Image Enhancement nel Dominio della Frequenza

Parte I

Prof. Sebastiano Battiato

Outline

- Preliminari Matematici
- Analisi di Fourier (Serie e Trasformate)
- Range Dinamico
- Immagini Base (cenni con analogia DCT)
- Proprietà (Separabilità, Traslazione, Simmetria Coniugata,Valore Medio,…)
- Filtraggio
  - Low Pass ideale, Butterworth, Gaussiano
  - High Pass ideale, Butterworth
  - Sharpening
  - Omomorfico
- Esercitazione

Introduzione

Una funzione **periodica** può essere espressa come somma di seni e/o coseni di differenti frequenze e ampiezze (***Serie di Fourier***).

Anche una funzione non periodica, (*sotto certe condizioni*) può essere espressa come integrale di seni e/o coseni, moltiplicati per opportune funzioni-peso (***Trasformata di Fourier***).

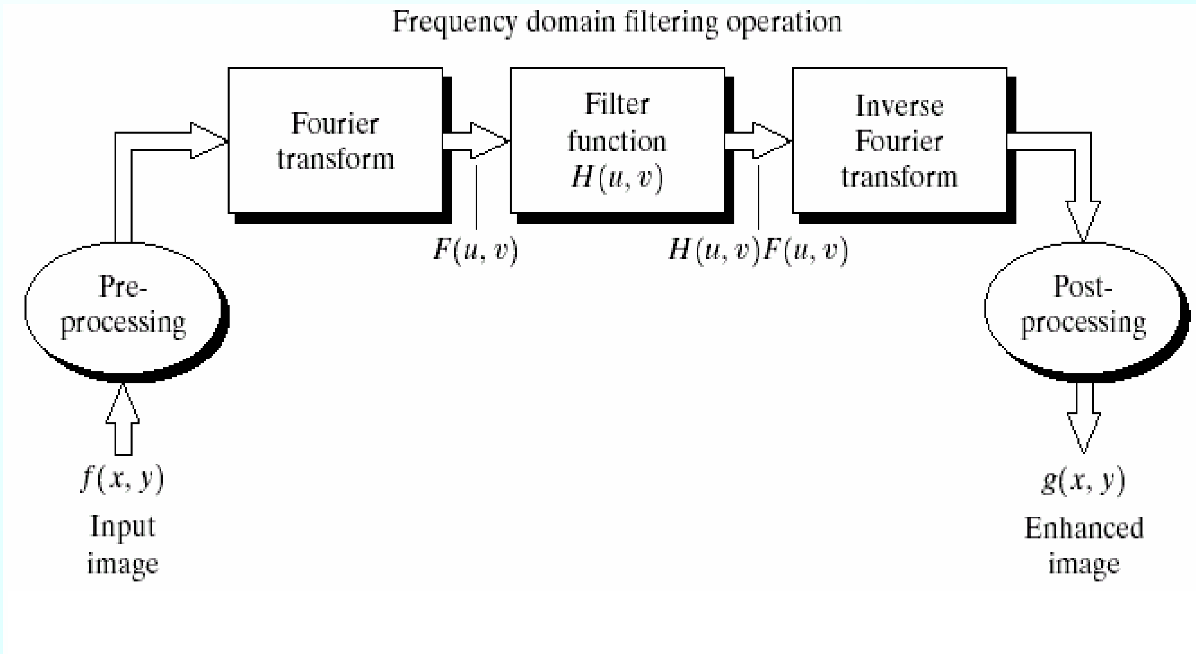
Jean Baptiste Joseph Fourier
(Auxerre, 1768 –Paris, 1830)

Introduzione

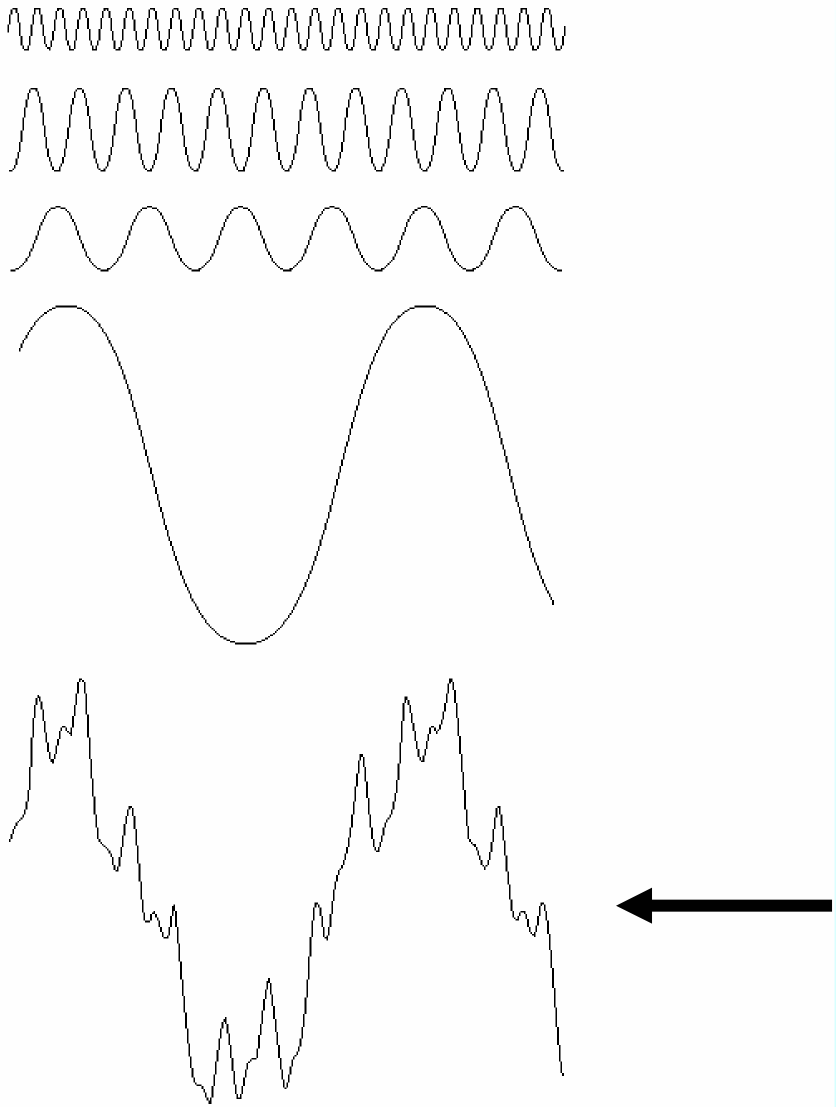
- Entrambe le rappresentazioni, condividono il fatto che una funzione possa essere “ricostruita” (**recovered**) con un semplice processo di inversione senza perdita di informazione. E’ cioè possibile lavorare nel cosiddetto **dominio di Fourier** e tornare nel dominio originale della funzione in maniera del tutto naturale.

- Inizialmente l’analisi di Fourier trovò applicazione nel campo della diffusione del calore dove permise la formulazione e la risoluzione di equazioni differenziali di alcuni fenomeni fisici in maniera del tutto originale.

- Con l'avvento della **FFT (Fast Fourier Trasform)** il settore dell'elaborazione digitale dei segnali (**DSP – Digital Signal Processing**) ha subito una vera e propria rivoluzione, ed oggi questi concetti trovano applicazione nei più svariati campi industriali, dalla medicina, alle telecomunicazioni, ecc..

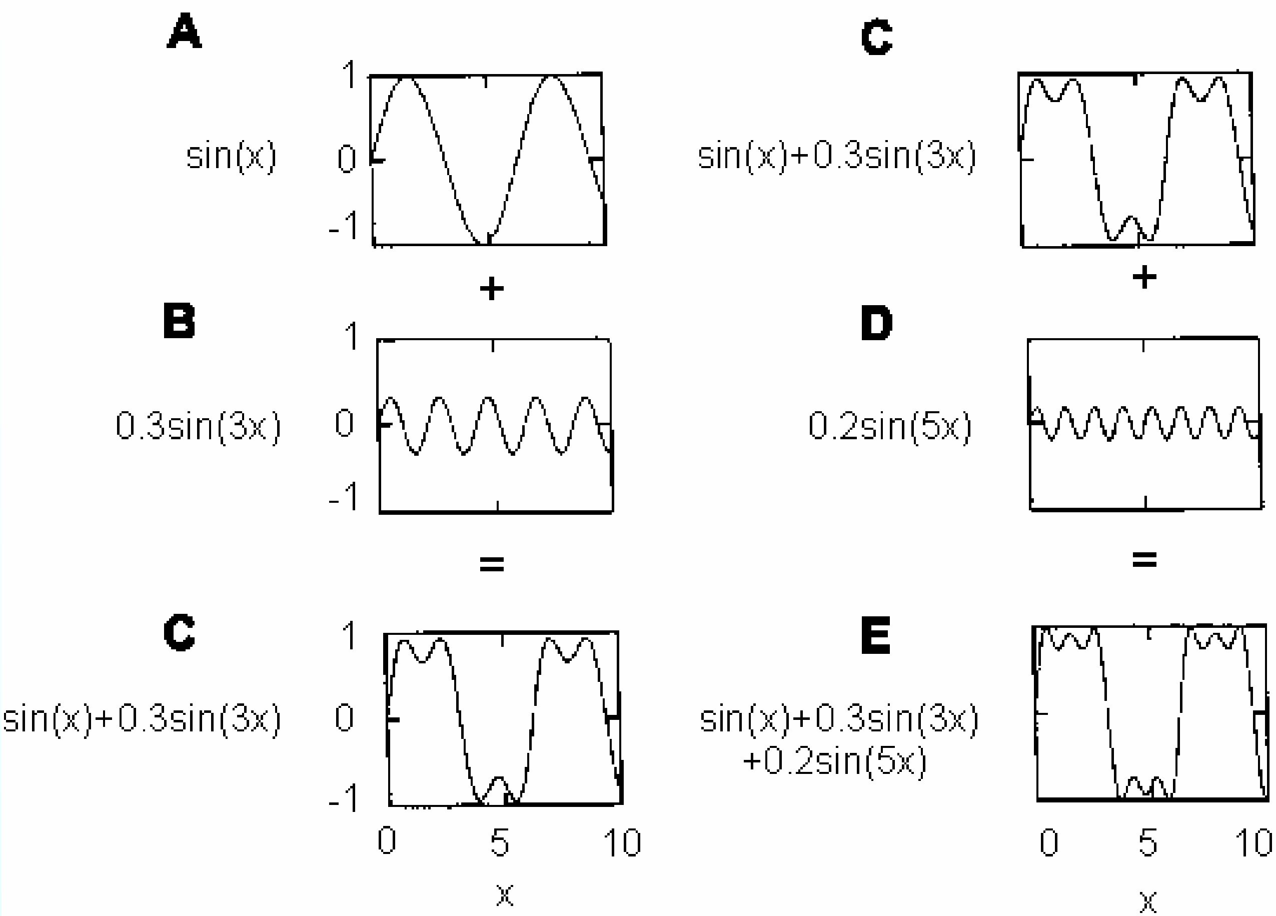


Un primo esempio



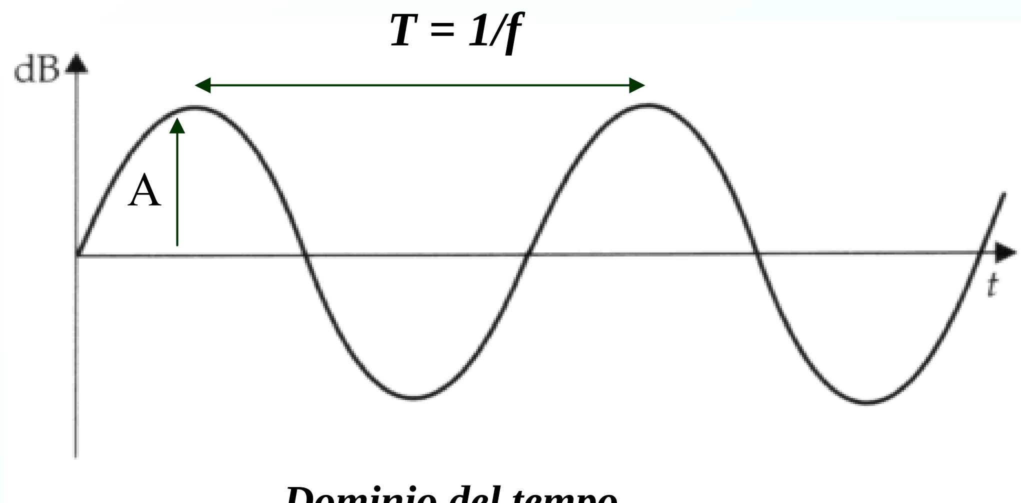
Questa funzione è la somma delle 4 funzioni periodiche di cui sopra.

Ancora Esempi

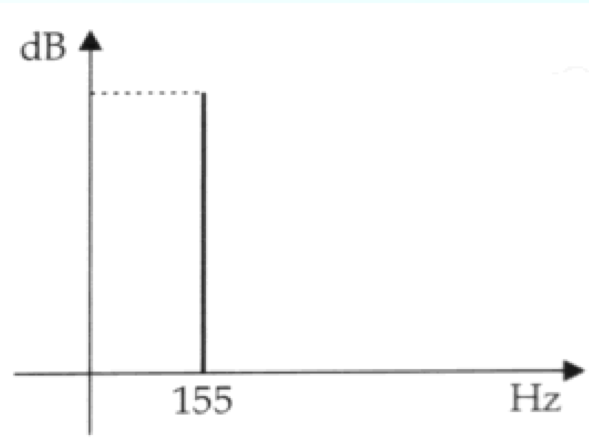


- Un'immagine può essere vista come una funzione discreta in due dimensioni i cui valori rappresentano il livello di grigio di un determinato pixel.

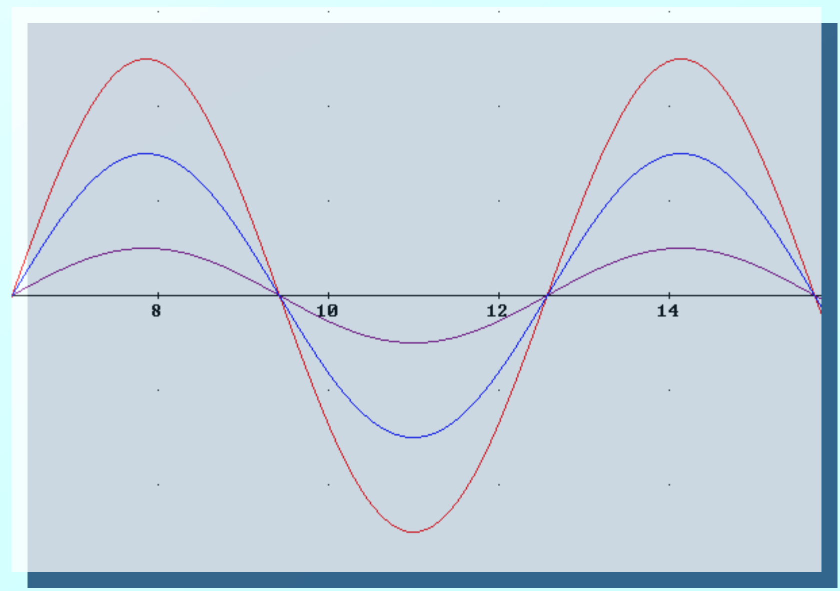
- La funzione "immagine" può essere vista come un segnale, cioè una funzione variabile in un dominio con una propria frequenza (costante o variabile).



Dominio del tempo



Dominio della frequenza



- Ampiezza (**A)** espressa in decibel **dB;**
- Periodo (**T**) espresso in secondi;
- Frequenza (***f****)* numero di cicli (onde) al secondo; si misura in Hertz **Hz**

Preliminari

Cominciamo a studiare le funzioni periodiche da cui derivano le cosiddette “***armoniche***”, ossia le funzioni sinusoidali e cosinusoidali del tipo:

$$y = A \sin \omega x+\varphi \qquad\qquad y = A \cos \omega x+\varphi$$

dove A indica l'ampiezza, ω la pulsazione (definita come ω=2π/T, misurata in radianti al secondo) e φ la fase.

