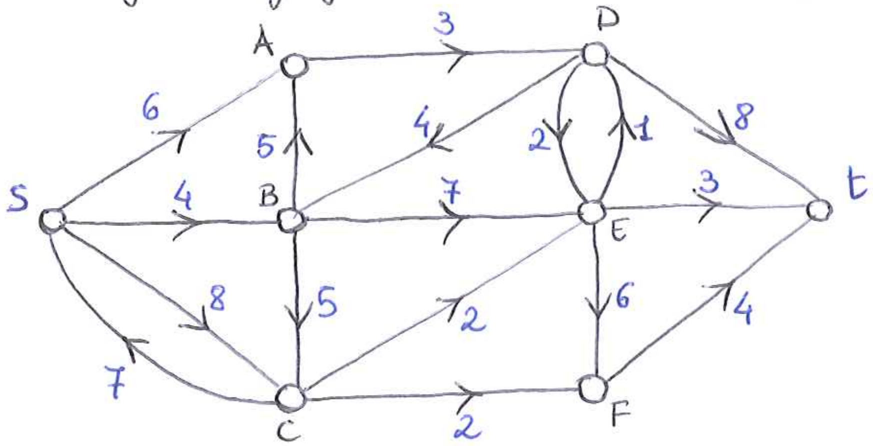
4. Problemi di Flusso

Consideriamo un GRAFO ORIENTATO D e una funzione u con le seguenti caratteristiche:

- $D(N, A)$;
- $s, t \in N(D)$, con $s :=$ SORGENTE e $t :=$ DESTINAZIONE
- $u : A(D) \longmapsto \mathbb{Z}_+$, funzione CAPACITA' DELL' ARCO.

Disegniamo il seguente grafo che useremo come riferimento:



- **Problema del Massimo Flusso:**

Trovare una collezione di CAMMINI ORIENTATI da s a t $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ in modo tale che:
- il numero K di cammini sia il massimo possibile;
- $\forall (u,v) \in A(D)$, il numero di cammini che contengono l'arco (u,v) sia $\leq u(u,v)$, cioè minore o uguale della CAPACITA' dell'arco (u,v).

Per esempio, una soluzione AMMISSIBILE ma non massimale di valore 6 è:

$P_1 = s, A, D, t$
$P_2 = s, A, D, t$
$P_3 = s, A, D, B, E, t$
$P_4 = s, B, E, t$
$P_5 = s, C, F, t$
$P_6 = s, C, F, t$

$\longrightarrow$ FLUSSO DEGLI ARCHI COINVOLTI

$(s,A) = 3$
$(A,D) = 3$
$(D,t) = 2$
$(D,B) = 1$
$(B,E) = 2$
$(E,t) = 2$
$(s,B) = 1$
$(s,C) = 2$

$(C,F) = 2$
$(F,t) = 2$

- FLUSSO DI UN ARCO:

E' il NUMERO DI CAMMINI della soluzione $\{P_1, \dots, P_k\}$ che utilizzano l'arco (u,v) in questione. Si indica con: $\underline{f(u,v)}$.

Una soluzione, per essere AMMISSIBILE, deve sicuramente essere tale che:

$$\forall (u,v) \in A(D) \; : \; f(u,v) \leq u(u,v)$$

Tale funzione f è anche detta VETTORE DI FLUSSO.

- VALORE DEL VETTORE DI FLUSSO:

Se f è un vettore di flusso s-t ammissibile, allora il valore di f è:

$$\boxed{\mathrm{Val}(f) := \sum_{(s,v) \in A} f(s,v) - \sum_{(v,s) \in A} f(v,s)}$$

Cioè la somma dei flussi USCENTI dalla sorgente s meno la somma dei flussi ENTRANTI in s.

* Val(f) identifica il NUMERO DI CAMMINI della SOLUZIONE!

- Abbiamo visto che da una SOLUZIONE IN FORMA DI CAMMINI che rispetti il criterio di ammissibilità, si può ottenere un VETTORE DI FLUSSO AMMISSIBILE, cioè tale che $\forall (u,v) \in A(D)$: $f(u,v) \leq u(u,v)$ e tale che $\mathrm{Val}(f) = |P|$, con $P = \{P_1, \dots, P_k\}$:

$$P = \{P_1, \dots, P_k\} \longrightarrow f : A(D) \longmapsto \mathbb{Z}_+$$

Ma si può fare il viceversa? Avere delle condizioni per un vettore di flusso ammissibile, lavorare con questo e poi dedurre i percorsi della soluzione?

- FLUSSO S-t AMMISSIBILE

Un vettore di flusso $f : A(D) \longmapsto \mathbb{Z}_+$ è s-t AMMISSIBILE se e solo se:

(1) $f(u,v) \leq u(u,v)$, $\quad \forall (u,v) \in A(D)$;

(2) $\displaystyle\sum_{u:(v,u) \in A} f(v,u) = \sum_{u:(u,v) \in A} f(u,v)$, $\quad \forall v \in N(D),\ v \neq s,t$;

La (1) è detta VINCOLO DI CAPACITA', mentre la (2) è detta VINCOLO DI CONSERVAZIONE DEL FLUSSO.

