4. CONDUTTORI

- Conduttori in equilibrio:

Prendiamo in esame conduttori solidi, come i metalli. Nei fenomeni ELETTROSTATICI le cariche sono fisse, quindi non ci deve essere flusso di corrente elettrica nei conduttori, perciò, bisogna imporre delle condizioni:

$$\boxed{\vec{E} = 0 \quad \text{ALL'INTERNO}} \longrightarrow \text{CONDIZIONE DI EQUILIBRIO DI UN CONDUTTORE}$$

Questa condizione ha importanti conseguenze:

a) Se $\vec{E} = 0 \Rightarrow \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ per la Legge di Gauss

$\Rightarrow$ All'interno, $q_{int} = 0$, cioè NON ci sono eccessi di carica.

Quindi, le CARICHE SI DISTRIBUISCONO SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE, con densità superficiale $\sigma = \frac{dq}{d\Sigma}$;

b) IL POTENZIALE È COSTANTE in ogni punto del conduttore, presi due punti P_1 e P_2:

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Longrightarrow \boxed{V(P_1) = V(P_2) = V_0}$$

Si ha V_0 anche SULLA SUPERFICIE (superficie equipotenziale)

c) Il valore di $\vec{E}$ si ricava dalla discontinuità data dall'attraversamento di uno strato superficiale di carica:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}} \longrightarrow \text{TEOREMA DI COULOMB}$$

Inoltre, LA CARICA DEVE AVERE LO STESSO SEGNO OVUNQUE SULLA SUPERFICIE.

- Se due corpi carichi si avvicinano l'un l'altro, si ha il fenomeno della INDUZIONE ELETTROSTATICA: per bilanciare il campo $\vec{E}_i$ INDOTTO dall'altro corpo, si generano zone cariche in maniera diverse per far sì che il campo $\vec{E}$ ALL'INTERNO sia sempre NULLO.
- Se si collegano 2 o più conduttori, si costituisce un UNICO CORPO CONDUTTORE con $\vec{E} = 0$ e $V =$ costante $\Rightarrow$ I CONDUTTORI A CONTATTO HANNO STESSO POTENZIALE!

• CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE

Una carica distribuita sulla superficie $d\Sigma$ di un condensatore è:

$$q = \oint \sigma(x,y,z)\, d\Sigma$$

Pertanto, il POTENZIALE (costante in tutto il conduttore) è:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\sigma(x,y,z)\, d\Sigma}{r}}$$

Se si porta la carica a $q' = mq$, anche la DENSITÀ VARIA DELLO STESSO FATTORE: $\sigma' = m\sigma$ e pure il POTENZIALE $V' = mV$. Dunque, il rapporto

$$\boxed{C = \frac{q}{V}} \longrightarrow \text{CAPACITÀ DEL CONDUTTORE}$$

NON CAMBIA AL VARIARE DELLA CARICA q.

[La CAPACITÀ C DIPENDE SOLO DALLA FORMA e dalle DIMENSIONI del conduttore, e dal MEZZO che lo circonda (per esempio il vuoto).]

$$[C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad} = F;$$ si usano mF, μF, nF, pF.

• Esempio 4.1:

Determinare la capacità di un conduttore SFERICO, di raggio R.

Dunque $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \longrightarrow$ Sulla superficie: $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Quindi: $$C = \frac{q}{V} = \frac{\cancel{q}}{\cancel{q}/4\pi\varepsilon_0 R} = \boxed{4\pi\varepsilon_0 R}$$

• Nota: C dipende solo dal RAGGIO R e dal MEZZO ε_0 (il vuoto) $\Rightarrow C = C(\varepsilon_0, R)$.

• Esempio 4.2 :

Supponiamo di avere due sfere di raggio R_1 ed R_2, con cariche q_1 e q_2, collegate da un filo conduttore a distanze molto maggiore dei raggi. Calcolare q_1 e q_2.

Poiché le sfere sono collegate, HANNO STESSO POTENZIALE :

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad ; \quad C_1 = \frac{q_1}{V_1} \quad ; \quad C_2 = \frac{q_2}{V_2}$$

Dunque, si ha:

$$\boxed{\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_1}{C_2}} \longrightarrow$$

La carica si distribuisce tra le sfere proporzionalmente ai raggi e quindi alle capacità

Possiamo porre $q = q_1 + q_2$, quindi:

$$q_1 = \frac{R_1}{R_2} q_2 \Rightarrow q_1 + q_2 = \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) q_2 \Rightarrow q = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q$$

Analogamente per q_1, e quindi:

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q \quad ; \quad q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q$$

La DENSITÀ DI CARICA superficiale è:

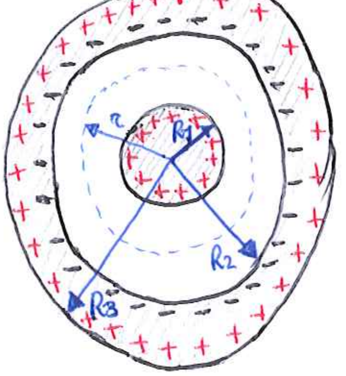
$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

e, poiché $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$

si ha $\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}}$

• Esempio 4.4 :

Calcolare il campo elettrico e il potenziale tra 2 sfere cariche concentriche. Nel primo caso NON cortocircuitate, nel secondo sì.