Sappiamo però che $y = A \sin \omega x+\varphi = A \sin \varphi \cos \omega x + A \cos \varphi \sin \omega x$

quindi ponendo $a = A \sin \varphi$ e $b = A \cos \varphi$

otteniamo $y = a \cos \omega x + b \sin \omega x$

Con tale sostituzione siamo riusciti a riscrivere la nostra funzione in termini di seno e coseno, riassumendo:

$$y = A \sin \omega x+\varphi = a \cos \omega\, x + b \sin \omega x$$

Preliminari

Analogamente

$$y = A \cos \omega x{+}\varphi = a \cos \omega x + b \sin \omega x$$

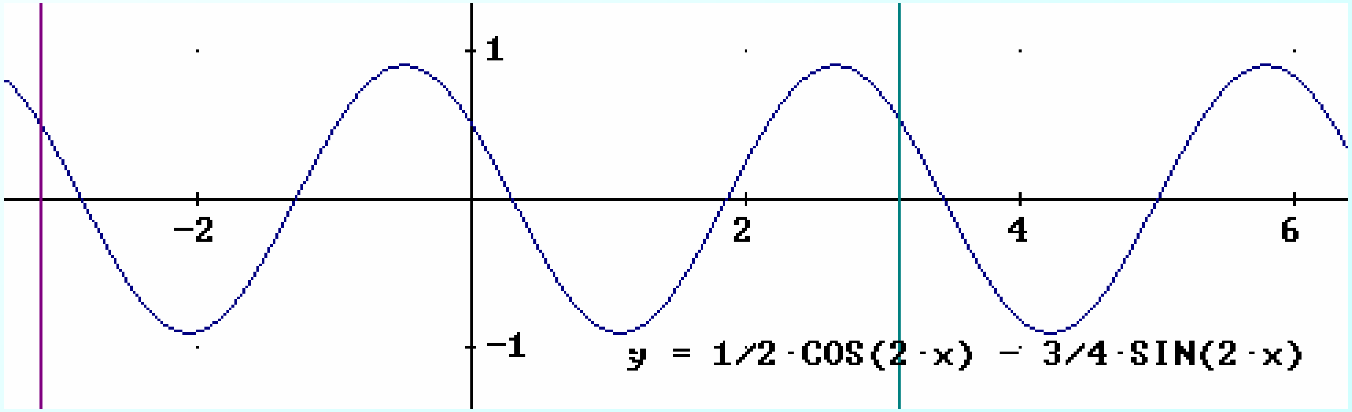
posto però $a = A \cos \varphi$ e $b = A \sin \varphi$

Quindi a e b sono le due nuove ampiezze e quel che è più interessante è l'assenza del coefficiente di fase nella nuova espressione.

Le funzioni sinusoidali di periodo 2π possono essere espresse nella forma:

$$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$$

Se la funzione sinuisoidale è di periodo minimo T=2π abbiamo ω=2π/2π=1 cioè abbiamo un'oscillazione completa nell'intervallo 2π mentre se T=π abbiamo esattamente 2 oscillazioni.



In generale se la funzione $f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ ha come minimo periodo T = 2π/ω, in un periodo 2π si compiono ω oscillazioni complete.

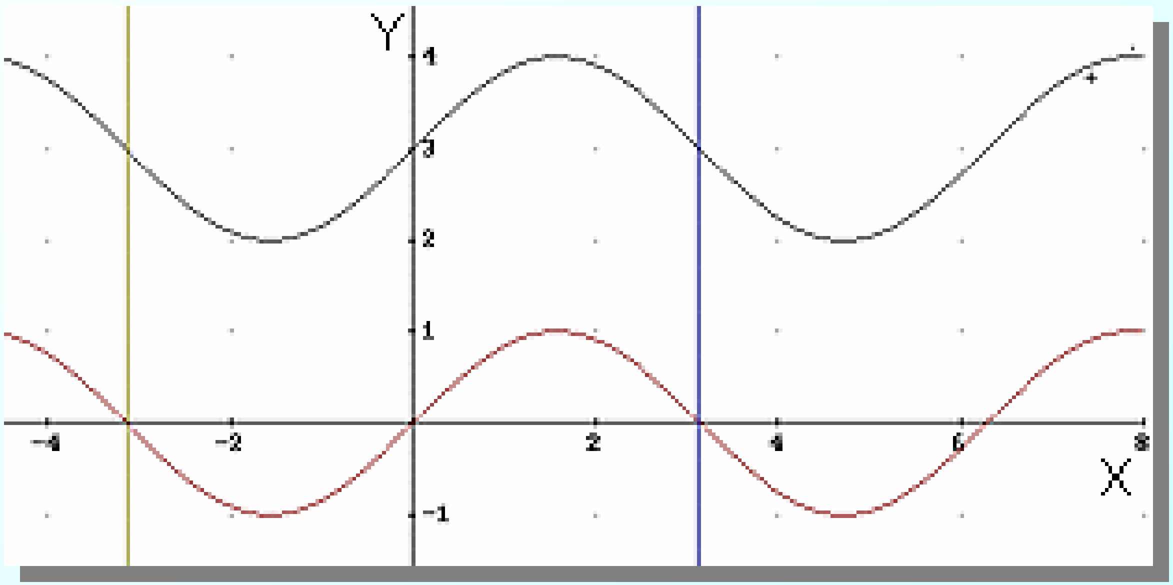
Se consideriamo la figura precedente si ha un periodo minimo T = π ma possiamo sempre considerarla come un espressione di periodo 2π giacchè compie in questo intervallo due oscillazioni esatte.

Tutto ciò vale in generale anche per la seguente espressione:

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \mathrm{sen}\, x + a_2 \cos 2x + b_2 \mathrm{sen}\, 2x + .. + a_n \cos kx + b_n \sin kx$$

Infatti anche la somma di più funzioni sinusoidali con pulsazioni diverse da ancora una funzione periodica di periodo 2π (**verificarlo sperimentalmente in Matlab per esercizio**)

La costante $a_0>0$ ha il semplice effetto di spostare l'onda prodotta dalla sommatoria verso l'alto oppure verso il basso se $a_0<0$ rispetto all'asse delle x. Nell'immagine consideriamo il contributo di una costante sommata a sin x.



Serie di Fourier

- Nel caso unidimensionale data una funzione variabile nel tempo $f(x)$ e ***periodica***, questa funzione può essere rappresentata come somma di infiniti termini sinusoidali (***armoniche elementari***), attraverso la **serie di Fourier:**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

- Lo sviluppo in serie di Fourier può avvenire purchè vengano soddisfatte le cosiddette ***condizioni di Dirichlet.***

Le Armoniche

Prima di vedere le formule per trovare i coefficienti della serie di Fourier diamo la definizione di armonica.

La funzione $a_1\cos x+b_1\sin x$ viene detta **prima armonica o armonica fondamentale** della funzione *f(x)*.

L'armonica fondamentale, come vedremo, ha frequenza minima rispetto alle armoniche di ordine superiore ed è quella che dà il maggiore contributo nella costruzione dell'onda risultante della serie.

Chiamiamo invece la funzione $a_k cos\ kx+b_k sen\ kx$ la ***k*-esima armonica o armonica di ordine *k*** della *f(x)*.

Esercizio: Trovare la formula per il calcolo dell’ampiezza della k-armonica.

Ampiezza k-esima armonica

Partendo da $y = A \sin \omega x+\varphi$ con considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente otteniamo:

$$A_k sin\ \varphi_k = a_k;\quad A_k cos\ \varphi_k = b_k;$$

Elevando al quadrato e sommando entrambi i membri si ha:

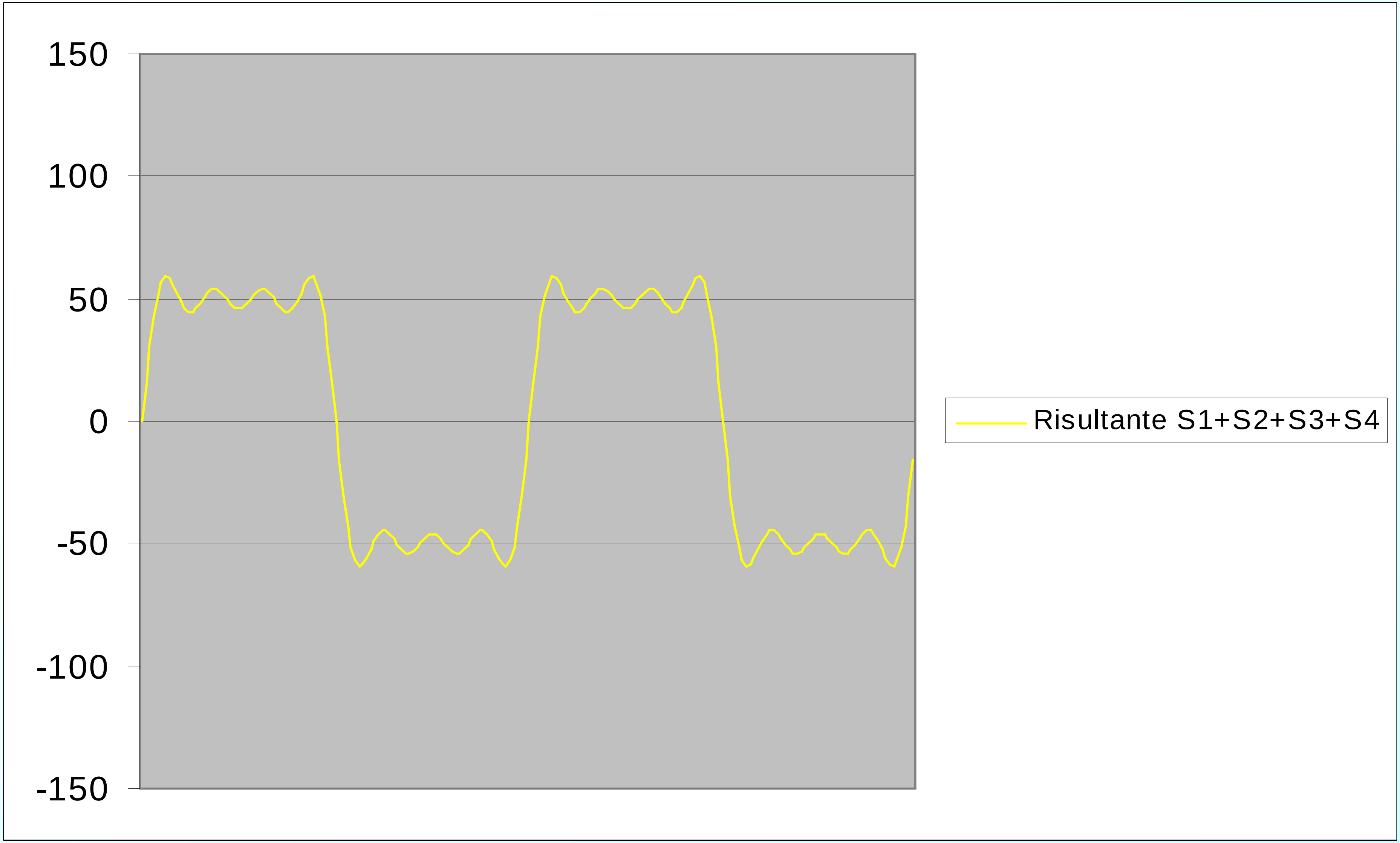
$$A^2{}_k\ sin^2\ \varphi_k + A^2{}_k cos^2\ \varphi_k = a^2{}_k + b^2{}_k$$

$$A^2{}_k\ (sin^2\ \varphi_k + cos^2\ \varphi_k) = A^2{}_k\ (1)$$

da cui:

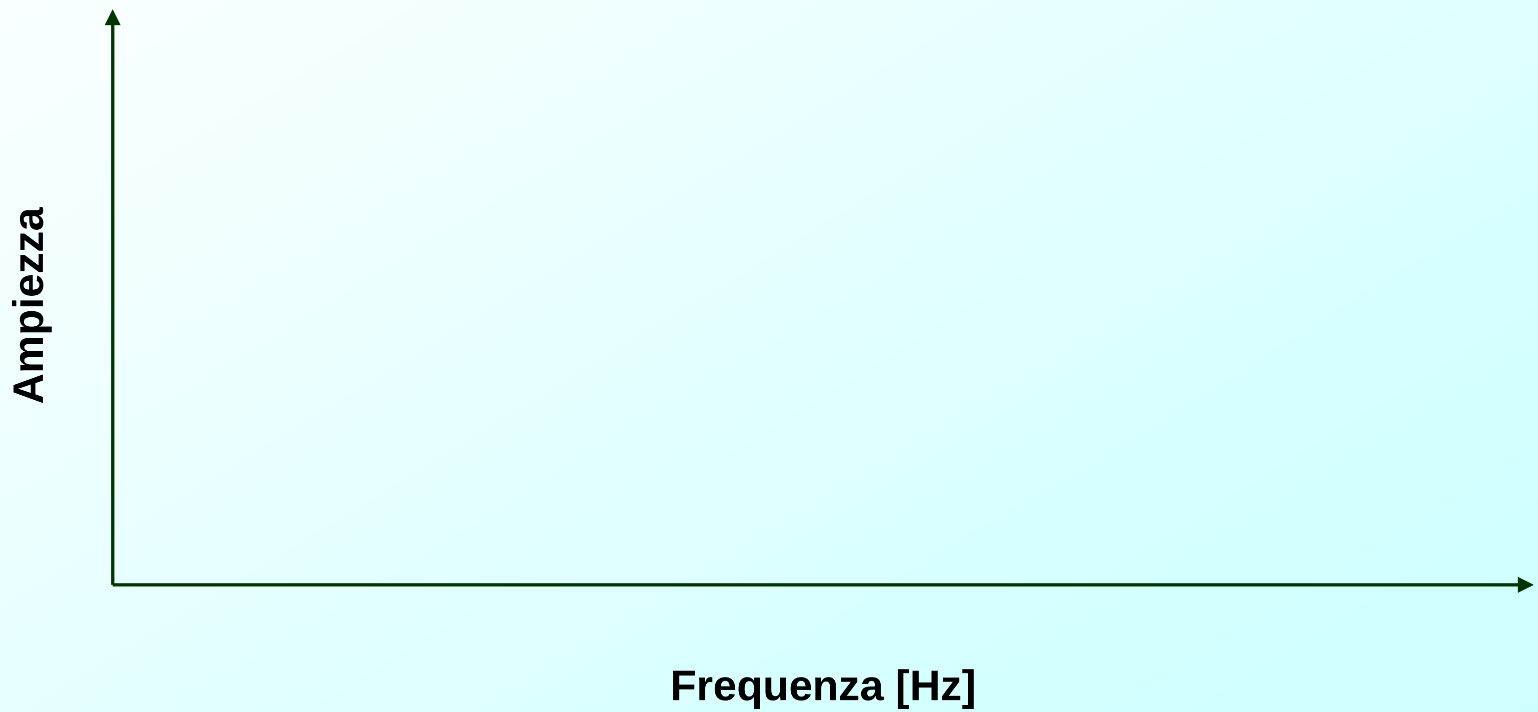
$$A_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}$$

Sintesi di forme d'onda – es. con onda quadra

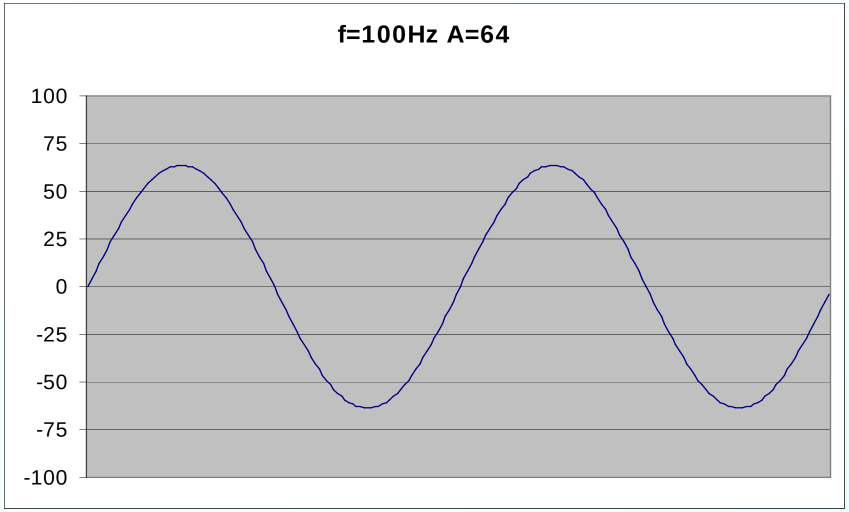


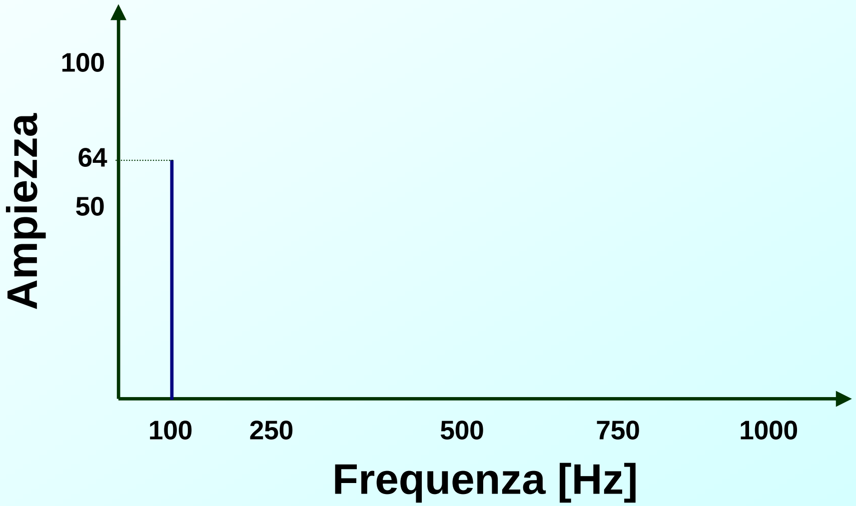
Analisi di forme d’onda – lo spettro

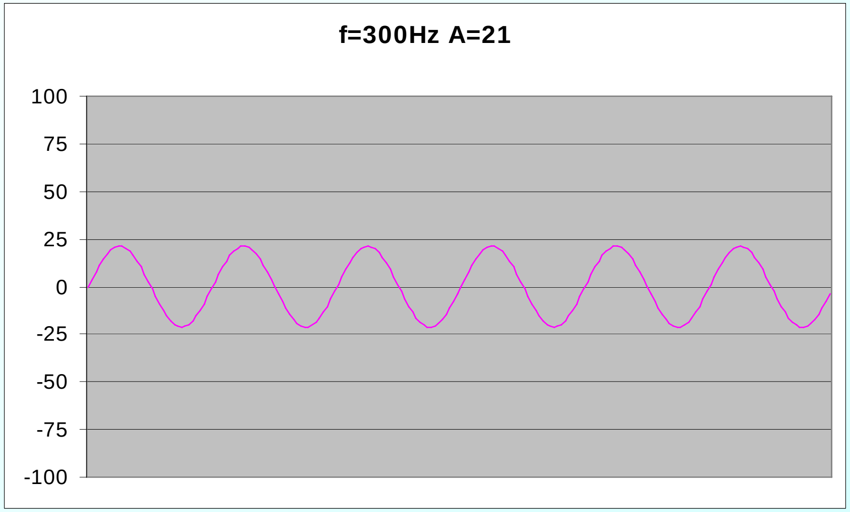
Le componenti sinusoidali di un’onda possono essere rappresentate in un grafico, ciascuna come una barra di altezza pari ***all’ampiezza*** del sinusoide corrispondente e ascissa pari alla sua ***frequenza***.

