

Politecnico di Milano



A.Y. 2015-2016

DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEM

Motorbike Frame Analysis

Andrea Verzaglia - 823568

Indice

1	INTRODUZIONE	3
2	RISOLUZIONE	4
2.1	PUNTO 1	4
2.2	PUNTO 2	7
2.3	PUNTO 3	14
2.4	PUNTO 4	17
2.5	PUNTO 5	20
2.6	PUNTO 6	27

1 INTRODUZIONE

Il modello da studiare, che rappresenta la struttura di un telaio di una moto, è rappresentato nella figura seguente:

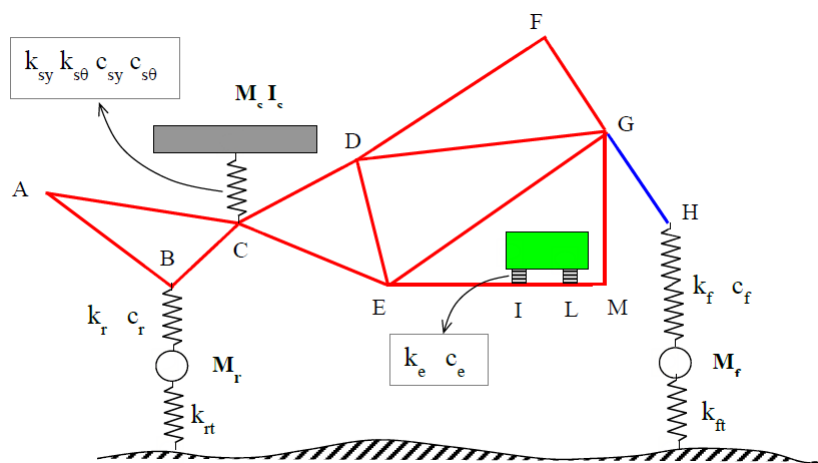


Figura 1: struttura telaio

2 RISOLUZIONE

2.1 PUNTO 1

DEFINIRE UN *MODELLO AGLI ELEMENTI FINITI* VALIDO NEL RANGE DI FREQUENZE $0 \div 300Hz$

Per prima cosa è necessario definire la struttura del telaio. Si considerino i punti indicati con una lettera (vedere *Figura 1*), cioè ogni punto di discontinuità, ogni punto in cui viene applicata una massa e ogni estremo di una molla come un *nodo*. Per definire le posizioni degli estremi delle molle sono stati assegnati dei valori arbitrari ma coerenti alle lunghezze delle molle stesse:

- lunghezza sospensione della sella (NC): $0.150m$
- lunghezza sospensione del motore (IO e LP): $0.050m$
- lunghezza forcella (HR, sospensione ruota anteriore): $0.320m$
- lunghezza mono (BQ, sospensione ruota posteriore): $0.200m$
- lunghezza molle che modellano la rigidità delle ruote (QS e RT): $0.100m$

Si ottiene così il seguente scenario:

```
! ELENCO DEI NODI:
*NODES
IN. NODO   3 CODICI VINCOLO:  x    y    theta    POSIZIONE:  x[m]    y[m]
1           0    0    0           0.360    0.480    ! (A) 1
2          -12    0    0           0.600    0.300    ! (B) 2
3           0    0    0           0.730    0.420    ! (C) 3
4           0    0    0           0.960    0.540    ! (D) 4
5           0    0    0           1.020    0.300    ! (E) 5
6           0    0    0           1.320    0.780    ! (F) 6
7           0    0    0           1.440    0.600    ! (G) 7
8          -13    0    0           1.560    0.420    ! (H) 8
9           0    0    0           1.160    0.300    ! (I) 9
10          0    0    0           1.300    0.300    ! (L) 10
11          0    0    0           1.440    0.300    ! (M) 11
12          1    1    1           0.600    0.000    ! (S) 12
13          1    1    1           1.560    0.000    ! (T) 13
14          -12    0    1           0.600    0.100    ! (Q) 14
15          -13    0    1           1.560    0.100    ! (R) 15
16          -3    0    0           0.730    0.570    ! (N) 16
17          -9    0    0           1.160    0.350    ! (O) 17
18          -10   0    0           1.300    0.350    ! (P) 18
*ENDNODES
```

Figura 2: nodes

```

*BEAMS
!N. ELE      N. NODO INGRESSO      N. NODO USCITA      DENSITA'*AREA[kg/m]      EA[Nm^2]      EJ[N]
1            1                2                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! AB
2            2                3                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! BC
3            3                1                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! CA
4            3                4                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! CD
5            5                3                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! EC
6            4                5                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! DE
7            4                6                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! DF
8            6                7                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! FG
9            7                4                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! GD
10           5                7                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! EG
11           7                11               0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! GM
12           5                9                0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! EI
13           9                10               0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! IL
14           10               11               0.45                1.29E+07      5.30E+03      ! LM
15           7                8                1.23                2.64E+07      1.80E+04      ! GH
16           17               18               150.00             1.29E+08      5.00E+05      ! OP (motore)
*ENDBEAMS

```

Figura 3: beams

NB: viene utilizzata la *massa lineare*, ovvero la massa per metro.

```

*DAMPING
! alpha and beta values to define the damping matrix
!alpha[s]      beta[s^-1]
1.50E-01      | 1.20E-05

```

Figura 4: damping (proportional damping)

```

*SPRINGS
!N. MOLLA      N. NODO i      N. NODO j      kx[N/m]      ky[N/m]      k_theta[N/m]      rx[Ns/m]      ry[Ns/m]      r_theta[Ns/m]
1            12            14            0            2.00E+05      0                0                0                0                ! molla SQ (gomma posteriore)
2            14            2             0            2.00E+04      0                0                2.00E+03      0                ! molla QB (mono)
3            13            15            0            2.00E+05      0                0                0                0                ! molla TR (gomma anteriore)
4            15            8             0            2.00E+04      0                0                2.00E+03      0                ! molla RH (forcella)
5            3             16            0            1.00E+05      2.00E+04        0                1.00E+02      2.00E+01        ! molla CN (sella)
6            9             17            0            2.00E+05      0                0                3.20E+02      0                ! molla IO (motore)
7            10            18            0            2.00E+05      0                0                3.20E+02      0                ! molla LP (motore)
*ENDSPRINGS

```

Figura 5: springs

```

*MASSES
!N. MASSA    N. NODO    MASSA[kg]    MOMENTO DI INERZIA[kgm^2]
1            14        15.00        0.25          ! ruota posteriore
2            15        12.00        0.20          ! ruota anteriore
3            16        90.00        12.00         ! sella + pilota
*ENDMASSES

```

Figura 6: masses

Infine si è verificato se il modello agli elementi finiti della struttura del telaio appena definito è valido nel range di frequenze $0 \div 300Hz$. Per fare questo, è necessario verificare che la *prima frequenza naturale* (che è la più bassa) di ogni elemento (*beam*) sia superiore alla *massima frequenza* delle forze agenti sul sistema f_{max} (circa 1.5-3 volte superiore). Nel caso in esame f_{max} è pari a $300Hz$ e poniamo $c = 2$.

La prima frequenza di risonanza viene calcolata con la formula

$$f_{max,1} = \frac{1}{2\pi c} \left(\frac{\pi}{L_k} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_k}{m_k}}$$

e i risultati ottenuti sono i seguenti

TRAVE	LUNGHEZZA [m]	fmax [Hz]
AB	0,300	947
AC	0,375	607
BC	0,177	2723
CD	0,259	1267
CE	0,314	865
DE	0,247	1393
DF	0,433	455
DG	0,484	364
EG	0,516	320
EI	0,140	4349
IL	0,140	4349
LM	0,140	4349
FG	0,216	1821
GM	0,300	947
GH	0,216	2030
OP	0,140	2314

Tabella 1

MATERIALE	m [kg/m]	EA [Nm ²]	EJ [N]	Lmax [m]
telaio	0,45	1,29E+07	5,30E+03	0,533
forcella	1,23	2,64E+07	1,80E+04	0,563
motore	150	1,29E+08	5,00E+05	0,389

Tabella 2

Osservando la *Tabella 1* è possibile affermare che il modello ideato è corretto e coerente, in quanto ogni elemento ha la prima frequenza di risonanza (che è la più bassa) maggiore di due volte la massima frequenza di eccitazione ($300Hz$).

