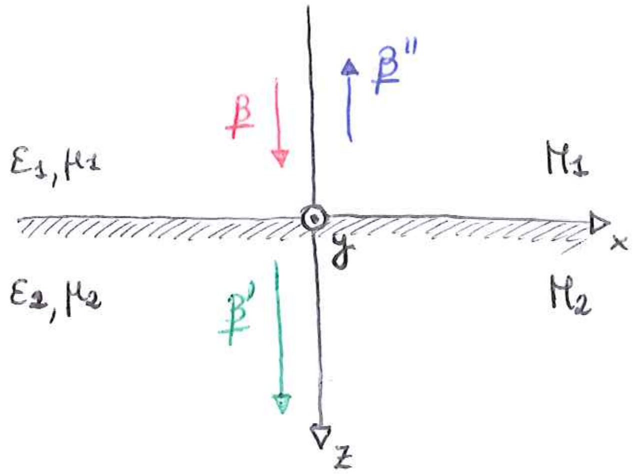
9. Riflessione e Rifrazione di Onde Piane

• Incidenza Normale:

Consideriamo un MATERIALE DIELETTRICO.

Abbiamo 2 mezzi PRIVI di DISSIPAZIONI M_1 ed M_2 con parametri REALI ε_1, μ_1 (di solito è ARIA $\Rightarrow \varepsilon_0, \mu_0$) e ε_2, μ_2.

Dal mezzo M_1, un'ONDA PIANA UNIFORME INCIDE NORMALMENTE sulla superficie piana di separazione tra i 2 mezzi:



Dobbiamo soddisfare le CONDIZIONI AL CONTORNO che, essendo i mezzi dielettrici, riguardano i COMPONENTI TANGENZIALI, tuttavia, i campi sono tutti tangenziali (!) poiché ortogonali a $\underline{\beta_0} \equiv \underline{z_0}$.

Avremo un'ONDA RIFRATTA e un'ONDA RIFLESSA che si propagano in direzione $\underline{z_0}$, la prima in $+\underline{z_0}$ e l'altra in $-\underline{z_0}$:

- $\underline{\beta} = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\,\underline{z_0}$ INCIDENTE
- $\underline{\beta}' = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\,\underline{z_0}$ RIFRATTA
- $\underline{\beta}'' = -\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\,\underline{z_0}$ RIFLESSA

• I CAMPI sono determinati dalle condizioni di continuità in corrispondenza della superficie di separazione, cioè per $z = 0$:

per esempio: $\underline{E}''(z) = \underline{E}_0'' e^{j\beta z}\Big|_{z=0} = \underline{E}_0''$

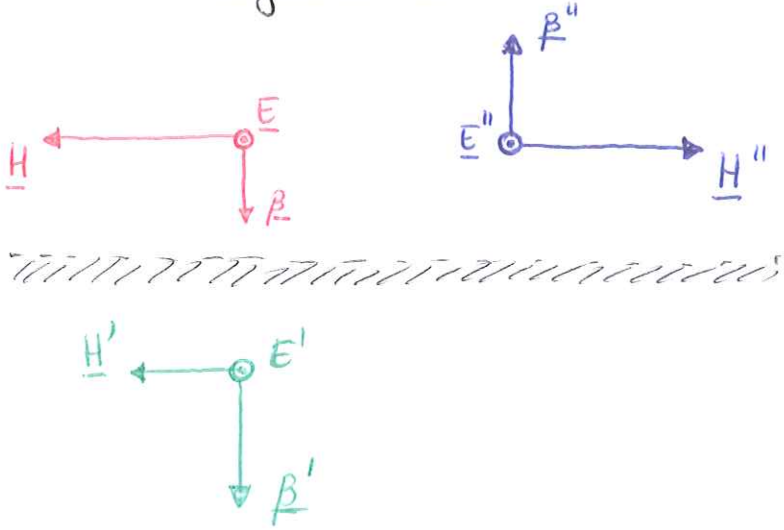
Quindi, si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}_0 + \underline{E}_0'' &= \underline{E}_0' \\ \underline{H}_0 + \underline{H}_0'' &= \underline{H}_0' \end{aligned}}$$

$*$ Sono vettori COMPLESSI: vale per $Re[\dots]$ e $Im[\dots]$

• Assunti: $\underline{E}_0 = E_0 \underline{e}_0$; $\underline{H}_0 = H_0 \underline{h}_0$

l' ONDA RIFLESSA ha $\underline{H}$ ed $\underline{E}$ ruotati rispetto all'onda incidente, poiché devono rispettare la terna trirettangola destra:



Quindi, l' ONDA RIFLESSA ha:

$$\underline{E}_0'' = E_0'' \underline{e}_0 \quad ; \quad \underline{H}_0'' = - H_0'' \underline{h}_0$$

* segno MENO!

e l' ONDA RIFRATTA ha:

$$\underline{E}_0' = E_0' \underline{e}_0 \quad ; \quad \underline{H}_0' = H_0' \underline{h}_0$$

Proiettando sugli assi, per la generica componente i:

$$\boxed{\begin{aligned} &1) \quad E_{0i} + E_{0i}'' = E_{0i}' \\ &2) \quad \frac{E_{0i}}{\eta_1} - \frac{E_{0i}''}{\eta_1} = \frac{E_{0i}'}{\eta_2} \end{aligned}}$$

da cui:

$$E_{0i}'' (\eta_2 + \eta_1) = E_{0i} (\eta_2 - \eta_1)$$

ovvero:

$$\boxed{E_{0i}'' = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{0i}}$$

Dove definiamo il rapporto:

$$\boxed{q_E = \frac{E_0''}{E_0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE del campo elettrico per incidenza normale.

