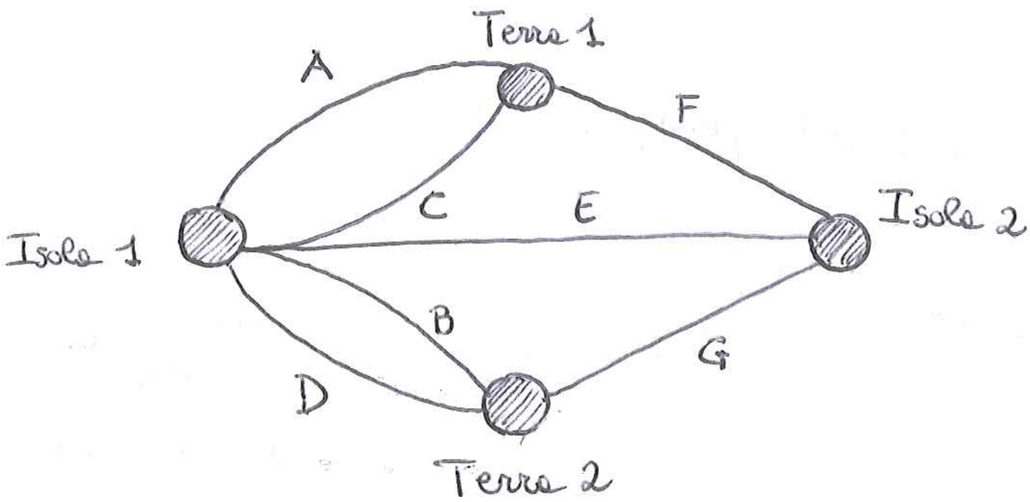
RICERCA OPERATIVA

1. TEORIA DEI GRAFI

La Teoria dei Grafi nasce grazie ad Eulero (1736) e ad una sua corrispondenza epistolare con Leibniz riguardo il PROBLEMA DEI 7 PONTI DI KÖNIGSBERG.

È possibile trovare un circuito che attraversa tutti gli archi 1 e 1 sola volta, tornando al punto di partenza?



Da notare che si tratta di un MULTIGRAFO, in quanto ci sono archi paralleli come A e C, B e D.

- NON C'È SOLUZIONE! Ci sono nodi con un numero di archi incidenti dispari.

Per avere soluzione: [tutti i nodi del grafo devono avere un numero PARI di archi incidenti]

- Ma è una condizione sufficiente per avere un CIRCUITO EULERIANO, cioè un circuito che attraversa esattamente 1 volta tutti gli spigoli?

Sì, ma lo vedremo in seguito!

DEFINIZIONI

• GRAFO (non orientato):

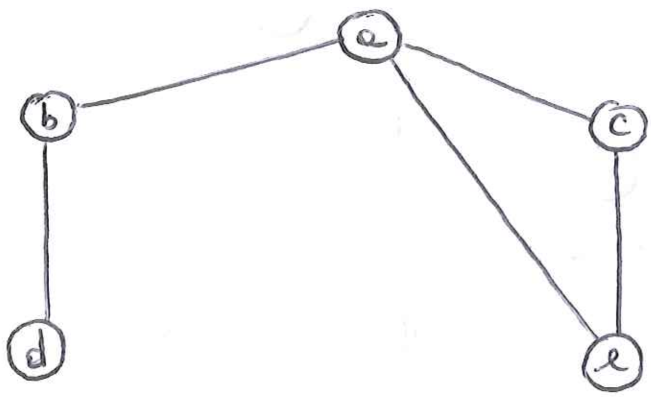
Un grafo G è una COPPIA DI INSIEMI (V, E), dove V è l'insieme dei vertici ed E è l'insieme degli spigoli:

- V è un insieme di elementi detti "vertici" o "nodi", di solito finito;
- E è un insieme di coppie NON ordinate di vertici.

Esempio:

$V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{e,a\}, \{b,d\}, \{c,e\}\}$



RAPPRESENTAZIONE GRAFICA di $G = (V, E)$

* È bene dire che la definizione di un grafo è data da V ed E, con la rappresentazione grafica si introduce sempre un minimo di aleatorietà, poiché non è univoca.

• APPLICAZIONI: si usa un grafo quando si ha un insieme di elementi e si è interessati alle RELAZIONI TRA COPPIE di questi elementi.

• GRAFO SEMPLICE:

Un grafo $G = (V, E)$ è SEMPLICE se:

- non ci sono anelli o loop, cioè spigoli del tipo $\{a, a\}$;
- l'insieme E è un INSIEME e NON un multinsieme, cioè non ci sono spigoli paralleli.

- **GRAFO ORIENTATO:**

È un grafo $G = (N, A)$ tale che:

- N è l'insieme dei nodi;
- A è un insieme di COPPIE ORDINATE di nodi $\rightarrow (a,b) \neq (b,a)$

Per ogni coppia di nodi, se il grafo è semplice, si hanno 4 possibilità:

(1)

(2)

(3)

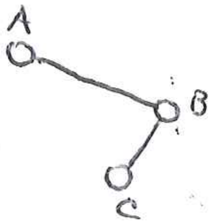
(4)

- **SPIGOLO INCIDENTE IN VERTICI:**

Uno spigolo $\{x,y\}$ è INCIDENTE in x e in y; x e y sono ESTREMI di $\{x,y\}$.

- **INCIDENZA TRA SPIGOLI:**

Due spigoli sono incidenti se hanno un ESTREMO in comune;



gli spigoli $\{A,B\}$ e $\{B,C\}$ sono incidenti.

- **VERTICI ADIACENTI:**

Due vertici si dicono ADIACENTI, se esiste uno spigolo di cui sono estremi:

$$x,y \in V(G) \text{ sono adiacenti } \Longleftrightarrow \exists \{x,y\} \in E(G)$$

- **GRADO DI UN VERTICE:**

Il GRADO di un vertice è il numero di spigoli incidenti in quel vertice.

Viene indicato con la notazione: $\deg_G(v)$ oppure $\deg(v)$.

HANDSHAKING LEMMA

Per ogni grafo $G=(V,E)$ SEMPLICE e NON ORIENTATO vale:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|$$

È il classico problema di andare ad un party in cui ognuno stringe la mano alle persone che conosce. Quante mani si stringono in totale?

Se ogni arco rappresenta 1 relazione "conoscenza" simmetrica (reciproca), allora per ogni arco si stringono 2 mani, quindi il totale sarà 2 per il numero di conoscenze (archi)!

* L'HANDSHAKING LEMMA continua a valere anche per MULTI-GRAFI!

COROLLARIO: In un qualsiasi grafo, il numero di vertici con grado dispari è sempre un numero PARI.

PROOF: Deve essere per forza un numero pari, altrimenti la somma dei gradi di tutti i nodi del grafo potrebbe anche essere dispari. Ma non lo è, poiché per l'Handshaking Lemma: $\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|$, che è un numero pari! ■

- **COMPLEMENTO DI UN GRAFO:**

Il complemento di un grafo $G=(V,E)$ è un grafo $\overline{G}=(V,\overline{E})$, cioè, $\overline{G}$ ha gli stessi vertici di G, ma gli spigoli complementari:

$$\{x,y\} \in E \iff \{x,y\} \notin \overline{E}$$

- **ARCHI TOTALI (O MASSIMI):**

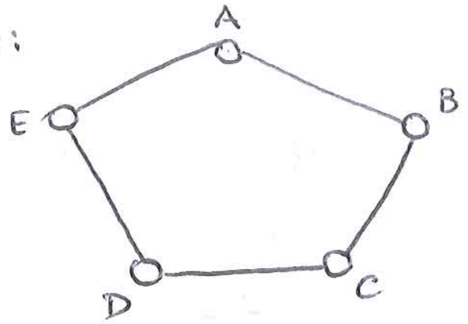
$$|E| + |\overline{E}| = \binom{|V|}{2} = \sum_{i=1}^{|V|-1} i = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$$

Sono le combinazioni di $|V|$ elementi a due a due.

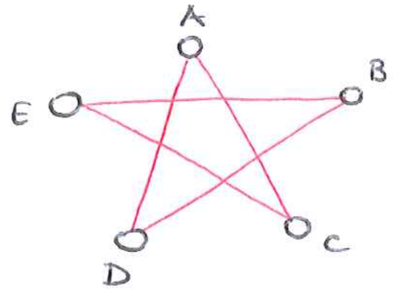
- ESEMPIO / ESERCIZIO :

In un qualsiasi grafo G di 5 vertici, ne esistono 3 che formano un triangolo in G, oppure lo formano in $\overline{G}$.
Questa affermazione è vera oppure no?
La risposta è: NO, come dimostra il seguente controesempio:

G:



$\overline{G}$:



- E se $|V| \geq 6$? $\longrightarrow$ SÌ, l'affermazione è vera!