2.2 PUNTO 2

CALCOLARE LE *FREQUENZE NATURALI* DEL SISTEMA E I RELATIVI *MODI DI VIBRARE* NEL RANGE DI FREQUENZE $0 \div 300Hz$

Per calcolare le frequenze naturali del sistema e i corrispondenti modi di vibrare nel range $0 \div 300Hz$ è necessario caricare la struttura definita in precedenza come file *.inp* nel programma *Matlab® "dmb_fem2"*. Ci pensa il software a calcolare le frequenze naturali, che sono 39 essendo 39 i gradi di libertà. Ci limitiamo a mostrare nel seguito solo le combinazioni comprese nel range di frequenze richiesto.

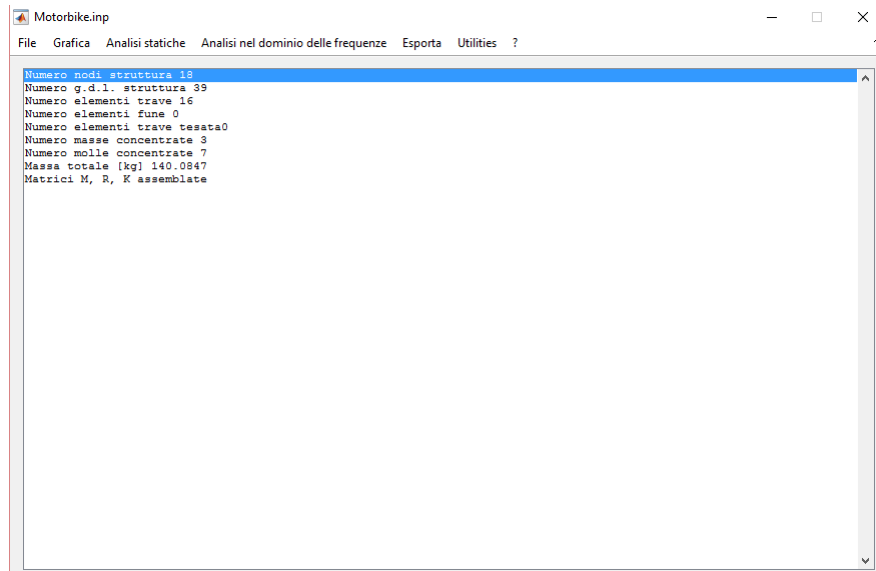


Figura 7: "dmb_fem2"

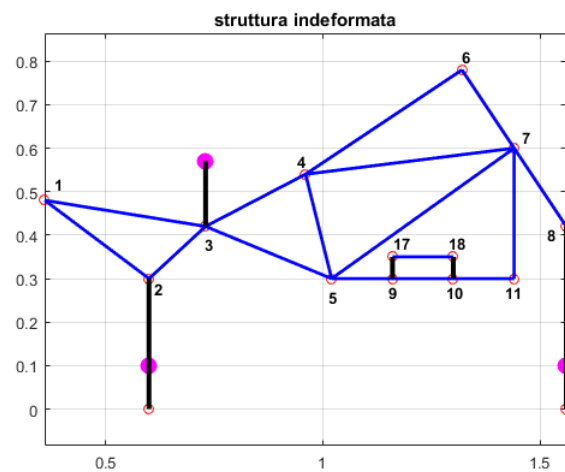


Figura 8: struttura indeformata

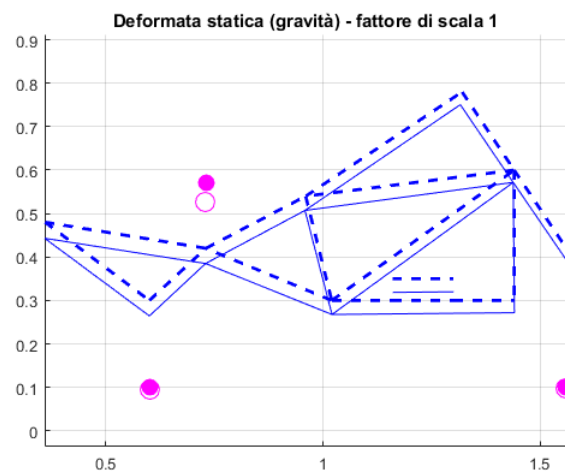


Figura 9: deformata statica

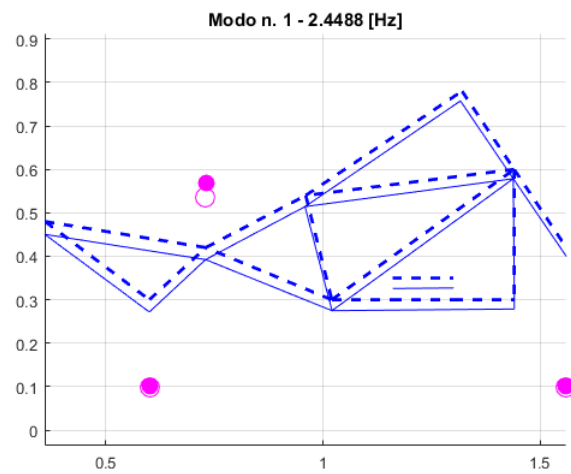


Figura 10: modo 1 (fattore di scala 0.1)

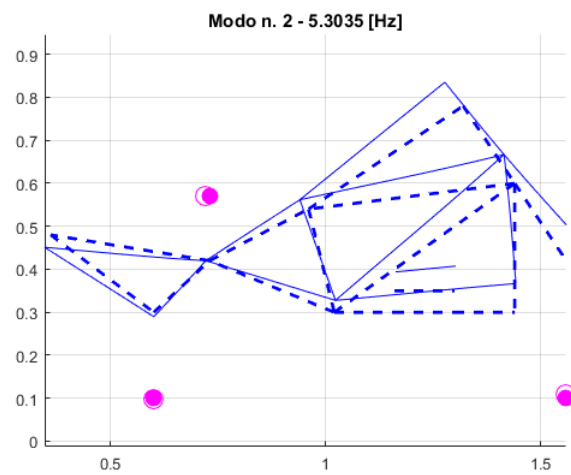


Figura 11: modo 2 (fattore di scala 0.5)

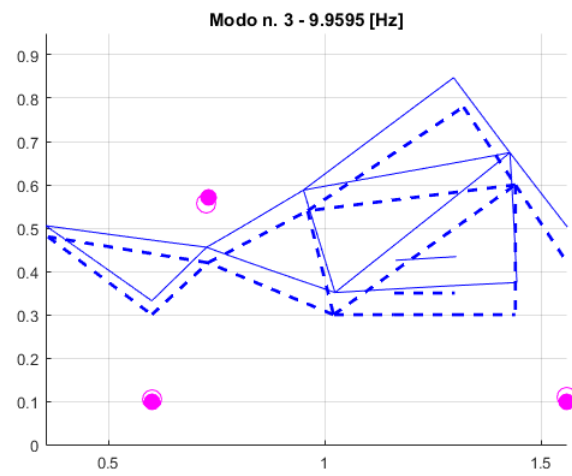


Figura 12: modo 3 (fattore di scala 0.3)

