Streaming Data Management and Time Series Analsis

$X_1, X_2, ..., X_n$ variabili casuali, tra loro dipendenti altrimenti non avrebbe senso la serie storica, e se tale dipendenza rimane costante nel tempo posso prevedere la serie storica. La stazionarietà è la omogeinità nella dipendenza tra queste variabili.

Stazionarietà debole o in covarianza

Una serie storica X_t è stazionaria in senso debole (o in covarianza) se $\forall t$

$$E[X_t] = \mu < \infty Var(X_t) = \sigma^2 = \gamma_0 < \infty Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k < \infty$$

cioè ho omogenieità temporale nella serie, la dipendenza è relativa rispetto al t scelto ma indipendete da tale t quindi posso proiettare ciò che ho nel passato nel futuro.

Stazionarietà forte

Una serie storia equispaziata è stazionaria in senso forte $\forall h-upla\ t_1, t_2, ..., t_h$, $\forall k$

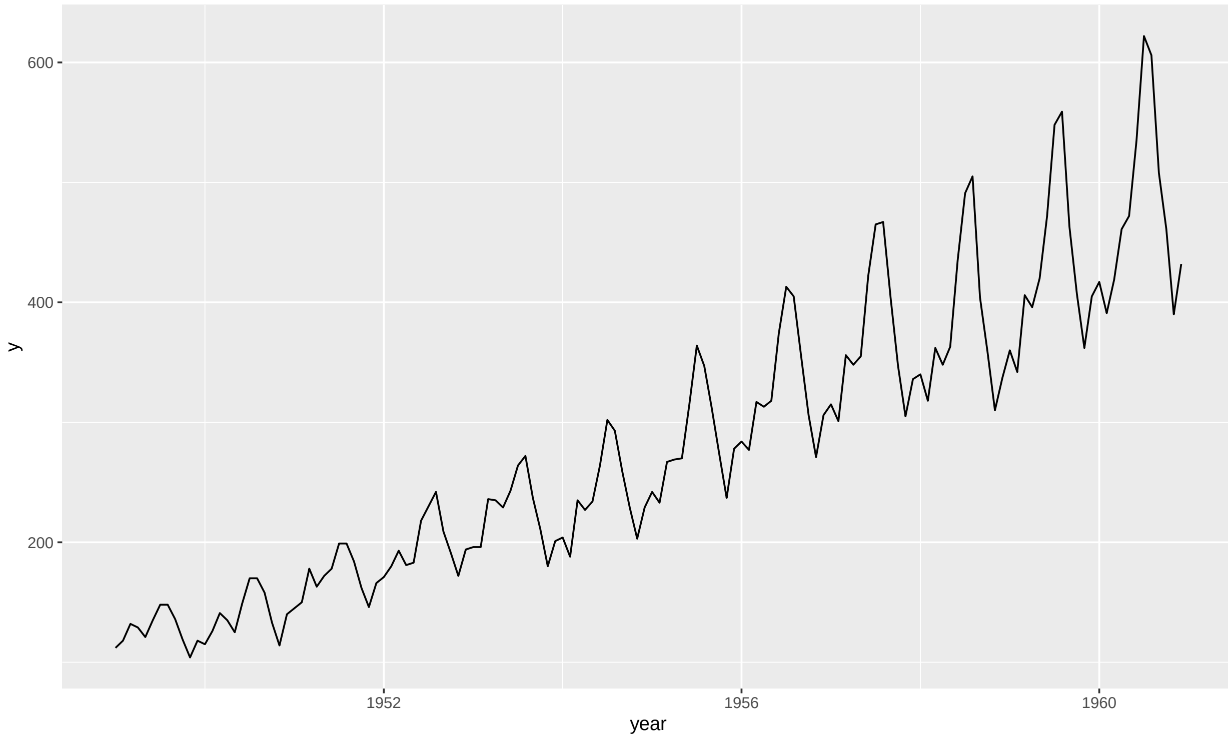
$$X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_h} =^{(d)} X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, ..., X_{t_h+k}$$

cioè la distribuzione è invariante rispetto alle traslazioni della serie storica.

Oss: Nel caso particolare di processo Gaussiani la stazionarietà forte e debole coincidono, poiché la gaussiana è completamente caratterizzata dai primi 2 momenti, la media e la covarianza.

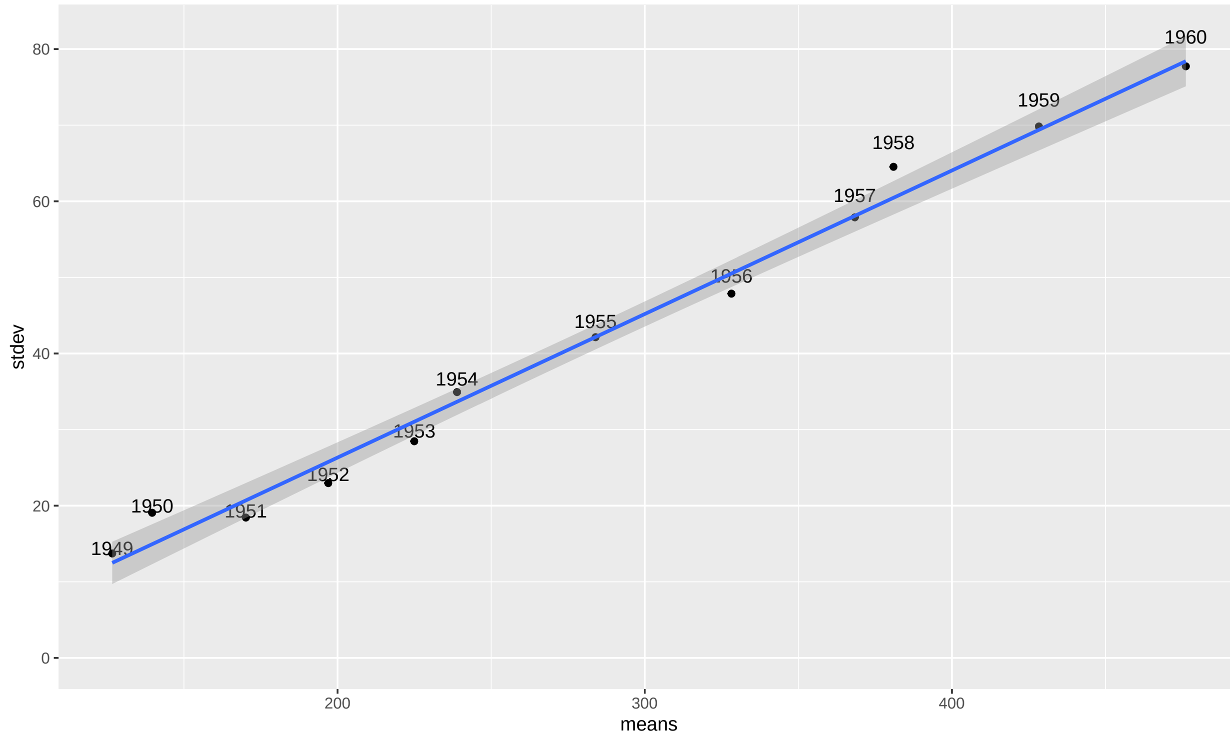
Spesso nelle serie storiche le ipotesi di stazionarietà vengono violate, in tal caso bisogna usare delle trasformazioni reversibili in modo da far rispettare le ipotesi e dopo la previsioni invertire la trasformazione (es. Transformazione Box-Cox).

```
library(ggplot2)
y <- AirPassengers
ggplot( data = data.frame(y=as.numeric(y),
                          year=as.numeric(time(y))),
        aes(y=y, x=year))+
  geom_line()
```



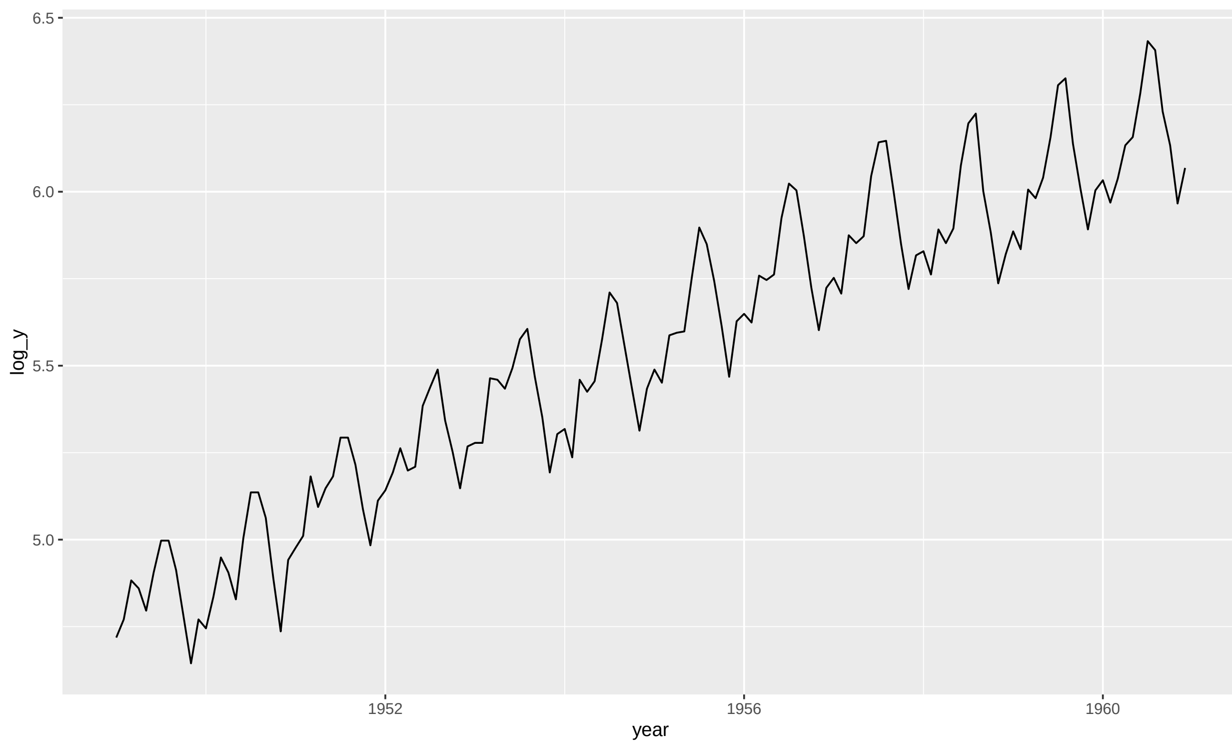
Osserva come la varianza cresce col passare degli anni, anche la media non è costante nel tempo, quindi viola praticamente tutte le ipotesi di stazionarietà.

```
means <- tapply(y, floor(time(y)) , mean)
stdev <- tapply(y, floor(time(y)) , sd)
df <- data.frame(means=means, stdev=stdev)

ggplot(aes(x=means, y=stdev), data = df) +
  geom_point() +
  geom_text(label=rownames(df), position = position_stack(vjust = 1.05)) +
  geom_smooth(method=lm)
```



Ragruppando per ogni anni la media e la deviazione standard vedo che cresce linearmente, questo comportamento indica l'utilizzo di un trasformazione logaritmica:

```
ggplot(aes(y=log_y, x=year),
       data = data.frame(log_y=log(as.numeric(y)),
                         year=as.numeric(time(y))))+
  geom_line()
```



Questo appiatisce la varianza negli negli anni, adesso dovrò solo aggiustare il trend e la stagionalità, poi la serie sarà stazionaria.

Il Random Walk

Supponiamo $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ con ε_t $i.i.d.(0, \sigma^2)$, questo è un Random Walk, il RW non è stazionaria:

$X_0 = x_0 \Rightarrow X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$ quindi abbiamo che

$$E[X_t] = E[X_0] + \sum_i E[\varepsilon_i] = E[X_0] = x_0$$

$$Var(X_t) = E[(X_t - X_0)^2] = E[(\sum_i \varepsilon_i)^2] = \sum_i Var(\varepsilon_i) = t\sigma^2$$

e quindi la varianza non è costante quindi non è stazionoria, ma è stazionario $X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$. Anzi noto che la varianza cresce col tempo, quindi cresce anche l'incertezza sulla stima che faccio sulla serie.

Un processo X_t non stazionario, ma tale che la sua differenza $X_t - X_{t-1}$ è stazionario si dice integrato di ordine 1: $X_t \sim I(1)$. Definisco nomeinclatura degli operatori: B l'operatore tale che $BX_t = X_{t-1}$ e $\Delta = \mathbb{I} - B$ e ottengo un altro operatore: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

$X_t \sim I(d)$ se X_t non è stazionario $\Delta^k X_t$ per $k = 1, ..., d-1$ non è stazionario ma $\Delta^d X_t$ è stazionario. Oss: $\Delta^2 X_t \neq X_t - X_{t-2}$ bensì $\Delta^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$.