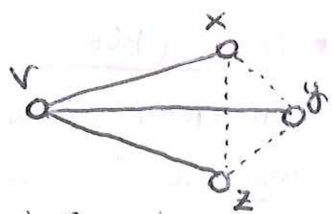
PROOF:

Sia G un grafo con $|V(G)| \geq 6$ e sia $v \in V(G)$ un vertice di G.
Dunque, abbiamo che:

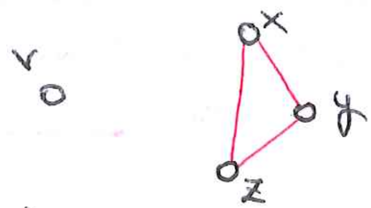
$$\forall v \in V(G): \ \deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = |V(G)| - 1 \geq 5$$

$\Longrightarrow$ Almeno uno dei 2 addendi deve essere ≥ 3.
Quindi, abbiamo due casi:

1. $\deg_G(v) \geq 3$:
quindi, ci sono almeno 3 archi incidenti in v:



- ora, se x e y oppure x e z oppure y e z avessero uno spigolo che li collega in G, G avrebbe il triangolo.
- se così non fosse, allora x, y, z sono mutuamente collegati da archi in $\overline{G}$ e formerebbero un triangolo:



2. $\deg_{\overline{G}}(v) \geq 3$: il ragionamento è analogo, ma partendo da $\overline{G}$.

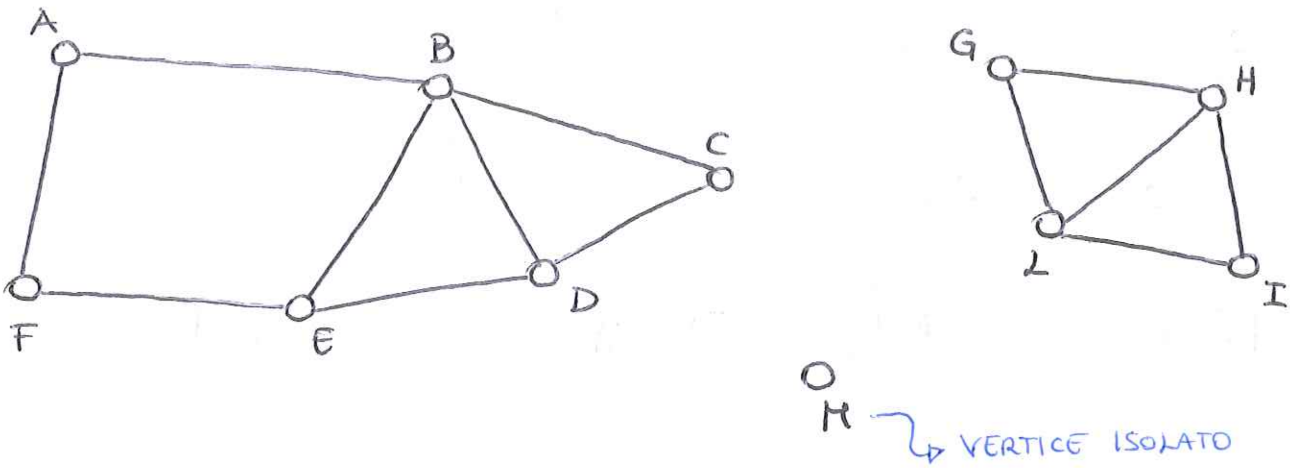
$\Longrightarrow$ L'affermazione è VERA! ∎

Dunque: Per qualsiasi grafo $G=(V,E)$ con $|V| \geq 6$ vale almeno una delle due seguenti affermazioni:

- esistono 3 vertici in G che formano un triangolo;
- esistono 3 vertici in $\overline{G}$ che formano un triangolo.

DEFINIZIONI

Consideriamo il seguente grafo per fare degli esempi:



- **WALK (PASSEGGIATA):**

Un WALK è una sequenza di nodi e spigoli che inizia e finisce con un nodo, in cui ogni nodo è incidente allo spigolo che lo precede e a quello che lo segue.
Nei grafi SEMPLICI è sufficiente la lista dei nodi!
Un CLOSE WALK inizia e termina nello stesso nodo.

- **TRAIL (PERCORSO):**

Un TRAIL è un walk in cui tutti gli spigoli sono distinti; uno spigolo NON può essere attraversato più di una volta.
Un trail chiuso è detto "CIRCUITO".

- **PATH (CAMMINO):**

Un PATH è un walk in cui sia spigoli che vertici sono distinti; spigoli e vertici NON possono essere attraversati più di 1 volta.
Un PATH CHIUSO è detto "CICLO".

ESEMPI:

walk: A, B, E, D, B, A, F   trail: A, B, D, E, B, C, D

path: A, B, D, E, F, A (ciclo)

• CONNESSIONE TRA VERTICI :

Due vertici di un grafo sono CONNESSI se esiste un WALK che ha i 2 vertici come estremi.

• Ma, se esiste un walk, allora c'è anche un trail e quindi anche un PATH.

• CONNESSIONE : RELAZIONE D'EQUIVALENZA

La CONNESSIONE è una relazione :
- riflessiva
- simmetrica
- transitiva

e, in quanto tale,

è una RELAZIONE D'EQUIVALENZA.

* **NOTA** : [una relazione d'equivalenza permette di PARTIZIONARE l'insieme interessato dalla relazione]

• PARTIZIONE :

E' la suddivisione di un insieme in sottoinsiemi DISGIUNTI, ma la cui unione coincide esattamente con l'insieme di partenza.
Questi sottoinsiemi disgiunti sono chiamati "CLASSI".

• COMPONENTI CONNESSE DI UN GRAFO :

Sono le CLASSI "MASSIMALI" di un grafo rispetto alla relazione d'equivalenza di CONNESSIONE tra vertici.

• Un grafo si dice GRAFO CONNESSO se ha un'unica componente connessa!

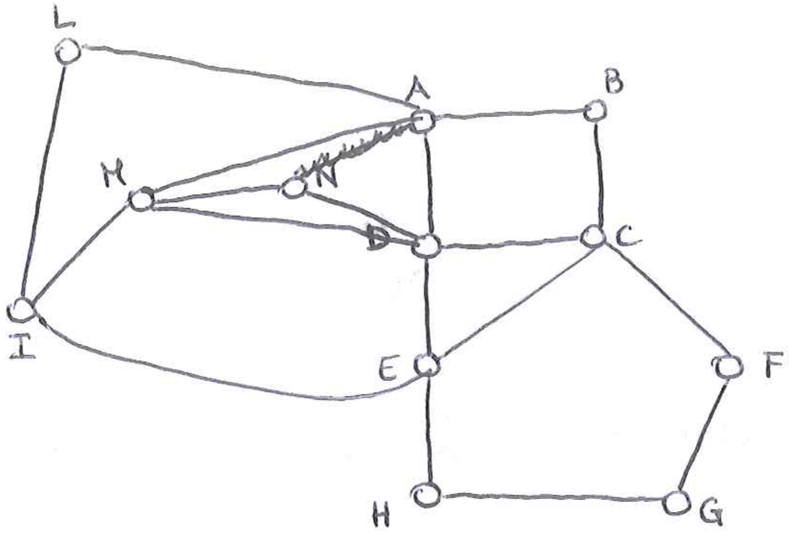
• CIRCUITO EULERIANO :

Un CIRCUITO EULERIANO è un circuito (trail chiuso) che visita OGNI spigolo di un grafo esattamente una volta.

* Di più non potrebbe, altrimenti non sarebbe un trail!

La DOMANDA DI EULERO era : in quali casi un grafo $G=(V,E)$ ammette un circuito euleriano?

In particolare, Eulero voleva dimostrare che un grafo $G=(V,E)$ CONNESSO ammette un circuito euleriano se e solo se tutti i nodi di G hanno GRADO PARI.



TEOREMA DI EULERO

Sia $G=(V,E)$ connesso. Sono equivalenti le 3 seguenti affermazioni:

(1) G ammette un circuito euleriano;

(2) $\forall v \in V(G)$: $deg(v)$ è pari;

(3) $E(G)$ può essere partizionato in CIRCUITI $c_1, c_2, \dots, c_e$.

