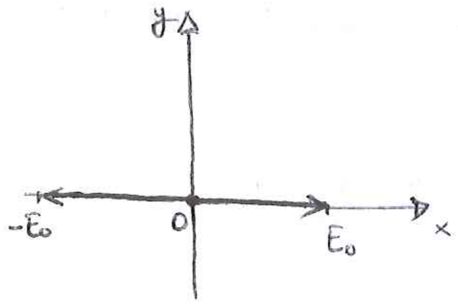
- ESEMPIO :

Eseguire l'analisi dei seguenti vettori complessi:

(1) $\hat{\underline{E}}_1 = j E_0 \underline{x}_0 \longleftrightarrow \underline{E}_r = 0$, $\underline{E}_j = E_0 \underline{x}_0 \longrightarrow$ POLARIZZAZIONE LINEARE

$\underline{E}(0) = 0$, $\underline{E}(T/4) = -E_0 \underline{x}_0$, $\underline{E}(T/2) = 0$, $\underline{E}(\frac{3}{4}T) = E_0 \underline{x}_0$

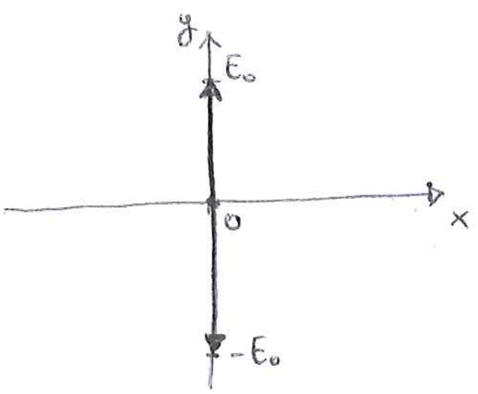
$\chi = 0$, $\psi = 0$ (orizzontale)



(2) $\hat{\underline{E}}_2 = E_0 \underline{y}_0 \longrightarrow \underline{E}_r = E_0 \underline{y}_0$, $\underline{E}_j = \underline{0} \longrightarrow$ POL. LINEARE (verticale)

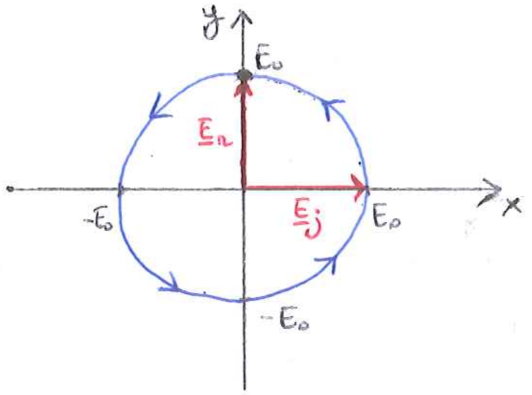
$\underline{E}(0) = E_0 \underline{y}_0$, $\underline{E}(T/4) = 0$, $\underline{E}(T/2) = -E_0 \underline{y}_0$, $\underline{E}(\frac{3}{4}T) = 0$

$\chi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{2}$



(3) $\hat{\underline{E}}_3 = \hat{\underline{E}}_1 + \hat{\underline{E}}_2 = E_0 \underline{y}_0 + j E_0 \underline{x}_0 \longrightarrow \underline{E}_r = E_0 \underline{y}_0 \,,\; \underline{E}_j = E_0 \underline{x}_0$

→ POL. CIRCOLARE (DESTRA, senso antiorario), poiché $\underline{E}_r \perp \underline{E}_j$ e $|\underline{E}_r| = |\underline{E}_j|$



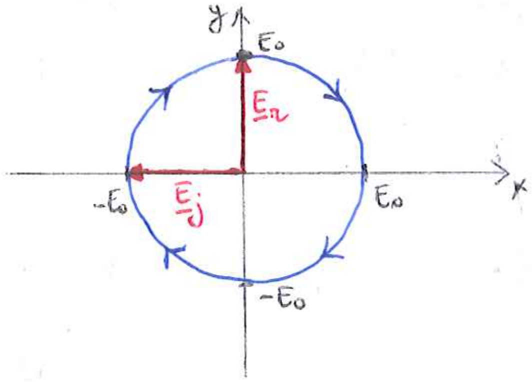
$\underline{E}(0) = E_0 \underline{y}_0 \,,\; \underline{E}(T/4) = -E_0 \underline{x}_0 \,,$

$\underline{E}(T/2) = -E_0 \underline{y}_0 \,,\; \underline{E}(\tfrac{3}{4}T) = E_0 \underline{x}_0$

$\chi = -\dfrac{\pi}{4}$, segno meno dovuto al senso di rotazione (per convenzione)