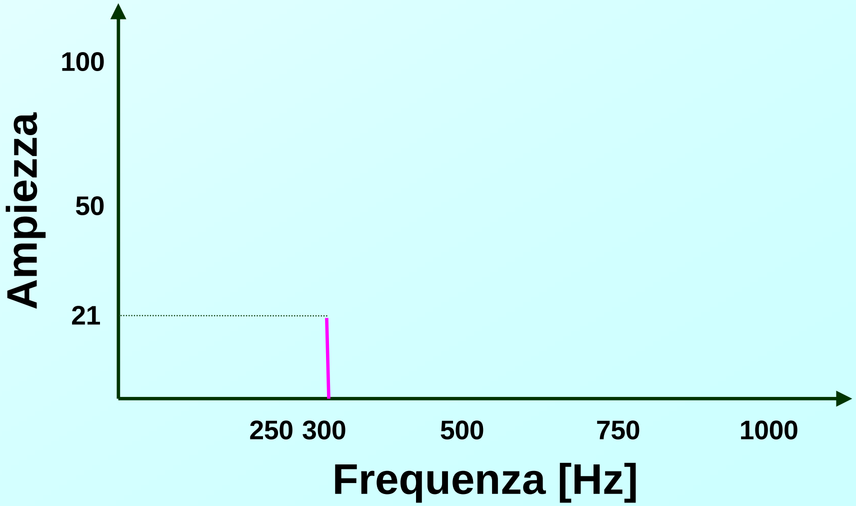


Spettri di onde sinusoidali



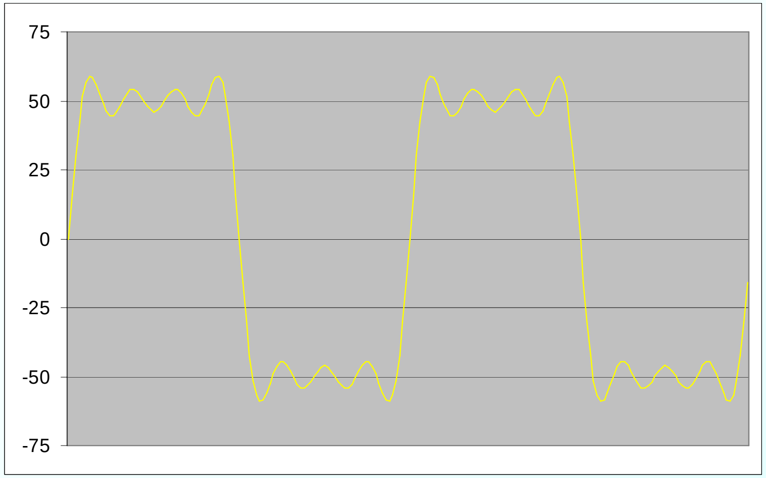




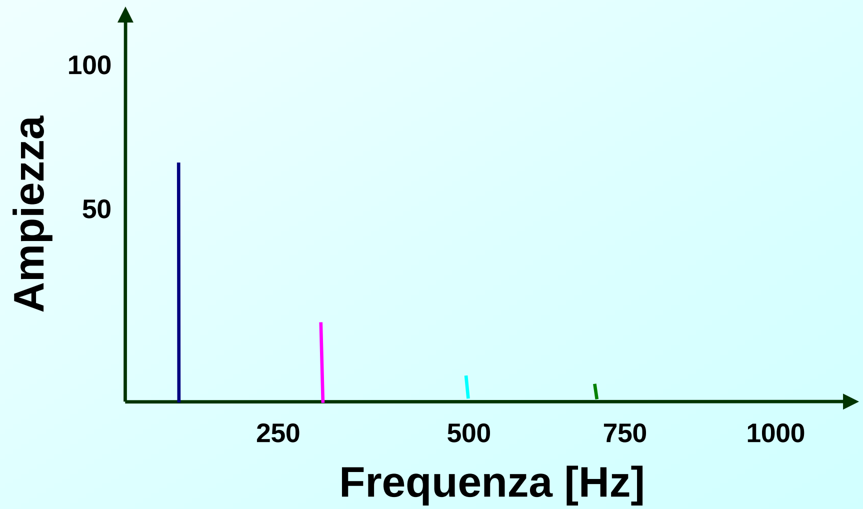


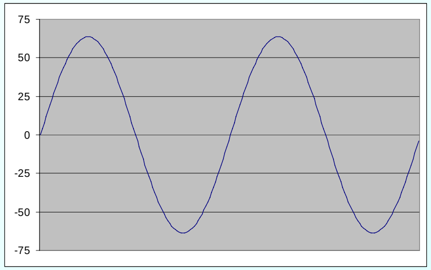
Analisi di forme d'onda – lo spettro

Forme d'onda complesse: lo spettro è la somma degli spettri dei sinusoidi che compongono l'onda. Il segnale è una somma di sinusoidi di frequenza multiple intere della frequenza del segnale (f_0).



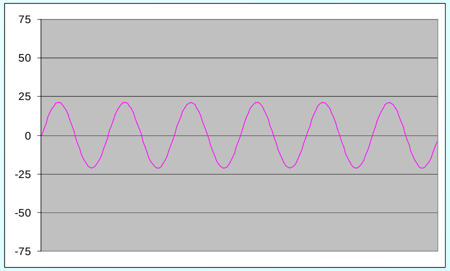
f = 100 Hz





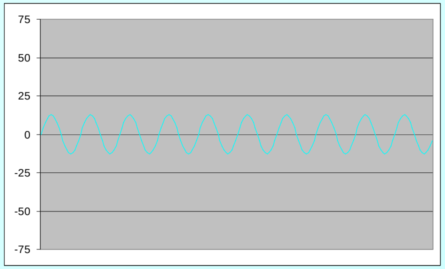
f=100Hz A=64

+



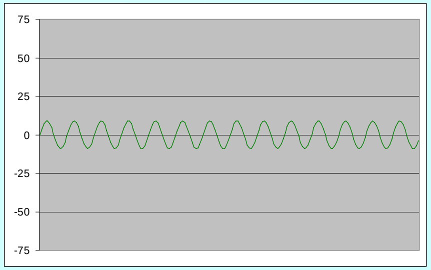
f=300Hz A=21

+



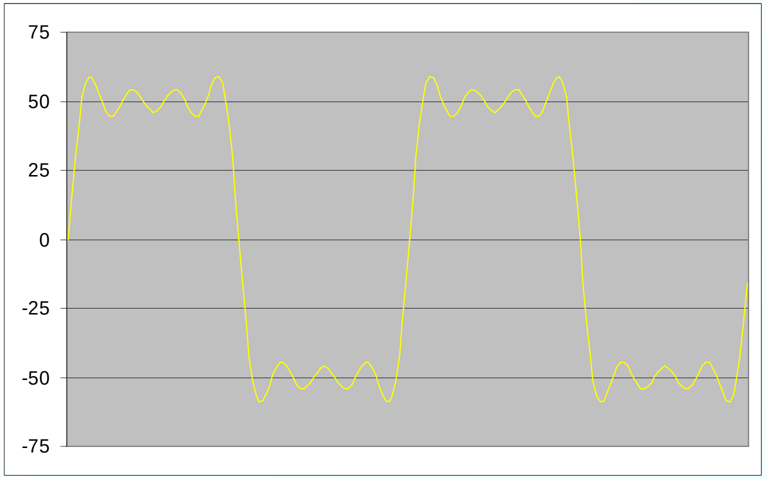
f=500Hz A=6

+

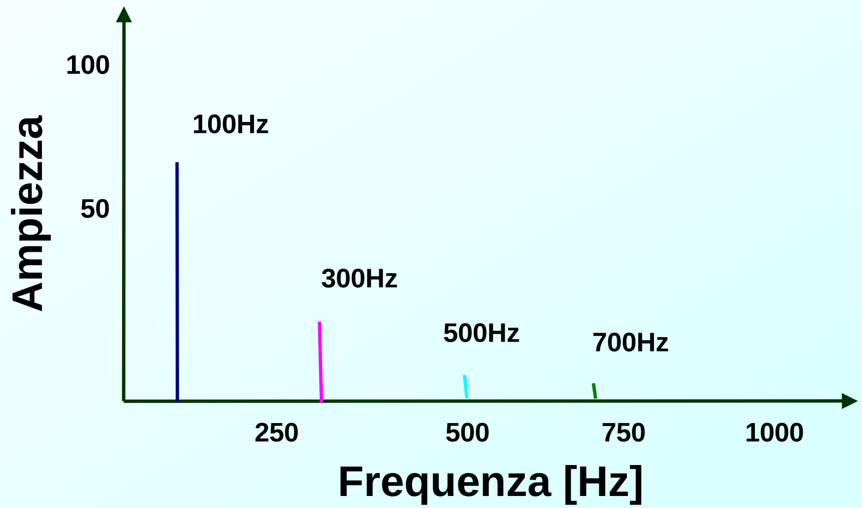


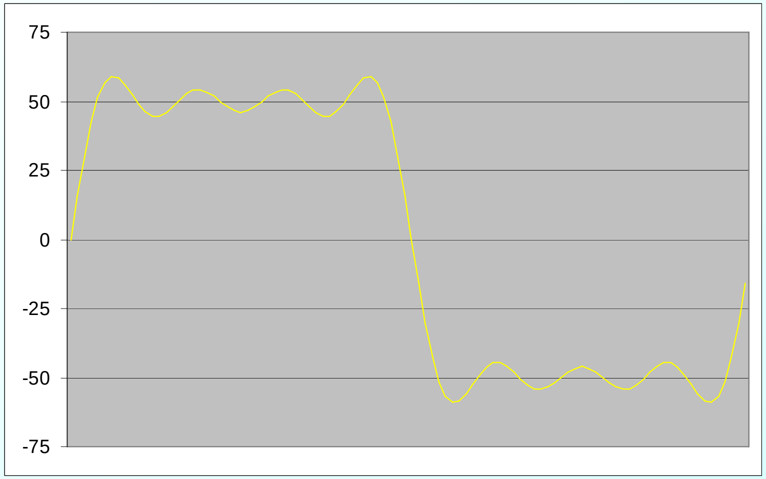
f=700Hz A=4

Analisi di forme d'onda – lo spettro

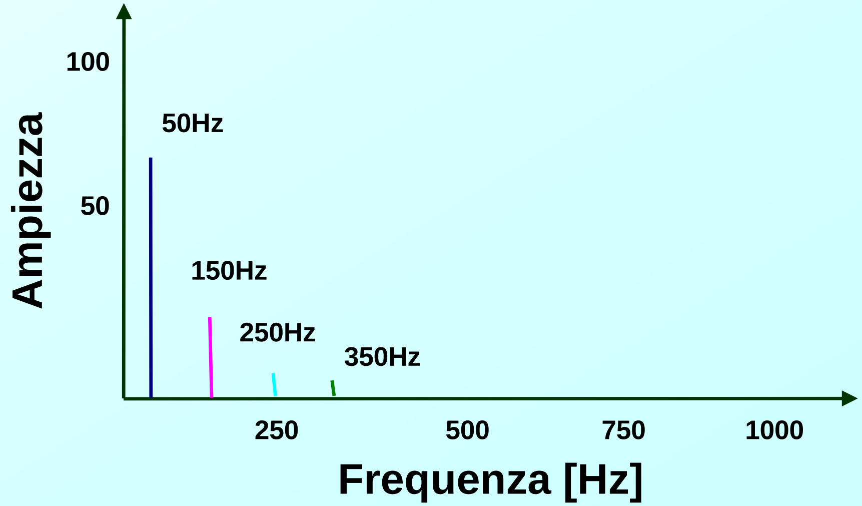


f=100Hz



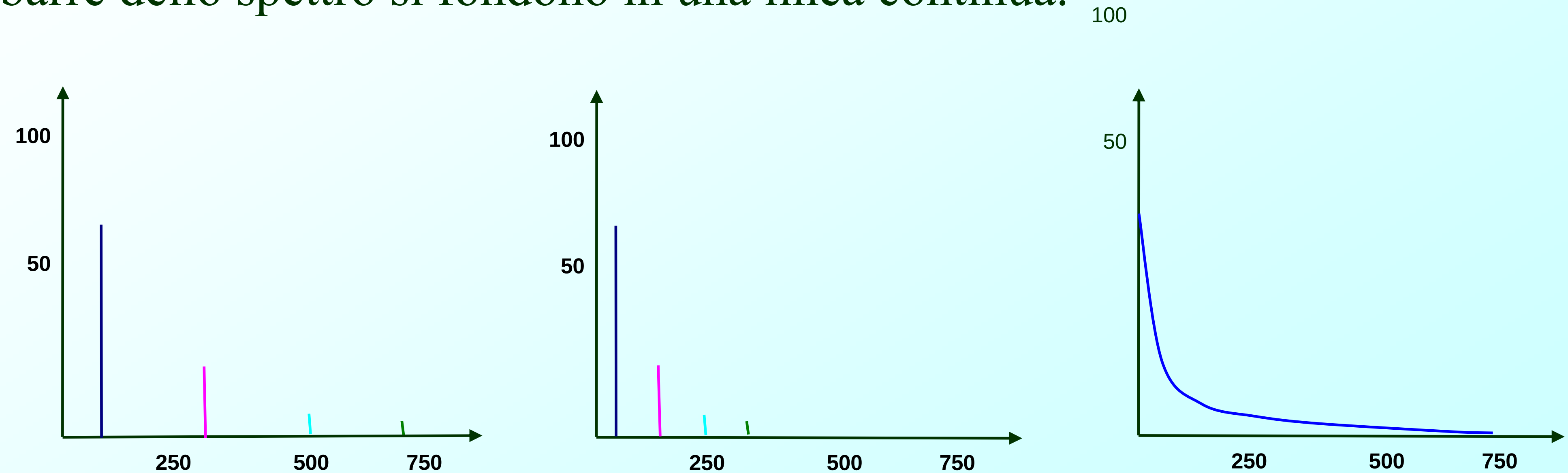


f=50Hz



Aumentando la lunghezza d'onda di un segnale (il suo periodo), quindi diminuendo la sua frequenza, le barre dello spettro tendono a spostarsi verso l'origine degli assi ed ad avvicinarsi le une alle altre.

Intuitivamente, possiamo immaginare che se la lunghezza d'onda diventa infinita (ossia il segnale si ripete in un periodo infinito: è **non-periodico**), le barre dello spettro si fondono in una linea continua.

