UNIVERSITÉ PARIS IX - DAUPHINE
U.F.R. MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION

THÈSE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCE

Spécialité: Mathématiques Appliquées
arrêté du 30 Mars 1992

Sujet:
Utilisation du Calcul Différentiel Extérieur en Théorie du Consommateur

Présentée et soutenue par:

Marwan AL OQEILI

JURY

Directeur de Thèse: **Ivar EKELAND**
Professeur à l'Université Paris-Dauphine.

Rapporteurs: **Jean-Marc BONNISSEAU**
Professeur à l'Université Paris I.
Pierre-André CHIAPPORI
Professeur à l'Université de Chicago.

Suffragants: **Raghib ABU-SARIS**
Professeur à l'Université de Bir Zeit.
Rose-Anne DANA
Professeur à l'Université Paris-Dauphine.
Eric SÉRÉ
Professeur à l'Université Paris-Dauphine.

Da[...]000.

UNIVERSITÉ PARIS IX - DAUPHINE
U.F.R. MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION

THÈSE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCE

Spécialité: Mathématiques Appliquées
arrêté du 30 Mars 1992

Sujet:
Utilisation du Calcul Différentiel Extérieur en Théorie du Consommateur

Présentée et soutenue par:

Marwan AL OQEILI

JURY

Directeur de Thèse: **Ivar EKELAND**
Professeur à l'Université Paris-Dauphine.

Rapporteurs: **Jean-Marc BONNISSEAU**
Professeur à l'Université Paris I.
Pierre-André CHIAPPORI
Professeur à l'Université de Chicago.

Suffragants: **Raghib ABU-SARIS**
Professeur à l'Université de Bir Zeit.
Rose-Anne DANA
Professeur à l'Université Paris-Dauphine.
Eric SÉRÉ
Professeur à l'Université Paris-Dauphine.

Date de soutenance: Juin 2000.

Remerciements

Je tiens, en premier lieu, à remercier et à exprimer ma profonde reconnaissance à Ivar Ekeland qui a dirigé cette thèse avec beaucoup de disponibilité et de bienveillance. Son talent scientifique m'a été la source d'un grand enrichissement.

Mes remerciements les plus vifs s'adressent à Jean-Marc Bonnisseau et à Pierre-André Chiappori qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs et de participer au Jury.

Je tiens aussi à remercier Raghib Abu-Saris qui a accepté de venir à Paris et qui m'a fait l'honneur d'être membre du jury.

J'aimerais remercier chaleureusement Rose-Anne Dana et Eric Séré qui ont accepté de participer à la présoutenance et à la soutenance. Leurs remarques m'ont été très utilies.

Je voudrait exprimer ma gratitude et mes remerciements au Consulat Général de France à Jérusalem pour le financement de mes études. Mes remerciements s'adressent aussi au personnel du Service d'Accueil International et des Boursiers Etrangers S.A.I.B.E. au C.R.O.U.S. de Paris.

J'aimerais remercier tous les membres du CEREMADE pour leur accueil sympathique pendant ces trois années.

J'aimerais exprimer toute mon amitié à mes collègues thésards, en particulier les occupants du bureau C616.

Résumé

Les résultats présentés dans cette thèse généralisent les conditions qui caractérisent la fonction de demande individuelle en théorie du consommateur. Cette fonction est la solution du problème de maximisation d'utilité sous la contrainte budgétaire. Une fonction donnée satisfaisant la loi de Walras est une fonction de demande si et seulement si sa matrice de Slutsky est symétrique et semi-définie négative.

L'objectif principal de cette thèse est de généraliser le résultat précédent à des problèmes de maximisation sous plusieurs contraintes. En d'autres termes, nous recherchons les conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire une fonction donnée pour qu'elle provienne de la résolution d'un problème de maximisation sous plusieurs contraintes.

Dans la première partie, on rappelle quelques modèles microéconomiques en théorie du consommateur. Ensuite, on introduit le problème de maximisation d'utilité sous plusieurs contraintes. Des conditions nécessaires satisfaites par la solution de ce type de problèmes seront données dans la deuxième partie. La troisième partie sera consacrée à la résolution du problème d'intégration mathématique lié au problème de maximisation sous-jacent. Dans la quatrième partie, on considère un problème de maximisation où les revenus sont normalisés à un. Enfin, le problème de l'intégration économique ainsi que le problème de dualité seront discutés.

Mots-clés: fonction d'utilité, fonction d'utilité indirete, maximisation d'utilité, fonction de demande, matrice de Slutsky, intégration mathématique, intégration économique, rationnement.

Abstract

The results presented in this thesis generalize the conditions that characterize the individual demand function in consumer theory. This function is the solution of utility maximization problem under the budget constraint. A given function satisfying Walras' law is a demand function if and only if its Slutsky matrix is symmetric and negative semidefinite.

The main objective of this thesis is to generalize the above result to multiconstraint problems. In other words, we are looking for the necessary and sufficient conditions to be satisfied by a given function in order to be the solution of a multi-constraint utility maximization problem.

In the first part, we recall some microeconomic models in consumer theory. Then, we introduce the utility maximization problem under several constraints. Some necessary conditions satisfied by the solution of this type of problems will be given in the second part. The third part will be devoted to the resolution of the mathematical integration problem arising from the underlying maximization problem. After that, the same type of maximization problems will be considered with revenues normalized to one. Finally, the economic integration problem and duality problem will be discussed.

Keywords: utility function, indirect utility function, utility maximization, demand function, Slutsky matrix, mathematical integration, economic integration, rationing.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_{++}$	ensemble de n-vecteurs positifs, n-vecteurs strictement positifs.
$\wedge$	produit extérieur.
$d\omega$	dérivée extérieure d'une forme différentielle ω.
x, X	fonctions de demande, 16, 35, 77.
U	fonction d'utilité directe, 15, 34, 77.
∇U	gradient de U, 38.
D^2U	matrice Hessienne de U, 38.
V	fonction d'utilité indirecte, 16, 35, 77.
$(\nabla V)^\perp$	espace orthogonal au gradient de V, 37.
dV	différentielle de V, 43.
$\mathcal{E}(P, Y)$	sous-espace de l'espace $\nabla V(P, Y)^\perp$, 37.
$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$	multiplicateurs de Lagrange, 35.
λ_{ik}	quotient de λ_i et λ_k, 46.
P	$m \times n$ matrice prix de rang m, 34.
Y	vecteur revenu dans $\mathbb{R}^m_{++}$, 34.
$\omega^1, ..., \omega^m$	famille de 1-formes différentielle, 43, 78.
Ω^{jl}	famille de 1-formes différentielles, 55.
$\zeta^1, ...\zeta^m$	famille de champs de vecteurs, 56.
$< \omega^i, \zeta^k >$	produit de dualité de ω^i et ζ^k, 57.
S	matrice de Slutsky, 17.
S'	transposée de la matrice S, 18.
S_i^{jl}	coefficient de la matrice correspondant à la contrainte i, 54.
$S_1, ..., S_m$	m matrices symétriques et semi-définies négatives, 54.

Introduction

La théorie du consommateur en microéconomie étudie les comportements d'un individu dans des conditions différentes. Ces comportements sont représentés par la fonction de demande individuelle. Le problème de la caractérisation de cette fonction a été étudié depuis plus d'un siècle par Antonelli, [3], puis Slutsky, [47].

Le choix de l'individu dépend de ses préférences représentées par sa fonction d'utilité. Une telle fonction existe si les relations de préférence satisfont certaines conditions. Toutefois, cette fonction n'est pas unique. Si U est une fonction d'utilité, alors toute transformation de cette fonction par une fonction réelle croissante est une fonction d'utilité qui engendre la même fonction de demande.

Le modèle individuel classique consiste à maximiser la fonction d'utilité individuelle sous une contrainte budgétaire. La solution de ce problème de maximisation est la fonction de demande individuelle. Cette fonction est caractérisée par les relations de Slutsky. Ces relations ont été testées et validées économétriquement par Browning et Chiappori, [8].

Nous considérons un modèle plus général que celui-ci au sens où le choix individuel est soumis à plusieurs contraintes budgétaires. Dans ce cas, nous recherchons les relations qui caractérisent la fonction de demande «généralisée».

Ce modèle généralisé décrit, en particulier, les comportements d'un consommateur soumis à des contraintes de rationnement. Ce problème a rarement été étudié. Cette thèse sera consacrée à l'étude de ce modèle. Une analyse de statique comparative sera développée. Toutefois, quelques travaux liés à des problèmes de ce genre ont été réalisés. Nous en citons les articles de Hatta, [30], Epstein, [24], Diamond et Yaari, [19]. Des résultats partiels obtenus dans ces articles seront généralisés.

Cette thèse est divisée en plusieurs chapitres et une annexe. Le premier chapitre est un bref exposé des modèles microéconomiques en théorie du consommateur. Le modèle individuel classique sera introduit dans la première partie. Ensuite, nous discuterons les modèles de Hatta et d'Epstein, plus proches au nôtre.

Puisque le problème étudié ici provient de la théorie de rationnement, la première partie du chapitre deux sera consacrée à une brève rappelle de la théorie de rationnement. Ensuite, le problème de maximisation sous plusieurs contraintes sera exposé. Des conditions nécessaires satisfaites par la fonction de demande provenant de ce problème seront données.

Comme dans le cas du modèle classique, nous aurons un problème d'intégration, mathématique et économique. Le problème d'intégration mathématique sera résolu dans le chapitre trois. Nous utiliserons les notions du calcul différentiel extérieur pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique. Ces méthodes ont été introduites dans ce domaine par Chiappori et Ekeland, citons [11], [12] et [23].

Dans le chapitre quatre, les revenus seront normalisés à un. Nous donnerons les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique dans ce cas. Nous nous intéressons particulièrement aux méthodes qui nous permettent d'obtenir ces résultats.

Enfin, le chapitre cinq sera consacré à la résolution du problème d'intégration économique et du problème de dualité. Nous y donnerons les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration économique. Puis, le problème de dualité sera discuté. Les démonstrations du premier chapitre sont regroupées dans une annexe.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie du consommateur

1.1 Introduction

Ce chapitre introductif présente quelques résultats préliminaires de la théorie du consommateur en microéconomie.
La première partie sera consacrée à un rappel du modèle individuel classique. Les relations qui caractérisent la fonction de demande individuelle ainsi que la dualité liée à ce modèle et les tests économétriques permettant de le valider seront discutés. Dans la deuxième partie, on introduit quelques modèles plus généraux que le modèle classique.

1.2 Le modèle individuel classique

Nous considérons un consommateur confronté à un ensemble X de paniers de consommations possibles. Le consommateur choisit ce qu'il préfère parmi ce qu'il peut payer. Cela se traduit mathématiquement par la résolution du problème de maximisation suivant:

$$\begin{cases} \max\ U(x) \\ p.x \leq y \\ x_i \geq 0\ \ \forall i \end{cases}$$

où U est la fonction d'utilité de l'individu qui représente ses préférences. Cela veut dire que si le consommateur préfère le panier x au panier x' alors $U(x) \geq U(x')$. Le vecteur (colonne) $p \in I\!R^n_{++}$, est le système des prix qui est supposé donné et $y > 0$ est le revenu de l'individu.

Il s'agit d'une théorie de la décision, qui doit indiquer quel choix fait l'individu dans telles circonstances. Il faut donc que le problème précédent ait une seule solution. Pour cela, on adopte l'hypothèse suivante:
Conditions I. On suppose que U est (i) de classe C^∞, (ii) strictement croissante par rapport à toutes les variables, (iii) D^2U est définie négative sur $\nabla U^\perp$.

Le fait que la fonction U soit croissante implique que la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum. On suppose que les contraintes de positivité sur x ne sont pas saturées à l'optimum ce qui nous permet de les oublier. Le problème de maximisation précédent s'écrit sous la forme suivante:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \max\ U(x) \\ p.x = y \end{cases}$$

La difficulté du problème est que les fonctions d'utilité ne sont pas observables. Pour surmonter cette difficulté, on considère la solution du problème comme fonction de $p = (p_1, ..., p_n)$ et y. L'avantage de voir le problème de cette manière est que p, y et x sont observables, alors que U ne l'est pas. La solution $x(p, y)$ s'appelle la fonction de demande individuelle. Les démonstrations qui ne sont pas données ici se trouvent dans la plus part des ouvrages classiques de microéconomie, citons, par exemple, [19],[41].
La solution du problème $(\mathcal{P})$ satisfait les propriétés données par le théorème suivant:

Théorème 1.2.1 *Soit U une fonction d'utilité satisfaisant les conditions (I). Alors, la fonction de demande $x(p, y)$ satisfait les propriétés suivantes:*

1. *Homogène de degré zéro en (p, y): $x(tp, ty) = x(p, y)$, $t > 0$.*

2. *La loi de Walras: $p.x(p, y) = y$.*

3. *Unicité.*

4. *De classe C^∞, $\forall(p, y)$.*

Nous donnons maintenant les propriétés qui caractérisent la solution du problème $(\mathcal{P})$. Pour cela, on introduit la fonction d'utilité indirecte.

1.2.1 La fonction d'utilité indirecte

L'utilité maximum qu'il est possible d'atteindre pour des prix et un revenu donnés (p, y) est égale à $V(p, y) := U(x(p, y))$. La fonction que l'on vient de définir s'appelle *la fonction d'utilité indirecte.* Cette fonction satisfait les propriétés suivantes:

Théorème 1.2.2 *Soit U une fonction d'utilité satisfaisant les conditions (I). Alors, la fonction d'utilité indirecte V est:*

1. *Homogène de degré zéro par rapport à (p, y).*

2. *Noncroissante en p et nondécroissante en y.*

3. *Quasi-convexe en (p, y).*

4. *De classe C^∞.*

Par définition, la fonction d'utilité indirecte nous donne l'utilité maximale pour (p, y) donnés,

$$V(p,y) = \max_x \{U(x) + \lambda(y - p.x)\} \tag{1.1}$$

où $\lambda > 0$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire. Soit $x(p, y)$ la fonction de demande individuelle, alors

$$V(p,y) = U(x(p,y)) + \lambda(p,y)(y - p.x(p,y)) \tag{1.2}$$

En dérivant V par rapport à p et y et en utilisant les conditions d'optimalité, on obtient

$$\frac{\partial V}{\partial p_i} = -\lambda x^i \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lambda \tag{1.4}$$

On en déduit l'identité de Roy:

$$x^i = -\frac{\partial V/\partial p_i}{\partial V/\partial y} \tag{1.5}$$

Procédons maintenant au problème de la caractérisation de la fonction de demande individuelle. Le théorème suivant nous donne des conditions nécessaires satisfaites par $x(p, y)$:

Théorème 1.2.3 *Soit $x(p, y)$ la solution du problème $(\mathcal{P})$. Alors,*

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} + \frac{\partial x^i}{\partial y}x^j = \frac{\partial x^j}{\partial p_i} + \frac{\partial x^j}{\partial y}x^i \quad \forall\ 1 \leq i,j \leq n. \tag{1.6}$$

Démonstration. Annexe A.
On obtient donc une $(n \times n)$ matrice symétrique.

1.2.2 Les relations de Slutsky

Les relations (1.6) sont connues sous le nom des *relations de Slutsky*. La matrice suivante s'appelle la matrice de Slutsky:

$$S^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial p_j} + \frac{\partial x^i}{\partial y}x^j, \quad i,j = 1,...,n. \tag{1.7}$$

La matrice de Slutsky S s'écrit donc comme suit

$$S :\, = D_p x + (D_y x)x' \tag{1.8}$$

où x' est la transposée de x. Ces relations impliquent, en effet, que $D_p x$ est la somme d'une matrice symétrique (on démontrera que cette matrice est aussi semi-définie négative) et d'une matrice de rang 1. La matrice de Slutsky a les propriétés suivantes:

Théorème 1.2.4 *Soit $x(p,y)$ la solution unique du problème $(\mathcal{P})$. Alors, la matrice S définie par (1.8) satisfait les conditions suivantes*

1. $Sp = 0$.

2. $S = S'$.

3. $\xi' S \xi \leq 0, \ \forall \xi \in I\!R^n$

Démonstration. Annexe A.

Si $x(\cdot,\cdot)$ est une fonction de demande, alors $x(\cdot,\cdot)$ satisfait la loi de Walras et la matrice de Slutsky associée est symétrique et semi-définie négative.
On se pose maintenant la question inverse:

On se donne une fonction $x(\cdot,\cdot) \in I\!R^n_+$ de classe C^∞ satisfaisant les conditions précédentes, est-elle une fonction de demande?

En d'autres termes, existe-t-il une fonction concave (ou quasi-concave) U qui rationalise x? La réponse à cette question est oui à condition que la matrice de Slutsky associée à x soit symétrique et semi-définie négative.

La démonstration consiste à résoudre un problème d'intégration. On discutera ce problème dans la section qui suit. On commence par discuter les différentes approches au problème de la caractérisation de la fonction de demande individuelle que nous appelons le problème individuel.

1.3 Les approches au problème individuel

Il existe plusieurs approches pour aborder ce problème: l'approche directe, l'approche indirecte et l'approche duale. Dans le reste de cette section, on suppose que le revenu est normalisé à 1, $y = 1$.

1.3.1 L'approche directe

L'approche directe consiste à utiliser la fonction d'utilité (directe) U pour déterminer les conditions nécessaires et suffisantes qui caractérisent la fonction de demande inverse $p(x)$. Ces conditions sont: (i) $p.x = 1$, (ii) la symétrie et la négativité de la matrice d'Antonelli. En effet, le problème:

$$V(p) = \left\{ \begin{array}{c} \max_x \; U(x) \\ p.x = 1 \end{array} \right.$$

est équivalent au problème

$$-U(x) = \left\{ \begin{array}{c} \max_p(-V(p)) \\ p.x = 1 \end{array} \right.$$

Le théorème de l'enveloppe implique que

$$\nabla U(x) = \mu(x)p(x) \tag{1.9}$$

où μ est le multiplicateur de Lagrange. La fonction $p(x)$ est donc colinéaire au gradient d'une fonction quasi-concave. La fonction $p(x)$ satisfait les conditions de symétrie suivantes

$$\frac{\partial p_i}{\partial x^j} - \sum_{j'} \frac{\partial p_i}{\partial x^{j'}} x^{j'} p_j = \frac{\partial p_j}{\partial x^i} - \sum_{j'} \frac{\partial p_j}{\partial x^{j'}} x^{j'} p_i \tag{1.10}$$

et cette matrice, connue sous le nom de matrice d'Antonelli, est semi-définie négative.

1.3.2 L'approche indirecte

L'approche indirecte consiste à utiliser la fonction d'utilité indirecte, la fonction valeur du problème de maximisation d'utilité. D'après le théorème de l'enveloppe, on a

$$\nabla_p V(p) = -\lambda(p)x(p) \tag{1.11}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. La fonction de demande $x(p, y)$ est colinéaire au gradient d'une fonction quasi-convexe.

1.3.3 L'approche duale

On introduit un problème dual au problème de maximisation d'utilité. C'est le problème de minimisation de dépense:

$$e(p, u) = \left\{ \begin{array}{c} \min_x \; p.x \\ U(x) \geq u \end{array} \right.$$

La fonction $e(p, u)$ s'appelle la fonction de dépense. Cette fonction nous donne le revenu minimal nécessaire pour que l'individu atteigne le niveau d'utilité u. Pour plus de détails, voir [41].

1.3.4 Le problème d'intégration

Il existe deux types d'intégration: *l'intégration mathématique* et *l'intégration économique.*

Le problème d'intégration mathématique se formule comme suit: on se donne une fonction $x(p)$ et on recherche deux fonctions $\lambda(p)$ et $V(p)$ telles que $\nabla V(p) = -\lambda(p)x(p)$.

L'intégration économique consiste à imposer $\lambda(p) > 0$ et $V(p)$ quasi-convexe.

Dans tout ce qui suit, on utilise l'approche indirecte. Le théorème suivant résout le problème d'intégration mathématique et économique lié au modèle individuel:

Théorème 1.3.1 *Soit $x(\cdot,\cdot) \in I\!R^n$ une fonction de classe C^∞, homogène de degré zéro, satisfaisant la contrainte*

$$p.x(p, y) = y \tag{1.12}$$

Alors, $x(p, y)$ est une fonction de demande si et seulement si la matrice

$$S: \; = D_p x + (D_y x)x' \tag{1.13}$$

est symétrique et semi-définie négative.

Démonstration: Voir Annexe A.

1.3.5 La dualité entre les fonctions d'utilité directe et indirecte

Nous avons défini la fonction d'utilité indirecte V à partir de la fonction d'utilité directe U. Dans cette section on montre comment obtenir une fonction d'utilité directe à partir de la fonction d'utilité indirecte. Ce résultat est donné par la proposition suivante:

Proposition 1.3.1 *Soit V une fonction d'utilité indirecte. Alors, il est possible de récupérer la fonction d'utilité directe par*

$$U(x) = \min_{(p,y)}\{V(p, y) : p.x = y, p \in I\!R^n_+, y > 0\} \tag{1.14}$$

où $U : I\!R^n_{++} \to I\!R$.

Démonstration. Soit $\bar{x} \in I\!R^n_{++}$ le panier demandé aux prix $\bar{p}$ et au revenu $\bar{y}$. C'est-à-dire qu'en $\bar{x}$, l'hyperplan budgétaire est tangent à l'hypersurface d'indifférence passant par $\bar{x}$. Par définition, $V(\bar{p}, \bar{y}) = U(\bar{x})$. Prenons un vecteur $p \in I\!R^n_+$ et $y > 0$ tels que $p.\bar{x} = y$. Puisque la contrainte est linéaire, alors il existe des paniers satisfaisant la contrainte $p.x = y$ qui sont au-dessus de l'hypersurface d'indifférence sur laquelle $\bar{x}$ se trouve. Nous avons nécessairement $V(p, y) \geq U(x) = V(\bar{p}, \bar{y})$. Par conséquent, le minimum de la fonction d'utilité indirecte sur tout (p, y) tels que $p.\bar{x} = y$ nous donne l'utilité de $\bar{x}$. Cela conclut la démonstration. ∎

Il reste à démontrer que la fonction U définie par (1.14) est une fonction d'utilité.

Théorème 1.3.2 *Soit V une fonction satisfaisant les propriétés du théoreme (1.2.2). Alors, la fonction U définie par (1.14) est une fonction d'utilité, c'est-à-dire qu'elle est:*

- *Croissante.*
- *Continue.*
- *Quasi-concave.*

Démonstration. Annexe A.
La fonction U peut être étendue sur $I\!R^n_+$. Le problème de dualité est traité profondément par plusieurs articles, voir [21],[26],[35] et [37].

1.4 Les tests empiriques

Dans cette section, on discute brièvement les tests économétriques entrepris par Browning et Chiappori qui ont permis de valider le modèle individuel et le modèle de ménage, voir [8] et [22].
Les relations de Slutsky sont nécessaires et suffisantes, bien entendu avec la loi de Walras. On dispose alors d'un test pour valider le modèle individuel.

- On observe la fonction de demande $x(p, y)$.
- On vérifie si la matrice Jacobienne $D_p x$ se décompose en une matrice symétrique, semi-définie négative et une matrice de rang 1.

Tous les tests pratiqués avant 1994 n'ont pas permis de valider le modèle individuel. En 1994, Browning et Chiappori ont obtenu pour la première fois un résultat positif concernant les relations de Slutsky.

Les études économétriques menées avant 1994 ont échouées d'obtenir une réponse positive parce que ces études n'ont pas distingué les données individuelles de celles des ménages, alors que les relations de Slutsky caractérisent les demandes individuelles.

Dans les deux sections suivantes, on résume des résultats, obtenus par Hatta [30] et Epstein [24], qui sont liés au problème de maximisation sous plusieurs contraintes. On garde les mêmes notations. Les démonstrations sont supprimées.

1.5 Le modèle de Hatta

Considérons le problème suivant

$$(\mathcal{P})_H \begin{cases} \max \ f(p,x) \\ k(p,x) = \kappa \end{cases}$$

où $x \in I\!R^n, p \in I\!R^l, \kappa \in I\!R^r$ et $k(p,x) \in I\!R^r$. On suppose que les fonctions f et k sont de classe C^2. On suppose également que ce problème admet une solution unique, $x^*(p,\kappa)$, pour (p,κ) donné, et que la solution est différentiable. Alors, $x^*(p,\kappa)$ satisfait les contraintes

$$k(p, x^*(p,\kappa)) = \kappa \tag{1.15}$$

Soit s la fonction définie par

$$s(p,z) = x^*(p, k(p,z)) \tag{1.16}$$

Pour (p,z) donné, le vecteur $x = s(p,z)$ maximise $f(p,z)$ sous les contraintes $k(p,x) = k(p,z)$. Dans le cas d'un problème de maximisation d'utilité, $s(p,z)$ représente la fonction de demande lorsque les dotations initiales sont $z = (z^1, ..., z^n)$. Les équations (1.15) et (1.16) impliquent les relations suivantes

$$s_p(p, x^*(p,\kappa)) = x^*_p(p,\kappa) + x^*_\kappa(p,\kappa) k_p(p, x^*(p,\kappa)) \tag{1.17}$$

Soit ϕ la fonction valeur du problème $(\mathcal{P})_H$:

$$\phi(p,\kappa) = \max_x \{f(p,x) : k(p,x) = \kappa\} \tag{1.18}$$

Alors,

$$\phi(p, \kappa) = f(p, x^*(p, \kappa)) \tag{1.19}$$

La fonction de gain est définie comme la différence entre la fonction valeur et le critère:

$$g(p, z) = \phi(p, k(p, z)) - f(p, z) \tag{1.20}$$

Cette fonction représente le gain que le consommateur tire de l'échange lorsqu'il dispose des dotations initiales z et le système des prix est p. La fonction g atteint son minimum (zéro) lorsque $(p, z) = (p, x^*(p, \kappa))$, d'où les conditions suivantes

$$\begin{aligned} g_z(p, x^*(p, \kappa)) &= 0 && (1.21) \\ y'[g_{zz}(p, x^*(p, \kappa))]y &\geq 0 \ \forall y && (1.22) \end{aligned}$$

Ce sont les conditions du premier et du second ordre de minimisation de $g(p, z)$. En fixant (p, κ) et en variant p', la fonction $g(p', x^*(p, \kappa))$ atteint sa valeur minimale zéro lorsque $p' = p$. On en déduit les conditions suivantes

$$g_p(p, x^*(p, \kappa)) = 0 \tag{1.23}$$

$$y' g_{pp}(p, x^*(p, \kappa))y \geq 0 \ \ \forall y \tag{1.24}$$

Soit $c(p, \kappa)$ la fonction définie comme suit:

$$c(p, \kappa) = \sum_{i=1}^{r} \phi_{\kappa_i}(p, \kappa) k^i_{px}(p, x^*(p, \kappa)) - f_{px}(p, x^*(p, \kappa)) \tag{1.25}$$

Dans le cas du modèle individuel classique, $c(p, \kappa) = \lambda I$, où λ est le multiplicateur de Lagrange.

Lemme 1.5.1 *Soient g la fonction de gain définie précédemment et $x^*(p, \kappa)$ la solution unique du problème $(\mathcal{P})_H$, s et c les fonctions définies par (1.17) et (1.25). Alors*

$$g_{pp}(p, x^*(p, \kappa)) = -c(p, \kappa) s_p(p, x^*(p, \kappa)) \tag{1.26}$$

Les conditions (1.23) et (1.24) impliquent les résultats suivants

Théorème 1.5.1 *Soient $x^*(p, \kappa)$ la solution unique du problème $(\mathcal{P})_H$, s et c les fonctions définies par (1.17) et (1.25). Alors*

$$c(p, \kappa) s_p(p, x^*(p, \kappa)) = s'_p(p, x^*(p, \kappa)) c'(p, \kappa) \tag{1.27}$$

Théorème 1.5.2 *Soient $x^*(p,\kappa)$ la solution unique du problème $(\mathcal{P})_H$, s et c les fonctions définies par (1.17) et (1.25). Alors*

$$y'\left(c(p,\kappa)s_p(p,x^*(p,\kappa))\right)y \leq 0 \quad \forall y \tag{1.28}$$

On remarque qu'aucune hypothèse de convexité ou de concavité n'a été adoptée pour obtenir les résultats précédents. Il suffit seulement que x^* soit la solution d'un problème d'optimisation pour obtenir ces conditions.

1.6 Le modèle d'Epstein

Dans son article, [24], Epstein généralise la théorie de dualité à des problèmes d'optimisation sous plusieurs contraintes nonlinéaires. Nous introduisons brièvement le cadre général de son travail.
Soit le problème de maximisation suivant:

$$g(\beta,\alpha) = \max_x\{u(x) \mid c(x,\alpha) \leq \beta, x \in S\} \tag{1.29}$$

où $(\alpha,\beta) \in P = \bar{P} \times I$, et S et $\bar{P}$ sont des sous-ensembles compacts et connexes d'intérieurs non vides, de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, respectivement, et I est un rectangle fermé de $\mathbb{R}^k$. Soit $x^*(\beta,\alpha) \subset S$ l'ensemble de solutions du problème précédent. Les conditions suivantes sont imposées sur la fonction c:

- continue en (x,α).
- nondécroissante en x et α.
- homogène de degré 1 en α.

