

Teoria dei grafi

Andrea Cosentino

20 maggio 2024

Indice

1	Prima lezione	3
2	Seconda lezione	10
2.1	Connettività di un grafo	13
3	Terza lezione	15
3.1	Cammino euleriano	15
3.2	Ciclo hamiltoniano	17
3.3	Grafo bipartito	19
4	Quarta lezione	20
4.1	Parametri dei grafi	20
4.1.1	Numero di indipendenza	21
4.1.2	Numero di clique	22
4.1.3	Numero cromatico	22
5	Quinta lezione	28
5.1	Numero di dominazione	32
6	Sesta lezione	33
6.1	Proprietà numero di dominazione	33
6.2	Grafi casuali	37
7	Settima lezione	39
7.1	Strumenti di probabilità	39
7.2	Proprietà grafi	40
8	Ottava lezione	43
8.1	Proprietà asintotiche	46

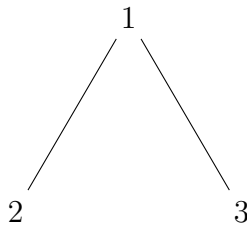
9	Nona lezione	51
9.1	Introduzione	51
9.2	Ripasso di algebra lineare	52
10	Decima lezione	56
10.1	Clustering Spettrale	59
10.2	Matrice laplaciana	62
11	Undicesima lezione	64
11.1	Legame matrice laplaciana e autovalori	64
11.2	Disuguaglianza di Cheeger	67

Capitolo 1

Prima lezione

Un grafo $G = (V, E)$ è una struttura algebrica dove V è l'insieme finito di vertici e E è l'insieme finito di archi. Inoltre, vale che $E = [V]^2$. Dato un insieme S e un qualunque intero $k \in \{2, \dots, |S|\}$, diciamo che $[S]^k$ è la collezione di tutti i sottoinsieme di S formati da k elementi. Per esempio, dato l'insieme $S = \{1, 2, 3\}$ l'insieme $[S]^2$ contiene $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Esempio 1. Un esempio di grafo $G = (V, E)$ è $V = \{1, 2, 3\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.



Notare che ci concentriamo su grafi con archi non orientati.

La nomenclatura che utilizzeremo per indicare dei vertici generici è i, j, u, v , mentre per indicare degli archi generici è (i, j) . Dire (i, j) implicherebbe un ordine, per evitare di scrivere $\{i, j\}$ useremo (i, j) senza implicare che l'arco sia orientato.

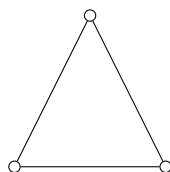
Il numero di nodi del grafo è detto **ordine**, e corrisponde a $|V|$. Un grafo di ordine 0 è detto grafo **vuoto**, mentre un grafo di ordine ≤ 1 è detto grafo **banale**. Esistono solamente due grafi di ordine 2:

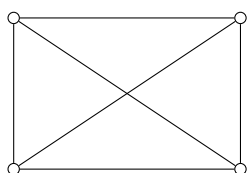
A) $\circ \quad \quad \quad \circ$

B) $\circ \text{-----} \circ$

Dato un arco $e = (i, j) \in E$ diciamo che i, j sono vertici incidenti all'arco e . Due vertici i, j con $i \neq j$ tali che $(i, j) \in E$ sono detti vertici **adiacenti** in $G(V, E)$. Se $E \equiv [V]^2$ diciamo che il grafo è **completo** oppure che è una **clique** (o cricca in italiano). Un grafo completo su n vertici è chiamato K_n . Alcuni esempi di grafi completi sono

$\circ \text{-----} \circ \quad K_2$

 K_3

 K_4

Un grafo completo su n vertici ha un numero di archi pari a

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

I grafi che consideriamo sono non orientati e **semplici**. Un grafo è semplice se non ha loops (o cappi)

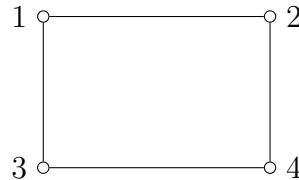


e non ha archi multipli, ovvero tra due nodi o c'è un arco non ce n'è neanche io. Quindi la situazione in figura non è ammessa.

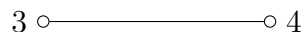


Il sotto-grafo di un grafo $G = (V, E)$ è $G' = (V', E')$ tale che $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E[V']^2$. Nella seconda condizione imponiamo che se vogliamo avere l'arco (i, j) nel grafo, allora $i, j \in V'$. Senza questa condizione non otterremmo un grafo.

Esempio 2. Dato il grafo



Se la seconda condizione fosse solamente $E' \subseteq E$ potremmo scegliere $V' = \{1, 2\}$ ed $E' = \{(1, 2), (2, 3)\}$, ma siccome 3 non è un nodo, il risultato non è un grafo. Un esempio di sotto-grafo è $V' = \{1, 2, 3, 4\}$, $E' = \{(3, 4)\}$



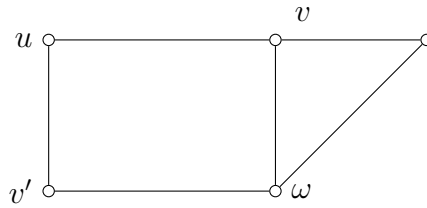
Dato $V' \subseteq V$ il sotto-grafo G' **indotto** da V' è $G'(V', E')$ con $E' = E[V']^2$. Ovvero, se seleziono i vertici seleziono anche gli archi su cui sono incidenti. Dato l'insieme di vertici V' c'è solo un sotto-grafo indotto.

Dato il grafo $G(V, E)$ il vicinato di $N(v)$ di $v \in V$ in G è

$$N(v) = \{j \in V : (v, j) \in E\}$$

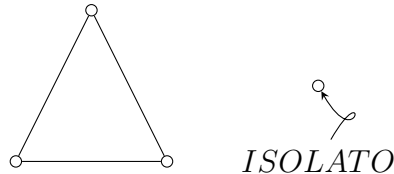
Cioè tutti i nodi connessi a v con un arco.

Esempio 3. Dato il grafo



Il vicinato di v è $N(v) = V \setminus \{v\}$ mentre il vicinato di v' è $N(v') = \{u, v, \omega\}$.

Il grado di v in G è $d(v) = |N(v)|$. Se v ha $d(v) = 0$ in G allora si dice **isolato**.



Definiamo il grado minimo come

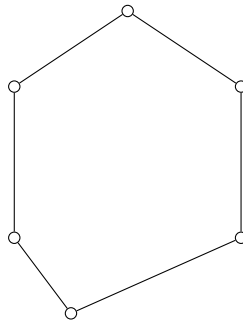
$$\delta(G) = \min d(v) : v \in V$$

e il grado massimo

$$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$$

Se $\Delta(G) = \delta(G) = k$ allora G è k -regolare.

Esempio 4. Il seguente grafo è 2-regolare



Il grado medio è

$$D(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$$

Vale che $\delta(G) \leq D(G) \leq \Delta(G)$. La **densità** è invece definita come

$$\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}$$

La densità ci dice quanti archi ha, in media, ciascun vertice. Assomiglia al grado medio ma in quest'ultimo contiamo due volte ogni arco. Infatti vale che

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) \\ &= \frac{1}{2} D(G) |V| \end{aligned}$$

e quindi

$$\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{1}{2} D(G)$$

Fatto 1. In ogni grafo il numero di vertici di grado dispari è pari.

Dimostrazione 1. Cominciamo con l'osservare che $|E|$ è un numero intero, e siccome vale che $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$ allora anche $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$ è intero. Il valore $\sum_{v \in V} d(v)$ deve essere per forza pari, dato che la sua metà è intera. Dividiamo la sommatoria in due sommatorie:

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in V: d(v) \text{ è pari}} d(v) \\ &+ \sum_{v \in V: d(v) \text{ è dispari}} d(v) \end{aligned}$$

La sommatoria pari ha come risultato sicuramente un numero pari. Questo vuol dire che, se come risultato finale vogliamo un numero pari, anche la sommatoria dispari deve risultare pari. Ciò è possibile se e solo se il numero di elementi è pari. Infatti, sommando un numero pari di numero dispari otteniamo un numero pari. Quindi il numero di vertici di grado dispari è pari.

Ci poniamo adesso la domanda se la densità può scendere sotto il grado minimo. Vediamolo prima con un esempio

Esempio 5. Il seguente grafo



Ha $\delta(G) = 1$ e $\varepsilon(G) = \frac{1}{2}$, quindi $\delta(G) > \varepsilon(G)$

Fatto 2. $\forall G$ con almeno un arco, ha un sotto-grafo indotto H tale che

$$\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$$

Dimostrazione 2. Consideriamo una sequenza di grafi

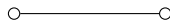
$$G = G_0, G_1, G_2, \dots$$

Dove $G_i = (V_i, E_i)$ e $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2$, con G_i grafo indotto da V_i . Se $V_0 (= V)$ ha v_0 tale che $d(v_0) \leq \varepsilon(G_0)$ creiamo $V_1 = V_0 \setminus \{v_0\}$. Notiamo che se non esiste v_0 che rispetta la condizione, allora

$$\forall v \in V d(v) > \varepsilon(G_0)$$

e quindi $d(G_0) > \varepsilon(G_0)$. In questo caso avremmo già dimostrato il teorema con $H = G$.

Consideriamo adesso G_1 indotto da V_1 (ricordiamo che $V_1 = V_0 \setminus v$). Iteriamo svolgendo la stessa operazione di prima fino a quando V_i è tale che $\forall v \in V_i d(v) > \varepsilon(G_i)$. Notiamo che ci fermeremo prima di svuotare il grafo, infatti arriveremo al caso base



dove sappiamo che vale $\delta(G) > \varepsilon(G)$. Se G_{i+1} viene creato, allora

$$\begin{aligned} \varepsilon(G_{i+1}) &= \frac{|E_{i+1}|}{|V_{i+1}|} \\ &= \frac{|E_i - d(v_i)|}{|V_i - 1|} \geq \frac{|E_i - \varepsilon(G_i)|}{|V_i - 1|} \end{aligned}$$

Dove la disuguaglianza vale per la condizione con cui costruiamo il sotto-grafo.

$$= \frac{|E_i| - \frac{|E_i|}{|V_i|}}{|V_i - 1|} = \frac{|E_i||V_i| - |E_i|}{|V_i|(|V_i - 1|)}$$

dove abbiamo portato a fattore comune il numeratore.

$$= \frac{|E_i|(|V_i| - 1)}{|V_i|(|V_i| - 1)} = \varepsilon(G_i)$$

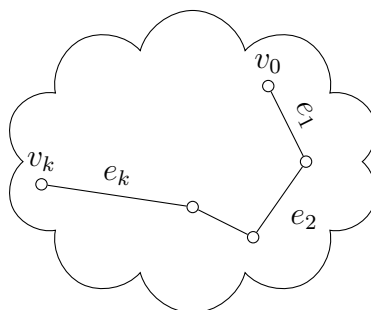
Quindi quando ci fermiamo avremo G_k tale che

$$\delta(G_k) > \varepsilon(G_k) \geq \varepsilon(G_0)$$

Capitolo 2

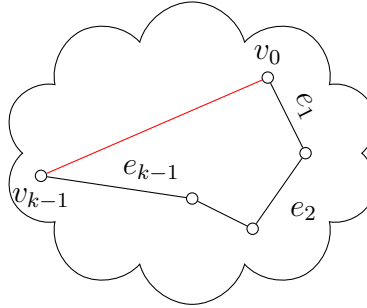
Seconda lezione

Un **cammino** di lunghezza $k \geq 0$ in $G = (V, E)$ è un sotto-grafo P_k con k archi e $k + 1$ vertici distinti tale che $e_i = (v_{i-1}, v_i)$. Indichiamo gli archi con $e_1 \dots e_k$ e i nodi con v_0, \dots, v_k .



Usiamo la nuvoletta quando non ci interessa la struttura del grafo. Evidenziamo solo una certa parte. Nel caso in cui P_0 non abbiamo archi nel cammino ma un singolo vertice.

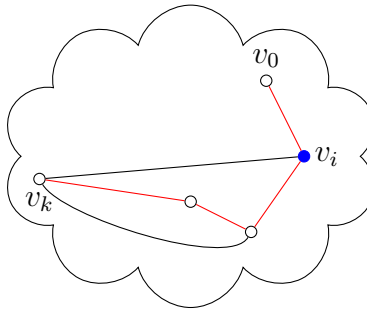
Un **ciclo** C_k di lunghezza $k \geq 3$ è formato da un cammino P_{k-1} che può essere esteso in G includendo l'arco (v_{k-1}, v_0) .



In un grafo G , il **calibro** $g(G)$ è la lunghezza del ciclo più breve. La **circonferenza** è la lunghezza del ciclo più lungo.

Fatto 3. $\forall G$ con $\delta(G) > 2$ contiene un cammino di lunghezza $\delta(G)$ e un ciclo di lunghezza almeno $\delta(G) + 1$.

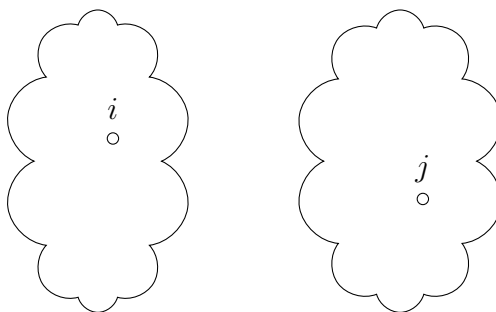
Dimostrazione 3. Prendiamo il cammino più lungo del grafo, P_k . Allora tutti i vicini di P_k fanno parte del cammino, altrimenti potrei aggiungerli e allungarlo, P_k non sarebbe il più lungo. Quindi il cammino P_k è almeno lungo $|N(v_k)|$, dove v_k è l'ultimo nodo del cammino. Siccome per ipotesi $|N(v_k)| \geq \delta(G)$ allora esiste un cammino di lunghezza $\delta(G)$. Consideriamo ora il primo vertice che è un vicino di v_k .



