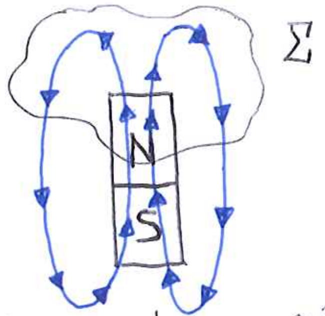
# 7. FORZA E CAMPO MAGNETICI

La differenza tra la magnetostatica e l'elettrostatica è che NON esistono cariche magnetiche libere.
La grandezza fisica da prendere in considerazione è il DIPOLO MAGNETICO: un magnete ha sempre 2 poli, uno positivo e l'altro negativo.
In presenza di materiali magnetici (che generano un campo), il DIPOLO tende ad orientarsi lungo una certa direzione, che definiremo come direzione del CAMPO VETTORIALE INDUZIONE MAGNETICA $\vec{B}$. Si assume ovviamente che il dipolo sia sufficientemente piccolo da non perturbare il campo $\vec{B}$.
È da notare l'analogia con il campo elettrico $\vec{E}$ e la carica di prova $q_0$.
L'intensità del campo $\vec{B}$ viene definita mediante una coppia meccanica $N$.

## LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

Consideriamo una superficie chiusa $\Sigma$ che contiene un DIPOLO MAGNETICO, o anche solo parte di questo. Poiché, data la forma dipolare, la somma delle masse magnetiche è sempre nulla, si ha che il flusso è NULLO:

$$\boxed{\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = 0}$$




Nel campo magnetico non ci sono cariche e le linee di forza non hanno né un inizio né una fine: quindi, il FLUSSO è SEMPRE uguale a ZERO!

Di conseguenza, per il Teorema della Divergenza Totale:

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{B}\, d\tau = 0$$

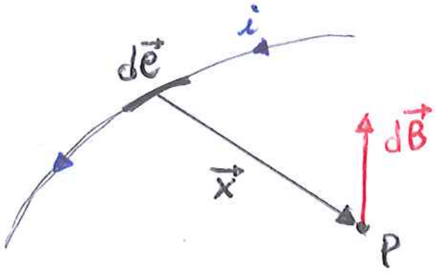
Essendo che dev'essere indipendente dal volume $\tau$, si ha anche che la DIVERGENZA del campo magnetico è sempre nulla:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \longrightarrow \text{è SOLENOIDALE}$$

## • LEGGE DI BIOT - SAVART :

Tra il 1820 ed il 1825, Biot e Savart prima, Ampère poi, stabilirono le leggi che legano l'induzione magnetica $\vec{B}$ alle correnti ELETTRICHE e le forze in gioco.

Consideriamo un trattino di un filo conduttore $d\vec{\ell}$ percorso da una corrente continua di intensità $i$. Sia $\vec{x}$ il raggio del vettore che va da $d\vec{\ell}$ ad un punto d'osservazione P.




Il CAMPO MAGNETICO infinitesimo nel punto P è:

$$d\vec{B} = k i \frac{d\vec{\ell} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = k i \frac{d\vec{\ell} \times \hat{u}_x}{|\vec{x}|^2}$$

Se si ricorda che $i = \frac{dq}{dt}$ e che quindi $i d\vec{\ell} = q\vec{v}$, si ottiene:

$$\boxed{d\vec{B} = kq \frac{\vec{v} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$$

Quest'espressione vale per velocità $\vec{v}$ molto minori della velocità della luce ($c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s).
La costante K, in un sistema di Gauss (unità di misura elettromagnetiche) è:

$$\boxed{K = \frac{1}{c}} \quad ; \quad c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$$

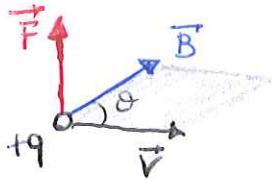
Una carica elettrica a riposo in un certo sistema di riferimento genera in quel sistema solo un campo elettrico, MA se è in un sistema IN MOTO, genera anche un Campo Magnetico.

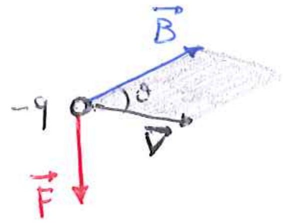
## • Forza Magnetica su una Carica in Moto:

Consideriamo una particella di massa $m$ e carica $q$ posta in un campo magnetico $\vec{B}$. Se la particella è in moto con velocità $\vec{v}$ rispetto ad un sistema di riferimento solidale alle sorgenti del campo magnetico, allora sulla particella agisce la FORZA DI LORENTZ:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$ → FORZA DI LORENTZ

In modulo: $F = qvB \sin\theta$, con $\theta$ angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{B}$. La forza $\vec{F}$ è PERPENDICOLARE al piano individuato da $\vec{v}$ e $\vec{B}$ con verso dato dalla REGOLA DELLA MANO DESTRA se la carica $q$ è POSITIVA. Altrimenti, se $q$ è negativa, il verso è opposto.




In particolare, $\vec{F}$ è sempre ORTOGONALE alla velocità $\vec{v}$, cioè alla TRAIETTORIA. Quindi, in base alla definizione di lavoro e di energia cinetica, dati 2 qualsiasi punti P e Q sulla traiettoria:

$$\boxed{\Delta E_K = \frac{1}{2}mv_Q^2 - \frac{1}{2}mv_P^2 = W = \int_P^Q \underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{s}}_{\vec{F}\perp d\vec{s} \;=\; 0} = 0}$$

⇒ LA FORZA DI LORENTZ NON COMPIE LAVORO sulla particella!

È una forza che non comporta accelerazione tangenziale, ma solo accelerazione centripeta, dunque la velocità cambia solo in direzione, MA non in modulo

⇒ $\boxed{v = \text{costante}}$ ⇒ TRAIETTORIA CIRCOLARE

• Dunque:
$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{ELETTRICA}} \parallel \vec{E} \\ \vec{F}_{\text{MAGNETICA}} \perp \vec{B} \end{cases}$$

## UNITÀ DI MISURA DEL CAMPO MAGNETICO

Essendo: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, si ha:

$$[\vec{B}] = \frac{N}{C\,m/s} = \frac{N}{A\,m} = \frac{kg \cdot \cancel{m}}{s^2}\cdot\frac{1}{A\cancel{m}} = \frac{kg}{A\,s^2} = [\text{Tesla}] = T$$

$\Rightarrow [\vec{B}] = T$

A volte si usa anche il Gauss $[G]$: $1\,G = 10^{-4}\,T$

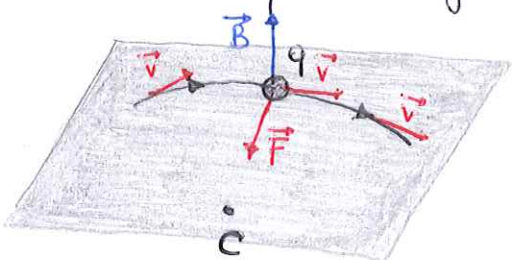
Il CAMPO MAGNETICO TERRESTRE vale $0{,}4\,G = 0{,}4\cdot 10^{-4}\,T$.

In laboratorio si può raggiungere un campo magnetico di $2$-$3\,T$. Per arrivare a $10\,T$ bisogna usare i SUPERCONDUTTORI.

## • MOTO IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME, $\theta = \frac{\pi}{2}$:

Supponiamo che il campo magnetico $\vec{B}$ sia uniforme e che la velocità $\vec{v}$ iniziale sia ortogonale a $\vec{B}$ $(\theta = \frac{\pi}{2})$. La FORZA DI LORENTZ $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ è anche essa ortogonale a $\vec{B}$ e produce una VARIAZIONE della DIREZIONE di $\vec{v}$ ancora ortogonale a $\vec{B}$.

$\Rightarrow$ [In qualsiasi istante successivo, $\vec{v}$ sta nel piano ortogonale a $\vec{B}$ individuato da $\vec{v}$ iniziale:



]

Essendo $\sin\theta = 1$:

$$F = qvB\sin\theta = qvB \quad ; \quad \text{ma } F = ma_n \quad (a_t = 0) \rightarrow F = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

Ricaviamo il RAGGIO DI CURVATURA della traiettoria:

$$F = qvB = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{mv}{qB}} = \frac{p}{qB}$$

Essendo $\vec{B}$ uniforme, $B$ è costante, così come $q$, $m$ e $v$ che cambia solo di direzione.

