Elementi di differenziazione nella teoria dell'integrale di Lebesgue

Andrea Scalenghe

2022

INDICE

1 INTRODUZIONE

La tesi si svolgerà su tre principali argomenti: si inizierà dallo studio di funzioni a valori reali e ci si interrogherà sulla natura differenziale di un integrale indefinito di Lebesgue, ponendosi come obiettivo ultimo l'identificazione delle condizioni che permettono di stabilire l'esistenza della derivata di un integrale. Una volta stabilito che un integrale indefinito ammette quasi ovunque derivata nel suo dominio l'interesse si sposterà su di essa, ottenendo diversi risultati, alcuni analoghi a quelli ottenuti nella teoria tradizionale dell'integrazione (Reimann), ed altri fortemente indeboliti. Il naturale confronto con la teoria di Riemann accompagnerà i primi due capitoli. Inoltre essi vedranno alcuni personaggi secondari svilupparsi, come le funzioni di salto o a variazione limitata, e che aiuteranno il protagonista, l'integrale indefinito di Lebesgue, a raggiungere il proprio obiettivo, differenziarsi.

Il terzo capitolo, a mio avviso il più interessante e avvincente, porterà la trattazione ad un livello più generale e ci staccheremo dalla retta reale. Considerando spazi misurabili generici generalizzeremo il concetto di misura introducendo le cariche, e giungeremo ad un forte risultato che lega inesorabilmente le cariche assolutamente continue e gli integrali indefiniti, il teorema di Radon-Nikodim.

2

DERIVABILITÀ DI FUNZIONI REALI

Partendo dallo studio di funzioni a valori sulla retta reale sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ spazio misurabile con $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ collezione dei sottoinsiemi della retta misurabili secondo Lebesgue e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile , dunque definiamo:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \ \mapsto \int_{[a,x]} f \, d\mu \end{aligned} \tag{1}$$

Integrale indefinito di Lebesgue.

Al fine di semplificare la trattazione restringiamo lo studio delle proprietà dell'integrale in 1 a f a valori non negativi osservando che una funzione a valori reali può essere scomposta in due funzioni non negative misurabili tramite parte positiva e negativa di questa:

$$f(t) = f_+(t) - f_-(t)$$

Dunque per linearità dell'integrale possiamo ridurci a trattare f misurabili non negative. In tal caso $\Phi(x)$ è una funzione monotona crescente, infatti per monotonia rispetto al dominio di integrazione:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \Rightarrow [a, y] \subseteq [a, x] \Rightarrow \Phi(x) \geq \Phi(y)$$

2.1 FUNZIONI MONOTONE

Richiamiamo alcuni concetti di ANALISI1.

1. Preso $x_0 \in \mathbb{R}$ si definiscono:

   $$\begin{cases} f(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h) & \text{limite a destra} \\ f(x_{0-}) = \lim_{h \to 0^-} f(x+h) & \text{limite a sinistra} \end{cases}$$

   In entrambi i casi ammessa l'esistenza del limite.

2. Se i limiti esistono e $f(x_0^+) = f(x_{0-}) = f(x_0)$ allora la funzione è *continua* in x_0.

3. Se i limiti esistono e $f(x_0^+) = f(x_{0-}) \neq f(x_0)$ allora la funzione ha una *discontinuità eliminabile* in x_0.

4. Se i limiti esistono e $f(x_0^+) \neq f(x_{0-})$ allora la funzione ha un punto di *discontinuità di prima specie* in x_0 e $\left| f(x_0^+) - f(x_{0-}) \right|$ è detto *salto*.

Proposizione 2.1.1. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona non decrescente allora è misurabile e limitata

Dimostrazione.
- Misurabilità: $f^{-1}((\alpha, +\inf])$ è in intervallo chiuso (semichiuso) della forma $[d, b]$ $((d, b])$.
- Limitatezza: $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b]$ per definizione.

□

Proposizione 2.1.2 (Rudin p.95). Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona allora può avere discontinuità solo di prima specie

Dimostrazione. Poniamo che la funzione sia monotona non decrescente (per non crescente la dimostrazione è identica). Mostriamo che esistono $f(x^+)$ e $f(x_-)$ per ogni $x \in [a,b]$: sia $A = sup\{f(t)|t \in [a,x]\}$, dunque per definizione di sup per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c.

$$A \geq f(x-\delta) > A - \epsilon$$

Dunque per monotonia:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall t \in (x-\delta, x) \Rightarrow f(t) \in (A-\epsilon, A)$$

Quindi $f(x_-) = Sup_{a \leq t \leq x}\{f(t)\}$. Analogamente si prova per $f(x^+)$. Ora poichè $\forall x \in [a,b]$:

$$f(x_-) \leq f(x) \leq f(x^+)$$

Allora non si possono avere discontinuità di seconda specie o eliminabili. □

Proposizione 2.1.3 (Rudin p.96). L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione monotona è al più numerabile

Dimostrazione. Sia E l'insieme dei punti di discontinuità di f monotona non decrescente. Preso $x \in E$ sia $r(x)$ un razionale t.c.

$$f(x_-) < r(x) < f(x^+)$$

Poichè se $x_1 < x_2 \Rightarrow$[1] $f({x_1}^+) \leq f(x_{2-})$ allora se $r(x_1) \neq r(x_2)$ allora $x_1 \neq x_2$, dunque la corrispondenza costruita è iniettiva e quindi la cardinalità di E è minore o uguale a quella di $\mathbb{Q}$, che però sappiamo essere numerabile. □

Un esempio fondamentale e tra i più semplici di funzioni monotone sono le *funzioni di salto*. Su un intervallo $[a,b]$ siano $(x_n) \in [a,b]$ con $n \in \mathbb{N}$ e si associ a ogni punto un valore positivo h_n tale che la somma di essi sia finita ($\sum_n h_n < +\infty$). Si definisce quindi la funzione monotona non decrescente:

$$f(x) = \sum_{n|x_n<x} h_n$$

Si osserva inoltre che tale funzione è continua a sinistra poichè:

$$f(x_-) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x-\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \sum_{n|x_n<x-\epsilon} h_n$$

Ora per ogni x_n t.c. $x_n < x$ si ha che per $\epsilon < x - x_n$ allora $x_n < x - \epsilon$ e quindi:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \sum_{n|x_n<x-\epsilon} h_n = \sum_{n|x_n<x} h_n \ \text{ ovvero } \ f(x_-) = f(x)$$

Osserviamo inoltre che se $x = x_n$ per un certo n, allora il salto in x è:

$$|f(x^+) - f(x_-)| =^{2} \left| \sum_{n|x_n \leq x} h_n - \sum_{n|x_n<x} h_n \right| = h_n$$

Se invece $x \neq x_n$ per tutte le n la funzione è ivi continua. Infatti $\sum_{n|x_n<x+\epsilon} h_n = f(x)$ per $\epsilon < x_n - x$ e quindi al limite per $\epsilon \to 0^+$ vale l'uguaglianza, ovvero $f(x^+) = f(x)$.

