

CEGIS - ID

(1)

Scopo è quello di usare CEGIS per fare
Bounded error Koopman Learning

Setting

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & f(x), g(x) \in C^1 \text{ e Lipschitz} \\ (x, u) \in \Omega, & \Omega \text{ compatto} \end{cases}$$

Scopo:

Trovare una rappresentazione

$$(2) \begin{cases} z^+ = Az + Bu \\ x = \varphi(z) \end{cases}$$

tale che $|\varphi^{-1}(z^+) - x^+| < \delta$, per $\forall \delta$ fissato
 $\forall (x, u) \in \Omega$

Parte di Learning

(2)

L'IDEA di Base sarebbe utilizzare una

$\phi(\cdot)$ a sua volta Lipschitz.

Vorrei inoltre che $\phi^{-1}(\cdot)$ sia Lipschitz a sua volta.

Approccio di Base : ϕ è una RBF
 ϕ^{-1} è LINEARE

$$\phi(x) \triangleq [p(|x-x_1|) \dots p(|x-x_M|)]$$

$p: (x) \rightarrow \text{una RBF}$, e.g.: $p(x) = \begin{matrix} v^2 \log v \\ \text{oppure} \\ \frac{1}{1+v^2} \end{matrix}$

Nota bene; essendo $(x, u) \in \Omega$ compatto, mi basta che p abbia una derivata limitata e continua.

Il problema di learning diventa allora il seguente ⁽³⁾

Dato un dataset $DS \triangleq \{(x_j, y_j, x_j^+)\}_{j=1 \dots N}$

si risolve

arg min

A, B, C

$$\sum_{j=1}^N \eta_j + \varepsilon_j$$

(3)

$$|C \phi(x_j) - x_j| \leq \eta_j \quad (a)$$

$$|\phi(x_j^+) - A\phi(x_j) - Bu| \leq \varepsilon_j \quad (b)$$

Questo problema di base può essere arricchito aggiungendo ~~condizioni~~ ^{condizioni} di interpolazione, i.e.

$$\begin{aligned} C \phi(x_j) - x_j &= 0 \\ \phi(x_j^+) - A\phi(x_j) - Bu &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

E condizioni di regolarizzazione su A, B, C ,
ad esempio

$$\|A\phi(x_j)\| \leq L \quad (d)$$

$$\|C\phi(x_j)\| \leq L$$

Come nel paper di Maddalena.

NB.

Si ASSUME il dizionario delle Base
fissato in anticipo!

Essendo Tutte le mappe compatte Lipschitz,
non può semplicemente risolvere

$$J^* = \arg \max_{x, u} \| f(x, u) - C(A\phi(x) + Bu) \|_1$$

$$x, u \in \Omega$$

Il valore ottimo associato a questo problema
è il massimo errore (in norma) di approssimazione.

Se è considerato Troppo alto, allora abbiamo
un controesempio (x_c, u_c)

PROCEDURA CORREZIONE (WIP)

5

↳ Aggiungo Condizione di Interpolazione su
 (x_c, u_c)

↳ Aggiungo condizione di regolarizzazione alla
Modello

↳ Se l'errore si impenna Troppo, aggiungo una
RBF centrata sull'esempio x_c