2. CONTEGGIO

• REGOLA DELLA SOMMA:

Dati due insiemi A e B a intersezione nulla ($A \cap B = \emptyset$), se si ~~vuole~~ vuole scegliere un unico elemento dei due insiemi, lo si può fare in $|A| + |B|$ modi diversi. In generale:

> Se un processo richiede di svolgere ALTERNATIVAMENTE p compiti, ognuno dei quali può essere svolto in m_i modi diversi, con $1 \leq i \leq p$, allora ci sono $\sum_{i=1}^{p} m_i$ modi diversi di svolgere il processo.

• REGOLA DEL PRODOTTO:

Siano A e B sempre due insiemi disgiunti ($A \cap B = \emptyset$). Se si vuole scegliere un elemento da OGNI insieme, lo si può fare in $|A| \cdot |B|$ modi diversi.

In generale:

> se un processo richiede di svolgere TUTTI i p compiti in sequenza, ciascuno dei quali può essere svolto in m_i modi diversi, con $1 \leq i \leq p$, allora: ci sono $\prod_{i=1}^{p} m_i$ modi diversi di svolgere il processo.

• APPLICAZIONI REGOLA DEL PRODOTTO:

1) Quante sono le diverse stringhe di 9 bit? $\boxed{2^9}$

2) Un'etichetta è formata da un codice di 6 caratteri: i primi 3 sono caratteri dell'alfabeto italiano (21 lettere, senza distinzione tra maiuscole e minuscole); gli altri 3 caratteri sono cifre comprese tra 0 e 9.
   Quanti pacchi con diversi codici riesco ad etichettare? $\boxed{21^3 \cdot 10^3}$

3) INSIEME DELLE PARTI Quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme S?
   Sono $\boxed{2^{|S|}}$.

PROOF: C'è una biezione tra i sottoinsiemi di S e le STRINGHE di $|S|$ BIT:
lo 0/1 in i-esima posizione rappresenta il fatto che prendo/non prendo l'i-esimo elemento di S nel sottoinsieme considerato.

(4) Quante sono le stringhe di n bit con uno 0 in terza posizione?
Sono $\boxed{2^9}$. Posso far vedere che c'è una corrispondenza 1 ad 1 tra l'insieme di interesse e l'insieme delle stringhe con 9 bit,

→ Tolgo lo 0 in 3ª posizione e la trasformo in una stringa con 9 bit

← Aggiungo uno 0 in 3ª posizione e trasformo qualsiasi stringa di 9 bit in una del mio insieme.

(5) Password di almeno 6 e massimo 7 caratteri alfanumerici, ma il primo deve essere un numero:

$$P = 10 \cdot 31^5 + 10 \cdot 31^6 = \boxed{10 \cdot (31^5 + 31^6)}$$

- INSIEMI CON INTERSEZIONE:

(6) Sia A l'insieme dei medici e D l'insieme del personale di nazionalità non italiana. Si vuole scegliere un rappresentante che sia un medico OPPURE sia di nazionalità non italiana. Quanti modi ci sono di sceglierlo?

$$\boxed{|A| + |D| - |A \cap D|}$$

* Il punto è che è lecito che il rappresentante sia medico E anche di nazionalità non italiana. In tal caso, appartiene sia ad A che a D, quindi, facendo solo $|A| + |D|$, lo stiamo contando 2 volte! Per rimuovere queste doppie occorrenze è necessario sottrarre $|A \cap D|$.

(7) Quante sono le stringhe con 8 bit in cui il terzo bit è uno 0 e/o l'ottavo un 1?
- Stringhe con 3° bit fissato: 2^7
- Stringhe con 8° bit fissato: 2^7
- Stringhe con 3° e 8° bit fissato: 2^6

Quindi, per quanto visto in precedenza: $\boxed{2^7 + 2^7 - 2^6}$

- **PIGEONHOLE PRINCIPLE:**

Se $n+1$ oggetti devono essere alloggiati in n scatole, almeno 2 oggetti termineranno nella stessa scatola.

- **GENERALIZED PIGEONHOLE PRINCIPLE:**

Se n oggetti devono essere collocati in K scatole ($K<n$), una scatola conterrà almeno $\left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil$ oggetti.