ψ = indeterminato

(4) $\hat{\underline{E}}_4 = E_0 (\underline{y}_0 - j \underline{x}_0) \longrightarrow$ POL. CIRCOLARE SINISTRA (senso orario)

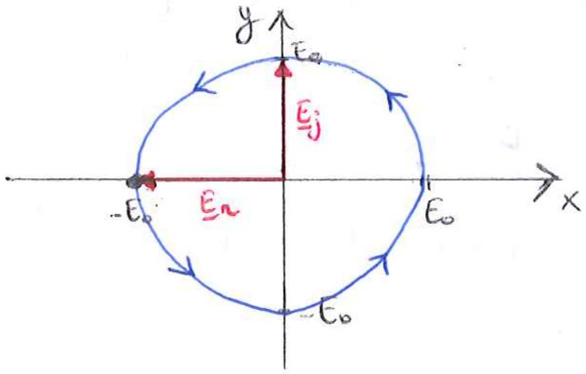


$\underline{E}(0) = E_0 \underline{y}_0 \,,\; \underline{E}(T/4) = + E_0 \underline{x}_0 \,,$!   !

$\underline{E}(T/2) = -E_0 \underline{y}_0 \,,\; \underline{E}(\tfrac{3}{4}T) = -E_0 \underline{x}_0$

$\chi = + \dfrac{\pi}{4} \,,\; \psi$ = indeterminato

(5) $\hat{\underline{E}}_5 = E_0 (-\underline{x}_0 + j \underline{y}_0) \longrightarrow \underline{E}_r = -E_0 \underline{x}_0 \,,\; \underline{E}_j = E_0 \underline{y}_0 \longrightarrow$ POL. CIRCOLARE DESTRA



$\underline{E}(0) = -E_0 \underline{x}_0 \,,\; \underline{E}(T/4) = -E_0 \underline{y}_0 \,,$

$\underline{E}(T/2) = E_0 \underline{x}_0 \,,\; \underline{E}(\tfrac{3}{4}T) = E_0 \underline{y}_0$

$\chi = -\dfrac{\pi}{4} \,,\; \psi$ = indeterminato

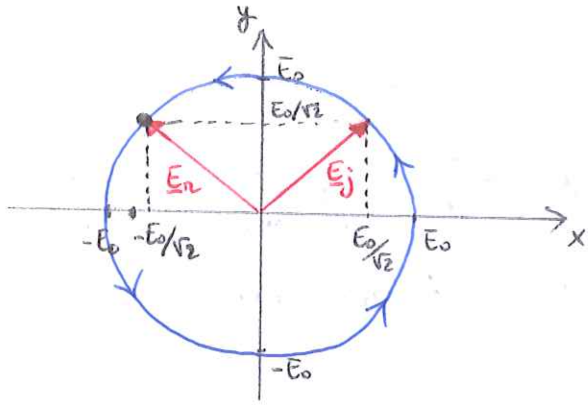
* **NOTA**: $\hat{\underline{E}}_5$ è polarizzato circolarmente a destra con le stesse ampiezze E_0 proprio come $\hat{\underline{E}}_3 \longrightarrow$ LA POLARIZZAZIONE NON E' UNIVOCA !

Le 2 polarizzazioni sono SFASATE NEL TEMPO di $\pi/2$!

Abbiamo visto che, una polarizzazione circolare si può ottenere come somma di 2 polarizzazioni LINEARI ORTOGONALI, una reale e una immaginaria, con le stesse ampiezze.

(6) $\underline{E}_{6r} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(-\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$; $\underline{E}_{6j} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\Rightarrow \hat{\underline{E}}_6 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left[(-\underline{x}_0 + \underline{y}_0) + j(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)\right] \longrightarrow$ Altro modo di scrivere la POLARIZZAZIONE CIRCOLARE DESTRA di ampiezza E_0.



$\underline{E}(0) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(-\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}(T/4) = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}(T/2) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\underline{x}_0 - \underline{y}_0)$

$\underline{E}(\frac{3}{4}T) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\chi = -\frac{\pi}{4}$

ψ = indeterminato

* **NOTA**: Individuata una polarizzazione nel piano, in situazioni di assolutezza, posso sempre ricondurla a 2 vettori $\underline{E}_r$ ed $\underline{E}_j$ sugli ASSI CARTESIANI! Se non ci sono particolari vincoli, conviene scriverla nel modo più semplice possibile.