PROOF

(1) ⇒ (2) : è ovvio, avevamo già notato che non può esserci un circuito euleriano se ci sono nodi con un grado dispari.

(2) ⇒ (3) : Partendo da un nodo, posso fare una visita marcando gli archi visitati per trovare un CIRCUITO, fin quando non ritorno al nodo di partenza.

La soluzione è garantita dal fatto che:

- grado pari per ogni nodo e, se esco da uno spigolo ce ne sarà almeno un altro per ritornarci;
- numero di vertici <u>FINITO</u>.

ALGORITMO:

1. Trovato un circuito con la procedura sopra descritta, si rimuovono dal grafo gli archi del circuito, salvando il circuito trovato;
2. Il nuovo grafo ha sempre tutti i vertici di <u>GRADO PARI</u>; iterare il punto (1) fino ad esaurimento degli spigoli.

Così facendo si partiziona $E(G)$ in CIRCUITI $c_1, c_2, \dots, c_e$.

(3) ⇒ (1) :

Ora, abbiamo a disposizione dei circuiti $c_1, \dots, c_e$ e dobbiamo costruire un CIRCUITO EULERIANO. Possiamo farlo col seguente algoritmo.

ALGORITMO:

1. Se C_1 ricopre tutti gli spigoli di G, allora C_1 è il circuito euleriano cercato;
2. Se C_1 NON ricopre tutti gli archi di G, allora, poiché G è CONNESSO, vuol dire che ci sarà qualche vertice che appartiene a più circuiti C_i e C_j della partizione.
3. Sfruttiamo questo vertice comune per concatenare i 2 circuiti C_i e C_j in un unico circuito C_{ij};
4. Ripetere dal passo (1.) fin quando non rimane un unico circuito, che sarà quello euleriano.

* **NOTA**: Facciamo attenzione al costo dell'algoritmo;

1. Trovare i circuiti: $O(m)$
2. Concatenare i circuiti: $O(m)$, Come $m := |E(G)|$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{COSTO: } O(m)}$ $\rightarrow$ COSTO LINEARE NEL NUMERO di SPIGOLI

Il che è molto più ragionevole di un algoritmo che prova tutti i possibili circuiti, con costo $O(m!)$.

- TRAIL EULERIANO:

E' un TRAIL che visita OGNI spigolo 1 sola volta, ma, in questo trail, può iniziare in un vertice e terminare in un altro.

TEOREMA SUL TRAIL EULERIANO

$G=(V,E)$ ammette un TRAIL EULERIANO se e solo se:
- G è connesso;
- G ha al più 2 vertici di grado dispari.

OSSERVAZIONE: Con "ha al più 2 vertici di grado dispari" stiamo in realtà dicendo che ne ha 0 oppure 2; questo perché, essendo G CONNESSO, ha un numero pari di vertici con grado dispari, dal Corollario dell'Handshaking Lemma.

PROOF Si dimostra col seguente algoritmo.

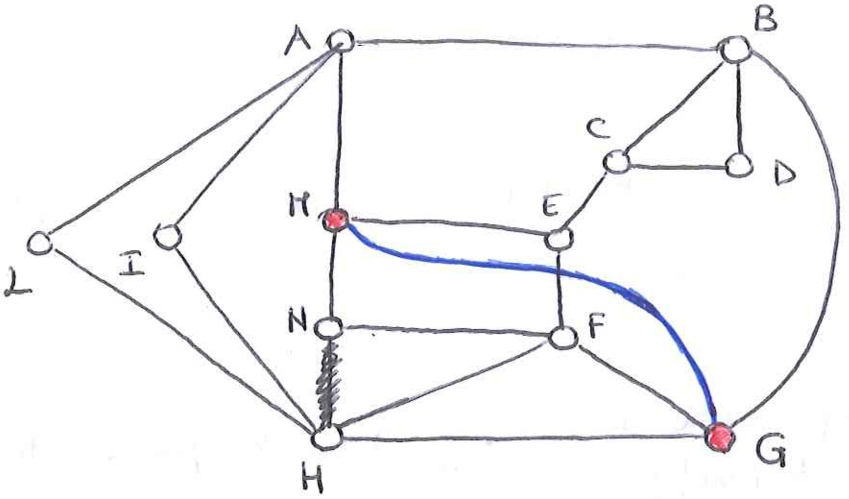
ALGORITMO

1. Aggiungere uno spigolo tra i 2 vertici di grado dispari, ottenendo un grafo G' in cui tutti i vertici hanno grado pari;

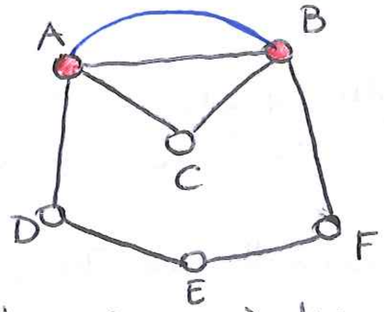
2. Applicare l'algoritmo per trovare un CIRCUITO euleriano, ottenendo il circuito euleriano C';

3. Impostare il circuito C' in maniera tale che parta dallo spigolo aggiunto al punto (1.);

4. Rimuovere da C' questo primo spigolo non presente in G, ottenendo così un <u>TRAIL EULERIANO</u> P.



* <u>CASO PARTICOLARE</u> :



Se c'è già uno spigolo che collega i due nodi di grado dispari, aggiungiamo comunque un altro spigolo, ottenendo un <u>MULTIGRAFO</u>!

• <u>VALIDITÀ PER MULTIGRAFO</u> :

Non avendo utilizzato in alcun caso l'ipotesi di SEMPLICITÀ del grafo nelle dimostrazioni, i Teoremi continuano a valere anche per i MULTIGRAFI!

Che, tra l'altro, è proprio il caso da cui era partito Eulero con il problema dei 7 ponti di Königsberg. :)

• 1° Principio di Induzione:

L'affermazione $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow$ (1) $P(1)$ è vera; oppure $P(h)$ è vera, con $h \in \mathbb{N}$ molto piccolo;

(2) Se $P(n)$ è vera $\Rightarrow P(n+1)$ è vera

Proof: $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$ $\longrightarrow$ somma dei primi n numeri dispari.

PASSO BASE:

$$n=1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 1 = 1^2 = n^2$$

$$n=2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{1}(2i+1) = 1+3 = 4 = 2^2 = n^2$$

PASSO INDUTTIVO: supponiamo che $P(n)$ sia vera $\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$

consideriamo $P(n+1)$: $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) + 2n+1 \underset{\uparrow}{=} n^2+2n+1 = (n+1)^2$

ipotesi induttiva

$\Rightarrow P(n)$ è VERA $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

• 2° Principio di Induzione:

$P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow$ (1) $P(h)$ è vera, $h \in \mathbb{N}$ numero piccolo;

(2) se $\forall k \leq n$, $P(k)$ è vera $\Rightarrow P(n+1)$ è vera.

- Fattorizzazione:

Un qualunque numero $n \in \mathbb{N}$ puo' essere fattorizzato nel prodotto di numeri primi.

Proof: PASSO BASE: $n=1$: $1 = n = 1 \cdot 1$ ok!

PASSO INDUTTIVO: supponiamo che $\forall i \in \mathbb{N}$ tale che $i \leq n$, i sia fattorizzabile.

Consideriamo $n+1$. Abbiamo 2 casi:

1. $n+1$ è PRIMO $\Rightarrow n+1 = 1 \cdot (n+1)$ ok!
2. $n+1$ non è primo $\Rightarrow \exists\, p,q \in \mathbb{N}$ tali che $n+1 = p \cdot q$, con $\underline{2 \leq p,q \leq n}$,

   Così si esclude il fatto che $(n+1)$ sia primo.

Per ipotesi induttiva, p e q sono fattorizzabili $\Rightarrow p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, $q = q_1 \cdot \ldots \cdot q_h$

Quindi: $n+1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_h \Rightarrow (n+1)$ è fattorizzabile nel prodotto di numeri primi.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, n puo' essere FATTORIZZATO! ■

- **ATTENZIONE !**

PROPOSIZIONE: "Ogni insieme di n cavalli è formato da cavalli dello stesso colore"

WRONG PROOF: PASSO BASE: $n=1$, è banalmente vera.

