5. PROPAGAZIONE

• PROPAGAZIONE IN MEZZO NON DISSIPATIVO :

Mezzo NON DISSIPATIVO $\longrightarrow g = 0 \Rightarrow \varepsilon'' = 0$ (ε REALE!) e consideriamo $\mu = \mu_0$

Si ricava $\underline{H}$ dalla 1ª Eq. di Maxwell OMOGENEA $\left(\frac{\nabla \times \underline{E}}{(-j\omega\mu)} = \underline{H} \right)$ e si sostituisce nella 2ª Eq. di Maxwell omogenea:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} = \nabla\nabla \cdot \underline{E} - \nabla^2 \underline{E} = (j\omega\varepsilon)(-j\omega\mu_0)\underline{E} = k^2 \underline{E}$$

dove : $\boxed{k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon}$

Dato che ALL'ESTERNO DELLE SORGENTI :

$$\nabla \cdot \underline{D} = \nabla \cdot (\varepsilon \underline{E}) \underset{\substack{\uparrow \\ \varepsilon \text{ funzione delle} \\ \text{coordinate!}}}{=} \underline{E} \cdot \nabla\varepsilon + \varepsilon \nabla \cdot \underline{E} = \underbrace{\rho = 0}_{\text{esterno delle sorgenti}}$$

si ricava : $$\nabla \cdot \underline{E} = -\left(\frac{1}{\varepsilon} \underline{E} \cdot \nabla\varepsilon \right)$$

da cui : $$\nabla\nabla \cdot \underline{E} = -\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon} \underline{E} \cdot \nabla\varepsilon \right)$$

quindi :

$$\boxed{\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} + \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon} \underline{E} \cdot \nabla\varepsilon \right) = 0}$$

Consideriamo un MEZZO DEBOLMENTE DISOMOGENEO : tale che le variazioni spaziali della costante dielettrica siano sufficientemente basse da rendere il terzo termine trascurabile rispetto agli altri due ($|\nabla\varepsilon| \to 0$). Notare che ciò si ha anche per k^2 che va all'infinito, ovvero per $\omega \to \infty$.

Otteniamo così l' EQUAZIONE DELLE ONDE :

$$\boxed{\nabla^2 \underline{E} + k^2(\underline{r}) \underline{E} = 0}$$

L'equazione delle onde vale in modo approssimato nei mezzi non omogenei per qualsiasi coppia $|\nabla\varepsilon|$ e ω tali che:

$$\boxed{\left|\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right| \ll k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon}$$ → APPROSSIMAZIONE OTTICA

Vale tanto più quanto la FREQUENZA E' ALTA ($f > 100\ THz$), ma va bene anche per RADIOFREQUENZE e MICROONDE!

Definiamo:

- INDICE DI RIFRAZIONE: $\boxed{n(\underline{r}) = \sqrt{\varepsilon'(\underline{r})}}$
- COSTANTE DEL VUOTO: $\boxed{k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

Abbiamo quindi: $\boxed{K(\underline{r}) = n(\underline{r})\cdot k_0}$

Dunque l'equazione delle onde diventa:

$$\nabla^2\underline{E} + k_0^2 n^2(\underline{r})\underline{E} = 0$$

Ipotizziamo che una soluzione sia data da un campo elettrico $\underline{E}(\underline{r})$ della seguente forma (ONDA ELETTROMAGNETICA):

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0\, e^{-jk_0\phi(\underline{r})}}$$

Assumendo:

1) $\underline{E}_0$ COSTANTE con le COORDINATE;
2) $\Phi(\underline{r}) :=$ FUNZIONE DI FASE → Funzione di PUNTO, dipende dalle COORDINATE.