La fonction u est supposée:

Hypothèses: $\mathcal{H}$

- Définie est continue pour tout $x \in S$.
- $\forall x^0 \in S$, $\exists(\alpha^0,\beta^0) \in P$ tel que $x^0 \in x^*(\beta^0,\alpha^0)$.
- $c(x,\alpha) = \beta$ pour tout $x \in x^*(\beta,\alpha), (\alpha,\beta) \in P$.
- nondécroissante

Epstein utilise les résultats de Hatta présentés dans la section précédente pour donner des conditions nécessaires pour la solution du problème suivant

$$(\mathcal{P})_E \begin{cases} \max \ u(x^1, x^2) \\ p^1.x^1 = \beta_1 \\ p^2.x^2 = \beta_2 \end{cases}$$

où $x = (x^1, x^2) \in I\!R^{n_1+n_2} = I\!R^n$, $n_1 > 1, n_2 > 1$ et $p^1, p^2 >> 0$, $\beta_1, \beta_2 > 0$, et $(p^1, p^2, \beta_1, \beta_2)$ appartient à un compact P.

Soit $x(p^1, p^2, \beta_1, \beta_2) = (x^1(p^1, p^2, \beta_1, \beta_2), x^2(p^1, p^2, \beta_1, \beta_2))$ la solution unique du problème $(\mathcal{P})_E$ et $s^i_{p^j} = x^i_{p^j} + x^i_{\beta_j} x^{j\prime}$, $i, j = 1, 2$ et $\lambda_i = g_{\beta_i} > 0$. D'après les résultats de la section précédente, la solution du problème $(\mathcal{P})_E$ satisfait les conditions nécessaires suivantes:

- $s^1_{p^1}$ et $s^2_{p^2}$ sont symétriques.
- $s^1_{p^1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) s^{2\prime}_{p^2} : = \lambda s^{2\prime}_{p^2}, \quad \lambda > 0$
- La matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 s^1_{p^1} & \lambda_1 s^1_{p^2} \\ \lambda_2 s^2_{p^1} & \lambda_2 s^2_{p^2} \end{pmatrix}$$

  est semi-définie négative.
- x^1 et x^2 sont homogènes de degré zéro en (p^1, β_1) et (p^2, β_2).
- $p^i.x^i = \beta_i, \quad i = 1, 2.$

Les conditions précédentes ne sont pas suffisantes pour déterminer si une fonction donnée $x = (x^1, x^2)$ est la solution d'un problème du type $(\mathcal{P})_E$. Le théorème suivant nous donne les conditions suffisantes:

Théorème 1.6.1 *Soient $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ une fonction de classe C^∞, $(p, \beta) \in P$ un ensemble compact et S l'image de P par ξ. Alors, ξ est la solution de $\max\{u(x) : p^i.x^i = \beta_i, i = 1, 2, x \in S\}$, u est une fonction d'utilité, si et seulement si ξ satisfait les conditions précédentes et de plus les conditions suivantes*

$$\lambda_{p^1} - \lambda_{\beta_1} \xi^1 = -\lambda \xi^1_{\beta_1} - \xi^1_{\beta_2} \tag{1.30}$$

$$\lambda_{p^2} + \lambda_{\beta_2} \xi^2 = -\lambda \left(\lambda \xi^2_{\beta_1} + \xi^2_{\beta_2}\right) \tag{1.31}$$

Les indices désignent la dérivation par rapport aux différentes variables. On remarque que u n'est pas nécessairement quasi-concave. La fonction u est appelée fonction d'utilité si elle satisfait les conditions $\mathcal{H}$.

Il est important de remarquer que les variables d'optimisation sont séparées; x^1 satisfait la première contrainte et x^2 satisfait la deuxième contrainte. On peut rencontrer ce genre de problème dans le domaine de la théorie de rationnement ainsi qu'en théorie des marchés incomplets.

Dans le chapitre suivant, on introduira le problème de maximisation sous m contraintes. Un point x est admissible si et seulement si il satisfait les m contraintes. L'objectif principal de cette thèse est de caractériser la solution d'un tel problème.

Chapitre 2

Maximisation sous les contraintes $PX = Y$

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté quelques modèles en théorie du consommateur, en particulier le modèle individuel classique. Le problème de la caractérisation de la fonction de demande individuelle, qui est la solution d'un problème de maximisation sous la contrainte budgétaire, a été depuis longtemps résolu.

Nous développons une analyse de statique comparative qui vise à généraliser les relations de Slutsky à des problèmes de maximisation sous plusieurs contraintes. En d'autres termes, on cherche à caractériser la solution d'un tel problème.

La section suivante sera consacrée aux discussions de deux exemples économiques auxquels nos résultats s'appliquent. Puis, le problème de maximisation sous plusieurs contraintes sera introduit. Ensuite, les propriétés de la fonction valeur de ce problème ainsi que sa solution et les multiplicateurs de Lagrange associés seront données. Finalement, nous donnerons des conditions nécessaires satisfaites par la solution du problème de maximisation sous plusieurs contraintes.

2.2 Les motivations économiques

2.2.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons deux exemples qui constituent les motivations économiques de ce travail. Ces exemples sont le problème de choix de consommation et portefeuille optimal et le problème de choix sous un système de rationnement. Ces deux problèmes sont mathématiquement équivalents. C'est-à-dire que l'on peut les écrire sous la même forme. Plus précisément, dans les deux cas, on a un problème du type

$$\begin{array}{c} \max\ U(X) \\ PX \leq Y \end{array}$$

où P est une $m \times n$ matrice, $X \in I\!R^n$ et $Y \in I\!R^m$. L'équivalence entre le problème de choix de consommation et portefeuille optimal et le problème de choix sous un système de rationnement a été remarquée par Diamond et Yaari, [19]. Dans les deux exemples précédents, on a un problème de maximisation d'utilité sous plusieurs contraintes.

2.2.2 Choix de consommation et portefeuille optimal

On considère le problème d'un agent (un consommateur) avec deux dates $T = 0, T = 1$. A la date 0, l'agent détermine sa consommation pour les deux périodes ainsi que le montant d'investissement en actifs à risque pour financer partiellement sa consommation en seconde période. Ses ressources à la date 1 dépendent donc de la recette de son portefeuille. En période 1, il y a n états du monde possibles.

Soient c_0 la consommation à la date zéro, c_i la consommation à la date 1 si l'état de monde i se produit. Un profil de consommation est un $n+1$ vecteur positif, $(c_0, ..., c_n)$. Le consommateur est caractérisé par sa fonction d'utilité u qui est supposée au moins de classe C^2, croissante et strictement quasi-concave.

On note y_0 le revenu du consommateur à la date zéro et $y_i, i = 1, ..., n$, le revenu du consommateur à la date 1 si l'état de monde i se produit. Le portefeuille est constitué de m actifs risqués. Soient s_j le montant (en termes de richesse initiale) investi de l'actif j, où $j = 1, ..., m$ et α_{ij} le rendement brut de l'actif j en état de monde i. Le problème du consommateur s'écrit donc sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
&\max\ u(c_0, c_1, ..., c_m) \\
y_0 &= c_0 + s_1 + \cdots + s_m \\
c_1 &= y_1 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j} s_j \\
&\vdots \\
c_n &= y_n + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{nj} s_j
\end{aligned}$$

On tire de la première contrainte c_0 que l'on reporte dans u. Le problème du consommateur s'écrit

$$\begin{gathered}
\max u(y_0 - \textstyle\sum_j s_j, c_1, ..., c_m) \\
c_i = y_i + \textstyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} s_j
\end{gathered}$$

On pose

$$x = (c_1, ..., c_n, -s_1, ..., -s_m)' \in I\!R^{n+m} \tag{2.1}$$
$$y = (y_1, ..., y_n) \tag{2.2}$$

Le vecteur y représente donc le revenu en seconde période. Soit A la matrice de coefficients α_{ij} et P la matrice définie comme suit

$$P = [I, A]$$

où I est la $n \times n$ matrice unité. En utilisant ces notations, le problème du consommateur s'écrit sous la forme:

$$\max \hat{u}(x_1, ..., x_{m+n})$$
$$Px = y$$

On remarque que le problème de choix de consommation et de portefeuille optimal s'écrit sous la forme présentée au début de ce chapitre. Montrons à présent que le problème du rationnement s'écrit aussi sous cette forme.

2.2.3 Le problème du rationnement

La théorie microéconomique classique suppose que le consommateur est libre de choisir les quantités de biens de consommation à des prix donnés. L'individu doit seulement tenir compte de la contrainte budgétaire.

Dans d'autres situations, le consommateur est restreint à respecter certains niveaux de consommation qui sont supérieurs ou inférieurs aux niveaux que le consommateur aurait choisis librement. Le chômeur consommant une grande quantité de loisirs est un exemple du premier cas, tandis que le rationnement de biens de consommation en temps de guerre est un exemple du deuxième cas.

Il y a deux types de rationnement: le rationnement simple (des restrictions exogènes sur la consommation de certains biens) et le rationnement par points (le consommateur dispose de quelques coupons de rationnements).

On peut considérer le deuxième type de rationnement comme le remplacement d'une seule monnaie par plusieurs. Le revenu du consommateur se divise en deux partie: l'argent et les monnaies (ou les devises, ou les coupons) de rationnement. Ce système de rationnement est différent du système où il y a une seule monnaie en plusieurs aspects:

- Le revenu de l'individu est indépendant du travail fourni par lui.

- L'épargne en devise de rationnement est impossible.

Le rationnement peut être considéré comme une procédure permettant d'établir des mesures (ou des objectifs) sociaux. Ces objectifs peuvent être: la réduction de la consommation de certains biens de première nécessité pour éviter la famine, ou l'égalité de consommation.

On peut comparer les effets de rationnement avec celles de certaines taxes, en particulier, la taxe sur le revenu, voir [49]. Les deux types de rationnements seront discutés brièvement:

2.2.4 Le rationnement simple

On considère d'abord le rationnement simple, des restrictions exogènes sur la consommation de certains biens. Le problème individuel dans un monde de rationnement simple s'écrit sous la forme:

$$\max_x \ U(x^1, ..., x^n)$$

sous la contrainte budgétaire

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i x^i = y$$

et la contrainte supplémentaire

$$x^n = \bar{x}^n$$

L'individu est libre de choisir les $n-1$ premiers biens en tenant seulement compte de la contrainte budgétaire. Le $n^{ème}$ bien est rationné. La solution du problème précédent dépend des prix de $x^1, ..., x^{n-1}$, du revenu de l'individu y et de l'attribution $\bar{x}^n$ du bien rationné. Pollak, [43], définit la fonction de demande conditionnelle

$$x^i = f^{i,n}(p_1, ..., p_{n-1}, y, \bar{x}^n) \tag{2.3}$$

On peut, bien entendu, considérer un problème plus général que le précédent où plusieurs biens sont rationnés. Dans ce cas, l'individu maximise $U(x^1, ..., x^n)$ sous les contraintes

$$\sum_{i \in I} p_i x^i = y$$

et

$$x^i = \bar{x}^i, \quad i \in I^*$$

Dans la section qui suit, on introduira le problème de rationnement par points. Dans ce problème, les contraintes budgétaires s'écrivent $p^i.x = y^i$. Supposons que $p^i_j \geq 0 \ \forall i, j$, alors, en prenant $p^i_j = \delta^i_j, i \in I^*$, où δ^i_j est le symbole de Kronecker, on obtient un problème de rationnement simple.
La fonction de demande individuelle est définie comme suit

$$x^i = f^{i,I^*}(P_I, y, X^*)$$

où $P_I = \{p_i, i \in I\}$, $X^* = \{\bar{x}^i, i \in I^*\}$. Les comportements de l'individu agissant sous et sans rationnement peuvent être analysés et comparés à l'aide de la fonction de demande conditionnelle.

Houthakker et Tobin, [32], ont étudié les effets de rationnement sur les élasticités de fonctions de demandes, voir aussi Jackson, [36] et Pollak, [43].

Une autre approche aux problèmes de rationnement de ce type consiste à rechercher un système de «prix virtuels» qui incite l'individu à choisir exactement la quantité pré-attribuée.

2.2.5 Le rationnement par points

Le deuxième type de rationnement est le rationnement par points, l'individu dispose d'un certain nombre de coupons de rationnement. Comme nous l'avons déjà précisé, on peut voir ce problème comme le remplacement d'un système d'une seule monnaie par un système de plusieurs monnaies.

Ce problème de rationnement nous permet d'étudier les conséquences d'imposer plusieurs contraintes sur les comportements de l'individu qui maximise son utilité. Pour analyser les conséquences de la structure de rationnement sur le choix de l'individu, nous considérons le problème de maximisation suivant:

$$\max u(x^1, ..., x^n)$$

sous les contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^i x^j = r^i, \quad i = 0, ..., m$$

où u est la fonction d'utilité de l'individu, x^i est la quantité consommée du bien i, p_j^i est le prix du bien i par rapport à la monnaie j. En particulier, p_j^0 est le prix du bien j en argent et r^i est le revenu en monnaie i. L'individu peut acheter chaque bien par m tickets de rationnement.

C'est ce problème que l'on étudiera dans tout ce qui suit. Ce problème est moins étudié auparavant que le problème de rationnement simple (préallocation des quantités de certains biens).

Nous remarquons que le problème de choix de consommation et de portefeuille optimal prend la même forme. Ce problème généralise le problème de maximisation d'utilité sous une seule contrainte budgétaire. Par conséquent, la question suivante se pose:
Quelles sont les relations qui caractérisent la fonction de demande individuelle obtenue par la résolution du problème de maximisation d'utilité sous les contraintes budgétaires?

Notre objectif est donc de trouver des relations qui caractérisent la solution du problème de maximisation d'utilité sous plusieurs contraintes.

2.3 Exposé du problème

Dans cette section, on introduit le problème de maximisation sous plusieurs contraintes. Comme cela a été précisé auparavant, notre objectif est de trouver les conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire une certaine fonction donnée $X = (x^1, ..., x^n)$, de classe C^∞, pour provenir de la résolution du problème suivant:

$$\begin{cases} \max\ U(X) \\ PX \leq Y \\ x^j \geq 0 \qquad j = 1, ..., n. \end{cases}$$

où $U : I\!R^n_+ \to I\!R$ est la fonction d'utilité, P est une $m \times n$ matrice de rang maximal m (égal au nombre de contraintes $= m < n$), $p^i_j > 0$ et $Y = (y^1, ..., y^m) \in I\!R^m_{++}$.

On suppose que les contraintes de positivité ne sont pas saturées à l'optimum, ce qui nous permet de les supprimer, et que les contraintes $PX \leq Y$ sont saturées. Ces hypothèses nous permettent de récrire notre problème de maximisation sous la forme suivante:

$$(\mathcal{P})_y \begin{cases} \max\ U(X) \\ PX = Y \end{cases}$$

On suppose également que la fonction U satisfait les conditions suivantes:

Hypothèse II. la fonction U est (i) de classe C^∞, (ii) strictement croissante* (iii) U'' est définie négative sur $\nabla U^\perp$. La dernière condition implique que U est strictement quasi-concave.

Une condition de régularité plus faible que (i) suffit. On a besoin que la solution du problème $(\mathcal{P})_y$ soit de classe C^2. Il suffit alors que la fonction d'utilité soit de classe C^3. On démontrera plus loin que si U est de classe C^q, alors X est de classe C^{q-1} en appliquant le théorème des fonctions implicites. Cependant, on continue à supposer que U est de classe C^∞.
Ecrivons le problème $(\mathcal{P})_y$ sous la forme:

$$\max\ U(X)$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^n p^i_j x^j = y^i \quad \forall i = 1, ..., m.$$

En considérant $(\mathcal{P})_y$ comme un problème de rationnement par points, p^i_j est le prix du bien j par rapport à la monnaie i, y^i est la part du revenu de l'individu exprimé

$*$ Pour tout $X, \hat{X} \in I\!R^n_+, X \geq \hat{X}, X \neq \hat{X}, U(X) > U(\hat{X})$

en monnaie i. On introduit la fonction d'utilité indirecte, ou la fonction valeur, notée V, de ce problème qui pour certaines valeurs de $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$, prend la forme:

$$V(P, Y) := max_X\{U(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(y^i - \sum_{j=1}^{n} p_j^i x^j)\} \tag{2.4}$$

où $\lambda_i \geq 0, i = 1, ..., m$, sont les multiplicateurs de Lagrange. On considère la solution, ainsi que les multiplicateurs de Lagrange correspondants, du problème d'optimisation $(\mathcal{P})_y$ comme fonctions de P et Y. On suppose que $\lambda_i > 0, \forall i$.

Soient donc $X(P, Y) = (x^1(P, Y), ..., x^n(P, Y))$ la solution du problème précédent et $\lambda(P, Y) = (\lambda_1(P, Y), ..., \lambda_m(P, Y))$ les multiplicateurs de Lagrange associés à cette solution. Alors, la fonction V est donnée par:

$$V(P, Y) = U(X(P, Y)) + \lambda(P, Y)'(Y - PX(P, Y)) \tag{2.5}$$

Si $X(P, Y)$ est la solution du problème $(\mathcal{P})_y$, alors $V(P, Y) = U(X(P, Y))$. Le reste qui apparait dans l'équation (2.5) est nul. La formule (2.5) de V nous permet de dériver des relations sur lesquelles le travail qui suit sera fondé.

Dans la section suivante, on démontre quelques propriétés de la fonction V.

2.4 Les propriétés de la fonction d'utilité indirecte

La fonction d'utilité indirecte définie précédemment comme l'utilité maximale atteinte sous les contraintes $PX = Y$ satisfait certaines propriétés que l'on démontre dans le théorème suivant:

Théorème 2.4.1 *Soit U une fonction d'utilité satisfaisant les conditions* **(II)** *et V est la fonction d'utilité indirecte correspondante. Alors, la fonction V satisfait les propriétés suivantes:*

(i) De classe C^∞.

(ii) Homogène de degré zéro en $(p^i, y^i), \forall i$.

(iii) Quasi-convexe en (p^i, y^i), $\forall i$.

(iv) Croissante en Y et décroissante en P.

Démonstration. La fonction $U(X)$ est de classe C^∞ par hypothèse, et on démontrera plus bas que $X(P,Y)$ est également de classe C^∞. Alors, $V(P,Y) = U(X(P,Y))$ est aussi de classe C^∞.
(ii) est équivalent aux relations suivantes

$$\sum_j \frac{\partial V}{\partial p_j^i} p_j^i + \frac{\partial V}{\partial y^i} y^i = 0 \quad \forall i \tag{2.6}$$

Cette propriété provient du fait que la multiplication d'une contrainte (ou de plusieurs) par une constante positive ne change pas le sous ensemble sur lequel on maximise, donc la solution et la valeur de ce problème $V(P,Y) = U(X(P,Y))$ sont les mêmes, d'où les relations précédentes.

Montrons maintenant que V est quasi-convexe par rapport à (p^i, y^i) pour tout $i \in \{1, ..., m\}$. On fixe (p^k, y^k) pour tout $k \neq i$. On écrit $V(P^{(i)}, Y^{(i)})$ pour préciser que seuls (p^i, y^i) sont considérés comme variables. La fonction V est quasi-convexe en (p^i, y^i) si et seulement si pour tout $\bar{v} \in I\!R$, le sous-ensemble

$$E = \{(P^{(i)}, Y^{(i)}) \mid V(P^{(i)}, Y^{(i)}) \leq \bar{v}\}$$

est convexe. Soient $(\bar{P}^{(i)}, \bar{Y}^{(i)}) \in E$ et $(\hat{P}^{(i)}, \hat{Y}^{(i)}) \in E$, cela signifie que $V(\bar{P}^{(i)}, \bar{Y}^{(i)}) \leq \bar{v}$ et $V(\hat{P}^{(i)}, \hat{Y}^{(i)}) \leq \bar{v}$. Soit $(\tilde{P}^{(i)}, \tilde{Y}^{(i)})$ tel que

$$\tilde{p}_j^k = \bar{p}_j^k = \hat{p}_j^k, \ \forall k \neq i$$
$$\tilde{y}^k = \bar{y}^k = \hat{y}^k, \ \forall k \neq i$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j^i &= t\bar{p}_j^i + (1-t)\hat{p}_j^i \\ \tilde{y}^i &= t\bar{y}^i + (1-t)\hat{y}^i \end{aligned}$$

où $t \in (0,1)$. Il faut démontrer que $V(\tilde{P}^{(i)}, \tilde{Y}^{(i)}) \leq \bar{v}$. Pour ce faire, on introduit les sous-ensembles suivants:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{X \mid \bar{P}^{(i)} X \leq \bar{Y}^{(i)}\} \\ E_2 &= \{X \mid \hat{P}^{(i)} X \leq \hat{Y}^{(i)}\} \\ E_3 &= \{X \mid \tilde{P}^{(i)} X \leq \tilde{Y}^{(i)}\} \end{aligned}$$

Montrons que $E_3 \subset E_1 \cup E_2$. Supposons que ce ne soit pas le cas, et prenons $X \in E_3$ qui n'appartient ni à E_2 ni à E_3. Cela veut dire que l'on prend X tel que

$$\sum_{j=1}^n (t\bar{p}_j^i + (1-t)\hat{p}_j^i) x^j \leq t\bar{y}^i + (1-t)\hat{y}^i \tag{2.7}$$

et

$$\sum_j \bar{p}^i_j x^j > \bar{y}^i \tag{2.8}$$

$$\sum_j \hat{p}^i_j x^j > \hat{y}^i \tag{2.9}$$

En multipliant (2.8) par t et (2.9) par $(1-t)$ et en prenant la somme, on obtient une contradiction avec (2.7).
On en conclut que

$$\begin{aligned} V(\tilde{P}^{(i)}, \tilde{Y}^{(i)}) &= \max\{U(X) \mid \tilde{P}^{(i)}X \leq \tilde{Y}^{(i)}\} \\ &\leq \max\{U(X) \mid X \in E_2 \cup E_3\} \\ &\leq \bar{v} \end{aligned}$$

ce qui démontre que E est convexe et par conséquent que V est quasi-convexe par rapport à (p^i, y^i) pour tout i.
(iv) Prenons P et $\tilde{P}$ tels que pour certains i et j, $p^i_j > \tilde{p}^i_j$. Alors,

$$E = \{X \mid PX \leq Y\} \subset \tilde{E} = \{X \mid \tilde{P}X \leq Y\} \tag{2.10}$$

d'où

$$\max_{X \in E} U(X) \leq \max_{X \in \tilde{E}} U(X) \tag{2.11}$$

Ce qui montre que V est décroissante en P. On démontre de la même façon que V est croissante en Y. ∎

Remarque 2.4.1 La propriété (iii) du théorème (2.4.1) signifie que la fonction V est quasi-convexe par rapport à (p^i, y^i) séparément. La fonction V n'est pas quasi-convexe globalement en (P, Y). En effet, nous démontrerons dans le chapitre 5 que V satisfait la propriété (Π) définie plus bas. Cette propriété est plus forte que la quasi-convexité en (p^i, y^i), mais plus faible que la quasi-convexité globale en (P, Y). ∎

Définissons la propriété (Π) citée dans la remarque précédente:

Propriété (Π)

La matrice Hessienne de $V(P, Y)$, pour tout $(P, Y) \in \mathbb{R}^{mn}_{++} \times \mathbb{R}^m_{++}$, est semi-définie positive sur l'espace suivant

$$\mathcal{E}(P, Y) = \{(\xi^1, ..., \xi^m, \eta^1, ..., \eta^m) \mid \xi^i . \nabla_{p^i} V(P, Y) + \eta^i \nabla_{y^i} V(P, Y) = 0, \ \forall i \ \} \tag{2.12}$$

avec $\xi^i \in \mathbb{R}^n, \eta^i \in \mathbb{R}$.
On remarque que $\mathcal{E}(P, Y) \subset \nabla V(P, Y)^{\perp}$.

Puisque la fonction U est strictement quasi-concave, le problème $(\mathcal{P})_y$ admet une unique solution $\bar{X} = (\bar{x}^1, ..., \bar{x}^n)$. Dorénavant, on écrit X au lieu de $\bar{X}$. Les hypothèses sur la fonction d'utilité U impliquent en particulier que la solution est de classe C^∞, ainsi que les multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$. C'est ce que l'on démontre, parmi d'autres propriétés, dans la section qui suit.

2.5 Les propriétés de X et λ

2.5.1 La différentiabilité

On commence par démontrer que les fonctions $X, \lambda_1, ..., \lambda_m$ sont de classe C^∞. La diférentiabilité de ces fonctions provient de celle de la fonction d'utilité U ainsi que de la condition de concavité imposée sur U.

Théorème 2.5.1 *Soient X la solution du problème $(\mathcal{P})_y$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange associés. Si la fonction d'utilité U satisfait les conditions (II), alors, les fonctions $X, \lambda_1, ..., \lambda_m$ sont de classe C^∞.*

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites. Les fonctions X et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont caractérisées par les conditions du premier ordre:

$$\nabla U(X) - P'\lambda = 0 \in I\!R^n \tag{2.13}$$

$$PX - Y = 0 \in I\!R^m \tag{2.14}$$

Les relations (2.13) et (2.14) nous donnent $n + m$ équations pour $n + m$ inconnues, $X \in I\!R^n, \lambda \in I\!R^m$. Soit

$$\begin{aligned} F(P, Y, X, \lambda) &= (F_1(X, \lambda), F_2(X, \lambda)) \\ &= (\nabla U(X) - P'\lambda, PX - Y) \end{aligned}$$

Alors,

$$F(P, Y, X, \lambda) = 0 \tag{2.15}$$

Il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites sur la fonction F. Pour ce faire, il faut démontrer que la matrice $D_{X,\lambda}F$ est inversible.

$$\begin{aligned} D_{X,\lambda}F &= \begin{pmatrix} D_X F_1(X,\lambda) & D_\lambda F_1(X,\lambda) \\ D_X F_2(X,\lambda) & D_\lambda F_2(X,\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_X^2 U(X) & -P' \\ P & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où D_X^2U est la matrice Hessienne de U. Cela revient à démontrer que le système linéaire suivant n'admet que la solution triviale

$$D_{\lambda,X}F\begin{pmatrix}\xi_x\\ \xi_\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_X^2U(X) & -P'\\ P & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_x\\ \xi_\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

où $\xi=(\xi_x,\xi_\lambda)$ est un vecteur quelconque de $I\!R^{n+m}$. Le système précédent s'écrit comme suit

$$D_x^2U(X)\xi_x-P'\xi_\lambda = 0\in I\!R^n \tag{2.16}$$

$$P\xi_x = 0\in I\!R^m \tag{2.17}$$

Les relations (2.17) s'écrivent sous la forme suivante

$$\sum_{j=1}^{n}p_j^i\xi_x^j=0\ \ \forall i \tag{2.18}$$

Ce qui implique que $\xi_x\in\nabla U^{\perp}$. En multipliant (à gauche) (2.16) par ξ_x', on obtient

$$\xi_x'D_x^2U\xi_x+\xi_x'P'\xi_\lambda=0 \tag{2.19}$$

Or, $\xi_x'P=0$. Alors,

$$\xi_x'D_x^2U\xi_x=0 \tag{2.20}$$

Cela implique que $\xi_x=0$ parce que $D_x^2U<0$ sur $\nabla U^{\perp}$. Il faut démontrer également que $\xi_\lambda=0$. Pour $\xi_x=0$, le système d'équations (2.16) devient

$$P'\xi_\lambda=0 \tag{2.21}$$

Puisque la matrice P est de rang maximal m, alors l'unique solution de ce système est $\xi_\lambda=0$. Le système (2.16), (2.17) n'admet alors que la solution $\xi_x=0,\xi_\lambda=0$. La matrice $D_{X,\lambda}F$ est donc inversible. Par conséquent, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites qui implique que les fonctions $X,\lambda_1,...,\lambda_m$ sont de classe C^∞. ∎

Nous avons donc démontré que si U est de classe C^∞ et si sa matrice Hessienne est définie négative sur l'espace orthogonal à son gradient, alors, X et $\lambda_1,...,\lambda_m$ sont aussi de classe C^∞. D'autres propriétés seront données dans la section qui suit. On remarque que l'on obtient le même résultat si D^2U est définie négative sur $\ker(P)$.

2.5.2 Les propriétés liées à la linéarité des contraintes

Nous démontrons quelques propriétés qui découlent de la linéarité des contraintes. En particulier, l'homogénéité de degré zéro de la fonction X par rapport à (p^i, y^i), pour tout i.

Lemme 2.5.1 *Soit X la solution du problème $(\mathcal{P})_y$. Alors, elle satisfait les relations suivantes:*

$$\sum_l \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} p_l^k + \frac{\partial x^j}{\partial y^k} y^k = 0 \tag{2.22}$$

$$\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} p_j^i + x^l \delta_k^i = 0 \tag{2.23}$$

$$\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^k} p_j^i = \delta_k^i \tag{2.24}$$

où δ_k^i est le symbole de Kronecker.

