3. Colorazione di Grafi

- **COLORAZIONE**:

Sia $G(V,E)$ un grafo. Una COLORAZIONE di G è una FUNZIONE:

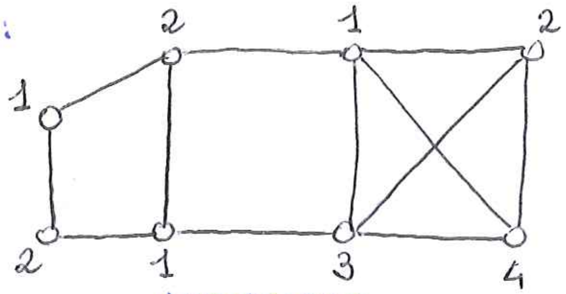
$$f : V(G) \longmapsto \{1, 2, \dots, m\} \quad , \text{ con } |V(G)| = m$$

- **COLORAZIONE AMMISSIBILE**:

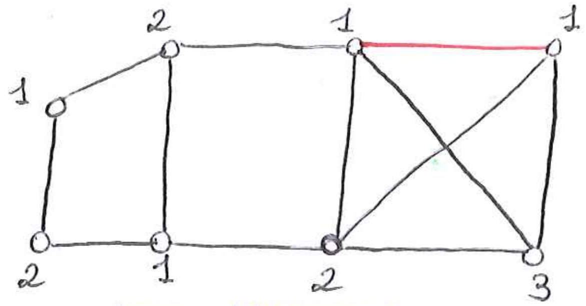
Una colorazione f è AMMISSIBILE se: $\forall \{u,v\} \in E(G) \quad , \quad f(u) \neq f(v)$.

Cioè se <u>NON</u> ci sono vertici adiacenti con lo stesso colore!

Esempio:



AMMISSIBILE



NON AMMISSIBILE

- **K-COLORABILITÀ**:

Un grafo $G(V,E)$ è K-COLORABILE se esiste una colorazione ammissibile f tale che:

$$f : V(G) \longmapsto \{1, 2, \dots, K\}$$

- **INDICE DI COLORAZIONE**:

L'INDICE DI COLORAZIONE di un grafo $G(V,E)$ è il <u>più piccolo K</u> tale che G sia K-colorabile. È anche detto <u>NUMERO CROMATICO</u> $:= \boxed{\chi(G)}$

- **CLIQUE**:

In un grafo $G(V,E)$, una CLIQUE è un sottoinsieme $C \subseteq V(G)$ tale che:

$$\forall u, v \in C : \{u,v\} \in E(G)$$

In sostanza è un SOTTOGRAFO COMPLETO di G.

- **CLIQUE NUMBER**:

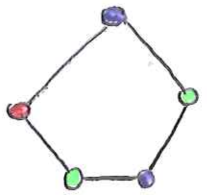
Il CLIQUE NUMBER di un grafo $G(V,E)$ è la CARDINALITÀ della più grande clique presente in G. Si indica con : $\boxed{\omega(G)}$.

Notare che in grafi non orientati, c'è sempre almeno 1 clique di cardinalità 2, a meno che non ci siano solo vertici isolati.

* Nell'esempio precedente sulla colorazione ammissibile : $\begin{cases} \chi(G) = 4 \\ \omega(G) = 4 \end{cases}$

Esempio:

Per il seguente pentagono, abbiamo:



$\Rightarrow \begin{cases} \omega(G) = 2 \\ \chi(G) = 3 \end{cases}$; in questo caso, il numero cromatico è strettamente maggiore del clique number.

Ma è chiaro che il clique number è un LOWER BOUND per $\chi(G)$!

Quindi abbiamo la seguente importante relazione:

$$\boxed{\chi(G) \geq \omega(G)}$$

Notiamo che, estrapolando l'informazione del precedente esempio, possiamo giungere alla seguente affermazione di carattere generale:

- Se un grafo $G(V,E)$ <u>NON</u> ha <u>CICLI DISPARI</u> $\Longrightarrow \chi(G) = 2$

* **NOTA**: $\boxed{\text{BICOLORABILE} \equiv \text{BIPARTITO}}$

Dove bipartito vuol dire che esiste una partizione dei vertici in 2 classi tali che ci sono spigoli solo tra vertici di classi diverse.

