Capitolo 1

Definizioni e relazioni fondamentali

1.1 Definizioni di E e B

Il campo elettrico $\mathbf{E}$ ($\mathrm{V\,m^{-1}}$) e l'induzione magnetica $\mathbf{B}$ (T) sono definiti in riferimento alla forza che agisce su una carica in movimento (Fig. 1.1):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e(q) + \mathbf{F}_m(q, \mathbf{u}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

La forza $\mathbf{F}$ è in generale funzione dello spazio, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$, e lo sono quindi i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z)$; $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(x, y, z)$.

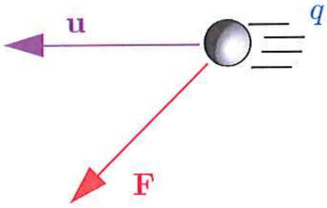


Figura 1.1: Carica q in moto con velocità $\mathbf{u}$, e forza $\mathbf{F}$ su di essa.

Inoltre, i campi vettoriali (Fig. 1.2) che consideriamo sono assunti anche variabili nel tempo: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x, y, z; t)$; $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(x, y, z; t)$.

Lo spostamento dielettrico $\mathbf{D}$ ($\mathrm{C\,m^{-2}}$) e il campo magnetico $\mathbf{H}$ ($\mathrm{A\,m^{-1}}$) si ottengono dalle

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} \qquad \left(\epsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F\,m^{-1}}\right)$$

e

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu_r} \qquad (\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}})$$

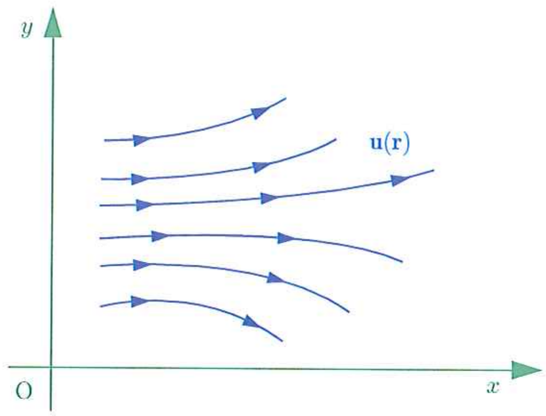


Figura 1.2: Campo vettoriale rappresentato mediante le sue *linee di flusso*; la densità delle linee di flusso è proporzionale all'intensità del campo.

1.2 Equazioni di Maxwell

I vettori elettrici e magnetici sono legati tramite relazioni integrali ricavate sperimentalmente

$$\begin{aligned} \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_0 \, dS && \text{(legge di Faraday)} \\ \oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_0 \, dS + \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0 \, dS && \text{(legge di Ampère)} \end{aligned}$$

o, in ciascun punto, dalle relazioni differenziali

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(vortici di } \mathbf{E}\text{)} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} && \text{(vortici di } \mathbf{H}\text{)} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{D} \, dS &= q && \text{(legge di Gauss)} \\ \oiint_S \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{B} \, dS &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho && \text{(sorgenti di } \mathbf{D}\text{)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(sorgenti di } \mathbf{B} \text{ nulle)} \end{aligned}$$

1.3 Cariche e dielettrici

In riferimento alla Fig. 1.3, applichiamo il teorema di Gauss ai due cilindri (C_1, C_2) di uguale sezione, aventi la base inferiore entro l'armatura conduttrice ideale:

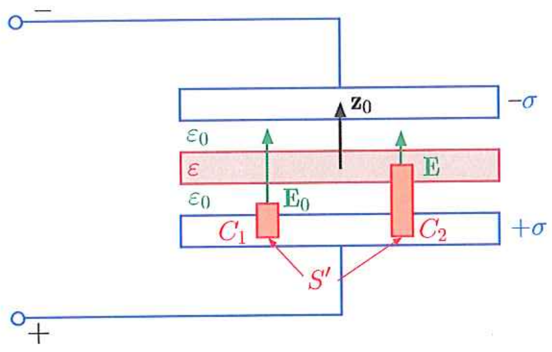


Figura 1.3: Condensatore piano con una lamina di dielettrico interposta.

- per il cilindro C_1, con base superiore nell'aria ($\sim$ vuoto),

$$\oiint_S \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{D}\ dS = \iiint_{V_1} \rho\, dV \equiv \iint_{S'} \sigma\, dS' = \sigma S' = DS'$$

da cui

$$\mathbf{D} = \sigma \mathbf{z}_0; \qquad E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- per il cilindro C_2, con base superiore nella lamina dielettrica:

$$\oiint_S \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{D}\ dS = \iiint_{V_2} \rho\, dV \equiv \iint_{S'} \sigma\, dS' = \sigma S' = DS'$$

da cui

$$\mathbf{D} = \sigma \mathbf{z}_0; \qquad E = \frac{\sigma}{\epsilon} < E_0$$

Lo spostamento dielettrico è costante, mentre il campo elettrico ha valori diversi nell'aria e nel dielettrico. È l'effetto della polarizzazione indotta che fa apparire uno strato di carica σ' sul bordo della lamina (Fig.1.4).
In generale, la densità di carica $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ può essere considerata la sorgente di $\mathbf{D}$, mentre la densità di carica indotta ρ' determina $\mathbf{E}$ tramite la

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho'}{\epsilon_0}$$

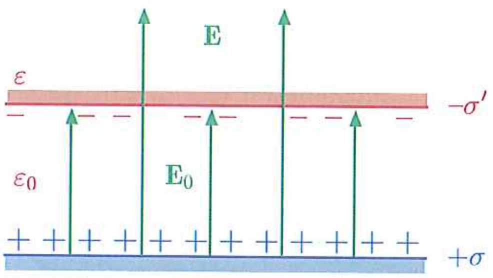


Figura 1.4: Densità di carica superficiale indotta $\sigma' < \sigma$ e linee di flusso del campo elettrico.