Démonstration. La fonction X satisfait les contraintes

$$\sum_j p_j^i x^j = y^i \tag{2.25}$$

La multiplication d'une (ou de plusieurs) contrainte par une constante positive ne change pas la solution du problème. Alors, la fonction X satisfait (2.24). En dérivant les relations (2.25) par rapport à p_l^k, on obtient (2.23), et en dérivant par rapport à y^k, on obtient (2.24). ∎

Les fonctions $\lambda_1, ..., \lambda_m$ satisfont les conditions d'homogénéité données par le lemme suivant

Lemme 2.5.2 *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange associés à la solution du problème $(\mathcal{P})_y$. Alors, ces fonctions satisfont les conditions d'homogénéité suivantes*

$$\sum_l \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_l^k} p_l^k + \frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} y^k + \lambda_i \delta_k^i = 0 \qquad \forall 1 \leq i, k \leq m \tag{2.26}$$

Démonstration. Les relations précédentes résultent du fait que $\lambda_i = \frac{\partial V}{\partial y^i}$ et $\frac{\partial V}{\partial y^i}$ est homogène de degré -1 par rapport aux variables (p^i, y^i) et homogène de degré zéro par rapport aux variables (p^k, y^k), $\forall k \neq i$, où p^k est la $k^{ème}$ ligne de la matrice P. Ces conditions d'homogénéité se traduisent par les relations (2.26). Cela finit la démonstration. ∎

2.5.3 Le théorème de l'enveloppe

Nous recherchons maintenant des relations qui caractérisent, avec, bien entendu, les propriétés du théorème (2.4.1), la fonction valeur du problème de maximisation sous plusieurs contraintes. Ces relations découlent du théorème de l'enveloppe. On a le théorème suivant:

Théorème 2.5.2 *Soient V la fonction valeur du problème $(\mathcal{P})_y$, X la solution de ce problème et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange associés. Alors, on a les relations suivantes*

$$\frac{\partial V}{\partial p^i_j} = -\lambda_i x^j \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y^i} = \lambda_i \tag{2.28}$$

Démonstration. Rappelons que V est donnée par

$$V(P,Y) = U(X(P,Y)) + \lambda(P,Y)'(Y - PX(P,Y)) \tag{2.29}$$

En dérivant V par rapport à P et Y, et en réarrangeant les différents termes, on obtient:

$$\begin{aligned}
\nabla_P V(P,Y) &= (D_P X)'(\nabla_X U(X) - P'\lambda) + (D_P\lambda)'(Y - PX) - (\lambda * X)' \\
&= -(\lambda * X)' \qquad (2.30) \\
\nabla_Y V(P,Y) &= (D_Y X)'(\nabla_X U(X) - P'\lambda) + D_Y\lambda(Y - PX) + \lambda \\
&= \lambda \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

où $\lambda * X = (\lambda_1 X, \lambda_2 X, ..., \lambda_m X) \in I\!R^{mn}$. Les conditions d'optimalité du premier ordre sont données par

$$\nabla_X U(X) - P'\lambda = 0 \tag{2.32}$$

Par hypothèse, les contraintes budgétaires sont saturées à l'optimum. Alors,

$$PX - Y = 0 \tag{2.33}$$

En utilisant (2.32) et (2.33), les équations (2.30) et (2.31) s'écrivent sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\nabla_P V(P,Y) &= -(\lambda * X)' \\
\nabla_Y V(P,Y) &= \lambda
\end{aligned}$$

Ces équations donnent les relations (2.27) et (2.28). Cela finit la démonstration. ∎

Remarque 2.5.1

- Les relations (2.27) et (2.28) impliquent que

$$\frac{\partial V}{\partial p_j^i} + \frac{\partial V}{\partial y^i} x^j = 0 \tag{2.34}$$

Ce sont, en effet, les conditions d'optimalité du premier ordre du problème de minimisation $\min_P V(P, PX)$, voir [19].

- Les relations (2.27) et (2.28) nous donnent une généralisation de l'identité de Roy:

$$x^j = -\frac{\partial V / \partial p_j^i}{\partial V / \partial y^i} \tag{2.35}$$

On en déduit que le quotient dans l'équation précédente ne dépend pas de i.

- En multipliant (2.27) par p_j^i et en prenant la somme sur j, on obtient

$$\sum_j \frac{\partial V}{\partial p_j^i} p_j^i = -\lambda_i y^i \tag{2.36}$$

On peut donc récrire (2.35) sous la forme

$$x^j = y^i \frac{\partial V / \partial p_j^i}{\sum_{j'} \frac{\partial V}{\partial p_{j'}^i} p_{j'}^i} \tag{2.37}$$

Les équations (2.28) et (2.36) impliquent que

$$\sum_j \frac{\partial V}{\partial p_j^i} p_j^i = -\lambda_i y^i = -\frac{\partial V}{\partial y^i} y^i \tag{2.38}$$

On en déduit que

$$\sum_j \frac{\partial V}{\partial p_j^i} p_j^i + \frac{\partial V}{\partial y^i} y^i = 0 \tag{2.39}$$

C'est la condition d'homogénéité de degré zéro en (p^i, y^i). ∎

2.6 Le problème d'intégration: la formulation différentielle

La fonction valeur du problème $(\mathcal{P})_y$ est caractérisée par les relations (2.27) et (2.28), avec, bien entendu, des conditions de convexité. Trouver une fonction satisfaisant ces relations revient alors à résoudre un problème d'intégration. On utilise les relations (2.27) et (2.28) pour récrire le problème d'integrabilité sous une forme qui nous permet d'appliquer des théorèmes connus en équations aux dérivées partielles, en particulier le théorème de Frobenius.
La différentielle de la fonction V est donnée par:

$$dV = \sum_{i,j} \frac{\partial V}{\partial p^i_j} dp^i_j + \sum_i \frac{\partial V}{\partial y^i} dy^i$$

En utilisant les relations (2.27) et (2.28), on peut écrire dV comme suit:

$$dV(P,Y) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(P,Y) \left(\sum_{j=1}^{n} x^j(P,Y) dp^i_j - dy^i \right) \tag{2.40}$$

Nous utiliserons, comme nous l'avons déjà précisé, le calcul différentiel extérieur d'Elie Cartan, [9], [11], [23] et [41]. Pour $X = (x^1, ..., x^n)$ donné, on définit les 1-formes $\omega^1, ..., \omega^m$ par:

$$\omega^i : = \sum_{j=1}^{n} x^j(P,Y) dp^i_j - dy^i \tag{2.41}$$

où $\omega^i \in T^*\mathbb{R}^{m(n+1)}$, $\forall i$. Les 1-formes $\omega^1, ..., \omega^m$ sont linéairement indépendantes puisque $\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m \neq 0$. On remarque, en développant le produit $\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m$, que le terme $(-1)^m dy^1 \wedge ... \wedge dy^m$ ne s'annule jamais.
En utilisant les formes différentielles $\omega^1, ..., \omega^m$, on peut récrire la différentielle de V comme suit:

$$dV(P,Y) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(P,Y) \omega^i(P,Y) \tag{2.42}$$

Cette condition signifie que la différentielle de V appartient au $span\{\omega^1, ..., \omega^m\}$, l'espace linéaire engendré par $\{\omega^1, ..., \omega^m\}$. On peut aussi récrire cette condition sous la forme $dV \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m = 0$; il suffit de multiplier (2.42) par $\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m$.

Le problème que l'on se pose à présent est de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction V satisfaisant la propriété (Π) et m

fonctions positives $\lambda_1, ..., \lambda_m$ telles que

$$dV = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega^i \tag{2.43}$$

On résout ce problème en deux étapes: la première étape consiste à donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ satisfaisant la décomposition (2.43), sans qu'elles satisfassent nécessairement les conditions de convexité et de positivité précédentes (intégration mathématique). Ces conditions supplémentaires seront ensuite prises en compte (intégration économique).

On commence par donner un ensemble de conditions nécessaires satisfaites par la solution du problème $(\mathcal{P})_y$.

Pour alléger les notations, on fixe les rangs des indices. Dans tout ce qui suit, on aura, $1 \leq i, k, k' \leq m$ et $1 \leq j, j', l, l' \leq n$.

2.7 Les relations de Slutsky généralisées

Le théorème suivant donne un premier ensemble de conditions nécessaires satisfaites par la solution du problème $(\mathcal{P})_y$. Nous appelons ces conditions les relations de Slutsky généralisées.

Ce résultat est une généralisation des relations de Slutsky au sens où si $m = 1$, ces relations se réduisent à celles de Slutsky. Toutefois, ces relations ne sont pas suffisantes si $m > 1$. Les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, ..., \lambda_m$, associés à la solution X, apparaissent dans ces relations.

Théorème 2.7.1 *Soient X la solution du problème $(\mathcal{P})_y$ et $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ les multiplicateurs de Lagrange associés. Alors, (X, λ) satisfont les conditions nécessaires suivantes:*

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} + \frac{\partial x^j}{\partial y^k} x^l \right) = \lambda_k \left(\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j \right) \quad \forall 1 \leq i, k \leq m, \ 1 \leq j, l \leq n \tag{2.44}$$

Démonstration. Pour (X, λ) données, on définit les 1-formes $\omega^1, ..., \omega^1$ par (2.41). Le théorème de l'enveloppe implique que:

$$dV = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega^i$$

où V est la fonction valeur du problème $(\mathcal{P})_y$. Alors, en prenant la dérivée extérieure de l'équation précédente, on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i d\omega^i + \sum_{i=1}^{m} d\lambda_i \wedge \omega^i = 0 \tag{2.45}$$

Les 1-formes ω^i sont données par la formule (2.41). La dérivée extérieure de la 1-forme ω^i est la 2-forme suivante

$$d\omega^i = \sum_{j,k,l} \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} dp_l^k \wedge dp_j^i + \sum_{j,k} \frac{\partial x^j}{\partial y^k} dy^k \wedge dp_j^i \tag{2.46}$$

Alors,

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i = \sum_{\substack{i \leq k \\ j \leq l}} \left(\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} - \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} \right) dp_l^k \wedge dp_j^i + \sum_{i,j,k} \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} dy^k \wedge dp_j^i. \tag{2.47}$$

On a également

$$\sum_i d\lambda_i \wedge \omega^i = \sum_{i,k,l} \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_l^k} dp_l^k + \frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} dy^k \right) \wedge \sum_j \left(x^j dp_j^i - dy^i \right) \tag{2.48}$$

En développant ce produit et en regroupant les termes correspondants, on obtient

$$\sum_i d\lambda_i \wedge \omega^i = \sum_{\substack{i \leq k \\ j \leq l}} \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_l^k} x^j - \frac{\partial \lambda_k}{\partial p_j^i} x^l \right) dp_l^k \wedge dp_j^i$$

$$- \sum_{i<k} \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial y^i} \right) dy^k \wedge dy^i + \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} x^j + \frac{\partial \lambda_k}{\partial p_j^i} \right) dy^k \wedge dp_j^i \tag{2.49}$$

Cela implique alors que $\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i d\lambda_i \wedge \omega^i = 0$ s'écrit comme suit

$$\sum_{\substack{i \leq k \\ j \leq l}} \left(\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} - \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_l^k} x^j - \frac{\partial \lambda_k}{\partial p_j^i} x^l \right) dp_l^k \wedge dp_j^i +$$

$$\sum_{i,j,k} \left(\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} x^j + \frac{\partial \lambda_k}{\partial p_j^i} \right) dy^k \wedge dp_j^i + \sum_{i<k} \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial y^i} \right) dy^k \wedge dy^i = 0 \tag{2.50}$$

Tous les coefficients de l'équation précédente s'annulent.

On en déduit donc les relations suivantes: pour tout $1 \leq i, k \leq m$ et $1 \leq j, l \leq n$

$$\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} - \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_l^k} x^j - \frac{\partial \lambda_k}{\partial p_j^i} x^l = 0 \tag{2.51}$$

$$\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} x^j + \frac{\partial \lambda_k}{\partial p_j^i} = 0 \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial y^i} = 0 \tag{2.53}$$

Les relations (2.52) et (2.53) impliquent que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_l^k} x^j - \frac{\partial \lambda_k}{\partial p_j^i} x^l &= \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} x^l - \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j + \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial y^i} \right) x^j x^l \\ &= \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} x^l - \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j \end{aligned}$$

On reporte cette équation dans (2.51), ce qui nous donne

$$\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} - \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} x^l - \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j = 0$$

d'où

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} + \frac{\partial x^j}{\partial y^k} x^l \right) = \lambda_k \left(\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j \right)$$

On obtient donc les relations recherchées. ∎

Définition 2.7.1 *On appelle λ_{ik} le quotient*

$$\lambda_{ik} = \frac{\lambda_i}{\lambda_k}, \quad i, k = 1, ..., m. \tag{2.54}$$

où les fonctions $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés à la solution du problème $(\mathcal{P})_y$.

Par définition, on a $\lambda_{ii} = 1$ et $\lambda_{ik} = 1/\lambda_{ki}$. Les fonctions λ_{ik}, $i < k \leq m$, interviennent dans les conditions (2.44). Nous verrons que d'autres conditions portent sur ces fonctions. Donnons quelques remarques sur les conditions nécessaires que nous avons obtenues jusqu'à maintenant.

Remarque 2.7.1

(1) Pour $i = k$, les relations précédentes s'écrivent:$\forall i = 1, ..., m$

$$\frac{\partial x^j}{\partial p_l^i} + \frac{\partial x^j}{\partial y^i} x^l = \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j \quad \forall 1 \leq j, l \leq n.$$

Cela veut dire que pour chaque contrainte, il existe une matrice symétrique du type de Slutsky.

(2) Pour $i \neq k$, on a

$$\frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} + \frac{\partial x^j}{\partial y^k} x^l = \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \left(\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j \right) = \lambda_{ki} \left(\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j \right)$$

Alors, toutes ces matrices sont proportionnelles.

(3) Dans le cadre économique du problème, X est la fonction de demande individuelle. Cette fonction est observable, ce qui implique que λ_{ik}, $1 \leq i < k \leq m$, le sont aussi. De plus, ces fonctions sont uniques.

(4) On verra que les conditions précédentes ne sont pas suffisantes. Il existe d'autres conditions qui forment avec (2.44) l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes.
Les conditions supplémentaires porteront sur les fonctions X et λ_{ik}. L'avantage d'avoir des conditions d'intégrabilité sur les fonctions λ_{ik} est que ces fonctions sont observables et uniques tandis que les fonctions λ_i ne sont pas uniques.

2.7.1 L'interprétation économique

On peut récrire les relations de Slutsky généralisées comme suit

$$\frac{S_k^{jl}}{S_i^{jl}} = \frac{\lambda_k}{\lambda_i} > 0 \tag{2.55}$$

En utilisant les notions de dérivées compensées, les relations précédentes s'écrivent

$$\frac{\left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^k}\right)_{y^k-comp}}{\left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^i}\right)_{y^i-comp}} = \frac{\lambda_k}{\lambda_i} > 0 \tag{2.56}$$

où

$$\left.\frac{\partial x^j}{\partial p_l^k}\right]_{y^k-comp} = \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} + \left.\frac{\partial y^k}{\partial p_l^k}\right]_{V\ const} \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \tag{2.57}$$

En utilisant les contrainte $PX = Y$, on obtient

$$\frac{\partial y^k}{\partial p_l^k} = x^l \tag{2.58}$$

Lorsque l'on a dérivé les contraintes $p^iX = y^i$, $i \leq m$ afin d'obtenir les relations précédentes, on n'a pas considéré X comme fonction de P, mais comme paramètre. Les conditions (2.56) signifient que si deux biens sont substituables ou complémentaires par rapport à une seule monnaie, alors ils le sont par rapport aux autres.

2.7.2 Formulation du problème de l'intégration

Les conditions du théorème (2.7.1) ne sont pas suffisantes si $m > 1$. Lorsque $m = 1$, on obtient les relations de Slutsky. Il faut rajouter des conditions de symétrie sur les fonctions λ_{ik}. S'il existe une fonction V répondant au problème, alors

$$\lambda_{ik} = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} = \frac{\partial V/\partial y^i}{\partial V/\partial y^k}$$

Le problème que l'on cherche à résoudre, à ce stade, est donc le suivant: Etant donnée X, existe-t-il une fonction V et m fonctions $\lambda_1, ..., \lambda_m$ telles que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_j^i} &= -\lambda_i x^j, \quad i = 1, ..., m, \; j = 1, ..., n. \\ \frac{\partial V}{\partial y^i} &= \lambda_i, \quad i = 1, ..., m. \end{aligned}$$

En d'autres termes, les fonctions V et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ que l'on recherche doivent satisfaire la décomposition suivante:

$$dV = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega^i \tag{2.59}$$

Comme nous l'avons souligné précédemment, il existe deux types d'intégration; l'intégration mathématique et l'intégration économique. On définit chaque type d'intégration lié au problème de maximisation sous plusieurs contraintes.

1. L'intégration mathématique:
   Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe $m + 1$ fonctions $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ telles que $dV = -\sum_{i=1}^m \lambda_i \omega^i$?

2. L'intégration économique:
   Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction V satisfaisant la propriété (Π), et m fonctions positives $\lambda_1, ..., \lambda_m$ telles que $dV = -\sum_{i=1}^m \lambda_i \omega^i$?

Le chapitre qui suit sera consacré à la résolution du problème d'intégration mathématique.

Chapitre 3

Intégration mathématique

3.1 Introduction

Notre objectif, à présent, est de résoudre le problème d'intégration mathématique posé dans le chapitre précédent. Nous donnerons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $m+1$ fonctions $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ satisfaisant la décomposition

$$dV = -\sum_i \lambda_i \omega^i \tag{3.1}$$

sans que les fonctions V et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ satisfassent nécessairement les conditions supplémentaires: D^2V est semi-définie positive sur $\mathcal{E}$, cf. le chapitre précédent, et la positivité des fonctions $\lambda_1, ..., \lambda_m$.

La section qui suit sera consacrée à la démonstration de l'équivalence entre les relations $\lambda_i S_k = \lambda_k S_i'$ et la condition $\sum_{i=1}^m \lambda_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m = 0$. Ensuite, les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique seront données.

3.2 Un résultat préliminaire

Nous avons démontré précédemment que la décomposition $dV = -\sum \lambda_i \omega^i$ implique les relations de Slutsky généralisées. Dans le lemme qui suit, on démontrera l'équivalence entre les relations de Slutsky généralisées et la condition $\sum_{i=1}^m \lambda_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m = 0$ obtenue à partir de la décomposition précédente.

Lemme 3.2.1 *Soient $X(P,Y)$ une fonction donnée de classe C^∞, homogène de degré zéro en $(p^i, y^i), \forall i$, et $\omega^1, ..., \omega^m$ les 1-formes différentielles définies par (2.41) et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des fonctions données. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:*

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} + \frac{\partial x^j}{\partial y^k} x^l \right) = \lambda_k \left(\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j \right) \quad \forall i, j, k, l \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m = 0 \tag{3.3}$$

Démonstration. Montrons d'abord que (3.2) implique (3.3). Supposons qu'il existe X et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ satisfaisant les relations (3.2). Par hypothèse, la fonction X satisfait les conditions d'homogénéité suivantes:

$$\sum_j \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} p_j^i + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} y^i = 0 \quad \forall i, l \tag{3.4}$$

d'où

$$\frac{\partial x^l}{\partial y^i} = -\frac{1}{y^i}\sum_j \frac{\partial x^l}{\partial p^i_j} p^i_j \tag{3.5}$$

Alors, les relations (3.2) s'écrivent sous la forme équivalente:

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial p^k_l} - \frac{1}{y^k}\sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^l \right) = \lambda_k \left(\frac{\partial x^l}{\partial p^i_j} - \frac{1}{y^i}\sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} x^j \right) \tag{3.6}$$

Soit β_i la forme linéaire définie par

$$\beta_i = \frac{1}{y^i}\sum_{j',k,l} \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} dp^k_l \tag{3.7}$$

Explicitons la 2-forme

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d\omega^i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \wedge \omega^i \tag{3.8}$$

On a d'abord

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i = \sum_{i,j,k,l} \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p^k_l} dp^k_l \wedge dp^i_j + \sum_{i,j,k} \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} dy^k \wedge dp^i_j \tag{3.9}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_i \beta_i \wedge \omega^i &= \sum_{i,k,l} \frac{1}{y^i} \sum_{j'} \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} dp^k_l \wedge \sum_j x^j dp^i_j - dy^i \\ &= \sum_{i,j,k,l,j'} \frac{\lambda_k}{y^i} \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} x^j dp^k_l \wedge dp^i_j - \sum_{i,j',k,l} \frac{\lambda_k}{y^i} \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} dp^k_l \wedge dy^i\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}-\sum_{i,j',k,l} \frac{1}{y^i} \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} dp^k_l \wedge dy^i &= \sum_{i,k,l} \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial y^i} dp^k_l \wedge dy^i \\ &= -\sum_{i,j,k} \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} dy^k \wedge dp^i_j\end{aligned}$$

Alors,

$$\sum_i \beta_i \wedge \omega^i = \sum_{i,j,k,l,j'} \frac{1}{y^i} \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} x^j dp^k_l \wedge dp^i_j - \sum_{i,j,k} \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} dy^k \wedge dp^i_j \tag{3.10}$$

En prenant la somme de (3.9) et (3.10), on voit que σ s'écrit comme suit

$$\sigma = \sum_{i,j,k,l} \left(\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p^k_l} + \sum_{j'} \frac{1}{y^i} \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} x^j \right) dp^k_l \wedge dp^i_j \tag{3.11}$$

Les relations (3.6) impliquent que

$$\sigma = \sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i \beta_i \wedge \omega^i = 0 \tag{3.12}$$

Il suffit de multiplier l'équation précédente par $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m$ pour obtenir (3.3). Il reste à démontrer que (3.3) implique (3.2). Supposons que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0 \tag{3.13}$$

Cette équation signifie que la 2-forme $\delta = \sum_i \lambda_i d\omega^i$ appartient à $\mathcal{I}_2[\omega^1, ..., \omega^m]$, l'espace de 2-formes engendré par $\omega^1, ..., \omega^m$. En d'autres termes, il existe m formes linéaires $\gamma_1, ..., \gamma_m$ telles que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i d\omega^i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \wedge \omega^i = 0 \tag{3.14}$$

Les 1-formes γ_i, $\forall i$, s'écrivent en termes de la base canonique de l'espace de 1-formes sur $T\mathbb{R}^{mn}$ sous la forme

$$\gamma_i = \sum_{k,l} g^l_{ik} dp^k_l + \sum_k g_{ik} dy^k \tag{3.15}$$

où $g^l_{ik}, g_{ik}, \forall i, k, l$, sont des fonctions de classe C^∞. L'équation (3.15) nous permet d'écrire (3.14) comme suit:

$$\sum_{i,j,k,l} \left(\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p^k_l} + g^l_{ik} x^j \right) dp^k_l \wedge dp^i_j + \sum_{i,k} g_{ik} dy^i \wedge dy^k$$
$$+ \sum_{i,j,k} \left(\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} + g_{ik} x^j + g^j_{ki} \right) dy^k \wedge dp^i_j = 0 \tag{3.16}$$

On en déduit les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p^k_l} - \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p^i_j} + g^l_{ik} x^j - g^j_{ki} x^l &= 0 && (3.17) \\ \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} + g_{ik} x^j + g^j_{ki} &= 0 && (3.18) \\ g_{ik} - g_{ki} &= 0 && (3.19) \end{aligned}$$

Il suffit de substituer (3.18) dans (3.17) et d'utiliser (3.19) pour obtenir (3.2). ∎

3.3 Les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique

Avant de donner les conditions suffisantes de l'intégration mathématique, on introduit quelques notations que nous utiliserons dans la suite:
Soit

$$S_k^{jl} = \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} + \frac{\partial x^j}{\partial y^k} x^l \tag{3.20}$$

Les conditions du théorème (2.7.1) s'écrivent comme suit

$$\lambda_i S_k^{jl} = \lambda_k S_i^{lj} \tag{3.21}$$

Remarque 3.3.1 On remarque que les conditions (3.21) sont invariantes par la transformation $\lambda_i \to \alpha\lambda_i$, où α est une fonction quelconque. Cela correspond au phénomène geométrique suivant:
Soient X la solution du problème $(\mathcal{P})_y$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange associés et V la fonction valeur. Alors, $dV \in span\{\omega^1, ..., \omega^m\}$, l'espace vectoriel engendré par $\omega^1, ..., \omega^m$. Cette condition est équivalente à la suivante:

$$dV \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m = 0 \tag{3.22}$$

Cela implique que $\mu dV \in span\{\omega^1, ..., \omega^m\}$, où μ est une fonction non nulle. Montrons maintenant que la condition $\mu dV \in span\{\omega^1, ..., \omega^m\}$ implique les relations de Slutsky généralisées. Supposons que l'on ait la décomposition

$$\mu dV = \sum_i \lambda_i \omega^i \tag{3.23}$$

Le théorème de Frobenius implique que

$$\sum_i \lambda_i \omega^i \wedge d\left(\sum_k \lambda_k \omega^k\right) = 0 \tag{3.24}$$

Cette équation s'écrit

$$\sum_i \lambda_i \omega^i \wedge \sum_k \left(\lambda_k d\omega^k + d\lambda_k \wedge \omega^k\right) = 0 \tag{3.25}$$

Ecrivons ce produit sous la forme

$$\sum_{i,k} \lambda_k d\omega^k \wedge \left(\sum_i \lambda_i \omega^i\right) + \sum_{i,k} \lambda_i d\lambda_k \wedge \omega^k \wedge \omega^i = 0 \tag{3.26}$$

En multipliant l'équation précédente par $\omega^2 \wedge ... \wedge \omega^m$, on obtient

$$\lambda_1 \sum_k \lambda_k d\omega^k \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge ... \wedge \omega^m = 0 \tag{3.27}$$

d'où

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m = 0 \tag{3.28}$$

D'après le lemme (3.2.1), cette équation implique les conditions suivantes:

$$\lambda_i S_k^{jl} = \lambda_k S_i^{lj} \tag{3.29}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes que nous allons donner sont invariantes par ce genre de changement. ∎

On définit une famille de 1-formes Ω^{jl} comme suit:

$$\Omega^{jl} = \sum_{i=1}^{m} S_i^{jl} \omega^i \quad j \leq l \leq n \tag{3.30}$$

où $\omega^i, i \leq m$, sont les 1-formes différentielles définies par

$$\omega^i = \sum_j x^j dp_j^i - dy^i \tag{3.31}$$

Ces formes différentielles sont définies en utilisant X et ses dérivées partielles:

$$\Omega^{jl} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^i} + \frac{\partial x^j}{\partial y^i} x^l \right) \left(\sum_{j'} x^{j'} dp_{j'}^i - dy^i \right) \tag{3.32}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes sont données par le théorème suivant:

Théorème 3.3.1 *Soient X la solution du problème $(\mathcal{P})_y$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange associés et V la fonction valeur de ce problème. On définit les 1-formes $\omega^1, ..., \omega^m$ par (3.31). On suppose que pour certains $j, l, k, S_k^{jl} \neq 0$. Alors, la décomposition*

$$dV = -\sum_i \lambda_i \omega^i \tag{3.33}$$

implique que

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m = 0 \tag{3.34}$$

$$\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0 \quad \forall j, l \leq n \tag{3.35}$$

Réciproquement, si $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0, \forall j, l$, $S_i = \lambda_{ik} S_k, \forall i, k$ et $PX(P, Y) = Y$, dans un voisinage, noté $\mathcal{U}$, d'un point donné $(\bar{P}, \bar{Y})$, alors, il existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ et $m+1$ fonctions $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ définies sur $\mathcal{V}$ satisfaisant la décomposition (3.33), où $\lambda_{ik} = \lambda_i / \lambda_k$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $m+1$ fonctions $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ et X satisfaisant les conditions du théorème et la décomposition (3.33). Alors,

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^m = 0 \tag{3.36}$$

D'après le lemme précédent, cette équation implique les conditions suivantes:

$$\lambda_i S_k^{jl} = \lambda_k S_i^{lj} \tag{3.37}$$

Par hypothèse, on a pour certains j, k, l, $S_k^{jl} \neq 0$. Alors,

$$\lambda_i = \frac{S_i^{lj}}{S_k^{jl}} \lambda_k \quad \forall i, k \tag{3.38}$$

Prenons, par exemple, $k = 1$, toutes les fonctions $\lambda_2, ..., \lambda_m$ sont proportionnelles à λ_1:

$$\lambda_i = \frac{S_i^{jl}}{S_1^{lj}} \lambda_1 \quad \forall i = 1, ..., m \tag{3.39}$$

On en déduit que la décomposition $dV = -\sum \lambda_i \omega^i$ s'écrit comme suit

$$dV = -\frac{\lambda_1}{S_1^{jl}} \sum_i S_i^{lj} \omega^i \tag{3.40}$$

Cela implique que $\forall j, l$, Ω^{jl} est colinéaire à dV

$$\mu^{jl} dV = \Omega^{jl} \tag{3.41}$$

D'après le théorème de Frobenius, Ω^{jl} est colinéaire à un gradient si et seulement si $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0$. On obtient donc les conditions nécessaires indiquées.
Pour démontrer la suffisance, supposons que

$$\begin{aligned} \Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} &= 0 \;\; \forall j, l \\ S_i &= \lambda_{ik} S'_k \end{aligned}$$

Alors, $\forall\ j, l$, il existe deux fonctions φ^{jl} et V telles que

$$\varphi^{jl} dV = \sum_i S_i^{jl} \omega^i \quad \forall j, l \tag{3.42}$$

On verra plus loin que seule la fonction φ^{jl} dépend des exposants j, l. Cela étant vrai pour tout j, l, on fixe $j = j_0, l = l_0$ que l'on supprime pour alléger les notations.
Soit

$$\zeta^k = \sum_{j'} p_{j'}^k \frac{\partial}{\partial p_{j'}^k}$$

Les contraintes $PX = Y$ impliquent que $< \omega^i, \zeta^k >= y^k \delta^i_k$. En appliquant la forme linéaire (3.42) au champ de vecteurs ζ^k, on obtient

$$\varphi < dV, \zeta^k >= S_k y^k$$

d'où

$$\varphi = \frac{1}{< dV, \zeta^k >} y^k S_k \tag{3.43}$$

En substituant pour φ dans (3.42), on obtient

$$\frac{1}{< dV, \zeta^k >} y^k S_k dV = \sum_i S_i \omega^i \tag{3.44}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \frac{y^k}{< dV, \zeta^k >} dV &= \sum_i \frac{S_i}{S_k} \omega^i \\ &= \sum_i \lambda_{ik} \omega^i \end{aligned}$$

En appliquant la 1-forme précédente au champ de vecteurs $\zeta^{k'}$, on obtient

$$\frac{y^k}{< dV, \zeta^k >} < dV, \zeta^{k'} >= y^{k'} \lambda_{k'k} \tag{3.45}$$

d'où

$$\lambda_{ik} = \frac{y^k < dV, \zeta^i >}{y^i < dV, \zeta^k >}$$

On a donc

$$\frac{y^k}{< dV, \zeta^k >} dV = \sum_i \frac{y^k < dV, \zeta^i >}{y^i < dV, \zeta^k >} \omega^i \tag{3.46}$$

En multipliant par $\frac{< dV, \zeta^k >}{y^k}$, on obtient la décomposition

$$dV = -\sum_i \lambda_i \omega^i \tag{3.47}$$

où $\lambda_i = -\frac{1}{y^i} < dV, \zeta^i > \cdot$ Montrons enfin que les fonctions $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ possèdent les propriétés d'homogénéité requises. On a, d'une part,

$$\lambda_i = -\frac{1}{y^i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial p^i_j} p^i_j \tag{3.48}$$

et d'autre part

$$\lambda_i = \frac{\partial V}{\partial y^i} \tag{3.49}$$

Les équations (3.48) et (3.49) impliquent que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial p_j^i} p_j^i + \frac{\partial V}{\partial y^i} y^i = 0$$

Alors, V est homogène de degré zéro en (p^i, y^i), $\forall i$. Cela implique, avec l'équation (3.49), que, pour tout i, la fonction λ_i est homogène de degré -1 en (p^i, y^i) et de degré zéro en (p^k, y^k), $\forall k \neq i$. Cela finit la démonstration. ∎

Le théorème précédent dit que les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique sont les suivantes:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0 \quad (3.50)$$

$$\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0 \quad (3.51)$$

Remarque 3.3.2 Les conditions $\lambda_i S_k^{jl} = \lambda_k S_i^{jl}$ impliquent que

$$\frac{S_k^{jl}}{S_i^{lj}} = \frac{\lambda_k}{\lambda_i} : = \lambda_{ki}$$

On en déduit alors que le quotient $\frac{S_k^{jl}}{S_i^{lj}}$ est indépendant des exposants jl. Cela nous permet d'obtenir des conditions indépendantes de jl, qui portent sur les fonctions X et λ_{ik}. ∎

Le lemme suivant donne des conditions d'homogénéité satisfaites par λ_{ik}. Ces conditions proviennent de l'homogénéité de $\lambda_i, \forall i$, de degré -1 en (p^i, y^i) et de degré zéro en $(p^k, y^k), \forall k \neq i$.