La quantità: $\boxed{\sum_{u:(v,u)\in A} f(v,u) - \sum_{u:(u,v)\in A} f(u,v)}$:= FLUSSO NETTO uscente da v

Dunque, abbiamo la seguente situazione:

$$\text{FLUSSO NETTO uscente da } v = \begin{cases} 0 & , \forall v \neq s,t \\ Val(f) & , v = s \\ -Val(f) & , v = t \end{cases}$$

- [Dimostriamo come sia possibile, partendo da un vettore di flusso f s-t ammissibile, ricostruire la soluzione in forma di cammini in maniera univoca.]

* IPOTESI TEMPORANEA: Sia $D(N,A)$ PRIVO DI CICLI ORIENTATI.

Sia f un vettore di flusso s-t ammissibile per D.
Utilizziamo la seguente procedura:

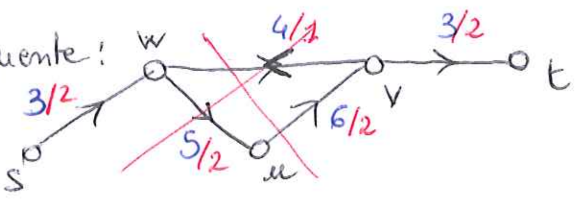
1. Partendo dalla destinazione t, percorrere a ritroso gli archi che hanno flusso positivo verso t (BACKTRACKING); procedendo analogamente, individuo un cammino una volta giunto in S;
2. Individuato il cammino, diminuire di 1 il flusso di tutti gli archi coinvolti in tale cammino;
   Il nuovo vettore di flusso ottenuto f' è sempre s-t ammissibile poiché:
   - togliendo flusso non posso superare la capacità $u(u,v)$;
   - diminuisco sia il flusso entrante che il flusso uscente in ogni vertice diverso da S e da t, quindi il flusso netto è sempre 0.

   $Val(f') = Val(f) - 1$.
3. Itero il procedimento fin quando $Val(f) = 0$.

Così facendo, partendo dal vettore di flusso f riesco a ricostruire i $Val(f)$ cammini della soluzione $\{P_1, \dots, P_{Val(f)}\}$.

∎

* L'ipotesi di ACICLICITÀ di D serve per evitare problemi con il BACKTRACKING in situazioni analoghe alla seguente:



- **FLUSSO ACICLICO:**

Un vettore di flusso f è ACICLICO se il grafo ORIENTATO $D(N, A(f))$ è ACICLICO, dove:

$$A(f) = \{(u,v) \in A : f(u,v) > 0\}$$, cioè l'insieme degli archi a flusso non nullo.

Un grafo orientato G è aciclico se non ha cicli orientati.

- **PROPOSIZIONE:**

> Senza perdita di generalità, possiamo sempre supporre che un vettore di flusso s-t f sia ACICLICO; cioè, esiste un algoritmo polinomiale che permette di passare da un flusso "ciclico" ad uno aciclico, preservando il valore del flusso.

PROOF: Sia f un vettore di flusso tale che $A(f)$ ha un CICLO ORIENTATO C.

$$\Rightarrow \forall (u,v) \in C : f(u,v) > 0.$$

ALGORITMO:

1. Su tutti gli archi del ciclo C, DIMINUIAMO IL FLUSSO di un valore ε, tale che il flusso di almeno 1 arco diventi nullo ma senza avere flussi negativi;
2. Lasciamo immutato il valore di f sugli archi $(u,v) \notin C$.
3. Iterare il procedimento fino alla "scomparsa" di tutti i cicli.

In questo modo, si viene a definire un nuovo vettore di flusso f'. MA f' È AMMISSIBILE?

- Il vincolo di capacità è rispettato, poiché sto diminuendo il flusso e f era ammissibile;
- Il vincolo di bilanciamento del flusso è rispettato da tutti i nodi del ciclo, in quanto togliamo ε in entrata ma anche in uscita, $\forall$ nodo $\neq s, t$;
- Anche se s facesse parte del ciclo, $val(f') = val(f)$ perché il flusso netto uscente da s è lo stesso;

$$val(f') = [(\text{uscente} - \varepsilon) - (\text{entrante} - \varepsilon)] = \text{uscente} - \text{entrante} = val(f)$$

$$\Rightarrow f' \text{ è AMMISSIBILE, ACICLICO e tale che } val(f') = val(f). \quad \blacksquare$$

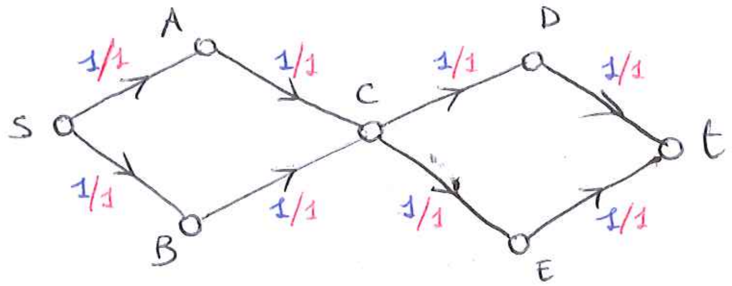
* L'ipotesi di ACICLICITÀ del flusso serve solo nell'algoritmo per il passaggio tra il vettore di flusso f alla soluzione in forma di cammini $P = \{P_1, \dots, P_{Vol(f)}\}$.

- **OSSERVAZIONE**:

Se f è un vettore di flusso ammissibile di valore $Vol(f) > 0$ ed è ACICLICO $\Longrightarrow$
- $\sum_{v:(v,s) \in A} f(v,s) = 0$
- $\sum_{v:(t,v) \in A} f(t,v) = 0$

Cioè non c'è flusso entrante in s e flusso uscente da t, senza perdita di generalità, NON esistono archi uscenti da t ed entranti in s (se esistono, posso non considerarli!).

