# 4. Relazioni nel Dominio della Frequenza

Introdotte le notazioni complesse, la 1ª Equazione di Maxwell $\left(\nabla\times\underline{E} = \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right)$ priva di sorgenti si scrive:

$$\nabla\times \mathrm{Re}\left[\hat{\underline{E}}(\underline{r})e^{j\omega t}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left[\hat{\underline{B}}(\underline{r})e^{j\omega t}\right]$$

E analogamente per le altre equazioni.
Dato che $\mathrm{Re}[\dots]$ commuta rispetto a $\nabla\times$, $\nabla\cdot$ e $\frac{\partial}{\partial t}$, si ha:

$$\mathrm{Re}\left[\nabla\times\hat{\underline{E}}(\underline{r})e^{j\omega t} + \hat{\underline{B}}(\underline{r})\frac{\partial}{\partial t}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\left\{\nabla\times\hat{\underline{E}}(\underline{r}) + j\omega\hat{\underline{B}}(\underline{r})\right\}e^{j\omega t}\right] = 0$$

Poiché deve essere uguale a zero PER OGNI $t$, deve valere:

$$\boxed{\nabla\times\hat{\underline{E}}(\underline{r}) + j\omega\hat{\underline{B}}(\underline{r}) = 0}$$

che è un'EQUAZIONE DIFFERENZIALE nelle sole VARIABILI SPAZIALI!

Considerando analogamente tutte le altre Equazioni di Maxwell e considerando i termini di sorgente in corrispondenza dei punti di sorgente $\underline{r} = \underline{r}'$, dove $\underline{r}'$ indica le COORDINATE RIFERITE ALLE SORGENTI, si ottiene:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\nabla\times\hat{\underline{E}}(\underline{r}) = -j\omega\hat{\underline{B}}(\underline{r}) - \hat{\underline{J}}_{im}(\underline{r}')\\
&\nabla\times\hat{\underline{H}}(\underline{r}) = j\omega\hat{\underline{D}}(\underline{r}) + \hat{\underline{J}}(\underline{r}) + \hat{\underline{J}}_i(\underline{r}')\\
&\nabla\cdot\hat{\underline{D}}(\underline{r}) = \hat{\rho}(\underline{r}')\\
&\nabla\cdot\hat{\underline{B}}(\underline{r}) = 0
\end{aligned}}$$

→ NON C'È DIPENDENZA DAL TEMPO!

- Dai vettori complessi soluzione di queste equazioni differenziali, che sono FUNZIONI DI PUNTO, si ricavano i vettori elettromagnetici, FUNZIONI DI SPAZIO E TEMPO, moltiplicando per $e^{j\omega t}$ e prendendo la parte reale:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \mathrm{Re}\left[\hat{\underline{E}}(\underline{r})e^{j\omega t}\right] \quad ; \quad \underline{H}(\underline{r},t) = \mathrm{Re}\left[\hat{\underline{H}}(\underline{r})e^{j\omega t}\right]$$

Nel seguito faremo riferimento solo a quantità ARMONICHE, rappresentate da VETTORI o scalari COMPLESSI e FUNZIONE DELLO SPAZIO: non comparirà più "^" e la dipendenza da $\underline{r}$ sarà sottointesa.

Otteniamo dunque le EQUAZIONI DI MAXWELL IN FREQUENZA:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= -j\omega \underline{B} - \underline{J}_{im} \\ \nabla \times \underline{H} &= j\omega \underline{D} + \underline{J} + \underline{J}_i \\ \nabla \cdot \underline{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned}}$$

* Faremo inoltre riferimento a MEZZI LINEARI e ISOTROPI, che, quando conduttori, avranno una CONDUCIBILITÀ ~~L~~REALE.

