

Streaming Data Management and Time Series Analysis

X_1, X_2, \dots, X_n variabili casuali, tra loro dipendenti altrimenti non avrebbe senso la serie storica, e se tale dipendenza rimane costante nel tempo posso prevedere la serie storica. La stazionarietà è la omogeneità nella dipendenza tra queste variabili.

Stazionarietà debole o in covarianza

Una serie storica X_t è stazionaria in senso debole (o in covarianza) se $\forall t$

$$E[X_t] = \mu < \infty, \text{Var}(X_t) = \sigma^2 = \gamma_0 < \infty, \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k < \infty$$

cioè ho omogeneità temporale nella serie, la dipendenza è relativa rispetto al t scelto ma indipendente da tale t quindi posso proiettare ciò che ho nel passato nel futuro.

Stazionarietà forte

Una serie storica equispaziata è stazionaria in senso forte $\forall h - \text{upla } t_1, t_2, \dots, t_h, \forall k$

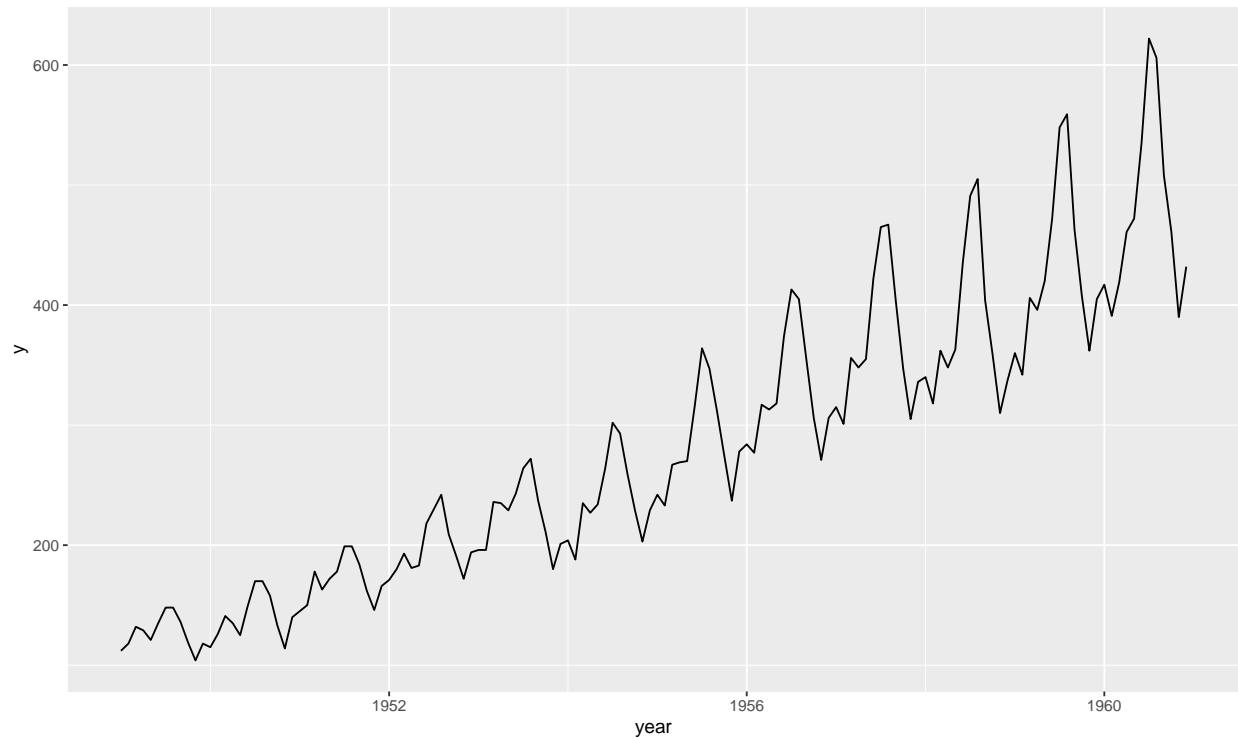
$$X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_h} \stackrel{(d)}{=} X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_h+k}$$

cioè la distribuzione è invariante rispetto alle traslazioni della serie storica.

Oss: Nel caso particolare di processo Gaussiani la stazionarietà forte e debole coincidono, poiché la gaussiana è completamente caratterizzata dai primi 2 momenti, la media e la covarianza.

Spesso nelle serie storiche le ipotesi di stazionarietà vengono violate, in tal caso bisogna usare delle trasformazioni reversibili in modo da far rispettare le ipotesi e dopo la previsione invertire la trasformazione (es. Trasformazione Box-Cox).

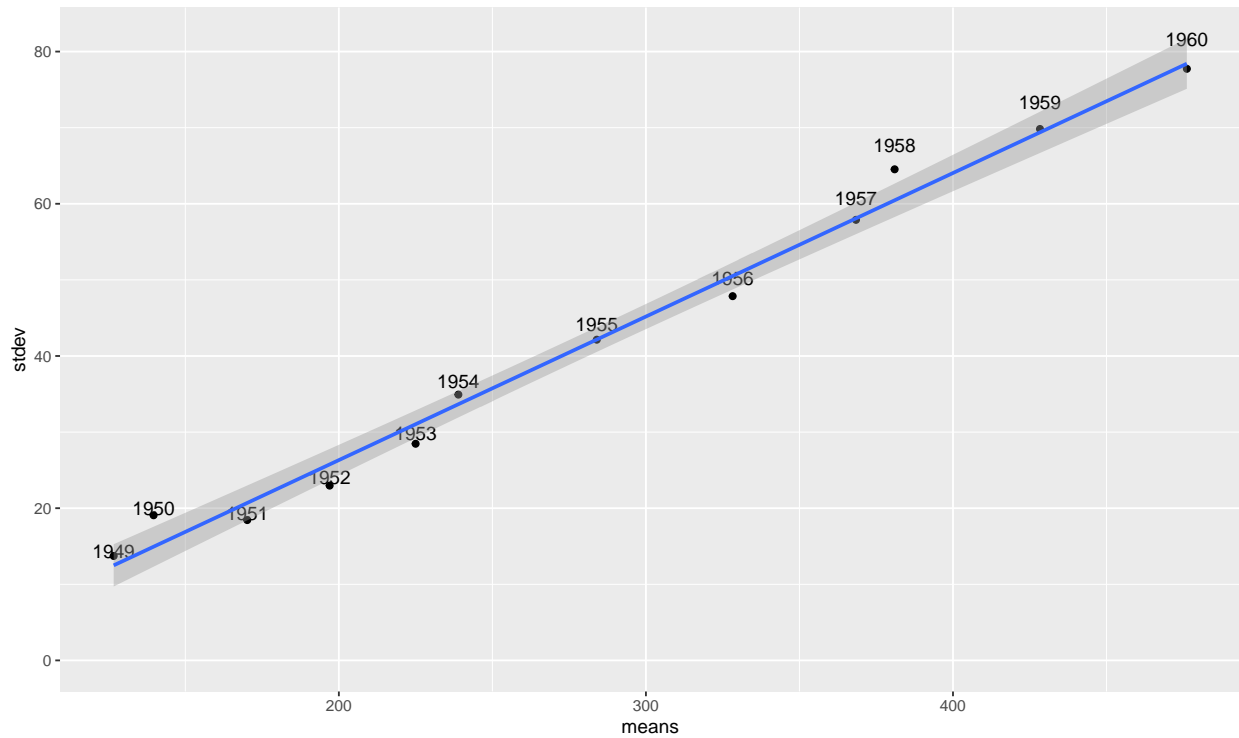
```
library(ggplot2)
y <- AirPassengers
ggplot( data = data.frame(y=as.numeric(y),
                          year=as.numeric(time(y))),
        aes(y=y, x=year)) +
  geom_line()
```



Osserva come la varianza cresce col passare degli anni, anche la media non è costante nel tempo, quindi viola praticamente tutte le ipotesi di stazionarietà.

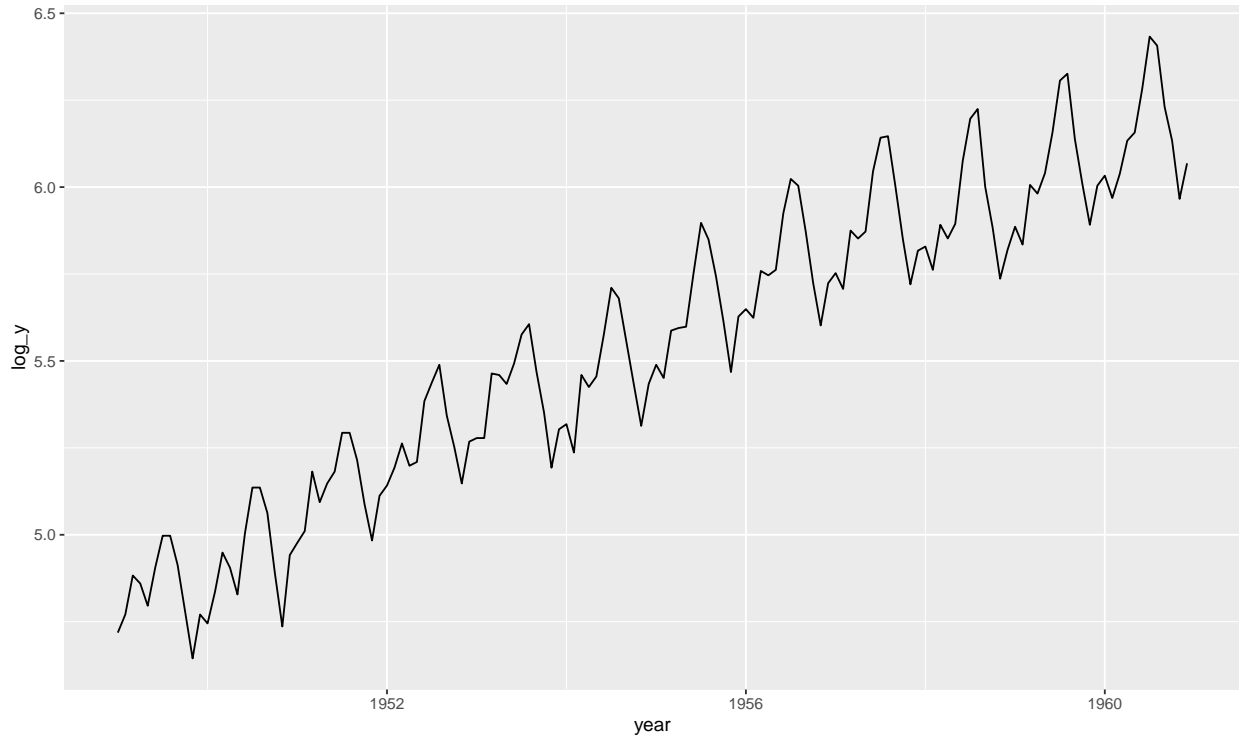
```
means <- tapply(y, floor(time(y)), mean)
stdev <- tapply(y, floor(time(y)), sd)
df <- data.frame(means=means, stdev=stdev)

ggplot(aes(x=means, y=stdev), data = df) +
  geom_point() +
  geom_text(label=rownames(df), position = position_stack(vjust = 1.05)) +
  geom_smooth(method=lm)
```



Ragruppando per ogni anni la media e la deviazione standard vedo che cresce linearmente, questo comportamento indica l'utilizzo di un trasformazione logaritmica:

```
ggplot(aes(y=log_y, x=year),
  data = data.frame(log_y=log(as.numeric(y)),
    year=as.numeric(time(y))))+
  geom_line()
```



Questo appiatisce la varianza negli anni, adesso dovrò solo aggiustare il trend e la stagionalità, poi la serie sarà stazionaria.