* **NOTA**: Consideriamo il seguente grafo con CAPACITÀ UNITARIA su tutti gli archi: $\forall (u,v) : u(u,v) = 1$.



IL VETTORE DI MASSIMO FLUSSO f è UNICO $(Vol(f) = 2)$!

- Ma, ci sono 2 possibili soluzioni in termini di cammini!

- **TAGLIO s-t**:

È una PARTIZIONE dei vertici $N(D)$ in 2 classi V_1 e V_2 tali che:
- $s \in V_1$;
- $t \in V_2$.

Un taglio si indica con $[V_1, V_2]$

- **ARCHI che ATTRAVERSANO un TAGLIO s-t**:

Sono gli archi del tipo (u,v) con $u \in V_1$ e $v \in V_2$ oppure con $u \in V_2$ e $v \in V_1$.

Possono essere di 2 categorie:
- CONCORDI: $(u,v) \in A : u \in V_1, v \in V_2$ → Vanno da V_1 a V_2
- DISCORDI: $(v,u) \in A : u \in V_1, v \in V_2$ → Vanno da V_2 a V_1

- EQUAZIONI DI CONTINUITÀ:

Nel nostro grafo $D(N,A)$ di esempio, consideriamo il taglio s-t $[V_1, V_2]$ seguente:

$$V_1 = \{s, B, C, F\} \quad , \quad V_2 = \{t, A, D, E\} .$$

Consideriamo le EQUAZIONI DI CONTINUITÀ DEL FLUSSO nei nodi di V_1:

$$f_{BA} + f_{BE} + \cancel{f_{BC}} - \cancel{f_{SB}} - f_{DB} = 0$$

$$\cancel{f_{CS}} + f_{CE} + \cancel{f_{CF}} - \cancel{f_{SC}} - \cancel{f_{BC}} = 0$$

SOMMIAMO le equazioni!

$$f_{Ft} - f_{EF} - \cancel{f_{CF}} = 0$$

$$f_{SA} + \cancel{f_{SB}} + \cancel{f_{SC}} - \cancel{f_{CS}} = Val(f)$$

$$\boxed{f_{SA} + f_{Ft} + f_{CE} + f_{BA} + f_{BE} - f_{EF} - f_{DB} = Val(f)}$$

→ FLUSSO NETTO ATTRAVERSO IL TAGLIO

* Gli unici archi che compaiono nelle sommatorie sono gli ARCHI che ATTRAVERSANO IL TAGLIO, quelli concordi positivi e i discordi negativi!

Infatti, tutti gli archi presenti nella rete sono di 4 tipi:

(1) archi tra nodi di V_1;

(2) archi tra nodi di V_2;

(3) archi tra nodi da V_1 a V_2 (concordi);

(4) archi tra nodi da V_2 a V_1 (discordi).

- Gli archi (2) non sono nelle sommatorie perché considero solo i nodi di V_1; invece, gli archi (1) non ci sono perché ogni arco sarà entrante per un nodo u di V_1, ma uscente da un altro nodo v di V_1, quindi il contributo di quell'arco è nullo.

- Gli archi (3) e (4), presi con l'opportuno segno, rappresentano il flusso netto attraverso il taglio e quindi il valore del flusso!

> ∀ TAGLIO s-t, il FLUSSO NETTO ATTRAVERSO IL TAGLIO è uguale al VALORE DEL FLUSSO!

Notare che il numero di possibili tagli s-t è ESPONENZIALE: 2^{n-2}, poiché i nodi s e t sono fissi!

• FLUSSO NETTO ATTRAVERSO $[X,\bar{X}]$:

Sia $[X,\bar{X}]$ un taglio s-t su un grafo orientato $D(N,A,u)$ e sia f un vettore di flusso s-t ammissibile per D. Il FLUSSO NETTO ATTRAVERSO il TAGLIO $[X,\bar{X}]$ è:

$$\boxed{\sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\in X\\ v\in \bar{X}}} f(u,v) - \sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\in \bar{X}\\ v\in X}} f(u,v) = Val(f)}$$

<u>Esempio</u>: Se $X=\{s,D,C\}$ e $\bar{X}=\{A,B,E,F,t\}$:

$$\underbrace{f_{SA}+f_{DB}+f_{CE}+f_{CF}+f_{Dt}+f_{DE}+f_{sB}}_{\substack{\text{ARCHI CONCORDI}\\ \text{rispetto a } [X,\bar{X}]}} \underbrace{-f_{AD}-f_{ED}-f_{BC}}_{\substack{\text{ARCHI DISCORDI}\\ \text{rispetto a } [X,\bar{X}]}} = Val(f)=6$$

Infatti: $3+1+0+2+2+0+1-3-0-0=9-3=\underline{\underline{6}}$

• UPPER BOUND al FLUSSO NETTO:

Per un qualsiasi taglio s-t $[X,\bar{X}]$:

$$\left[\sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\in X\\ v\in \bar{X}}} f(u,v) - \sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\in \bar{X}\\ v\in X}} f(u,v) \leqslant \sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\in X\\ v\in \bar{X}}} u(u,v) + 0\right]$$

Dove la quantità:

$$\sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\in X\\ v\in \bar{X}}} u(u,v) :=$$

<u>CAPACITÀ DEL TAGLIO $[X,\bar{X}]$</u>

somma delle CAPACITÀ degli archi <u>CONCORDI</u> per il taglio!