Sfruttando il Teorema di Unicità, vediamo se $\underline{E}(\underline{r})$ è soluzione, cioè se soddisfa l'equazione delle onde:

$$\nabla^2\underline{E}_0 e^{-jk_0\phi(\underline{r})} + k_0^2 n^2(\underline{r})\underline{E}_0 e^{-jk_0\phi(\underline{r})} = 0$$

ovvero, poiché $\underline{E}_0$ NON dipende dalle coordinate:

$$\underline{E}_0\nabla^2 e^{-jk_0\phi(\underline{r})} + k_0^2 n^2(\underline{r})\underline{E}_0 e^{-jk_0\phi(\underline{r})} = 0$$

Dato che $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$:

$$\nabla^2 e^{-jk_o\phi} = -jk_o\left(-jk_o \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \nabla^2\phi\right) e^{-jk_o\phi}$$

ed è quindi necessario che:

$$-jk_o\left(-jk_o \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \nabla^2\phi\right) + k_o^2 n^2(\underline{r}) = 0$$

Cioè:

$$-k_o^2 \nabla\phi \cdot \nabla\phi - jk_o \nabla^2\phi + k_o^2 n^2 = 0$$

Eguagliando PARTE REALE e PARTE IMMAGINARIA, abbiamo:

$$\boxed{\begin{cases} n^2 - \nabla\phi \cdot \nabla\phi = 0 \\ \nabla^2\phi = 0 \end{cases}} \longrightarrow$$ CONDIZIONI affinché $\underline{E}(\underline{r})$ sia SOLUZIONE

- EQUAZIONE EICONALE:

$$\boxed{n^2(\underline{r}) - \left|\nabla\Phi(\underline{r})\right|^2 = 0}$$

Fornisce la CLASSE di FUNZIONI DI FASE $\Phi(\underline{r})$ compatibili con il MEZZO, rappresentato dall'indice di rifrazione $n(\underline{r})$, o meglio compatibili con la distribuzione spaziale dell'indice di rifrazione, affinché $\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_o e^{-jk_o\Phi(\underline{r})}$ sia soluzione!

Per dualità, si ha anche il campo magnetico:

$$\boxed{\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}_o e^{-jk_o\Phi(\underline{r})}}$$

- L'ONDA ELETTROMAGNETICA:

La soluzione: $\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_o \cdot e^{-jk_o\Phi(\underline{r})}$

è un VETTORE COMPLESSO che è prodotto di un fattore vettoriale $\underline{E}_o$, che ne determina AMPIEZZA e POLARIZZAZIONE, per un fattore di FASE $e^{-jk_o\Phi(\underline{r})}$

- Il campo elettrico funzione dello spazio e del TEMPO è:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \mathrm{Re}\left[\underline{E}(\underline{r}) e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{E}_o e^{-j[k_o\Phi(\underline{r}) - \omega t]}\right]$$

* Assumiamo che $\underline{E}_o$ sia REALE.

Consideriamo l'ASCISSA r lungo la direzione $\underline{r}_0$. Le componenti di $\underline{E}(\underline{r},t)$ nell'INTORNO del PUNTO individuato da $\underline{r}$ sono:

$$\boxed{E_i(r,t) = E_{0_i} \cos\left[K_0 \phi(r) - \omega t\right]} \quad , \text{ per } i = x,y,z$$

Ciò indica che:

- In ogni punto dello spazio, le COMPONENTI del campo elettrico sono FUNZIONI SINUSOIDALI del TEMPO $\longrightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$
- Fissato un istante t, le COMPONENTI sono FUNZIONI SINUSOIDALI dell'ASCISSA r in INTORNI DI CIASCUN PUNTO dello spazio sufficientemente piccoli perché $\Phi(\underline{r})$ sia approssimabile con il termine del 1° ordine della sua espansione in serie di Taylor $\left(\Phi(\underline{r}) \simeq r\right)$.

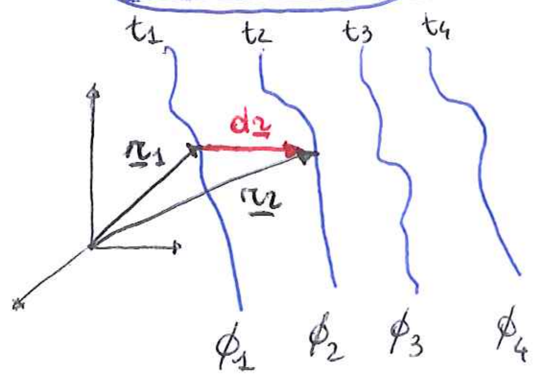
$\longrightarrow$ In tali intorni si identifica la LUNGHEZZA D'ONDA LOCALE $\boxed{\lambda(\underline{r}) = \frac{2\pi}{K_0} \cdot \frac{1}{n(\underline{r})}}$ che caratterizza la PERIODICITÀ SPAZIALE del campo.