Le funzioni di salto sono particolarmente importanti per la seguente proprietà.

1 $Inf_{x_1 \leq t \leq b}\{f(t)\} = Inf_{x_1 \leq t \leq x_2}\{f(t)\} \leq Sup_{x_1 \leq t \leq x_2}\{f(t)\} = Sup_{a \leq t \leq x_2}\{f(t)\}$
2 $f(x^+) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \sum_{n|x_n<x+\epsilon} h_n = \sum_{n|x_n \leq x} h_n$

Proposizione 2.1.4 (Kolmogorov p.319). Una funzione monotona, continua a sinistra può essere espressa con rappresentazione unica come somma di una funzione di salto e una funzione monotona continua.

Dimostrazione. Sia f monotona non decrescente e continua a sinistra. Denominati x_n i punti di discontinuità e h_n i rispettivi salti si definisce:

$$H(x) = \sum_{n|x_n<x} h_n$$

La funzione $\varphi = f - H$ è monotona non descrecente e continua:

1. Monotona: $x_1 < x_2$ e osserviamo che $f(x_2) - f(x_1) \geq H(x_2) - H(x_1)$. Dunque $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geq 0$.
2. Continua:

$$\varphi(x^+) - \varphi(x_-) = f(x^+) - f(x_-) - \left[H(x^+) - H(x_-)\right]$$

$$= \begin{cases} 0 - 0 & \text{se } x \text{ non è di discontinuità} \\ f(x_n^+) - f(x_{n-}) - h_n = 0 & \text{se } x \text{ è di discontinuità} \end{cases}$$

□

2.2 DERIVABILITÀ FUNZIONI MONOTONE

Forti delle cosiderazioni appena fatte passiamo a dimostrare una fondamentale proprietà sulla derivabilità delle funzioni monotone, che sarà chiave nel mostrare l'esistenza della derivata di un integrale di Lebesgue.

Teorema 1 (Lebesgue)**.** *Una funzione f definita su un intervallo $[a,b]$ monotona ha derivata finita quasi ovunque sull'intervallo.*

Come in precedenza diamo alcune definizioni preliminari. Si considera il rapporto incrementale di f in x_0:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dunque definiamo

- $\Lambda_{des} = \limsup_{x \to x_{0-}} h(x)$ *numero derivato superiore destro*
- $\lambda_{des} = \liminf_{x \to x_{0-}} h(x)$ *numero derivato inferiore destro*
- $\Lambda_{sin} = \limsup_{x \to x_0^+} h(x)$ *numero derivato superiore sinistro*
- $\lambda_{sin} = \liminf_{x \to x_0^+} h(x)$ *numero derivato inferiore sinistro*

Chiaramente la funzione è derivabile in x_0 se esiste il limite per $x \to x_0$ del rapporto incrementale, vale a dire se i numeri derivati sono tutti uguali. Dunque possiamo riformulare il teorema come segue:

Per una funzione monotona vale quasi ovunque la relazione:

$$-\infty < \lambda_{sin} = \Lambda_{sin} = \lambda_{des} = \Lambda_{des} < +\infty \tag{2}$$

Definiamo inoltre un ulteriore classificazione per i punti del dominio di una funzione.

Definizione 2.2.1. Sia g una funzione continua definita su $[a,b]$, un punto $x_0 \in [a,b]$ si dice *invisibile a destra (sinistra)* se $\exists \xi \in (x_0, b]$ ($\xi \in [a, x_0)$) t.c. $g(x_0) < g(\xi)$.

Lemma 2 (Riesz). *Ogni funzione continua g su $[a,b]$ ha come insieme dei punti invisibili a destra un aperto. In quanto tale può essere espresso come unione al più numerabile di intervalli aperti del tipo (a_k, b_k) sui quali vale $g(a_k) \leq g(b_k)$.*

Dimostrazione. Se x_0 è un punto invisibile a destra in virtù della continuità di g tutti i punti $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ sono invisibili a destra per un opportuno $\epsilon > 0$. Questo ragionamento si può applicare ad ogni punto invisibile a destra e dunque l'insieme dei punti invisibili a destra è aperto su $[a,b]$. Sia (a_k, b_k) uno degli intervalli e poniamo per assurdo che:

$$g(a_k) > g(b_k)$$

Sempre per continuità $E = \{x \in (a_k, b_k) | g(x) = g(x_0)\} \neq \emptyset$, si pone quindi $x^* = SupE$. Poichè x^* è un punto invisibile a destra $\exists \xi > x^*$ t.c. $g(\xi) > g(x^*)$. Però $\xi \notin (a_k, b_k)$ poichè $\xi > x^*$ per definizione e $g(x) \leq g(b_k)$ per ogni $x^* \leq x < b_k$, ma inoltre $\xi \notin [b_k, +\infty)$ poichè sennò b_k sarebbe un punto invisibile a destra, cosa che non è, poichè $g(\xi) > g(b_k)$. Si giunge quindi ad una contraddizione. □

Il lemma è equivalente per i punti invisibili a sinistra con unica differenza $g(a_k) \geq g(b_k)$.

Enunciamo e dimostriamo inoltre un ulteriore lemma. Si indica con μ la misura di Lebesgue unidimensionale.

Lemma 3. *Un insieme $A \in [a,b]$ misurabile tale che $\forall(\alpha,\beta) \in [a,b]$ vale $\mu\left(A \cap (\alpha,\beta)\right) \leq \rho(\beta - \alpha)$ con $0 \leq \rho < 1$ allora $\mu(A) = 0$.*

Dimostrazione. $\forall \epsilon > 0$ esiste $B_\epsilon \supset A$ aperto t.c. $\mu(B_\epsilon \setminus A) < \epsilon$. Possiamo vedere $B_\epsilon = \bigsqcup_k (a_k, b_k)$ e dunque $\sum_k (b_k - a_k) =$[3] $\mu(B_\epsilon) <$[4] $\mu(A) + \epsilon$. Ora però osserviamo che:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigsqcup_k A \cap (a_k, b_k)\right) = \sum_k \mu(A \cap (a_k, b_k)) \leq \sum_k \rho(b_k - a_k) < \rho\left(\mu(A) + \epsilon\right)$$

Per arbitrarietà di ϵ vale:

$$\mu(A) \leq \rho\mu(A)$$

Ma poichè $\rho \in [0,1)$ si ottiene la tesi. □

Possiamo ora dimostrare il teorema di Lebesgue per una funzione continua. Il risultato generale si otterrà tramite una generalizzazione del lemma di Riesz.

Dimostrazione. Sia f monotona non decrescente continua. È evidente che la 2 è implicata da:

1. $\Lambda_{des} < +\infty$
2. $\lambda_{sin} \geq \Lambda_{des}$

In particolare si deve mostrare che sussistono le condizioni 1. e 2. quasi ovunque su $[a,b]$.