Abbiamo la carica $+q$ sulla superficie di raggio R_1, $-q$ su quella di raggio R_2 (creatasi PER INDUZIONE) e $+q$ su quella di raggio R_3.

La d.d.p. tra i 2 conduttori è:

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

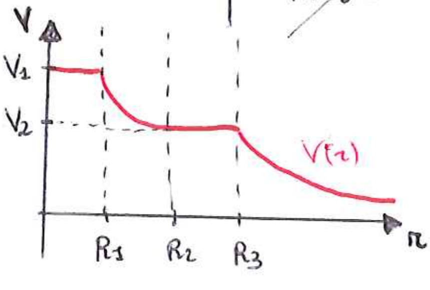
Quindi, dalla definizione di capacità:

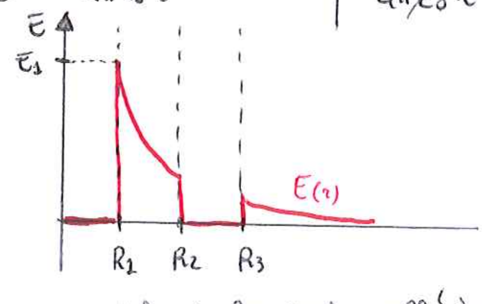
$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

È bene notare che, per $R_2 \leq r \leq R_3$ gli effetti delle cariche interne alla cavità si elidono e le cariche si distribuiscono in superficie $\Longrightarrow \vec{E}(r) = 0 \;,\; V(r) = \text{cost.}$

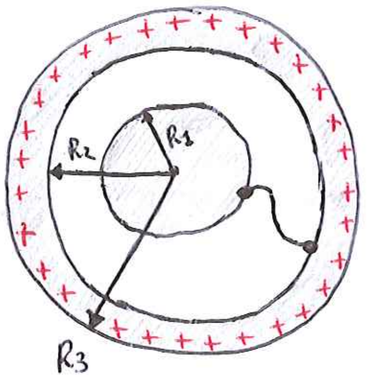
Si ha la seguente tabella:

	$V(r)$	$E(r)$
1) $0 \leq r \leq R_1$	$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = V_1$	$0 + 0 + 0 = 0$
2) $R_1 \leq r \leq R_2$	$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$	$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + 0 + 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
3) $R_2 \leq r \leq R_3$	$\cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = V_2$	$\cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} + 0 = 0$
4) $R_3 \leq r$	$\cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$





- Se invece CORTOCIRCUITIAMO i 2 conduttori, la carica all'interno si annulla e le PRIME 2 COLONNE della tabella di $V(r)$ ed $E(r)$ sono sempre NULLE:



Resta un UNICO CONDUTTORE al potenziale $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$ che genera ALL'ESTERNO lo stesso campo $\vec{E}$ e lo stesso potenziale V di prima.

$$V(r < R_3) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \;;\quad E(r < R_3) = 0$$

$$V(r > R_3) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \;;\quad E(r > R_3) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

CONDENSATORI

Un sistema come quello visto nell'esempio precedente, costituito da <u>2 CONDUTTORI TRA I QUALI C'E' INDUZIONE COMPLETA</u>, si chiama <u>CONDENSATORE</u>.

I due conduttori prendono il nome di ARMATURA.

Avevamo visto che la <u>CAPACITA' DEL CONDENSATORE</u> è:

$$\boxed{C = \frac{q}{V_1 - V_2}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

e DIPENDE solo dalla <u>GEOMETRIA delle ARMATURE</u> e del <u>MEZZO</u> contenuto nell'intercapedine tra i raggi R_1 ed R_2, in questo caso il vuoto caratterizzato da ε_0.

<u>E' INDIPENDENTE DALLA CARICA q !</u>

- Esempio 4.6 (Condensatore Sferico):

La <u>capacità</u> di un condensatore sferico è:

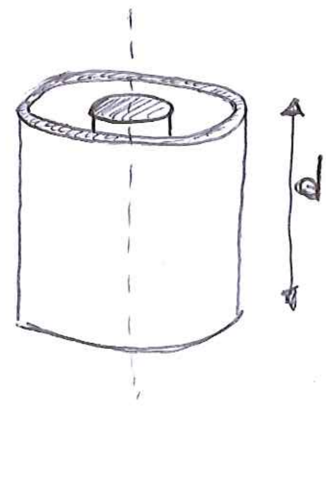
$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \boxed{4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

Detta $h = R_2 - R_1$ la distanza tra le 2 armature, se $h = R_2 - R_1 << R_1 \approx R_2 = R$:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{h} = \frac{\varepsilon_0}{h} \cdot 4\pi R^2 = \boxed{\frac{\varepsilon_0}{h} \Sigma_1 = \frac{\varepsilon_0}{h} \cdot (\text{area sfera})}$$

La CAPACITA' cresce all'aumentare dell'area delle armature ed al diminuire della distanza h tra esse.

