2. Bilancio Energetico

• Teorema di Poynting

Consideriamo le eq. di Maxwell con corrente impressa:

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} - \underline{J}_{im}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J} + \underline{J}_i$$

Sommiamo le 2 equazioni, moltiplicando scalarmente la 1ª per $\underline{H}$ e la 2ª per $-\underline{E}$:

$$\underbrace{\underline{H} \cdot \nabla \times \underline{E} - \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H}}_{\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H})} = -\underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} - \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - \underbrace{g \underline{E}}_{\underline{J}} \cdot \underline{E} - \underline{J}_{im} \cdot \underline{H} - \underline{J}_i \cdot \underline{E}$$

Lasciando solo le correnti impresse a secondo membro e integrando su un volume V contornato da S, si ottiene il TEOREMA DI POYNTING:

$$\boxed{\oiint_S \underline{E} \times \underline{H} \cdot \underline{n}_0 \, dS + \iiint_V \left(\underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) dV + \iiint_V g \underline{E} \cdot \underline{E} \, dV = \iiint_V \left(-\underline{J}_i \cdot \underline{E} - \underline{J}_{im} \cdot \underline{H} \right) dV}$$

Analizziamo il significato dei termini, partendo dalle correnti impresse:

- $-\underline{J}_i \cdot \underline{E}$: una densità di carica ρ si muove con velocità $\underline{u}$; sappiamo che: $\underline{J} = \rho \underline{u}$; il campo $\underline{E}$ esercita* una forza sulla carica in movimento $\underline{F} = \rho \underline{E}$ nel volume unitario. Dato che la carica è in movimento, il CAMPO CEDE la POTENZA $\rho \underline{E} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{J} \cdot \underline{E}$ alla corrente nel volume unitario.
  Essendoci il segno meno: $-\underline{J}_i \cdot \underline{E}$ è la POTENZA che la CORRENTE CEDE AL CAMPO!

- $-\underline{J}_{im} \cdot \underline{H}$: per dualità può essere interpretato allo stesso modo; indica la POTENZA che la SORGENTE MAGNETICA CEDE al CAMPO MAGNETICO.

* Dunque, i termini al 2° membro del Teorema di Poynting indicano la POTENZA EROGATA DALLE CORRENTI IMPRESSE (sorgenti esterne) ALL'INTERNO DEL VOLUME V!

• Il termine $\iiint_V \sigma \underline{E} \cdot \underline{E} \, dV = \iiint_V \underline{J} \cdot \underline{E} \, dV$ è la POTENZA CHE IL CAMPO CEDE ALLE CORRENTI DI CONDUZIONE, che viene DISSIPATA IN CALORE per EFFETTO JOULE.

• $\iiint_V \left(\underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) dV = \frac{\partial W_m}{\partial t} + \frac{\partial W_e}{\partial t}$:
è la POTENZA che VA A VARIARE L'ENERGIA IMMAGAZZINATA NEL CAMPO ELETTROMAGNETICO (resta nel volume V).

• $\oiint_S \underline{E} \times \underline{H} \cdot \underline{n}_0 \, dS$: è la POTENZA CHE FLUISCE VERSO L'ESTERNO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE S che racchiude il volume V.

Il vettore $\underline{E} \times \underline{H}$ è il cosiddetto VETTORE DI POYNTING e rappresenta la densità superficiale di potenza (W/m^2) associata al campo elettromagnetico.
Dato che l'estensione della superficie S è arbitraria, si ha FLUSSO di POTENZA ELETTROMAGNETICA a QUALUNQUE DISTANZA dalle SORGENTI!

* **NOTA**: Gli integrali sono estesi tutti nello stesso volume V, ma è possibile che alcuni siano diversi da zero solo in zone limitate di V; non bisognerà sorprendersi se alcuni verranno calcolati su volumi più piccoli.
È ovvio che la scelta di V è fondamentale; di solito include SORGENTE e RICEVITORE, ma non è detto che sia sempre così: per esempio, se non li include, potrebbe essere utile ai fini della PROPAGAZIONE, per ricavare informazioni sul mezzo trasmissivo.

