TRASFORMATA DI FOURIER

Dato un segnale $x(t)$, la sua Trasformata di Fourier nel dominio della frequenza è:

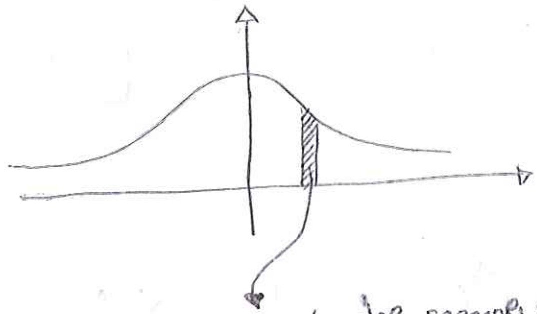
$$\boxed{X(f) = \int x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

$x(t)$ è un qualunque segnale, non per forza periodico; anche f è una FREQUENZA QUALSIASI, non per forza quella delle armoniche $\left(f = \frac{2\pi k}{T_0}\right)$!

* $X(f)$ ci dà il CONTENUTO FREQUENZIALE del segnale!

- **ANTITRASFORMATA**:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t}\, df}$$



Generica componente del segnale:
$X(f)\, e^{j2\pi f t} df$

Condizione sufficiente, ma non necessaria: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt$ è finito (ASSOLUTA INTEGRABILITÀ)

* Le Condizioni di Dirichlet valgono per tutti i segnali fisici, quindi sono tutti sviluppabili tramite Trasformata di Fourier!

- **Proprietà di DUALITÀ**:

Data una coppia $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, posso trovare un'altra COPPIA TEMPO - FREQUENZA, tale che:

$$\boxed{X(-f) \longleftrightarrow X(t)}$$

In pratica:

- $F[X(t)] = X(-f)$!!!

- **PROPRIETÀ:**

(1) SCALATURA:

$$\boxed{F[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)}$$

(2) INVERSIONE DI SEGNO:

$$\boxed{F[x(-t)] = X(-f)}$$

(3) TRASLAZIONE NEL TEMPO:

$$F[x(t-t_0)] = \int x(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \overset{t' = t-t_0}{=} \int x(t')\, e^{-j2\pi f (t'+t_0)}\, dt' =$$

$$= e^{-j2\pi f t_0} \int x(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt' = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Quindi:

$$\boxed{F[x(t-t_0)] = X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}}$$

(4) TRASLAZIONE IN FREQUENZA:

$$F^{-1}[X(f-f_0)] = \int X(f-f_0)\, e^{j2\pi f t}\, df \overset{f' = f-f_0}{=} \int X(f')\, e^{j2\pi t (f'+f_0)}\, df' =$$

$$= e^{j2\pi f_0 t} \cdot x(t)$$

Quindi:

$$\boxed{F[x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}] = X(f-f_0)}$$

(5) DERIVAZIONE NEL TEMPO:

di solito vale zero

Se esiste $\frac{dx(t)}{dt}$:

$$F\left[\frac{d(x(t))}{dt}\right] = \int \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi f t}\, dt = x(t)\, e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int x(t) \cdot (-j2\pi f)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int x(t) \cdot j2\pi f \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = j2\pi f\, X(f)$$

Quindi:

$$\boxed{F\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j2\pi f \cdot X(f)}$$

(6) Trasformata di un Integrale nel Tempo:

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(u)\,du\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t} x(u)\,du \cdot e^{-j2\pi f t}\,dt \;\overset{\text{per parti}}{=}$$

$$\left.\frac{\int_{-\infty}^{t} x(u)\,du \cdot e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-\infty}^{+\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)\cdot e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f}\,dt}_{\frac{X(f)}{j2\pi f}}$$

AREA di $x(t)$

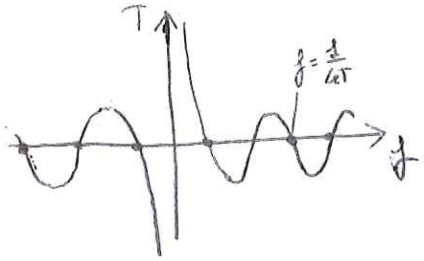
Se considero $\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\,du = A$, ottengo: $\left.\dfrac{A e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-\infty}^{+\infty}$

sin e cos pari e dispari tolgo il $-$ dall'argomento

Considero:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A\cdot e^{-j2\pi f T}}{-j2\pi f} = \lim_{T\to\infty} \frac{A\cos(2\pi f T)}{-j2\pi f} + \frac{\cancel{j}\,A\sin(2\pi f T)}{-\cancel{j}\,2\pi f}$$

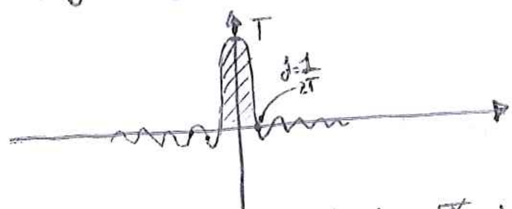
- $\cos(2\pi f T)$ va a zero per $2\pi f T = \pm k\frac{\pi}{2}$, quindi per $f = \frac{1}{4T}$



Ma l'**AREA è NULLA** per $T\to\infty$!
Poiché le oscillazioni si restringono sempre più e le aree si sommano dando contributo zero!

- $\sin(2\pi f T)$ va a zero per $2\pi f T = \pi$, cioè per $f = \frac{1}{2T}$

ma $A\left(\dfrac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f}\right) \approx T$



È simile ad un **IMPULSO** $\Rightarrow$ Area $= \dfrac{b\cdot h}{2} = \cancel{2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}\cancel{T}}\cdot\cancel{T}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ contributo $\dfrac{\delta(f)\cdot A}{2}$

Quindi:

$$\boxed{F\left[\int_{-\infty}^{t} x(u)\,du\right] = \frac{\delta(f)A}{2} + \frac{X(f)}{j2\pi f}}$$

, con A = area di $x(t)$!

(7) Derivata di una Trasformata :

$$F\left[\frac{dX(f)}{df}\right] = \frac{d}{df}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot(-j2\pi t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \ldots$$

$$= -j2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot t \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = F\left[t\cdot x(t)\right]$$

Quindi: $\boxed{F\left[\frac{d^m X(f)}{(-j2\pi)^m\, df^m}\right] = F\left[t^m\cdot x(t)\right]}$

• Esempi:

(1) $F\left[e^{-\alpha t}\cdot u(t)\right]$, con $\alpha > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (REALE!).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\cdot u(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t}\, dt = \left.\frac{e^{-(\alpha+j2\pi f)t}}{-(\alpha + j2\pi f)}\right|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Quindi: $\boxed{F\left[e^{-\alpha t}\cdot u(t)\right] = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}}$

Per DUALITÀ:

$$\left[F\left[\frac{1}{\alpha + j2\pi t}\right] = e^{\alpha f}\, u(-f)\right].$$

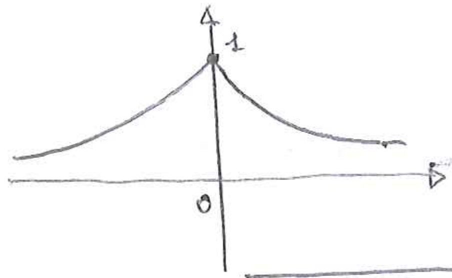
(2) $F\left[e^{\alpha t}\, u(-t)\right]$, $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \left.\frac{e^{(\alpha - j2\pi f)t}}{\alpha - j2\pi f}\right|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\alpha - j2\pi f}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{F\left[e^{\alpha t}\, u(-t)\right] = \frac{1}{\alpha - j2\pi f}}$

Per DUALITÀ:
$$e^{-\alpha f} u(f) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha - j2\pi t}$$

(3) $F\left[e^{-\alpha|t|}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$; $\quad e^{-\alpha|t|} = e^{-\alpha t} \cdot u(t) + e^{\alpha t} \cdot u(-t)$



Quindi: $$F\left[e^{-\alpha|t|}\right] = \frac{1}{\alpha + j2\pi f} + \frac{1}{\alpha - j2\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Quindi: $$\boxed{F\left[e^{-\alpha|t|}\right] = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

Per DUALITÀ:
$$e^{-\alpha|f|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2}$$

(4) $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$:
$$F\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{-j\cancel{2}\pi f T} - e^{+j\cancel{2}\pi f T}}{-j2\pi f} =$$

$$= \underbrace{\frac{e^{j\cancel{2}\pi f T} - e^{-j\cancel{2}\pi f T}}{2j}}_{\sin(\cancel{2}\pi f T)} \cdot \frac{1}{\pi f} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \cdot \mathrm{sinc}(fT)$$

Quindi: $$\boxed{F\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)\right] = T_0 \cdot \mathrm{sinc}(f T_0)}$$

Per DUALITÀ:
$$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right) \longleftrightarrow T_0\, \mathrm{rect}(f T_0) \qquad ?$$

(5) $\delta(t)$:

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1 = 1(f)$$

Quindi: $\boxed{F[\delta(t)] = 1(f)}$ e $\boxed{F[\delta(f)] = 1(t)}$

* Le trasformate della Delta di Dirac sia in frequenza che nel tempo sono la COSTANTE 1!