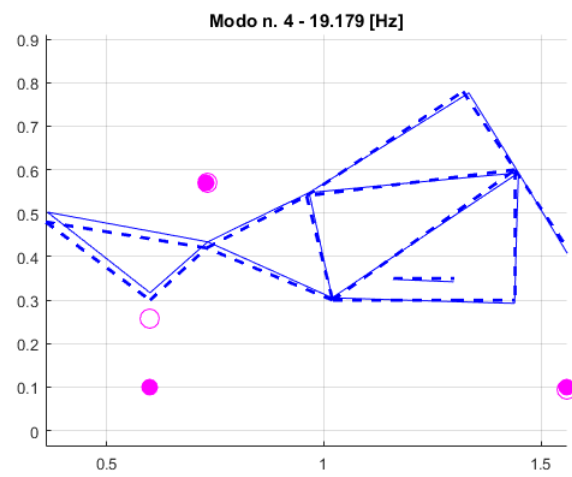


Figura 13: modo 4 (fattore di scala 0.2)

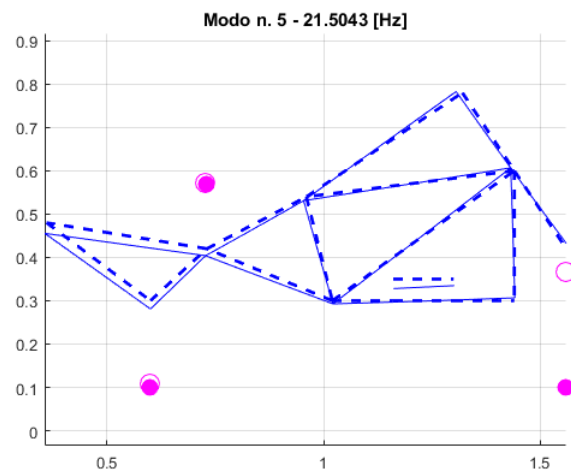


Figura 14: modo 5 (fattore di scala 0.3)

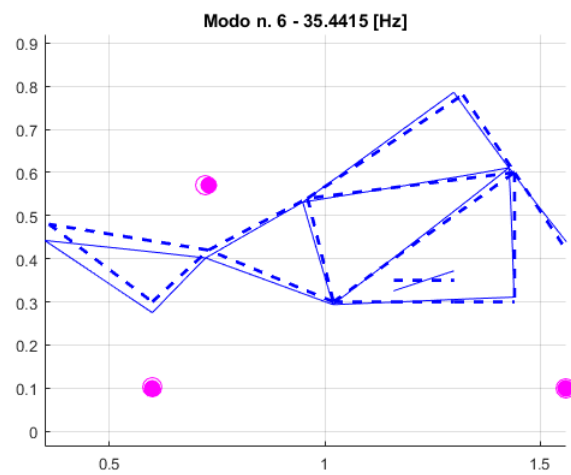


Figura 15: modo 6 (fattore di scala 0.5)

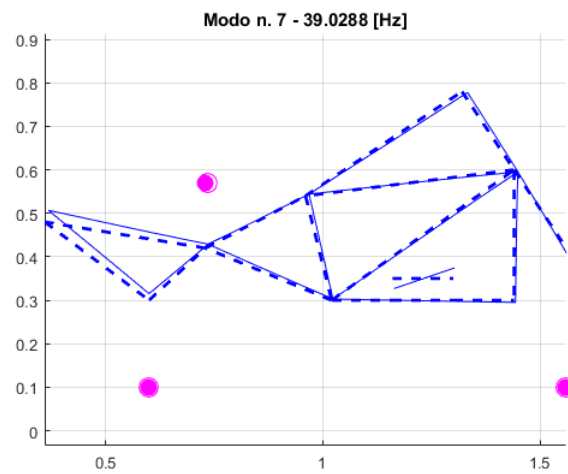


Figura 16: modo 7 (fattore di scala 0.5)

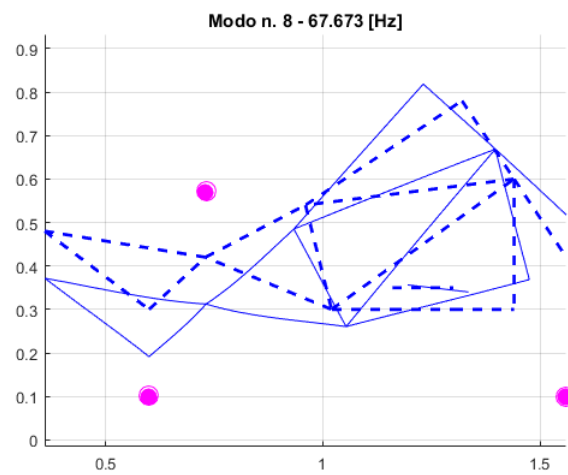


Figura 17: modo 8 (fattore di scala 0.8)

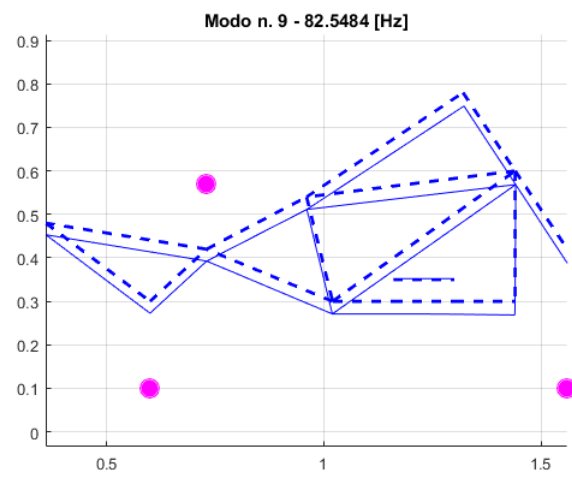


Figura 18: modo 9 (fattore di scala 0.1)

2.3 PUNTO 3

CALCOLARE LA *RISPOSTA IN FREQUENZA* (FRF) NEL RANGE DI FREQUENZE $0 \div 300Hz$ CON STEP $0.1Hz$:

- a) INPUT: forza verticale sulla sella
OUTPUT: accelerazione verticale della sella
- b) INPUT: forza verticale sul mozzo della della ruota anteriore M_f
OUTPUT: accelerazione verticale della sella
- c) INPUT: forza verticale sul mozzo della ruota posteriore M_r
OUTPUT: accelerazione verticale della sella
- d) INPUT: due forze verticali, in fase e applicate nei punti di connessione tra le sospensioni del motore e il telaio (punti I e L)
OUTPUT: accelerazione verticale della sella

Anche in questo caso ci pensa il software, basta semplicemente inserire i nodi di ingresso e di uscita. Riportiamo nel seguito i *diagrammi di Bode* (modulo e fase) delle risposte in frequenza.

NB: i valori delle forzanti sono unitari.