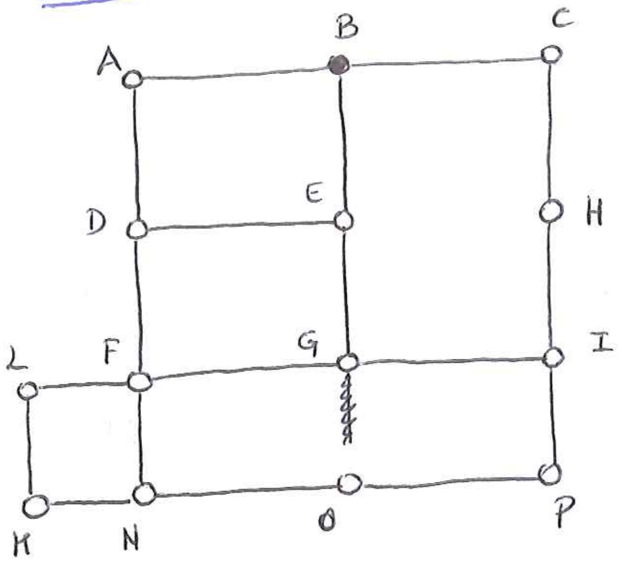
Cioè, G è tale che $\omega(G) = 2$, ovvero

Ma, vale anche nell'altra direzione? È vero che se un grafo G ha $\chi(G) = 2$ allora <u>NON</u> ha cicli di lunghezza dispari?

• **Teorema Bicolorabilità:**

Un grafo $G(V,E)$ è BIPARTITO $\Longleftrightarrow$ G NON ammette CICLI DISPARI

Proof:



Dobbiamo in sostanza dimostrare che:

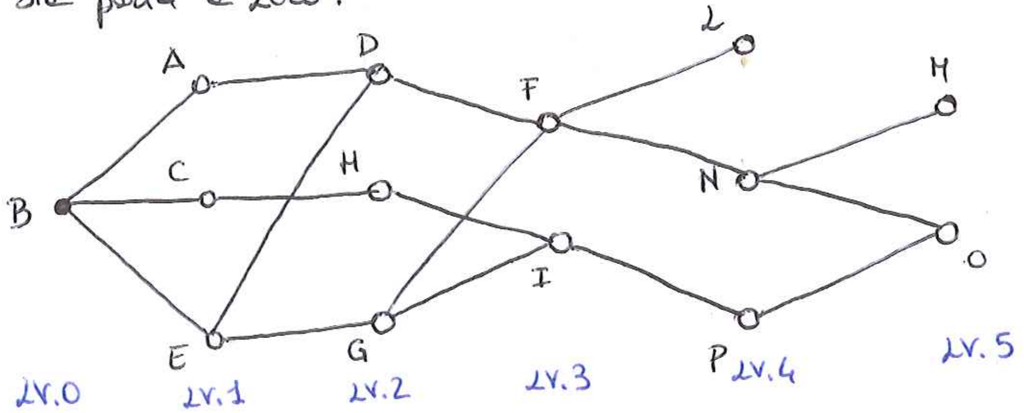
G privo di cicli dispari $\Rightarrow$ G è bipartito

Consideriamo, senza perdita di generalità, che G sia connesso.

Definiamo come "DISTANZA" la lunghezza minima dei cammini tra due vertici u e v in termini di spigoli.

ALGORITMO:

1. Scegliere un vertice $v \in V(G)$, e designarlo come "radice" (per esempio B);
2. Calcolare la distanza di ogni vertice u da v, tramite una BFS;
3. Dare un colore ai vertici a DISTANZA PARI e un altro colore ai vertici a DISTANZA DISPARI da V, assumendo che la distanza di v da se stesso sia pari a zero.



Bisogna notare che:

• NON si possono avere spigoli tra vertici dello stesso livello: infatti, se così fosse, avremmo 2 cammini di egual lunghezza K fino ai due vertici a partire dalla radice, più ~~[illegible]~~ lo spigolo tra i 2 vertici, quindi ci sarebbe un CICLO di LUNGHEZZA 2K+1 DISPARI! Ma va contro le ipotesi, quindi non è possibile!

Dunque, $\forall u, v \in V(G)$ tali che $\{u,v\} \in E(G)$ si ha che:

$$|\ell(u) - \ell(v)| = 1$$

dove $\ell(u)$ è il LIVELLO cui appartiene u, dato dalla distanza dalla radice.

$\Longrightarrow$ Gli spigoli, quando ci sono, vanno da un livello a quello immediatamente successivo (più di 1 non è possibile, poiché altrimenti, essendoci un arco tra un nodo e quello a livello più alto, quest'ultimo nodo sarebbe alla stessa distanza del primo più 1!)

Quindi, è una colorazione ammissibile quella alternata per livelli e quindi il GRAFO è BIPARTITO e BICOLORABILE.

■

* NOTA: La dimostrazione continua a valere anche se i cammini tra 2 vertici dello stesso livello sono SOVRAPPOSTI:

si considera in tal caso il più lontano vertice dalla radice che sia in comune ad entrambi i cammini; la distanza dei 2 vertici da questa nuova "radice fittizia" sarà h, più ~~il vertice~~ spigolo tra i due, si avrebbe ancora una volta un CICLO DISPARI di lunghezza $2h+1$, che non è ammesso!