- Esempio 4.7 (Condensatore Cilindrico):



Il campo elettrico è: $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{n}$

Quindi: $V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

Essendo $\lambda = \rho\pi R^2 = \frac{q}{d}$:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

Se $h = R_2 - R_1 << R_1 \approx R_2 = R$:

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(1 - 1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1}\right) = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{h}{R}$$

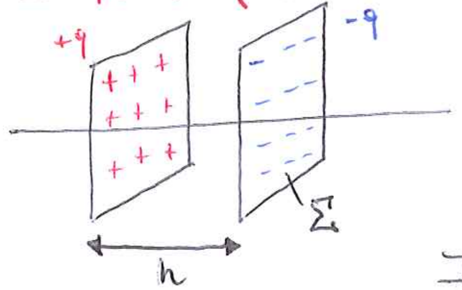
$\underset{0}{\downarrow}$ Sviluppo in Serie

Per cui, la capacità diventa:

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 d R}{h} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}}$$

Con $\Sigma = 2\pi R \cdot d$ area delle armature distanti h.

- **Esempio 4.8 (Condensatore Pieno):**



Se le cariche q sono distribuite con densità uniforme σ sulle armature, abbiamo già visto che:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}.$$

Inoltre: $V_1 - V_2 = Eh = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}h = \frac{\sigma\Sigma}{\varepsilon_0\Sigma}h = \boxed{\frac{q}{\varepsilon_0\Sigma}h}$

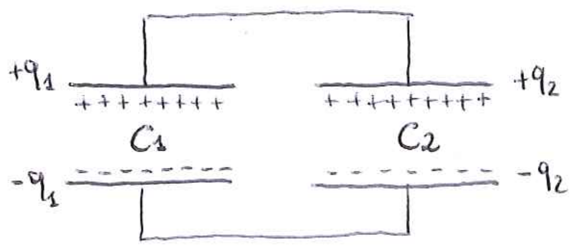
Pertanto, la CAPACITÀ è:

$$\boxed{C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}}$$

- **NOTA**: [Si nota che qualsiasi forma abbiano le armature del condensatore, la CAPACITÀ è data da ε_0 per l'AREA delle ARMATURE, diviso la DISTANZA]

- **CONDENSATORI IN PARALLELO:**

Indichiamo la d.d.p. $V_1 - V_2$ tra le armature con V; invece, con C indichiamo sia il condensatore che la sua capacità.



Essendo ciascun conduttore equipotenziale, la d.d.p. di C_1 è uguale a quella di C_2. Condensatori collegati IN PARALLELO HANNO LO STESSO POTENZIALE:

$$q_1 = C_1 V \quad ; \quad q_2 = C_2 V$$

La carica totale sull'armatura superiore è: $q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V$.

Quindi, la CAPACITÀ EQUIVALENTE del sistema è: $\boxed{C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2}$

Due condensatori in parallelo si comportano come UN UNICO CONDENSATORE, la cui capacità equivalente è la somma delle capacità dei singoli componenti.

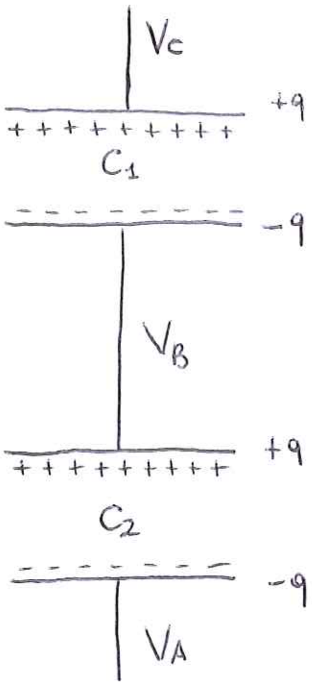
Più in generale, per m condensatori in parallelo:

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + \dots + C_m = \sum_{i=1}^{m} C_i} \longrightarrow \text{IN PARALLELO}$$

(Stesso Potenziale V)

Dunque, $C_{eq} > C_i \quad \forall i = 1, \dots, m$. È sempre maggiore delle singole capacità.

• CONDENSATORI IN SERIE:



Hanno 1 SOLO COLLEGAMENTO tra di loro, quindi non possono avere la stessa d.d.p.

Hanno però la STESSA CARICA, per induzione; infatti:

se $+q$ è la carica sull'armatura di C_1 a potenziale V_C, per induzione si crea la carica $-q$ sull'armatura affacciata e così via per $+q$ e $-q$ su C_2.

$$V_C - V_B = \frac{q}{C_1} \quad ; \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2}$$

Quindi, il Potenziale:

$$V = V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{q}{C_{eq}}$$

Dunque: $\displaystyle \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$

In generale: $\displaystyle \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_i}} \longrightarrow$ IN SERIE

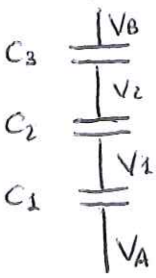
(Stessa Carica q)

L'inverso della capacità equivalente del sistema è la somma degli inversi delle singole capacità dei condensatori.