* **NOTA**: Il Teorema di Poynting ci dice che l'energia erogata dalle sorgenti impresse, nella TRASFORMAZIONE IN ENERGIA ELETTROMAGNETICA, in parte SI DISSIPA, in parte RIMANE NEL VOLUME, in parte FLUISCE FUORI dalla sorgente.
Tutto ciò NON identifica i campi!!! Sono solo relazioni in termini di POTENZA (Watt) $\longrightarrow$ $\boxed{\text{BILANCIO ENERGETICO}}$

• APPLICAZIONI A SORGENTI ARMONICHE :

Un caso importante è quello in cui le SORGENTI del campo (e quindi i CAMPI stessi) variano come FUNZIONI SINUSOIDALI del TEMPO!

$$\underline{J_i} = J \sin(\omega t)\, \underline{i}_0$$

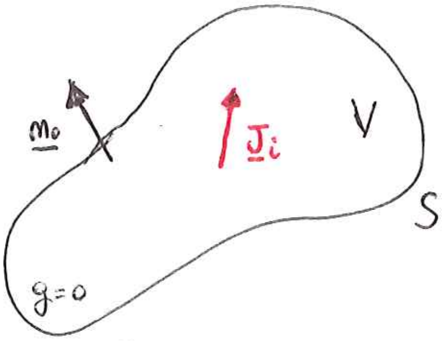
$$\underline{E} = E \sin(\omega t + \psi_e)\, \underline{e}_0$$

$$\underline{H} = H \sin(\omega t + \psi_h)\, \underline{h}_0$$

in cui AMPIEZZA (J, E, H), DIREZIONI $(\underline{i}_0, \underline{e}_0, \underline{h}_0)$ e FASI (ψ_e, ψ_h) sono in generale funzioni di punto; consideriamo invece la PULSAZIONE ω costante, quindi il periodo della sinusoide è lo stesso.

• MEZZO NON DISSIPATIVO :

Consideriamo una superficie S che racchiude al suo interno una sorgente solo di tipo elettrico $\underline{J_i}$ (manca $\underline{J_{im}}$). Supposto che il mezzo è NON DISSIPATIVO, quindi $g = 0 \Rightarrow \iiint_V g\,\underline{E} \cdot \underline{E}\, dV = 0$, manca la componente della potenza dissipata nel Teorema di Poynting.



Scriviamo quindi il TEOREMA DI POYNTING :

$$\iiint_V -\underline{J_i} \cdot \underline{E}\, dV = \iiint_V \left(\underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \right) dV + \oint\!\!\oint_S \underline{E} \times \underline{H} \cdot \underline{n_0}\, dS$$

Considerando l'ANDAMENTO SINUSOIDALE :

$$-\iiint_V J E\, \underline{i_0} \cdot \underline{e}_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t + \psi_e)\, dV =$$

$$= \iiint_V \left[\varepsilon E^2 \sin(\omega t + \psi_e) \cdot \frac{d \sin(\omega t + \psi_e)}{dt} + \mu H^2 \sin(\omega t + \psi_h) \cdot \frac{d \sin(\omega t + \psi_h)}{dt} \right] dV +$$

$$+ \oint\!\!\oint_S \underline{E} \times \underline{H} \cdot \underline{n_0}\, dS$$

Utilizzando formule di DUPLICAZIONE e PROSTAFERESI:

$$-\frac{1}{2}\iiint_V JE\,\underline{i_0}\cdot\underline{e_0}\left[\cos\psi_e-\cos(2\omega t+\psi_e)\right]dV=$$

$$=\frac{\omega}{2}\iiint_V\left[\varepsilon E^2\sin 2(\omega t+\psi_e)+\mu H^2\sin 2(\omega t+\psi_h)\right]dV+\oiint_S \underline{E}\times\underline{H}\cdot\underline{n_0}\,dS$$