[3] Poichè gli intervalli sono disgiunti la misura è σ-additiva

[4] Per misure finite $\mu(C \setminus D) = \mu(C) - \mu(D)$

1. Poniamo che $\Lambda_{des} = +\infty$ per un punto x_0, dunque per ogni $M > 0$ esiste $\xi \in (x_0, b]$ t.c:
$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > M$$
Dunque x_0 è un punto invisibile a destra per la funzione:
$$g(x) = f(x) - Mx$$
Essendo g una funzione continua si può applicare il lemma di Riesz e ottenere che l'insieme dei punti come x_0, vale a dire in cui non vale la 1. ovvero invisibili a destra per g, è un unione al più numerabile di intervalli aperti (a_k, b_k) dove:
$$g(a_k) \leq g(b_k) \Leftrightarrow f(b_k) - f(a_k) \geq M(b_k - a_k)$$
Ora dividendo per M e sommando su tutti gli intervallini:
$$\sum_k b_k - a_k \leq \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{M} \leq \frac{f(b) - f(a)}{M}$$
Per la scelta arbitraria di M la misura dell'insieme dei punti come x_0 è nulla.

2. Siano $c, C \in \mathbb{Q}$ t.c. $-\infty < c < C < +\infty$ e poniamo $p = \frac{c}{C}$. Sia $E_{c,C} = \{x \in [a,b] | \Lambda_{des} > C, \lambda_{\text{sin}} < c\}$ e mostriamo che $\mu(E_{c,C}) = 0$ (misurabile poichè numeri derivati visti come funzioni sono funzioni continue) e dunque che $\lambda_{sin} \geq \Lambda_{des}$ q.o.

Per far ciò mostriamo innanzitutto che per ogni intervallo $(\alpha, \beta) \in [a, b]$ vale:
$$\mu\left(E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)\right) \leq p(\beta - \alpha) \tag{3}$$
Infatti $x \in (\alpha, \beta)$ t.c. $\lambda_{sin} < c$ è un punto invisibile a sinistra per $f(x) - cx$ poichè $\exists \xi$ t.c. $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < c \Leftrightarrow f(\xi) - c\xi > f(x) - cx$. Dunque per il lemma di Riesz l'insieme di tali punti è un unione di intervalli aperti della forma (α_k, β_k) t.c:
$$f(\alpha_k) - c\alpha_k \geq f(\beta_k) - c\beta_k \Leftrightarrow f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq c(\beta_k - \alpha_k)$$
Sugli intervalli (α_k, β_k) siano i punti x t.c. $\Lambda_{des} > C$. Specularmente a prima otteniamo che l'insieme di tali punti è un'unione di aperti $(\alpha_{k_j}, \beta_{k_j})$ t.c:
$$f(\beta_{k_j}) - C\beta_{k_j} \geq f(\alpha_{k_j}) - C\alpha_{k_j} \Leftrightarrow f(\beta_{k_j}) - f(\alpha_{k_j}) \geq C(\beta_{k_j} - \alpha_{k_j})$$
Gli $(\alpha_{k_j}, \beta_{k_j})$ formano evidentemente un ricoprimento per $E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)$, e quindi:
$$\mu\left(E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k,j} (\alpha_{k_j}, \beta_{k_j})\right) \leq^{5} \sum_{k,j} \beta_{k_j} - \alpha_{k_j} \leq$$
$$\sum_{k,j} \frac{f(\beta_{k_j}) - f(\alpha_{k_j})}{C} \leq \sum_k \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{C} \leq \sum_k \frac{c}{C}(\beta_k - \alpha_k) \leq p(\beta - \alpha)$$
È così dimostrata la disuguaglianza 3, dunque per il lemma 3 otteniamo la tesi.

[5] Per σ-subadditività della misura

□

Abbiamo quindi provato il teorema di Lebesgue per una funzione continua. Per una funzione con punti di discontinuità di prima specie la dimostrazione è analoga, adattando il concetto di punto invisibile come segue:

Definizione 2.2.2. Sia g una funzione con discontinuità di prima specie definita su $[a, b]$, un punto $x_0 \in [a, b]$ si dice *invisibile a destra (sinistra)* se $\exists \xi \in (x_0, b]$ $(\xi \in [a, x_0))$ t.c. $max\{g(x_{0-}), g(x_0), g(x_0^+)\} < g(\xi)$.

Dunque una funzione monotona, poichè ha al più discontinuità di prima specie numerabili, ammette quasi ovunque derivata finita.

I risultati esposti fino ad ora ci conduco dunque ad un importante risultato sull'esistenza della derivata di un integrale di Lebesgue. Come detto in apertura l'integrale di una funzione può essere scomposto in due funzioni monotone non decrescenti, dunque:

Teorema 4. *Per ogni funzione integrabile φ esiste quasi ovunque:*

$$\frac{d}{dx} \int_{[a,x]} \varphi \, d\mu$$

3 DERIVATA DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE

Siamo riusciti a dimostrare l'esistenza (quasi ovunque) della derivata dell'integrale indefinito di Lebesgue. Noi sappiamo però che nella teoria di Riemann si è raggiunto un risultato ben più forte:

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann e continua in (a, b), allora:

$$f(x) = \frac{d}{dt} \int_a^x f(t)\, dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Nella teoria di Lebesgue otterremo un risultato simile, l'unica differenza sarà il dominio nel quale vale la relazione di uguaglianza, ma per poter arrivare a dimostrare tale risultato dobbiamo prima concentrarci su alcuni risultati relativi ad una specifica classe di funzioni: le funzioni a variazione limitata.

3.1 FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA

Iniziamo con il definire una funzione a variazione limitata.

Definizione 3.1.1. Una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice a *variazione limitata* se $\exists C > 0$ tale che $\forall \mathcal{D}$ suddivisione di $[a, b]$, ovvero $\{x_i\}$ con $i = 0, \dots, n$ t.c:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Vale la relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq C$$

Osserivamo subito che ogni funzione monotona è a variazione limitata (si può anche dire che *ha* variazione limitata), poichè per ogni suddivizione del dominio:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f(b) - f(a)|$$

E $|f(b) - f(a)|$ è indipendente dalla suddivisione. definiamo inoltre:

Definizione 3.1.2. Data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si definisce *variazione totale*:

$$V_a^b[f] \overset{def}{:=} \underset{\mathcal{D}}{Sup} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

È dunque evidente che per una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ se la sua variazione totale è finita allora la funzione ha variazione limitata, e dunque che per una funzione f definita su tutto $\mathbb{R}$ se l'insieme $\{V_a^b[f]\}$ è limitato allora f ha variazione limitata e si dice variazione totale il limite:

$$V_{-\infty}^{+\infty}[f] = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} V_a^b[f]$$

Possiamo quindi enunciare e dimostrare alcune importanti proprietà delle funzioni a variazione limitata.