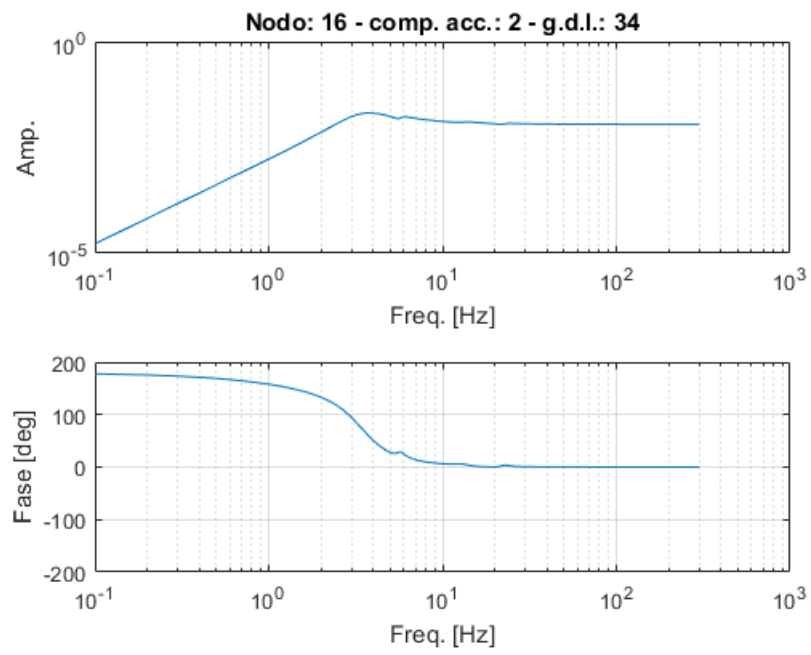


Figura 19: FRF_a

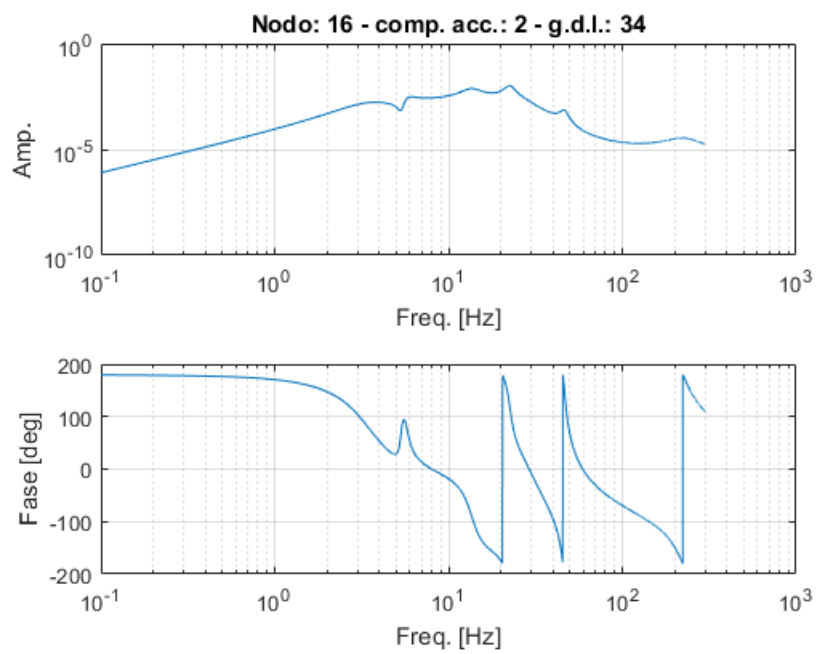


Figura 20: FRF_b

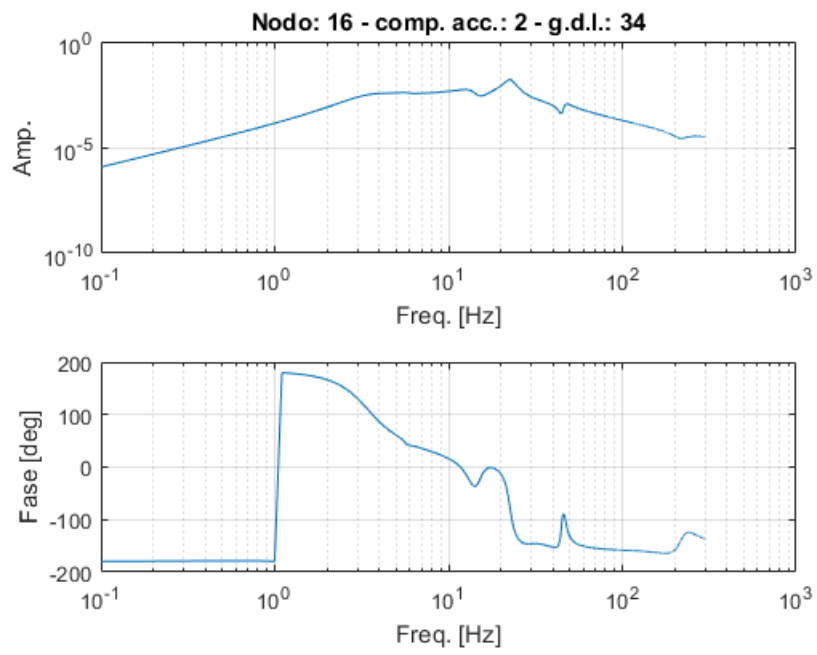


Figura 21: FRF_c

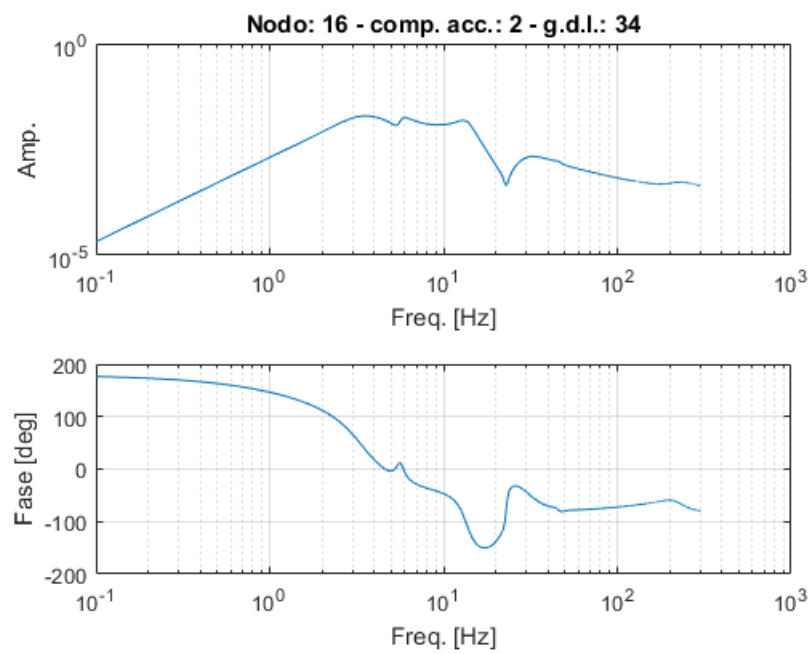


Figura 22: FRF_d

2.4 PUNTO 4

CALCOLARE LA *RISPOSTA IN FREQUENZA* (FRF) NEL RANGE DI FREQUENZE $0 \div 300Hz$ CON STEP $0.1Hz$:

- **INPUT:** i seguenti spostamenti verticali applicati alla ruota anteriore e posteriore:

a) $y_f = y_r = \cos(\Omega t)$; $\Omega = 2\pi f$

b) $y_f = \cos(\Omega t)$; $y_r = \cos(\Omega t + \varphi)$; $\Omega = 2\pi f$

OUTPUT: accelerazione verticale della sella

In questo caso, rispetto al punto precedente, non è possibile utilizzare il software in quanto gli ingressi richiesti corrispondono a spostamenti verticali applicati alla ruota anteriore e posteriore, che sono nodi vincolati. E' necessario quindi scrivere uno *script* (*Motorbike.m*) *Matlab*[®] nel quale gli spostamenti applicati ai vincoli sono stati definiti in questo modo

$$x_c = [0; y_dietro; 0; 0; y_davanti; 0; 0; 0]$$

guardando la *IDB matrix* per capire in quale posizione del vettore inserire gli spostamenti.