PROOF: Per ASSURDO, supponiamo che possiamo allocare gli n oggetti in K scatole, mettendo in ciascuna scatola al più $\left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil - 1$ oggetti.

Poiché vale sempre che: $\left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil < \frac{n}{K} + 1$

$$n \underset{\text{per assurdo}}{\leq} \left(\left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil - 1\right) \cdot K < \left(\frac{n}{K} + \cancel{1} - \cancel{1}\right) \cdot K = n \Rightarrow n < n$$

↳ ASSURDO!

∎

- **COLORAZIONE e RETTANGOLI:**

Consideriamo i punti dell'insieme $\mathbb{N}^2$, cioè punti a valori interi non negativi, e supponiamo di volerli colorare tutti in maniera arbitraria scegliendo tra K colori diversi, con K numero finito.

* Qualunque sia la colorazione, esisteranno sempre 4 punti colorati allo stesso modo e disposti in modo da formare un RETTANGOLO!

PROOF:

Consideriamo la sequenza sulla prima riga, ad ordinata zero, di lunghezza $K+1$: $S_0 = \{(0,0), (1,0), (2,0), \dots, (K,0)\}$. La sequenza ha lunghezza $K+1$, mentre i colori sono K! Per il Pigeonhole Principle, esistono sicuramente 2 punti tra questi che hanno lo stesso colore!

Ovviamente il discorso vale per ogni sequenza lunga $K+1$ ad ogni ordinata intera j con $j \geq 0$, del tipo $S_j = \{(0,j), (1,j), \dots, (K,j)\}$.

Ma quante sono le diverse sequenze di $K+1$ elementi, ognuno colorabile con 1 tra K colori diversi?

Per la REGOLA DEL PRODOTTO, sono K^{K+1}!

→ PUNTO FONDAMENTALE : Se una sequenza si ripete, sono sicuro di avere un rettangolo!

Ma, per il PIGEONHOLE PRINCIPLE, dopo $K^{K+1}+1$ sequenze, almeno una si ripeterà $\Rightarrow$ ESISTE SEMPRE UN RETTANGOLO! ∎

• PARADOSSO DEL COMPLEANNO :

Qual è la PROBABILITÀ che tra n persone ce ne siano almeno 2 che hanno il compleanno lo stesso giorno?

* Prendendo $n=23$, la probabilità è "sorprendentemente" maggiore di $\frac{1}{2}$!

PROOF :

- La probabilità che 2 persone siano nate lo stesso giorno dell'anno, escludendo anni bisestili è $\frac{1}{365} \Rightarrow$ la probabilità che siano nate in giorni diversi è $\frac{364}{365}$.
- La probabilità che 3 persone NON siano nate lo stesso giorno è: $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$, cioè la probabilità che 2 siano nate in giorni diversi per la probabilità che la terza sia nata in un giorno diverso dalle altre 2.
- Iterando, per i persone nate in giorni diversi, si ha che la la probabilità è: $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-i+1}{365} \leq \frac{1}{2}$ per $i \geq 23$! ∎

• PERMUTAZIONE :

Dato un insieme X, una PERMUTAZIONE è una disposizione ORDINATA di tutti gli elementi di X.

Quante sono le possibili permutazioni di X? Ne sono $\boxed{|X|!}$

• R-PERMUTAZIONE :

Sia X un insieme di n elementi. Sia r tale che: $1 \leq r \leq |X| = n$.

Una r-permutazione di X è una disposizione ordinata di r elementi di X.

Quante sono le possibili r-permutazioni di X? Ne sono $\boxed{\frac{n!}{(n-r)!}} = P(n,r)$

PROOF: Applicando la REGOLA DEL PRODOTTO, il 1° elemento può essere scelto in n modi, il 2° in $(n-1)$, fino all'r-esimo in $(n-r+1)$ modi:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$ ∎

• ESEMPIO: Quanti sono i possibili podi di una gara di corsa con 8 atleti?

Conta l'ORDINE! $P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \boxed{336}$ ✓

• ESEMPIO: Consideriamo K_m, il grafo completo con m vertici. Siano $u, v \in V(K_m)$.
Quanti sono i possibili PATH da u a v che usano ESATTAMENTE r spigoli, dove $1 \leq r \leq m-1$?