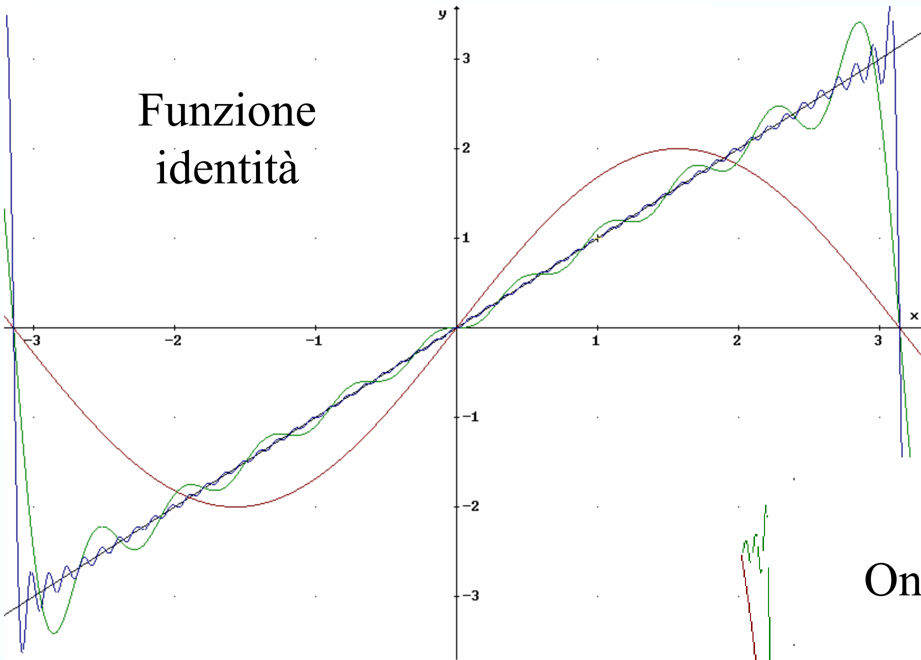


f=100Hz λ=0.01s

f=50Hz λ=0.02s

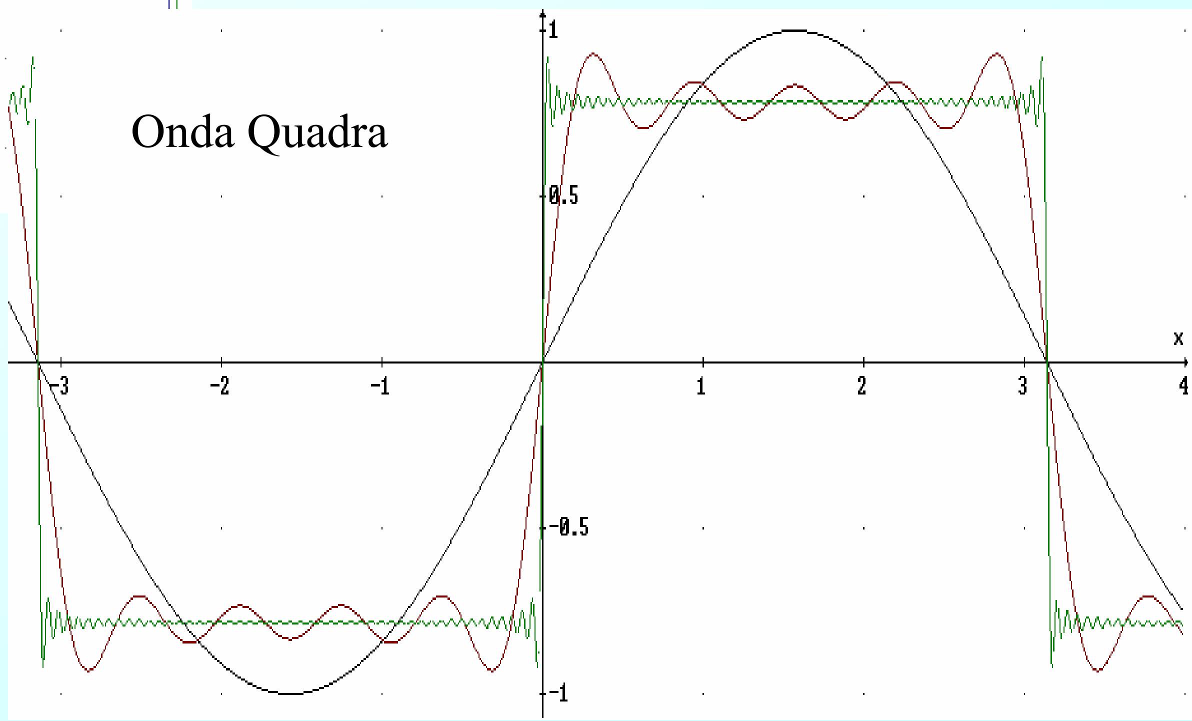
segnale aperiodico

Esempi



http://www.falstad.com/fourier/j2/

http://www.falstad.com/dfilter/



Serie di Fourier: Calcolo dei Coefficienti

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\, dx \; per\; k = 1,2,3,....$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\, dx \; per\; k = 1,2,3,....$$

Armoniche e Suoni

La forma d'onda di un suono/tono **non puro** dipende dalle sue "armoniche".

Le armoniche di un suono **puro** (ovvero di una segnale sinusoidale ad una certa frequenza che chiameremo **fondamentale**) sono i suoni (segnali) di frequenza multipla di quella fondamentale. Consideriamo ora un "**Do**" e verifichiamo a cosa corrispondono le sue armoniche principali.

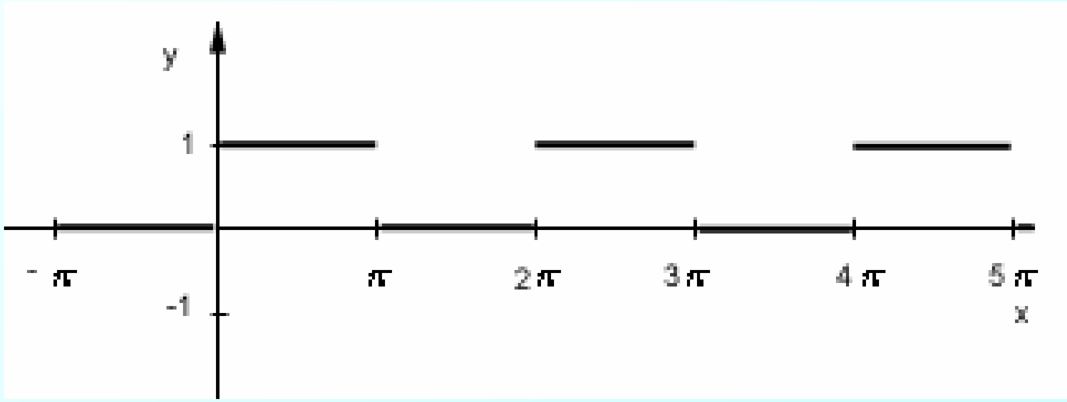
Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
261.6 523.2 1046.4	294	329.6 659.2 1318.4	349	392 784 1568	440	494

- seconda armonica 261.6*2 = 523.2 **Do** dell'ottava successiva
- terza armonica 261.6*3 = 784.8 **Sol** dell'ottava successiva
- quarta armonica 261.6*4 = 1046.4 **Do** di due ottave sopra
- quinta armonica 261.6*5 = 1318 **Mi** di due ottave sopra

Queste tre note "suonano bene assieme" e formano l'accordo di **Do-maggiore**.

Esercizio : Trovare i coefficienti a_0, a_k, b_k per la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } (2k-1)\pi \le x < 2k\pi \\ 1 & \text{se } 2k\pi \le x < (2k+1)\pi \end{cases}$$



Homeworks: Esprimere mediante la serie di Fourier le seguenti funzioni elementari:

$y=f(x)=\cos x$ (Utilizzare le formule di Werner)

$y=f(x)=x$

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$

$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \frac{i}{i}\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = -i\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}$$

Utilizzando le formule di **Eulero** (di cui sopra) nella serie di Fourier, otteniamo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} - ib_k\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k e^{ikx}}{2} + \frac{a_k e^{-ikx}}{2} - \frac{ib_k e^{ikx}}{2} + \frac{ib_k e^{-ikx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ikx}\right)$$

Serie di Fourier: Forma Esponenziale

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right)$$

ponendo :

$$\frac{a_0}{2} = c_{0,} \qquad \frac{a_k - ib_k}{2} = c_k, \qquad \frac{a_k + ib_k}{2} = c_{-k}$$

otteniamo :

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

La Trasformata di Fourier (1)

Benchè altre trasformate siano oggi di uso frequente in molte applicazioni (restauro, codifica, descrizione di caratteristiche), la trasformata di ***Fourier*** mantiene un ruolo cardine nell'***image processing***. La trasformata di Fourier di una ***funzione continua f(x) di variabile reale x sotto opportune ipotesi di continuità***, è definita come:

$$\Im\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

Ricordando che $$e^{-i2\pi ux} = \cos 2\pi ux - i \sin 2\pi ux$$

la $F(u)$ è composta dalla somma di *infiniti* termini sinusoidali e cosinusoidali, e ogni valore di u determina la frequenza della coppia seno-coseno corrispondente.

La Trasformata di Fourier (2)

- Data la $F(u)$ è possibile risalire a $f(x)$ tramite **l'antitrasformata** definita dalla seguente formula:

$$\Im^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{i2\pi ux}dx$$

- La trasformata e la antitrasformata esistono se *f(x)* è continua e integrabile e se *F(u)* è integrabile. Se *f(x)* è reale, *F(u)* è in generale complessa.

- In pratica la trasformata di Fourier riorganizza i dati in un altro spazio: lo spazio delle **frequenze**

Grandezze fondamentali

- Essendo una funzione complessa la $F(u)$ può essere scritta come

$$F(u) = R(u) + iI(u) = |F(u)|e^{i\phi(u)}$$

$$dove:$$

$$|F(u)| = \sqrt{[R^2(u) + I^2(u)]} \qquad \textit{Spettro della Trasformata}$$

$$\phi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \qquad \textit{Angolo di fase}$$

$$P(u) = |F(u)|^2 \qquad \textit{Potenza (o Densità) Spettrale}$$

Estensione al 2-D

- E' immediata l'estensione al caso bidimensionale. Le condizioni di esistenza sono la continuità e l'integrabilità della $f(x,y)$ e l'integrabilità della $F(u,v)$. u e v sono le variabili frequenze, definite nel *piano delle frequenze.*

$$\Im\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$$

$$\Im^{-1}\{F(u,v)\} = f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv$$

Estensione al 2-D

Spettro della Trasformata $$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

Angolo di Fase $$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

Potenza Spettrale $$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

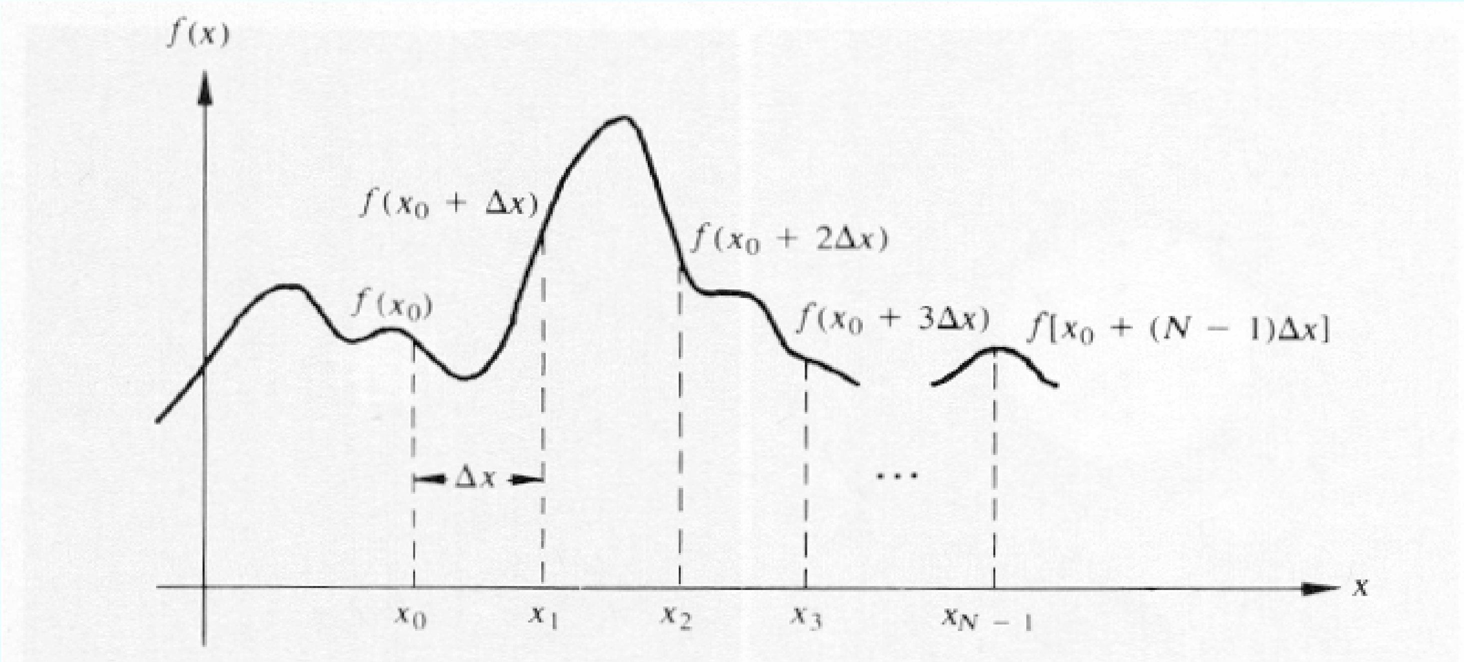
Discrete Fourier Transform

Una funzione continua $f(x)$ è discretizzata in una sequenza

$$\{f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x),..., f(x_0+[N-1]\Delta x)\}$$

considerando N campioni distanti Δx. Pertanto la funzione di variabile discreta x si può scrivere come

$$f(x) = f(x_0 + x\Delta x) \qquad x = 0,1,..., N-1$$



Discrete Fourier Transform

In altri termini nel caso discreto 1-D la $f(x)$ diventa una sequenza di campioni uniformemente distanziati di Δx: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, …, $f(N-1)$.

Con questa notazione, la coppia di trasformate discrete nel caso 1-D è la seguente:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{\frac{-i2\pi ux}{N}} \quad per\ u = 0,1,\ldots, N-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{\frac{i2\pi ux}{N}} \text{ per } x = 0,1,\ldots, N-1$$

Anche la frequenza u è una variabile discreta. In analogia a quanto visto per la $f(x)$, i valori $u = 0, 1, \ldots, N-1$ nella DFT corrispondono ai campioni della trasformata continua per $0, \Delta u, 2\Delta u, \ldots, (N-1)\Delta u$

Quindi $F(u)$ rappresenta $F(u\Delta u)$, così come $f(x)$ rappresenta $f(x_0+x\Delta x)$. La differenza è che il campionamento di $F(u)$ comincia nell'origine dell'asse frequenza.

Discrete Fourier Transform

La relazione tra Δu e Δx è la seguente:

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$$

Nel caso 2-D la coppia trasformata antitrasformata della sequenza bidimensionale *f*(*x*,*y*) assume la seguente forma:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \quad per\ u = 0,1,\ldots,M-1\ v = 0,1,\ldots,N-1$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{i2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \quad per\ x = 0,1,\ldots,M-1 \ \ y = 0,1,\ldots N-1$$

u e *v* sono gli indici relativi agli assi frequenze discretizzati, mentre *M* e *N* sono le dimensioni (in pixel) dell'immagine. Il campionamento della *f*(*x*,*y*) ha luogo nei punti di una griglia bidimensionale, con passi Δ*x* e Δ*y*. Per la *F*(*u*,*v*) valgono considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso monodimensionale.

- In particolare il campionamento della $f(x,y)$ viene eseguito su una griglia 2-D (con opportuni Δx, Δy).

- La funzione discreta $f(x,y)$ rappresenta campioni della funzione $f(x_0+x\Delta x, y_0+y\Delta y)$ per $x = 0, 1, 2, \ldots, M\text{-}1$ e $y=0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1$.
- Le relazioni tra Δx e Δu e tra Δy e Δv sono le seguenti:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}, \qquad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

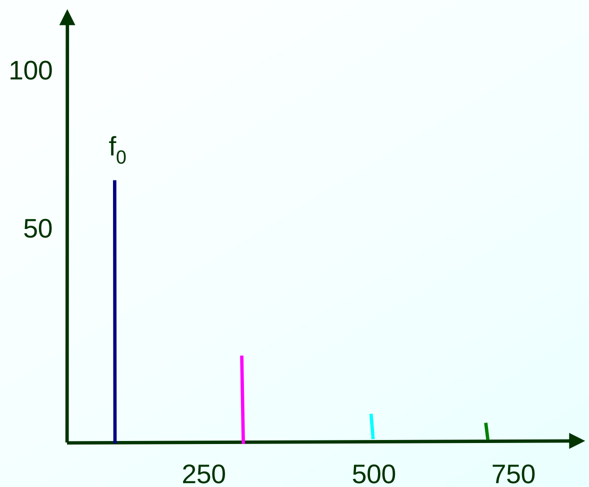
- Infine quando le immagini sono campionate su una griglia quadrata ($M=N$, $\Delta x=\Delta y$) otteniamo:

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-i2\pi(\frac{ux+vy}{N})} \quad per\ u,v=0,1,\ldots,N-1$$

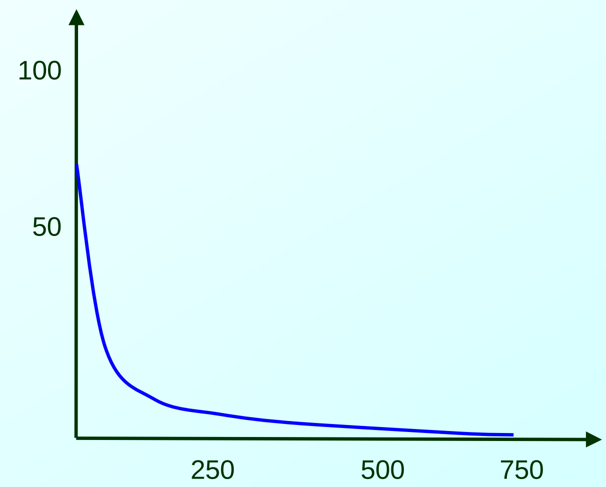
$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{i2\pi(\frac{ux+vy}{N})} \quad per\ x,y=0,1,\ldots,N-1$$

Riassumendo:

segnale periodico di frequenza f_0



segnale non periodico



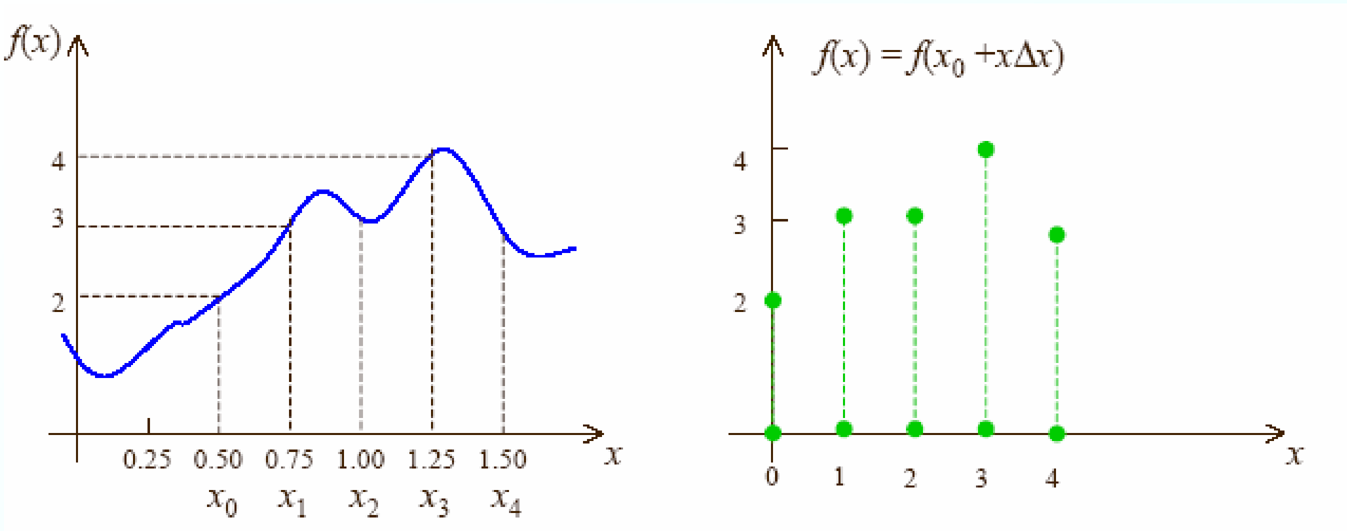
Il segnale è una somma di sinusoidi di frequenza multiple intere della frequenza del segnale (f_0).