$C_{eq} < C_i \quad , \forall i = 1, \dots, m$. C_{eq} è sempre MINORE della capacità di ciascun condensatore.

• Esempio 4.9 (Partitore Capacitivo):

Ai capi di 3 condensatori IN SERIE c'è una d.d.p. $V = V_B - V_A = 100\,V$ e la capacità equivalente del sistema è $C = 100\,pF$. Calcolare i valori delle capacità C_1, C_2, C_3 tali che, rispetto a V_A, sia $V_1 = 50\,V$, $V_2 = 70\,V$.



La carica è: $q = CV = 100\,pF \cdot 100\,V = 10^{-8}\,C$

$$C_1 = \frac{q}{V_1 - V_A} = \frac{q}{50\,V} = 2 \cdot 10^{-10}\,F = 200\,pF$$

$$C_2 = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{q}{20\,V} = 5 \cdot 10^{-10}\,F = 500\,pF$$

$$C_3 = \frac{q}{V_B - V_2} = \frac{q}{30V} = 3{,}33 \cdot 10^{-10}\,F = 333\,pF$$

• Esempio 4.10 :

C_1 e C_2 sono in serie e la d.d.p. ai loro capi sono $V_1 = 30\,V$ e $V_2 = 20\,V$. Collegando in parallelo a C_1 un condensatore di capacità $C' = 2\mu F$, la d.d.p. diventano $V_1' = 5\,V$ e $V_2' = 45\,V$. Calcolare C_1 e C_2.

All'inizio abbiamo : $q = C_1 V_1 = C_2 V_2 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{20V}{30V} = \frac{2}{3}$

Nel secondo caso :

$$q = (C_1 + C')V_1' = C_2 V_2' \Rightarrow \frac{C_1 + C'}{C_2} = \frac{V_2'}{V_1'} = \frac{45V}{5V} = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{3} \\ \frac{C_1}{C_2} + \frac{C'}{C_2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{3} C_2 \\ \frac{2\mu F}{C_2} = 9 - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0{,}16\,\mu F \\ C_2 = \frac{6}{25}\,\mu F = 0{,}24\,\mu F \end{cases}$$

ok!!!

• ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO :

Il PROCESSO DI CARICA di un condensatore consiste in pratica in una separazione di cariche ($+q$ e $-q$) e richiede un determinato LAVORO.

Essendo il CAMPO CONSERVATIVO, esso dipende solo dallo stato iniziale e finale:

$$\boxed{dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'}$$

, dove q' è la carica già spostata e V' la d.d.p. in quel momento

Quindi, il LAVORO COMPLESSIVO è :

$$\boxed{W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}}$$

Questo LAVORO, svolto contro la forza elettrostatica che si oppone all'accumulo di cariche con lo stesso segno, viene IMMAGAZZINATO nel sistema sotto forma di ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA.

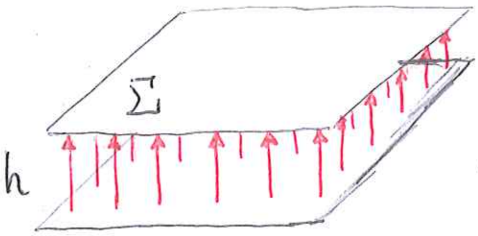
Assumendo $U_e = 0$ quando $q = 0$, abbiamo che $\boxed{W = U_e}$.

Dunque, avremo:

$$\boxed{U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V}$$

per un condensatore di capacità C, con carica q e d.d.p. V.

Consideriamo un condensatore piano, in cui il campo elettrico tra le armature è uniforme. Ricordando che: $C = \frac{\varepsilon_0}{h}\Sigma$ e che $V = Eh$, abbiamo:



$$U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{\cancel{h}}\Sigma \cdot E^2 h^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot \underbrace{\Sigma h}_{\substack{\text{VOLUME} \\ \tau}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tau$$

dove $\tau = \Sigma h$ è il VOLUME DEL CONDENSATORE.

Definiamo la DENSITÀ DI ENERGIA ELETTROSTATICA come l'energia elettrostatica per unità di volume:

$$\boxed{u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Dunque, l'energia contenuta in un volume infinitesimo $d\tau$ è:

$$dU_e = u_e\, d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

Quindi, l'ENERGIA TOTALE sul volume τ è:

$$\boxed{U_e = \int_\tau dU_e = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau}$$

Questa energia corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione di cariche che dà origine al campo.

- Esempio 4.13 (Condensatore Sferico):

Calcolare l'ENERGIA ELETTROSTATICA di un condensatore sferico di raggi R_1 e R_2.

Il campo elettrico tra le 2 armature è: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Il VOLUME della corteccia sferica infinitesima compresa tra il raggio r ed $r+dr$ è $d\tau = \Sigma\, dr = 4\pi r^2 dr$.

