SEGNALI

Abbiamo i segnali:

- $x(t)$ REALI;
- $x(t)$ COMPLESSI: $x(t) = a(t) + j\,b(t) = \rho(t) \cdot e^{j\varphi(t)}$,

con $e^{j\varphi(t)} = \cos(\varphi(t)) + j \sin(\varphi(t))$

NOTAZIONI ESPONENZIALI:

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad ; \quad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

Siamo interessati a segnali complessi, nonostante non esistano in natura, poiché abbiamo a che fare con SEGNALI MODULATI:

Ampiezza $\longrightarrow A(t) \cdot \cos\left[2\pi f_0 t + \varphi(t) + \alpha\right]$

$$\| $$

$$\mathrm{Re}\left[A(t)\, e^{j(2\pi f_0 t + \varphi(t) + \alpha)}\right]$$

In notazione più semplificata: $\boxed{x(t) = A(t)\, e^{j\varphi(t)}}$

- Possiamo esprimere un SEGNALE in MODULO e FASE:

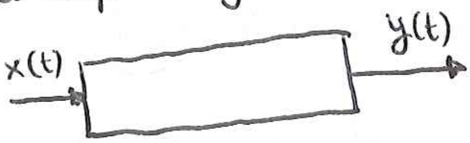
se $x(t) = \rho(t) \cdot e^{j\varphi(t)}$, allora:

(1) MODULO: $\rho(t) = \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}$

(2) FASE: $\varphi(t) = \arctan\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right) + \frac{\pi}{2}\left[1 - \mathrm{sign}(a(t))\right]$

- **SISTEMA DI TRASMISSIONE IDEALE:**

Un unico blocco eccitato dal segnale $x(t)$ e produce in uscita un segnale di risposta $y(t)$:



TRASMISSIONE IDEALE se:

$\boxed{y(t) = g \cdot x(t - t_0)}$, con g e t_0 costanti

- g = amplificazione / attenuazione
- t_0: se $t_0 > 0 \longrightarrow$ RITARDO

- **SEGNALE FEDELE:**

Dato un segnale $x(t)$ in entrata, vorremmo avere in uscita un $y(t)$ "fedele" all' $x(t)$ entrato, vorremmo cioè che la trasmissione fosse ideale e quindi: $y(t) = g\,x(t-t_0)$.

Se $x(t) = A(t)\,e^{j\varphi(t)} \Rightarrow \underbrace{y(t) = g \cdot A(t-t_0)\,e^{j\varphi(t-t_0)}}_{\text{Segnale fedele}}$

SEGNALI A TEMPO CONTINUO

Un segnale è a TEMPO CONTINUO se:

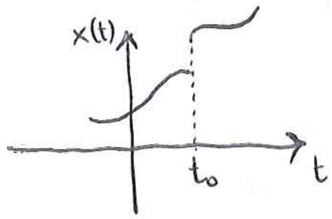
$$\exists \lim_{t \to t_0^-} = \lim_{t \to t_0^+} = x(t_0), \quad \forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$$

Per esempio: un SEGNALE ARMONICO: $x(t) = A\cos[2\pi f_0 t + \varphi]$

con $f_0 = \frac{1}{T_0}$ che è la frequenza e T_0 è il periodo di ripetizione del segnale

- **Discontinuità:**

(1) DI 1^a SPECIE:



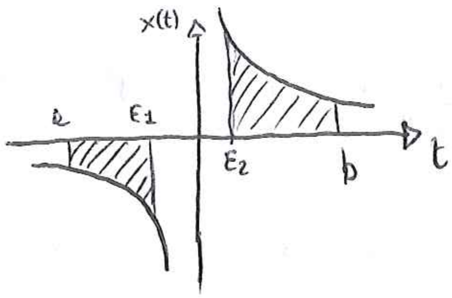
se $\lim_{t \to t_0^-} x(t) \neq \lim_{t \to t_0^+} x(t)$

$$\Rightarrow x(t_0) = \frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2} \quad (\text{si approssima così})$$

- Studiando i segnali dal punto di vista integrale:

[2 segnali sono uguali se differiscono per insiemi di misura nulla;
e punti isolati non danno contributo integrale.]

