Equazione di stato

Andrea Premate 829777

10 dicembre 2021

Indice

1 Definizione variabili di stato e controllo

Definiamo come stato del sistema in analisi $\underline{x_t} = \begin{bmatrix} x_t & y_t & \theta_t \end{bmatrix}^T$, dove (x_t, y_t) rappresentano le coordinate del punto P_1 del robot nel sistema di riferimento mondo e θ rappresenta l'angolo tra i vettori x^R e x^W in senso antiorario, come raffigurato in figura. In sintesi sarebbe:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ \theta_t \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x^W(P_1)_t \\ y^W(P_1)_t \\ \text{atan2}(\det \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}, a \cdot b) \end{bmatrix} \tag{1}$$

dove $x(P)$ indica la coordinata x di un generico punto P (analogamente per y) e $a := (P^W_{2,t} - P^W_{1,t})$, $b := (1,0)^W$ (in altre parole i vettori a e b sono vettori proporzionali rispettivamente a x^R e x^W, prime componenti delle basi di R e W, in coordinate mondo).
Il controllo invece lo definiamo come la distanza percorsa in un intervallo di tempo dalle due ruote:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} s_{sx} \\ s_{dx} \end{bmatrix} \tag{2}$$

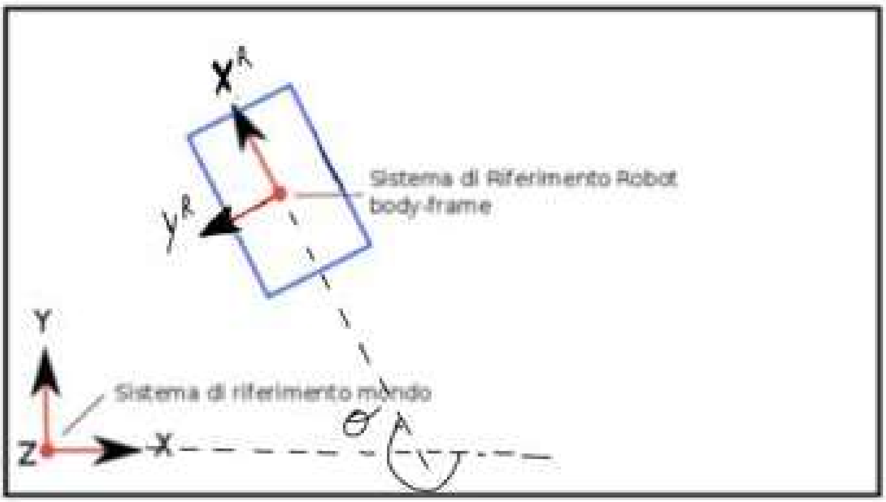

Fig. 1. Sketch of the reference frames involved in the problem, view from above. The red dot means the axis, i.e., Z in this case, is orthogonal to the paper, pointing toward the observer. "Sistema di riferimento mondo" stands for "world reference frame", while "Sistema di riferimento robot" stands for "robot reference frame"

2 Rototraslazione sistema di riferimento

La rototraslazione per passare dal sistema di riferimento robot (al tempo t) al sistema di riferimento mondo è data dalla seguente matrice:

$$T_{R_t}^{W} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & x_t \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

3 Rototraslazione spostamento robot

Il movimento del robot è descritto tramite il modello odometrico. Possiamo rappresentarlo tramite una pura rotazione attorno al CIR. Per fare cio quindi impostiamo:

$$\begin{cases} s_{dx} = m\alpha \\ s_{sx} = (m+l)\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} m = s_{dx}l/(s_{sx} - s_{dx}) \\ \alpha = (s_{sx} - s_{dx})/l \end{cases} \tag{4}$$

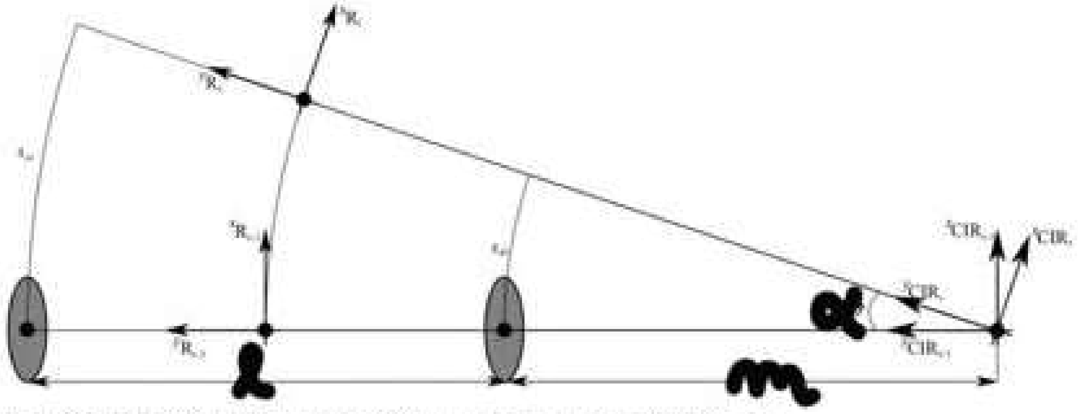

Fig. 1. Sketch of the problem: l=baseline; d=distance to CIR, $s_{t,l}$ = left arc, $s_{t,r}$ = right arc, R = robot pose