* Se $\eta_1 = \eta_2$ (stesso mezzo) $\Rightarrow q_E = 0 \Rightarrow$ NON ho RIFLESSIONE, proprio perché il mezzo è lo stesso

Analogamente, definiamo:

$$\boxed{q_H = \frac{H_{0i}''}{H_{0i}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = q_E}$$

COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE del campo magnetico per incidenza normale.

ATTENZIONE: il fatto che il coefficiente di riflessione del campo magnetico sia uguale a quello del campo elettrico implica che, se il campo elettrico RIFLESSO è DISCORDE a quello incidente, allora il campo magnetico è CONCORDE e VICEVERSA!

Dai coefficienti di riflessione è possibile ricavare i coefficienti di TRASMISSIONE:

$$\boxed{t_E = \frac{E_{0i}'}{E_{0i}} = 1 + \frac{E_{0i}''}{E_{0i}} = 1 + q_E = 1 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}}$$

COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE del campo ELETTRICO

$$\boxed{t_H = \frac{H_{0i}'}{H_{0i}} = 1 - \frac{H_{0i}''}{H_{0i}} = 1 - q_H = 1 - \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE del campo MAGNETICO

* Ovviamente, se $\eta_1 = \eta_2$ (STESSO MEZZO) $\Rightarrow t_E = t_H = 1$

- ## MATERIALE DISSIPATIVO (CONDUTTORE):

Consideriamo ora il caso in cui il mezzo M_2 sia DISSIPATIVO e si comporti come un CONDUTTORE ($g \neq 0$).

Allora, abbiamo:

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2g}} + j\sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2g}}$$

e, poiché $q_E = \dfrac{\frac{\eta_2}{\eta_1} - 1}{\frac{\eta_2}{\eta_1} + 1}$, calcoliamo il rapporto $\dfrac{\eta_2}{\eta_1}$:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2g} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + j\sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2g} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$$

Tenendo conto che:

- $\mu_2 \simeq \mu_1$;
- ε_1 è dello stesso ordine di grandezza di ε_2 ($\varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2$);
- $\dfrac{\omega \varepsilon_2}{g} \to 0$, poiché il mezzo è un CONDUTTORE

$\Rightarrow \dfrac{\eta_2}{\eta_1} \to 0$ e quindi: $\boxed{q_E \simeq -1 \ ; \ q_H \simeq -1 \ ; \ t_E \simeq 0}$

* L'onda incidente viene RIFLESSA (quasi) COMPLETAMENTE!
Il campo elettrico che entra nel conduttore è praticamente nullo.

* Invece, il CAMPO MAGNETICO TANGENZIALE nello strato superficiale del conduttore è il DOPPIO di quello incidente ($t_H = 1 - q_E \approx 2$), ma decade esponenzialmente con la profondità:

$$H_2(z) - H_1(0^-) = \int_0^z J(z)\, dz$$

Quando: $g \to \infty$ (CONDUTTORE IDEALE) $\Rightarrow J(z) \to K\,\delta(z)$

contemporaneamente

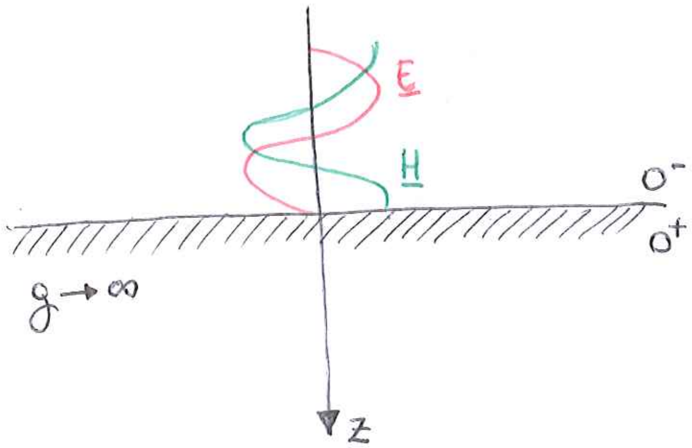
$$H(0^+) \to 0 \quad \Rightarrow \quad q_H \to 1$$

- All'esterno del conduttore, il campo risulta dalla SOVRAPPOSIZIONE di quello dell'ONDA INCIDENTE e quello dell'ONDA RIFLESSA:

$$\underline{E}_{tot} = \underline{E}_0 e^{-j\beta z} + \underline{E}_0'' e^{j\beta z} = \underline{E}_0 \left(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}\right) = \boxed{-2j\underline{E}_0 \sin(\beta z)}$$

$$\underline{H}_{tot} = \underline{H}_0 e^{-j\beta z} + \underline{H}_0'' e^{j\beta z} = \underline{H}_0 \left(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}\right) = \boxed{2\underline{E}_0 \cos(\beta z)}$$

* ENTRAMBI I CAMPI NON SI PROPAGANO → ONDE STAZIONARIE



Non si propagano perché non c'è la VARIAZIONE DI FASE (termine esponenziale), ma il $\sin(\beta z)$ e il $\cos(\beta z)$ variano solo l'ampiezza.
Le ONDE STAZIONARIE sono comunque chiamate "onde" poiché derivano dalla sovrapposizione di 2 onde!