Lo spettro è formato da bande equidistanti.

Il segnale è una somma di sinusoidi di tutte le frequenze.

Lo spettro è formato da una linea continua.

Esempio 1-D



La $f(x)$ viene campionata a partire da $x_0 = 0.5$, con $\Delta x = 0.25$, ottenendo i cinque campioni mostrati. Applicando la $F(u)$:

$$F(0) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp[0] = \frac{1}{5}[f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)]$$

$$= \frac{1}{5}[2 + 3 + 3 + 4 + 2.8] = 2.96$$

$$F(1) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp\left[-j2\pi\, {}^{x}\!/_{5}\right] = \frac{1}{5}\left[2\exp[0] + 3\exp\left[-{}^{j2\pi}\!/_{5}\right]\right.$$

$$\left. + 3\exp\left[-{}^{j4\pi}\!/_{5}\right] + 4\exp\left[-{}^{j6\pi}\!/_{5}\right] + 2.8\exp\left[-{}^{j8\pi}\!/_{5}\right]\right]$$

Esempio 1-D

$$F(1) = \frac{1}{5}\Big[2 + 3\exp\left[-\,{}^{j2\pi}\!/_{5}\right]$$

$$+ 3\exp\left[-\,{}^{j4\pi}\!/_{5}\right] + 4\exp\left[-\,{}^{j6\pi}\!/_{5}\right] + 2.8\exp\left[-\,{}^{j8\pi}\!/_{5}\right]\Big] =$$

$$= -0.3742 + j0.0795$$

$$F(2) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp\left[-j4\pi\,{}^{x}\!/_{5}\right] = \cdots$$

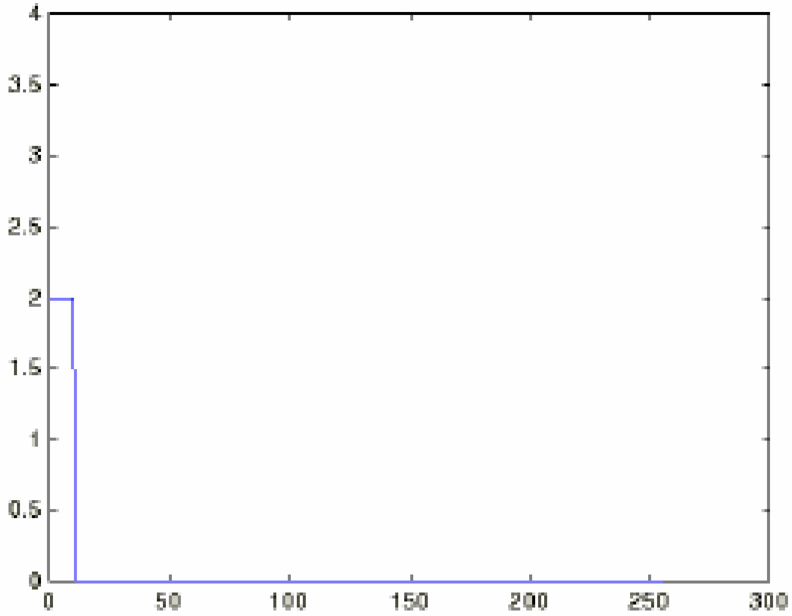
$$F(3) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp\left[-j6\pi\,{}^{x}\!/_{5}\right] = \cdots$$

$$F(4) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp\left[-j8\pi\,{}^{x}\!/_{5}\right] = \cdots$$

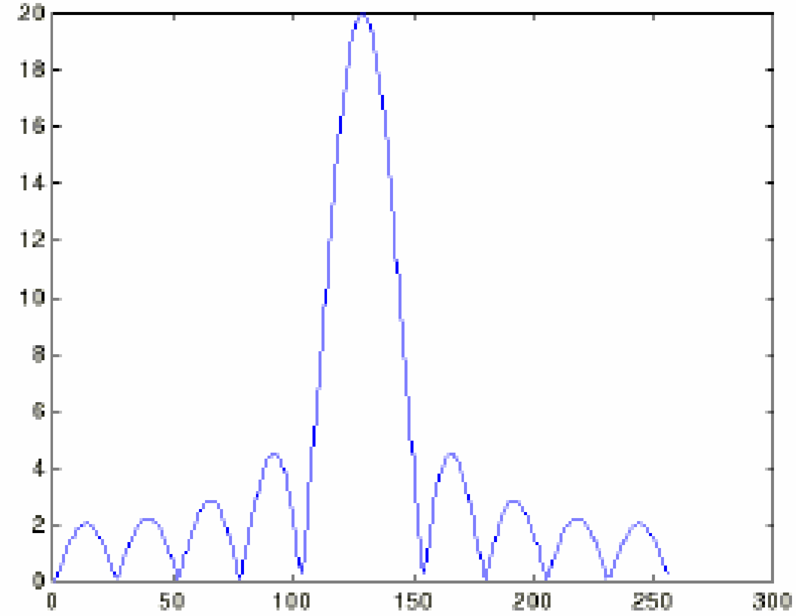
Tutti i valori della $f(x)$ contribuiscono alla costruzione di ciascuno dei campioni della $F(u)$. Analogamente, tutti i campioni della trasformata contribuiscono, durante la antitrasformazione, a ciascuno dei valori della $f(x)$. I campioni della $F(u)$ sono in genere complessi, per cui ciascuno di essi ha un modulo e una fase.

$$|F(0)| = 2.96 \qquad |F(1)| = \sqrt{0.3742^2 + 0.0795^2} = 0.3825 \qquad ecc.$$

Un esempio di trasformata discreta nel caso 1-D: un ***impulso*** approssimato da un rettangolo di lato 10 e altezza 2, su una finestra complessiva di 256 valori di x:



$f(x),\ x = 0, \ldots, 255$

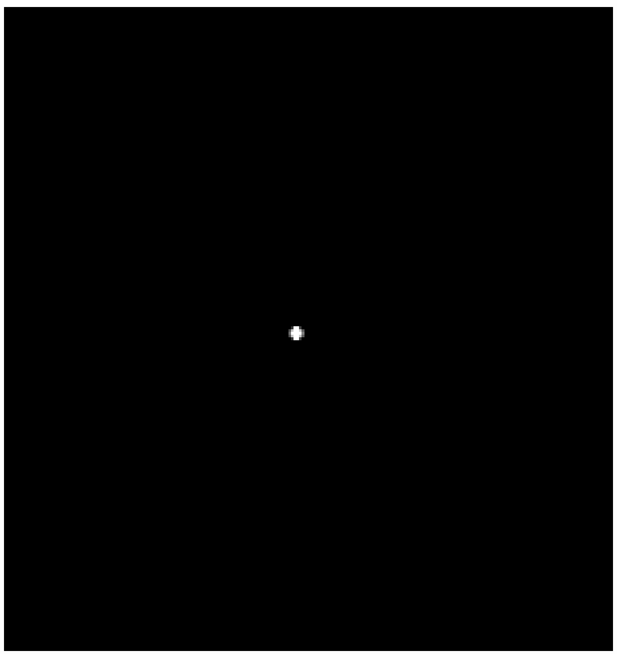


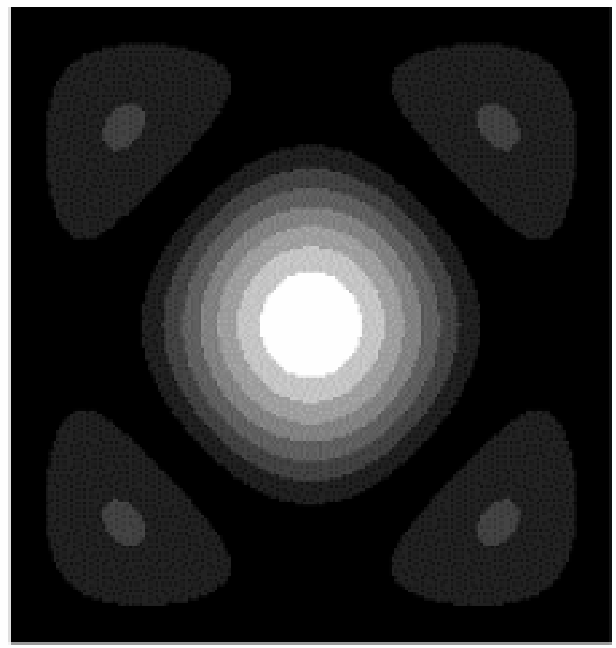
$|F(u)|,\ x = 0, \ldots, 255$

Esempi

Un esempio di trasformata discreta nel caso 2-D: un **impulso** approssimato da un piccolo cerchio bianco su fondo nero, in un’immagine di circa 200 x 200 pixels. I differenti livelli di grigio nell’immagine di intensità dello *spettro* evidenziano le ampiezze decrescenti dei diversi lobi.

$f(x,y)$





$|F(u,v)|$

Range dinamico

Quando si visualizza lo spettro di Fourier come immagine di intensità, esso manifesta in genere una dinamica molto più grande di quella riproducibile su un tipico display, per cui solo le parti più luminose dello spettro risultano visibili.

Per esempio, lo spettro dell'immagine di ***Lena*** varia tra 0 (circa) e 6.47×10^6. Effettuando la normalizzazione necessaria per visualizzarlo con L=256 livelli di grigio, solo pochissime parti molto luminose sono visibili.

A ciò si può ovviare, come è noto, mediante una *compressione* di tipo logaritmico, visualizzando, invece che lo spettro, una funzione del tipo:

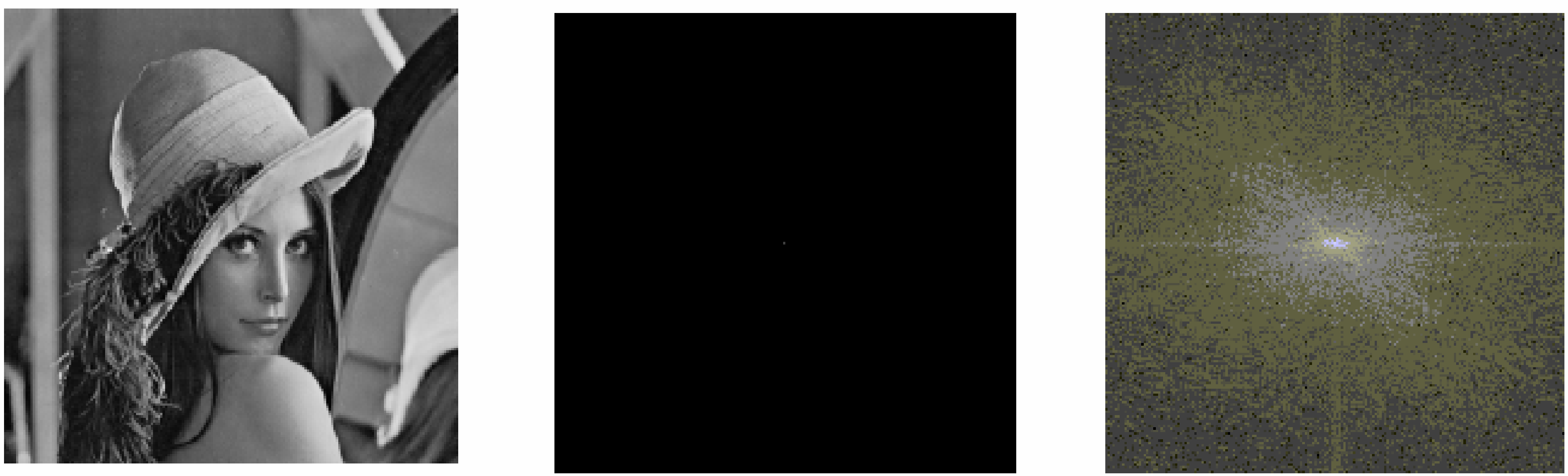
$$D(u,v)=c \log(1+ F(u,v))$$

c è una costante di scala, che va scelta opportunamente per far ricadere i valori trasformati nel range voluto, cioè in $[0, L\text{-}1]$

Range dinamico

Poiché $0 < |F(u,v)| < R = 6.47 \times 10^6$, si ha $0 < D(u,v) < c\log(1+R)$. Dato che $R >> 1$, come peraltro avviene normalmente per lo spettro di Fourier di una immagine, si può porre $c \log R = L-1$, da cui $c = (L-1)/\log R = 255/\log(6.47 \times 10^6) = 16.26$

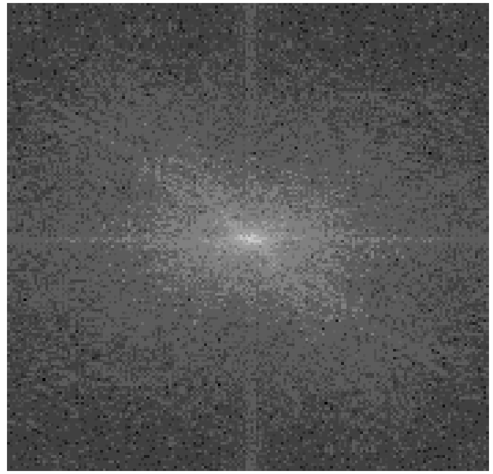
Pertanto $D(u,v)$ ha tutti i valori nell'intervallo [0, 255], e ciò consente la visualizzazione di molti più dettagli.