Le due risposte in frequenza sono le seguenti:

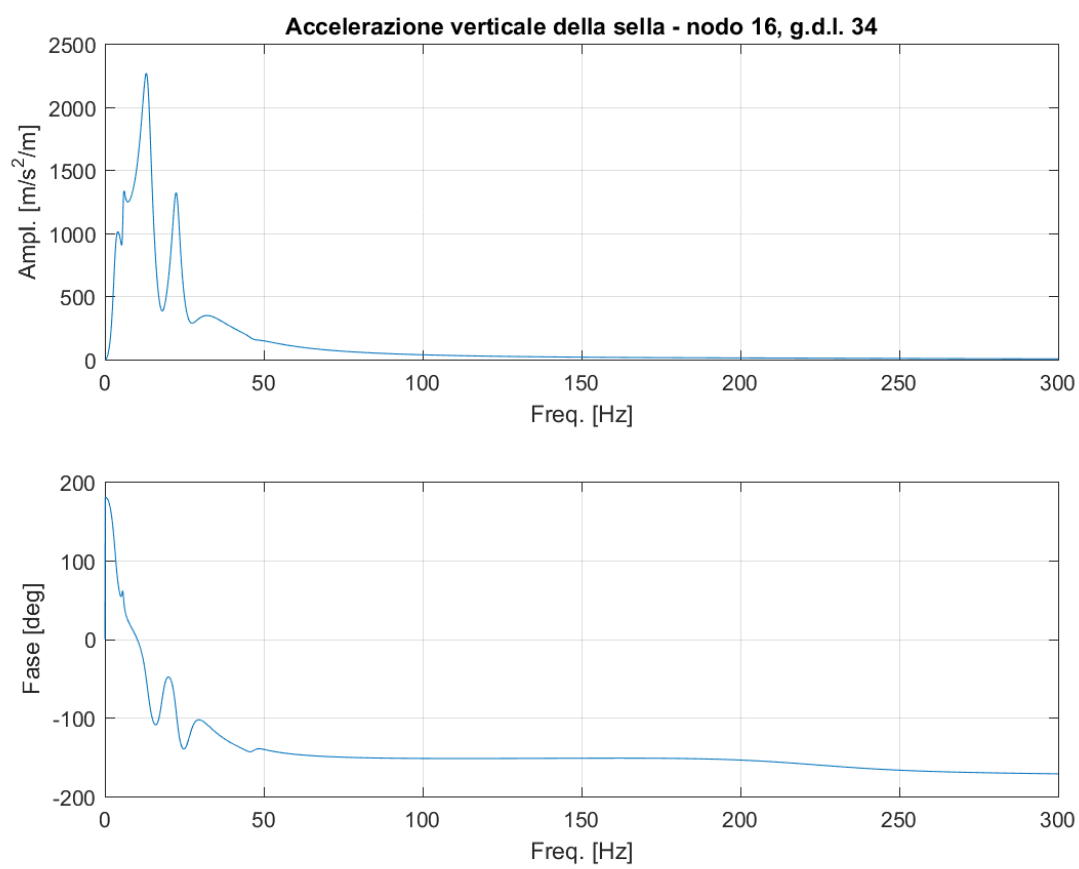


Figura 23: FRF_a

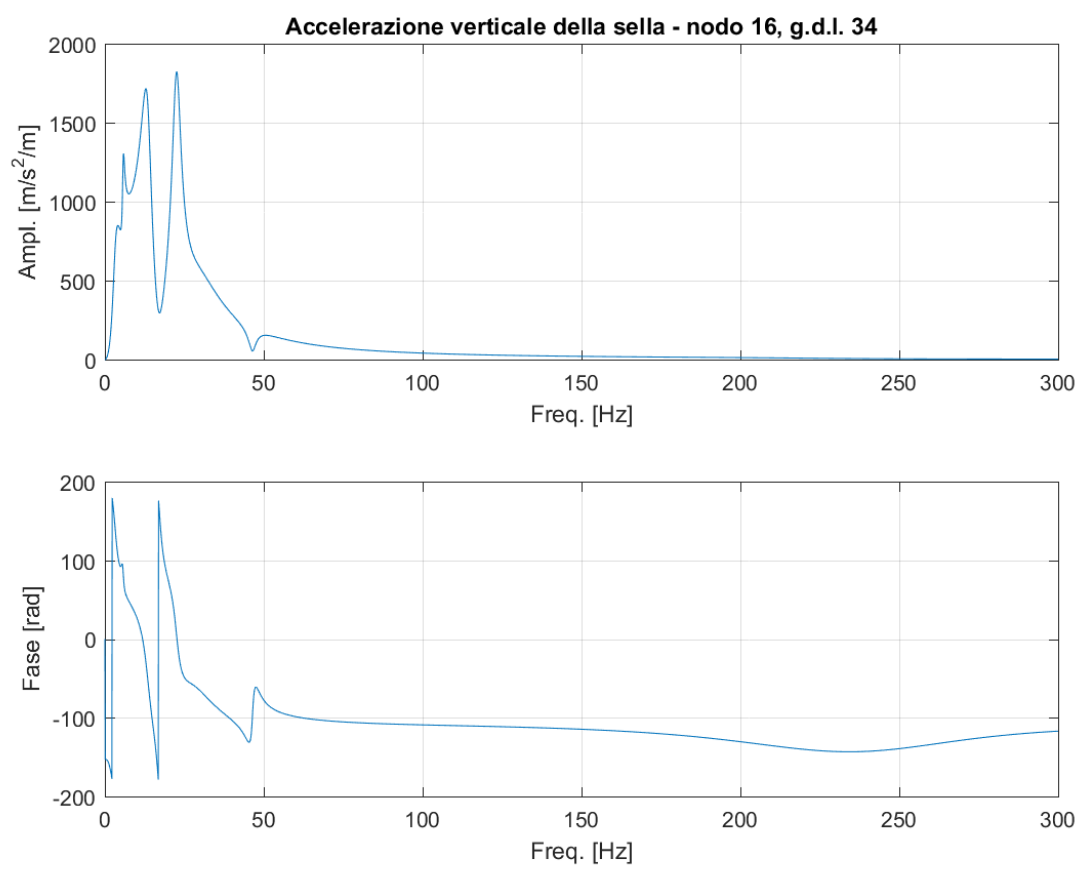


Figura 24: FRF_b

2.5 PUNTO 5

CALCOLARE LA RISPOSTA DEL TELAIO APPLICANDO UNO SPOSTAMENTO VERTICALE DOVUTO ALLA STRADA SCONNESSA, ASSUMENDO LA SEGUENTE FUNZIONE $y(\xi)$ PER DESCRIVERE IL PROFILO DELLA STRADA COME FUNZIONE DELLA POSIZIONE LONGITUDINALE ξ DEL PUNTO DI CONTATTO:

$$y = \sum_{i=1}^3 A_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_i} \xi\right)$$

RIPORTARE I SEGUENTI RISULTATI GRAFICI:

- a) *spettro* degli spostamenti applicati alle ruote
- b) *risposta in frequenza* dello spostamento verticale della sella dovuto agli spostamenti verticali applicati ad ogni punto di contatto delle ruote
- c) *spettro* dello spostamento verticale della sella
- d) *storia temporale* dello spostamento verticale della sella

CALCOLARE INFINE I VALORI DI V CHE PORTANO IL TELAIO IN RISONANZA.