Il Random Walk

Supponiamo $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \text{ i.i.d.}(0, \sigma^2)$, questo è un Random Walk, il RW non è stazionaria:

$X_0 = x_0 \Rightarrow X_t = X_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$ quindi abbiamo che

$$E[X_t] = E[X_0] + \sum_i E[\varepsilon_i] = E[X_0] = x_0$$

$$Var(X_t) = E[(X_t - X_0)^2] = E[(\sum_i \varepsilon_i)^2] = \sum_i Var(\varepsilon_i) = t\sigma^2$$

e quindi la varianza non è costante quindi non è stazionaria, ma è stazionario $X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$. Anzi noto che la varianza cresce col tempo, quindi cresce anche l'incertezza sulla stima che faccio sulla serie.

Un processo X_t non stazionario, ma tale che la sua differenza $X_t - X_{t-1}$ è stazionario si dice integrato di ordine 1: $X_t \sim I(1)$. Definisco nomenclatura degli operatori: B l'operatore tale che $BX_t = X_{t-1}$ e $\Delta = \mathbb{I} - B$ e ottengo un altro operatore: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

$X_t \sim I(d)$ se X_t non è stazionario $\Delta^k X_t$ per $k = 1, \dots, d-1$ non è stazionario ma $\Delta^d X_t$ è stazionario. Oss: $\Delta^2 X_t \neq X_t - X_{t-2}$ bensì $\Delta^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$.

Predittore Ottimale

Il predittore minimizza il valore atteso della funzione di perdita $l()$, in funzione di $p(X_1, \dots, X_m)$ che è una funzione misurabile:

$$\min_p \mathbb{E}(l(Y - p(X_1, \dots, X_m)))$$

Integrazione Stagionale

Differenza stagionale Δ_k è così definita:

$$\Delta_k = \mathbb{I} - B^k \rightarrow \Delta_k X_t = X_t - X_{t-k}$$

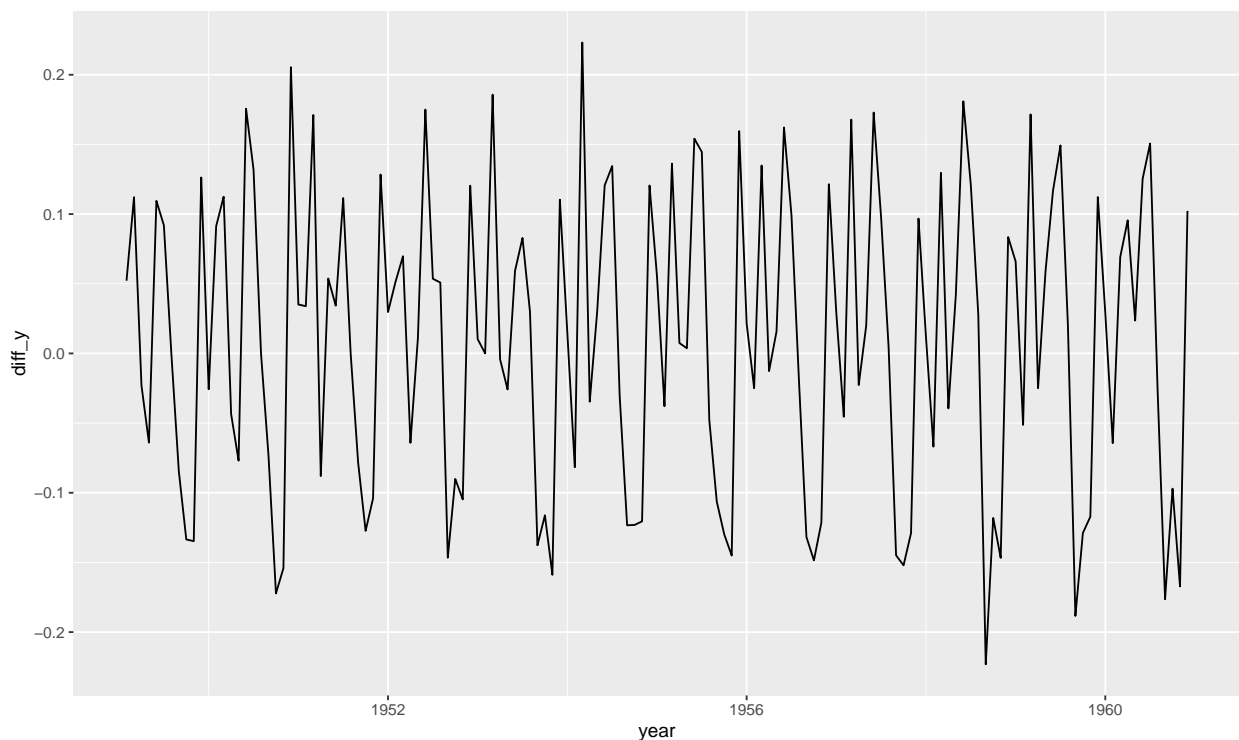
Data la differenza stagionale Δ_k , X_t è stagionale ordinato di ordine 1 se X_t è non stazionario e $X_t - X_{t-k}$ è stazionario. E' utile quando vi è una ripetitività stagionale, cioè un comportamento che si ripete dopo k tempi, eliminandolo elimino questa stagionalità, che non potevo ottenere solo con la differenza Δ^k .

X_t è stagionalmente integrato (di stagione k) di ordine 1 se X_t è non stazionario e $X_t - X_{t-k}$ è stazionario. Generalizzando X_t è stagionalmente integrato di ordine h se X_t non è stazionario $\Delta_{kj} X_t$ è non stazionario per $j = 1, \dots, h-1$ è non stazionario e $\Delta_{kh} X_t$ è stazionario.

Oss: $\Delta_k = \mathbb{I} - B^k = (\mathbb{I} - B)(\mathbb{I} + B^1 + \dots + B^{k-1})$, quindi la differenza stagionale k contiene anche la differenza prima.

L'Integrazione elimina il trend ma non riesce ad eliminare la stagionalità, per eliminare la stagionalità bisogna usare la differenza stagionale.

```
library(ggplot2)
ly <- log(AirPassengers)
dly <- diff(ly)
ggplot(data=data.frame(diff_y=as.numeric(dly), year=as.numeric(time(dly))),
       aes(x=year, y=diff_y))+
  geom_line()
```



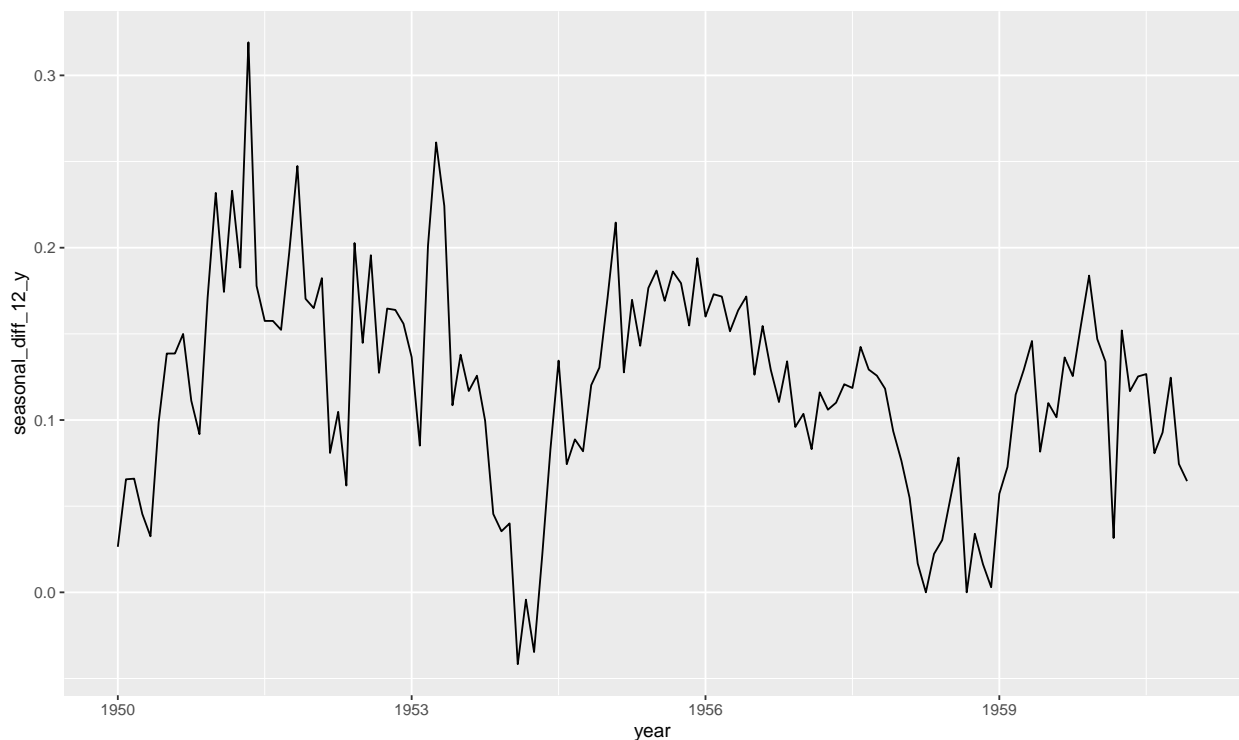
Si vede che il trend non c'è più ma la stagionalità è ancora evidente, inoltre perdo anche l'informazione dell'intercetta in questo modo, quindi vorrei che il modelli trovi e salvi l'intercetta (drift) in qualche modo.

White noise

ε_t è white noise se $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ e $\text{Var}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 \quad \forall k \neq 0$. White noise è un processo stazionario e per rendere il white noise a media non nulla basta aggiungere una costante, quindi ho $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t + c$ detto Random walk con drift, si osserva che $X_t = X_0 + ct + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$, il pezzo $c \cdot t$ è il drift.

Oss: Nel breve periodo di previsione la previsione è il drift, mentre a lungo periodo la maggior parte della varianza è spiegata dal white noise (che aumenta quindi il rumore e quindi l'intervallo di confidenza della previsione).

```
sdly <- diff(ly,12) #seasonal difference
ggplot(data=data.frame(seasonal_diff_12_y=as.numeric(sdly),
                        year=as.numeric(time(sdly))),
        aes(x=year, y=seasonal_diff_12_y))+
  geom_line()
```



E adesso sembra non avere più la stagionalità, chiaramente un po' di memoria stagionale rimane, lo si vede usando ACF e PACF. Ma i movimenti netti sulla stagionalità non ci sono più. Osserva siccome siamo sul logaritmo, il dato adesso è in percentuali.

Spesso non si è sicuro se la serie dopo la trasformazione è ancora stazionario o meno, vi sono dei test ma uno potrebbe applicare 2 modelli uno considerandolo come stazionario e l'altro come non stazionario e poi si prende il modello migliore.

Modelli ARIMA

Modello Autoregressivo

Un processo autoregressivo $AR(p)$ è $X_t = C + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$.

OSS: Random Walk è $AR(1)$ quindi un $AR(p)$ non è necessariamente stazionario, poiché il caso particolare Random Walk non lo è.

Notazione compatta per la funzione con operatore ritardo è:

$$\phi_p(B) = \mathbb{I} - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

quindi ho che $\phi_p(B)X_t = c + \varepsilon_t$, infatti

$$\phi_p(B)X_t = (\mathbb{I} - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)X_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = c + \varepsilon_t$$

Teorema: Se le soluzioni di

$$\phi_p(Z) = 0 \rightarrow \mathbb{I} - \phi_1 Z - \dots - \phi_p Z^p = 0$$

sono tali che le soluzioni per $i = 1, \dots, p$, $|Z^{(i)}| > 1 \Rightarrow$ il processo è stazionario.

Es. prendiamo $AR(1)$: $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + c$ da cui

$$(1 - \phi B)X_t = \varepsilon_t + c$$

Quindi le soluzioni dell'equazione $1 - \phi Z = 0$ sono $Z = \frac{1}{\phi}$ quindi ha modulo > 1 sse $\phi < 1$ quindi il random walk che è con $\phi = 1$ non è stazionario.

Se una delle soluzioni di $\phi_p(Z) = 0$ è pari a 1 e le altre sono in modulo maggiore di 1 allora il processo $AR(p)$ è integrato di ordine 1.