* Due path sono diversi se esiste almeno 1 spigolo che appartiene ad un path e non all'altro!

Contare i cammini, equivale a scegliere ORDINATAMENTE $r-1$ vertici tra gli $m-2$ di K_m, esclusi u e v che sono già fissati.

Quindi, la risposta è $\boxed{P(m-2, r-1)} = \frac{(m-2)!}{(m-2-r+1)!}$ ✓

• R-COMBINAZIONE:

Dato un insieme X, una r-combinazione, con $r \leq |X|$, è un qualunque SOTTOINSIEME non ordinato di r elementi di X.

Indichiamo con $C(m,r)$ il numero di r-combinazioni di un insieme con m elementi.

$$\boxed{C(m,r) = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-r+1)}{r!} = \frac{m!}{(m-r)! \cdot r!}}$$

Poiché $P(m,r) = \frac{m!}{(m-r)!}$ sono le r-permutazioni ORDINATE; ma, poiché nei sottoinsiemi NON conta l'ordine, dobbiamo dividere per il numero di possibili ordinamenti (permutazioni) di un sottoinsieme di r elementi, ovvero $r!$.

$$C(m,r) = \frac{P(m,r)}{r!} = \frac{m!}{(m-r)!\, r!}$$

• $C(m,r) = \binom{m}{r}$:= COEFFICIENTE BINOMIALE

• PROPRIETÀ DELLE COMBINAZIONI:

• $C(m,r) = C(m, m-r)$;
è ovvio, perché il numero di diverse scelte di r elementi da un insieme di m è uguale al numero di diverse scelte degli $(m-r)$ elementi da scartare;

- K_n : $|E(K_n)| = \dfrac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2} = C(n,2)$

- IDENTITÀ DI PASCAL : $\boxed{C(n+1,r) = C(n,r) + C(n,r-1)}$

PROOF: Sia X un insieme, tale che $|X| = n+1$. Sia $x \in X$.

Ci sono 2 possibilità se devo scegliere un sottoinsieme di r elementi di X:

(1) $x \in$ sottoinsieme di r elementi di X;

(2) $x \notin$ sottoinsieme di r elementi di X.

CASO (1) : mi rimangono da scegliere $r-1$ elementi da $X \setminus \{x\}$, di cardinalità n $\rightarrow$ ho $C(n,r-1)$ modi di farlo;

CASO (2) : devo scegliere ancora r elementi, ma nell'insieme $X \setminus \{x\}$ di cardinalità n $\rightarrow$ ho $C(n,r)$ modi di farlo.

Per la REGOLA DELLA SOMMA : $\underline{C(n+1,r) = C(n,r) + C(n,r-1)}$! ∎

- $C(n,n) = 1$;
- $C(n,0) = 1$;
- $C(0,0) = 1$.

- TRIANGOLO DI PASCAL (O DI TARTAGLIA):

L'identità di Pascal e le 3 precedenti relazioni, ci permettono di calcolare induttivamente il valore di ogni coefficiente binomiale $C(n,k)$.
I valori "all'interno" del triangolo sono calcolati utilizzando l'identità di Pascal.

$$C(0,0)=1$$

$$C(1,0)=1 \qquad C(1,1)=1$$

$$C(2,0)=1 \qquad C(2,1)=2 \qquad C(2,2)=1$$

$$C(3,0)=1 \qquad C(3,1)=3 \qquad C(3,2)=3 \qquad C(3,3)=1$$

- Vale la seguente relazione: $\boxed{\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

Poiché $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)$ equivale a contare i sottoinsiemi di cardinalità 0, di cardinalità 1, fino a cardinalità n. Cioè tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme di n elementi, che sappiamo essere 2^n.

- Consideriamo un insieme $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di n vertici di un grafo. Quanti sono i diversi grafi G con $V(G) = V$?