(6) $u(t)$:

$F[u(t)]$; scrivo $u(t)$ come $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(w)\,dw$ e uso la proprietà della trasformata di un integrale:

$$F[u(t)] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \cdot A(\underbrace{\delta(f)}_{1}) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$$

Quindi:

$$\boxed{F[u(t)] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}}$$

(7) $\text{sign}(t)$:

Scrivo $\text{sign}(t) = 2u(t) - 1$

$$\Rightarrow F[\text{sign}(t)] = F[2u(t) - 1] = \cancel{2} \cdot \left[\frac{1}{j\cancel{2}\pi f} + \frac{\delta(f)}{\cancel{2}}\right] - \delta(f) =$$

$$= \frac{1}{j\pi f} + \cancel{\delta(f)} - \cancel{\delta(f)} = \frac{1}{j\pi f}.$$

Quindi: $\boxed{F[\text{sign}(t)] = \frac{1}{j\pi f}}$; per dualità: $\text{sign}(-f) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi t}$

Quindi: $\boxed{F\left[\frac{1}{t}\right] = -j\pi \,\text{sign}(f)}$ $\longrightarrow$ Trasformata di $\frac{1}{t}$, anche se non è integrabile!

(8) $\cos(2\pi f_0 t)$:

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1(t)\, e^{j2\pi f_0 t} + 1(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$\boxed{F[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}}$$

(9) $\sin(2\pi f_0 t)$:

$$\boxed{F[\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}}$$

(10) $\delta'(t)$:

$$F[\delta'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt \overset{\text{per parti}}{=} \underbrace{\delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,(+j2\pi f)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{=1} \cdot j2\pi f = j2\pi f$$

Quindi : $\boxed{F[\delta'(t)] = j2\pi f}$ Dualità: $\delta'(+f) \longleftrightarrow j2\pi t$

$$\Rightarrow \boxed{F[t] = \frac{\delta'(f)}{j2\pi}}$$ Trasformata di t !

Ma : $\delta'(f) = -\frac{\delta(f)}{f}$ $\Rightarrow$ $\boxed{F[t] = -\frac{\delta(f)}{j2\pi f}}$

• In generale:

$$\boxed{F[t^n] = \frac{\delta^{(n)}(f)}{(-j2\pi)^n}}$$; deriva dalla proprietà per cui :

$$\frac{dX(f)}{(-j2\pi)\, df} \longleftrightarrow t \cdot x(t)$$

• SPETTRO DI FREQUENZA di $x(t)$:

Dall' antitrasformata : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$

Definiamo $X(f) :=$ SPETTRO di frequenza di $x(t)$

• TRASFORMATA DI $C_{xy}(\tau)$:

La FUNZIONE DI CROSS CORRELAZIONE $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot y^*(t)\, dt$, essendo funzione del tempo, avrà la sua Trasformata di Fourier:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[C_{xy}(\tau)\right] = X(f) \cdot Y^*(f)}$$

Dunque, antitrasformando: $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$

E l' ENERGIA : $E_{xy} = C_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, Y^*(f)\, df$

L' AUTOCORRELAZIONE : $C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot x^*(t)\, dt$ ha come trasformata:

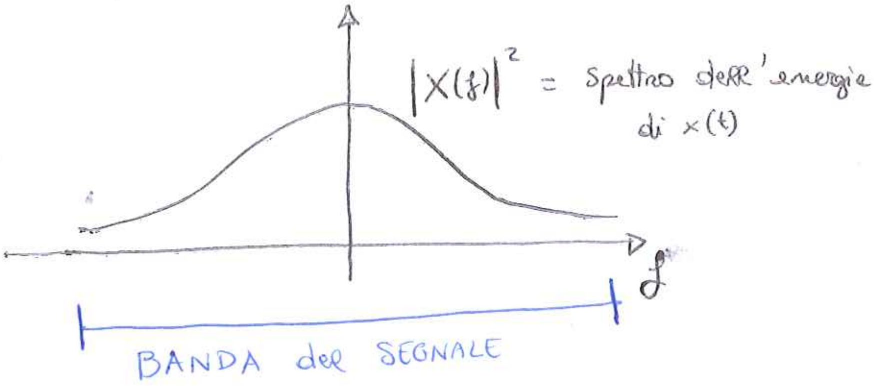
$$\mathcal{F}\left[C_{xx}(\tau)\right] = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2$$

Quindi : $$\left[C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, e^{j2\pi f t}\, df \right]$$

L' ENERGIA DEL SEGNALE è :

$$\boxed{E_{xx} = C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df}$$

* **NOTA**: $|X(f)|^2$ è lo SPETTRO dell' ENERGIA di $x(t)$; mi dà la distribuzione frequenziale dell' energia del segnale (mentre $X(f)$ la dà del segnale stesso!) .



- **BANDA DEL SEGNALE :**

È l'INTERVALLO FREQUENZIALE dov'è concentrata l'ENERGIA del segnale, o parte di esso.

La voce umana ha una banda frequenziale che va da circa 0 Hz a 7 kHz!

- **SPETTRO DI SEGNALI PERIODICI :**

$$x(t) = \sum_k C_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad \text{con } f_0 = \frac{1}{T_0}$$

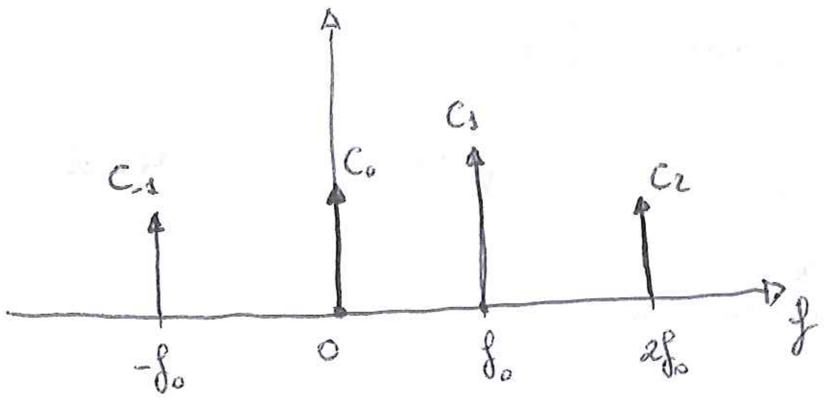
è trasformabile secondo Fourier?

$$F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k C_k e^{j2\pi f_0 k t} \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k C_k e^{-j2\pi(f - f_0 k)t} \, dt =$$

$$= \sum_k C_k \cdot \delta(f - k f_0)$$

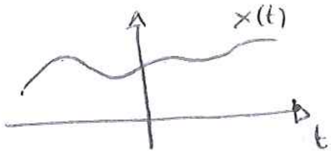
Quindi:

$$\boxed{F[x(t)] = \sum_k C_k \, \delta(f - k f_0)}$$



TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Dato un generico segnale $x(t)$:



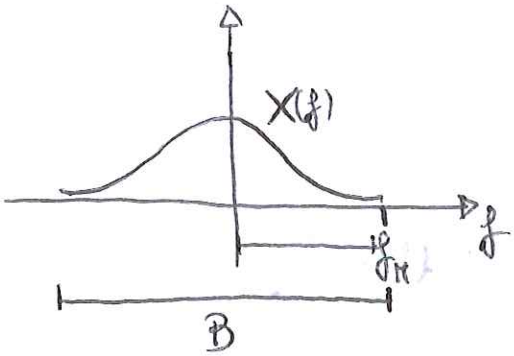
è CONTINUO!