PASSO INDUTTIVO: Supponiamo che l'affermazione sia vera per insieme di n cavalli.
Sia $X=\{1,2,\dots,n+1\}$ un insieme di $n+1$ cavalli.
Consideriamo i due sottoinsiemi di n cavalli:

$$X_1=\{1,2,\dots,n\} \quad ; \quad X_2=\{2,3,\dots,n+1\}$$

Per ipotesi induttiva, ciascuno di questi insiemi è formato da n cavalli dello stesso colore. Inoltre, $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \Rightarrow X = X_1 \cup X_2$ è formato da $n+1$ cavalli dello stesso colore!

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, ogni insieme di n cavalli è formato da cavalli dello stesso colore!

* **PROBLEMA:** [c'è un problema per $n+1=2$, in quanto non c'è intersezione tra $X_1=\{1\}$ e $X_2=\{2\}$. Per avere intersezione, bisogna avere $(n+1)\geq 3$. Come passo base non si può prendere $n=3$, perché non sarebbe dimostrabile.]

- **ESERCIZIO 1, COMPITO 1:**

Quanti spigoli ha un grafo con 8 vertici, ognuno con grado 5?

Sfruttando l'HANDSHAKING LEMMA: $\sum_{v\in V} \deg(v) = 2\cdot|E|$

$$\Rightarrow |E| = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{8} 5 = \frac{5\cdot 8}{2} = \boxed{20}$$

✓

- **ESERCIZIO 6, COMPITO 1:**

Sia $G(V,E)$ con $|V|=n$. Per quali valori di n si può avere che $|E(G)|=|E(\bar{G})|=n$?

$$|E(G)|+|E(\bar{G})| = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \text{ma } |E(G)|=|E(\bar{G})|=n$$

$$\Rightarrow 2n = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n^2-n=4n \Rightarrow n(n-5)=0 \Rightarrow \begin{matrix} n_1=0 \\ n_2=5 \end{matrix}$$

Quindi, si può avere solo per $\boxed{n=5}$.

✓

• Es. 8, COMPITO 1:

Sia G con n vertici. E' vero che se n è pari è IMPOSSIBILE che G e $\overline{G}$ ammettano entrambi un circuito euleriano?

Sia $v \in G$, notare che: $deg_G(v) + deg_{\overline{G}}(v) = n-1$

Se n è pari $\Rightarrow$ $n-1$ è dispari $\Rightarrow$ $deg_G(v)$ è dispari $\vee$ $deg_{\overline{G}}(v)$ è dispari, quindi almeno uno tra G e $\overline{G}$ non ammette circuito euleriano!

L'affermazione è $\boxed{\text{VERA}}$.

• Es. 10, COMPITO 1:

Sia G CONNESSO con n vertici. E' vero che aggiungendo al più $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ spigoli a G si può sempre ottenere un grafo (eventualmente un multigrafo) che ammette un circuito euleriano?

Abbiamo 2 casi:

- G ammette già un circuito euleriano (tutti vertici di grado pari), quindi aggiungiamo 0 vertici, perché è già ok così!
- G non ammette un circuito euleriano $\Rightarrow$ $\exists$ almeno un vertice di grado dispari.

Tuttavia, sappiamo che G è connesso, quindi il numero di vertici di grado dispari $n' \leq n$ è PARI $\Rightarrow$ $n' = 2h \leq n$ $\Rightarrow$ $h \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Essendo di numero pari, posso aggiungere h archi per collegarli a coppie, in questo modo, ogni nodo di G avrà grado pari (c'è la possibilità che G sia diventato un multigrafo) $\Rightarrow$ G ammetterà un circuito euleriano!

$\Rightarrow$ La proposizione dunque è $\boxed{\text{VERA}}$!

• GRAFO ACICLICO:

Un grafo G è ACICLICO se non ammette cicli e, di conseguenza, anche circuiti.

Sia $G(V,E)$ con $|V| = n$ vertici.

- Quanti spigoli deve avere AL MINIMO per essere CONNESSO? → $n-1$

$$|E(G)| \geq |V(G)| - 1$$

- Quanti spigoli deve avere AL MASSIMO per essere ACICLICO? → $n-1$

$$|E(G)| \leq |V(G)| - 1$$

→ Un grafo CONNESSO e ACICLICO ha esattamente $n-1$ spigoli. È detto ALBERO!

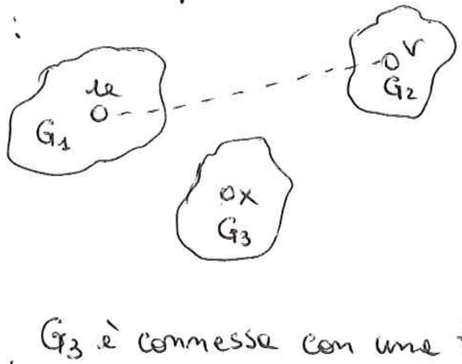
• **LEMMA 1**

> Sia $G(V,E)$ un grafo e sia $e \in E$ un suo spigolo. Valgono
>
> (i) Se G è CONNESSO, il grafo $G-e$ ha al più 2 componenti connesse. In particolare, se le c.c. di $G-e$ sono due, i due estremi di e appartengono a componenti diverse.
>
> (ii) Se G è ACICLICO, il grafo $G-e$ è ancora aciclico ed il suo numero di c.c. è pari al numero di c.c. di G più 1.

PROOF (i): Siano $u, v \in V$ tali che: $e = \{u, v\}$

- Se $G-e$ resta connesso, ci sarà 1 sola c.c. → ok!
- Se $G-e$ non è CONNESSO, allora u e v appartengono a due diverse c.c., cioè non sono connessi. Se lo fossero, allora per ogni $x, y \in V(G-e)$ ci sarebbe un path che li collega, sostituendo eventualmente lo spigolo e con il path che connette u e v. Ma, se così fosse, G sarebbe connesso.

Ma possono esserci più di 2 c.c.? No; supponiamo per assurdo che esista una 3ª c.c.:



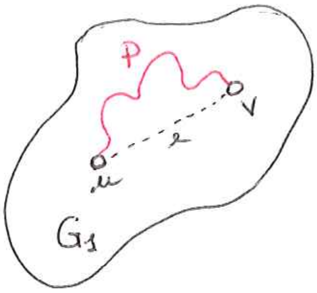
Poiché G è connesso, deve esistere un path da x ad u oppure da x a v che NON usa l'arco $e = \{u, v\}$. x non poteva essere connesso ad entrambi u e v senza passare per e, altrimenti $G-e$ sarebbe connesso.

Ma allora, G_3 è connessa con una tra G_1 e G_2 anche in $G-e$ ⇒ le c.c. sono al più 2!

c.v.d.!!! ✓

PROOF (ii): Se G è aciclico, è ovvio che $G-e$ rimane ACICLICO, in quanto non è possibile creare cicli rimuovendo spigoli.

Sia G formato da K componenti connesse, con $K \geq 1$. Assumiamo, per esempio, che $u, v \in G_1$. Dobbiamo dimostrare che, rimuovendo $e = \{u, v\}$, G_1 si spezza PER FORZA in 2 c.c.,

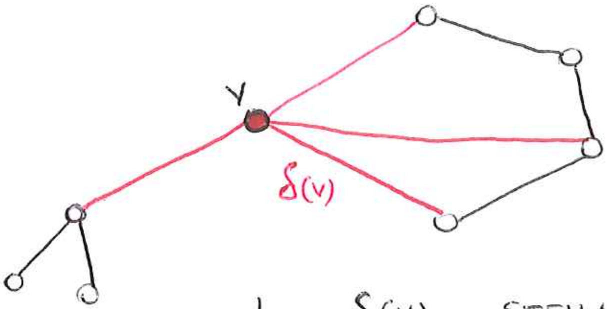


Se esistesse un path P (in rosso) che connette u e v, allora G_1 rimarrebbe connesso.

Ma P NON PUO' ESISTERE, altrimenti $P \cup \{e\}$ sarebbe un ciclo per G_1 e quindi per G; ma, per ipotesi G è ACICLICO! Quindi, il numero di c.c. di $G-e$ sarà uguale al numero di c.c. di $G + 1$! ok!!! ✓

■

- **RIMOZIONE DI UN VERTICE:**



Se $G = (V, E)$:

$\Rightarrow$ $G - v$ sarà fatto così:

- $V(G-v) = V(G) \setminus \{v\}$
- $E(G-v) = E(G) \setminus \delta(v)$,

dove $\delta(v)$ ::= STELLA DI INCIDENZA DI UN VERTICE, è l'insieme degli archi in rosso in figura

- **COROLLARIO:** Se $G(V,E)$ è CONNESSO e $v \in V(G)$, allora il grafo $G - v$ ha al più $|\delta(v)| = \deg_G(v)$ componenti connesse.