* NOTA:

La COMPLESSITA' dell'ALGORITMO è $\boxed{O(n+m)}$, data dalla visita in ampiezza (BFS) più il dover controllare che non ci siano archi tra vertici di uno stesso livello, cioè colorato allo stesso modo.

Dunque, si tratta di una COMPLESSITA' LINEARE!

* Dato un grafo $G(V,E)$, in tempo $O(|E(G)|)$, possiamo:

- trovare una bipartizione ammissibile di G, se esiste

OPPURE

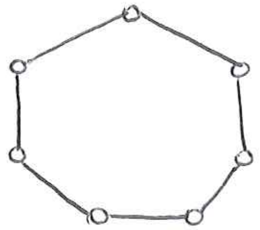
- trovare un CICLO DISPARI in G.

Il ciclo di lunghezza dispari è anche un CERTIFICATO del fatto che non esiste una bipartizione.

* Abbiamo un ALGORITMO POLINOMIALE (lineare) che ci dà una 2-colorazione oppure un motivo per cui non esista!

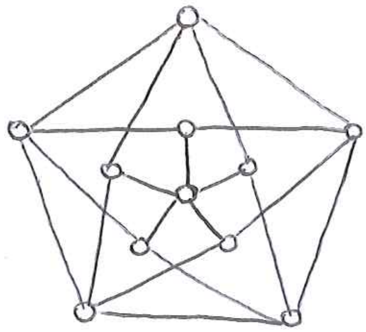
• GRAFI NON BICOLORABILI :

Alcuni esempi sono:



$\chi(G)=3$
$\omega(G)=2$

Ciclo dispari



$\chi(G)=4$

Cicli dispari, ma SENZA TRIANGOLI !

IDEALMENTE : Vorrei un ALGORITMO POLINOMIALE che, dato un grafo G tale che $\chi(G) > 2$, faccia le seguenti cose:

• individui una 3 - colorazione

OPPURE

• restituisce un CERTIFICATO che tale colorazione non esiste.

Ricordiamo che 3-colorabile vuol dire tripartito.

→ Ad oggi, NON è noto alcun ALGORITMO POLINOMIALE in grado di fare ciò! E il problema non è la richiesta del certificato; è ininfluente da questo punto di vista.

* 3-COL è un problema NP-completo , mentre 2-COL $\in$ P!

• Se non ho un algoritmo polinomiale per risolvere il mio problema, e a maggior ragione penso che non esiste, COSA POSSO FARE PER RISOLVERE IL PROBLEMA?

Ho due possibili strade:

(1) Ricorrere ad un ALGORITMO NON POLINOMIALE : andando a RILASSARE il vincolo sul costo in TEMPO;

(2) Ricorrere ad un ALGORITMO NON ESATTO (EURISTICA) : andando a RILASSARE l'esattezza, per esempio, una colorazione con più di 3 colori in questo caso.

• ALGORITMO NON POLINOMIALE:

Un esempio è il seguente ALGORITMO ENUMERATIVO: considero tutte le possibili 3-colorazioni del grafo e verifico la loro ammissibilità, fino a trovarne una ammissibile. Costo: $\boxed{O(3^n)}$

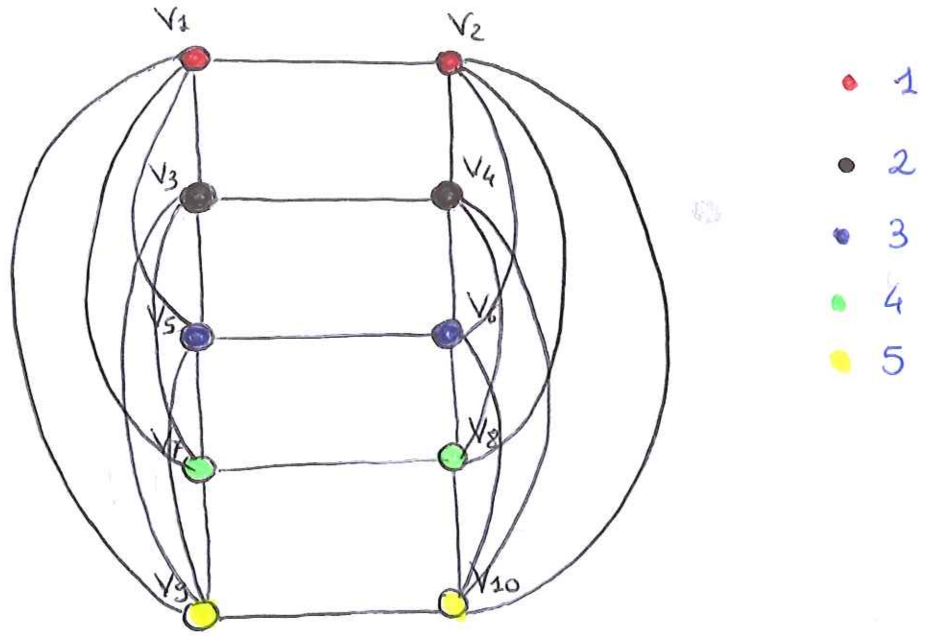
• EURISTICA:

Considerando i colori come numeri interi (1,2,...), si può adottare il seguente ALGORITMO GREEDY:

1. Ordinare i vertici $v_1, v_2, \dots, v_m$;
2. Per $i = 1, \dots, m$, assegnare a v_i il più basso colore disponibile che NON sia assegnato ad alcun vertice adiacente a v_i tra i vertici $v_1, \dots, v_{i-1}$.

* L'algoritmo greedy può funzionare molto bene, ma a volte può fornire anche soluzioni molto LONTANE DALL'OTTIMO. Ecco un esempio, in cui seguendo l'algoritmo coloriamo i vertici di G, ma visualizziamo il grafo complemento $\overline{G}$:

$\overline{G}$:



Ma, già da $\overline{G}$, ci si rende conto che G è un GRAFO BIPARTITO! Quindi, è colorabile con 2 soli colori, ma l'algoritmo ne ha tirati fuori ben 5 → Ha usato 3 colori in più, andando molto lontano dalla soluzione ottimale!

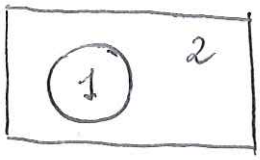
• PUZZLE:

Disegnare un insieme di cerchi nel piano che, intersecandosi, formano delle regioni. Qualunque siano i cerchi, è sempre possibile COLORARE LE REGIONI, comprese quelle esterne, di modo che regioni adiacenti abbiano sempre colori diversi utilizzando solo 2 COLORI.

In Teoria dei Grafi: abbiamo un vertice per ogni regione e uno spigolo per ogni coppia di regioni adiacenti. Viene fuori un GRAFO BIPARTITO!

PROOF: per INDUZIONE sul numero di cerchi n.

- $n = 1$:



$\Rightarrow$ Un colore all'interno del cerchio e un altro colore all'esterno $\rightarrow$ È BICOLORABILE ok!

- Supponiamo che l'affermazione sia vera per n cerchi. Consideriamo l'aggiunta di un $(n+1)$-esimo cerchio, il quale va a creare delle regioni:
  - all'ESTERNO del cerchio: non le tocchiamo, le bicolorazioni restano quelle già presenti;
  - all'INTERNO del cerchio: sia quelle completamente all'interno del nuovo cerchio che quelle che si vengono a creare per intersezione subiscono un CAMBIO DI COLORE.

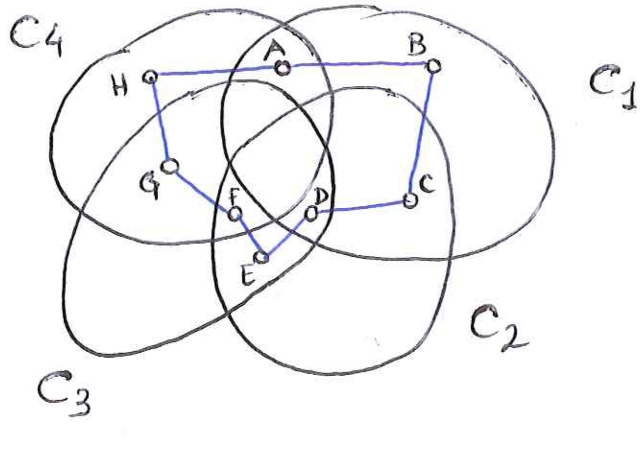
Verifichiamo che tale BICOLORAZIONE sia ammissibile:

(1) Regioni entrambe esterne: erano adiacenti con colori diversi e continuano ad esserlo; $\rightarrow$ ok!

(2) Regioni entrambe interne: avevano colori diversi, ma commutandoli entrambi restano diversi; $\rightarrow$ ok!

(3) 1 Regione interna e 1 esterna: prima avevano lo stesso colore (erano una regione unica), ma ora a quella interna viene cambiato colore, dunque i colori sono diversi. $\rightarrow$ ok! ∎

Dunque, il grafo che si viene a creare è BIPARTITO, quindi non ha CICLI DISPARI; ma, perché ci sono solo cicli pari?



	C_1	C_2	C_3	C_4
A	in	out	out	in
B	in	out	out	out
C	in	in	out	out
D	in	in	in	out
⋮	-	-	-	-

Sostanzialmente, ogni volta che percorro uno spigolo, attraverso un cerchio, in "entrata" o in "uscita".