Per trasmetterlo devo trasformarlo in un insieme di CAMPIONI, da rappresentare con numeri binari.

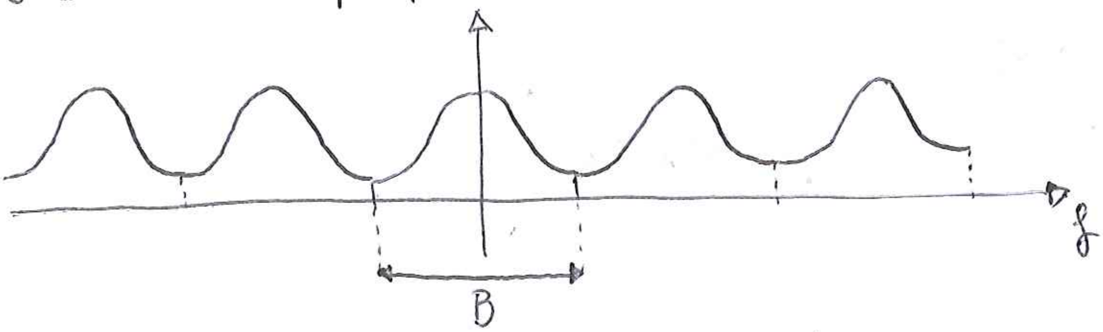
Definiamo: BANDA BASE: la banda frequenziale nell'INTORNO di 0;

BANDA LIMITATA:
- monolatera $[0, f_M]$, con f_M = frequenza massima
- bilatera $B = [-f_M ; f_M] \Rightarrow B = 2f_M$

Dato un segnale $x(t)$ di BANDA BASE e LIMITATA, con spettro $X(f)$:



Periodicizziamo lo spettro $X(f)$ con la banda B, così $x(t)$ è esprimibile come SERIE DI FOURIER e poi prendiamo solo la parte che ci interessa:



$$X(f) = \sum C_k e^{j\frac{2\pi f k}{B}} \quad \text{(stavolta in frequenza)}$$

$$C_k = \frac{1}{B}\int_B X(f)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{B}kf}\,df = \frac{1}{B}\,x\left(-\frac{k}{B}\right)$$

è un'ANTITRASFORMATA!

, ma ~~[illegible]~~ $B = 2f_M$

Sia $\frac{1}{B} = t_c$:= tempo di campionamento

• Esempio: se $f_M = 4\ kHz \Rightarrow B = 2f_M = 8\ kHz \Rightarrow t_c = \frac{1}{B} = \frac{1}{8000\ Hz} = 125\ \mu s$

Dunque, poiché $C_k = \frac{1}{B} \cdot x\left(-\frac{k}{B}\right)$ ho che:

$$\boxed{C_k = t_c \cdot x(-k \cdot t_c)}$$ → Posso definire il segnale a multipli del tempo di campionamento

Quindi: $$X(f) = \sum_k C_k \, e^{j2\pi \frac{kf}{B}} = \sum_k \frac{1}{B} x\left(-\frac{k}{B}\right) e^{j2\pi\frac{kf}{B}}$$

Antitrasformando:

$$x(t) = \int_B \left[\frac{1}{B} \sum_k x(-kt_c)\, e^{j2\pi\frac{kf}{B}} \right] \cdot e^{j2\pi f t}\, df$$

Consideriamo un generico termine della sommatoria:

$$\frac{1}{B}\int_B x(-kt_c)\, e^{j2\pi\frac{kf}{B}} \cdot e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{B} x(-kt_c) \int_B e^{j\left[\frac{2\pi k}{B} + 2\pi t\right] f} df =$$

$$= \frac{1}{B} x(-kt_c) \int_B e^{j2\pi\left[\frac{k}{B} + t\right] f} df = \frac{1}{B} x(-kt_c) \int_B e^{j2\pi\left[kt_c + t\right] f} df =$$

$$= \frac{1}{B} x(-kt_c) \cdot \left. \frac{e^{j2\pi[kt_c+t]f}}{j2\pi[kt_c+t]} \right|_{f=-\frac{B}{2}}^{B/2} =$$

$$= t_c \cdot x(-kt_c) \cdot \frac{e^{j\cancel{2}\pi(kt_c+t)\cdot\frac{B}{\cancel{2}}} - e^{-j\cancel{2}\pi(kt_c+t)\frac{B}{\cancel{2}}}}{2j \cdot \pi(kt_c+t)} =$$

$$= x(-kt_c) \cdot \underbrace{\frac{e^{j\pi\left(\frac{kt_c+t}{t_c}\right)} - e^{-j\pi\left(\frac{kt_c+t}{t_c}\right)}}{2j}}_{\sin\left[\pi\left(\frac{kt_c+t}{t_c}\right)\right]} \cdot \frac{1}{\pi\left(\frac{kt_c+t}{t_c}\right)} =$$

$$= x(-kt_c) \cdot \underbrace{\frac{\sin\left[\pi\left(\frac{kt_c+t}{t_c}\right)\right]}{\pi\left(\frac{kt_c+t}{t_c}\right)}}_{\text{sinc}\left(\frac{t}{t_c}+k\right)} = x(-kt_c) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{t_c}+k\right)$$

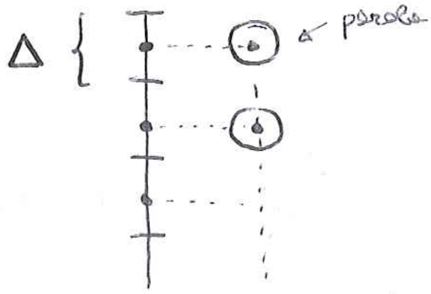
Quindi:

$$\boxed{x(t) = \sum_k x(-kt_c) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{t_c}+k\right)}$$

- DIGITALIZZAZIONE:

Il primo passo per la digitalizzazione è DISCRETIZZARE il segnale nel tempo e CAMPIONARLO.

Ad ogni CAMPIONE, posso far corrispondere una PAROLA di m bit: quindi, con m bit ho 2^m possibili parole:

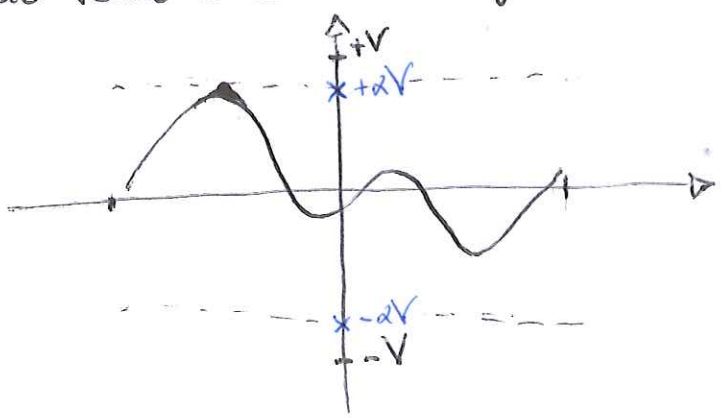


- $\boxed{\Delta = \frac{2V}{2^m}}$, dove V mi indica gli estremi della banda del campione del segnale, cioè da $-V$ a $+V$.

- ERRORE MASSIMO: $\boxed{e_M = \frac{\Delta}{2} = \frac{V}{2^m}}$; è la metà dell'intervallo.

- ERRORE EFFICACE: $\boxed{e_{eff} = \frac{e_M}{\sqrt{2}} = \frac{V}{\sqrt{2} \cdot 2^m}}$

Supponiamo che il valore massimo del segnale sia αV, con $0<\alpha<1$



Dunque abbiamo:

- SEGNALE MASSIMO: $\boxed{S_M = \alpha V}$ e • SEGNALE EFFICACE: $\boxed{S_{eff} = \frac{S_M}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha V}{\sqrt{2}}}$

- RAPPORTO SEGNALE-RUMORE (SNR):

È il RAPPORTO QUADRATICO tra segnale efficace ed errore efficace:

$$\frac{S}{N} = \left(\frac{S_{eff}}{e_{eff}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha \cancel{V}/\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{V}/\cancel{\sqrt{2}}\cdot 2^m}\right)^2 = \left(\alpha \cdot 2^m\right)^2 = \alpha^2 \cdot 2^{2m}$$

In dB: $10\log_{10}(\alpha^2 \cdot 2^{2m}) = 10\log_{10}(\alpha^2) + 10\, m \log_{10}(4) \simeq 10 \log_{10}\alpha^2 + 6m$

Quindi:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{S}{N} &= \alpha^2 \cdot 2^{2m} \\ \frac{S}{N}[dB] &= 10\log_{10}\alpha^2 + 6m \end{aligned}}$$

→ RUMORE DI QUANTIZZAZIONE

* **NOTA**: La parte con α DIPENDE da colui che parla; $6m$ è INDIPENDENTE!