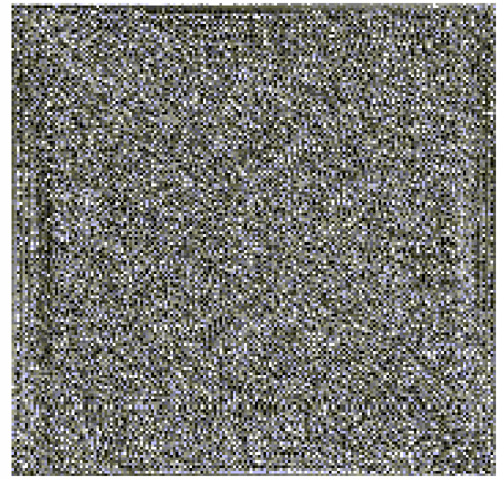
$f(x,y)$ $|F(u,v)|$ $D(u,v)$

Esempi

$f(x,y)$



$|F(u,v)|$



$\Phi\,(u,v)$

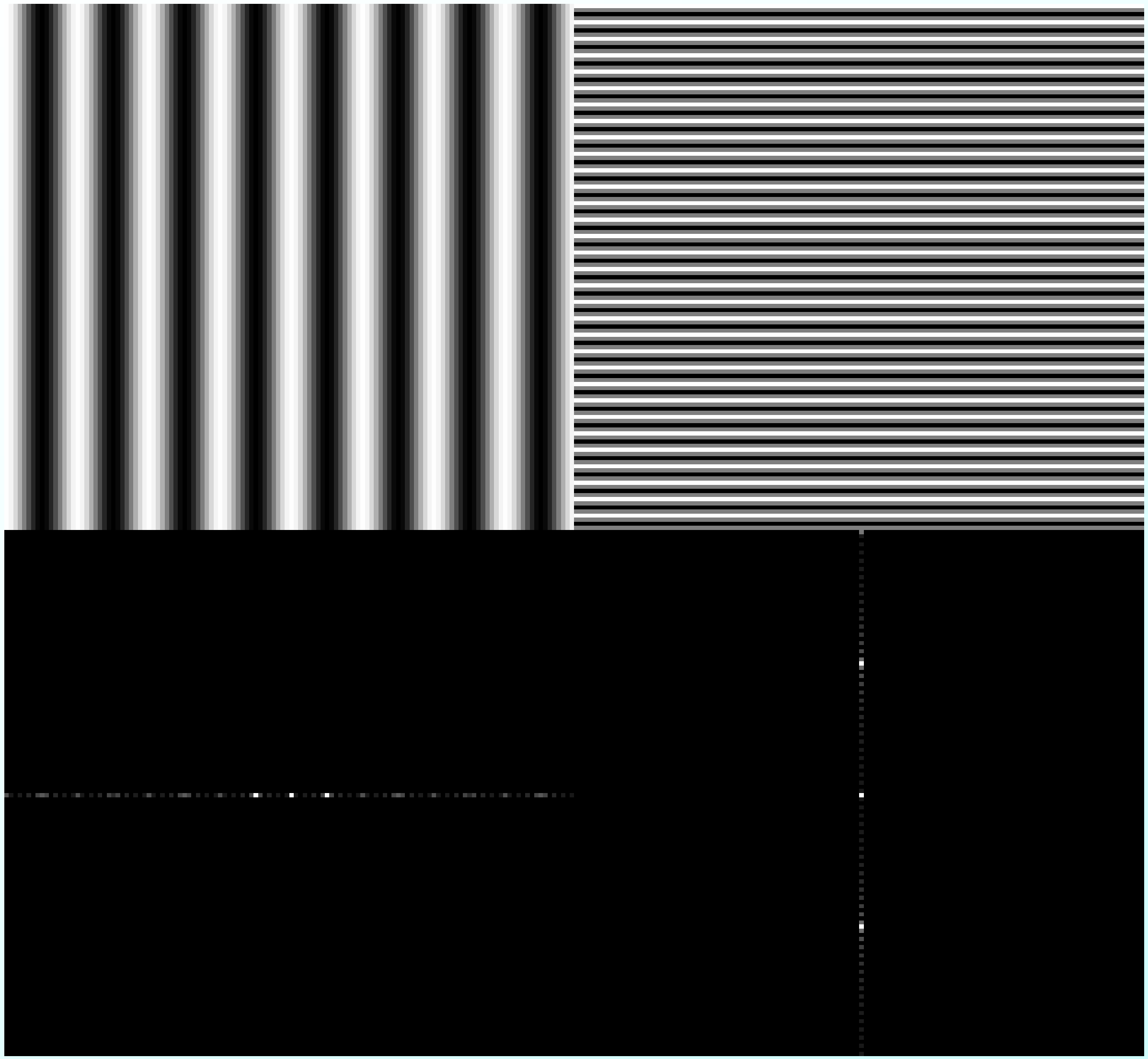
Un esempio di trasformata di immagine reale (256x256 pixel, 256 livelli). L'informazione associata alla fase è in realtà molto più importante di quanto non appaia da questo esempio. Nello spazio di Fourier è come se l'immagine fosse osservata da un differente punto di vista: ogni punto nel dominio trasformato contiene due pezzi di informazione, uno relativo alla ampiezza e uno relativo alla fase di una struttura periodica. La fase contiene l'informazione essenziale per la struttura dell'immagine, quella cioè relativa al **dove** le strutture periodiche evidenziate nella DFT sono collocate. L'ampiezza, invece, contiene solo l'informazione relativa al fatto che una certa struttura periodica è presente nell'immagine. La visualizzazione dello spettro riguarda in realtà una versione compressa logaritmicamente di $|F(u,v)|$.

Trasformate di Fourier: vantaggi

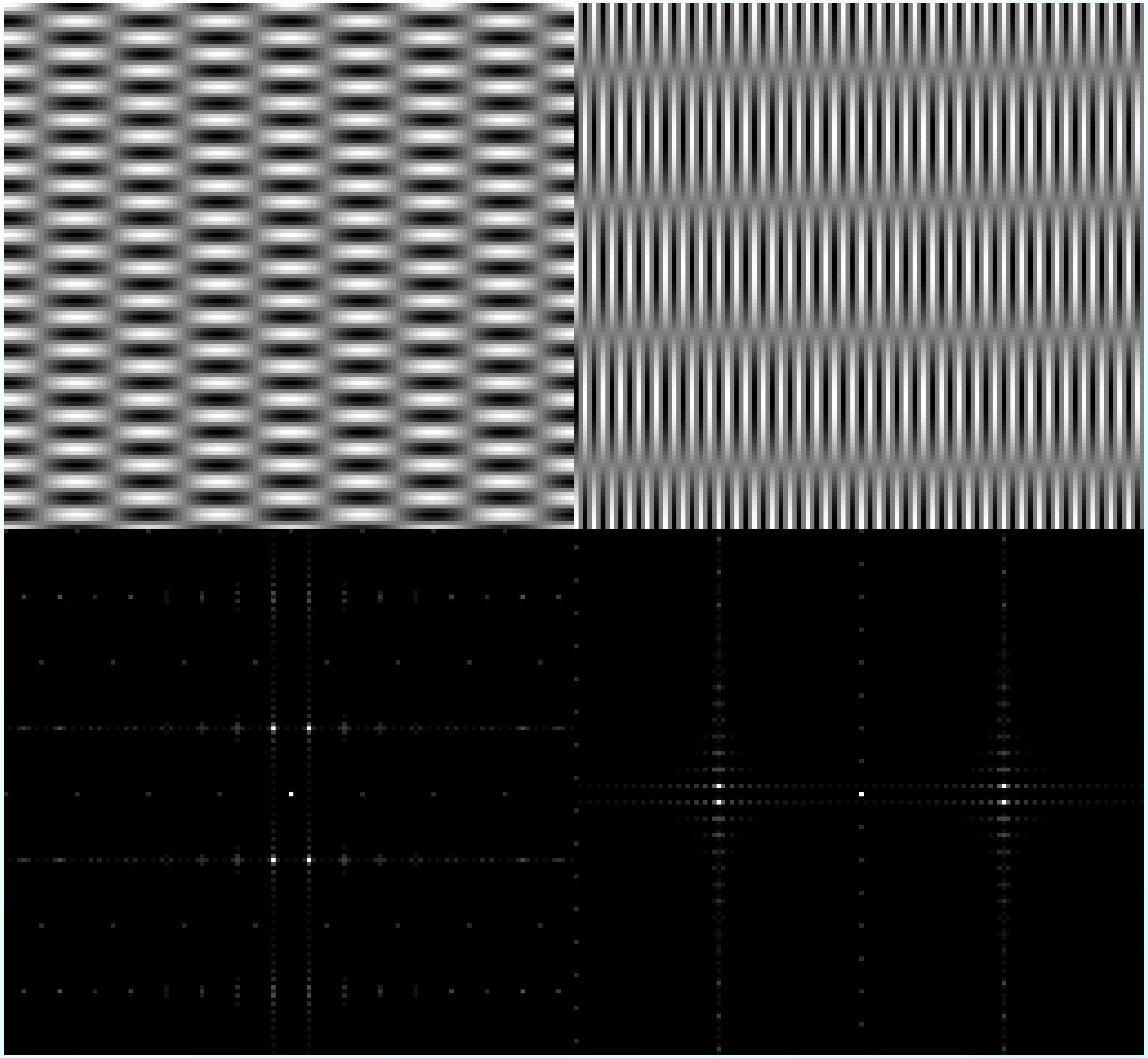
- Che vantaggio si può ottenere dalla trasformata di Fourier?

- Nello spazio delle frequenze è possibile:
  - ✓ sopprimere frequenze indesiderate
  - ✓ ridurre lo spazio occupato dai dati pur limitando la degenerazione del segnale (JPEG, MPEG, DivX, MP3)
  - ✓ rigenerare segnali degradati

Esempi sulle Immagini (1)



Esempi sulle Immagini (2)



Discussioni

La trasformazione diretta può essere vista come un processo di **analisi**: il segnale $f(x)$ viene scomposto nelle sue componenti elementari, che sono nella forma dei **vettori di base**. I coefficienti della trasformata specificano quanto di ogni componente di base è presente nel segnale.

Nella trasformazione inversa, mediante un processo di **sintesi**, il segnale viene ricostruito, come somma pesata delle componenti di base: il peso di ogni vettore di base nella ricostruzione del segnale è rappresentato dal corrispondente coefficiente della trasformata.

Il coefficiente della trasformata è una misura della correlazione tra il segnale ed il corrispondente vettore di base. La trasformazione non comporta perdita di informazione: essa fornisce solo una rappresentazione alternativa del segnale originale.

Trasformate

Oltre a quella di Fourier, diverse trasformate utilizzate nell'image processing, con largo impiego nel restauro e, soprattutto, nella compressione, appartengono alla classe delle trasformate **unitarie**. Fra queste ricordiamo:

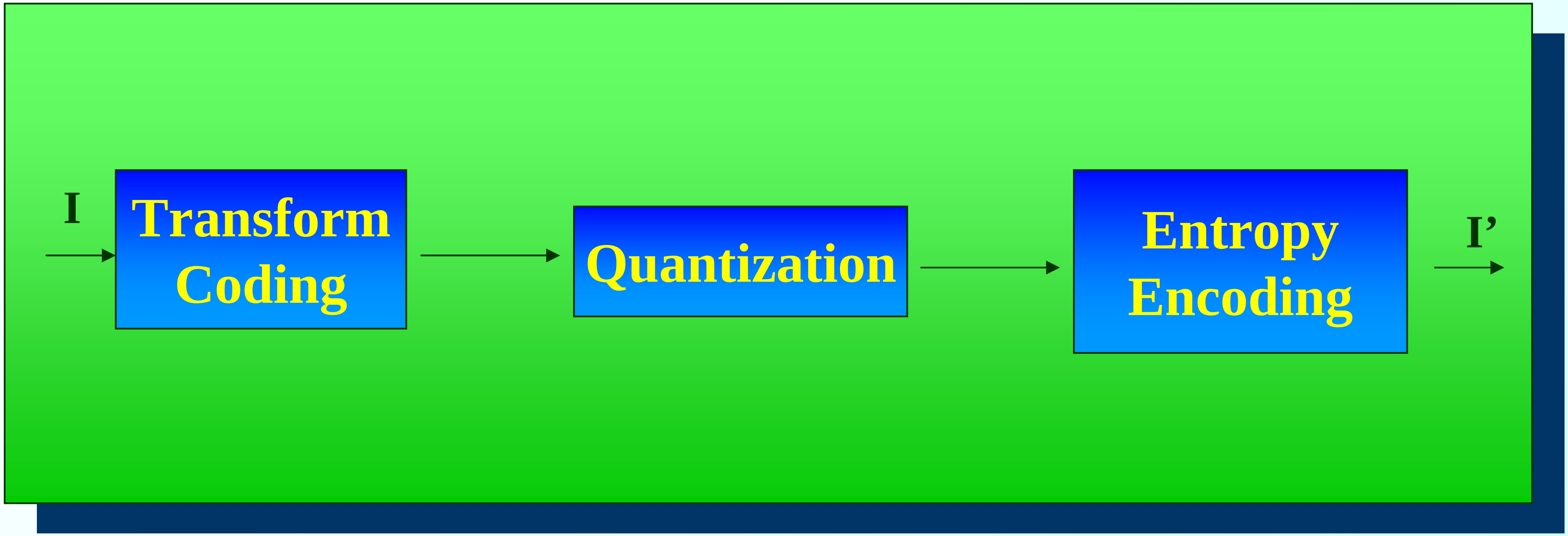
La trasformata discreta di Walsh (DWT)

La trasformata discreta di Hadamard (DHT)

La trasformata discreta del Coseno (DCT)

La trasformata discreta di Karhunen Loeve (KLT)

Un tipico sistema di compressione



- La compressione si realizza principalmente nel processo di quantizzazione.

- La compressione si basa tipicamente su un codficiatore entropico che tipicamente si basa su tecniche di run-length coding combinate con codici di Huffman.

Trasformata DCT

Un esempio di trasformata molto utilizzata in compressione è la DCT (Discrete Cosine Transform)

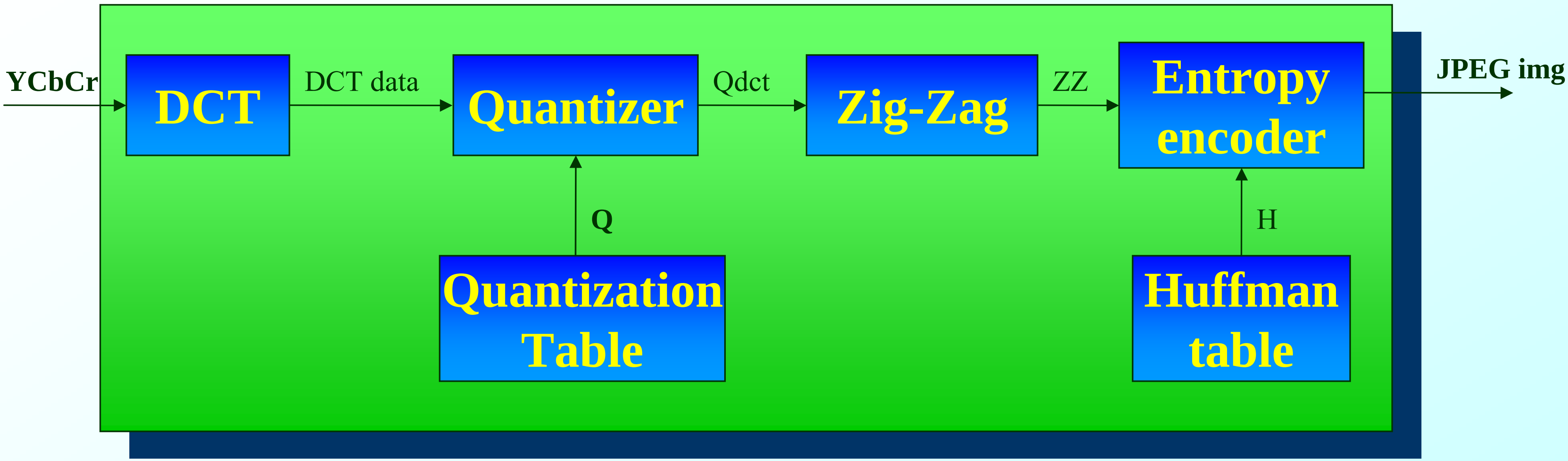
$$F(u,v) = \frac{1}{4} C(u) C(v) \left[\sum_{x=0}^{7} \sum_{y=0}^{7} f(x,y) \cos\frac{(2x+1)u\pi}{16} \cos\frac{(2y+1)v\pi}{16} \right]$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4} \left[\sum_{u=0}^{7} \sum_{v=0}^{7} C(u) C(v) F(u,v) \cos\frac{(2x+1)u\pi}{16} \cos\frac{(2y+1)v\pi}{16} \right]$$

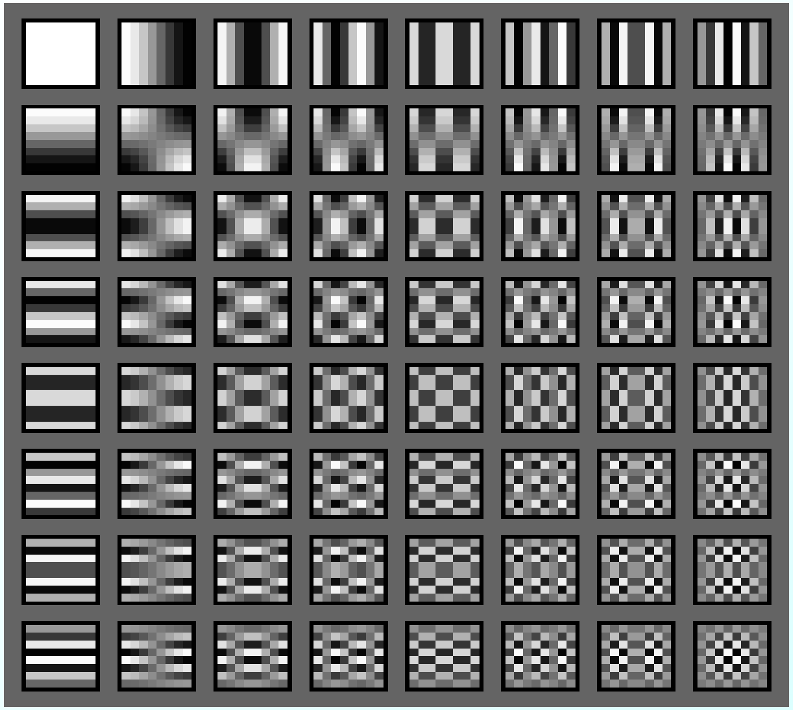
$$dove:$$

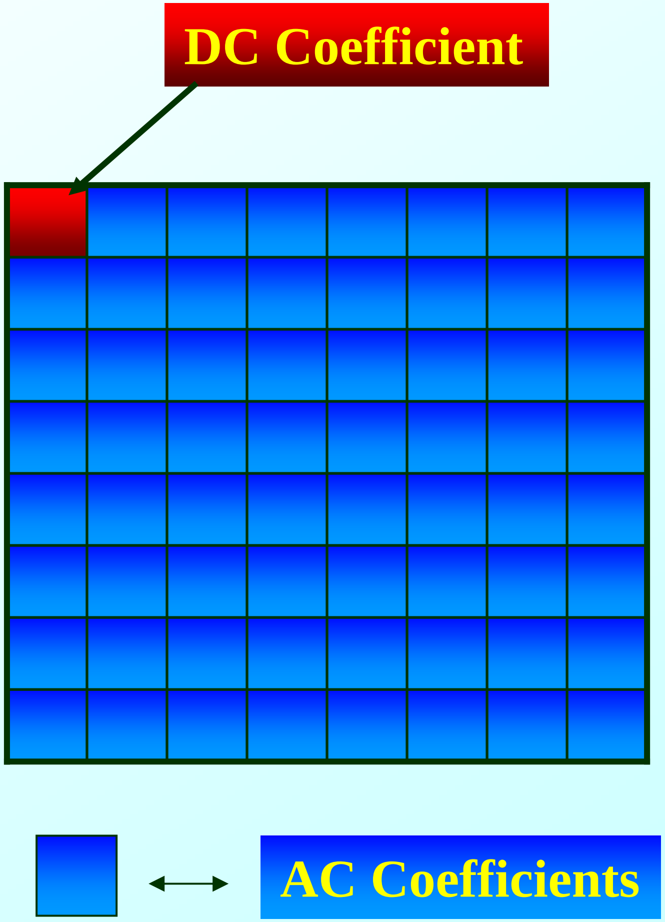
$$C(u), C(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad per\, u, v = 0;$$