Predittore Ottimale

Il predittore minimizza il valore atteso della funzione di perdita $l()$, in funzione di $p(X_1, ..., X_m)$ che è una funzione misurabile:

$$\min_p \mathbb{E}(l(Y - p(X_1, ..., X_m)))$$

Integrazione Stagionale

Differenza stagionale Δ_k è così definita:

$$\Delta_k = \mathbb{I} - B^k \rightarrow \Delta_k X_t = X_t - X_{t-k}$$

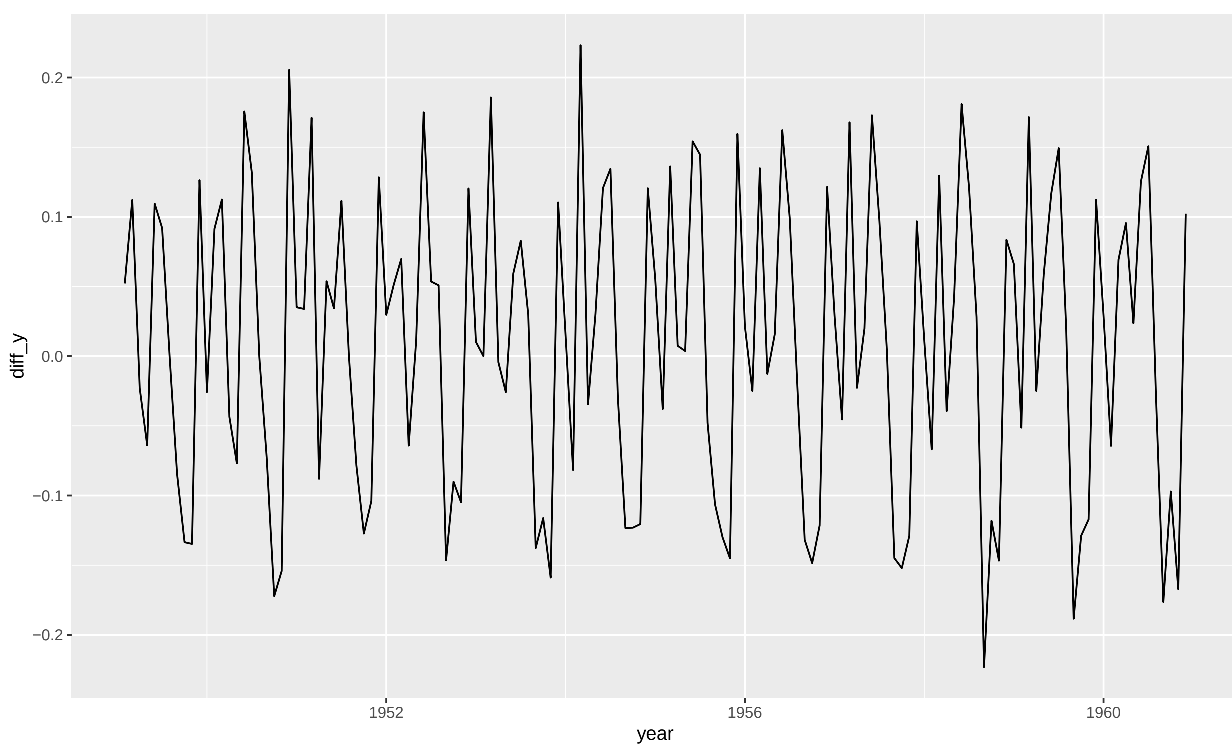
Data la differenza stagionale Δ_k, X_t è stagionale ordinato di ordine 1 se X_t è non stazionario e $X_t - X_{t-k}$ è stazionario. E' utile quando vi è una ripetitività stagionale, cioè un comportamento che si ripete dopo k tempi, eliminandolo elimino questa stagionalità, che non potevo ottenere solo con la differenza Δ^k.

X_t è stagionalmente integrato (di stagione k) di ordine 1 se X_t è non stazionario e $X_t - X_{t-k}$ è stazionario. Generalizzando X_t è stagionalmente integrato di ordine h se X_t non è stazionario $\Delta_{kj} X_t$ è non stazionario per $j = 1, ..., h-1$ è non stazionario e $\Delta_{kh} X_t$ è stazionario.

Oss: $\Delta_k = \mathbb{I} - B^k = (\mathbb{I} - B)(\mathbb{I} + B^1 + ... + B^{k-1})$, quindi la differenza stagionale k contiene anche la differenza prima.

L'Integrazione elimina il trend ma non riesce ad eliminare la stagionalità, per eliminare la stagionalità bisogna usare la differenza stazionale.

```
library(ggplot2)
ly <- log(AirPassengers)
dly <- diff(ly)
ggplot(data=data.frame(diff_y=as.numeric(dly), year=as.numeric(time(dly))),
       aes(x=year, y=diff_y))+
  geom_line()
```



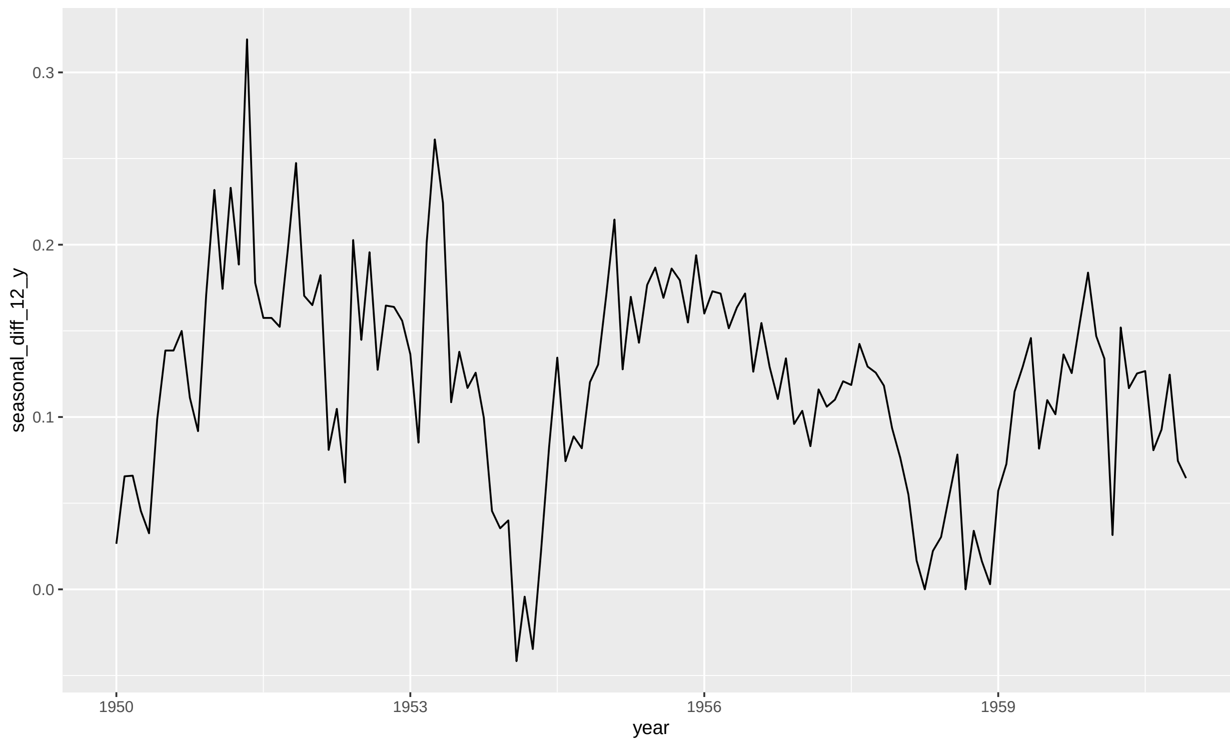
Si vede che il trend non c'è più ma la stagionalità è ancora evidente, inoltre perdo anche l'informazione dell'intercetta in questo modo, quindi vorrei che il modelli trovi e salvi l'intercetta (drift) in qualche modo.

White noise

ε_t è white noise se $\mathbb{E}[\varepsilon_{\approx}] = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ e $Var(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 \quad \forall k \neq 0$. White noise è un processo stazionario e per rendere il white noise a media non nulla basta aggiungere una costante, quindi ho $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t + c$ detto Random walk con drift, si osserva che $X_t = X_0 + ct + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$, il pezzo $c \cdot t$ è il drift.

Oss: Nel breve periodo di previsione la previsione è il drift, mentre a lungo periodo la maggior parte della varianza è spiegata dal white noise (che aumenta quindi il rumore e quindi l'intervallo di confidenza della previsione).

```
sdly <- diff(ly,12) #seasonal difference
ggplot(data=data.frame(seasonal_diff_12_y=as.numeric(sdly),
                       year=as.numeric(time(sdly))),
       aes(x=year, y=seasonal_diff_12_y))+
  geom_line()
```



E adesso sembra non avere più la stagionalità, chiaramente un po' di memoria stagionale rimane, lo si vede usando ACF e PACF. Ma i movimenti netti sulla stagionalità non ci sono più. Osserva siccome siamo sul logaritmo, il dato adesso è in percentuali.

Spesso non si è sicuro se la serie dopo la trasformazione è ancora stazionario o meno, vi sono dei test ma uno potrebbe applicare 2 modelli uno considerandolo come stazionario e l'altro come non stazionario e poi si prende il modello migliore.

Modelli ARIMA

Modello Autoregressivo

Un processo autoregressivo $AR(p)$ è $X_t = C + \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$.

OSS: Random Walk è $AR(1)$ quindi un $AR(p)$ non è necessariamente stazionario, poiché il caso particolare Random Walk non lo è.

Notazione compatta per la funzione con operatore ritardo è:

$$\phi_p(B) = \mathbb{I} - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p$$

quindi ho che $\phi_p(B)X_t = c + \varepsilon_t$, infatti

$$\phi_p(B)X_t = (\mathbb{I} - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p)X_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - ... - \phi_p X_{t-p} = c + \varepsilon_t$$

Teorema: Se le soluzioni di

$$\phi_p(Z) = 0 \to \mathbb{I} - \phi_1 Z - ... - \phi_p Z^p = 0$$

sono tali che le soluzioni per $i = 1, ..., p$, $|Z^{(i)}| > 1 \Rightarrow$ il processo è stazionario.

Es. prendiamo $AR(1) : X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + c$ da cui

$$(1 - \phi B)X_t = \varepsilon_t + c$$

Quindi le soluzioni dell'equazione $1 - \phi Z = 0$ sono $Z = \frac{1}{\phi}$ quindi ha modulo > 1 sse $\phi < 1$ quindi il random walk che è con $\phi = 1$ non è stazionario.

Se una delle soluzioni di $\phi_p(Z) = 0$ è pari a 1 e le altre sono in modulo maggiore di 1 allore il processo $AR(p)$ è integrato di ordine 1.

Dimostrazione nel caso di 1 radice, (per k radici è analogo): Date le soluzioni il polinomio sopra si può fattorizzare come:

$$\phi_p(B) = (1 - \frac{1}{Z^{(1)}}B)(1 - \frac{1}{Z^{(2)}}B) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{Z^{(p)}}B)$$

Se $Z^{(1)} = 1$ allora $\phi_p(B) = (1 - B)\varphi_{p-1}(B)$ quindi il processo AR(p) $\phi_p(B)X_t = c + \varepsilon_t$ posso riscriverlo come

$$\varphi_{p-1}(B)(1 - B)X_t = \varphi_{p-1}(B)\Delta X_t = c + \varepsilon_t$$

quindi ho dimostrato che il processo era integrato di ordine 1 (ΔX_t).

Si generalizza, ottendendo se ho più radici unitarie l'ordine del processo aumenta con il numero delle radici, quindi se ho k radici il processo sarà integrato di ordine k.

Oss: Se abbiamo una radice unitaria allora dal $1 - \phi_1 Z - ... - \phi_p Z^p = 1 - \sum_i \phi_i Z^i = 0$ deduciamo che la somma di ϕ_i è 1.