* la CAPACITÀ <u>DIPENDE</u> dal TAGLIO scelto!

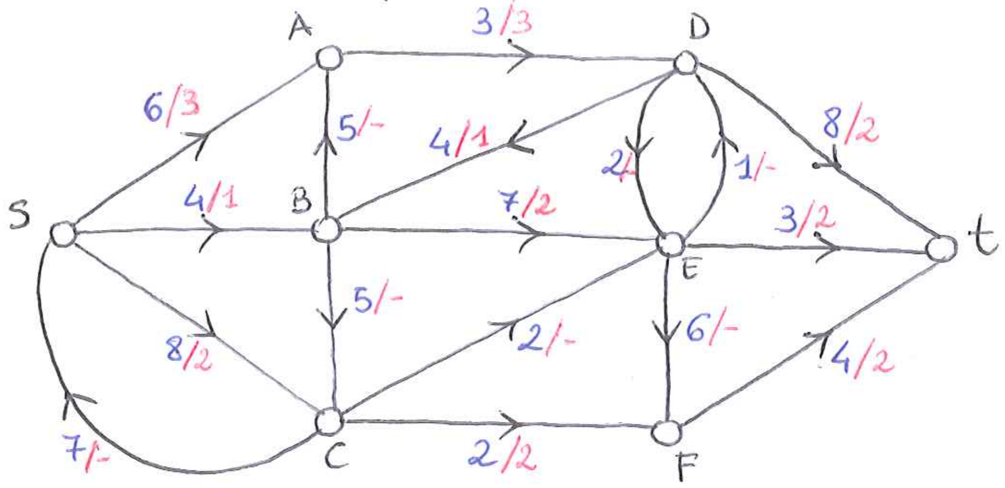
Dunque:

- il valore di un qualsiasi flusso $\leqslant$ capacità di un qualsiasi taglio

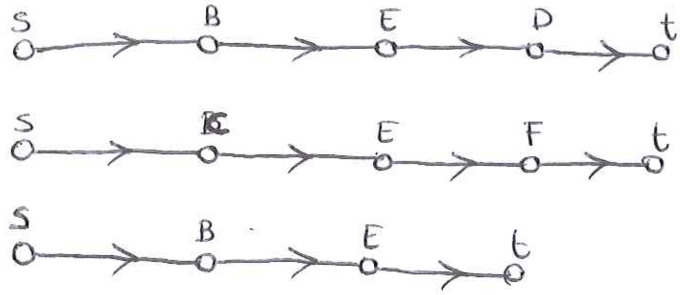
Quindi:

$$\boxed{\text{Valore del MASSIMO FLUSSO} \leqslant \text{CAPACITÀ MINIMA del "minimo" taglio}}$$

Riprendiamo il nostro esempio:



Cerchiamo di aumentare il valore del flusso aggiungendo altri cammini:



(+1)

(+2)

(+1)

Porto il valore a $\boxed{Val(f) = 10}$

- Questi tipi di cammini sono CAMMINI ORIENTATI s-t AUMENTANTI rispetto a f e sono formati da TUTTI ARCHI NON SATURI.

* Tuttavia, 10 non è il ~~f~~ valore del massimo flusso per questa rete, in quanto NON esiste un taglio di CAPACITÀ 10!

Proviamo ad aggiungere altri cammini di altro tipo:

Se scelgo il cammino:

c'è un arco non percorribile! Ma posso provare a "percorrerlo contromano" e ragionare nel seguente modo per massimizzare il flusso:

2ª CLASSE DI CAMMINI AUMENTANTI:

cammini s-t NON necessariamente ORIENTATI tali che, rispetto alla giusta percorrenza rispetto al verso da s a t (NON rispetto ad alcun taglio!):

- archi CONCORDI → siano NON SATURI
- archi DISCORDI → siano NON VUOTI, cioè $f(u,v) > 0$.

Preso un tale cammino:

- AGGIUNGIAMO ε al flusso sugli archi concordi;
- TOGLIAMO ε al flusso sugli archi discordi

Verifichiamo l'ammissibilità del nuovo vettore di flusso:

scegliendo opportunamente ε:

- è possibile rispettare il VINCOLO DI CAPACITÀ;
- è possibile rispettare il VINCOLO DI NON NEGATIVITÀ del flusso;

- anche il vincolo di BILANCIO DEL FLUSSO è rispettato, in quanto:

abbiamo 3 CASI:

1) Un nodo ha entrambi gli archi nel cammino ~~uscenti~~ concordi:
   ad entrambi gli archi sarà applicato $+\varepsilon$ e $+\varepsilon$ oppure $-\varepsilon$ e $-\varepsilon$, quindi il bilancio rimane;
2) Un nodo ha entrambi gli archi ~~entranti~~ discordi:
   analogamente al punto 1), il bilancio è sempre rispettato;
3) Un nodo ha un arco entrante/uscente concorde e un arco entrante/uscente discorde: $\xrightarrow{+\varepsilon} B \xleftarrow{-\varepsilon}$

   il flusso entrante: $+\varepsilon - \varepsilon = 0$ $\Rightarrow$ il bilancio è ancora valido.

$\Rightarrow$ Il nuovo flusso è AMMISSIBILE!

__Nell'esempio:__ $s \xrightarrow{+\varepsilon} B \xleftarrow{-\varepsilon} D \xrightarrow{+\varepsilon} t$ $\quad$ ($\varepsilon = 1$)

$\Rightarrow$ $val(f) = 11$, è __AUMENTATO di 11__!