Notare che la potenza associata alla variazioni di energia immagazzinata nel campo è una quantità periodica con periodo $\frac{T}{2}$ (a frequenza doppia) rispetto ai campi. Essendo l'andamento periodico, sono importanti i VALORI MEDI in un PERIODO T:

medio 0 nel periodo

$$-\frac{1}{2}\iiint_V JE\,\underline{i_0}\cdot\underline{e_0}\;\frac{1}{T}\int_0^T\left[\cos\psi_e-\cos(2\omega t+\psi_e)\right]dt\;dV=$$

$$=-\frac{1}{2}\iiint_V JE\,\underline{i_0}\cdot\underline{e_0}\cos\psi_e\,dV=$$

medio 0 nel periodo

$$=\frac{\omega}{2}\iiint_V\left[\varepsilon E^2\frac{1}{T}\int_0^T\sin 2(\omega t+\psi_e)\,dt+\mu H^2\frac{1}{T}\int_0^T\sin 2(\omega t+\psi_h)\,dt\right]dV+$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T\oiint_S\underline{E}\times\underline{H}\cdot\underline{n_0}\,dS=\frac{1}{T}\int_0^T\oiint_S\underline{E}\times\underline{H}\cdot\underline{n_0}\,dS$$

- RISULTATO: Il valore medio nel tempo della POTENZA EROGATA dalle sorgenti coincide con il valore medio della POTENZA che FLUISCE attraverso la SUPERFICIE che CIRCONDA la SORGENTE.
  Non ci sono dissipazioni di energia e il valor medio della potenza associata alle variazioni di energia immagazzinata nel campo elettromagnetico è NULLO $\rightarrow$ NON può AUMENTARE o DIMINUIRE INDEFINITIVAMENTE!

Inoltre, notare che la POTENZA MEDIA EROGATA dipende direttamente dallo SFASAMENTO TEMPORALE ψ_e tra la densità di corrente $\underline{J}$ ed il campo elettrico $\underline{E}$ da essa generato.

Analizziamo cosa succede al variare dello sfasamento ψ_e ($\cos\psi_e$):

assunto per comodità che $\underline{i}_o \cdot \underline{e}_o > 0$, abbiamo 3 CASI:

- se $\frac{\pi}{2} < \psi_e < \frac{3}{2}\pi \longrightarrow \cos\psi_e < 0$ è NEGATIVO e la POTENZA EROGATA dalle sorgenti è POSITIVA (massima per $\psi_e = \pi$) e FUORIESCE (flusso positivo) dalla superficie S;

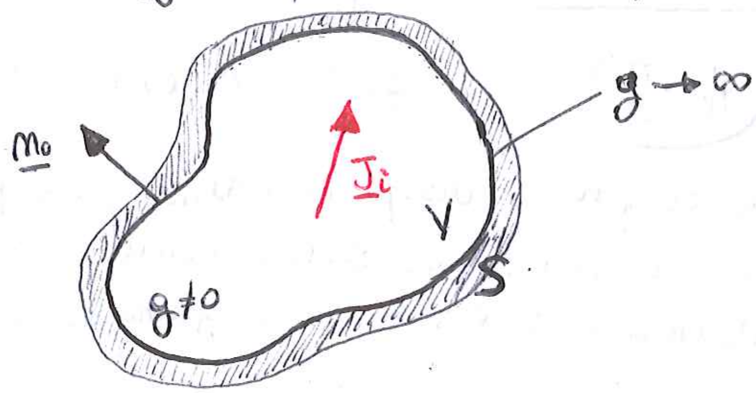
- se $\psi_e = \frac{\pi}{2}$ (QUADRATURA) $\longrightarrow \cos\psi_e = 0$, le SORGENTI NON EROGANO POTENZA, poiché il termine $\iiint_V -\underline{J}_i \cdot \underline{E}\, dV = 0$

- se $0 < \psi_e < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3}{2}\pi < \psi_e < 2\pi \longrightarrow \cos\psi_e > 0$ è POSITIVO, invece la POTENZA "EROGATA" è "NEGATIVA", in realtà NON sono sorgenti, ma elementi dissipativi.