In rosso è evidenziato il cammino P_k e in blu il primo vertice che è vicino di v_k . Se consideriamo il cammino in rosso da v_i fino a v_k e aggiungiamo (v_k, v_i) troviamo un ciclo, ciò vale sempre per il fatto $\delta(G) \geq 2$. Il ciclo C è lungo almeno $N(v_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$.

Dato $G = (V, E) \forall i, j \in V \exists d(i, j)$ se i, j sono connessi in G da almeno 1 cammino allora $d(i, j)$ è la lunghezza del cammino più breve, altrimenti è ∞ .

Esempio 6. Dato il grafo



La distanza tra i, j è $d(i, j) = \infty$.

Il **diametro** è definito come

$$\text{diam}(G) = \max_{i, j \in V} d(i, j) = \max_{i \in V} \max_{j \in V} d(i, j)$$

e il raggio

$$\text{rad}(G) = \min_{i \in V} \max_{j \in V} d(i, j)$$

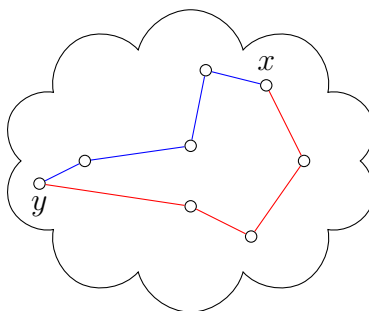
Il raggio lo possiamo vedere come il punto "più centrale". Sia x questo punto centrale, vale che $\forall v \in V d(x, v) \leq \text{rad}(G)$. Inoltre $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G)$ e questo è ovvio dato che il diametro è una massimizzazione del massimo, mentre il raggio è una minimizzazione del massimo. Possiamo anche dire che $\text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G)$, dato che

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V d(u, v) &\leq d(u, x) + d(x, v) \\ &\leq \text{rad}(G) + \text{rad}(G) = 2\text{rad}(G) \end{aligned}$$

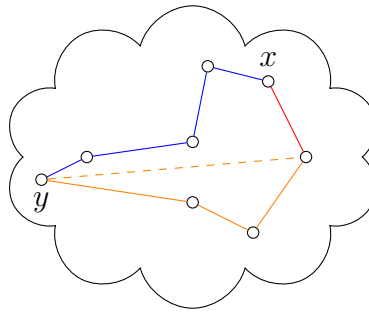
Fatto 4. $\forall G$ che ha almeno un ciclo soddisfa

$$g(G) \leq 2\text{diam}(G) + 1$$

Dimostrazione 4. Consideriamo il grafo



dove il ciclo C è il più corto, con lunghezza $g(G)$. I due vertici x, y sono vertici opposti, cioè tagliano il ciclo in due parti il più possibile uguali. Chiamiamo il percorso in rosso p_1 e il percorso in blu p_2 . Assumiamo per assurdo che $g(G) \geq 2\text{diam}(G) + 2$. Allora p_1, p_2 sono lunghi ciascuno almeno $\text{diam}(G) + 1$. Però $d(x, y) \leq \text{diam}(G)$ per la definizione stessa di diametro. Non tutti gli archi di P (cioè del percorso più breve) stanno su C , altrimenti il ciclo avrebbe lunghezza $2\text{diam}(G) + 1$. Quindi, possiamo costruire un ciclo più piccolo, prendendo gli archi che non stanno né su P_1 né su P_2 .

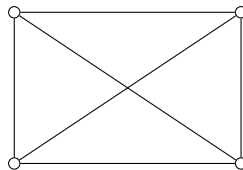


Il ciclo in arancione è più piccolo di C , quindi deve per forza valere che $g(G) \leq 2\text{diam}(G) + 1$.

2.1 Connettività di un grafo

Un grafo è **sconnesso** se $\exists i, j \in V \mid d(i, j) = \infty$. Una **componente** di un grafo è un qualunque insieme massimale di vertici connessi. Se un grafo è connesso il componente è il grafo stesso. G è k -connesso se $|V| > k$ e $\forall X \subset V$ con $|X| < k$ il sotto-grafo indotto $V \setminus X$ è connesso. Se un grafo è k -connesso non possiamo sconnettere il grafo rimuovendo al più $k - 1$ vertici. Tutti i grafi sono 0-connessi. Se G è connesso è anche 1-connesso, tranne il caso K_1 (cricca di un elemento) perché non rispetta la condizione $|V| > 1$. Il massimo intero k tale che G è k -connesso è detta **connettività** di G , che denotiamo con $K(G)$. Vale che $K(K_n) = n - 1$.

Esempio 7. Nel caso di K_4

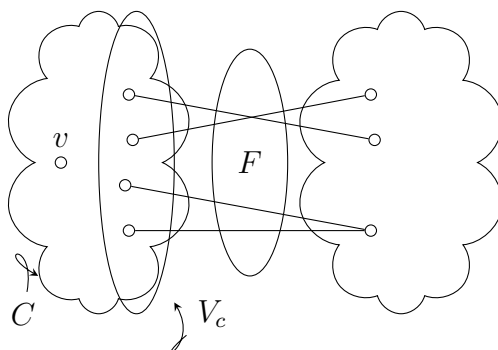


il numero di nodi che possiamo rimuovere è 3.

Teorema 1. Se $G \notin \{k_0, k_1\}$ (ovvero G non è un grafo banale), allora $K(G) \leq F \leq \delta(G)$ dove k è qualsiasi insieme minimo di archi la cui rimozione sconnette il grafo.

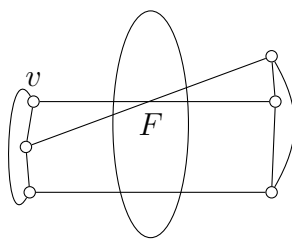
Dimostrazione 5. La disequazione $F \leq \delta(G)$ è banale. Infatti se sconnetto tutti gli archi attorno a un nodo ho sconnesso il grafo. Concentriamoci su $K(G) \leq F$ e distinguiamo due casi:

□ G ha un vertice v che non è incidente a F .



dove C è la componente del grafo che ottengo quando rimuovo F e V_c è l'insieme dei nodi connessi agli archi in F . Siccome rimuovendo V_c sconnetto il grafo allora $K(G) \leq |V_c| \leq |F|$

□ G è tale che tutti i vertici sono incidenti con qualche arco in F .



Il grafo G ha connettività $K(G) \leq d(v)$. Siccome $d(v) = |F| = \delta(G)$ vale che $K(G) \leq |F|$.

Capitolo 3

Terza lezione

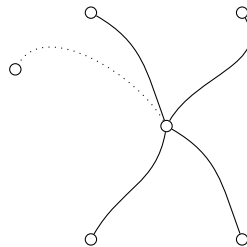
3.1 Cammino euleriano

Un cammino **chiuso** (in inglese closed walk) è un ciclo in cui i vertici non sono distinti. Un cammino chiuso si dice **euleriano** se attraversa tutti gli archi del grafo esattamente una volta. Un grafo è euleriano se ammette un cammino euleriano.

Teorema 2. Teorema di Eulero (1746)

Un grafo connesso è euleriano se e solo se ogni vertice ha grado pari.

Dimostrazione 6. Cominciamo con dimostrare il lato \Rightarrow del teorema. Quindi, dato un grafo connesso euleriano questo ogni vertice ha grado pari. Prendiamo un vertice che si trova sul cammino euleriano.



Se il cammino passa per il vertice, allora deve sia entrare che uscire. Non può esserci un arco che collega un vicino che non sia nel cammino. Quindi o un vertice è isolato oppure il cammino esce ed entra. Allora devono avere grado pari.

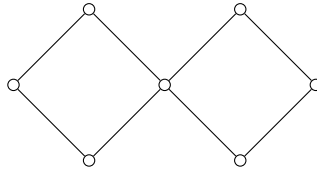
L'altro verso necessita un po' più di lavoro per essere dimostrato. Quello che vogliamo dimostrare è che se ogni vertice ha grado pari allora il grafo è euleriano. Facciamo una dimostrazione per induzione su $|E|$.

Caso base $|E| = 0$, banale. Implica che $|V| = 1$ perché parliamo di grafi connessi.

Ipotesi induttiva $|E| \geq 1$. Enunciamo un fatto utile.

Fatto 5. Se G ha tutti i vertici con grado pari con $|E| \leq 1$, posso trovare in G un cammino chiuso che non contiene un arco **più** di una volta.

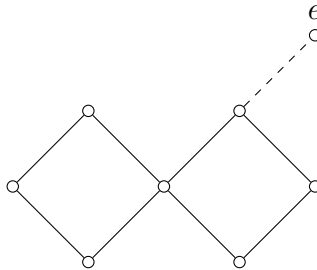
Sia ω un tale cammino di lunghezza massima. Ne rappresentiamo uno da esempio in figura.



Definiamo come F l'insieme degli archi di ω . Se $F \equiv E$ allora abbiamo finito, dato che tutti gli archi di G fanno parte del cammino ω . Assumiamo per assurdo che non sia così. Allora deve valere

$$E' \equiv E \setminus F \neq \emptyset$$

Notiamo che $\forall v \in V$ un numero pari di $u \in N(v)$ appartiene a F . Allora il sotto-grafo $G' = (V, E')$ ha tutti i vertici di grado pari (ricordiamo che 0 è pari). E' evidente che ci debba essere almeno un nodo e attaccato al cammino, altrimenti il grafo non sarebbe connesso.



Sia C la componente di G' che contiene e . C ha un numero di archi $< |E|$, dato che almeno un arco l'abbiamo rimosso. Per ipotesi induttiva C contiene

un cammino euleriano. Ma allora possiamo costruire un cammino euleriano per G unendo ω e il cammino trovato in C . Quindi abbiamo costruito un cammino più lungo di ω , contraddicendo l'ipotesi che sia massimo. Allora $F \equiv E$ e così abbiamo dimostrato il teorema.

Se un grafo è euleriano possiamo trovare un cammino euleriano in tempo $O(|E|)$, i.e. in tempo lineare nella descrizione del grafo (algoritmo di Hierholzer).

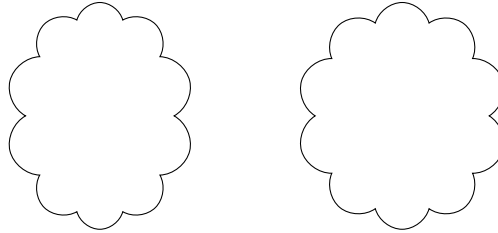
3.2 Ciclo hamiltoniano

Un **ciclo hamiltoniano** è un ciclo che contiene tutti i vertici. Un grafo si dice hamiltoniano se contiene un ciclo hamiltoniano. Non è nota alcuna condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo sia hamiltoniano. Sono note solamente condizioni sufficienti.

Teorema 3. Teorema di Dirac (1952).

Un grafo $G = (V, E)$ con $|V| \geq 3$ e $\delta(G) \geq \frac{|V|}{2}$ è hamiltoniano.

Dimostrazione 7. Cominciamo con dimostrare che G deve essere connesso. Se per assurdo non lo fosse allora ha almeno due componenti.



Ogni componente è tale che $|C| \leq \frac{|V|}{2}$. Questo è ovvio, perché se una componente ne avesse più di $\frac{|V|}{2}$, un'altra dovrebbe averne di meno, e quindi non varrebbe la condizione $\delta(G) \geq \frac{|V|}{2}$. Notiamo ora che

$$\forall v \in C \quad d(v) \leq |C| - 1$$

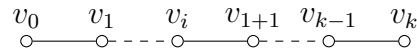
poiché al massimo un nodo può avere un arco con tutti gli altri nodi nella componente. Questa affermazione ci porta a poter dire che

$$d(v) \leq |C| - 1 < \frac{|V|}{2}$$

ovvero

$$d(v) < \frac{|V|}{2}$$

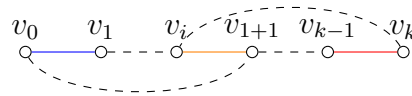
che viola le ipotesi. Sappiamo che G è connesso. Sia ora p un cammino di lunghezza massima in G con nodi v_0, v_1, \dots, v_k , con archi (v_i, v_{i+1}) , dove v_i viene detto **vertice sinistro** e v_{i+1} **vertice destro**.



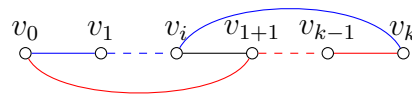
Tutti i vicini di v_0 e v_k sono nel cammino, altrimenti posso allungarlo aggiungendoli. Ricordiamo che vale anche $d(v_i) \geq \frac{n}{2}$ dove $n = |V|$. p non può avere più di n archi, quindi la sua lunghezza k è tale che

$$k \leq n - 1$$

dove non può essere $k \geq n$ senno' ripeterei dei nodi (e quindi non sarebbe un cammino). Ora associamo a ogni vicino di v_0 l'arco a sinistra (per esempio a v_i associamo (v_{i-1}, v_i)) e a ogni vicino di v_k l'arco a destra. Per il principio della piccionaia c'è almeno un arco che è preso sia da un vicino di v_0 che da un vicino di v_k .



Possiamo costruire un ciclo che va da v_0 a v_i , poi da v_i raggiunge v_k , da v_k a v_{i+1} e poi v_0 .



