8. ONDE PIANE

• ONDE PIANE IN MEZZI UNIFORMI :

Se il mezzo è UNIFORME e non dissipativo:

$$\nabla \phi = n \underline{s}_0 = \underline{cost}.$$

e l'energia elettromagnetica si propaga lungo TRAIETTORIE RETTILINEE.
E' allora possibile che le superfici d'onda siano dei piani.
In un mezzo omogeneo, la FUNZIONE DI FASE vale:

$$\Phi = n \int_{s_i}^{s} ds = s + \text{cost}$$

ed è dunque FUNZIONE LINEARE del percorso geometrico s, cioè aumenta proporzionalmente al tratto rettilineo considerato.
Se le superfici d'onda $\Phi(\underline{r}) = \text{cost.}$ sono dei PIANI, abbiamo ONDE PIANE.
Per ONDE PIANE:

$$\boxed{\Phi(\underline{r}) = \gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z}$$

e le equazioni del campo sono A COEFFICIENTI COSTANTI:

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0 \, e^{-jk_0(\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z)}}$$

Se si pensa alle componenti γ_i come a delle componenti di un vettore:

$$\underline{\gamma} = \gamma_x \underline{x}_0 + \gamma_y \underline{y}_0 + \gamma_z \underline{z}_0 = \nabla(\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z) = \nabla\phi = n\underline{s}_0$$

e definiamo così il VETTORE DI PROPAGAZIONE $\underline{K}$:

$$\underline{K} = k_0 \underline{\gamma} = k_0 \nabla\phi = k_x \underline{x}_0 + k_y \underline{y}_0 + k_z \underline{z}_0$$

Dunque, l'ONDA PIANA diventa:

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0 \, e^{-j\underline{K}\cdot\underline{r}}}$$

L'onda piana deve soddisfare l'equazione delle onde, che stavolta è a COEFFICIENTI COSTANTI, poiché anche $\underline{K}$ è costante:

$$\nabla^2\left(\underline{E}_0 e^{-j\underline{K}\cdot\underline{r}}\right) + K^2 \underline{E}_0 e^{-j\underline{K}\cdot\underline{r}} = 0$$

$$\underline{E}_0\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)e^{-j(K_x x + K_y y + K_z z)} + K^2 e^{-j\underline{K}\cdot\underline{r}}\right] = 0$$

$$\underline{E}_0\left[-\left(K_x^2+K_y^2+K_z^2\right)+K^2\right] = 0$$

$$\boxed{K_x^2+K_y^2+K_z^2 = \underline{K}\cdot\underline{K} = K^2 = \omega^2\mu\varepsilon}$$

* ATTENZIONE:
- $K^2=\omega^2\mu\varepsilon$ DIPENDE DAL MEZZO!
- $\underline{K}$ RAPPRESENTA L'ONDA e DIPENDE da $\phi(\underline{r})$, quindi da $\underline{S}_0$!

(*)!

Consideriamo stavolta un MEZZO DISSIPATIVO $\Rightarrow$ ε è COMPLESSA e/o $g\underline{E}\neq 0$; quindi:

$$K^2 = (j\omega\varepsilon + g)(-j\omega\mu) \text{ è COMPLESSA} \Rightarrow \boxed{\underline{K} \text{ è COMPLESSO}}$$

Quindi il vettore $\underline{K}$ complesso lo possiamo scrivere come:

$$\boxed{\underline{K} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha}}$$

e possiamo avere 2 casi:

(1) MEZZO NON DISSIPATIVO:

$$\underline{K}\cdot\underline{K} = K^2 = (\underline{\beta}-j\underline{\alpha})\cdot(\underline{\beta}-j\underline{\alpha}) = \beta^2-\alpha^2-2j\,\underline{\alpha}\cdot\underline{\beta} \quad \text{REALE}$$

e quindi necessariamente:

$$\boxed{\underline{\alpha}=0 \quad \text{oppure} \quad \underline{\alpha}\perp\underline{\beta}}$$

; ricordiamo che $K^2=\omega^2\mu\varepsilon \Rightarrow \varepsilon$ reale come già visto!

(2) MEZZO DISSIPATIVO:

$$\underline{K}\cdot\underline{K} = K^2 = (\underline{\beta}-j\underline{\alpha})\cdot(\underline{\beta}-j\underline{\alpha}) = \beta^2-\alpha^2-2j\,\underline{\alpha}\cdot\underline{\beta} \quad \text{COMPLESSO}$$

e quindi: $\boxed{\underline{\alpha} \neq 0 \quad \text{oppure} \quad \underline{\alpha} \text{ NON ORTOGONALE a } \underline{\beta}}$

*NOTA: Come visto, $\underline{K}$ può essere COMPLESSO anche se il mezzo è NON DISSIPATIVO!