1.4 Corrente di conduzione

La densità di corrente $\mathbf{J}$ e la corrispondente quantità integrale I_S sono associate a una densità di carica ρ ($\mathrm{C\,m^{-3}}$) in moto (Fig. 1.5) con velocità media $\mathbf{u}$ ($\mathrm{m\,s^{-1}}$):

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{u} \qquad (Am^{-2}); \qquad\qquad I_S = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0 \; dS \qquad (A)$$

Sussiste l'equazione di continuità

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0 \; dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} \; dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \; dV$$

ovvero, in forma differenziale,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1.1}$$

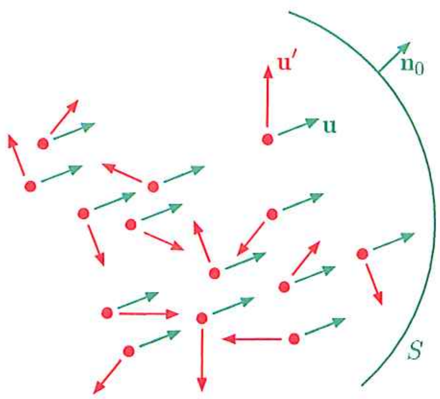


Figura 1.5: Cariche in moto con componenti di velocità aleatoria $\mathbf{u}'$ e *media* $\mathbf{u}$ e superficie S relativamente alla quale è definita la corrente.

Le cariche vengono mosse dal campo elettrico, secondo la conducibilità g ($\mathrm{S\,m^{-1}}$) del materiale

$$\mathbf{J} = g\ \mathbf{E} \tag{1.2}$$

Quando $g \to \infty$ il conduttore si dice ideale.

1.5 Corrente di spostamento

Considerato il circuito con condensatore (Fig. 1.6), effettuiamo la circuitazione di $\mathbf{H}$

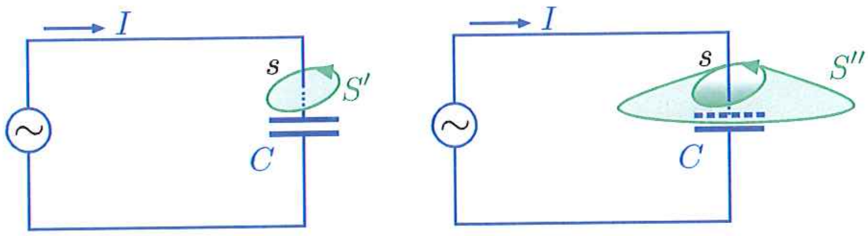


Figura 1.6: Scelta della superficie S contornata dalla linea s in modo che venga attraversata o no dal filo conduttore.

- lungo la linea s, che contorna la superficie S' attraversata dal conduttore percorso dalla corrente I:
$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I$$
- lungo la stessa linea s, che contorna una diversa superficie S'' che si sviluppa tra le armature del condensatore e quindi non è attraversata dal conduttore:
$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Per rimuovere la contraddizione, esaminiamo quello che avviene nel condensatore (Fig. 1.7). La corrente entrante attraverso la superficie S produce una variazione della carica contenuta nel volume V contornato da S (armatura di sinistra)

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0\ dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho\ dV \tag{1.3}$$

Dato che ρ è la sorgente di $\mathbf{D}$, ciò produce una variazione del flusso di $\mathbf{D}$

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0\ dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D}\ dV = -\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_0\ dS \tag{1.4}$$

La quantità $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ($\mathrm{A\,m^{-2}}$), è la corrente di spostamento, il cui flusso uscente da S è pari al flusso entrante in S della densità di corrente di conduzione $\mathbf{J}$. Applicando le (1.3)

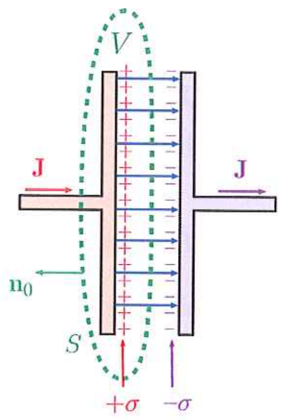


Figura 1.7: Correnti e cariche nel condensatore.

e (1.4) a una superficie che racchiude l'armatura di destra, si vede che quando una corrente I entra nel condensatore attraverso un reoforo, per effetto della corrente di spostamento un'uguale corrente esce dall'altro reoforo. L'introduzione della corrente di spostamento assicura la continuità del circuito per quantità variabili nel tempo.

1.6 Parametri del mezzo

Un mezzo è caratterizzato elettromagneticamente da

- costante dielettrica ϵ,
- permeabilità magnetica μ,
- conducibilità elettrica g.

Rispetto a ciascuno dei parametri, il mezzo si dice

- *stazionario* se il parametro non varia nel tempo;
- *lineare*, se il parametro è indipendente dall'intensità dei campi;
- *omogeneo* (o *uniforme*), se il parametro non varia con le coordinate;
- *isotropo*, se il parametro è indipendente dalle direzioni dei campi.

Un mezzo anisotropo rispetto a uno dei parametri è caratterizzato da un'espressione tensoriale di quel parametro, ad es.

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

In un mezzo anisotropo rispetto a uno dei parametri, i vettori della coppia corrispondente ($\mathbf{E}, \mathbf{D}$; $\mathbf{H}, \mathbf{B}$; $\mathbf{E}, \mathbf{J}$) possono non essere paralleli tra loro, essendo legati dalle trasformazioni lineari

$$\mathbf{D} = [\epsilon]\mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = [\mathbf{g}]\mathbf{E}$$

Un mezzo si dice chirale quando i vettori elettrici e magnetici dipendono dai corrispondenti vettori di entrambi i tipi:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \alpha_c\mathbf{B}; \quad \mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B} + \alpha_c\mathbf{E} \tag{1.5}$$

Nelle (1.5), α_c (S) è l'ammettenza di chiralità.