Lemme 3.3.1 *Les fonctions λ_{ik} définies précédemment satisfont les conditions d'homogénéité suivantes:*

$$\sum_j \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_j^{k'}} p_j^{k'} + \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}} y^{k'} = \lambda_{k'k} \delta_k^{k'} - \lambda_{ik} \delta_i^{k'} \quad (3.52)$$

Démonstration. La fonction λ_{ik} est homogène de degré -1 en (p^i, y^i), homogène de degré 1 en (p^k, y^k) et homogène de degré zéro en $(p^{k'}, y^{k'})$ pour tout $k' \neq i, k' \neq k$. ∎

Les conditions $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0$ et $\sum_i \lambda_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0$ seront explicitées dans la section suivante.

3.4 Les conditions nécessaires et suffisantes explicitées

Bien que les conditions nécessaires et suffisantes exigent que $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0$ pour tout j et l, ces conditions peuvent être écrites comme conditions qui portent sur les fonctions X et λ_{ik}. Si ces conditions sont satisfaites, alors $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0$ pour tout j, l. Rappelons que si la fonction X est donnée, alors on définit

$$\omega^i = \sum_{j=1}^{n} x^j dp_j^i - dy^i \tag{3.53}$$

$$S_i^{jl} = \frac{\partial x^j}{\partial p_l^i} + \frac{\partial x^j}{\partial y^i} x^l \tag{3.54}$$

et

$$\Omega^{jl} = \sum_{i=1}^{m} S_i^{jl} \omega^i \tag{3.55}$$

Le théorème suivant explicite les conditions nécessaires et suffisantes:

Théorème 3.4.1 *Soient $X(P, Y) \in I\!R^n_{++}$, une fonction donnée de classe C^∞ satisfaisant les contraintes $PX(P,Y) = Y$, et $\lambda_{ik'}(P,Y)$, $1 \leq i, k' \leq m$, des fonctions données, strictement positives et de classe C^∞. Alors,*

$$\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0, \quad \forall j, l \tag{3.56}$$

$$S_i = \lambda_{ik'} S'_{k'}, \quad \forall i, k' \tag{3.57}$$

si et seulement si, pour un certain $k \in \{1, ..., m\}$ et pour tout $1 \leq i, k' \leq m$ et $1 \leq j, l \leq n$, les conditions suivantes sont satisfaites

$$\lambda_{ki}\lambda_{kk'} \left(\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}} x^j - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_j^i} x^l \right) + \lambda_{kk'} \frac{\partial x^j}{\partial p_l^{k'}} - \lambda_{ki} \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{1}{y^k} \left(\lambda_{kk'} \delta_{k'}^k - \lambda_{ki} \delta_i^k \right)$$

$$x^j x^l + \frac{1}{y^k} \left(\sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^j - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^l \right) + \frac{1}{y^k} \lambda_{ik'} \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{k'i}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^j x^l = 0 \tag{3.58}$$

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}} x^j + \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_j^i} + \lambda_{ik} \frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} + \frac{1}{y^k} \lambda_{k'k}^2 \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^j + \frac{1}{y^k} \left(\lambda_{k'k} \delta_k^i - \lambda_{ik} \delta_k^{k'} \right) x^j$$

$$+ \frac{1}{y^k} \lambda_{ik} \lambda_{k'k} \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k = 0 \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}} - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i} + \frac{1}{y^k}\lambda_{k'k}^2 \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k + \frac{1}{y^k}\left(\lambda_{k'k}\delta_k^i - \lambda_{ik}\delta_k^{k'}\right) = 0 \tag{3.60}$$

$$\frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{k'k}} = \lambda_{ik'} \tag{3.61}$$

Démonstration. Montrons d'abord que

$$\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0 \quad \forall 1 \leq j, l \leq n \tag{3.62}$$

et $S_i = \lambda_{ik} S_k$ impliquent (3.58), (3.59) et (3.60). On verra dans la suite que le résultat ne dépend pas de jl tel que $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0$. On fixe $j = j_0$ et $l = l_0$, telles que $S_i^{j_0 l_0} \neq 0$, $\forall i$. Pour alléger les notations, on supprime les exposants j_0 et l_0 sur Ω et S. Alors, la 1-forme Ω est donnée par

$$\Omega = \sum_i S_i \omega^i \tag{3.63}$$

D'où

$$d\Omega = \sum_i dS_i \wedge \omega^i + \sum_i S_i d\omega^i \tag{3.64}$$

Or, $\Omega \wedge d\Omega = 0$ si et seulement si il existe une forme linéaire α telle que

$$d\Omega = \alpha \wedge \Omega \tag{3.65}$$

Pour Ω et $d\Omega$ données par (3.63) et (3.64), on cherche α telle que

$$d\Omega = \sum_i dS_i \wedge \omega^i + \sum_i S_i d\omega^i = \alpha \wedge \sum_i S_i \omega^i \tag{3.66}$$

Soit ζ^k le champ de vecteurs défini par

$$\zeta^k = \sum_{j'} p_{j'}^k \frac{\partial}{\partial p_{j'}^k} \tag{3.67}$$

En appliquant la 2-forme (3.66) au champ de vecteurs (3.67), on obtient

$$\sum_i < dS_i, \zeta^k > \omega^i - y^k dS_k + \sum_i S_i < d\omega^i, (\zeta^k, \cdot) > = < \alpha, \zeta^k > \sum_i S_i \omega^i - \alpha y^k S_k \tag{3.68}$$

Par hypothèse, $y^k \neq 0$. L'équation précédente nous donne une formule pour α. On écrit α_k au lieu de α puisque pour tout $k \in \{1, ..., m\}$, on obtient une 1-forme α_k satisfaisant $d\Omega = \alpha_k \wedge \Omega$.

$$\alpha_k = \frac{1}{y^k S_k}\left(y^k dS_k - \sum_i < dS_i, \zeta^k > \omega^i - \sum_i S_i(< d\omega^i, (\zeta^k, \cdot) > + < \alpha_k, \zeta^k >)\omega^i\right) \tag{3.69}$$

On voit apparaitre dans cette formule $<\alpha_k, \zeta^k>$ que l'on ne connait pas. Ce n'est pas nécessaire puisque le terme dans lequel $<\alpha_k, \zeta^k>$ se trouve s'annule en prenant le produit extérieur avec $\sum S_i\omega^i$:

$$\begin{aligned} <\alpha_k, \zeta^k> \sum_i S_i\omega^i \wedge \sum_{i'} S_{i'}\omega^{i'} &= <\alpha_k, \zeta^k> \sum_{i,i'} S_i S_{i'}\omega^i \wedge \omega^{i'} \\ &= <\alpha_k, \zeta^k> \sum_{i<i'} (S_i S_{i'} - S_{i'} S_i)\omega^i \wedge \omega^{i'} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On remarquera que si $k' \neq k$, on aura $\alpha_{k'} = \alpha_k + \mu\Omega$, où μ est une fonction, car $d\Omega = \alpha_k \wedge \Omega = \alpha_{k'} \wedge \Omega$. Il suffit donc de prendre une seule valeur de k.

On récrit $d\Omega - \alpha_k \wedge \Omega = 0$ en termes de la base canonique de l'espace de 2-formes sur $T\mathbb{R}^K \times T\mathbb{R}^K$, $K = m(n+1)$. Cette base est donnée par $dp^i_j \wedge dp^{k'}_l, i \leq k' \leq m, j \leq l \leq n$, $dy^i \wedge dy^{k'}, i < k' \leq m$ et $dy^{k'} \wedge dp^i_j, i, k' \leq m, j \leq n$. Pour cela, nous allons calculer séparément chacun de ses termes:

a. Calcul de α_k

$$\sum_{k'} < dS_{k'}, \zeta^k > \omega^{k'} = \sum_{j',k',l} \frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^l dp^{k'}_l - \sum_{k',j'} \frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} dy^{k'} \tag{3.70}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \sum_i S_i d\omega^i(\zeta^k, \cdot) &= \sum_{i,j,k',l} S_i \frac{\partial x^j}{\partial p^{k'}_l} dp^{k'}_l \wedge dp^i_j + \sum_{i,j,k'} S_i \frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} dy^{k'} \wedge dp^i_j(\zeta^k, \cdot) \\ &= \sum \left(S_{k'} \frac{\partial x^l}{\partial p^k_{j'}} - S_k \frac{\partial x^{j'}}{\partial p^{k'}_l} \right) p^k_{j'} dp^{k'}_l - \sum S_k \frac{\partial x^{j'}}{\partial y^{k'}} p^k_{j'} dy^{k'} \end{aligned} \tag{3.71}$$

Les équations (3.70) et (3.71) impliquent que

$$\begin{aligned} \alpha_k = &\sum_{j',k',l} \left(\frac{1}{S_k} \frac{\partial S_k}{\partial p^{k'}_l} - \frac{1}{y^k S_k} \frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^l + \frac{1}{y^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial p^{k'}_l} p^k_{j'} - \frac{S_{k'}}{y^k S_k} \frac{\partial x^l}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} \right) dp^{k'}_l \\ &+ \sum_{j',k'} \left(\frac{1}{S_k} \frac{\partial S_k}{\partial y'} + \frac{1}{y^k S_k} \frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} + \frac{1}{y^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial y^{k'}} p^k_{j'} \right) dy^{k'} + < \alpha_k, \zeta^k > \Omega \end{aligned} \tag{3.72}$$

b. Calcul de $\alpha_k \wedge \Omega$

Pour obtenir la partie droite de (3.66), qui est précisement $\alpha_k \wedge \Omega$, on prend le produit extérieur de l'équation précédente avec

$$\Omega = \sum_{i,j} S_i x^j dp^i_j - \sum_i S_i dy^i$$

Cela donne

$$\alpha_k \wedge \Omega = \sum_{j',k',l} \left(\frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial p_l^{k'}} - \frac{S_i}{y^k S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^l + \frac{S_i}{y^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial p_l^{k'}} p_{j'}^k - \frac{S_i S_{k'}}{y^k S_k}\frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k \right) x^j dp_l^{k'} \wedge dp_j^i$$

$$\sum_{i,j,j',k'} \left(\frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial p_j^i} - \frac{S_{k'}}{y^k S_k}\frac{\partial S_i}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^j + \frac{S_{k'}}{y^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial p_j^i} p_{j'}^k - \frac{S_i S_{k'}}{y^k S_k}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k \right.$$

$$\left. + \frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial y^{k'}} x^j + \frac{S_i}{y^k S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^j + \frac{S_i}{y^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial y^{k'}} p_{j'}^k x^j \right) dy^{k'} \wedge dp_j^i$$

$$+ \sum_{i,j',k'} \left(\frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial y^{k'}} + \frac{S_i}{y^k S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k + \frac{S_i}{y^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial y^{k'}} p_{j'}^k \right) dy^i \wedge dy^{k'}$$

c. Calcul de $d\Omega$

On a

$$d\Omega = \sum_i (dS_i \wedge \omega^i + S_i d\omega^i) = \sum \left(\frac{\partial S_i}{\partial p_l^{k'}} x^j + S_i \frac{\partial x^j}{\partial p_l^{k'}} \right) dp_l^{k'} \wedge dp_j^i$$

$$+ \sum \frac{\partial S_i}{\partial y^{k'}} dy^i \wedge dy^{k'} + \sum \left(\frac{\partial S_i}{\partial y^{k'}} x^j + \frac{\partial S_{k'}}{\partial p_j^i} + S_i \frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} \right) dy^{k'} \wedge dp_j^i \quad (3.73)$$

Le calcul précédent implique que

$$d\Omega - \alpha_k \wedge \Omega = \sum_{i,j,k',l} A_{k'i}^{lj} dp_l^{k'} \wedge dp_j^i + \sum_{i,j,k'} B_{k'i}^j dy^{k'} \wedge dp_j^i + \sum_{i,k'} C_{k'i} dy^{k'} \wedge dy^i \quad (3.74)$$

où

$A_{k'i}^{jl} =$

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_l^{k'}} x^j + S_i \frac{\partial x^j}{\partial p_l^{k'}} - \frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial p_l^{k'}} x^j + \sum_{j'} \left(\frac{S_i}{y^k S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_{j'}^k} x^l - \frac{S_i}{y^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial p_l^{k'}} + \frac{S_i S_{k'}}{y^k S_k}\frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^k} \right) p_{j'}^k x^j \quad (3.75)$$

$$B_{k'i}^j = \frac{\partial S_i}{\partial y^{k'}} x^j + \frac{\partial S_{k'}}{\partial p_j^i} + S_i \frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} - \frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial p_j^i} - \frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial y^{k'}} x^j$$

$$+ \sum_{j'} \left(\frac{S_{k'}}{y^k S_k}\frac{\partial S_i}{\partial p_{j'}^k} x^j - \frac{S_{k'}}{y^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial p_j^i} + \frac{S_i S_{k'}}{y^k S_k}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} - \frac{S_i}{y^k S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_{j'}^k} x^j - \frac{S_i}{y^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial y^{k'}} x^j \right) p_{j'}^k \quad (3.76)$$

$$C_{k'i} = \frac{\partial S_i}{\partial y^{k'}} - \frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial y^{k'}} - \frac{1}{y^k} \sum_{j'} \left(\frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k + S_i \frac{\partial x^{j'}}{\partial y^{k'}} \right) p_{j'}^k \quad (3.77)$$

Alors, $d\Omega - \alpha_k \wedge \omega = 0$ si et seulement si

$$A_{k'i}^{lj} - A_{ik'}^{jl} = 0 \quad \forall 1 \le i, k' \le m, 1 \le j, l \le n \quad (3.78)$$

$$B_{k'i}^l = 0 \quad \forall 1 \le i, k' \le m, 1 \le l \le n \quad (3.79)$$

$$C_{k'i} - C_{ik'} = 0 \quad \forall 1 \le i, k' \le m \quad (3.80)$$

Ces conditions s'écrivent comme suit

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial p_l^{k'}} - \frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial p_l^{k'}}\right)x^j - \left(\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_j^i} - \frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial p_j^i}\right)x^l + S_i\frac{\partial x^j}{\partial p_l^{k'}} - S_{k'}\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} +$$

$$\frac{1}{y^k}\sum_{j'}\left(\frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_{j'}^k} - \frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_i}{\partial p_{j'}^k}\right)p_{j'}^k x^j x^l + \sum_{j'}\left(\frac{S_{k'}}{y^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial p_j^i}x^l - \frac{S_i}{y^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial p_l^{k'}}x^j\right)p_{j'}^k$$

$$+\frac{S_{k'}S_i}{y^k S_k}\left(\sum_{j'}\frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^k}p_{j'}^k x^j - \sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k}p_{j'}^k x^l\right) = 0 \tag{3.81}$$

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial y^{k'}} - \frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial y^{k'}}\right)x^j + \frac{\partial S_{k'}}{\partial p_j^i} - \frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial p_j^i} + S_i\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} + \frac{S_iS_{k'}}{y^kS_k}\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k}p_{j'}^k$$

$$+\frac{1}{y^k}\sum_{j'}\left(\frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_i}{\partial p_{j'}^k} - \frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_{j'}^k}\right)p_{j'}^k x^j - \frac{1}{y^k}\sum_{j'}\left(S_{k'}\frac{\partial x^{j'}}{\partial p_j^i} + S_i\frac{\partial x^{j'}}{\partial y^{k'}}x^j\right)p_{j'}^k = 0 \tag{3.82}$$

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial y^{k'}} - \frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial y^{k'}}\right) - \left(\frac{\partial S_{k'}}{\partial y^i} - \frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_k}{\partial y^i}\right) + \frac{1}{y^k}\sum_{j'}\left(\frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_i}{\partial p_{j'}^k} - \frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p_{j'}^k}\right)p_{j'}^k$$

$$+\frac{S_{k'}}{y^k}\sum_{j'}\frac{\partial x^{j'}}{\partial y^i}p_{j'}^k - \frac{S_i}{y^k}\sum_{j'}\frac{\partial x^{j'}}{\partial y^{k'}}p_{j'}^k = 0 \tag{3.83}$$

Or,

$$S_i = \lambda_{ik}S_k \tag{3.84}$$

Alors,

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_l^{k'}} = \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}}S_k + \lambda_{ik}\frac{\partial S_k}{\partial p_l^{k'}} \tag{3.85}$$

d'où

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_l^{k'}} - \lambda_{ik}\frac{\partial S_k}{\partial p_l^{k'}} = \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}}S_k \tag{3.86}$$

Rappelons que la fonction X satisfait les relations suivantes

$$\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k}p_j^i + x^l\delta_k^i = 0 \tag{3.87}$$

$$\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^k}p_j^i = \delta_k^i \tag{3.88}$$

En utilisant les relations (3.87) et (3.88), et en multipliant (3.81) par $\frac{S_k}{S_iS_{k'}}$, on obtient

$$\frac{S_kS_k}{S_iS_{k'}}\left(\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}}x^j - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_j^i}x^l\right) + \frac{S_k}{S_{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial p_l^{k'}} - \frac{S_k}{S_i}\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{1}{y^k}\left(\frac{S_k}{S_{k'}}\delta_{k'}^k - \frac{S_k}{S_i}\delta_i^k\right)x^jx^l$$

$$+\frac{1}{y^k}\sum_{j'}\left(\left(\frac{1}{S_{k'}}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}}-\frac{1}{S_i}\frac{\partial S_i}{\partial p^k_{j'}}\right)x^jx^l+\frac{\partial x^l}{\partial p^k_{j'}}x^j-\frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}}x^l\right)p^k_{j'}=0 \tag{3.89}$$

$$S_k\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial y^{k'}}x^j+S_k\frac{\partial\lambda_{k'k}}{\partial p^i_j}+S_i\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}}+\frac{1}{y^k}\sum_{j'}\left(\frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_i}{\partial p^k_{j'}}-\frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}}\right)p^k_{j'}x^j$$

$$+\frac{1}{y^k}\left(S_{k'}\delta^i_k-S_i\delta^{k'}_k\right)x^j+\frac{S_iS_{k'}}{y^kS_k}\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}}p^k_{j'}=0 \tag{3.90}$$

$$\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial y^{k'}}S_k-\frac{\partial\lambda_{k'k}}{\partial y^i}S_k+\frac{1}{y^k}\sum_{j'}\left(\frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_i}{\partial p^k_{j'}}-\frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}}\right)p^k_{j'}+\frac{S_{k'}}{y^k}\delta^i_k-\frac{S_i}{y^k}\delta^{k'}_k=0 \tag{3.91}$$

Les relations $S_i=\lambda_{ik'}S_{k'}$ impliquent que

$$\begin{aligned}\sum_{j'}\left(\frac{1}{S_{k'}}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}}-\frac{1}{S_i}\frac{\partial S_i}{\partial p^k_{j'}}\right)p^k_{j'} &= \frac{1}{S_{k'}}\sum_{j'}\left(\frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}}-\frac{S_{k'}}{S_i}\frac{\partial S_i}{\partial p^k_{j'}}\right)p^k_{j'}\\ &= \frac{1}{S_{k'}}\sum_{j'}\left(\frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}}-\lambda_{k'i}\frac{\partial S_i}{\partial p^k_{j'}}\right)p^k_{j'}\\ &= \lambda_{ik'}\sum_{j'}\frac{\partial\lambda_{k'i}}{\partial p^k_{j'}}p^k_{j'}\end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned}\sum_{j'}\left(\frac{S_{k'}}{S_k}\frac{\partial S_i}{\partial p^k_{j'}}-\frac{S_i}{S_k}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}}\right)p^k_{j'} &= \frac{S_{k'}}{S_k}\sum_{j'}\left(\frac{\partial S_i}{\partial p^k_{j'}}-\frac{S_i}{S_{k'}}\frac{\partial S_{k'}}{\partial p^k_{j'}}\right)p^k_{j'}\\ &= \frac{S^2_{k'}}{S_k}\sum_{j'}\frac{\partial\lambda_{ik'}}{\partial p^k_{j'}}p^k_{j'}\end{aligned}$$

En utilisant ces relations et en divisant (3.90) et (3.91) par S_k, on obtient finalement les conditions suivantes:

$$\lambda_{ki}\lambda_{kk'}\left(\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial p^{k'}_l}x^j-\frac{\partial\lambda_{k'k}}{\partial p^i_j}x^l\right)+\lambda_{kk'}\frac{\partial x^j}{\partial p^{k'}_l}-\lambda_{ki}\frac{\partial x^l}{\partial p^i_j}+\frac{1}{y^k}\left(\lambda_{kk'}\delta^k_{k'}-\lambda_{ki}\delta^k_i\right)$$

$$x^jx^l+\frac{1}{y^k}\left(\sum_{j'}\frac{\partial x^l}{\partial p^k_{j'}}p^k_{j'}x^j-\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}}p^k_{j'}x^l\right)+\frac{1}{y^k}\lambda_{ik'}\sum_{j'}\frac{\partial\lambda_{k'i}}{\partial p^k_{j'}}p^k_{j'}x^jx^l=0 \tag{3.92}$$

$$\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial y^{k'}}x^j+\frac{\partial\lambda_{k'k}}{\partial p^i_j}+\lambda_{ik}\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}}+\frac{1}{y^k}\lambda^2_{k'k}\sum_{j'}\frac{\partial\lambda_{ik'}}{\partial p^k_{j'}}p^k_{j'}x^j+\frac{1}{y^k}\left(\lambda_{k'k}\delta^i_k-\lambda_{ik}\delta^{k'}_k\right)x^j$$

$$+\frac{1}{y^k}\lambda_{ik}\lambda_{k'k}\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}}p^k_{j'}=0 \tag{3.93}$$

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}} - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i} + \frac{1}{y^k}\lambda_{k'k}^2 \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k + \frac{1}{y^k}\left(\lambda_{k'k}\delta_k^i - \lambda_{ik}\delta_k^{k'}\right) = 0 \tag{3.94}$$

On obtient donc les relations recherchées. Il nous reste à démontrer la suffisance. Montrons d'abord que les équations (3.58), (3.59), (3.60) et (3.61) impliquent que

$$\frac{\partial x^j}{\partial p_l^i} + \frac{\partial x^j}{\partial y^i} x^l = \lambda_{ik'}\left(\frac{\partial x^l}{\partial p_j^{k'}} + \frac{\partial x^l}{\partial y^{k'}} x^j\right) \tag{3.95}$$

Les conditions (3.59) nous donnent les relations suivantes

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}} x^j - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_j^i} x^l = \left(\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}} - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i}\right) x^j x^l + \lambda_{ik}\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} x^l - \lambda_{k'k}\frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j$$

$$+\frac{1}{y^k}\left(\lambda_{k'k}^2 \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k - \lambda_{ik}^2 \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{k'i}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k\right) x^j x^l + \frac{2}{y^k}\left(\lambda_{k'k}\delta_k^i - \lambda_{ik}\delta_k^{k'}\right) x^j x^l$$

$$+ \frac{\lambda_{ik}\lambda_{k'k}}{y^k}\left(\sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^l - \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^j\right) \tag{3.96}$$

Or, d'après (3.60), on a

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}} - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i} = -\frac{1}{y^k}\lambda_{k'k}^2 \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k - \frac{1}{y^k}\left(\lambda_{k'k}\delta_k^i - \lambda_{ik}\delta_k^{k'}\right) \tag{3.97}$$

Les deux dernières équations impliquent que

$$\lambda_{ki}\lambda_{kk'}\left(\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}} x^j - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_j^i} x^l\right) = -\frac{\lambda_{ik'}}{y^k}\sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^j x^l + \lambda_{kk'}\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} x^l$$

$$-\lambda_{ki}\frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j + \frac{1}{y^k}\left(\delta_k^i - \delta_k^{k'}\right) - \frac{1}{y^k}\left(\sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^j - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^l\right) \tag{3.98}$$

En substituant cette équation dans (3.96), on obtient

$$\lambda_{kk'}\frac{\partial x^j}{\partial p_l^{k'}} - \lambda_{ki}\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \lambda_{kk'}\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} x^l - \lambda_{ki}\frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j = 0 \tag{3.99}$$

Cette équation s'écrit sous la forme suivante

$$\lambda_{ki}\left(\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j\right) = \lambda_{kk'}\left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^{k'}} + \frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} x^l\right) \tag{3.100}$$

Les conditions de compatibilité impliquent que

$$\left(\frac{\partial x^l}{\partial p^i_j} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i}x^j\right) = \frac{\lambda_{kk'}}{\lambda_{ki}}\left(\frac{\partial x^j}{\partial p^{k'}_l} + \frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}}x^l\right) \tag{3.101}$$

$$= \lambda_{ik'}\left(\frac{\partial x^j}{\partial p^{k'}_l} + \frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}}x^l\right) \tag{3.102}$$

On obtient donc les relations $S_i = \lambda_{ik'}S'_{k'}$. Ce qui démontre que les matrices $S_1, ..., S_m$ sont symétriques et proportionnelles.
La dernière étape de la démonstration consiste á montrer que les équations (3.58), (3.59), (3.60) et (3.61) impliquent que $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0, \forall j, l$. Cela revient, en effet, à montrer que les conditions (3.89), (3.90) et (3.91) sont satisfaites si (3.58), (3.59), (3.60) et (3.61) le sont. Pour ce faire, il suffit d'utiliser les relations $S_i = \lambda_{ik'}S'_{k'}, \forall i, k'$. Nous avons donc montré que les relations (3.58), (3.59), (3.60) et (3.61) impliquent que $S_i = \lambda_{ik'}S_{k'}, \forall i, k'$ et $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0, \forall j, l$. Cela conclut la démonstration de la suffisance ainsi que celle du théorème. ∎

Remarque 3.4.1

(1) Les fonctions λ_{ik} satisfont les conditions de compatibilité:

$$\frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{k'k}} = \lambda_{ik'}$$

Si $k' = i$, alors, $\lambda_{k'k'} = 1\ \forall k'$. De même, si $k = i$, on obtient,

$$\frac{\lambda_{ii}}{\lambda_{k'i}} = \lambda_{ik'}$$

d'où,

$$\lambda_{ik'} = \frac{1}{\lambda_{k'i}}$$

(2) On n'a besoin des conditions de compatibilité (3.61) que si $m > 2$.