Ma, ogni cerchio (vertice / zone) in un ciclo lo attraverso un numero pari di volte, poiché se esco devo anche rientrare $\Rightarrow$ Il numero degli spigoli di un ciclo è PARI !

Quindi, non ci sono cicli dispari, ma tutti i cicli sono pari. ■

• TEOREMA:

$\boxed{\text{In un GRAFO BIPARTITO CONNESSO esiste 1 SOLA BICOLORAZIONE.}}$

Questo considerando "equivalenti" le colorazioni ottenute invertendo tutti i colori.

COLORAZIONE DIVERSA : $\left[f \text{ ed } f' \text{ sono diverse se } \exists\, u,v \in V(G) \text{ tali che: } f(u) = f(v), \text{ ma } f'(u) \neq f'(v) \right]$

PROOF:

Se il grafo è CONNESSO, appena coloro un vertice, la colorazione è decisa, poiché mi espando "a macchia d'olio" di conseguenza. ■

Posso verificare che ESISTA una BIPARTIZIONE con un ALGORITMO DI FORCING:

1. Scelgo un vertice del grafo e lo coloro in modo arbitrario;
2. Propago conseguentemente la colorazione:
   2.1 Se incontro un conflitto il grafo NON è bipartito;
3. Il grafo è BIPARTITO e bi-colorato.

• Il fatto che non siano noti algoritmi che possono individuare per un QUALUNQUE grafo una colorazione ottima in tempo POLINOMIALE non esclude che questi algoritmi possano esistere per PARTICOLARI CLASSI DI GRAFI.

Vediamo un esempio.

• JOBS PROBLEM:

Supponiamo di avere un insieme J di n job che devono essere svolti. Ogni job richiede l'uso esclusivo di una macchina per una finestra di tempo decisa a priori: ogni job j deve iniziare il processamento in a_j e terminarla in b_j. Quindi: $\forall j \in J$: $[a_j, b_j]$ è l'intervallo temporale d'esecuzione.

Assumendo che le macchine siano universali e che ogni macchina possa svolgere al più 1 job per volta, QUAL E' IL NUMERO MINIMO DI MACCHINE NECESSARIO?

Consideriamo $n = 6$ jobs, con i seguenti intervalli temporali:

A $[1,7]$ D $[5,12]$
B $[2,3]$ E $[8,11]$
C $[4,6]$ F $[9,10]$

$\longrightarrow$

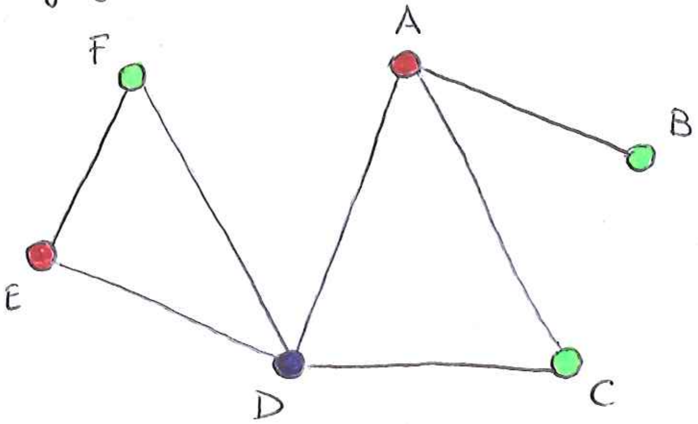
GRAFO

1 Vertice per ogni job e 1 spigolo per ogni coppia di jobs i cui intervalli temporali si sovrappongono, anche parzialmente.

A questo punto, ci si è ridotti ad un PROBLEMA DI COLORAZIONE:

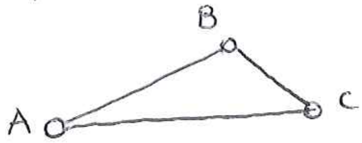
$$\#\text{ minimo di macchine} \equiv \chi(G).$$

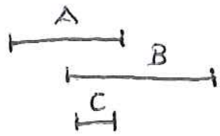
Coloriamo il grafo ottenuto utilizzando l'ALGORITMO GREEDY:



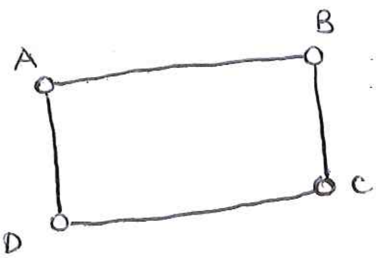
GRAFO INTERVALLO

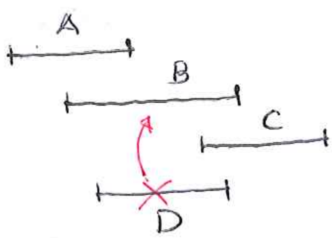
Questi problemi possono portare a grafi, come i grafi intervallo, che hanno delle particolari proprietà. Per esempio:





$\longrightarrow$ Un ciclo con 3 vertici è ammesso!