✓ **1.6.0.1 Problema**

Alcuni cristalli liquidi possono essere modellati con una struttura a spirale lungo l'asse z che si traduce nel seguente tensore di costante dielettrica:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_0[1 + a\cos(Kz)] & \epsilon_0 a\sin(Kz) & 0 \\ \epsilon_0 a\sin(Kz) & \epsilon_0[1 - a\cos(Kz)] & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{bmatrix}$$

con $a \neq 0, K \neq 0$.
Determinare se, rispetto alle proprietà dielettriche, il mezzo è

1. *omogeneo* → No, dipende da z
2. *isotropo* → No, non multiplo della matrice identità
3. *lineare* → Sì, non varia in base all'intensità dei campi

Se $K = 0$ e/o $a = 0$ il mezzo è omogeneo, isotropo, lineare? $K=0 \xrightarrow{(a\neq 0)}$ omogeneo e lineare
$a=0 \rightarrow$ omogeneo, isotropo e lineare

1.6.0.2 Problema

Determinare il vettore spostamento dielettrico $\mathbf{D}$ *che si ha in un mezzo chirale avente* $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 3$ *e ammettenza di chiralità* $\alpha_c = 0.05\,\Omega^{-1}$ quando nel mezzo sono presenti i campi $\mathbf{E} = 100\,\mathbf{x_0}\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ e $\mathbf{H} = 2\,\mathbf{y_0}\,\mathrm{A\,m^{-1}}$.

1.7 Grandezze impresse

Una volta legata la densità di corrente al campo elettrico tramite la (1.2), le equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + g\mathbf{E} \end{aligned}$$

costituiscono un sistema di equazioni differenziali omogenee nelle quali non compare alcun termine che rappresenti l'origine del campo elettromagnetico. Nella realtà, il campo è generato da processi che trasformano energia di "altro tipo" in energia elettromagnetica. Nell'esempio di Fig. 1.8, la densità di corrente corrispondente al

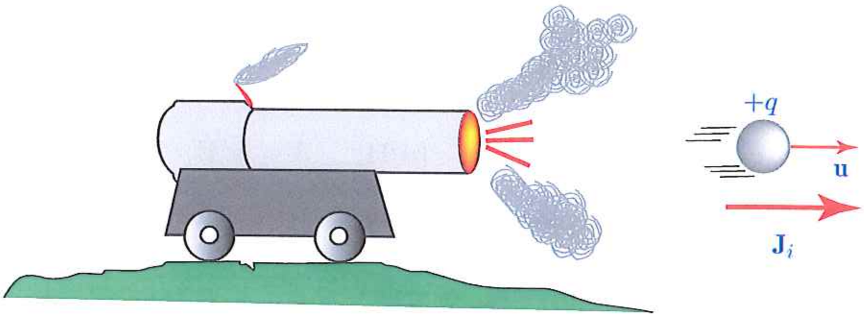


Figura 1.8: Generazione di campo elettromagnetico mediante trasformazione di energia; la corrente impressa $\mathbf{J}_i$ genera il campo che, a sua volta, fa scorrere correnti $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ nei materiali conduttori.

moto della carica presente nella palla di cannone non è proporzionale tramite la conducibilità dell'aria al campo $\mathbf{E}$ (che è essa a generare), bensì dipende essenzialmente dall'energia sviluppata nella combustione della polvere da sparo. Questa corrente, detta *impressa*, costituisce il termine noto nella seconda equazione di Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + g\mathbf{E} + \mathbf{J}_i \qquad\qquad \mathbf{J}_i \neq g\mathbf{E}$$

Nell'uso comune, la generazione del campo può essere vista come un trasferimento di energia elettromagnetica da una frequenza (spesso la "continua" dell'alimentazione) a un'altra (quella del campo); inoltre, nella pratica, la corrente impressa non descrive l'effettiva sorgente del campo, ma è una sorgente *equivalente*, fissata a priori sulla base di informazioni e/o assunzioni, per poter determinare il campo. In questa ottica, è lecito introdurre anche una corrente magnetica impressa $\mathbf{J}_{im}$, che non rappresenta una quantità fisica, ma, dal punto di vista matematico, è un termine noto introdotto nella prima equazione di Maxwell al solo fine di calcolare il campo. Il teorema di equivalenza (Cap. 11) dimostrerà la simmetria tra correnti elettriche e correnti magnetiche equivalenti.

In definitiva, tenuto conto delle correnti di sorgente, le equazioni di Maxwell vengono scritte

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m - \mathbf{J}_{im} \tag{1.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_i \tag{1.7}$$

dove, per simmetrizzare le espressioni, si è introdotta formalmente anche la corrente magnetica $\mathbf{J}_m$.

1.8 Dualità

La struttura formalmente simmetrica delle (1.6) e (1.7) consente di trasformare ciascun'equazione nell'altra mediante le corrispondenze

$$\begin{array}{cc} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} & \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E} \\ \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_m & \mathbf{J}_m \rightarrow -\mathbf{J} \\ \multicolumn{2}{c}{\epsilon \longleftrightarrow \mu} \end{array} \tag{1.8}$$

Le trasformazioni (1.8) lasciano invariato il sistema di equazioni (1.6) e (1.7) e quindi le sue soluzioni. Pertanto, se una soluzione viene trasformata mediante le (1.8), si ha ancora una soluzione del sistema. Questo, con la considerazione formale di una densità di carica magnetica, consente di trasformare soluzioni di tipo elettrico (per es. espressioni di **E**) in soluzioni di tipo magnetico (espressioni di **H**) e viceversa.

1.8.0.1 Problema

Risolvendo le equazioni di Maxwell nel caso di $\mathbf{J}_i = 0$, $\mathbf{J}_{im} \neq 0$ *è stato determinato un campo elettrico della forma*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{4\pi r}\mathbf{r}_0 \times \mathbf{J}_{im} f(\theta, \phi) \tag{1.9}$$

Scrivere l'espressione del campo $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ *nel caso di* $\mathbf{J}_{im} = 0$, $\mathbf{J}_i \neq 0$.

1.9 Condizioni al contorno

Le quantità elettromagnetiche sono legate da relazioni differenziali. Queste costituiscono un vincolo lasco per le soluzioni, che sono costituite da classi di funzioni. "La" soluzione del caso considerato viene selezionata imponendo le condizioni *al contorno*, cioè vincolando la quantità elettromagnetica considerata sui bordi dei domini di definizione. In generale tali vincoli devono essere compatibili con le proprietà fisiche dei campi elettromagnetici.

Di particolare importanza sono i vincoli in corrispondenza di superfici di separazione tra mezzi differenti. Consideriamo due mezzi omogenei caratterizzati da parametri diversi e separati da una sottile zona di transizione di spessore costante, entro la quale i parametri variano con continuità tra i valori che essi hanno nei due mezzi (Fig. 1.9). La zona di transizione, oltre a rappresentare la realtà fisica, assicura la derivabilità delle quantità elettromagnetiche rispetto alle variabili spaziali.