- Il VETTORE DI POYNTING del CAMPO TOTALE è:

$$\underline{P}_{tot} = -2j \frac{|\underline{E}_0|^2}{\eta} \sin(\beta z)\cos(\beta z)\underline{z}_0 = -j\frac{|\underline{E}_0|^2}{\eta} \sin(2\beta z)\underline{z}_0$$

ed è PURAMENTE IMMAGINARIO ⟹ Tutta POTENZA REATTIVA, Il CAMPO TOTALE NON TRASPORTA POTENZA!

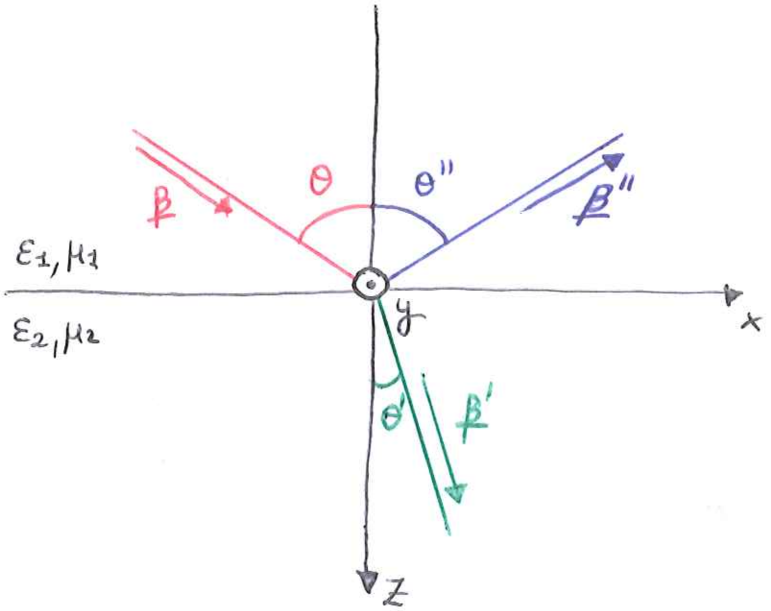
ATTENZIONE: le 2 onde individualmente trasportano potenza! Infatti:

- INCIDENTE: $\underline{P} = \frac{|\underline{E}_0|^2}{2\eta}\underline{z}_0$
- RIFLESSA: $\underline{P}'' = -\frac{|\underline{E}_0''|^2}{2\eta}\underline{z}_0$

$$\boxed{\underline{P}_{tot} \neq \underline{P} + \underline{P}''}$$

- INCIDENZA OBLIQUA:

Consideriamo M_2, caratterizzato da ε_2, μ_2, un MEZZO DIELETTRICO.
Stavolta, l'onda piana uniforme INCIDE con un ANGOLO θ dal mezzo 1:



- Le CONDIZIONI AL CONTORNO in corrispondenza della superficie di separazione ($z=0$) richiedono la presenza di un'onda riflessa e una rifratta.

I CAMPI, per le diverse onde, saranno:

- INCIDENTE:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)} \qquad \underline{H} = \underline{H}_0 e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)}$$

con: $\boxed{\begin{aligned} \beta_x &= \beta \sin\theta \\ \beta_z &= \beta\cos\theta \end{aligned}}$

- RIFLESSA:

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{-j(\beta_x'' x + \beta_z'' z)} \qquad \underline{H}'' = \underline{H}_0'' e^{-j(\beta_x'' x + \beta_z'' z)}$$

con $\boxed{\begin{aligned} \beta'' &= \beta \\ \beta_x'' &= \beta\sin\theta'' \\ \beta_z'' &= -\beta\cos\theta'' \end{aligned}}$

- RIFRATTA:

$$\underline{E}' = \underline{E}_0' e^{-j(\beta_x' x + \beta_z' z)} \qquad \underline{H}' = \underline{H}_0' e^{-j(\beta_x' x + \beta_z' z)}$$

Con $\boxed{\begin{aligned} \beta_x' &= \beta'\sin\theta' \\ \beta_z' &= \beta'\cos\theta' \end{aligned}}$

Le condizioni di CONTINUITÀ ($z=0$) dei COMPONENTI TANGENZIALI $\underline{E}_t, \underline{H}_t$ richiedono che sia:

$$\boxed{\underline{E}_{0t} e^{-j\beta_x x} + \underline{E}_{0t}'' e^{-j\beta_x'' x} = \underline{E}_{0t}' e^{-j\beta_x' x}}$$

- **Determinazione Angoli di Riflessione e Rifrazione :**

Siccome la relazione precedente deve essere soddisfatta ovunque sul piano xy ($z=0$) e per qualunque valore dei campi incidente, riflesso e rifratto, è NECESSARIO che :

$$\boxed{e^{-j\beta_x x} = e^{-j\beta''_x x} = e^{-j\beta'_x x}}$$

che implica:

$$\boxed{\beta_x = \beta''_x = \beta'_x} \rightarrow \beta \sin\theta = \beta \sin\theta'' = \beta' \sin\theta'$$

Da cui si ricavano le seguenti 2 leggi:

- Legge di Erone : $\boxed{\theta = \theta''}$ → Angolo di incidenza ≡ Angolo di riflessione

- Legge di Snell : $\boxed{\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \dfrac{\beta'}{\beta}}$

Notare che la legge di Snell impone l'uguaglianza delle velocità di fase lungo x di onda incidente e rifratta :

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

dove: u_1 ed u_2 sono le VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE nei mezzi M_1 ed M_2.