Dimostrazione nel caso di 1 radice, (per k radici è analogo): Date le soluzioni il polinomio sopra si può fattorizzare come:

$$\phi_p(B) = (1 - \frac{1}{Z^{(1)}}B)(1 - \frac{1}{Z^{(2)}}B) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{Z^{(p)}}B)$$

Se $Z^{(1)} = 1$ allora $\phi_p(B) = (1 - B)\varphi_{p-1}(B)$ quindi il processo $AR(p)$ $\phi_p(B)X_t = c + \varepsilon_t$ posso riscriverlo come

$$\varphi_{p-1}(B)(1 - B)X_t = \varphi_{p-1}(B)\Delta X_t = c + \varepsilon_t$$

quindi ho dimostrato che il processo era integrato di ordine 1 (ΔX_t).

Si generalizza, ottenendo se ho più radici unitarie l'ordine del processo aumenta con il numero delle radici, quindi se ho k radici il processo sarà integrato di ordine k.

Oss: Se abbiamo una radice unitaria allora dal $1 - \phi_1 Z - \dots - \phi_p Z^p = 1 - \sum_i \phi_i Z^i = 0$ deduciamo che la somma di ϕ_i è 1.

Oss: nell'equazione di $AR(1)$ $X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, c non è la media, infatti sia μ la media allora

$$\mu \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[c] + \mathbb{E}[\phi X_{t-1}] = c + \phi \mu \rightarrow \mu = \frac{c}{1 - \phi}$$

Quindi se $\phi = 1$ la media esplode. Si generalizza per $AR(p)$ ottenendo:

$$\mu = \frac{c}{1 - \sum_{i=1}^p \phi_i}$$

In un processo stazionario abbiamo: $\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k})$ abbiamo che $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ è la correlazione. Il lag di autocorrelazione parziale è

$$\alpha_k = Cor(X_t - \mathbb{P}(X_t|X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}), X_{t-k} - \mathbb{P}(X_{t-k}|X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}))$$

da cui deriva la ACF e PACF:

In caso di un processo $AR(p)$ abbiamo p ritardi di PACF non nulli e dopo p ritardi vanno a zero, mentre ACF tende a tornare a zero geometricamente.

Supponiamo una periodicità stagionale S, SAR(P) è molto simile a AR(p) ma lavora su multipli di s, quindi ho

$$X_t = c + \Phi_1 X_{t-S} + \dots + \Phi_P X_{t-P \cdot S} + \varepsilon_t$$

Usando gli operatori:

$$(1 - \Phi_1 B^S - \dots - \Phi_P B^{P \cdot S}) X_t = c + \varepsilon_t$$

chiamiamo il polinomio per SAR(P) $\Phi_P(B)$, un modello quindi AR(p)(P)_S è:

$$\phi_p(B) \Phi_P(B) X_t = c + \varepsilon_t$$

è come se si applicassero 2 filtri, uno che si occupa del white noise di memoria recente e l'altro con memoria stagionale.

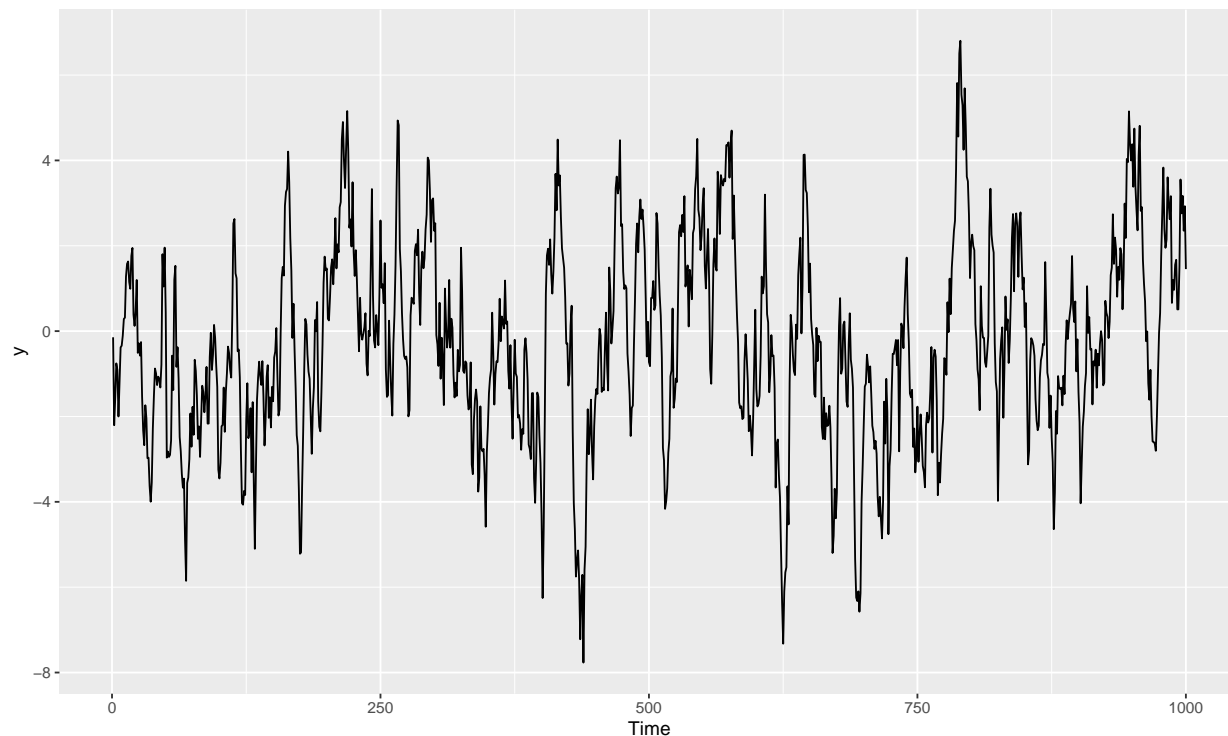
ad es. AR(1)(1)₄ è $(1 - \phi B)(1 - \Phi B^4) X_t = (1 - \phi B - \Phi B^4 + \phi \Phi B^5) X_t = c + \varepsilon_t$

per riconoscere SAR(1)_P abbiamo il primo e l'unico ritardo di PACF al ritardo P, mentre nel ACF abbiamo il ritardo sui multipli di P che decade geometricamente.

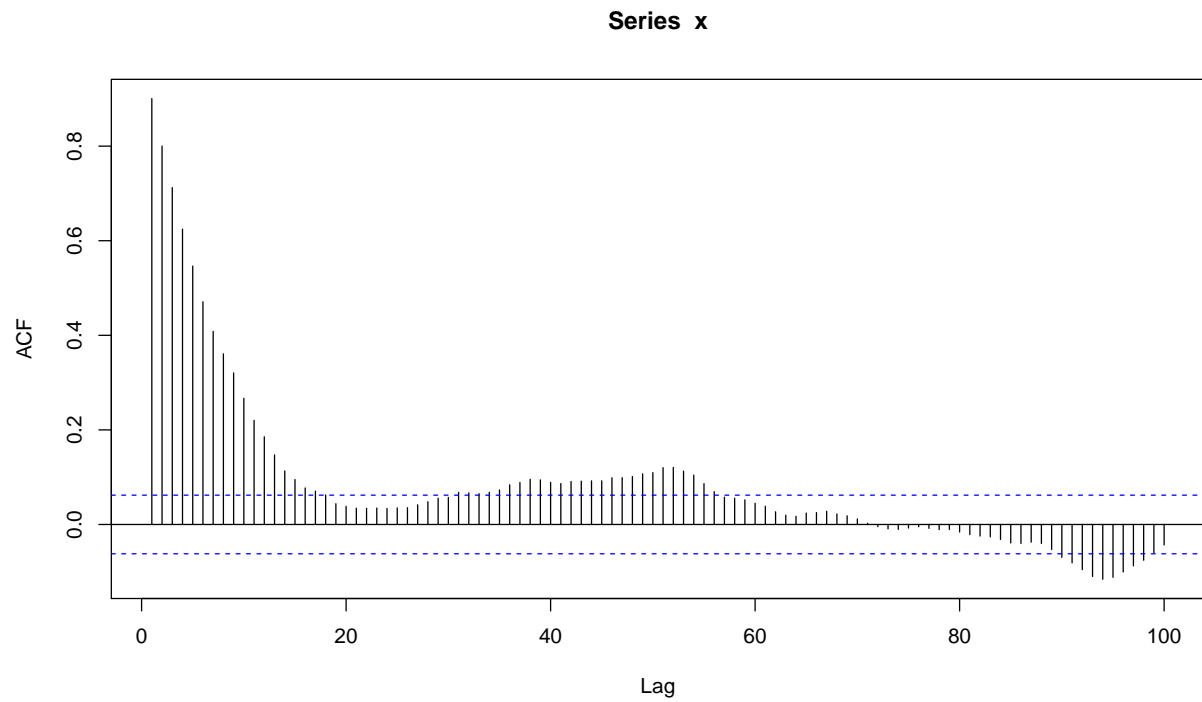
Simulazione modelli ARIMA in R:

```
#~~ AR(1)
library(ggplot2)
n <- 1000
phi <- 0.9 #OSS: è < 1, se fosse >1 esplode la serie poiché viene respinto da 0
#se phi=1 non è più attratto da 0 ma non esplode ancora (è un random walk)
eps <- rnorm(n) #White Noise
x <- stats::filter(eps, c(phi), "recursive", init=0)

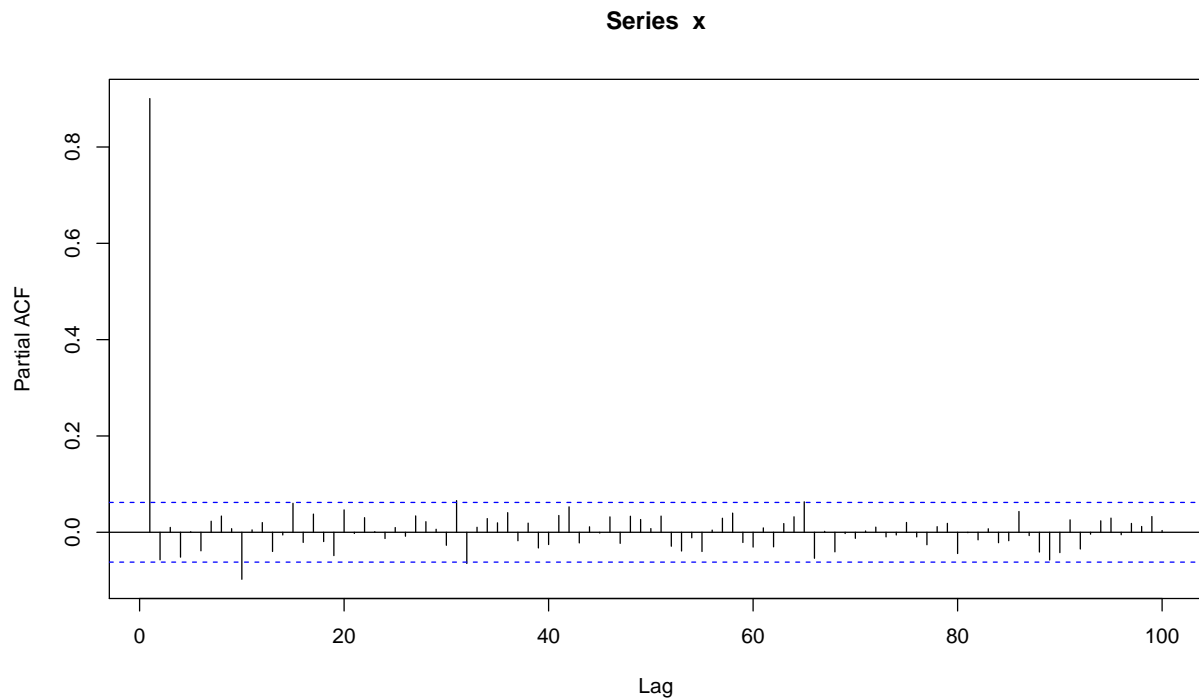
ggplot(aes(x=Time, y=y),
       data = data.frame(y=as.numeric(x),
                         Time=1:length(x))) +
  geom_line()
```




```
#~~ ACF e PACF plot  
library(forecast)  
Acf(x, lag.max = 100)
```