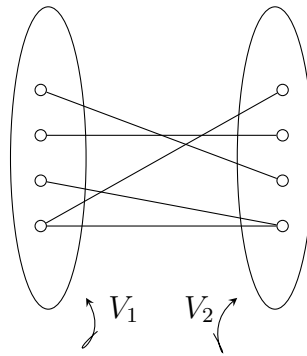
Se esistesse un vertice che non facesse parte di questo ciclo, sarebbe sicuramente un vicino, dato che il grafo è connesso. Ma allora potrei usarlo per allungare il percorso p violando l'ipotesi di massimalità. Quindi il ciclo passa per tutti i nodi, i.e. è hamiltoniano.

Il problema di determinare se un grafo G contenga un cammino hamiltoniano è NP-completo, questo spiega il motivo per cui non ci siano delle condizioni necessarie e sufficienti.

3.3 Grafo bipartito

Un grafo $G = (V, E)$ è detto **bipartito** se \exists una partizione V_1, V_2 di V tali che $\forall (i, j) \in E \ i \in V_1 \wedge j \in V_2$ o viceversa. Ricordiamo che V_1 e V_2 in quanto partizione di V sono tali che $V_1 \cap V_2 \equiv V_1 \cup V_2 = \emptyset$.

Esempio 8. I grafi bipartiti sono usati per esempio su Tinder, Amazon e Netflix.



Possono contenere cicli, che sono sempre pari! Vale anche il viceversa, ovvero un grafo che contiene solo cicli di lunghezza pari è bipartito.

Capitolo 4

Quarta lezione

4.1 Parametri dei grafi

Possiamo definire informalmente un **parametro** come una proprietà. Ne abbiamo già viste alcune:

- ☐ Taglia
- ☐ Numero di lati
- ☐ Diametro
- ☐ Calibro

Formalmente un parametro è una funzione

$$\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}$$

dove \mathcal{G} è la classe dei grafi non orientati e semplici. Altre possibili proprietà possono essere:

- ☐ G è euclideo?
- ☐ $K_3 \subseteq G$?

I parametri sono detti **invarianti**, ovvero mantengono lo stesso valore tra **isomorfismi** di grafi.

Definizione 1. Dati due grafi $G, H \in \mathcal{G}$ sono isomorfismi se $\exists f : V(G) \rightarrow V(H)$ con f biettiva tale che

$$\{(x, y)\} \in E(G) \iff \{f(x), f(y)\} \in E(H)$$

f è detto isomorfismo tra G e H .

Tutti i ϕ sono isomorfismi.

4.1.1 Numero di indipendenza

Definizione 2. $U \subseteq V$ è indipendente in $G = (V, E)$ se

$$\forall x, y \in U \{x, y\} \notin E$$

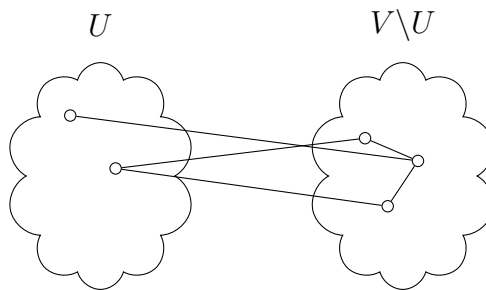
In altre parole $G[U] = (V, \emptyset)$ è un grafo privo di lati.

Definizione 3. $\alpha(G)$ è detto **numero di indipendenza** ed è tale che

$$\alpha(G) := \max\{k \in \mathbb{N} | \exists U \subseteq V$$

$$\text{indipendente in } G \wedge |U| = k\}$$

Il problema di trovare il numero di indipendenza maggiore è NP-completo. Notiamo che $\alpha(G)$ sommato alla dimensione più piccola di vertex cover in G è uguale a $|V|$.



Notiamo infatti che i nodi in U hanno almeno un arco con un nodo in $V \setminus U$, altrimenti il grafo sarebbe sconnesso. Notiamo anche che, per definizione, i nodi in U non sono collegati tra loro. Inoltre, ogni nodo in $V \setminus U$ è collegato ad almeno un nodo in U , altrimenti U non sarebbe massimale. E' quindi evidente che per coprire tutti gli archi ho bisogno di tutti i nodi di $V \setminus U$.

Assumiamo per assurdo che non sia così, e ci sia un nodo ω di $V \setminus U$ che non usiamo. Allora gli archi tra ω e U non sono coperti. Per metterci in un caso favorevole assumiamo anche che gli archi $(j, \omega) \in E$ tali che $j \in V \setminus U$ siano già coperti da j (se così non fosse avremmo bisogno di ω per coprirli e quindi avremmo dimostrato la sua necessità). I nodi in $i \in U$ tali che $(i, \omega) \in E$ devono essere parte della vertex cover, altrimenti non copriamo degli archi. Tuttavia, se invece di scegliere ω scegliamo i , la cardinalità resterebbe la stessa. Ma se i coprisse due archi, (i, ω) e (i, ω_1) tale che $\omega_1 \in V \setminus U$, allora potremmo scegliere i per coprirli entrambi, ottenendo una cardinalità minore. Ma se ω, ω_1 hanno altri archi con nodi in U , allora questi sarebbero scoperti, e andrebbero coperti aggiungendo dei nodi, vanificando il vantaggio ottenuto. Se però non ne hanno altri allora ω, ω_1 formano, insieme a $U \setminus i$ un insieme indipendente più grande, e ciò non è possibile.

4.1.2 Numero di clique

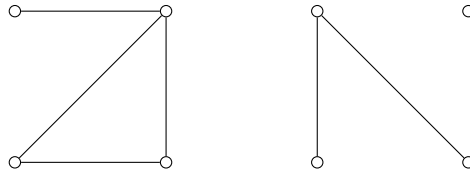
Definizione 4. Il **numero di clique** è definito come

$$\omega(G) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \exists U \subseteq V, G[U] \text{ completo con } |U| = k\}$$

Il problema di trovare il numero di cricca massimo è NP-completo. Una cricca in $G = (V, E)$ è un insieme indipendente in \bar{G} (G **complemento**), dove \bar{G} è definito come

$$\bar{G} = (V, [V]^2 \setminus E)$$

Esempio 9. In figura G e il suo complemento.



4.1.3 Numero cromatico

Definizione 5. Una **coloratura** dei vertici $G = (V, E)$ è una funzione

$$c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$$

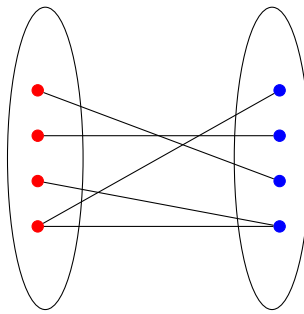
tale che $\{x, y\} \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$.

La funzione c associa a ogni nodo un colore (indicato con un numero). Una coloratura con k colori è detta **k-coloratura**. Un grafo si dice **k-colorabile** se \exists k-coloratura c . Il **numero cromatico** è definito come

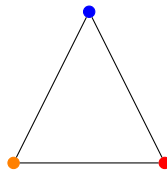
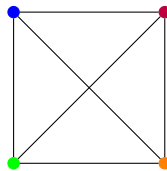
$$\chi(G) = \min \{k \in \mathbb{N} | G \text{ è k-colorabile}\}$$

Anche il problema di trovare $\chi(G)$ è NP-completo.

Esempio 10. Il caso in $k = 2$ è possibile se e solo se il grafo è bipartito.

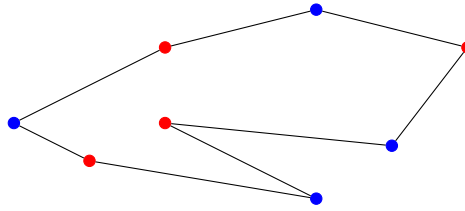


Esempio 11. Quanti colori ci servono per una cricca di n elementi?

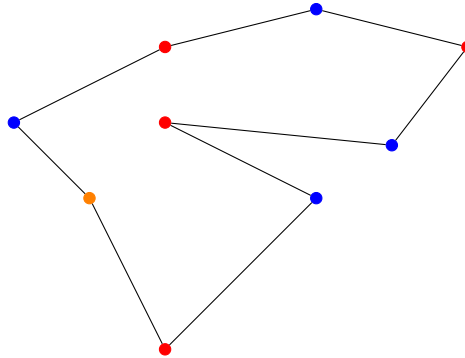

 K_3

 K_4

In generale per una cricca di n elementi ci servono n colori.

Esempio 12. Quanti colori ci servono per un ciclo? Se il ciclo è pari, C_{2n}



Ci servono 2 colori, se invece il ciclo è dispari, C_{2n+1}



Ci servono 3 colori.

Teorema 4. Teorema dei quattro colori.

$$\chi(G) \leq 4 \quad \forall G \text{ planare}$$

dove con **planare** intendiamo un grafo tale per cui esiste una rappresentazione grafica in cui gli archi non si intersecano.

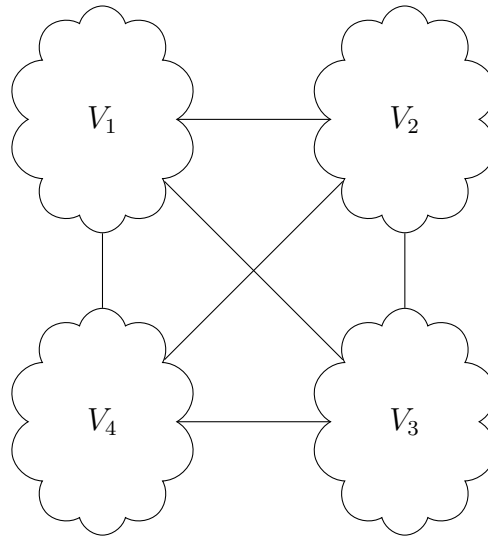
Fatto 6. Diamo un upper-bound per $\chi(G)$

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}$$

Dimostrazione 8. Poniamo $x = \chi(G)$. Se G è k -colorabile allora \exists partizione V_1, \dots, V_k tale che V_i è indipendente e $\forall i \ V_i = \{v \in V | c(v) = i\} = C^{-1}(i)$, dove $C^{-1}(i)$ è la preimmagine. c è la funzione che assegna a ogni partizione un colore,

$$c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$$

Non è possibile che esistano due partizioni non collegate tra loro, altrimenti avremmo un numero di insiemi indipendenti minore e k non sarebbe massimo.



Ovvero $\forall i \neq j \exists \geq 1$ lato tra V_i, V_j . E' ovvio che il numero di lati nel grafo è maggiore uguale del numero di coppie di partizioni presenti

$$|E| \geq \# \text{coppie}(V_i, V_j)$$

dove il numero di coppie è

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

Quindi....

$$|E| \geq \frac{k(k-1)}{2}$$

$$2|E| \geq k(k-1)$$

$$k^2 - k - 2|E| \geq 0$$

prendiamo l'equazione associata $k^2 - k - 2|E| = 0$ e la risolviamo

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8|E|}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 8|E|}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4(\frac{1}{4} + 2|E|)}}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \pm \frac{2\sqrt{(\frac{1}{4} + 2|E|)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + 2|E|)}$$

Quindi

$$\frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} + 2|E|)} \leq \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 2|E|)}$$

Abbiamo dimostrato il teorema.

Notiamo grafi con gradi alti richiedono più colori rispetto a grafi con gradi più bassi.

Fatto 7. Vale quanto segue

$$\forall G \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Se G è una cricca o un ciclo di lunghezza dispari allora è un'uguaglianza.

Dimostrazione 9. Supponiamo

v_1, \dots, v_n arbitrario. Allora procediamo in questo modo:

1. Assegniamo 1 a v_1
2. Se v_2 è vicino di v_1 assegniamo 2, altrimenti 1.

e così via, fino ad assegnare tutti gli n nodi. Siccome sappiamo che vale $\forall i \delta(v_i) \leq \Delta(G)$ per definizione, allora se arriviamo all' i -esimo nodo, avendo assegnato già $\Delta(G) + 1$ colori diversi, allora non ne abbiamo bisogno di uno nuovo per v_i dato che al massimo $\Delta(G)$ vicini e ci sono $\Delta(G) + 1$ colori disponibili.

Fatto 8. Vale che

$$\forall G \chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V|$$

Dimostrazione 10. Poniamo

$k = \chi(G)$. Sia V_1, \dots, V_k una partizione indotta da una k -colorazione di G . Allora

$$\sum_{i=1}^k |V_i| = |V|$$

Sapendo che $|V_i| \leq \alpha(G)$ possiamo scrivere

$$|V| \leq \sum_i \alpha(G) = k\alpha(G) = \chi(G)\alpha(G)$$

Abbiamo dimostrato il fatto.

Capitolo 5

Quinta lezione

Terminiamo la lezione precedente enunciando un fatto:

Fatto 9. Vale quanto segue

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

Proseguiamo presentando il teorema di **Turán**.