Quindi, il RAGGIO di CURVATURA $r$ è COSTANTE! $\longrightarrow$ MOTO CIRCOLARE UNIFORME

E la velocità angolare è:

$$\boxed{\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}}$$

Quindi, in termini vettoriali, essendo $\vec{a}_{cp} = \vec{a}_m = \vec{\omega} \times \vec{V}$:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{\omega} \times \vec{V} = -m\vec{V} \times \vec{\omega}$$

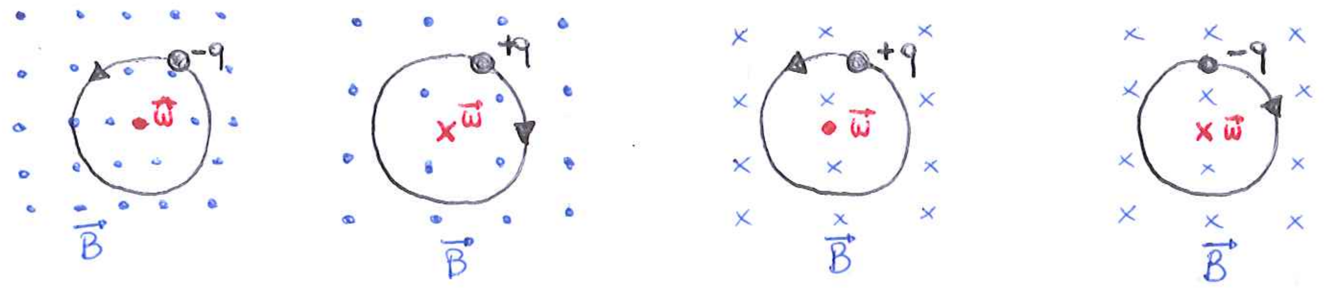
per la PROPRIETÀ ANTICOMMUTATIVA del PRODOTTO VETTORIALE.

Cioè:

$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}}$$

La VELOCITÀ ANGOLARE $\vec{\omega}$ è sempre PARALLELA al campo magnetico $\vec{B}$. Il verso è dato da:

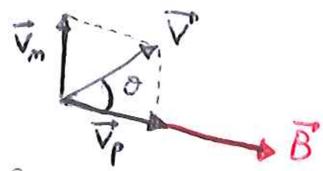
$$\begin{cases} -q \rightarrow \vec{\omega} \text{ ha stesso VERSO di } \vec{B} : \text{ moto antiorario dalla punta di } \vec{B} \\ +q \rightarrow \vec{\omega} \text{ ha VERSO OPPOSTO a } \vec{B} : \text{ moto orario dalla punta di } \vec{B} \end{cases}$$




È da notare che $\vec{\omega}$ NON dipende da $r$ né da $v$ (il loro rapporto è costante), quindi anche il PERIODO e la FREQUENZA sono costanti:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad ; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi B}}$$

- **Moto in un Campo Magnetico Uniforme, θ generico:**




Scomponiamo la velocità $\vec{V}$ in 2 componenti:

$V_m = V \sin\theta$ ; $V_p = V\cos\theta \longrightarrow \vec{V}_p \parallel \vec{B}$, quindi $\vec{V}_p \times \vec{B} = 0$

Quindi:

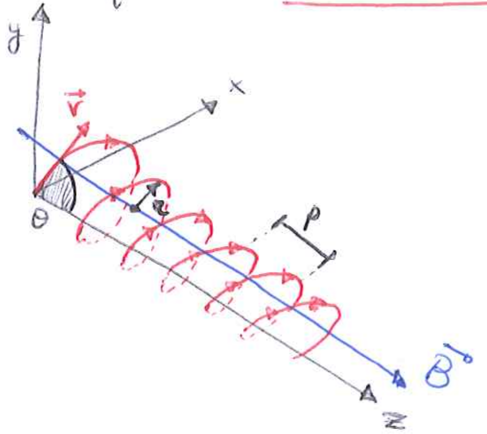
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q\left(\vec{V}_m + \vec{V}_p\right) \times \vec{B} = q\vec{V}_m \times \vec{B}$$

Abbiamo quindi, in un piano ortogonale a $\vec{B}$, un MOTO CIRCOLARE UNIFORME con velocità $V_m$; il RAGGIO DI CURVATURA è:

$$\boxed{r = \frac{mV_m}{qB} = \frac{mV\sin\theta}{qB}} \quad , \text{ ma } \quad \boxed{\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}} \quad \text{lo stesso}$$

Invece, lungo $\vec{B}$, non essendoci forze, si ha moto RETTILINEO UNIFORME.

Si ottiene quindi un MOTO ELICOIDALE UNIFORME avente come ASSE la direzione di $\vec{B}$:




Nel tempo di un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, la particella si sposta lungo $\vec{B}$ di una quantità:

$$\boxed{p = v_p T = \frac{2\pi m \, v\cos\theta}{qB}}$$ → PASSO DELL'ELICA

detta PASSO DELL'ELICA. Fissato $\vec{B}$, il verso ~~del~~ di percorrenza dell'elica è dato dalle stesse regole viste in precedenza.

## CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE E SECONDA LEGGE DI LAPLACE

Abbiamo definito in precedenza la densità di corrente come:

$$\vec{J} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$$

che è parallela al campo elettrico $\vec{E}$.

Se il CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE è immerso in un CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$, ciascun elettrone è soggetto alla FORZA DI LORENTZ:

$$\vec{F}_L = -e\vec{v}_d \times \vec{B}$$

Poiché $n$ è il numero di elettroni per unità di volume, in un tratto di conduttore lungo $ds$ e di sezione $\Sigma$ ci sono $n\Sigma ds$ elettroni, e la forza RISULTANTE è:

$$d\vec{F} = n\Sigma ds \cdot \vec{F}_L = -(\Sigma ds)en\vec{v}_d \times \vec{B} = \Sigma ds \, \vec{J} \times \vec{B}$$

Essendo $\Sigma ds = d\tau$, volume infinitesimo, si ha che la forza agente SULL'UNITÀ DI VOLUME è:

$$\boxed{\vec{F}_\tau = \vec{J} \times \vec{B}}$$

Se si considera un CONDUTTORE FILIFORME, ricordando che $i = \Sigma_i J$ ed orientando $d\vec{s}$ come $\vec{J}$, si ha:

$$dF = \Sigma_i ds\, \vec{J} \times \vec{B} \Rightarrow \boxed{d\vec{F} = i\, d\vec{s} \times \vec{B}} \longrightarrow$$ SECONDA LEGGE DI LAPLACE

Su un filo lungo ds percorso da corrente $i$ ed immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ agisce una FORZA MAGNETICA ortogonale al filo ed al campo magnetico, con verso dato dalla regola della mano destra.

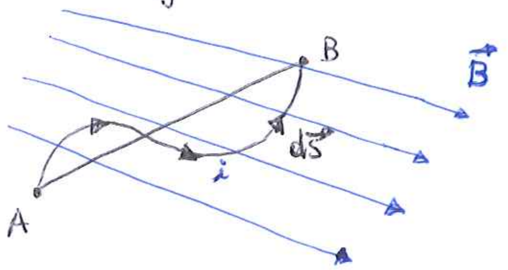
**NOTA:** La Forza NON dipende dal segno dei portatori di carica; è proporzionale all'intensità di corrente $i$.

Considerando gli estremi del filo A e B:

$$\boxed{\vec{F} = i \int_A^B d\vec{s} \times \vec{B}}$$

Se $\vec{B}$ è uniforme, possiamo scrivere: $\underline{\vec{F} = i \left( \int_A^B d\vec{s} \right) \times \vec{B}} = i\, \vec{\ell} \times \vec{B}$

Sia $\vec{B}$ uniforme e consideriamo un conduttore CURVILINEO in un piano:




Scomponiamo il tratto $d\vec{s}$ lungo x e lungo y:

$d\vec{s} = dx\, \hat{u}_x + dy\, \hat{u}_y$ ; $\overline{AB} = \Delta x\, \hat{u}_x + \Delta y\, \hat{u}_y$

$\vec{B} = B_x \hat{u}_x + B_y \hat{u}_y + B_z \hat{u}_z$

Con $\Delta x = x_B - x_A$ e $\Delta y = y_B - y_A$

Sviluppando i prodotti vettoriali, si ha:

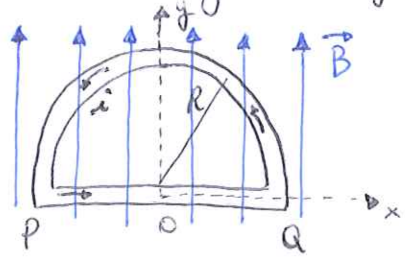
$$\boxed{\vec{F} = i \left( \int_A^B d\vec{s} \right) \times \vec{B} = i\, \overline{AB} \times \vec{B}}$$

La FORZA su un filo che giace in un piano ed è immerso in un campo magnetico uniforme NON DIPENDE DALLA FORMA DEL FILO, ma solo dal punto iniziale e finale.

- Se il FILO è PARALLELO a $\vec{B} \longrightarrow \vec{F} = 0$
- Se il filo è ORTOGONALE a $\vec{B} \longrightarrow \vec{F} = max = iB\, \overline{AB}$
- Se A e B coincidono (spirale chiusa) $\longrightarrow \underline{\vec{F} = 0}$

• Esempio 7.2

In un circuito chiuso a forma di semicirconferenza di raggio R fluisce una corrente di intensità $i$. Tratto rettilineo PQ // asse x. $\vec{B}$ // asse y.
Calcolare la forza magnetica lungo il tratto curvilineo e quello rettilineo.