(3) Comme on peut le remarquer, on utilise les conditions (3.61) , en particulier, pour démontrer que les relations (3.58), (3.59) et (3.60) impliquent que $S_i = \lambda_{ik'}S_{k'}$. La fonction de demande X est observable, alors, les fonctions λ_{ik} sont déterminées par les relations $S_i = \lambda_{ik}S_k$, d'où $\lambda_{ik} = \frac{S_i}{S_k}$. Les conditions de compatibilité, (3.61), sont alors toujours satisfaites.
En prenant $i = k'$, on obtien $S_i = \lambda_{ii}S'_i$. Puisque $\lambda_{ii} = 1$, alors, les matrices $S_1, ..., S_m$ sont symétriques. ∎

Le corollaire suivant donne des propriétés d'homogénéité satisfaites par les fonctions X et λ_{ik} satisfaisant les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique.

Corollaire 3.4.1 *Soient X, λ_{ik}, $1 \leq i < k \leq m$ des fonctions de classe C^∞ satisfaisant les relations (3.59) et (3.60), pour tout $1 \leq i, k, k' \leq m, 1 \leq j, l \leq n$. Alors, les conditions d'homogénéité suivantes sont satisfaites*

$$\sum_j \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p^i_j} p^i_j + \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i} y^i = \lambda_{k'k}\delta^i_k - \lambda_{k'k}\delta^i_{k'} \tag{3.103}$$

$$\sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} + \frac{\partial x^j}{\partial y^i} y^i = 0 \tag{3.104}$$

Démonstration. Supposons qu'il existe des fonctions X, λ_{ik} satisfaisant les relations (3.59) et (3.60). On récrit (3.59) comme suit:

$$\left(\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}} + \frac{1}{y^k}\lambda^2_{k'k} \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} + \frac{1}{y^k}\left(\lambda_{k'k}\delta^i_k - \lambda_{ik}\delta^{k'}_k\right) \right) x^j$$

$$+ \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p^i_j} + \lambda_{ik}\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} + \frac{1}{y^k}\lambda_{ik}\lambda_{k'k}\sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} = 0 \tag{3.105}$$

Or, l'équation (3.60) implique que

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}} + \frac{1}{y^k}\lambda^2_{k'k} \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} + \frac{1}{y^k}\left(\lambda_{k'k}\delta^i_k - \lambda_{ik}\delta^{k'}_k\right) = \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i}$$

En utilisant les relations précédentes, on peut récrire (3.105) sous la forme

$$\frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i} x^j + \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p^i_j} + \lambda_{ik}\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} + \frac{1}{y^k}\lambda_{ik}\lambda_{k'k}\sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} = 0 \tag{3.106}$$

Soit $\Lambda_{kk'}$ la 1-forme différentielle définie comme suit

$$\Lambda_{kk'} = \sum_{i',j} \left(\frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^{i'}} x^j + \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p^{i'}_j} + \lambda_{i'k}\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} + \frac{1}{y^k}\lambda_{i'k}\lambda_{k'k}\sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} \right) da^{i'}_j \tag{3.107}$$

On remarque que l'équation (3.106) implique que $\Lambda_{kk'} = 0, \forall k, k'$. On applique $\Lambda_{kk'}$ au champ de vecteurs

$$\zeta^i = \sum_j p^i_j \frac{\partial}{\partial p^i_j}$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i} y^i + \sum_j \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p^i_j} p^i_j + \lambda_{ik}\delta^i_{k'} - \lambda_{ik}\lambda_{k'k}\delta^i_k = 0 \tag{3.108}$$

Si $i \neq k$, alors $\lambda_{ik}\lambda_{k'k}\delta^i_k = 0$, et si $i = k$, alors $\lambda_{ik}\lambda_{k'k}\delta^i_k = \lambda_{k'k}$. Alors, l'équation (3.108) s'écrit comme suit

$$\sum_j \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p^i_j} p^i_j + \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i} y^i + \lambda_{ik}\delta^i_{k'} - \lambda_{k'k}\delta^i_k = 0$$

On obtient donc les relations (3.103). Pour obtenir (3.104), il suffit de prendre $i = k = k'$. ∎

Remarque 3.4.2
En prenant $i = k = k'$ les conditions du théorème (3.4.1) s'écrivent sous la forme suivante:
La condition (3.58) s'écrit comme suit

$$\frac{\partial x^j}{\partial p^i_l} - \frac{\partial x^l}{\partial p^i_j} + \frac{1}{y^i}\left(\sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} x^j - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} x^l\right) = 0 \tag{3.109}$$

La condition (3.59) est donnée par

$$\sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} + \frac{\partial x^j}{\partial y^i} y^i = 0 \tag{3.110}$$

Ces dernières relations sont les conditions d'homogénéité de degré zéro de X en (p^i, y^i), $\forall i$. Tandis que la dernière condition du théorème est identiquement satisfaite. Dans le cas d'une seule contrainte, les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique sont la symétrie de la matrice de Slutsky et l'homogénéité de degré zéro de la fonction X.
Si $m = 1$, on obtient alors les relations de Slutsky et l'homogénéité de degré zéro de la fonction de demande par rapport aux prix et au revenu. ∎

Les fonctions $\lambda_{ik}, 1 \leq i < k \leq m$, sont observables parce que la fonction de demande X l'est. Ces fonctions sont déterminées par les relations $S_i = \lambda_{ik'} S'_{k'}$. Rappelons que les 1-formes $\omega^i, i \leq m$, sont définies par la formule suivante

$$\omega^i = \sum_{j=1}^{n} x^j dp^i_j - dy^i \tag{3.111}$$

Le théorème suivant récapitule les résultats précédents.

Théorème 3.4.2 *Soit $X(P,Y) \in I\!R^n$, une fonction donnée de classe C^∞ satisfaisant les contraintes $PX(P,Y) = Y$, pour tout $(P,Y) \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est un voisinage d'un point donné $(\bar{P},\bar{Y})$. Alors, il existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ et $m+1$ fonctions $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ définies sur $\mathcal{V}$ telles que*

$$dV = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega^i \tag{3.112}$$

*si et seulement si il existe des fonctions $\lambda_{ik'}(P,Y) > 0$, $i, k' \leq m$, telles que pour un certain $k \leq m$ et pour tout $1 \leq i, k' \leq m$ et $1 \leq j, l \leq n$, et pour tout $(P,Y) \in \mathcal{U}$, les conditions suivantes sont satisfaites**

$$\lambda_{ki}\lambda_{kk'}\left(\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}}x^j - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_j^i}x^l\right) + \lambda_{kk'}\frac{\partial x^j}{\partial p_l^{k'}} - \lambda_{ki}\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{1}{y^k}\left(\lambda_{kk'}\delta_{k'}^k - \lambda_{ki}\delta_i^k\right)x^j x^l$$

$$+\frac{1}{y^k}\left(\sum_{j'}\frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^k}p_{j'}^k x^j - \sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k}p_{j'}^k x^l\right) + \frac{1}{y^k}\lambda_{ik'}\sum_{j'}\frac{\partial \lambda_{k'i}}{\partial p_{j'}^k}p_{j'}^k x^j x^l = 0 \tag{3.113}$$

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}}x^j + \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_j^i} + \lambda_{ik}\frac{\partial x^j}{\partial y^{k'}} + \frac{1}{y^k}\lambda_{k'k}^2\sum_{j'}\frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p_{j'}^k}p_{j'}^k x^j + \frac{1}{y^k}\left(\lambda_{k'k}\delta_k^i - \lambda_{ik}\delta_k^{k'}\right)x^j$$

$$+\frac{1}{y^k}\lambda_{ik}\lambda_{k'k}\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k}p_{j'}^k = 0 \tag{3.114}$$

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y^{k'}} - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial y^i} + \frac{1}{y^k}\lambda_{k'k}^2\sum_{j'}\frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p_{j'}^k}p_{j'}^k + \frac{1}{y^k}\left(\lambda_{k'k}\delta_k^i - \lambda_{ik}\delta_k^{k'}\right) = 0 \tag{3.115}$$

$$\frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{k'k}} = \lambda_{ik'} \tag{3.116}$$

On aura $\lambda_{ik'} = \lambda_i/\lambda_{k'}$.

Les relations à satisfaire sont de deux types

1. Symétrie et proportionnalité des matrices de Slutsky.

2. Des conditions supplémentaires sous forme d'équations différentielles sur la fonction de demande X et les coefficients de proportionnalité λ_{ik}.

Dans la section suivante, on fixe $m = 2$. On donnera les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique dans ce cas particulier.

---

* Pour alléger les notations, on supprime les arguments des fonctions X et $\lambda_{ik'}$.

3.5 Un cas particulier: deux contraintes

Dans cette section, on considère un problème avec deux contraintes. Ce problème est proche de celui résolu par Epstein parce qu'il considère un problème où les variables sont découplées, voir la section (1.6). Nous obtenons les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique données par Epstein (à quelques signes près). Pour ce cas particulier, P est une $2 \times n$ matrice, $X \in I\!R^n_+$ et $Y = (y^1, y^2) \in I\!R^2_{++}$. On considère le problème suivant:

$$(\mathcal{P})_2 \begin{cases} \max \ U(X) \\ \sum_j p^1_j x^j = y^1 \\ \sum_j p^2_j x^j = y^2 \end{cases}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique sont données par le théorème (3.4.1). Puisque $m = 2$, on a $i, k, k' \in \{1, 2\}$. On pose

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Rappelons que les fonctions λ_1, λ_2 satisfont les conditions d'homogénéité suivantes:

$$\sum_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial p^k_j} p^k_j + \frac{\partial \lambda_i}{\partial y^k} y^k = -\lambda_i \delta^i_k, \quad i, k = 1, 2 \tag{3.117}$$

On en déduit des conditions analogues sur la fonction λ. Ces conditions sont données par le lemme suivant:

Lemme 3.5.1 *Soient λ_1 et λ_2 les multiplicateurs de Lagrange associés à la solution du problème $(\mathcal{P})_2$ et $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$. Alors, la fonction λ satisfait les conditions suivantes:*

$$\sum_{j'} \frac{\partial \lambda}{\partial p^1_{j'}} p^1_{j'} + \frac{\partial \lambda}{\partial y^1} y^1 = \lambda \tag{3.118}$$

$$\sum_{j'} \frac{\partial \lambda}{\partial p^2_{j'}} p^2_{j'} + \frac{\partial \lambda}{\partial y^2} y^2 = -\lambda \tag{3.119}$$

Démonstration Il suffit de remarquer que la fonction λ_1 est homogène de degré -1 en (p^1, y^1) et homogène de degré zéro en (p^2, y^2). Tandis que, la fonction λ_2 est homogène de degré zéro en (p^1, y^1) et homogène de degré -1 en (p^2, y^2). Alors, la fonction λ est homogène de degré 1 en (p^1, y^1), ce qui nous donne l'équation (3.118), et homogène de degré -1 en (p^2, y^2), ce qui nous donne (3.119). ∎

On procède maintenant au calcul des conditions nécessaires et suffisantes du théorème (3.4.1), en fixant $m = 2$. Nous démontrons le théorème suivant

Théorème 3.5.1 *On se donne une fonction $X(P,Y) \in I\!R^n_{++}$ de classe C^∞ satisfaisant $PX(P,Y) = Y$. Alors, il existe trois fonctions V, λ_1, λ_2 telles que $-dV = \lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2$ si et seulement si il existe $\lambda(P,Y) > 0$, de classe C^∞, telle que*

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_1' && (3.120)\\
S_2 &= S_2' && (3.121)\\
S_2 &= \lambda S_1' && (3.122)\\
\frac{\partial \lambda}{\partial p_j^1} + \frac{\partial \lambda}{\partial y^1} x^j &= \lambda \frac{\partial x^j}{\partial y^1} - \frac{\partial x^j}{\partial y^2} && (3.123)\\
\frac{\partial \lambda}{\partial p_j^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial y^2} x^j &= -\lambda \left(-\lambda \frac{\partial x^j}{\partial y^1} + \frac{\partial x^j}{\partial y^2} \right) && (3.124)
\end{aligned}$$

où $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Les fonctions V, λ_1, λ_2 sont définies localement.

Démonstration La démonstration consiste à récrire les conditions du théorème (3.4.2) pour $m = 2$.
Il suffit, comme nous l'avons précisé, de prendre une seule valeur pour k. Prenons, par exemple, $k = 1$. Pour $i, k' \in \{1, 2\}$, il faut examiner quatre cas différents.
Cas 1. $i = k = k' = 1$
Pour ce cas, les conditions du théorème (3.4.2) s'écrivent sous la forme suivante:

$$\frac{\partial x^j}{\partial p_l^1} - \frac{\partial x^l}{\partial p_j^1} + \frac{1}{y^1} \left(\sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^j - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^l \right) = 0 \qquad (3.125)$$

$$\sum_j \frac{\partial x^l}{\partial p_j^1} p_j^1 + \frac{\partial x^l}{\partial y^1} y^1 = 0 \qquad (3.126)$$

On obtient alors, $S_1 = S_1'$, la matrice symétrique correspondant à la première contrainte. La deuxième condition du théorème (3.4.2) n'est rien d'autre que l'homogénéité de degré zéro de X en (p^1, y^1). La dernière condition est identiquement nulle.
Cas 2. $k = i = 1$, $k' = 2$. Dans ce cas, on a les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda} \left(-\frac{\partial \lambda}{\partial p_j^1} x^l \right) - \frac{\partial x^l}{\partial p_j^1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x^j}{\partial p_l^2} - \frac{1}{y^1} \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^j - \frac{1}{y^1} \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^l \\
&\quad - \frac{1}{y^1} x^j x^l + \frac{1}{y^1} \frac{1}{\lambda} \sum_{j'} \frac{\partial \lambda}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^j x^l = 0 \qquad (3.127)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_j^1} - \frac{1}{y^1}\sum_{j'}\frac{\partial\lambda}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1x^j + \frac{1}{y^1}\lambda x^j + \frac{\partial x^j}{\partial y^2} + \frac{1}{y^1}\lambda\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1 = 0 \tag{3.128}$$

$$\sum_{j'}\frac{\partial\lambda}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y^1}y^1 - \lambda = 0 \tag{3.129}$$

Par l'homogénéité de X et λ, on a

$$\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1 = -\frac{\partial x^j}{\partial y^1}y^1$$

et

$$\sum_{j'}\frac{\partial\lambda}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1 = -\frac{\partial\lambda}{\partial y^1}y^1 + \lambda$$

En utilisant ces formules, on peut récrire (3.128) comme suit

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_j^1} - \frac{1}{y^1}\left(-\frac{\partial\lambda}{\partial y^1}y^1 + \lambda\right)x^j + \frac{1}{y^1}\lambda x^j + \frac{\partial x^j}{\partial y^2} - \lambda\frac{\partial x^j}{\partial y^1} = 0$$

d'où

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_j^1} + \frac{\partial\lambda}{\partial y^1}x^j = \lambda\frac{\partial x^j}{\partial y^1} - \frac{\partial x^j}{\partial y^2} \tag{3.130}$$

On obtient donc la première condition d'Epstein.
En substituant pour $\frac{\partial\lambda}{\partial p_j^1}$ dans (3.127), on obtient

$$-\frac{1}{\lambda}\frac{1}{y^2}\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^2}p_{j'}^2x^l - \frac{\partial x^l}{\partial p_j^1} - \frac{1}{y^1}\sum_{j'}\frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1x^j + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial x^j}{\partial p_l^2} = 0$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^2} - \frac{1}{y^2}\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^2}p_{j'}^2x^l\right) = \frac{\partial x^l}{\partial p_j^1} - \frac{1}{y^1}\sum_{j'}\frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1x^j \tag{3.131}$$

Les relations (3.131) s'écrivent

$$S_2 = \lambda S_1'$$

La condition (3.129) nous donne la propriété d'homogénéité de λ.
Cas 3. $i = k' = 2$, $k = 1$. On a les conditions suivantes:

$$S_2 = S_2' \tag{3.132}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y^2}x^j + \frac{\partial\lambda}{\partial p_j^2} + \lambda\frac{\partial x^j}{\partial y^2} + \frac{1}{y^1}\lambda^2\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1 = 0 \tag{3.133}$$

L'équation (3.60), du théorème (3.4.2), est identiquement nulle. On récrit les relations (3.133) comme suit

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y^2}x^j + \frac{\partial \lambda}{\partial p_j^2} + \lambda\frac{\partial x^j}{\partial y^2} - \frac{1}{y^1}\lambda^2\frac{\partial x^j}{\partial y^1}y^1 = 0$$

d'où

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial y^2}x^j = -\lambda\left(-\lambda\frac{\partial x^j}{\partial y^1} + \frac{\partial x^j}{\partial y^2}\right) \tag{3.134}$$

C'est la deuxième condition d'Epstein.

Cas 4. $i = 2$ et $k' = 1$. On a,

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial p_l^1}x^j + \frac{\partial x^j}{\partial p_l^1} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial x^l}{\partial p_j^2} + \frac{1}{y^1}x^jx^l + \frac{1}{y^1}\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1x^l - \frac{1}{y^1}\sum_{j'}\frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1x^j$$
$$-\frac{1}{y^1}\frac{1}{\lambda}\sum_{j'}\frac{\partial \lambda}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1x^jx^l = 0 \tag{3.135}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y^1}x^j + \lambda\frac{\partial x^j}{\partial y^1} + \frac{1}{y^1}\sum_{j'}\frac{\partial \lambda}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1x^j - \frac{1}{y^1}\lambda x^j + \frac{1}{y^1}\lambda\sum_{j'}\frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1 = 0 \tag{3.136}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y^1} + \frac{1}{y^1}\sum_{j'}\frac{\partial \lambda}{\partial p_{j'}^1}p_{j'}^1 - \frac{1}{y^1}\lambda = 0 \tag{3.137}$$

Les relations (3.135) ne rajoutent pas de conditions supplémentaires que celles obtenues auparavant. Tandis que, les équations (3.136) et (3.137) donnent des propriétés d'homogénéité des fonctions X et λ, respectivement. D'après la démonstration du théorème (3.3.1), les fonctions λ_1, λ_2 sont données par

$$\lambda_1 = -\frac{1}{y^1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial p_j^1}p_j^1 \tag{3.138}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{y^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial p_j^2}p_j^2 \tag{3.139}$$

Cela conclut la démonstration. ∎

Remarque 3.5.1 – En comparant les conditions nécessaires et suffisantes du théorème (3.5.1) avec les conditions d'Epstein, on remarque des différences de signes. Rappelons que les conditions supplémentaires données par Epstein sont les suivantes, la fonction de demande est notée par ξ,

$$\lambda_{p^1} - \lambda_{\beta_1}\xi^1 = -\lambda\xi^1_{\beta_1} - \xi^1_{\beta_2} \tag{3.140}$$

$$\lambda_{p^2} + \lambda_{\beta_2}\xi^2 = -\lambda\left(\lambda\xi^2_{\beta_1} + \xi^2_{\beta_2}\right) \tag{3.141}$$

– En multipliant (3.123) par p^1 et (3.124) par p^2, on obtient, respectivement

$$\sum_j \frac{\partial \lambda}{\partial p_j^1} p_j^1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y^1} \sum_j x^j p_j^1 = \lambda \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^1} p_j^1 - \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^2} p_j^1$$

$$\sum_j \frac{\partial \lambda}{\partial p_j^2} p_j^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial y^2} \sum_j x^j p_j^2 = -\lambda \left(-\lambda \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^1} p_j^2 + \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^2} p_j^2 \right)$$

Les deux équations précédentes s'écrivent

$$\sum_j \frac{\partial \lambda}{\partial p_j^1} p_j^1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y^1} y^1 = \lambda$$

$$\sum_j \frac{\partial \lambda}{\partial p_j^2} p_j^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial y^2} y^2 = -\lambda$$

On obtient donc les propriétés d'homogénéité de la fonction λ, lemme (3.5.1). Il est clair que l'on ne peut pas obtenir la première condition à partir des relations d'Epstein. ∎

Il existe alors, d'après le théorème précédent, trois fonctions V, λ_1, λ_2 telles que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_j^i} &= -\lambda_i x^j \quad i = 1,2 \; j = 1, ..., n. \\ \frac{\partial V}{\partial y^i} &= \lambda_i \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

Cet exemple, $m = 2$, ne permet pas de voir toutes les difficultés liées á ce modèle parce qu'il n'y a qu'une seule fonction λ. Prenons, par exemple, $m = 3$. On a d'abord, $S_1 = S_1', S_2 = S_2', S_3 = S_3', S_1 = \lambda_{12} S_2', S_1 = \lambda_{13} S_3', S_2 = \lambda_{23} S_3'$. Il y a de plus, d'autres conditions que l'on écrit pas. Les conditions de compatibilité sur les coefficients de proportionnalité nous permettent de déduire des conditions précédentes que $S_3 = \lambda_{13} S_1', S_3 = \lambda_{32} S_2', S_2 = \lambda_{21} S_1'$.

Dans la partie qui suit, nous allons etudier le problème de maximisation d'une fonction d'utilité U sous les contraintes $\sum_i p_j^i x^j = 1, \forall i = 1, ..., m$.
La méthode appliquée dans la première partie pour trouver le premier ensemble de conditions nécessaires ne nous permet pas d'obtenir des conditions analogues à celles-ci. Nous allons définir une famille de formes linéaires indépendantes et une famille duale, c'est-à-dire une famille de champs de vecteurs.

Chapitre 4

Maximisation sous les contraintes $PX = 1$

4.1 Introduction

Dans plusieurs travaux sur le modèle individuel classique, le revenu est normalisé à 1. La contrainte budgétaire s'écrit donc $p.x = 1$. On sait que dans ce cas, les relations de Slutsky s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} - \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k x^j = \frac{\partial x^j}{\partial p_i} - \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial p_k} p_k x^i \tag{4.1}$$

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de maximisation sous m contraintes, $p^i.X = 1, i = 1, ..., m$. Nous obtenons m matrices du type précédent. Nous sommes intéressés par la manière dont on obtient les conditions nécessaires et suffisantes du problème d'intégration mathématique qui sera discuté plus bas.

4.2 Exposé du problème

Considérons le problème suivant:

$$\begin{array}{l} \max\ U(X) \\ \sum_{j=1}^n p_j^i x^j = 1 \quad \forall i = 1, ..., m. \end{array}$$

Notre objectif est de donner des conditions nécessaires et suffisantes, analogues à celles du théorème (3.4.1). Pour ce faire, on introduit à nouveau la fonction valeur V de ce problème:

$$V(P) : = \max_X \{U(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (1 - \sum_{j=1}^n p_j^i x^j)\} \tag{4.2}$$

En dérivant V par rapport à P, et en utilisant les conditions d'optimalité, on obtient:

$$\begin{aligned} \nabla_P V(P) &= (D_P X)'(\nabla_X U(X) - P'\lambda) + (D_P \lambda)'(1 - PX) - (\lambda * X)' && (4.3) \\ &= -(\lambda * X)' && (4.4) \end{aligned}$$

où $\lambda * X = (\lambda_1 X, \lambda_2 X, ..., \lambda_m X)$. Alors, $\forall\ 1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, on a

$$\frac{\partial V}{\partial p_j^i} = -\lambda_i x^j \tag{4.5}$$

La différentielle de la fonction V est donnée par:

$$dV = \sum_{i,j} \frac{\partial V}{\partial p^i_j} dp^i_j$$

En utilisant les relations (4.5), on peut écrire dV comme suit:

$$dV(P) = -\sum_{i,j} \lambda_i(P) x^j(P) dp^i_j \tag{4.6}$$

Pour $X = (x^1, ..., x^n)$ donné, on définit les 1-formes $\omega^1, ..., \omega^m$ par:

$$\omega^i : = \sum_{j=1}^{n} x^j(P) dp^i_j \tag{4.7}$$

Pour tout i, $\omega^i \in T^*I\!R^{mn}$. On peut récrire l'équation (4.6) sous la forme:

$$dV(P) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(P) \omega^i(P) \tag{4.8}$$

A ce stade, on recherche les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $m+1$ fonctions $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ satisfaisant la décomposition précédente.