Quando qualcuno parla, devo dare:

$$\underbrace{8000\ Hz}_{\text{Doppio del campionamento } 4KHz} \cdot 8\ bit \times campione = 64 kbit/s$$

MUSICA: orecchio umano $20000\ Hz \Rightarrow 40000\ Hz \cdot 14\ bit/campione = 560\ kbit/s$

Il RUMORE è l'ERRORE DI QUANTIZZAZIONE!

- INVILUPPO COMPLESSO:

SINUSOIDE: $Re\left[\underset{\uparrow\ \text{AMPIEZZA}}{A}\, e^{j(2\pi f_0 t + \underset{\uparrow\ \text{FASE}}{\varphi})}\right] = A\cos(\omega t + \varphi)$, con $\omega = 2\pi f_0$

- Sia $x(t)$ un segnale REALE! $x(t) \in \mathbb{R}$:

La sua Trasformata: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\underbrace{x(t)\cdot \cos(2\pi f t)}_{A(f)} + \underbrace{j\, x(t) \sin(2\pi f t)}_{j B(f)} \Big] dt$$

REALE e PARI in f IMMAGINARIA e DISPARI in f

Antitrasformiamo;

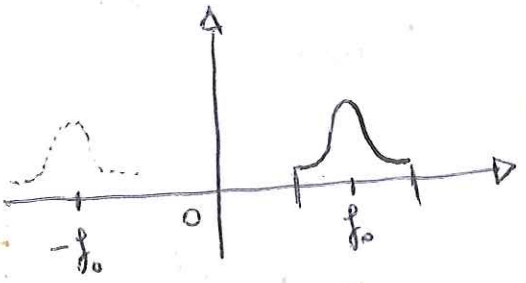
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big[A(f) + jB(f) \big] \cdot e^{j2\pi f t} \, df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \big[A(f) + jB(f) \big] \cdot \big[\cos(2\pi f t) + j \sin(2\pi f t) \big] df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{A(f)\cos(2\pi f t) - B(f) \sin(2\pi f t)\, df}_{\text{Reale e PARI in } f} + \underbrace{j \int_{-\infty}^{+\infty} A(f)\sin(2\pi f t) + B(f)\cos(2\pi f t)\, df}_{\text{Immaginaria e DISPARI in } f \;\to\; 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} df \right]}$$

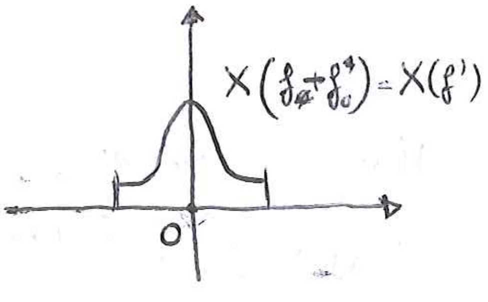
* Se il segnale è in banda base, non aiuta; ma se è TRASLATO, posso portarlo in BANDA BASE!



$\to$ CAMBIO DI VARIABILE $\boxed{f = f_0 + f'}$

se $f \to 0$, $f' \to -f_0$

se $f \to +\infty$, $f' \to +\infty$ $\to$



$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\int_{-f_0}^{+\infty} X(f_0 + f')\, e^{j2\pi (f_0+f')t} df' \right]$$

Se chiamiamo $I(f') := 2X(f_0 + f')$, cioè il doppio dello spettro traslato,

avremo:

$$x(t) = Re\left[\int_{-f_0}^{+\infty} I(f')\, e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{j2\pi f t}\, df'\right] \Rightarrow x(t) = Re\left[e^{j2\pi f_0 t} \underbrace{\int_{-f_0}^{+\infty} I(f)\, e^{j2\pi f t}\, df}_{\text{E' un' ANTITRASFORMATA!}}\right]$$

Richiamando $f' = f$

Ho 2 possibilità per esprimerlo:

$$(1) \quad \int_{-f_0}^{+\infty} I(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \underline{A(t)\, e^{j\varphi(t)}} \qquad e \qquad (2) \quad \int_{-f_0}^{+\infty} I(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \underline{a(t) + j\, b(t)}$$

(1) $$x(t) = Re\left[e^{j2\pi f_0 t} \cdot A(t)\, e^{j\varphi(t)}\right] = \boxed{A(t) \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t)\right)}$$

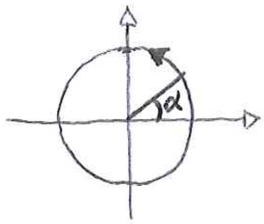
→ [Ogni segnale a BANDA STRETTA TRASLATO lo posso esprimere in questa forma sinusoidale!]

<u>SEGNALI FM</u> (modulati in frequenza) : $A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t)\right)$

la VARIAZIONE di frequenza porta l'informazione ;

$$\Delta f(t) \propto s(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

* Di solito, i segnali sono modulati in parte in frequenza (FM) ed in parte in fase (PM):



$$\alpha = 2\pi f t \quad , \quad \cos(\alpha) = \cos(2\pi f t)$$

$$\Rightarrow f = \frac{\alpha}{2\pi t} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \underline{\frac{1}{2\pi}\, \frac{d\varphi(t)}{dt}}$$

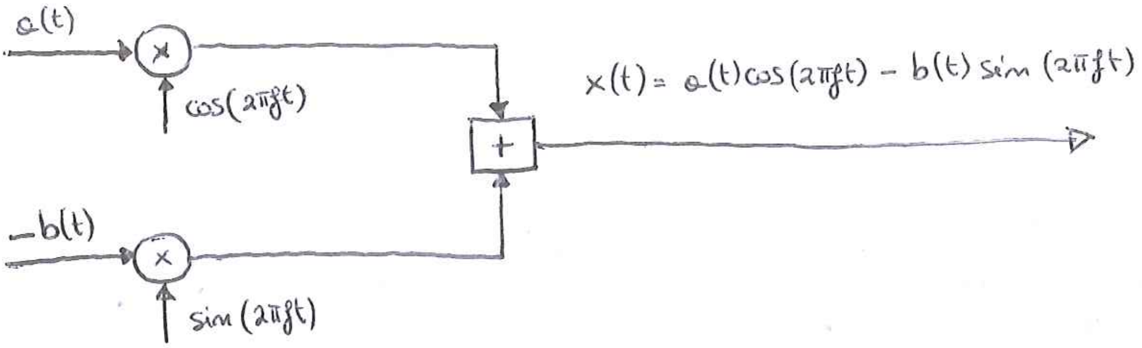
ok!!

(2) $$x(t) = Re\left[\left(a(t) + j\, b(t)\right) \cdot \left(\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f t)\right)\right] = a(t)\cos(2\pi f t) - b(t)\sin(2\pi f t)$$

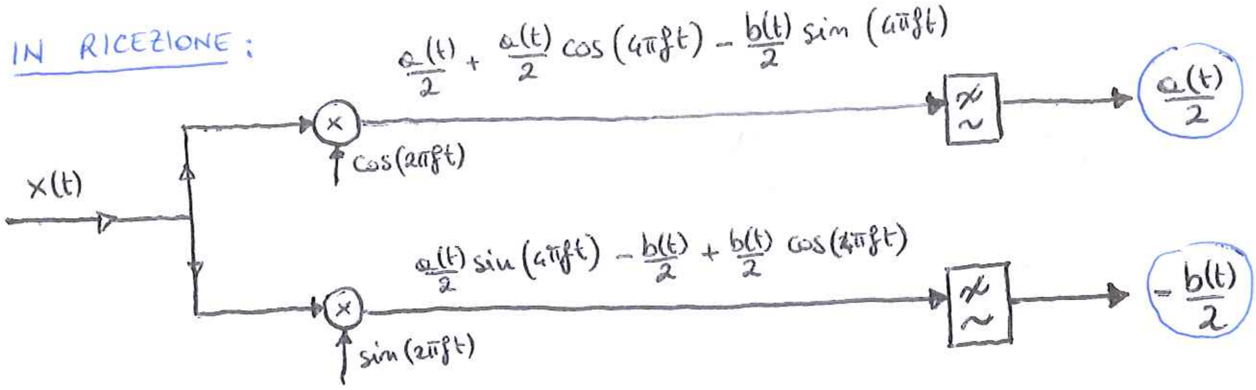
Quindi : $$\boxed{x(t) = a(t)\cos(2\pi f t) - b(t)\sin(2\pi f t)}$$

→ [Qualunque segnale lo posso scrivere come modulazione di frequenza di una PORTANTE in FASE (cos) e di una in QUADRATURA (sin), cioè come somma di 2 segnali che viaggiano indipendentemente perché sono ORTOGONALI!]