$\longrightarrow$ Un ciclo con 4 vertici SENZA CORDE NON è AMMESSO!

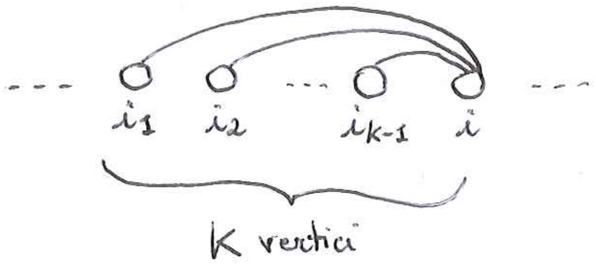
* Per i GRAFI INTERVALLO vale che: $\boxed{\chi(G) = \omega(G)}$

• **PROPRIETÀ**: I GRAFI INTERVALLO sono grafi che NON ammettono CICLI senza CORDE di LUNGHEZZA > 3.

* È possibile ottenere una COLORAZIONE OTTIMA, cioè che sfrutta il numero minimo di colori $\chi(G)$, dei GRAFI INTERVALLO sfruttando l'ALGORITMO GREEDY che ORDINA gli intervalli per ESTREMO SINISTRO CRESCENTE !

• **PROPRIETÀ**: Se l'algoritmo Greedy dà al vertice i il colore K $\Rightarrow$ $\exists$ una CLIQUE che contiene i ed ha K vertici.

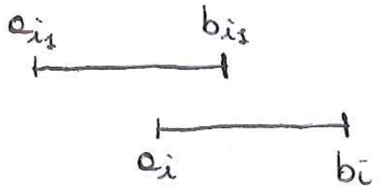
PROOF:



Se ad i diamo colore K, vuol dire che ci sono $K-1$ vertici adiacenti ad i con $K-1$ colori diversi e precedenti ad i nell'ordinamento per estremo sinistro crescente dell'intervallo.

L'intervallo associato ad i è $[a_i, b_i]$;

l'intervallo associato ad i_1 è $[a_{i_1}, b_{i_1}]$ e così via.



$\Rightarrow a_{i_1} \le a_i \le b_{i_1}$

Analogamente: $a_{i_2} \le a_i \le b_{i_2}$; per come sono ordinati gli intervalli:

$a_i \in [a_{i_j}, b_{i_j}]$, $\forall j = 1, \dots, K-1$

$\Rightarrow a_i$ punto di intersezione tra tutti gli intervalli $\Rightarrow$ tutti gli intervalli si intersecano tra loro $\Rightarrow$ Esiste una CLIQUE di dimensione K che include i. ∎

• **OSSERVAZIONE**:

Per un QUALUNQUE grafo $G(V,E)$, esiste un ORDINAMENTO $v_1, \dots, v_n$ dei vertici, tale che l'ALGORITMO GREEDY, se utilizza tale ordinamento, individua una COLORAZIONE OTTIMA di G.

PROOF: Se G è K-colorabile $\Longrightarrow$ Esiste una partizione di $V(G)$ in K CLASSI $V_1, \dots, V_K$ tale che:

- $V_1 \cap \dots \cap V_K = \emptyset$;
- $V_1 \cup \dots \cup V_K = V(G)$;
- $\{u,v\} \in E(G) \iff u \in V_i, v \in V_j$, con $i \neq j$

Ordiniamo i vertici nel seguente modo:

vertici di V_1, vertici di V_2, ..., vertici di V_K

Con tale ORDINAMENTO, l'Algoritmo Greedy fornisce di sicuro una K-colorazione, dunque OTTIMA! ■

* Il problema è che non c'è un modo "facile" per trovare tale ordinamento: per n vertici, bisognerebbe provare tutti i possibili ordinamenti: $n!$

NON POLINOMIALE

- **UPPER BOUND:**

$\boxed{\chi(G) \leq \Delta(G)+1}$, per OGNI grafo G, dove $\Delta(G) := \max\limits_{v \in V(G)} \{\deg(v)\}$

PROOF: Ciò si ottiene sempre con l'ALGORITMO GREEDY con un qualunque ordinamento!

Infatti, per il PIGEONHOLE PRINCIPLE, essendo ciascun vertice adiacente al massimo a $\Delta(G)$ altri vertici, tra $\Delta(G)+1$ colori disponibili ce ne sarà sempre almeno 1 da poter assegnare. ■

Esempio: Per il GRAFO COMPLETO K_n si ha:

$$\Delta(G) = n-1 \quad \text{e} \quad \boxed{\Delta(G)+1 = \omega(G) = \chi(G) = n}$$

- **PROBLEMA DEL CALENDARIO:**

Supponendo di avere una serie di corsi, a ciascuno dei quali partecipano determinate categorie di studenti, si vuole schedulare in slot temporali i vari corsi, minimizzando il numero di slot temporali.