PROOF: E' una conseguenza del Lemma 1, in quanto basta iterarlo su tutti gli spigoli incidenti in v, cioè tutti gli spigoli e tali che $e \in \delta(v)$.

■

Ora dimostriamo che CONDIZIONE NECESSARIA (ma non sufficiente) perché un grafo sia connesso è che il numero degli spigoli sia almeno pari ad $n-1$, cioè che:

$$|E(G)| \geq |V(G)| - 1$$

• TEOREMA 3 (CONNESSIONE):

$$\boxed{\text{Sia } G(V,E) \text{ un grafo } \underline{\text{connesso}} \Rightarrow |E(G)| \geq |V(G)|-1}$$

PROOF: Per INDUZIONE (2° principio) sul numero di vertici. Sia $|V(G)| = m$.

PASSO BASE: $m=1 \rightarrow \circ \Rightarrow |E(G)| = 0 \geq |V(G)|-1 = 1-1=0$ ok!

PASSO INDUTTIVO: Supponiamo che ogni grafo connesso con $h \leq m$ vertici abbia almeno $h-1$ spigoli.

Consideriamo G tale che $|V(G)| = m+1$ e G CONNESSO. Sia $v \in V(G)$.
Rimuoviamo v e consideriamo $G-v$; per il Corollario precedente, $G-v$ avrà K componenti connesse $G_1, \dots, G_K$, con $\boxed{K \leq deg_G(v)}$.

Notiamo che possiamo partizionare gli SPIGOLI di G in questo modo:

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_K) \cup \delta(v) \rightarrow \text{PARTIZIONE!}$$

Dunque: $|E(G)| = |E(G_1)| + \dots + |E(G_K)| + deg_G(v) \underset{\text{ipotesi induttiva}}{\geq} |V(G_1)|-1 + \dots + |V(G_K)|-1 + deg_G(v) =$

$$= \underbrace{|V(G_1)| + \dots + |V(G_K)|}_{|V(G)|-1} \underbrace{- K + deg_G(v)}_{\geq 0} \geq |V(G)|-1$$

Quindi, se G è CONNESSO, allora $|E(G)| \geq |V(G)|-1$! ok!!! ■

• TEOREMA 4 (ACICLICITÀ):

$$\boxed{\text{Sia } G(V,E) \text{ un grafo } \underline{\text{ACICLICO}} \Rightarrow |E(G)| \leq |V(G)|-1}$$

PROOF: Per INDUZIONE (2° principio) sul numero di spigoli. Sia $|V(G)| = m$.

PASSO BASE: $m=1$: $\circ \rightarrow |E(G)| = 0 \leq |V(G)|-1 = 1-1=0$ ok!

PASSO INDUTTIVO: Supponiamo che ogni grafo aciclico con $h \leq m$ spigoli abbia almeno $h+1$ vertici.

Sia G ACICLICO, con $|E(G)| = m+1$. Sia $e \in E(G)$; consideriamo $G-e$:
Per il Lemma 1 (aciclicità), $G-e$ ha K componenti connesse, con $\boxed{K \geq 2}$.
Siano $G_1, \dots, G_K$ tali componenti:
- $\forall G_i$, $1 \leq i \leq K$, G_i è ACICLICA,
- $\forall i: 1 \leq i \leq K$, $|E(G_i)| \leq m$ per ipotesi induttiva.

Gli spigoli di G, sono lo spigolo e rimosso più gli spigoli di ogni c.c.:

$$|E(G)| = 1 + \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| \underset{\text{ipotesi induttive}}{\leq} 1 + \sum_{i=1}^{k}\left(|V(G_i)|-1\right) = 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}|V(G_i)|}_{|V(G)|} - K$$

Ma $K \geq 2 \Rightarrow \underline{1-K \leq -1}$

$\Rightarrow |E(G)| \leq |V(G)| - 1$, come volevasi dimostrare!

dì!!!

$\blacksquare$

- RIASSUNTO:

> - Se G è CONNESSO $\Rightarrow |E(G)| \geq |V(G)| - 1$
> - Se G è ACICLICO $\Rightarrow |E(G)| \leq |V(G)| - 1$
> - Se G è CONNESSO e ACICLICO $\Rightarrow |E(G)| = |V(G)| - 1$

- ALBERO:

Un ALBERO è un grafo CONNESSO e ACICLICO. A pensarci bene, è "minimalmente" connesso e "massimalmente" aciclico!
In particolare, per ogni coppia di vertici di un albero, esiste 1 ed 1 solo cammino con estremi i 2 vertici.

- LEMMA 5: FOGLIE:

> Un qualunque albero con almeno 2 nodi, ha almeno 2 FOGLIE, cioè nodi di grado 1.

PROOF: Sia $G(V,E)$ un ALBERO con $|V(G)| \geq 2 \Rightarrow |E(G)| = |V(G)| - 1$

Per l'HANDSHAKING LEMMA, $2|E(G)| = \underbrace{\sum_{v\in V(G)} deg(v)}_{\text{somma dei gradi dei nodi di un albero}} = 2\left(|V(G)| - 1\right)$

Partizioniamo $V(G)$ in due CLASSI:

- V_1 := insieme dei vertici di grado 1;
- V_2 := insieme dei vertici di grado ≥ 2;

$$\Rightarrow \sum_{v\in V(G)} deg(v) = \underbrace{\sum_{v\in V_1} deg(v)}_{1*|V_1|} + \underbrace{\sum_{v\in V_2} deg(v)}_{\geq 2*|V_2|} \geq |V_1| + 2\cdot|V_2|$$

Quindi: $2|V(G)| - 2 \geq |V_1| + 2|V_2| \Rightarrow 2(|V_1| + |V_2|) - 2 \geq |V_1| + 2|V_2|$

$\Rightarrow 2|V_1| + \cancel{2|V_2|} - 2 \geq |V_1| + \cancel{2|V_2|} \Rightarrow |V_1| \geq 2$

L'insieme dei vertici di grado 1, cioè le FOGLIE, ha almeno cardinalità due; quindi ogni albero ha almeno 2 FOGLIE!

olè!!! ■

• DEFINIZIONI EQUIVALENTI DI ALBERO

Un ALBERO è:

(1) un grafo G connesso e aciclico;

(2) un grafo G connesso e tale che $|V(G)| = |E(G)| + 1$;

(3) un grafo G aciclico e tale che $|V(G)| = |E(G)| + 1$;

(4) definizione ALGORITMICA tramite GROWING TREE PROCEDURE.

L'equivalenza si dimostra con il seguente lemma.

• LEMMA 6:

Sia G un grafo con n vertici. Allora due qualunque delle seguenti affermazioni implicano la terza:

(1) G è connesso;

(2) G è aciclico;

(3) G ha $n-1$ spigoli.

PROOF: • (1)+(2) ⇒ (3): ovvio, come visto è l'unione di Teorema 3 e 4 su connessione e aciclicità. ✓

• (2)+(3) ⇒ (1): Per assurdo, sia G aciclico con $n-1$ spigoli, ma NON connesso.
Allora G ha K c.c. $G_1, \dots, G_k$, con $K \geq 2$. Siano $u \in G_1$ e $v \in G_2$; ovviamente $\{u,v\} \notin E(G)$.
Consideriamo il grafo $G + \{u,v\}$. Esso è ancora ACICLICO, poiché aggiungendo lo spigolo $\{u,v\}$ si creerebbe un CICLO solo se c'è già un path da u a v, ma non è possibile perché u e v appartengono a c.c. diverse.
Allora $G+\{u,v\}$ è ACICLICO ed ha n vertici ed n spigoli → ⚡ ASSURDO!
In un grafo ACICLICO: $|E(G)| \leq |V(G)| - 1 \Rightarrow$ G è CONNESSO! ✓

• (1)+(3) ⇒ (2): Per assurdo, sia G connesso con $n-1$ spigoli, ma con almeno 1 ciclo! Sia C un ciclo di G ed $e \in E(G)$ uno spigolo del ciclo C.
Il grafo $G - e$ è ancora CONNESSO, poiché rimuovendo uno spigolo di un ciclo non si creano altre componenti connesse.

Dunque $G-e$ è un grafo connesso, con n vertici ed $n-2$ spigoli $\rightarrow$ ASSURDO!