Proposizione 3.1.1. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a variazione limitata:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha: $V_a^b[\alpha f] = |\alpha| V_a^b[f]$
2. $\forall g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a variazione limitata, allora:
   - $f+g$ ha variazione limitata
   - $V_a^b[f+g] \leq V_a^b[f] + V_a^b[g]$
3. $\forall c \in (a,b)$ si ha: $V_a^b[f] = V_a^c[f] + V_c^b[f]$
4. La funzione $v(x) = V_a^x[f]$ è monotona non decrescente
5. Se f è continua in x^* allora v è continua in x^*

Dimostrazione. 1. Segue dalla proprietà della norma $|\alpha f| = |\alpha||f|$

2. Basta mostrare il secondo risultato, implica il primo. Esso deriva dalla disuguglianza triangolare $|f(x_i) + g(x_i) - f(x_{i-1}) - g(x_{i-1})| \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |g(x_i) - g(x_{i-1})|$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dunque poichè $\sup(A+B) \leq SupA + SupB$ otteniamo la tesi.

3. Mostriamo che valgono le due disuguaglianze:
   - Se una suddivisione è tale che $x_k = c$ per un $k \in \{1, \dots, n\}$ si ha:

   $$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

   Poichè la sommatoria degli incrementi diminuisce di valore se la suddivisione usata non contiene c, allora il Sup su tutte le suddivisioni o solo su quelle contententi c e lo stesso, e quindi sempre per proprietà del Sup:

   $$V_a^b[f] = \underset{\mathcal{D}|\exists x_k = c}{Sup} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq$$

   $$\underset{\mathcal{D}'}{Sup} \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \underset{\mathcal{D}''}{Sup} \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = V_a^c[f] + V_c^b[f]$$

   - Per caratterizzazione del Sup esistono due suddivisioni $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ rispettivamentte di $[a,c]$ e $[c,b]$ tali che:

   $$\sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_a^c[f] - \frac{\epsilon}{2}$$

   e

   $$\sum_j |f(x_j) - f(x_{j-1})| > V_c^b[f] - \frac{\epsilon}{2}$$

   Dunque $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$ è una suddivisione di $[a,b]$ tale che:

   $$\sum_k |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_j |f(x_j) - f(x_{j-1})| > V_a^c[f] + V_c^b[f] - \epsilon$$

   Per arbitrarietà di $\epsilon > 0$ si ottiene:

   $$V_a^b[f] \geq V_a^c[f] + V_c^b[f]$$

4. Poichè la variazione totale è un numero non negativo ed lineare rispetto al dominio la funzione $v(x)$ è monotona non decrescente:

$$x \leq y \Rightarrow v(x) = V_a^x[f] \leq v_a^x[f] + V_x^y[f] = V_a^y[f] = v(y)$$

5. Mostriamo che vale la continuità da sinistra e da destra. Sia $\epsilon > 0$: $\exists \delta > 0$ t.c. $x \in (x^* - \delta, x^*)$ allora $|f(x^*) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ora per definizione di Sup esiste una suddivisione $a = x_0 < \cdots < x_n = x^*$ t.c:

$$v(x^*) - \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4}$$

Dunque possiamo imporre che $x_{n-1} = x^* - \delta$, se così non fosse prenderemmo la medesima suddivisione di prima aggiungendo tale punto, non modificando la validità della disequazione (4). Quindi otteniamo:

$$v(x^*) - \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \epsilon$$

E quindi:

$$v(x^*) - v(x^* - \delta) < \epsilon \tag{5}$$

Poichè v è monotona non decrescente la (5) vale $\forall x \in (x^*, x^* - \delta)$. Tramite ragionamenti analoghi si mostra la continuità da destra. Le due, combinate, implicano la continuità nel punto.

□

Una prima osservazione che può essere fatta come conseguenza delle proprietà prima dimostrate è:

Ogni funzione a variazione limitata può essere espressa come differenza di due funzioni monotone non decrescenti

Infatti ponendo $\phi = v - f$ si osserva facilmente che essa è monotona non decrescente, e dunque $f = v - \phi$. Questo risultato ci permette di concludere che:

Ogni funzione a variazione limitata ammette derivata finita quasi ovunque.

Infatti dal teorema di Lebesgue 1 si ottiene che ogni funzione a variazione limitata è differenza di due funzioni q.o. con derivata finita, e dunque essa stessa ammette q.o. derivata finita.

Questa caratterizzazione di una funzione a variazione limitata come differenza di funzioni monotone non decrescenti permette, tramite un'opportuna generalizzazione del concetto di funzione di salto, di stabilire un interessante relazioni tra le due tipologie di funzioni. Iniziamo con definire una generica funzione di salto.

Definizione 3.1.3. Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\{x_n\}$ un insieme numerabile di punti dell'intervallo. Siano g, h successioni a valori in $\{x_n\}$ definite da $g_n = g(x_n), h_n = h(x_n)$ tali che:

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|) < +\infty$$

E con $x_n = a \Rightarrow g_n = 0$ e $x_n = b \Rightarrow h_n = 0$. Una generica *funzione di salto* è:

$$\Psi(x) = \sum_{n|x_n \leq x} g_n + \sum_{n|x_n < x} h_n \tag{6}$$

Così facendo possiamo generalizzare la propsizione 2.1.4 come segue.

Proposizione 3.1.2. Ogni funzione a variazione limitata può essere espressa come somma di una funzione continua e una funzione di salto.

Per concludere la trattazione sulle funzioni a variazione limitata le dotiamo di una norma:

$$||f|| = V_a^b[f] \tag{7}$$

In realtà non possiamo dotare della norma che vorremmo lo spazio V_a^b, infatti per esso la (7) risulta essere soltanto una *pseudo*-norma:

$$V_a^b[f] = 0 \Rightarrow \underset{\mathcal{D}}{Sup} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \mathcal{D} \ \ |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 0 \Rightarrow f \equiv cost.$$

Se però imponiamo che $f(a) = 0$ allora la catena di implicazioni precedente conduce a $f \equiv 0$, ottenendo una vera e propria norma. Denotando quindi:

$$V^0[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ ha variazione limitata e } f(a) = 0\}$$

Allora $\left(V^0[a,b], V_a^b[f]\right)$ è uno spazio normato.

Proposizione 3.1.3. $(V^0[a,b], ||f||)$ è completo.