* Consideriamo ISTANTI SUCCESSIVI:

la sinusoide di ogni componente E_i "trasla", dal momento che l'ascissa r deve aumentare affinché il termine $K_0 \Phi(r)$ compensi la variazione di ωt e lasci invariato il valore della componente E_i $\longrightarrow$ L'ONDA SI PROPAGA

- Nello SPAZIO, $\boxed{E_i(\underline{r}) = \text{COSTANTE}} \iff \boxed{K_0 \Phi(\underline{r}) - \omega t = \text{COSTANTE}}$

Questa condizione, per ogni istante t, definisce una superficie nello spazio, detta SUPERFICIE D'ONDA, che col trascorrere del tempo trasla, dando luogo alla PROPAGAZIONE DELL'ONDA NELLO SPAZIO.



Se il tempo varia di dt, lo spostamento dr in una direzione prefissata $\underline{r}_0$ che annulla il differenziale della condizione precedente è:

$$\boxed{K_0 (\nabla \Phi) \cdot \underline{r}_0 \, dr - \omega dt = 0}$$

Da cui otteniamo la VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE nella direzione $\underline{r}_0$:

$$\boxed{\left.\frac{dr}{dt}\right|_{\underline{r}_0} = \frac{\omega}{k_0 \nabla\Phi \cdot \underline{r}_0} = u|_{\underline{r}_0}}$$

* Il valore di fase e quindi la VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE DIPENDE da $\underline{r}_0$!

- Se $\underline{r}_0 \parallel \nabla\Phi$:

$$u = \frac{\omega}{k_0|\nabla\Phi|} \underset{\text{Eq. EICONALE}}{=} \frac{\omega}{k_0 n} = \frac{c_0}{n}$$ MINIMA VELOCITÀ

Quindi, per $\underline{r}_0 \parallel \nabla\Phi$: $\boxed{u_{min} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon'}}}$, con $c_0 \simeq 3 \cdot 10^8\ m/s$

- Se $\underline{r}_0 \perp \nabla\Phi$: $u \to \infty$ (NON è la velocità di trasporto!)

- RELAZIONI TRA CAMPI E DIREZIONE DI PROPAGAZIONE:

Abbiamo: $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-jk_0\Phi(\underline{r})}$ e $\underline{H} = \underline{H}_0 e^{-jk_0\Phi(\underline{r})}$.

Dalla 1ª Equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \left[\underline{E}_0 e^{-jk_0\phi(\underline{r})}\right] = -j\omega\mu_0 \underline{H}_0 e^{-jk_0\phi(\underline{r})}$$

Sviluppando:

$$(\nabla \times \underline{E}_0)\cancel{e^{-jk_0\phi(\underline{r})}} - \underline{E}_0 \times \nabla \cancel{e^{-jk_0\phi(\underline{r})}} = -j\omega\mu_0 \underline{H}_0 \cancel{e^{-jk_0\Phi(\underline{r})}}$$

$(\underline{E}_0$ costante in $\underline{r})$

$$\Rightarrow 0 + \underline{E}_0 \times [-jk_0 \nabla\Phi(\underline{r})] = +j\omega\mu_0 \underline{H}_0$$

$$\Rightarrow \cancel{j}k_0 \nabla\Phi(\underline{r}) \times \underline{E}_0 = \cancel{j}\omega\mu_0 \underline{H}_0 \implies \nabla\Phi(\underline{r}) \times \underline{E}_0 = \frac{\cancel{\omega}\mu_0}{\cancel{\omega}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\underline{H}_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\underline{H}_0$$

Quindi:

$$\boxed{\nabla\Phi \times \underline{E}_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\underline{H}_0}$$

Analogamente, dalla 2ª Eq. di Maxwell:

$$\boxed{\nabla\Phi \times \underline{H}_0 = -\frac{\varepsilon\underline{E}_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

Poniamo:

- $\eta_0 := \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \longrightarrow$ IMPEDENZA INTRINSECA DEL VUOTO