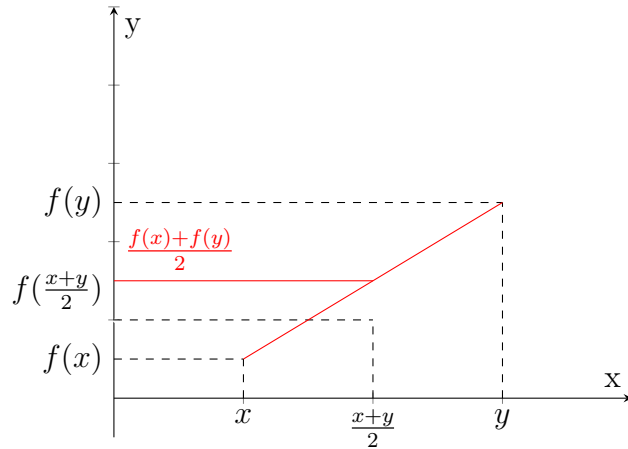
Teorema 5. Teorema di Turán. $\forall G = (V, E)$ vale che

$$\alpha(G)(d(G) + 1) \geq |V|$$

Dividendo per $d(G) + 1$ ambo i membri otteniamo un minorante per $\alpha(G)$. Prima di dimostrare il teorema introduciamo la **disuguaglianza di Jensen**. Data una variabile aleatoria $X \in \mathbb{R}$ tale che $X \sim P$ (dove P possiamo pensarla come una distribuzione empirica. Diamo probabilità uniforme agli elementi. Il valore atteso diventa la media). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora vale che

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(x)]$$

Intuitivamente possiamo pensare



Notiamo che, visivamente, la disuguaglianza di Jensen ha senso, dato che

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Dimostrazione 11. Possiamo ora dimostrare il teorema di Turán. Facciamo una dimostrazione costruttiva, ovvero dimostriamo l'esistenza di un oggetto matematico creando un metodo per costruire tale oggetto. Nel nostro caso costruiremo una serie di grafi, $G = G_1 = G_2 = \dots = G_i$ dove ogni grafo è tale che $G_i = (V_i, E_i)$.

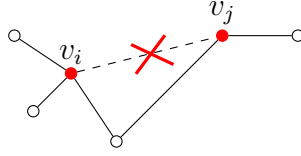
Algorithm 1

```

1:  $i \leftarrow 1$ 
2: while  $G_i \neq 0$  do
3:   Sia  $v_i \in \operatorname{argmin}_{v \in V_i} d_i(v)$  ovvero un vertice di grado minimo
4:    $G_{i+1} \leftarrow G_i - C_i(v_i)$ 
5:    $i \leftarrow i + 1$ 
6: return  $\{v_1, \dots, v_i\}$ 

```

$C_i(v) = N_i(v) \cup \{v\}$ è definito come il **vicinato esteso** di v in G_i . Quello che fa l'algoritmo sopra descritto è prendere, a ogni iterazione, uno dei nodi con grado minimo e rimuoverlo, insieme a tutti i nodi vicini. I nodi v_i che scegliamo formano un insieme indipendente. Infatti non può esistere una situazione del tipo



Se tra v_i e v_j esistesse un arco, allora scegliendo v_i avremmo eliminato v_j (o viceversa), e quindi non avremmo potuto sceglierlo successivamente.

Sia m l'iterazione dell'algoritmo. Sappiamo che $m \leq |V|$ e che $m \leq \alpha(G)$, dato che $\{v_1, \dots, v_m\}$ formano un insieme indipendente. Definiamo

$$Q(G) = \sum_{v \in V_g} \frac{1}{1 + D_G(V)}$$

A ogni passo G_i decresce, quindi

$$Q(G_1) - Q(G_2) \geq 0$$

Cerchiamo un upper-bound per questa sottrazione. Per definizione scriviamo

$$Q(G_1) - Q(G_2) = \sum_{u \in G_1(v_1)} \frac{1}{1 + d(u)}$$

Sappiamo che a ogni iterazione il numero di vicini di un grafo può solo diminuire, quindi

$$\sum_{u \in G_1(v_1)} \frac{1}{1 + d(u)} \leq \sum_{u \in G_1(v_1)} \frac{1}{1 + d_1(u)}$$

dove abbiamo utilizzato d_1 al posto di d . Sappiamo inoltre che, per ogni scelta di v_i , vale $d_i(u) \geq d_i(v_i) \forall u \in V$ per la definizione stessa di v_i .

$$\begin{aligned} \sum_{u \in G_1(v_1)} \frac{1}{1 + d_1(u)} &\leq \sum_{u \in G_1(v_1)} \frac{1}{1 + d_1(v_1)} \\ &= \frac{|C_1(v_1)|}{1 + d_1(v_1)} = \frac{1 + d_1(v_1)}{1 + d_1(v_1)} = 1 \end{aligned}$$

Riprendiamo la definizione di $Q(G)$

$$Q(G) = \sum_{v \in V_g} \frac{1}{1 + d_G(v)}$$

e riscriviamola come

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m \sum_{u \in C(v_i)} \frac{1}{1 + d(u)} \\ &\leq \sum_{i=1}^m 1 = m \leq \alpha(G) \end{aligned}$$

Se dividiamo l'equazione originale per $|V|$ otteniamo

$$\frac{Q(G)}{|V|} = \frac{\sum_{v \in V_g} \frac{1}{1 + d(v)}}{|V|}$$

Se poniamo $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\frac{Q(G)}{|V|} = \frac{\sum_{v \in V_g} f(d(v))}{|V|}$$

Siccome $\frac{1}{1+x}$ è convessa per $x > -1$ possiamo applicare la disuguaglianza di Jensen. Poniamo $X \sim Unif(V)$ e $Y = d(X)$, quindi

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{v \in V} d(v) \cdot \frac{1}{|V|} = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(Y)] &= \sum_{v \in V} \frac{1}{|V|} \cdot f(d(v)) \\ &= \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d(v)} \geq f(\mathbb{E}[Y]) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)} = \frac{1}{1 + d(G)} \end{aligned}$$

Mettendo tutto assieme

$$\alpha(G) \geq Q(G) \geq \frac{|V|}{1 + d(G)}$$

quindi

$$\alpha(G)(d(G) + 1) \geq |V|$$

Inoltre possiamo dire che $d(G)$ è approssimabile in tempo polinomiale con fattore $O(\log n)$

Presentiamo il seguente fatto:

Fatto 10. La seguente disuguaglianza vale $\forall G = (V, E)$

$$\omega(G)(|V| - d(G)) \geq |V|$$

Dimostrazione 12. Poniamo $n = |V|$ e $\bar{G} = (V, \bar{E})$. Sappiamo che

$$d_{\bar{G}}(v) = n - 1 - d_G(v)$$

Quindi

$$d(\bar{G}) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d_{\bar{G}}(v) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} (n - 1 - d(G))$$

Siccome un insieme indipendente in \bar{G} corrisponde a una clique in G , possiamo applicare il teorema di Turan

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}) \geq \frac{n}{1 + d(\bar{G})} = \frac{n}{n - d(G)}$$

E a questo punto abbiamo concluso la dimostrazione, infatti muovendo il denominatore

$$\omega(G)(|V| - d(G)) \geq |V|$$

5.1 Numero di dominazione

Definizione 6. Il numero di dominazione è

$$\gamma(G) := \min\{k \in \mathbb{N} | \exists U \subseteq V \text{ dominante}, |U| = k\}$$

Dove un **insieme di dominazione** è $U \subseteq V$ tale che ogni vertice in $V \setminus U$ ha un unico vicino in U . Un vertice domina se stesso.

Il problema di trovare $\gamma(G)$ è NP-completo.

Notiamo, inoltre, che se un insieme indipendente è dominante allora non domina alcun vertice dell'insieme indipendente.

Capitolo 6

Sesta lezione

6.1 Proprietà numero di dominazione

Continuiamo la trattazione del numero di dominazione, iniziata nella scorsa lezione.

Fatto 11. $\forall G = (V, E)$ vale che

$$\gamma(G) \leq \alpha(G)$$

Dimostrazione 13. Sia $U \subseteq V$ indipendente e $|U| = \alpha(G)$. Per assurdo, supponiamo che U non sia dominante. Allora $\exists x \in V \setminus U$ tale che non ha vicini in U . Questo implica che x non è dominato da U . Allora $U \cup \{x\}$ è indipendente e ha cardinalità $\alpha(G) + 1$, ma questo è assurdo, perché U non sarebbe l'insieme indipendente massimo. Allora U deve essere dominante. Per definizione stessa di $\gamma(G)$ vale che

$$|U| = \alpha(G) \leq \gamma(G)$$

Infatti, l'insieme dominante minimo al massimo ha come cardinalità U , dato che questo è dominante, e il minimo può essere solo uguale o più piccolo.

Il prossimo teorema mostra che se tutti i vertici di un grafo hanno un grado alto, allora il numero di dominazione deve essere piccolo.

Teorema 6. (Arnaudov, 1974; Payan, 1975; Lovász 1966) Vale la seguente disequazione

$$\gamma(G) \frac{1 + \delta(G)}{1 + \ln(1 + \delta(G))} \leq |V|$$

Dimostrazione 14. Facciamo una dimostrazione per costruzione. Cominciamo con il porre $n = |V|$ e $\delta = \delta(G)$.

Algorithm 2

```

1:  $S \leftarrow \emptyset$ 
2:  $U \leftarrow V$ 
3: while  $U \neq \emptyset$  do
4:    $v' \in \operatorname{argmax}_{v \in V} |U \cap C(v)|$ 
5:    $S \leftarrow S \cup \{v'\}$ 
6:    $U \leftarrow U \setminus C(v')$ 
7: return  $S$ 

```

Consideriamo un'iterazione qualsiasi dell'algoritmo. Sia U l'insieme dei vertici non ancora dominati all'inizio di tale iterazione e poniamo $r = |U|$. Allora

$$|U \cap C(v')| = \sum_{u \in U} \mathbb{I}\{u \in C(v')\}$$

Esplicitiamo v' come il nodo che massimizza la sommatoria

$$\max_{v \in V} \sum_{u \in U} \mathbb{I}\{u \in C(v)\}$$

Definiamo la variabile aleatoria $X \sim \operatorname{Unif}(V)$, dove la distribuzione è uniforme su V . Sappiamo che il massimo è sempre maggiore o uguale della media. Allora possiamo scrivere

$$\geq \mathbb{E}\left[\sum_{u \in U} \mathbb{I}\{u \in C(X)\}\right]$$

Per la linearità del valore atteso scriviamo

$$= \sum_{u \in U} \mathbb{E}[\mathbb{I}\{u \in C(X)\}]$$

Il valore atteso di una funzione indicatrice è la probabilità che avvenga l'evento.

$$= \sum_{u \in U} P(u \in C(X))$$

Notiamo ora che se u fa parte del vicinato esteso di X , allora vale anche l'opposto, ovvero X fa parte del vicinato esteso di u .

$$= \sum_{v \in U} P(X \in C(u))$$

La probabilità che X faccia parte del vicinato esteso di u è semplicemente il numero di elementi in $C(u)$ fratto il numero totale di nodi.

$$= \sum_{v \in U} \frac{|C(u)|}{n} = \sum_{v \in U} \frac{1 + d(u)}{n}$$

Siccome $d(u) \geq \delta(G)$ per definizione

$$\geq \sum_{v \in U} \frac{1 + \delta(G)}{n}$$

Ci siamo liberati di v all'interno della sommatoria, quindi

$$= r \frac{1 + \delta(G)}{n}$$

Possiamo concludere che al termine dell'iterazione rimangono al massimo

$$r - r \frac{1 + \delta(G)}{n} = r \left(1 - \frac{1 + \delta(G)}{n}\right)$$

nodi. Notiamo che, partendo dall'inizio, dopo m iterazioni rimarranno

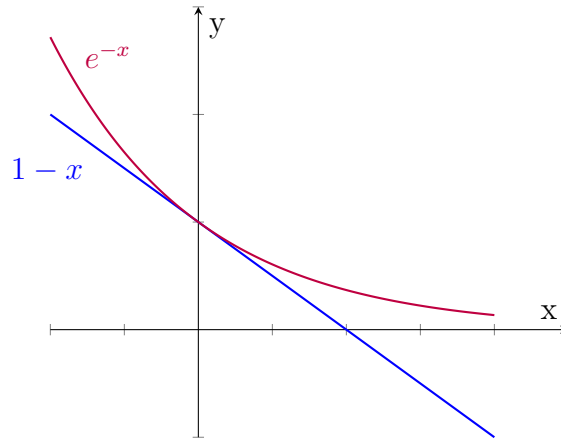
$$\begin{aligned} n \left(1 - \frac{1 + \delta(G)}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1 + \delta(G)}{n}\right) \\ = n \left(1 - \frac{1 + \delta(G)}{n}\right)^m \end{aligned}$$

nodi. Ci chiediamo ora quando m è sufficiente affinché rimangano $\leq \frac{n}{1 + \delta(G)}$ vertici ancora da dominare. Ovvero

$$n \left(1 - \frac{1 + \delta(G)}{n}\right)^m \leq \frac{n}{1 + \delta(G)}$$

Applichiamo la nota disequazione

$$1 - x \leq e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$$n\left(1 - \frac{1 + \delta(G)}{n}\right)^m$$

$$\leq n \cdot \exp\left(-\frac{1 + \delta(G)}{n}m\right)$$

Usiamo \exp per evitare di avere e con esponente una frazione, ma è la stessa cosa.

$$n \cdot \exp\left(-\frac{1 + \delta(G)}{n}m\right) \leq \frac{1}{1 + \delta(G)}$$

Applichiamo la funzione logaritmo su ambo i lati

$$-\frac{1 + \delta(G)}{n}m \leq -\ln(1 + \delta(G))$$

$$m \geq n \frac{\ln(1 + \delta(G))}{1 + \delta(G)}$$

Assumiamo di essere arrivati all'iterazione $m = n \frac{\ln(1 + \delta(G))}{1 + \delta(G)}$. Sia s il numero di vertici ancora da dominare dopo m passi. Siccome m è la risposta alla domanda che ci siamo posti prima, vale che

$$s \leq \frac{n}{1 + \delta(G)}$$

Nel caso peggiore l'algoritmo sceglierà altri s vertici per completare la costruzione dell'insieme dominante. Ma allora la cardinalità dell'insieme finale sarà

$$\begin{aligned}\gamma(G) &\leq |S| \leq m + s \\ &\leq n \frac{\ln(1 + \delta(G))}{1 + \delta(G)} + \frac{n}{1 + \delta(G)}\end{aligned}$$