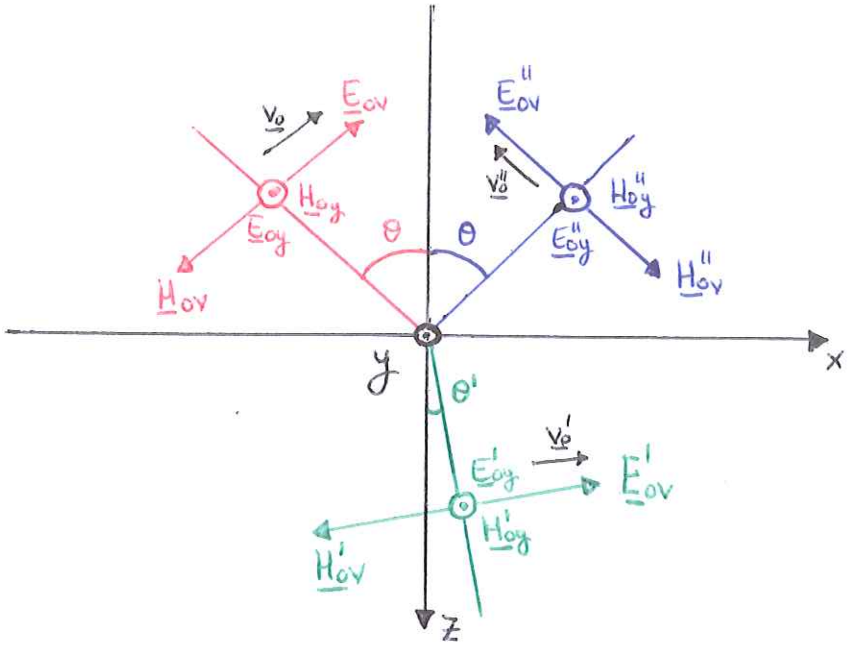
Se il mezzo M_1 è il vuoto ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$) :

$$\boxed{\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = n} \rightarrow \text{INDICE DI RIFRAZIONE del mezzo } M_2$$

- **Determinazione Coefficienti di Riflessione :**

Stabilita l'uguaglianza degli esponenziali, le condizioni di continuità si riducono alle :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}_{ot} + \underline{E}''_{ot} &= \underline{E}'_{ot} \\ \underline{H}_{ot} + \underline{H}''_{ot} &= \underline{H}'_{ot} \end{aligned}}$$



- Il CAMPO INCIDENTE, comunque sia polarizzato, può essere rappresentato da 2 vettori $\underline{E}_{oh}$ ed $\underline{E}_{ov}$, tra loro ORTOGONALI e giacenti sul piano (equifase) PERPENDICOLARE a $\underline{\beta}$:

$$\underline{E}_o = \underline{E}_{oh} + \underline{E}_{ov} = E_{oy}\,\underline{y}_o + E_{ov}\,\underline{v}_o$$

$$\underline{H}_o = \frac{\underline{\beta}_o \times \underline{E}_o}{\eta_1} = -\frac{E_{oy}}{\eta_1}\,\underline{v}_o + \frac{E_{ov}}{\eta_1}\,\underline{y}_o$$

, dove $\boxed{\underline{v}_o = \underline{x}_o \cos\theta - \underline{z}_o \sin\theta}$

- Analogamente, per il CAMPO RIFLESSO:

$$\underline{E}''_o = \underline{E}''_{oh} + \underline{E}''_{ov} = E''_{oy}\,\underline{y}_o + E''_{ov}\,\underline{v}''_o$$

$$\underline{H}''_o = \frac{\underline{\beta}''_o \times \underline{E}''_o}{\eta_1} = -\frac{E''_{oy}}{\eta_1}\,\underline{v}''_o + \frac{E''_{ov}}{\eta_1}\,\underline{y}_o$$

, dove $\boxed{\underline{v}''_o = -\underline{x}_o \cos\theta - \underline{z}_o \sin\theta}$

- E per il CAMPO RIFRATTO:

$$\underline{E}'_o = \underline{E}'_{oh} + \underline{E}'_{ov} = E'_{oy}\,\underline{y}_o + E'_{ov}\,\underline{v}'_o$$

$$\underline{H}'_o = \frac{\underline{\beta}'_o \times \underline{E}'_o}{\eta_2} = -\frac{E'_{oy}}{\eta_2}\,\underline{v}'_o + \frac{E'_{ov}}{\eta_2}\,\underline{y}_o$$

, dove $\boxed{\underline{v}'_o = \underline{x}_o \cos\theta' - \underline{z}_o \sin\theta'}$

Dunque, proiettate sugli assi x e y, le CONDIZIONI AL CONTORNO (sulle componenti TANGENZIALI) danno:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\bullet (1) \quad E_{oy} + E''_{oy} = E'_{oy} \\
&\bullet (2) \quad E_{ov}\cos\theta - E''_{ov}\cos\theta = E'_{ov}\cos\theta' \\
&\bullet (3) \quad -\frac{E_{oy}}{\eta_1}\cos\theta + \frac{E''_{oy}}{\eta_1}\cos\theta = -\frac{E'_{oy}}{\eta_2}\cos\theta' \\
&\bullet (4) \quad \frac{E_{ov}}{\eta_1} + \frac{E''_{ov}}{\eta_1} = \frac{E'_{ov}}{\eta_2}
\end{aligned}}$$

* **NOTA**: La scelta di $\underline{E}_{oh}$ ed $\underline{E}_{ov}$ come componenti di $\underline{E}_o$ permette di scindere il sistema di 4 equazioni in 4 incognite in 2 SISTEMI di 2 EQUAZIONI in 2 INCOGNITE, risolvendo separatamente per le componente su y e quelle su V!