(2) DI 2^a SPECIE:



$\rightarrow$ Utilizziamo l' INTEGRALE DI CAUCHY che dice di prendere: $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = \varepsilon \Rightarrow$

e $\int \frac{1}{x} = 0$

(3) DI 3^a SPECIE:

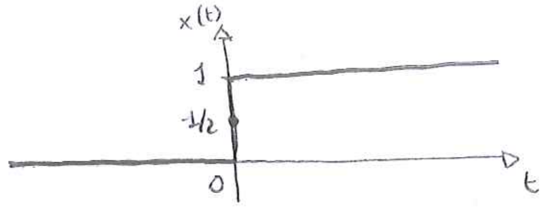
Se $\exists \lim_{t \to t_0^-} x(t_0) = x(t_0^-)$, $\exists \lim_{t \to t_0^+} x(t_0) = x(t_0^+)$, $x(t_0^-) = x(t_0^+)$, MA

$x(t_0^-) = x(t_0^+) \neq x(t_0) \rightarrow$ È RIMUOVIBILE (i pt. isolati non danno contributo integrale)

Segnali Noti

- **Gradino unitario $u(t)$:**

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ 1/2 & \text{se } t=0 \\ 1 & \text{se } t>0 \end{cases}$$

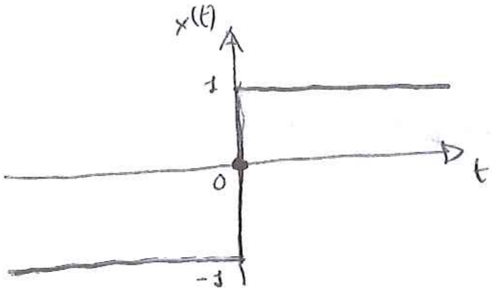


$u(t-t_0) \longrightarrow$ TRASLAZIONE TEMPORALE! ($t_0 \in \mathbb{R}$, non è complesso!)

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<t_0 \\ 1/2 & \text{se } t=t_0 \\ 1 & \text{se } t>t_0 \end{cases}$$

- **sign(t):**

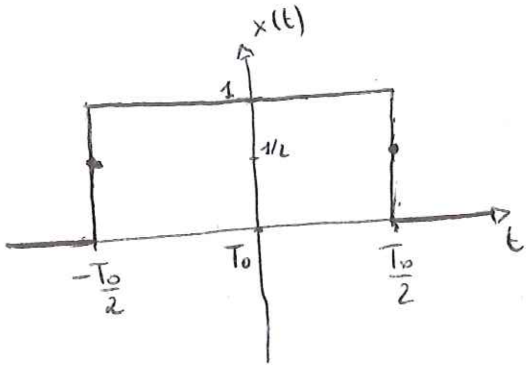
$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t<0 \\ 0 & \text{se } t=0 \\ 1 & \text{se } t>0 \end{cases}$$



- **$\text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$:**

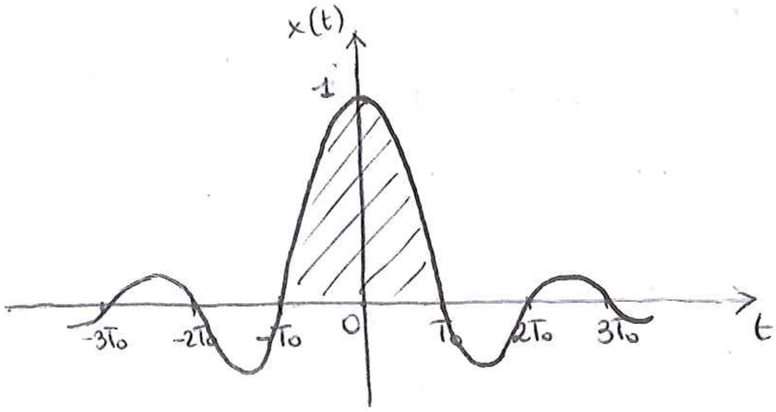
E' un segnale REALE!

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| > \frac{T_0}{2} \\ 1/2 & \text{se } |t| = \frac{T_0}{2} \\ 1 & \text{se } |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$



- **$\text{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right)$:**

$$\boxed{\text{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)}{\frac{\pi t}{T_0}}}$$



Per $\frac{\pi t}{T_0} \to 0$, $\text{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right) \to 1$

Per $\frac{\pi t}{T_0} \to K\pi$, $t \to KT_0$ e $\text{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right) \to 0$

* L'AREA si approssima molto bene con quella del triangolo inscritto nella 1ª parte di segnale:

$$\text{Area} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2T_0 \cdot 1}{2} = T_0 \longrightarrow \text{Area del segnale sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

• L'Impulso di Dirac:

Non è di per sé un segnale, ma vi si assomiglia. È definito tramite la sua proprietà di campionamento:

$$\int_a^b f(t)\,\delta(t)\,dt = \begin{cases} f(0) & \text{se } a<0<b \\ \frac{f(0)}{2} & \text{se } a=0 \text{ oppure } b=0 \\ 0 & \text{se } a>0\,,\ b<0 \end{cases}$$

se f è continua in 0.