1.9.1 Vincoli per le componenti normali dei campi

Consideriamo un cilindro di sezione arbitraria, avente l'asse parallelo alla normale locale $\mathbf{n}_0$ (diretta secondo z) alle superfici, con la base inferiore S_1 nel mezzo 1, quella superiore S_2 nel mezzo 2 e contornato dalla superficie $S = S_1 + S_2 + S_3$ (Fig. 1.9) L'uso della legge di Gauss dà

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_V \rho\, dV = \iint_{S_1} \mathbf{D}_1\cdot\mathbf{n}_1\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{D}_2\cdot\mathbf{n}_2\, dS + \iint_{S_3} \mathbf{D}_3\cdot\mathbf{n}_3\, dS$$

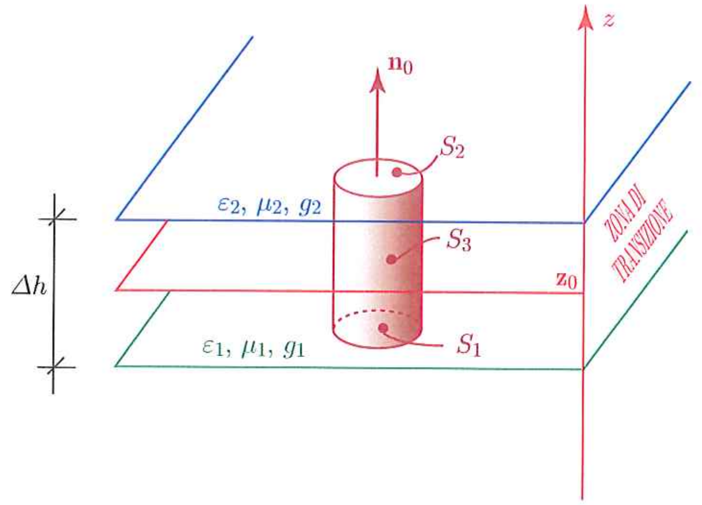


Figura 1.9: Discontinuità tra due mezzi rappresentata da una sottile zona di transizione di spessore Δh e cilindro usato per detrminare la condizione al contorno della componente normale di $\mathbf{D}$.

Quando $\Delta h \to 0$, $S_3 \to 0$, $S_1 \to S_2 \to S$ e $\mathbf{n}_1 \to -\mathbf{n}_2 \to -\mathbf{n}_0$, sicché

$$\iint_S (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_0 \, dS = \lim_{\Delta h \to 0} \iiint_V \rho \, dV \tag{1.10}$$

Si hanno due casi:

1. ρ finita: l'integrale a secondo membro della (1.10) svanisce e
$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_0 = 0$$
2. $\rho = \sigma\delta(z - z_0)$: in tal caso, per la proprietà di campionamento della funzione impulsiva,
$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_0 = \sigma$$

Il caso 2) è quello in cui sulla superficie di separazione ($z = z_0$) si localizza una densità volumetrica di carica ρ ($\mathrm{C\,m^{-3}}$) infinita corrispondente a una densità superficiale di carica σ ($\mathrm{C\,m^{-2}}$) finita.

Come prima applicazione della dualità, le (1.8) consentono di ricavare immediatamente la condizione per $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_0 = \sigma_m \equiv 0$$

1.9.2 Vincoli per le componenti tangenziali dei campi

Procediamo in modo analogo al precedente, considerando ora una generica spira che circonda la superficie S in un piano contenente la normale locale $\mathbf{n}_0 \parallel \mathbf{z}_0$ alle superfici che delimitano la zona di transizione. La spira ha i lati inferiore e superiore ortogonali a z e situati entro il primo e il secondo mezzo, rispettivamente (Fig. 1.10). Calcoliamo

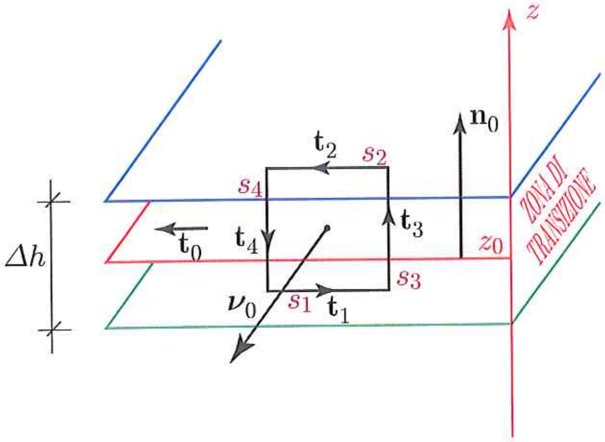


Figura 1.10: Discontinuità tra due mezzi rappresentata da una sottile zona di transizione di spessore Δh e spira usata per determinare la condizione al contorno della componente tangenziale di $\mathbf{H}$.

la circolazione dei termini ai due membri della seconda equazione di Maxwell

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \boldsymbol{\nu}_0 \;\; dS =$$
$$\int_{s_1} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t}_1 \;\; ds + \int_{s_2} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t}_2 \;\; ds + \int_{s_3} \mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{t}_3 \;\; ds + \int_{s_4} \mathbf{H}_4 \cdot \mathbf{t}_4 \;\; ds =$$
$$\iint_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \boldsymbol{\nu}_0 \;\; dS$$

Quando $\Delta h \to 0$, $s_3 \to s_4 \to 0$, $s_1 \to s_2$, e $-\mathbf{t}_1 \to \mathbf{t}_2 \to \mathbf{t}_0$, per cui

$$\int_s (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t}_0 \;\; ds = \lim_{\Delta h \to 0} \iint_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \boldsymbol{\nu}_0 \;\; dS \tag{1.11}$$

Si hanno due casi:

1. sia $\mathbf{J}$, sia $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ si mantengono finite (la seconda condizione è tanto meglio soddisfatta quanto piú lente sono le variazioni del campo), l'integrale a secondo membro della (1.11) svanisce e
$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t}_0 = 0$$

2. $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ è finita, ma $\mathbf{J} = \mathbf{K}\delta(z - z_0)$: in tal caso, per la proprietà di campionamento della funzione impulsiva,
$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t}_0 = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\nu}_0$$

ovvero, dato che $\mathbf{t}_0 = \boldsymbol{\nu}_0 \times \mathbf{n}_0$ e $\boldsymbol{\nu}_0$ è in direzione arbitraria,

$$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \tag{1.12}$$

con $\mathbf{n}_0$ orientata dal mezzo 1 al mezzo 2.