Per prima cosa è necessario ricostruire il *profilo stradale* in funzione del *tempo* anziché dello spazio, come somma di 3 armoniche y_1 , y_2 e y_3 . Conoscendo la velocità costante V della moto basta semplicemente utilizzare la trasformazione $\xi = V \cdot t$:

$$y_1 = A_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot V \cdot t\right)$$

$$y_2 = A_2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot V \cdot t\right)$$

$$y_3 = A_3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_3} \cdot V \cdot t\right)$$

$$y_{davanti} = y_1 + y_2 + y_3$$

Quanto fatto finora riguarda lo spostamento della ruota anteriore; bisogna fare lo stesso anche per la ruota posteriore tenendo presente lo sfasamento di un certo intervallo temporale, calcolabile conoscendo la distanza tra la ruota

anteriore e quella posteriore che è pari a $0.96m$:

$$t_0 = \frac{0.96}{V}$$

$$y_1 = A_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot V \cdot (t - t_0)\right)$$

$$y_2 = A_2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot V \cdot (t - t_0)\right)$$

$$y_3 = A_3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_3} \cdot V \cdot (t - t_0)\right)$$

$$y_{dietro} = y_1 + y_2 + y_3$$

Sempre con l'ausilio di *Matlab*® si ottengono così i seguenti spostamenti applicati alle ruote e i corrispondenti spettri:

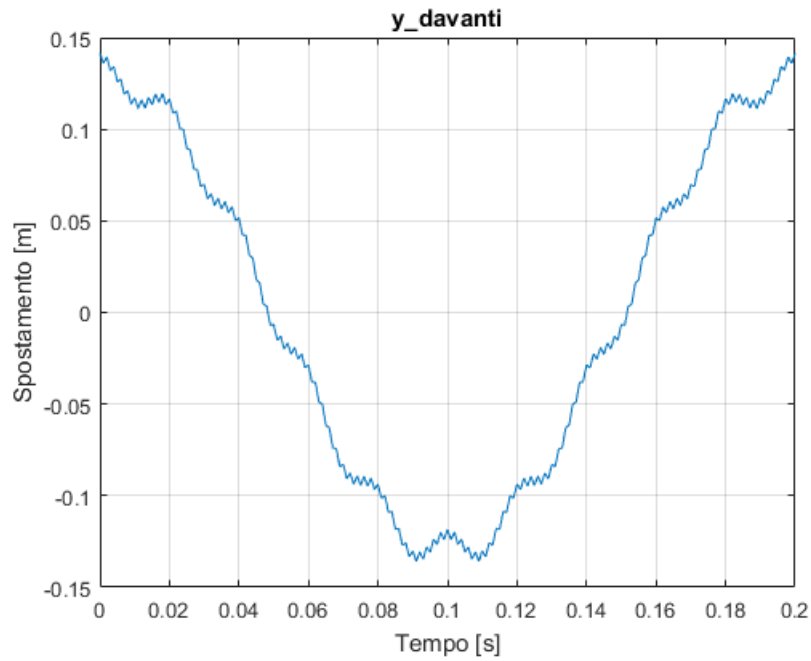


Figura 25: spostamento ruota anteriore

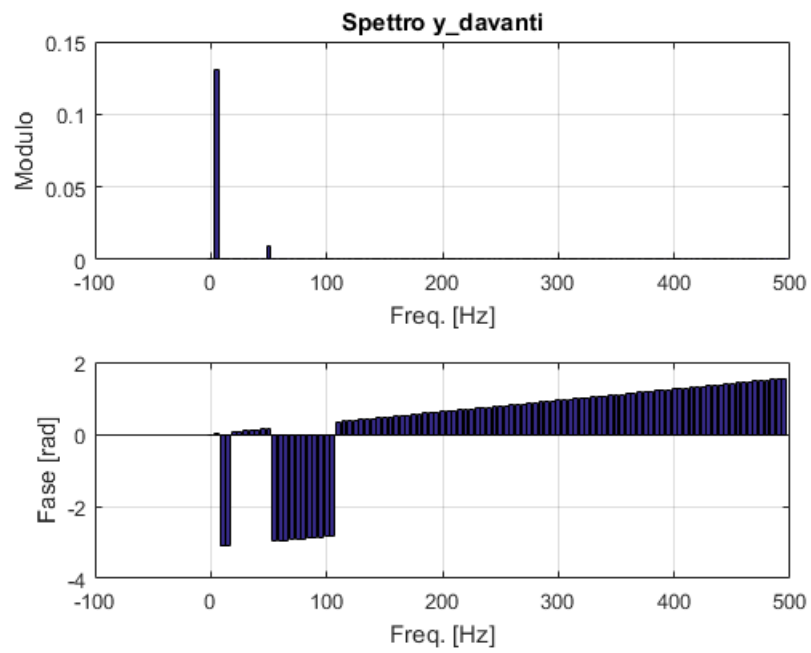


Figura 26: spettro spostamento ruota anteriore

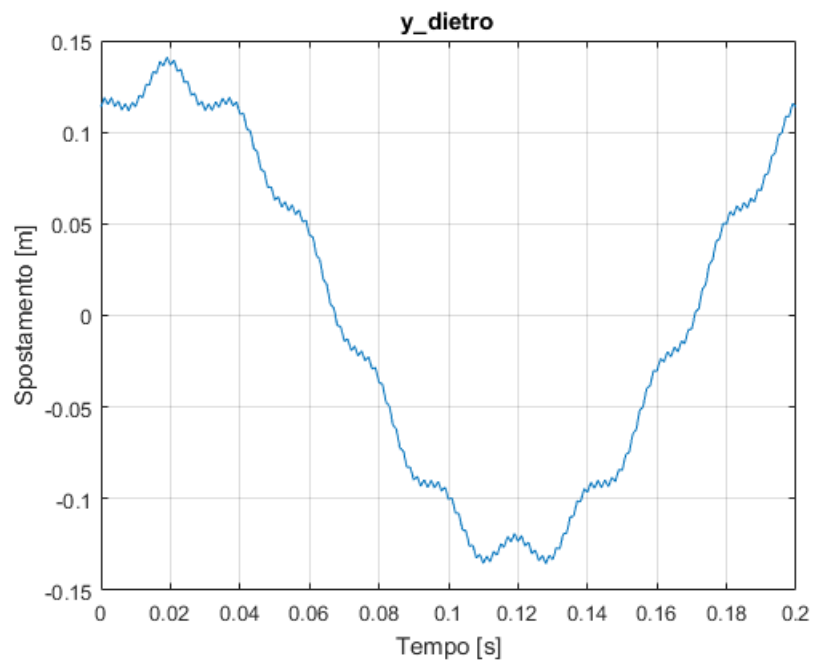


Figura 27: spostamento ruota posteriore

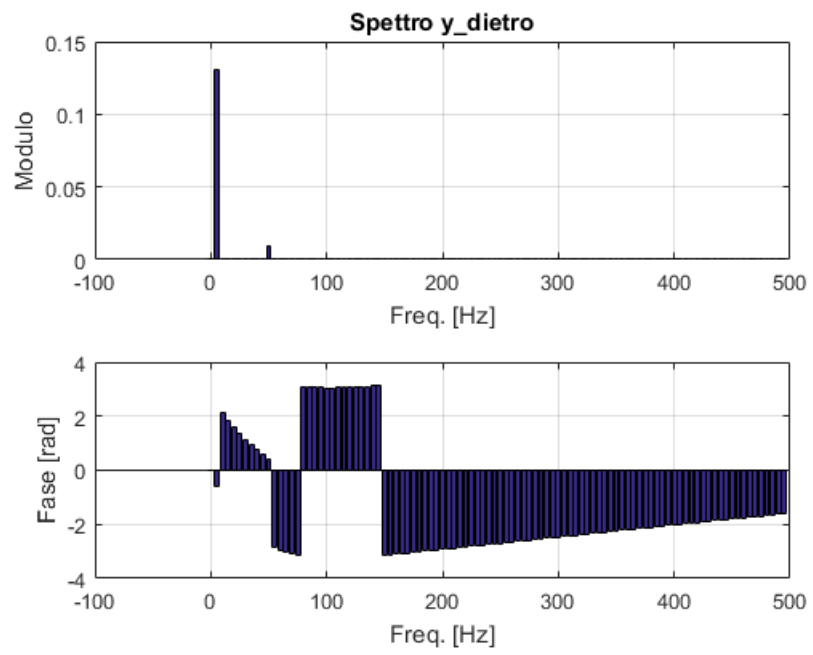


Figura 28: spettro spostamento ruota posteriore

Ricaviamo ora la *risposta in frequenza* dello spostamento verticale della sella dovuto agli spostamenti applicati alle ruote, lo *spettro* e la sua *storia temporale*:

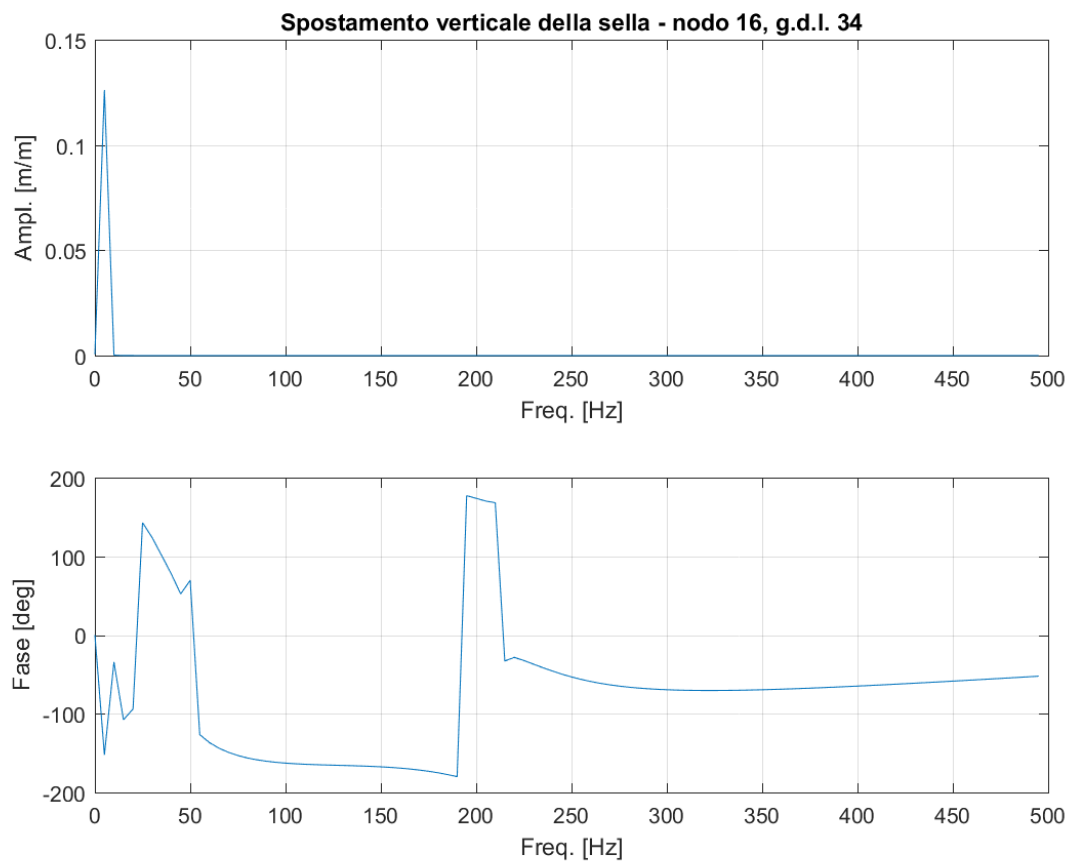


Figura 29: FRF

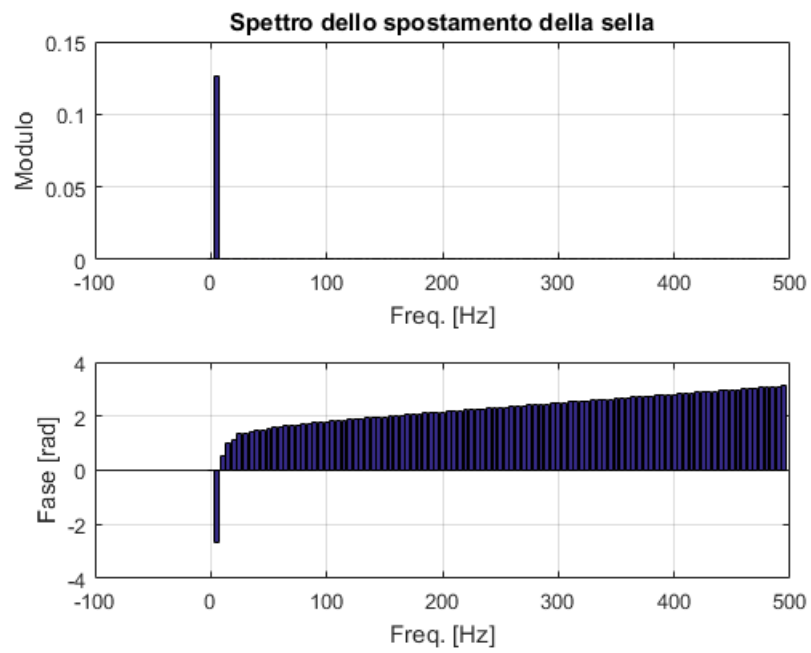


Figura 30: spettro

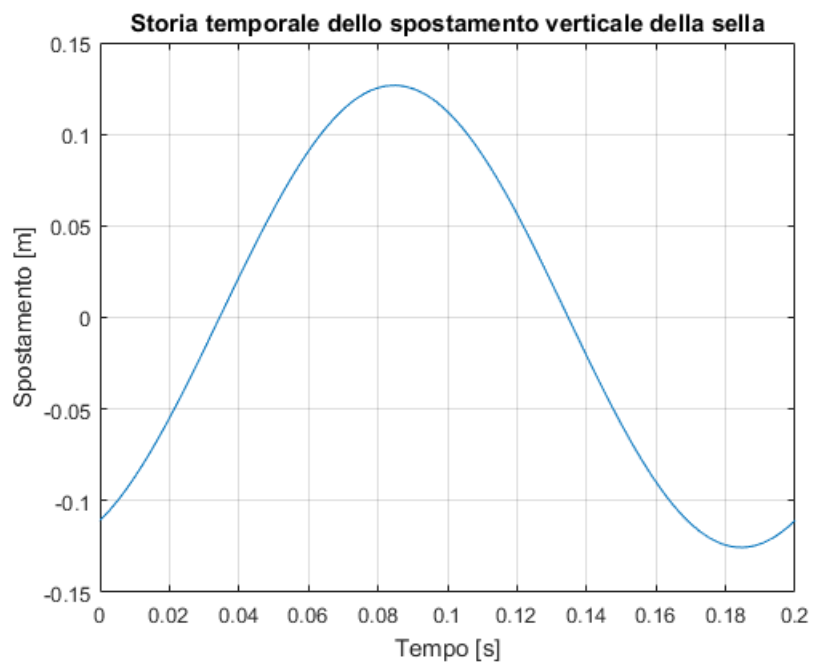


Figura 31: storia temporale

Come ultima domanda del punto 5 è richiesto di calcolare i valori della velocità V della moto che portano a una condizione di risonanza per la struttura. Ricordiamo che abbiamo una condizione di risonanza ogni qual volta che la frequenza della forzante è uguale ad una delle frequenze naturali del sistema.