Analogamente:

$$\int_{a<t_0}^{b>t_0} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

, qualunque siano a e b!

Siamo portati a pensare che $\delta(t)$ sia un segnale definito in un intorno di 0 infinitamente piccolo, ma non è un segnale.

Proprietà:

(1) Parità nel tempo:

$$\int_{a<0}^{0} f(t)\,\delta(t)\,dt = \int_0^{b>0} f(t)\,\delta(t)\,dt = \frac{f(0)}{2} \Rightarrow \boxed{\delta(t) \text{ è PARI}}$$

(2) Area unitaria:

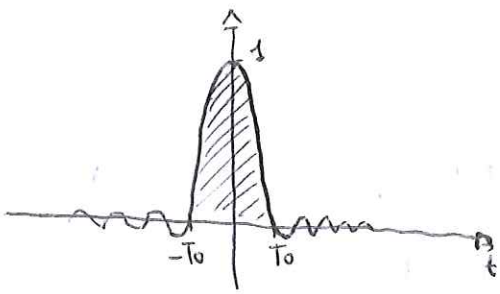
Se prendiamo $f(t)=1$ costante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot\delta(t)\,dt = 1 \Rightarrow \text{l'area di } \delta(t) \text{ è } 1$$

* C'è un segnale vero che lo approssima?

Sì, il seguente:

$$\boxed{\lim_{T_0\to 0} \frac{1}{T_0}\,\text{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right)} \Rightarrow \text{Area sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right) = T_0 \Rightarrow \frac{1}{T_0}\cdot T_0 = 1$$



Questo segnale ha area 1 ed è definito solo in un intorno di 0, cioè per $T_0 \to 0$!

• Derivate con $\delta(t)$:

(1) $$\int_{a<0}^{b>0} \delta'(t)\cdot t\,dt = \underbrace{\delta(t)\cdot t\Big|_{a<0}^{b>0}}_{=0} - \int_{a<0}^{b>0} \delta(t)\cdot 1\,dt$$

($\delta(t) \neq 0$ solo per $t \to 0$)

Dunque: $\delta'(t)\cdot t = -\delta(t) \Rightarrow \boxed{\delta'(t) = -\frac{\delta(t)}{t}}$ è DISPARI!

• In generale:

$$\boxed{\delta^{(k)}(t) = (-1)^k \frac{k!\,\delta(t)}{t^k}}$$

(2) $$\int_a^b \delta'(t)\,f(t)\,dt = \underbrace{\delta(t)\cdot f(t)\Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b \delta(t)\cdot f'(t)\,dt = -f'(0)$$

Quindi: $\boxed{\int_a^b \delta'(t)\,f(t)\,dt = -f'(0)}$

• In generale:

$$\boxed{\int_a^b \delta^{(k)}(t)\cdot f(t)\,dt = (-1)^k f^{(k)}(0)}$$

- ENERGIA DI UN SEGNALE:

$$\boxed{E_{xx} := \int |x(t)|^2 \, dt}$$

Se $x(t)$ è un segnale, la sua energia è l'integrale nel tempo del suo MODULO QUADRO.

AFFINITÀ TRA SEGNALI

- FUNZIONE DI CROSSCORRELAZIONE:

$$\boxed{C_{xy}(\tau) = \int x(t+\tau) \cdot y^*(t) \, dt}$$

Mi serve per capire il segnale che sto ricevendo; cioè a quali simboli noti è più AFFINE.

PROPRIETÀ: (1) $C_{yx}(\tau) = C^*_{xy}(-\tau)$;

(2) $|C_{xy}(\tau)|^2 \leq E_{xx} \cdot E_{yy}$, dalla Disuguaglianza di Schwartz.

- ENERGIA MUTUA:

È la funzione di crosscorrelazione calcolata nell'origine, per $\tau = 0$;

$$\boxed{E_{xy} = C_{xy}(0) = \int x(t) \cdot y^*(t) \, dt = (x(t), y(t))}$$

prodotto scalare

Posso infatti considerare i segnali come vettori, e il PRODOTTO SCALARE:

$$\left[(x,y) := \int x(t) \cdot y^*(t) \, dt = |x(t)| \cdot |y(t)| \cdot \cos\alpha \right]$$

Dalle proprietà precedenti (dalla (1)), si nota che:

$$E_{xy} = C_{xy}(0) = C^*_{yx}(0) = E^*_{yx}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{xy} = E^*_{yx}}$$