Consideriamo l'insieme $E(K_n)$ degli spigoli del grafo completo con n vertici: sappiamo che $|E(K_n)| = C(n,2) = \binom{n}{2}$. Osserviamo che c'è una corrispondenza 1 ad 1 tra i grafi con $V(G) = V$ e i <u>SOTTOINSIEMI di $E(K_n)$</u>, in quanto ogni grafo corrisponde a scegliere un sottoinsieme di spigoli di $E(K_n)$.
Quindi, è la cardinalità dell'INSIEME DELLE PARTI di un insieme con $|E(K_n)| = C(n,2) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ elementi, cioè: $\boxed{2^{C(n,2)} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ ∎

- <u>TEOREMA BINOMIALE (BINOMIO DI NEWTON):</u>

Vale: $\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$

Osserviamo che $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)}_{n \text{ volte}}$, sviluppando i prodotti, avremo la somma di termini del tipo $x^{n-k} y^k$, con $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.
Per calcolare il NUMERO DI OCCORRENZE del singolo termine $x^{n-k} y^k$, osserviamo che questo numero è pari al numero di modi di scegliere k volte il termine y dagli n fattori $(x+y)$; che è anche uguale al numero di modi di scegliere $(n-k)$ volte il termine x dagli n fattori $(x+y)$.
Quindi, sarà $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. ∎

L'affermazione giustifica il nome "COEFFICIENTE BINOMIALE" per $C(n,k)$!

- Per un qualunque insieme X, il numero dei sottoinsiemi di X a cardinalità pari è uguale al numero dei sottoinsiemi di X a cardinalità dispari.

In altre parole: $$\sum_{0 \le k \le n}^{k \text{ pari}} C(n,k) - \sum_{0 \le k \le n}^{k \text{ dispari}} C(n,k) = 0$$

PROOF:

$$\sum_{0 \le k \le n}^{k \text{ pari}} C(n,k) - \sum_{0 \le k \le n}^{k \text{ dispari}} C(n,k) = \sum_{0 \le k \le n}^{k \text{ pari}} C(n,k) \cdot (-1)^k + \sum_{0 \le k \le n}^{k \text{ dispari}} C(n,k) \cdot (-1)^k =$$

$$= \sum_{0 \le k \le n} C(n,k) \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \cdot (-1)^k (1)^{n-k} \underset{\text{Binomio di Newton}}{=} (-1+1)^n = 0 \quad \blacksquare$$

- CONTEGGI PIÙ COMPLESSI:

(1) Supponiamo di avere n regali da distribuire tra k bambini e di sapere che ogni bambino i, $1 \le i \le k$, deve ricevere un numero assegnato di regali n_i; ovviamente: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

In quanti modi diversi possiamo distribuire i regali tra i bambini?

* **1° MODO**: $$\underbrace{\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k}}_{\binom{n_k}{n_k}=1}}_{k \text{ termini}}$$

* **2° MODO**: disponiamo i regali in fila, poi il bambino 1 prende i primi n_1, il bambino 2 prende da n_1+1 ad n_2 e così via.

Attenzione però: fissata una disposizione, tutte le disposizioni che si ottengono permutando le posizioni dei regali assegnati ad un bambino i NON CAMBIANO LA DISTRIBUZIONE DEI REGALI.

Quindi, applicando la regola del prodotto e considerando che ci sono $n!$ possibili disposizioni, ci sono:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}}$$ modi diversi di distribuire i regali!

È facile verificare che le 2 soluzioni coincidono. ✓

(2) Supponiamo ora di avere n monete e K bambini: ogni bambino **NON** ha un numero fissato di monete da ricevere, ma ogni bambino deve ricevere almeno 1 moneta (sono indistinguibili).

In quanti modi diversi possiamo distribuire le monete tra i bambini?

Una volta decise le monete $m_1, \ldots, m_K$ da assegnare ad ogni bambino, disponiamo le monete in fila e posizioniamo <u>K+1 SEGNALINI</u>:

- 1° segnalino prima della prima moneta;
- 2° segnalino dopo m_1 monete, il 3° dopo $m_1 + m_2$, e così via;
- il $(K+1)$-esimo lo mettiamo DOPO l'ultima moneta (K-esimo dopo $\sum_{i=1}^{K-1} m_i$).