Oss: nell'equazione di AR(1) $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, c non è la media, infatti sia μ la media allora

$$\mu \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[c] + \mathbb{E}[\phi X_{t-1}] = c + \phi\mu \to \mu = \frac{c}{1 - \phi}$$

Quindi se $\phi = 1$ la media esplode. Si generalizza per AR(p) ottentendo:

$$\mu = \frac{c}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i}$$

In un processo stazionario abbiamo: $\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k})$ abbiamo che $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ è la correlazione. Il lag di autocorrelazione parziale è

$$\alpha_k = Cor(X_t - \mathbb{P}(X_t | X_{t-1}, ..., X_{t-k+1}), X_{t-k} - \mathbb{P}(X_{t-k} | X_{t-1}, ..., X_{t-k+1}))$$

da cui deriva la ACF e PACF:

In caso di un processo AR(p) abbiamo p ritardi di PACF non nulli e dopo p ritardi vanno a zero, mentre ACF tende a tornare a zero geometricamente.

Supponiamo una periodicità stagionale S, SAR(P) è molto simile a AR(p) ma lavora su multipli di s, quindi ho

$$X_t = c + \Phi_1 X_{t-S} + ... + \Phi_P X_{t-P \cdot S} + \varepsilon_t$$

Usando gli operatori:

$$(1 - \Phi_1 B^S - ... - \Phi_P B^{P \cdot S}) X_t = c + \varepsilon_t$$

chiamiamo il polinomio per SAR(P) $\Phi_P(B)$, un modello quindi AR(p)(P)$_S$ è:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B)X_t = c + \varepsilon_t$$

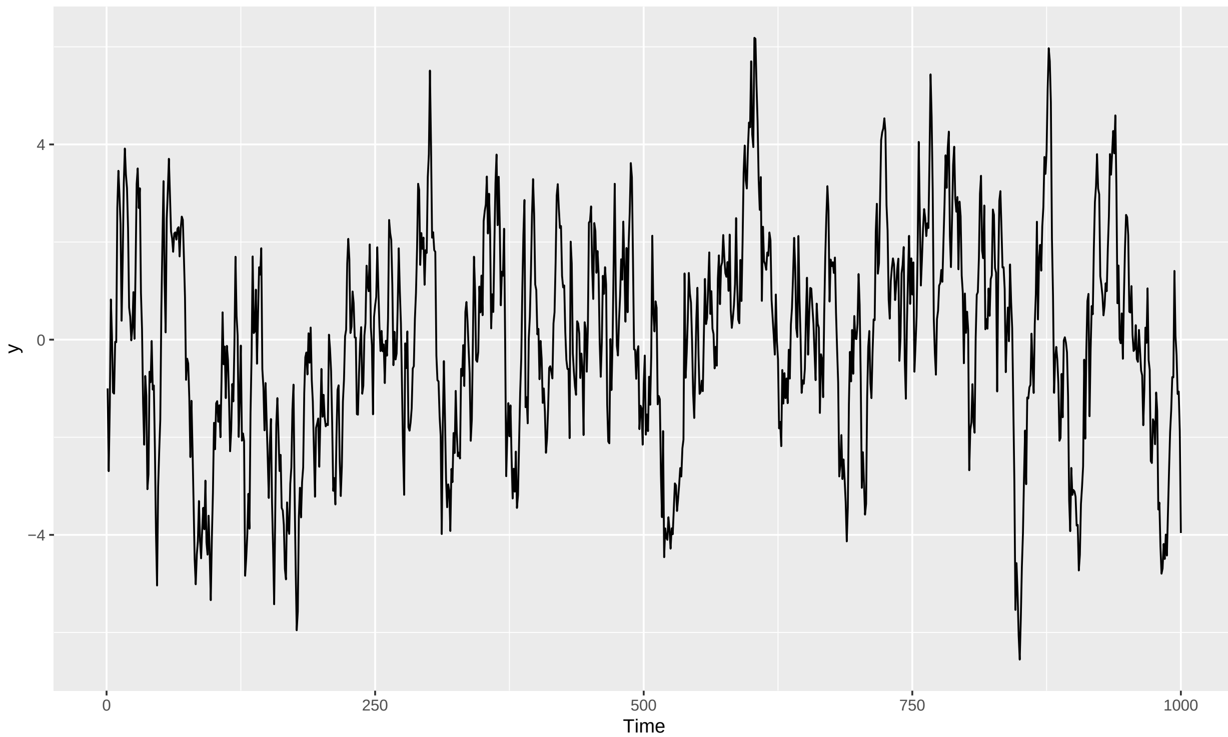
è come se si applicassero 2 filtri, uno che si occupa del white noise di memoria recente e l'altro con memoria stagionale.

ad es. AR(1)(1)$_4$ è $(1 - \phi B)(1 - \Phi B^4)X_t = (1 - \phi B - \Phi B^4 + \phi\Phi B^5)X_t = c + \varepsilon_t$

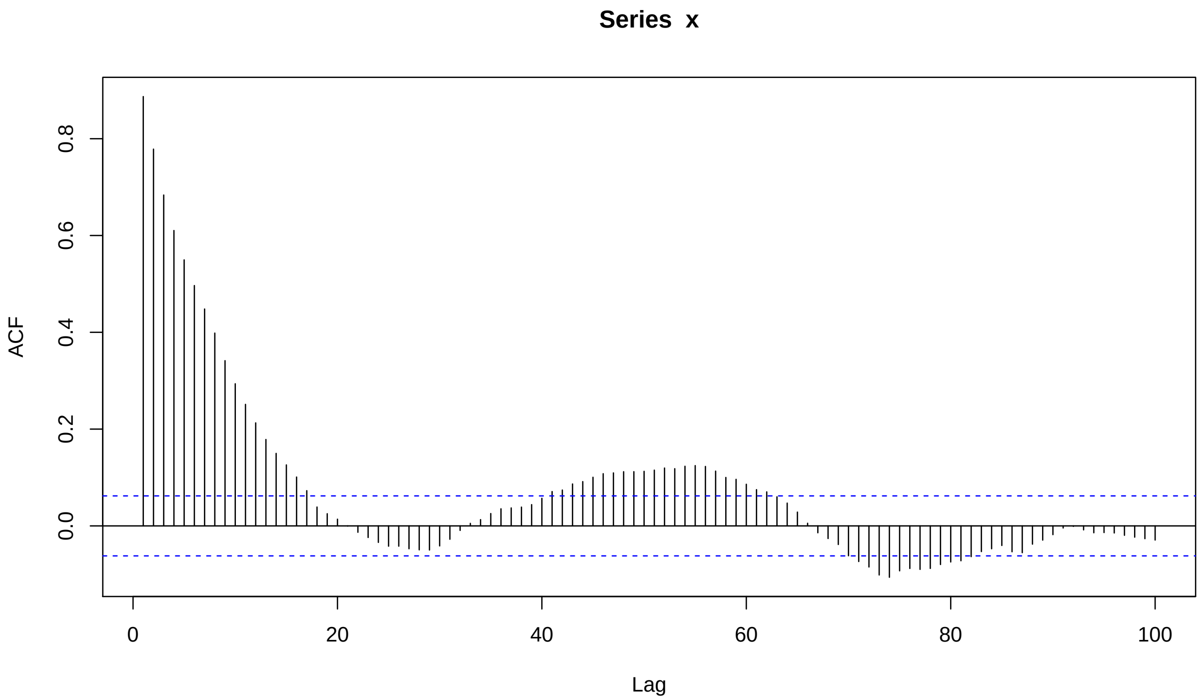
per riconoscere SAR(1)$_P$ abbiamo il primo e l'unico ritardo di PACF al ritardo P, mentre nel ACF abbiamo il ritardo sui multipli di P che decade geometricamente.

Simulazione modelli ARIMA in R:

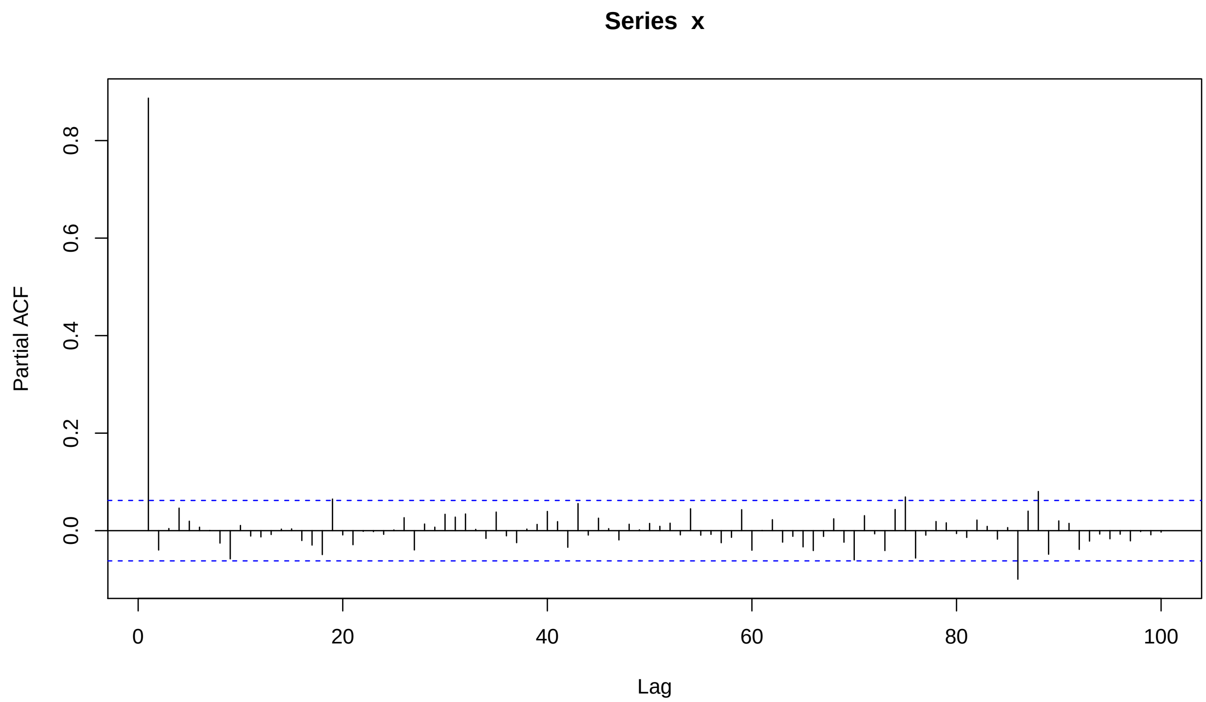
```r
#~~ AR(1)
library(ggplot2)
n <- 1000
phi <- 0.9 #OSS: è < 1, se fosse >1 esplode la serie poiché viene respinto da 0
#se phi=1 non è più attratto da 0 ma non esplode ancora (è un random walk)
eps <- rnorm(n) #White Noise
x <- stats::filter(eps, c(phi), "recursive", init=0)

ggplot(aes(x=Time, y=y),
       data = data.frame(y=as.numeric(x),
                         Time=1:length(x)))+
  geom_line()
```



```r
#~~ ACF e PACF plot
library(forecast)
Acf(x, lag.max = 100)
```