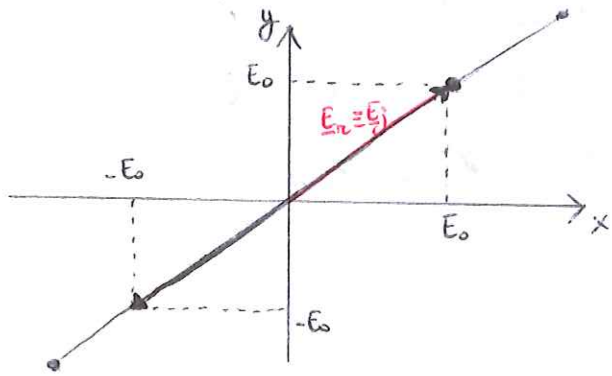
(7) $\hat{\underline{E}}_7 = E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0) \rightarrow$ POL. LINEARE

(8) $\hat{\underline{E}}_8 = E_0(\underline{x}_0 + j\,\underline{y}_0) \rightarrow$ POL. CIRCOLARE (c'è j!)

(9) $\hat{\underline{E}}_9 = jE_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0) \rightarrow$ POL. LINEARE

(10) $\hat{\underline{E}}_{10} = E_0\left[(\underline{x}_0 + \underline{y}_0) + j(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)\right] \longrightarrow$ POLARIZZAZIONE LINEARE

($\underline{E}_r$ ed $\underline{E}_j$ sono PARALLELI! (coincidono))



$\chi = 0$, $\psi = \pi/4$

$\underline{E}(t) = E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)\left[\cos\omega t - \sin\omega t\right]$

$\underline{E}_{10r} = E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}_{10j} = E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}(0) = \underline{E}_r = E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}(T/8) = 0$

$\underline{E}(T/4) = -\underline{E}_j = -E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}(3T/8) = -\frac{2}{\sqrt{2}}E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}(T/2) = -\underline{E}_r = -E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}(5T/8) = 0$

$\underline{E}(\frac{3}{4}T) = \underline{E}_j = E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}(7T/8) = \frac{2}{\sqrt{2}}E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

$\underline{E}(T) = \underline{E}(0) = E_0(\underline{x}_0 + \underline{y}_0)$

ATTENZIONE A VARIAZIONI di OTTAVI di PERIODO $\frac{T}{8}$!

- ## COSTANTE DIELETTRICA NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA :

Consideriamo variazioni SINUSOIDALI delle varie grandezze, campi compresi. L'analisi è fatta considerando MEZZI RAREFATTI (bassa densità di molecole) e NON POLARI.

Le proprietà elettriche di un materiale sono descritte dalla costante dielettrica ε, espressa in funzione del MOMENTO DI DIPOLO per unità di volume P, INDOTTO dal campo elettrico:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 (1+\chi) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right)}$$

dove si è assunto che $\underline{P} \parallel \underline{E} \rightarrow$ mezzo ISOTROPO; notare che il termine $\frac{P}{E}$ indica lo "scostamento" dal vuoto.

Dal momento che: $\underline{D}(t) = \varepsilon_0 \underline{E}(t) + \underline{P}(t)$

nel dominio della frequenza, per un MEZZO LINEARE :

$$\boxed{\hat{\underline{D}}(\omega) = \varepsilon_0 \hat{\underline{E}}(\omega) + \hat{\underline{P}}(\omega) = \varepsilon(\omega) \cdot \hat{\underline{E}}(\omega)}$$

dove:

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E(\omega)}\right)}$$

* Per determinare la costante dielettrica ε alla pulsazione ω, si deve stabilire il LEGAME tra POLARIZZAZIONE e CAMPO ELETTRICO a quella pulsazione ω.

- ## MEZZI NON POLARI CON CARICHE VINCOLATE

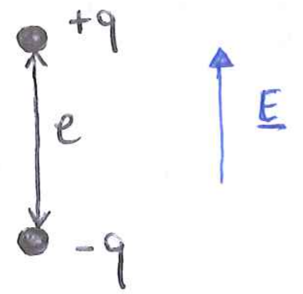
  - NON POLARE : materiale costituito da un aggregato di cariche di segno opposto, la cui distribuzione spaziale in assenza di campo elettrico è tale da far COINCIDERE il BARICENTRO delle cariche positive con quello delle cariche negative.

Un esempio può essere un GAS RAREFATTO (ideale, per esempio).

Un CAMPO ELETTRICO esercita forze opposte su cariche di segno opposto e INDUCE uno spostamento medio della distribuzione di carica positiva rispetto alla negativa, cui consegue un MOMENTO DI DIPOLO INDOTTO per unità di volume $\underline{P}$.

Assumiamo $\underline{E}$ POLARIZZATO LINEARMENTE e $\underline{P}$ PARALLELO ad $\underline{E}$:

$$\boxed{\underline{P} = P\underline{p_0} = q e \underline{p}_0}$$



dove q è la carica nell'unità di volume che si è distanziata della quantità e per effetto del campo $\underline{E}$.

* **NOTA**: Per determinare P occorre determinare lo spostamento e!