Sapendo che $n = |V|$ e rigirando l'equazione

$$\gamma(G) \frac{1 + \delta(G)}{1 + \ln(1 + \delta(G))} \leq |V|$$

6.2 Grafi casuali

Un **modello generativo** per grafi è una distribuzione di probabilità su tutti i grafi di un certo ordine. Il più famoso è il modello di **Erdős-Rényi**. Indichiamo con $\mathcal{G}(n, p)$ la distribuzione di probabilità su grafi di ordine n . Dato il grafo $G = (V, E)$, l'arco $\{i, j\} \in [V]^2$ è tale che $\{i, j\} \in E$ con probabilità p . L'estrazione è indipendente $\forall i \neq j$. Quindi

$$\mathbb{I}\{\{i, j\} \in E\} \sim \text{Bern}(p)$$

- Se $p = 0$ allora il grafo ottenuto ha sempre 0 lati.
- Se $p = 1$ allora il grafo ottenuto ha sempre tutti i lati in $[V]^2$.
- Se $0 < p < 1$ allora ogni grafo di ordine n ha probabilità > 0 di essere estratto da $\mathcal{G}(n, p)$

Notiamo che p regola la densità del grafo. La distribuzione $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ è uniforme su tutti i grafi di ordine n . Sia $H = (V, E)$ un grafo di ordine n . La probabilità di estrarre H è

$$P(H) = p^{|E|} (1 - p)^{\binom{n}{2} - |E|}$$

Invece la probabilità di estrarre un grafo con k lati è

$$P(|E| = k) = \sum_{\substack{E' \in [V]^2 \\ \wedge |E'| = k}} p^k (1 - p)^{\binom{n}{2} - k}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{|[V]^2|}{k} p^k (1-p)^{\binom{n}{2}-k} \\
&= \binom{\binom{n}{2}}{k} p^k (1-p)^{\binom{n}{2}-k}
\end{aligned}$$

ed è una binomiale di parametri $\binom{n}{2}$ e p . Il valore atteso è

$$\mathbb{E}[|E|] = \binom{n}{2} p$$

ovvero il prodotto tra i parametri della distribuzione. Siccome a volte la dimostrazione costruttiva, usiamo il modello di Erdős-Rényi per dimostrare delle proprietà attraverso il **metodo probabilistico**. Ovvero, dato lo spazio di probabilità definito dalla tripla

$$(\Omega, F, P)$$

dove Ω è lo spazio campione (contiene gli eventi elementari), F lo spazio degli eventi ($F \subseteq \Omega$) e P la misura (distribuzione) di probabilità. Per esempio, sia Ω l'insieme dei grafi di ordine n . Ci chiediamo se ci siano dei grafi bipartiti. Sia A l'insieme dei grafi bipartiti di ordine n ($A \subseteq \Omega$) ci chiediamo

$$\exists \omega \in \Omega \text{ t.c. } \omega \in A?$$

Se $A \neq \emptyset$ allora esiste. Questo equivale a chiedersi $P(A) > 0$, che implica $\exists \omega \in \Omega$ che soddisfa la proprietà (notare che non è una co-implicazio-ne!).

Capitolo 7

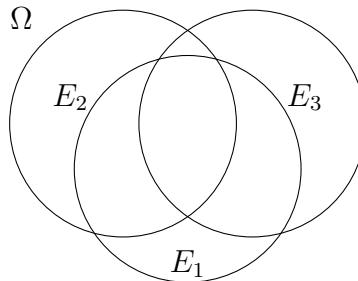
Settima lezione

7.1 Strumenti di probabilità

Introduciamo due importanti disequazioni che saranno utili per diverse dimostrazioni usando il metodo probabilistico. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità e siano E_1, \dots, E_n degli eventi qualsiasi. Per la **regola dell'unione** vale la disuguaglianza

$$P(E_1 \cup \dots \cup E_n) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

Graficamente possiamo convincerci della correttezza della disequazione.



Le zone che sono in comune, sommando le probabilità dei singoli E_i , vengono contate più volte, quindi è ovvio che la sommatoria sia maggiore (o al massimo uguale) alla probabilità dell'unione. Data una variabile aleatoria X

non negativa, $\forall a > 0$ vale

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Questa disuguaglianza è detta **disuguaglianza di Markov**. La dimostrazione è omessa.

7.2 Proprietà grafi

Fatto 12. $\forall n \geq 4$ e $\forall K \geq 2 \log n$ $\exists G$ di ordine n tale che $\alpha(G) < k$ e $\omega(G) < k$.

Notiamo che le due proprietà sembrano quasi contrastanti. Un insieme di indipendenza grande preclude una grande clique, e viceversa.

Dimostrazione 15. Consideriamo $G \sim \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$. Qual è la probabilità che $U \subset V$, con $|U| = k$, sia indipendente in G ? $(1 - \frac{1}{2})^{\binom{k}{2}}$. Quindi,

$$\begin{aligned} & P(\alpha(G) > k) \\ &= P(\exists U \subseteq V \text{ t.c. } |U| = k, \text{ indipendente in } G) \end{aligned}$$

$$= P\left(\bigcup_{\substack{U \subseteq V \\ |U|=k}} \{U \text{ è indipendente in } G\}\right)$$

$$\leq \sum_{\substack{U \subseteq V \\ |U|=k}} P(U \text{ è indipendente in } G)$$

$$= \sum_{\substack{U \subseteq V \\ |U|=k}} 2^{-\binom{k}{2}} = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$$

Usiamo ora il fatto che

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^k$$

per $4 \leq k \leq n$. Quindi:

$$\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}}$$

Sfruttando le proprietà dei logaritmi scriviamo

$$\begin{aligned} 2^{\log_2 \left(\frac{n}{2}\right)^k} 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} &= 2^{\log_2 \left(\frac{n}{2}\right)^k - \frac{k(k-1)}{2}} \\ &= 2^{k(\log_2 n - 1) - \frac{k(k-1)}{2}} \end{aligned}$$

Con la condizione che $k \geq 2 \log_2 n$

$$\geq 2^{\frac{k^2}{2} - k - \frac{k(k-1)}{2}} = 2^{-\frac{k}{2}}$$

Siccome $k \geq 4$, allora

$$2^{-\frac{k}{2}} < \frac{1}{2}$$

Dato $U \subseteq V$ con $|U| = k$ la probabilità che U formi una clique in G è $2^{-\frac{k}{2}}$. Rifacendo la stessa derivazione di prima arriviamo a dire che $P(\omega(G) \geq k) < \frac{1}{2}$. Quindi possiamo affermare

$$\begin{aligned} &P(\alpha(G) < k, \omega(G) < k) \\ &= 1 - P(\alpha(G) \geq k \vee \omega(G) \geq k) \\ &\geq 1 - P(\alpha(G) \geq k) - P(\omega(G) \geq k) \\ &> 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che $P(\alpha(G) < k, \omega(G) < k) > 0$, questo implica che debba esistere un grafo G di ordine n tale che $\alpha(G) < k$ e $\omega(G) < k$.

Discutiamo un'altra proprietà che, similmente alla precedente, sembra essere contrastante.

Teorema 7. Teorema di Erdős. $\forall k \exists G$ tale che

$$g(G) > k \wedge \chi(G) > k$$

Prima di dimostrare il teorema introduciamo un lemma utile alla sua dimostrazione.

Lemma 1. Il valore atteso del numero di cicli di lunghezza k in $G \sim \mathcal{G}(k, n)$ è

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{2k} p^k$$

Dimostrazione 16. Dimostriamo il lemma precedente. Sia C_k l'insieme con tutti i cicli possibili di lunghezza k su n vertici. Ci chiediamo quanti siano. Un ciclo è determinato dai vertici che ne fanno parte. Il numero di modi per scegliere k vertici è

$$n(n-1) \dots (n-k+1)$$

Dobbiamo però considerare che in questo modo contiamo k volte ogni ciclo per il fatto che cambiamo solamente l'ordine dei nodi, e un addizionale 2 volte per ogni verso. Quindi

$$|C_k| = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{2k}$$

Dove dividiamo per $2k$ perché ci sono esattamente $2k$ sequenze che corrispondono allo stesso ciclo. Sia $C \in C_k$, ci chiediamo qual è la probabilità che G contenga C ? p^k , perché ogni arco tra i k nodi deve essere estratto, gli altri non ci interessa cosa succede. Indichiamo con $N_k(G)$ il numero di cicli di lunghezza k in G , allora

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_k(G)] &= \sum_{C \in C_k} P(G \text{ contiene } C) \\ &= \sum_{C \in C_k} p^k \end{aligned}$$

La sommatoria diventa indipendente da C

$$\begin{aligned} &= |C_k| \cdot p^k \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{2k} p^k \end{aligned}$$

Capitolo 8

Ottava lezione

Dimostriamo ora il teorema di Erdős.

Dimostrazione 17. Cominciamo con il porre $p_n = n^{\varepsilon-1}$ dove $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$. Sia $N_{\leq k}(G)$ la variabile casuale che rappresenta il numero di cicli di lunghezza al più k in G . Guardiamo il valore atteso di questa variabile casuale.

$$\mathbb{E}[N_{\leq k}(G)] = \sum_{i=3}^k \mathbb{E}[N_i(G)]$$

Dove la sommatoria parte da 3 perché non esistono cicli di lunghezza minore, per definizione stessa. $N_i(G)$ è il numero di cicli di lunghezza i in G .

$$= \sum_{i=3}^k \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{2i} p^i$$

A denominatore abbiamo i fattori, ciascuno è al più n .

$$\leq \sum_{i=3}^k \frac{n^i}{2i} p^i$$

per l'indicizzazione stessa della sommatoria, $i > 1$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^k (np)^i$$

Non è una disuguaglianza stretta perché ambo i lati potrebbero valere 0.

$$\leq \frac{k-2}{2}(np)^k$$

dove $k-2$ sono il numero di termini della sommatoria. Notiamo che la sostituzione di $(np)^k$ con $(np)^i$ vale perché la base è maggiore di 1. Infatti:

$$np = n \cdot n^{\varepsilon-1} = n^{\varepsilon} > n^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{n} > 1$$

Concentriamoci ora sul valore atteso di $N_{\leq k}(G) \geq \frac{n}{2}$. A cosa serve vi chiederete voi? Le strade del Signore sono infinite.

$$\mathbb{E}[N_{\leq k}(G) \geq \frac{n}{2}] \leq \frac{\mathbb{E}[N_{\leq k}(G)]}{\frac{n}{2}}$$

Che è l'applicazione della disuguaglianza di Markov. Usiamo il risultato trovato prima,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(k-2)(np)^k}{n} = (k-2)n^{k-1}p^k \\ &= (k-2)n^{k-1} \cdot n^{k\varepsilon-k} = (k-2)n^{k\varepsilon-1} \\ &= (k-2)n^{-(1-k\varepsilon)} \end{aligned}$$

Notiamo che $k\varepsilon - 1 < \frac{k}{k} - 1 < 0$. Quindi se $n \rightarrow 0$ possiamo affermare

$$\mathbb{E}[N_{\leq k}(G) \geq \frac{n}{2}] < \frac{1}{2}$$

Analizziamo ora $P(\alpha(G) \geq \frac{n}{2k})$. Dove ci porteranno questi conti? Lo scopriremo solo vivendo. Notiamo che una probabilità simile l'abbiamo già analizzata nelle precedenti lezioni. E allora risparmiamo inchiostro

$$\begin{aligned} P(\alpha(G) \geq \frac{n}{2k}) &\leq \binom{n}{\frac{n}{2k}} (1-p)^{\binom{\frac{n}{2k}}{2}} \\ &= \binom{n}{r} (1-p)^{\binom{r}{2}} \end{aligned}$$

dove $r = \frac{n}{2k}$. Introduciamo due importanti disequazioni note

$$\binom{n}{r} < 2^n$$

e

$$1-p \leq e^{-p}$$

Andiamo a utilizzarle

$$\leq 2^n e^{-p \binom{r}{2}}$$

Per $r \geq 2$ sappiamo che $\binom{r}{2} \geq \frac{r^2}{4}$ (infatti $\frac{r(r-1)}{2} \geq \frac{r^2}{4}$).

$$\leq 2^n e^{-p \frac{r^2}{4}} = 2^n e^{-p \frac{n}{16k^2}}$$

Vale che $p \cdot n = n^\varepsilon$. Scegliamo n abbastanza grande, ovvero $n^\varepsilon \geq 16k^2$.

$$\leq 2^n e^{-n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

Sempre per n abbastanza grande possiamo affermare

$$\left(\frac{2}{e}\right)^n < \frac{1}{2}$$

Utilizziamo tutto quello che abbiamo appreso.

$$\begin{aligned} & P(N_{\leq}(G) < \frac{n}{2} \wedge \alpha(G) < \frac{n}{2k}) \\ &= 1 - P(N_{\leq}(G) \geq \frac{n}{2} \vee \alpha(G) \geq \frac{n}{2k}) \\ &\geq 1 - P(N_{\leq}(G) \geq \frac{n}{2}) - P(\alpha(G) \geq \frac{n}{2k}) \\ &> 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\exists G \ N_{\leq k} < \frac{n}{2} \wedge \alpha(G) < \frac{n}{2k}$$

G ha al più $\frac{n}{2}$ cicli di lunghezza al più k . Togliamo un vertice da ogni ciclo di lunghezza al più k in G . Sia $H = (V_H, E_H)$ il grafo ottenuto. Allora $|V_H| \geq \frac{n}{2}$, perché al peggio leviamo un nodo per ogni ciclo. Inoltre, $g(H) > k$. Quanto vale $\chi(H)$? Sappiamo che

$$\chi(H)\alpha(H) \geq |V_H|$$

Quindi

$$\chi(H) \geq \frac{|V_H|}{\alpha(H)} \geq \frac{\frac{n}{2}}{\alpha(G)}$$

Dove l'ultima disequazione deriva dal fatto che $\alpha(G) \geq \alpha(H)$ (non dimostrato).

$$> \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} k = k$$

Abbiamo così dimostrato il teorema.