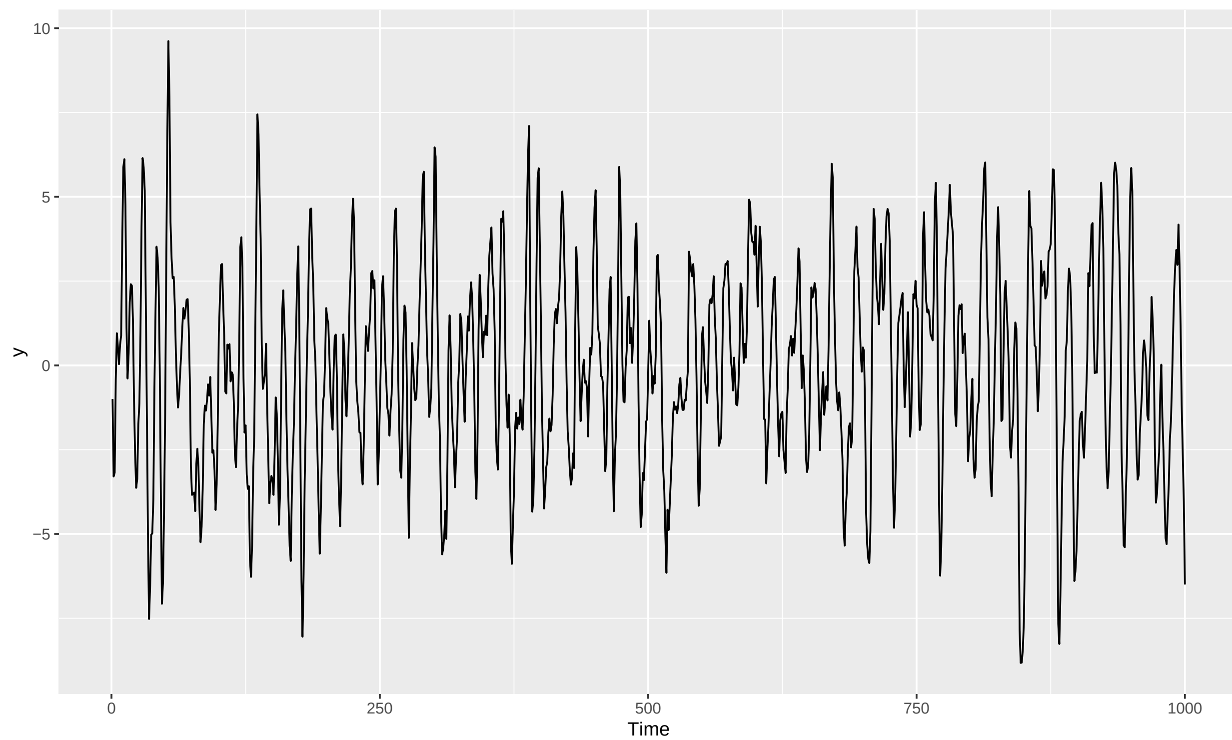

```r
Pacf(x, lag.max = 100)
```



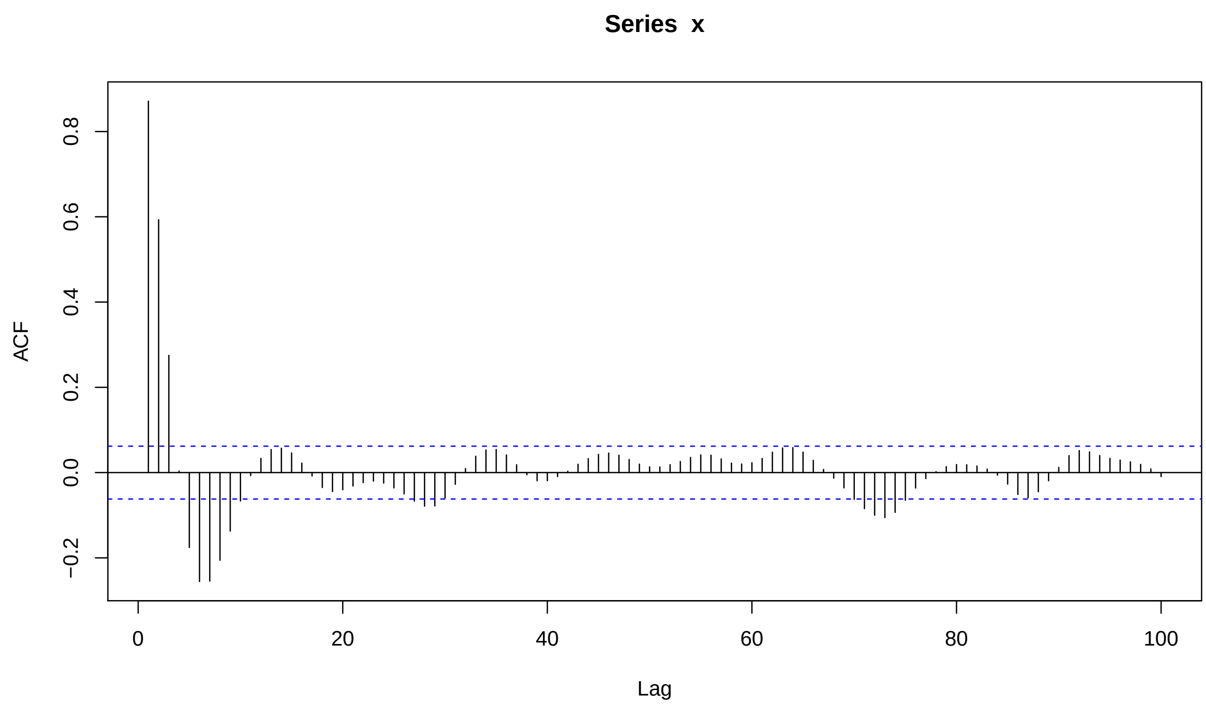

```
#~~ AR(2)
phi <- c(1.5, -0.7)
#Le radici sono in modulo > 1, poiché il processo è stazionario
Mod(polyroot(c(1, -phi)))
```

```
## [1] 1.195229 1.195229
```

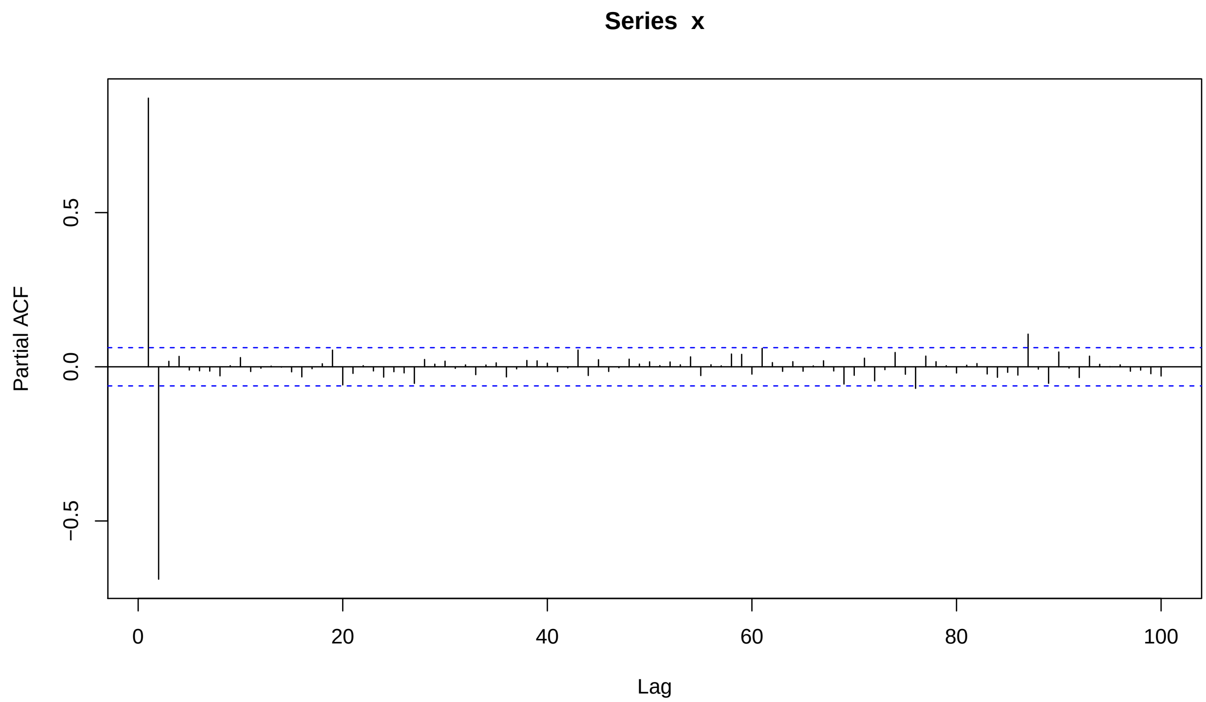
```
x <- stats::filter(eps, c(phi), "recursive")
ggplot(aes(x=Time, y=y),
       data = data.frame(y=as.numeric(x),
                         Time=1:length(x)))+
  geom_line()
```



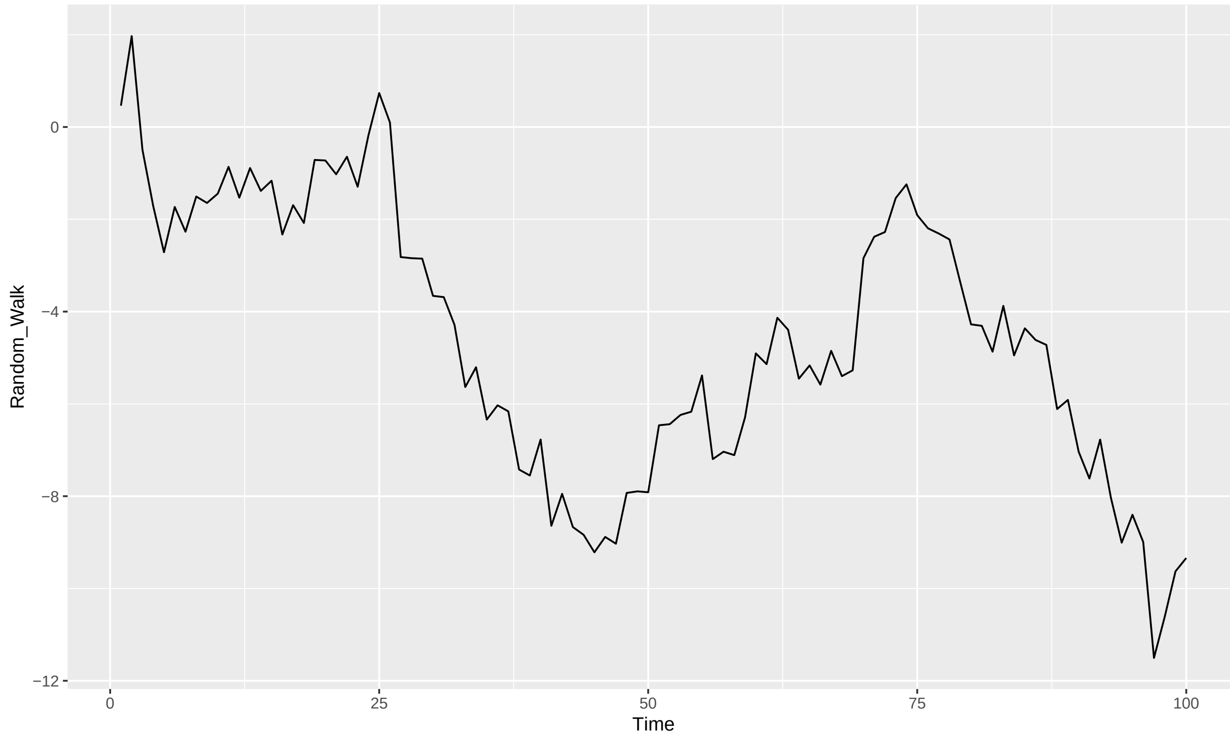

```
Acf(x, lag.max = 100)
```




```
Pacf(x, lag.max = 100)
```




```
#~~ Stima AR(1) su un processo RandomWalk (RW)
n <- 100
eps <- rnorm(n)
rw <- cumsum(eps)
ggplot(aes(x=Time, y=Random_Walk),
       data = data.frame(Random_Walk=rw,
                         Time=as.numeric(1:length(rw))))+
  geom_line()
```




```
mod1 <- Arima(rw, order = c(1,0,0)) #oss: il coef ar1 non è 1, quindi la stima è "distorta"
summary(mod1)
```

```
## Series: rw
## ARIMA(1,0,0) with non-zero mean
##
## Coefficients:
##          ar1     mean
##       0.9654  -4.5390
## s.e.  0.0265   2.0937
##
## sigma^2 estimated as 0.8337:  log likelihood=-133.13
## AIC=272.27   AICc=272.52   BIC=280.08
##
## Training set error measures:
##                       ME      RMSE       MAE       MPE     MAPE      MASE
## Training set -0.08510928 0.9038959 0.6890534 -4.435948 40.80121 0.9926062
##                     ACF1
## Training set -0.08666525
```

Vi sono dei test (di Dickey-Fuller) per evitare questi problemi e vedere se vi è una radice unitaria nella serie:

Nel processo AR(p), ho che H_0 : almeno una radice caratteristica è $= 1$, e H_1 : tutte le radici sono in modulo > 1 (stazionarietà).

in realtà Dickey-Fuller ha $H_0 : RW$ e $H_1 : AR(1)$ stazionaria mentre il test ADF che è basato su Dickey-Fuller, che testa se la somma delle radici è $= 1$, in caso affermativo sono sicuro di avere una radice unitaria, vedi lezione 2 per l'equazione da risolvere per le radici del polinomio fa cui deriva questa idea della somma delle radici $= 1$

```r
urca::summary(urca::ur.df(rw, type="drift", lags=10, "AIC"))
```

```
##
## ###############################################
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
## ###############################################
##
## Test regression drift
##
##
## Call:
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.66940 -0.43345  0.00578  0.46599  2.53245
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.30779    0.18843  -1.633    0.106
## z.lag.1     -0.04120    0.03359  -1.226    0.223
## z.diff.lag  -0.10332    0.10756  -0.961    0.339
##
## Residual standard error: 0.8744 on 86 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.03315,    Adjusted R-squared:  0.01067
## F-statistic: 1.474 on 2 and 86 DF,  p-value: 0.2347
##
##
## Value of test-statistic is: -1.2265 1.4103
##
## Critical values for test statistics:
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.51 -2.89 -2.58
## phi1  6.70  4.71  3.86
```

