CRC

CRC = Cyclic Redundancy Check

Consideriamo il CRC8, che utilizza $m=8$ bit di controllo.

- **ALGORITMO CRC:**

1) Prendere il dato ed estenderlo con m bit di tutti 0 (moltiplicare per x^m);

2) Vedere il dato come un POLINOMIO.

   C'è un POLINOMIO GENERATORE o DIVISORE; in CRC8 esso è:

   $\boxed{x^8+x^2+x+1} \longrightarrow (1)00000111$ (di solito il 1° uno si omette)

   In hex: 0X07

3) Dividere il DATO per il POLINOMIO DIVISORE: il RESTO sarà il CRC!

   ATTENZIONE: divisione in GF(2)

- **In ricezione:** se $\dfrac{\text{DATO} + \text{CRC}}{\text{DIVISORE}}$ dà come $\boxed{\text{RESTO} = 0} \Rightarrow$ non ci sono stati errori

Esempio:

DATA: 10 0110 0101 $\longrightarrow x^9+x^6+x^5+x^2+1$

CRC8: (1) 0000 0111 $\longrightarrow x^8+x^2+x+1$

1.) Estendo il dato con 8 zeri:

10 0110 0101 0000 0000 $\longrightarrow x^{17}+x^{14}+x^{13}+x^{10}+x^8$

2.) Divisione tra polinomi; ottengo:

$$x^9+x^6+x^5+x^3+x + \frac{(x^4+x^2+x)}{(x^8+x^2+x+1)} \Bigg\} \frac{\text{RESTO}}{\text{DIVISORE}}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{CRC}} = \text{RESTO} = x^4+x^2+x \longrightarrow$ 0001 0110

$\longrightarrow \boxed{\text{DATO + CRC}}$: 10 0110 0101 00010110

Verifica in Ricezione:

$$\frac{10\ 0110\ 0101\ 00010110}{(1)\ 0000\ 0111} \pmod 2 =$$

$= x^9+x^6+x^5+x^3+x +$ RESTO ZERO ✓

Se $\dfrac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{P(x)+R(x)}{D(x)} = Q(x) + \underbrace{2\frac{R(x)}{D(x)}}_{=0 \pmod 2} = Q(x)$$

$\longrightarrow$ È importante essere in un Campo di Galois 2: GF(2)!

Tutto ciò funziona bene perché il CRC è LINEARE rispetto all'operazione di XOR:

$$\boxed{CRC(data \oplus \Delta) = CRC(data) \oplus CRC(\Delta)}$$

e lo XOR $\oplus$ equivale ad una <u>SOMMA</u> in $GF(2)$!

In ricezione ho DATA + ERROR PATTERN. nell'error pattern, dove ho un 1, ho un <u>bit-flip</u>, cioè un cambio del valore del bit.

Received Data: $\boxed{D_{RX} = D_{TX} \oplus E}$ → <u>non</u> riconosco l'errore SOLO SE D_{RX} è divisibile per P

Ma, poiché per costruzione, D_{TX} è divisibile per P, che lo sia anche E è molto improbabile!

TRASFORMATE

- $x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$
- $x(-t) \longleftrightarrow X(-f)$
- $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f)$
- $X(f-f_0) \longleftrightarrow e^{j2\pi f_0 t} \cdot x(t)$
- $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)$
- $\int_{-\infty}^{t} x(u)\,du \longleftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{A \cdot \delta(f)}{2}$
- $t^n \cdot x(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)^n} \cdot \frac{d^n}{df^n}\left(X(f)\right)$
- $e^{-\alpha t} \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$
- $e^{\alpha t} \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha - j2\pi f}$
- $e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$
- $\delta'(t) = -\frac{\delta(t)}{t} \longleftrightarrow j2\pi f$
- $u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$
- $\delta(t) \longleftrightarrow 1(f)$ e $\delta(f) \longleftrightarrow 1(t)$
- $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \longleftrightarrow T_0 \,\mathrm{sinc}(f T_0)$
- $\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right) \longleftrightarrow T_0 \,\mathrm{rect}(f T_0)$
- $\mathrm{sign}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$
- $\frac{1}{t} \longleftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sign}(f)$
- $t^n \longleftrightarrow \frac{\delta^{(n)}(f)}{\cancel{f^n}(-j2\pi)^n}$
- $\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$
- $\sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$

Inviluppo Complesso

Un segnale $x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ si può rappresentare per mezzo del FASORE $\underline{x} = a e^{j\varphi}$, ponendo: $x(t) = \mathrm{Re}\{\underline{x} \cdot e^{j2\pi f_0 t}\}$.

INVILUPPO COMPLESSO: è un fasore in cui MODULO e FASE sono funzioni del tempo:

$$\boxed{\underline{x}(t) = a(t) \cdot e^{j\varphi(t)}}$$

Ad $\underline{x}(t)$ si può associare un segnale REALE:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{\underline{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = \underline{a(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))}$$

Permette di descrivere la MODULAZIONE:

- MODULAZIONE IN AMPIEZZA: fase nulla $(\varphi(t) = 0)$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = a(t) \Rightarrow x(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

→ modulo l'ampiezza del coseno!