Dimostrazione. Sia f_n una successione di funzioni a variazione limitata di Cauchy. Per definizione: $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N = N(\epsilon)$ t.c. $n, m \geq N \Rightarrow V_a^b[f_n - f_m] < \epsilon$. Dunque $\forall \mathcal{D}$ suddivisioni di $[a,b]$:

$$\sum_{i=1}^{k} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) - (f_m(x_i) - f_m(x_{i-1}))| < \frac{\epsilon}{k}$$

E quindi $\forall \mathcal{D}$ e $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ vale:

$$|f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) - (f_m(x_i) - f_m(x_{i-1}))| < \frac{\epsilon}{k}$$

Quindi la successione numerica $f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})$ è di Cauchy rispetto alla norma euclidea, e quindi converge. Poichè vale $\forall i$ possiamo costruire la funzione:

$$\overline{f}(x_i) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) \text{ e } \overline{f}(x_0) = a$$

Quindi definisco iterativamente la funzione limite:

$$\begin{cases} f(x_0) = a \\ f(x_i) = f(x_{i-1}) + \overline{f}(x_i) \end{cases}$$

Tale che rimanga costante negli intevalli (x_i, x_{i-1}). Questa è la funzione limite a cui converge in norma la successione, infatti:

$$\sum_{i=1}^{k} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) - (f(x_i) - f(x_{i-1}))| = \sum_{i=1}^{k} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1}) - \overline{f}(x_i)| < \epsilon$$

Inoltre f è a variazione limitata, poichè fissato $\epsilon > 0$ sia N_ϵ:

$$V_a^b[f] = V_a^b[f - f_n + f_n] \leq V_a^b[f - f_N] + V_a^b[f_N] < \epsilon + V_a^b[f_N]$$

Che è una quantità finita. □

3.2 derivata dell'integrale

Enunciamo e dimostriamo ora il già anticipato risultato che lega funzione integranda e derivata dell'integrale.

Teorema 5. *Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile, allora vale quasi ovunque:*

$$f(x) = \frac{d}{dt}\int_{[a,x]} f\,d\mu \tag{8}$$

Dimostrazione. Poniamo $\Phi(x) = \int_{[a,x]} f\,d\mu$ e mostriamo che vale:

$$f(x) \geq \Phi'(x) \tag{9}$$

quasi ovunque, poichè ammesso che valga abbiamo:

$$-f(x) \geq \int_{[a,x]} -f\,d\mu = -\int_{[a,x]} f\,d\mu = -\Phi'(x) \Leftrightarrow f(x) \leq \Phi'(x) \quad q.o.$$

E dunque la tesi.

Mostriamo la validità di 9. Se $f(x) < \Phi'(x)$ allora $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ t.c:

$$f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x)$$

Sia $E_{\alpha\beta}$ l'insieme dei numeri nei quali è verificata la disuguaglianza e mostriamo che ha misura nulla. Poichè così facendo otterremo:

$$\mu\left\{x \in [a,b] : f(x) < \Phi'(x)\right\} \leq^{1} \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} \mu(E_{\alpha\beta}) = 0$$

$E_{\alpha\beta}$ è misurabile poichè controimmagine di boreliani attraverso funzioni misurabili. Per mostrare la misura nulla di $E_{\alpha\beta}$ facciamo vedere che è includibile in un aperto di misura piccola a piacere, ovvero:

$$\mu(E_{\alpha\beta}) \leq \epsilon \text{ dove } \epsilon > 0 \text{ generico} \Rightarrow \mu(E_{\alpha\beta}) = 0$$

Ricordiamo che per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, e poichè stiamo alvorando su uno spazio di misura finita (l'intervallo $[a,b]$) si ha:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall E \in [a,b] \text{ con } \mu(E) < \delta \Rightarrow \left|\int_E f\,d\mu\right| < \epsilon$$

Per una caratterizzazione degli insiemi misurabili sappiamo che $\exists G \subset [a,b]$ t.c:

- $E_{\alpha\beta} \subset G$
- $\mu\left(G \setminus E_{\alpha\beta}\right) < \delta \Rightarrow^{2} \mu(G) < \mu(E_{\alpha\beta}) + \delta$

Ora preso $x^* \in E_{\alpha\beta}$ sappiamo per costruzione che $\exists \xi > x$ t.c:

$$\frac{\Phi(\xi) - \Phi(x^*)}{\xi - x^*} > \beta$$

E quindi il punto x^* è invisibile a destra per la funzione $\Phi(x) - \beta x$. Per il lemma di Riesz possiamo indicare con $S = \bigcup_k (a_k, b_k)$ un aperto uninione di aperti disiungti tale che $E_{\alpha\beta} \subset S \subset G$ dove:

$$\Phi(a_k) - \beta a_k \leq \Phi(b_k) - \beta b_k \Rightarrow \int_{[b_k,a_k]} f\,d\mu \geq \beta(b_k - a_k)$$

[1] Poichè l'insieme dei $E_{\alpha\beta}$ è numerabile
[2] G ha dimensione finita

Sommando su tutti i k:

$$\int_S f\,d\mu \geq \beta\mu(S)$$

Osserviamo però che:

$$\int_S f\,d\mu = \int_{E_{\alpha\beta}} f\,d\mu + \underbrace{\int_{S\setminus E_{\alpha\beta}} f\,d\mu}_{\leq \int_G f\,d\mu} \leq \alpha\mu(E_{\alpha\beta}) + \epsilon \leq {}^{3}\alpha\mu(S) + \alpha\delta + \epsilon$$

Quindi confrontando le ultime due disuguaglianze si ottiene:

$$\beta\mu(S) \leq \alpha\mu(S) + \alpha\delta + \epsilon \Rightarrow \mu(S) \leq \frac{\alpha\delta + \epsilon}{\beta - \alpha}$$

E abbiamo così dimostrato la tesi. □

Un secondo risultato nella teoria di Riemann è:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt \tag{10}$$

Per una generica funzione f non vale la stessa cosa nella teoria di Lebesgue, vale però un risultato più debole. Osserviamo che non possiamo, ovviamente, considerare una funzione f veramente generica, dev'essere quantomeno quasi ovunque differenziabile, sappiamo dalla sezione precedente che le funzioni a variazione limitata soddisfano questa condizione necessaria. D'altra parte l'integrale a secondo membro è a variazione limitata. Dunque la 10 non può valere per una classe di funzioni più ampia delle funzioni a variazione limitata. Studiamo quindi delle f a variazione limitata, che sappiamo essere tutte esprimibili come differneza di funzioni monotone non decrescenti. Studiamo quindi funzioni monotone non decrescenti.

Teorema 6. *Sia f una funzione monotona non decrescente, è misurabile e vale:*

$$\int_{[a,b]} f'\,d\mu \leq f(b) - f(a)$$

Dimostrazione. Sappiamo che la monotonia implica misurabilità e poichè la misurabilità passa al limite puntuale e:

$$\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è misurabile $\forall h$, allora f' è misurabile. Osserviamo inoltre che φ_h è non negativa poichè f è non decrescente. Studiamo ora l'integrale dei rapporti incrementali:

$$\int_{[a,b]} \varphi_h\,d\mu = \frac{1}{h}\int_{[a,b]} \big(f(x+h) - f(x)\big)\,d\mu(x) \tag{11}$$

Sfrutto ora il fatto che si lavora su un dominio di dimensione finita e calcolo gli integrali di Riemann:

$$\int_a^b f(x+h)\,d\mu(x) - \int_a^b f(x)\,d\mu(x) = \int_{a+h}^{b+h} f(x)\,d\mu(x) - \int_a^b f(x)\,d\mu(x) =$$

$$\int_b^{b+h} f\,d\mu - \int_a^{a+h} f\,d\mu$$

[3] $S \setminus E_{\alpha\beta} \subset G \setminus E_{\alpha\beta}$ e $\mu(G \setminus E_{\alpha\beta}) < \delta$

Ora osservo che:

$$\liminf_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f\,d\mu - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f\,d\mu\right) = f(b) - f(a^+)$$

Quindi applicando il lemma di Fatou alla 11 otteniamo:

$$\int_{[a,b]} f'\,d\mu = \liminf_{h\to 0}\int_{[a,b]} \varphi_h\,d\mu \le f(b) - f(a^+) \le f(b) - f(a)$$

□

Dunque se una funzione è q.o. derivabile vale la disequazione del teorema precedente.