Consideriamo un MODELLO DINAMICO MACROSCOPICO del materiale:

associamo la carica q ad una massa m, VINCOLATA alla posizione di equilibrio da una FORZA DI RICHIAMO (elastica), che è LINEARE nello spostamento e.

Inoltre è presente uno SMORZAMENTO ("attrito"), dovuto al fatto che le cariche in moto cedono energia a causa delle collisioni (urti), che assumiamo proporzionale alla velocità di spostamento.

- Applichiamo l'EQUILIBRIO DELLE FORZE, parallele ad $\underline{E}$ poiché c'è ISOTROPIA:

$$\boxed{F_i + F_s + F_r = qE(t)}$$

dove:

- $\boxed{F_i = m\frac{d^2e}{dt^2}}$ FORZA D'INERZIA;
- $\boxed{F_s = s\frac{de}{dt}}$ FORZA DI SMORZAMENTO;
- $\boxed{F_r = ce}$ FORZA DI RICHIAMO;
- $\boxed{qE(t) = qE_0\cos(\omega t)}$ FORZA ESERCITATA DAL CAMPO ELETTRICO.

* La LINEARITÀ del mezzo deriva dal fatto che m, s, c sono INDIPENDENTI da ℓ! Questa condizione è tanto meglio soddisfatta quanto minore è lo spostamento delle cariche dalla posizione di equilibrio, cioè quanto minore è il campo applicato E_0 rispetto ai campi cui sono sottoposte le particelle entro il materiale $\longrightarrow$ E_0 PICCOLO

Otteniamo quindi la seguente EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

$$\boxed{m\frac{d^2\ell}{dt^2} + s\frac{d\ell}{dt} + c\ell = qE_0\cos(\omega t)}$$

Facendo uso del FORMALISMO COMPLESSO:

$$\ell = \mathrm{Re}\left[\hat{\ell} e^{j\omega t}\right] \quad ; \quad E = \mathrm{Re}\left[\hat{E} e^{j\omega t}\right]$$

Svolgendo le derivate rispetto al tempo, ricordando che $\hat{\ell}$ e $\hat{E}$ sono COSTANTI nel tempo mentre varia solo $e^{j\omega t}$. inoltre, sapendo che l'operazione di derivata e di funzione parte reale possono essere invertite, ed estendendo l'uguaglianza anche alla PARTE IMMAGINARIA otteniamo la seguente RELAZIONE ALGEBRICA:

(non più differenziale!)

$$\boxed{-\omega^2\hat{\ell} + j\omega\frac{s}{m}\hat{\ell} + \frac{c}{m}\hat{\ell} = \frac{q}{m}\hat{E}}$$

Definiamo i seguenti:

- COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO $\boxed{\alpha = \frac{s}{2m}}$
- PULSAZIONE DI RISONANZA $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}}$

otteniamo, moltiplicando per q:

$$\boxed{\left(-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2\right)q\hat{\ell} = \frac{q^2}{m}\hat{E}}$$

che fornisce il FASORE $\hat{P} = q\hat{\ell}$ del momento di dipolo indotto:

$$\boxed{\hat{P} = \frac{q^2}{m}\cdot\frac{\hat{E}}{(\omega_0^2-\omega^2) + 2j\alpha\omega}}$$

È un'equazione COMPLESSA, per via del termine $2j\alpha\omega$ a denominatore, dovuto alla FORZA DI SMORZAMENTO dovuta agli urti, alla DISSIPAZIONE.

- I termini sono COMPLESSI se sarà presente un termine DISSIPATIVO, cioè "smorzante", quindi con $\alpha \neq 0$; in generale, la dissipazione è diversa da quella che avviene per Effetto Joule nel Teorema di Poynting.

Dunque il fattore di proporzionalità tra $\hat{P}$ ed $\hat{E}$ è complesso, a meno che $\alpha = 0$; inoltre, ci dà:

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\hat{P}}{\varepsilon_0 \hat{E}}\right) = \varepsilon_0 \left(\varepsilon' + j\varepsilon''\right)}$$

La costante dielettrica relativa ε_r è, razionalizzando:

$$\underbrace{\boxed{\varepsilon' + j\varepsilon''}}_{\varepsilon_r} = 1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\alpha\omega} = \boxed{1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2j\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

→ La dipendenza da ω di $\varepsilon_r = \varepsilon' + j\varepsilon''$ DIPENDE dalle CARATTERISTICHE FISICHE DEL MEZZO (parametri q, m, α) e dalla PULSAZIONE DI RISONANZA ω_0 !