* Tale valore è __MASSIMO__, poiché esiste un taglio s-t di capacità 11; in particolare $[X, \bar{X}]$ con $X = \{s, A, C\}$!

- __ALGORITMO DEI CAMMINI AUMENTANTI__ (Ford - Fulkerson):

Partendo da s, effettuando delle visite in profondità (DFS) si cerca di trovare dei __CAMMINI__ ~~[illegible]~~ __AUMENTANTI__ delle 2 classi viste sopra;
una volta trovati, si aggiornano i flussi e si itera il procedimento.
Nel momento in cui, partendo da s, è impossibile raggiungere t, s unito ai nodi raggiungibili individua una partizione che definisce il TAGLIO s-t di CAPACITÀ MINIMA.

Esempio:

Nell'esempio, da s riesco a raggiungere solo i nodi A e C.
Quindi $X = \{s, A, C\}$ mi definisce il TAGLIO s-t $[X, \bar{X}]$ di CAPACITÀ MINIMA 11, ormai SATURO!

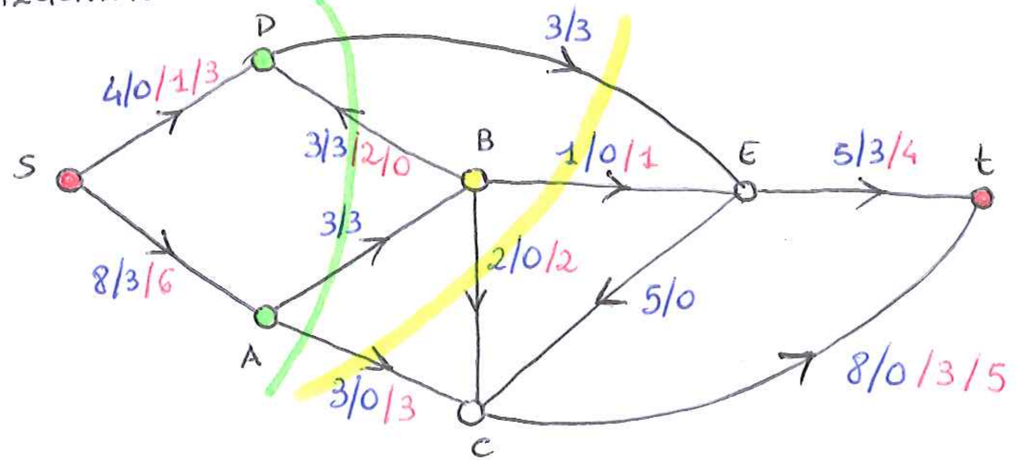
- Dunque, l'algoritmo cerca cammini aumentanti e, quando non ne trova più, restituisce un TAGLIO che è CERTIFICATO del VALORE MASSIMO del FLUSSO!

- Conclusione:

$$\boxed{\text{VALORE MASSIMO del FLUSSO} = \text{CAPACITÀ MINIMA DEL TAGLIO}}$$

- Esempio:

Data la seguente rete con ogni arco che ha: capacità/flusso iniziale, applicare l'ALGORITMO DEI CAMMINI AUMENTANTI.



Il flusso f iniziale ha valore 3 $\Rightarrow$ val$(f) = 3$.

Applichiamo l'algoritmo:

- $S \underset{+3}{-} A \underset{+3}{-} C \underset{+3}{-} t \Rightarrow$ val(f) += 3 $\Rightarrow$ val$(f) = 6$
- $S \underset{+1}{-} D \underset{-1}{-} B \underset{+1}{-} E \underset{+1}{-} t \Rightarrow$ val(f) += 1 $\Rightarrow$ val$(f) = 7$
- $S \underset{+2}{-} D \underset{-2}{-} B \underset{+2}{-} C \underset{+2}{-} t \Rightarrow$ val(f) += 2 $\Rightarrow$ val$(f) = 9$

Ora, gli unici nodi raggiungibili da S sono D ed A:

il taglio $[X, \overline{X}]$ con $X = \{S, D, A\}$ ha CAPACITÀ: $3+3+3 = 9$

$\Rightarrow$ Il vettore di MASSIMO FLUSSO ha VALORE 9!

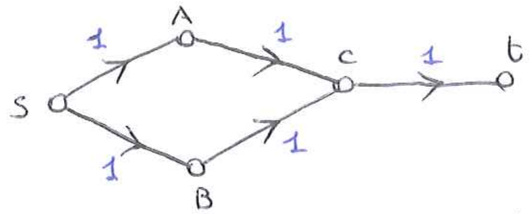
* Supponiamo ora di aumentare di 1 la capacità dell'arco (A, B), portandola a 4. Cambia il valore del flusso massimo?

NO. Però ora ho un diverso taglio formato da $X = \{S, A, D, B\}$, ma sempre di capacità 9. Tale taglio è dato proprio dall'ALGORITMO!

- Dunque:

[In generale, possono esistere PIÙ TAGLI DI CAPACITÀ MINIMA e PIÙ VETTORI DI FLUSSO MASSIMO.]

Per esempio:



$vol(f_{MAX}) = 1$, ma ci sono 2 possibili f_{MAX} $\begin{cases} \bullet\ SA, AC, ct \\ \bullet\ SB, BC, Ct \end{cases}$

e di conseguenza almeno 2 tagli di capacità minima (pari ad 1); in questo caso ce ne sono più di due.