Vogliamo ora descrivere la case di funzioni per cui vale l'uguaglianza:

$$\int_{[a,b]} f'\,d\mu = f(b) - f(a)$$

Oer far ciò ci serviamo del concetto di funzione assoltamente continua.

Definizione 3.2.1. Una funzione $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è *assolutamente continua* se $\forall\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni (a_k, b_k) intervalli disgiunti con $k = 1, \dots, n$ vale:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

È evidente che una funzione assolutamente continua è uniformemente continua e a variazione limitata. Inoltre si può estendere la definizione ad un insieme numerabile di intervalli, poichè l'implicazione vale per ogni n, e dunque passando al limite si conserva la validità. Si osserva inoltre che le funzioni assolutamente continue formano uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Infine sappiamo che una funzione f assolutamente continua può essere espressa come differenza di due funzioni assolutamente continue non decrescenti. Infatti in quanto funzione a variazione limitata si può esprimere:

$$f = v - \varphi$$

con $v(x) = V_a^x[f]$ e $\varphi(x) = f(x) - v(x)$ non decrescenti. Mostriamo che v è assolutamente continua, e quindi anche φ. Sia $\epsilon > 0$ e un $\delta > 0$, consideriamo quindi n intervallini (a_k, b_k) di lunghezza totale minore di δ. Ora prese $\mathcal{D}_k$ suddivisioni degli intervalli osserviamo che:

$$\sum_{k=1}^{n}(v(b_k) - v(a_k)) = \sum_{k=1}^{n}\underset{\mathcal{D}_k}{Sup}\sum_{j=1}^{m}(f(b_{k,j}) - f(a_{k,j}))$$

Poichè $b_{k,j} - a_{k,j} < \delta$ dunque $f(b_{k,j}) - f(a_{k,j}) < \epsilon$ e quindi vale la tesi.

Mostriamo anche che l'integrale di lebesgue è assolutamente continua.

Teorema 7. *Sia f una funzione misurabile, dunque:*

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\,d\mu$$

è assolutamente continua.

Dimostrazione. Siano (a_k, b_k) disgiunti:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{[a_k,b_k]} f \, d\mu \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k,b_k]} |f| \, d\mu = \int_{\cup_k [a_k,b_k]} |f| \, d\mu$$

Se la lunghezza totale degli intervalli tende a zero allora anche la somma delle variazioni tende a zero. □

Inoltre rispetto a funzioni assolutamente continue possiamo rinforzare il risultato del 6 come segue.

Teorema 8. *Una funzione assolutamente f continua su $[a, b]$ è sommabile e per ogni $x \in [a, b]$:*

$$\int_{[a,x]} f \, d\mu = F(x) - F(a)$$

Per dimostrare questo risultato ci serviamo del seguente lemma.

Teorema 9. *Sia f una funzione monotona non decrescente e assolutamente continua e uguale a 0 quasi ovunque allora la funzione è costante.*

Dimostrazione. In quanto monotona non decrescente si ha che $Imf = [f(a), f(b)]$. Mostriamo quindi che $\mu(Imf) = 0$ e dunque la tesi. Siano $E = \{x \in [a, b] | f'(x) = 0\}$ e $Z = \{x \in [a, b] | f'(x) \neq 0\}$, e dunque $Imf = E \cup Z$:

- $\mu(f(Z)) = 0$: Sia $\epsilon > 0$ e per assoluta continuità di f esiste $\delta > 0$ t.c:

  $$\sum_k b_k - a_k < \delta \Rightarrow \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

  Poichè $\mu(Z) = 0$ esiste A aperto contenente Z t.c. $\mu(A) < \delta$, e quindi $\mu(f(A)) < \epsilon \Rightarrow \mu(f(Z)) < \epsilon$.

- $\mu(f(E)) = 0$: Sappiamo che $E = [a, b] \setminus Z$ e sia $x_0 \in E$, dunque $\forall \epsilon > 0$ dunque per ogni x sufficientemente vicino a x_0 vale:

  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \epsilon \Rightarrow \epsilon x - f(x) > \epsilon x_0 - f(x_0)$$

  Dunque x_0 è invisibile a destra per la funzione $\epsilon x - f(x)$, dunque per il lemma di Riesz esistono (a_k, b_k) disguinti t.c:

  $$\epsilon b_k - f(b_k) \ge \epsilon a_k - f(a_k) \Rightarrow f(b_k) - f(a_k) \le \epsilon(b_k - a_k)$$

  Dunque:

  $$\mu(f(E)) \le \sum_k f(b_k) - f(a_k) \le \epsilon \sum_k b_k - a_k \le \epsilon(b - a)$$

  Per la arbitrarietà di ϵ si ottiene $\mu(f(E)) = 0$.

Dunque otteniamo $\mu(Imf) = \mu(f(Z)) + \mu(f(E)) = 0$. □

Possiamo quindi dimostrare il teorema 8:

Dimostrazione. Sia $\Phi(x) = F(x) - \int_{[a,x]} f \, d\mu$ e osserviamo che è monotona non decrescente:

$$x' \le x'' \Rightarrow \Phi(x'') - \Phi(x') = F(x'') - F(x') - \int_{[x',x'']} f \, d\mu \ge^{4} 0$$

[4] Per il teorema 6

È assolutamente continua (differenza di funzioni assolutamente continue) e inoltre $\Phi(x)' = 0$ quasi ovunque. Dunque applico il lemma di prima e trovo che la funzione è costante. Poichè per $x = a$ si ha $\Phi(a) = F(a)$ dunque:

$$\Phi(x) = F(a) \Rightarrow \int_{[a,x]} f \, d\mu = F(x) - F(a)$$

□

Un ulteriore risultato, che amplia i precedenti sulla scomposizione di una funzione a variazione limitata:

Una funzione a variazione limitata può essere rappresentata come somma di tre componenti:

$$f = H + \psi + \chi$$

Che sono rispettivamente una funzione di salto, una assolutamente continua e una singolare.