$\overline{PQ} = 2R\hat{u}_x$

Sul tratto rettilineo: $(d\vec{s} = ds\,\hat{u}_x)$

$\vec{F} = 2Ri\,\underbrace{\hat{u}_x \times \vec{B}}_{B\hat{u}_z} = \boxed{i\,2RB\,\hat{u}_z}$, con verso uscente dal foglio.

Nel tratto curvilineo: $d\vec{s} = -dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y$, seguendo il verso della corrente.

$$d\vec{F} = i\,d\vec{s} \times \vec{B} = iB(-dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y) \times \hat{u}_y = -iB\,dx\,\hat{u}_z$$

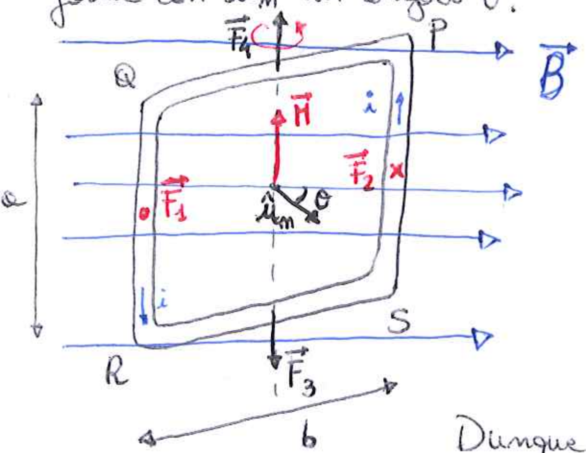
Integrando:

$$\vec{F} = -iB\hat{u}_z \int_{-R}^{R} dx = \boxed{-2iRB\,\hat{u}_z} \longrightarrow$$ uguale ed opposta all'altra
(la somma deve fare zero perché percorso chiuso)

Si vede che la forza NON dipende dalla forma del conduttore.

# Momenti Meccanici

Consideriamo una SPIRA RETTANGOLARE, di lati a e b, percorsa dalla corrente $i$.
Sia $\hat{u}_m$ il versore normale al piano della spira (con verso dato sempre dalla percorrenza con la corrente $i$). La spira è immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, che forma con $\hat{u}_m$ un angolo $\theta$.

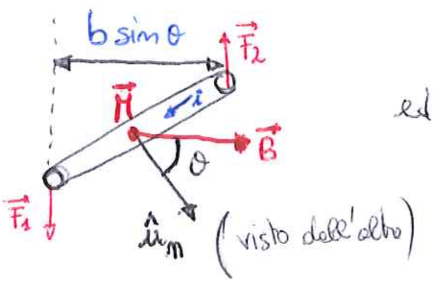



Si generano quattro forze:
le forze $\vec{F}_3$ ed $\vec{F}_4$ hanno momento risultante NULLO.
Le forze $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$, ciascuna di modulo $iaB$, poiché $\vec{B}$ è ortogonale ai lati lunghi a, sono anch'esse uguali e contrarie, ma formano una COPPIA di braccio $b\sin\theta$.

Dunque, in modulo, il MOMENTO DI COPPIA vale:

$$\boxed{M = b\sin\theta\, F = Biab\sin\theta = i\Sigma B\sin\theta}$$

ed è PARALLELO AL PIANO DELLA SPIRA



## • Momento Magnetico di una Spira:

Definiamo MOMENTO MAGNETICO di una spira, il vettore:

$$\boxed{\vec{m} = i \Sigma \hat{u}_m}$$

ORTOGONALE al piano della spira di area $\Sigma$ percorsa da corrente $i$.

Dunque, il MOMENTO MECCANICO $\vec{M}$ si può scrivere come:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = i \Sigma \hat{u}_m \times \vec{B}}$$

Il risultato vale per QUALSIASI FORMA della spira!

Ora, supponiamo che la spira sia vincolata lungo un asse parallelo ad $\vec{M}$ ed abbia un momento di inerzia $I$ rispetto a tale asse.

Spostiamo ~~l'asse~~ la spira dalla posizione di equilibrio di un angolo $\theta$ piccolo da poter usare l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$.

Per il TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE proiettato lungo l'asse di rotazione:

$$M = -mB\theta = \frac{dL}{dt} = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

dove il segno meno indica che il momento richiama sempre la spira verso la situazione di equilibrio.

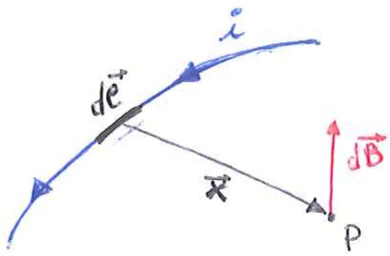
Si ha:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad , \quad \text{con} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{mB}{I}}}$$

Quindi la spira oscilla di MOTO ARMONICO con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mB}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{i\Sigma B}}$.

# 8. Sorgenti del Campo Magnetico

## • Campo Magnetico Prodotto da Corrente:




Sia $d\vec{\ell}$ un trattino infinitesimo di filo percorso dalla corrente di intensità $i$ e sia $\vec{x}$ il raggio del vettore che lo collega al punto di osservazione P.

Allora, l'induzione magnetica $d\vec{B}$ in P è:

$$\underbrace{d\vec{B} = K_m\, i\, \frac{d\vec{\ell} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}} = K_m\, i\, \frac{d\vec{\ell} \times \hat{u}_x}{|\vec{x}|^2}$$

$K_m$ è una costante che dipende dal sistema di unità di misura e dal mezzo materiale in cui si sperimenta.

<u>Nel Vuoto</u>: $K_m = 10^{-7}\,\frac{H}{m}$ (Henry su metro)

Spesso, $K_m$ si definisce come: $\boxed{K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}}$

dove: $\boxed{\mu_0 = 4\pi K_m = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{H}{m} \approx 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\frac{H}{m}}$ → PERMEABILITÀ MAGNETICA NEL VUOTO

Dunque, sostituendo nell'espressione di $d\vec{B}$, si ha:

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,d\vec{\ell} \times \hat{u}_x}{x^2}}$$ → PRIMA LEGGE DI LAPLACE

Integrando su un CIRCUITO CHIUSO, si ottiene il campo magnetico che esso genera:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\, i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell} \times \hat{u}_x}{x^2}}$$ → LEGGE DI AMPÈRE - LAPLACE

## • Campo Magnetico prodotto da una Carica in Moto:

Essendo la densità di corrente $J = \frac{i}{\Sigma}$ e $\vec{J} = nq\vec{v}$, sostituendo nella legge di Laplace:

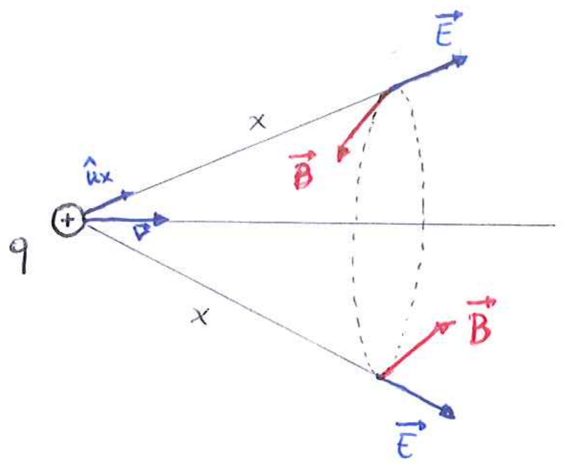
$$\underbrace{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \times \hat{u}_x}{x^2}\, n\, d\tau}$$

dove $d\tau = d\ell \cdot \Sigma$ = volume infinitesimo e bisogna notare che $\vec{J}$ ha la stessa direzione di $d\vec{\ell}$ e quindi lo stesso vale anche per $\vec{v}$

**NOTA**: $n d\tau$ dà il numero di cariche contenute nel volume $d\tau$ che con il loro MOTO producono il campo $d\vec{B}$.

Quindi, il CAMPO MAGNETICO prodotto da 1 SINGOLA CARICA IN MOTO è:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \hat{u}_x}{x^2}}$$




Il campo elettrico dovuto alla carica nello stesso punto P in cui abbiamo calcolato il campo magnetico, trascurando il fatto che la carica sia in moto, è:

$$\vec{E}(x) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 x^2} \hat{u}_x$$

Possiamo allora scrivere:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \hat{u}_x}{x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \left( \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 x^2} \hat{u}_x \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}$$

Quindi:

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}} \longrightarrow$$ Relazione tra $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ dovuti ad una CARICA IN MOTO

, dove, è implicita l'importante relazione: $\boxed{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$

con $c = 3 \cdot 10^8 \, m/s$, VELOCITÀ DELLA LUCE NEL VUOTO

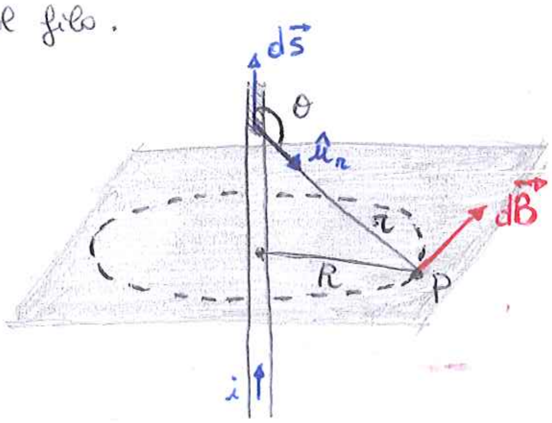
**NOTA**: Essendo $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$, si evince che $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ sono ORTOGONALI tra loro.