Il caso 2) è quello di un conduttore ideale, che ha disponibile una densità volumetrica di carica libera ρ infinita e sulla cui superficie ($z = z_0$) può quindi scorrere una corrente superficiale $\mathbf{K}$ di densità *lineare* ($\mathrm{A\,m^{-1}}$) finita.

Per dualità, dalla (1.12) si ricava immediatamente la condizione per $\mathbf{E}$

$$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{K}_m \equiv 0.$$

1.9.2.1 Problema

Sulla superficie piana di un conduttore ideale scorre una corrente $\mathbf{K} = 10\,(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0)\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}$. *Scrivere il campo magnetico sulla superficie del conduttore.*

1.9.3 Riepilogo delle condizioni al contorno

Le condizioni al contorno per i vettori elettrici e magnetici sono riportate nella tabella riepilogativa 1.1, in riferimento alla Fig. 1.11.

Componenti normali	Componenti tangenziali
$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{E}_2 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\mathbf{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_2}$	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$
$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{D}_2 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\mathbf{D}_1) = 0$
$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\mathbf{H}_1) = 0$	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$
$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$	$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{B}_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\mathbf{B}_1) = \mu_2\mathbf{K}$

Tabella 1.1: Condizioni al contorno di due mezzi $(1, 2)$ differenti. La normale al contorno $\mathbf{n}_0$ è orientata verso il mezzo 2 (Fig. 1.11).

Dato che il campo elettromagnetico è nullo all'interno di un mezzo conduttore ideale, le condizioni al contorno impongono al campo elettrico di essere normale e al

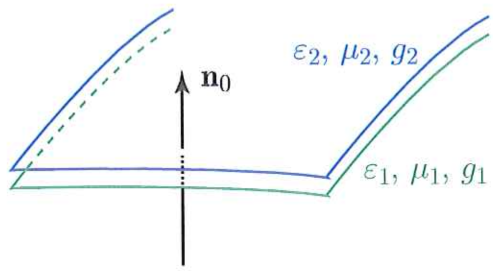


Figura 1.11: Contorno di due mezzi elettromagneticamente diversi e normale locale.

campo magnetico di essere tangente alla superficie che delimita il mezzo (Fig. 1.12).

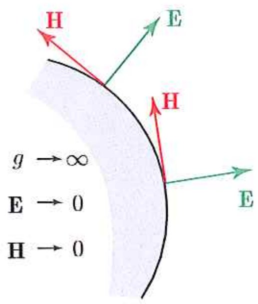


Figura 1.12: Campo elettrico normale e campo magnetico tangenziale alla superficie di un conduttore ideale.

CAMPI ELETTROMAGNETICI

1. INTRODUZIONE

$\underline{D} = \varepsilon \underline{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E} \rightarrow$ SPOSTAMENTO DIELETTRICO (C/m^2) ; $\varepsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{F}{m}$

$\underline{H} = \frac{B}{\mu} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \rightarrow$ CAMPO MAGNETICO (A/m) ; $\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

• **TEOREMA DI STOKES:**

Sia s una linea che contorna una superficie S:

$$\boxed{\iint_S \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n}_0 \, dS = \oint_s \underline{F} \cdot \underbrace{\underline{t}_0 \, ds}_{d\underline{s}}}$$

La circuitazione di $\underline{F}$ lungo una linea chiusa s è uguale al FLUSSO del ROTORE di $\underline{F}$ attraverso QUALSIASI superficie S che abbia s come "contorno".

• **TEOREMA DELLA DIVERGENZA:**

Sia V un volume ed S una qualsiasi superficie che lo contorna:

$$\boxed{\iiint_V \nabla \cdot \underline{F} \, dV = \oiint_S \underline{F} \cdot d\underline{S}}$$

L'integrale della divergenza di $\underline{F}$ su un volume V è uguale all'integrale che rappresenta il FLUSSO di $\underline{F}$ attraverso la superficie S che racchiude V.

• **EQUAZIONI DI MAXWELL:**

FARADAY: $\oint \underline{E} \cdot d\underline{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \underline{B} \cdot \underline{n}_0 \, dS \rightarrow \boxed{\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}$

AMPÈRE: $\oint \underline{B} \cdot d\underline{s} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{d\underline{E}}{dt} \cdot \underline{n}_0 \, dS \rightarrow \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}}$

GAUSS: $\oiint_S \underline{E} \cdot \underline{n}_0 \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{D} = \rho}$

GAUSS: $\oiint_S \underline{B} \cdot \underline{n}_0 \, dS = 0 \rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{B} = 0} \rightarrow \nabla \cdot \underline{H} = 0$

Riassumendole, in maniera più ordinata:

(1) $\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{s} = -\frac{d}{dt}\iint_S \underline{B} \cdot \underline{n_o}\, dS$;	$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$
(2) $\oint_S \underline{B} \cdot d\underline{s} = \frac{d}{dt}\iint_S \underline{D} \cdot \underline{n_o}\, dS + \iint_S \underline{J} \cdot \underline{n_o}\, dS$;	$\nabla \times \underline{B} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J}$
(3) $\oiint_S \underline{D} \cdot \underline{n_o}\, dS = q$;	$\nabla \cdot \underline{D} = \rho$
(4) $\oiint_S \underline{B} \cdot \underline{n_o}\, dS = 0$;	$\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot \underline{H} = 0$

In particolare, la (4) ci dice che NON esiste una CARICA MAGNETICA, bensì solo dipoli magnetici; Infatti, lo Zero è la somma di "cariche magnetiche" opposte e di egual valore.