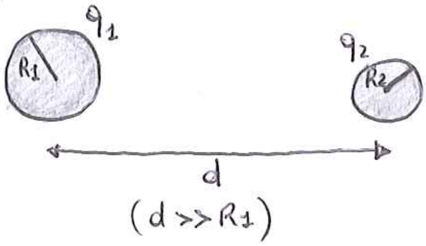
Quindi: $$U_e = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 dr \cdot 4\pi r^2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \boxed{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

ok!!!

• Esempio 4.16:

Calcolare l'energia elettrostatica di 2 sfere conduttrici, con cariche q_1 e q_2 e raggi R_1 ed R_2, poste ad una distanza d molto maggiore dei raggi.



$$U_e = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2$$

Ma il potenziale è dato dalle interazioni sia di q_1 che di q_2:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Analogamente: $V_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}$

Sfruttando $U_e = \frac{1}{2} q V$, abbiamo:

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Quindi: $\boxed{U_e = \dfrac{q_1^2}{2C_1} + \dfrac{q_2^2}{2C_2} + \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}}$

• Nota: i primi 2 termini, sempre positivi, danno il LAVORO per caricare le 2 sfere; il terzo, il cui segno dipende dalle cariche, dà l'<u>ENERGIA DI INTERAZIONE</u> tra le sfere.

6. CORRENTE ELETTRICA

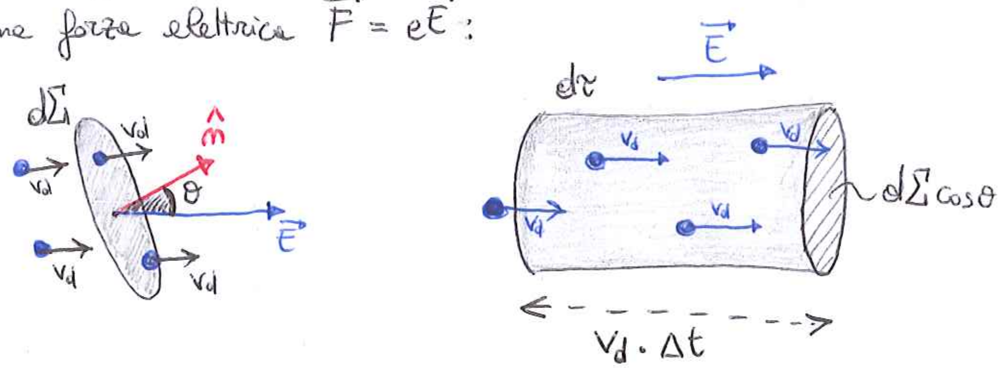
• INTENSITÀ DI CORRENTE:

Consideriamo una superficie Σ_1 tracciata all'interno di un conduttore; detta Δq la quantità di carica che attraversa Σ_1 in un tempo Δt, si definisce la CORRENTE ELETTRICA, o meglio, la INTENSITÀ DI CORRENTE nel seguente modo:

$$\boxed{i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}}$$

$[i] = A$, Ampere, che equivale a Coulomb/sec.

Supponiamo che un certo numero n_+ di portatori di carica $+e$, attraversi un volume infinitesimo $d\tau$ con VELOCITÀ DI DERIVA $\vec{v}_d$ (stesso verso di $\vec{E}$) sottoposti ad una forza elettrica $\vec{F} = e\vec{E}$:



Nel tempo Δt, le cariche percorrono la distanza $v_d \Delta t$; quindi:

$$\underset{\text{(FLUSSO)}}{d\tau = v_d \Delta t \, d\Sigma \cos\theta} \quad ; \quad \Delta q = n_+ e \, d\tau = n_+ e \, v_d \Delta t \, d\Sigma \cos\theta$$

Per convenzione, si ha che se il PORTATORE DI CARICA è POSITIVO, allora la forza che sposta il portatore è diretta nel verso del campo $\vec{E}$, altrimenti è diretta come $-\vec{E}$.

Per convenzione, il VERSO DELLA CORRENTE ELETTRICA è quello del moto delle cariche POSITIVE, cioè dai punti a Potenziale più alto a quelli a Potenziale più basso.

La carica che passa attraverso $d\Sigma_1$, nell'unità di tempo, cioè l'INTENSITÀ DI CORRENTE attraverso $d\Sigma$ è:

$$di = n_+ e \, v_d \, d\Sigma_1 \cos\theta$$

Definiamo il VETTORE DENSITÀ DI CORRENTE $\vec{J}$ come:

$$\boxed{\vec{J} = n_+ e \vec{v}_d}$$

Quindi, di si può scrivere così: $\boxed{di = \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma}$

Integrando, si ottiene l'INTENSITÀ DI CORRENTE:

$$\boxed{i = \int_\Sigma \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \Phi_\Sigma(\vec{J})}$$

→ L'intensità di corrente è uguale al FLUSSO del vettore DENSITÀ di corrente attraverso la superficie Σ.