- IN TRASMISSIONE :



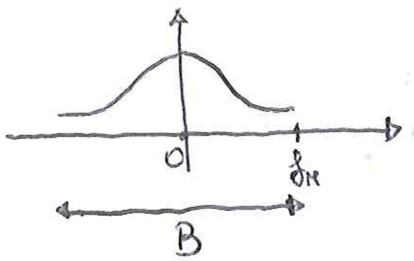
- IN RICEZIONE :



* [filtro] è un FILTRO PASSA-BASSO, che lascia passare solo le basse frequenze, e quindi $\frac{a(t)}{2}$ e $-\frac{b(t)}{2}$.

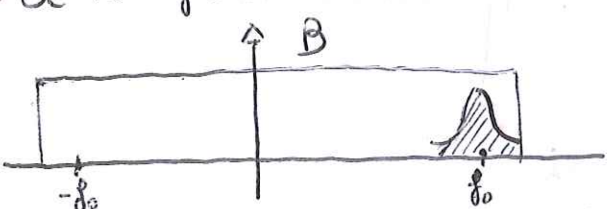
- CAMPIONAMENTO DI SEGNALI A BANDA STRETTA :

Per un segnale in BANDA BASE, la frequenza di campionamento f_c è data dalla banda base stessa:



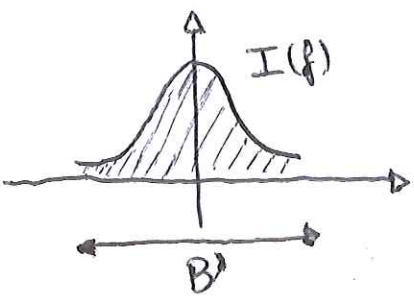
$$\boxed{f_c = B = 2 f_M}$$

- Se il segnale è in BANDA TRASLATA :



In questo caso, $f_c \neq B$!

Devo prima traslarlo in banda base:



$$\boxed{f_c = B' \neq B}$$

Ho sia CAMPIONI REALI $a(t)$, che CAMPIONI IMMAGINARI $b(t)$!

TRASFORMAZIONI LINEARI TEMPO INVARIANTI (LTI)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad S \quad} \longrightarrow y(t)$$

È <u>LINEARE</u> se vale il Principio di Sovrapposizione degli Effetti e quindi la linearità della trasformazione:

$$\begin{aligned} &\text{se } x_1(t) \to y_1(t) \\ &\text{se } x_2(t) \to y_2(t) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) \to K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)$$

È <u>TEMPO INVARIANTE</u> se la trasformazione è invariante rispetto a traslazioni temporali:

$$\text{se } x(t) \to y(t) \quad \Longrightarrow \quad x(t-t_0) \to y(t-t_0)$$

Ma com'è fatta l'uscita $y(t)$ del sistema?

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau} \quad \to \quad \text{CONVOLUZIONE}$$

dove: $x(\tau)$ è l'ECCITAZIONE in ingresso

$h(t-\tau)$ dipende dal SISTEMA!

- Se $x(\tau) = \delta(\tau)$, cioè un IMPULSO, possiamo calcolare la risposta impulsiva del sistema:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau = h(t) \longrightarrow \text{Risposta impulsiva del sistema}$$

Inoltre, vale la seguente <u>PROPRIETÀ</u> (scambio di x e h):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) \cdot h(\tau)\, d\tau$$

- <u>PROPRIETÀ DI CONVOLUZIONE</u>:

La Trasformata $Y(f)$ di $y(t)$ è: $\boxed{Y(f) = X(f) \cdot H(f)}$

è il <u>PRODOTTO delle TRASFORMATE</u>!

Ma applicare un impulso $\delta(\tau)$ al sistema per ricavare $h(t)$ può danneggiare il sistema; conviene LAVORARE IN FREQUENZA:

poiché $F[\delta(t)] = 1(f)$, ho che: $Y(f) = X(f) \cdot H(f) = H(f) \cdot 1(f)$

Si usa un OSCILLATORE:

$H(f) :=$ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

- Con 2 sistemi in cascata:

- In generale:

$$\boxed{Y(f) = \prod_i H_i(f) \cdot X(f)}$$

Tuttavia, devo aver misurato le funzioni di trasferimento $H_i(f)$ in determinate CONDIZIONI INIZIALI, che non cambiano mettendole in cascata!

Comunque sia, vorremmo una trasmissione FEDELE del segnale, cioè:

$$y(t) = g\,x(t - t_0)$$

Trasformando:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = g \cdot X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

Ne segue che, la FUNZIONE DI TRASFERIMENTO deve per forza essere:

$$\boxed{H(f) = g\,e^{-j2\pi f t_0}}$$

* **NOTA**: è LINEARE IN FASE nel TEMPO!

Se non lo fosse, le varie armoniche avrebbero:

$$t_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(f)}{df} \quad ; \quad \varphi = -2\pi f t_0 \text{ se costante}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_0 = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(f)}{df}} \longrightarrow \text{RITARDO DI GRUPPO}$$

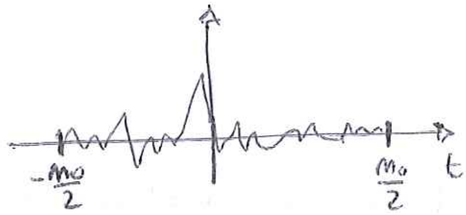
• ENERGIA e POTENZA :

Abbiamo visto che $\boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}}$ → descrive frequenza per frequenza la trasformazione dello SPETTRO d'energia

La POTENZA del segnale in uscita $y(t)$ è:

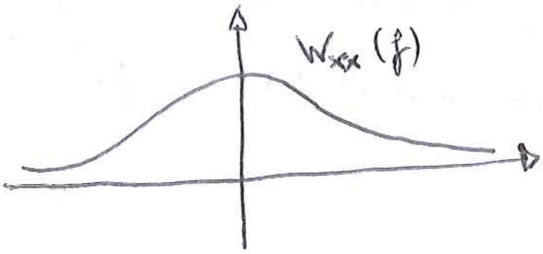
$$E_{yy} = \int \underbrace{|Y(f)|^2}_{\text{spettro energia uscita}} df = \int \underbrace{|X(f)|^2}_{\text{spettro energia ingresso}} \cdot \underbrace{|H(f)|^2}_{\text{modulo quadro della funzione di trasferimento}} df$$

* Un RUMORE non ha energia! Ma ha POTENZA, poiché va all'infinito:

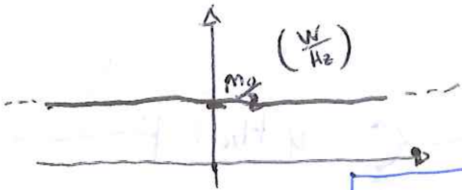


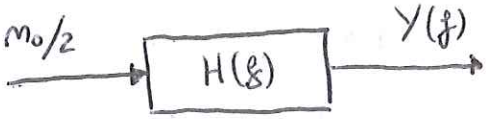
Sia n_0 := DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA del rumore :

→ $\frac{n_0}{2}$: è BILATERO!



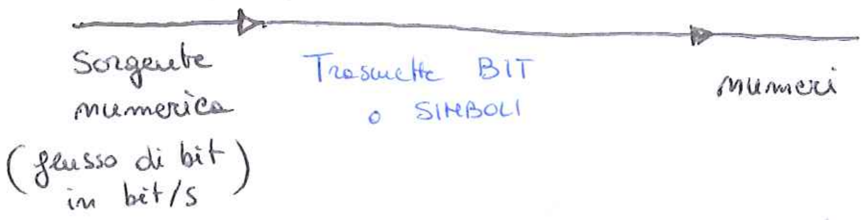
$\frac{W}{Hz}$ è la densità di potenza, cioè $\frac{n_0}{2}$!