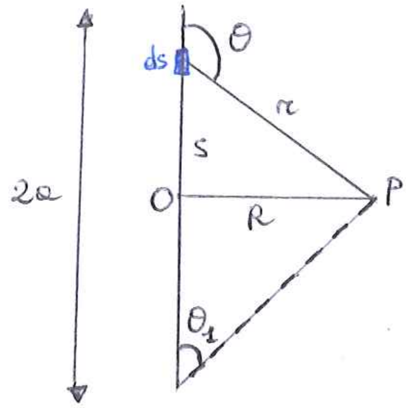
Inoltre, essendo legati dalla velocità, bisogna fare delle considerazioni relativistiche: la relazione $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \hat{u}_x}{x^2}$ vale fin quando $\vec{v}$ è trascurabile rispetto a $c$;

In particolare, vale fin quando $\boxed{\left(\frac{v}{c}\right)^2 << 1}$

## Legge di Biot-Savart:

Consideriamo un FILO CONDUTTORE RETTILINEO, di lunghezza $2a$, percorso dalla corrente continua $i$. Poniamoci sull'asse mediano del filo nel punto P distante R dal filo.




Un elemento di filo ds produce in P il campo magnetico: (per 1ª Legge di Laplace)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin\theta}{r^2}$$

Osserviamo che:

$$r \sin(\pi - \theta) = r \sin\theta = R \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$$

$$s \tan(\pi - \theta) = -s \tan\theta = R \Rightarrow ds = \frac{R\, d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cancel{\sin\theta}\, d\theta \cancel{R}}{\cancel{\sin^2\theta}} \cdot \frac{\sin^2\theta}{R^{\cancel{2}}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{R} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d(\cos\theta)}{R}$$

Dunque, mezzo filo di lunghezza $a$ produce il campo magnetico:

$$B_a = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\cos\theta_1}^{0} d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 i \cos\theta_1}{4\pi R}$$

Esprimendo $\cos\theta_1$ in funzione della lunghezza del filo: $\cos\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$

abbiamo che il campo di tutto il filo vale:

$$\boxed{B = 2B_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}}}$$

Nel PIANO MEDIANO, $\vec{B}$ è costante su qualsiasi circonferenza di raggio R ed è TANGENTE a tale circonferenza.

Detto $\hat{u}_\phi$ il versore tangente alla circonferenza in ogni punto ed orientato secondo la regola della mano destra seguendo il verso della corrente, abbiamo:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R\sqrt{R^2+a^2}}\,\hat{u}_\phi}$$

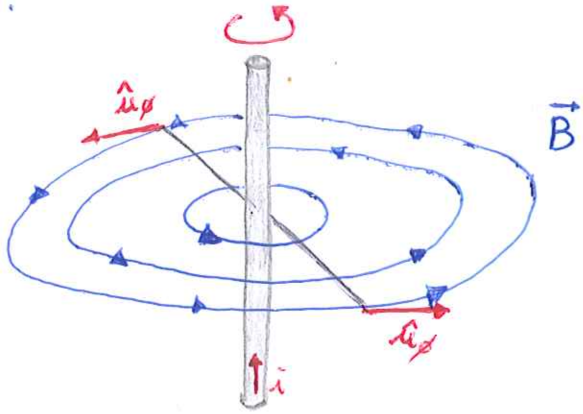
Facciamo ora tendere la lunghezza $a \to \infty$ all'infinito: di conseguenza, $\theta_1 \to 0$ e $\cos\theta_1 \to 1$.

Quindi, abbiamo:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\,\hat{u}_\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\,\hat{u}_t \times \hat{u}_m} \rightarrow \text{LEGGE DI BIOT-SAVART}$$

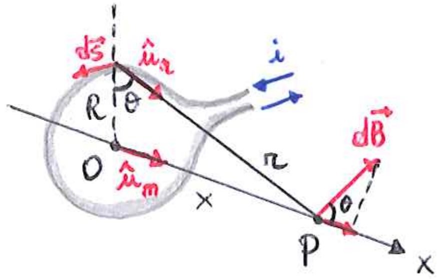
dove $\hat{u}_t$ è il versore parallelo al filo e concorde alla corrente e $\hat{u}_m$ è il versore ortogonale al filo che va verso P, quindi sul piano mediano.

IL CAMPO MAGNETICO di un filo rettilineo INDEFINITO dipende solo dalla DISTANZA DAL FILO, in modo inversamente proporzionale. Le sue linee sono circonferenze concentriche al filo.




## • SPIRA CIRCOLARE:

Calcoliamo il campo magnetico su una SPIRA CIRCOLARE di raggio R, percorsa da corrente di intensità $i$.




Nel punto P, distante x dal centro O della spira, un elemento di spira $d\vec{s}$ genera il campo $d\vec{B}$, di modulo:

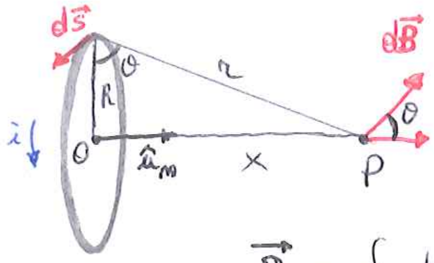
$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\cdot\frac{|d\vec{s}\times\hat{u}_r|}{r^2} = \frac{\mu_0 i\, ds}{4\pi r^2}$$

poiché $d\vec{s} \perp \hat{u}_r$.

La componente lungo l'asse x, che PASSA ATTRAVERSO LA SPIRA in O, è:

$$\boxed{dB_x = \frac{\mu_0 i\, ds}{4\pi r^2}\cos\theta}$$

, con $\theta$ angolo tra $d\vec{B}$ e asse x.




Considerando TUTTI I CONTRIBUTI della spira, quelli trasversali si elidono per SIMMETRIA, quindi il campo risultante è parallelo all'asse x, ASSE DELLA SPIRA:

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} ds\, \hat{u}_m = \frac{\mu_0 i \cos\theta}{4\pi r^2} \oint ds\, \hat{u}_m = \frac{\mu_0 i \cos\theta}{\cancel{4\pi}_{2} r^2} \cdot \cancel{2\pi} R\, \hat{u}_m = $$
$$= \frac{\mu_0 i R}{2r^2} \cos\theta\, \hat{u}_m$$

essendo $\cos\theta$ ed $r$ costanti.

Posto $r^2 = x^2 + R^2$ e $\cos\theta = R/r \implies \cos\theta = \dfrac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$

$$\boxed{\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3} \hat{u}_m = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}} \hat{u}_m}$$

, con APPROSSIMAZIONE DI DIPOLO $x \approx r$ (per $x \gg R$)

Al CENTRO DELLA SPIRA, il CAMPO è MASSIMO:

$$\boxed{\vec{B}_{max} = \vec{B}(x=0) = \frac{\mu_0 i}{2R} \hat{u}_m}$$

per $x \to \infty$, $\vec{B}(x) \to 0$.

- Quando ho l'APPROSSIMAZIONE DI DIPOLO per $x \gg R$, ottengo:

$$\boxed{\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \hat{u}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 i \pi R^2}{x^3} \hat{u}_m \approx \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{r^3}}$$

dove $\vec{m} = i \Sigma \hat{u}_m = i \pi R^2 \hat{u}_m$ è il MOMENTO MAGNETICO della spira.

- EQUIVALENZA CON IL DIPOLO ELETTRICO (in Coordinate Polari)

$$\begin{cases} \vec{E} = E_r \hat{u}_r + E_\theta \hat{u}_\theta = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (2\cos\theta\, \hat{u}_r + \sin\theta\, \hat{u}_\theta) \to \text{DIPOLO ELETTRICO} \\ \vec{B} = B_r \hat{u}_r + B_\theta \hat{u}_\theta = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos\theta\, \hat{u}_r + \sin\theta\, \hat{u}_\theta) \to \text{DIPOLO MAGNETICO} \end{cases}$$

Nel dipolo elettrico c'è $p$ che dipende dalla carica $q$;
nel dipolo MAGNETICO, c'è il momento magnetico $m$ che dipende dalla CORRENTE $i$.

OSSERVAZIONI:

- Le linee del CAMPO ELETTRICO escono od entrano dalle cariche sorgenti (a seconda del segno) → il FLUSSO è diverso da zero attraverso $\Sigma$ che contiene le cariche sorgenti
- Le linee del CAMPO MAGNETICO sono continue, senza inizio né fine → il FLUSSO è uguale a ZERO SEMPRE attraverso una superficie CHIUSA.