- **OPERATORE NABLA ∇:**

E' un operatore DIFFERENZIALE e VETTORIALE:

$$\nabla[\,] = \frac{\partial[\,]}{\partial x}\underline{x_o} + \frac{\partial[\,]}{\partial y}\underline{y_o} + \frac{\partial[\,]}{\partial z}\underline{z_o}$$

- **GRADIENTE:**

E' applicabile solo agli scalari e restituisce un vettore! Sia $\phi(x,y,z)$ uno scalare:

$$\text{grad}\, \phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{x_o} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{y_o} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{z_o}$$

- **DIVERGENZA:**

$$\text{div}\, \underline{F} = \nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- **ROTORE:**

$$\text{rot}\, \underline{F} = \nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{x_o} & \underline{y_o} & \underline{z_o} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\underline{x_o} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\underline{y_o} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\underline{z_o}$$

Corrente di conduzione:

La densità di corrente $\underline{J}$ e la corrispondente quantità integrale I_S sono associate ad una densità di carica ρ (A/m^3) in moto con velocità media $\underline{u}$ (m/s) tra i moti di tutte le particelle:

$$\left[\underline{J} = \rho \cdot \underline{u} \ (A/m^2) \ ; \quad I_S = \iint_S \underline{J} \cdot \underline{n}_0 \, dS \right]$$

E' da notare che $\underline{J}$ è una densità SUPERFICIALE, mentre ρ è volumetrica!

Equazione di continuità

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \underline{J} \cdot \underline{n}_0 \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \underline{J} \, dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV}$$

Il FLUSSO della densità di corrente attraverso la superficie chiusa S è uguale a meno la variazione nel tempo della densità di carica presente nel volume V racchiuso da S; il segno meno è giustificato dal fatto che un flusso uscente, quindi positivo, comporta una DIMINUZIONE della quantità di carica interna.

In FORMA DIFFERENZIALE:

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Le cariche vengono mosse dal campo elettrico $\underline{E}$, secondo la CONDUCIBILITÀ g (S/m) specifica del materiale; si ha:

$$\boxed{\underline{J} = g \underline{E}}$$

che di fatto rappresenta la 1ª Legge di Ohm.

Quando $g \to \infty$, il CONDUTTORE viene detto IDEALE:

Le cariche possono essere messe in moto senza dissipare energia, cioè con una forza che non compie lavoro.

- PARAMETRI DEL MEZZO:

Un mezzo è caratterizzato elettromagneticamente da: una COSTANTE DIELETTRICA ε, da una PERMEABILITÀ MAGNETICA μ e da una CONDUCIBILITÀ ELETTRICA g.

Rispetto a ciascuno dei parametri, il mezzo si dice:

- OMOGENEO (o UNIFORME): se il parametro NON varia con le coordinate;
- LINEARE: se il parametro è indipendente dall' INTENSITÀ dei campi;
- ISOTROPO: se il parametro è indipendente dalle DIREZIONI dei campi. Sostanzialmente, se i campi sono paralleli, il parametro sarà scalare.

Un mezzo ANISOTROPO rispetto ad un parametro è caratterizzato da una rappresentazione TENSORIALE del parametro, del tipo:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Questa matrice è detta "TENSORE"

In un mezzo anisotropo rispetto ad un parametro, i vettori delle coppie corrispondenti ($\underline{E}, \underline{D}$ per ε; $\underline{H}, \underline{B}$ per μ; $\underline{E}, \underline{J}$ per g) possono NON essere PARALLELI tra loro, essendo legati dalle trasformazioni lineari:

$$\underline{D} = [\varepsilon]\underline{E} \quad ; \quad \underline{B} = [\mu]\underline{H} \quad ; \quad \underline{J} = [g]\underline{E}$$

* C'è anche un'altra proprietà, detta CHIRALITÀ: un mezzo è chirale quando i vettori elettrici e magnetici dipendono dai corrispondenti vettori di entrambi i tipi:

$$\underline{D} = \varepsilon\underline{E} + \alpha_c \underline{B} \quad ; \quad \underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu} + \alpha_c \underline{E}$$

dove α_c (S = Siemens) è l'AMMETTENZA DI CHIRALITÀ del mezzo.

- Es. 1.6.0.1:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_0[1+a\cos(kz)] & \varepsilon_0 a\sin(kz) & 0 \\ \varepsilon_0 a\sin(kz) & \varepsilon_0[1-a\cos(kz)] & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}, \quad \text{con } a, K \neq 0.$$

- Il mezzo è LINEARE, ma non omogeneo (dipende da z) e non isotropo.
- Se $K=0$ e $a \neq 0 \Rightarrow$ il mezzo è lineare ed omogeneo, ma non isotropo.
- Se $a=0 \Rightarrow$ il mezzo è lineare, omogeneo ed isotropo.

GRANDEZZE IMPRESSE

Una volta visto che $\underline{J} = g\underline{E}$, le equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J} \overset{!}{=} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + g\underline{E}$$

costituiscono un sistema di EQUAZIONI DIFFERENZIALI OMOGENEE (con incognite i campi), ma nelle quali non compare alcun termine che rappresenti l'ORIGINE del campo elettromagnetico.

Nella realtà, il campo è generato da processi che TRASFORMANO ENERGIA di "altro tipo" in energia elettromagnetica:

la corrente IMPRESSA $\underline{J}_i$ genera il campo che, a sua volta, fa scorrere correnti $\underline{J} = g\underline{E}$ nei materiali conduttori.

Questa corrente impressa $\underline{J}_i$ è il TERMINE NOTO della 2ª eq. di Maxwell:

$$\boxed{\nabla \times \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + g\underline{E} + \underline{J}_i} \quad , \text{ con } \underline{J}_i \neq \underline{J} = g\underline{E}$$

La generazione del campo può essere vista come un trasferimento di energia elettromagnetica da una FREQUENZA (spesso quella CONTINUA dell'alimentazione) ad un'altra, quella del campo. Nella pratica, la corrente impressa NON descrive l'effettiva sorgente del campo, ma è una SORGENTE EQUIVALENTE fissata a priori in base ad assunzioni, per poter determinare il campo.

E' lecito introdurre anche una CORRENTE IMPRESSA MAGNETICA $\underline{J}_{im}$ nella 1ª eq. di Maxwell, che ha valore solo dal punto di vista matematico (NON fisico). Inoltre, per simmetrizzare le espressioni, si introduce anche una CORRENTE MAGNETICA J_m (=0):

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= -\frac{\partial B}{\partial t} + \underline{J}_m - \underline{J}_{im} \\ \nabla \times \underline{H} &= \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J} + \underline{J}_i \end{aligned}}$$

Vedremo più avanti che il TEOREMA DI EQUIVALENZA mostrerà la simmetria tra correnti elettriche e correnti magnetiche equivalenti.