• SERIE DI FOURIER DI SEGNALI PERIODICI:

Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo T_0, possiamo rappresentarlo a partire da un insieme di infinite ARMONICHE COMPLESSE di ampiezza unitaria:

$$e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t} = \cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) + j\sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

La rappresentazione si ha tramite una combinazione lineare a coefficienti complessi costanti di tali armoniche, la sommatoria è da $-\infty$ a $+\infty$:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k} C_k e^{j\frac{2\pi kt}{T_0}}}$$

• Per calcolare i coefficienti di Fourier C_k, consideriamo le seguenti funzioni di energia a durata limitata:

$$\psi_k(t) = e^{+j\frac{2\pi}{T_0}kt} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

segno meno perché $\psi_k^*(t)$!

ortogonalità!

$$(x, \psi_k) = \int_{T_0} \sum_h C_h e^{j\frac{2\pi}{T_0}ht} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)dt = \sum_h C_h(\psi_h, \psi_k) = T_0 C_k$$

ampiezza intervallo dovuto alla $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$

Quindi:

$$\boxed{C_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt = \frac{1}{T_0}(x, \psi_k)}$$

• Condizioni di DIRICHLET:

Bisogna avere un numero FINITO di DISCONTINUITA' di 1ª specie in ogni intervallo finito.

$$\left.\begin{aligned} &① : C_k \to \frac{1}{k} \\ &② : C_k \to 1/k^2 \\ &\quad \dots \\ &ⓜ : C_k \to \frac{1}{k^{m+1}} \end{aligned}\right\}$$

Posso rappresentare i segnali con un numero finito di armoniche.

Importante:

Poiché i 2 segnali possono essere uguali, si può definire una FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$\boxed{C_{xx}(\tau) := \int x(t+\tau) \cdot x^*(t)\, dt}$$

che serve per sincronizzare!

Se calcoliamo per $\tau = 0$:

$$C_{xx}(0) = \int x(t) \cdot x^*(t)\, dt = \int |x(t)|^2 dt = E_{xx}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{xx}(0) = E_{xx}}$$

Inoltre, dalla proprietà (2), abbiamo:

$$|C_{xx}(\tau)|^2 \leq E_{xx} \cdot E_{xx} \Rightarrow \boxed{|C_{xx}(\tau)| \leq E_{xx}}$$!

• SEGNALI ORTOGONALI:

Due segnali $x(t)$ e $y(t)$ sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo:

$$(x, y) = \int x(t) \cdot y^*(t)\, dt = 0$$

Un insieme di segnali $\{x_k(t)\}$ costituisce una FAMIGLIA DI SEGNALI ORTOGONALI se:

$$\boxed{\forall k \neq h, \quad (x_k, x_h) = 0}$$

• FAMIGLIA DI SEGNALI ORTONORMALI:

$\{x_k(t)\}$ tale che:

$$\begin{cases} (x_k(t), x_h(t)) = 0 & \forall k \neq h \\ (x_k(t), x_h(t)) = 1 & \text{se } k = h \end{cases}$$

È bene notare che (x_k, x_h) è l'energia mutua i $E_{x_k x_h}$

Segnali ORTONORMALI, hanno: $\int x_k(t) \cdot x_k^*(t)\, dt = \int |x_k(t)|^2 dt = E_{x_k x_k} = 1$!

• **POTENZA:**

$$W_{xx} := \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \sum_k C_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt \overset{\text{ortogonalità}}{=} \frac{1}{\cancel{T_0}}\sum_k |C_k|^2 \cdot \cancel{T_0} =$$

$$= \sum_k |C_k|^2$$

Quindi:

$$\boxed{W_{xx} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_k |C_k|^2}$$

• Tra 2 segnali: siano $x(t) = \sum_k \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$ e $y(t) = \sum \beta_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$

$$\boxed{W_{xy} = \sum_k \alpha_k \beta_k^*}$$

• **Rappresentazione tramite FUNZIONI ORTONORMALI:**

Sia $\{\varphi_k(t)\}$ un insieme di funzioni ortonormali: $(\varphi_k, \varphi_h) = \int \varphi_k(t)\cdot\varphi_h^*(t)\,dt =$

$$= \begin{cases} 0 & \forall h \neq k \\ 1 & \forall h = k \end{cases}$$

si può definire un segnale $x(t)$ nel seguente modo:

$$\boxed{x(t) = \sum_k C_k \varphi_k(t)}$$

e i coefficienti $\underbrace{C_k = (x, \varphi_k) = \int_T x(t)\cdot\varphi_k^*(t)\,dt}$