$$C(u), C(v) = 1 \quad altrimenti$$

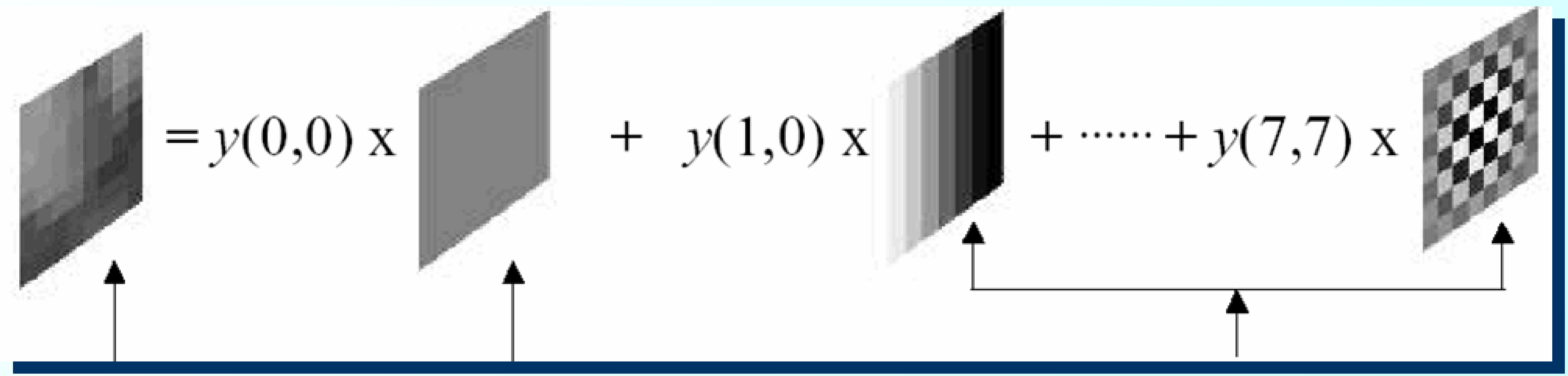

YCbCr
DCT
DCT data
Quantizer
Qdct
Zig-Zag
ZZ
Entropy encoder
JPEG img
Q
Quantization Table
H
Huffman table

Le 64 (8 x 8) funzioni di base della DCT



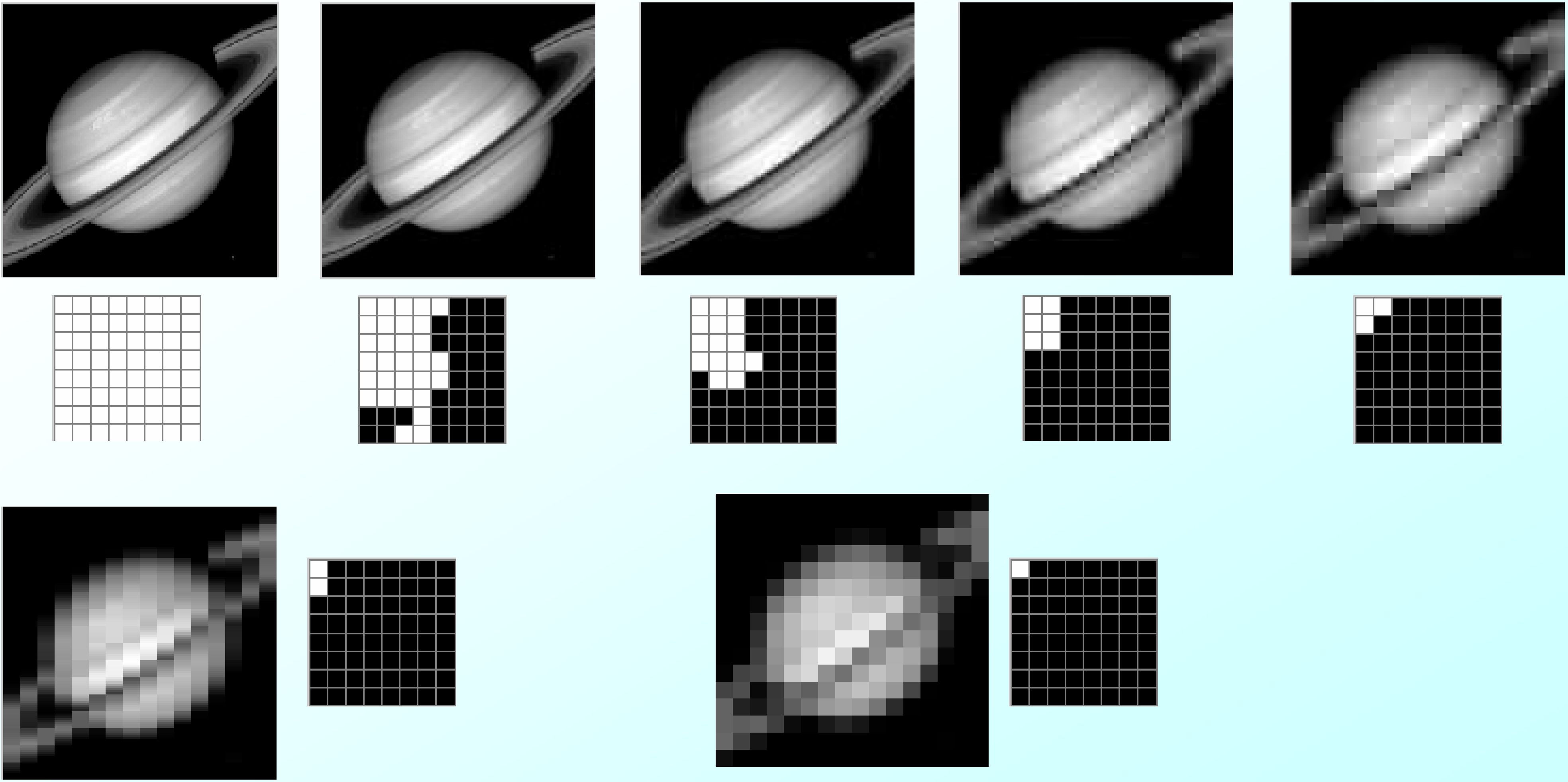


I coefficienti DCT possono essere visti come dei “pesi” associati a opportune funzioni periodiche che formano una base nello spazio delle frequenze e permettono di ricostruire così il segnale spaziale, lavorando su blocchi 8x8:



Original image block **DC** (flat) basis function **AC** basis functions

DCT example



DCT Quantization

- I coefficienti DCT sono quantizzati ad un numero limitato di livelli.
- La quantizzazione è necessaria per ridurre il numero di bit per campione.

Example:

101000 = 40 (6 bits precision) → Truncates to 4 bits = 1000 = 8 (4 bits precision).

i.e. 40/5 = 8, there is a constant N=5, or the *quantization or quality factor* .

Formula:

$$F(u, v) = \text{round}[\, F(u, v) / Q(u, v)]$$

– Q(u, v) = constant => Uniform Quantization.

– Q(u, v) = variable => Non-uniform Quantization.

Standard Q-tables

L'occhio umano è più sensibile alle basse frequenze (upper left corner) mentre lo è meno reispetto alle alte frequenze (lower right corner)

Luminance Quantization Table

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

Chrominance Quantization Table

17	18	24	47	99	99	99	99
18	21	26	66	99	99	99	99
24	26	56	99	99	99	99	99
47	66	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99

I numeri delle tabelle possono essere scalati positivamente (o negativamente) attravero il cosiddetto **Quality Factor QF.** (i.e. $Q^*(u,v) = QF \times Q(u,v)$)

Tabelle di quantizzazione non standard possono essere specificate nell'header

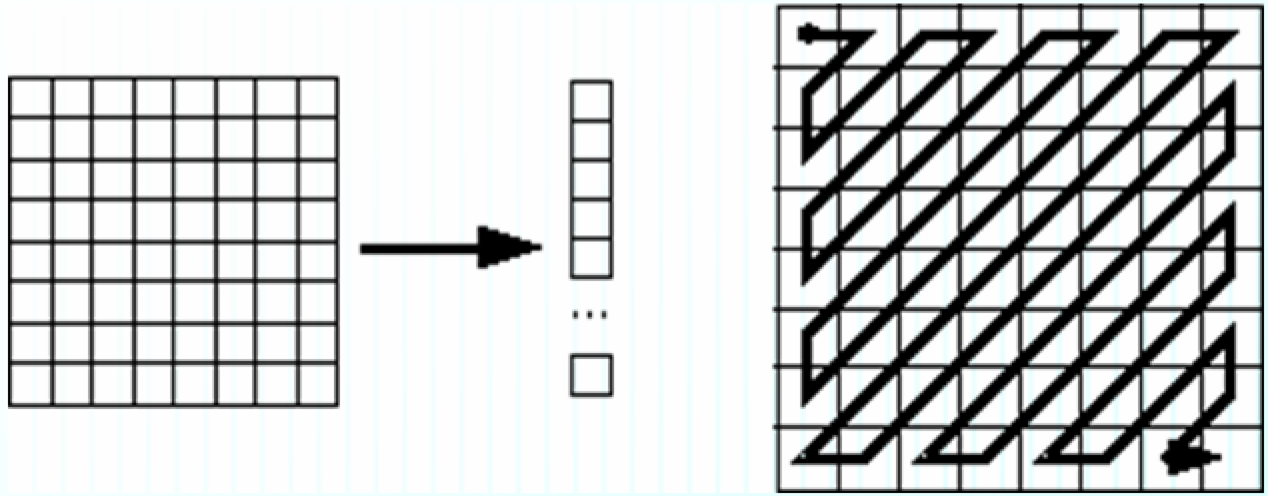
Quantized DCT

$$X = \begin{bmatrix} 168 & 161 & 161 & 150 & 154 & 168 & 164 & 154 \\ 171 & 154 & 161 & 150 & 157 & 171 & 150 & 164 \\ 171 & 168 & 147 & 164 & 164 & 161 & 143 & 154 \\ 164 & 171 & 154 & 161 & 157 & 157 & 147 & 132 \\ 161 & 161 & 157 & 154 & 143 & 161 & 154 & 132 \\ 164 & 161 & 161 & 154 & 150 & 157 & 154 & 140 \\ 161 & 168 & 157 & 154 & 161 & 140 & 140 & 132 \\ 154 & 161 & 157 & 150 & 140 & 132 & 136 & 128 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 214 & 49 & -3 & 20 & -10 & -1 & 1 & -6 \\ 34 & -25 & 11 & 13 & 5 & -3 & 15 & -6 \\ -6 & -4 & 8 & -9 & 3 & -3 & 5 & 10 \\ 8 & -10 & 4 & 4 & -15 & 10 & 6 & 6 \\ -12 & 5 & -1 & -2 & -15 & 9 & -5 & -1 \\ 5 & 9 & -8 & 3 & 4 & -7 & -14 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 1 & 3 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 3 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$z_{ij} = round(\, y_{ij} / q_{ij} \,)$$

Zig-Zag Ordering



Dopo la fase di quantizzazione viene separato il coefficiente DC dai coefficienti AC che invece vengono riordinati in un formato 1-D (**8 x 8 a 1 x 64) utilizzando una scansione a zig-zag** utile a generare lunghe “stringhe” (run) di coefficienti nulli.

JPEG Baseline Encoding/Decoding Process

- Color Transform (RGB → YCbCr);
- Image Partition;
- Discrete Cosine Transform;
- Quantization;
- DC Coefficient Encoding;
- Zig-zag ordering of AC Coefficients;
- Entropy Coding.

Alcune proprietà della DFT 2-D

Separabilità

Traslazione

Periodicità and Simmetria Coniugata

Valor Medio

Convoluzione e Correlazione

Laplaciano

Rotazione

Distributività e Scaling

Separabilità

La trasformata di Fourier discreta può essere espressa in forma separabile. In particolare vale la seguente espressione:

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} g(x,v) e^{\frac{-i\pi ux}{N}}$$

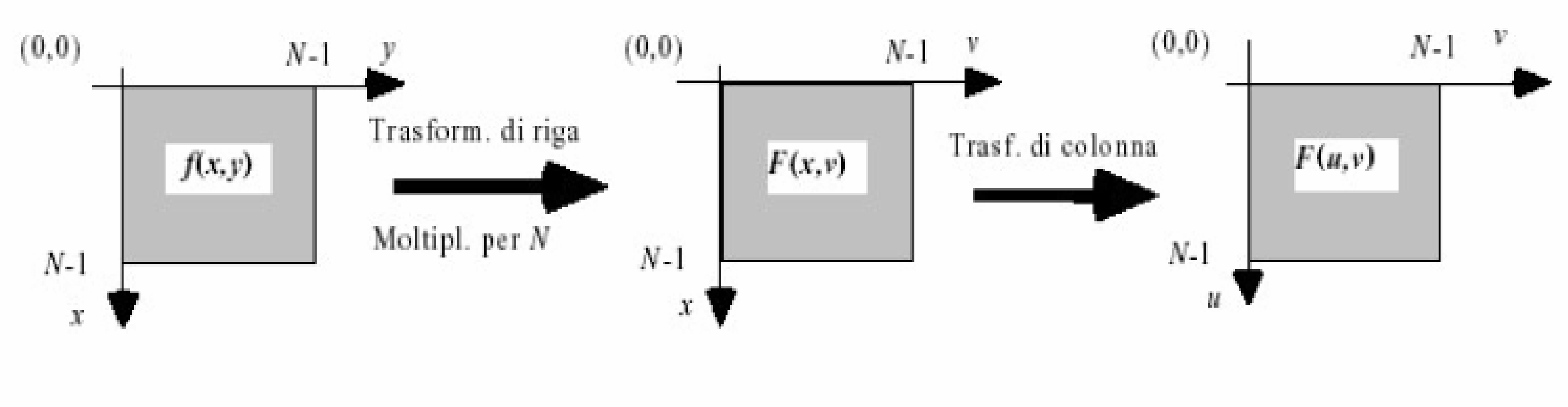
dove:
$$g(x,v) = N\left[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{\frac{-i2\pi vy}{N}}\right]$$

Il principale vantaggio delle proprietà di separabilità è che la $F(u,v)$ può essere ottenuta applicando in due passi successivi la trasformata 1-D.

Separabilità

Per ogni valore di x, l'espressione in parentesi è una trasformata 1-D nel dominio di v (con v= 0, 1, ..., N-1). Pertanto la funzione 2-D $F(x,v)$ è ottenuta effettuando una **trasformata lungo ogni riga** della $f(x,y)$ e moltiplicando il risultato per N;

$F(u,v)$ è a questo punto calcolata effettuando una trasformata lungo ogni colonna di $F(x,v)$;



Lo stesso risultato può essere ottenuto trasformando prima per colonne e poi per righe. Considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte per la trasformazione inversa.

Traslazione (1)

E’ possibile dimostrare che:

$$f(x,y)e^{\frac{i2\pi(u_0x+v_0y)}{N}} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{\frac{-i2\pi(ux_0+vy_0)}{N}}$$

Nel caso bidimensionale è utile prima di effettuare la trasformata applicare uno *shift* (***traslazione***) dell’origine nel punto (*N/2, N/2*) cioè nel centro del *rettangolo delle frequenze*. Dalle relazioni di cui sopra ciò si ottiene ponendo $u_0=v_0=N/2$, da cui:

$$\Im[f(x,y)-1^{(x+y)}]=F(u-N/2,\ v-N/2)$$

Traslazione (2)

Si dimostra inoltre che uno *shift* nella $f(x,y)$ non modifica la magnitudo della trasformata (ma non della fase) dato che:

$$\left| F(u,v) e^{\frac{-i2\pi(ux_0+vy_0)}{N}} \right| = \left| F(u,v) \right|$$

Queste proprietà vengono utilizzate per una migliore visualizzazione dello spettro.