Per esempio, con i seguenti corsi:

ANALISI 1 = $\{x_1, x_2, z_1\}$

ANALISI 2 = $\{x_2, x_3, z_2\}$

ANALISI 3 = $\{x_3, x_4, z_3\}$

ANALISI 4 = $\{x_4, x_5, z_4\}$

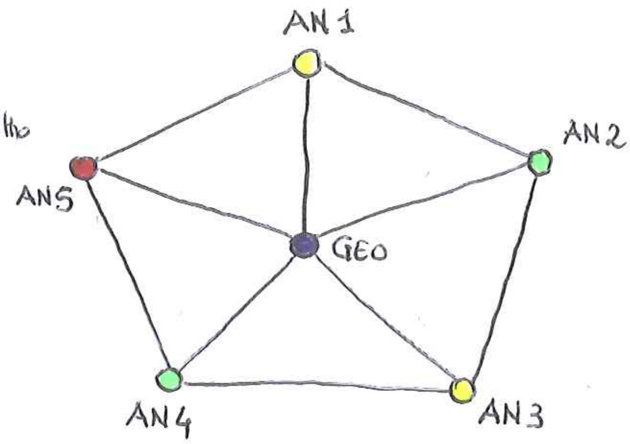
ANALISI 5 = $\{x_1, x_5, z_5\}$

GEOMETRIA = $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$

1 vertice per corso

1 spigolo per conflitto

$\longrightarrow$



Diventa un PROBLEMA DI COLORAZIONE, ma:

- NON è un grafo BIPARTITO;
- NON è un grafo intervallo

$\Rightarrow$ NON ho a disposizione alcun algoritmo "facile" per risolvere questo problema!

- **TEOREMA DEI 4 COLORI:**

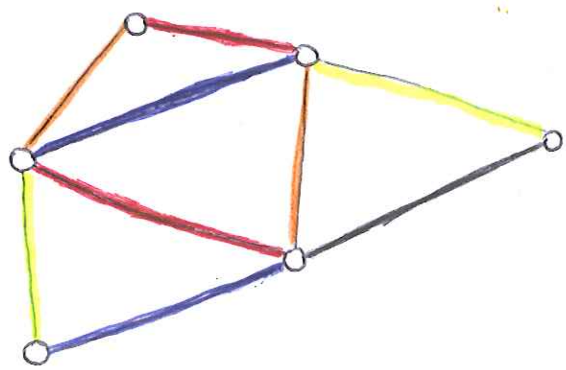
È possibile colorare una mappa finita con al più 4 colori in modo che ogni coppia di regioni confinanti riceva colore diverso (assumendo che due regioni che hanno solo un numero finito di punti in comune NON sono confinanti)?

Sì, ma la dimostrazione non è semplice ed è possibile ad oggi solo facendo esaminare i vari casi ad un calcolatore!

- **EDGE-COLORING:**

È una funzione $f: E(G) \longmapsto \{1, 2, \dots, k\}$ tale che:

$\forall e_1, e_2 \in E(G)$, se e_1 ed e_2 sono incidenti $\Rightarrow f(e_1) \neq f(e_2)$



- **EDGE CHROMATIC NUMBER:**

Si indica con $\chi'(G)$ e vale: $\boxed{\chi'(G) \geq \Delta(G)}$

Nell'esempio precedente: $\chi'(G) = 5$, $\Delta(G) = 4$.

- **TEOREMA DI VIZING:**

$$\boxed{\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1}$$

Tuttavia, NON è noto alcun ALGORITMO POLINOMIALE che possa dire se $\chi'(G) = \Delta(G)$ oppure $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$!

- **MODELLO CALENDARIO SERIE A:**

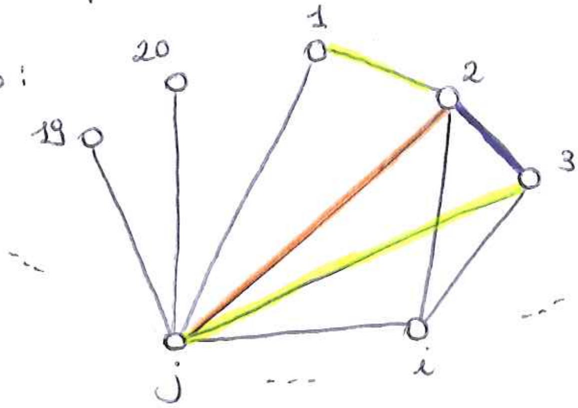
Si supponga di avere 20 squadre e di dover organizzare il calendario del girone d'andata. Come far sì che ogni squadra incontri le altre esattamente 1 volta e disputi 1 solo match per giornata? Di quante giornate abbiamo bisogno?