- ANALISI AL VARIARE DI ω :

(1) "BASSE" FREQUENZE $(\omega \ll \omega_0)$:

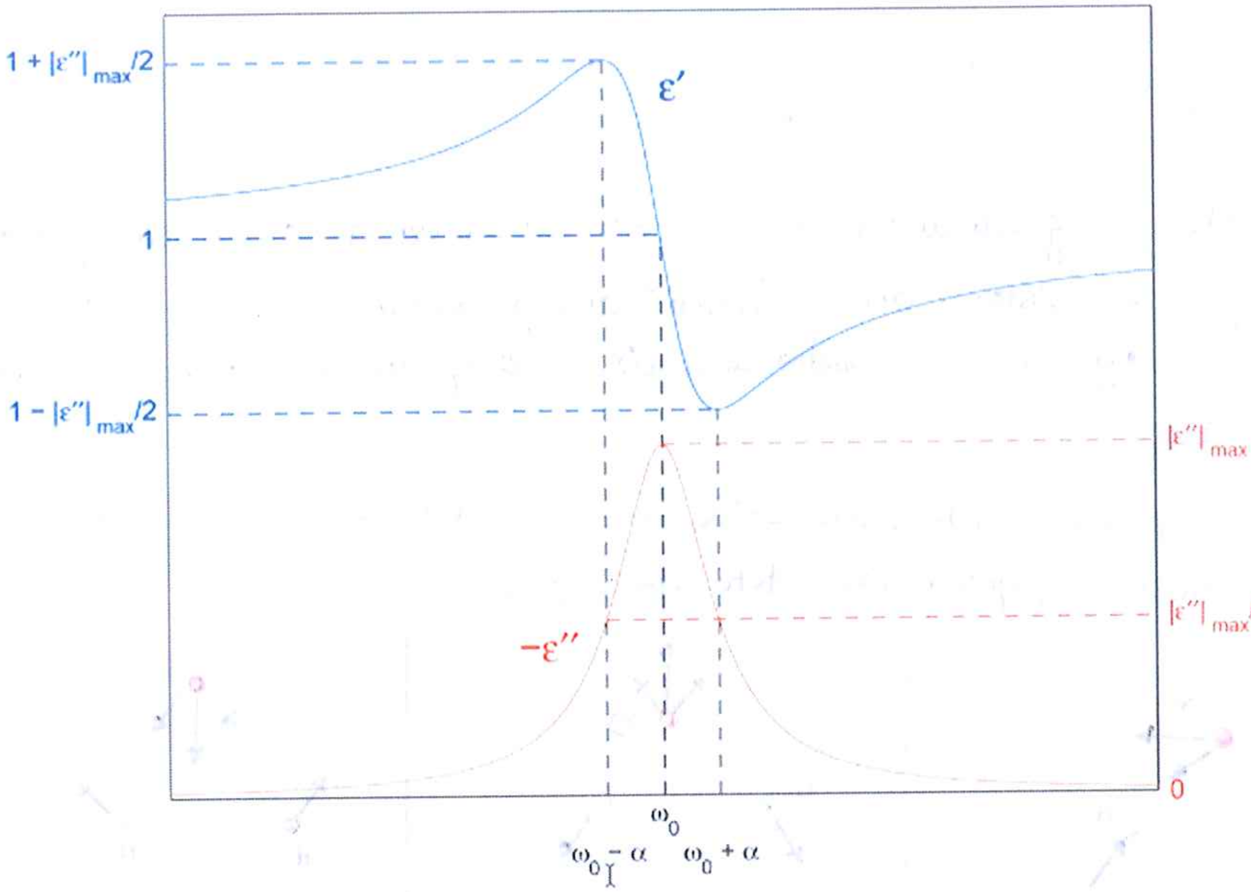
$$\varepsilon' \simeq 1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \quad ; \quad -\varepsilon'' \simeq \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^4} \ll \varepsilon'$$

Di solito, $\alpha < \omega_0$ → A basse frequenze ε è circa REALE e INDIPENDENTE da ω, in quanto ε'' è trascurabile rispetto a ε'.

(2) "ALTE" FREQUENZE $(\omega \gg \omega_0)$:

$$\varepsilon' \simeq 1 - \frac{q^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \quad ; \quad -\varepsilon'' \simeq \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{2\alpha}{\omega^3} \ll \varepsilon'$$

→ Anche per frequenze alte ε' è preponderante rispetto ad ε'' e quindi ε è sostanzialmente REALE e ha una DEBOLE DIPENDENZA da ω.



(3) NELL' INTORNO DELLA RISONANZA ($\omega \simeq \omega_0$):

Notando che $(\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) = (\omega_0 + \omega) \cdot \Delta\omega$:

$$\varepsilon' + j\varepsilon'' \simeq 1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{2\omega_0(\omega_0 - \omega) - 2j\alpha\omega_0}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2} =$$

$$= 1 + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0} \cdot \left[\frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + \alpha^2} - j \cdot \frac{\alpha}{(\Delta\omega)^2 + \alpha^2} \right]$$

con $\Delta\omega = (\omega_0 - \omega)$ che indica lo SCOSTAMENTO dalla pulsazione di risonanza.