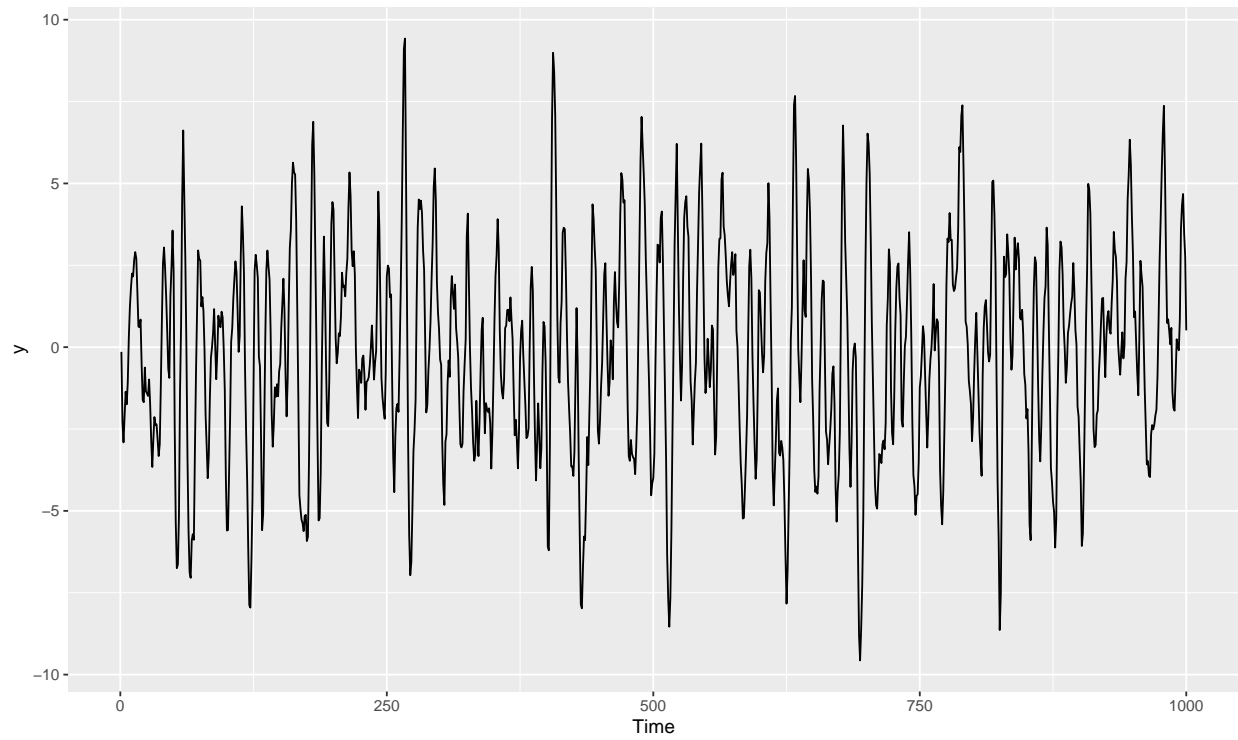
```
Pacf(x, lag.max = 100)
```



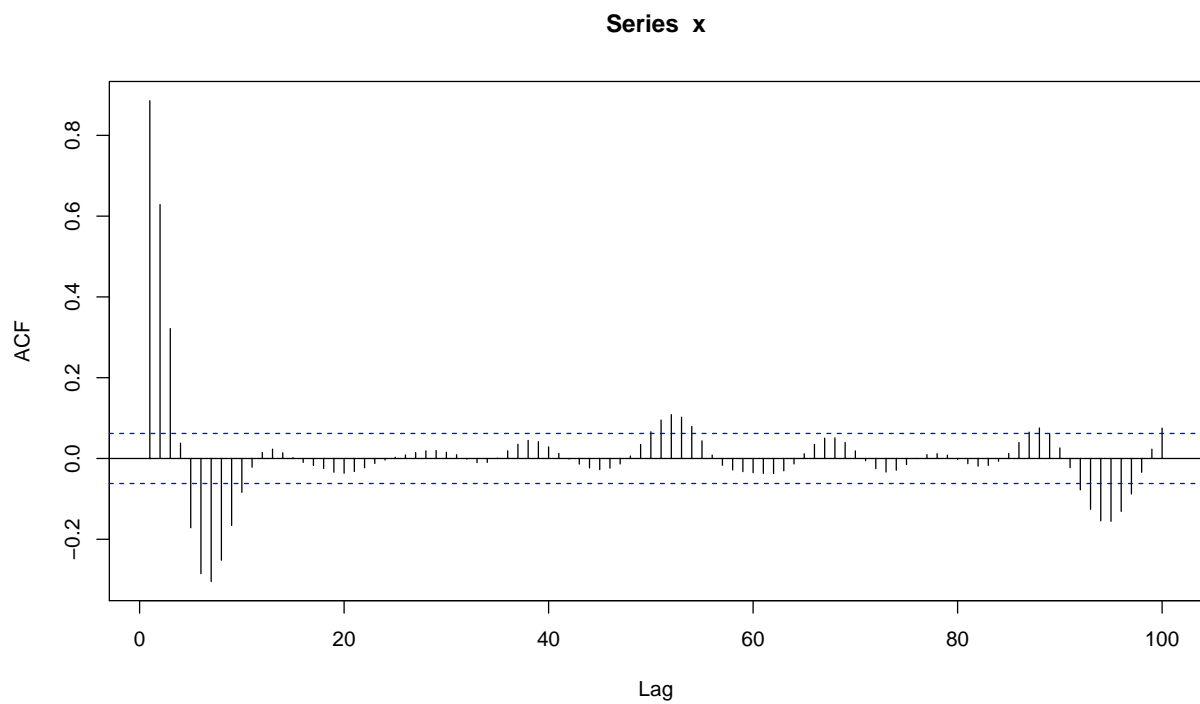
```
#~~ AR(2)
phi <- c(1.5, -0.7)
#Le radici sono in modulo > 1, poiché il processo è stazionario
Mod(polyroot(c(1, -phi)))
```

```
## [1] 1.195229 1.195229
```

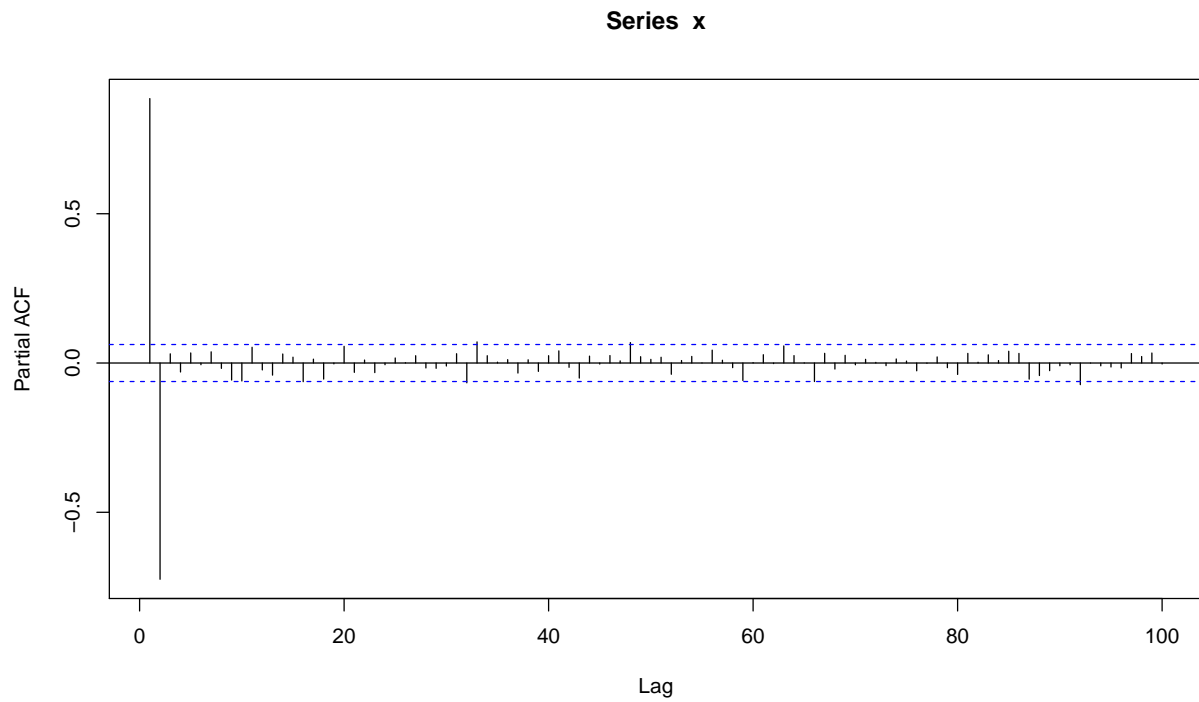
```
x <- stats::filter(eps, c(phi), "recursive")
ggplot(aes(x=Time, y=y),
       data = data.frame(y=as.numeric(x),
                         Time=1:length(x)))+
  geom_line()
```



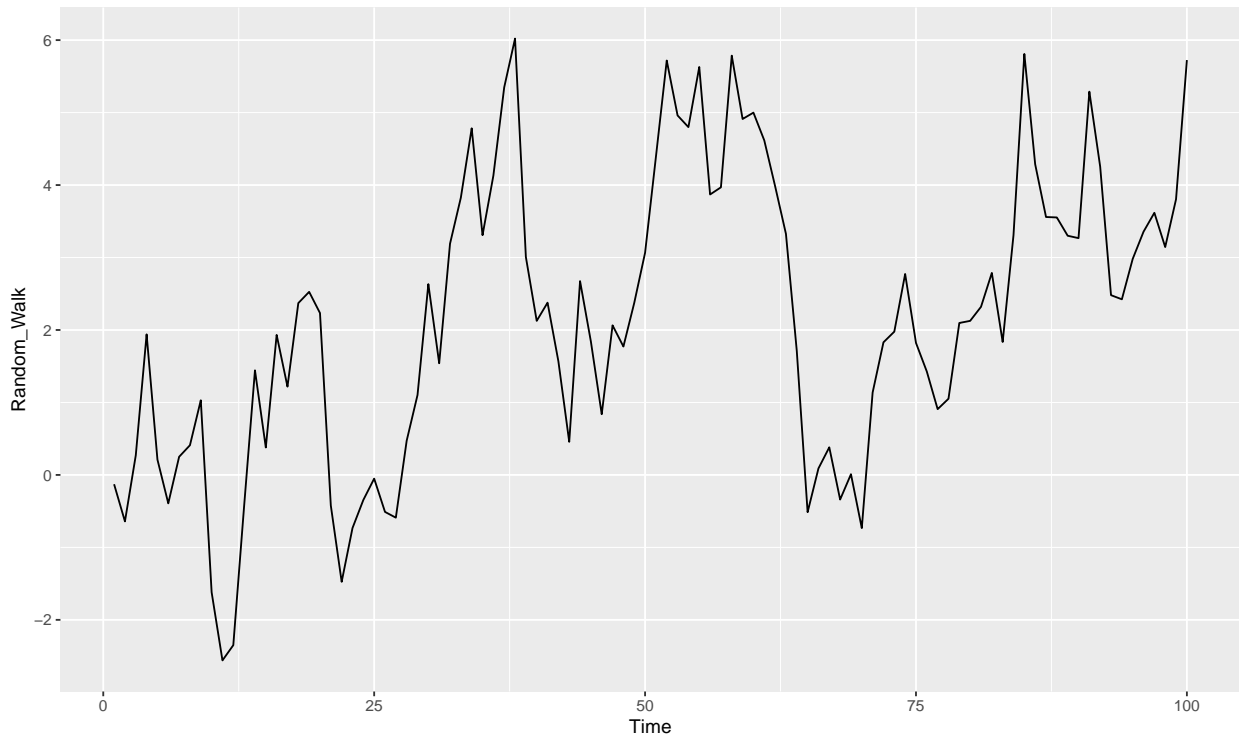
```
Acf(x, lag.max = 100)
```



```
Pacf(x, lag.max = 100)
```



```
#~~ Stima AR(1) su un processo RandomWalk (RW)
n <- 100
eps <- rnorm(n)
rw <- cumsum(eps)
ggplot(aes(x=Time, y=Random_Walk),
  data = data.frame(Random_Walk=rw,
    Time=as.numeric(1:length(rw))))+
  geom_line()
```



```
mod1 <- Arima(rw, order = c(1,0,0)) #oss: il coef ar1 non è 1, quindi la stima è "distorta"
summary(mod1)
```

```
## Series: rw
## ARIMA(1,0,0) with non-zero mean
##
## Coefficients:
##      ar1      mean
##      0.8474  2.2085
## s.e.  0.0541  0.6808
##
## sigma^2 estimated as 1.222:  log likelihood=-151.52
## AIC=309.05   AICc=309.3   BIC=316.86
##
## Training set error measures:
##              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
## Training set 0.0307681 1.094125 0.8690329 24.99905 88.24307 0.9470949
##              ACF1
## Training set 0.06032149
```