Per il Teorema 3 sulla connessione, sappiamo che, se G è connesso:

$$|E(G)| \geq |V(G)| - 1 \quad \rightarrow \quad \#\text{ spigoli} \geq n-1$$

$\Rightarrow$ G è ACICLICO. ✓

ok!!! ■

- **GROWING TREE PROCEDURE (GTP):**

1. Partiamo dal grafo G con un solo vertice.
2. Ripetiamo un qualunque numero di volte i seguenti 2 passi:
   - 2.1 Sia G' il grafo ottenuto aggiungendo a G un nuovo vertice adiacente ad un solo vertice di G, cioè un nuovo vertice di grado 1;
   - 2.2. sia $G := G'$.

- **LEMMA 7 (VALIDITA' GTP):**

(i) Ogni grafo costruito dalla Growing Tree Procedure è un albero;

(ii) ogni albero può essere costruito dalla Growing Tree Procedure.

PROOF (i): Per INDUZIONE sul numero di vertici.

PASSO BASE: $n=1 \rightarrow \circ \rightarrow$ è connesso e aciclico $\rightarrow$ è un ALBERO!

PASSO INDUTTIVO: supponiamo che ogni grafo costruito con la GTP con $|V(G)| \leq n$ sia un albero.

Sia $G : |V(G)| = n+1$. Lo possiamo ottenere da un albero $T(V,E)$ costruito dalla GTP con n nodi, nel seguente modo: $G(V \cup \{v\}, E \cup \{u,v\})$.

- G è CONNESSO poiché T era connesso e l'unico vertice aggiunto è collegato a T tramite l'arco $\{u,v\}$.
- G è ACICLICO perché T era aciclico e l'unico ciclo che si può creare è con l'aggiunta di v e $\{u,v\}$, ma, essendo v di grado 1, non può far parte di alcun ciclo.

$\Rightarrow$ G è un albero di $n+1$ vertici creati con la GTP.

Quindi, ogni grafo costruito con la GTP è un ALBERO! ✓

PROOF (ii): Sia $T(V,E)$ un albero con almeno 2 vertici (ha almeno 2 foglie per il Lemma 5) e sia $v \in V$ una FOGLIA.

Consideriamo il grafo $G(V-\{v\}, E \setminus \delta(v))$, rimuovendo la foglia v.

- G è ACICLICO, poiché T era aciclico e non si possono creare cicli rimuovendo un nodo e uno spigolo;
- G è CONNESSO, poiché T era connesso e:

due qualunque vertici $x, y \in V(G)$ sono connessi in T con un path P che non include le foglie rimosse v e/o $\{u,v\}$, proprio perché v è una FOGLIA, quindi P è un path anche per G. Ovviamente ciò avviene se $x, y \neq v$. Se sono uguali a v, v viene rimosso e il problema non si pone.

$\Rightarrow$ $G = T - v$ è un ALBERO $\Rightarrow$ Ogni albero, andando a ritroso, può essere costruito dalla Growing Tree Procedure.

ok!!!

• Es. 1, COMPITO 2:

Qual è il numero massimo di spigoli che è possibile rimuovere da K_n (grafo COMPLETO di n vertici) preservando la connessione?

$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$. Per essere connesso, dovrà avere almeno $n-1$ spigoli, quindi si possono rimuovere tutti, meno che $n-1$:

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \boxed{\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-1)}$$

• Es. 3, COMPITO 2:

Utilizzando un procedimento induttivo, dimostrare che $1+2+2^2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$.

Utilizziamo il 1° PRINCIPIO DI INDUZIONE.

PASSO BASE: $n=0$: $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2-1 = 1$ ok!

PASSO INDUTTIVO: Sia vero che $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

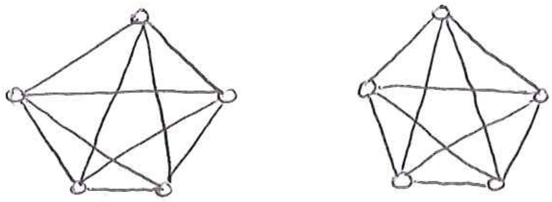
Consideriamo, per $n+1$, $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i$;

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \underset{\text{ipotesi induttiva}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = \boxed{2^{n+2} - 1}$$

• Es. 4, COMPITO 2:

Un grafo con n vertici e $2n$ spigoli è sempre connesso. Dimostrare o esibire un controesempio.

Un controesempio è dato da un grafo formato da 2 c.c. del tipo K_5; avrà 10 ~~spigoli~~ vertici e 20 spigoli, ma non sarà CONNESSO $\longrightarrow$ $\boxed{\text{FALSO}}$



✓

• Es. 6, COMPITO 2:

Dimostrare che il numero massimo di spigoli che può avere un grafo con 10 vertici e 2 componenti connesse è pari a 36.

Sia $G(V,E)$ con $|V(G)| = n = 10$ formato da 2 c.c. G_1 e G_2, formate da n_1 ed n_2 vertici rispettivamente, con $0 < n_1 < 10$ ed $n_2 = 10 - n_1$.

$|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)|$; ma, poiché sono componenti connesse:

$|E(G_1)| \geq n_1 - 1$ e $|E(G_2)| \geq (10 - n_1) - 1$

Ma, per massimizzare il numero di spigoli, c'è bisogno che: $G_1 \equiv K_{n_1}$ e $G_2 \equiv K_{n_2}$:

avranno quindi: $|E(G_1)| = \dfrac{n_1(n_1 - 1)}{2}$ e $|E(G_2)| = \dfrac{(10-n_1)(10-n_1-1)}{2}$

$$\Rightarrow |E(G)|_{max} = \frac{n_1^2 - n_1}{2} + \frac{90 - 19n_1 + n_1^2}{2} = \frac{1}{2}\left(2n_1^2 - 20n_1 + 90\right) =$$

$$= n_1^2 - 10n_1 + 45 = f(n_1)$$

Dobbiamo studiare i punti di massimo di questa funzione al variare di n_1:

$\dfrac{df(n_1)}{dn_1} = 2n_1 - 10$; si vede che il massimo è raggiunto per $n_1 = 1 \vee n_1 = 9$, dove:

$f(1) = 1 - 10 + 45 = \boxed{36}$

$f(9) = 81 - 90 + 45 = \boxed{36}$

✓

• Es.7, COMPITO 2 (*):

È vero che non è possibile che un grafo e il suo complemento siano entrambi non connessi? Dimostrare o esibire un controesempio.

PROOF per INDUZIONE sul numero di vertici.

PASSO BASE: $n=1 \rightarrow G: \circ \rightarrow$ connesso ok!
$\overline{G}: \circ \rightarrow$ connesso

PASSO INDUTTIVO: Sia l'affermazione vera per grafi con n vertici.

Consideriamo $G(V,E) : |V(G)| = n+1$ e sia $v \in V(G)$.
Abbiamo 3 casi:

(1) $deg_G(v) = n$

(2) $deg_G(v) = 0$

(3) $deg_G(v) = k$, con $0 < k < n$.

• 1° CASO: se un vertice ha grado $n \Rightarrow G$ è connesso, poichè v è connesso a tutti gli altri vertici.

• 2° CASO: se $deg_G(v) = 0 \Rightarrow deg_{\overline{G}}(v) = n \Rightarrow \overline{G}$ è connesso per lo stesso motivo di prima.

• 3° CASO: se $0 < deg_G(v) < n \Rightarrow 0 < deg_{\overline{G}}(v) < n$.

Consideriamo il grafo $G-v$, che ha n vertici $\rightarrow$ per ipotesi induttiva:

$G-v$ è connesso oppure $\overline{G-v}$ è connesso

Se $G-v$ è connesso, sapendo che $deg_G(v) > 0$, anche v avrà almeno uno spigolo che lo connette a $G-v \Rightarrow G$ è connesso

Se $\overline{G-v}$ è connesso, sapendo che $deg_{\overline{G}}(v) > 0$, anche v avrà almeno uno spigolo che lo connette a $\overline{G-v} \Rightarrow \overline{G}$ è connesso

$\Rightarrow$ Per ogni grafo $G(V,E)$ o G è connesso, oppure lo è $\overline{G}$ (o entrambi!).
Quindi l'affermazione è $\boxed{\text{VERA}}$!

✓

• Es. 8, COMPITO 2 (*):

Si considerino le 64 scacchiere che si ottengono da una scacchiera 8×8 rimuovendo, in tutti i modi possibili, 1 sola casella. Si sceglie quindi una qualsiasi scacchiera (bucata) delle 64. Dimostrare che è possibile spezzare questa scacchiera in 3 pezzi tali che ognuna delle altre 63 scacchiere possa essere ricostruita disponendo opportunamente i 3 pezzi.