- MODULAZIONE DI FASE: modulo costante $(a(t) = 1)$:

$$\underline{x}(t) = e^{j\varphi(t)} \Rightarrow x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

→ modulo l'argomento del coseno, la fase!

$\underline{x}(t)$ si può anche scrivere come: $\underline{\underline{x}(t) = a(t) + j b(t)}$

$$\Rightarrow x(t) = \mathrm{Re}\{[a(t) + j b(t)] \cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = \underline{a(t)\cos(2\pi f_0 t) - b(t)\sin(2\pi f_0 t)}$$

Qualunque segnale si può scrivere come somma di una portante in fase e di una in quadratura.

Andrea Pepe ; matricola: 0267020 , 23/07/2020

(1) $x(t) = \frac{\sin^2(2\pi t)}{t}$, $\forall t$

$x(t)$ è trasformabile secondo Fourier, poiché, per $t \to +\infty$, $x(t)$ tende a 0 ; invece per $t \to 0$; $x(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} \cdot \sin(2\pi t) \cdot 2\pi$

e $x(t) \to 2\pi \sin(2\pi t)$; ma il $\sin(2\pi f_0 t)$ è trasformabile, quindi anche $x(t)$ è trasformabile.

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \frac{\cos(4\pi t)}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{j4\pi t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{-j4\pi t}$$

Per $\frac{1}{2t}$, consideriamo che $\text{sign}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$; per dualità:

$-\text{sign}(f) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi t}$; quindi $F\left[\frac{1}{t}\right] = -j\pi \,\text{sign}(f)$

Consideriamo poi che $x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0)$;

nel nostro caso : $f_0 = \pm 2$

Quindi : $F\left[\frac{1}{t} \cdot e^{j4\pi t} + \frac{1}{t} \cdot e^{-j4\pi t}\right] = -j\pi \,\text{sign}(f-2) - j\pi \,\text{sign}(f+2)$

In definitiva:

$$X(f) = -\frac{1}{2} j\pi \,\text{sign}(f) + \frac{1}{4} j\pi \left[\text{sign}(f-2) + \text{sign}(f+2)\right]$$

Andrea Pepe

a) $x(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$; $y(t) = \dfrac{1}{t^2+4}$

$$F\left[C_{xy}(\tau)\right] = X(f) \cdot Y^*(f)$$

Per $\alpha > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$: $e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$

Per dualità: $e^{-\alpha|f|} \longleftrightarrow \dfrac{2\alpha/4\pi^2}{\frac{\alpha^2}{4\pi^2} + t^2}$

Quindi, per $\alpha = 2\pi$, si ottiene $X(f) = \pi e^{-2\pi|f|}$

e, per $\alpha = 4\pi$, si ottiene $Y(f) = \dfrac{\pi}{2} \cdot e^{-4\pi|f|} = Y^*(f)$, poiché è reale.

$$\Rightarrow F\left[C_{xy}(\tau)\right] = \frac{\pi^2}{2} \cdot e^{-6\pi|f|}$$

Ma $e^{-6\pi|f|} \longleftrightarrow \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2}$, per $\alpha = 6\pi$

$\Rightarrow e^{-6\pi|f|} \longleftrightarrow \dfrac{12\pi}{36\pi^2 + 4\pi^2 t^2} = \dfrac{12}{36\pi + 4\pi t}$; moltiplicando per $\dfrac{\pi^2}{2}$ si ha $C_{xy}(t)$.

Quindi: $C_{xy}(t) = \dfrac{6\pi}{36 + 4t}$.

Andrea Pepe

(3) 4PSK $\rightarrow$ 64QAM ; B_N, n_0, P_b costanti. $P_{b,4} = P_{b,64} = 10^{-6}$.

La potenza ricevuta: $P_R = E_b \cdot f_b \simeq \gamma \cdot n_0 \cdot B_N \cdot h$, con h numero di bit.

$P_{R,4} = \gamma_4 \cdot n_0 \cdot B_N \cdot 2$; $P_{R,64} = \gamma_{64} \cdot n_0 \cdot B_N \cdot 6$

$$\Rightarrow P_{R,64} = \frac{\gamma_{64} \cdot \cancel{n_0} \cdot \cancel{B_N} \cdot \cancel{6}^{\,3}}{\gamma_4 \cdot \cancel{n_0} \cdot \cancel{B_N} \cdot \cancel{2}} \cdot P_{R,4} = 3\,\frac{\gamma_{64}}{\gamma_4} \cdot P_{R,4}$$

$$P_{b,4} \simeq \frac{e^{-\gamma_4}}{3\pi} = 10^{-6} \Rightarrow \gamma_4 = 11{,}57$$

$$P_{b,64} \simeq \frac{7}{3 \cdot 4} \cdot \frac{e^{-\gamma_{64}/7}}{3\pi} \Rightarrow \gamma_{64} = 77{,}23$$

Quindi:

$$P_{R,64} = 3 \cdot \frac{77{,}23}{11{,}57} \cdot P_{R,4} \simeq 20 \cdot P_{R,4}$$

Quindi la potenza ricevuta deve aumentare di circa 20 volte!