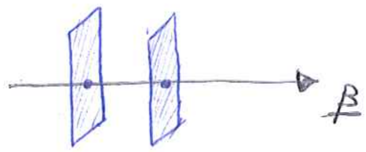
Dunque, l'ESPRESSIONE GENERALE DELL'ONDA PIANA è:

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}} = \underline{E}_0 e^{-j(\underline{\beta}-j\underline{\alpha})\cdot\underline{r}} = \underline{E}_0 e^{-\underline{\alpha}\cdot\underline{r}} \cdot e^{-j\underline{\beta}\cdot\underline{r}}}$$

Con:

- $e^{-\underline{\alpha}\cdot\underline{r}}$:= "FATTORE DI AMPIEZZA" $\Rightarrow$ $\underline{\alpha}$:= VETTORE DI ATTENUAZIONE
- $e^{-j\underline{\beta}\cdot\underline{r}}$:= "FATTORE DI FASE" $\Rightarrow$ $\underline{\beta}$:= VETTORE DI FASE

* $\underline{\beta}$ individua i PIANI EQUIFASE, quando $\underline{\beta}\cdot\underline{r} = \text{cost.}$, cioè i PIANI ORTOGONALI a $\underline{\beta}$ stesso:



* $\underline{\alpha}$ individua analogamente i PIANI EQUIAMPIEZZA, quando $\underline{\alpha}\cdot\underline{r} = \text{cost.}$, cioè i PIANI ORTOGONALI ad $\underline{\alpha}$.

- **ONDA PIANA UNIFORME:**

Un'onda è PIANA UNIFORME quando i PIANI EQUIFASE COINCIDONO con i PIANI EQUIAMPIEZZA.

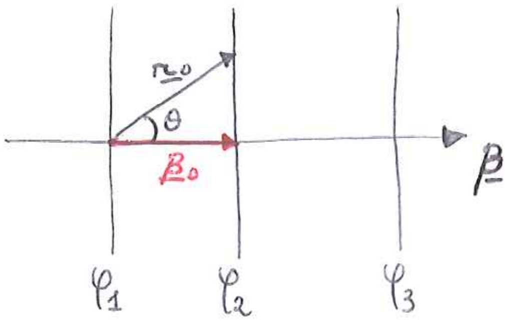
Cioè se: $\boxed{\underline{\alpha} = 0 \quad \text{oppure} \quad \underline{\alpha} \parallel \underline{\beta}}$

Possiamo esprimere in questo modo la VELOCITÀ DI ~~PROPAGAZIONE~~ FASE di un'onda piana uniforme:

$$\boxed{u\big|_{\underline{r}_0} = \frac{\omega}{\underline{\beta}\cdot\underline{r}_0} = \frac{\omega}{\beta\cos\theta}}$$

dove θ è l'angolo tra il vettore di fase $\underline{\beta}$ e la direzione $\underline{r}_0$ nella quale si calcola la velocità.

Il MINIMO si ha per $\underline{r_0} \parallel \underline{\beta}$, poiché $\cos\theta = \pm 1$ e $u|_{\beta_0} = \frac{\omega}{\beta}$; ciò corrisponde alla VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE.



* La velocità è minima per $\underline{r_0} \parallel \underline{\beta}$ poiché la distanza tra i 2 piani equifase φ_1 e φ_2 è minima, quindi posso percorrere il cambiamento di fase da φ_1 a φ_2 con una velocità minore, ma nello stesso tempo!

* Il valore di u DIPENDE dall'UNIFORMITÀ dell'onda!

Considerato un mezzo SENZA DISSIPAZIONI,

1) ONDA UNIFORME:

$\underline{\alpha} = 0$, quindi $\underline{\beta} = \underline{K}$ e $|\underline{\beta}| = K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

dunque:

$$\boxed{u|_{\beta_0} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c}$$

2) ONDA NON UNIFORME:

$$\underline{K}\cdot\underline{K} = K^2 = \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\varepsilon \Rightarrow \beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon + \alpha^2}$$

REALE, senza dissipazioni

dunque:

$$\boxed{u|_{\beta_0} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon + \alpha^2}} < c}$$

* A parità di frequenza, un'onda non uniforme ha VELOCITÀ DI FASE MINORE DI UN'ONDA UNIFORME.