- $\underline{E}_{oh}$ ed $\underline{E}_{ov}$ sono dette POLARIZZAZIONI PRINCIPALI e vengono riflessi e rifratti con MODALITA' INDIPENDENTI, infatti è possibile scindere il sistema in 2 sistemi separati in 2 incognite.

- COMPONENTE ORIZZONTALE (h):

Prendendo le equazioni di y, cioè la (1) e la (3):

$$\left(-E_{oy} + E''_{oy}\right)\frac{\cos\theta}{\eta_1} = -\frac{E_{oy} + E''_{oy}}{\eta_2}\cos\theta'$$

$$E''_{oy}\left(\frac{\eta_2\cos\theta + \eta_1\cos\theta'}{\cancel{\eta_1\eta_2}}\right) = E_{oy}\left(\frac{\eta_2\cos\theta - \eta_1\cos\theta'}{\cancel{\eta_1\eta_2}}\right)$$

si può ricavare il COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE q_{Eh}:

$$\boxed{q_{Eh} = \frac{E''_{oy}}{E_{oy}} = \frac{\eta_2\cos\theta - \eta_1\cos\theta'}{\eta_2\cos\theta + \eta_1\cos\theta'}}$$

mettendo in evidenza η_2 e semplificandolo, tenendo conto che $\overbrace{n_{21} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'}}^{\text{Legge di Snell}}$ possiamo scrivere: $\cos\theta' = \sqrt{1-\sin^2\theta'} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2}} = \frac{1}{n_{21}}\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta}$

e si ottiene:

$$q_{Eh} = \frac{\cos\theta - \frac{1}{n_{21}} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2}\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \frac{1}{n_{21}} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2}\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta}}$$

- Per l'incidenza dell'ARIA (M_1) ad un mezzo M_2 DIELETTRICO $\left(n_{21} = n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}\right)$:

$$\boxed{q_{Eh} \simeq \frac{\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta}}}$$

Essendo $\varepsilon_r > 1$ poiché $M_2 \neq$ ARIA, $\sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta} \geq \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \cos\theta$, quindi:

q_{Eh} è SEMPRE NEGATIVO!

- $|q_{Eh}|$ AUMENTA MONOTONAMENTE dal valore per incidenza normale ($\theta = 0$) al valore 1 che si ha per incidenza radente $\left(\theta \to \frac{\pi}{2}\right)$.

- COMPONENTE VERTICALE (V):

Analogamente, dalla (2) e dalla (4):

$$\eta_1 \cos\theta \left(E_{0V} - E''_{0V}\right) = \eta_2 \cos\theta' \left(E_{0V} - E''_{0V}\right)$$

si può ricavare il COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE q_{EV}:

$$\boxed{q_{EV} = \frac{E''_{0V}}{E_{0V}} = \frac{\eta_1 \cos\theta - \eta_2 \cos\theta'}{\eta_1 \cos\theta + \eta_2 \cos\theta'}}$$

che può essere scritto come:

$$q_{EV} = \frac{\cos\theta - \frac{1}{n_{21}} \frac{\eta_2}{\eta_1}\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \frac{1}{n_{21}} \frac{\eta_2}{\eta_1}\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta}}$$

Nel caso di incidenza da ARIA a DIELETTRICO ($n_{21} = n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$):

$$\boxed{q_{Ev} = \frac{\varepsilon_r \cos\theta - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta}}{\varepsilon_r \cos\theta + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta}}}$$

- ANGOLO DI BREWSTER θ_B:

A differenza di q_{Eh}, q_{Ev} si può annullare per un particolare angolo θ_B detto ANGOLO DI BREWSTER; pertanto, $|q_{Ev}|$ NON è funzione monotona di θ, ma decresce dal valore per incidenza normale fino a $\theta = \theta_B$ in cui $q_{Ev} = 0$ e poi ricresce successivamente fino al valore 1 per $\theta \to \frac{\pi}{2}$.

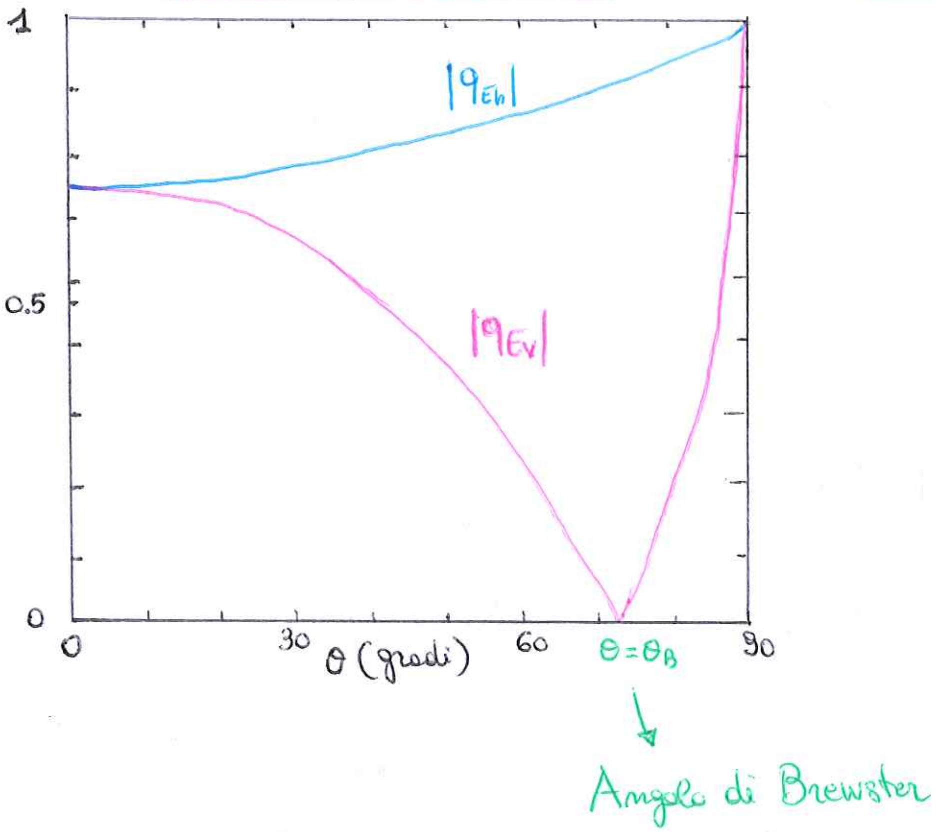
$$n_{21} \eta_1 \cos\theta_B = \eta_2 \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_B}$$