- Se i portatori di carica sono NEGATIVI $\Rightarrow$ $\vec{J} = -n_- e \vec{v}_-$, diretta sempre nel verso di $\vec{E}$, poiché $\vec{v}_-$ è opposta ad $\vec{E}$.

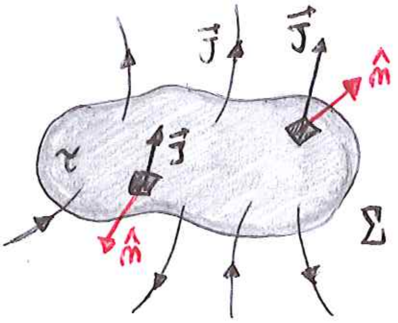
- Se ci sono sia PORTATORI POSITIVI che NEGATIVI, allora:

$$\boxed{\vec{J} = n_+ e \vec{v}_+ - n_- e \vec{v}_-}$$

• CONSERVAZIONE DELLA CARICA:

Supponiamo di avere uno spazio di volume τ delimitato da una superficie Σ. Sia $\hat{n}$ il versore NORMALE in ogni punto della superficie e diretto esternamente alla superficie. Se la regione è sede di CORRENTE ELETTRICA, definita dal vettore densità di corrente $\vec{J}$, la CARICA totale per unità di tempo è data dal FLUSSO di $\vec{J}$ attraverso Σ:

$$i = \oint_\Sigma \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma \longrightarrow \text{Corrente che attraversa il sistema}$$



Per convenzione, abbiamo:

$$\begin{cases} \vec{J} \cdot \hat{n} > 0 \ (\vec{J} \text{ verso l'esterno}): \text{cariche positive escono; cariche negative entrano;} \\ \vec{J} \cdot \hat{n} < 0 \ (\vec{J} \text{ verso l'interno}): \text{cariche positive entrano, cariche negative escono.} \end{cases}$$

Il PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA richiede che i, pari alla carica che attraversa Σ nell'unità di tempo, sia uguale alla variazione della carica complessiva contenuta all'INTERNO di Σ:

$$\boxed{i = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t}}$$

Il SEGNO MENO è giustificato dal fatto che se l'integrale è complessivamente positivo, la CARICA ALL'INTERNO DIMINUISCE e quindi ha derivata negativa (DERIVA NEGATIVA).

- Quando la carica contenuta all'interno della superficie non cambia, si ha la CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ:

$$\boxed{\oint \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = 0}$$

Cerchiamone la forma locale. Scriviamo la carica totale come:

$$q_{int} = \int_{\tau} \rho\, d\tau$$

Andiamo a sostituire, passando il segno di derivata sotto quello di integrale:

$$i = \oint \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t} = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau$$

Portando tutto a sinistra, si trova:

$$\oint \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma + \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = 0$$

Sfruttando il TEOREMA DELLA DIVERGENZA, per cui:

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{J}\, d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{J}\, d\tau$$

Otteniamo:

$$\boxed{\int_{\tau} \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0}$$

Ma, poiché la relazione deve valere per qualsiasi volume τ, deve essere:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \longrightarrow \text{EQUAZIONE DI CONTINUITÀ}$$

Tale legge è detta Equazione di Continuità della Corrente Elettrica ed esprime in modo dinamico e locale la conservazione della carica elettrica.

In CONDIZIONI STAZIONARIE, la carica interna non cambia e di conseguenza neanche la densità ρ: perciò $\frac{d\rho}{dt} = 0$ e quindi:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} = 0}$$

$\downarrow$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA CORRENTE ELETTRICA IN REGIME STAZIONARIO.

MODELLO CLASSICO DELLA CONDUZIONE ELETTRICA (DRUDE - LORENTZ)

Supponiamo di avere un materiale conduttore con IONI POSITIVI FISSI avvolti da una nube di ELETTRONI che orbitano intorno in modo DISORDINATO.
Questi elettroni, nel loro moto, hanno degli URTI tra di loro e con gli ioni, definendo delle TRAIETTORIE DI SEGMENTI RETTILINEI.
Definiamo come τ il tempo medio tra un urto e il successivo e con ℓ il cammino libero medio tra 2 urti;
La VELOCITÀ degli elettroni nel metallo è:

$$\boxed{v = \frac{\ell}{\tau}}$$

quindi si ha anche $\tau = \ell / v$.

- Se si applica un campo elettrico $\vec{E}$, ogni elettrone risentirà di una forza opposta al Campo Elettrico $\vec{F} = m\vec{a} = -e\vec{E}$.

Quindi, ogni elettrone subirà un'ACCELERAZIONE pari a: $\boxed{\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}}$

Definiamo adesso la velocità di deriva $\vec{v}_d$ come la velocità media di tutti gli elettroni che si muovono lungo il conduttore per effetto del campo elettrico $\vec{E}$.