PROOF per induzione dimostriamo che l'affermazione è vera per ogni scacchiera $2^n \times 2^n$, spezzata in n pezzi.

• CASO BASE: $n=1$ → Ho una scacchiera $2^1 \times 2^1$ a cui manca una casella, l'unico pezzo è la "L" che si viene a formare; infatti, ruotandola, posso ottenere le 4 scacchiere bucate. ok!

• PASSO INDUTTIVO: Supponiamo l'affermazione vera per scacchiere $2^n \times 2^n$.

Prendiamo una scacchiera S di dimensioni $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, bucata.

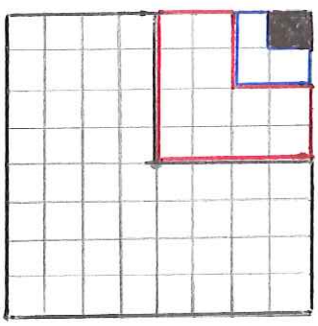
Tramite una rotazione, posso sempre portare la casella mancante nel quadrante nord-est di S.

Un 1° PEZZO è formato dai 3 quadranti che NON contengono la casella bucata.

A questo punto, il quadrante nord-est rimanente sarà una scacchiera di dimensioni $2^n \times 2^n$, ma per ipotesi induttiva, può essere spezzata in n tasselli, tali da comporre le $2^n \times 2^n$ scacchiere!

Quindi, S può essere scomposta in $(n+1)$ PEZZI, tali da poter ricomporre tutte le $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ scacchiere bucate!

In particolare, nel caso di scacchiera 8×8:



✓

- Es. 9, COMPITO 2:

E' vero che in un grafo ACICLICO tutti i trail sono path?

I trail possono al massimo una volta per un dato SPIGOLO; possono però passare più volte sullo stesso vertice. Ma, se un trail passa più volte in un vertice, allora il trail contiene un ciclo; però il grafo è ACICLICO, e dunque ciò non può verificarsi:

ogni trail in un grafo aciclico passa al massimo 1 volta anche su un vertice $\Rightarrow$ ogni trail in un grafo aciclico è un PATH! $\rightarrow$ $\boxed{\text{VERO}}$

- Es. 11, COMPITO 2:

Quanti spigoli ha un grafo con n vertici, aciclico e con 4 componenti connesse?

Sia $G=(V,E)$ ACICLICO, con $|V(G)|=n$ e formato da 4 c.c. $G_1, \dots, G_4$.

$\Rightarrow$ Ogni c.c. sarà connessa e aciclica $\rightarrow$ sono 4 ALBERI!

Sia n_i il numero di vertici di ogni c.c. per $1 \leq i \leq 4$; è chiaro che:

$$n = \sum_{i=1}^{4} n_i = \sum_{i=1}^{4} |V(G_i)|$$

Essendo le c.c. degli alberi, sappiamo esattamente il numero di spigoli:

$$|E(G_i)| = |V(G_i)| - 1 \quad ; \text{ ovviamente: } |E(G)| = \sum_{i=1}^{4} |E(G_i)|$$

$$\Rightarrow |E(G)| = \sum_{i=1}^{4} |E(G_i)| = \sum_{i=1}^{4} \left(|V(G_i)| - 1 \right) = \sum_{i=1}^{4} |V(G_i)| - 4 = \boxed{n-4}$$

- Es. 14, COMPITO 2 (*):

Disegnare un albero $T(V,E)$ e tale che anche il complemento $\overline{T} = (V, \overline{E})$ sia un albero. Per quali valori di $|V|$ questo è possibile?

$$|E(T)| + |E(\overline{T})| = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$$; ma, essendo alberi, $|E(T)| = |E(\overline{T})| = |V|-1$

$\Rightarrow 2|V| - 2 = \dfrac{|V|^2 - |V|}{2} \Rightarrow |V|^2 - 5|V| + 4 = 0 \Rightarrow$ è possibile solo per i seguenti valori: $\boxed{|V| = 1 \vee |V| = 4}$

- $|V| = 1$: T: o $\longrightarrow$ $\overline{T}$: o

- $|V| = 4$: T: o—o—o—o $\longrightarrow$ $\overline{T}$: 

• Prüfer Code:

- Consideriamo un insieme $V = \{0, 1, \dots, m-1\}$ di m vertici.

  Quanti sono i DIVERSI ALBERI con insieme dei vertici V?

  Due alberi sono diversi se $T(V, E_1)$, $T(V, E_2)$ sono tali che esiste uno SPIGOLO $\{i,j\}$, con $0 \leq i < j \leq m-1$, tale che $\{i,j\} \in E_1 \wedge \{i,j\} \notin E_2$.

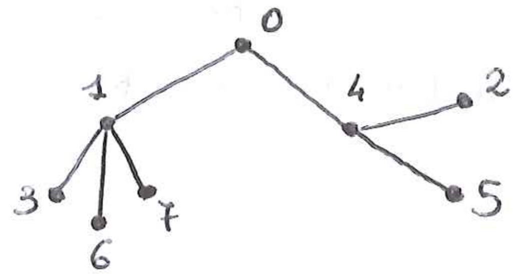
- Conteremo i diversi alberi in modo "indiretto", associando ad ogni albero un vettore univoco e viceversa, dimostrando che le due cose sono equivalenti.

  Contare i diversi alberi con insieme V di m vertici è la STESSA COSA che contare i diversi vettori di $m-2$ elementi a valori interi tra 0 ed $m-1$.

  Abbiamo quindi il seguente:

Teorema di Cayley: I diversi alberi con un insieme dei vertici $V = \{0, 1, \dots, m-1\}$ sono $m^{(m-2)}$.

- ALBERO DI RIFERIMENTO:



Albero con $m = 8$ vertici. Analizziamo le diverse RAPPRESENTAZIONI per gli alberi, facendo riferimento a questo albero.

(1) Matrice di Adiacenza:

È una matrice binaria A di dimensione $|V| \times |V|$, tale che $a_{ij} = 1$ se e solo se $\{i,j\} \in E(T)$. A è SIMMETRICA con tutti 0 sulla diagonale principale.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Devo memorizzare $\sum_{i=1}^{7} i = \frac{7\cdot 8}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ bit, considerando solo la ~~diagonale~~ matrice triangolare superiore, esclusa la diagonale:

$$\boxed{\#\text{bit} = \frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow \boxed{\#\text{alberi} \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Ma, in realtà è un MINORE "STRETTO", poiché ci sono alcune matrici, come quelle con tutti 0, che non rappresentano un albero.

Inoltre, stiamo tenendo traccia anche di bit pari a zero, mentre sappiamo che i bit $\neq 0$ sono esattamente $n-1$, cioè uno per ogni spigolo dell'albero.

È chiaro che è una rappresentazione INEFFICIENTE.

(2) LISTA DI SPIGOLI:

Utilizziamo 2 vettori a, b ordinati con un ORDINAMENTO LESSICOGRAFICO, di modo che sia totale per il vettore a e relativo per b (in b ordiniamo i vertici che sono adiacenti allo stesso vertice in a).

I VETTORI a e b sono di $(n-1)$ elementi. Nel nostro albero avremo:

$a = [0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 4]$

$b = [1\ 4\ 3\ 6\ 7\ 4\ 5]$

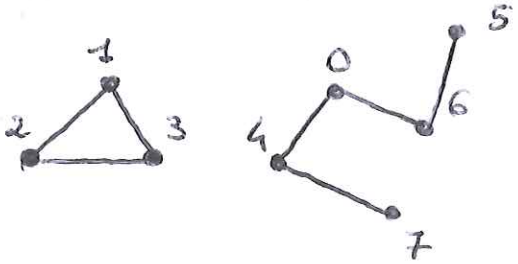
$\forall k : 1 \leq k \leq n-1 : \{a[k], b[k]\}$ è uno SPIGOLO dell'albero!

$$\boxed{\#\text{bit} = 2\cdot(n-1)\cdot\lceil \log_2 n \rceil} \Rightarrow \boxed{\#\text{alberi} \leq 2^{2(n-1)\lceil \log_2 n \rceil}}$$

La rappresentazione di un albero è UNIVOCA, tuttavia, si tratta sempre di un MINORE STRETTO, in quanto ci sono alcune coppie di vettori che non identificano un albero:

Per esempio: $a = [1\ 2\ 3\ 0\ 0\ 5\ 7]$

$b = [2\ 3\ 1\ 4\ 6\ 6\ 4]$ $\longrightarrow$



* In questo caso abbiamo omesso ORD. LESSICOGRAFICO!