- $\eta := \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon(\underline{r})}} \longrightarrow$ IMPEDENZA INTRINSECA DEL MEZZO

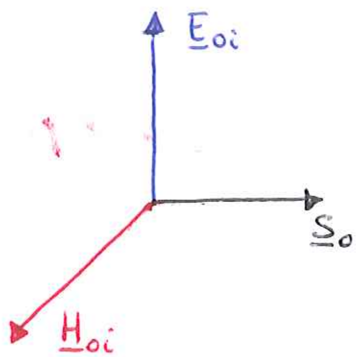
- $\underline{s}_0 \longrightarrow$ VERSORE DI $\nabla\Phi(\underline{r}) \Rightarrow \nabla\Phi = |\nabla\Phi|\,\underline{s}_0 = n\,\underline{s}_0 = \sqrt{\varepsilon'}\,\underline{s}_0$

E otteniamo:

$$\boxed{\underline{H}_0 = \frac{\nabla\phi \times \underline{E}_0}{\eta_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon'}\,\underline{s}_0 \times \underline{E}_0}{\eta_0} = \frac{1}{\eta}\,\underline{s}_0 \times \underline{E}_0}$$

$$\boxed{\underline{E}_0 = -\frac{\nabla\phi \times \underline{H}_0}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}} = -\eta\,\underline{s}_0 \times \underline{H}_0}$$

* Sia $\underline{H}_0$ che $\underline{E}_0$ sono ORTOGONALI ad $\underline{s}_0$, cioè ORTOGONALI ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE di $\nabla\Phi(\underline{r})$!



, dove $i = r, j$ individua le coppie di vettori reali e immaginari

TERNA TRIRETTANGOLA DESTRA

- NOTA: I PIANI DI POLARIZZAZIONE individuati da $(\underline{E}_{0r}, \underline{E}_{0j})$ e da $(\underline{H}_{0r}, \underline{H}_{0j})$ COINCIDONO! Poiché entrambi devono essere ortogonali ad $\underline{s}_0$.

$\rightarrow$ Posso "costruire" la PROPAGAZIONE andando a vedere come varia $\underline{s}_0$, cioè come varia la direzione di propagazione nello spazio ($\nabla\Phi(\underline{r})$).

Dall' Eq. Eiconale in FORMA VETTORIALE : $\nabla \phi = n \underline{s}_0$:

$$\nabla \phi \cdot \underline{s}_0 = \frac{d\phi}{ds} = n$$

se s è l'ASCISSA CURVILINEA lungo il raggio elettromagnetico.

Quindi:

$$\nabla n = \nabla \frac{d\phi}{ds} = \frac{d}{ds}(\nabla \phi) = \frac{d}{ds}(n \underline{s}_0)$$

Per definizione: $\underline{s}_0 = \frac{d\underline{r}}{ds}$, per cui:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left[n(\underline{r}) \cdot \frac{d\underline{r}}{ds}\right] = \nabla n}$$

EQUAZIONE DEL RAGGIO

* Mi permette di INDIVIDUARE IL RAGGIO ELETTROMAGNETICO punto per punto, come traiettoria dell'estremo libero del vettore posizione $\underline{r}$ al variare dell'ascissa curvilinea s.

Poiché : $$\boxed{\frac{d}{ds}(n \underline{s}_0) = \underline{s}_0 \frac{dn}{ds} + n \frac{d\underline{s}_0}{ds} = \nabla n}$$

dipende dalla direzione iniziale $\underline{s}_0$

dipende da come varia la direzione $\left(\frac{d\underline{s}_0}{ds}\right)$

si ha che:

(1) Il RAGGIO rimane localmente confinato nel PIANO individuato da $\underline{s}_0$ e ∇n;

(2) La TRAIETTORIA si INCURVA nel piano che contiene la direzione di MASSIMA VARIAZIONE dell' INDICE DI RIFRAZIONE, cioè ∇n !

• CURVATURA DEL RAGGIO :

La CURVATURA $\frac{1}{\rho}$ del raggio elettromagnetico è data da:

$$\frac{\underline{n}_0}{\rho} = \frac{d\underline{s}_0}{ds}$$, con $\underline{n}_0$ normale principale alla curva, diretta verso il centro della circonferenza osculatrice.