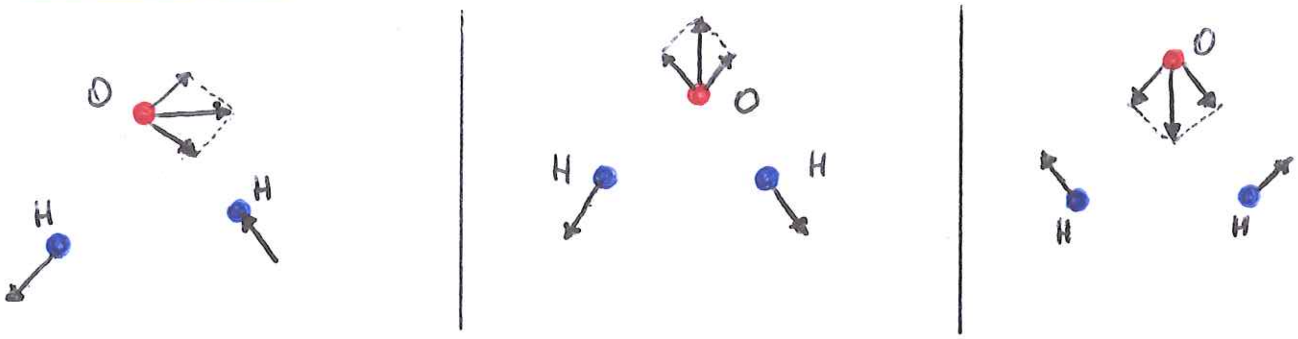
- Scostamenti di ε' da 1 e di $|\varepsilon''|$ hanno lo stesso ORDINE DI GRANDEZZA; la funzione $-\varepsilon''$ è una LORENZIANA, caratterizzata dalla forma a campana.
- $\boxed{\varepsilon'' < 0}$ SEMPRE, poiché ha segno opposto ad α e $\alpha > 0$ per la natura della forza di smorzamento che è dissipativa.
- α rappresenta lo scostamento frequenziale dalla pulsazione di risonanza ω_0, in corrispondenza del quale si è alla METÀ del MASSIMO per $-\varepsilon''$ e MASSIMO e MINIMO per ε'; si usa per definire la LARGHEZZA di una variazione.
- L'ALTEZZA tra max e min di ε' è uguale all'altezza rispetto a 0 di $-\varepsilon''$ $\longrightarrow$ ORDINI DI GRANDEZZA CONFRONTABILI DI VARIAZIONI !

• MEZZI COMPOSITI: L'ATMOSFERA

Uno stesso gas, una stessa molecola, può comportarsi diversamente a seconda del modo in cui viene stimolata.

Nella realtà, i gradi di libertà posseduti dai sistemi di cariche sono più di 1; di conseguenza esistono diversi "modi" di deformazione, che coinvolgono sia SPOSTAMENTI degli elettroni rispetto ai nuclei, sia spostamenti tra nuclei (VIBRAZIONI), sia ROTAZIONI.

Vediamo 3 possibili vibrazioni della molecola dell'acqua, intese come VAPORE ACQUEO, quindi allo stato GASSOSO:



Inoltre, raramente in natura si hanno mezzi composti da 1 solo elemento o da molecole di un solo tipo e, dato che ogni elemento o molecola ha i suoi modi di deformazione:

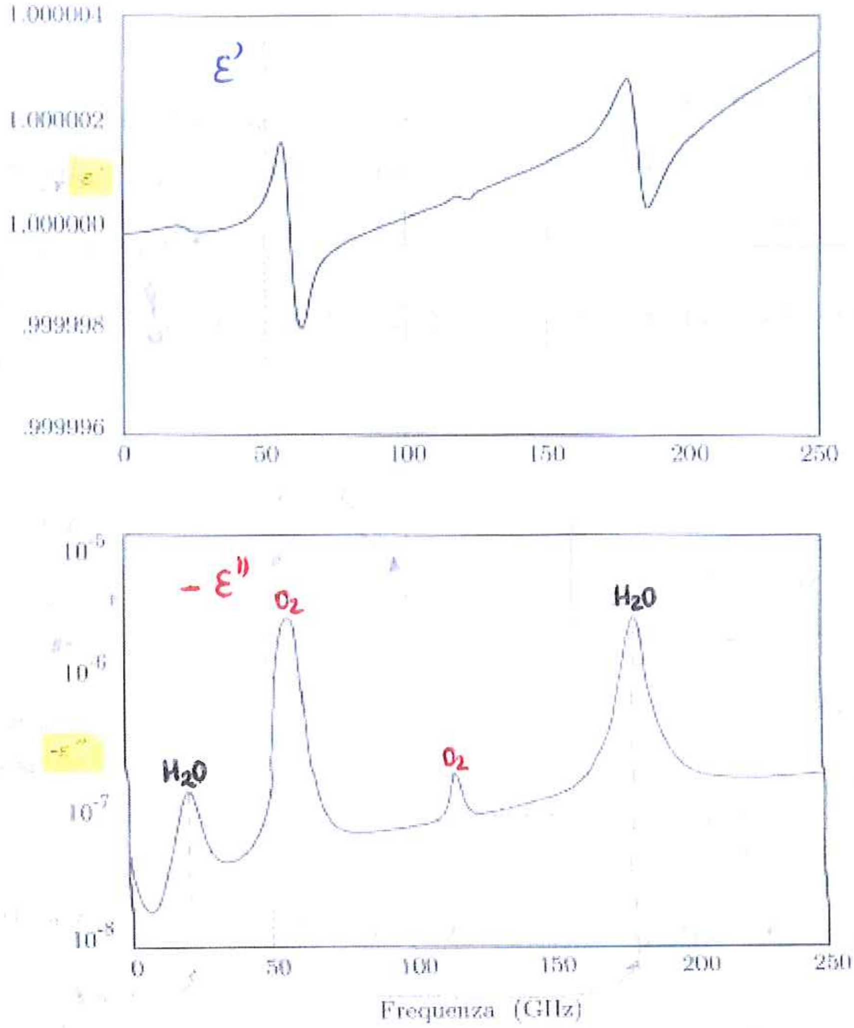
> I MODI DEL MATERIALE COMPOSITO SONO DATI DALL'INSIEME DEI SINGOLI MODI DEGLI ELEMENTI CHE LO COMPONGONO!

Per esempio, per l'ATMOSFERA: N_2, O_2, H_2O, ... ;

Ne risulta un andamento in frequenza dato dalla SOVRAPPOSIZIONE degli ANDAMENTI RELATIVI ALLE SINGOLE MOLECOLE (H_2O e O_2, quelle che hanno polarizzazioni più importanti, significative), a loro volta formati dalla sovrapposizione degli N_{H_2O} e N_{O_2} singoli modi di polarizzazione:

$$\varepsilon'(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{H_2O}} [S'F'(\omega)]_i + \sum_{i=0}^{N_{O_2}} [S'F'(\omega)]_i + \overline{\varepsilon'}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{H_2O}} [S''F''(\omega)]_i + \sum_{i=1}^{N_{O_2}} [S''F''(\omega)]_i + \overline{\varepsilon''}$$



Parte reale e parte immaginaria della costante dielettrica dell'atmosfera nell'intervallo di frequenze 0-250 GHz.
L'atmosfera è supposta alla pressione $P = 1013$ hPa, temperatura $T = 20°C$ e umidità relativa $RH = 70\%$.

dove:

- $S_i = \dfrac{q_i^2}{2\varepsilon_0 m_i \omega_{0i}}$ è l'INTENSITÀ DI RIGA, caratteristica della molecola;
- $F'(\omega)$ e $F''(\omega)$ sono le FUNZIONI DI FORMA relative a ε' ed ε'';
- $\overline{\varepsilon'}$ ed $\overline{\varepsilon''}$ tengono conto di altri contributi INDIPENDENTI DALLA FREQUENZA ω (continuo).

* **NOTA**: il secondo tra i grafici riportati sopra, quello relativo a $-\varepsilon''$, è in SCALA LOGARITMICA:

la tacca immediatamente sopra quella di 10^{-6} corrisponde a $2 \cdot 10^{-6}$, quella successiva a $3 \cdot 10^{-6}$ e così via, fino a $10 \cdot 10^{-6} = 10^{-5}$.

• MEZZO CONDUTTORE :

La presenza di cariche libere di muoversi nello spazio libero o nella banda di conduzione di un materiale rende il mezzo un CONDUTTORE. In questo caso, le cariche NON sono VINCOLATE nell'intorno di una posizione di una singola molecola $\Rightarrow$ sparisce la Forza di Richiamo $F_r = c\ell$!