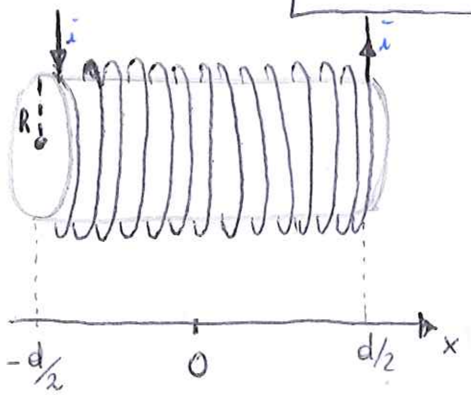
# • Solenoide Rettilineo:

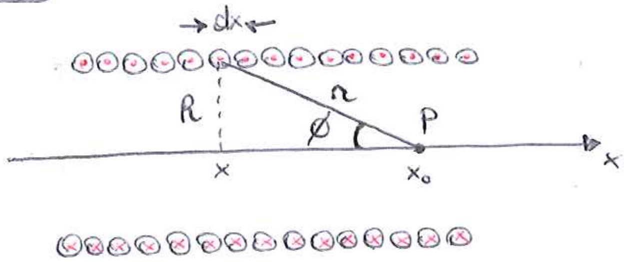
Un SOLENOIDE è costituito da un filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica dal piccolo passo. Lo si può vedere come un insieme di tante spire circolari.

Sia $d$ la lunghezza del solenoide, $R$ il raggio, $N$ il numero di spire ed $n = \frac{N}{d}$ il numero di spire per unità di lunghezza (densità).

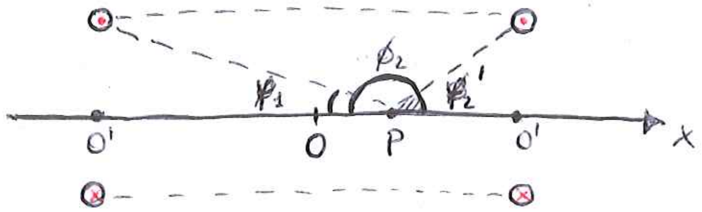
Dunque, in un tratto $dx$ ci sono $n\,dx$ spire. In un punto $P$ sull'asse $x$ del solenoide, il CAMPO MAGNETICO si calcola con la formula del campo di una spira percorsa dalla corrente $\underline{n i dx}$:

$$\boxed{dB(x) = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2r^3}\,dx}$$




(1)




(2)

Dalla figura, si vede che:

$$r \sin\phi = R \quad e \quad x - x_0 = -R \,\mathrm{cotan}\,\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{R\,d\varphi}{\sin^2\phi} \Rightarrow dB(x) = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2r^3}dx = \frac{\mu_0 i \cancel{r^2} \sin^2\phi\, n}{2\cancel{r^3}} \cdot \frac{R\,d\varphi}{\sin^2\phi} = \frac{n\mu_0 i \cancel{r} \sin\phi\, d\varphi}{2\cancel{r}} =$$

$$= \frac{n\mu_0 i}{2}\sin\varphi\, d\varphi$$

Quindi:

$$\boxed{dB(x) = \frac{\mu_0 i n}{2}\sin\varphi\, d\varphi}$$

Il campo magnetico del solenoide nel punto $P$ si ottiene sommando i contributi di tutte le spire, cioè, come si vede dalla figura (2), integrando da $\phi_1$ a $\phi_2$; $\phi_1$ e $\phi_2' = \pi - \phi_2$ sono gli angoli sotto cui sono viste da $P$ le SPIRE TERMINALI del solenoide.

$$B(x) = \frac{\mu_0 i m}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{\mu_0 i m}{2} \left( \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \right) = \frac{\mu_0 i m}{2} \left( \cos\phi_1 + \cos\phi_2' \right)$$

Misurando x (figura 1) dal centro del solenoide, si ha:

$$B(x) = \frac{\mu_0 i m}{2} \left[ \frac{d+2x}{\sqrt{(d+2x)^2 + 4R^2}} + \frac{d-2x}{\sqrt{(d-2x)^2 + 4R^2}} \right]$$

- AL CENTRO DEL SOLENOIDE $\longrightarrow$ $\vec{B}$ è MAX:

$$\boxed{B_0(x=0) = \mu_0 i m \frac{d}{\sqrt{d^2+4R^2}}}$$

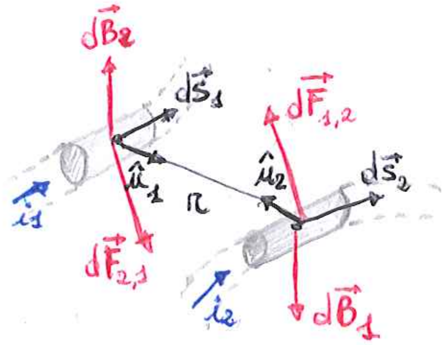
- ALL'ESTREMITÀ DEL SOLENOIDE $\left(x = \frac{d}{2}\right)$: $\longrightarrow$ $\vec{B}$ è MIN (decresce simmetricamente)

$$\boxed{B_{0'}\left(x=\frac{d}{2}\right) = \frac{\mu_0 i m}{2} \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}}$$

- Se la lunghezza del solenoide è molto maggiore del raggio $(d \gg R)$ e quindi è come se $d \to \infty$, dal centro O le due spire terminali vengono viste sotto angoli quasi nulli, per cui $(\cos\phi_1 + \cos\phi_2') \approx 2$, e il CAMPO MAGNETICO NEL CENTRO del solenoide vale:

$$\boxed{B_\infty = \mu_0 i m}$$

- ELETTRODINAMICA: FORZE AGENTI TRA DUE CIRCUITI




Consideriamo 2 circuiti percorsi da corrente e per semplicità consideriamo solo CIRCUITI RETTILINEI RIGIDI.

La forza $d\vec{F}_{1,2}$ generata da $d\vec{B}_1$ e agente su $d\vec{s}_2$ è:

$$d\vec{F}_{1,2} = i_2 d\vec{s}_2 \times d\vec{B}_1$$

Poiché il campo magnetico è esprimibile nella forma:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s}_1 \times \hat{u}_1}{r^2}$$

Si ottiene che:

$$\boxed{d\vec{F}_{1,2} = i_2 d\vec{s}_2 \times d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{s}_2 \times (d\vec{s}_1 \times \hat{u}_1)}{r^2}}$$

Analogamente: $d\vec{F}_{2,1} = i_1 d\vec{s}_1 \times d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times \hat{u}_2)}{r^2}$

*È chiaro che abbiamo sfruttato le 2 LEGGI DI LAPLACE:

$$d\vec{F} = i\, d\vec{s} \times d\vec{B} \quad ; \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_m}{r^2}$$

La forza risultante tra i 2 circuiti si ottiene mediante una DOPPIA INTEGRAZIONE sui due circuiti che tiene conto di tutte le possibili coppie $d\vec{s}_1$ e $d\vec{s}_2$:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s}_2 \times (d\vec{s}_1 \times \hat{u}_1)}{r^2}$$

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times \hat{u}_2)}{r^2}$$

- Essendo: $\underline{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}}$ si ha:

$$\begin{cases} \vec{F}_{1,2} = \dfrac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \displaystyle\oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_2 \cdot \hat{u}_1)\, d\vec{s}_1 - (d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1)\hat{u}_1}{r^2} \\ \vec{F}_{2,1} = \dfrac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \displaystyle\oint_2 \oint_1 \frac{(d\vec{s}_1 \cdot \hat{u}_2)\, d\vec{s}_2 - (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2)\hat{u}_2}{r^2} \end{cases}$$

Ma posso scrivere $\underline{\frac{\hat{u}_1}{r^2} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)}$ e $\underline{\frac{\hat{u}_2}{r^2} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)}$;

Il termine: $\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \left[\oint_2 \frac{(d\vec{s}_2 \cdot \hat{u}_1)}{r^2}\right] d\vec{s}_1 = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \left[\oint_2 d\vec{s}_2 \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\vec{s}_1 = 0$,

poiché la circuitazione di un GRADIENTE È SEMPRE NULLA.

Lo stesso in $\vec{F}_{2,1}$, la parte $\oint_2 \oint_1 \frac{(d\vec{s}_1 \cdot \hat{u}_2)\, d\vec{s}_2}{r^2} = 0$.

- ATTENZIONE: $\boxed{\hat{u}_1 = -\hat{u}_2}$, quindi gli integrali si possono SCAMBIARE!

$$\boxed{\vec{F}_{1,2} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1)\hat{u}_1}{r^2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2)\hat{u}_2}{r^2} = -\vec{F}_{2,1}}$$

VALE IL PRINCIPIO DI AZIONE - REAZIONE!

- In particolare, consideriamo 2 FILI RETTILINEI molto lunghi e vicini.