Il generico bambino i prenderà le monete tra l'i-esimo e l'$(i+1)$-esimo segnalino. Ora, ci siamo ridotti al problema di <u>CONTARE I DIVERSI MODI DI DISPORRE I SEGNALINI</u>!

- Il 1° e l'ultimo sono fissati → ne rimangono $K-1$
- I segnalini non possono sovrapporsi, poiché dobbiamo dare almeno 1 moneta per bambino → ultima posizione disponibile è dopo la moneta $n-1$.

Modi per collocare $(K-1)$ segnalini in $(n-1)$ posizioni? $\boxed{C(n-1, K-1) = \binom{n-1}{K-1}}$

(3) E se rimuovessimo il vincolo di almeno 1 moneta per bambino? Quanti sarebbero i modi di distribuire le monete tra K bambini?

Si può procedere nel seguente modo:

facciamoci prestare una moneta da ogni bambino, così da averne <u>$n+K$</u>.

A questo punto, <u>manteniamo il vincolo</u> di almeno 1 moneta per bambino!

Sfruttando il risultato precedente, la risposta è:

$$\boxed{C(n+K-1, K-1) = \binom{n+K-1}{K-1}}$$

modi diversi di distribuire le monete!

- Es. 1, COMPITO 3:

Quanti sono i polindromi di lunghezza n? (alfabeto italiano ed includere anche stringhe di senso non compiuto).

- Se n pari: $21^{n/2}$
- Se n dispari: $21^{n/2} \cdot 21 = 21^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

$\Rightarrow \boxed{21^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

✓

- Es. 2, COMPITO 3:

Un postino deve ~~fis~~ consegnare la posta in 7 città. Quella di partenza è fissata. Quanti sono i modi possibili di visitare le città?

L'ORDINE conta; $P(6,6) = \boxed{6!}$

- Es. 3, COMPITO 3:

Si determini il coefficiente del termine $x^{13} y^{17}$ nell'espansione di $(4x-5y)^{30}$.

$$(4x-5y)^{30} = [4x+(-5y)]^{30} = \sum_{i=0}^{30} \binom{30}{i} \cdot (4x)^{30-i} \cdot (-5y)^{i}$$

Per $i=17$, otteniamo: $\binom{30}{17} \cdot 4^{13} \cdot (-5)^{17} = \boxed{-\frac{30!}{17! \cdot 13!} \cdot 4^{13} \cdot 5^{17}}$

- Es. 4, COMPITO 3:

Ogni targa automobilistica è formata da una sequenza "XX YYY XX", dove "X" corrisponde ad una lettera dell'alfabeto italiano ed "Y" ad una cifra.

- Quante sono le possibili targhe? $\boxed{21^4 \cdot 10^3}$
- Quante quelle che terminano per "V"? $\boxed{21^3 \cdot 10^3}$
- Quante quelle che contengono 3 cifre uguali? $\boxed{21^4 \cdot 10}$

Per la REGOLA DEL PRODOTTO

✓

- Es. 5, COMPITO 3:

In una classe di 150 studenti ci saranno diversi studenti il cui cognome inizia con una stessa lettera. Volete valutare la lettera che è più frequentemente la lettera iniziale dei cognomi: qual è il numero minimo di cognomi che inizia con la lettera più frequente?

Per il GENERALIZED PIGEONHOLE PRINCIPLE è $\left\lceil \frac{150}{21} \right\rceil = \boxed{8}$

✓

Es. 6, COMPITO 3:

Quanti sono i possibili cognomi di 7 lettere (alfabeto italiano) che iniziano con la lettera "A" oppure finiscono in "INI"? Si includono anche le stringhe impronunciabili, e.g. "ASRDINI".

- cognomi che iniziano per "A": $\underline{21}^6$;
- cognomi che finiscono in "INI": $\underline{21}^4$;
- cognomi che iniziano in "A" e terminano in "INI" : $\underline{21}^3$

$\Rightarrow \boxed{21^6 + 21^4 - 21^3}$

✓

Es. 7, COMPITO 3:

Un gruppo di persone è formato da n uomini ed n donne. Quanti modi diversi ci sono per disporre queste persone in fila in modo tale che uomini e donne siano alternati nella fila?