Il valore del test è a doppia coda quindi accetto l'ipotesi nulla se il valore della statistica (t-value di z.lag.1) sta a destra di 5pct tau (-2.89) e rifiuto nel caso sta a sinistra di tale valore, ad esempio sulla x di prima che sappiamo non avere radice unitaria H_0 viene rifiutata:

```r
urca::summary(urca::ur.df(x, type="drift", lags=10, "AIC"))
```

```
##
## ###############################################
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
## ###############################################
##
## Test regression drift
##
##
## Call:
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)
##
```

```
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -3.8629 -0.6916 -0.0010  0.7289  3.8717
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.01193    0.03188  -0.374    0.708
## z.lag.1     -0.20456    0.01320 -15.501   <2e-16 ***
## z.diff.lag1  0.73157    0.02745  26.647   <2e-16 ***
## z.diff.lag2 -0.04607    0.03187  -1.446    0.149
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.002 on 985 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5339, Adjusted R-squared:  0.5325
## F-statistic: 376.2 on 3 and 985 DF,  p-value: < 2.2e-16
##
##
## Value of test-statistic is: -15.5008 120.1648
##
## Critical values for test statistics:
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.43 -2.86 -2.57
## phi1  6.43  4.59  3.78
```

Moving Average

Un processo Moving Average a q ritardi, MA(q), è data da una combinazione lineare mobile dei white noise:

$$X_t = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Oss: a questo punto X_t e X_{t-k} con k>q sono incorrelate, esempio com MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$X_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}$$

e quindi

$$Cov(X_t, X_{t-1}) = \mathbb{E}[X_t \cdot X_{t-1}] = \mathbb{E}[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) \cdot (\varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})] = \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

Quindi il processo MA(q) si ricorda al più ciò che è successo fino a q ritardi prima, mentre un processo AR si porta dietro una memoria molto lunga. Quindi nel grafico ACF fino a q ritardi è non nullo il valore e vale zero oltre q ritardi, mentre nel caso di PACF rientra a zero a velocità geometrica (sono possibili delle oscillazioni). Anche qua si possono definire dei polinomi:

$$\theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + ... + \theta_q B^q$$

e il polinomio caratteristico per quella stagionale è:

$$\Theta_Q(B)_S = 1 + \Theta_1 B^S + ... + \Theta_q B^{S \cdot Q}$$

esempio di modelli misti: MA(1)(1)$_4$: $(1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^4) X_t$

Oss: in questo caso c è la media effetiva di X_t.

Modello ARIMA completo

si può mettere tutto insieme in un modello ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$_S$:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B)\Delta^d\Delta_S^D X_t = c + \theta_q(B)\Theta_Q(B)\varepsilon_t$$

Il Metodo di Box&Jenkins

- Faccio grafico della serie, media-sd e mi chiedo
  - è stazionaria in varianza?
    - Se sì vado avanti
    - Se no prendo la trasformazione più opportuna (con Box-Cox $\frac{X^\lambda - 1}{\lambda}$), Oss:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{X^\lambda - 1}{\lambda} = \log(x)$$

  - è stazionaria in media per stagionalità?
    - Se no prendo la differenza stagionale
    - Se sì vado avanti
  - è stazionaria in media?
    - Se no prendo la differenza semplice
    - Se sì vado avanti
- Faccio ACF e PACF e tento il primo modello ARMA, stimo il modello e calcolo i residui $r_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$.
- i residui sono WN (White Noise)?
  - Se sì ho finito
  - Se no aggiusto il modello ARMA iniziale affinché i residui siano WN.

La funzione di verosimiglianza: $L(\theta) = f_\theta(X_1, ..., X_n) = f(X_1)f(X_2|X_1)...f(X_n|X_{n-1}, ..., X_1)$ che va massimizzata in θ.

Oss: $X_t|X_{t-1}...X_1 \sim N(\hat{X}_{t|t-1}, \sigma^2)$ e quindi $r_t = X_t - \hat{X}_{t|t-1} \sim N(0, \sigma^2)$

Un modello ARMA si può esprimere come un modello AR puramente infinto o MA infinito, un modello MA è invertibili se le radici del polinomio caratterstico di MA abbiano modulo > 1 (stesse condizioni della stazionarietà dal modello AR).

Es. Prendiamo un modello MA(1): $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, e assumiamo il modello MA invertibile quindi cerco $\Pi(B) \quad t.c. \quad \Pi(B)(\mathbb{I} - \theta B) = \mathbb{I}$, sotto ipotesi di invertibilità abbiamo che l'operatore inverso è (dove si vede perché chiediamo $|\theta| < 1$):

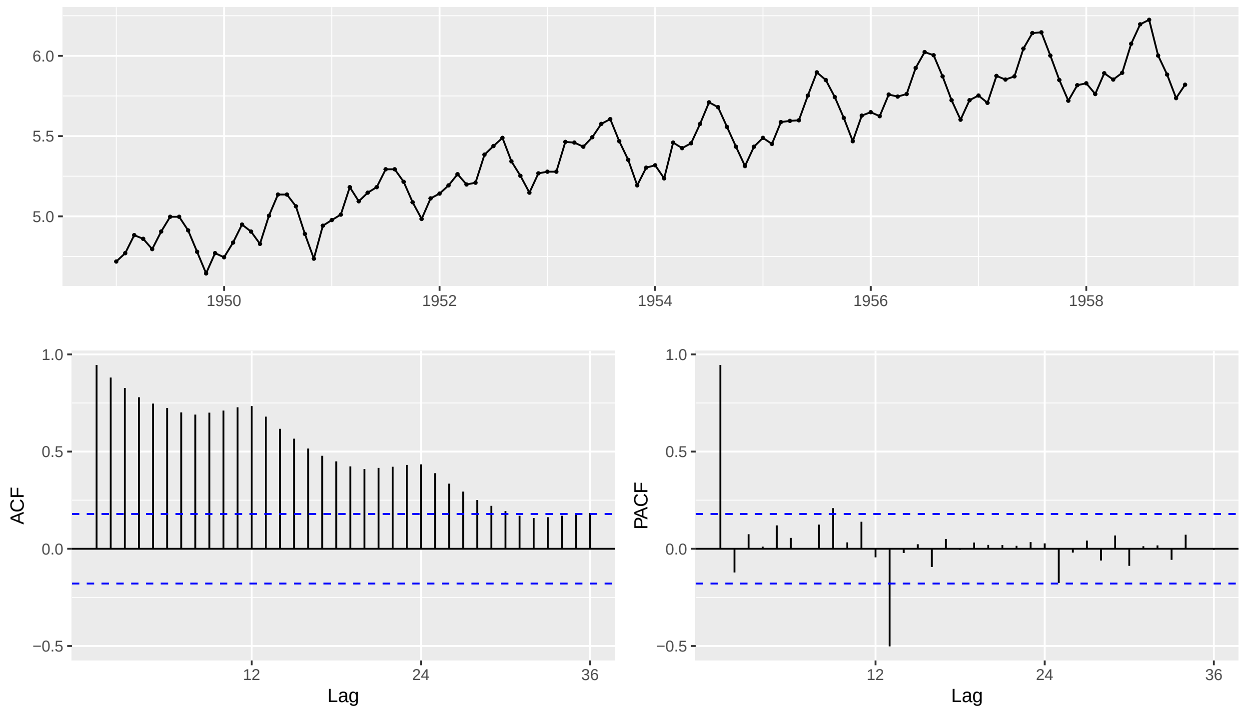
$$\Pi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^n\theta^n B^n$$

applicando il modello inverso otteniamo:

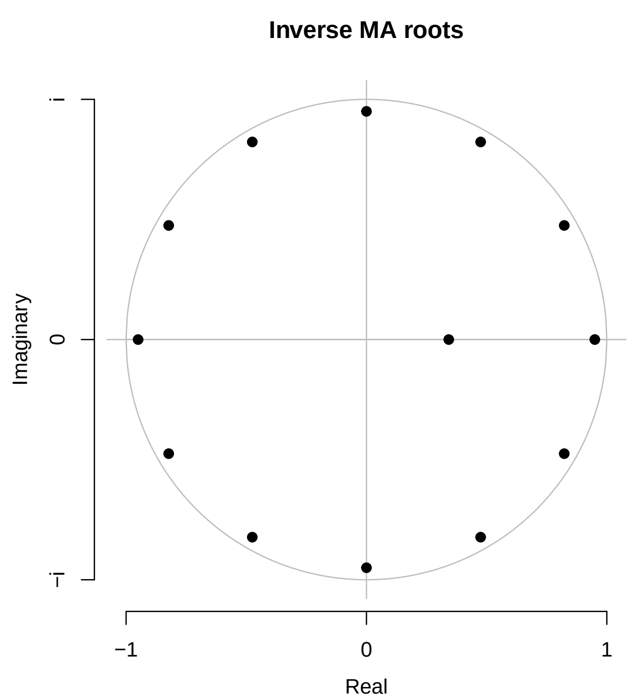
$$(1 - \theta B)^{-1}y_t = \varepsilon_t(1 - \theta B + \theta^2 B^2 - ...)y_t = \varepsilon_t y_t = \varepsilon_t + \theta y_{t-1} - \theta^2 y_{t-2} + ...$$

Come si può vedere è un AR(∞). Analogamente si può scrivere MA(∞) al posto di un processo AR finito.

```
library(forecast)
data("AirPassengers")
y <- window(AirPassengers, end=c(1958,12))
ggtsdisplay(log(y))
```




```r
mod1 <- Arima(y, c(0, 1, 1), c(0, 1, 1), lambda = 0) #con lambda = 0 diventa una serie logaritmica
plot(mod1)
```



```r
print(mod1)
```

```
## Series: y
## ARIMA(0,1,1)(0,1,1)[12]
## Box Cox transformation: lambda= 0
##
## Coefficients:
##           ma1     sma1
##       -0.3424  -0.5405
## s.e.   0.1009   0.0877
##
## sigma^2 estimated as 0.001432:  log likelihood=197.51
## AIC=-389.02   AICc=-388.78   BIC=-381
```

```r
pre1 <- matrix(NA_real_, 24, 12)
colnames(pre1) <- paste0("h", 1:12)
err1 <- pre1
yna <- c(AirPassengers, rep(NA, 12))

for (i in 1:24){
  pre1[i, ] <- forecast(Arima(yna[1:(119+i)], model = mod1),
                         h=12, biasadj = TRUE)$mean
  err1[i,] <- yna[(120+i):(131+i)] - pre1[i,]
}

meanloss <- cbind(RMSE = sqrt(colMeans(err1^2, na.rm = T)),
                  MAE  = colMeans(err1, na.rm = T),
                  MAPE = colMeans(abs(err1)/(err1+pre1), na.rm = T)*100)
meanloss
```

```
##         RMSE      MAE     MAPE
## h1  15.26418 1.090497 2.546494
## h2  15.73319 1.780475 2.708195
## h3  16.13174 3.239936 2.652833
## h4  18.10785 4.023566 2.972683
## h5  17.00168 4.709915 2.944106
## h6  17.79781 5.016538 3.153833
## h7  21.44738 6.042383 3.900381
## h8  20.14666 6.336393 3.670042
## h9  18.41746 6.431376 3.568156
## h10 20.70277 5.369597 4.168495
## h11 20.05650 6.244222 4.109114
## h12 21.26000 7.400860 4.245629
```

ARIMAX

ARMAX è il modello ARMA con dei regressori (X) ed è della forma:

$$y_t = X_t^T \beta + \eta \quad \text{dove} \quad \eta \sim ARMA(p, q)$$

η può essere anche stagionale.