* **NOTA**: ψ_e è un angolo nel TEMPO! $\underline{i}_o \cdot \underline{e}_o$ dà un angolo nello SPAZIO! Il fatto di essere in QUADRATURA NON implica l'essere ORTOGONALI, anche se in entrambi i casi la potenza erogata è nulla!

- **INVOLUCRO METALLICO**:

Consideriamo ora la sorgente impressa $\underline{J}_i$ racchiusa in un INVOLUCRO di CONDUTTORE IDEALE ($g \to \infty$), all'interno del quale il mezzo è DISSIPATIVO ($g \neq 0$).



Consideriamo la superficie S coincidente con la superficie interna dell'involucro metallico (che avrà un suo spessore), applichiamo il TEOREMA DI POYNTING:

essendo il conduttore IDEALE $\Rightarrow$ $\underline{E}$ è ORTOGONALE ad S
$\underline{H}$ è TANGENZIALE ad S

$\Rightarrow$ Il vettore di Poynting $\underline{P} = \underline{E} \times \underline{H}$ sarà TANGENZIALE ad S, quindi è ortogonale alla normale ad S (cioè $\underline{n}_o$).

Ne segue che: $\underline{E} \times \underline{H} \cdot \underline{n}_o = 0$ e il termine $\oint\!\!\oint_S \underline{E} \times \underline{H} \cdot \underline{n_o}\, dS$ SCOMPARE nel Teorema di Poynting $\longrightarrow$ NON C'È FLUSSO DI POTENZA VERSO L'ESTERNO DELL'INVOLUCRO METALLICO!

C'è però DISSIPAZIONE:

$$\iiint_V -\underline{J}_i \cdot \underline{E}\, dV = \underbrace{\iiint_V \left(\underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \right) dV}_{\text{media } 0 \text{ nel periodo } T} + \iiint_V g \underline{E} \cdot \underline{E}\, dV$$

Applicando sempre l'andamento SINUSOIDALE e la MEDIA in un PERIODO T:

$$-\frac{1}{2} \iiint_V J E\, \underline{i_o} \cdot \underline{e}_o \cos \psi_e\, dV = \iiint_V \frac{1}{T} \int_0^T g E^2 \underbrace{\sin^2(\omega t + \psi_e)}_{\frac{T}{2}}\, dt\, dV = \iiint_V g \frac{E^2}{2}\, dV$$

- SOLUZIONE: $\boxed{\text{Tutta la POTENZA EROGATA dalla sorgente SI DISSIPA nel volume del materiale dissipativo!}}$

* Nel caso in cui il materiale fosse NON dissipativo (~~conduttore ideale~~ $g=0$), il campo elettrico si dovrebbe SFASARE rispetto alla sorgente, in modo da ANNULLARE LA POTENZA EROGATA, quindi:

$$\text{se } g = 0 \Rightarrow \boxed{\psi_e = \frac{\pi}{2}},$$

cioè $\underline{E}(t)$ è IN QUADRATURA con $\underline{J}(t)$

* Quindi, tutta la potenza erogata si dissipa in CALORE, che può essere sfruttato! Spesso si chiude il generatore dentro una scatola metallica conduttrice, per NON avere FLUSSO di POTENZA verso l'esterno e sfruttando la dissipazione di energia. Un esempio è il FORNO A MICROONDE!

* NOTA:

Se per esempio non si hanno dissipazioni ($g=0$) e ci viene chiesto il FLUSSO di potenza attraverso la superficie, dobbiamo, tramite il TEOREMA DI POYNTING, calcolare la potenza erogata dalle sorgenti, poiché SONO UGUALI!

Cercando di farlo in altro modo, si viene indotti in errori!