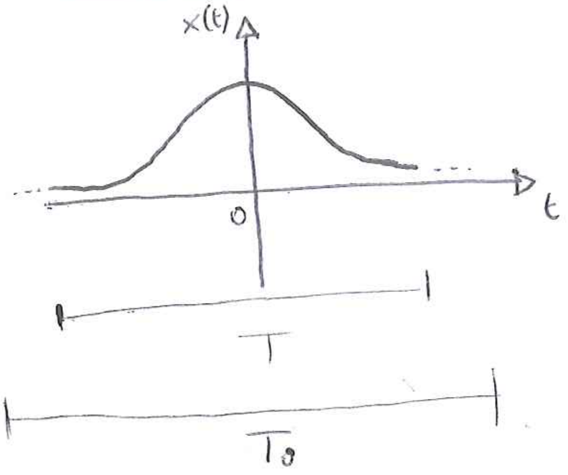
PROPRIETÀ:

(1) $E_{xx} = \sum_k |C_k|^2$

(2) $(x,y) = \sum_k \alpha_k \beta_k^*$, con $x(t) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(t)$

$y(t) = \sum_k \beta_k \varphi_k(t)$

- SERIE DI FOURIER per segnali non periodici:



Si prende un tempo T_0 e si PERIODIZZA FITTIZIAMENTE il segnale come $x(t-T_0)$, $x(t+T_0)$, ...

Un segnale periodico è:

$$x(t) = \sum_k C_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

Se invece considero le ARMONICHE TRONCATE:

$$\psi_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

posso considerare solo una parte del segnale periodico ed ottenere quello non periodico. Quindi, la rappresentazione in SERIE DI FOURIER per segnali non periodici è:

$$\boxed{x(t) = \sum_k C_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)}$$

ed i coefficienti C_k sono:

$$\boxed{C_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt}$$

* **NOTA**: la rappresentazione è NON UNIVOCA, in quanto T_0 può essere scelto arbitrariamente, a patto che sia maggiore della durata del segnale!

Lo Spazio dei Segnali

Si consideri l'espressione $x(t) = \sum_k C_k \varphi_k(t)$, con $C_k = (x, \varphi_k)$ e $\{\varphi_k(t)\}$ famiglia ORTONORMALE.

Supponiamo che tale famiglia sia finita, con N funzioni $\varphi_k(t)$ ortonormali, a cui corrispondono le N-ple di valori:

$$(1,0,\dots,0)\ ;\ (0,1,0,\dots 0) \dots ;\ (0,\dots,0,1)$$

Ad ognuna di queste N-ple si può assegnare un VERSORE $\vec{\varphi}_k$ e tutti i versori sono ortogonali tra loro

$\Downarrow$

Individuano uno SPAZIO EUCLIDEO N-dimensionale, che prende il nome di SPAZIO DEI SEGNALI.

E' chiaro dunque il significato di $C_k = (x, \varphi_k)$:

ogni C_k è la K-esima componente del vettore $\vec{x}(t)$ associato al segnale $x(t)$ nello Spazio dei Segnali!

- $E_{xx} = \sum_K |C_k|^2$ (è il modulo quadro del vettore!);
- $(x,y) = \sum_k \alpha_k \beta_k^*$

- ## Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

A partire dai segnali $\{x_i(t)\}$ si cerca di ricavare le funzioni $\{\varphi_k(t)\}$ ortogonali tra loro, in realtà ORTONORMALI.

I segnali devono essere descritti tramite una BASE ORTONORMALE!

* I segnali devono essere 1!

Quindi, l'energia di $\varphi_i(t)$ deve essere 1!

(1)
$$\varphi_1(t) = \frac{x_1(t)}{\|x_1(t)\|} = \frac{x_1(t)}{\sqrt{E_{x_1x_1}}}$$

Poi, costruiamo un segnale ortogonale ad $x_1(t)$:

$$w_2(t) = x_2(t) - (x_2, \varphi_1)\cdot \varphi_1(t) \longrightarrow$$ è ortogonale ad $x_1(t)$, e quindi anche a $\varphi_1(t)$!

(2) Normalizzando w_2 otteniamo $\psi_2(t)$:

$$\psi_2(t) = \frac{w_2(t)}{\sqrt{E_{w_2 w_2}}}$$

(3) In generale: $\left[w_k(t) = x_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} (x_i, \psi_i) \cdot \psi_i(t) \right]$

e $\left[\psi_k(t) = \frac{w_k(t)}{\sqrt{E_{w_k w_k}}} \right]$

■ ok!!!