8.1 Proprietà asintotiche

Dati $p_1, p_2, \dots \in (0, 1)$, $G_n \sim \mathcal{G}(n, p_n)$ per $n = 1, 2, \dots$. Consideriamo una qualche proprietà, per esempio

$$\omega(G_n) \leq f(n)$$

Dove f è una qualsiasi funzione. Ora introduciamo il predicato

$$\pi_n(G_n) \in \{0, 1\}$$

E quindi, nel nostro esempio, potrebbe essere

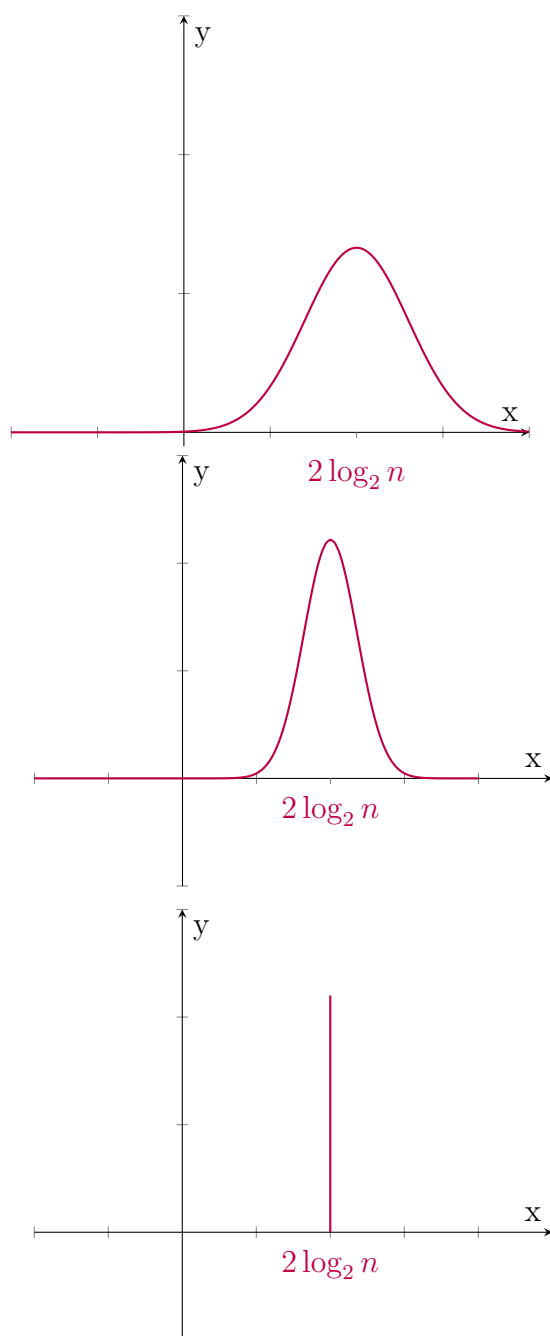
$$\pi_n^{G_n} = \mathbb{I}\{\omega(G_n) \leq f(n)\}$$

Avremo una sequenza di predicati π_1, π_2, \dots , e ci chiediamo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\pi_n(G_n) = 1)$$

Cioè se il grafo G_n ha la proprietà $\omega(G_n) \leq f(n)$ con n molto grande. Se $= 1$ allora la proprietà **vale asintoticamente** per quasi tutti i grafi G_n .

Esempio 13. Dato $p_n = \frac{1}{2}$ e $\pi_n(G_n) = \mathbb{I}\{\omega(G_n) = 2 \log_2 n\}$ (stesso discorso può essere fatto per $\pi_n(G_n) = \mathbb{I}\{\alpha(G_n) = 2 \log_2 n\}$). Vediamo cosa succedere con il crescere di n .



Nella precedente lezione abbiamo dimostrato che

$$P(\alpha(G) \geq k) \leq 2^{-\frac{k}{2}}$$

con $p_n = \frac{1}{2}$ e $k \geq 2 \log_2 n$. Poniamo $k = 2 \log_2 n$, allora

$$P(\alpha(G) \geq k) \leq 2^{-\log_2 n} = \frac{1}{n}$$

se $n \rightarrow \infty$ tende a 0. Similmente possiamo dire che

$$P(\omega(G_n) \geq 2 \log_2 n) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Per un fatto che non dimostriamo vale che

$$P(\omega(G_n) < 2 \log_2 n) \leq 2^{-n^2+o(1)} \rightarrow 0$$

Quindi la clique massima non è né più grande né più piccola, quindi è esattamente $2 \log_2 n$ se $n \rightarrow \infty$. Lo stesso risultato vale per il numero di indipendenza. Concentriamoci ora sul numero cromatico. Sappiamo già che

$$\chi(G_n) \geq \frac{n}{\alpha(G_n)}$$

Sappiamo che con n abbastanza grande il numero di indipendenza è $2 \log_2 n$

$$\geq \frac{n}{2 \log_2 n}$$

Fatto 13. Vale la seguente disequazione

$$\chi(G_n) \leq \frac{n}{2 \log_2 n}$$

Dimostrazione 18. Prendiamo $G = (V, E)$ e un sottoinsieme dei suoi vertici, $S \subseteq V$. Sia $G[S]$ il grafo indotto con $|S| = m$. Notiamo che $G \sim \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ implica $G[S] \sim \mathcal{G}(m, \frac{1}{2})$. Infatti basta estrarre gli archi relativi agli m vertici per primi. Concentriamoci sulla probabilità che il grafo $G[S]$ abbia un numero di indipendenza minore di $2 \log_2 m$.

$$P(\exists S \subseteq V \mid S| = m \text{ t.c. } \alpha(G[S]) \leq 2 \log_2 m)$$

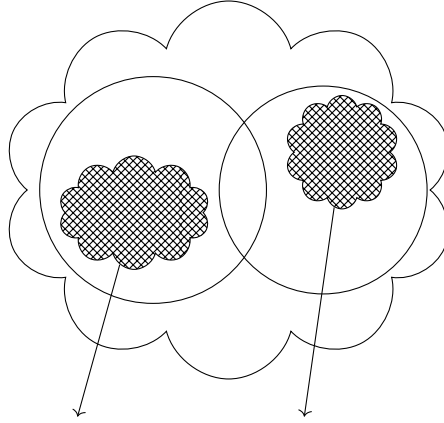
$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\substack{S \subseteq V \\ |S|=m}} P(\alpha(G[S]) < 2 \log_2 m) \\ &\leq \binom{n}{m} 2^{-m^2+o(1)} \leq 2^{n-m^2+o(1)} \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato il fatto che $\binom{n}{m} \leq 2^n$. Scegliamo $m = \frac{n}{(\log_2 n)^2}$

$$= 2^{n - (\frac{n}{(\log_2 n)^2})^{2+o(1)}}$$

$$= 2^{n - \frac{n^{2+o(1)}}{(\log_2 n)^{4+o(1)}}} \rightarrow 0$$

Allora $\forall S \subseteq V$ con $|S| = m$ sono tali che $\alpha(G[S]) \geq 2 \log_2 m$, Finché ci sono sottoinsiemi di taglia m , possiamo isolare un insieme indipendente di taglia almeno $2 \log_2 m$



In figura, le nuvolette colorate sono gli insiemi indipendenti rimossi, i cerchi indicano gli insiemi S . A ogni insieme di vertici indipendenti assegniamo lo stesso colore. Quindi se abbiamo N insiemi indipendenti, avremo N colori diversi. Il numero di insiemi indipendenti trovati è $\frac{n}{k}$, dove n è il numero di vertici totali e k la dimensione degli insiemi indipendenti. A questo punto ci avvanzeranno al più m nodi, a cui assegniamo un colore diverso per ognuno. Quindi possiamo affermare che

$$\begin{aligned} \chi(G_n) &\leq \frac{n}{k} + m = \frac{n}{2 \log_2 n} + \frac{n}{(\log_2 n)^2} \\ &= \frac{n}{2 \log_2 n} \left(1 + \frac{2}{\log_2 n}\right) = (1 + o(1)) \frac{n}{2 \log_2 n} \end{aligned}$$

In questo modo concludiamo la dimostrazione.

Alla luce del fatto, possiamo affermare che per $n \rightarrow \infty$

$$\chi(G_n) = \frac{n}{2 \log_2 n}$$

vale asintoticamente per quasi tutti i G_n .

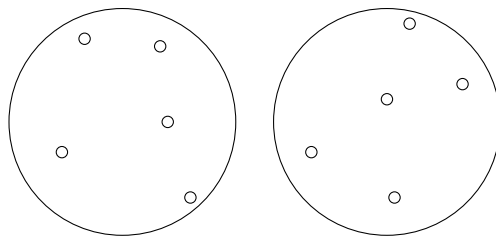
Capitolo 9

Nona lezione

9.1 Introduzione

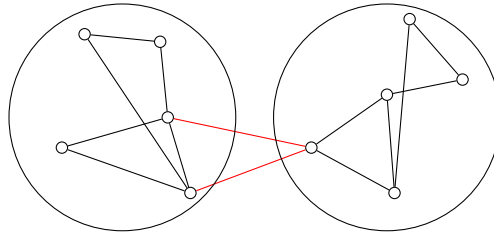
Iniziamo la seconda parte del corso e ci concentreremo sulla **clusterizzazione spettrale**. Per clusterizzazione si intende il partizionamento di un insieme di dati in modo che dati simili siano nello stesso elemento della partizione.

Esempio 14. Dati dei punti possiamo decidere di raggrupparli per vicinanza



In un grafo i dati sono i vertici e gli archi rappresentano la relazione di similarità. Se abbiamo un grafo con $G = (V, E)$ tale che $|V| = n$ e abbiamo due cricche ciascuna da $\frac{n}{2}$ è facile trovare un modo ottimo per partizionarlo. Ma questo non è sempre il caso.

Esempio 15. Dati dei punti possiamo decidere di raggrupparli per vicinanza



Con questa scelta andiamo a tagliare 2 archi, ovvero violiamo 2 similarità.

Come partizionare i vertici di un grafo in modo da ottenere due o più cluster il più possibile densi e ben separati (con pochi archi tra un cluster e l'altro)? In altre parole ci stiamo chiedendo se esista, e quale sia, l'algoritmo per partizionare in modo migliore i vertici. Per rispondere a questa domanda utilizzeremo l'algebra lineare applicata ai grafi. Questo approccio non è l'unico ma l'algebra lineare si sposa in modo elegante con la teoria dei grafi. Infatti, possiamo rappresentare un grafo $G = (V, E)$, $|V| = n$, con una **matrice di adiacenza** $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$. Questa è

- Binaria: $A_{ij} = 1 \iff (i, j) \in E$ altrimenti $A_{ij} = 0$.
- Simmetrica: perché ci troviamo nel contesto di grafi non orientati.
- Diagonale composta da 0: perché non abbiamo self-loop (cappi).

9.2 Ripasso di algebra lineare

Consideriamo matrici $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ovvero matrici quadrate a coefficienti lineari. Se

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow u \neq (0, \dots, 0) \text{ t.c. } Mu = \lambda u$$

u viene chiamato **autovettore** di M con **autovalore** λ . Possiamo assumere che tutti i vettori u abbiano norma 1. Infatti, se $\|u\| \neq 1$ dividiamo ambo i lati per $\|u\|$

$$M \frac{u}{\|u\|} = \lambda \frac{u}{\|u\|}$$

e consideriamo come vettore $u' = \frac{u}{\|u\|}$, che ha norma 1. Quindi ogni autovettore ha lunghezza unitaria. Notiamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di M se e solo se

$$\exists x \neq (0, \dots, 0) \text{ t.c. } (M - \lambda I)x = (0, \dots, 0)$$

dove I è la matrice identità di dimensioni $n \times n$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

con la proprietà che $Ix = x \forall x \in \mathbb{R}^n$. L'equazione $(M - \lambda I)x = (0, \dots, 0)$ vale per $x \neq (0, \dots, 0)$ se e solo se $\det(M - \lambda I) = 0$. Non ci interessa in questo momento come si calcola il determinante di una matrice, sottolineiamo soltanto che $\det(M - \lambda I)$ è un polinomio di grado λ . Il **teorema fondamentale dell'algebra** ci dice che l'equazione $\det(M - \lambda I)$ ha n radici, non necessariamente distinte e non tutte necessariamente reali. Quindi ogni $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha n autovalori.

Fatto 14. Se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è simmetrica allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $Mu = \lambda u$, ovvero ha almeno un autovalore reale.

Fatto 15. Se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è simmetrica allora se $Mu = \lambda u$ e $Mu' = \lambda' u'$ con $\lambda \neq \lambda'$, vale che $u^T u' = 0$, cioè u, u' sono **ortogonali**.

Dimostrazione 19. Siccome M è simmetrica deve valere

$$(Mu')^T u' = u^T Mu'$$

infatti $M^T = M$. Ma $Mu' = \lambda' u'$, quindi

$$(Mu')^T u' = \lambda u^T u' = \lambda' u^T u'$$

Siccome $\lambda \neq \lambda'$, l'unico modo per cui l'equazione $\lambda u^T u' = \lambda' u^T u'$ possa valere è che

$$u^T u' = 0$$

Introduciamo un teorema importante che utilizzeremo estensivamente.