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \underline{n}_0 \cdot \frac{d\underline{s}_0}{ds} = \underline{n}_0 \cdot \left(\frac{\nabla n}{n} - \underbrace{\frac{\underline{s}_0}{n}\frac{dn}{ds}}_{0\ (\underline{n}_0 \perp \underline{s}_0)}\right) = \underline{n}_0 \cdot \frac{\nabla n}{n}$$

A parità di n, la curvatura aumenta con $|\nabla n|$ e la CONCAVITÀ $(\rho > 0)$ è rivolta verso la regione con indice di rifrazione crescente.

- **RAGGI ELETTROMAGNETICI :**

Dal Vettore di Poynting:

$$\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{E}\times\underline{H}^* = \frac{1}{2}\underline{E}_0\times\underline{H}_0^* = \frac{1}{2}\underline{E}_0\times\frac{\underline{S}_0\times\underline{E}_0^*}{\eta} = \frac{1}{2}\frac{\underline{E}_0\cdot\underline{E}_0^*}{\eta}\underline{S}_0 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\underline{E}_0\cdot\underline{S}_0}{\eta}}_{0\ (\underline{E}_0\perp\underline{S}_0)}\underline{E}_0^*$$

Quindi:

$$\boxed{\underline{P} = \frac{1}{2\eta}\cdot\underline{E}_0\cdot\underline{E}_0^*\,\underline{S}_0}$$

Notiamo che:

- ha la DIREZIONE e il VERSO di $\underline{S}_0$, ORTOGONALE alle superfici d'onda $\Phi(\underline{r}) = \text{cost.}$;
- dunque, il TRASPORTO DI POTENZA avviene ORTOGONALMENTE alle $\Phi(\underline{r}) = \text{cost.}$;
- curve ortogonali in ogni punto alle superfici d'onda sono quindi le traiettorie dell'energia elettromagnetica lungo cui c'è propagazione; sono dette "RAGGI ELETTROMAGNETICI" e, note le $\Phi(\underline{r})$, posso "costruirmeli".

- **VANTAGGI / CONCLUSIONI :**

(1) Ridurre il problema della propagazione da tridimensionale (nello spazio) a MONODIMENSIONALE lungo la linea che congiunge SORGENTE e RICEVITORE!;

(2) Va determinato il RAGGIO, cioè proprio questa linea congiungente la sorgente con il punto di ricezione; ciò si fa tramite le superfici d'onda date dalla funzione di fase $\Phi(\underline{r})$, la quale si ricava dall'EQUAZIONE EICONALE.

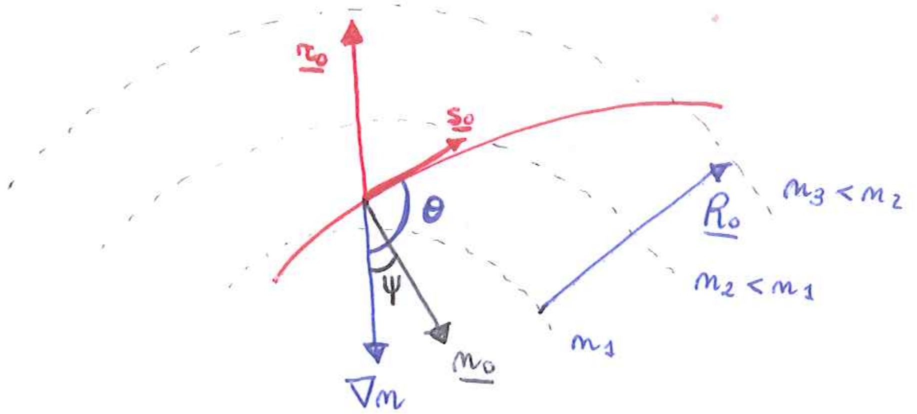
(3) Vanno determinate AMPIEZZA, FASE e POLARIZZAZIONE del campo lungo la direzione del raggio elettromagnetico;

(4) La traiettoria elettromagnetica dipende dalla distribuzione spaziale dell'INDICE DI RIFRAZIONE del mezzo ($n = \sqrt{\varepsilon'}$) e dalla DIREZIONE INIZIALE DI PROPAGAZIONE.