Se $\vec{v}_i$ è la velocità di un elettrone dopo l'urto i-esimo e $\vec{v}_{i+1}$ la velocità poco prima dell'urto successivo, abbiamo che:

$$\boxed{\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m}\tau} \qquad (\vec{v}_i + \vec{a}t)$$

Pertanto, facendo la media su N molto grande:

$$\vec{v}_d = \frac{1}{N}\sum_i \vec{v}_{i+1} = \sum_i \frac{\vec{v}_i}{N} - \frac{e\tau}{m}\vec{E}$$

N non c'è al secondo termine, poiché TUTTI gli ELETTRONI "sentono" il campo elettrico $\vec{E}$ in egual misura.

Inoltre, dopo gli urti, per il <u>MOTO CASUALE</u> degli elettroni ogni velocità può assumere qualsiasi direzione. Le velocità assumono tutte le direzioni possibili, quindi la <u>VELOCITÀ MEDIA</u> dev'essere <u>NULLA</u>:

$$\boxed{\sum_i \frac{\vec{v}_i}{N} = 0}$$

- Pertanto, la <u>VELOCITÀ DI DERIVA</u> è:

$$\boxed{\vec{v}_d = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}} \longrightarrow$$

La velocità di ogni elettrone è proporzionale al CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$

Per effetto del campo $\vec{E}$, ogni elettrone acquista una velocità $\vec{v}_d$ nella stessa direzione di $\vec{E}$ e proporzionale al campo elettrico stesso.

Quindi, la <u>QUANTITÀ DI MOTO</u> $(\vec{p} = m\vec{v})$ è:

$$m\vec{v}_d = -e\vec{E}\tau$$

Avendo già definito la densità di corrente come: $\vec{J} = -n_- e\vec{v}_-$,

si ha:

$$\boxed{\vec{J} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}}$$

dove:

$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}} \longrightarrow$$

<u>CONDUTTIVITÀ</u>

(dipende dal materiale)

• LEGGE DI OHM :

Dunque, si ha che:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

In generale, considerando sia cariche positive che negative:

$$\vec{J} = n_+ e \vec{v}_+ - n_- e \vec{v}_-$$

Quindi:

$$\boxed{\vec{J} = ne^2 \left(\frac{\tau_+}{m_+} + \frac{\tau_-}{m_-} \right) \vec{E} = \sigma \vec{E}}$$

Con: $\sigma = \frac{ne^2 \tau_+}{m_+} + \frac{ne^2 \tau_-}{m_-} \longrightarrow$ CONDUTTIVITA' DEL MEZZO

Dunque, la LEGGE DI OHM ci dice che:

il rapporto tra la densità di corrente $\vec{J}$ e il campo elettrico applicato $\vec{E}$ è dato da una grandezza σ caratteristica del materiale del conduttore.

Si può trovare la legge scritta anche nel seguente modo:

$$\boxed{\vec{E} = \rho \vec{J}}$$

Con $\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}} \longrightarrow$ RESISTIVITA' del conduttore

Definisco la POTENZA per mantenere in moto le cariche con velocità $\vec{v}_d$ come:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_d = e\vec{E} \cdot \vec{v}_d$$

Se nel conduttore ci sono n portatori di carica, la POTENZA PER UNITA' DI VOLUME:

$$\boxed{P_\tau = nP = ne\vec{v}_d \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E}}$$

Ma, essendo $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ed $\vec{E} = \rho \vec{J}$, si ha:

$$\boxed{P_\tau = \sigma E^2 = \rho J^2}$$

Unità di misura:

- RESISTIVITÀ ρ: $\quad [\rho] = \left[\frac{R\Sigma}{h}\right] = \left[\frac{R \cdot area}{lunghezza}\right] = [R \cdot lunghezza] = \Omega \cdot cm$

- CONDUTTIVITÀ σ: $\quad [\sigma] = \left[\frac{1}{\rho}\right] = \left[\frac{1}{R \cdot lunghezza}\right] = \frac{Siemens}{cm} = S \cdot cm^{-1}$

Altrimenti, nel SI, $[\rho] = \Omega \cdot m$.

$$1\,\Omega = \frac{1\,Volt}{1\,Ampere} = \frac{V}{A} \quad ; \quad 1\,Ampere = 1A = \frac{Coulomb}{sec} \Rightarrow A = C/s$$

- La RESISTIVITÀ nei metalli aumenta con l'aumentare della Temperatura, secondo una legge:

$$\boxed{\rho = \rho_{20}\left(1 + \alpha \Delta T\right)}$$

dove ρ_{20} è la resistività misurata a 20°C e $\Delta T = T - 20°C$.