(3) FATHER CODE :

Scegliamo un VERTICE RADICE; assumiamo che sia lo 0.

*NOTIAMO CHE: ogni ~~sp~~ vertice, tranne la radice 0, ha un vertice padre e uno spigolo che lo collega al padre!

Utilizziamo la LISTA DEGLI SPIGOLI, ma nel vettore a memorizziamo ordinatamente tutti i vertici e nel vettore b il corrispondente padre; cioè: $\forall i : 1 \leq i \leq (n-1) \longrightarrow a[i] = i$ e $b[i] =$ PADRE di i.

Dunque, essendo banalmente "a" già noto, possiamo memorizzare solo il vettore dei padri b, che va sotto il nome di FATHER CODE:

padre di 1 ...

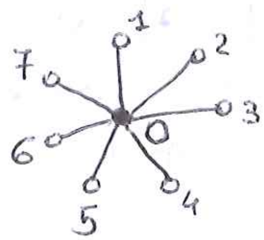
$$b = [0\ 4\ 1\ 0\ 4\ 1\ 1]$$

$$\boxed{\#\,\text{bit} = (n-1)\cdot\lceil \log_2 n \rceil} \Longrightarrow \boxed{\#\,\text{alberi} \leq 2^{(n-1)\lceil \log_2 n \rceil}}$$

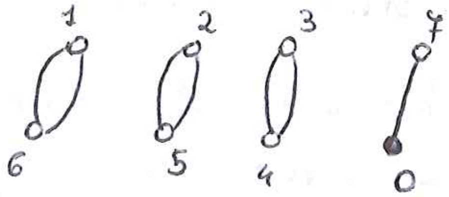
Per esempio:

$[0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6] \longrightarrow$

$[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \longrightarrow$



Ma: $[6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0] \longrightarrow$



Abbiamo ancora che la rappresentazione di un albero è univoca, ma ci sono ancora CODICI che NON RAPPRESENTANO ALBERI!

$\longrightarrow$ È ancora un MINORE STRETTO!

(4) PRÜFER CODE :

È un'evoluzione del Father Code che però:

- ordina gli spigoli in modo diverso;
- ricava l'ordinamento sfruttando la GROWING TREE PROCEDURE per "smontare" l'albero nel seguente modo:

  si dà PRIORITÀ alle FOGLIE con indice più basso, ma NON si rimuove mai lo 0!

Nel nostro esempio, rimuoviamo i vertici in quest'ordine: 2, 3, 5, 4, 6, 7, 1 fino a rimanere con l'albero composto solo da 0.

La procedura determina anche un'ORDINAMENTO DEGLI SPIGOLI che nel caso precedente è: 24, 31, 54, 40, 61, 71, 10.

Vediamo le liste degli spigoli, stando attenti a mettere i FIGLI in a ed i PADRI in b:

$$a = [2\ 3\ 5\ 4\ 6\ 7\ 1]$$

$$b = [4\ 1\ 4\ 0\ 1\ 1\ 0]$$

* Osservare che $b[n-1] = 0$ SEMPRE $\longrightarrow$ NON serve MEMORIZZARLO

È anche inutile memorizzare il vettore a che può essere induttivamente ricostruito da b $\longrightarrow$ BASTANO $(n-2)$ ELEMENTI!

Le osservazioni chiavi sono 2:

(1) in ogni albero un vertice è FOGLIA oppure PADRE;

(2) per $1 \leq h \leq n-1$, il sottovettore $[b[h], b[h+1], \dots, b[n-1]]$ contiene tutti e soli i vertici che sono PADRI per l'albero T_h.

Quindi:

$$b' = [4\ 1\ 4\ 0\ 1\ 1] \longrightarrow \text{PRÜFER CODE}$$

$$\boxed{\#\text{bit} = (n-2) \cdot \lceil \log_2 n \rceil} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\#\text{alberi} = 2^{(n-2)\lceil \log_2 n \rceil} \underset{\text{se } n \text{ pari}}{=} n^{(n-2)}}$$

→) [Il PRÜFER CODE è quindi un vettore di dimensione $n-2$, in cui ogni elemento è un intero compreso tra 0 ed $n-1$.]

Ovviamente, ad ogni albero $T(V,E)$ possiamo associare in modo UNIVOCO un Prüfer Code.

←) E' possibile stavolta dimostrare il VICEVERSA!
[Ad ogni vettore di dimensione $n-2$, in cui ogni elemento sia un intero tra 0 ed $n-1$ possiamo associare in modo univoco un ALBERO con insieme dei vertici $\{0, 1, \dots, n-2, n-1\}$.]

Questi 2 fatti insieme implicano il TEOREMA DI CAYLEY.

DAL CODICE ALL'ALBERO:

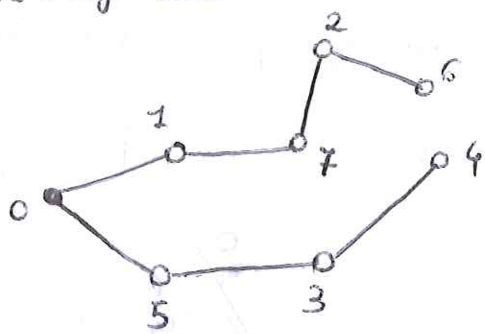
Prendiamo 6 numeri a caso compresi tra 0 e 7: $\boxed{3\ 5\ 0\ 2\ 7\ 1}$.

Al massimo ho 7 PADRI diversi, ma i vertici sono $n=8$; c'è sempre ALMENO 1 FOGLIA!

In questo caso, le foglie sono 4 e 6 (il Prüfer Code è l'insieme dei padri), e scelgo quella con INDICE MINORE:

$a = 4\ 3\ 5\ 6\ 2\ 7\ 1$

$b = 3\ 5\ 0\ 2\ 7\ 1\ 0$ →



- CONCLUSIONI IMPORTANTI:

(1) Il MINIMO NUMERO DI BIT per memorizzare un albero di n vertici è $(n-2)\lceil \log_2 n \rceil$ e non è possibile fare di meglio;

(2) Utilizzando il codice di Prüfer è possibile GENERARE ALBERI in modo RANDOM con la stessa PROBABILITA'; ciò sarebbe molto difficile senza utilizzare il Prüfer Code.

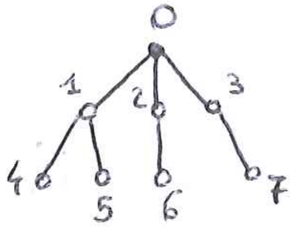
Es. 15, COMPITO 2:

Si consideri un albero con vertici $\{0, 1, \dots, 7\}$ tale che il vertice 0 abbia grado 7. Qual è il suo Prüfer Code?

$n = 8$; se $\deg(0) = 7 = n-1$, l'albero è una <u>stella</u> e tutti gli altri vertici hanno 0 come padre $\Rightarrow$ Prüfer code = $\boxed{000000}$

Es. 16, COMPITO 2:

Si consideri l'albero con vertici $\{0, 1, \dots, 7\}$ e spigoli $\{01, 02, 03, 14, 15, 26, 37\}$. Qual è il suo Prüfer code?



$\Rightarrow$ $a = [4\ 5\ 1\ 6\ 2\ 7\ 3]$

$b = [1\ 1\ 0\ 2\ 0\ 3\ 0]$

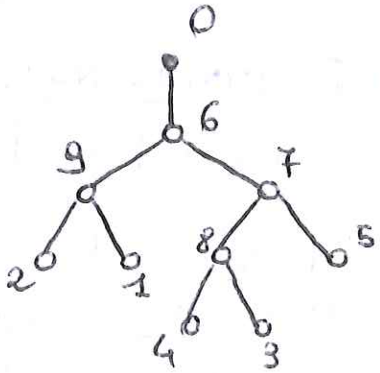
Quindi il suo Prüfer code è: $\boxed{110203}$

Es. 17, COMPITO 2:

Quali sono gli spigoli dell'albero con 10 vertici e Prüfer code 99887766?

$b = [9\ 9\ 8\ 8\ 7\ 7\ 6\ 6\ 0] \Rightarrow$

$\Rightarrow a = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 8\ 7\ 9\ 6] \longrightarrow$



$\Rightarrow$ L'insieme degli spigoli è: $\boxed{\{06, 67, 69, 75, 78, 83, 84, 91, 92\}}$