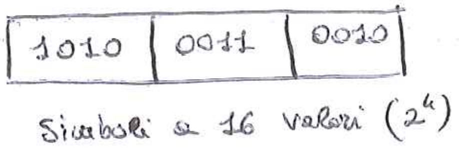




Abbiamo che : $\boxed{P_{yy} = \int \frac{n_0}{2} |H(f)|^2 df}$

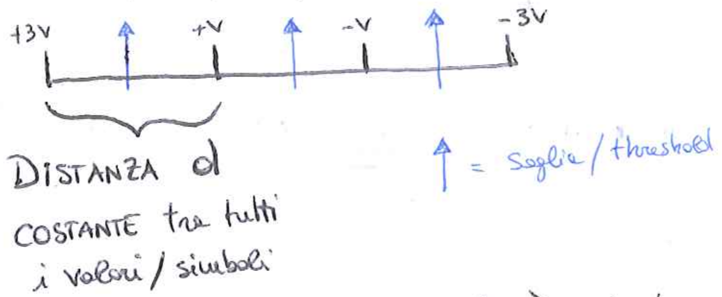
Trasmissione Numerica





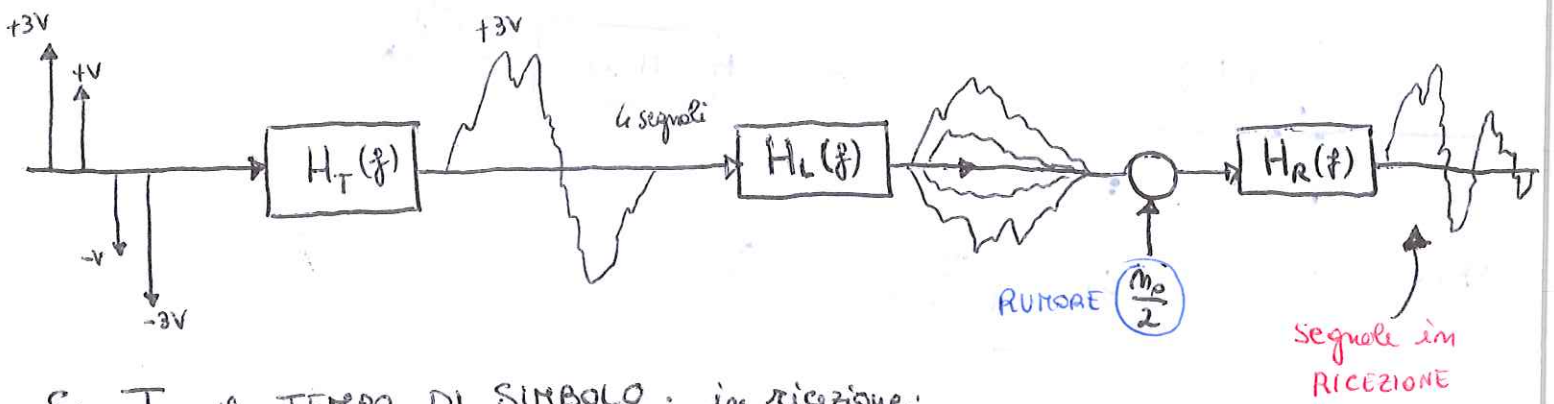
Si avranno dei numeri: con 1 bit $\rightarrow$ $+V$, $-V$

2 bit $\rightarrow$ $+3V$, $+V$, $-V$, $-3V$

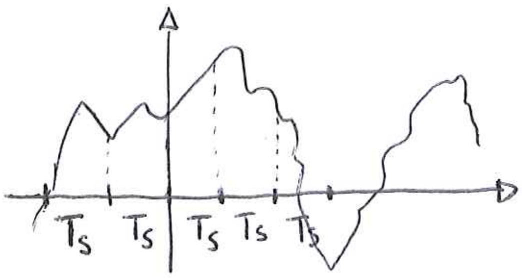


Bisognerà decidere in quale range sto, per capire quale segnale è arrivato, poiché ho il rumore che lo disturba ($\rightarrow$ il rapporto $\frac{S}{N}$ in ricezione deve essere ~~basso~~ alto, ma minimo!)

* Questi simboli sono numeri, anzi IMPULSI, poiché sistemi LTI trasformano impulsi in segnali!



- Sia T_s il TEMPO DI SIMBOLO; in ricezione:



$\rightarrow$ In ogni T_s devo capire QUALE SIMBOLO È ARRIVATO.

Ma, il vero problema è SINCRONIZZARE! Capire quando è finito o quando inizia un T_s!

I problemi in ricezione, sono principalmente dovuti alla BANDA del sistema! Avere una BANDA GRANDE vuol dire far passare molte frequenze e quindi il segnale in uscita sarebbe identico a quello d'ingresso. BELLO, ma costoso e scomodo!

L'OTTIMO è: essere in grado di riconoscere appena l'ingresso!

* [Per fare ciò, il segnale deve essere sentito solo nel suo T_s, per tutti gli altri segnali deve andare rigorosamente a zero.]

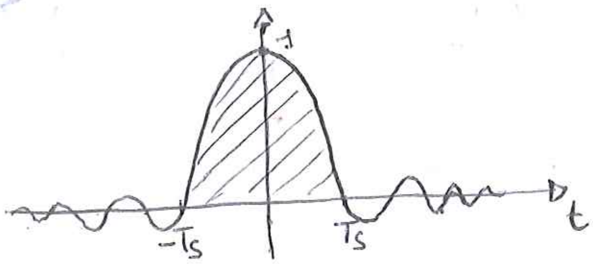
↓

Ma è il comportamento della $\text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$!

• FUNZIONE DI TRASFERIMENTO GLOBALE: $\boxed{\text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)} = h(t)$

$\pm 3V \rightarrow \pm 3V \text{ sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$

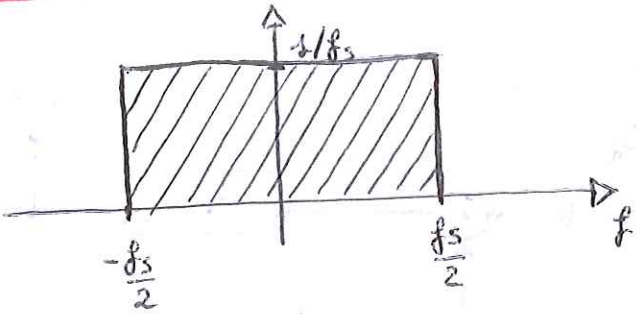
$\pm V \rightarrow \pm V \text{ sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$



Ci permette di ottenere ISI (Inter Symbols Interference) NULLO!

• FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN FREQUENZA:

$$\boxed{H_{tot}(f) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)}$$



con $f_s = \frac{1}{T_s}$ = frequenza di simbolo.

Semplicemente perché $H(f) = F\left[\text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)\right] = T_s \text{rect}(f T_s) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$.

La BANDA MINIMA (MONOLATERA) è $\boxed{B_M = \frac{f_s}{2}}$

Ma $f_s = \frac{f_b}{h}$, dove: f_b = frequenza di bit, h = # bit per simbolo

Quindi, in generale:

• TX BINARIA: $f_s = f_b$

• TX QUATERNARIA: $f_s = \frac{f_b}{2}$

• TX OTTONARIA: $f_s = \frac{f_b}{3}$

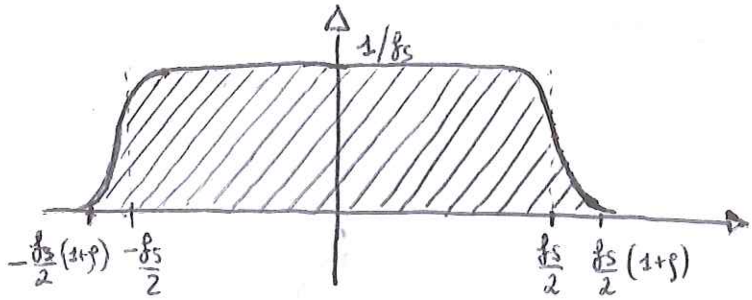
• TX A 16 LIVELLI: $f_s = \frac{f_b}{4}$

$$\boxed{B_{M(base)} = \frac{f_s}{2} = \frac{f_b}{2 \cdot h}}$$

Banda Base minima!