Vi sono dei test (di Dickey-Fuller) per evitare questi problemi e vedere se vi è una radice unitaria nella serie:

Nel processo $AR(p)$, ho che H_0 : almeno una radice caratteristica è $= 1$, e H_1 : tutte le radici sono in modulo > 1 (stazionarietà).

in realtà Dickey-Fuller ha H_0 : RW e H_1 : $AR(1)$ stazionaria mentre il test ADF che è basato su Dickey-Fuller, che testa se la somma delle radici è $= 1$, in caso affermativo sono sicuro di avere una radice unitaria, vedi lezione 2 per l'equazione da risolvere per le radici del polinomio fa cui deriva questa idea della somma delle radici $= 1$

```
urca::summary(urca::ur.df(rw, type="drift", lags=10, "AIC"))
```

```
##
## #####
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
## #####
##
## Test regression drift
##
##
## Call:
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.74265 -0.75556 -0.00533  0.69858  2.49974
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.54124    0.17971   3.012  0.00341 **
## z.lag.1       -0.19427    0.06041  -3.216  0.00183 **
## z.diff.lag     0.06945    0.10634   0.653  0.51544
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.072 on 86 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.1076, Adjusted R-squared:  0.08681
## F-statistic: 5.183 on 2 and 86 DF,  p-value: 0.007496
##
##
## Value of test-statistic is: -3.2158 5.512
##
## Critical values for test statistics:
##      1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.51 -2.89 -2.58
## phi1  6.70  4.71  3.86
```

Il valore del test è a doppia coda quindi accetto l'ipotesi nulla se il valore della statistica (t-value di z.lag.1) sta a destra di 5pct tau (-2.89) e rifiuto nel caso sta a sinistra di tale valore, ad esempio sulla x di prima che sappiamo non avere radice unitaria H_0 viene rifiutata:

```
urca::summary(urca::ur.df(x, type="drift", lags=10, "AIC"))
```

```
##
## #####
## # Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
## #####
##
## Test regression drift
##
##
## Call:
```

```
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.3053 -0.6462 -0.0463  0.6464  3.2060
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.02873    0.03208  -0.895    0.371
## z.lag.1      -0.19705    0.01046 -18.841 <2e-16 ***
## z.diff.lag    0.72655    0.02193  33.133 <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.008 on 986 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5539, Adjusted R-squared:  0.553
## F-statistic: 612.2 on 2 and 986 DF,  p-value: < 2.2e-16
##
##
## Value of test-statistic is: -18.8413 177.4997
##
## Critical values for test statistics:
##      1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.43 -2.86 -2.57
## phi1  6.43  4.59  3.78
```

Moving Average

Un processo Moving Average a q ritardi, $MA(q)$, è data da una combinazione lineare mobile dei white noise:

$$X_t = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Oss: a questo punto X_t e X_{t-k} con $k > q$ sono incorrelate, esempio con $MA(1)$

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$X_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}$$

e quindi

$$Cov(X_t, X_{t-1}) = \mathbb{E}[X_t \cdot X_{t-1}] = \mathbb{E}[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) \cdot (\varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})] = \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

Quindi il processo $MA(q)$ si ricorda al più ciò che è successo fino a q ritardi prima, mentre un processo AR si porta dietro una memoria molto lunga. Quindi nel grafico ACF fino a q ritardi è non nullo il valore e vale zero oltre q ritardi, mentre nel caso di PACF rientra a zero a velocità geometrica (sono possibili delle oscillazioni). Anche qua si possono definire dei polinomi:

$$\theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$$

e il polinomio caratteristico per quella stagionale è:

$$\Theta_Q(B)_S = 1 + \Theta_1 B^S + \dots + \Theta_Q B^{S \cdot Q}$$

esempio di modelli misti: $MA(1)(1)_4$: $(1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^4)X_t$

Oss: in questo caso c è la media effettiva di X_t .

Modello ARIMA completo

si può mettere tutto insieme in un modello $\text{ARIMA}(p,d,q)(P,D,Q)_S$:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B)\Delta^d\Delta_S^D X_t = c + \theta_q(B)\Theta_Q(B)\varepsilon_t$$

Il Metodo di Box&Jenkins

- Faccio grafico della serie, media-sd e mi chiedo
 - è stazionaria in varianza?
 - * Se sì vado avanti
 - * Se no prendo la trasformazione più opportuna (con Box-Cox $\frac{X^\lambda - 1}{\lambda}$), Oss:
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{X^\lambda - 1}{\lambda} = \log(x)$$
 - è stazionaria in media per stagionalità?
 - * Se no prendo la differenza stagionale
 - * Se sì vado avanti
 - è stazionaria in media?
 - * Se no prendo la differenza semplice
 - * Se sì vado avanti
- Faccio ACF e PACF e tento il primo modello ARMA, stimo il modello e calcolo i residui $r_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$.
- i residui sono WN (White Noise)?
 - Se sì ho finito
 - Se no aggiusto il modello ARMA iniziale affinché i residui siano WN.

La funzione di verosimiglianza: $L(\theta) = f_\theta(X_1, \dots, X_n) = f(X_1)f(X_2|X_1)\dots f(X_n|X_{n-1}, \dots, X_1)$ che va massimizzata in θ .

Oss: $X_t|X_{t-1}\dots X_1 \sim N(\hat{X}_{t|t-1}, \sigma^2)$ e quindi $r_t = X_t - \hat{X}_{t|t-1} \sim N(0, \sigma^2)$

Un modello ARMA si può esprimere come un modello AR puramente infinito o MA infinito, un modello MA è invertibile se le radici del polinomio caratteristico di MA abbiano modulo > 1 (stesse condizioni della stazionarietà dal modello AR).

Es. Prendiamo un modello MA(1): $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, e assumiamo il modello MA invertibile quindi cerco $\Pi(B)$ t.c. $\Pi(B)(\mathbb{I} - \theta B) = \mathbb{I}$, sotto ipotesi di invertibilità abbiamo che l'operatore inverso è (dove si vede perché chiediamo $|\theta| < 1$):

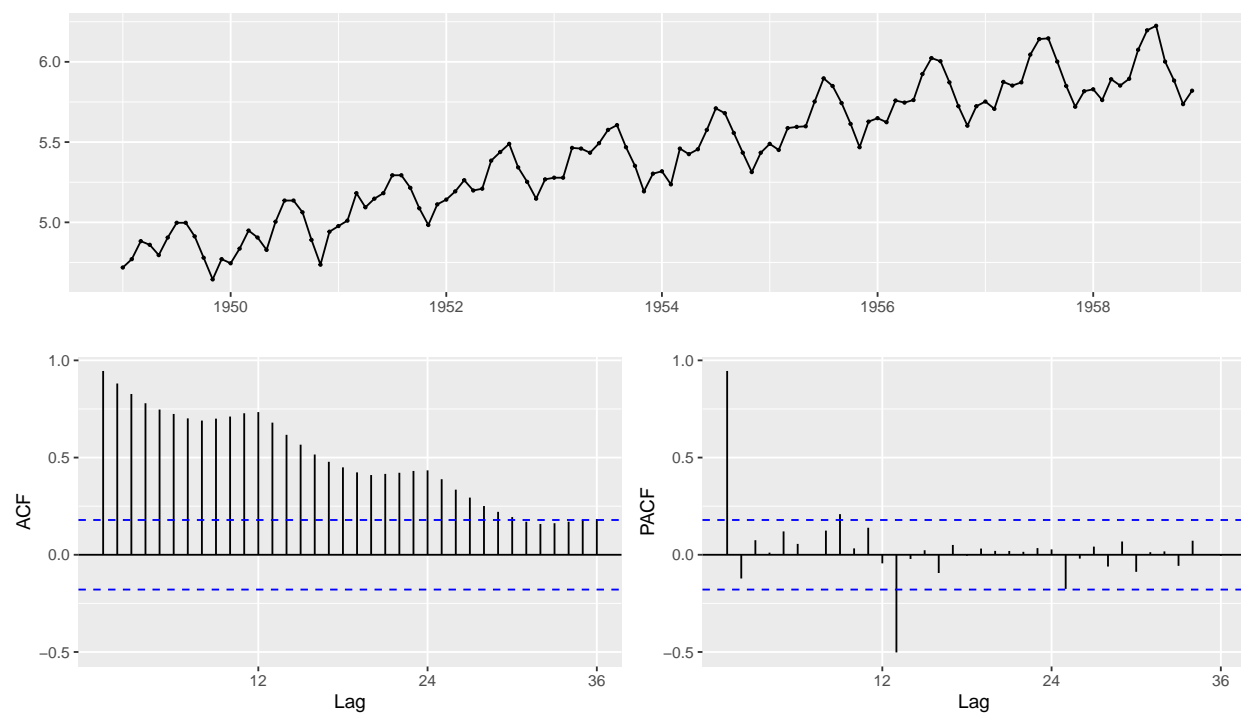
$$\Pi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \theta^i B^i$$

applicando il modello inverso otteniamo:

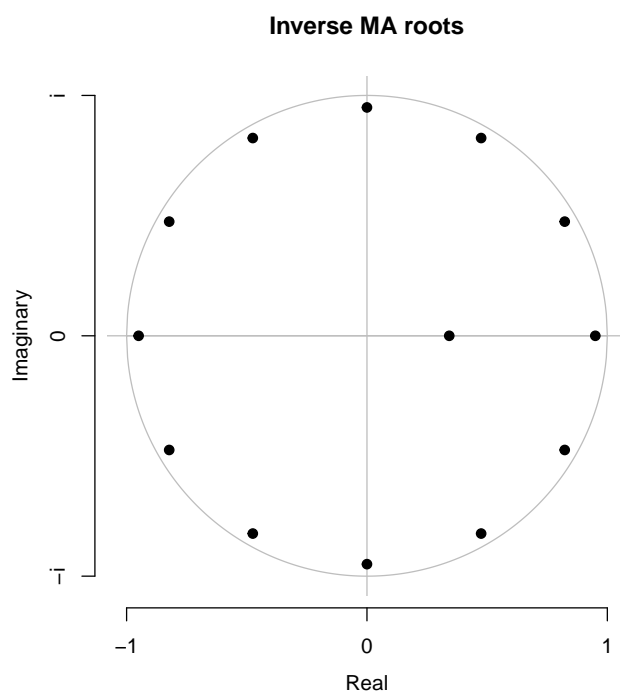
$$(1 - \theta B)^{-1} y_t = \varepsilon_t (1 - \theta B + \theta^2 B^2 - \dots) y_t = \varepsilon_t y_t = \varepsilon_t + \theta y_{t-1} - \theta^2 y_{t-2} + \dots$$