La parte I è più complessa, alcuni software (R) applicano la differenza sia alla y anche alla X (ed è giusto così). Le trasformazioni invece vengono applicate solo alla y e non a X, per le trasformazioni alla X bisogna procedere manualmente. ARIMAX di stagione S in R è implemenetato così:

$$\Delta^d \Delta_S^D y_t = \Delta^d \Delta_S^D X_t^T \beta + \eta \quad \text{dove} \quad \eta \sim ARMA(p,q)(P,Q)_S$$

espandendo la formula totale abbiamo:

$$\phi(B)\Phi(B)\Delta^d \Delta_S^D (y_t - X_t^T \beta) = \theta(B)\Theta(B)\varepsilon_t$$

Modelli UCM

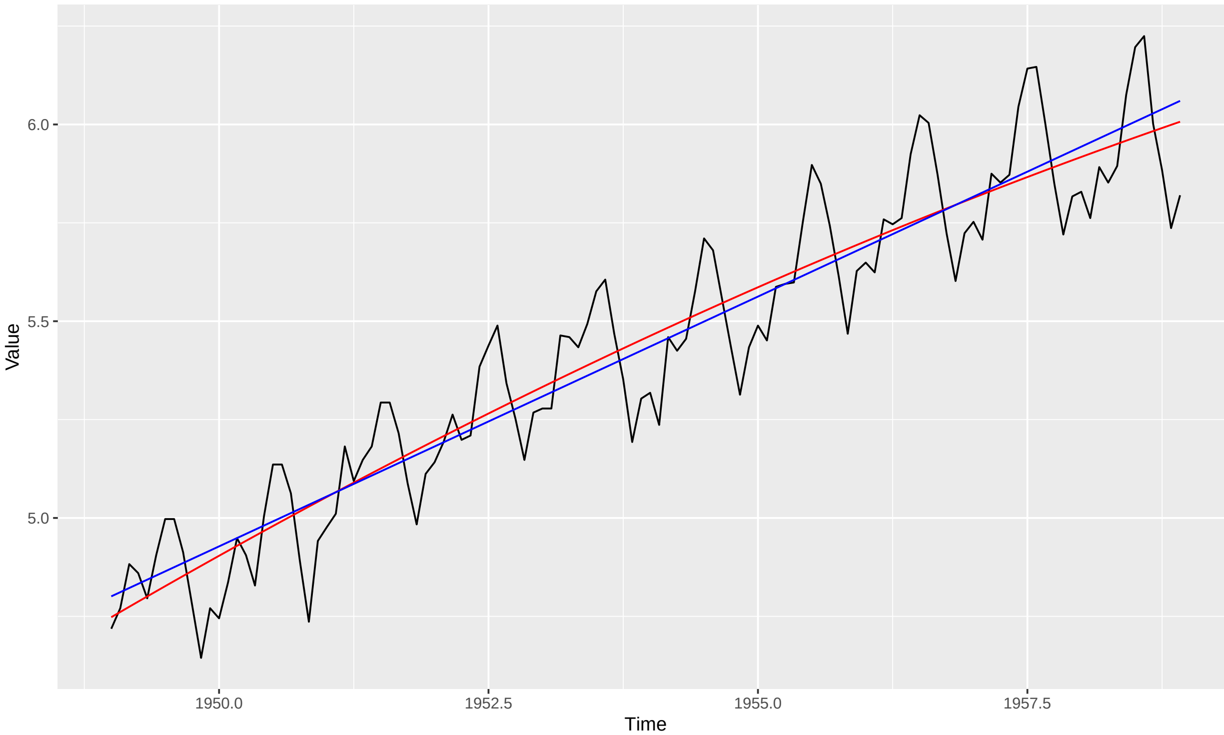
Ragioniamo in termini di trend, stagionalità, componenti cicliche e scordiamo l'esistenza dei modelli ARIMA. Per risolvere un problema di serie storica si può pensare di risolverla come una regressione, i miei regressori possono essere il tempo:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t (+\beta_2 t^2)$$

in questo modo cogliamo sicuramente il trend crescente mentre per la stagionalità si possono usare come regressori i dummy dei mesi (oppure un'altra base con le frequenze di seno e coseno).

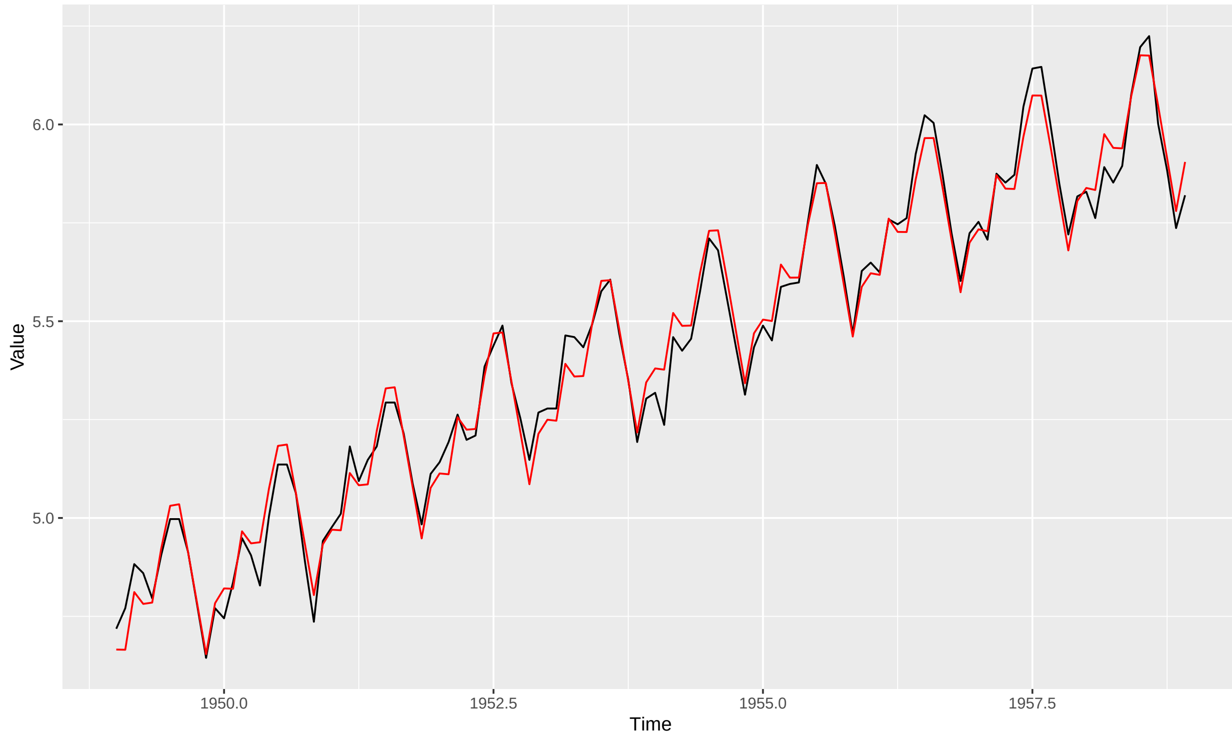
```r
library(forecast)
library(ggplot2)
data("AirPassengers")
y <- window(AirPassengers, end=c(1958,12))

mod1 <- Arima(y, c(0, 1, 1), c(0, 1, 1), lambda = 0) #con lambda = 0 diventa una serie logaritmica
trend <- 1:144
reg1 <- lm(log(y)~trend[1:120])

reg <- lm(log(y)~trend[1:120] + I(trend[1:120]^2))

ggplot()+
  geom_line(aes(y=as.numeric(log(y)), x=time(y))) +
  geom_line(aes(y=reg$fitted.values, x=time(y)), colour='red') +
  geom_line(aes(y=reg1$fitted.values, x=time(y)), colour='blue') +
  xlab("Time") + ylab("Value")
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type ts. Defaulting to continuous.
```




```
mesi <- months(as.Date(time(timeSeries::as.timeSeries(y))))

reg3 <- lm(log(y)~trend[1:120] + I(trend[1:120]^2) + mesi)

ggplot()+
  geom_line(aes(y=as.numeric(log(y)), x=time(y))) +
  geom_line(aes(y=reg3$fitted.values, x=time(y)), colour='red') +
  xlab("Time") + ylab("Value")
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type ts. Defaulting to continuous.
```



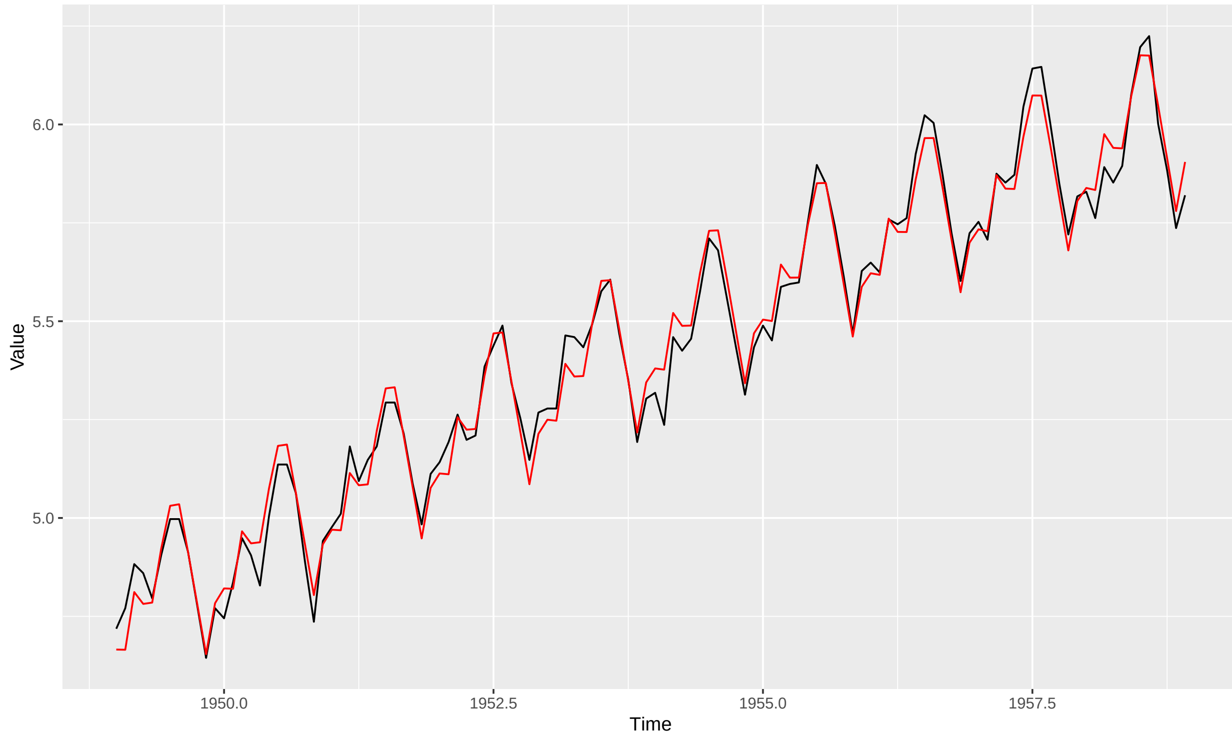
Sia γ_t la stagionalità di periodo s quindi $\gamma_t = \gamma_{t-s}$, se sommo $\sum_{i=0}^{s-1} \gamma t - i$ questa somma va a 0: $\sum_{i=0}^{s-1} \gamma t - i = 0$, inoltre vista la stagionalità ho che:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \alpha_j \cos(\frac{2\pi}{s} jt) + \beta_j \sin(\frac{2\pi}{s} jt)$$

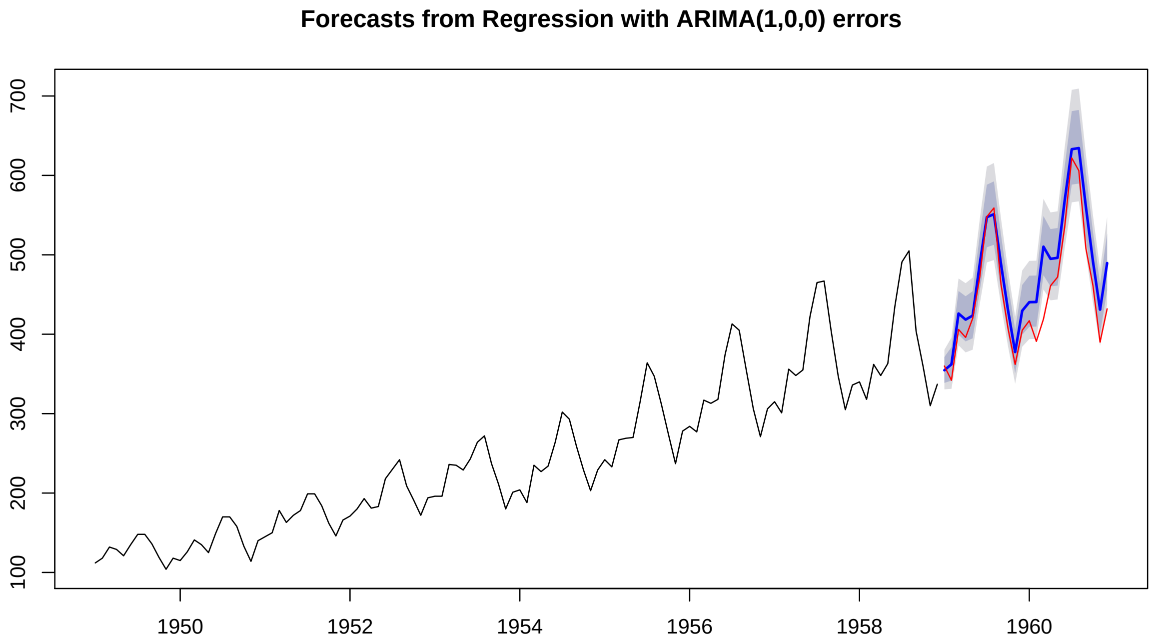
Oss: se s pari per $j = \frac{s}{2}$ $\sin(\frac{2\pi}{s}\frac{s}{2}t) = 0$, quindi ho un regressore in meno.

```
#~~ costruisco i regressori sinusoidi e cosinusiodi
fr <- 2*pi*outer(trend, 1:6) / 12
co <- cos(fr)
si <- sin(fr[,1:5]) #la sesta non serve dopo l'osservazione sopra

colnames(co) <- paste0("cos",1:6)
colnames(si) <- paste0("sin",1:5)

reg_cosi <- lm(log(y)~trend[1:120] + I(trend[1:120]^2) + co[1:120,] + si[1:120,])

ggplot()+
  geom_line(aes(y=as.numeric(log(y)), x=time(y))) +
  geom_line(aes(y=reg_cosi$fitted.values, x=time(y)), colour='red') +
  xlab("Time") + ylab("Value")
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type ts. Defaulting to continuous.
```




```r
arimax <- Arima(y, c(1, 0, 0), lambda = 0,
                xreg = cbind(trend, co, si)[1:120,])

#prev <- predict(arimax, newxreg = cbind(trend, co, si)[121:144,])

plot(forecast(arimax, xreg = cbind(trend, co, si)[121:144,]))
lines(window(AirPassengers, start=c(1959,1) ,end=c(1960, 12)),col='red')
```