- disposizioni uomini = $n!$
- disposizioni donne = $n!$
- si può iniziare con un uomo o una donna = 2 modi

REGOLA DEL PRODOTTO

$\boxed{2 \cdot n! \cdot n!}$

✓

Es. 8, COMPITO 3:

Si consideri $K_{7,7}$ il GRAFO BIPARTITO COMPLETO, ovvero il grafo con 14 vertici partizionati in due classi V_1 e V_2, con $|V_1| = |V_2| = 7$ e tali che 2 vertici sono adiacenti se e solo se NON appartengono alla stessa classe, ovvero:

$E(K_{7,7}) = \{\{u,v\} : u \in V_1, v \in V_2\}$. Un MATCHING PERFETTO di $K_{n,n}$ è un sottoinsieme $M \subseteq E(K_{7,7})$ di 7 SPIGOLI, tale che NON esistono due spigoli di M che siano incidenti, ovvero con un estremo in comune.

Quanti sono i diversi matching perfetti di $K_{n,n}$?

Equivale a contare le possibili disposizioni di coppie tra i 2 insiemi $V_1 = \{x_1, \dots, x_7\}$ e $V_2 = \{y_1, \dots, y_7\}$. Ovviamente l'ordine conta. Mantenendo fermi i vertici di V_1 ed assegnando ordinatamente a questi i vertici di V_2, ci si riduce semplicemente a contare le PERMUTAZIONI di V_2, cioè $\boxed{7!}$.

✓

Es. 9, COMPITO 3:

Quanti sottoinsiemi di cardinalità dispari ha un insieme con 10 elementi?

Il numero di sottoinsiemi di cardinalità dispari è uguale a quello dei sottoinsiemi di cardinalità pari, quindi sono la metà del totale:

$$\frac{2^{10}}{2} = \boxed{2^9}$$

✓

Es. 10, COMPITO 3:

Si consideri il grafo K_{10} e siano s e t due suoi vertici. Quanti sono i diversi path da s a t con r spigoli? Quanti sono i diversi PATH da s a t con un qualunque numero di spigoli?

Ad ogni path da s a t con 3 spigoli (s,u,v,t) possiamo associare la coppia ORDINATA (u,v), con $u,v \in V \setminus \{s,t\}$, $u \neq v$. Viceversa, poiché il grafo è completo, a ogni coppia ordinata (u,v), possiamo associare il path da s a t con 3 spigoli s,u,v,t. Il numero di path con 3 spigoli è quindi pari a $\boxed{\binom{8}{2} \cdot 2!}$, poiché conta l'ordine tra le coppie di nodi (u,v).

Analogamente, il numero di path da s a t con r spigoli è, per $1 \leq r \leq 9$, pari a $\binom{8}{r-1}(r-1)! = P(8, r-1)$.

Quindi, il numero di diversi path da s a t con un qualunque numero di spigoli sono:

$$\sum_{r=1}^{9} \binom{8}{r-1}(r-1)! = \boxed{\sum_{r=0}^{8} \binom{8}{r} \cdot r!}$$

✓

Es. 11, COMPITO 3:

Cinque amici vogliono giocare al "Mercante in Fiera". C'è un mazzo di 40 carte e ogni carta del mazzo viene comprata da un giocatore. I giocatori hanno a disposizione rispettivamente 3, 5, 7, 15 e 10 euro e hanno stabilito che ogni carta costa 1 euro. Quanti sono i diversi modi di distribuire le 40 carte tra i giocatori?

È uguale al problema dei REGALI e dei bambini.

$m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $m_3 = 7$, $m_4 = 15$, $m_5 = 10$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{5} m_i = 40 = m$

La soluzione è: $\frac{m!}{m_1! \cdots m_5!} = \boxed{\frac{40!}{3! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 15! \cdot 10!}}$

✓

Es. 12, COMPITO 3 :

Vuoi festeggiare il tuo compleanno in un locale e invitare i tuoi 20 amici. Hai acquistato 60 talloncini per free drink (tutti uguali) e li vuoi distribuire tra i tuoi amici. In quanti modi diversi puoi distribuire i 60 talloncini tra i tuoi amici?

È uguale al problema delle MONETE e dei bambini SENZA VINCOLO!