Teorema 8. Teorema spettrale. Sia $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, non necessariamente distinti, e $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ortonormali (ovvero $\|u_i\| = 1$ per $i = 1, \dots, n$ e $u_i^T u_j = 0$ con $i \neq j$) tali che $Mu_i = \lambda_i u_i$ per $i = 1, \dots, n$.

Dimostrazione 20. Dimostrazione per induzione.

CASO BASE: Se $n = 1$, allora $M \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \equiv \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è un autovettore con autovalore M perché $Mx = Mx$.

IPOTESI INDUTTIVA: Il teorema vale per $n - 1$. Per il primo fatto che abbiamo dimostrato in questa lezione vale

$$\exists \lambda_n \in \mathbb{R}, \exists x_n \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } Mx_n = \lambda_n x_n, x_n \neq (0, \dots, 0)$$

Claim 1. Per $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vale che $y^T x_n = 0 \rightarrow (My)^T x_n = 0$. Infatti

$$x_n^T (My) = (Mx_n)^T y = \lambda_n x_n^T y = 0$$

Il claim ci dice che se y è ortogonale a x_n allora My è ortogonale a x_n .

Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio che contiene tutti e soli i vettori ortogonali a x_n . Quindi $\dim(V) = n - 1$ perché togliamo la dimensione della direzione del vettore usato per definire l'ortogonalità. Sia $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ una base ortonormale di V e sia $B = \{u, \dots, u_{n-1}\} \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$. Quindi,

$$B : \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

B è una matrice che proietta i vettori di dimensione n nello spazio V . La matrice BB^T è tale che

$$BB^T : \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \quad \forall z \in V$$

inoltre $BB^T z \in V$. Sia $n' = B^T M B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, simmetrica. Applichiamo l'ipotesi induttiva a x' e troviamo $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ autovalori e $y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ autovettori. Per $i = 1, \dots, n - 1$ vale

$$M' y_i = B^T M B y_i = \lambda_i y_i$$

Moltiplichiamo per B ambo i lati

$$BB^T M B y_i = \lambda_i B y_i \in V$$

la posizione di λ_i è irrilevante dato che è uno scalare. Siccome $B y_i$ è ortogonale a x_n (quindi $x_n^T (M B y_i) = 0$, e dunque $M B y_i \in V$) e per il claim vale che

$$\lambda_i B y_i = BB^T M B y_i = M B y_i$$

con $B y_i = x_i$. L'equazione sopra implica

$$M x_i = \lambda_i x_i \quad \forall i = 1, \dots, n - 1$$

Notiamo che BB^T proietta vettori in U , ma $MB y_i$ è già in U , e quindi lo proietta su stesso. Concludiamo dicendo che, per costruzione,

$$x_i^T x_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

Infatti,

$$x_i^T x_j = (B y_i)^T B y_j = y_i^T B^T B y_j$$

Vale che $B^T B = I$, infatti $U_i U_j = 0$ se $i \neq j$, dato che sono ortogonali, altrimenti è $= 1$ se $i = j$.

$$= y_i^T I y_j = y_i^T y_j = 0$$

per $i \neq j$.

Corollario 1. Esponiamo un corollario comodo. Se $M \in R^{n \times n}$ simmetrica allora

$$M = U^T \Lambda U = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i U_i^T$$

Dove $U = [U_1, \dots, U_n]$ e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dimostrazione 21. Dato $M U_i = \lambda_i U_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ vale che $M U [\lambda_1 U_1, \dots, \lambda_n U_n] = U \Lambda$. Siccome $U = [U_1, \dots, U_n]$ è una matrice ortogonale (ovvero $U^{-1} = U^T$) abbiamo

$$U U^T = U U^{-1} = I$$

Concludiamo che

$$M = M U U^T = U \Lambda U^T$$

Capitolo 10

Decima lezione

Riprendiamo il teorema spettrale.

Ogni matrice simmetrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ può essere scritta come

$$M = U \Lambda U^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i U_i^T$$

dove $U = [U_1, \dots, U_n]$ e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, con (u_i, λ_i) autovettori e corrispondenti autovalori di M per $i = 1, \dots, n$. Notiamo che dati $U, V \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$(UV^T)_{ij} = u_i v_j$$

Enunciamo ora un teorema che ci permette di definire gli autovettori e autovalori in un altro modo.

Teorema 9. Caratterizzazione variazionale degli autovalori. Sia $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Per $m < n$ u_1, \dots, u_m siano autovettori tali che $M u_i = \lambda_i u_i$ per $i = 1, \dots, m$. Allora

$$\lambda_{m+1} = \min_{\substack{u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ u \perp \{u_1, \dots, u_m\}}} \frac{u^T M u}{u^T u}$$

dove $u \perp \{u_1, \dots, u_m\}$ indica che u è ortogonale ai vettori $\{u_1, \dots, u_m\}$

La dimostrazione del teorema è omessa, ci limitiamo a fare delle osservazioni. Prima di tutto, il coefficiente

$$\frac{u^T M u}{u^T u}$$

è detto **quoziente di Rayleigh**. Sappiamo che $u^T u = \|u\|^2$, quindi possiamo riscriverlo come

$$\frac{u^T}{\|U\|} M \frac{u}{\|U\|}$$

Senza perdita di generalità possiamo assumere che il vettore u abbia norma 1 (se così non fosse, possiamo porre $u' = \frac{u}{\|u\|}$, u' ha norma 1). Allora

$$\lambda_{k+1} = \min_{\substack{u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ u \perp \{u_1, \dots, u_k\}}} u^T M u$$

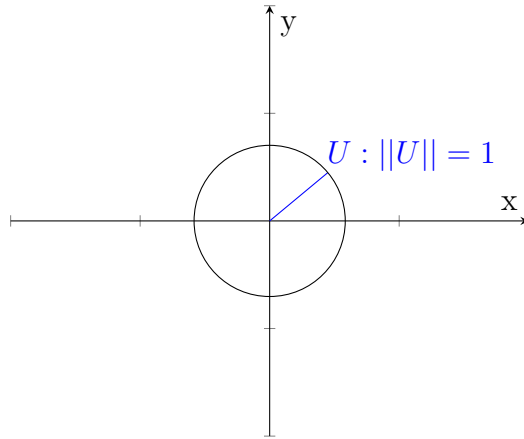
Concentriamoci sul caso λ_1 .

$$\lambda_1 = \min_{u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{u^T M u}{u^T u} = \min_{u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} u^T M u$$

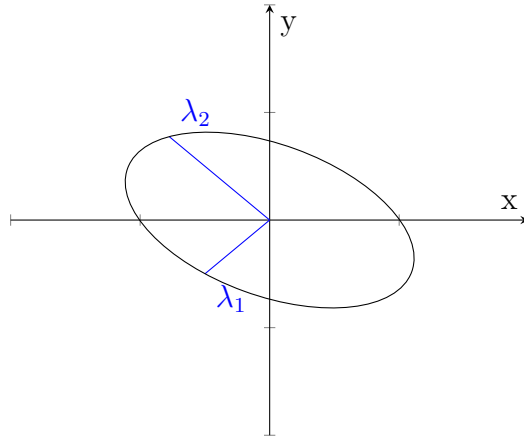
Sia u_1 l'autovettore associato a λ_1

$$u_1^T M u_1 = u_1^T \lambda_1 u_1 = \lambda_1 \|u_1\|^2 = \lambda_1$$

Andiamo a vedere cosa vuol dire a livello geometrico, per ovvi motivi $n = 2$. Inizialmente la situazione è



Se applichiamo a u la trasformazione $u^T M$ otteniamo



La lunghezza degli assi dell'ellisse corrisponde al valore degli autovalori. L'asse più corto è λ_1 , il più lungo è λ_2 . La rappresentazione geometrica riesce a catturare lo spettro della matrice. Sappiamo che λ_1 è il minimo degli autovalori, vediamo ora che λ_n (nell'esempio a 2 dimensioni λ_2) è il maggiore. Consideriamo la matrice $-M$ che ha autovalori $-\lambda_n \leq -\lambda_{n-1} \leq \dots \leq -\lambda_1$.

$$-\lambda_n = \min_{u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} -\frac{u^T M u}{u^T u} = -\max_{u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{u^T M u}{u^T u}$$

moltiplichiamo entrambi per -1

$$\lambda_n = \max_{u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{u^T M u}{u^T u}$$

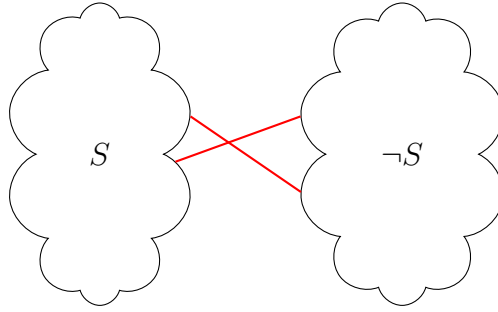
Ricapitolando, l'autovalore 1 corrisponde all'autovettore u che minimizza il coefficiente di Rayleigh, mentre l'autovalore n a quello massimo. Quelli in mezzo (autovalore $1 < i < n$) corrispondono agli autovettori che minimizzano lo stesso coefficiente ma con il vincolo di ortogonalità. Concludiamo questa parte di algebra lineare con la seguente definizione

Definizione 7. Una matrice simmetrica M è **positiva semidefinita** se $x^T M x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

Gli autovalori di una matrice positiva semidefinita (se è positiva semidefinita è anche simmetrica) sono tutti non negativi. La dimostrazione è ovvia guardando il coefficiente di Rayleigh.

10.1 Clustering Spettrale

Sia $G = V, E$ vogliamo riuscire a partizionare il grafo così che il numero archi tra le partizioni sia piccolo.



Sia $\neg S \equiv V \setminus S$. Andiamo a tagliare gli archi

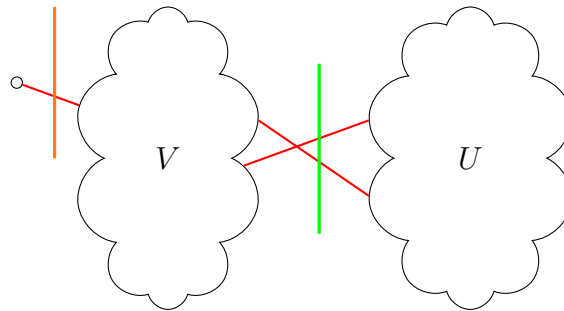
$$E(S, \neg S) = \{(i, j) : i \in S, j \in \neg S\}$$

Definizione 8. La **sparsità** di un taglio $(S, \neg S)$ è definita come

$$\sigma(S) = \frac{|E(S, \neg S)|}{|S||\neg S|}$$

dove $|E(S, \neg S)|$ è il numero di archi tra S e $\neg S$ mentre $|S||\neg S|$ è il numero di archi possibili.

Il denominatore serve per bilanciare. Senza di esso potremmo trovarci con partizioni senza senso che però sono privilegiate dalla sparsità.



Senza l'effetto mitigatore del denominatore, la partizione ottenuta usando il taglio arancione sarebbe migliore di quella ottenuta usando il taglio verde,

ma è evidente che non sia vero. Nel caso in cui usiamo il taglio arancione abbiamo $|S| = 1$ e $|\neg S| = n - 1$ e quindi $|S||\neg S| = n - 1$. Nel caso in cui $|S| = \frac{n}{2} = |\neg S|$ quindi $|S||\neg S| = \frac{n^2}{4}$, se n abbastanza grande $\frac{n^2}{4} \gg n - 1$. Quindi la sparsità privilegia partizioni bilanciate.

Definizione 9. La sparsità **di un grafo** $G = (V, E)$ è

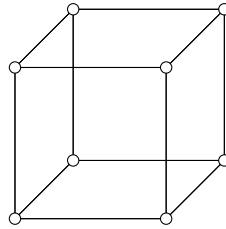
$$\sigma(G) = \min_{\substack{S \subset V \\ |S| \neq 0}} \sigma(S)$$

Da ora in poi facciamo un'assunzione per semplificare i conti (ma non troppo, abbastanza per guadagnare i sei crediti del corso) consideriamo grafi **d-regolari**.

Definizione 10. Un grafo $G = (V, E)$ si dice **d-regolare** se

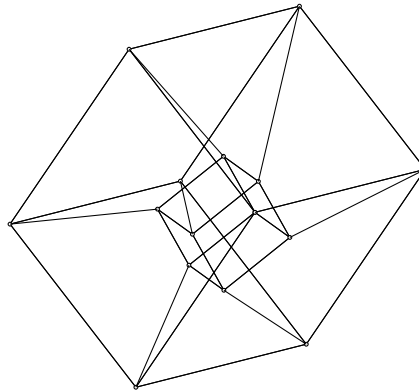
$$d(v) = d \quad \forall v \in V$$

Una cricca K_n è $n - 1$ -regolare. Invece, un ciclo su n vertici C_n è 2-regolare. Un cubo è 3-regolare.



In generale un ipercubo (cubo a più di 3 dimensioni) è $\log_2 n$ -regolare, dove n è l'ordine del grafo.

Esempio 16. Un tesseracto (ipercubo a 4 dimensioni) è 4-regolare.



Definiamo un parente stretto della sparsità.

Definizione 11. Sia G un grafo d -regolare e $S \subset V$ $|S| \neq 0$, definiamo l'espansione come

$$xpn(S) = \frac{|E(S, \neg S)|}{d \cdot |S|}$$

Notiamo che la definizione non è simmetrica! Infatti, $xpn(S) \neq xpn(\neg S)$, ovvero scambiando S con $\neg S$ otteniamo due risultati diversi. L'espansione è simile alla sparsità, con la differenza che la prima ha come denominatore il numero di archi massimi che possono uscire da S .

Siccome xpn non è simmetrica definiamo una simmetrizzazione, detta **conduttanza**.