GRAFO: 1 vertice per squadra e 1 arco tra ogni coppia di squadre ($G \equiv K_{20}$)

Ogni giornata è corrispondente ad 1 colore, con cui colorare un arco tra 2 squadre che si scontrano in quella giornata.

→ Di quanti colori abbiamo bisogno?

K_{20}:



$\Rightarrow$ PER ESPERIENZA, sappiamo che:

$$\chi'(G) = \underline{\chi'(K_{20}) = 19}$$

Ma vediamo di dimostrare un principio più generale che vale per i grafi completi!

• **TEOREMA:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet\ \chi'(K_n) = n-1 & \text{, se } n \text{ pari} \\ \bullet\ \chi'(K_n) = n & \text{, se } n \text{ dispari} \end{array}}$$

PROOF:

1) Dimostriamo che:

- se n è pari: $\chi'(K_n) \geq n-1$:

  Infatti, $\chi'(K_n) \geq \Delta(G) = n-1$. ok!

- se n è dispari: $\chi'(K_n) \geq n$;

Ricordiamo che $E(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$. Per assurdo, supponiamo che $\chi'(G) \leq n-1$.

Dal PIGEONHOLE PRINCIPLE GENERALIZZATO, se dobbiamo colorare $\frac{n(n-1)}{2}$ spigoli con $n-1$ colori, ci saranno $\left\lceil \frac{\frac{n(\cancel{n-1})}{2}}{\cancel{n-1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$ spigoli con lo stesso colore $\Rightarrow$ ci sarà un vertice con 2 spigoli incidenti con lo stesso colore! $\Rightarrow$ ASSURDO!

Quindi: $\chi'(K_n) \geq n$, se n è dispari.

2) Dimostriamo ora che:

- se n dispari: $\chi'(K_n) \leq n$
- se n pari: $\chi'(K_n) \leq n-1$

Sfruttiamo la seguente:

(*) **PROPRIETÀ**: [Siano i, j, j' tali che: $0 \leq i, j, j' \leq n-1$, allora:
$(i+j) \bmod n = (i+j') \bmod n \iff j = j'$]

• Sia n DISPARI; Numeriamo i vertici di K_n: $V(K_n) = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Coloriamo gli archi nel seguente modo: $f(\{i,j\}) = (i+j) \bmod n$, $\forall\, 0 \leq i, j \leq n-1$, $i \neq j$

Per la proprietà: $f(\{i,j\}) \neq f(\{i,j'\}) \quad \forall j \neq j'$

$\Rightarrow$ Colorazione ammissibile con al più n colori $\Rightarrow \chi'(K_n) \leq n$

$\Rightarrow$ Se n è dispari, $\underline{\chi'(K_n) = n}$.

• Sia n PARI ;

Consideriamo K_{n-1} , con $n-1$ ovviamente dispari ; per quanto visto prima , $\chi'(K_{n-1}) = n-1$. Aggiungendo un vertice e collegandolo con tutti gli altri, ~~gli~~ ogni vecchio vertice ha un arco in più da colorare.

Ma, in precedenza usavamo $n-1$ colori ed ogni vertice aveva $n-2$ archi incidenti: c'era quindi un colore disponibile tra gli $n-1$ per ogni vertice !

$\Rightarrow$ Coloriamo gli archi aggiunti con il colore disponibile di ogni vertice con cui sono incidenti , quindi bastano $n-1$ colori !

$\Rightarrow$ $\chi'(K_n) = n-1$, se n è pari ! ■

• **Es. 8** :

Quanti sono i possibili anagrammi , anche non di senso compiuto, che si possono formare dalla parola "ORONIMO" ?

Bisogna considerare le permutazioni di lettere che si ripetono (O, M) e non considerarle più volte :
$$\frac{7!}{3!\cdot 2!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} = \boxed{420}$$

• **Es. 9** :

Girone d'andata di un campionato a 20 squadre. In contemporanea a ciascuna partita se ne svolgono al più altre 4. Si riescono a trasmettere tutte le partite avendo a disposizione solo 5 canali TV?

$$\binom{20}{2} = \frac{20\cdot 19}{2} = 190 \text{ partite totali}$$

$\Rightarrow$ Grafo con 190 vertici e 1 arco tra partite in conflitto.

$\Delta(G) \leq 4$; ma $\chi(G) \leq \Delta(G)+1 = 5$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sì}}$

• **Es. 11** :

GRAFO BIPARTITO COMPLETO $K_{7,7}$; quanti sono i diversi cicli di lunghezza 4 di $K_{7,7}$?

Scegliere 1 ciclo equivale a scegliere 2 vertici di V_1 e 2 vertici di V_2 :

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2!}\cdot\frac{7\cdot 6}{2!} = 7^2\cdot 3^2 = \boxed{441}$$