Come si può vedere è un $\text{AR}(\infty)$. Analogamente si può scrivere $\text{MA}(\infty)$ al posto di un processo AR finito.

```
library(forecast)
data("AirPassengers")
y <- window(AirPassengers, end=c(1958,12))
ggtsdisplay(log(y))
```

```
mod1 <- Arima(y, c(0, 1, 1), c(0, 1, 1), lambda = 0) #con lambda = 0 diventa una serie logaritmica
plot(mod1)
```



```
print(mod1)
```

```
## Series: y
## ARIMA(0,1,1)(0,1,1)[12]
## Box Cox transformation: lambda= 0
##
## Coefficients:
##          ma1      sma1
##      -0.3424 -0.5405
## s.e.   0.1009  0.0877
##
## sigma^2 estimated as 0.001432:  log likelihood=197.51
## AIC=-389.02  AICc=-388.78  BIC=-381
```

```
pre1 <- matrix(NA_real_, 24, 12)
colnames(pre1) <- paste0("h", 1:12)
err1 <- pre1
yna <- c(AirPassengers, rep(NA, 12))

for (i in 1:24){
  pre1[i, ] <- forecast(Arima(yna[1:(119+i)], model = mod1),
                        h=12, biasadj = TRUE)$mean
  err1[i,] <- yna[(120+i):(131+i)] - pre1[i,]
}

meanloss <- cbind(RMSE = sqrt(colMeans(err1^2, na.rm = T)),
                  MAE   = colMeans(err1, na.rm = T),
                  MAPE  = colMeans(abs(err1)/(err1+pre1), na.rm = T)*100)
meanloss
```

```
##          RMSE      MAE      MAPE
## h1  15.26418 1.090497 2.546494
## h2  15.73319 1.780475 2.708195
## h3  16.13174 3.239936 2.652833
## h4  18.10785 4.023566 2.972683
## h5  17.00168 4.709915 2.944106
## h6  17.79781 5.016538 3.153833
## h7  21.44738 6.042383 3.900381
## h8  20.14666 6.336393 3.670042
## h9  18.41746 6.431376 3.568156
## h10 20.70277 5.369597 4.168495
## h11 20.05650 6.244222 4.109114
## h12 21.26000 7.400860 4.245629
```

ARIMAX

ARMAX è il modello ARMA con dei regressori (X) ed è della forma:

$$y_t = X_t^T \beta + \eta \quad \text{dove} \quad \eta \sim ARMA(p, q)$$

η può essere anche stagionale.

La parte I è più complessa, alcuni software (R) applicano la differenza sia alla y anche alla X (ed è giusto così). Le trasformazioni invece vengono applicate solo alla y e non a X , per le trasformazioni alla X bisogna procedere manualmente. ARIMAX di stagione S in R è implementato così:

$$\Delta^d \Delta_S^D y_t = \Delta^d \Delta_S^D X_t^T \beta + \eta \quad \text{dove} \quad \eta \sim ARMA(p, q)(P, Q)_S$$

espandendo la formula totale abbiamo:

$$\phi(B)\Phi(B)\Delta^d \Delta_S^D (y_t - X_t^T \beta) = \theta(B)\Theta(B)\varepsilon_t$$

Modelli UCM

Ragioniamo in termini di trend, stagionalità, componenti cicliche e scordiamo l'esistenza dei modelli ARIMA. Per risolvere un problema di serie storica si può pensare di risolverla come una regressione, i miei regressori possono essere il tempo:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$

in questo modo cogliamo sicuramente il trend crescente mentre per la stagionalità si possono usare come regressori i dummy dei mesi (oppure un'altra base con le frequenze di seno e coseno).

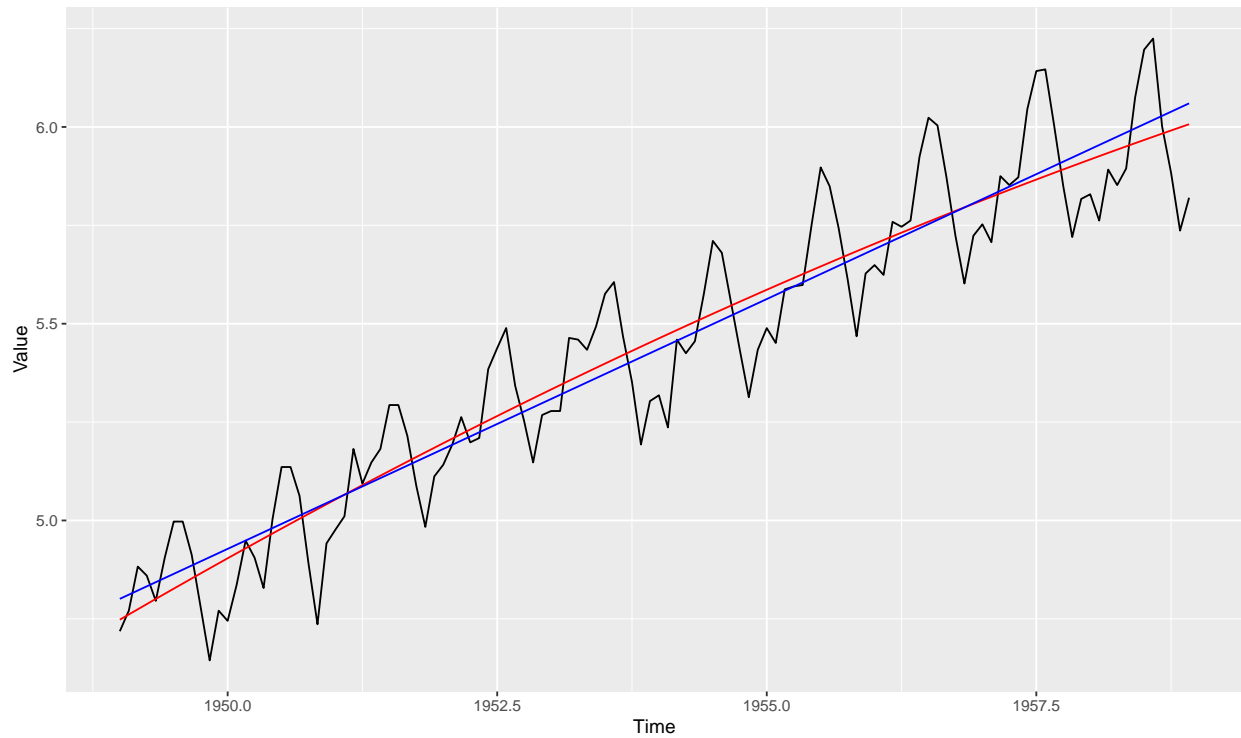
```
library(forecast)
library(ggplot2)
data("AirPassengers")
y <- window(AirPassengers, end=c(1958,12))

mod1 <- Arima(y, c(0, 1, 1), c(0, 1, 1), lambda = 0) #con lambda = 0 diventa una serie logaritmica
trend <- 1:144
reg1 <- lm(log(y)~trend[1:120])

reg <- lm(log(y)~trend[1:120] + I(trend[1:120]^2))

ggplot()+
  geom_line(aes(y=as.numeric(log(y)), x=time(y))) +
  geom_line(aes(y=reg$fitted.values, x=time(y)), colour='red') +
  geom_line(aes(y=reg1$fitted.values, x=time(y)), colour='blue') +
  xlab("Time") + ylab("Value")
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type ts. Defaulting to continuous.
```

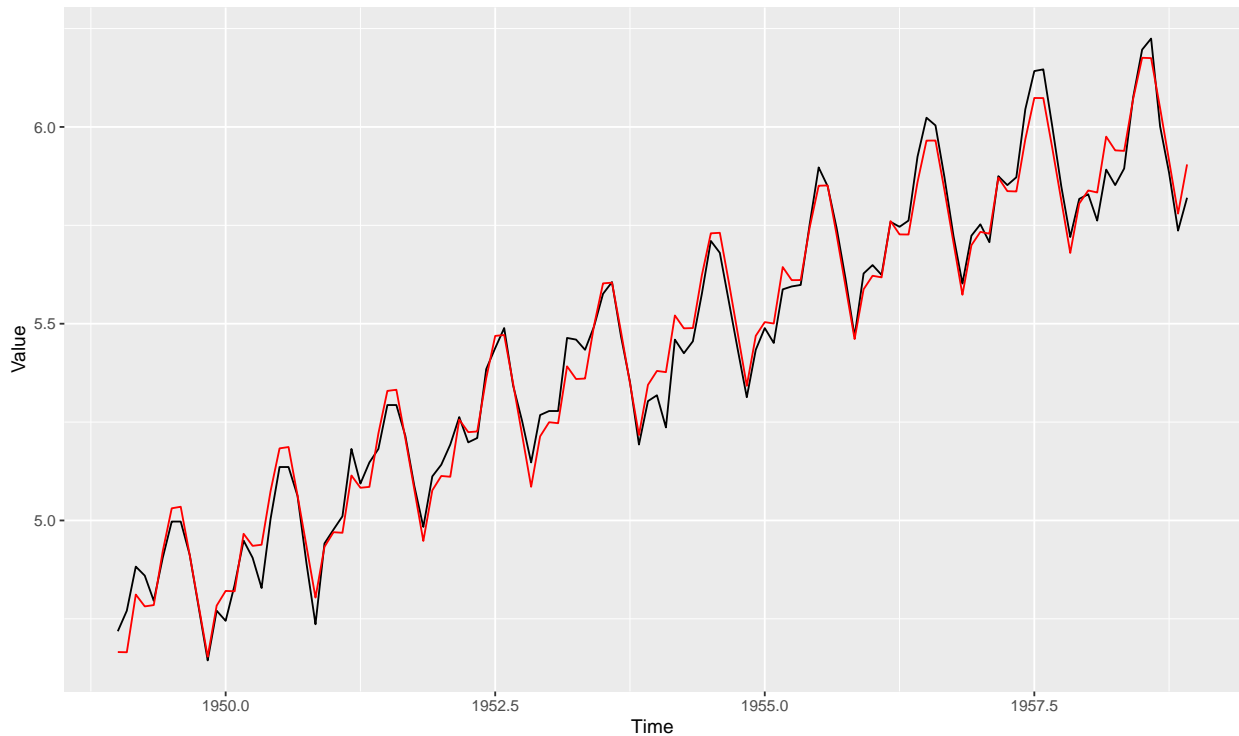


```
mesi <- months(as.Date(time(timeSeries::as.timeSeries(y))))

reg3 <- lm(log(y)~trend[1:120] + I(trend[1:120]^2) + mesi)

ggplot()+
  geom_line(aes(y=as.numeric(log(y)), x=time(y))) +
  geom_line(aes(y=reg3$fitted.values, x=time(y)), colour='red') +
  xlab("Time") + ylab("Value")
```

Don't know how to automatically pick scale for object of type ts. Defaulting to continuous.



Sia γ_t la stagionalità di periodo s quindi $\gamma_t = \gamma_{t-s}$, se sommo $\sum_{i=0}^{s-1} \gamma_{t-i}$ questa somma va a 0: $\sum_{i=0}^{s-1} \gamma_{t-i} = 0$, inoltre vista la stagionalità ho che:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \alpha_j \cos\left(\frac{2\pi}{s}jt\right) + \beta_j \sin\left(\frac{2\pi}{s}jt\right)$$

Oss: se s pari per $j = \frac{s}{2} \sin(\frac{2\pi}{s}jt) = 0$, quindi ho un regressore in meno.