Componiamo quindi le rototraslazioni che ci fanno ottenere la posizione del robot al tempo t espressa in coordinate robot al tempo $t-1$. Inizialmente abbiamo una traslazione, quindi:

$$T^{R_{t-1}}_{CIR_{t-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m-l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Successivamente una rotazione (senso orario $\rightarrow \alpha > 0$)attorno al CIR, quindi:

$$T^{CIR_{t-1}}_{CIR_t} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ed infine torniamo nelle coordinate robot al tempo t:

$$T^{CIR_t}_{R_t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m+l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

In totale quindi avremo:

$$T^{R_{t-1}}_{R_t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m-l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m+l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$T^{R_{t-1}}_{R_t} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & sin(\alpha)(m+l/2) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & cos(\alpha)(m+l/2)-m-l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

4 Equazione di stato

Andiamo quindi a vedere come si sposta l'origine del sistema di riferimento robot ($\tilde{P}^{R_{t-1}}_{1,t-1} = (0,0,1)$) dal tempo $t-1$ al tempo t:

$$\tilde{P}^{R_{t-1}}_{1,t} = T^{R_{t-1}}_{R_t} \tilde{P}^{R_{t-1}}_{1,t-1} = T^{R_{t-1}}_{R_t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

in coordinate mondo:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta_{t-1}) & sin(\theta_{t-1}) & x_{t-1} \\ -sin(\theta_{t-1}) & cos(\theta_{t-1}) & y_{t-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{P}^{R_{t-1}}_{1,t} \tag{11}$$

Dovremmo andare ora a trasformare anche lo stesso $\tilde{P}^{R_{t-1}}_{1,t-1}$ in coordinate mondo per andare a considerare il vettore differenza ($\tilde{P}^{W}_{1,t} - \tilde{P}^{W}_{1,t-1}$) che ci indica lo spostamento in coordinate mondo. Questa operazione però risulta superflua infatti:

$$T^{W}_{R_{t-1}} T^{R_{t-1}}_{R_t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - T^{W}_{R_{t-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T^{W}_{R_{t-1}} (T^{R_{t-1}}_{R_t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = T^{W}_{R_{t-1}} T^{R_{t-1}}_{R_t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Riassumendo tutte le operazioni viste quindi abbiamo:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta_{t-1}) & sin(\theta_{t-1}) & x_{t-1} \\ -sin(\theta_{t-1}) & cos(\theta_{t-1}) & y_{t-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & sin(\alpha)(m+l/2) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & cos(\alpha)(m+l/2) - m - l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta_{t-1})sin(\alpha)(m+l/2) + sin(\theta_{t-1})[cos(\alpha)(m+l/2) - m - l/2] + x_{t-1} \\ -sin(\theta_{t-1})sin(\alpha)(m+l/2) + cos(\theta_{t-1})[cos(\alpha)(m+l/2) - m - l/2] + y_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Consideriamo ora anche l'angolo θ_t: tale angolo non è altro che la somma dell'angolo al tempo precedente e l'angolo compiuto attorno al CIR. Quindi in totale avremo:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ \theta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta_{t-1})sin(\alpha)(m+l/2) + sin(\theta_{t-1})[cos(\alpha)(m+l/2) - m - l/2] + x_{t-1} \\ -sin(\theta_{t-1})sin(\alpha)(m+l/2) + cos(\theta_{t-1})[cos(\alpha)(m+l/2) - m - l/2] + y_{t-1} \\ \alpha + \theta_{t-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

5 Riassunto e caso speciale(moto rettilineo)

5.1 Moto rotatorio

Con $s_{sx} \neq s_{dx}$ abbiamo l'equazione di stato seguente:

$$\underline{x}_t = \underline{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} cos(\theta_{t-1})sin(\alpha)(m + l/2) + sin(\theta_{t-1})[cos(\alpha)(m + l/2) - m - l/2] \\ -sin(\theta_{t-1})sin(\alpha)(m + l/2) + cos(\theta_{t-1})[cos(\alpha)(m + l/2) - m - l/2] \\ \alpha \end{bmatrix} \tag{16}$$

In particolare se $s_{sx} > s_{dx}$ e $s_{sx}, s_{dx} > 0$ si procede in avanti e si ha una rotazione a destra ($\alpha > 0$). Se $s_{sx} < s_{dx}$ e $s_{sx}, s_{dx} > 0$ si procede in avanti e si ha una rotazione a sinistra ($\alpha < 0$).

5.2 Moto rettilineo

Nel caso in cui invece $s_{sx} = s_{dx}$ riscriviamo la matrice di rototraslazione spostamento robot:

$$T_{R_t}^{R_{t-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_{sx} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

L'angolo θ invece non subirà alcuna variazione quindi complessivamente si ha:

$$\underline{x}_t = \underline{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} cos(\theta_{t-1})s_{sx} \\ -sin(\theta_{t-1})s_{sx} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$