4 GENERALIZZAZIONE DEI RISULTATI E TEOREMA DI RADON-NIKODIM

4.1 CONCETTO DI CARICA

I risultati esposti nelle sezioni precedenti sulle funzioni definite sulla retta reale si possono estendere con le dovute accortezze ad un generico insieme misurabile. Indicheremo dunque nel seguito X uno spazio dotato di una σ-algebra $\mathcal{M}$ e μ misura finita ($\mu(X) < +\infty$). Presa una funzione $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile dunque si definisce:

$$\Phi \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R} \tag{12}$$

$$A \mapsto \int_A f \, d\mu \tag{13}$$

Questa è la generalizzazione del concetto di misura che formalmente si esprime come:

Definizione 4.1.1. Dato uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$ una funzione $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $\Phi(\emptyset) = 0$
- σ-addittiva

è detta *carica*.

Come si evince facilmente dalla definzione, il concetto di carica è una nozione di misura indebolita dell'ipotesi di non negatività.

Definizione 4.1.2. Data una carica Φ su un insieme misurabile $(X, \mathcal{M})$ valgono le definizioni:

- $A \in \mathcal{M}$ è un insieme *negativo* se: $\Phi(A \cap E) \leq 0$ per ogni $E \in \mathcal{M}$
- $B \in M$ è un insieme *positivo* se: $\Phi(B \cap F) \geq 0$ per ogni $F \in \mathcal{M}$

Una definizione è la seguente:

- $A \in \mathcal{M}$ è un insieme *negativo* se: $\Phi(E) \leq 0$ per ogni $E \subset A$
- $B \in M$ è un insieme *positivo* se: $\Phi(F) \geq 0$ per ogni $F \subset B$

Osserviamo subito che un insieme sia positivo che negativo ha sicuramente misura nulla. Infatti ogni suo sottinsieme dovrà avere misura sia maggiore o uguale a zero che minore o uguale a zero, e quindi avrà misurà nulla. Riscrivendo l'insieme come uninio di tutti i suoi sottoinsiemi la misura di esso sarà la somma delle misure, e dunque nulla.

Teorema 10. *Sia Φ una carica definita sullo spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$, allora esistono $A^- \subset X$ insieme misurabile negativo e $A^+ = X \setminus A^-$ insieme misurabile positivo.*

Dimostrazione. Definiamo:

$$a = Inf \{\Phi(A) | A \in \mathcal{M} \text{ negativo } \}$$

Sia L'esistenza di una tale successione è garantita da:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists A_n \in \mathcal{M} \text{ negativo } t.c. \ \Phi(A_n) < a + \frac{1}{n+1}$$

Dunque:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N = \frac{1}{[\epsilon]} \text{ t.c. } n \geq N \Rightarrow |\Phi(A_n) - a| < \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

Si è così costruita una successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi misurabili negativi tali che:

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi(A_n) = a$$

Dunque poniamo:

$$A^- = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

Che è evidentemente un insieme misurabile[1] negativo con $\Phi(A^-) = a$. Mostriamo quindi che $A^+ := X \setminus A^-$ è un insieme misurabile[2] positivo.

Se per assurdo A^+ non fosse positivo esisterebbe un $C_0 \subset A^+$ misurabile tale che:

$$\Phi(C_0) < 0$$

Questo insieme non può però essere negativo, poichè se così fosse esisterebbe $A = A^- \cup C_0$ t.c:

$$\Phi(A) = \Phi(A^-) + \Phi(C_0) < a$$

Ma questo è un assurdo poichè a è l'estremo inferiore dei valori di Φ calcolato su tutti gli insiemi misurabili negativi di M. Esiste quindi un insieme $C_1 \subset C_0$ t.c. $\Phi(C_1) \geq \frac{1}{k_1}$ per un opportuno $k_1 \in \mathbb{N}$. Applicando il medesimo ragionamento a $C_0 \setminus C_1$ se questo fosse negativo si potrebbe costruire l'insieme $A = A^- \cup (C_0 \setminus C_1)$ la cui misura sarebbe però strettamente minore di a, e quindi assurdo. Possiamo quindi costruire un insieme $C_2 \subset (C_0 \setminus C_1)$ t.c. $\Phi(C_2) \geq \frac{1}{k_2}$ con $k_2 \geq k_1$. Iterando otteniamo la successione (C_n) tramite la quale possiamo costruire l'insieme:

$$F = C_0 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

L'insieme F è non vuoto e per costruzione è negativo. Dunque, come prima, l'insieme $A = A^- \cup F$ ha misura minore di a, assurdo. Dunque ogni sottoinisieme di A^+ ha misura positiva, e quindi per definizione A^+ è positivo. □

Il teorema appena dimostrato afferma l'esistenza di una scomposizione di uno spazio $(X, \mathcal{M})$ rispetto ad una carica Φ, questa è detta:

Decomposizione di Hahn

Tale decomposizione non è essenzialmente unica, vale a dire che:

Prese due decomposizioni di Hahn (A^-, A^+) e (B^-, B^+) di X allora le differenze simmetriche $A^- \triangle B^-$ e $A^+ \triangle B^+$ hanno misura nulla.

[1] σ-addtività di $\mathcal{M}$
[2] Ovviamente per la chiusura rispetto alla complementazione di $\mathcal{M}$

Dove: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Tale relazione sussite poichè $A^- \cap B^+$ e $A^+ \cap B^-$ sono sia positivi che negativi, dunque di misura nulla, e inoltre vale:

$$A^- \triangle B^- = A^+ \triangle B^+ = (A^- \cap B^+) \cup (A^+ \cap B^-)$$

La decomposizione di Hahn offrer quindi la possibilità di costruire due misure a partire da una carica:

- $\Phi^+(E) = \Phi(E \cap A^+)$
- $\Phi^-(E) = -\Phi(E \cap A^-)$

Ovviamente ben definite poichè $E \cap (A^+ \setminus A^-)$ è sia positivo che negativo. Inoltre queste due misure costruite a parrtire dalla carica ci offrono una decomposizione di questa in misure:

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$$

4.1.1 *Tipologie fondamentali di cariche*

Si definiscono di seuito alcuni dei più comuni e utliti tipi di cariche.

Definizione 4.1.3. Sia (X, M) un insieme misurabile e *Phi* una carica che si definisce:

- *Concentrata sull'insieme* $A \in M$ detto *supporto* se:
$$\forall S \subset X \setminus A \text{ allora } \Phi(S) = 0$$
- *Conitnua* se:
$$\Phi(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in X$$
- *Discreta* se è concentrata su un insieme al più numerabile
- *Singolare* rispetto ad una misura $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ se è concentrata su un insime di misura nulla per μ
- *Assolutamente continua* rispetto ad una misura $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, denotato con $\Phi \ll \mu$ se:
$$\forall A \in \mathcal{M} \text{ t.c. } \mu(A) = 0 \Rightarrow \Phi(A) = 0$$

Sarà proprio quest'ultima classe di cariche che si renderà protagonista nel teorema centrale di questa sezione, il teorema di Radon-Nikodim.