La *frequenza di eccitazione* è data da:

$$freq_{eccitazione} = \frac{V}{\lambda}$$

Imponendo che:

$$freq_{eccitazione} = freq_{naturale}$$

Le velocità che portano ad una condizione di risonanza sono date da:

$$V = freq_{naturale} \cdot \lambda$$

Come esempio, si consideri la risonanza della sella ($f_n = 35.4415 Hz$)

$$\lambda_1 \Rightarrow V_1 = 354.4 \frac{m}{s}$$

$$\lambda_2 \Rightarrow V_2 = 35.4 \frac{m}{s}$$

$$\lambda_3 \Rightarrow V_3 = 3.5 \frac{m}{s}$$

2.6 PUNTO 6

MODIFICARE LE *SOSPENSIONI DEL MOTORE* CAMBIANDO LA *RIGIDEZZA* k_e E IL *COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO* c_e IN MODO DA RIDURRE LE VIBRAZIONI DEL TELAIO, ASSUMENDO:

- velocità angolare del motore pari a $1000rpm$
- massima deflessione statica delle sospensioni del motore pari a $1mm$

Un qualsiasi sistema reale è nella maggior parte dei casi un sistema vincolato ad un telaio, cioè è vincolato all'ambiente circostante esterno. Se questo sistema è soggetto a vibrazioni, quest'ultime saranno trasmesse attraverso i vincoli all'ambiente circostante, causando disturbi. Premesso che è ovviamente impossibile pensare di poter eliminare del tutto tale circostanza, il problema dell'*isolamento delle vibrazioni* indotte da un sistema vibrante deve essere visto come il tentativo di ridurre il più possibile l'intensità delle forze trasmesse dal sistema al basamento. Con questo fine è necessario intervenire sui valori dei parametri che caratterizzano il *sistema ammortizzante* o *antivibrante*, costituito da molle e smorzatori di tipo viscoso.

In ambito tecnico, la *bontà* del risultato dell'isolamento può essere valutata attraverso il valore assunto da un parametro specifico detto *coefficiente di trasmissibilità* T , definito come il rapporto fra il valore massimo della forza trasmessa al basamento ed il valore massimo della forza eccitatrice esterna.

$$T = \frac{(F_T)_{max}}{F_0}$$

Tale grandezza rapporta quindi l'ampiezza della forza trasmessa dall'antivibrante al basamento (F_T) con l'ampiezza della forza che sarebbe trasmessa alla fondazione senza l'interposizione dell'antivibrante (F_0).

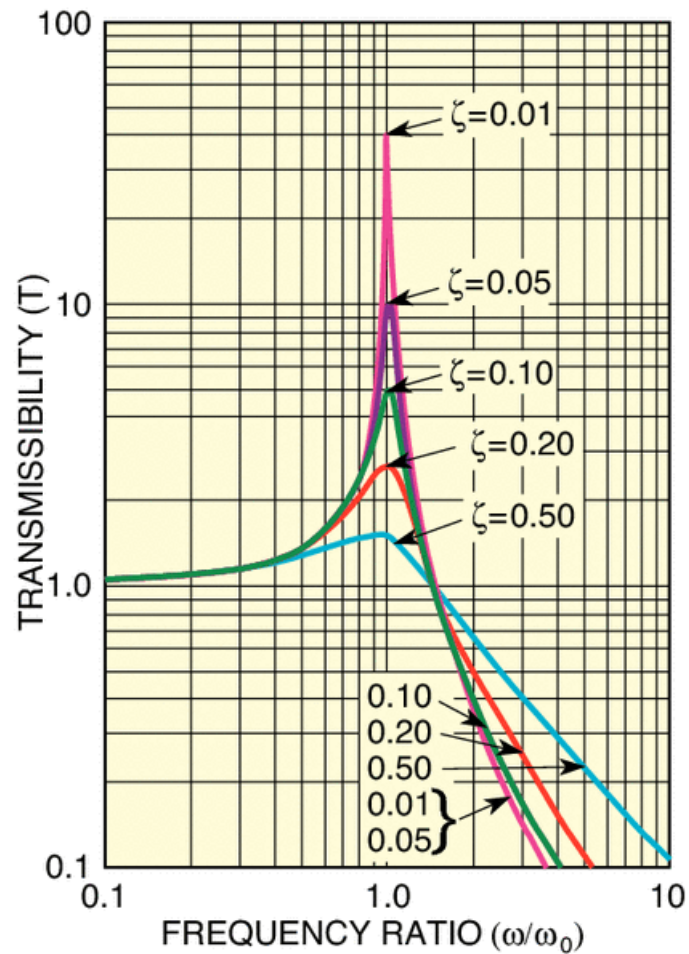


Figura 32: diagramma della trasmissibilità T

In termini di frequenze, considerando i valori che assume la trasmissibilità, si può notare che per frequenze molto basse, alla struttura di sostegno viene trasmessa una forza di intensità pari a quella che agisce sulla macchina. All'aumentare della frequenza della forza eccitante aumenta la forza trasmessa al basamento, che diventa infinitamente grande in condizione di risonanza. Per frequenze superiori alla frequenza naturale la forza trasmessa decresce rapidamente raggiungendo il valore della forza impressa in corrispondenza della frequenza $\frac{f}{f_n} = \sqrt{2}$, per poi decrescere ancora all'aumentare della frequenza forzante o eccitante. Quest'ultima zona è quella considerata *utile*: in altre parole, tenendo presente quanto visto circa il fattore T , è possibile affermare che il principio base dell'isolamento consiste nello scegliere un elemento visco-elastico tale per cui la frequenza propria del sistema macchina-elemento antivibrante (f_n) risulti inferiore alla più bassa frequenza componente lo spettro della macchina (f). Quindi, in definitiva, l'obiettivo è porre la frequenza

di risonanza del sistema in esame al di sotto della più bassa frequenza di eccitazione del sistema.

$$\omega_{motore} = \frac{1000 \cdot 2 \cdot \pi}{60}$$

$$f_{motore} = \frac{\omega_{motore}}{2 \cdot \pi}$$

Così facendo la frequenza di eccitazione sul motore risulta $16.67Hz$.

La consegna fornisce un limite sulla *deflessione statica massima* delle sospensioni del motore pari a $1mm$. Ciò significa che il peso del motore, diviso su entrambe le sospensioni, deve portare ad una deflessione statica massimo di $1mm$, per cui:

$$\frac{m_{motore}}{2} \cdot g = k_e \cdot x$$

Sapendo che la massa del motore è pari a $21kg$, si ottiene che:

$$k_e(minimo) = \frac{m_{motore} \cdot g}{2 \cdot x_{massimo}} = 102900 \frac{N}{m}$$

Per la tecnica dell'isolamento delle vibrazioni è necessario minimizzare il coefficiente di trasmissibilità, rendendo $\frac{f}{f_n}$ maggiore di $\sqrt{2}$ (più grande è, meglio è). Dobbiamo quindi rendere la frequenza naturale la più piccola possibile rispetto alla frequenza di eccitazione ($16.67Hz$), tenendo in considerazione la richiesta della deflessione massima che impone $k_e(minimo) = 102900 \frac{N}{m}$, per cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$f_n = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot k_e}{m_{motore}}}}{2 \cdot \pi}$$

Tuttavia, la frequenza naturale minima ottenibile risulta $15.76Hz$ che porta ad un rapporto $\frac{f}{f_n} = 1.05$ che è ben al di sotto della soglia $\sqrt{2}$ presa come obiettivo. Anzi, ponendo la frequenza naturale pari a quel valore si ha una forza trasmessa al telaio maggiore del caso senza sospensioni. Per risolvere questo problema si può pensare di mantenere la rigidità della molla uguale, ma prendere il coefficiente di smorzamento pari al *valore critico*, in modo da rendere il più basso possibile il picco del coefficiente di trasmissibilità. Tale picco, infatti, verrà attraversato sicuramente essendo il motore a $1000 \frac{giri}{min}$ e quindi la velocità angolare del motore non potrà che aumentare.

$$c = 2 \cdot m_{motore} \cdot \omega_n = 5.8 \cdot 10^3 \frac{Ns}{m}$$