Il trend per $t = 0, 1, 2, ...$ lo possiamo definire dato $\gamma_0 = \alpha$ come trend iniziale:

$$\gamma_t = \alpha + \beta t$$

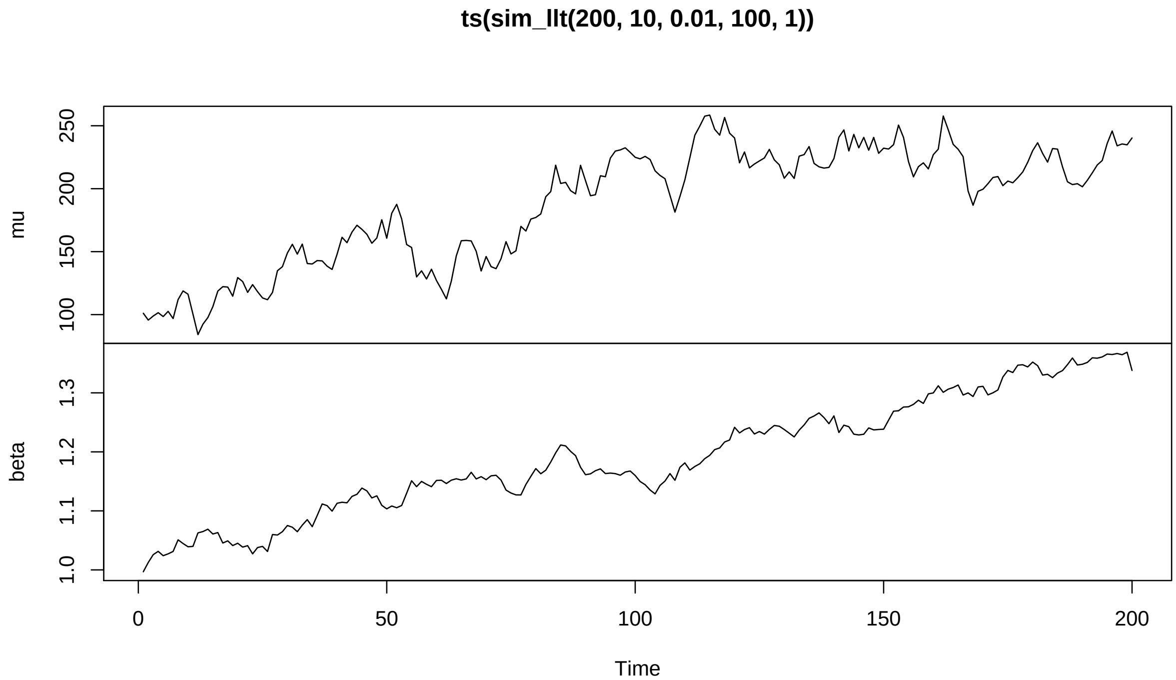
ma vorrei che sia l'intercetta α che β dipenda dal tempo poiché cambia col tempo:

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t + \beta_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim WN(0, \sigma^2_\eta)$$

dove $\beta_{t+1} = \beta_t + \zeta_t, \quad \zeta_t \sim WN(0, \sigma^2_\zeta)$

OSS: γ_t è integrato 2 volte. μ è detto level e β è detto slope

```
#~~ implementazione in R di trend
sim_llt <- function(n, sd_level, sd_slope, level0, slope0){
  beta <- cumsum(rnorm(n, sd = sd_slope)) + slope0
  mu <- cumsum(beta + rnorm(n, sd = sd_level)) + level0
  cbind(mu = mu, beta = beta)
}

plot(ts(sim_llt(200, 10, 0.01, 100, 1)))
```



Il ciclo stocastico

Indica che c'è un ciclo ma non è deterministico quindi non basta usare seno e coseno come per il ciclo di prima, userò seno e coseno stocastico.

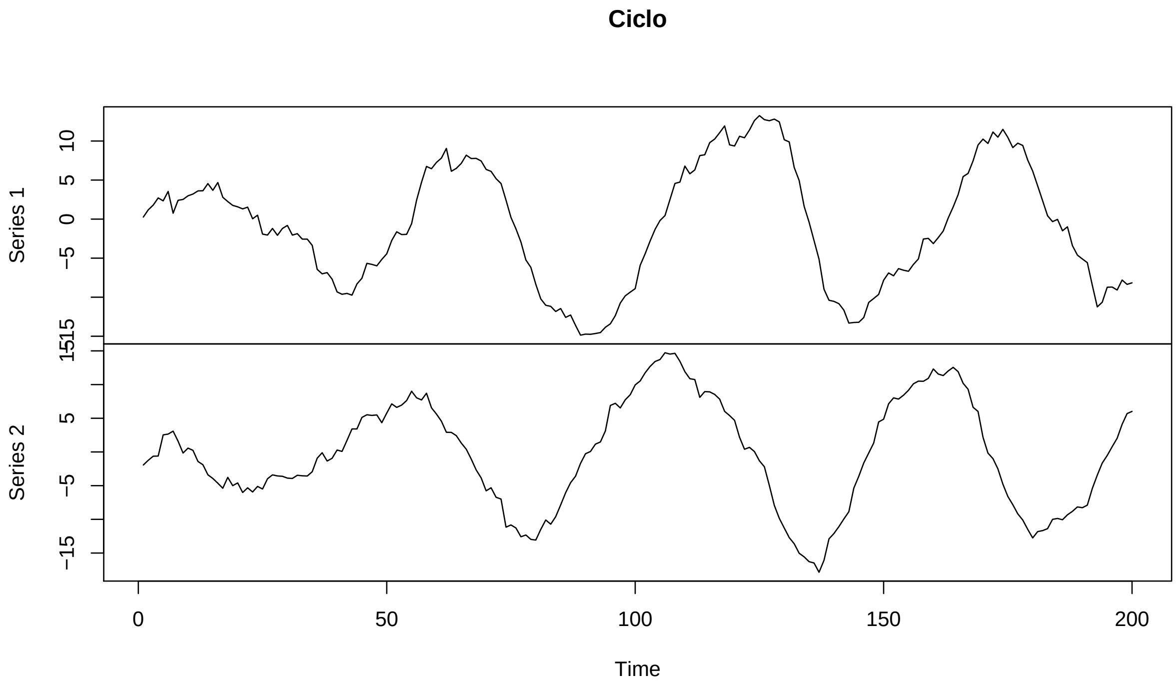
$$\begin{bmatrix}\psi_{t+1} \\ \psi^*_{t+1}\end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix}\cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\psi_t \\ \psi^*_t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_t \\ k^*_t\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}k_t \\ k^*_t\end{bmatrix} \sim WN(0, \sigma^2_k \mathbb{I}) \text{ e } 0 \leq \rho \leq 1$$

Osserviamo che la matrice è la matrice di Rotazione $R(\lambda)$ che ruota il vettore di angolo λ. k_t e k^*_t sono WN tra loro incorrelati ma a varianza costante. Tipicamente si prende solo ψ_t l'altro ψ^*_t è ortogonale al primo e serve solo per la sua costruzione. Il primo pezzo dell'equazione non rappresenta altro che un ciclo e la parte di WN aggiunge il rumore per renderlo stocastico. Il ρ serve per far assorbile il ciclo a lungo andare (geometricamente tende a far portare a 0), se $\rho = 0$ allora rimane solo il WN mentre se $\rho = 1$, il ciclo diventa non stazionario. Se è stazionario abbiamo che la varianza $\mathbb{E}(\psi\psi^t) = \dfrac{\sigma^2}{1-\rho^2}\mathbb{I}$ Osservazione: è identico al caso di AR(1) con $\rho = \phi$.

Se il ciclo stocastico ha stagionalità S e il ciclo ha una durata di $k \cdot S$ allora la frequenza λ è data dal rapporto: $\lambda = \dfrac{\pi}{kS}$.

```
#~~ In R
library(ggplot2)
sim_cyc <- function(n, rho, lambda, sd_kappa, psi0){
  psi <- matrix(0, n, 2)
  R <- matrix(c(cos(lambda),-sin(lambda), sin(lambda), cos(lambda)), 2, 2)
  Rt <- t(R) #traspongo perché in R voglio un vettore colonna e non riga come in teoria
  psi[1, ] <- rho*R %*% psi0 + rnorm(2, sd=sd_kappa)
  for (t in 2:n){
    psi[t, ] <- rho*R %*% psi[t-1, ] + rnorm(2, sd=sd_kappa)
```

```
  }
  psi
}
#il rho dà la persistenza del ciclo, più è vicino a zero, per più tempo lo vedremo esistere
ciclo = sim_cyc(n = 200, rho = 0.99, lambda = 2*pi/48, sd_kappa = 1, rnorm(2))
plot(ts(ciclo), main = 'Ciclo')
```



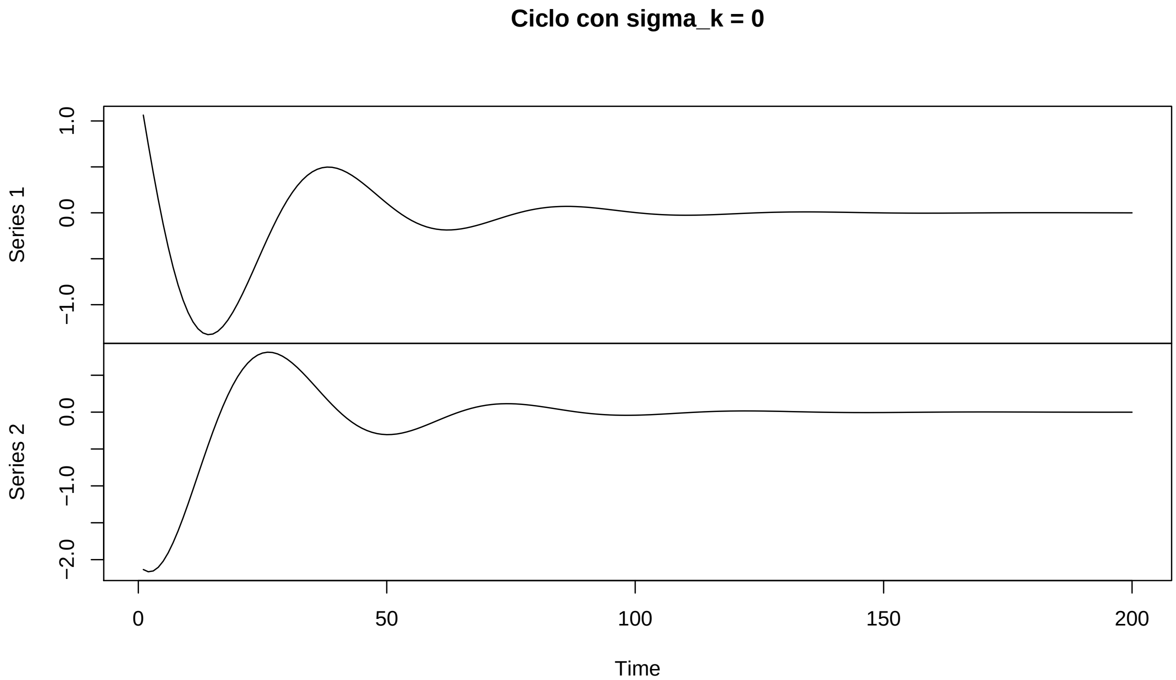
Nei 2 cicli generati sopra se uno prende la loro correlazione, dovrebbe essere circa 0 (almeno prendendo serie infinita quindi dipende da n):

```
cor(ciclo[,1], ciclo[,2])
```

```
## [1] 0.0357773
```

Se σ_k la prendiamo $= 0$ cioè elimino la stocasticità in teoria la serie diventa un seno che piano piano scompare, in base al coefficiente ρ:

```
ciclo = sim_cyc(n = 200, rho = 0.96, lambda = 2*pi/48, sd_kappa = 0, rnorm(2))
plot(ts(ciclo), main = 'Ciclo con sigma_k = 0')
```



In particolare se $\sigma_k = 0$ e $\rho = 1$, diventa un ciclo perfetto, mentre se $\rho = 1$ e $\sigma_k \neq 0$ allora abbiamo una non stazionarietà (non c'è un ciclo).