4.2 TEOREMA DI RADON-NIKODIM

Una carica assolutamente continua può essere costruita partendo da una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, la carica come definita in apertura della sezione 12:

$$\Phi(A) = \int_A f \, d\mu \tag{14}$$

È assoutamente continua, infatti:

$$A \in \mathcal{M} \text{ t.c. } \mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \, d\mu = 0 \Rightarrow \Phi(A) = 0$$

Il teorema di Radon-Nikodim ci assicura un risultato ben più forte ed inaspettato: le carice assolutamente continua sono tutte e sole della forma 14.

Teorema 11 (Radon-Nikodim). *Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e μ una misura finita e Φ una carica assolutamente continua rispetto a μ, allora esiste una funzione f su X integrabile rispetto a μ tale che:*

$$\Phi(A) = \int_A f \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

Una tale funzione è detta derivata della carica rispetto alla misura ed è unica a meno di μ-equivalenze.

Per dimostrare il teorema ci limitiamo a cariche positive, ovvero misure, poichè come visto ogni carica è scomponibile nella differenza di due misure. Dunque se esiste una funzione che soddisfa la 14 per una misura, la funzione che soddisferà la proprietà per la carica sarà la differenza delle funzioni relative alla scomposizione della carica.

Dimostriamo inizialmente un lemma che tornerà utile nella dimostrazione.

Lemma 12. *Siano ν, μ misure non nulle su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$ t.c. $\nu \ll \mu$, allora esistono $n \in \mathbb{N}$ e $B \in \mathcal{M}$ t.c. $\mu(B) > 0$ e B è positivo rispetto alla carica $\Phi_n = \nu - \frac{1}{n}\mu$*

Dimostrazione. Sia $X = A^- \cup A^+$ decomposizione di Hahn rispetto alla carica Φ_n per $n \geq 1$. Poniamo quindi:

$$A_0^- = \bigcap_{n\geq 1} A_n^- \quad , \quad A_0^+ = \bigcup_{n\geq 1} A_n^+$$

Dunque:

$$\Phi_n(A_0^-) \leq 0 \Rightarrow \nu(A_0^-) \leq \frac{1}{n}\mu(A_0^-) \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \nu(A_0^-) = 0$$

Quindi $\nu(A_0^+) > 0$ poichè la misura è non nulla. In virtù della assoluta continutà $\mu(A_0^+) > 0$, dunque esiste un $n \geq 1$ t.c. $\mu(A_n^+) > 0$ e quindi tale n e $B = A_n^+$ soddisfano le ipotesi del lemma. □

Possiamo dunque dimostrare il teorema vero e proprio.

Dimostrazione. Sia:

$$K = \left\{ f : X \longrightarrow [0, +\infty] \,\middle|\, \text{Integrabili,} \int_A f\, d\mu \leq \Phi(A) \quad \forall A \in M \right\}$$

E sia:

$$M = Sup\left\{ \int_X f\, d\mu \mid f \in K \right\}$$

Sia una successione (f_n) definita su K tale che:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu = M$$

Ad esempio basta prendere una successione di funzioni monotona crescente di K. Sia poi la successione:

$$\begin{aligned} g_n :& X \longrightarrow \mathbb{R} && (15) \\ x \;& \mapsto g_n(x) = \max_{k\leq n}\{f_k(x)\} && (16) \end{aligned}$$

E sia $f(x) = \underset{n\geq 1}{Sup}\,\{f_n(x)\}$. Mostriamo ora che:

$$\int_X f\, d\mu = M$$

tramite il teorema di convergenza monotona:

- $g_n \in K$: Le funzioni sono ovviamente non negative e integrabili. Siano E_k gli insiemi non intersecanti dove $g_n(x) = f_k(x)$ t.c. $E = \cup_{k\geq 1} E_k$ e quindi:
$$\int_E g_n\, d\mu = \sum_{k\geq 1} \int_{E_k} f_k\, d\mu \leq \sum_{k\geq 1} \Phi(E_k) = \Phi(E)$$
- $0 \leq g_1(x) \leq \cdots \leq g_n(x)$ per ogni $n \geq 1$ e $\forall x \in X$
- $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = Sup\,(g_n(x)) = f(x)$ per ogni $x \in X$

Dunque:

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X g_n \, d\mu = Sup \left\{ \int_X g_n \, d\mu \right\} = M$$

Mostriamo ora che per ogni $E \in \mathcal{M}$:

$$\Phi(E) - \int_E f \, d\mu = 0 \tag{17}$$

Valutiamo la funzione di insiemi:

$$\lambda(E) = \Phi(E) - \int_E f \, d\mu$$

È evidentemente una misura ed è assolutamente continua rispetto ad μ. Poniamo per assurdo che sia non nulla, dunque in virtù del lemma precedente $\exists \epsilon > 0$ e $B \in \mathcal{M}$ t.c. $\mu(B) > 0$ e B è positivo rispetto a $\lambda - \epsilon\mu$, ovvero $\forall E \in \mathcal{M}$:

$$\lambda(E \cap B) \geq \epsilon\mu(E \cap B)$$

Poniamo ora $h(x) = f(x) + \epsilon\chi_B(x)$ misurabile e per $E \in \mathcal{M}$:

$$\int_E h \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \epsilon\mu(E \cap B) = \Phi(E) - \lambda(E) + \epsilon\mu(E \cap B) \leq$$

$$\leq \Phi(E) - \lambda(E \cap B) + \epsilon\mu(E \cap B) \leq \Phi(E)$$

Dunque $h \in K$ però:

$$\int_X h \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \epsilon\mu(B) > M$$

Arrivando dunque ad un assurdo. Quindi λ è una misura nulla, ovvero vale la 17.

Mostriamo ora l'unicità di f. Siano f_1, f_2 due funzioni t.c:

$$\int_A f_1 \, d\mu = \Phi(A) = \int_A f_2 \, d\mu$$

Per ogni A misurabile. Dunque definiamo:

$$E = \{x \in X | f_1(x) \neq f_2(x)\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ x \in X \text{ t.c. } |f_1(x) - f_2(x)| > \frac{1}{n} \right\}$$

Dove E_n è misurabile in quanto controimmagine del boreliano $(1/n, +\infty)$ attraverso la funzione misurabile $|f_1 - f_2|$. Ora:

$$0 = \int_{E_n} f_1 - f_2 \, d\mu > \int_{E_n} \frac{1}{n} \, d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n)$$

Quindi $\mu(E_n) = 0$ per ogni n, e dunque:

$$\mu(E) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(E_n) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$$

□

BIBLIOGRAFIA

[1] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley Sons, 1995. ISBN: 0-471-00710-2.

[2] Andrej N. Kolmogorov - Sergej V. Fòmin. *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*. Editori Riuniti Univ. Press, 2012. ISBN: 886473239X.

[3] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill Education, 2015. ISBN: 0070856133.

[4] Wikipedia. *Wikipedia*. URL: `https://en.wikipedia.org`.