Definizione 12. La **conduttanza** è definita come

$$\phi(S) = \max \{xpn(S), xpn(\neg S)\} = \frac{|E(S, \neg S)|}{d \cdot \min \{|S|, |\neg S|\}}$$

La conduttanza di un grafo G è

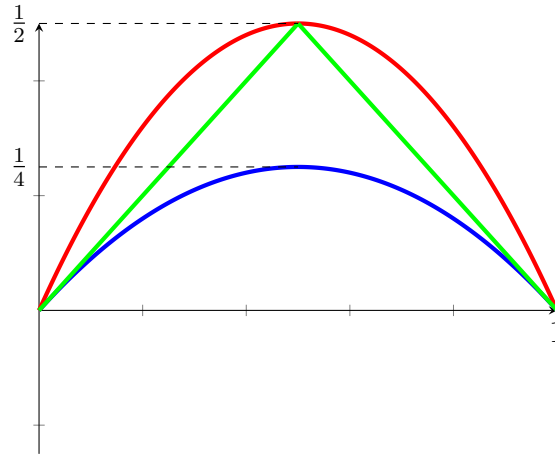
$$\phi(G) = \min_{S \subset V} \phi(S)$$

Ovvero al conduttanza minima possibile per un sottoinsieme del grafo. Che relazione c'è tra la conduttanza e la sparsità? Cominciamo con il dire che vale

$$\frac{1}{n} \min \{|S|, |\neg S|\} = \min \left\{ \frac{|S|}{n}, \frac{|\neg S|}{n} \right\}$$

Inoltre, data la partizione $S, \neg S$ per definizione sono tali che $|S| + |\neg S| = n$. Poniamo $\frac{|S|}{n} = \alpha$ e $\frac{|\neg S|}{n} = 1 - \alpha$. Sicuramente α è tale che $0 \leq \alpha \leq 1$. Vale la seguente disuguaglianza

$$\alpha(1 - \alpha) \leq \min \{\alpha, 1 - \alpha\} \leq 2\alpha(1 - \alpha)$$



1. La parabola più esterna rappresenta $2\alpha(1 - \alpha)$
2. La parabola più interna rappresenta $\alpha(1 - \alpha)$
3. In mezzo tra le due $\min \{\alpha, 1 - \alpha\}$

Quindi

$$\frac{|S||\neg S|}{n} \leq \min \left\{ \frac{|S|}{n}, \frac{|\neg S|}{n} \right\} \leq 2 \frac{|S||\neg S|}{n}$$

Ricaviamo che

$$\phi(S) \leq \frac{n}{d} \sigma(S) \leq 2\phi(S)$$

per tutti i tagli possibili. Dunque

$$\phi(G) \leq \frac{n}{d} \sigma(G) \leq 2\phi(G)$$

possiamo concludere che minimizzare la sparsità è equivalente a minimizzare la conduttanza.

10.2 Matrice laplaciana

Definiamo la **matrice laplaciana** di un grafo d -regolare. Innanzitutto, sia A la matrice di adiacenza di $G = (V, E)$ dove $A_{ij} = \mathbb{I}\{(i, j) \in E\} \in \{0, 1\}^{n \times n}$. La matrice laplaciana L è definita come

$$L = I - \frac{A}{d}$$

dove

$$\left(\frac{A}{d}\right)_{ij} = \frac{1}{d} \mathbb{I}\{(i, j) \in E\}$$

Per ogni $x \in R^n$ vale che

$$x^T L x = x^T I x - \frac{1}{d} x^T A x$$

sappiamo che $x^T I x = x^T x = \|x\|^2 = \sum_{i \in V} x_i^2$

$$\sum_{i \in V} x_i^2 - \frac{1}{d} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} x_i A_{ij} x_j$$

Sappiamo che $A_{ij} = 0$ se $(i, j) \notin E$ e attraverso qualche manipolazione algebrica otteniamo

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{d} \sum_{i \in V} \sum_{j: (i, j) \in E} x_i^2 - \frac{1}{d} \sum_{i \in V} \sum_{j: (i, j) \in E} x_i x_j \\ &= \frac{1}{d} \sum_{i \in V} \sum_{j: (i, j) \in E} (x_i^2 - x_i x_j) \end{aligned}$$

Notiamo che stiamo prendendo due volte ogni arco i, j . La prima volta con i e la seconda con j . Quindi eliminiamo la prima sommatoria, aggiungiamo x_j^2 (dato che ci spostiamo solo sugli archi adesso) e raddoppiamo $-x_i x_j$ per contarla due volte come prima:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{d} \sum_{j: (i, j) \in E} (x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{j: (i, j) \in E} (x_i - x_j)^2 \end{aligned}$$

Che è sempre non negativo. Questo vuol dire che la matrice laplaciana è positiva semidefinita.

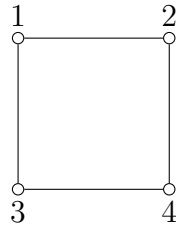
Capitolo 11

Undicesima lezione

11.1 Legame matrice laplaciana e autovalori

Nella scorsa lezione abbiamo scoperto che la matrice laplaciana L è positiva semidefinita. Questo implica che ha n autovalori tali che $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Prima di andare a lavorare sulla matrice laplaciana vediamo almeno una volta.

Esempio 17. Sia $G = (V, E)$ un grafo 2-regolare:



La matrice d'adiacenza è A è

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Da questa otteniamo la matrice laplaciana L

$$\mathbf{L} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

In generale, una matrice laplaciana è tale che la somma sulle righe è $= 0$ e la somma sulle colonne è $= 0$. Prendiamo il primo autovalore

$$\lambda_1 = \min_{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{U^T L U}{U^T U}$$

Sappiamo che $\lambda_1 \geq 0$ perché L è positiva semidefinita. Definiamo il vettore $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ovvero il vettore contenente tutti 1. Allora

$$L \cdot \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n L_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n L_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

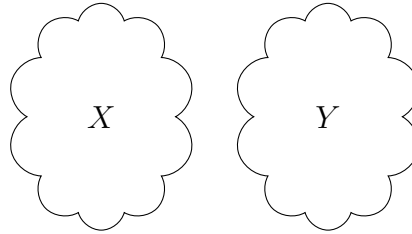
Quindi $\mathbf{1}^T L \mathbf{1} = 0$. Quindi $\lambda_1 = 0$ dato che 0 è il minimo valore possibile ottenibile ed esiste un vettore, ovvero $\mathbf{1}$ tale per cui il coefficiente di Rayleigh è 0. Per il teorema spettrale $U_1 = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{n}}$ (dove \sqrt{n} serve a normalizzarlo) è un autovettore con autovalore $\lambda_1 = 0$. Ogni altro autovettore U è tale che

$$U^T \frac{\mathbf{1}}{n} = 0 \Leftrightarrow U^T \mathbf{1} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u_i = 0$$

Concentriamoci sul secondo autovalore, λ_2 . Vale che

$$\lambda_2 = \min_{\substack{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ U^T \mathbf{1} = 0}} \frac{U^T L U}{U^T U} = \min_{\substack{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ U^T \mathbf{1} = 0}} \frac{\sum_{(i,j) \in E} (u_i - u_j)^2}{d \sum_{i \in V} u_i^2}$$

Se G ha due componenti connesse



Scegliamo $U \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$u_i = \begin{cases} \frac{1}{|X|} & \text{se } i \in X \\ \frac{1}{|Y|} & \text{se } i \in Y \end{cases}$$

Vale che $U^T \mathbf{1} = 0$. Infatti, per

$\sum_x u_i = 1$ e $\sum_y u_i = -1$, quindi $\sum_x u_i + \sum_y u_i = 0$. Inoltre $U^T L U = 0$ perché:

- Se $i, j \in X$ allora $u_i - u_j = 0$.
- Se $i, j \in Y$ allora $u_i - u_j = 0$.
- Non può esistere il caso in cui $i \in X, j \in Y$ o viceversa.

Quindi $\frac{U}{\|U\|}$ è un autovettore di G con autovalore 0. Più in generale possiamo affermare che $\lambda_k = 0$ se G ha k componenti connesse. Questo ci permette di ricavare il numero di componenti connesse di G guardando il numero di autovalori pari a 0. Vediamo cosa succede con λ_n .

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \max_{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{U^T L U}{U^T U} = \max \frac{\sum_{(i,j) \in E} (u_i - u_j)^2}{d \sum_{i \in V} u_i^2} \\ &= \max \frac{1}{d \sum u_i^2} \sum_{(i,j) \in E} (u_i^2 + u_j^2 - 2u_i u_j) \end{aligned}$$

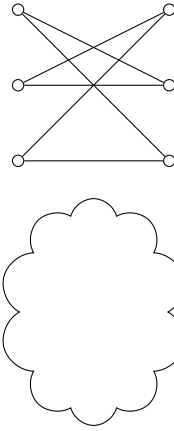
Sapendo che ogni nodo appare come estremo in d archi distinti

$$= \max \frac{1}{d \sum u_i^2} (d \sum_i u_i^2 - \sum_{(i,j) \in E} (2u_i u_j))$$

sommiamo e sottraiamo $d \sum_i u_i^2$

$$\begin{aligned} &= \max \frac{1}{d \sum u_i^2} (2d \sum_i u_i^2 - (d \sum_i u_i^2 + \sum_{(i,j) \in E} (2u_i u_j))) \\ &= \max 2 - \frac{\sum_{(i,j) \in E} (u_i + u_j)^2}{d \sum_i u_i^2} = 2 - \min \frac{\sum_{(i,j) \in E} (u_i + u_j)^2}{d \sum_i u_i^2} \end{aligned}$$

Quindi $0 \leq \lambda_n \leq 2$. Notiamo che λ_n vale 2 nel caso in cui nel grafo sia presente una componente bipartita.



Costruiamo l'autovettore $U \in \mathbb{R}^n$

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in X \\ -1 & \text{se } i \in Y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi $\sum_{(i,j) \in E} (u_i + u_j)^2 = 0$ e allora $\lambda_n = 0$.

11.2 Disuguaglianza di Cheeger

Come si lega la sparsità, o la conduttanza, allo spettro?

Definizione 13. La disuguaglianza di **Cheeger** ci dà un'approssimazione di $\phi(G)$:

$$\frac{\lambda_2}{2} \leq \phi(G) \leq \sqrt{2\lambda_2}$$

La disuguaglianza di Cheeger può essere anche scritta come

$$\frac{2\lambda_2}{2n} \leq \sigma(G) \leq \frac{2d}{n} \sqrt{2\lambda_2}$$

Dimostrazione 22. Cominciamo a dimostrare la parte sinistra, ovvero

$$\frac{\lambda_2}{2} \leq \phi(G)$$

Consideriamo $U \in \mathbb{R}^d$ tale che $U^T \mathbf{1} = 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_j (u_i - u_j)^2 &= \sum_i \sum_j (u_i^2 + u_j^2 - 2u_i u_j) \\
&= n \sum_i u_i^2 + n \sum_j u_j^2 - 2 \sum_i \sum_j u_i u_j
\end{aligned}$$

Sapendo che $(\sum_i u_i)^2 = (\sum_i u_i)(\sum_j u_j) = \sum_i \sum_j u_i u_j$ scriviamo

$$= 2n \sum_i u_i^2 - 2(\sum_i u_i)^2 = 2n \sum_i u_i^2 - 2(U^T \mathbf{1})^2$$

dato che $U^T \mathbf{1} = 0$

$$= 2n \sum_i u_i^2$$

Quindi abbiamo che

$$\lambda_2 = \min_{\substack{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ U^T \mathbf{1} = 0}} \frac{\sum_{(i,j) \in E} (u_i - u_j)^2}{d \sum_i u_i^2}$$

Se $U \neq 0$ e $U^T \mathbf{1} = 0$ allora $U \neq 0$ e $U \neq \mathbf{1}$. Inoltre usiamo il fatto che $\sum_i u_i^2 = \frac{1}{2n} \sum_{ij} (u_i - u_j)^2$

$$= \min_{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \mathbf{1}\}} \frac{\sum_{(i,j) \in E} (u_i - u_j)^2}{\frac{d}{2n} \sum_{ij} (u_i - u_j)^2}$$

Sia $\forall S \subseteq V$, $U \in \{0, 1\}^n$ tale che $u_i = 1 \leftrightarrow i \in S$ (o in altre parole $u_i = \mathbb{I}\{i \in S\}$). Allora

$$|E(S, \neq S)| = \sum_{(i,j) \in E} (u_i - u_j)^2$$

e sapendo che $u_i = u_i^2$ (dato che $1^2 = 1$ e $0^2 = 0$) possiamo dire

$$|S| |\neg S| = (\sum_i u_i^2)(n - \sum_i u_i^2) = n \sum_i u_i^2 - \sum_{i,j} u_i u_j$$

In una dimostrazione precedente avevamo trovato che $\sum_i \sum_j (u_i - u_j)^2 = 2n \sum_i u_i^2 - 2(\sum_i u_i)^2$. Il lato destro è esattamente quello che abbiamo noi moltiplicato per un fattore 2, quindi

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (u_i - u_j)^2$$

Allora

$$\sigma(G) = \min_{(S, \neg S) \text{ cut}} \frac{|E(S, \neg S)|}{|S||\neg S|} = \min_{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \mathbf{1}\}} \frac{\sum_{(i,j) \in E} (u_i - u_j)^2}{\frac{d}{2n} \sum_{i,j} (u_i - u_j)^2} \geq \frac{d}{n} \lambda_2$$

Che implica che

$$\frac{d}{n} \lambda_2 \leq \sigma(G) \leq \frac{2d}{n} \phi(G)$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\frac{\lambda_2}{2} \leq \phi(G)$$