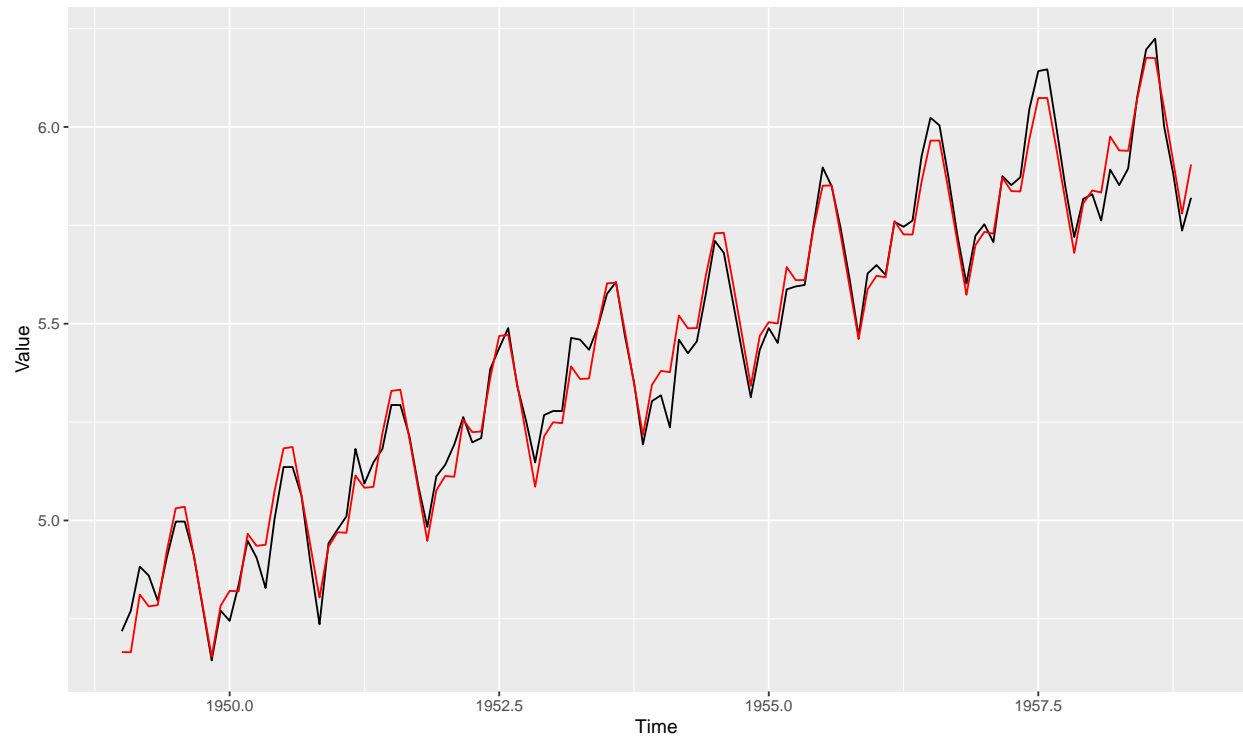
```
#~~ costruisco i regressori sinusoidi e cosinusiodi
fr <- 2*pi*outer(trend, 1:6) / 12
co <- cos(fr)
si <- sin(fr[,1:5]) #la sesta non serve dopo l'osservazione sopra

colnames(co) <- paste0("cos",1:6)
colnames(si) <- paste0("sin",1:5)

reg_cosi <- lm(log(y)~trend[1:120] + I(trend[1:120]^2) + co[1:120,] + si[1:120,])

ggplot()+
  geom_line(aes(y=as.numeric(log(y)), x=time(y))) +
  geom_line(aes(y=reg_cosi$fitted.values, x=time(y)), colour='red') +
  xlab("Time") + ylab("Value")
```

```
## Don't know how to automatically pick scale for object of type ts. Defaulting to continuous.
```

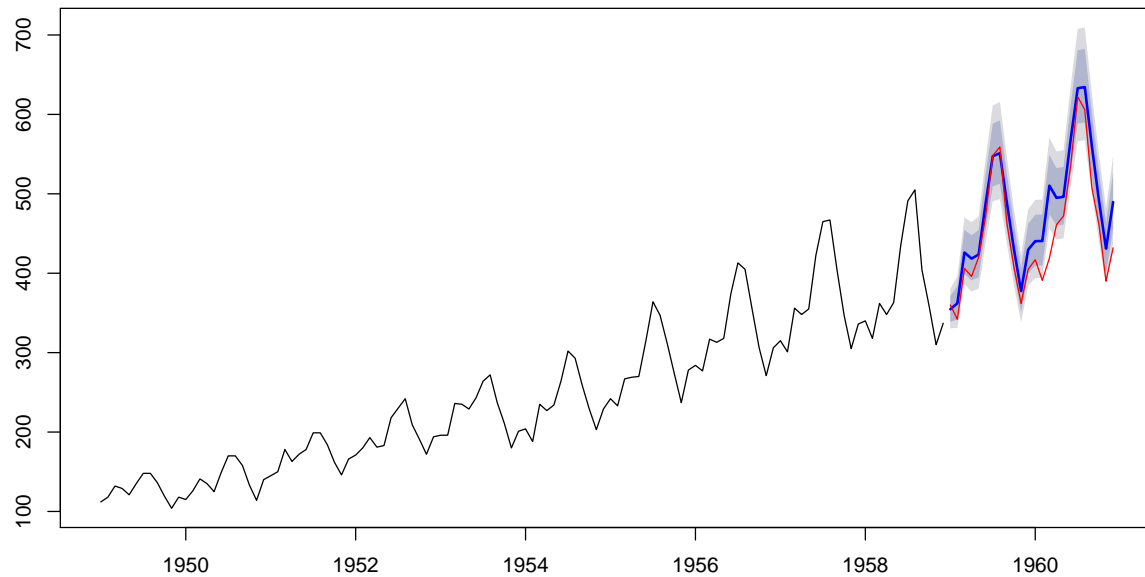


```
arimax <- Arima(y, c(1, 0, 0), lambda = 0,
               xreg = cbind(trend, co, si)[1:120,])

#prev <- predict(arimax, newxreg = cbind(trend, co, si)[121:144,])

plot(forecast(arimax, xreg = cbind(trend, co, si)[121:144,]))
lines(window(AirPassengers, start=c(1959,1), end=c(1960, 12)),col='red')
```

Forecasts from Regression with ARIMA(1,0,0) errors



Il trend per $t = 0, 1, 2, \dots$ lo possiamo definire dato $\gamma_0 = \alpha$ come trend iniziale:

$$\gamma_t = \alpha + \beta t$$

ma vorrei che sia l'intercetta α che β dipenda dal tempo poiché cambia col tempo:

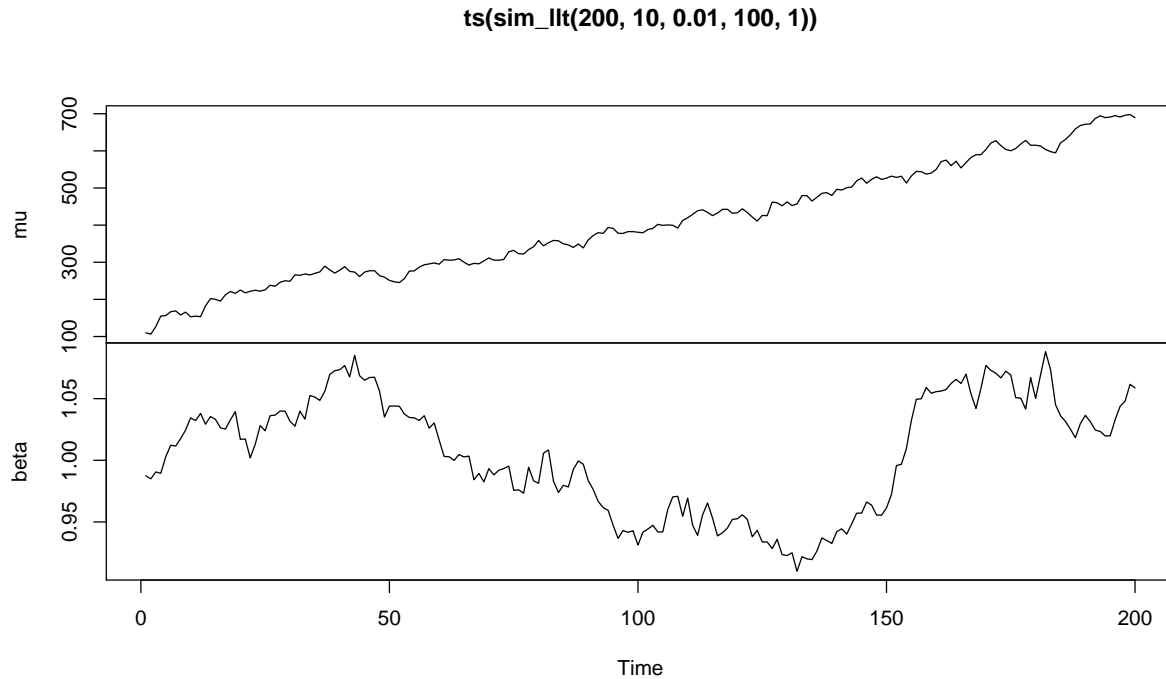
$$\gamma_{t+1} = \gamma_t + \beta_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim WN(0, \sigma_\eta^2)$$

dove $\beta_{t+1} = \beta_t + \zeta_t$, $\zeta_t \sim WN(0, \sigma_\zeta^2)$

OSS: γ_t è integrato 2 volte. μ è detto level e β è detto slope

```
#~~ implementazione in R di trend
sim_llt <- function(n, sd_level, sd_slope, level0, slope0){
  beta <- cumsum(rnorm(n, sd = sd_slope)) + slope0
  mu <- cumsum(beta + rnorm(n, sd = sd_level)) + level0
  cbind(mu = mu, beta = beta)
}

plot(ts(sim_llt(200, 10, 0.01, 100, 1)))
```



Il ciclo stocastico

Indica che c'è un ciclo ma non è deterministico quindi non basta usare seno e coseno come per il ciclo di prima, userò seno e coseno stocastico.

$$\begin{bmatrix} \psi_{t+1} \\ \psi_{t+1}^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t \\ k_t^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k_t \\ k_t^* \end{bmatrix} \sim WN(0, \sigma_k^2 \mathbb{I}) \text{ e } 0 \leq \rho \leq 1$$

Osserviamo che la matrice è la matrice di Rotazione $R(\lambda)$ che ruota il vettore di angolo λ . k_t e k_t^* sono WN tra loro incorrelati ma a varianza costante. Tipicamente si prende solo ψ_t l'altro ψ_t^* è ortogonale al primo e serve solo per la sua costruzione. Il primo pezzo dell'equazione non rappresenta altro che un ciclo e la parte di WN aggiunge il rumore per renderlo stocastico. Il ρ serve per far assorbire il ciclo a lungo andare (geometricamente tende a far portare a 0), se $\rho = 0$ allora rimane solo il WN mentre se $\rho = 1$, il ciclo diventa non stazionario. Se è stazionario abbiamo che la varianza $\mathbb{E}(\psi\psi^t) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \mathbb{I}$ Osservazione: è identico al caso di AR(1) con $\rho = \phi$.

Se il ciclo stocastico ha stagionalità S e il ciclo ha una durata di $k \cdot S$ allora la frequenza λ è data dal rapporto: $\lambda = \frac{\pi}{kS}$.