Andrea Pepe

DOMANDA OPZIONALE:

La applicazione della serie di Fourier per segnali non periodici, definiti in un dominio temporale ampio T, puo' essere fatta periodicizzando fittiziamente il segnale e considerando solo l'intervallo di interesse. In pratica cio' avviene moltiplicando la serie di Fourier per $rect\left(\frac{t}{T}\right)$.

Andrea Pepe ; matricola: 0267020 ; 23/07/2020

① $h(t) = \dfrac{1}{4+j2\pi t}$, $\forall t$

$X(f) = \text{rect}\left(\dfrac{f-2}{4}\right)$

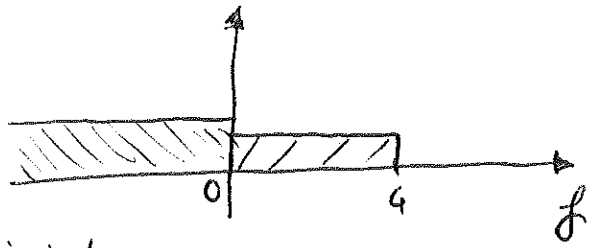
Poiché $e^{-\alpha t} \cdot u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{\alpha + j2\pi f}$, per dualità: $e^{\alpha f} \cdot u(-f) \longleftrightarrow \dfrac{1}{\alpha + j2\pi t}$

$(\alpha \in \mathbb{R}^+)$

Quindi, per $\alpha = 4$; $H(f) = e^{4f} \cdot u(-f)$

$\text{rect}\left(\dfrac{f-2}{4}\right)$ vuol dire $-2 < f-2 < 2$, cioè $0 < f < 4$

Invece $u(-f)$ vuol dire $f < 0$



$\Rightarrow$ Non c'è intersezione, il dominio di integrazione è nullo.

$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = e^{4f} \cdot u(-f) \cdot \text{rect}\left(\dfrac{f-2}{4}\right)$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{4f} \cdot u(-f) \cdot \text{rect}\left(\frac{f-2}{4}\right) \cdot e^{j2\pi f t}\, df = 0$$

$\Rightarrow y(t) = 0$.

Andrea Pepe

(2) $P_b = 10^{-2}$ $R_c = \frac{1}{3}$ $d_{free} = 6$ $N = 60000$ bit

Poiché la trasmissione è binaria, un simbolo equivale ad un bit.

$$P_p \simeq \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{-\gamma d_{free} \cdot R_c}}{3\pi} = \frac{1}{60000} \cdot \frac{e^{-\gamma \cdot 2}}{3\pi}$$

$$P_b \simeq \frac{e^{-\gamma}}{3\pi} = 10^{-2} \Rightarrow \gamma = 2,36$$

$$\Rightarrow P_p = \frac{1}{60000} \cdot \frac{e^{-4,72}}{3\pi} = 1,57 \cdot 10^{-8}$$

$$P_{bc} \simeq \frac{P_p}{2} = 0,78 \cdot 10^{-8}$$

Andrea Pepe

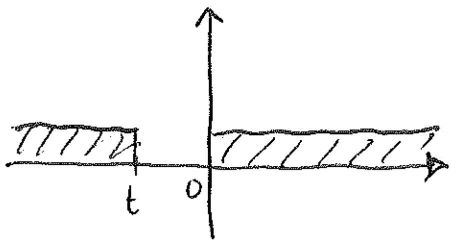
③ $x(t) = 4e^{-3t} \cdot u(t)$; $H(f) = \dfrac{1}{1+2j\pi f}$, $\forall f$

Poiché: $\underset{(\alpha \in \mathbb{R}^+)}{e^{-\alpha t} \cdot u(t)} \longleftrightarrow \dfrac{1}{\alpha + j2\pi f}$; per $\alpha = 1$: $h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$

$$y(t) = \int h(t-\tau) \cdot x(\tau)\, d\tau = \int e^{-t} \cdot e^{\tau} \cdot u(t-\tau) \cdot 4e^{-3\tau} \cdot u(\tau)\, d\tau =$$

$$= e^{-t} \int 4e^{-2\tau}\, d\tau = -2e^{-t} \cdot e^{-2\tau}$$

• Dominio: $\begin{matrix} t-\tau > 0 \\ \tau > 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \tau < t \\ \tau > 0 \end{matrix}$



$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 2e^{-t}\left(1 - e^{-2t}\right) & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

$$E_{yy} = \int_0^{+\infty} |y(t)|^2\, dt = \int_0^{+\infty} y^2(t)\, dt = \int_0^{+\infty} 4e^{-2t}\left(1 - 2e^{-2t} + e^{-4t}\right) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} 4e^{-2t}\, dt - \int_0^{+\infty} 8e^{-4t}\, dt + \int_0^{+\infty} 4e^{-6t}\, dt = \left[-2e^{-2t} + 2e^{-4t} - \frac{2}{3}e^{-6t}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= 0 - \left(-\cancel{2} + \cancel{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$