- DUALITA':

Ciascun equazione puo' essere trasformata nell'altra, mediante le corrispondenze:

$$\underline{E} \rightarrow \underline{H} \qquad \underline{H} \rightarrow -\underline{E}$$

$$\underline{J} \rightarrow \underline{J}_m \qquad \underline{J}_m \rightarrow -\underline{J}$$

$$\varepsilon \longleftrightarrow \mu$$

Se una soluzione viene trasformata, resterà ancora una SOLUZIONE!

- Es. 1.8.0.1:

Risolvendo le eq. di Maxwell nel caso di $\underline{J}_i = 0$, $\underline{J}_{im} \neq 0$ è stato determinato un campo elettrico della forma:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{4\pi r}\, \underline{r}_0 \times \underline{J}_{im}\, f(\theta,\phi)$$

Scrivere l'espressione del campo $\underline{H}(\underline{r})$ nel caso di $\underline{J}_{im} = 0$, $\underline{J}_i \neq 0$.

$$\rightarrow \boxed{\underline{H}(\underline{r}) = \frac{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi r}\, \underline{r}_0 \times \underline{J}_i\, f(\theta,\phi)}$$

✓

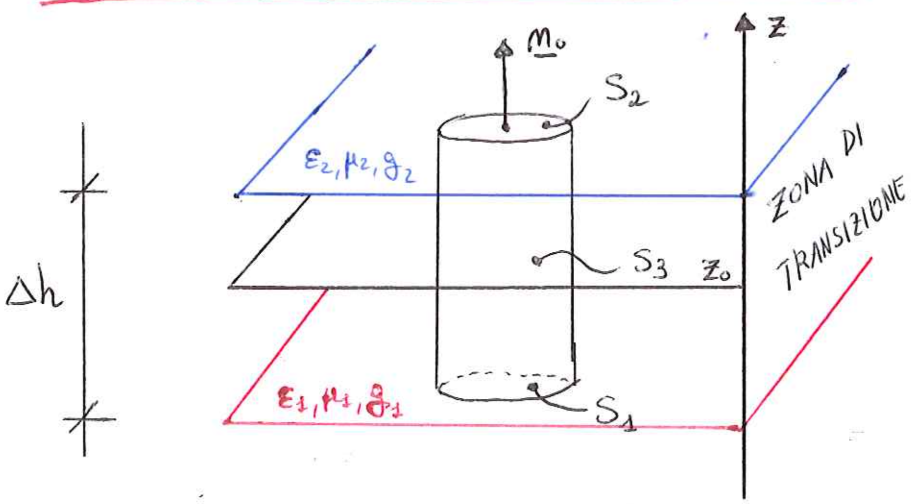
- CONDIZIONI AL CONTORNO:

La SOLUZIONE PARTICOLARE che ci interessa si ottiene imponendo delle condizioni al contorno, compatibili con le proprietà fisiche dei campi elettromagnetici.

Sono di particolare importanza i VINCOLI in corrispondenza di SUPERFICI di SEPARAZIONE tra mezzi differenti.

Consideriamo 2 mezzi omogenei con parametri diversi e separati da una sottile SUPERFICIE DI TRANSIZIONE entro la quale i parametri variano con continuità tra i valori che hanno nei 2 mezzi. La zona di transizione rappresenta la realtà fisica.

- VINCOLI PER LE COMPONENTI NORMALI DEI CAMPI:



Consideriamo la legge di Gauss:

$$\oiint_S \underline{D}\cdot\underline{n}_0\, dS = \iiint_V \rho\, dV = \iint_{S_1} \underline{D}_1\cdot\underline{n}_1\, dS + \iint_{S_2} \underline{D}_2\cdot\underline{n}_2\, dS + \iint_{S_3} \underline{D}_3\cdot\underline{n}_3\, dS$$

Quando $\underline{\Delta h \to 0}$: $S_3 \to 0$, $S_1 \to S_2 \to S$ e $\underline{n}_1 \to -\underline{n}_2 \to -\underline{n}_0$, quindi:

$$\iint_S (\underline{D}_2-\underline{D}_1)\cdot\underline{n}_0\, dS = \lim_{\Delta h \to 0} \iiint_V \rho\, dV$$

Si hanno <u>2 CASI</u>:

(1) <u>ρ finita</u>: $\iiint_V \rho\, dV \to 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\underline{D}_2-\underline{D}_1)\cdot\underline{n}_0 = 0}$

(2) <u>$\rho = \sigma\,\delta(z-z_0)$</u>, cioè ρ infinita (Delta di Dirac); in tal caso, per la proprietà di campionamento di $\delta(z-z_0)$, si ha:

$$\boxed{(\underline{D}_2-\underline{D}_1)\cdot\underline{n}_0 = \sigma}$$

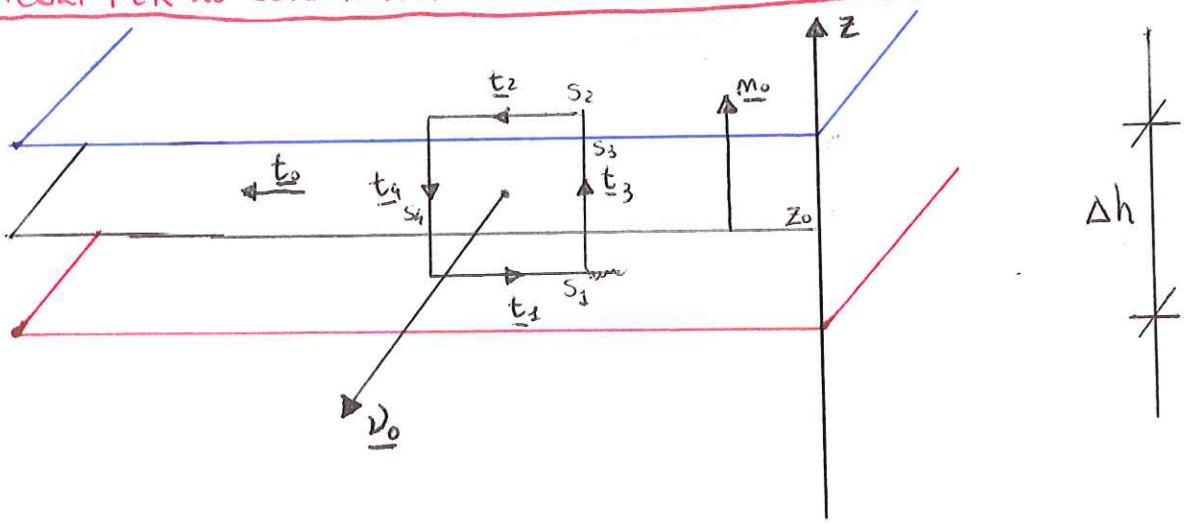
Il caso (2) è quello in cui sulla superficie di separazione ($z=z_0$) si localizza una densità volumetrica di carica ρ (C/m^3) <u>INFINITA</u>, corrispondente ad una densità <u>superficiale</u> di carica σ (C/m^2) <u>FINITA</u>. Come per esempio nei CONDUTTORI IDEALI.

Per DUALITA':

$$\boxed{(\underline{B}_2-\underline{B}_1)\cdot\underline{n}_0 = \sigma_m \equiv 0}$$

Coincide sempre con <u>ZERO</u>, poiché una densità magnetica superficiale è fisicamente irrealizzabile.

- <u>VINCOLI PER LE COMPONENTI TANGENZIALI DEI CAMPI</u>:



Consideriamo una spira che circonda la superficie S in un piano contenente la normale locale $\underline{n_0} \parallel \underline{z_0}$ alle superfici che delimitano la zona di transizione.

Calcoliamo la CIRCUITAZIONE dei ~~due~~ termini ai 2 membri della 2ª eq. di Maxwell:

$$\iint_S (\nabla \times \underline{H}) \cdot \underline{\nu_0}\, dS = \int_{S_1} \underline{H_1} \cdot \underline{t_1}\, ds + \int_{S_2} \underline{H_2} \cdot \underline{t_2}\, ds + \int_{S_3} \underline{H_3} \cdot \underline{t_3}\, ds + \int_{S_4} \underline{H_4} \cdot \underline{t_4}\, ds = \iint_S \left(\underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}\right) \cdot \underline{\nu_0}\, dS$$

Quando $\underline{\Delta h \to 0}$: $S_3 \to S_4 \to 0$, $S_1 \to S_2$, $-\underline{t_1} \to \underline{t_2} \to \underline{t_0}$; per cui:

$$\int_S (\underline{H_2} - \underline{H_1}) \cdot \underline{t_0}\, ds = \lim_{\Delta h \to 0} \iint_S \left(\underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}\right) dS$$

Si hanno 2 CASI:

1. $\underline{J}$ e $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ sono FINITE : l'integrale a 2° membro tende a zero e si ha:

$$\boxed{(\underline{H_2} - \underline{H_1}) \cdot \underline{t_0} = 0}$$

2. $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ finita, ma $\underline{J} = \underline{K} \cdot \delta(z - z_0)$, cioè $\underline{J}$ INFINITA, si ottiene:

$$(\underline{H_2} - \underline{H_1}) \cdot \underline{t_0} = \underline{K} \cdot \underline{\nu_0}$$

Ma, dato che: $\underline{t_0} = \underline{\nu_0} \times \underline{n_0}$ e $\underline{\nu_0}$ è in direzione arbitraria; per la proprietà dei PRODOTTI MISTI: $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot \underline{a} = (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot \underline{b}$

$$\boxed{\underline{n_0} \times (\underline{H_2} - \underline{H_1}) = \underline{K}}$$

, con $\underline{n_0}$ che va dal mezzo 1 al mezzo 2!

Il caso (2) è sempre quello di un conduttore ideale con densità volumetrica di carica libera ρ INFINITA e sulla cui superficie $(z = z_0)$ può scorrere una corrente superficiale $\underline{K}$ di DENSITA' LINEARE (A/m) FINITA!

Per DUALITA':

$$\boxed{\underline{n_0} \times (\underline{E_1} - \underline{E_2}) = \underline{K_m} = 0}$$

* NOTA: notare il cambiamento di segno nella trasformazione!

• RIEPILOGO CONDIZIONI AL CONTORNO :

COMPONENTI NORMALI	COMPONENTI TANGENZIALI
$\underline{n_0} \cdot \left(\underline{E_2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \underline{E_1} \right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$	$\underline{n_0} \times \left(\underline{E_2} - \underline{E_1} \right) = 0$
$\underline{n_0} \cdot \left(\underline{D_2} - \underline{D_1} \right) = \sigma$	$\underline{n_0} \times \left(\underline{D_2} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \underline{D_1} \right) = 0$
$\underline{n_0} \cdot \left(\underline{H_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \underline{H_1} \right) = 0$	$\underline{n_0} \times \left(\underline{H_2} - \underline{H_1} \right) = \underline{K}$
$\underline{n_0} \cdot \left(\underline{B_2} - \underline{B_1} \right) = 0$	$\underline{n_0} \times \left(\underline{B_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \underline{B_1} \right) = \mu_2 \underline{K}$

• CONDUTTORE IDEALE :

Partiamo da : $\underline{n_0} \times \left(\underline{E_2} - \underline{E_1} \right) = 0$; se il mezzo 1 è un conduttore ideale, il suo campo elettrico all'interno è nullo, quindi $\underline{E_1} = 0$.

$\Rightarrow$ $\underline{n_0} \times \underline{E_2} = 0$ $\longrightarrow$ Il CAMPO ELETTRICO è NORMALE alla superficie del conduttore ideale!

Invece, da : $\underline{n_0} \cdot \left(\underline{B_2} - \underline{B_1} \right) = 0$, sapendo che $\underline{B_1} = 0$, si ottiene:

$\underline{n_0} \cdot \underline{B_2} = 0$ $\longrightarrow$ Il CAMPO MAGNETICO è sempre TANGENZIALE alla superficie del conduttore ideale! (Vale anche per $\underline{H}$)