- ALGORITMO PER TROVARE I CAMMINI AUMENTANTI:

Supponiamo di avere un ALGORITMO che, dato un grafo orientato, restituisce se esiste un CAMMINO ORIENTATO da s a t (di fatto una DFS).

Per trovare:

- CAMMINI AUMENTANTI del 1° TIPO:

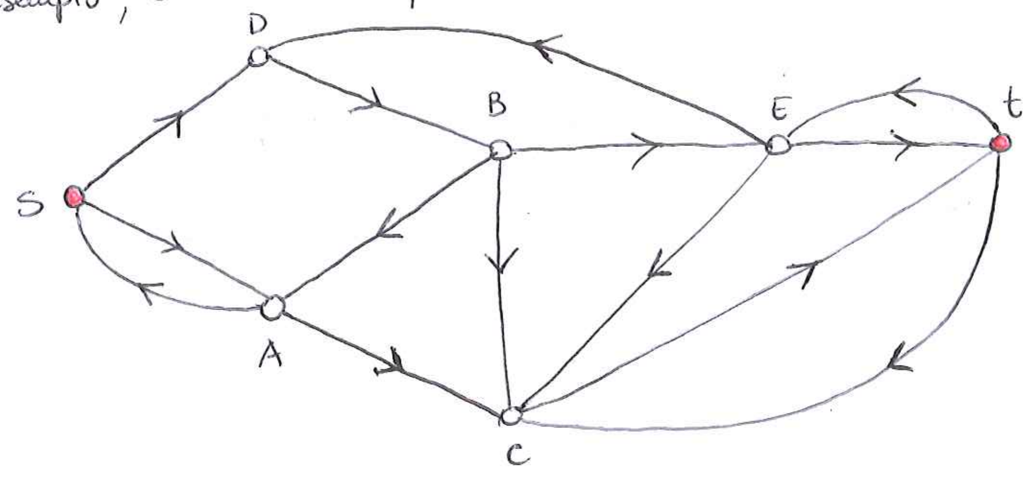
  uso l'algoritmo di visita, però passando in ingresso la rete originaria PRIVA degli ARCHI SATURI!

- CAMMINI AUMENTANTI del 2° TIPO:

  costruisco la RETE RESIDUA rispetto al flusso corrente nel seguente modo:

  - gli archi saturi → invertono il verso di percorrenza
  - gli archi vuoti → mantengono il loro verso di percorrenza
  - gli archi non vuoti e non saturi → diventano percorribili in entrambe le direzioni

Per esempio, sull'esercizio precedente col flusso di partenza:



Per costruzione:

CAMMINO AUMENTANTE $s \to t$ sulla rete originaria	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	CAMMINO ORIENTATO $s \to t$ sulla RETE RESIDUA

* FINITEZZA DELL'ALGORITMO:

L'algoritmo impiega un NUMERO FINITO DI PASSI perché:

- la capacità minima di un taglio è finita;
- il flusso massimo, pari alla capacità del minimo taglio, è un numero INTERO e ragiono per INDUZIONE, sia in aggiunta di flusso che in diminuzione di flusso sugli archi discordi; quindi ho sempre una fine, un limite.

- L'algoritmo termina in al più $|\text{Val}(\text{MAX FLOW})|$ iterazioni;
- Ogni iterazione è POLINOMIALE.

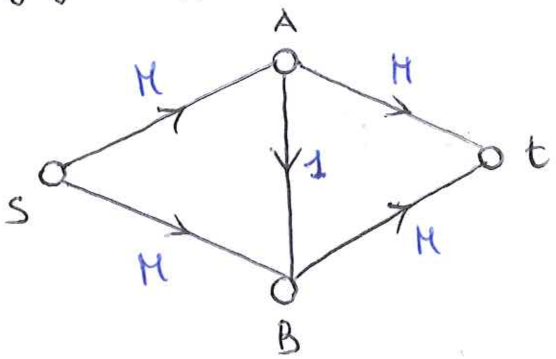
- Inoltre, posso anche definire il flusso come $f: A \longmapsto \mathbb{R}^+$ anziché in $\mathbb{Z}^+$, ma, SE LE CAPACITÀ SONO INTERE, l'algoritmo mi dice che:

Il valore del MASSIMO FLUSSO È INTERO! Inoltre, esiste un vettore di massimo flusso con flusso INTERO su OGNI ARCO!

Infatti, è quello che mi restituisce l'ALGORITMO $\rightarrow$ PARTIZIONARE IL FLUSSO NON DÀ VANTAGGIO!

- POLINOMIALITÀ DELL'ALGORITMO DI FORD-FULKERSON:

Sia $M \in \mathbb{Z}^+$ un numero intero molto grande. Consideriamo il seguente grafo e applichiamo l'Algoritmo di Ford-Fulkerson:



Cammini aumentanti:

$$s \xrightarrow[+1]{} A \xrightarrow[+1]{} B \xrightarrow[+1]{} t$$

$$s \xrightarrow[+1]{} B \xleftarrow[-1]{} A \xrightarrow[+1]{} t$$

...

Quante iterazioni richiede l'algoritmo? Tante quante il valore del MASSIMO FLUSSO, cioè $\underline{2M}$, poiché ad ogni iterazione il valore del flusso viene aumentato di 1.

Ma, la complessità dell'algoritmo è POLINOMIALE? Effettivamente dipende dalla capacità del minimo taglio!