- BILANCIO ENERGETICO:

Moltiplichiamo scalarmente le prime 2 Eq. di Maxwell per $\underline{H}^*$ e $-\underline{E}$:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} - \underline{J}_{im} \qquad \cdot \underline{H}^*$$

$$\nabla \times \underline{H}^* = \left[j\omega\varepsilon \underline{E} + g\underline{E} + \underline{J}_i\right]^* \qquad \cdot (-\underline{E})$$

e, sommando membro a membro:

$$\underline{H}^* \cdot \nabla \times \underline{E} - \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H}^* = j\omega\varepsilon^* \underline{E} \cdot \underline{E}^* - j\omega\mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* - g\underline{E}^* \cdot \underline{E} - \underline{J}_i^* \cdot \underline{E} - \underline{J}_{im} \cdot \underline{H}^*$$

da cui:

$$\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}^*) + j\omega\left(\mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* - \varepsilon^* \underline{E} \cdot \underline{E}^*\right) + g\underline{E} \cdot \underline{E}^* = -\underline{J}_i^* \cdot \underline{E} - \underline{J}_{im} \cdot \underline{H}^*$$

Integrando su un generico volume V contornato da una superficie S e dividendo per 2:

$$\boxed{\begin{aligned} &\iiint_V \left(-\frac{\underline{J}_i^* \cdot \underline{E}}{2} - \frac{\underline{J}_{im} \cdot \underline{H}^*}{2}\right) dV = \\ &= \iiint_V g\,\frac{\underline{E} \cdot \underline{E}^*}{2}\, dV + j\omega \iiint_V \left(\mu\,\frac{\underline{H} \cdot \underline{H}^*}{2} - \varepsilon^*\,\frac{\underline{E} \cdot \underline{E}^*}{2}\right) dV + \frac{1}{2} \oiint_S (\underline{E} \times \underline{H}^*) \cdot \underline{n}_0\, dS \end{aligned}}$$

- **SIGNIFICATO DEI TERMINI:**

**(1) SORGENTI:** $\iiint_V \left( -\frac{\underline{J}_i^* \cdot \underline{E}}{2} - \frac{\underline{J}_{im} \cdot \underline{H}^*}{2} \right) dV$

La quantità: $-\frac{\underline{J}_i^* \cdot \underline{E}}{2} = -\frac{1}{2} J_0 E_0 \, \underline{i}_0 \cdot \underline{e}_0 \cos \psi_e - j \cdot \frac{1}{2} J_0 E_0 \, \underline{i}_0 \cdot \underline{e}_0 \sin \psi_e$

poiché: $\underline{J}_i = J \sin(\omega t) \, \underline{i}_0$
$\underline{E} = E \sin(\omega t + \psi_e) \underline{e}_0$ , ma $\underline{J}_i(t) = \underline{J}_{ir} \cos(\omega t) - \underline{J}_{ij} \sin(\omega t)$

$\Rightarrow \underline{J}_{ir} = J_0 \, \underline{i}_0 \, , \quad \underline{J}_{ij} = - J_0 \, \underline{i}_0$

così $\underline{J}_{ij}^* = + J_0 \, \underline{i}_0$

avendo assunto, per comodità, POLARIZZAZIONI LINEARI.

Dunque, analizzando, si ha:

- PARTE REALE: POTENZA MEDIA EROGATA in un periodo nell'unità di volume dalle sorgenti elettriche;

- PARTE IMMAGINARIA: non ha un termine corrispondente; tuttavia, quando la differenza di FASE tra $\underline{E}$ e $\underline{J}_i$ è $\left(\psi_e = \frac{\pi}{2}\right)$, coincide con l'AMPIEZZA DELLA POTENZA, a MEDIA NULLA in un periodo, che istante per istante viene fornita e poi recuperata dalle sorgenti

Viene detta POTENZA REATTIVA: è una misura delle correnti e dei campi che, pur NON erogando potenza elettromagnetica, sono presenti nei generatori!

L'analisi è analoga per le sorgenti magnetiche dovute al fattore $-\frac{\underline{J}_{im} \cdot \underline{H}^*}{2}$.

**(2) DISSIPAZIONE:** $\iiint_V g \underline{E} \cdot \underline{E}^* dV \rightarrow$ È un $\boxed{\text{TERMINE REALE}}$, poiché $g$ è assunta reale!