Sappiamo che possiamo scrivere la stagionalità come:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \alpha_j \cos(\frac{2\pi}{s}jt) + \beta_j \sin(\frac{2\pi}{s}jt)$$

il ciclo stocastico stagionale lo possiamo ottenere come:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \psi_t^{(j)}$$

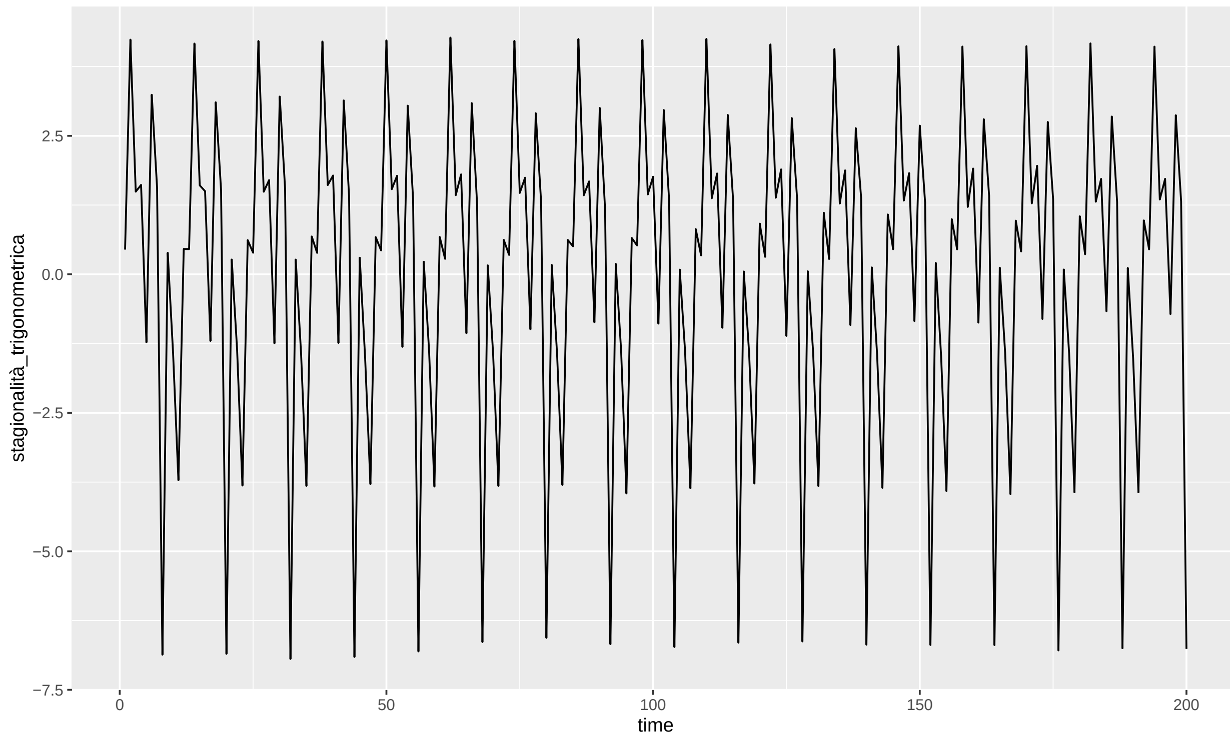
dove

$$\begin{bmatrix} \psi_{t+1}^{(j)} \\ \psi_{t+1}^{(j)*} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{s}j) & \sin(\frac{2\pi}{s}j) \\ -\sin(\frac{2\pi}{s}j) & \cos(\frac{2\pi}{s}j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_t^{(j)} \\ \psi_t^{(j)*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_t^{(j)} \\ \omega_t^{(j)*} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_t^{(j)} \\ \omega_t^{(j)*} \end{bmatrix} \sim WN(0, \sigma_\omega^2 \cdot \mathbb{I})$$

Anche qua il numero delle componenti quando s è pari sono s-1.

```
sim_trig_seas <- function(n, s, sd_omega, PSI0){
  gamma <- numeric(n)
  frb <- 2*pi/s #frequenza base
  for (j in 1:floor(s/2)) {
    gamma <- gamma + sim_cyc(n, 1, frb*j, sd_omega, PSI0[j,])[,1]
  }
  gamma
}

stagionalità_trigonometrica <- sim_trig_seas(n = 200, s = 12,
                                             sd_omega = 0.01, matrix(rnorm(12),6,2))
```

```r
time = 1:length(stagionalità_trigonometrica)
ggplot() +
  geom_line(aes(y=stagionalità_trigonometrica, x=time))
```



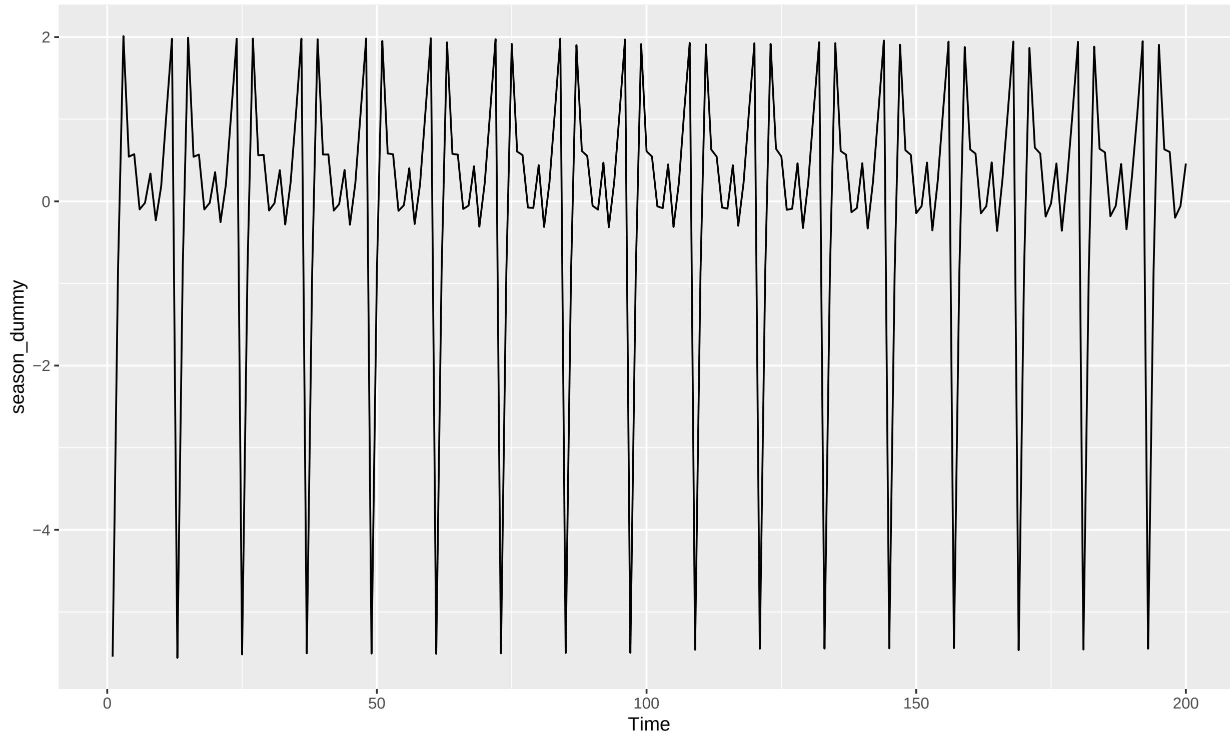
Quando si costruiranno i modello State Space, sapremo come stimare i parametri delle componenti UCM.

Stagionalità a dummy stocastiche

Ho la stagionalità fatta in modo che $\gamma_t = \gamma_{t-s}$ tale che $\sum_{i=0}^{s} \gamma_{t-i} = 0$, cioè se la sommo deve darmi zero $\rightarrow$ riscrivendo l'equazione sopra ho che $\gamma_t = -\gamma_{t-1} - ... - \gamma_{t-s+1}$ che è già un equazione alle differenze, per renderla stocastica aggiungo come sempre un WN: $\gamma_t = -\gamma_{t-1} - ... - \gamma_{t-s+1} + \omega_t$ dove $\omega \sim WN(0, \sigma^2_\omega)$. Matricialmente (VAR) la posso riscrivere come:

$$\begin{bmatrix} \gamma_t \\ \gamma_t^{(1)} \\ \gamma_t^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_t^{(s-2)} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-1}^{(1)} \\ \gamma_{t-1}^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_{t-1}^{(s-2)} \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} \omega_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_t \sim WN(0, \sigma^2_\omega \mathbb{I})$$

```r
sis_dummy_seas <- function(n, s, sd_omega, gamma_init){
  filter(rnorm(n, sd=sd_omega), rep(-1, s-1), "recursive", init=gamma_init)
}

season_dummy <- as.numeric(sis_dummy_seas(200, 12, 0.01, rnorm(11)))
Time <- 1:length(season_dummy)
ggplot() +
  geom_line(aes(y=season_dummy, x=Time))
```



Forma StateSpace

Sostanzialemente sono due set di equazioni: equazione di trasizione (stato) e equazioni di osservazioni(misurazione). L'equazione di **osservazione** ha la sequente forma, indico con (t) componenti che potrebbe essere o non essere variabili nel tempo:

$$y_t = c_{(t)} + Z_{(t)}\alpha_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, H_{(t)})$$

α_t è il vettore che contiene informazioni non osservabili direttamente ma che combinati linearmente mi formano la serie, α_t contiene il trend, lo slope ecc. L'equazione di **transizione** è della forma:

$$\alpha_{t+1} = d_{(t)} + T_{(t)}\alpha_t + \eta_t \quad \eta_t \sim WN(0, Q_{(t)})$$

Inoltre supponiamo che η_t e ε_t siano tra loro incorrelate. I valori iniziali vengono attribuiti in base a una distribuzione (di solito Gaussiano): $\alpha_1 \sim D(a_{1|0}, P_{1|0})$, se voglio esprimere la mia ignoranza posso dire che $P_{1|0} = \infty$ così sono sicuro che il valore iniziale è incluso lì dentro e α_1 è incorrelato da η_t e ε_t.

ATTENZIONE KFAS (il pacchetto di R), cambia un po' le equazioni aggiungendo una matrice davanti a η_t e rimuovendo le costanti $d_{(t)}$:

$$\alpha_{t+1} = T_{(t)}\alpha_t + R_{(t)}\eta_t$$

Es 1. con la regressione lineare:

$$\begin{cases} y_t = Z_t(= X_t^T)\alpha_t(= \beta) + \varepsilon_t \\ \alpha_{t+1} = \alpha_t \end{cases}$$

Es 2. Regressione lineare con i coefficienti che evolvono come RW: Identico a prima ma $\alpha_{t+1} = \alpha_t + \eta_t$.

Es 3. AR(2) $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

$$\begin{cases} y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t^{(1)} \\ \alpha_t^{(2)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{t+1}^{(1)} \\ \alpha_{t+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t^{(1)} \\ \alpha_t^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

quindi in particolare $H = 0$ e $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$T = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_t^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siccome è un AR(2) a media 0 i valori iniziali sono tali che $a_{1|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ mentre $P_{1|0} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix}$ poiché è la varianza covarianza tra il primo *alpha* e il suo primo ritardo.

Es 4. MA(1) $y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

$$\begin{cases} y_t = \begin{bmatrix} 1 & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t^{(1)} \\ \alpha_t^{(2)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{t+1}^{(1)} \\ \alpha_{t+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t^{(1)} \\ \alpha_t^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

i valori iniziali sono: $a_{1|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ mentre $P_{1|0} = \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega^2 \end{bmatrix}$.