L'INPUT, nell'esempio, è $M, M, M, M, 1$ che, per $\underline{M=16}$ in rappresentazione binaria, sarà:

$$\left.\begin{matrix} 10000, \\ 10000, \\ 10000, \\ 10000, \\ 1 \end{matrix}\right\} \text{Ha lunghezza} \simeq 5 \cdot \lceil \log_2 M \rceil$$

- In generale: per un INPUT con m archi $\rightarrow$ LUNGHEZZA INPUT $\simeq \boxed{m \cdot \log_2 U}$

dove $\underline{U := \text{max capacità di un arco del grafo}}$.

Dunque, ragionando sempre sull'esempio, dato che è possibile trovare un cammino aumentante in $\mathcal{O}(m)$ e dato che il numero di iterazioni è $2M$, abbiamo che:

$$\underbrace{\#\ \text{OPERAZIONI ELEMENTARI} = 2M \cdot \mathcal{O}(m)}$$

Confrontiamolo con la lunghezza dell'input per vedere se è polinomiale: per avere grandezze confrontabili, devo portare il $\log_2 M$ ad M, quindi passo per l'ESPONENZIALE: $\underbrace{2M \cdot \mathcal{O}(m) \leq c \cdot 2^m \cdot M}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{L'ALGORITMO DI FORD-FULKERSON } \underline{\text{NON}} \text{ è POLINOMIALE!}}$

Quindi, difficilmente è utilizzabile nella pratica.

* Tuttavia, utilizzando una RAPPRESENTAZIONE UNARIA, la lunghezza dell'input diventa $m \cdot U$ ($= m \cdot M$) $\rightarrow$ Quindi l'algoritmo sarebbe stato polinomiale! Questo è perché aumenta la dimensione dell'input!

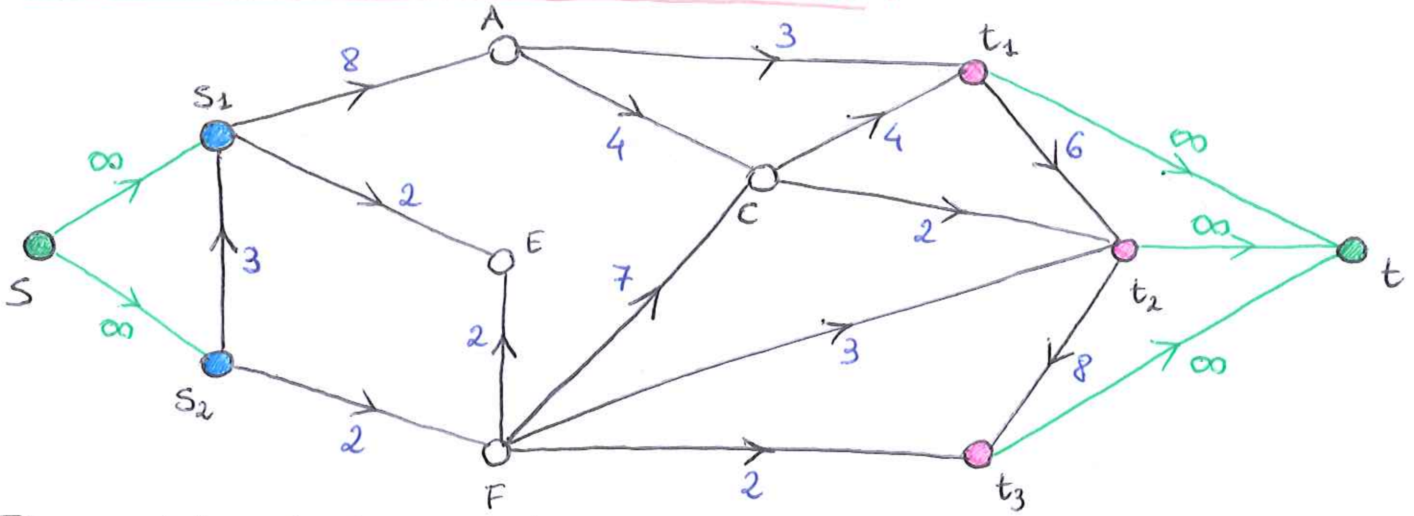
- Tuttavia, se ad ogni iterazione il CAMMINO AUMENTANTE è SCELTO IN MODO OPPORTUNO, si può recuperare la POLINOMIALITÀ!

• ALGORITMO DI EDMONDS & KARP:

Se ad ogni iterazione si sceglie un cammino aumentante con il NUMERO MINIMO DI ARCHI, allora l'Algoritmo di Ford-Fulkerson termina in $O(n \cdot m^2)$

Ovviamente, il cammino lo si trova nella rete residua con una BFS in $O(m)$.

• GENERALIZZAZIONE DEL PROBLEMA DEL FLUSSO:



Flusso dai nodi di produzione s_1, s_2 ai nodi di distribuzione t_1, t_2, t_3.
Le soluzioni viste fin'ora ci consentono di risolvere questo problema?

- Aggiungiamo 2 nodi fittizi s e t e li colleghiamo rispettivamente con i nodi sorgente s_i e i nodi destinazione t_j.
- Le capacità degli archi aggiunti sono pari a ∞, così siamo sicuri di non modificare il "collo di bottiglia" del problema.