Ora, riconsideriamo la potenza necessaria per far circolare la corrente i in un tratto di sezione Σ_1 e lungo dh: $\left(P_\tau = \frac{P}{\tau}\right)$

$$dP = dP_\tau \Sigma\, dh = \rho \frac{i^2}{\Sigma^2} \Sigma\, dh = \rho \frac{i^2}{\Sigma} \cdot dh = \rho \frac{dh}{\Sigma} i^2$$

Integrando tra A e B:

$$\boxed{P = i^2 \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma} = i^2 \overbrace{\rho \frac{h}{\Sigma}}^{R} = i^2 R} \rightarrow$$

DISSIPAZIONE per EFFETTO JOULE
(Potenza dissipata sotto forma di calore)

Il LAVORO è dato da: $dW = V\,dq = V i \cdot dt$

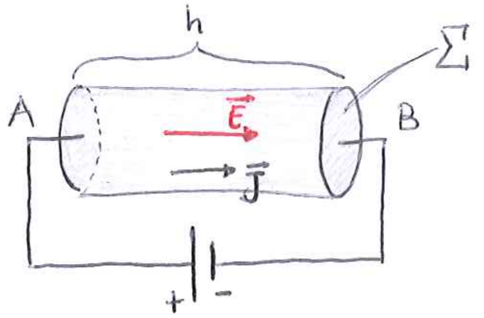
Pertanto la POTENZA è: $\boxed{P = \frac{dW}{dt} = Vi}$; sostituendo la legge di Ohm: $V = Ri$

Riottengo: $\boxed{P = Ri^2 = \frac{V^2}{R}}$ → POTENZA

$$\boxed{R = \frac{\rho \cdot h}{\Sigma}}$$

• Effetto Joule:

Supponiamo di avere un conduttore metallico cilindrico di altezza h e sezione Σ.
Applichiamo ai capi del conduttore A e B una d.d.p. $V = V_A - V_B$. Quindi, il conduttore è sede di un campo $\vec{E}$ ed è percorso da una corrente elettrica di densità $\vec{J}$.



La densità è:

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

Poiché il regime è stazionario e l'intensità di corrente ha lo stesso valore attraverso qualsiasi sezione del conduttore, si ha:

$$i = J\Sigma = \frac{\Sigma}{\rho}E \Rightarrow E = \frac{\rho}{\Sigma}i$$

$\left(i = \oint \vec{J}\cdot\hat{n}\, d\Sigma \right.$, ma è sempre // $\left. \Rightarrow i = J \oint d\Sigma = J\Sigma \right)$

La d.d.p. è:

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = Eh$$

Si ha che:

$$\boxed{V = \frac{\rho h}{\Sigma} i} = Ri$$

• 2ª Legge di Ohm:

Se si chiama: $\boxed{R = \frac{\rho h}{\Sigma}}$ → RESISTENZA del conduttore (Ω)

dipende dalla FORMA del conduttore, non solo dal materiale.

si ottiene: $\boxed{V = Ri}$ → 2ª Legge di Ohm

Viene invece dato il nome di CONDUTTANZA al valore: $G = \frac{1}{R}$

Il passaggio di corrente attraverso un conduttore metallico per un tempo t richiede il seguente LAVORO:

$$W = \int_0^t P\,dt = \int_0^t R i^2\,dt = R i^2 t \quad ; \quad [W] = KW\,h$$
$$[P] = KW/h \quad (\text{kiloWatt/ora})$$

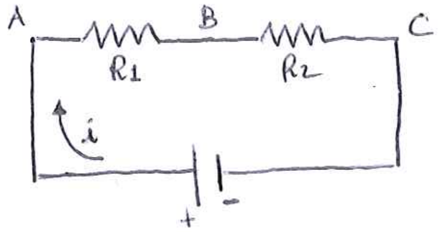
Quindi:

$$\boxed{W = R i^2 t}$$

Lavoro necessario per vincere la resistenza R del materiale conduttore al moto degli elettroni dovuto ad una d.d.p. V.

• RESISTORI IN SERIE E IN PARALLELO:

I CONDUTTORI OHMICI con un determinato valore di resistenza R sono molto usati nei circuiti elettrici. Essi vengono anche detti RESISTORI. Possono essere collegati in serie o in parallelo.



• IN SERIE: se collegati da un solo estremo

Sono attraversati dalla STESSA CORRENTE i:

$$V_A - V_B = R_1 \cdot i \quad ; \quad V_B - V_C = R_2 \cdot i$$

Da cui:

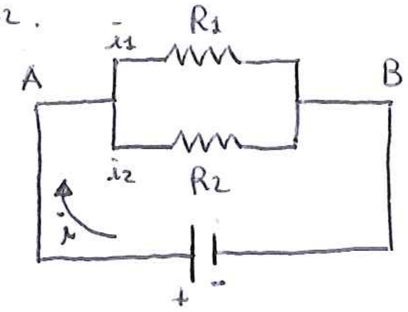
$$V_A - V_C = (R_1 + R_2) \cdot i = R_{eq} \cdot i$$

Quindi, in serie: $\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$

La POTENZA SPESA è:

$$P = (V_A - V_C) \cdot i = (R_1 + R_2)\, i^2 = R_{eq}\, i^2 = P_1 + P_2$$

che è la SOMMA DELLE POTENZE dovute ad R_1 ed R_2.



• IN PARALLELO: entrambi gli estremi collegati

Sono alla STESSA d.d.p. $V_A - V_B$:

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V}{R_{eq}} \quad (i = i_1 + i_2)$$

Quindi:

$$i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, i \quad ; \quad i_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, i \quad ; \quad \boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Potenza spesa: $P = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = V^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V^2}{R_{eq}} = R_{eq}\, i^2$