- ## RELAZIONI TRA CAMPI E VETTORE DI PROPAGAZIONE:

Inserendo $\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}}$ nella 1ª Eq. di Maxwell, si ottiene:

$$\nabla \times \underline{E} = \nabla \times \underline{E}_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}} = -j\underline{k} \times \underline{E}_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}} = -j\omega\mu \underline{H}_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

e analogamente dalla 2ª Eq. di Maxwell. Per cui:

$$\underline{k} \times \underline{E}_0 = \omega\mu \underline{H}_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{H}_0 = \frac{\underline{k} \times \underline{E}_0}{\omega\mu}}$$

$$-\underline{k} \times \underline{H}_0 = \omega\varepsilon \underline{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{E}_0 = \frac{-\underline{k} \times \underline{H}_0}{\omega\varepsilon}}$$

- $\underline{E}_0$ ed $\underline{H}_0$ sono LEGATI MUTUAMENTE attraverso il prodotto vettore con il vettore complesso $\underline{k} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha}$.

Nel caso di ONDA PIANA UNIFORME $(\underline{\alpha} \parallel \underline{\beta})$: $\underline{k} = (\beta - j\alpha)\underline{\beta}_0 = k\underline{\beta}_0$ e di conseguenza:

$$\boxed{\underline{H}_0 = \frac{k\underline{\beta}_0 \times \underline{E}_0}{\omega\mu} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\mu}\underline{\beta}_0 \times \underline{E}_0 = \frac{\underline{\beta}_0 \times \underline{E}_0}{\eta}} \quad , \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\underline{E}_0 = -\eta\, \underline{\beta}_0 \times \underline{H}_0}$$

I componenti dei campi $\underline{E}_0$ e $\underline{H}_0$ sono:

(1) ORTOGONALI TRA LORO;

(2) ORTOGONALI al VETTORE DI PROPAGAZIONE $\underline{\beta}_0$, quindi al vettore di fase $\underline{\beta}$;

(3) per un mezzo DISSIPATIVO, ORTOGONALI anche al VETTORE DI ATTENUAZIONE $\underline{\alpha}$, poiché $\underline{\alpha} \parallel \underline{\beta}$ in questa onda piana uniforme.

* NOTA: se $\underline{k}$ fosse complesso (come in generale è, a meno che $\underline{\alpha} = 0$) e se $\underline{E}_0$ fosse polarizzato linearmente, in quanto $\beta > \alpha$ si ha che

$$\underline{H}_0 = \frac{\underline{\beta}_0 \times \underline{E}_0}{\eta} = \frac{\underline{k} \times \underline{E}_0}{\omega\mu}$$ sarebbe POLARIZZATO ELLITTICAMENTE!

- **COSTANTE DI PROPAGAZIONE E IMPEDENZA INTRINSECA :**

Per un' ONDA PIANA UNIFORME :

- la COSTANTE DI PROPAGAZIONE $K = K_r + jK_j = \beta - j\alpha$, costante con le coordinate in un mezzo uniforme, determina le caratteristiche di propagazione (progressione di fase) e di attenuazione;
- l' IMPEDENZA INTRINSECA η determina il legame tra i campi.

- **COSTANTE DI PROPAGAZIONE :**

1) MEZZO DISSIPATIVO per CONDUCIBILITA':

$g \neq 0$, ε e μ REALI

$$K = K_r - jK_j = \sqrt{-j\omega\mu(j\omega\varepsilon + g)}$$

e le costanti di fase e di attenuazione sono:

$$K_r = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]} \quad \text{REALE}$$

$$K_j = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]} \quad \text{IMMAGINARIA}$$

- se $\frac{g}{\omega\varepsilon} \ll 1$: il mezzo "SI COMPORTA DA DIELETTRICO";

$$\boxed{K_r \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad ; \quad \boxed{K_j \simeq \frac{g}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

- se $\frac{g}{\omega\varepsilon} \gg 1$: il mezzo "SI COMPORTA DA CONDUTTORE"

$$\boxed{K_r \simeq K_j \simeq \sqrt{\frac{g\mu\omega}{2}}}$$

* **NOTA**: Ciò NON dipende solo da g e da ε, ma anche da ω!
Uno stesso mezzo può comportarsi da DIELETTRICO per pulsazioni ω alte e da CONDUTTORE per pulsazioni ω basse.