• VALORE DEL FLUSSO MULTISORGENTE:

$$\boxed{Val(f) := \sum_{i=1,2} \left(\sum_{(s_i,v)\in A} f(s_i,v) - \sum_{(v,s_i)\in A} f(v,s_i) \right)}$$

dove f rispetta i soliti vincoli di capacità e conservazione:

- $f(u,v) \leq u(u,v)$, $\forall (u,v) \in A$;
- $\sum_{(v,u)\in A} f(v,u) - \sum_{(u,v)\in A} f(u,v) = 0$, $\forall v \in N : v \neq s_1, s_2, t_1, t_2, t_3$.

- **EQUIVALENZA**:

C'è una corrispondenza 1 a 1 tra FLUSSI MULTISORGENTE $\rightleftarrows$ FLUSSI s-t.

PROOF:

$\rightarrow$) Rispettando i vincoli di conservazione del flusso, ponendo il giusto flusso sugli archi di capacità ∞, è facile ricondursi a un problema di FLUSSO s-t!

$\leftarrow$) Analogamente, da un flusso s-t, rimuovendo i nodi s e t con i relativi archi incidenti e non preoccupandosi di quei flussi, ottieniamo un flusso multisorgente.

ok!!! ■

- **TAGLIO MULTI S - MULTI D**:

E' una partizione di N in 2 classi X e $\overline{X}$ tali che:

- X contiene TUTTE le sorgenti s_i;
- $\overline{X}$ contiene TUTTE le destinazioni t_j.

Nell'esempio, il valore del MAX FLUSSO è 9, poiché c'è un taglio $[X, \overline{X}]$ di capacità 9, dato da $X = \{s_1, s_2, A, E\}$.

- **EQUIVALENZA DEL VALORE DEI FLUSSI**:

Il valore del flusso multisorgente e del flusso s-t corrispondente è lo stesso.

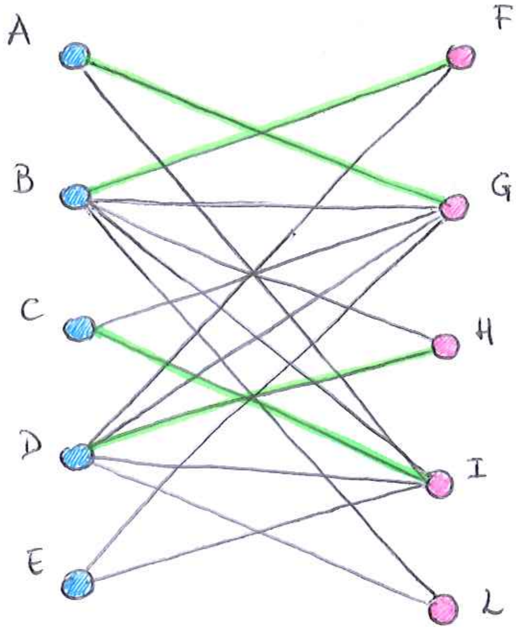
PROOF:

Per COSTRUZIONE, avendo assegnato capacità ∞ agli archi aggiunti, non ci sarà mai un taglio di capacità minima che ~~ha~~ come arco del taglio un arco del tipo (s, s_i) oppure (t_j, t), poiché avrebbe capacità infinita!
Quindi, in tutti i tagli, le sorgenti e le destinazioni sono sempre separate e la corrispondenza tra i tagli di capacità minima è rispettata! ■

- Tutto ciò ci fornisce anche (al solito) un ALGORITMO per la risoluzione di problemi di flusso multisorgente e multidestinazione.

• MATCHING IN GRAFI BIPARTITI :

• **MATCHING** := Insieme di ARCHI o coppie NON INCIDENTI.



Siamo in grado, dato un grafo bipartito, di trovare un matching con un numero massimo di spigoli?
In questo caso, il valore massimo di un matching è 4; ma PERCHÈ?
Dato $G(X \cup Y, E)$:

se $\exists\, Q \subseteq X$ tale che: $|N(Q)| < |Q| \implies \nexists$ matching di valore $|X|$,

dove $N(Q) = \{ v \in Y : \exists\, (u,v) \text{ con } u \in Q \}$

Nell' esempio: $Q = \{A, C, E\}$ e $N(Q) = \{G, I\}$

• **MATCHING X-COMPLETO** := è un MATCHING di valore $|X|$.

• La condizione che $\forall Q \subseteq X$ vale $|N(Q)| \geq |Q|$ è NECESSARIA perché il grafo ammette un matching X-completo!

• **TEOREMA DEL MATRIMONIO** :

> Condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE affinché un grafo bipartito $G(X \cup Y, E)$ ammette un matching X-completo è che:
>
> $$\forall\, Q \subseteq X \text{ vale che: } |N(Q)| \geq |Q|$$

- Al di là del fatto che il matching sia X-completo o meno, come TROVARE UN MATCHING DI VALORE MASSIMO?

  - Lo trasformo in un PROBLEMA DI FLUSSO aggiungendo i nodi s e t rispettivamente prima dei nodi della classe X e dopo i nodi della classe Y.

    - ORIENTAMENTO: oriento tutti gli archi nel verso da s a t;
    - CAPACITÀ: capacità 1 in tutti gli archi del tipo (s,u) con $u \in X$ e (u,t) con $u \in Y$;

      capacità ∞ in tutti gli archi già esistenti!

La capacità è messa ad 1 poiché è un problema di MATCHING e non può esserci più di un nodo incidente a ciascun altro nodo!

- C'è una CORRISPONDENZA 1 a 1 tra:

  MATCHING $\rightleftarrows$ FLUSSO s-t

  che preserva il valore del matching e del flusso!