(In MATLAB ciò viene realizzato dalla funzione `fftshift`)

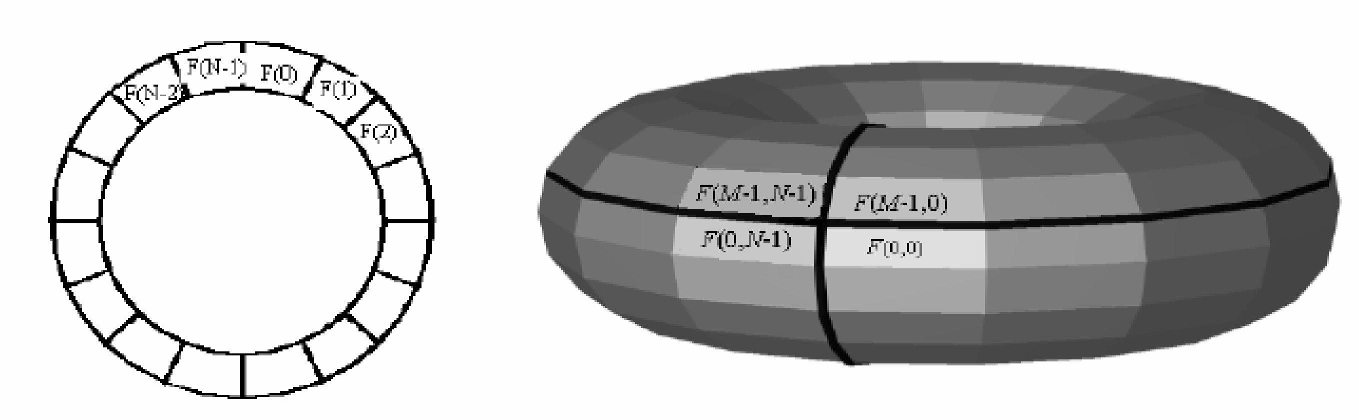
Periodicità e Simmetria Coniugata

La trasformata discreta DFT e la sua inversa sono periodiche (con periodo N):

$$F(u,v)=F(u+N,v)=F(u,v+N)=F(u+N,v+N)$$

Questo significa che benché nella definizione della DFT ci si limiti a considerare vettori di dimensione N, in realtà si potrebbero calcolare trasformazioni dirette e inverse senza restrizioni nei valori dell'indice, che darebbero luogo a campioni di uguale valore ad ogni intervallo pari a N.

Periodicità e Simmetria Coniugata



La periodicità della DFT dà luogo ad una interessante interpretazione geometrica. Nel caso 1-D, il campione $F(N) = F(0)$ è ovviamente contiguo a $F(N\text{-}1)$. I campioni possono quindi essere pensati calcolati per valori disposti non su una linea retta ma su un cerchio, il cosiddetto **anello di Fourier**. Nel caso 2-D, la matrice rappresentativa dell'immagine è proiettata sul cosiddetto **toro di Fourier.** Anche se la $F(u,v)$ si ripete infinite volte, solo gli MxN valori compresi in un solo periodo sono necessari per ottenere $f(x,y)$ da $F(u,v)$. Quindi solo un periodo della trasformata è necessario per specificare completamente $F(u,v)$ nel dominio delle frequenze.

Periodicità e Simmetria Coniugata

- Se $f(x)$ è reale, $F(u)$ è inoltre dotata di simmetria coniugata:

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$
$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

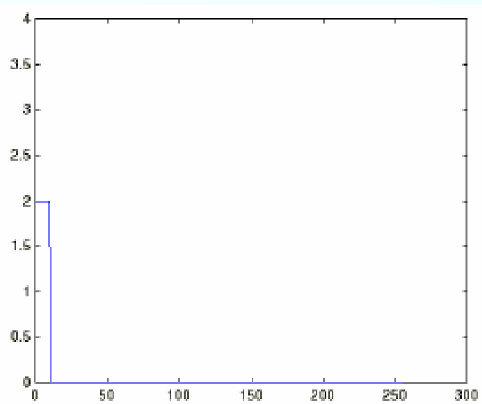
essendo $F^*(u)$ la complessa coniugata di $F(u)$.

- La proprietà di periodicità indica che $F(u)$ ha un periodo pari a N, e la proprietà di simmetria mostra che il modulo della DFT è centrato nell'origine:

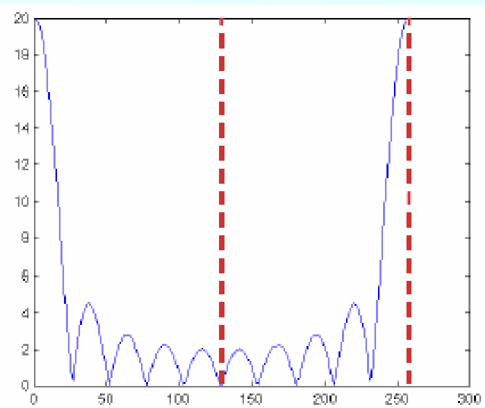
$$F(u) = F(u+N)$$
$$|F(u)| = |F(-u)|$$

Periodicità e Simmetria Coniugata

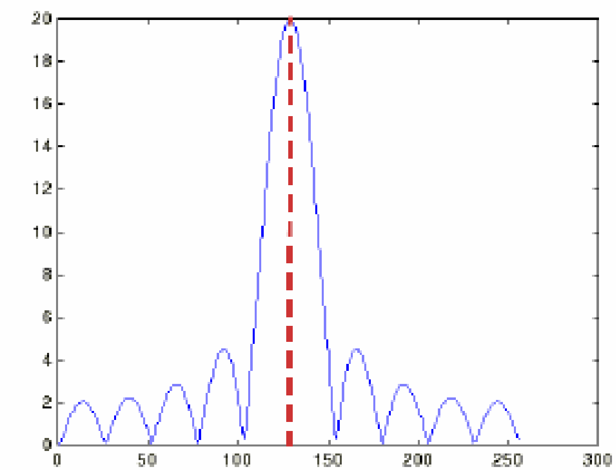
- Pertanto nell'intervallo [0, N-1] sono in realtà presenti due semiperiodi della trasformata, costituiti, rispettivamente, dai campioni da 0 a N/2, e dalla replica degli N/2 campioni presenti nel semiperiodo a sinistra dell'origine.
- Per visualizzare un intero periodo basta spostare l'origine dell'asse u nel punto $u=N/2$. A tal fine si può sfruttare la proprietà di traslazione, e quindi basta moltiplicare la $f(x)$ per $(-1)^x$ prima della trasformazione, come visto in precedenza:

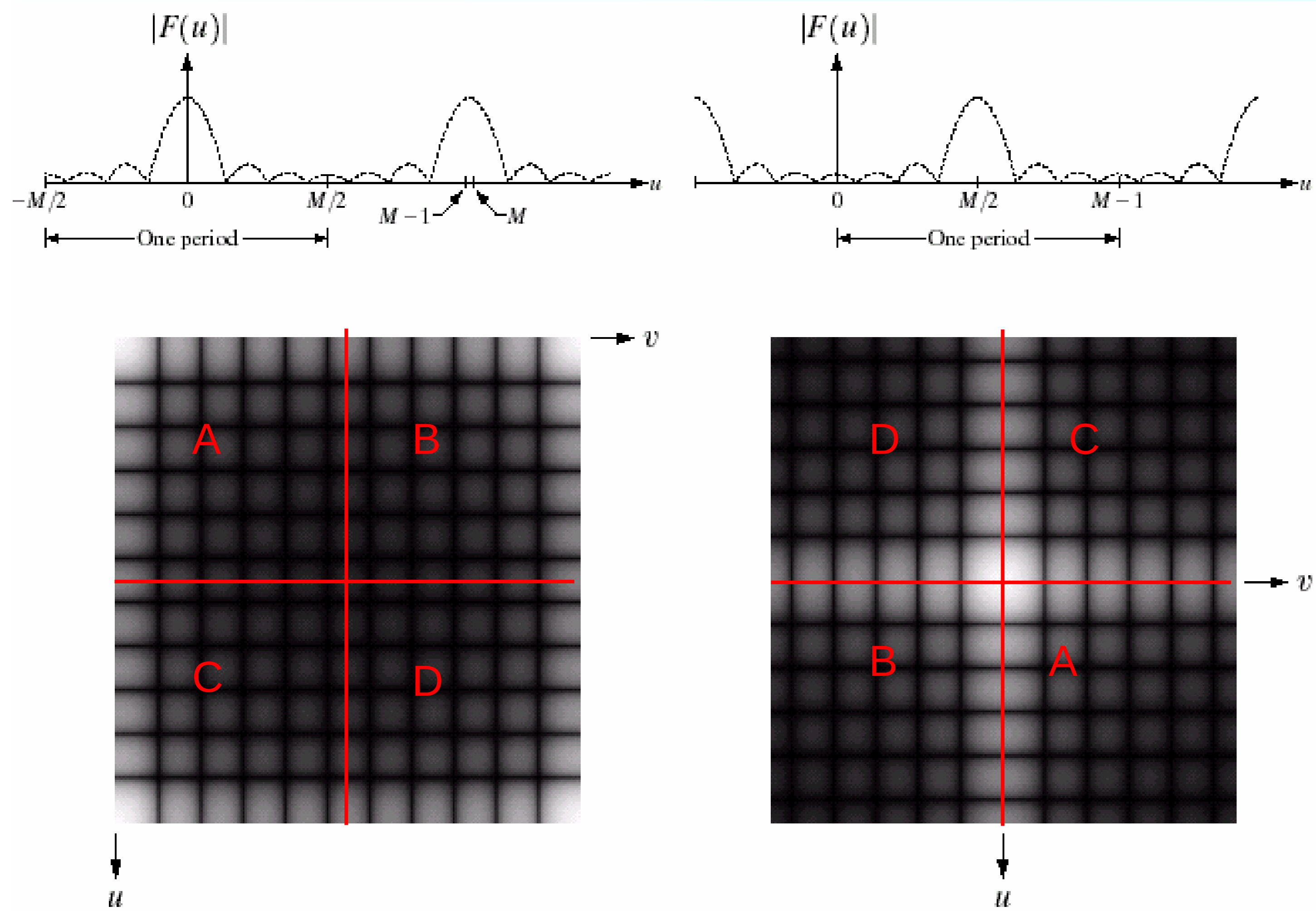


$f(x)$, $x = 0, \ldots, 255$



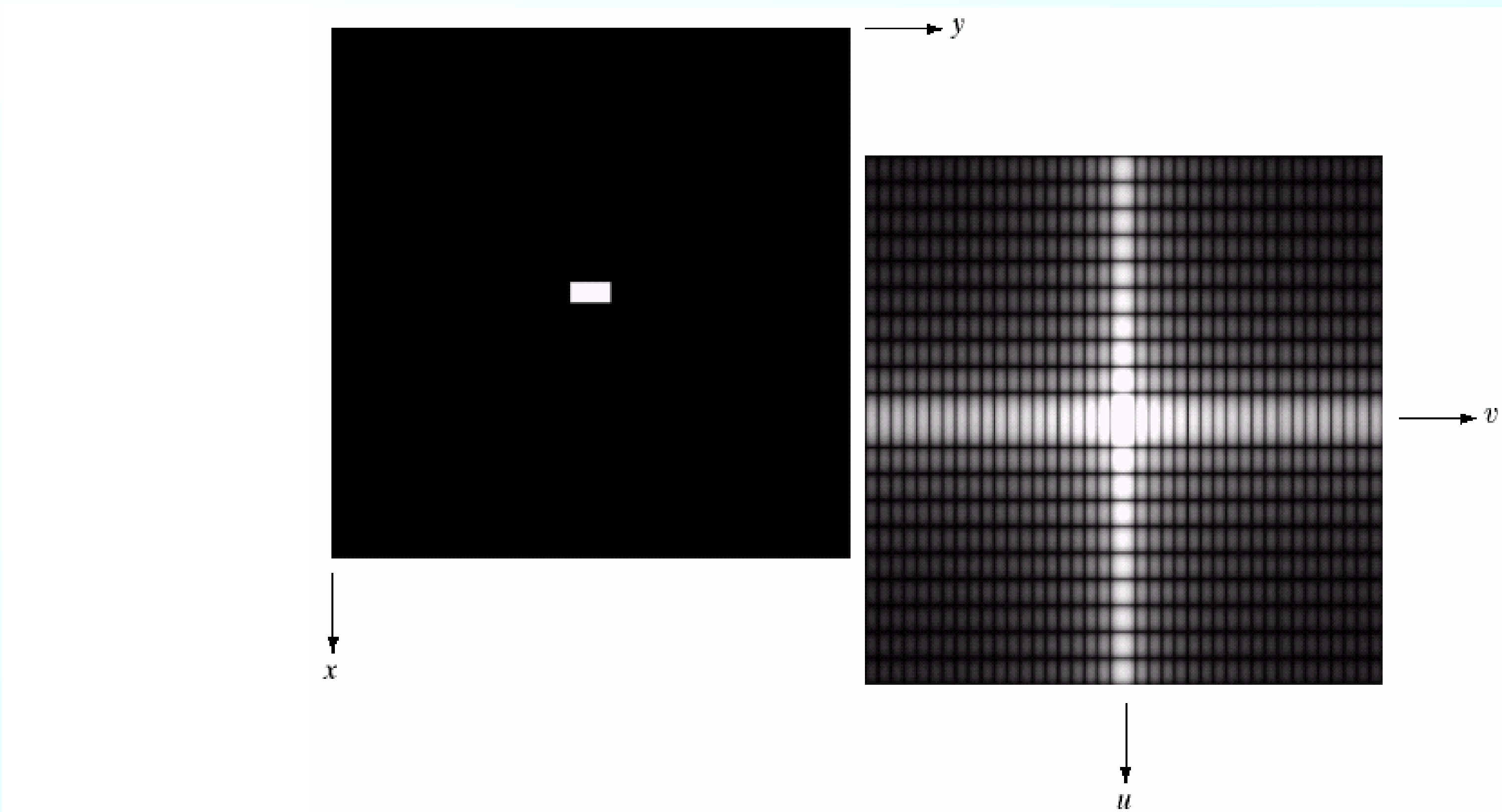
$|F(u)|$, $u = 0, \ldots, 255$

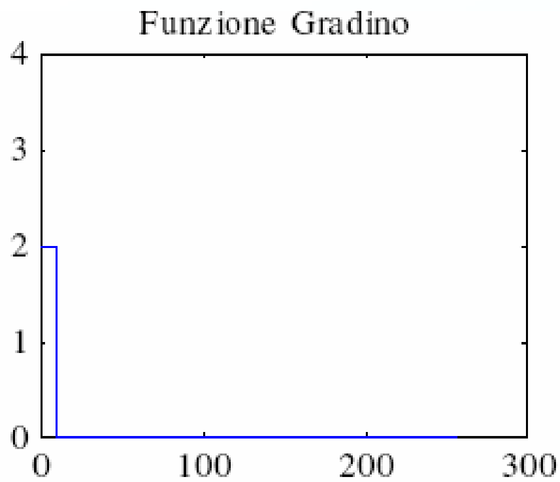


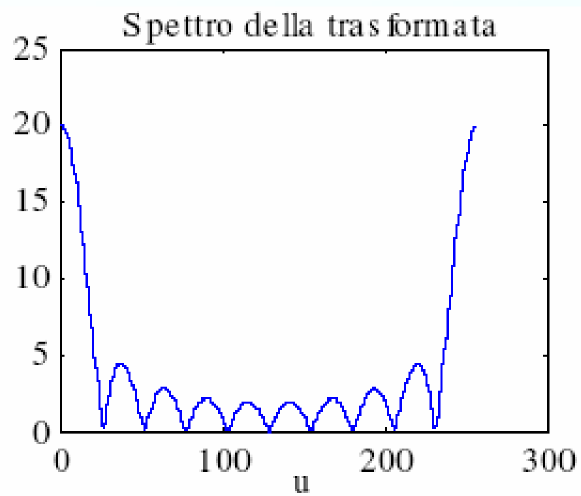


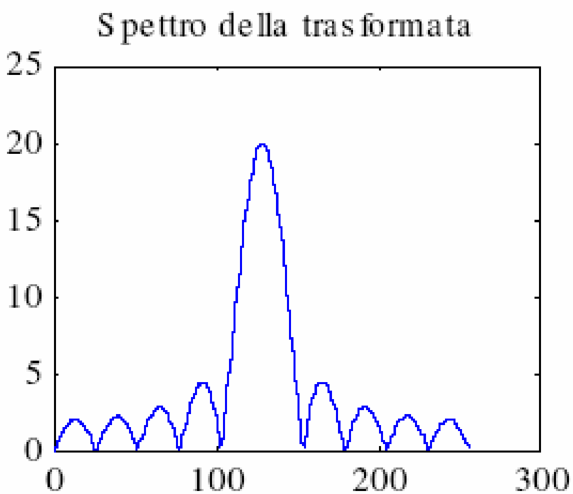
|F(u)|
−M/2
0
M/2
M − 1
M
One period
u
|F(u)|
0
M/2
M − 1
One period
u
A
B
C
D
v
u
D
C
B
A
v
u

La trasformata di un piccolo rettangolo bianco su uno sfondo nero sarà dunque (dopo lo *shift)*










```
>y=zeros(256,1);
>y(1:20)= 2.;
>subplot(2,2,1),plot(y),ylim([0,4] );
>yy=fft(y,256);
>subplot(2,2,2),plot(abs(yy)),ylim([0 25]);
>yy=fftshift(yy);
>subplot(2,2,3),plot(abs(yy)),ylim([0 25]);
```

Valor Medio

Il valore della trasformata nell'origine, cioè nel punto $(u,v)=(0,0)$ è dato da:

$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y) \qquad \bar{f}(x,y)=\frac{1}{N}F(0,0)$$

Come si può vedere non è altro che la media di $f(x,y)$. Il valore della trasformata di Fourier di un'immagine $f(x)$ nell'origine è uguale alla media dei valori di grigio contenuti nell'immagine.

***F*(0,0) prende anche il nome di *componente continua* o componente DC.**

Fast Fourier Transform

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-i2\pi ux/N]$$

- Nella sua forma classica implementare la trasformata di Fourier richiederebbe un numero di operazioni proporzionale a N^2 (N moltiplicazioni complesse e N-1 addizioni per ciascuno degli N valori di u).
- Utilizzando opportune tecniche di decomposizione è possibile abbassare la complessità a $N\log_2 N$, implementando la cosiddetta Fast Fourier Trasform (FFT).