Abbiamo due possibilità:

(1) se i fili sono ORTOGONALI $\Rightarrow \vec{F}_{1,2} = \vec{F}_{2,1} = 0$ $\left( d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2 = 0 \text{ ovunque} \right)$

(2) se i fili sono PARALLELI, il verso dipende dal verso delle correnti:

$$\begin{cases} \text{CORRENTI EQUIVERSE} \longrightarrow \text{FORZA ATTRATTIVA} \\ \text{CORRENTI DISCORDI} \longrightarrow \text{FORZA REPULSIVA} \end{cases}$$

In tal caso, il modulo della Forza, detta $r$ la distanza tra i fili, si ha che il campo magnetico del filo 1 sul filo 2 è:

$$\boxed{B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}}$$ , per la Legge di Biot-Savart

Dunque, la Forza esercitata su un tratto d del filo 2 è:

$$\boxed{F_{1,2} = B_1 i_2 d = \frac{\mu_0 i_1 i_2 d}{2\pi r}}$$

Quindi, la FORZA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA è (dividendo per d):

$$\boxed{F_d = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}}$$

Tale relazione ci permette di definire la grandezza fondamentale dell'INTENSITÀ DI CORRENTE ELETTRICA:

La l'intensità di 1 A quella corrente che, circolando in due fili rettilinei paralleli, distanti $r = 1\,m$, genera una Forza per metro di ciascun conduttore:

$$F(r = 1m, i = 1A) = \frac{\mu_0}{2\pi} = \underbrace{2 \cdot 10^{-7}\,N}$$

- In tal modo si FISSA anche la PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO $\mu_0$:

$\mu_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-7}\,N \implies$ Dalla relazione: $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$ si definisce anche $\varepsilon_0$.

Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} \bullet\ \mu_0 = 4\pi K_m = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{H}{m} \approx 1{,}26 \cdot 10^{-6}\ \frac{H}{m} \longrightarrow \text{PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO} \\ \bullet\ c = 3 \cdot 10^{8}\ m/s \longrightarrow \text{VELOCITÀ DELLA LUCE} \\ \bullet\ \varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2 \longrightarrow \text{COSTANTE DIELETTRICA NEL VUOTO} \end{cases}$$

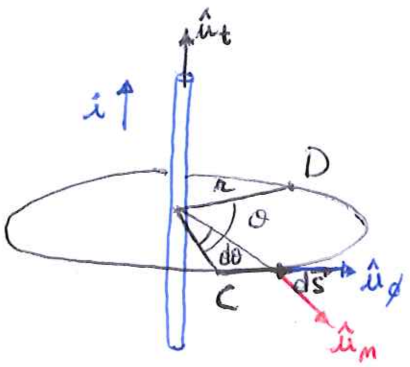
# LEGGE DI AMPÉRE

Abbiamo visto che il legame che c'è tra il campo magnetico $\vec{B}$ e le correnti che lo producono è dato dalla LEGGE DI AMPERE – LAPLACE:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

dove la distanza $r$ è dal tratto $d\vec{s}$ al punto P dove si vuole calcolare il campo. Tale espressione si può rappresentare mediante una <u>LEGGE INTEGRALE</u> analoga alla <u>Legge di Gauss</u> per il CAMPO ELETTRICO.

Consideriamo un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente $i$ e che quindi produce un campo magnetico con linee di campo concentriche di modulo $\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$.




Prendiamo un trattino $d\vec{s}$ su una linea di campo e facciamone il PRODOTTO SCALARE con $\vec{B}$:

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\, \hat{u}_\phi \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\, ds \quad , \text{ poiché}$$

$d\vec{s}$ è tangente alla traiettoria, ma anche $\hat{u}_\phi = \hat{u}_t \times \hat{u}_m$ lo è, quindi $ds\cos(0) = ds$.

Ora, dalla definizione di ANGOLO PIANO, abbiamo: $d\theta = \frac{ds}{r}$, quindi:

$$\boxed{\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{ds}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta}$$

Integrando tra C e D, si ottiene:

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_C^D d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\theta \quad ; \quad \int_D^C \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\theta$$

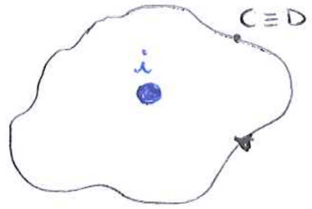
**NOTA**: L'integrale dipende solo dall'ANGOLO $\theta$, quindi se ne deduce che non dipende dal particolare percorso per andare da C a D!

Se calcoliamo l'integrale lungo una linea chiusa, abbiamo:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta$$

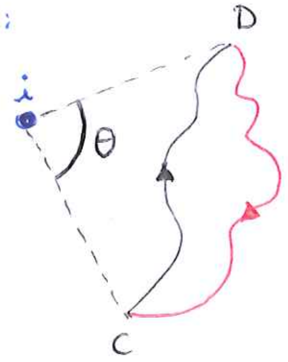
Abbiamo ora 2 CASI:

(1) Il percorso concatena la corrente:




$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta = \frac{\mu_0 i}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} = \boxed{\mu_0 i}$$

(2) Il percorso chiuso NON concatena la corrente:




$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta = \boxed{0}$$

Infatti:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_C^D d\theta + \int_D^C \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta =$$

$$= \cancel{\frac{\mu_0 i}{2\pi}\theta} - \cancel{\frac{\mu_0 i}{2\pi}\theta} = 0$$

Questi risultati sono INDIPENDENTI dalla forma del circuito!

Dunque, abbiamo la LEGGE DI AMPÈRE:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i}$$

La CIRCUITAZIONE del campo magnetico $\vec{B}$ è uguale alla SOMMA DELLE CORRENTI CONCATENATE moltiplicata per la permeabilità magnetica del vuoto.

- **ATTENZIONE**: $\vec{B}$ è generato da TUTTE le correnti, concatenate e non; invece $i$ è la somma SOLO delle CORRENTI CONCATENATE.

Inoltre, essendo la CIRCUITAZIONE NON NULLA lungo OGNI LINEA CHIUSA, si ha che

il CAMPO MAGNETICO NON È CONSERVATIVO!

- ANALOGIE TRA $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

- $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = E\Sigma = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}$ → quando $\Sigma$ include cariche (TEOREMA DI GAUSS)
- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$ → quando concatena correnti (LEGGE DI AMPERE)
- $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = 0$ → quando $\Sigma$ <u>non</u> include cariche
- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ → quando <u>non</u> concatena correnti

- FORMA LOCALE della LEGGE DI AMPÉRE:

Applichiamo ora il TEOREMA DI STOKES già visto per il campo elettrico in:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \text{rot}\,\vec{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \int_\Sigma (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n}\, d\Sigma$$

Quindi, per il CAMPO MAGNETICO:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \text{rot}\,\vec{B} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \int_\Sigma (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n}\, d\Sigma$$

Se la SUPERFICIE $\Sigma$ è attraversata da corrente, si ha:

$$i = \int_\Sigma \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma$$

Utilizzando la legge di Ampère, abbiamo:

$$\boxed{\int_\Sigma (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n}\, d\Sigma = \mu_0 i = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J} \cdot \hat{n}\, d\Sigma}$$

Che vale per qualsiasi superficie $\Sigma$.

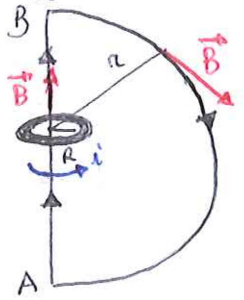
Dovendo appunto valere per ogni superficie $\Sigma$, si deve per forza avere:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}} \longrightarrow$$ FORMA LOCALE della LEGGE DI AMPERE

Si noti che $(\nabla \times \vec{B}) \parallel \vec{J}$ e quindi perpendicolare a $\vec{B}$ stesso: ovvio, perché la ROTAZIONE DI UN VETTORE È SEMPRE PERPENDICOLARE AL VETTORE STESSO!

- Esempio 8.4:

Verificare che il campo magnetico prodotto da una piccola spira di raggio R soddisfi la Legge di Ampere.




$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{2} \cdot \frac{R^2}{r^3} \hat{u}_m = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}} \hat{u}_m$$

è il campo prodotto dalla spira circolare lungo il suo asse, a distanza x.

Integrando da A a B, con $r \gg R$, si ha:

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_A^B \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2 dx}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i \cancel{R^2}}{2} \left[ \frac{x}{\cancel{R^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \right]_{-r}^{r} = \frac{\mu_0 i r}{\sqrt{r^2+R^2}}$$

L'integrale da B ad A lungo la circonferenza possiamo calcolarlo sfruttando l'espressione del dipolo magnetico, in cui $m = i\pi R^2$:

$$\vec{B} = B_r \hat{u}_r + B_\theta \hat{u}_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2\cos\theta \, \hat{u}_r + \sin\theta \, \hat{u}_\theta\right)$$

Quindi:

$$\int_B^A \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_B^A B_\theta \, r \, d\theta = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\cancel{\pi} r^{3/2}} \cdot i \cancel{\pi} R^2 \cdot \sin\theta \cdot \cancel{r} d\theta = \frac{\mu_0 i R^2}{4r^2} \int_0^\pi \sin\theta = \frac{\mu_0 i R^2}{4r^2} \Big[\underbrace{-\cos(\pi) + \cos(0)}_{2}\Big] =$$

$$= \frac{\mu_0 i R^2}{2r^2}$$

Se $\underline{r \gg R}$: lungo $\overline{AB}$ rettilineo: $\frac{\mu_0 i r}{\sqrt{R^2+r^2}} \longrightarrow \mu_0 i$

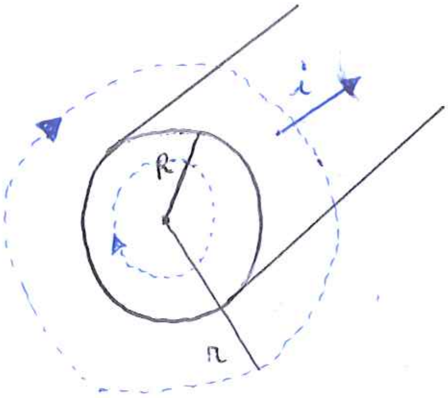
lungo $\widehat{BA}$ circonferenza: $\frac{\mu_0 i R^2}{2r^2} \longrightarrow 0$

quindi $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$ e vale la Legge di Ampére!