Nell'ipotesi di mezzi dielettrici, $\mu_2 \simeq \mu_1 \simeq \mu_0$ e:

$$\cos\theta_B = \sqrt{\frac{\cancel{\mu_0}}{\varepsilon_2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\cancel{\mu_0}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_B} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_B}$$

da cui:

$$\boxed{\sin\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}} \rightarrow \text{ANGOLO DI BREWSTER}$$



- Quando $\theta = \theta_B$, $q_{Ev} = 0$!

- ## COEFFICIENTI DI TRASMISSIONE :

Dalla (1) e dalla (3) :

$$\left(-E_{0y} + E'_{0y} - E_{0y}\right)\frac{\cos\theta}{\eta_1} = -\frac{E'_{0y}}{\eta_2}\cos\theta'$$

$$\cancel{-}2\,E_{0y}\frac{\cos\theta}{\eta_1} = \cancel{-}\,E'_{0y}\left(\frac{\cos\theta}{\eta_1} + \frac{\cos\theta'}{\eta_2}\right)$$

da cui il COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE t_{Eh} :

$$\boxed{t_{E_h} = \frac{E'_{0y}}{E_{0y}} = \frac{2\eta_2\cos\theta}{\eta_2\cos\theta + \eta_1\cos\theta'}}$$

- COMPONENTE ORIZZONTALE

Dalla (2) e dalla (4) :

$$E_{0v}\cos\theta - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}E'_{0v} - E_{0v}\right)\cos\theta = E'_{0v}\cos\theta'$$

$$2\,E_{0v}\cos\theta = E'_{0v}\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\cos\theta + \cos\theta'\right)$$

da cui il COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE t_{Ev} :

$$\boxed{t_{E_v} = \frac{E'_{0v}}{E_{0v}} = \frac{2\eta_2\cos\theta}{\eta_1\cos\theta + \eta_2\cos\theta'}}$$

- COMPONENTE VERTICALE

- ## ESPRESSIONI DELLE ONDE RIFLESSA E RIFRATTA :

Si ottengono moltiplicando i rispettivi coefficienti per le rispettive componenti :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}'' &= \left[q_{E_h}(\theta)\,\underline{E}_{0h} + q_{E_v}(\theta)\,E_{0v}\,\underline{V}''_0\right] e^{-j(\beta_x x - \beta_z z)} \\ \underline{E}' &= \left[t_{E_h}(\theta)\,\underline{E}_{0h} + t_{E_v}(\theta)\,E_{0v}\,\underline{V}'_0\right] e^{-j(\beta'_x x + \beta'_z z)} \end{aligned}}$$

- Dato che $q_{E_h} \neq q_{E_v}$ tranne che per $\theta = 0$ e $\theta \to \frac{\pi}{2}$, lo stato di polarizzazione dell'onda RIFLESSA $\underline{E}''$ è in generale DIVERSO da quello dell'onda incidente $\underline{E}$.

- l' ONDA RIFLESSA è POLARIZZATA ORIZZONTALMENTE quando $(\vartheta = \vartheta_B)$, comunque sia polarizzata l'onda incidente $\underline{E}$.

- **M_2 MEZZO DISSIPATIVO**:

Consideriamo ora il caso in cui il mezzo M_2 su cui l'onda incide sia DISSIPATIVO per conducibilità $g \neq 0$ (o anche per ε e μ complesse).

I CAMPI INCIDENTE e RIFLESSO restano gli stessi:

$$\underline{E} = \underline{E}_o e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)}$$
$$\underline{H} = \underline{H}_o e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)}$$

$$\underline{E}'' = \underline{E}_o'' e^{-j(\beta_x x - \beta_z z)}$$
$$\underline{H}'' = \underline{H}_o'' e^{-j(\beta_x x - \beta_z z)}$$

Ma, il ~~campo~~ RIFRATTO, essendo stavolta in un mezzo M_2 dissipativo, deve essere caratterizzato da un vettore di propagazione $\underline{K}$ COMPLESSO:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}' &= \underline{E}_o' e^{-\underline{\alpha}' \cdot \underline{r} - j\underline{\beta}' \cdot \underline{r}} \\ \underline{H}' &= \underline{H}_o' e^{-\underline{\alpha}' \cdot \underline{r} - j\underline{\beta}' \cdot \underline{r}} \end{aligned}}$$

Tuttavia, devono continuare a valere le condizioni di continuità per le componenti tangenziali dei campi; quindi, per $\underline{z} = 0$:

$$e^{-j\underline{K} \cdot \underline{r}} = e^{-j\underline{K}' \cdot \underline{r}}$$

ovvero:

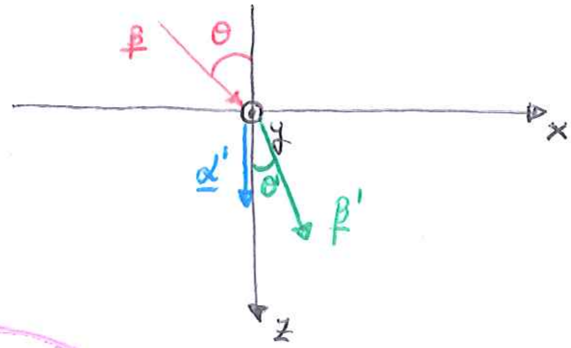
$$e^{-j\beta_x x} = e^{-(\alpha_x' x + j\beta_x' x)} \qquad \forall x$$

Ciò implica le condizioni sugli esponenti:

$$-j\beta_x = -\alpha_x' - j\beta_x'$$

e quindi: $\boxed{\alpha_x' = 0}$ e $\boxed{\beta_x' = \beta_x}$

Da cui: $\boxed{\underline{\alpha}' = \alpha' \underline{z}_0}$ e $\boxed{\beta'_x = \beta' \sin\theta' = \beta \sin\theta = \beta_x}$



Quindi: $\underline{\alpha}' \not\parallel \underline{\beta}'$ → ONDA RIFRATTA <u>NON</u> UNIFORME !

In questo caso, non è possibile determinare $\underline{\alpha}'$ e $\underline{\beta}'$ dalle sole condizioni al contorno.

* Ovviamente, nel caso di INCIDENZA NORMALE $(\theta = \theta' = 0) \Rightarrow \underline{\alpha}' \parallel \underline{\beta}'$ e quindi l'onda rifratta rimane piana uniforme.

Inoltre, se M_2 ha bassa dissipazione oppure è un buon CONDUTTORE, l'onda rifratta può essere considerata ancora piana uniforme, ma l'attenuazione è molto alta con l'aumento della profondità, ovvero di z.

- RIFLESSIONE TOTALE:

Consideriamo due MEZZI NON DISSIPATIVI e assumiamo che un'ONDA PIANA UNIFORME incida OBLIQUAMENTE dal mezzo in cui la velocità di propagazione è minore su quello in cui essa è maggiore. Ciò implica che:

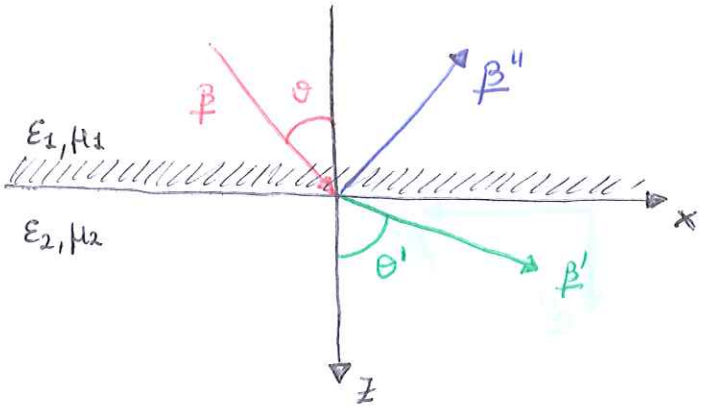
$$\boxed{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} > \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}$$ → MEZZO 1 PIÙ DENSO del 2

La CONTINUITÀ dei componenti tangenziali dei campi richiede che:

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{n_{21}} = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin\theta$$

Da cui, essendo $\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} > \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$, si ottiene che: $\boxed{\theta' > \theta}$

La direzione di propagazione dell'onda RIFRATTA si allontana dalla normale al piano di discontinuità (da $\underline{z}_0$), a differenza dei casi precedenti.



L'angolo di rifrazione θ' è maggiore di quello d'incidenza θ quando $\mu_1\varepsilon_1 > \mu_2\varepsilon_2$

All'aumentare dell'angolo di incidenza θ, la direzione di β' si avvicina ad $\underline{x}_0$ e, per l'angolo $\theta = \theta_L$ (ANGOLO LIMITE), tale che:

$$\boxed{\sin\theta_L = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}}} \longrightarrow \theta_L \text{ ANGOLO LIMITE}$$

l'ONDA RIFRATTA si propaga parallelamente al piano di discontinuità. $\left(\theta' \to \frac{\pi}{2}\right)$

- E se continuassimo ad aumentare θ?

Per $\theta > \theta_L$, non ci sono angoli di rifrazione θ' che assicurino la CONDIZIONE DI CONTINUITÀ dei componenti tangenziali dei campi.