* Il raggio elettromagnetico è LOCALMENTE RETTILINEO se $\underline{s}_0 \parallel \nabla n$ $(\rho = 0)$.
* Se il MEZZO è OMOGENEO $(\nabla n = 0,\ n = \sqrt{\varepsilon'}$ costante con le coordinate!$) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ RAGGIO RETTILINEO OVUNQUE!

- RAGGI IN MEZZI STRATIFICATI RADIALMENTE:



Consideriamo l'ATMOSFERA TERRESTRE con indice di rifrazione a simmetria sferica:

$$\nabla n = -|\nabla n|\,\underline{R}_0 \qquad (\text{TROPOSFERA})$$

$$\frac{d\underline{s}_0}{ds} = -\frac{|\nabla n|}{n}\underline{R}_0 - \frac{\underline{s}_0}{n}\frac{dn}{ds}$$

Il raggio è confinato nel piano radiale che contiene $\underline{s}_0$ ed è incurvato verso il basso con curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \underline{n}_0 \cdot \frac{\nabla n}{n} = \frac{|\nabla n|}{n}\cos\psi = \frac{|\nabla n|}{n}\sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{|\nabla n|}{n}\sin\theta$$

Proiezione su $\underline{s}_0$

- PRINCIPIO DI FERMAT E LUNGHEZZA DI PERCORSO:

Un raggio elettromagnetico che passa per due punti P_1 e P_2 è tale che la LUNGHEZZA $\mathcal{L}$ del percorso elettromagnetico:

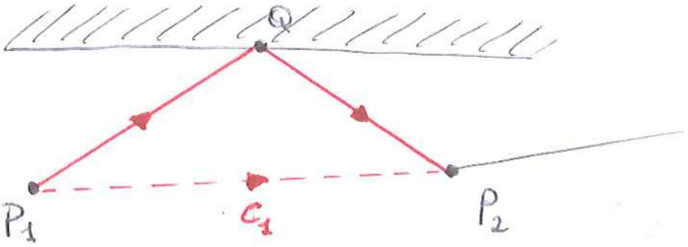
$$\boxed{\mathcal{L} = \int_{P_1}^{P_2} n(\underline{r})\,ds}$$

funzionale della traiettoria seguita tra P_1 e P_2, è STAZIONARIA (Principio di Fermat)

Considerata una qualunque curva che congiunge i due punti, quella (o quelle) che rende STAZIONARIO (generalmente MINIMO) il valore dell'integrale di linea di $n(\underline{r})$ è la TRAIETTORIA DELL'ENERGIA ELETTROMAGNETICA.

• Ricerca delle Condizioni di Stazionarietà:

Tecnica numerica per determinare i raggi, anche in presenza di RIFLESSIONI.



La lunghezza del percorso elettromagnetico è legata al tempo τ che l'energia elettromagnetica impiega tra 2 punti, oltre che alla fase ϕ con cui l'onda giunge.

Noto l'andamento di $n(\underline{r})$, la misura di τ dà la distanza tra trasmettitore e ricevitore.

Con 3 o più TRASMETTITORI, la misura dei 3 o più TEMPI fornisce la posizione (3 COORDINATE) del ricevitore

→ SISTEMA DI RADIOGLOBALIZZAZIONE GLOBALE SATELLITARE

GPS (Global Positioning System)

Con precisione da alcuni metri alle diverse decine di metri.

• RADAR:

RADAR (Radio Detection~~ing~~ and Ranging) determina la DISTANZA di un oggetto dalla misura dell'intervallo di tempo τ tra il momento in cui viene trasmessa l'energia elettromagnetica e quello in cui viene ricevuta l'eco (energia retrodiffusa)

$$R = \frac{\tau \cdot c_0}{2}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{f}$$

Se $f = 3\,GHz \Rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 10^8 \, m/\cancel{s}}{3 \cdot 10^9 \, \cancel{s^{-1}}} = 0,1\,m$ → Con frequenze dell'ordine dei GHz si ottengono precisioni al livello dei centimetri!