Se NON vale $(r \gg R)$: continua sempre a valere, ma è più difficile verificarla poiché non possiamo sfruttare: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} \left(2\cos\theta \, \hat{u}_r + \sin\theta \, \hat{u}_\theta\right)$.

## Esempio 8.5 : Filo Rettilineo Indefinito

Un filo rettilineo indefinito di raggio $R$ è percorso da una corrente $i$. Calcolare il campo magnetico in funzione della distanza $r$ dall'asse del filo.




La simmetria assiale ci dice che $B = B(r)$, cioè dipende solo dalla distanza dal filo (dall'ASSE).

- Se $r > R$, applichiamo la Legge di ~~Ampère~~ Biot-Savart:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B \underset{\uparrow}{=} \mu_0 i \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}}$$

Legge di AMPÈRE

Si noti che $B$ NON dipende dal RAGGIO DEL FILO $R$.

- Se $r < R$, bisogna tener conto della DENSITÀ DI CORRENTE $\vec{J}$:

$J = \frac{i}{\pi R^2}$ se la assumiamo uniforme sulla sezione, dunque:

$$i(r) = J \pi r^2 = i \frac{r^2}{R^2} \longrightarrow \text{CORRENTE CONCATENATA}$$

Dalla LEGGE DI AMPÈRE, si ha:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \mu_0 i(r) = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i r^{\cancel{2}}}{2\pi \cancel{r} R^2} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$$

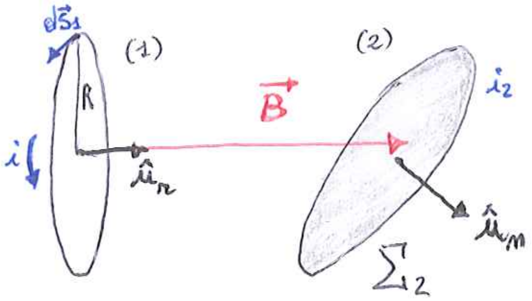
Quindi: $\boxed{B = \frac{\mu_0 J r}{2} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}}$, per $0 \leq r \leq R$.

- Il modulo di $\vec{B}$ cresce LINEARMENTE con $r$ all'interno del filo, è continuo per $r = R$, e all'esterno DECRESCE come $1/r$. $B(r=0) = 0$, sull'ASSE.

* Se il FILO FOSSE CAVO: all'esterno il campo rimarrebbe lo stesso, MA ALL'INTERNO si avrebbe $B(r<R) = 0$ !
Poiché $J = 0$ e non ci sarebbe corrente concatenata.

## • FLUSSO TRA CIRCUITI

Il campo magnetico generato da un circuito percorso da corrente produce un **FLUSSO MAGNETICO** attraverso qualsiasi altro circuito.




Il campo generato dal circuito (1) è dato dalla LEGGE DI AMPERE-LAPLACE:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}_1 \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Quindi, dalla definizione di FLUSSO, posso scrivere il flusso $\Phi_{1,2}$, generato dal campo magnetico del circuito (1) attraverso la superficie $\Sigma_2$ del circuito (2):

$$\boxed{\Phi_{1,2} = \iint_{\Sigma_2} \left( \oint \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \frac{d\vec{s}_1 \times \hat{u}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma_2}$$

dove, in realtà, $r$ è la distanza tra $d\vec{s}_1$ e l'elementino di superficie $d\Sigma_2$.

Analogamente:

$$\Phi_{2,1} = \iint_{\Sigma_1} \left( \oint \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{s}_2 \times \hat{u}_r}{r_2} \right) \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma_1$$

Possiamo scrivere: $\Phi_{1,2} = M_{1,2}\, i_1 \quad ; \quad \Phi_{2,1} = M_{2,1}\, i_2$

dove $M_{1,2}$ ed $M_{2,1}$ sono detti **COEFFICIENTI DI MUTUA INDUZIONE**; dimostreremo più avanti che $M_{1,2} = M_{2,1} = M$; quindi:

$$\boxed{\Phi_{1,2} = M i_1 \quad ; \quad \Phi_{2,1} = M i_2}$$

## • AUTOFLUSSO:

Il campo magnetico generato da un circuito produce un flusso anche attraverso il circuito stesso, detto **AUTOFLUSSO**:

$$\boxed{\Phi(\vec{B}) = \iint_{\Sigma} \left( \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{u}_m \, d\Sigma = L i}$$

Dove $L$ è detto **COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE**, o **INDUTTANZA**.

• **Legge di Gauss per il Campo Magnetico:**

Il FLUSSO per $\vec{B}$ si calcola come: $\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma \rightarrow$ se $\Sigma$ superficie APERTA

$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma \rightarrow$ se $\Sigma$ superficie CHIUSA

Ma il FLUSSO è sempre NULLO, in quanto le linee di campo sono continue, con verso costante ed ogni linea che entra nella superficie ne deve anche uscire.

Pertanto:

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0$$

Sfruttando il TEOREMA DELLA DIVERGENZA $(\nabla \cdot \vec{B})$ possiamo passare ad un integrale di Volume:

$$\boxed{\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \int_{V} \nabla \cdot \vec{B} \, dV = 0}$$

Poiché deve valere per ogni superficie $\Sigma$ e quindi per ogni volume $V$, deve essere:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

* La DIVERGENZA del CAMPO MAGNETICO è SEMPRE NULLA!

• **Campo Magnetostatico nel vuoto:**

## EQUAZIONI DI MAXWELL

Le equazioni di Maxwell per il campo magnetico IN FORMA INTEGRALE sono le già introdotte:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i \leftarrow$ LEGGE DI AMPERE ; $\oint \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0 \leftarrow$ LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

In forma LOCALE corrispondono a:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

* [Il campo magnetico è SOLENOIDALE, poiché ha divergenza pari a zero, ma, a differenza del campo elettrico, NON è IRROTAZIONALE, poiché $\nabla \times \vec{B} \neq 0$.]

Invece, per il campo elettrostatico avevamo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = 0 \quad ; \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Esprimiamo adesso $\vec{B}$ come segue:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\tau \frac{\vec{J} \times \hat{u}_r}{r^2} d\tau}$$

Applichiamo l'operatore gradiente $\nabla$, ricordando che $\frac{\hat{u}_r}{r^2} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$:

$$\nabla \cdot \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_\tau \vec{J} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int_\tau \vec{J} \cdot \nabla \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = 0}$$

infatti $\nabla$ può essere portato sotto il segno di integrale e scambiato con $\vec{J}$ (cambiando il segno del prodotto misto); dunque si ottiene il ROTORE di un GRADIENTE $\nabla \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$, che è sempre NULLO.

Pertanto, abbiamo DIMOSTRATO che $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

- POTENZIALE VETTORE $\vec{A}$:

Il fatto che il rotore di $\vec{B}$ sia diverso da zero quando concatenato da correnti, oppure, in altre parole, il fatto che la circuitazione del campo magnetico non sia uguale a zero:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad ; \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

NON permette di definire una FUNZIONE POTENZIALE scalare come invece è stato fatto per il campo elettrostatico:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}(V) = -\nabla V$$

Tuttavia, il CAMPO MAGNETICO soddisfa la condizione $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, che ci dice che può sempre essere espresso come ROTORE di un altro VETTORE, detto $\vec{A}$:

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

, dove $\vec{A}$ è detto POTENZIALE VETTORE.

Infatti, se si applica la divergenza:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

essendo la divergenza di un rotore identicamente nulla, il risultato è corretto.

Definiamo in MANIERA UNIVOCA il Potenziale Vettore $\vec{A}$, in modo che rispetti le seguenti condizioni:

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \qquad \boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

La scelta di $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ è significativa per CAMPI MAGNETICI STAZIONARI, generati cioè da correnti stazionarie e quindi non variabili nel tempo. Vedremo in seguito che per fenomeni variabili conviene fare un'altra scelta.

Applichiamo adesso la rotazione (ROTORE) al vettore campo magnetico:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{A}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Quindi si ha:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

che è in sostanza uguale all' EQUAZIONE DI POISSON: $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

→ Somiglia molto ad una equazione differenziale delle ONDE.