* Tuttavia, la $rect\left(\frac{f}{f_S}\right)$ è fisicamente irrealizzabile con sistemi LTI, poiché c'è il salto in frequenza da 0 ad $\frac{1}{f_S}$;

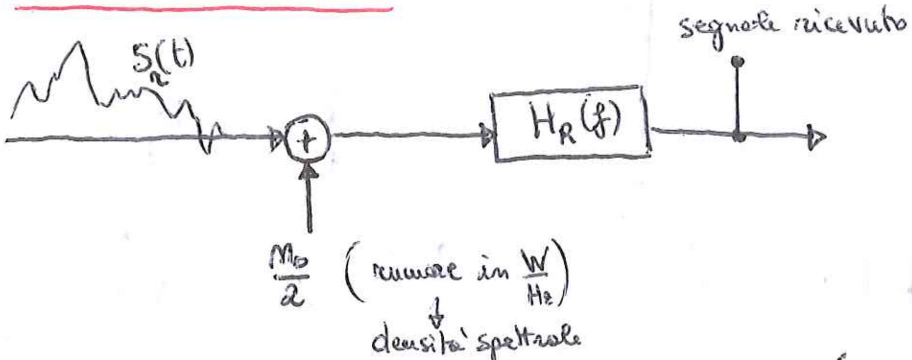
Dunque, si introduce un fattore ρ, detto "ROLL OFF", in genere pari a 0,1 o 0,2, che allunga leggermente la banda:



La BANDA VERA (monolatera) diventa: $\boxed{B_{vera} = \frac{f_S}{2}(1+\rho)}$, detta BANDA DI NYQUIST

In questo modo, la funzione dei segnali trasmissivi va più rapidamente a zero fuori dal proprio T_S!

• PROBABILITÀ D'ERRORE:



Segnale ricevuto al tempo t=0: $r(0) = \int S_R(f) \cdot H_R(f)\, df$

Potenza del RUMORE: $\boxed{\sigma^2 = \int \frac{n_0}{2} \left| H_R(f) \right|^2 df}$ → Altera, frequenza per frequenza, i segnali.

- **TRASMISSIONE BINARIA :**

ingresso : ho 2 simboli , segnali $\rightarrow \pm s(t)$

$H_R(f)$ deve <u>MASSIMIZZARE</u> il rapporto segnale rumore $\frac{S}{N}$!

$$r_{o\,(t=0)} = \pm \int S_R(f) \cdot H_R(f)\, df$$

Ma, lavoriamo in <u>POTENZA</u> : $|r_o|^2 = \left| \int S_R(f) \cdot H_R(f)\, df \right|^2$

a cui bisogna aggiungere l'ingresso anche del RUMORE , che ha una <u>POTENZA</u> pari a :

$$\sigma^2 = \int \frac{n_0}{2} |H_R(f)|^2 df$$

Per massimizzare $\frac{S}{N}$:

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

$$\frac{S}{N} = \frac{\left| \int S_R(f) \cdot H_R(f)\, df \right|^2}{\int \frac{n_0}{2} \cdot |H_R(f)|^2 df} \leqslant \frac{\int |S_R(f)|^2 df \cdot \cancel{\int |H_R(f)|^2 df}}{\frac{n_0}{2} \cdot \cancel{\int |H_R(f)|^2 df}}$$

Quindi :

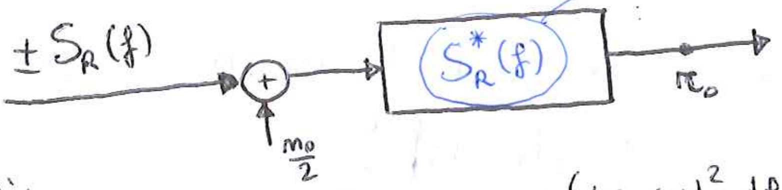
$$\boxed{\frac{S}{N}_{max} \leqslant \frac{\int |S_R(f)|^2 df}{n_0/2}}$$

$\rightarrow$ non si può fare meglio di così

- **FILTRO ADATTATO AL SEGNALE :**

Come ottenere il massimo $\frac{S}{N}$ possibile ?

il CONIUGATO!



Infatti :

$$r_o = \pm \int S_R(f) \cdot S_R^*(f)\, df = \pm \int |S_R(f)|^2 df = \text{energia di bit del segnale!}$$

$$\sigma^2 = \int \frac{n_0}{2} |S_R^*(f)|^2 df = \frac{n_0}{2} \int |S_R(f)|^2 df$$

E si ottiene proprio: $\frac{S}{N} = \frac{\frac{1}{\tau}\int |S_R(f)|^2 df}{n_0/2}$, cioè il MAX possibile!

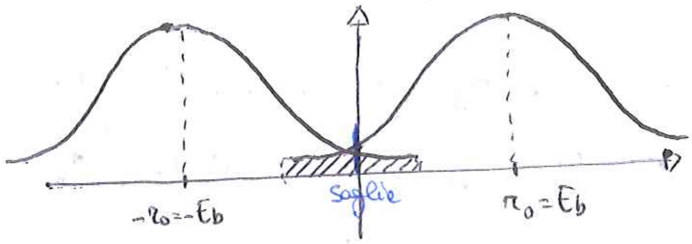
* Dunque $\boxed{H_R(f) \equiv S_R^*(f)}$ e si chiama FILTRO ADATTATO AL SEGNALE!

- Come già detto: $\boxed{r_0 = E_b}$ è l'ENERGIA PER BIT del segnale; dunque:

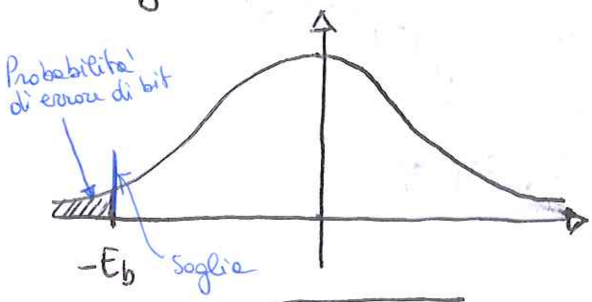
$$\sigma^2 = \frac{n_0}{2}\int |S_R(f)|^2 df = \frac{n_0}{2}\cdot r_0 = \frac{n_0}{2}E_b \Rightarrow \sigma^2 = \frac{n_0}{2}E_b$$

* Il RUMORE è una VARIABILE GAUSSIANA che si somma al segnale in ricezione:

$$\boxed{\gamma(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}}$$



Ma ragioniamo traslando tutto di r_0 nell'origine:



$$P_{eb} = \int_{-\infty}^{-E_b} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}dx = \boxed{\frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}}\right)}$$

Se definiamo $\boxed{\gamma := \frac{E_b}{n_0}}$ e considerando che l'erfc si approssima molto bene con $\frac{e^{-\gamma}}{3\pi}$, abbiamo che, per una TRASMISSIONE BINARIA ANTIPODALE, la probabilità di errore di bit è:

$$\boxed{P_b = \frac{e^{-\gamma}}{3\pi}}$$

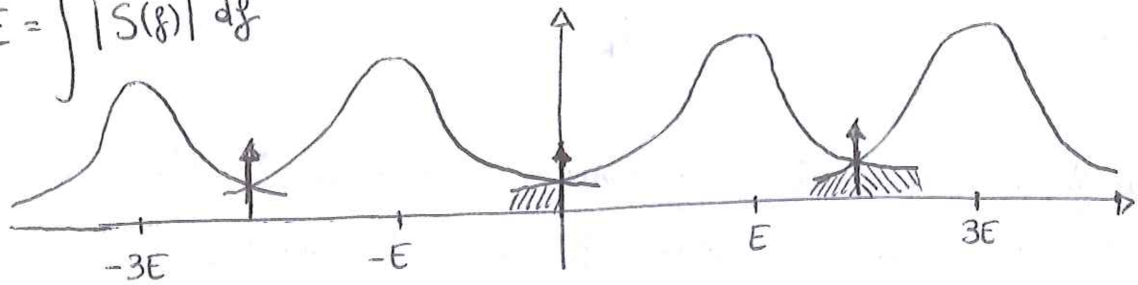
Per trasmissioni radio, $P_b \simeq 10^{-6}$ è un buon risultato e si può ottenere per $\gamma \simeq 10{,}5\ dB$.