2) Mezzo Dielettrico Dissipativo:

$g = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0 (\varepsilon' + j\varepsilon'')$ COMPLESSA, μ REALE

N.B. $j\varepsilon''$ è negativo

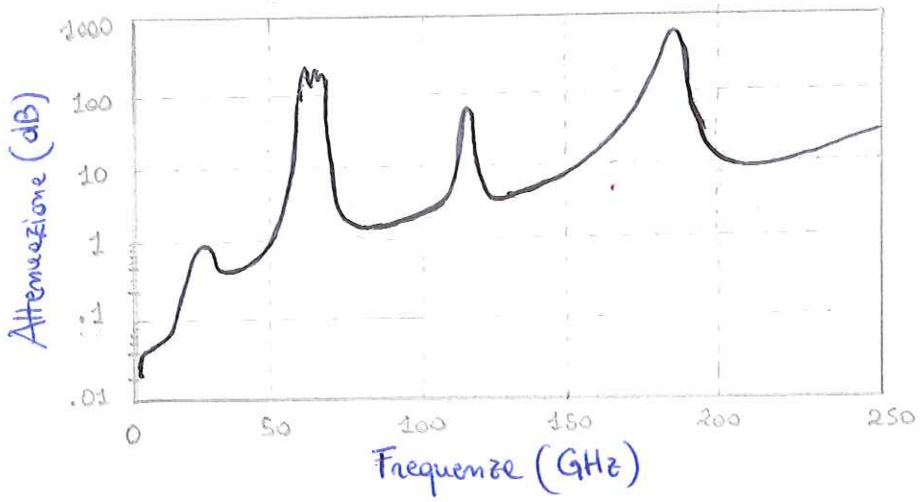
$$K_r - jK_j = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_0 (\varepsilon' + j\varepsilon'')}$$

- Se $|\varepsilon''| \ll \varepsilon'$:

$$\boxed{K_r \simeq \omega \sqrt{\mu \varepsilon_0 \varepsilon'}} \quad ; \quad \boxed{K_j \simeq \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu \varepsilon_0} \cdot \frac{|\varepsilon''|}{\sqrt{\varepsilon'}} \ll K_r}$$

* ε'' NON influenza la costante di fase, per cui, dal punto di vista PROPAGATIVO, il mezzo può essere considerato PRIVO DI DISSIPAZIONI!

* Ciò non si può dire dal punto di vista dell'ATTENUAZIONE, in quanto, per la presenza di ω, K_j può diventare elevato anche quando $|\varepsilon''|$ è basso! Questo è il caso della TROPOSFERA, che pur avendo bassi valori di $|\varepsilon''|$ $(10^{-6} \sim 10^{-8})$ può avere elevatissimi valori di attenuazione in corrispondenza delle risonanze del vapor d'acqua e dell'ossigeno.



ATTENUAZIONE TOTALE TERRA-SATELLITE

* Nota Decibel:

$A_{dB} = 10 \log_{10} A$, dove $A = \frac{P_i}{P_f}$ è l'ATTENUAZIONE, data dal rapporto tra potenza trasmessa P_i e potenza ricevuta P_f; sostanzialmente è la VARIAZIONE del VETTORE DI POYNTING durante la propagazione.

- IMPEDENZA INTRINSECA

1) MEZZO DISSIPATIVO PER CONDUCIBILITÀ:

$g \neq 0$, μ ed ε REALI $(\varepsilon'' = 0)$

$$\eta = \eta_r + j\eta_j = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{g}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\omega^2\mu\left(\varepsilon + j\frac{g}{\omega}\right)}{\omega^2\varepsilon^2 + g^2}}$$

dunque:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu\cancel{\varepsilon}\left(1 + j\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{\cancel{2}}\left[1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{1 + j\frac{g}{\omega\varepsilon}}{1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2}}$$

- se il mezzo "SI COMPORTA DA DIELETTRICO" $\left(\frac{g}{\omega\varepsilon} \ll 1\right)$:

$$\boxed{\eta_r \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \quad ; \quad \boxed{\eta_j \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{g}{2\omega\varepsilon} \ll \eta_r}$$

- se il mezzo "SI COMPORTA DA CONDUTTORE" $\left(\frac{g}{\omega\varepsilon} \gg 1\right)$:

$$\boxed{\eta_r \simeq \eta_j \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}}$$

* Se $\boxed{g \to \infty \,,\; \eta \to 0}$ $\Rightarrow$ Un CONDUTTORE IDEALE $(g \to \infty)$ ha IMPEDENZA NULLA!