Quindi: $$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

L'ultima equazione può essere scritta nelle 3 componenti cartesiane:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \quad ; \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \quad ; \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

Essendo le 2 equazioni simili, la SOLUZIONE DEV'ESSERE LA STESSA:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(x',y',z')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}} dx'dy'dz'$$

$$\Rightarrow \quad A_i(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_i(x',y',z')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}} dx'dy'dz' \quad ; \quad (i = x,y,z)$$

• In FORMA VETTORIALE:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}}{r} d\tau}$$

Si vede ora che la condizione $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ è COERENTE con $\boxed{\nabla \cdot \vec{J} = 0}$, che definisce il REGIME DI CORRENTE STAZIONARIA, ma NON con l'espressione più generica:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Adesso, posso esprimere il FLUSSO del campo magnetico in funzione del POTENZIALE VETTORE, sfruttando il Teorema di STOKES:

$$\boxed{\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}$$

* La CIRCUITAZIONE di $\vec{A}$ lungo una linea chiusa è uguale al FLUSSO di $\vec{B}$ attraverso una qualsiasi superficie $\Sigma$ appoggiata sulla linea chiusa.

# INTERPRETAZIONE RELATIVISTICA DEL CAMPO MAGNETICO

## • TRASFORMAZIONI DI GALILEO:

- Si considerano solo SISTEMI INERZIALI, cioè che si muovono di moto rettilineo uniforme;
- Lo spazio è isotropo, cioè presenta le stesse proprietà ovunque;
- Si hanno le 4 relazioni prerelativistiche: $x = x'$; $y = y'$; $z = z' + vt'$; $t = t'$
- Due orologi fermi negli origini di 2 sistemi di riferimento inerziali segnano sempre la stessa ora;
- Velocità: $v_x = v_x'$; $v_y = v_y'$; $v_z = v_z' + v$; $t = t'$
- Tutte le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali: sono INVARIANTI rispetto alle TRASFORMAZIONI GALILEIANE.

## • TRASFORMAZIONI DI LORENTZ E RELATIVITÀ RISTRETTA:

- La velocità della luce c è INVARIANTE: vale c in qualsiasi sistema di riferimento inerziale la si misuri: $c = c' + v = c$;
- La velocità della luce c rappresenta il LIMITE SUPERIORE invalicabile;
- Si ha la CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE: gli oggetti in moto appaiono contratti nella direzione del moto;
- Un orologio fermo in O segna sempre un intervallo di tempo minore di quello segnato da un orologio in moto con O' → DILATAZIONE TEMPORALE e paradosso dei gemelli;
- Trasformate di Lorentz per eliminare i paradossi:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(z' + vt\right) \\ t &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t' + \frac{v}{c^2}z'\right) \approx \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}}$$

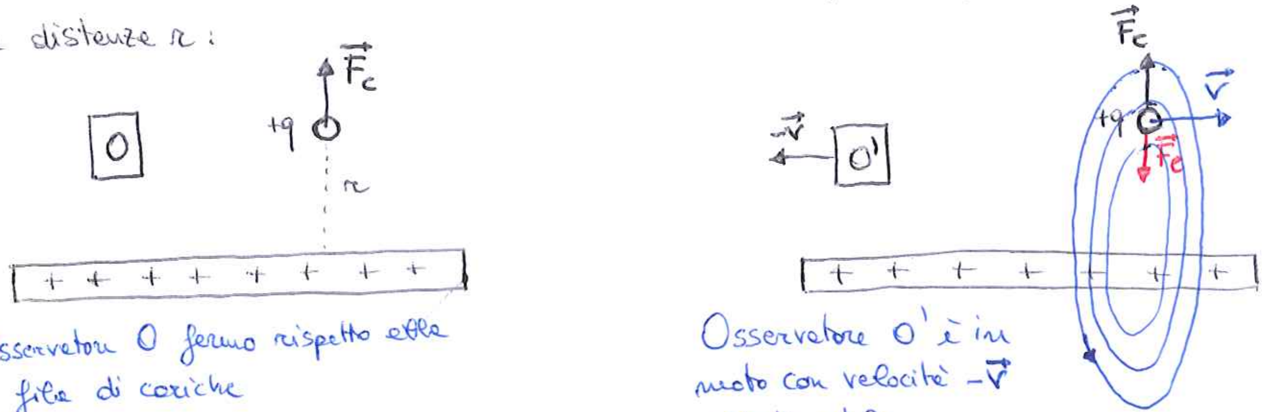
Avevamo visto che la sorgente elementare di un campo magnetico è una carica $q$ in moto:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Tuttavia, una velocità è relativa al sistema di riferimento O da cui la si osserva. Se consideriamo un sistema O' solidale alla carica, chiaramente $\vec{v}' = 0$ e quindi $\vec{B}' = 0$.

Questa proprietà di "comparire e scomparire" del campo magnetico a seconda del sistema di riferimento nel quale viene misurato sembra mettere in crisi il "principio di relatività einsteiniano": ovvero l'idea che non sia possibile distinguere in alcun modo, fra due sistemi in moto rettilineo uniforme fra loro, quale sia fermo e quale sia in moto.

Si consideri adesso una distribuzione di cariche positive filiforme ed una carica $q$ posta a distanza $r$:




Osservatore O fermo rispetto alla fila di cariche

Osservatore O' è in moto con velocità $-\vec{v}$ rispetto ad O.

La Forza di Coulomb $\vec{F}_c$ per un filo di densità $\lambda$ si può calcolare dal Thm di Gauss: (flusso uscente da cilindro di raggio $r$ e lunghezza $\ell$):

$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r \ell E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

Quindi:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

Per l'osservatore O' che si muove con velocità $-\vec{v}$, sembra che il filo si muove con velocità $\vec{v}$ → C'È FLUSSO DI CARICHE → CORRENTE → CAMPO MAGNETICO!

- Se <u>NON</u> TENIAMO CONTO DEGLI EFFETTI RELATIVISTICI:

$$F_c = qE = \frac{q\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$ , agente sulla carica $+q$

* <u>MA</u>, deve anche agire una <u>FORZA DI LORENTZ</u>:

$$\boxed{F_e = qvB}$$

Calcoliamo il campo magnetico considerando la fila di cariche come una CORRENTE di intensità:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{qN'}{\Delta t} = \frac{q(nv\cancel{\Delta t})}{\cancel{\Delta t}} = qnv = \lambda v$$

essendo: $n$ = numero di cariche per unità di lunghezza e $\lambda = nq$.

Dalla Legge di Biot-Savart:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \mu_0 i \longrightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}$$

Pertanto, la Forza di Lorentz:

$$F_e = qvB = qv \cdot \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} = \frac{\mu_0 q \lambda}{2\pi r} v^2$$

Considerando la relazione: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \longrightarrow \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$, quindi abbiamo:

$$\boxed{F_e = \frac{q\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \cdot \frac{v^2}{c^2} = F_c \cdot \frac{v^2}{c^2}}$$

Quindi, l'osservatore O' vedrà una forza totale agente sulla carica +q pari a:

$$\boxed{F_{TOT} = F_c - F_e = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Questo risultato è in CONTRASTO con quello visto dall'osservatore O, cioè:

$$F_{TOT} = F_e = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

* [L'errore sta nel NON aver considerato la CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE e la DILATAZIONE TEMPORALE, principi della relatività di Einstein.]

- Con la contrazione delle lunghezze cambia anche la DENSITÀ DI CARICA $\lambda$:
  - → Per l'osservatore O: N cariche contenute in un segmento di lunghezza $L$
  - → Per l'osservatore O': N cariche contenute in un segmento di lunghezza $L'$, con:

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Inoltre:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

; Si noti che: per $\frac{v^2}{c^2} \to 1$, il tempo scorre più lentamente per O' rispetto ad O.

La densità di carica per O' è:

$$\lambda' = \frac{N}{L'} = \frac{\lambda \cancel{L}}{\cancel{L}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Si noti che si è assunto che il valore delle cariche non dipende dal sistema di riferimento.

Quindi, la QUANTITÀ DI MOTO per O e O' sarà:

$$\Delta p = F \Delta t \quad ; \quad \Delta p' = F' \Delta t'$$

Andando a sostituire, si ha:

- OSSERVATORE O:

$$\Delta p = F_c \Delta t = qE\Delta t = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\Delta t$$

- OSSERVATORE O':

$$\Delta p' = F'\Delta t' = F_{TOT}\Delta t' = \frac{q\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t'$$

Sostituendo le relazioni trovate in precedenza per $\lambda'$ e $\Delta t'$, si ottiene:

$$\Delta p' = \frac{q\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t' = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{\cancel{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\left(\cancel{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\cdot\frac{\Delta t}{\sqrt{\cancel{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\Delta t = \Delta p$$

Quindi, ora torna tutto e si ha:

$$\boxed{\Delta p = \Delta p'}$$

NON SI HA PIÙ LA DIPENDENZA DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO!

- Il CAMPO MAGNETICO non è altro che una modificazione relativistica del campo elettrostatico

Tale concetto è reso evidente dal fatto che il termine "magnetico" non è altro che il termine elettrostatico moltiplicato per il FATTORE RELATIVISTICO $\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$:

$$F_c = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$F_{TOT} = F_c - F_e = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$