• COSTANTE DIELETTRICA :

Applicando l'equilibrio delle forze :

$$\boxed{m\frac{d^2\ell}{dt^2} + s\frac{d\ell}{dt} = qE_0\cos(\omega t)}$$

con l'uso del formalismo complesso :

$$-\omega^2\hat{\ell} + j\omega\frac{s}{m}\hat{\ell} = \frac{q}{m}\hat{E}$$

ovvero, sempre ponendo il coefficiente di smorzamento $\alpha = \frac{s}{2m}$:

$$\boxed{(-\omega^2 + 2j\alpha\omega)\,q\hat{\ell} = \frac{q^2}{m}\hat{E}}$$

La costante dielettrica $\varepsilon_r = \varepsilon' + j\varepsilon''$ è data da :

$$\boxed{\varepsilon' + j\varepsilon'' = 1 - \frac{q^2}{\varepsilon_0 m}\cdot\frac{1}{\omega^2 + 4\alpha^2} - j\,\frac{q^2}{\varepsilon_0 m}\cdot\frac{2\alpha}{\omega(\omega^2 + 4\alpha^2)}}$$

Anche in questo caso $\varepsilon'' < 0$, ma, a differenza dei mezzi considerati in precedenza, DIVERGE quando $\omega \to 0$. Questo è dovuto al fatto che NON è stata imposta nessuna limitazione, tramite equazione di continuità, alla disponibilità di carica, che, accumulandosi indefinitivamente, fa divergere il momento di dipolo indotto.

- CONDUCIBILITÀ NEL DOMINIO delle FREQUENZA:

L'incognita stavolta è $u = \frac{dl}{dt}$, la VELOCITÀ MEDIA delle CARICHE per unità di volume:

$$m\frac{du}{dt} + Su = qE_0\cos(\omega t)$$

Moltiplicate per q:

$$mq\frac{du}{dt} + qSu = q^2E_0\cos(\omega t)$$

che fornisce la DENSITÀ DI CORRENTE DI CONDUZIONE $J = qu$ in funzione del campo elettrico applicato E; nel dominio delle frequenze, essa risulta:

$$j\omega m\hat{J} + 2\alpha m\hat{J} = q^2\hat{E}$$

e quindi:

$$\boxed{\hat{J} = \frac{q^2}{m(2\alpha + j\omega)}\hat{E}}$$

Questo permette di calcolare la CONDUCIBILITÀ complessa nel dominio delle frequenze:

$$\boxed{g(\omega) = \frac{q^2}{m(2\alpha + j\omega)} = \frac{q^2}{m}\cdot\frac{2\alpha}{4\alpha^2+\omega^2} - j\frac{q^2}{m}\cdot\frac{\omega}{4\alpha^2+\omega^2}}$$

- A "BASSE" FREQUENZE $(\omega \ll \alpha)$:

$$g(\omega) \simeq \frac{q^2}{m}\cdot\frac{1}{2\alpha}\underbrace{-j\frac{q^2}{m}\cdot\frac{\omega}{4\alpha^2}}_{\text{TRASCURABILE}}$$

quindi si ha: $|Im[g(\omega)]| \ll Re[g(\omega)] \rightarrow$ Parte immaginaria trascurabile!

* Nella pratica, per i materiali CONDUTTORI più comuni (rame, alluminio, ...), le radiofrequenze possono essere considerate "basse" e si ha sostanzialmente che la CONDUCIBILITÀ E' REALE!

• CONDUCIBILITÀ E COSTANTE DIELETTRICA :

È da notare una forte somiglianza tra $Re[g(\omega)]$ e $Im[\varepsilon(\omega)]$ del conduttore:

$$\boxed{\varepsilon'' = -\frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{2\alpha}{\omega(\omega^2+4\alpha^2)}} \quad ; \quad \boxed{Re[g(\omega)] = \frac{q^2}{m} \cdot \frac{2\alpha}{(\omega^2+4\alpha^2)}}$$

In sostanza, per un CONDUTTORE :

$$\boxed{\varepsilon'' = -\frac{Re[g(\omega)]}{\varepsilon_0 \omega}}$$

Ciò indica che $Im[\varepsilon]$ e $Re[g]$ descrivono lo STESSO PROCESSO DI DISSIPAZIONE di energia elettromagnetica ! (ovviamente in un conduttore).
Questo, a volte, può essere utile per ricavare dei valori.

• Inoltre, si può introdurre una QUANTITÀ EQUIVALENTE $Re[g_e]$ anche per MEZZI NON CONDUTTORI (polari o non polari con cariche vincolate), tuttavia, dato che in questi casi i meccanismi di dissipazione descritti da ε'' sono diversi, la dipendenza di $Re[g_e]$ da ω sarà diversa da quella vista in precedenza in generale.

Ma, nel caso di mezzo condensato (e.g. acqua liquida) e radiofrequenze:

$$\boxed{\varepsilon'' \simeq -\frac{g}{\omega \varepsilon_0}}$$

che viene sfruttata per definire la CONDUCIBILITÀ EQUIVALENTE del mezzo (DIELETTRICO):

$$\boxed{g_e = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon''}$$