Ci facciamo prestare un talloncino da ogni invitato, così ne abbiamo $n+k = 60+20 = 80$, e imponiamo il vincolo che ogni invitato ne abbia almeno 1.

La soluzione è $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{79}{19} = \boxed{\frac{79!}{60! \cdot 19!}}$

• SUBSEQUENCE PROBLEM :

È un'applicazione del Pigeonhole Principle.

Per ogni sequenza di n^2+1 numeri interi DIVERSI tra loro, esiste una SOTTOSEQUENZA strettamente crescente o decrescente di $n+1$ elementi

Per esempio, per $n=3$: $10, 3, 13, 7, 8, 4, 2, 9, 6, 5$

PROOF : Prendiamo la sequenza di n^2+1 elementi: $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$.

$\forall k \in \{1, 2, \dots, n^2+1\}$ indichiamo con:

- s_k := lunghezza della max sottosequenza strettamente DECRESCENTE che inizia in a_k;
- d_k := lunghezza della max sottosequenza strettamente CRESCENTE che inizia in a_k;

Se per ogni k valuto la coppia (s_k, d_k), devo dimostrare che esiste almeno una coppia in cui $s_k \geq n+1$ oppure $d_k \geq n+1$.

PER ASSURDO, ammettiamo che ciò non sia vero $\Rightarrow \forall i : 1 \leq s_i \leq n \land 1 \leq d_i \leq n$

$\Rightarrow$ Quindi, per la regola del prodotto, le diverse coppie (s_i, d_i) sono n^2!

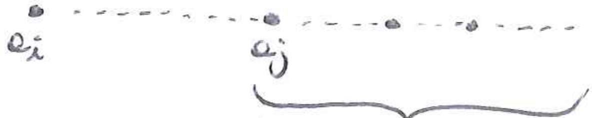
Per il PIGEONHOLE PRINCIPLE : $\exists i, j \in \{1, \dots, n^2+1\} : i \neq j \land (s_i, d_i) = (s_j, d_j)$.

Ovvero, a_i e a_j sono tali che : $s_i = s_j$ e $d_i = d_j$.

Ma, per IPOTESI, i numeri sono tutti DIVERSI $\Rightarrow a_i \neq a_j$.

Supponiamo, senza perdita di generalità, che $i < j$. Abbiamo 2 casi:

- $a_i < a_j$:



sottosequenza strettamente CRESCENTE di d_j = di elementi

Ma, $a_i < a_j \Rightarrow$ Posso considerare la sottosequenza formata da a_i più la sottosequenza di lunghezza d_j che inizia in a_j $\Rightarrow d_i = d_j + 1 \neq d_j \rightarrow \lightning$ ASSURDO!

- $a_i > a_j$: Il ragionamento è analogo e si ottiene $s_i > s_j \longrightarrow \lightning$ ASSURDO!

$\Rightarrow$ Esiste una sottosequenza strettamente crescente o decrescente formata da $n+1$ elementi!

$\blacksquare$

- ESERCIZIO DA COMPITO:

GRAFO BIPARTITO COMPLETO generico $K_{m,n}$. Sia $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$.

Quanti sono i diversi grafi bipartiti completi $K_{m,n}$ tali che $V(K_{m,n}) = V$?

Bisogna vedere le diverse combinazioni di vertici (sottoinsiemi), stando attenti al fatto che stabilire un insieme di k vertici, equivale anche a stabilire il secondo sottoinsieme di $6-k$ vertici.

Ogni sottoinsieme è contato 2 volte, quindi dividiamo per 2!

$$\sum_{i=0}^{6} C(6,i) = 2^6 \text{, ma DIVISO } 2 : \quad \frac{2^6}{2} = \boxed{2^5}$$

Alternativamente:

$$C(6,0) + C(6,1) + C(6,2) + \underbrace{\frac{C(6,3)}{2}}_{} = 1 + 6 + 15 + 10 = 32 = \boxed{2^5}$$

Attenzione al problema di SIMMETRIA

Il sottoinsieme $\{v_1, v_2, v_3\}$, mi individua anche $\{v_4, v_5, v_6\}$ e sto contando entrambi 2 volte!