4.3 Un premier ensemble de conditions nécessaires

Dans cette section, nous donnons des conditions nécessaires satisfaites par la solution, et les multiplicateurs de Lagrange associés, du problème $(\mathcal{P})_1$. Avant de donner ce résultat, on introduit quelques notations. On définit une famille de champs de vecteurs $\zeta^1, ..., \zeta^m$ par la formule suivante:

$$\zeta^i = \sum_{j=1}^{n} p^i_j \frac{\partial}{\partial p^i_j} \quad \forall 1 \le i \le m \tag{4.9}$$

Pour tout i, $\zeta^i \in TI\!R^{mn}$. Les contraintes $PX = (1, ..., 1)' \in I\!R^m$ impliquent que

$$< \omega^k, \zeta^i >= \delta^i_k \tag{4.10}$$

où δ^i_k est le symbole de Kronecker. Soient V la fonction d'utilité indirecte et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$dV = -\sum_{k} \lambda_k \omega^k \tag{4.11}$$

En prenant la dérivée extérieure de cette équation, on obtient

$$\sum_k \lambda_k d\omega^k + \sum_k d\lambda_k \wedge \omega^k = 0 \tag{4.12}$$

On applique la 2-forme précédente au champ de vecteurs ζ^i

$$\sum_k \lambda_k < d\omega^k, (\zeta^i, \cdot) > + \sum_k < d\lambda_k \wedge \omega^k, (\zeta^i, \cdot) >= 0 \tag{4.13}$$

d'où

$$\sum_k \lambda_k < d\omega^k, (\zeta^i, \cdot) > + \sum_k (< d\lambda_k, \zeta^i > \omega^k - d\lambda_k < \omega^k, \zeta^i >) = 0 \tag{4.14}$$

En utilisant (4.10), cette équation nous donne une formule pour $d\lambda_i$,

$$d\lambda_i = \sum_k \lambda_k < d\omega^k, (\zeta^i, \cdot) > + \sum_k < d\lambda_k, \zeta^i > \omega^k \tag{4.15}$$

On peut alors écrire (4.12) sous la forme suivante

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i \sum_k (\lambda_k < d\omega^k, (\zeta^i, \cdot) > + < d\lambda_k, \zeta^i > \omega^k) \wedge \omega^i = 0 \tag{4.16}$$

La fonction X satisfait les contraintes

$$\sum_{j=1}^n x^j p^i_j = 1 \quad \forall i \tag{4.17}$$

En dérivant par rapport à p^k_l, on obtient

$$\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial p^k_l} p^i_j + x^l \delta^i_k = 0 \tag{4.18}$$

On démontre le lemme suivant:

Lemme 4.3.1 *Les différentielles $d\lambda_1, ..., d\lambda_m$ satisfont*

$$< d\lambda_i, \zeta^k >=< d\lambda_k, \zeta^i > \qquad \forall 1 \leq i, k \leq m \tag{4.19}$$

Démonstration. La différentielle de λ_i est donnée par

$$d\lambda_i = \sum_{k'} \lambda_{k'} < d\omega^{k'}, (\zeta^i, \cdot) > + \sum_{k'} < d\lambda_{k'}, \zeta^i > \omega^{k'} \tag{4.20}$$

Alors,

$$< d\lambda_i, \zeta^k >= \sum_{k'} \lambda_{k'} < d\omega^{k'}, (\zeta^i, \zeta^k) > + \sum_{k'} < d\lambda_{k'}, \zeta^i >< \omega^{k'}, \zeta^k > \tag{4.21}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k'} \lambda_{k'} < d\omega^{k'}, (\zeta^i, \zeta^k) > &= \sum_{j,l} \lambda_k \frac{\partial x^j}{\partial p^i_l} p^i_l p^k_j - \sum_{j,l} \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p^k_l} p^k_l p^i_j \\
&= \lambda_k \sum_l (-x^l \delta^i_k) p^k_l - \lambda_i \sum_l (-x^l \delta^i_k) p^k_l \\
&= -\lambda_k \delta^i_k + \lambda_i \delta^i_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où

$$< d\lambda_i, \zeta^k >=< d\lambda_k, \zeta^i > \tag{4.22}$$

Cela conclut la démonstration du lemme. ∎

Soit

$$\beta_i = \sum_{j'k,l} \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} dp^k_l \tag{4.23}$$

On a le théorème suivant

Lemme 4.3.2 *Soient X la solution du problème $(\mathcal{P})_1$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange associés et $\omega^1, ..., \omega^m$ les 1-formes définies par (4.7). Alors:*

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i d\lambda_i \wedge \omega^i = 0 \tag{4.24}$$

implique que

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i \beta_i \wedge \omega^i = 0 \tag{4.25}$$

Démonstration. Puisque $d\lambda_i$ est donnée par (4.15), on peut écrire (4.24) sous la forme

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_{i,k} (\lambda_k < d\omega^k(\zeta^i, \cdot) > + < d\lambda_k, \zeta^i > \omega^k) \wedge \omega^i = 0 \tag{4.26}$$

Alors,

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_{i,k} \lambda_k < d\omega^k, (\zeta^i, \cdot) > \wedge \omega^i + \sum_{i<k} (< d\lambda_k, \zeta^i > - < d\lambda_i, \zeta^k >) \omega^k \wedge \omega^i = 0 \tag{4.27}$$

D'après le lemme (4.3.1), $< d\lambda_k, \zeta^i > - < d\lambda_i, \zeta^k >= 0$. On obtient donc

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_{i,k} \lambda_k < d\omega^k, (\zeta^i, \cdot) > \wedge \omega^i = 0 \tag{4.28}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_k \lambda_k < d\omega^k, (\zeta^i, \cdot) > &= \sum_{k,l} \left(\lambda_k \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} - \lambda_i \sum_{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial p^k_l} p^i_{j'} \right) dp^k_l \\
&= \sum_{k,l} \lambda_k \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} dp^k_l + \sum_{k,l} \lambda_i x^l \delta^i_k dp^k_l \\
&= \sum_{k,l} \lambda_k \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} dp^k_l + \lambda_i \sum_k < \omega^k, \zeta^i > \omega^k
\end{aligned}$$

Cette équation s'écrit, en utilisant (4.23), comme suit

$$\sum_k \lambda_k < d\omega^k, (\zeta^i, \cdot) >= \beta_i + \lambda_i \sum_k < \omega^k, \zeta^i > \omega^k \tag{4.29}$$

On reporte (4.29) dans (4.28), ce qui nous donne

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i (\beta_i + \lambda_i \sum_k < \omega^k, \zeta^i > \omega^k) \wedge \omega^i = 0 \tag{4.30}$$

d'où

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i \beta_i \wedge \omega^i + \sum_{i<k} (\lambda_i < \omega^k, \zeta^i > - \lambda_k < \omega^i, \zeta^k >) \omega^k \wedge \omega^i = 0 \tag{4.31}$$

Puisque $< \omega^i, \zeta^k >= \delta^i_k$, on a

$$\lambda_i < \omega^k, \zeta^i > - \lambda_k < \omega^i, \zeta^k >= 0 \quad \forall i, k \tag{4.32}$$

Alors,

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i \beta_i \wedge \omega^i = 0 \tag{4.33}$$

Cela finit la démonstration. ∎

Théorème 4.3.1 *Soient X la solution du problème $(\mathcal{P})_1$ et $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ les multiplicateurs de Lagrange correspondants. Alors, X et λ satisfont les conditions nécessaires suivantes:*

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial p^k_l} - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^l \right) = \lambda_k \left(\frac{\partial x^l}{\partial p^i_j} - \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p^i_{j'}} p^i_{j'} x^j \right) \tag{4.34}$$

Démonstration. Supposons que X et λ soient donnés. On définit $\omega^1, ..., \omega^m$ par (4.7). On a alors,

$$dV = -\sum_i \lambda_i \omega^i \tag{4.35}$$

En prenant la dérivée extérieure, on obtient

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i d\lambda_i \wedge \omega^i = 0 \tag{4.36}$$

D'après le lemme précédent, cette équation implique que

$$\sum_i \lambda_i d\omega^i + \sum_i \beta_i \wedge \omega^i = 0 \tag{4.37}$$

où β_i est la forme linéaire définie par (4.23). Il suffit donc de démontrer que l'équation (4.37) implique les relations (4.34). En effet, l'équation (4.37) s'écrit comme suit

$$\sum_{\substack{i\leq k \\ j\leq l}} \left(\lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} - \lambda_k \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \lambda_k \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^i} p_{j'}^i x^j - \lambda_i \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^l \right) dp_l^k \wedge dp_j^i = 0 \tag{4.38}$$

Cette équation est satisfaite si et seulement si, $\forall 1 \leq i, k \leq m, 1 \leq j, l \leq n$

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^l \right) = \lambda_k \left(\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} - \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^i} p_{j'}^i x^j \right) \tag{4.39}$$

Cela conclut la démonstration du théorème. ∎

On pose,

$$S_i^{jl} = \frac{\partial x^j}{\partial p_l^i} - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^i} p_{j'}^k x^l \tag{4.40}$$

Alors, $\lambda_k S_i = \lambda_i S_k'$, d'où

$$S_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} S_k : = \lambda_{ik} S_k$$

Dans la section suivante, on donnera les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique.

4.4 Les conditions suffisantes

On se donne une fonction $X \in I\!R^{mn}_{++}$, on recherche les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de $m+1$ fonctions $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ telles que

$$\frac{\partial V}{\partial p^i_j} = -\lambda_i x^j \tag{4.41}$$

La conditions précédentes ne sont pas suffisantes. Le théorème suivant nous donne les conditions suffisantes.

Théorème 4.4.1 *Soit $X \in I\!R^n_{++}$ une fonction donnée de classe C^∞ satisfaisant $PX(P) = 1$, $\forall P \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est un voisinage d'un point donné $\bar{P}$. Alors, il existe $m+1$ fonctions $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ définie sur $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ telles que*

$$\frac{\partial V}{\partial p^i_j} = -\lambda_i x^j \quad 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq n.$$

si et seulement si il existe des fonctions $\lambda_{ik'}$ telles que pour un certain $k \leq m$ et pour tout $1 \leq i, k' \leq m$ et $1 \leq j, l \leq n$, les conditions suivantes sont satisfaites

$$\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p^{k'}_l} x^j - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p^i_j} x^l + \lambda_{ik} \frac{\partial x^j}{\partial p^{k'}_l} - \lambda_{k'k} \frac{\partial x^l}{\partial p^i_j} + \lambda_{ki}\lambda_{kk'}\{\delta^k_{k'} - \delta^k_i\} x^j x^l$$

$$+ \lambda_{ki}\lambda_{kk'} \left(\sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^j - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^l \right) + (\lambda_{ik})^2 \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{k'i}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^j x^l = 0 \tag{4.42}$$

$$\frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{k'k}} = \lambda_{ik'} \tag{4.43}$$

où $\frac{\lambda_i}{\lambda_{k'}} = \lambda_{ik'}, \forall i, k'$.

Démonstration. On se donne X et on définit les 1-formes $\omega^1, ..., \omega^m$ par

$$\omega^i = \sum_j x^j dp^i_j$$

et Ω^{jl} par $\Omega^{jl} = \sum_i S^{jl}_i \omega^i$. Les conditions $S_i = \lambda_{ik} S'_k$ impliquent que $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0, \; \forall \; j, l$. On suit les étapes de la démonstration du théorème (3.4.1) pour obtenir les relations (4.42).

Il nous reste à démontrer la suffisance.

Définissons le tenseur

$$\mathcal{T}_{i,k',k} = \sum_{j,l} T^{jl}_{ik'} dp^{k'}_l \otimes dp^i_j \tag{4.44}$$

où $T^{jl}_{ik'}$ est donné par le premier membre de (4.42).
En appliquant le tenseur précédent aux champs de vecteurs $\zeta^i, \zeta^{k'}$, définis par la formule (4.9), et en utilisant (4.42), on obtient:

$$\sum_l \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}} p_l^{k'} - \sum_j \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_j^i} p_j^i + \lambda_{ik}^2 \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{k'i}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k = 0 \tag{4.45}$$

En appliquant le tenseur (4.44) au champ de vecteurs ζ^i et en utilisant (4.42), on obtient une formule pour $\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}}$ donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}} &= \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_{j'}^i} p_{j'}^i x^l + \lambda_{ik} x^l \delta_{k'}^i + \lambda_{k'k} \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^i} p_{j'}^i \\ &- \lambda_{ki} \lambda_{kk'} \left(\sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k + x^l \delta_k^{k'} \right) - \lambda_{ik}^2 \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{k'i}}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^l \end{aligned}$$

Il suffit de substituer pour $\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p_l^{k'}}$ et $\frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p_j^i}$ dans (4.42) et d'utiliser (4.45) pour obtenir:

$$\lambda_{ik} \left(\frac{\partial x^j}{\partial p_l^{k'}} - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^{k'}} p_{j'}^{k'} x^l \right) = \lambda_{k'k} \left(\frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} - \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^i} p_{j'}^i x^j \right)$$

Les relations précédentes s'écrivent $S_{k'} = \lambda_{k'k}/\lambda_{ik} S_i' = \lambda_{k'i} S_i'$. Les relations (4.42) avec $S_{k'} = \lambda_{k'i} S_i'$ impliquent que $\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0, \ \forall j, l$. On obtient finalement

$$dV = -\sum_{i=1}^m \lambda_i \omega^i$$

où $\lambda_i = - < dV, \zeta^i >$. Cela finit la démonstration du théorème. ∎

Ces relations nous donnent des conditions supplémentaires sur les fonctions $\lambda_{i,k}, \ 1 \leq i, k \leq m$.

Remarque 4.4.1 En prenant $i = k' = k$, les conditions nécessaires et suffisantes du théorème (4.4.1) s'écrivent

$$\frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^l = \frac{\partial x^l}{\partial p_j^k} - \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^j \tag{4.46}$$

Ce sont donc les conditions nécessaires $S_k = S_k'$.

4.5 Retour au cas de deux contraintes

Nous revenons rapidement au problème de maximisation sous deux contraintes en prenant $y^1 = y^2 = 1$ afin de comparer les conditions d'intégrabilité obtenues dans les deux cas ($PX = Y$ et $PX = 1$). Soit donc le problème suivant

$$(\mathcal{P})_2 \begin{cases} \max\ U(X) \\ \sum_j p_j^1 x^j = 1 \\ \sum_j p_j^2 x^j = 1 \end{cases}$$

Les conditions d'intégration mathématique sont données par le théorème (4.4.1). Pour déterminer les conditions nécessaires et suffisantes lorsque $m = 2$, on prend $k = 1$ et i, k' prennent deux valeurs possibles: 1 et 2.

Théorème 4.5.1 *Soit $X \in I\!R^n_{++}$ une fonction de classe C^∞ satisfaisant $PX(P) = 1$. Alors, il existe trois fonctions V, λ_1, λ_2 telles que*

$$dV = -(\lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2) \tag{4.47}$$

si et seulement si il existe $\lambda(P) > 0$, de classe C^∞, telle que les conditions suivantes soient satisfaites

$$S_1 = S_1' \tag{4.48}$$

$$S_2 = S_2' \tag{4.49}$$

$$S_2 = \lambda S_1' \tag{4.50}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_j^1} - \left(\sum_{j'} \frac{\partial\lambda}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 - \lambda\right) x^j = -\lambda \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 + \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^2} p_{j'}^2 \tag{4.51}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_j^2} - \left(\sum_{j'} \frac{\partial\lambda}{\partial p_{j'}^2} p_{j'}^2 - \lambda\right) x^j = -\lambda \left(\lambda \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^2} p_{j'}^2\right) \tag{4.52}$$

avec $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Les fonctions V, λ_1, λ_2 sont définies localement.

Démonstration. On récrit les conditions du théorème (4.4.1).
Cas 1. $i = k' = k = 1$, cela implique que $S_1 = S_1'$.
Cas 2. $i = 1$, $k' = 2$. Dans ce cas, on a les conditions suivantes:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_j^1} x^l + \lambda \frac{\partial x^l}{\partial p_j^1} - \frac{\partial x^j}{\partial p_l^2} - \lambda \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^j + \lambda \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^l + \lambda x^j x^l - \sum_{j'} \frac{\partial\lambda}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^j x^l = 0 \tag{4.53}$$

Soit T_{jl} la $n \times n$ matrice de terme général l'équation précédente. En multipliant cette matrice par le vecteur $[p_1^2, ..., p_n^2]'$, on obtient

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j^1} - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^2} p_{j'}^2 + \lambda \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 + \lambda x^j - \sum_{j'} \frac{\partial \lambda}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^j = 0 \quad \forall j \tag{4.54}$$

Ce qui nous donne une formule pour $\frac{\partial \lambda}{\partial p_j^1}$. En substituant dans (4.53), on obtient $S_2 = \lambda S_1'$. On récrit (4.54) sous la forme qui suit:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j^1} - \left(\sum_{j'} \frac{\partial \lambda}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 - \lambda \right) x^j = -\lambda \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 + \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^2} p_{j'}^2 \tag{4.55}$$

Cas 3. $i = k' = 2$. Pour ces valeurs de i et k', on a

$$\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_l^2} x^j - \frac{\partial \lambda}{\partial p_j^2} x^l \right) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x^l}{\partial p_j^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x^j}{\partial p_l^2} + \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^j - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 x^l = 0 \tag{4.56}$$

En multipliant par $[p_1^2, ..., p_n^2]'$, on obtient

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_l^2} - \left(\sum_{j'} \frac{\partial \lambda}{\partial p_{j'}^2} p_{j'}^2 - \lambda \right) x^l - \lambda \left(\sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^2} p_{j'}^2 - \lambda \sum_{j'} \frac{\partial x^l}{\partial p_{j'}^1} p_{j'}^1 \right) = 0 \tag{4.57}$$

Les deux dernières équations impliquent que $S_2 = S_2'$.

Ainsi, les relations déterminées précédemment sont les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique. ∎

Dans les deux derniers chapitres, nous avons résolu les problèmes d'intégration mathématique provenant du problème de maximisation sous les contraintes $PX \leq Y$ et $PX \leq 1$, respectivement. Dans le chapitre qui suit, le problème d'intégration économique sera discuté.

Chapitre 5

Intégration économique

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré au problème d'intégration économique. Nous étudierons les conséquences de la propriété de convexité de la fonction valeur. Les conditions nécessaires de négativité, que nous allons déterminer, sont également suffisantes pour trouver une fonction V satisfaisant la propriété (Π) et m fonctions positives $\lambda_1, ..., \lambda_m$ telles que

$$dV = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega^i$$

Rappelons que la propriété (Π) est la suivante:
La matrice Hessienne de la fonction V est semi-définie positive sur l'espace $\mathcal{E}(P, Y)$ défini de la manière suivante

$$\mathcal{E}(P,Y) = \{(\xi^1, ..., \xi^m, \eta^1, ..., \eta^m) \mid \xi^i.\nabla_{p^i} V(P,Y) + \eta^i \nabla_{y^i} V(P,Y) = 0, \ \forall i \ \} \quad (5.1)$$

où $\xi^i \in I\!R^n, \eta^i \in I\!R$.

Afin de déterminer les conditions de négativité liées au problème d'intégration, on démontre un lemme qui généralise un résultat de Diewert, [20], dans le cas d'une seule contrainte. Diewert utilise la quasi-convexité de la fonction d'utilité indirecte pour démontrer que la matrice de Slutsky est semi-définie négative.

La méthode classique utilisée pour démontrer la négativité de la matrice de Slutsky consiste à utiliser la fonction de dépense dérivée du problème de minimisation de dépense, cf. le chapitre 1 et [41]. Dans le cas de m contraintes, cette dualité entre la maximisation d'utilité et la minimisation de dépense n'existe pas. L'outil que l'on utilise est la fonction d'utilité indirecte.

Dans la section qui suit, on déterminera des relations qui nous permettent ensuite d'obtenir des conditions qui généralisent la négativité de la matrice de Slutsky. La propriété (Π), de la fonction d'utilité indirecte, introduite dans le chapitre 2 sera démontrée. Ensuite, les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration économique seront données. Finalement, on discutera le problème de dualité entre la fonction d'utilité directe et la fonction d'utilité indirecte. On appliquera la théorie de la dualité généralisée développée par Epstein sur les fonctions d'utilité directe et indirecte.

5.2 Les liens entre la fonction V et $\lambda_i S_k$

La fonction valeur est définie par $V(P,Y)=U(X(P,Y))+\lambda(P,Y)'(Y-PX(P,Y))$, où X la solution du problème $(\mathcal{P})_y$, et $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m)$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés. D'après le théorème de l'enveloppe, la fonction V satisfait les relations suivantes:

$$\frac{\partial V}{\partial p^i_j} = -\lambda_i x^j \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y^i} = \lambda_i \tag{5.3}$$

En substituant pour λ_i de (5.3) dans (5.2), on obtient des relations qui généralisent l'identité de Roy dans le cas d'une seule contrainte:

$$x^j = -\frac{\partial V/\partial p^i_j}{\partial V/\partial y^i} \tag{5.4}$$

On utilise ces relations et de l'homogénéité de degré zéro de V en (p^i, y^i), $\forall\, i$, pour démontrer le lemme qui suit. Introduisons d'abord la définition d'un tenseur.

Définition 5.2.1 *Soient E, E^* un espace vectoriel et son dual, respectivement. Un tenseur sur E est une fonction multilinéaire à valeurs réelles avec des variables appartenant à l'espace E ou à son dual E^*.*

Montrons le lemme suivant

Lemme 5.2.1 *Soient V la fonction valeur du problème de maximisation sous les contraintes $PX(P,Y)=Y$, X la solution de ce problème et $\lambda_1,...,\lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange associés. Alors, pour tout $1\le i,k\le m, 1\le j,l\le n$, on a les relations suivantes entre le tenseur $\lambda_i S^{jl}_k$ et les dérivées partielles secondes de V*

$$\begin{aligned}\lambda_i\left(\frac{\partial x^j}{\partial p^k_l}+\frac{\partial x^j}{\partial y^k}x^l\right) &= -\frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial p^i_j}+\frac{1}{y^i}\sum_{j'}\frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial p^i_{j'}}p^i_{j'}x^j \\ &+ \frac{1}{y^k}\sum_{l'}\frac{\partial^2 V}{\partial p^i_j \partial p^k_{l'}}p^k_{l'}x^l - \frac{1}{y^i}\frac{1}{y^k}\sum_{j',l'}\frac{\partial^2 V}{\partial p^i_{j'} p^k_{l'}}p^i_{j'}p^k_{l'}x^j x^l\end{aligned}$$

Démonstration. Nous utiliserons les relations (5.4) pour démontrer ce lemme. En dérivant (5.4) par rapport à p^k_l et y^k, on obtient, respectivement:

$$\frac{\partial x^j}{\partial p^k_l} = -\frac{1}{(\partial V/\partial y^i)^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y^i}\frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial p^i_j} - \frac{\partial V}{\partial p^i_j}\frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial y^i}\right) \tag{5.5}$$

et

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^k} = -\frac{1}{(\partial V/\partial y^i)^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y^i}\frac{\partial^2 V}{\partial y^k \partial p^i_j} - \frac{\partial V}{\partial p^i_j}\frac{\partial^2 V}{\partial y^k \partial y^i}\right) \tag{5.6}$$

d'où

$$\lambda_i S^{jl}_k = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial p^i_j} + \frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial y^i}x^j + \frac{\partial^2 V}{\partial y^k \partial p^i_j}x^l + \frac{\partial^2 V}{\partial y^k \partial y^i}x^j x^l\right) \tag{5.7}$$

La fonction V satisfait les conditions d'homogénéité suivantes

$$\sum_j \frac{\partial V}{\partial p^i_j}p^i_j + \frac{\partial V}{\partial y^i}y^i = 0 \quad \forall i \tag{5.8}$$

En dérivant cette équation par rapport à p^k_l et y^k, on obtient, respectivement

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial y^i} = -\frac{1}{y^i}\sum_{j'} \frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial p^i_{j'}}p^i_{j'} - \frac{1}{y^i}\frac{\partial V}{\partial p^i_l}\delta^i_k \tag{5.9}$$

et

$$\sum_{j'} \frac{\partial^2 V}{\partial y^k \partial p^i_{j'}}p^i_{j'} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^k \partial y^i}y^i + \frac{\partial V}{\partial y^i}\delta^i_k = 0 \tag{5.10}$$

Or,

$$\sum_{j'} \frac{\partial^2 V}{\partial y^k \partial p^i_{j'}}p^i_{j'} = -\frac{1}{y^k}\sum_{j',l'} \frac{\partial^2 V}{\partial p^i_{j'} \partial p^k_{l'}}p^i_{j'}p^k_{l'} - \frac{1}{y^k}\sum_{j'} \frac{\partial V}{\partial p^i_{j'}}p^i_{j'}\delta^i_k \tag{5.11}$$

On en déduit les relations suivantes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^k \partial y^i} = \frac{1}{y^i}\frac{1}{y^k}\sum_{j',l'} \frac{\partial^2 V}{\partial p^i_{j'} \partial p^k_{l'}}p^i_{j'}p^k_{l'} + \frac{1}{y^i}\frac{1}{y^k}\sum_{j'} \frac{\partial V}{\partial p^i_{j'}}p^i_{j'}\delta^i_k - \frac{1}{y^i}\frac{\partial V}{\partial y^i}\delta^i_k \tag{5.12}$$

Il suffit de reporter les relations (5.9) et (5.12) dans (5.7) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\lambda_i S^{jl}_k \; = \; & -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial p^i_j} - \frac{1}{y^i}\sum_{j'} \frac{\partial^2 V}{\partial p^k_l \partial p^i_{j'}}p^i_{j'}x^j - \frac{1}{y^i}\frac{\partial V}{\partial p^k_l}\delta^i_k x^j\right. \\
& - \frac{1}{y^k}\sum_{l'} \frac{\partial^2 V}{\partial p^i_j \partial p^k_{l'}}p^k_{l'}x^l - \frac{1}{y^k}\frac{\partial V}{\partial p^i_j}\delta^i_k x^l + \frac{1}{y^i}\frac{1}{y^k}\sum_{j',l'} \frac{\partial^2 V}{\partial p^i_{j'} \partial p^k_{l'}}p^i_{j'}p^k_{l'}x^j x^l \\
& \left. + \frac{1}{y^i}\frac{1}{y^k}\sum_{j'} \frac{\partial V}{\partial p^i_{j'}}p^i_{j'}\delta^i_k x^j x^l - \frac{1}{y^i}\frac{\partial V}{\partial y^i}\delta^i_k x^j x^l\right)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Or, les relations $\partial V/\partial p^i_j = -\lambda_i x^j$ et (5.8) impliquent que

$$-\frac{1}{y^i}\frac{\partial V}{\partial p^k_l}\delta^i_k x^j - \frac{1}{y^k}\frac{\partial V}{\partial p^i_j}\delta^i_k x^l + \frac{1}{y^i}\frac{1}{y^k}\sum_{j'} \frac{\partial V}{\partial p^i_{j'}}p^i_{j'}\delta^i_k x^j x^l - \frac{1}{y^i}\frac{\partial V}{\partial y^i}\delta^i_k x^j x^l =$$

$$\frac{1}{y^i}\lambda_i x^j x^l \delta_k^i + \frac{1}{y^k}\lambda_k x^j x^l \delta_k^i - \frac{1}{y^k}\lambda_k x^j x^l \delta_k^i - \frac{1}{y^i}\lambda_i x^j x^l \delta_k^i = 0 \tag{5.14}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}\lambda_i S_k^{jl} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial p_l^k \partial p_j^i} + \frac{1}{y^i}\sum_{j'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_l^k \partial p_{j'}^i} p_{j'}^i x^j + \frac{1}{y^k}\sum_{l'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_j^i \partial p_{l'}^k} p_{l'}^k x^l \\ &- \frac{1}{y^i}\frac{1}{y^k}\sum_{j',l'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_{j'}^i p_{l'}^k} p_{j'}^i p_{l'}^k x^j x^l \end{aligned} \tag{5.15}$$

Cela finit la démonstration du lemme. ∎

Remarque 5.2.1 Il est clair que la partie droite de (5.15) satisfait les conditions de symétrie correspondant à la symétrie des relations de Slutsky généralisées. On remarque également que la partie droite, considérée comme une $n \times n$ matrice (i et k sont fixés), s'annule en multipliant par p^i ou p^k pour tout i et k, ce qui correspond aux relations $S_i p^k = 0, \forall i, k$, qui seront démontrées dans la section qui suit. ∎

On récrit les relations (5.7) sous une forme plus compacte comme suit

$$\begin{aligned}\lambda_i \left(D_{p^k} X + (D_{y^k} X) X'\right) &= -D^2_{p^i p^k} V + \frac{1}{y^i} X p^{i\prime}(D^2_{p^i p^k} V) + \frac{1}{y^k}(D^2_{p^i p^k} V) p^k X' \\ &\quad -\frac{1}{y^i}\frac{1}{y^k} X p^{i\prime}(D^2_{p^i p^k} V) p^k X' \end{aligned} \tag{5.16}$$

où la prime désigne la transposition.

Nous avons obtenu dans la démonstration du lemme (5.2.1) une autre forme des relations (5.16). Les relations (5.7) comprennent les dérivées de V par rapport à Y. Ecrivons ces relations sous la forme

$$\lambda_i S_k = -\left(D^2_{p^i p^k} V + (D^2_{p^k y^i} V) X' + X (D^2_{y^k p^i} V)' + X (D^2_{y^i y^k} V) X'\right)$$

Ces relations seront utilisées pour démontrer la propriété de convexité (Π) satisfaite par la fonction V.

Nous utiliserons les relations (5.16) pour démontrer des propriétés de négativité satisfaites par $(\lambda_i S_k)_{i,k}$. C'est une généralisation de la négativité de la matrice de Slutsky. C'est l'objet de la section qui suit.

Notation: Rappelons qu'un vecteur dans $\mathbb{R}^K$ est représenté par une colonne. On l'écrit en ligne dans le texte parce qu'elle prend moins d'espace qu'une colonne.

5.3 L'intégration économique

Dans la première partie de cette section, on donne des conditions nécessaires qui découlent de la propriété de convexité de V. Nous montrons ensuite que ces conditions sont également suffisantes pour l'intégration économique.

5.3.1 Les conditions nécessaires de négativité

Nous démontrons que les m matrices $S_1, ..., S_m$ sont semi-définies négatives. Ces conditions proviennent de la quasi-convexité en $(p^i, y^i), \forall i$, de la fonction valeur V. La proportionnalité de ces matrices implique de plus que

$$\sum_{i,j,k,l} \lambda_i S_k^{jl} \xi_j^i \xi_l^k \leq 0 \quad \forall \xi \in I\!R^{mn} \tag{5.17}$$

Quelques propriétés satisfaites par les matrices $S_1, ..., S_m$ sont données par le théorème suivant:

Théorème 5.3.1 *Soit X la solution du problème $(\mathcal{P})_y$. Alors, pour tout i, la matrice*

$$S_i = D_{p^i}X + (D_{y^i}X)X'$$

satisfait les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} S_i &= S_i' & (5.18)\\ S_i p^k &= 0, \quad \forall i, k & (5.19)\\ \sum_{j,l} S_i^{jl} \xi_j \xi_l &\leq 0, \quad \forall \xi \in I\!R^n & (5.20) \end{aligned}$$

Démonstration. La symétrie découle des relations $\lambda_i S_k = \lambda_k S_i'$. Avant de démontrer (5.19), montrons que $S_i p^i = 0$.
Soit

$$S_i^{lj} = \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} x^j \quad \forall j, l = 1, ..., n. \tag{5.21}$$

Alors, on a, pour tout $l \leq n$,

$$\begin{aligned} \sum_j S_i^{jl} p_j^i &= \sum_j \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} p_j^i + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \sum_j x^j p_j^i & (5.22)\\ &= \sum_j \frac{\partial x^l}{\partial p_j^i} p_j^i + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} y^i & (5.23)\\ &= 0 & (5.24) \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de l'homogénéité de X. Puisque

$$S_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} S_k \tag{5.25}$$

Alors,

$$S_i^l p^k = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} S_k p^k = 0 \tag{5.26}$$

Il nous reste à démontrer (5.20). Soit ξ un vecteur quelconque de $I\!R^n$. Puisque $< p^i, X >= y^i \neq 0$ (produit scalaire), c'est-à-dire que $p^i = (p_1^i, ..., p_n^i)$ n'est pas orthogonal à X, Cela implique que tout vecteur $\xi \in I\!R^n$ s'écrit $\xi = \bar{\xi} + tp^i$, $t \in I\!R$ tel que $< \bar{\xi}, X >= 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \xi' S_i \xi &= (\bar{\xi}' + tp^{i'}) S_i (\bar{\xi} + tp^i) && (5.27) \\ &= \bar{\xi}' S_i \bar{\xi} && (5.28) \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de la propriété $S_i p^k = 0, \forall i, k$. En utilisant (5.16) et $\bar{\xi}' X = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\xi}' S_i \bar{\xi} &= -\frac{1}{\lambda_i} \bar{\xi}' (D_{p^i}^2 V) \bar{\xi} && (5.29) \\ &\leq 0 && (5.30) \end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du fait que la fonction V est quasi-convexe en p^i. Or, V est quasi-convexe si et seulement si $D^2 V$ (la matrice Hessienne de V) est semidéfinie positive sur l'espace orthogonal au ∇V (le gradient de V). L'espace orthogonal au gradient de V par rapport à p^i est défini comme suit

$$\nabla_{p^i} V^{\perp} = \{\xi \in I\!R^n \mid -\lambda_i \sum_j x^j \xi_j = 0\} \tag{5.31}$$

Il est clair que $\bar{\xi} \in \nabla_{p^i} V^{\perp}$. Ce qui démontre que la matrice S_i est semi-définie négative. ∎

Remarque 5.3.1 Si X satisfait les contraintes $PX = Y$, alors, on peut montrer que $S_i p^k = 0$, de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \sum_j p_j^k S_i^{lj} &= \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial p_l^i} p_j^k + \frac{\partial x^j}{\partial y^i} p_j^k x^l, \quad l = 1, ..., n \\ &= -x^l \delta_k^i + x^l \delta_k^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cela montre que $S_i p^k = 0$, $\forall i, k$. ∎

Nous avons démontré que les matrices $S_1, ..., S_m$ sont semi-définies négatives. En effet, le tenseur $\lambda_i S_k^{jl}$ est semi-défini négatif.