Coincide con la POTENZA MEDIA DISSIPATA in un periodo per effetto della CONDUCIBILITÀ ($g$) del MEZZO!

(3) POLARIZZAZIONE : $j\omega \iiint_V \left( \mu \frac{\underline{H}\cdot\underline{H}^*}{2} - \varepsilon^* \frac{\underline{E}\cdot\underline{E}^*}{2} \right) dV$

ATTENZIONE : $\mu$ e $\varepsilon$ sono COMPLESSI ! $\longrightarrow$ Consideriamo eventuali DISSIPAZIONI !

$\mu = \mu_0 (\mu' + j\mu'')$

$\varepsilon = \varepsilon_0 (\varepsilon' + j\varepsilon'')$

$$\mu \frac{\underline{H}\cdot\underline{H}^*}{2} - \varepsilon^* \frac{\underline{E}\cdot\underline{E}^*}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \mu_0 (\mu' + j\mu'') \underline{H}\cdot\underline{H}^* - \varepsilon_0 (\varepsilon' - j\varepsilon'') \underline{E}\cdot\underline{E}^* \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \mu_0 \mu' \underline{H}\cdot\underline{H}^* - \varepsilon_0 \varepsilon' \underline{E}\cdot\underline{E}^* \right) + \frac{j}{2} \left( \mu_0 \mu'' \underline{H}\cdot\underline{H}^* + \varepsilon_0 \varepsilon'' \underline{E}\cdot\underline{E}^* \right)$$

Tenuto conto che $\mu''$ ed $\varepsilon''$ sono SEMPRE NEGATIVI nei mezzi considerati, abbiamo:

- PARTE REALE : $\frac{1}{2}\omega \iiint_V \left( \mu_0 |\mu''| \underline{H}\cdot\underline{H}^* + \varepsilon_0 |\varepsilon''| \underline{E}\cdot\underline{E}^* \right) dV$

  che è la POTENZA MEDIA DISSIPATA in un periodo per effetto dei meccanismi di POLARIZZAZIONE DIELETTRICI e MAGNETICI.
  È diversa dalla dissipazione per conducibilità (Effetto Joule); questa è dovuta più ad urti anelastici interni tra le particelle.

- PARTE IMMAGINARIA : $\frac{1}{2}\omega \iiint_V \left( \mu_0 \mu' \underline{H}\cdot\underline{H}^* - \varepsilon_0 \varepsilon' \underline{E}\cdot\underline{E}^* \right) dV$

  contiene due termini che, dal confronto con i termini di sorgente, coincidono con l'AMPIEZZA della VARIAZIONE DI ENERGIA IMMAGAZZINATA nei CAMPI elettrico e magnetico, rispettivamente, nel caso di $\psi_e = \psi_h = 0$.
  $\rightarrow$ POTENZA REATTIVA

(4) FLUSSO : $\frac{1}{2} \oiint_S (\underline{E} \times \underline{H}^*) \cdot \underline{n}_0 \, dS$

- PARTE REALE : Potenza media in un periodo che FLUISCE attraverso $S$;
- PARTE IMMAGINARIA : POTENZA REATTIVA in corrispondenza di $S$; OSCILLA, uscendo ed entrando nella superficie !

$$\boxed{\underline{P} = \frac{1}{2}\,\underline{E} \times \underline{H}^*}$$ → VETTORE DI POYNTING COMPLESSO

(densità superficiale di Potenza: $W/m^2$ oppure $VA/m^2$)

Notare che:

1) se il mezzo è privo di dissipazioni ($g = 0$) ⇒ $\varepsilon$ ed $\mu$ sono <u>REALI</u> e Viceversa!

2) se ci sono dissipazioni, $\varepsilon$ e $\mu$ sono <u>COMPLESSI</u> ⇒ c'è uno <u>SFASAMENTO</u> tra $\underline{E}$ e $\underline{D}$ e/o tra $\underline{H}$ e $\underline{B}$.

Ciò rende <u>NON</u> nulla la media in un periodo del termine:

$$\iiint_V \left( \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \right) dV$$

che appare nel Teorema di Poynting nel dominio del tempo!