Questo perché, oltrepassato l'angolo limite, la velocità di fase lungo x dell'onda incidente è PIÙ BASSA della MINIMA VELOCITÀ DI FASE che un'ONDA PIANA UNIFORME può avere nel secondo mezzo:

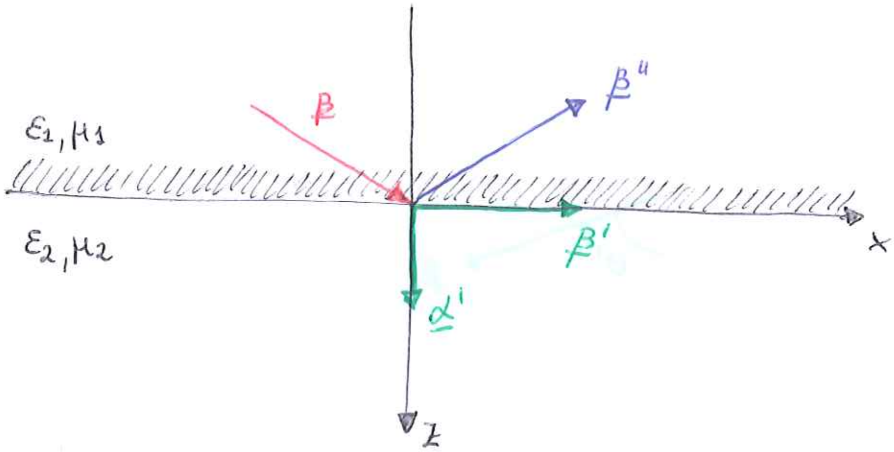
$$\frac{\omega}{\beta\sin\theta} < \frac{\omega}{\beta'} \qquad \text{per } \theta > \theta_L$$

Questo è perché abbiamo assunto l'onda RIFRATTA UNIFORME!

Invece, un'ONDA RIFRATTA NON UNIFORME è più "lenta" e può assicurare le condizioni di continuità, avendo velocità di fase:

$$\boxed{u' = \frac{\omega}{\beta'} = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha'^2 + k'^2}} < \frac{1}{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}}$$

- Dunque, un'ONDA INCIDENTE genera un'ONDA RIFRATTA $\begin{cases} \text{UNIFORME per } \theta \le \theta_L \\ \text{NON UNIFORME per } \theta > \theta_L \end{cases}$



Dato che M_2 è NON DISSIPATIVO, $k'^2 = \beta'^2 - \alpha'^2 - 2j\,\underline{\alpha}' \cdot \underline{\beta}'$ è REALE e quindi è richiesto che $\underline{\alpha}' \perp \underline{\beta}'$.

Per cui l'espressione dell'onda non uniforme RIFRATTA è:

$$\boxed{\underline{E}' = \underline{E_0}' e^{-\alpha' z - j\beta' x}}$$

E dalle condizioni di continuità ricaviamo α' e β':

- $$\beta' = \beta'_x = \sqrt{\alpha'^2 + \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2} = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}\, \sin\theta = \beta_x = \beta \sin\theta$$

- $$\alpha' = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}\sqrt{\sin^2\theta - \frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}}$$

Che ci permettono di scrivere le equazioni dei campi dell'ONDA RIFRATTA:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}' &= \underline{E_0}' e^{-\omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}\left(\sqrt{\sin^2\theta - m_{21}^2}\, z \; - j \sin\theta\, x\right)} \\ \underline{H_0}' &= \frac{(\beta' \underline{x}_0 - j\alpha' \underline{z}_0) \times \underline{E_0}'}{\omega \mu_2} \end{aligned}}$$

* Da cui, essendo $\beta > 0$, si vede una CARATTERISTICA delle ONDE NON UNIFORMI, ovvero che, se $\underline{E}_0$ è polarizzato linearmente $\Rightarrow$ $\underline{H_0}$ sarà polarizzato ellitticamente, senza poter essere circolare!

• TRASPORTO DI POTENZA :

Assumiamo per comodità che l'onda incidente sia POLARIZZATA ORIZZONTALMENTE, per continuità, lo è anche quella RIFRATTA e si ha:

$$\underline{E}_0' = E_0' \underline{y}_0$$

$$\underline{H}_0' = \frac{\beta' E_0'}{\omega\mu_2} \underline{z}_0 + j \frac{\alpha' E_0'}{\omega\mu_2} \underline{x}_0 \qquad \left(\alpha' \neq \beta' \rightarrow \text{POL.} \overset{H_0}{\text{ELLITTICA}} \right)$$

Il Vettore di Poynting è:

esponenziale già coniugato!

$$\underline{P}' = \frac{1}{2} E_0' \underline{y}_0 \, e^{-\alpha' z - j\beta' x} \times \left[j \frac{\alpha' E_0'}{\omega\mu_2} \underline{x}_0 + \frac{\beta' E_0'}{\omega\mu_2} \underline{z}_0 \right]^* \cdot e^{-\alpha' z + j\beta' x} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} j \, |E_0'|^2 \frac{\alpha'}{\omega\mu_2} e^{-2\alpha' z} \underline{z}_0 + \frac{1}{2} |E_0'|^2 \frac{\beta'}{\omega\mu_2} e^{-2\alpha' z} \underline{x}_0}$$

Abbiamo 2 termini che compongono la DENSITÀ DI POTENZA:

- diretto secondo $\underline{z}_0$ e IMMAGINARIO $\rightarrow$ non trasporta potenza; è un' ATTENUAZIONE
- diretto secondo $\underline{x}_0$ e REALE $\rightarrow$ c'è propagazione e trasporto di potenza, ma l'ampiezza diminuisce esponenzialmente con la profondità z.

• Quando $\theta > \theta_L$: NON c'è flusso di potenza attraverso il piano di separazione tra i due mezzi, ma la potenza fluisce parallelamente ad esso!

• La potenza non fuoriesce attraverso l'interfaccia tra i due dielettrici, ma rimane CONFINATA nel DIELETTRICO PIÙ DENSO, nel nostro caso quello superiore M_1.

Si ha un EFFETTO DI GUIDA che può essere sfruttato in:

- strutture planari per l'ottica integrata;
- guide ottiche (FIBRE OTTICHE) con dielettrico a gradino $\rightarrow$ STEP INDEX