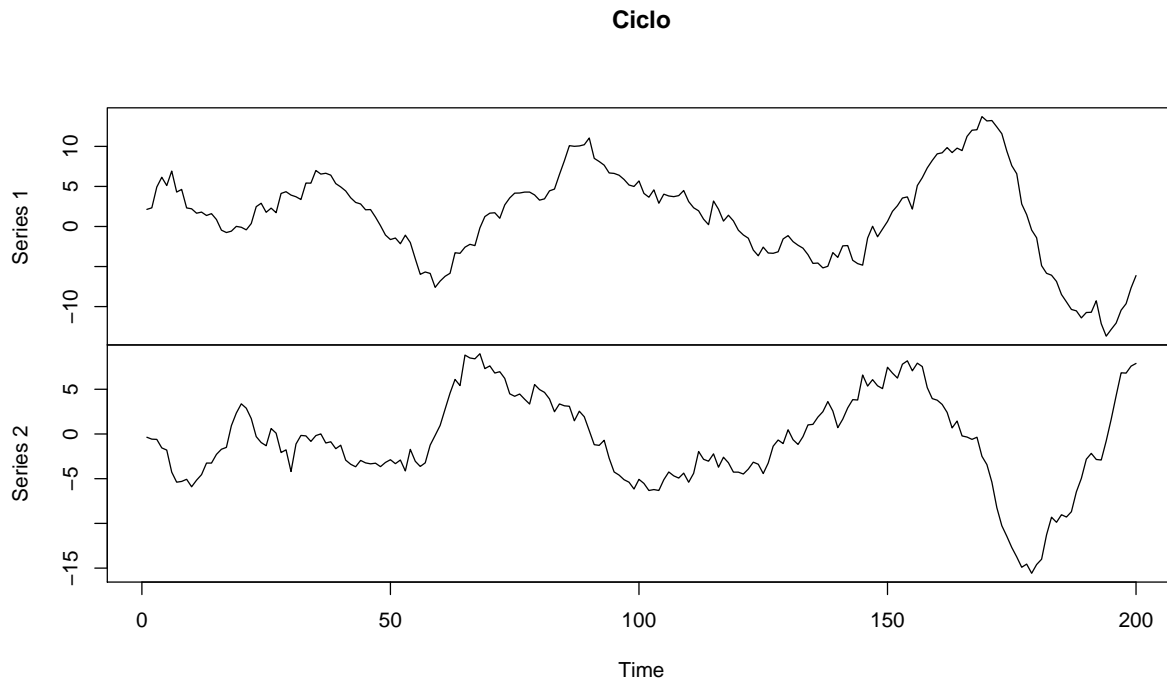
```
#~~ In R
library(ggplot2)
sim_cyc <- function(n, rho, lambda, sd_kappa, psi0){
  psi <- matrix(0, n, 2)
  R <- matrix(c(cos(lambda), -sin(lambda), sin(lambda), cos(lambda)), 2, 2)
  Rt <- t(R) #traspongo perché in R voglio un vettore colonna e non riga come in teoria
  psi[1, ] <- rho*R %*% psi0 + rnorm(2, sd=sd_kappa)
  for (t in 2:n){
    psi[t, ] <- rho*R %*% psi[t-1, ] + rnorm(2, sd=sd_kappa)
  }
}
```



```

}
psi
}
#il rho dà la persistenza del ciclo, più è vicino a zero, per più tempo lo vedremo esistere
ciclo = sim_cyc(n = 200, rho = 0.99, lambda = 2*pi/48, sd_kappa = 1, rnorm(2))
plot(ts(ciclo), main = 'Ciclo')

```



Nei 2 cicli generati sopra se uno prende la loro correlazione, dovrebbe essere circa 0 (almeno prendendo serie infinita quindi dipende da n):

```
cor(ciclo[,1], ciclo[,2])
```

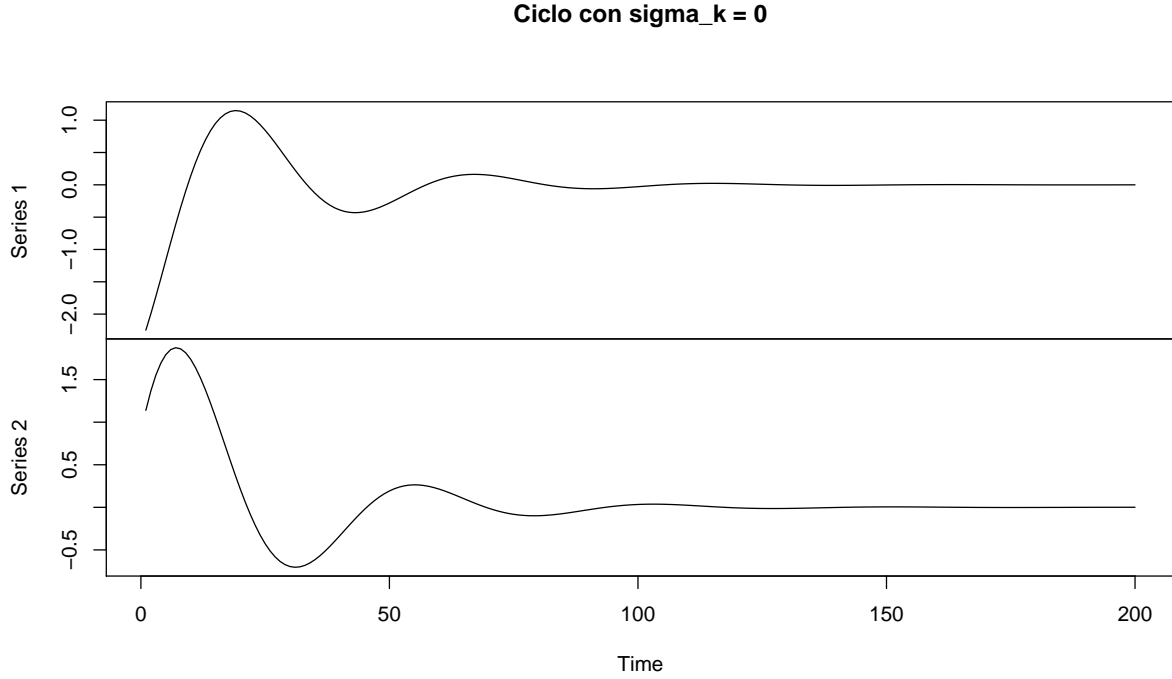
```
## [1] -0.03695195
```

Se σ_k la prendiamo = 0 cioè elimino la stocasticità in teoria la serie diventa un seno che piano piano scompare, in base al coefficiente ρ :

```

ciclo = sim_cyc(n = 200, rho = 0.96, lambda = 2*pi/48, sd_kappa = 0, rnorm(2))
plot(ts(ciclo), main = 'Ciclo con sigma_k = 0')

```



In particolare se $\sigma_k = 0$ e $\rho = 1$, diventa un ciclo perfetto, mentre se $\rho = 1$ e $\sigma_k \neq 0$ allora abbiamo una non stazionarietà (non c'è un ciclo).

Sappiamo che possiamo scrivere la stagionalità come:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \alpha_j \cos\left(\frac{2\pi}{s}jt\right) + \beta_j \sin\left(\frac{2\pi}{s}jt\right)$$

il ciclo stocastico stagionale lo possiamo ottenere come:

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \psi_t^{(j)}$$

dove

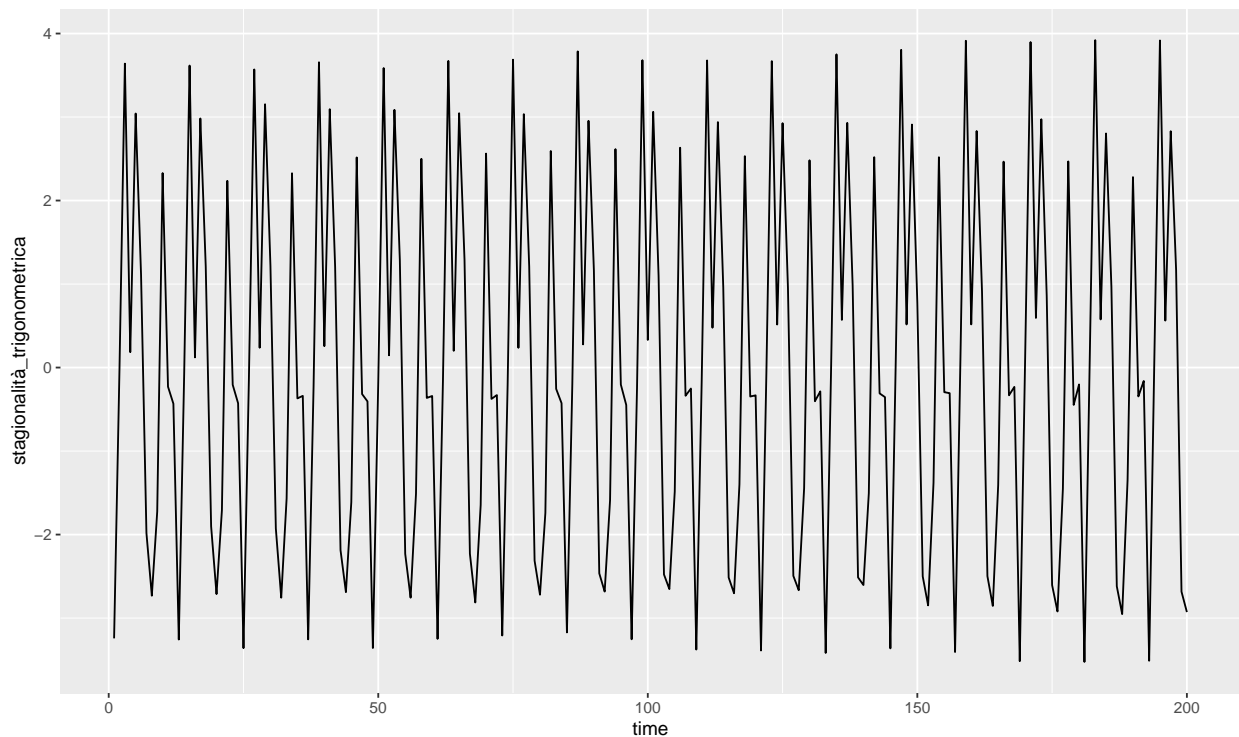
$$\begin{bmatrix} \psi_{t+1}^{(j)} \\ \psi_{t+1}^{(j)*} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{s}j\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{s}j\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{s}j\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{s}j\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_t^{(j)} \\ \psi_t^{(j)*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_t^{(j)} \\ \omega_t^{(j)*} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_t^{(j)} \\ \omega_t^{(j)*} \end{bmatrix} \sim WN(0, \sigma_\omega^2 \cdot \mathbb{I})$$

Anche qua il numero delle componenti quando s è pari sono $s-1$.

```
sim_trig_seas <- function(n, s, sd_omega, PSIO){
  gamma <- numeric(n)
  frb <- 2*pi/s #frequenza base
  for (j in 1:floor(s/2)) {
    gamma <- gamma + sim_cyc(n, 1, frb*j, sd_omega, PSIO[j,])[,1]
  }
  gamma
}

stagionalità_trigonometrica <- sim_trig_seas(n = 200, s = 12,
                                             sd_omega = 0.01, matrix(rnorm(12),6,2))
```

```
time = 1:length(stagionalità_trigonometrica)
ggplot() +
  geom_line(aes(y=stagionalità_trigonometrica, x=time))
```



Quando si costruiranno il modello State Space, sapremo come stimare i parametri delle componenti UCM.

Stagionalità a dummy stocastiche

Ho la stagionalità fatta in modo che $\gamma_t = \gamma_{t-s}$ tale che $\sum_{i=0}^s \gamma_{t-i} = 0$, cioè se la somma deve darmi zero \rightarrow riscrivendo l'equazione sopra ho che $\gamma_t = -\gamma_{t-1} - \dots - \gamma_{t-s+1}$ che è già un'equazione alle differenze, per renderla stocastica aggiungo come sempre un WN: $\gamma_t = -\gamma_{t-1} - \dots - \gamma_{t-s+1} + \omega_t$ dove $\omega \sim WN(0, \sigma_\omega^2)$. Matricialmente (VAR) la posso riscrivere come:

$$\begin{bmatrix} \gamma_t \\ \gamma_t^{(1)} \\ \gamma_t^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_t^{(s-2)} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-1}^{(1)} \\ \gamma_{t-1}^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_{t-1}^{(s-2)} \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} \omega_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_t \sim WN(0, \sigma_\omega^2 \mathbb{I})$$

```
sis_dummy_seas <- function(n, s, sd_omega, gamma_init){
  filter(rnorm(n, sd=sd_omega), rep(-1, s-1), "recursive", init=gamma_init)
}

season_dummy <- as.numeric(sis_dummy_seas(200, 12, 0.01, rnorm(11)))
Time <- 1:length(season_dummy)
ggplot() +
  geom_line(aes(y=season_dummy, x=Time))
```