* **NOTA**: in una TX BINARIA, sbagliare 1 bit equivale a sbagliare un simbolo e viceversa, quindi $\boxed{P_b = P_s}$!

• TRASMISSIONE QUATERNARIA:

ingresso: $\pm s(t)$, $\pm 3s(t)$, ho 4 possibili simboli con 2 bit (2^2)

$$E = \int |S(f)|^2 df$$



$$P_e = \frac{1}{2} \cdot \left[erfc\left(\frac{\sqrt{E}}{\eta_0}\right) + \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\sqrt{E}}{\eta_0}\right) \right] = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\ erfc\left(\frac{\sqrt{E}}{\eta_0}\right) = 1{,}5 \cdot \frac{e^{-\gamma}}{3\pi}$$

Prob. di simbolo

L'ultimo lo sbaglio solo da un lato

Quindi, PROB. ERRORE DI SIMBOLO: $\boxed{P_e = \frac{1{,}5 \cdot e^{-E/\eta_0}}{3\pi}}$

Chiamiamo in causa la CODIFICA DI GRAY:

per le simboli ho:

$+3s(t) \rightarrow 00$
$+s(t) \rightarrow 01$
$-s(t) \rightarrow 10$
$-3s(t) \rightarrow 11$

Quando ho errore su un simbolo, sbaglio 1 dei 2 bit, quindi la PROB. d'ERRORE di BIT è $\boxed{P_b = \frac{1}{2} P_e}$

Qual è l'energia che ricevo? Ricordando che è il modulo quadro, ho che per $\pm s(t)$ ricevo E, per $\pm 3s(t)$ ricevo $9E$;

ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO è $E_m = \frac{1E + 9E}{2} = 5E$

PER BIT: $E_b = \frac{5}{2} E$ $\Rightarrow E = E_b / \frac{5}{2}$

Quindi, in definitiva: $\boxed{P_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}5\ e^{-E_b / \frac{5}{2}\eta_0}}{3\pi}}$

* Per avere la stessa Probabilità di errore della BINARIA, devo aumentare l'energia per bit E_b di un fattore $\frac{5}{2}$! $\Delta\gamma = \frac{\Delta E_b}{\eta_0} = \frac{5}{2} \rightarrow 4\,dB \cdot \frac{e^{-E_b/\eta_0}}{3\pi}$

Per quanto riguarda la BANDA :

in BINARIA avevamo $B_N = \frac{f_b}{2} = \frac{f_s}{2}$; ma $f_s = \frac{f_b}{n}$

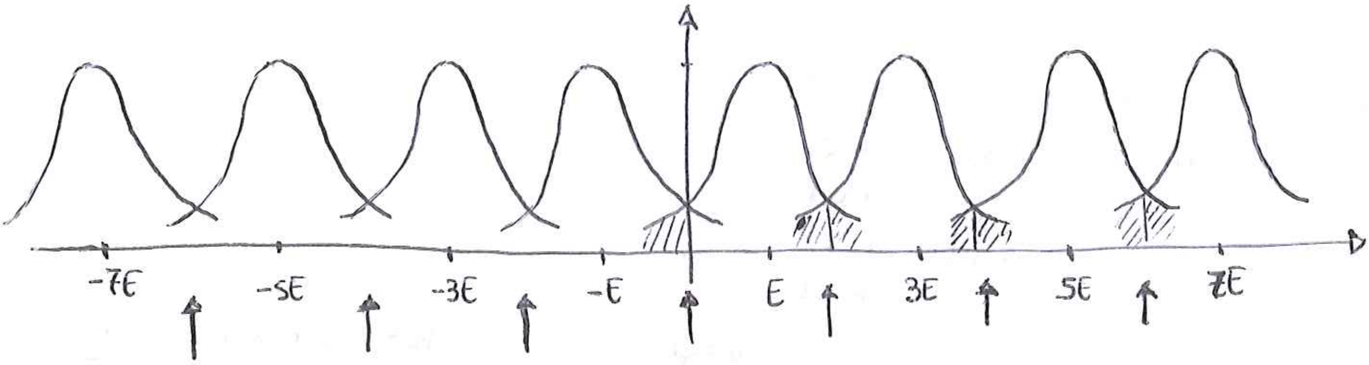
$\Rightarrow$ In QUATERNARIA : $f_s = \frac{f_b}{2} \Rightarrow \boxed{B_N = \frac{f_b}{4}}$

* A parità di frequenza di bit f_b, la BANDA SI DIMEZZA ! Poiché ho il doppio dei bit e quindi la metà della frequenza di simbolo.

Tuttavia, la POTENZA AUMENTA di 4dB ! $\boxed{P_R = \frac{E_b}{T_b} = E_b \cdot f_b}$

- TRASMISSIONE OTTONARIA :

ingresso : ho 8 segnali : $\pm s(t) \to E$, $\pm 3s(t) \to 9E$, $\pm 5s(t) \to 25E$, $\pm 7s(t) \to 49E$



$$P_e = \frac{1}{4}\left[\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{n_0}}\right) + \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{n_0}}\right) + \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{n_0}}\right) + \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{n_0}}\right)\right] = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2}\,\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{n_0}}\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{4}\cdot\frac{7e^{-E/n_0}}{3\pi} \Rightarrow \boxed{P_e = \frac{1}{4}\cdot\frac{7e^{-E/n_0}}{3\pi}}$$

$$\boxed{P_b = \frac{1}{3}P_e = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{e^{-E/n_0}}{3\pi}}$$

L'energia media è $E_m = \frac{(1+9+25+49)E}{4} = 21E$

Quindi: $E_b = \frac{1}{3}E_m = 7E \Rightarrow E = \frac{E_b}{7}$

$$\boxed{P_b = \frac{7}{3\cdot 4}\cdot\frac{e^{-E_b/7n_0}}{3\pi}}$$

$\to$ La potenza deve aumentare di un fattore 7, quindi $(4+4,5)$ dB $\Rightarrow$ Potenza di 8,5 dB in più necessaria.

La BANDA : $f_s = \frac{f_b}{3} \Rightarrow \boxed{B_N = \frac{f_b}{6}}$, poiché $B_N = \frac{f_s}{2} = \frac{f_b}{2\cdot 3}$

- TRASMISSIONE A 16 LIVELLI :

Ho 4 bit, quindi $2^4 = 16$ segnali.

$$\boxed{P_e \simeq erfc\left(\sqrt{\frac{E}{n_0}}\right) \simeq \frac{2\,e^{-E/n_0}}{\cancel{4}\cdot 3\pi}} \Rightarrow P_b \simeq \frac{2\,e^{-E/n_0}}{4\cdot 3\pi}$$

$$E_m = \frac{1}{8}\left(E + 9E + 25E + 49E + 81E + 121E + 169E + \dots\right) \simeq 84E$$

$$E_b = \frac{E_m}{4} \simeq 21E \Rightarrow E = \frac{E_b}{21}$$

$\Delta E_b = 21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow$ Potenza in più: $(4 + 4{,}5 + 4{,}5)\,dB = 13\,dB$ di potenza necessaria in più

Quindi: $\boxed{P_b = \frac{2}{4} \cdot \frac{e^{-E_b/21 n_0}}{3\pi}}$; $f_s = \frac{f_b}{4} \Rightarrow \boxed{B_T = \frac{f_b}{8}}$

RIEPILOGO

Abbiamo per le seguenti TRASMISSIONI IN BANDA BASE i valori:

Trasmissione	Prob. errore di bit = P_b	Banda minima monolatera
BINARIA	$P_b = \frac{e^{-\gamma}}{3\pi}$	$B_M = \frac{f_b}{2}$
QUATERNARIA	$P_b = \frac{1,5}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma/2,5}}{3\pi}$	$B_M = \frac{f_b}{4}$
OTTONARIA	$P_b = \frac{7}{4 \cdot 3} \cdot \frac{e^{-\gamma/7}}{3\pi}$	$B_M = \frac{f_b}{6}$
A 16 LIVELLI	$P_b = \frac{2}{4} \cdot \frac{e^{-\gamma/21}}{3\pi}$	$B_M = \frac{f_b}{8}$