Définition 5.3.1 *On dit que le tenseur $\lambda_i S_k^{jl}$ est semi-défini négatif s'il satisfait la condition suivante*

$$\sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{n} \lambda_i S_k^{jl} \xi_j^i \xi_l^k \leq 0 \quad \forall \xi \in I\!R^{mn} \tag{5.32}$$

Cette propriété est démontrée dans le corollaire qui suit. On peut récrire $(\lambda_i S_k)_{i,k}$, en utilisant les relations de proportionnalité entre les matrices $S_1, ..., S_m$, sous une forme dans laquelle une seule matrice, disons S_{k_0}, où $1 \leq k_0 \leq m$, apparait. Prenons d'abord $m = 2$. Dans ce cas, $i, k = 1, 2$, et

$$\lambda_i S_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 S_1 & \lambda_2 S_1 \\ \lambda_1 S_2 & \lambda_2 S_2 \end{pmatrix}$$

En utilisant les relations $\lambda_1 S_2 = \lambda_2 S_1$, on peut récrire la matrice précédente comme suit

$$\begin{aligned} \lambda_i S_k &= \begin{pmatrix} \lambda_1 S_1 & \lambda_2 S_1 \\ \lambda_2 S_1 & \frac{(\lambda_2)^2}{\lambda_1} S_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 S_1 & \lambda_1 \lambda_2 S_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 S_1 & \lambda_2^2 S_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En général, le tenseur $\lambda_i S_k$ s'écrit sous la forme suivante: $\forall\ k_0 = 1, ..., m$

$$\lambda_i S_k = \frac{1}{\lambda_{k_0}} (\lambda_i \lambda_k S_{k_0}) \quad i, k = 1, ..., m. \tag{5.33}$$

On utilise (5.33) pour démontrer le corollaire suivant:

Corollaire 5.3.1 *Le tenseur $(\lambda_i S_k^{jl})_{i,k}^{j,l}$ est semi-défini négatif.*

Démonstration. Soit $\xi^i \in I\!R^n$, et $\hat{\xi} = (\xi^1, \xi^2, ..., \xi^m) \in I\!R^{mn}$. Alors, d'après les relations (5.33), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l} \lambda_i S_k^{jl} \xi_l^k \xi_j^i &= \frac{1}{\lambda_{k_0}} \sum_{i,j,k,l} \lambda_i \lambda_k S_{k_0}^{jl} \xi_j^i \xi_l^k \\ &= \frac{1}{\lambda_{k_0}} \sum_{j,l} S_{k_0}^{jl} \eta_j \eta_l \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

où $\eta = \sum_i \lambda_i \xi^i$, et la dernière inégalité provient du fait que la matrice S_{k_0} est semi-définie négative. Cela démontre que le tenseur $(\lambda_i S_k^{jl})_{i,k}^{j,l}$ est semi-défini négatif. ∎

Le corollaire suivant donne une propriété concernant la quasi-convexité de la fonction V. Cette propriété est plus forte que la quasi-convexité en p^i, pour tout i (séparément), mais plus faible que la quasi-convexité globale en P.

Corollaire 5.3.2 *Soit V la fonction d'utilité indirecte du problème $(\mathcal{P})_y$. Alors, $D_P^2 V$ est semi-définie positive sur l'espace $\mathcal{L}$ défini par*

$$\mathcal{L} = \left\{ \xi = (\xi^1, ..., \xi^m) \in I\!\!R^{mn} \mid \xi^i . \nabla_{p^i} V = 0, \ \forall i \right\} \tag{5.34}$$

Démonstration. On peut redéfinir l'espace $\mathcal{L}$ comme suit

$$\mathcal{L} = \left\{ \xi = (\xi^1, ..., \xi^m) \in I\!\!R^{mn} \mid \xi^i . X = 0, \ \forall i \right\} \tag{5.35}$$

Soit ξ un vecteur appartenant à l'espace $\mathcal{L}$. Le lemme (5.2.1) implique que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p_j^i \partial p_l^k} | \mathcal{L} = \lambda_i S_k \tag{5.36}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 V}{\partial p_j^i \partial p_l^k} \xi_j^i \xi_l^k &= - \sum_{i,j,k,l} \lambda_i S_k^{jl} \xi_j^i \xi_l^k \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Cela conclut la démonstration du corollaire. ∎

Nous montrons dans la proposition suivante que la fonction d'utilité indirecte satisfait la propriété (Π) que nous avons introduite dans le chapitre 2. Il est clair que cette proposition implique le résultat donné par le corollaire précédent. Rappelons d'abord les relations, cf. la démonstration du lemme (5.2.1),

$$\lambda_i S_k = - \left(D^2_{p^i p^k} V + (D^2_{p^k y^i} V) X' + X (D^2_{y^k p^i} V)' + X (D^2_{y^i y^k} V) X' \right) \tag{5.37}$$

On utilise ces relations pour démontrer la proposition qui suit

Proposition 5.3.1 *Soit V la fonction valeur du problème $(\mathcal{P})_y$. Alors, la matrice*

$$D^2 V = \begin{pmatrix} D_P^2 V & D_{PY}^2 V \\ D_{YP}^2 V & D_Y^2 V \end{pmatrix}$$

est semi-définie positive sur l'espace

$$\mathcal{E}(P,Y) = \{ (\xi^1, ..., \xi^m, \eta^1, ..., \eta^m) \in I\!\!R^{mn+m} \mid \xi^i . \nabla_{p^i} V(P,Y) + \eta^i \nabla_{y^i} V(P,Y) = 0, \forall i \} \tag{5.38}$$

où $\xi^i \in I\!\!R^n, \eta^i \in I\!\!R$.

Démonstration. Rappelons d'abord que le théorème de l'enveloppe implique que $\nabla_{p^i} V(P,Y) = -\lambda_i(P,Y)X(P,Y)$ et $\nabla_{y^i} V(P,Y) = \lambda_i(P,Y)$. Pour tout i, l'équation $\xi^i.\nabla_{p^i} V(P,Y) + \eta^i \nabla_{y^i} V(P,Y) = 0$ s'écrit alors sous la forme $X'(P,Y)\xi^i - \eta^i = 0$. Soit $\xi = (\xi^1, ..., \xi^m, \eta^1, ..., \eta^m) \in \mathcal{E}(P,Y)$. En substituant $\eta^i = X'\xi^i$, on peut récrire le vecteur ξ comme suit

$$\xi = (\xi^1, ..., \xi^m, \xi^{1\prime}X, ..., \xi^{m\prime}X)$$

Soit, $\hat{\xi} = (\xi^1, ..., \xi^m)$, un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^{mn}$. On note

$$\hat{\xi} * X = (\xi^{1\prime}X, ..., \xi^{m\prime}X) \in \mathbb{R}^m$$

Le vecteur ξ s'écrit donc $\xi = (\hat{\xi}, \hat{\xi} * X)$. Alors,

$$\xi' D^2 V \xi = (\hat{\xi}', (\hat{\xi} * X)') \begin{pmatrix} D_P^2 V & D_{PY}^2 V \\ D_{YP}^2 V & D_Y^2 V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\xi} * X \end{pmatrix}$$

Il suffit d'utiliser les relations (5.37) et d'écrire le produit précédent sous la forme qui suit pour obtenir le résultat recherché

$$\begin{aligned} \xi' D^2 V \xi &= (\xi^{1\prime}, ..., \xi^{m\prime}) \begin{pmatrix} D^2_{p^i p^k} V & (D^2_{p^i y^k} V) X' \\ X(D^2_{y^i p^k} V) & X(D^2_{y^i y^k} V) X' \end{pmatrix}_{i,k} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix} \\ &= -\sum_{i,k} \xi^{i\prime} \lambda_i S_k \xi^k \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Cela montre que $D^2 V$ est semi-définie positive sur l'espace $\mathcal{E}$. ■

Remarque 5.3.2

1. Il est clair que la propriété précédente est plus forte que la quasi-convexité (séparément) en (p^i, y^i) mais plus faible que la quasi-convexité globale en (P,Y).

2. La quasi-convexité de V en (p^i, y^i) séparément est équivalente aux relations suivantes

$$\xi' \nabla_{p^i} V(P,Y) + \eta \nabla_{y^i} V(P,Y) > 0, \text{ alors,}$$
$$V(p^1, ..., p^i + \xi, p^{i+1}, ..., p^m, y^1, ..., y^i + \eta, y^{i+1}, ..., y^m) > V(P,Y) \tag{5.40}$$

où (ξ, η) est un vecteur de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

5.3.2 Les conditions suffisantes de l'intégration économique

Les conditions de négativité précédentes sont aussi suffisantes pour que la matrice Hessienne de la fonction V obtenue par la résolution du problème d'intégration mathématique soit semi-définie positive sur l'espace $\mathcal{E}$ défini par (5.38), et que les m fonctions $\lambda_1, ..., \lambda_m$ soient positives telles que

$$dV = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega^i$$

On a le théorème suivant:

Théorème 5.3.2 *Soient $X \in I\!R^n_{++}$ et $\lambda_{ik'} > 0$, $i, k' \leq m$, des fonctions données de classe C^∞ satisfaisant les conditions nécessaires et suffisantes du théorème (3.4.2) et les contraintes $PX(P,Y) = Y$ dans un voisinage $\mathcal{U}$ d'un point donné $(\bar{P}, \bar{Y}) \in I\!R^{mn+m}_{++}$. Supposons que pour tout i, la matrice S_i soit symétrique et semi-définie négative. On suppose de plus que pour certains $i, j_0, S_i^{j_0 j_0} \neq 0$. Alors, il existe une fonction V satisfaisant la propriété de convexité* (Π) *et il existe m fonctions positives $\lambda_1, ..., \lambda_m$ telles que*

$$dV = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega^i \tag{5.41}$$

où $\lambda_{ik} = \lambda_i / \lambda_k$ et $V, \lambda_1, ..., \lambda_m$ sont définies sur un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Démonstration. Soit X une fonction satisfaisant les hypothèses du théorème. Alors, les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique impliquent que

$$\Omega^{jl} \wedge d\Omega^{jl} = 0, \ \forall \ j, l \tag{5.42}$$

où

$$\Omega^{jl} = \sum_{i=1}^{m} S_i^{jl} \omega^i \tag{5.43}$$

Le théorème de Frobenius implique qu'il existe, $\forall j, l$, deux fonctions φ^{jl} et V telles que

$$\varphi^{jl} dV = \sum_i S_i^{jl} \omega^i \quad \forall j, l \tag{5.44}$$

Prenons $j = l = j_0$. Par hypothèse, $S_i^{j_0 j_0} < 0$ et $X \in I\!R^n_{++}$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi^{j_0 j_0} \frac{\partial V}{\partial p_j^i} &= S_i^{j_0 j_0} x^j < 0 \\ \varphi^{j_0 j_0} \frac{\partial V}{\partial y^i} &= -S_i^{j_0 j_0} > 0 \end{aligned}$$

On peut supposer que $\varphi^{j_0 j_0} > 0, \nabla_P V << 0, \nabla_Y V >> 0$ dans un voisinage suffisamment petit. On supprime les exposants $j_0 j_0$ pour alléger les notations. Nous avons démontré dans le chapitre 3 que l'on peut trouver m fonctions $\lambda_1, ..., \lambda_m$ telles que $dV = -\sum_i \lambda_i \omega^i$. On reprend rapidement cette partie de la démonstration.
Soit ζ^k le champ de vecteurs

$$\zeta^k = \sum_j p_j^k \frac{\partial}{\partial p_j^k} \tag{5.45}$$

Alors, $< \omega^i, \zeta^k >= y^k \delta_k^i$. En appliquant la forme linéaire (5.44) au champ de vecteurs (5.45), on obtient

$$\varphi < dV, \zeta^k >= y^k S_k \tag{5.46}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{y^k}{< dV, \zeta^k >} dV &= \sum_i \frac{S_i}{S_k} \omega^i & (5.47) \\ &= \sum_i \lambda_{ik} \omega^i & (5.48) \end{aligned}$$

On applique la 1-forme précédente au champ de vecteurs $\zeta^{k'}$ pour obtenir

$$\frac{y^k}{< dV, \zeta^k >} < dV, \zeta^{k'} >= y^{k'} \lambda_{k'k} \tag{5.49}$$

Alors

$$\frac{y^k}{< dV, \zeta^k >} dV = \sum_i \frac{y^k < dV, \zeta^i >}{y^i < dV, \zeta^k >} \omega^i \tag{5.50}$$

d'où

$$dV = \sum_i \frac{< dV, \zeta^i >}{y^i} \omega^i \tag{5.51}$$

Soit $\lambda_i = -\frac{1}{y^i} < dV, \zeta^i >> 0$. L'équation précédente s'écrit

$$dV = -\sum_i \lambda_i \omega^i \tag{5.52}$$

où $\lambda_i = -\frac{1}{y^i} < dV, \zeta^i >> 0$. Pour tout i, la fonction λ_i est strictement positive parce que $\frac{\partial V}{\partial p_j^i} < 0$, $p_j^i > 0$ et $y^i > 0, \forall i, j$. La décomposition (5.52) implique les relations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_j^i} &= -\lambda_i x^j & (5.53) \\ \frac{\partial V}{\partial y^i} &= \lambda_i & (5.54) \end{aligned}$$

Il reste à démontrer que D^2V est semi-définie positive sur l'espace

$$\mathcal{E}(P,Y) = \{(\xi^1,...,\xi^m,\eta^1,...,\eta^m) \mid \xi^i \in I\!R^n, \eta^i \in I\!R, \xi^i.X(P,Y) - \eta^i = 0\}$$

En suivant les étapes de la démonstration du lemme (5.2.1) et en utilisant les relations (5.53) et (5.54), on obtient

$$\lambda_i S_k = -\left(D^2_{p^ip^k}V + (D^2_{p^ky^i}V)X' + X(D^2_{y^kp^i}V)' + X(D^2_{y^iy^k}V)X'\right)$$

Par hypothèse, les matrices $S_1,...,S_m$ sont semi-définies négatives, ce qui implique que le tenseur $\lambda_i S_k$ est semi-défini négatif. Il suffit de suivre la démonstration de la proposition (5.3.1) pour montrer que D^2V est semi-définie positive sur $\mathcal{E}$. Les fonctions $V, \lambda_1,...,\lambda_m$ satisfont les propriétés d'homogénéité requises. Cela finit la démonstration. ∎

Ainsi, nous avons résolu le problème d'intégration économique. Sous les conditions données par le théorème (5.3.2), il existe une fonction d'utilité indirecte satisfaisant les propriétés de convexité requises. La prochaine étape consiste à déterminer s'il est possible d'en récupérer une fonction d'utilité directe. La réponse est dans la section suivante.

5.4 Le problème de dualité

La fonction $V(P,Y)$ obtenue par la résolution du problème d'intégration satisfait (localement) les conditions suivantes:

- De classe C^∞.
- Décroissante en P et croissante en Y.
- La matrice Hessienne de V, $D^2V(P,Y)$, est semi-définie positive sur l'espace $\mathcal{E}(P,Y)$, pour tout $(P,Y) \in \mathcal{V}$.

Remarque 5.4.1 D'après la proposition (5.3.1), la matrice $D^2V(P,Y)$ est semi-définie positive sur $\mathcal{E}(P,Y)$. La condition: D^2V est définie positive sur $\mathcal{E}$, qui est plus forte que la propriété satisfaite par V, est la condition suffisante du second ordre du problème de minimisation suivant:

$$\min_{(P,Y)} \{V(P,Y) \mid PX = Y, (P,Y) \in \mathcal{V}\} \tag{5.55}$$

Réciproquement, si ce problème admet une solution, disons (P^*, Y^*), alors, la fonction V satisfait la condition donnée par la proposition (5.3.1) en (P^*, Y^*). ∎

La fonction V satisfait donc toutes les propriétés de la fonction valeur du problème de maximisation sous m contraintes. Est-il possible d'en récupérer une fonction d'utilité directe? Nous avons vu que c'est possible dans le cas de Slutsky. Définissons $U : I\!R^n_{++} \to I\!R$ comme la fonction valeur du problème de minimisation précédent:

$$U(X) = \min_{(P,Y)} \{V(P,Y) \mid PX \leq Y, (P,Y) \in \mathcal{V}\} \tag{5.56}$$

où $p^i_j \geq 0, y^i > 0, \ \forall\, 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n$. Cette fonction est continue et croissante. Soit $\bar{X} \geq X$, alors

$$\{(P,Y) \mid P\bar{X} \leq Y\} \subset \{(P,Y) \mid PX \leq Y\} \tag{5.57}$$

Cela implique que $U(\bar{X}) \geq U(X)$ parce que l'on minimise sur un sous-ensemble plus petit. La fonction U n'est pas nécessairement quasi-concave. On ne peut donc pas obtenir des conditions de dualité, satisfaites par U et V, analogues à celles existant dans le cas d'une seule contrainte. Toutefois, des propriétés plus faibles existent.

5.4.1 La dualité généralisée

La fonction U définie par (5.56) n'est pas nécessairement quasi-concave. On peut obtenir des conditions de dualité plus faibles en appliquant les résultats d'Epstein sur la dualité généralisée. Epstein a introduit une classe de fonctions qui est stable par dualité. Les fonctions U et V satisfont des conditions plus faibles que la quasi-concavité et la quasi-convexité, respectivement. On dit que U est localement QE-concave et que V est localement QE-convexe si ces fonctions satisfont localement les conditions données par Epstein. On introduira les notions d'une fonction localement QE-concave et d'une fonction localement QE-convexe avant de donner la condition suffisante pour que la fonction d'utilité indirecte V soit localement QE-convexe. Tous les résultats concernant la dualité généralisée se trouvent dans l'article d'Epstein, voir également Diewert, [21]. On commence par donner les conditions qui généralisent la quasi-concavité et la quasi-convexité, respectivement.

Définition 5.4.1 *Soient $\mathcal{U} \subset I\!R^n_{++}$ et $\mathcal{V} \subset I\!R^{mn}_{++} \times I\!R^m_{++}$*

- *On dit qu'une fonction $U(X)$ est localement QE-concave (localement quasi-concave au sens d'Epstein) si*

$$\forall X^* \in \mathcal{U}, \ \exists\, (P^*, Y^*) \in \mathcal{V} \text{ tel que } U(X^*) = \max_{X \in \mathcal{U}} \{U(X) \mid P^*X \leq Y^*\} \tag{5.58}$$

- *On dit qu'une fonction $V(P,Y)$ est localement QE-convexe (localement quasi-convexe au sens d'Epstein) si*

$$\forall (P^*,Y^*) \in \mathcal{V},\ \exists\ X^* \in \mathcal{U} \text{ tel que } V(P^*,Y^*) = \min_{(P,Y)\in\mathcal{V}} \{V(P,Y) \mid PX^* \leq Y\} \tag{5.59}$$

Nous appliquons cette théorie sur la fonction d'utilité indirecte que nous avons abtenue précédemment. Ensuite, on en déduira une fonction d'utilité directe satisfaisant les conditions de dualité généralisée.

5.4.2 Application de la dualité généralisée

On donne la condition suffisante pour que la fonction d'utilité indirecte soit localement QE-convexe.

Théorème 5.4.1 *La fonction d'utilité indirecte, notée $V(P,Y)$, est localement QE-convexe si $D^2V(P,Y)$ est définie positive sur $\mathcal{E}(P,Y)$, $\forall\ (P,Y) \in \mathcal{V}$.*

Démonstration. La condition que nous avons donnée dans le théorème est, en effet, la condition suffisante d'optimalité du second ordre. La propriété (Π) est la condition nécessaire du second ordre. Nous montrons la suffisance. La fonction V est strictement décroissante en p_j^i, $\forall i,j$, parce que

$$\frac{\partial V}{\partial p_j^i} = -\lambda_i x^j < 0$$

Alors,

$$\min_{(P,Y)} \{V(P,Y) \mid PX \leq Y, (P,Y) \in \mathcal{V}\} = \min_{(P,Y)} \{V(P,Y) \mid PX = Y, (P,Y) \in \mathcal{V}\} \tag{5.60}$$

Pour voir cela, supposons, par exemple, que $(\bar{P},\bar{Y})$ soit la solution du problème $\min\{V(P,Y) \mid PX \leq Y\}$ telle que $\bar{p}^1.X < \bar{y}^1$. En augmentant, par exemple, p_1^1, on obtient une valeur de V plus petite que $V(\bar{P},\bar{Y})$, ce qui contredit l'optimalité du point $(\bar{P},\bar{Y})$. On peut donc remplacer les contraintes d'inégalité par des contraintes d'égalité.

Soit $\mathcal{V}$ le voisinage d'un point donné $(\bar{P},\bar{Y})$ sur lequel la fonction d'utilité indirecte est définie. Le fait que $D^2V(P,Y)$ est définie positive sur $\mathcal{V}$ implique que si $\xi = (\xi^1,...,\xi^m,\eta^1,...,\eta^m) \in \mathcal{E}(P,Y)$ tel que $(p^1+\xi^1,...,p^m+\xi^m,y^1+\eta^1,...,y^m+\xi^m) \in \mathcal{V}$, alors

$$V(p^1+\xi^1,...,p^m+\xi^m,y^1+\eta^1,...,y^m+\eta^m) > V(p^1,...,p^m,y^1,...,y^m) \tag{5.61}$$

Pour démontrer cela, il suffit d'écrire la formule de Taylor à l'ordre deux, au voisinage de $t = 0$, de la fonction réelle

$$\phi(t) = V(p^1 + t\xi^1, ..., p^m + t\xi^m, y^1 + t\eta^1, ..., y^m + t\eta^m)$$

avec $t \in I\!R$ et $(\xi^1, ..., \xi^m, \eta^1, ..., \eta^m) \in \mathcal{E}(P, Y)$.
On suppose que l'on travaille dans un voisinage suffisamment petit de telle sorte que $\frac{t^2}{2}\phi''(0)$ domine le reste dans la formule de Taylor. Rappelons que la fonction V est définie sur un voisinage d'un point donné $(\bar{P}, \bar{Y})$ dans lequel les fonctions X, λ_{ik} satisfont les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique.
On utilisera (5.60) et (5.61) pour montrer que V est QE-convexe. Pour ce faire, soit (P^*, Y^*) donné. On cherche X^* tel que

$$V(P^*, Y^*) = \min_{(P,Y)}\{V(P, Y) \mid PX^* = Y\} \tag{5.62}$$

Prenons

$$X^*(P^*, Y^*) = -\frac{1}{\lambda_i(P^*, V^*)}\nabla_{p^i}V(P^*, Y^*) \tag{5.63}$$

Avec

$$\lambda_i(P^*, Y^*) = -\frac{1}{y^{*i}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial p_j^i}(P^*, Y^*)p_j^{*i} \tag{5.64}$$

Le point (P^*, Y^*) satisfait les conditions d'optimalité du premier ordre. Il est clair que $P^*X^*(P^*, Y^*) = Y^*$. Soit $\xi = (\xi^1, ..., \xi^m, \eta^1, ..., \eta^m)$ un vecteur appartenant à l'espace $\mathcal{E}(P^*, Y^*)$ tel que $(p^1 + \xi^1, ..., p^m + \xi^m, y^1 + \eta^1, ..., y^m + \eta^m) \in \mathcal{V}$, alors, $\xi^i.X^* = \eta^i$, $\forall i$. Cela implique que $(p^{*i} + \xi^i)X = y^{*i} + \eta^i$. On a donc $(P^* + \xi)X^* = Y^* + \eta$. Or, $V(P^* + \xi, Y^* + \eta) \geq V(P^*, Y^*)$, par (5.61). Cela implique que (P^*, Y^*) est la solution unique du problème de minimisation

$$\min_{(P,Y)}\{V(P, Y) \mid PX^* = Y,\ (P, Y) \in \mathcal{V}\},$$

Cela veut dire que $V(P^*, Y^*) = \min_{(P,Y)}\{V(P, Y) \mid PX^* = Y,\ (P, Y) \in \mathcal{V}\}$. On en déduit que la fonction V est localement QE-convexe. Cela conclut la démonstration. ∎

Nous allons montrer que si la fonction d'utilité indirecte V est localement QE-convexe alors la fonction

$$X \longmapsto U(X) = \min_{(P,Y)\in\mathcal{V}}\{V(P, Y) \mid PX = Y\}$$

est localement QE-concave. Nous montrons également que cette fonction est unique. On suit les étapes de la démonstration du théorème 1, [24].

On se donne $U(X)$ une fonction localement QE-concave.
Définissons $V : \mathcal{V} \subset I\!R^{mn}_{++} \times I\!R^{m}_{++} \to I\!R$ par

$$V(P, Y) = \max_{X \in \mathcal{U}} \{U(X) \mid PX = Y\} \tag{5.65}$$

On définit également $U^*(X) : \mathcal{U} \subset I\!R^{n}_{++} \to I\!R$ par

$$U^*(X) = \min_{(P,Y) \in \mathcal{V}} \{V(P, Y) \mid PX = Y\} \tag{5.66}$$

Supposons que la fonction d'utilité indirecte soit définie sur un voisinage d'un point $(\bar{P}, \bar{Y}) \in I\!R^{mn}_{++} \times I\!R^{m}_{++}$, alors, $\mathcal{U} = \{X \in I\!R^{n}_{++} \mid PX = Y, \forall\ (P, Y) \in \mathcal{V}\}$.

Le théorème suivant établit une dualité entre la fonction d'utilité directe et la fonction d'utilité indirecte.

Théorème 5.4.2 *Si V est localement QE-convexe, alors, U^* est localement QE-concave. De plus, $U^* = U$ sur $\mathcal{U}$ si U est localement QE-concave.*

Démonstration. Soit $X^* \in \mathcal{U}$ tel que $(P^*, Y^*) \in arg\min\{V(P, Y) \mid PX^* = Y, (P, Y) \in \mathcal{V}\}$. Un tel (P^*, Y^*) existe parce que V est localement QE-convexe. On cherche à montrer que $X^* \in arg\max\{U^*(X) \mid P^*X = Y^*, X \in \mathcal{U}\}$. L'inégalité $U^*(X) \leq V(P^*, Y^*) = U^*(X^*)$ implique que U^* atteint son maximium, sous les contraintes $P^*X = Y^*$, en X^*. On en déduit que la fonction U^* est localement QE-concave.
Montrons que $U^* = U$ sur $\mathcal{U}$. Soit $X^* \in \mathcal{U}$ tel qu'il existe (P^*, Y^*) tel que $X^* \in arg\max\{U(X) \mid P^*X = Y^*, X \in \mathcal{U}\}$. C'est possible parce que U est localement QE-concave. Alors, $V(P, Y) \geq V(P^*, Y^*) = U(X^*)$, $\forall\ (P, Y) \in \mathcal{V}$ tel que $PX^* = Y$. Cela veut dire que V atteint son minimum, sous les contraintes $PX^* = Y$, en (P^*, Y^*), d'où, par définition, $U^*(X^*) = V(P^*, Y^*) = U(X^*)$. Cela implique que $U^*(X^*) = U(X^*)$. Puisque X^* est quelconque dans $\mathcal{U}$, on en déduit que $U^*(X) = U(X)$, pour tout $X \in \mathcal{U}$.
Nous avons démontré en même temps que si (P^*, Y^*) est la solution, ou appartient à l'ensemble de solutions, du problème $\min_{(P,Y)}\{V(P, Y) \mid PX^* = Y, (P, Y) \in \mathcal{V}\}$ alors, $X^*(P^*, Y^*)$ est la solution, ou appartient à l'ensemble de solutions, du problème $\max_X\{U^*(X) \mid P^*X = Y^*, X \in \mathcal{U}\}$ et réciproquement. ∎

Avec la théorie de dualité introduite plus haut on peut résumer la situation de la manière qui suit. Si X est la solution du problème $\max_X\{U(X) \mid PX = Y, X \in \mathcal{U}\}$, $(P, Y) \in \mathcal{V}$, alors, cette fonction satisfait les conditions nécessaires et suffisantes que nous avons déterminées dans les chapitres 2, 3 et 5. Réciproquement, si X est une fonction donnée, de classe C^∞, satisfaisant les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique et si de plus le tenseur $(\lambda_i S_k^{jl})_{i,k}^{j,l}$ est défini négatif, alors, il existe une fonction d'utilité indirecte, localement QE-convexe. D'après le théorème précédent, il existe une unique fonction d'utilité directe, localement QE-concave, qui rationalise la fonction de demande observée.

Nous avons introduit les notions de la dualité généralisée localement. Dans le modèle d'Epstein, les variables de décision ainsi que les paramètres dans le problème primal, le problème de maximisation d'utilité directe, et son dual, le problème de minimisation d'utilité indirecte, appartiennent à des ensembles compacts. Les conditions d'intégrabilité que nous avons données sont des conditions locales. Nous travaillons donc sur des sous-ensembles ouverts.

Le développement que nous avons introduit dans cette partie n'est pas complet. On peut adapter, localement, la théorie développée par Epstein. D'autres directions de recherche seront examinées ultérieurement.

5.5 L'intégration économique sous $PX=1$

Si X est la solution du problème de maximisation sous les contraintes $PX = 1$, et $\lambda_1, ..., \lambda_m$, sont les multiplicateurs de Lagrange associés à cette solution, et V est la fonction valeur, alors

$$\frac{\partial V}{\partial p_j^i} = -\lambda_i x^j \tag{5.67}$$

En multipliant par p_j^i et en prenant la somme sur j, on obtient

$$\sum_j \frac{\partial V}{\partial p_j^i} p_j^i = -\lambda_i \tag{5.68}$$

On reporte λ_i dans (5.67) pour obtenir

$$x^j = \frac{\partial V / \partial p_j^i}{< \nabla_{p^i} V, p^i >} \tag{5.69}$$

A partir de (5.69), on peut obtenir les relations

$$\lambda_i S_k^{jl} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_l^k \partial p_j^i} + \sum_{j'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_l^k \partial p_{j'}^i} p_{j'}^i x^j + \sum_{l'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_j^i \partial p_{l'}^k} p_{l'}^k x^l - \sum_{j',l'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_{j'}^i p_{l'}^k} p_{j'}^i p_{l'}^k x^j x^l \right)$$

où

$$S_k^{jl} = \frac{\partial x^j}{\partial p_l^k} - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p_{j'}^k} p_{j'}^k x^l$$

Ce qui nous permet ensuite de démontrer que les matrices $S_1, ..., S_m$ sont semi-définies négatives. On suit les étapes de la section (5.3.2) pour résoudre le problème d'intégration économique ainsi que le problème de la dualité.

5.6 Quelques remarques sur le modèle individuel généralisé

Dans cette thèse, nous avons toujours supposé que le vecteur qui représente les revenus est strictement positif. Dans certaines situations, on a des contraintes du type $PZ = 0 \in I\!R^m$.

Supposons qu'un consommateur dispose d'une dotation des biens que nous notons $\omega = (\omega^1, ..., \omega^n)$, qui constitue ses ressources. Dans ce cas, $y^i = p^i.\omega$. Les contraintes budgétaires s'écrivent donc $PX = P\omega$, d'où

$$P(X - \omega) = 0 \tag{5.70}$$

La fonction $X - \omega$ est la fonction d'excès de demande. Considérons le problème de choix de conommations et portefeuille optimal avec deux dates. L'individu achète un portefeuille de titres pour financer, en partie, sa consommation à la date 1. Son revenu dépend de la dotation initiale ainsi que de la recette de son portefeuille.

Dans l'équation (5.70), la fonction $X - \omega$ satisfait toutes les contraintes. Une autre situation est possible quand la consommation, la dotation initiale ainsi que la recette du portefeuille dépendent de l'état du monde qui se réalisent dans un modèle à deux dates, par exemple.

Chiappori et Ekeland, [14], [15], ont traité un problème de ce type. Ils ont résolu le problème de désagrégation de la fonction d'excès de demande en marchés incomplets. L'approche directe a été utilisée pour obtenir des fonctions d'utilité qui rationalisent les fonctions d'excès de demande individuelles dont la somme est la fonction d'excès de demande collective.

Conclusion

Les conditions que nous avons trouvées se décomposent en deux parties:

- Une généralisation directe des relations de Slutsky, où des matrices symétriques et proportionnelles sont obtenues.

- Des conditions supplémentaires qui portent sur les coefficients de proportionnalité entre les matrices de Slutsky.

Dans le modèle classique, la fonction de demande $x : I\!R^n \rightarrow I\!R^n$, le revenu est normalisé à 1. On peut supposer que la fonction x est inversible. Cela donne une symétrie (ou dualité) entre la fonction de demande, x, et la fonction de demande inverse, p. Tandis que dans le cas de plusieurs contraintes, $X : I\!R^{mn} \rightarrow I\!R^n$, l'inversion est alors impossible.

Le fait d'avoir une seule contrainte, dans le modèle classique, permet d'obtenir le problème de minimisation de dépense. C'est le problème dual au problème de maximisation d'utilité. Cette dualité n'est plus possible dans le modèle généralisé.

Une autre grande différence est que la dualité entre la fonction d'utilité directe et indirecte n'est plus valable. Bien qu'il soit possible d'obtenir une fonction d'utilité indirecte satisfaisant les conditions requises, le problème d'en déduire une fonction d'utilité directe (concave ou quasi-concave) reste ouvert. Deux directions de recherche sont possibles:

1. Utiliser les propriétés de QE-concavité et QE-convexité, ce que nous avons fait dans cette thèse.

2. Utiliser l'approche directe qui consiste à trouver directement une fonction d'utilité directe. C'est la méthode utilisée par Chiappori et Ekeland, [14] et [15], et c'est ce que nous ferons ultérieurement.

Annexe A

Les démonstrations du chapitre 1

La démonstration du théorème (1.2.3).
On démontre que les conditions

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} + \frac{\partial x^i}{\partial y} x^j = \frac{\partial x^j}{\partial p_i} + \frac{\partial x^j}{\partial y} x^i$$

proviennent des relations

$$\frac{\partial V}{\partial p_i} = -\lambda x^i \qquad (A.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lambda \qquad (A.2)$$

Alors, on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial p_i} = -\lambda \frac{\partial x^i}{\partial p_j} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} x^i \qquad (A.3)$$

$$= -\lambda \frac{\partial x^j}{\partial p_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} x^j \qquad (A.4)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial p_i \partial p_j} \qquad (A.5)$$

d'où

$$\lambda \left(\frac{\partial x^j}{\partial p_i} - \frac{\partial x^i}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} x^j - \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} x^i = 0 \qquad (A.6)$$

En dérivant (1.3) par rapport à y et (1.4) par rapport à p_i, on obtient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial p_i} = -\lambda \frac{\partial x^i}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} x^i \qquad (A.7)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p_i \partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \qquad (A.8)$$

On en déduit que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = -\lambda \frac{\partial x^i}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} x^i \qquad (A.9)$$

Il suffit de reporter les relations (A.9) dans (A.6) pour obtenir

$$\frac{\partial x^j}{\partial p_i} + \frac{\partial x^j}{\partial y} x^i = \frac{\partial x^i}{\partial p_j} + \frac{\partial x^i}{\partial y} x^j \quad \forall i, j \qquad (A.10)$$

Cela finit la démonstration. ∎

La démonstration du théorème (1.2.4).

La première condition découle de l'homogénéité de degré zéro de x. La symétrie de S est démontrée par (A.10). Il nous reste donc à démontrer que la matrice de Slutsky est semi-définie négative. Soit V la fonction d'utilité indirecte définie précédemment, alors

$$\frac{\partial V}{\partial p_i} = -\lambda x^i \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lambda \tag{A.12}$$

Il suffit de dériver les relations précédentes pour obtenir

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial p_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial y} x^i\right) \tag{A.13}$$

De même, on a

$$\frac{\partial x^i}{\partial y} = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial p_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} x^i\right) \tag{A.14}$$

Alors,

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} + \frac{\partial x^i}{\partial y} x^j = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial p_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial y} x^i + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial p_i} x^j + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} x^i x^j\right) \tag{A.15}$$

La fonction V est homogène de degré zéro

$$\sum_k \frac{\partial V}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial V}{\partial y} y = 0 \tag{A.16}$$

On dérive l'équation précédente par rapport à p_j pour obtenir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial y} = -\frac{1}{y}\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial p_k} p_k - \frac{1}{y}\frac{\partial V}{\partial p_j} \tag{A.17}$$

On a également

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{1}{y}\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial p_k} p_k - \frac{1}{y}\frac{\partial V}{\partial y} \tag{A.18}$$

En utilisant les relations (A.17), l'équation précédente s'écrit comme suit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}\sum_{k,k'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_k \partial p_{k'}} p_k p_{k'} + \frac{1}{y^2}\sum_k \frac{\partial V}{\partial p_k} p_k - \frac{1}{y}\frac{\partial V}{\partial y} \tag{A.19}$$

Grâce aux relations (A.17) et (A.19), on obtient les relations suivantes entre la matrice de Slutsky et les dérivées partielles secondes de V:

$$-\lambda\left(\frac{\partial x^i}{\partial p_j}+\frac{\partial x^i}{\partial y}x^j\right)=$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial p_i}-\frac{1}{y}\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial p_j p_k}p_k x^i-\frac{1}{y}\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial p_k p_i}p_k x^j+\frac{1}{y^2}\sum_{k,k'}\frac{\partial^2 V}{\partial p_k p_{k'}}p_k p_{k'} x^i x^j \qquad \text{(A.20)}$$

Puisque $p.x \neq 0$, alors tout vecteur $\xi \in I\!R^n$ s'écrit $\xi = \bar{\xi} + tp$ tel que $\bar{\xi}.x = 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\xi' S \xi &= (\bar{\xi}' + tp')S(\bar{\xi}+tp)\\
&= \bar{\xi}' S \bar{\xi}\\
&= -\frac{1}{\lambda}\bar{\xi}'(D^2V)\bar{\xi}\\
&\leq 0
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle des faits que (i) $\lambda > 0$ (ii) $0 = \bar{\xi}.x = \bar{\xi}.\nabla V$ (iii) V est quasi-convexe. ∎

Démonstration du théorème (1.3.1).

Il s'agit de résoudre un problème d'intégration mathématique et économique. En d'autres termes, pour x donnée satisfaisant $p.x = y$, on cherche deux fonctions $\lambda > 0$ et V convexe (ou quasi-convexe) telles que

$$\frac{\partial V}{\partial p_i} = -\lambda x^i \qquad \text{(A.21)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lambda \qquad \text{(A.22)}$$

On récrit le problème d'intégrabilité en utilisant les notions du calcul différentiel extérieur. Soit ω une 1-forme définie comme suit

$$\omega :=\sum_i x^i(p,y)dp_i - dy \qquad \text{(A.23)}$$

La différentielle de la fonction V s'écrit

$$\begin{aligned}
dV &= \sum_i \frac{\partial V}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial V}{\partial y}dy && \text{(A.24)}\\
&= -\lambda\left(\sum_i x^i dp_i - dy\right) && \text{(A.25)}
\end{aligned}$$

d'où

$$-\frac{1}{\lambda}dV = \omega \tag{A.26}$$

La résolution du problème d'intégrabilité revient à donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\lambda > 0$ et V convexe satisfaisant l'équation (A.26). On démontre que ces conditions ne sont rien d'autre que la symétrie et la négativité de la matrice de Slutsky.
D'après le théorème de Frobenius, ω admet une décomposition telle que (A.26) si et seulement si

$$\omega \wedge d\omega = 0 \tag{A.27}$$

C'est donc la condition nécessaire et suffisante pour l'intégration mathématique. On démontre que $\omega \wedge d\omega = 0$ si et seulement si la matrice de Slutsky est symétrique. Or, $\omega \wedge d\omega = 0$ si et seulement si il existe une 1-forme β telle que

$$d\omega = \beta \wedge \omega \tag{A.28}$$

Soit le champ de vecteurs

$$P := \sum_k p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \tag{A.29}$$

La condition $p.x(p, y) = y$ implique que

$$< \omega, P >= y \tag{A.30}$$

On utilise P pour trouver une formule pour β satisfaisant (A.28).

$$\begin{aligned} < d\omega, (P, \cdot) > &= < \beta \wedge \omega, (P, \cdot) > && \text{(A.31)} \\ &= < \beta, P > \omega - \beta < \omega, P > && \text{(A.32)} \\ &= < \beta, P > \omega - y\beta && \text{(A.33)} \end{aligned}$$

d'où

$$\beta = \frac{1}{y} < \beta, P > \omega - \frac{1}{y} < d\omega, (P, \cdot) > \tag{A.34}$$

Or,

$$\begin{aligned} < d\omega, (P, \cdot) > &= \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial p_j} dp_j \wedge dp_i(P, \cdot) + \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y} dy \wedge dp_i(P, \cdot) && \text{(A.35)} \\ &= \sum_{i,k} \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k dp_i - \sum_{k,j} \frac{\partial x^k}{\partial p_j} p_k dp_j - \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial y} p_k dy && \text{(A.36)} \\ &= \sum_{i,k} \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k dp_i + \omega && \text{(A.37)} \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière égalité, on a utilisé les relations suivantes qui proviennent de la loi de Walras

$$\begin{aligned}
\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial p_j} p_k &= -x^j && \text{(A.38)}\\
\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial y} p_k &= 1 && \text{(A.39)}
\end{aligned}$$

Alors, l'équation (A.28) s'écrit, en utilisant la formule (A.34) de β, comme suit

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{1}{y}\left(\beta(P)\omega - \omega - \sum_{i,k} \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k dp_i\right) \wedge \omega && \text{(A.40)}\\
&= -\sum_{i,k} \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k dp_i \wedge \omega && \text{(A.41)}\\
&= -\sum_{i,k} \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k x^j dp_i \wedge dp_j + \sum_{i,k} \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k dp_i \wedge dy && \text{(A.42)}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial p_j} dp_j \wedge dp_i + \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y} dy \wedge dp_i && \text{(A.43)}\\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial p_j} - \frac{\partial x^j}{\partial p_i}\right) dp_j \wedge dp_i + \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y} dy \wedge dp_i && \text{(A.44)}
\end{aligned}$$

En comparant les équations (A.42) et (A.44), on obtient les relations suivantes

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} - \frac{1}{y}\sum_k \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k x^j = \frac{\partial x^j}{\partial p_i} - \frac{1}{y}\sum_k \frac{\partial x^j}{\partial p_k} p_k x^i \qquad \text{(A.45)}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial y} = -\frac{1}{y}\sum_k \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k \qquad \text{(A.46)}$$

La dernière équation n'est rien d'autre que l'homogénéité de degré zéro de x. Alors, $\omega \wedge d\omega = 0$ si et seulement si

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} + \frac{\partial x^i}{\partial y} x^j = \frac{\partial x^j}{\partial p_i} + \frac{\partial x^j}{\partial y} x^i \qquad \text{(A.47)}$$

Par conséquent, il existe deux fonctions μ et V telles que $\mu dV = \omega$ si et seulement si la matrice de Slutsky est symétrique. Cela ne suffit pas pour résoudre le problème d'intégration économique. On démontre que la négativité avec la symétrie de S

sont suffisantes pour l'intégration économique en appliquant le théorème (Ekeland-Nirenberg) *.
Soit $\mathcal{I}$ l'espace vectoriel défini comme suit

$$\mathcal{I} = \{\alpha \in T^* I\!R^{n+1} \mid \alpha \wedge d\omega = 0\} \tag{A.48}$$

Comme $\omega \wedge d\omega = 0$, alors il existe une 1-forme β telle que $d\omega = \beta \wedge \omega$. Cela implique que

$$\mathcal{I} = [\beta, \omega] \tag{A.49}$$

Ce qui démontre que $\dim \mathcal{I} = 2$. Soit $L = \mathcal{I}^\perp$ de dimension $n-2$. On définit un deuxième espace vectoriel de dimension 1

$$\mathcal{J} = [\omega] \tag{A.50}$$

On pose $N = \mathcal{J}^\perp$, $\dim N = n-1$ et de plus $L \subset N$. On écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega^i dp_i - \omega^{n+1} dy \tag{A.51}$$

Alors

$$\omega^i = x^i \quad i = 1, ..., n \tag{A.52}$$

$$\omega^{n+1} = -1 \tag{A.53}$$

Soit

$$\omega^{ij} = \frac{\partial \omega^i}{\partial p_j} \quad 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n. \tag{A.54}$$

$$\omega^{i(n+1)} = \frac{\partial \omega^i}{\partial y} \quad i = 1, ..., n+1. \tag{A.55}$$

On a en particulier

$$\omega^{(n+1)j} = 0 \quad j = 1, ..., n+1. \tag{A.56}$$

Donc

$$(\omega^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial p^j} & \frac{\partial x^i}{\partial y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

Soit $\xi \in I\!R^{n+1}$ un vecteur tel que

$$\omega(\xi) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i x^i - \xi_{n+1} = 0 \tag{A.57}$$

* Un travail en cours.

Alors,

$$\sum_{i,j} \omega^{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y}\xi_i\xi_{n+1} \tag{A.58}$$

Or

$$\xi_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j x^j \tag{A.59}$$

On reporte ξ_{n+1} dans (A.58) qui s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \omega^{ij}\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y}x^j\xi_i\xi_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial x^i}{\partial p_j} + \frac{\partial x^i}{\partial y}x^j\right)\xi_i\xi_j \\ &\leq 0\end{aligned}$$

D'après le théorème (Ekeland-Nirenberg), ces conditions sont suffisantes pour l'intégration économique. C'est-à-dire que la fonction V est concave et $\mu > 0$ telles que

$$\mu dV = \omega \tag{A.60}$$

d'où

$$-\mu(-dV) = \omega \tag{A.61}$$

Soit $v = -V$ et $\lambda = \frac{1}{\mu}$, v est convexe et $\lambda > 0$. On obtient la décomposition

$$dv = -\lambda\omega \tag{A.62}$$

On en déduit les relations suivantes

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = -\lambda x^i \tag{A.63}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \lambda \tag{A.64}$$

La fonction v est une fonction d'utilité indirecte. On peut en déduire une fonction d'utilité directe U, cf. la section (1.3). Cela finit la démonstration. ∎

Démonstration du théorème (1.3.2).
Pour démontrer que U est croissante en x, il suffit de remarquer que si $\hat{x} \geq x$ alors $\{(p,y) : p.\hat{x} \leq y\} \subset \{(p,y) : p.x \leq y\}$. La deuxième propriété provient du théorème de maximum, [48]. Il nous reste à démontrer que U est quasi-concave. Or U est quasi-concave si et seulement si les contours supérieurs de U sont convexes. Soient x_1 et x_2 tels que $U(x_1) \geq \bar{u}$ et $U(x_2) \geq \bar{u}$ et $\bar{x}$ une combinaison convexe de x_1 et x_2, $\bar{x} = tx_1 + (1-t)x_2$, $t \in (0,1)$. Pour que U soit quasi-concave, il suffit de démontrer que $U(\bar{x}) \geq \bar{u}$. On définit les sous-ensembles suivants:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(p,y) : p.x_1 \leq y\} \\ P_2 &= \{(p,y) : p.x_2 \leq y\} \\ \bar{P} &= \{(p,y) : p.\bar{x} \leq y\} \end{aligned}$$

On démontre que $\bar{P} \subset P_1 \cup P_2$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Prenons (p,y) tel que $p.(tx_1 + (1-t)x_2) \leq y$, c'est-à-dire que $(p,y) \in \bar{P}$, mais $p.x_1 > y$ et $p.x_2 > y$. Alors,

$$tp.x_1 > ty \tag{A.65}$$

$$(1-t)p.x_2 > (1-t)y \tag{A.66}$$

En prenant la somme des deux inégalités précédentes, on obtient

$$p.(tx_1 + (1-t)x_2) > y \tag{A.67}$$

Ce qui contredit l'hypothèse sur (p,y). Donc

$$\begin{aligned} U(\bar{x}) &= \min_{(p,y)}\{V(p,y) : p.\bar{x} \leq y\} \\ &\geq \min_{(p,y)}\{V(p,y) : (p,y) \in P_1 \cup P_2\} \\ &\geq \bar{u} \end{aligned}$$

Cela démontre que $U(\bar{x}) \geq \bar{u}$. ∎

Bibliographie

[1] S.N. Afriat. The case of a vanishing Slutsky matrix. *Journal of Economic Theory*, 5:208–223, 1972.

[2] M. ALOQEILI. Les relations de Slutsky généralisées. *Les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 2000. to appear.

[3] G. Antonelli. Sulla teoria matematica dell economia politica, 1886. Pisa.

[4] K.J. Arrow and A.C. Enthoven. Quasi-concave programming. *Econometrica*, 29:779–800, 1961.

[5] M. Avriel, W. Diewert, and I. Zang. Nine kinds of quasiconcavity and concavity. *Journal of Economic Theory*, 25:397–420, 1981.

[6] V. Böhm. Consumer theory. In Arrow K.J. and M.D. Intriligator, editors, *Handbook of Mathematical Economics*, volume 2, chapter 9. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, North-Holland, 1982.

[7] F. Bourguignon, P.A. Chiappori, and P. Rey. *Théorie microéconomique*, volume I. Fayard, 1992.

[8] M. Browning and P. A. Chiappori. Efficient intra-household allocations: A general characterization and empirical tests. *Econometrica*, 66:1241–1278, 1998.

[9] R.L. Bryant and S.S. Chern et al. *Exterior differential systems*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[10] M. Caputo. The relationship between two dual methods of comparative statics. *Journal of Economic Theory*, 89:251–267, 1999.

[11] P.A. Chiappori and I. Ekeland. Exterior differential calculus and aggregation theory: A presentation and some new results. Institut de Finance Dauphine, Preprint, 1996. 49p.

[12] P.A. Chiappori and I. Ekeland. A convex Darboux theorem. *Annali della scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze Fisiche e Matematiche-Serie IV.*, XXV(1-2):287–297, 1997.

[13] P.A. Chiappori and I. Ekeland. Aggregation and market damand: an exterior differential calculus viewpoint. *Econometrica*, 67:1435–1457, 1999.

[14] P.A. Chiappori and I. Ekeland. Disaggregation of excess demand functions in incomplete markets. *Journal of Mathematical Economics*, 31:111–129, 1999.

[15] P.A. Chiappori and I. Ekeland. Corrigendum to 'disaggregation of excess demand functions in incomplete markets'. *Journal of Mathematical Economics*, 33:531–532, 2000.

[16] A. Deaton and J. Muellbauer. Functional forms for labour supply and commodity demands with and without quantity constraints. *Econometrica*, 49:1521–1532, 1981.

[17] A.S. Deaton. Theoretical and empirical approaches to consumer demand under rationing. In A.S. Deaton, editor, *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behaviour in Honour of Sir Richard Stone*, pages 55–72. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[18] G. Debreu. *The value theory.* North-Holland Publishing Company, 1982.

[19] P. Diamond and M. Yaari. Implications of the theory of rationing for consumer under uncertainty. *American Economic Review*, 62:343–353, 1972.

[20] W.E. Diewert. Generalized Slutsky conditions for aggregate consumer demand functions. *Journal of Economic Theory*, 15:353–362, 1977.

[21] W.E. Diewert. Duality approaches to microeconomic theory. In Arrow K.J. and M.D. Intriligator, editors, *Handbook of Mathematical Economics*, volume 2, chapter 12. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, North-Holland, 1982.

[22] I. Ekeland. La modélisation mathématique en économie. *Société des Mathématiques Appliquées et Industrielles*, 54:25–34, 1998.

[23] I. Ekeland. Exterior differential calculus and applications to economy theory. *Quaderni della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 1999.

[24] L. Epstein. Generalized duality and integrability. *Econometrica*, 49:655–678, 1981.

[25] R. Fare and J. Logan. Duality theory and value constraint. *Scottish Journal of Political Economy*, 40:330–334, 1993.

[26] L. Fuchs-Seliger. A note on duality in consumer theory. *Economic Theory*, 13:239–246, 1999.

[27] W. Ginsberg. Concavity and quasiconcavity in economics. *Journal of Economic Theory*, 6:596–605, 1973.

[28] R. Guesnerie. Effective policy tools and quantity controls. *Econometrica*, 52:59–86, 1984.

[29] R. Guesnerie. *A Contribution to the pure theory of taxation.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[30] T. Hatta. Structure of the correspondence principle at an extremum point. *Review of Economic Studies*, 47:987–997, 1980.

[31] P. Hewman. Some properties of concave functions. *Journal of Economic Theory*, 1:291–314, 1969.

[32] H.S. Houthakker and J. Tobin. The effects of rationing on demand elasticities. *Review of Economic Studies*, 18:140–153, 1950.

[33] L. Hurwicz. On the problem of integrability of demand curves. In J.S. Chipman et. al., editor, *Preferences, Utility and Demand*, pages 174–214. Harcourt Brace, New York, 1971.

[34] L. Hurwicz and H. Uzawa. On the problem of integrability of demand curves. In J.S. Chipman et. al., editor, *Preferences, Utility and Demand*, pages 114–148. Harcourt Brace, New York, 1971.

[35] M. Jackson. Continuous utility functions in consumer theory: A set of duality theorems. *Journal of Mathematical Economics*, 15:63–77, 1986.

[36] W. Jackson. Generalized rationing theory. *Scottish Journal of Political Economy*, 38:335–342, 1991.

[37] V. Krishna and H. Sonnenschein. Duality in consumer theory. In J. Chipman, editor, *Preferences, Uncertainty and Optimality*, pages 44–55. Westview Press, 1990.

[38] M. Magill and M. Quinzii. *Incomplete Markets*, volume 1. MIT Press, 1997.

[39] J. Martinez-Legaz. Duality between direct and indirect utility functions under minimal hypotheses. *Journal of Mathematical Economics*, 20:199–209, 1991.

[40] A. Mas-Colell. *The theory of economic equilibrium: A differentiable approach.* Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[41] A. Mas-Colell, M. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, New York, 1995.

[42] J. Neary and K. Roberts. The theory of household behaviour under rationing. *European Economic Review*, 13:25–42, 1980.

[43] R. Pollak. Conditional demand functions and consumption theory. *Quarterly Journal of Economics*, 83:60–78, 1969.

[44] R. Pollak. Price dependent preferences. *American Economic Review*, 67:64–75, 1977.

[45] T. Russel and F. Farris. The geometric structure of some systems of demand equations. *Journal of Mathematical Economics*, 22:309–325, 1993.

[46] E. Silberberg. A revision of comparative statics methodology in economics or how to do comparative statics on the back of an envelope. *Journal of Economic Theory*, 7:159–172, 1974.

[47] E. Slutsky. Sulla teoria del bilanzio del consumatore. *Giornale Degli Economesti*, 51:1–26, 1915.

[48] R.K. Sundaram. *A first course of optimization theory.* Cambridge University Press, New York, 1996.

[49] J. Tobin. A survey of the theory of rationing. *Econometrica*, 20:521–553, 1952.

[50] H.R. Varian. *Analyse Microéconomique.* De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 3ed. edition, 1995.

Utilisation du Calcul Différentiel Extérieur en Théorie du Consommateur

Les résultats présentés dans cette thèse généralisent les conditions qui caractérisent la fonction de demande individuelle en théorie du consommateur. Cette fonction est la solution du problème de maximisation d'utilité sous la contrainte budgétaire. Une fonction donnée satisfaisant la loi de Walras est une fonction de demande si et seulement si sa matrice de Slutsky est symétrique et semi-définie négative.

L'objectif principal de cette thèse est de généraliser le résultat précédent à des problèmes de maximisation sous plusieurs contraintes. En d'autres termes, nous recherchons les conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire une fonction donnée pour qu'elle provienne de la résolution d'un problème de maximisation sous plusieurs contraintes.

Dans la première partie, on rappelle quelques modèles microéconomiques en théorie du consommateur. Ensuite, on introduit le problème de maximisation d'utilité sous plusieurs contraintes. Des conditions nécessaires satisfaites par la solution de ce type de problèmes seront données dans la deuxième partie. La troisième partie sera consacrée à la résolution du problème d'intégration mathématique lié au problème de maximisation sous-jacent. Dans la quatrième partie, on considère un problème de maximisation où les revenus sont normalisés à un. Enfin, le problème de l'intégration économique ainsi que le problème de dualité seront discutés.